



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

**SIMETRIA UP-DOWN DE NEUTRINOS  
ATMOSFÉRICOS E OSCILAÇÃO ENTRE  
SABORES DE NEUTRINOS**

Josefa Surek de Souza

---

Londrina – Paraná

2005

Josefa Surek de Souza

Simetria up-down de Neutrinos Atmosféricos e  
Oscilação entre Sabores de Neutrinos

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Física da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Veríssimo Manoel de Aquino.  
Coordenador: Prof. Dr. Manuel Simões Filho.

Londrina – Paraná

2005

## **Banca Examinadora**

Prof. Dr. Veríssimo Manoel de Aquino

Prof. Dr. Mauro Donizetti Tonasse

Prof. Dr. Felice Pisano

Londrina, 25 de fevereiro de 2005.

## Dedicatória

À minha família.

Ao Ismael.

Àqueles que me ajudaram a percorrer esta jornada.

## **Agradecimentos**

Agradeço a Deus pela vida.

Agradeço à minha família, meus pais e meus irmãos pelo apoio.

Agradeço ao Ismael pela compreensão e pelo carinho.

Agradeço ao Veríssimo pela orientação e dedicação.

Agradeço aos amigos pelo companheirismo.

Este trabalho foi realizado graças ao apoio financeiro e material da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) e da Universidade Estadual de Londrina.

## Sumário

1 Introdução .....	01
2 Geometria da produção de neutrinos atmosféricos .....	03
3 Fluxo de neutrinos atmosféricos .....	08
3.1 Fluxo de hádrons .....	10
3.1.1 Fluxo de núcleons .....	12
3.1.2 Fluxo de píons .....	14
3.1.3 Fluxo de káons .....	17
3.1.4 Expressão geral para o fluxo de mésons .....	24
3.2 Fluxo de múons .....	26
3.2.1 Polarização dos múons .....	28
3.3 Fluxo de neutrinos .....	31
4 Oscilação entre sabores de neutrinos .....	35
4.1 Oscilação entre dois sabores de neutrinos .....	37
4.2 Oscilação entre três sabores de neutrinos no vácuo .....	40
4.3 Oscilação entre três sabores de neutrinos na presença de matéria com densidade constante e a aproximação para duas famílias .....	45

4.4 Oscilação entre dois sabores de neutrinos na presença de matéria com densidade variável .....	51
5 Procedimentos e Resultados .....	57
5.1 Cálculo do fluxo de neutrinos não oscilantes .....	57
5.2 Cálculo da taxa de produção de neutrinos .....	61
5.3 Fluxo de neutrinos up com oscilação entre sabores .....	62
5.4 Cálculo do operador de evolução na Terra .....	64
5.5 Fluxo de neutrinos down com oscilação entre sabores .....	68
6 Discussão e Conclusão .....	70
Apêndices .....	72
Apêndice A – Descrição da Atmosfera .....	73
Apêndice B – Decaimento de Mésons .....	75
Apêndice C – Decaimento de Múons .....	79
Apêndice D – Densidade Eletrônica da Terra .....	83
Apêndice E – Operador de Evolução Infinitesimal .....	87
Referências Bibliográficas .....	91



## Lista de Figuras

Figura 2.1 – Incidência horizontal e vertical de raios cósmicos na atmosfera com relação ao observador O.	03
Figura 2.2 – Geometria de uma fonte esférica.	05
Figura 2.3 – Representação dos fluxos up e down.	07
Figura 3.1 – Decaimento de $M^+$ e $M^-$ no referencial de repouso dos mésons.	28
Figura 3.2 – Decaimento dos mésons no referencial em que o múon é produzido em repouso.	29
Figura 5.1 – Contribuição fracionária do decaimento de píons e káons ao fluxo de $\mu^+ + \mu^-$ .	59
Figura 5.2 – Fluxo de $\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$ multiplicado por $E^{2,7}$ gerados por píons, káons e múons.	60
Figura 5.3 – Produção de neutrinos muônicos em função da distância $l$ entre a fonte e o detector.	62
Figura 5.4 – Probabilidade de transição e sobrevivência para energias de 3 GeV, 4 GeV e 5 GeV considerando dois sabores de neutrinos.	66
Figura 5.5 – Probabilidade de transição e sobrevivência para oscilação em duas famílias e em famílias com aproximação para duas.	68

- Figura A.1 – Representação das quantidades – altura, profundidade e trajetória – que descrevem a atmosfera. 73
- Figura B.1 – Representação do decaimento  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ . 75
- Figura B.2 – Emissão de partículas em um elemento de ângulo sólido. 76
- Figura C.1 – Canal de decaimento  $M^- \rightarrow \mu^- \rightarrow l$  no referencial de repouso do múon. 79
- Figura C.2 – Canal de decaimento  $M^+ \rightarrow \mu^+ \rightarrow l$  no referencial de repouso do múon. 79
- Figura D.1 – Densidade eletrônica em função do raio normalizado  $r$ . 84
- Figura D.2 – Camadas da Terra e trajetória  $\overline{IF}$  descrita pela distância  $x$ . 85

## Resumo

Espera-se que o fluxo de neutrinos atmosféricos, como consequência da geometria esférica da fonte, apresente simetria up-down. Se esta simetria não é observada, uma possível explicação é considerar a existência de oscilação entre sabores de neutrinos.

O fluxo de neutrinos up e o fluxo de neutrinos down são calculados considerando a hipótese de oscilação entre sabores de neutrinos para a energia de 5 GeV em uma situação em que os neutrinos down atravessam a manta terrestre. A dependência da probabilidade de sobrevivência dos neutrinos após atravessar a Terra com a energia e com os ângulos de mistura no vácuo é analisada.

Alguns aspectos sobre o operador de evolução do sistema de neutrinos na presença de densidade de matéria variável são discutidos.

## Abstract

As a consequence of the spherical geometry of the neutrino source volume it's predicted that atmospheric neutrino flux is up-down symmetric. If this symmetry is not observed then a possible explanation is neutrino oscillation.

The up and down flux are calculated considering neutrino oscillation to energy 5 GeV for down neutrinos that cross the upper mantle. The relations between survival probability and energy and mixing angles at vacuum are analysed.

Some aspects about the evolution operator of the neutrino system at variable electron density are discussed.

# 1 Introdução

Os neutrinos atmosféricos são produzidos devido à interação de raios cósmicos com a atmosfera, sendo possível fazer uma previsão do fluxo que um eventual detector mediria. Se houver, no entanto, uma deficiência entre o fluxo esperado dos neutrinos atmosféricos e o fluxo medido pelos detectores, isto pode indicar a existência de oscilações entre sabores de neutrinos.

Para o fluxo de neutrinos atmosféricos é esperada uma simetria up-down, ou seja, que o fluxo permaneça o mesmo após uma reflexão  $\theta \leftrightarrow \pi - \theta$ , sendo  $\theta$  o ângulo zenital de detecção, como representado na figura 2.2. Os neutrinos down, contudo, atravessam uma distância maior que os neutrinos up. Sendo assim, ao considerar a possibilidade de oscilação entre sabores de neutrinos, espera-se que essa simetria deixe de ser respeitada.

A simetria up-down de fluxo de neutrinos não oscilante é consequência da geometria esférica da produção de neutrinos. O artigo de Lipari [3], discute os aspectos geométricos da produção de neutrinos, que serve de guia para análise da simetria up-down no capítulo 2.

Para analisar o fluxo de neutrinos considerando oscilação entre sabores e, conseqüentemente, a supressão no fluxo de neutrinos de um determinado sabor, é necessário que se calcule primeiro o fluxo de neutrinos sem a hipótese de oscilação. Portanto, o fluxo de partículas nos chuveiros cósmicos deve ser calculado e a partir deste, o fluxo de neutrinos. O procedimento apresentado para o cálculo de fluxo de neutrinos atmosféricos segue o adotado por Lipari [1] e Gaisser [2].

É escolhida uma faixa de energia de tal forma que os chuveiros possam ser considerados unidimensionais, os efeitos do campo magnético terrestre podem ser desprezados e a região de energia em que o fluxo de neutrinos solares é significativa possa ser evitada. No cálculo do fluxo de neutrinos atmosféricos, apresentado no capítulo 3, a polarização dos múons é levada em consideração aos moldes das referências [14] e [15].

A equação de evolução dos neutrinos, que inclui massa para estes e leva à oscilação entre sabores é apresentada no capítulo 4 para várias

situações. São discutidas oscilações entre dois sabores no vácuo e na matéria constante, entre três sabores no vácuo e na presença de matéria constante sendo feita uma aproximação para neutrinos atmosféricos que permite descrever a oscilação entre três sabores em função da oscilação entre dois sabores com a inserção de algumas modificações na última. Por fim, neste capítulo, a oscilação entre dois sabores na presença de matéria variável é discutida com a estratégia adotada por Lisi [10] e a ponte para a oscilação em três sabores é feita em paralelo com o procedimento à matéria constante.

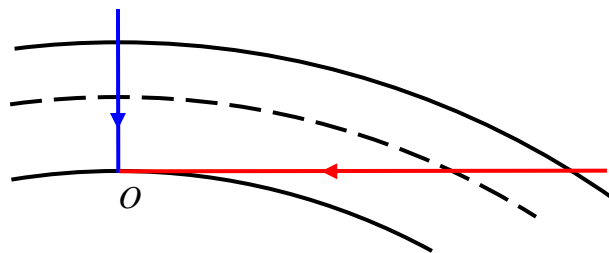
No capítulo 5 os procedimentos adotados nos cálculos são apresentados, como forma de deixar claras e explícitas as considerações feitas. Os métodos descritos no capítulo 3 para o cálculo do fluxo de neutrinos e no capítulo 4 para a consideração de oscilação entre sabores são discutidos neste capítulo. A forma de calcular o operador de evolução de neutrinos no interior da Terra também é apresentada. São calculados os fluxos de neutrinos up e down, sendo os resultados apresentados neste capítulo. A discussão destes resultados é realizada no capítulo 6.

Para o cálculo do fluxo de neutrinos atmosféricos e da oscilação de neutrinos no interior da Terra são necessários modelos que descrevem a atmosfera e a densidade eletrônica da Terra respectivamente. Os dados relevantes dos modelos utilizados são descritos na forma de apêndice.

## 2 Geometria da produção de neutrinos atmosféricos

Ao se analisar a produção de neutrinos atmosféricos alguns fatores devem ser considerados por influenciarem a forma como esta produção se dá. Dentre eles destacam-se a isotropia dos raios cósmicos primários, os efeitos do campo magnético terrestre sobre os chuveis cósmicos, a dependência da profundidade  $t$  com o ângulo zenital  $\theta$  e a geometria esférica da fonte de neutrinos como fatores que determinam a distribuição angular da produção de neutrinos.

Como neutrinos atmosféricos são produzidos devido à interação de raios cósmicos primários com a atmosfera, os efeitos sofridos por estes são refletidos na distribuição dos neutrinos. A profundidade  $t$ , descrita com detalhes no apêndice A, determina a quantidade de matéria que os raios cósmicos atravessam ao penetrarem na atmosfera, sendo maior para aqueles que incidem horizontalmente na direção que passa por um ponto de observação  $O$  na superfície terrestre do que para aqueles que incidem verticalmente, sendo assim, o fluxo de neutrinos horizontal é maior que o vertical.



*Figura 2.1: Incidência horizontal e vertical de raios cósmicos na atmosfera com relação ao observador  $O$ .*

A fonte de neutrinos é com boa aproximação uma casca esférica espessa, a atmosfera, estando o ponto de observação localizado em seu interior muito próximo ao raio interno, ou seja, a uma distância  $R_{\odot}$  (raio da Terra) de seu centro. Para entender como esta geometria esférica afeta a distribuição angular do fluxo de neutrinos em um dado ponto da superfície é instrutivo analisar, como feito por Paolo Lipari [3], dois problemas simples e bem conhecidos que são análogos aos casos limites da produção de neutrinos.

O primeiro problema consiste em considerar o fluxo de energia por unidade de ângulo sólido medido por um observador dentro de uma fina camada esférica de estrelas de raio  $R_s$  emitindo energia isotropicamente. Define-se  $L_0$  (erg/s) como a luminosidade média de cada estrela,  $n$  ( $\text{cm}^{-2}$ ) como a densidade superficial de estrelas e  $R_A$  como a distância do observador ao centro da camada esférica.

Para um ângulo sólido  $d\Omega$ , somente estrelas contidas no elemento de superfície  $dA$  limitado por  $d\Omega$  contribuem para o fluxo de energia. Como a emissão é isotrópica, cada estrela contribui com um fluxo de  $\frac{L_0}{4\pi l^2}$ , onde  $l$  é a distância entre o observador e a fonte na direção  $\theta$  como representado na figura 2.2. Portanto, o fluxo de energia é dado por

$$dF = \frac{L_0}{4\pi l^2} n dA. \quad (2.1)$$

O ângulo sólido está vinculado ao elemento de superfície  $dA'$  como

$$dA' = l^2 d\Omega, \quad (2.2)$$

sendo que os elementos de superfície  $dA$  e  $dA'$  relacionam-se na forma

$$dA = \frac{dA'}{\cos\theta_e}, \quad (2.3)$$

onde  $\theta_e$  é o ângulo de emissão de energia. Estas quantidades estão representadas, também, na figura 2.2.

Portanto, o fluxo de energia por unidade de ângulo sólido ( $\text{erg}/\text{cm}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{sr}$ ) é dado pela relação

$$\frac{dF}{d\Omega} = n \frac{L_0}{4\pi} \frac{1}{\cos\theta_e}. \quad (2.4)$$



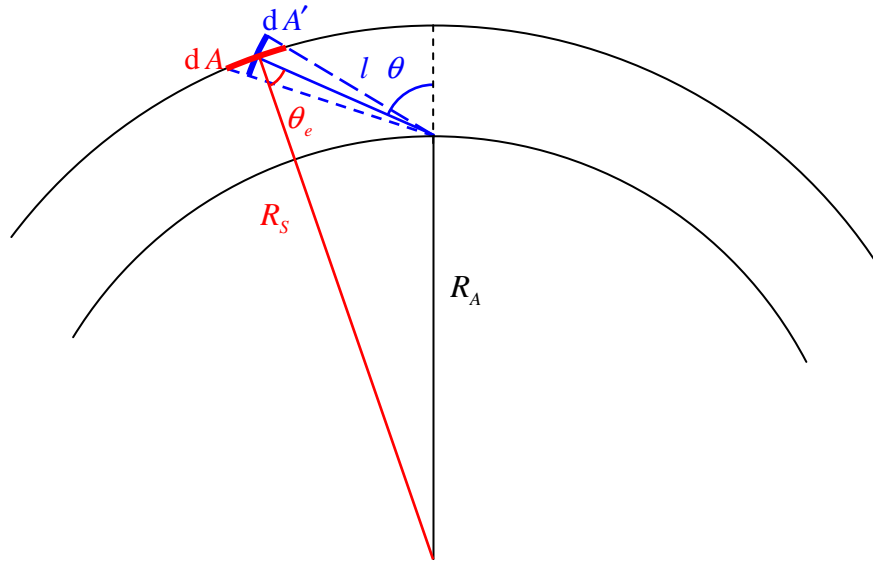


Figura 2.2: Geometria de uma fonte esférica com a representação dos elementos de área  $dA$  e  $dA'$ , dos raios  $R_A$  e  $R_S$  e da fonte e dos ângulos de emissão e detecção.

A expressão para o cosseno do ângulo de emissão é obtida da geometria do problema

$$\cos \theta_e = \sqrt{1 - \frac{R_A^2}{R_S^2} (1 - \cos^2 \theta)}. \quad (2.5)$$

Sendo assim, o fluxo de energia apresenta uma dependência com o ângulo  $\theta$  e atinge o valor máximo para  $\theta$  igual a  $90^\circ$ .

A segunda situação trata de um observador localizado dentro de uma cavidade esférica de um corpo negro. A superfície de um corpo negro emite energia por unidade de área e unidade de ângulo sólido a uma taxa

$$\frac{dL_{bb}}{d\Omega_e} = \sigma T^4 \frac{\cos \theta_e}{\pi}. \quad (2.6)$$

O fluxo de energia na direção  $\Omega$  do observador é calculado como

$$dF_{bb} = dA \frac{dL_{bb}}{d\Omega_e} \frac{1}{l^2}, \quad (2.7)$$

sendo que das relações (2.2), (2.3) e (2.6)

$$dF_{bb} = \left( \frac{l^2 d\Omega}{\cos\theta_e} \right) \left( \sigma T^4 \frac{\cos\theta_e}{\pi} \right) \frac{1}{l^2} \quad (2.8)$$

resultando em

$$dF_{bb} = \frac{\sigma T^4}{\pi} d\Omega. \quad (2.9)$$

Neste caso, a taxa do fluxo de energia por unidade de ângulo sólido é independente da distância entre o observador e a fonte, como também não há dependência desta quantidade com o ângulo zenital  $\theta$ .

Um fato importante a ser observado é que os fluxos de energia obtidos para ambos os casos, equações (2.7) e (2.9), permanecem os mesmos ao efetuar a troca  $\theta \rightarrow \pi - \theta$ .

A primeira situação é similar a neutrinos atmosféricos de baixa energia produzidos por mésons que decaem em repouso. Neste caso, a emissão de neutrinos é isotrópica, no entanto, efeitos geomagnéticos devem ser considerados o que leva a complicações no cálculo do fluxo de neutrinos.

O segundo caso corresponde a neutrinos de altas energias para os quais os chuveiros podem ser aproximados como unidimensionais. A isotropia do fluxo de raios cósmicos primários que atravessa um elemento de área  $dS$  em uma direção que faz um ângulo  $\theta$  com a normal ao elemento de superfície determina que este é proporcional à componente de  $dS$  nesta direção

$$d\phi = \phi_0 \cos\theta d\Omega. \quad (2.10)$$

Esta relação corresponde à expressão para a lei de emissão de um corpo negro, o que leva a uma relação para o fluxo de neutrinos por unidade de ângulo sólido medido pelo observador que não depende da direção com que os raios cósmicos incidem na atmosfera no que se refere à geometria da fonte. Para este caso, os efeitos do campo magnético da Terra sobre o chuveiro podem ser desprezados.

A absorção de neutrinos pela Terra é negligenciável, o que determina que um detector localizado em um ponto da superfície terrestre recebe neutrinos de todas as direções. Como a geometria esférica da fonte leva a um fluxo que apresenta simetria sob a troca  $\theta \rightarrow \pi - \theta$  (figura 2.3), espera-se que o fluxo de neutrinos seja o mesmo para incidências up e down, ou seja, apresente simetria up-down.

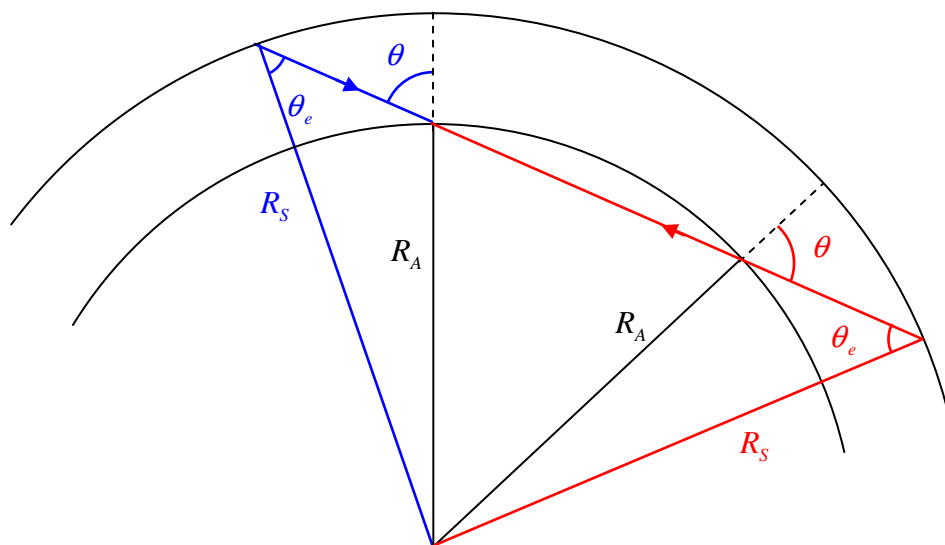


Figura 2.3: Representação do fluxo up (azul) e down (vermelho).

Com a hipótese de oscilação entre sabores de neutrinos, os diferentes percursos percorridos por neutrinos up e down e o efeito MSW sobre os neutrinos que atravessam a crosta terrestre são fatores que modificam a situação podendo levar a uma não observação da simetria up-down. Sendo assim, medidas destes fluxos podem ser utilizadas para auxiliar na determinação de parâmetros físicos que descrevem a oscilação entre sabores. Estes parâmetros são os ângulos de mistura e as diferenças de massas quadráticas.

### 3 Fluxo de neutrinos atmosféricos

Neutrinos atmosféricos são produzidos em cascatas iniciadas pela interação de raios cósmicos com a atmosfera da Terra. As partículas primárias dos raios cósmicos (núcleons) interagem com a atmosfera produzindo, principalmente, píons e káons. Os neutrinos e antineutrinos eletrônicos e muônicos são gerados diretamente do decaimento de píons e káons e do subsequente decaimento de múons.

O raio cósmico primário é composto aproximadamente por 80% de prótons, 15% de partículas  $\alpha$  e os 5% restantes por núcleos mais pesados [4]. Este fluxo pode ser aproximado como sendo constituído de prótons e nêutrons.

Os canais de produção de neutrinos são os seguintes:

$$K^{\pm} \rightarrow \pi^0 + e^{\pm} + \nu_e(\bar{\nu}_e), \quad (3.1)$$

$$K_L \rightarrow \pi^{\pm} + e^{\mp} + \nu_e(\bar{\nu}_e), \quad (3.2)$$

$$K^{\pm} \rightarrow \mu^{\pm} + \nu_{\mu}(\bar{\nu}_{\mu}), \quad (3.3)$$

$$K_L \rightarrow \mu^{\mp} + \pi^{\pm} + \nu_{\mu}(\bar{\nu}_{\mu}), \quad (3.4)$$

$$\pi^{\pm} \rightarrow \mu^{\pm} + \nu_{\mu}(\bar{\nu}_{\mu}), \quad (3.5)$$

$$\mu^{\pm} \rightarrow e^{\pm} + \nu_e(\bar{\nu}_e) + \bar{\nu}_{\mu}(\nu_{\mu}). \quad (3.6)$$

O fluxo de neutrinos em cada ponto da atmosfera é calculado a partir dos fluxos de píons, káons e múons. E o fluxo destes está relacionado ao fluxo primário. Portanto, é necessário que se saiba como o fluxo primário evolui ao entrar na atmosfera para, então, obter a evolução do fluxo de mésons e de múons produzidos por mésons e, finalmente, calcular o fluxo de neutrinos em um ponto da atmosfera gerado pelo decaimento de mésons e múons.

Para calcular os fluxos de interesse, os chuveiros são considerados como unidimensionais, ou seja, as partículas produzidas têm a mesma direção do raio cósmico primário incidente. Esta aproximação é válida para neutrinos com energia maior que alguns GeVs.

A propagação das partículas através da atmosfera depende das propriedades das partículas e de como elas interagem, além da estrutura da atmosfera. Esta propagação é descrita pelas equações de evolução ou transporte em função da profundidade inclinada  $t$  que é a integral da densidade atmosférica ao longo da trajetória percorrida pela partícula incidente. O modelo da atmosfera e a profundidade são descritos no apêndice A.

As equações de evolução devem considerar, de forma geral, a diminuição do fluxo pela interação com a atmosfera e pelo decaimento das partículas. Como a interação e o decaimento de uma determinada partícula podem gerar outras partículas, além dos dois termos já citados, as equações de evolução devem levar em conta o aumento do fluxo pela produção destas partículas devido ao decaimento e interação de outras partículas. A contribuição dos decaimentos semi-leptônicos (3.1), (3.2) e (3.4) ao fluxo de múons e neutrinos não é considerada por ser desprezível para a faixa de energia analisada.

A probabilidade de uma partícula interagir ao atravessar um elemento infinitesimal da atmosfera é  $dt/\lambda$ , onde  $\lambda$  é o comprimento de interação da partícula no ar. Sendo assim, há uma diminuição do fluxo desta partícula ao atravessar  $\partial t$  devido a interação que é descrita por

$$\partial\phi = -\frac{\partial t}{\lambda}\phi. \quad (3.7)$$

A diminuição do fluxo de uma determinada partícula por decaimento ao atravessar um elemento da atmosfera é dada pela relação

$$\partial\phi = -\frac{\partial t}{\lambda^{dec}}\phi, \quad (3.8)$$

sendo que o comprimento de decaimento desta partícula é dado em função de  $m_j$  e  $\tau_j$ , sua massa e sua vida média e de  $\rho(t, \theta)$ , a densidade do ar no ponto

$$\lambda_j^{dec} = c\beta\tau_j \frac{E}{m_j} \rho(t, \theta). \quad (3.9)$$

O fluxo aumenta por  $\partial t$  pela produção de partículas  $j$  devido a interação ou decaimento de partículas  $i$  na forma

$$\partial\phi_j = \partial t \sum_i S(i \rightarrow j). \quad (3.10)$$

Os termos de fonte  $S(i \rightarrow j)$  para interação e decaimento são definidos em cada caso mais adiante.

### 3.1 Fluxo de hádrons

No cálculo de fluxo de hádrons a perda de energia é desconsiderada, pois interação ou decaimento ocorrem antes de haver uma perda de energia significativa. Dessa forma, o fluxo de um hadron  $j$  evolui com a profundidade  $t$ , de forma geral, segundo a equação:

$$\frac{\partial\phi_j}{\partial t} = -\frac{\phi_j}{\lambda_j} - \frac{\phi_j}{\lambda_j^{dec}} + \sum_k S(k \rightarrow j). \quad (3.11)$$

O primeiro e o segundo termos levam em conta a diminuição do fluxo devido à interação hadrônica e ao decaimento respectivamente, sendo que  $\lambda_j$  é o comprimento de interação no ar e  $\lambda_j^{dec}$  é o comprimento de decaimento. Os hádrons, para a faixa de energia considerada, não são produzidos em chuviros de raios cósmicos pelo decaimento de outras partículas, portanto, os termos de fonte correspondem à produção de partícula  $j$  por interação forte de partículas do tipo  $k$ , que são escritos como:

$$S(k \rightarrow j; E, t) = \int_E^\infty dE_k \frac{\phi_k(E_k, t)}{\lambda_k} \frac{dn_{k \rightarrow j}(E_j; E_k)}{dE_j}. \quad (3.12)$$

Supondo que o fluxo da partícula  $k$  possa ser fatorizado na forma:

$\phi_k(E, t) = k(t)E^{-\alpha}$ ; que o comprimento de interação  $\lambda_k$  seja independente da energia e que a seção de choque diferencial seja um *Feynman scaling*, ou seja, possa ser escrita como  $\frac{dn_{k \rightarrow j}(E_j; E_k)}{dE_j} = \frac{1}{E_k} \frac{dn_{k \rightarrow j}(E_j/E_k)}{d(E_j/E_k)}$ , o termo de fonte devido à interação, definindo  $x = E_j/E_k$ , pode ser reescrito como

$$S(k \rightarrow j; E, t) = E^{-\alpha} \frac{\phi_k(t)}{\lambda_k} Z_{kj}, \quad (3.13)$$

sendo que

$$Z_{kj} = \int_0^1 dx x^{\alpha-1} \frac{dn_{k \rightarrow j}(x)}{dx}. \quad (3.14)$$

Nos chuveiros estão presentes os hádrons  $p$ ,  $n$ ,  $\pi^\pm$ ,  $\pi^0$ ,  $K^\pm$ ,  $K_L$  e  $K_S$ . O  $\pi^0$  decai rapidamente em dois fótons, e como a seção de choque hadrônica dos fótons é pequena, eles se desacoplam imediatamente da evolução da componente hadrônica. O  $K_S$  possui um comprimento de decaimento muito pequeno e pode ser levado em conta como uma contribuição para o fluxo de píons.

Portanto, sete equações diferenciais acopladas deveriam ser resolvidas a princípio. No entanto, há uma significativa simplificação se são feitas aproximações de que píons e káons não contribuem para os fluxos de núcleons e de que káons não contribuem para o fluxo de píons.

A contribuição de mésons para os fluxos de núcleons é certamente pequena, mas a suposição de que káons não contribuem no fluxo de píons é incorreta. Contudo, o fluxo de káons é dez vezes menor que o fluxo de píons, sendo assim, esta contribuição não é muito significativa para o fluxo de píons e a aproximação torna-se razoável. Portanto, os seguintes termos de fonte são adotados como nulos:

$$S(\pi^\pm \rightarrow p, n) = 0, \quad (3.15)$$

$$S(K \rightarrow p, n, \pi^\pm) = 0. \quad (3.16)$$

Sob estas aproximações, o fluxo de núcleons se desenvolve independentemente dos fluxos de mésons e a evolução dos fluxos de píons se desacopla dos fluxos de káons. O fluxo de píons contém, então, os termos de interação e decaimento, os termos de fonte devido à interação de núcleons e os termos de regeneração.

Já o fluxo de káons compreende os termos de interação e decaimento, os termos de fonte referentes à interação de núcleons e píons com a atmosfera e os termos de regeneração.

Assume-se que o fluxo primário é composto de prótons e nêutrons com um espectro de lei de potência, portanto, as condições iniciais do conjunto de equações diferenciais são as seguintes:

$$\phi_p(E, t = 0) = p_0 E^{-\alpha}, \quad (3.16)$$

$$\phi_n(E, t = 0) = n_0 E^{-\alpha}, \quad (3.17)$$

onde  $n_0 = \delta_0 p_0$ .

### 3.1.1 Fluxo de núcleons

As equações de evolução dos fluxos de prótons e nêutrons não possuem o termo de decaimento, pois prótons não decaem e o comprimento de decaimento do nêutron é muito grande. Sendo assim, a evolução destes fluxos pode ser escrita na forma

$$\frac{\partial \phi_p}{\partial t} = -\frac{\phi_p}{\lambda_p} + S(p \rightarrow p) + S(n \rightarrow p), \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \phi_n}{\partial t} = -\frac{\phi_n}{\lambda_n} + S(p \rightarrow n) + S(n \rightarrow n). \quad (3.19)$$

Com a consideração de que  $\phi_p(E, t) = p(t)E^{-\alpha}$  e  $\phi_n(E, t) = n(t)E^{-\alpha}$ , substituindo os termos de fonte, tem-se as relações



$$E^{-\alpha} \frac{dp(t)}{dt} = -E^{-\alpha} \frac{p(t)}{\lambda_p} + E^{-\alpha} \frac{p(t)}{\lambda_p} Z_{pp} + E^{-\alpha} \frac{n(t)}{\lambda_n} Z_{np}, \quad (3.19)$$

$$E^{-\alpha} \frac{dn(t)}{dt} = -E^{-\alpha} \frac{n(t)}{\lambda_n} + E^{-\alpha} \frac{p(t)}{\lambda_p} Z_{pn} + E^{-\alpha} \frac{n(t)}{\lambda_n} Z_{nn}. \quad (3.20)$$

Portanto, utilizando a consequência da simetria de isospin  $Z_{pp} = Z_{nn}$  e  $Z_{pn} = Z_{np}$  e com a aproximação de que  $\lambda_p = \lambda_n$ , as funções  $p(t)$  e  $n(t)$  satisfazem às duas equações diferenciais acopladas:

$$\frac{dp(t)}{dt} = -\frac{p(t)}{\lambda_p} + \frac{p(t)}{\lambda_p} Z_{pp} + \frac{n(t)}{\lambda_p} Z_{pn}, \quad (3.21)$$

$$\frac{dn(t)}{dt} = -\frac{n(t)}{\lambda_p} + \frac{p(t)}{\lambda_p} Z_{pn} + \frac{n(t)}{\lambda_p} Z_{pp}. \quad (3.22)$$

Se as duas equações anteriores são somadas e subtraídas, obtém-se as relações

$$\frac{\partial}{\partial t} (p(t) + n(t)) = -(p(t) + n(t)) \frac{1 - Z_{pp} - Z_{pn}}{\lambda_p}, \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (p(t) - n(t)) = -(p(t) - n(t)) \frac{1 - Z_{pp} + Z_{pn}}{\lambda_p}. \quad (3.24)$$

cujas soluções são

$$p(t) + n(t) = (p_0 + n_0) \exp\left(\frac{-t}{\Lambda_1}\right), \quad (3.25)$$

$$p(t) - n(t) = (p_0 - n_0) \exp\left(\frac{-t}{\Lambda_2}\right), \quad (3.26)$$

onde

$$\Lambda_1 = \frac{\lambda_p}{1 - Z_{pp} - Z_{pn}}, \quad (3.27)$$

$$\Lambda_2 = \frac{\lambda_p}{1 - Z_{pp} + Z_{pn}}. \quad (3.28)$$

### 3.1.2 Fluxo de píons

Os fluxos de píons evoluem segundo as relações

$$\frac{\partial \phi_{\pi^+}}{\partial t} = -\frac{\phi_{\pi^+}}{\lambda_{\pi}} - \frac{\phi_{\pi^+}}{\lambda_{\pi}^{dec}} + S(p \rightarrow \pi^+) + S(n \rightarrow \pi^+) + S(\pi^+ \rightarrow \pi^+) + S(\pi^- \rightarrow \pi^+), \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \phi_{\pi^-}}{\partial t} = -\frac{\phi_{\pi^-}}{\lambda_{\pi}} - \frac{\phi_{\pi^-}}{\lambda_{\pi}^{dec}} + S(p \rightarrow \pi^-) + S(n \rightarrow \pi^-) + S(\pi^+ \rightarrow \pi^-) + S(\pi^- \rightarrow \pi^-). \quad (3.30)$$

As soluções para estas equações diferenciais, com os fluxos de núcleons já calculados, são facilmente encontradas se os limites de altas e baixas energias são tomados, pois alguns termos podem ser negligenciados em cada um destes limites.

#### *Limite de Baixa Energia*

Como o comprimento de decaimento é diretamente proporcional à energia, no limite de baixas energias os píons decaem rapidamente. Portanto, o termo de decaimento dos píons é predominante com relação ao termo de interação, tornando-se, este, desprezível. Conseqüentemente, para este limite, os termos de regeneração também são desconsiderados. Sendo assim, as equações diferenciais se desacoplam

$$0 = -\frac{\phi_{\pi^+}}{\lambda_{\pi}^{dec}} + S(p \rightarrow \pi^+) + S(n \rightarrow \pi^+), \quad (3.31)$$

$$0 = -\frac{\phi_{\pi^-}}{\lambda_{\pi}^{dec}} + S(p \rightarrow \pi^-) + S(n \rightarrow \pi^-), \quad (3.32)$$

e, substituindo os termos de fonte, são reescritas na forma

$$0 = -\frac{\phi_{\pi^+}}{\lambda_{\pi}^{dec}} + E^{-\alpha} \frac{p(t)}{\lambda_p} Z_{p\pi^+} + E^{-\alpha} \frac{n(t)}{\lambda_n} Z_{n\pi^+}, \quad (3.33)$$

$$0 = -\frac{\phi_{\pi^-}}{\lambda_{\pi}^{dec}} + E^{-\alpha} \frac{p(t)}{\lambda_p} Z_{p\pi^-} + E^{-\alpha} \frac{n(t)}{\lambda_n} Z_{n\pi^-}, \quad (3.34)$$

sendo as soluções dadas por

$$\phi_{\pi^+}^L(E, t) = \lambda_{\pi}^{dec}(E, t, \theta) \left( \frac{p(t)}{\lambda_p} Z_{p\pi^+} + \frac{n(t)}{\lambda_n} Z_{n\pi^+} \right) E^{-\alpha}, \quad (3.35)$$

$$\phi_{\pi^-}^L(E, t) = \lambda_{\pi}^{dec}(E, t, \theta) \left( \frac{p(t)}{\lambda_p} Z_{p\pi^-} + \frac{n(t)}{\lambda_n} Z_{n\pi^-} \right) E^{-\alpha}, \quad (3.36)$$

onde o índice  $L$  para os fluxos explicita que estas equações são soluções no limite de baixas energias.

### *Limite de alta energia*

Já para energias suficientemente altas, é o termo de decaimento que se torna desprezível e as relações que descrevem a evolução dos fluxos de píons, para esta faixa de energia, são

$$\frac{\partial \phi_{\pi^+}}{\partial t} = -\frac{\phi_{\pi^+}}{\lambda_{\pi}} + S(p \rightarrow \pi^+) + S(n \rightarrow \pi^+) + S(\pi^+ \rightarrow \pi^+) + S(\pi^- \rightarrow \pi^+), \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial \phi_{\pi^-}}{\partial t} = -\frac{\phi_{\pi^-}}{\lambda_{\pi}} + S(p \rightarrow \pi^-) + S(n \rightarrow \pi^-) + S(\pi^+ \rightarrow \pi^-) + S(\pi^- \rightarrow \pi^-), \quad (3.38)$$

substituindo os termos de fonte

$$\frac{\partial \phi_{\pi^+}}{\partial t} = -\frac{\phi_{\pi^+}}{\lambda_{\pi}} + E^{-\alpha} \frac{p(t)}{\lambda_p} Z_{p\pi^+} + E^{-\alpha} \frac{n(t)}{\lambda_n} Z_{n\pi^+} + \frac{\phi_{\pi^+}}{\lambda_{\pi}} Z_{\pi^+\pi^+} + \frac{\phi_{\pi^-}}{\lambda_{\pi}} Z_{\pi^-\pi^+}, \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial \phi_{\pi^-}}{\partial t} = -\frac{\phi_{\pi^-}}{\lambda_{\pi}} + E^{-\alpha} \frac{p(t)}{\lambda_p} Z_{p\pi^-} + E^{-\alpha} \frac{n(t)}{\lambda_n} Z_{n\pi^-} + \frac{\phi_{\pi^+}}{\lambda_{\pi}} Z_{\pi^+\pi^-} + \frac{\phi_{\pi^-}}{\lambda_{\pi}} Z_{\pi^-\pi^-}. \quad (3.40)$$

Com a aproximação já utilizada de que  $\lambda_p = \lambda_n$ , considerando que a simetria de isospin leva às relações:  $Z_{p\pi^+} = Z_{n\pi^-}$ ,  $Z_{p\pi^-} = Z_{n\pi^+}$ ,  $Z_{\pi^+\pi^+} = Z_{\pi^-\pi^-}$  e  $Z_{\pi^+\pi^-} = Z_{\pi^-\pi^+}$ , e rearranjando os termos, as equações anteriores tomam a forma:

$$\frac{\partial \phi_{\pi^+}}{\partial t} = -\frac{\phi_{\pi^+}}{\lambda_{\pi}}(1 - Z_{\pi^+\pi^+}) + \frac{\phi_{\pi^-}}{\lambda_{\pi}}Z_{\pi^+\pi^-} + \frac{E^{-\alpha}}{\lambda_p}(p(t)Z_{p\pi^+} + n(t)Z_{p\pi^-}), \quad (3.41)$$

$$\frac{\partial \phi_{\pi^-}}{\partial t} = -\frac{\phi_{\pi^-}}{\lambda_{\pi}}(1 - Z_{\pi^+\pi^+}) + \frac{\phi_{\pi^+}}{\lambda_{\pi}}Z_{\pi^+\pi^-} + \frac{E^{-\alpha}}{\lambda_p}(p(t)Z_{p\pi^-} + n(t)Z_{p\pi^+}). \quad (3.42)$$

Somando e subtraindo estas duas equações, são obtidas as duas relações

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_{\pi^+} + \phi_{\pi^-}) = -\frac{\phi_{\pi^+} + \phi_{\pi^-}}{\Lambda_{\pi 1}} + \frac{E^{-\alpha}}{\lambda_p}(p(t) + n(t))(Z_{p\pi^+} + Z_{p\pi^-}), \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_{\pi^+} - \phi_{\pi^-}) = -\frac{\phi_{\pi^+} - \phi_{\pi^-}}{\Lambda_{\pi 2}} + \frac{E^{-\alpha}}{\lambda_p}(p(t) - n(t))(Z_{p\pi^+} - Z_{p\pi^-}), \quad (3.44)$$

sendo que

$$\Lambda_{\pi 1} = \frac{\lambda_{\pi}}{1 - Z_{\pi^+\pi^+} - Z_{\pi^+\pi^-}}, \quad (3.45)$$

$$\Lambda_{\pi 2} = \frac{\lambda_{\pi}}{1 - Z_{\pi^+\pi^+} + Z_{\pi^+\pi^-}}. \quad (3.46)$$

Os dois termos, em cada uma das equações diferenciais anteriores, são exponenciais, sendo assim, as soluções terão a forma

$$(\phi_{\pi^+} + \phi_{\pi^-}) = A_1 \exp\frac{-t}{\Lambda_{\pi 1}} + B_1 \exp\frac{-t}{\Lambda_1}, \quad (3.47)$$

$$(\phi_{\pi^+} - \phi_{\pi^-}) = A_2 \exp\frac{-t}{\Lambda_{\pi 2}} + B_2 \exp\frac{-t}{\Lambda_2}. \quad (3.48)$$

Da condição inicial de que o fluxo primário seja formado somente por núcleons e, portanto  $\pi^+(t=0) = 0$  e  $\pi^-(t=0) = 0$ , obtém-se as relações  $B_1 = -A_1$  e  $B_2 = -A_2$ . Utilizando as soluções das funções  $p(t)$  e  $n(t)$  calculadas anteriormente, basta substituir as equações (3.47) e (3.48) em (3.43) e (3.44) para obter as seguintes expressões de  $A_1$  e  $A_2$

$$A_1 = E^{-\alpha} \frac{P_0 + n_0}{\lambda_p} \frac{\Lambda_{\pi^+} \Lambda_1}{\Lambda_{\pi^+} - \Lambda_1} \left( Z_{p\pi^+} + Z_{p\pi^-} \right), \quad (3.49)$$

$$A_2 = E^{-\alpha} \frac{P_0 - n_0}{\lambda_p} \frac{\Lambda_{\pi^+} \Lambda_2}{\Lambda_{\pi^+} - \Lambda_2} \left( Z_{p\pi^+} - Z_{p\pi^-} \right). \quad (3.50)$$

Desta forma, na região de energias altas, tem-se as seguintes relações para o fluxo de píons

$$\phi_{\pi^+}^H(E, t) + \phi_{\pi^-}^H(E, t) = \frac{P_0 + n_0}{\lambda_p} \frac{\Lambda_{\pi^+} \Lambda_1}{\Lambda_{\pi^+} - \Lambda_1} \left( Z_{p\pi^+} + Z_{p\pi^-} \right) \left( \exp \frac{-t}{\Lambda_{\pi^+}} - \exp \frac{-t}{\Lambda_1} \right) E^{-\alpha}, \quad (3.51)$$

$$\phi_{\pi^+}^H(E, t) - \phi_{\pi^-}^H(E, t) = \frac{P_0 - n_0}{\lambda_p} \frac{\Lambda_{\pi^+} \Lambda_2}{\Lambda_{\pi^+} - \Lambda_2} \left( Z_{p\pi^+} - Z_{p\pi^-} \right) \left( \exp \frac{-t}{\Lambda_{\pi^+}} - \exp \frac{-t}{\Lambda_2} \right) E^{-\alpha}. \quad (3.52)$$

O índice  $H$  nos fluxos indica que estas soluções são válidas para altas energias.

### 3.1.3 Fluxo de káons

As equações de evolução dos fluxos dos káons  $K^+$ ,  $K^-$  e  $K_L$  são dadas pelas relações

$$\frac{\partial \phi_{K^+}}{\partial t} = -\frac{\phi_{K^+}}{\lambda_{K^+}} - \frac{\phi_{K^+}}{\lambda_{K^+}^{dec}} + S(p \rightarrow K^+) + S(n \rightarrow K^+) + S(\pi^+ \rightarrow K^+) + S(\pi^- \rightarrow K^+) + S(K^+ \rightarrow K^+) + S(K^- \rightarrow K^+) + S(K_L \rightarrow K^+), \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial \phi_{K^-}}{\partial t} = -\frac{\phi_{K^-}}{\lambda_{K^-}} - \frac{\phi_{K^-}}{\lambda_{K^-}^{dec}} + S(p \rightarrow K^-) + S(n \rightarrow K^-) + S(\pi^+ \rightarrow K^-) + S(\pi^- \rightarrow K^-) + S(K^+ \rightarrow K^-) + S(K^- \rightarrow K^-) + S(K_L \rightarrow K^-), \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial \phi_{K_L}}{\partial t} = -\frac{\phi_{K_L}}{\lambda_{K_L}} - \frac{\phi_{K_L}}{\lambda_{K_L}^{dec}} + S(p \rightarrow K_L) + S(n \rightarrow K_L) + S(\pi^+ \rightarrow K_L) + S(\pi^- \rightarrow K_L) + S(K^+ \rightarrow K_L) + S(K^- \rightarrow K_L) + S(K_L \rightarrow K_L). \quad (3.55)$$

Os fluxos de káons são obtidos utilizando os fluxos de núcleons e píons já calculados. Assim como no cálculo dos fluxos de píons, as soluções são calculadas nos limites de altas e baixas energias.

### *Limite de baixa energia*

O termo de interação para pequenos valores de energia pode ser desconsiderado e conseqüentemente os termos de regeneração, pois os káons decaem muito rapidamente para este limite. Como a interação dos píons também pode ser desprezada neste caso, os káons são produzidos apenas por núcleons, e decaindo muito rapidamente as evoluções dos fluxos são descritas pelas relações

$$0 = -\frac{\phi_{K^+}}{\lambda_K^{dec}} + S(p \rightarrow K^+) + S(n \rightarrow K^+), \quad (3.56)$$

$$0 = -\frac{\phi_{K^-}}{\lambda_k^{dec}} + S(p \rightarrow K^-) + S(n \rightarrow K^-), \quad (3.57)$$

$$0 = -\frac{\phi_{K_L}}{\lambda_k^{dec}} + S(p \rightarrow K_L) + S(n \rightarrow K_L). \quad (3.58)$$

Substituindo os termos de fonte são obtidas as expressões

$$0 = -\frac{\phi_{K^+}}{\lambda_K^{dec}} + E^{-\alpha} \frac{p(t)}{\lambda_p} Z_{pK^+} + E^{-\alpha} \frac{n(t)}{\lambda_n} Z_{nK^+}, \quad (3.59)$$

$$0 = -\frac{\phi_{K^-}}{\lambda_k^{dec}} + E^{-\alpha} \frac{p(t)}{\lambda_p} Z_{pK^-} + E^{-\alpha} \frac{n(t)}{\lambda_n} Z_{nK^-}, \quad (3.60)$$

$$0 = -\frac{\phi_{K_L}}{\lambda_k^{dec}} + E^{-\alpha} \frac{p(t)}{\lambda_p} Z_{pK_L} + E^{-\alpha} \frac{n(t)}{\lambda_n} Z_{nK_L}, \quad (3.70)$$

com soluções para os fluxos de káons dadas pelas relações

$$\phi_{K^+}^L(E, t) = E^{-\alpha} \left( \frac{p(t)}{\lambda_p} Z_{pK^+} + \frac{n(t)}{\lambda_n} Z_{nK^+} \right) \lambda_K^{dec}(E, t, \theta), \quad (3.71)$$

$$\phi_{K^-}^L(E,t) = E^{-\alpha} \left( \frac{p(t)}{\lambda_p} Z_{pK^-} + \frac{n(t)}{\lambda_n} Z_{nK^-} \right) \lambda_k^{dec}(E,t,\theta), \quad (3.72)$$

$$\phi_{K_L}^L(E,t) = E^{-\alpha} \left( \frac{p(t)}{\lambda_p} Z_{pK_L} + \frac{n(t)}{\lambda_n} Z_{nK_L} \right) \lambda_k^{dec}(E,t,\theta). \quad (3.73)$$

Estas soluções são válidas somente para energias baixas, por isso o índice  $L$  em cada um dos fluxos.

### *Limite de altas energias*

No limite de altas energias é o termo de decaimento que pode ser desprezado, pois o comprimento de decaimento assume valores grandes. As equações diferenciais a serem resolvidas são, então, as seguintes

$$\frac{\partial \phi_{K^+}}{\partial t} = -\frac{\phi_{K^+}}{\lambda_K} + S(p \rightarrow K^+) + S(n \rightarrow K^+) + S(\pi^+ \rightarrow K^+) + S(\pi^- \rightarrow K^+) + S(K^+ \rightarrow K^+) + S(K^- \rightarrow K^+) + S(K_L \rightarrow K^+), \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial \phi_{K^-}}{\partial t} = -\frac{\phi_{K^-}}{\lambda_K} + S(p \rightarrow K^-) + S(n \rightarrow K^-) + S(\pi^+ \rightarrow K^-) + S(\pi^- \rightarrow K^-) + S(K^+ \rightarrow K^-) + S(K^- \rightarrow K^-) + S(K_L \rightarrow K^-), \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial \phi_{K_L}}{\partial t} = -\frac{\phi_{K_L}}{\lambda_K} + S(p \rightarrow K_L) + S(n \rightarrow K_L) + S(\pi^+ \rightarrow K_L) + S(\pi^- \rightarrow K_L) + S(K^+ \rightarrow K_L) + S(K^- \rightarrow K_L) + S(K_L \rightarrow K_L). \quad (3.76)$$

Substituindo os termos de fonte e regeneração obtém-se as relações

$$\frac{\partial \phi_{K^+}}{\partial t} = -\frac{\phi_{K^+}}{\lambda_K} + E^{-\alpha} \frac{p(t)}{\lambda_p} Z_{pK^+} + E^{-\alpha} \frac{n(t)}{\lambda_n} Z_{nK^+} + \frac{\phi_{\pi^+}}{\lambda_\pi} Z_{\pi^+K^+} + \frac{\phi_{\pi^-}}{\lambda_\pi} Z_{\pi^-K^+} + \frac{\phi_{K^+}}{\lambda_K} Z_{K^+K^+} + \frac{\phi_{K^-}}{\lambda_K} Z_{K^-K^+} + \frac{\phi_{K_L}}{\lambda_K} Z_{K_LK^+}, \quad (3.77)$$

$$\frac{\partial \phi_{K^-}}{\partial t} = -\frac{\phi_{K^-}}{\lambda_K} + E^{-\alpha} \frac{p(t)}{\lambda_p} Z_{pK^-} + E^{-\alpha} \frac{n(t)}{\lambda_n} Z_{nK^-} + \frac{\phi_{\pi^+}}{\lambda_\pi} Z_{\pi^+K^-} + \frac{\phi_{\pi^-}}{\lambda_\pi} Z_{\pi^-K^-} + \frac{\phi_{K^+}}{\lambda_K} Z_{K^+K^-} + \frac{\phi_{K^-}}{\lambda_K} Z_{K^-K^-} + \frac{\phi_{K_L}}{\lambda_K} Z_{K_LK^-}, \quad (3.78)$$

$$\frac{\partial \phi_{K_L}}{\partial t} = -\frac{\phi_{K_L}}{\lambda_K} + E^{-\alpha} \frac{p(t)}{\lambda_p} Z_{pK_L} + E^{-\alpha} \frac{n(t)}{\lambda_n} Z_{nK_L} + \frac{\phi_{\pi^+}}{\lambda_\pi} Z_{\pi^+ K_L} + \frac{\phi_{\pi^-}}{\lambda_\pi} Z_{\pi^- K_L} + \frac{\phi_{K^+}}{\lambda_K} Z_{K^+ K_L} + \frac{\phi_{K^-}}{\lambda_K} Z_{K^- K_L} + \frac{\phi_{K_L}}{\lambda_K} Z_{K_L K_L} \quad (3.79)$$

Estas equações podem ser escritas na forma matricial

$$\frac{\partial \Phi_K}{\partial t} = -\frac{1}{\lambda_K} \Phi_K + \frac{1}{\lambda_K} \mathbf{Z}_K \cdot \Phi_K + \mathbf{S}, \quad (3.80)$$

ou, ainda, explicitamente, a seguinte equação deve ser resolvida

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \phi_{K^+} \\ \phi_{K^-} \\ \phi_{K_L} \end{pmatrix} = -\frac{1}{\lambda_K} \begin{pmatrix} \phi_{K^+} \\ \phi_{K^-} \\ \phi_{K_L} \end{pmatrix} + \frac{1}{\lambda_K} \begin{pmatrix} Z_{K^+ K^+} & Z_{K^+ K^-} & Z_{K^+ K_L} \\ Z_{K^- K^+} & Z_{K^- K^-} & Z_{K^- K_L} \\ Z_{K_L K^+} & Z_{K_L K^-} & Z_{K_L K_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{K^+} \\ \phi_{K^-} \\ \phi_{K_L} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_+ \\ S_- \\ S_L \end{pmatrix}, \quad (3.81)$$

sendo que, de forma geral, os termos de fonte são

$$S_j = E^{-\alpha} \frac{p(t)}{\lambda_p} Z_{pK^j} + E^{-\alpha} \frac{n(t)}{\lambda_n} Z_{nK^j} + \frac{\phi_{\pi^+}}{\lambda_\pi} Z_{\pi^+ K^j} + \frac{\phi_{\pi^-}}{\lambda_\pi} Z_{\pi^- K^j}. \quad (3.82)$$

Substituindo as soluções obtidas anteriormente para  $p(t)$  e  $n(t)$  e para os fluxos de píons no limite de altas energias,  $\phi_{\pi^+}^H(E, t)$  e  $\phi_{\pi^-}^H(E, t)$ , obtém-se a relação

$$S_j = \frac{E^{-\alpha}}{\lambda_p} \left\{ \left[ \frac{p_0 + n_0}{2} (Z_{pK^j} + Z_{nK^j}) \exp\left(\frac{-t}{\Lambda_1}\right) + \frac{p_0 - n_0}{2} (Z_{pK^j} - Z_{nK^j}) \exp\left(\frac{-t}{\Lambda_2}\right) \right] + \left[ \frac{p_0 + n_0}{2\lambda_\pi} \frac{\Lambda_{\pi 1} \Lambda_1}{\Lambda_{\pi 1} - \Lambda_1} (Z_{p\pi^+} + Z_{p\pi^-}) (Z_{\pi^+ K^j} + Z_{\pi^- K^j}) \left( \exp\frac{-t}{\Lambda_{\pi 1}} - \exp\frac{-t}{\Lambda_1} \right) + \frac{p_0 - n_0}{2\lambda_\pi} \frac{\Lambda_{\pi 2} \Lambda_2}{\Lambda_{\pi 2} - \Lambda_2} (Z_{p\pi^+} - Z_{p\pi^-}) (Z_{\pi^+ K^j} - Z_{\pi^- K^j}) \left( \exp\frac{-t}{\Lambda_{\pi 2}} - \exp\frac{-t}{\Lambda_2} \right) \right] \right\},$$



que pode ser escrita, rearranjando, os termos como

$$S_j = E^{-\alpha} \sum_{\sigma=1}^4 c(j, \sigma) \exp\left(\frac{-t}{\Lambda_\sigma}\right). \quad (3.83)$$

Nesta equação  $\Lambda_\sigma$ , com índice  $\sigma$  correndo de 1 a 4, representa  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$ ,  $\Lambda_{\pi_1}$  e  $\Lambda_{\pi_4}$  que já foram definidos anteriormente. Os coeficientes são:

$$c(j,1) = \frac{1}{\lambda_p} \frac{p_0 + n_0}{2} \left[ (Z_{pK^j} + Z_{nK^j}) - \frac{1}{\lambda_\pi} \frac{\Lambda_{\pi_1} \Lambda_1}{\Lambda_{\pi_1} - \Lambda_1} (Z_{p\pi^+} + Z_{p\pi^-}) (Z_{\pi^+K^j} + Z_{\pi^-K^j}) \right], \quad (3.84)$$

$$c(j,2) = \frac{1}{\lambda_p} \frac{p_0 - n_0}{2} \left[ (Z_{pK^j} - Z_{nK^j}) - \frac{1}{\lambda_\pi} \frac{\Lambda_{\pi_2} \Lambda_2}{\Lambda_{\pi_2} - \Lambda_2} (Z_{p\pi^+} - Z_{p\pi^-}) (Z_{\pi^+K^j} - Z_{\pi^-K^j}) \right], \quad (3.85)$$

$$c(j,3) = \frac{1}{\lambda_p} \frac{p_0 + n_0}{2} \frac{1}{\lambda_\pi} \frac{\Lambda_{\pi_1} \Lambda_1}{\Lambda_{\pi_1} - \Lambda_1} (Z_{p\pi^+} + Z_{p\pi^-}) (Z_{\pi^+K^j} + Z_{\pi^-K^j}), \quad (3.86)$$

$$c(j,4) = \frac{1}{\lambda_p} \frac{p_0 - n_0}{2} \frac{1}{\lambda_\pi} \frac{\Lambda_{\pi_2} \Lambda_2}{\Lambda_{\pi_2} - \Lambda_2} (Z_{p\pi^+} - Z_{p\pi^-}) (Z_{\pi^+K^j} - Z_{\pi^-K^j}). \quad (3.87)$$

A solução da equação diferencial (3.81) depende da forma exata da matriz de regeneração de káons  $\mathbf{Z}_K$ . De forma geral, pode-se considerar que esta seja simétrica com autovalores  $Z_{K1}$ ,  $Z_{K2}$  e  $Z_{K3}$  e diagonalizável através de uma matriz ortogonal  $\mathbf{U}$ . Sendo assim, a equação (3.80), multiplicada pela inversa de  $\mathbf{U}$ , pode ser escrita como

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}^{-1} \Phi_K = -\frac{1}{\lambda_K} \mathbf{U}^{-1} \Phi_K + \frac{1}{\lambda_K} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{Z}_K \mathbf{U} \mathbf{U}^{-1} \Phi_K + \mathbf{U}^{-1} \mathbf{S}, \quad (3.88)$$

explicitamente

$$\mathbf{U}^{-1} \mathbf{Z}_K \mathbf{U} = \begin{pmatrix} Z_{K1} & 0 & 0 \\ 0 & Z_{K2} & 0 \\ 0 & 0 & Z_{K3} \end{pmatrix} \quad (3.89)$$

e como  $\mathbf{U}$  é ortogonal,  $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^T$ , tem-se que

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \sum_i U_{i1} \phi_{Ki} \\ \sum_i U_{i2} \phi_{Ki} \\ \sum_i U_{i3} \phi_{Ki} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1/\Lambda_{K1} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\Lambda_{K2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\Lambda_{K3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_i U_{i1} \phi_{Ki} \\ \sum_i U_{i2} \phi_{Ki} \\ \sum_i U_{i3} \phi_{Ki} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_i U_{i1} S_i \\ \sum_i U_{i2} S_i \\ \sum_i U_{i3} S_i \end{pmatrix}, \quad (3.90)$$

onde

$$\Lambda_{Ka} = \frac{\lambda_K}{1 - Z_{Ka}}. \quad (3.91)$$

Sendo assim, tem-se três equações diferenciais desacopladas a serem resolvidas tendo a seguinte forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_i U_{ia} \phi_{Ki} = -\frac{1}{\Lambda_{Ka}} \sum_i U_{ia} \phi_{Ki} + \sum_i U_{ia} S_i. \quad (3.92)$$

Substituindo a expressão obtida para  $S_i$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_i U_{ia} \phi_{Ki} = -\frac{1}{\Lambda_{Ka}} \sum_i U_{ia} \phi_{Ki} + E^{-\alpha} \sum_i U_{ia} \sum_{\sigma=1}^4 c(i, \sigma) \exp\left(\frac{-t}{\Lambda_{\sigma}}\right). \quad (3.93)$$

Como o segundo termo é exponencial, a solução pode ser escrita, de forma geral, como

$$\sum_i U_{ia} \phi_{Ki} = A_a \exp\left(\frac{-t}{\Lambda_{Ka}}\right) + \sum_{\sigma} B_{a\sigma} \exp\left(\frac{-t}{\Lambda_{\sigma}}\right). \quad (3.94)$$

Da condição inicial, tem-se que  $A_a = -\sum_{\sigma} B_{a\sigma}$

$$\sum_i U_{ia} \phi_{Ki} = \sum_{\sigma} B_{a\sigma} \left[ \exp\frac{-t}{\Lambda_{\sigma}} - \exp\frac{-t}{\Lambda_{Ka}} \right]. \quad (3.95)$$

Substituindo a equação anterior em (3.93), chega-se a seguinte expressão para  $B_{a\sigma}$

$$B_{a\sigma} = -E^{-\alpha} \frac{\Lambda_\sigma \Lambda_{Ka}}{\Lambda_{Ka} - \Lambda_\sigma} \sum_i U_{ia} c(i, \sigma). \quad (3.96)$$

A solução é dada, então, de forma geral, por

$$\sum_i U_{ia} \phi_{Ki} = E^{-\alpha} \sum_\sigma \frac{\Lambda_{Ka} \Lambda_\sigma}{\Lambda_{Ka} - \Lambda_\sigma} \left( \sum_i U_{ia} c(i, \sigma) \right) \left[ \exp\left(\frac{-t}{\Lambda_{Ka}}\right) - \exp\left(\frac{-t}{\Lambda_\sigma}\right) \right], \quad (3.97)$$

ou seja,

$$\mathbf{U}^{-1} \Phi_{\mathbf{K}} = E^{-\alpha} \begin{pmatrix} \sum_\sigma A_{1\sigma} (e^{-t/\Lambda_{K1}} - e^{-t/\Lambda_\sigma}) \\ \sum_\sigma A_{2\sigma} (e^{-t/\Lambda_{K2}} - e^{-t/\Lambda_\sigma}) \\ \sum_\sigma A_{3\sigma} (e^{-t/\Lambda_{K2}} - e^{-t/\Lambda_\sigma}) \end{pmatrix}, \quad (3.98)$$

para

$$A_{a\sigma} = \frac{\Lambda_{Ka} \Lambda_\sigma}{\Lambda_{Ka} - \Lambda_\sigma} \left( \sum_i U_{ia} c(i, \sigma) \right). \quad (3.99)$$

Multiplicando a equação (3.98) pela matriz  $\mathbf{U}$  obtém-se

$$\begin{pmatrix} \phi_{K^+} \\ \phi_{K^-} \\ \phi_{K_L} \end{pmatrix} = E^{-\alpha} \begin{pmatrix} \sum_a U_{1a} \sum_\sigma A_{a\sigma} (e^{-t/\Lambda_{Ka}} - e^{-t/\Lambda_\sigma}) \\ \sum_a U_{2a} \sum_\sigma A_{a\sigma} (e^{-t/\Lambda_{Ka}} - e^{-t/\Lambda_\sigma}) \\ \sum_a U_{3a} \sum_\sigma A_{a\sigma} (e^{-t/\Lambda_{Ka}} - e^{-t/\Lambda_\sigma}) \end{pmatrix}. \quad (3.100)$$

Portanto, de forma geral, explicitando a expressão de  $A_{a\sigma}$ , o fluxo de káons é dado pela equação

$$\phi_{Kj}^H = E^{-\alpha} \sum_a U_{ja} \sum_{\sigma} \frac{\Lambda_{Ka} \Lambda_{\sigma}}{\Lambda_{Ka} - \Lambda_{\sigma}} \left( \sum_i U_{ia} c(i, \sigma) \right) \left[ \exp\left(\frac{-t}{\Lambda_{Ka}}\right) - \exp\left(\frac{-t}{\Lambda_{\sigma}}\right) \right], \quad (3.101)$$

onde o índice  $H$  no fluxo, novamente, indica que a solução é válida somente para energias altas.

Considerando que  $Z_{K^+K^+} = Z_{K^-K^-} = Z_{K_L K_L} = Z_1$ , desprezando as contribuições de mudança de estranheza, ou seja,  $Z_{K^+K^-} = Z_{K^-K^+} = 0$  e assumindo a validade das relações  $Z_{K^+K_L} = Z_{K_L K^+} = Z_{K^-K_L} = Z_{K_L K^-} = Z_2$ , a matriz de regeneração é escrita como

$$\mathbf{Z}_K = \begin{pmatrix} Z_1 & 0 & Z_2 \\ 0 & Z_1 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 & Z_1 \end{pmatrix}, \quad (3.102)$$

os autovalores são

$$Z_{K1} = Z_1, \quad (3.103)$$

$$Z_{K2} = Z_1 + \sqrt{2}Z_2, \quad (3.104)$$

$$Z_{K3} = Z_1 - \sqrt{2}Z_2, \quad (3.105)$$

e a matriz de diagonalização correspondente é

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{pmatrix}. \quad (3.106)$$

### 3.1.4 Expressão geral para o fluxo de mésons

Os fluxos de píons e káons podem ser escritos de forma geral para o limite de altas e baixas energias. No limite de baixas energias como

$$\phi_M^L = M_L(t) \lambda_M^{dec}(E, t, \theta) E^{-\alpha}, \quad (3.107)$$

onde  $M_L(t)$  para píons e káons representa

$$\pi_L^\pm(t) = \frac{p(t)}{\lambda_p} Z_{p\pi^\pm} + \frac{n(t)}{\lambda_n} Z_{n\pi^\pm}, \quad (3.108)$$

$$K_L^j(t) = \frac{p(t)}{\lambda_p} Z_{pK_j} + \frac{n(t)}{\lambda_n} Z_{nK_j}. \quad (3.109)$$

No limite de altas energias a expressão é dada por

$$\phi_M^H = M_H(t) E^{-\alpha}, \quad (3.110)$$

onde o termo  $M_H(t)$  para píons e káons é dado por

$$\begin{aligned} \pi_A^\pm(t) = & \frac{p_0 + n_0}{2\lambda_p} \frac{\Lambda_{\pi 1} \Lambda_1}{\Lambda_{\pi 1} - \Lambda_1} \left( Z_{p\pi^+} + Z_{p\pi^-} \right) \left( \exp\left(\frac{-t}{\Lambda_{\pi 1}}\right) - \exp\left(\frac{-t}{\Lambda_1}\right) \right) \\ & \pm \frac{p_0 - n_0}{2\lambda_p} \frac{\Lambda_{\pi 2} \Lambda_2}{\Lambda_{\pi 2} - \Lambda_2} \left( Z_{p\pi^+} - Z_{p\pi^-} \right) \left( \exp\left(\frac{-t}{\Lambda_{\pi 2}}\right) - \exp\left(\frac{-t}{\Lambda_2}\right) \right), \end{aligned} \quad (3.111)$$

$$K_A^j(t) = \sum_a U_{ja} \sum_\sigma \frac{\Lambda_{Ka} \Lambda_\sigma}{\Lambda_{Ka} - \Lambda_\sigma} \left( \sum_i U_{ia} c(i, \sigma) \right) \left[ \exp\left(\frac{-t}{\Lambda_{Ka}}\right) - \exp\left(\frac{-t}{\Lambda_\sigma}\right) \right]. \quad (3.112)$$

A expressão generalizada para estes fluxos é obtida através da expressão de interpolação [1]

$$\phi_M(E, t) = \frac{M_H(t) M_L(t) \lambda_M^{dec}(E, t, \theta)}{M_H(t) + M_L(t) \lambda_M^{dec}(E, t, \theta)} E^{-\alpha}. \quad (3.113)$$

### 3.2 Fluxo de múons

Os múons são produzidos no decaimento de píons e káons, portanto a equação de evolução do fluxo de múons deve conter termos de fonte referentes a estes decaimentos. No cálculo do fluxo de múons devem ser consideradas, também, a perda de energia e a probabilidade de decaimento.

A equação dos fluxos de múons tem, segundo Volkova [5], a forma

$$\frac{\partial \phi_{\mu^+}}{\partial t} = -\frac{\phi_{\mu^+}}{\lambda_{\mu^+}^{dec}} + \frac{\partial}{\partial E} \left( \frac{dE}{dt} \phi_{\mu^+} \right) + S(K^+ \rightarrow \mu^+) + S(\pi^+ \rightarrow \mu^+), \quad (3.114)$$

$$\frac{\partial \phi_{\mu^-}}{\partial t} = -\frac{\phi_{\mu^-}}{\lambda_{\mu^-}^{dec}} + \frac{\partial}{\partial E} \left( \frac{dE}{dt} \phi_{\mu^-} \right) + S(K^- \rightarrow \mu^-) + S(\pi^- \rightarrow \mu^-), \quad (3.115)$$

onde o primeiro termo corresponde a diminuição do número de múons por decaimento, o segundo termo descreve a perda de energia e os dois últimos são os termos de fonte que tem a forma geral

$$S(M \rightarrow \mu) = B(M \rightarrow \mu) \int_E^\infty dE_M \frac{\phi_M(E_M, t)}{\lambda_M^{dec}(E_M, t, \theta)} F_{M \rightarrow \mu}(E, E_M), \quad (3.116)$$

onde  $B(M \rightarrow \mu)$ , *branching ratio*, é a probabilidade do decaimento ocorrer via um determinado canal. Para os decaimentos  $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$  esta quantidade é praticamente igual a 1 e para  $K^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$  é igual a 0,635.

A produção diferencial de múons foi obtida no apêndice B

$$F_{M \rightarrow \mu}(x) = \frac{1}{1-r_M} \theta(x-r_M), \quad (3.117)$$

onde  $x$  é a razão entre a energia do múon e a energia do méson,  $r_\pi = (m_\mu/m_\pi)^2$  e  $r_K = (m_\mu/m_K)^2$  para múons produzidos no decaimento de píons e káons respectivamente.

A perda de energia dos múons com a profundidade é analisada na referência [7]. Uma aproximação desta descrição é utilizada por Volkova [5] e é dada por

$$-\frac{dE}{dt} = a + bE. \quad (3.118)$$

Para esta aproximação um múon produzido com energia  $E_0$  em  $t_0$  atingirá a profundidade  $t_f$  com energia dada por

$$E_f(t_f - t_0, E_0) = \left( E_0 + \frac{a}{b} \right) e^{-b(t_f - t_0)} \quad (3.119)$$

com uma probabilidade

$$P_{sob}(E_0, t_0, t_f, \theta) = \exp\left(-\int_{t_0}^{t_f} \frac{dt}{\lambda_{\mu}^{dec}}\right). \quad (3.120)$$

Substituindo o comprimento de decaimento do múon

$$P_{sob}(E_0, t_0, t_f, \theta) = \exp\left(-\frac{m_{\mu}}{c\tau_{\mu}} \int_{t_0}^{t_f} \frac{dt}{E(t - t_0, E_0)\rho(t, \theta)}\right). \quad (3.121)$$

Portanto, o fluxo de múons em uma profundidade  $t_f$  e inclinação  $\theta$  pode ser calculado a partir do termo de fonte  $S_{\mu}(E_0, t_0, \theta)$  através da relação

$$\phi_{\mu}(E_f, t_f, \theta) = \int_0^{t_f} dt_0 S_{\mu}(E_0, t_0, \theta) P_{sob}(E_0, t_0, t_f, \theta) J \quad (3.122)$$

onde o último fator no integrando é o termo Jacobiano

$$J = \frac{dE_f}{dE_0}, \quad (3.123)$$

ou seja,

$$J = e^{-b(t_f - t_0)} \quad (3.124)$$

calculado a partir da aproximação descrita na equação (3.119).

### 3.2.1 Polarização de múons

É importante destacar, ainda, que os múons gerados por raios cósmicos são polarizados. Este fato é consequência da conservação de momento angular, do spin de píons e káons ser nulo e da helicidade definida de neutrinos e antineutrinos. A helicidade é o valor esperado do spin na direção de movimento em unidades de  $1/2\hbar$ . Todos os neutrinos são de mão esquerda e todos os antineutrinos são de mão direita, isto é, têm helicidade igual a -1 e +1 respectivamente.

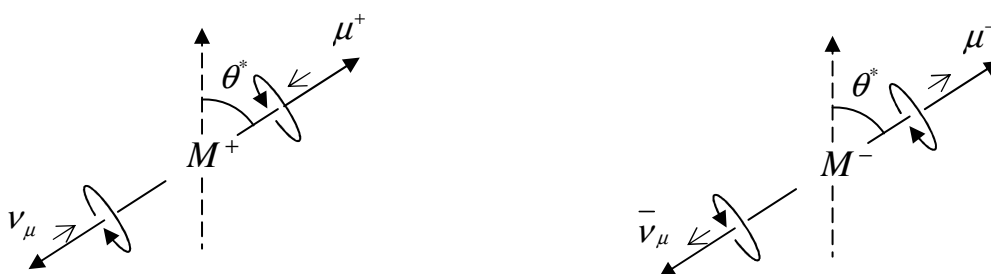


Figura 3.1 Decaimento de  $M^+$  e  $M^-$  no referencial de repouso dos mésons.

São considerados os múons produzidos apenas em decaimentos de mésons em duas partículas que estão esquematizados, nos respectivos referenciais de repouso dos mésons na figura 3.1, para a qual os spins das partículas são apresentados e  $\theta^*$  é o ângulo entre a direção de movimento do múon e a direção de movimento do méson. Como o neutrino é de mão esquerda, para que o momento angular seja conservado neste referencial, o antimúon deve ter helicidade negativa. O antineutrino, por sua vez, é de mão



direita, portanto, o múon deve ter helicidade positiva. Sendo assim, os múons produzidos por raios cósmicos são completamente polarizados no referencial de repouso dos mésons, com helicidade positiva para  $\mu^-$  e negativa para  $\mu^+$ .

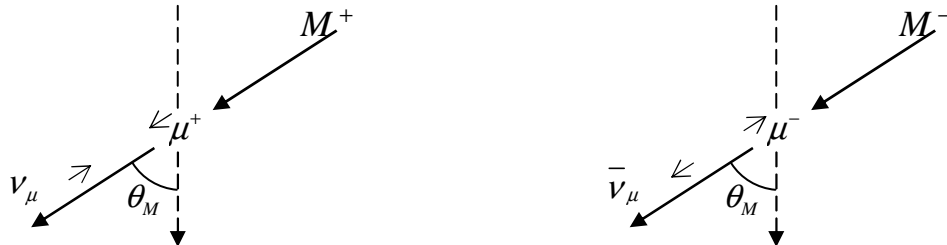


Figura 3.2: Decaimento dos mésons no referencial em que o múon é produzido em repouso.

Já no referencial em que o antimúon e o múon são produzidos em repouso, como representado na figura 3.2, as respectivas helicidades são dadas pela relação

$$P_{\mu^\pm} = \pm \cos \theta_M, \quad (3.125)$$

sendo  $\theta_M$  o ângulo entre a direção do méson e a direção de movimento do múon.

As expressões para a helicidade de múons e antimúons podem ser obtidas, então, em função das energias do méson e do múon ou do antimúon calculadas no referencial de laboratório.

Sabendo que a energia do méson no referencial de laboratório, obtida pela transformação de Lorentz a partir da sua energia  $E'_M = (m_M^2 + m_\mu^2)c^2/2m_\mu$  e do seu momento  $p'_M = (m_M^2 - m_\mu^2)c/2m_\mu$  no referencial de repouso do múon calculados das lei de conservação de energia e momento, é dada pela relação

$$E_M = \frac{E_\mu}{2r_M} \left[ (1 + r_M) + (1 - r_M) \beta_\mu \cos \theta_M \right], \quad (3.126)$$

onde  $r_M = m_\mu^2 / m_M^2$ , o termo  $\cos \theta_M$  pode ser escrito em função das energias do méson e do múon como

$$\cos \theta_M = \frac{1}{\beta_\mu} \left[ \frac{2r_M}{x(1-r_M)} - \frac{(1+r_M)}{(1-r_M)} \right] \quad (3.127)$$

para  $x = \frac{E_\mu}{E_M}$ .

Portanto, a projeção da polarização na direção de movimento do antimúon ou do múon pode ser escrita, respectivamente, como

$$P_{\mu^\pm} = \pm \frac{1}{\beta_\mu} \left[ \frac{2r_M}{x(1-r_M)} - \frac{(1+r_M)}{(1-r_M)} \right]. \quad (3.128)$$

Sabendo que a probabilidade de uma partícula, com ângulo  $\theta$  entre a direção de seu spin e sua direção de movimento, ser de mão direita ou de mão esquerda é dada por

$$P_R = \cos^2 \frac{\theta}{2}, \quad (3.129)$$

$$P_L = \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (3.130)$$

respectivamente,

$$P_{R,L} = \frac{1}{2}(1 \pm \cos \theta), \quad (3.131)$$

então, a probabilidade do múon ter helicidade positiva ou negativa é

$$P_{R,L} = \frac{1}{2}(1 \mp \cos \theta_M) \quad (3.132)$$

e do antimúon

$$P_{R,L} = \frac{1}{2}(1 \pm \cos \theta_M). \quad (3.133)$$

Escrevendo (3.132) e (3.133) em função da polarização do múon e da polarização do antimúon tem-se, respectivamente, que

$$P_{R,L} = \frac{1}{2}(1 \pm P_{\mu^-}), \quad (3.134)$$

$$P_{R,L} = \frac{1}{2}(1 \pm P_{\mu^+}), \quad (3.135)$$

onde  $P_{\mu^\pm}$  são definidos na relação (3.128).

Os fluxos de múons e antimúons de mão direita e de mão esquerda podem ser calculados separadamente. Para tanto, basta multiplicar o espectro de energia (3.117) pelas probabilidades (3.134) e (3.135).

O termo de fonte de múons e antimúons é dado, então, por

$$S_{\mu^\pm}^{R,L}(E_0, t_0, \theta) = \sum_{M^\pm} B \int_{E_0}^{E_0/t_M} \frac{dE_M}{E_M} \frac{\phi_{M^\pm}(E_M, t_0)}{\lambda_M^{dec}(E_M, t_0, \theta)} \frac{P_{\mu^\pm}^{R,L}}{1-r_M} \quad (3.136)$$

resultando em

$$\phi_{\mu^\pm}^{R,L}(E_f, t_f, \theta) = \int_0^{t_f} dt_0 S_{\mu^\pm}^{R,L}(E_0, t_0, \theta) P_{sob}(E_0, t_0, t_f, \theta) e^{-b(t_f-t_0)}. \quad (3.137)$$

### 3.3 Fluxo de neutrinos

A equação de evolução do fluxo de neutrinos inclui apenas os termos de fonte, pois neutrinos não interagem fortemente e não decaem. Neutrinos

produzidos em interações de outras partículas na atmosfera são desconsiderados, já que na faixa de energia trabalhada esta fonte é inexistente. Os termos de fonte descrevem a produção de neutrinos nos decaimentos de mésons e múons.

$$\frac{\partial \phi_{\nu_i}(E, t, \theta)}{\partial t} = \sum_j S(j \rightarrow \nu_i; E, t, \theta), \quad (3.138)$$

onde a partícula  $j$  decai produzindo um neutrino  $\nu_i$ .

Explicitamente, desprezando a contribuição dos decaimentos (3.1), (3.2) e (3.4), as equações de evolução dos fluxos de neutrinos são

$$\frac{\partial \nu_\mu}{\partial t} = S(K^+ \rightarrow \nu_\mu) + S(\pi^+ \rightarrow \nu_\mu) + S(\mu^- \rightarrow \nu_\mu), \quad (3.139)$$

$$\frac{\partial \bar{\nu}_\mu}{\partial t} = S(K^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu) + S(\pi^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu) + S(\mu^+ \rightarrow \bar{\nu}_\mu), \quad (3.140)$$

$$\frac{\partial \nu_e}{\partial t} = S(\mu^+ \rightarrow \nu_e), \quad (3.141)$$

$$\frac{\partial \bar{\nu}_e}{\partial t} = S(\mu^- \rightarrow \bar{\nu}_e). \quad (3.142)$$

Os termos de fonte, similarmente a relação anterior, são dados por

$$S(j \rightarrow \nu_i) = B(j \rightarrow \nu_i) \int_E^\infty dE_j \frac{\phi_j(E_j, t)}{\lambda_j^{dec}(E_j, t, \theta)} \frac{1}{E_j} F_{j \rightarrow \nu_i} \left( \frac{E}{E_j} \right), \quad (3.143)$$

onde o valor de B para os decaimentos de mésons já foi definido e o para os decaimentos de múons é igual a um.

Para neutrinos gerados diretamente do decaimento de mésons,  $\phi_M(E_M, t)$  é dado pela equação de interpolação (3.113), enquanto que o espectro de energia, calculado no apêndice B, é dado por

$$F_{M \rightarrow \nu_j}(x) = \frac{1}{(1-r_M)} \theta(1-r_M - x). \quad (3.144)$$

Já o termo de fonte de neutrinos produzidos pelo decaimento de múons depende do fluxo  $\phi_\mu(E_f, t_f, \theta)$  definido pela relação (3.122) e do espectro de energia calculado no apêndice C que é dado por

$$\frac{d\bar{\nu}_\mu(\nu_\mu)}{dy} = \left( \frac{5}{3} - 3y^2 + \frac{4}{3}y^3 \right) - \left( \frac{1}{3} - 3y^2 + \frac{8}{3}y^3 \right) \cos\theta_M, \quad (3.145)$$

$$\frac{d\nu_e(\bar{\nu}_e)}{dy} = (2 - 6y^2 + 4y^3) - (-2 + 12y - 18y^2 + 8y^3)^3 \cos\theta_M, \quad (3.146)$$

onde  $\cos\theta_M$ , como já analisado, para  $\mu^\pm$  é igual a  $\pm P_{\mu^\pm}$ , a projeção do spin do múon no seu referencial de repouso ao longo da direção de movimento do múon no de laboratório.

Esta é a importância de se considerar a polarização do múon. O espectro diferencial de produção de leptons do decaimento de múons depende da polarização na forma

$$\frac{d\bar{\nu}_\mu(\nu_\mu)}{dy} = \left( \frac{5}{3} - 3y^2 + \frac{4}{3}y^3 \right) \mp P_{\mu^\pm} \left( \frac{1}{3} - 3y^2 + \frac{8}{3}y^3 \right), \quad (3.147)$$

$$\frac{d\nu_e(\bar{\nu}_e)}{dy} = (2 - 6y^2 + 4y^3) \mp P_{\mu^\pm} (-2 + 12y - 18y^2 + 8y^3). \quad (3.148)$$

Como o múon perde energia antes de decair a polarização deve ser tomada em função da energia inicial do múon, isto é, a energia com que é produzido. O espectro de energia deve ser dado em função da energia final do múon, ou seja, de sua energia no momento em que decai.

A polarização depende da energia dos mésons, portanto a integral desta energia no termo de fonte do múon deve considerar como integrando, também os espectros de energia de neutrinos ao serem calculados os fluxos destes.

Considerando os fluxos de múons e antimúons de mão direita e mão esquerda separadamente, o cálculo é bastante simplificado. Para múons e antimúons de mão direita a polarização no espectro de energia dos neutrinos é igual a +1 e para os de mão esquerda, a polarização é igual a -1. Sendo assim, a distribuição de energia dos neutrinos não precisa mais ser incluída na

integral da energia do pión ao calcular o fluxo de neutrinos.

O fluxo de neutrinos em uma dada profundidade é calculado pela integração das equações (3.139) a (3.142), que de forma geral, resulta em

$$\phi_{\nu_i}(E, t, \theta) = \sum_j \int_0^t S(j \rightarrow \nu_i; E, t', \theta) dt', \quad (3.149)$$

onde todas as fontes  $j$  devem ser consideradas.

Para neutrinos produzidos no decaimento de mésons:

$$\phi_{\nu_\mu}(E, t, \theta) = \frac{1}{(1-r_M)} \int_0^t dt' \sum_{M^+} B \int_{E/1-r_M}^{\infty} \frac{dE_M}{E_M} \frac{\phi_{M^+}(E_M, t')}{\lambda_M^{dec}(E_M, t', \theta)}, \quad (3.150)$$

$$\phi_{\bar{\nu}_\mu}(E, t, \theta) = \frac{1}{(1-r_M)} \int_0^t dt' \sum_{M^-} B \int_{E/1-r_M}^{\infty} \frac{dE_M}{E_M} \frac{\phi_{M^-}(E_M, t')}{\lambda_M^{dec}(E_M, t', \theta)}, \quad (3.151)$$

onde  $M^\pm$  representa  $K^\pm$  e  $\pi^\pm$ .

Para neutrinos produzidos no decaimento de múons

$$\phi_{\nu_\mu}(E, t, \theta) = \sum_{R,L} \int_0^t dt_f \int_E^{\infty} \frac{dE_f}{E_f} \frac{\phi_{\mu^-}^{R,L}(E_f, t_f, \theta)}{\lambda_\mu^{dec}(E_f, t_f, \theta)} \frac{d\nu_\mu}{dy}, \quad (3.152)$$

$$\phi_{\bar{\nu}_\mu}(E, t, \theta) = \sum_{R,L} \int_0^t dt_f \int_E^{\infty} \frac{dE_f}{E_f} \frac{\phi_{\mu^+}^{R,L}(E_f, t_f, \theta)}{\lambda_\mu^{dec}(E_f, t_f, \theta)} \frac{d\bar{\nu}_\mu}{dy}, \quad (3.153)$$

$$\phi_{\bar{\nu}_e}(E, t, \theta) = \sum_{R,L} \int_0^t dt_f \int_E^{\infty} \frac{dE_f}{E_f} \frac{\phi_{\mu^-}^{R,L}(E_f, t_f, \theta)}{\lambda_\mu^{dec}(E_f, t_f, \theta)} \frac{d\bar{\nu}_e}{dy}, \quad (3.154)$$

$$\phi_{\nu_e}(E, t, \theta) = \sum_{R,L} \int_0^t dt_f \int_E^{\infty} \frac{dE_f}{E_f} \frac{\phi_{\mu^+}^{R,L}(E_f, t_f, \theta)}{\lambda_\mu^{dec}(E_f, t_f, \theta)} \frac{d\nu_e}{dy}. \quad (3.155)$$

O fluxo total de neutrinos muônicos é dado pela soma das relações (3.150) e (3.152), de antineutrinos muônicos pela soma de (3.151) e (3.153), neutrinos e antineutrinos eletrônicos são dados respectivamente pelas relações (3.155) e (3.154).

## 4 Oscilação entre sabores de neutrinos

A equação de Schrödinger, no sistema de unidades em que  $\hbar = 1$  e  $c = 1$ ,

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = -iH\psi(x), \quad (4.1)$$

cuja solução é dada pela relação

$$\psi(x) = U(x,0)\psi(0), \quad (4.2)$$

descreve a evolução de um sistema com hamiltoniano  $H(x)$ , onde  $U(x,0)$  é o operador de evolução que tem as seguintes formas

$$U(x,0) = \begin{cases} \exp\left[-i\int_0^x H(x') dx'\right] & [H(x), H(x')] = 0 \\ \text{Exp}\left[-i\int_0^x H(x') dx'\right] & [H(x), H(x')] \neq 0 \end{cases}. \quad (4.3)$$

O símbolo Exp refere-se a expansional, diferente da exponencial exp, e significa uma expansão em múltiplas integrais ordenadas

$$\text{Exp}\left[-i\int_0^x H(x') dx'\right] = 1 - i\int_0^x H(x') dx' + (-i)^2 \int_0^x H(x') dx' \int_0^{x'} H(x'') dx'' + \dots \quad (4.4)$$

que para a condição  $[H(x), H(x')] = 0$ , fica reduzida a exponencial convencional do primeiro caso.

Algumas propriedades do operador de evolução devem ser destacadas. A primeira delas, como pode ser verificado facilmente de (4.3) e (4.4), é que

$$U(x', x') = 1. \quad (4.5)$$

Outra propriedade refere-se à inversa do operador de evolução dada por

$$(G(x, x'))^{-1} = \left( \text{Exp} \left[ -i \int_{x'}^x H(\lambda) d\lambda \right] \right)^{-1} = \text{Exp} \left[ -i \int_x^{x'} H(\lambda) d\lambda \right]. \quad (4.6)$$

O produto de expansionais sucessivos

$$T = \text{Exp} \left[ -i \int_{x''}^x H(\lambda) d\lambda \right] \text{Exp} \left[ -i \int_{x'}^{x''} H(\lambda) d\lambda \right] \quad (4.7)$$

resulta na relação

$$T = \text{Exp} \left[ -i \int_{x'}^x H(\lambda) d\lambda \right]. \quad (4.8)$$

Como conseqüência, um operador de evolução pode ser escrito como o produto de operadores de evolução sucessivos

$$G(x, x') = G(x, x'')G(x'', x'). \quad (4.9)$$

Uma propriedade de expansionais que será bastante útil é a seguinte

$$\text{Exp} \left[ -i \int_{x_0}^{x_f} (F(x) + G(x)) dx \right] = \text{Exp} \left[ -i \int_{x_0}^{x_f} F(x) dx \right] \text{Exp} \left[ -i \int_{x_0}^{x_f} E_1(x)G(x)E_2(x) dx \right], \quad (4.10)$$

onde

$$E_1 = \text{Exp} \left[ -i \int_x^{x_0} F(u) du \right], \quad (4.11)$$

$$E_2 = \text{Exp} \left[ -i \int_{x_0}^x F(u) du \right]. \quad (4.12)$$



Para neutrinos que evoluem no vácuo e na presença de matéria constante, o hamiltoniano é constante, portanto, os hamiltonianos de duas posições diferentes comutam. Já para matéria variável, que é o caso de neutrinos que atravessam a Terra, o hamiltoniano da equação (4.1) contém um termo que leva em conta a interação com a matéria que depende de  $x$ . Sendo assim,  $[H(x), H(x')] \neq 0$  e o operador de evolução deve ser escrito em função de expansionais.

Na próxima seção, são apresentados os cálculos das probabilidades de transição e sobrevivência de neutrinos no contexto de dois sabores na presença de matéria constante e vácuo. Nas seções 4.2 e 4.3 são obtidas as amplitudes de oscilação dos neutrinos considerando a existência de três sabores para o vácuo e para a matéria constante respectivamente. As probabilidades de oscilação, na aproximação que corresponde a neutrinos atmosféricos, são escritas em função da probabilidade de oscilação entre dois sabores de neutrinos obtida na seção 4.1.

Por fim, na seção 4.4, é apresentado o cálculo para oscilação de neutrinos que atravessam a Terra, ou seja, à densidade de matéria variável. O operador de evolução, neste caso, é escrito como o produto de sucessivos operadores infinitesimais, o que permite tomar os operadores em primeira ordem de aproximação, contendo dois termos para cada elemento da trajetória, um que corresponde à densidade média deste elemento e outro que corresponde à densidade residual.

## 4.1 Oscilação entre dois sabores de neutrinos

A equação de evolução temporal de neutrinos de energia  $E$  na presença da matéria com densidade constante considerando a existência de dois sabores de neutrinos é dada por

$$i \frac{d}{dt} \mathbf{v}_f(t) = \frac{1}{2E} (\mathbf{U} \mathbf{M}^2 \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{A}) \mathbf{v}_f(t), \quad (4.13)$$

onde  $\mathbf{v}_f(t) = \begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \end{pmatrix}$  representa neutrinos de sabor eletrônico e muônico e  $\mathbf{A}$  é a matriz de interação com a matéria

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

com  $A = 2\sqrt{2}G_F N_e E$ , sendo que  $G_F$  é a constante de Fermi e  $N_e$  a densidade de elétrons na matéria.

A matriz de mistura  $\mathbf{U}$  acopla estados de sabor  $\mathbf{v}_f(t)$  a estados de partícula  $\mathbf{v}_p(t)$  na forma

$$\mathbf{v}_f(t) = \mathbf{U}\mathbf{v}_p(t) \quad (4.15)$$

e é dada por

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

onde  $\theta$  é o ângulo de mistura e

$$\mathbf{v}_p(t) = \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \end{pmatrix},$$

sendo  $\nu_{1,2}(t)$  partículas de massas definidas  $m_{1,2}$ .

O termo  $M^2$  é definido, portanto, como

$$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 \\ 0 & m_2^2 \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Diagonalizando o hamiltoniano deste sistema através de uma matriz

unitária  $\tilde{U}$  similar a (4.16) que acopla estados de sabor  $\mathbf{v}_f(t)$  a estados de partícula na presença da matéria  $\tilde{\mathbf{v}}_p(t)$  como em (4.14) com ângulo de mistura efetivo  $\tilde{\theta}$ , a equação (4.13) pode ser facilmente resolvida para  $\tilde{\mathbf{v}}_p(t)$ . A expressão para  $\mathbf{v}_f(t)$  é obtida, então, multiplicando  $\tilde{\mathbf{v}}_p(t)$  por  $\tilde{U}$ . Considerando o estado de sabor do neutrino inicialmente eletrônico ou inicialmente muônico, as soluções de (4.13) para  $\mathbf{v}_f(t)$  são, respectivamente, dadas pelas relações

$$\mathbf{v}_f(t) = \begin{pmatrix} A(\nu_e, \nu_e) \\ A(\nu_e, \nu_\mu) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_f(t) = \begin{pmatrix} A(\nu_\mu, \nu_e) \\ A(\nu_\mu, \nu_\mu) \end{pmatrix},$$

sendo que  $A(\nu_i, \nu_j)$  são as amplitudes de probabilidade de sobrevivência dos neutrinos e de transição entre sabores

$$A(\nu_e, \nu_e) = A(\nu_\mu, \nu_\mu) = \cos^2 \tilde{\theta} e^{-i\frac{\tilde{m}_1^2}{2E}t} + \sin^2 \tilde{\theta} e^{-i\frac{\tilde{m}_2^2}{2E}t}, \quad (4.18)$$

$$A(\nu_e, \nu_\mu) = A(\nu_\mu, \nu_e) = \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\theta} \left( e^{-i\frac{\tilde{m}_2^2}{2E}t} - e^{-i\frac{\tilde{m}_1^2}{2E}t} \right). \quad (4.19)$$

As respectivas probabilidades são

$$P(\nu_e, \nu_e) = P(\nu_\mu, \nu_\mu) = 1 - \sin^2 2\tilde{\theta} \sin^2 \frac{\tilde{\Delta}_{21}t}{4E}, \quad (4.20)$$

$$P(\nu_e, \nu_\mu) = P(\nu_\mu, \nu_e) = \sin^2 2\tilde{\theta} \sin^2 \frac{\tilde{\Delta}_{21}t}{4E}, \quad (4.21)$$

onde  $\tilde{\Delta}_{21} = \tilde{m}_2^2 - \tilde{m}_1^2$  é a diferença entre as massas quadráticas efetivas que são dadas pelas relações

$$\tilde{m}_1^2 = \frac{\Sigma_{21} + A}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\Delta_{21}^2 + A^2 - 2A\Delta_{21} \cos 2\theta}, \quad (4.22)$$

$$\tilde{m}_2^2 = \frac{\Sigma_{21} + A}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\Delta_{21}^2 + A^2 - 2A\Delta_{21} \cos 2\theta} \quad (4.23)$$

e  $\tilde{\theta}$  é o ângulo de mistura efetivo na matéria sendo

$$\sin^2 2\tilde{\theta} = \frac{\Delta_{21}^2 \sin^2 2\theta}{(\Delta_{21}^2 \cos 2\theta - A)^2 + \Delta_{21}^2 \sin^2 2\theta}, \quad (4.24)$$

onde  $\Delta_{21} = m_2^2 - m_1^2$  e  $\Sigma_{21} = m_2^2 + m_1^2$ .

A equação de evolução de neutrinos no vácuo é obtida considerando  $A = 0$ . As probabilidades de sobrevivência e transição têm a mesma forma das relações (4.20) e (4.21) com  $\tilde{\theta} = \theta$ ,  $\tilde{m}_1^2 = m_1^2$  e  $\tilde{m}_2^2 = m_2^2$ .

## 4.2 Oscilação entre três sabores de neutrinos no vácuo

A evolução temporal dos neutrinos no vácuo em um contexto de três sabores de neutrinos, eletrônico, muônico e tauônico, é dada pela seguinte equação

$$i \frac{d}{dt} \mathbf{v}_f(t) = \frac{1}{2E} \mathbf{U} \mathbf{M}^2 \mathbf{U}^{-1} \mathbf{v}_f(t) \quad (4.25)$$

para neutrinos com energia  $E$ , onde o termo

$$\mathbf{M}^2 = \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3^2 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

e  $\mathbf{U}$  é a matriz de mistura que acopla os estados de sabor  $\mathbf{v}_f(t)$  aos estados de partícula  $\mathbf{v}_p(t)$  na forma  $\mathbf{v}_f(t) = \mathbf{U} \mathbf{v}_p(t)$  e é dada por

$$\mathbf{U} = e^{-i\psi\Lambda_7} e^{-i\phi\Lambda_5} e^{-i\omega\Lambda_2}, \quad (4.27)$$

explicitando as exponenciais das matrizes de Gell-Mann

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & \sin \omega \\ 0 & -\sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

ou, ainda, adotando a notação  $\cos \theta = C\theta$  e  $\sin \theta = S\theta$

$$U = \begin{pmatrix} C\phi C\omega & C\phi S\omega & S\phi \\ -C\psi S\omega - S\psi S\phi C\omega & C\psi C\omega - S\psi S\phi S\omega & S\psi C\phi \\ S\psi S\omega - C\psi S\phi C\omega & -S\psi C\omega - C\psi S\phi S\omega & C\psi C\phi \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

Os estados de sabor e de partícula dos neutrinos são escritos como

$$\mathbf{v}_f(t) = \begin{pmatrix} v_e(t) \\ v_\mu(t) \\ v_\tau(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_p(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

A equação de evolução temporal dos neutrinos pode ser resolvida facilmente para os estados de partícula. Multiplicando (4.25) pela inversa da matriz de mistura

$$i \frac{d}{dt} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{v}_f(t) = \frac{1}{2E} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{U} \mathbf{M}^2 \mathbf{U}^{-1} \mathbf{v}_f(t) \quad (4.31)$$

que pode ser reescrita a partir da relação entre os estados de sabor e estados de partícula dos neutrinos como

$$i \frac{d}{dt} \mathbf{v}_p(t) = \frac{1}{2E} \mathbf{M}^2 \mathbf{v}_p(t), \quad (4.32)$$

cuja solução, para  $j=1,2,3$ , é

$$v_j(t) = e^{-i \frac{m_j^2}{2E} t} v_j(t_0). \quad (4.33)$$

Na forma matricial a solução na base das partículas é escrita como

$$\mathbf{v}_p(t) = \bar{\mathbf{G}}(t, t_0) \mathbf{v}_p(t_0) \quad (4.34)$$

sendo que

$$\bar{\mathbf{G}}(t, t_0) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{m_1^2}{2E}t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{m_2^2}{2E}t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\frac{m_3^2}{2E}t} \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

A solução para os estados de sabor é obtida multiplicando (4.34) pela matriz de mistura  $\mathbf{U}$

$$\mathbf{v}_f(t) = \mathbf{G}(t, t_0) \mathbf{v}_f(t_0), \quad (4.36)$$

onde  $\mathbf{G}(t, t_0) = \mathbf{U} \bar{\mathbf{G}}(t, t_0) \mathbf{U}^{-1}$  é o operador de evolução temporal.

Os termos  $g_{ij}$  do operador simétrico  $\mathbf{G}(t, t_0)$  podem ser escritos em função dos elementos  $U_{ij}$  da matriz  $\mathbf{U}$  e dos elementos  $\bar{g}_{ij}$  do operador  $\bar{\mathbf{G}}(t, t_0)$ :

$$\begin{aligned} g_{11} &= U_{11}^2 \bar{g}_{11} + U_{12}^2 \bar{g}_{22} + U_{13}^2 \bar{g}_{33}, \\ g_{22} &= U_{21}^2 \bar{g}_{11} + U_{22}^2 \bar{g}_{22} + U_{23}^2 \bar{g}_{33}, \\ g_{33} &= U_{31}^2 \bar{g}_{11} + U_{32}^2 \bar{g}_{22} + U_{33}^2 \bar{g}_{33}, \\ g_{12} &= U_{11} U_{21} \bar{g}_{11} + U_{12} U_{22} \bar{g}_{22} + U_{13} U_{23} \bar{g}_{33}, \\ g_{13} &= U_{11} U_{31} \bar{g}_{11} + U_{12} U_{32} \bar{g}_{22} + U_{13} U_{33} \bar{g}_{33}, \\ g_{23} &= U_{21} U_{31} \bar{g}_{11} + U_{22} U_{32} \bar{g}_{22} + U_{23} U_{33} \bar{g}_{33}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Para um estado inicial eletrônico  $\mathbf{v}_f(t_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

$$\mathbf{v}_f(t) = \mathbf{G}(t, t_0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

resultando em

$$\mathbf{v}_f(t) = \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{12} \\ g_{13} \end{pmatrix}. \quad (4.39)$$

As amplitudes de probabilidade do neutrino inicialmente eletrônico ser detectado, após um tempo  $t$ , no estado eletrônico, muônico ou tauônico são

$$A(\nu_e, \nu_e) = g_{11}, \quad (4.40)$$

$$A(\nu_e, \nu_\mu) = g_{12}, \quad (4.41)$$

$$A(\nu_e, \nu_\tau) = g_{13}. \quad (4.42)$$

Portanto, as amplitudes são escritas, a partir de (4.37) e (4.35), como

$$A(\nu_e, \nu_e) = U_{11}^2 e^{-i\frac{m_1^2}{2E}t} + U_{12}^2 e^{-i\frac{m_2^2}{2E}t} + U_{13}^2 e^{-i\frac{m_3^2}{2E}t}, \quad (4.43)$$

$$A(\nu_e, \nu_\mu) = U_{11}U_{21}e^{-i\frac{m_1^2}{2E}t} + U_{12}U_{22}e^{-i\frac{m_2^2}{2E}t} + U_{13}U_{23}e^{-i\frac{m_3^2}{2E}t}, \quad (4.44)$$

$$A(\nu_e, \nu_\tau) = U_{11}U_{31}e^{-i\frac{m_1^2}{2E}t} + U_{12}U_{32}e^{-i\frac{m_2^2}{2E}t} + U_{13}U_{33}e^{-i\frac{m_3^2}{2E}t}. \quad (4.45)$$

Para um estado inicial muônico  $\mathbf{v}_f(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

$$\mathbf{v}_f(t) = \begin{pmatrix} g_{12} \\ g_{22} \\ g_{23} \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

e as amplitudes são dadas pelas relações

$$A(\nu_\mu, \nu_e) = A(\nu_e, \nu_\mu), \quad (4.47)$$

$$A(\nu_\mu, \nu_\mu) = U_{21}^2 e^{-i\frac{m_1^2}{2E}t} + U_{22}^2 e^{-i\frac{m_2^2}{2E}t} + U_{23}^2 e^{-i\frac{m_3^2}{2E}t}, \quad (4.48)$$

$$A(\nu_\mu, \nu_\tau) = U_{21}U_{31} e^{-i\frac{m_1^2}{2E}t} + U_{22}U_{32} e^{-i\frac{m_2^2}{2E}t} + U_{23}U_{33} e^{-i\frac{m_3^2}{2E}t}. \quad (4.49)$$

Definindo  $\Delta_{ij}$  como a diferença entre as massas quadráticas dos neutrinos, ou seja,  $\Delta_{ij} = m_i^2 - m_j^2$  e considerando a aproximação  $\Delta_{31} \approx \Delta_{32} \gg \Delta_{21}$ , as probabilidades de oscilação  $P(\nu_y, \nu_x) = |A(\nu_y, \nu_x)|^2$  são

$$P(\nu_e, \nu_e) = 1 - 4U_{11}^2 U_{12}^2 \sin^2 \frac{\Delta_{21}t}{4E} - 4(U_{11}^2 + U_{12}^2)U_{13}^2 \sin^2 \frac{\Delta_{32}t}{4E}, \quad (4.50)$$

$$P(\nu_\mu, \nu_\mu) = 1 - 4U_{21}^2 U_{22}^2 \sin^2 \frac{\Delta_{21}t}{4E} - 4(U_{21}^2 + U_{22}^2)U_{23}^2 \sin^2 \frac{\Delta_{32}t}{4E}, \quad (4.51)$$

$$P(\nu_e, \nu_\mu) = -4U_{11}U_{21}U_{12}U_{22} \sin^2 \frac{\Delta_{21}t}{4E} - 4(U_{11}U_{21} + U_{12}U_{22})U_{13}U_{23} \sin^2 \frac{\Delta_{32}t}{4E}, \quad (4.52)$$

$$P(\nu_e, \nu_\tau) = -4U_{11}U_{31}U_{12}U_{32} \sin^2 \frac{\Delta_{21}t}{4E} - 4(U_{11}U_{31} + U_{12}U_{32})U_{13}U_{33} \sin^2 \frac{\Delta_{32}t}{4E}, \quad (4.53)$$

$$P(\nu_\mu, \nu_\tau) = -4U_{21}U_{31}U_{22}U_{32} \sin^2 \frac{\Delta_{21}t}{4E} - 4(U_{21}U_{31} + U_{22}U_{32})U_{23}U_{33} \sin^2 \frac{\Delta_{32}t}{4E}, \quad (4.54)$$

onde os elementos  $U_{ij}$  foram definidos na equação (4.29).

As probabilidades de sobrevivência dos neutrinos eletrônico e muônico são escritas explicitamente como

$$P(\nu_e, \nu_e) = 1 - C^4 \phi S^2 2\omega \sin^2 \frac{\Delta_{21}t}{4E} - S^2 2\phi \sin^2 \frac{\Delta_{32}t}{4E}, \quad (4.55)$$



$$P(\nu_\mu, \nu_\mu) = 1 - 4(C\psi S\omega + S\psi S\phi C\omega)^2 (C\psi C\omega - S\psi S\phi S\omega)^2 \sin^2 \frac{\Delta_{21}t}{4E} - 4S^2\psi C^2\phi (1 - S^2\psi C^2\phi) \sin^2 \frac{\Delta_{32}t}{4E}. \quad (4.56)$$

Para neutrinos atmosféricos as energias e trajetórias percorridas pelos neutrinos são tais que, aceitando as indicações de  $\Delta_{21}$  da análise de neutrinos solares,  $\sin^2 \frac{\Delta_{21}t}{4E} \rightarrow 0$ . Se o ângulo de mistura  $\phi$  for muito pequeno, o que permite tomar o elemento  $U_{13} \rightarrow 0$ , neutrinos inicialmente eletrônicos permanecem com o mesmo sabor, isto é, não oscilam. Nestas condições, somente a transição entre neutrinos do tipo muônico e tauônico é considerável.

### 4.3 Oscilação entre três sabores de neutrinos na presença de matéria com densidade constante e a aproximação para duas famílias

Na presença da matéria, a equação de evolução temporal dos neutrinos é dada pela relação

$$i \frac{d}{dt} \mathbf{v}_f(t) = \frac{1}{2E} (\mathbf{U} \mathbf{M}^2 \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{A}) \mathbf{v}_f(t), \quad (4.57)$$

onde  $\mathbf{A}$  é a matriz de interação com a matéria

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.58)$$

com  $A = 2\sqrt{2}G_F N_e E$ , onde  $G_F$  é a constante de Fermi e  $N_e$  a densidade de elétrons na matéria.

Considerando  $\tilde{\mathbf{U}}$  a matriz que acopla estados de sabor a estados de partícula na presença de matéria na forma

$$\mathbf{v}_f(t) = \tilde{\mathbf{U}}\tilde{\mathbf{v}}_p(t), \quad (4.59)$$

a equação (4.57), ao ser multiplicada por  $\tilde{\mathbf{U}}^{-1}$ , o que corresponde a diagonalização do hamiltoniano de (4.57) pode ser reescrita como na relação abaixo

$$i \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{v}}_p(t) = \frac{1}{2E} \tilde{\mathbf{M}}^2 \tilde{\mathbf{v}}_p(t), \quad (4.60)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{M}}^2 = \tilde{\mathbf{U}}^{-1} (\mathbf{U} \mathbf{M}^2 \mathbf{U}^{-1} + \mathbf{A}) \tilde{\mathbf{U}} \quad (4.61)$$

ou, genericamente

$$\tilde{\mathbf{M}}^2 = \begin{pmatrix} \tilde{m}_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{m}_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{m}_3^2 \end{pmatrix}. \quad (4.62)$$

Os termos  $\tilde{m}_i^2$  são as massas quadráticas efetivas na presença da matéria. A matriz de mistura  $\tilde{\mathbf{U}}$  tem a mesma forma de (4.29) com ângulos de mistura efetivos representados por  $\tilde{\phi}$ ,  $\tilde{\omega}$  e  $\tilde{\psi}$ .

A solução de (4.60) é

$$\tilde{\mathbf{v}}_p(t) = \tilde{\mathbf{G}}(t, t_0) \tilde{\mathbf{v}}_p(t_0), \quad (4.63)$$

sendo que

$$\tilde{\mathbf{G}}(t, t_0) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\tilde{m}_1^2 t}{2E}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\tilde{m}_2^2 t}{2E}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\frac{\tilde{m}_3^2 t}{2E}} \end{pmatrix}. \quad (4.64)$$

A solução para estados de sabor é obtida multiplicando (4.63) por  $\tilde{\mathbf{U}}$

$$\mathbf{v}_f(t) = \tilde{\mathbf{U}}\tilde{\mathbf{G}}(t, t_0)\tilde{\mathbf{U}}^{-1}\mathbf{v}_f(t_0). \quad (4.65)$$

As amplitudes de oscilação são similares às obtidas para o caso de evolução no vácuo, bastando a troca das massas quadráticas  $m_i^2$  e dos ângulos de mistura  $\phi$ ,  $\omega$  e  $\psi$  pelas massas quadráticas efetivas  $\tilde{m}_i^2$  e pelos ângulos de mistura efetivos  $\tilde{\phi}$ ,  $\tilde{\omega}$  e  $\tilde{\psi}$ . Sendo assim, as amplitudes de oscilação para neutrinos na presença de matéria constante são

$$\tilde{A}(v_e, v_e) = \tilde{U}_{11}^2 e^{-i\frac{\tilde{m}_1^2 t}{2E}} + \tilde{U}_{12}^2 e^{-i\frac{\tilde{m}_2^2 t}{2E}} + \tilde{U}_{13}^2 e^{-i\frac{\tilde{m}_3^2 t}{2E}}, \quad (4.66)$$

$$\tilde{A}(v_e, v_\mu) = \tilde{U}_{11}\tilde{U}_{21} e^{-i\frac{\tilde{m}_1^2 t}{2E}} + \tilde{U}_{12}\tilde{U}_{22} e^{-i\frac{\tilde{m}_2^2 t}{2E}} + \tilde{U}_{13}\tilde{U}_{23} e^{-i\frac{\tilde{m}_3^2 t}{2E}}, \quad (4.67)$$

$$\tilde{A}(v_e, v_\tau) = \tilde{U}_{11}\tilde{U}_{31} e^{-i\frac{\tilde{m}_1^2 t}{2E}} + \tilde{U}_{12}\tilde{U}_{32} e^{-i\frac{\tilde{m}_2^2 t}{2E}} + \tilde{U}_{13}\tilde{U}_{33} e^{-i\frac{\tilde{m}_3^2 t}{2E}}, \quad (4.68)$$

$$\tilde{A}(v_\mu, v_\mu) = \tilde{U}_{21}^2 e^{-i\frac{\tilde{m}_1^2 t}{2E}} + \tilde{U}_{22}^2 e^{-i\frac{\tilde{m}_2^2 t}{2E}} + \tilde{U}_{23}^2 e^{-i\frac{\tilde{m}_3^2 t}{2E}}, \quad (4.69)$$

$$\tilde{A}(v_\mu, v_\tau) = \tilde{U}_{21}\tilde{U}_{31} e^{-i\frac{\tilde{m}_1^2 t}{2E}} + \tilde{U}_{22}\tilde{U}_{32} e^{-i\frac{\tilde{m}_2^2 t}{2E}} + \tilde{U}_{23}\tilde{U}_{33} e^{-i\frac{\tilde{m}_3^2 t}{2E}}. \quad (4.70)$$

As probabilidades de oscilação são dadas, portanto, pelas relações

$$\tilde{P}(v_e, v_e) = 1 - 4\tilde{U}_{11}^2\tilde{U}_{12}^2 \sin^2 \frac{\tilde{\Delta}_{21}t}{4E} - 4\tilde{U}_{11}^2\tilde{U}_{13}^2 \sin^2 \frac{\tilde{\Delta}_{31}t}{4E} - \tilde{U}_{12}^2\tilde{U}_{13}^2 \sin^2 \frac{\tilde{\Delta}_{32}t}{4E}, \quad (4.71)$$

$$\tilde{P}(v_\mu, v_\mu) = 1 - 4\tilde{U}_{21}^2\tilde{U}_{22}^2 \sin^2 \frac{\tilde{\Delta}_{21}t}{4E} - 4\tilde{U}_{21}^2\tilde{U}_{23}^2 \sin^2 \frac{\tilde{\Delta}_{31}t}{4E} - 4\tilde{U}_{22}^2\tilde{U}_{23}^2 \sin^2 \frac{\tilde{\Delta}_{32}t}{4E}, \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}(v_e, v_\mu) = & -4\tilde{U}_{11}\tilde{U}_{21}\tilde{U}_{12}\tilde{U}_{22} \text{sen}^2 \frac{\tilde{\Delta}_{21}t}{4E} - 4\tilde{U}_{11}\tilde{U}_{21}\tilde{U}_{13}\tilde{U}_{23} \text{sen}^2 \frac{\tilde{\Delta}_{31}t}{4E}, \\ & -4\tilde{U}_{12}\tilde{U}_{22}\tilde{U}_{13}\tilde{U}_{23} \text{sen}^2 \frac{\tilde{\Delta}_{32}t}{4E}, \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}(v_e, v_\tau) = & -4\tilde{U}_{11}\tilde{U}_{31}\tilde{U}_{12}\tilde{U}_{32} \text{sen}^2 \frac{\tilde{\Delta}_{21}t}{4E} - 4\tilde{U}_{11}\tilde{U}_{31}\tilde{U}_{13}\tilde{U}_{33} \text{sen}^2 \frac{\tilde{\Delta}_{31}t}{4E}, \\ & -4\tilde{U}_{12}\tilde{U}_{32}\tilde{U}_{13}\tilde{U}_{33} \text{sen}^2 \frac{\tilde{\Delta}_{32}t}{4E}, \end{aligned} \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}(v_\mu, v_\tau) = & -4\tilde{U}_{21}\tilde{U}_{31}\tilde{U}_{22}\tilde{U}_{32} \text{sen}^2 \frac{\tilde{\Delta}_{21}t}{4E} - 4\tilde{U}_{21}\tilde{U}_{31}\tilde{U}_{23}\tilde{U}_{33} \text{sen}^2 \frac{\tilde{\Delta}_{31}t}{4E}, \\ & -4\tilde{U}_{22}\tilde{U}_{32}\tilde{U}_{23}\tilde{U}_{33} \text{sen}^2 \frac{\tilde{\Delta}_{32}t}{4E}. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Situações em que o caminho a ser percorrido pelo neutrino é da ordem do comprimento de oscilação  $\tilde{\lambda}_{21}$ , os termos em  $\tilde{\Delta}_{31}$  e  $\tilde{\Delta}_{32}$  oscilam muito rapidamente, o que permite que sejam tomados os valores médios de  $\text{sen}^2 \frac{\tilde{\Delta}_{31}t}{4E}$  e  $\text{sen}^2 \frac{\tilde{\Delta}_{32}t}{4E}$ . Para estas situações obtém-se as probabilidades de oscilação

$$\tilde{P}(v_e, v_e) \simeq 1 - 4\tilde{U}_{11}^2\tilde{U}_{12}^2 \text{sen}^2 \frac{\tilde{\Delta}_{21}t}{4E} - 2(\tilde{U}_{11}^2\tilde{U}_{13}^2 + \tilde{U}_{12}^2\tilde{U}_{13}^2), \quad (4.76)$$

$$\tilde{P}(v_\mu, v_\mu) \simeq 1 - 4\tilde{U}_{21}^2\tilde{U}_{22}^2 \text{sen}^2 \frac{\tilde{\Delta}_{21}t}{4E} - 2(\tilde{U}_{21}^2\tilde{U}_{23}^2 + \tilde{U}_{22}^2\tilde{U}_{23}^2), \quad (4.77)$$

$$\tilde{P}(v_e, v_\mu) \simeq -4\tilde{U}_{11}\tilde{U}_{21}\tilde{U}_{12}\tilde{U}_{22} \text{sen}^2 \frac{\tilde{\Delta}_{21}t}{4E} - 2(\tilde{U}_{11}\tilde{U}_{21} + \tilde{U}_{12}\tilde{U}_{22})\tilde{U}_{13}\tilde{U}_{23}, \quad (4.78)$$

$$\tilde{P}(v_e, v_\tau) \simeq -4\tilde{U}_{11}\tilde{U}_{31}\tilde{U}_{12}\tilde{U}_{32} \text{sen}^2 \frac{\tilde{\Delta}_{21}t}{4E} - 2(\tilde{U}_{11}\tilde{U}_{31} + \tilde{U}_{12}\tilde{U}_{32})\tilde{U}_{13}\tilde{U}_{33}, \quad (4.79)$$

$$\tilde{P}(v_\mu, v_\tau) \simeq -4\tilde{U}_{21}\tilde{U}_{31}\tilde{U}_{22}\tilde{U}_{32} \text{sen}^2 \frac{\tilde{\Delta}_{21}t}{4E} - 2(\tilde{U}_{21}\tilde{U}_{31} + \tilde{U}_{22}\tilde{U}_{32})\tilde{U}_{23}\tilde{U}_{33}. \quad (4.80)$$

A probabilidade de sobrevivência do neutrino eletrônico, portanto, explicitando os termos da matriz de mistura, é

$$\tilde{P}(v_e, v_e) \approx 1 - C^4 \tilde{\phi} S^2 2\tilde{\omega} \text{sen}^2 \frac{\tilde{\Delta}_{21} t}{4E} - 2C^2 \tilde{\phi} S^2 \tilde{\phi} \quad (4.81)$$

ou ainda,

$$\tilde{P}(v_e, v_e) \approx C^4 \tilde{\phi} \left( 1 - S^2 2\tilde{\omega} \text{sen}^2 \frac{\tilde{\Delta}_{21} t}{4E} \right) + S^4 \tilde{\phi}. \quad (4.82)$$

Nesta situação, segundo Kuo e Pantaleone (Ref. [9]), os ângulos de mistura efetivos  $\tilde{\phi}$  e  $\tilde{\psi}$  (na presença da matéria) assumem os mesmos valores dos ângulos de mistura  $\phi$  e  $\psi$  (no vácuo) e os termos  $\tilde{m}_1^2$ ,  $\tilde{m}_2^2$  e  $\text{sen}^2 2\tilde{\omega}$  adquirem expressões similares às obtidas para o contexto de dois sabores de neutrinos (4.22), (4.23) e (4.24), bastando a modificação  $A \rightarrow C^2 \phi A$  nessas expressões. Sendo assim, nestas condições, a probabilidade de sobrevivência dos neutrinos (4.82) pode ser escrita, como em [12] em função da probabilidade de sobrevivência do neutrino no contexto de duas famílias  $P_{2\nu}^S$  definida pela relação (4.9) com a alteração já citada

$$\tilde{P}(v_e, v_e) \approx C^4 \phi P_{2\nu}^S + S^4 \phi. \quad (4.83)$$

No caso de neutrinos atmosféricos, situação em que  $\text{sen}^2 \frac{\tilde{\Delta}_{21} t}{4E} \rightarrow 0$ , pois  $\tilde{\Delta}_{31} \approx \tilde{\Delta}_{32} \gg \tilde{\Delta}_{21}$ , as probabilidades de sobrevivência de neutrino eletrônico e neutrino muônico são aproximadas para

$$\tilde{P}(v_e, v_e) \approx 1 - S^2 2\tilde{\phi} \text{sen}^2 \frac{\tilde{\Delta}_{32} t}{4E}, \quad (4.84)$$

$$\tilde{P}(v_\mu, v_\mu) \approx 1 - 4S^2 \tilde{\psi} C^2 \tilde{\phi} \left( 1 - S^2 \tilde{\psi} C^2 \tilde{\phi} \right) \text{sen}^2 \frac{\tilde{\Delta}_{32} t}{4E} \quad (4.85)$$

e as probabilidades de transição são aproximadas para

$$\tilde{P}(\nu_e, \nu_\mu) \approx S^2 \tilde{\psi} S^2 2\tilde{\phi} \text{sen}^2 \frac{\tilde{\Delta}_{32} t}{4E}, \quad (4.86)$$

$$\tilde{P}(\nu_e, \nu_\tau) \approx C^2 \tilde{\psi} S^2 2\tilde{\phi} \text{sen}^2 \frac{\tilde{\Delta}_{32} t}{4E}, \quad (4.87)$$

$$\tilde{P}(\nu_\mu, \nu_\tau) \approx C^2 \tilde{\phi} S^2 2\tilde{\psi} \text{sen}^2 \frac{\tilde{\Delta}_{32} t}{4E}. \quad (4.88)$$

Para esta situação, em que  $\tilde{\Delta}_{21}$  tem valor pequeno, de acordo com a referência [9], o ângulo de mistura efetivo  $\tilde{\psi}$  assume o valor do ângulo de mistura no vácuo  $\psi$ . Além disso, os termos  $\tilde{m}_2^2$ ,  $\tilde{m}_3^2$  e  $\text{sen}^2 2\tilde{\phi}$  têm a mesma forma dos termos definidos nas relações (4.22), (4.23) e (4.24), com a troca de  $\Delta_{21}$  e  $\Sigma_{21}$  por  $\Delta_{32}$  e  $\Sigma_{32}$ . Isto significa, simplesmente, reobter a seção 4.1 considerando sabores de neutrino muônico e tauônico. Sendo assim, as probabilidades obtidas de (4.84), (4.86) e (4.87) podem ser reescritas em função da probabilidade de transição entre neutrinos muônicos e tauônicos no contexto da existência destes dois sabores  $P_{2\nu}^T$ . Sob estas considerações são obtidas as mesmas relações de Bernabéu [13].

$$\tilde{P}(\nu_e, \nu_e) \approx 1 - P_{2\nu}^T, \quad (4.89)$$

$$\tilde{P}(\nu_e, \nu_\mu) \approx S^2 \psi P_{2\nu}^T, \quad (4.90)$$

$$\tilde{P}(\nu_e, \nu_\tau) \approx C^2 \psi P_{2\nu}^T. \quad (4.91)$$

Definindo

$$S^2 2\tilde{\alpha} = 4S^2 \psi C^2 \tilde{\phi} (1 - S^2 \psi C^2 \tilde{\phi}), \quad (4.92)$$

a probabilidade de sobrevivência de neutrinos muônicos e a probabilidade de transição para o estado  $\nu_x$ , que é uma combinação de estados eletrônico e tauônico, são dadas por

$$\tilde{P}(\nu_\mu, \nu_\mu) \approx 1 - S^2 2\tilde{\alpha} \text{sen}^2 \frac{\tilde{\Delta}_{32} t}{4E}, \quad (4.93)$$

$$\tilde{P}(\nu_\mu, \nu_x) \simeq S^2 2\tilde{\alpha} \sin^2 \frac{\tilde{\Delta}_{32} t}{4E}, \quad (4.94)$$

que são similares às probabilidades de oscilação em duas famílias (4.20) e (4.21) com  $S^2 2\tilde{\phi}$  dado pela relação (4.24) e não  $S^2 2\tilde{\alpha}$  que é definido na equação (4.92).

#### 4.4 Oscilação entre dois sabores de neutrinos na presença de matéria com densidade variável

A equação de evolução de neutrinos na presença da matéria no contexto de existência de dois sabores de neutrinos é dada pela relação (4.13) que pode ser reescrita, em função da trajetória, na forma

$$i \frac{d}{dx} \mathbf{v}_f(x) = \frac{1}{4E} \left[ (\Sigma_{21} + A) + \begin{pmatrix} A - \Delta_{21} \cos 2\theta & \Delta_{21} \sin 2\theta \\ \Delta_{21} \sin 2\theta & \Delta_{21} \cos 2\theta - A \end{pmatrix} \right] \mathbf{v}_f(x). \quad (4.95)$$

Os termos  $\mathbf{v}_f(x)$ ,  $\Sigma_{21}$  e  $\Delta_{21}$  foram definidos na seção 4.1. Lembrando que  $A = 2\sqrt{2}G_F N_e E$ , o hamiltoniano da relação (4.1) é dado, a menos do termo proporcional à identidade  $(\Sigma_{21} + A)$  que apenas introduz no operador de evolução temporal um fator de fase constante, por

$$\tilde{H} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} G_F N_e - \frac{\Delta_{21}}{4E} \cos 2\theta & \frac{\Delta_{21}}{4E} \sin 2\theta \\ \frac{\Delta_{21}}{4E} \sin 2\theta & \frac{\Delta_{21}}{4E} \cos 2\theta - \frac{\sqrt{2}}{2} G_F N_e \end{pmatrix}. \quad (4.96)$$

A quantidade  $N_e$ , neste caso, é a densidade eletrônica da Terra que não é constante sendo descrita pela referência [10] como consta no apêndice D.

Definindo  $\frac{\Delta_{21}}{2E} = k$ , tem-se que

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2}G_F N_e(x) - k \cos 2\theta & k \sin 2\theta \\ k \sin 2\theta & k \cos 2\theta - \sqrt{2}G_F N_e(x) \end{pmatrix}. \quad (4.97)$$

A estratégia de cálculo, como utilizada por Lisi [10], consiste em escrever  $U(x_F, x_I)$  como produtória de operadores de evolução infinitesimais

$$U(x_F, x_I) = \prod_j U_j(x_j, x_{j-1}), \quad (4.98)$$

sendo que ao operador  $U_j$  está associado o hamiltoniano

$$\tilde{H}_j = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2}G_F N_j(x) - k \cos 2\theta & k \sin 2\theta \\ k \sin 2\theta & k \cos 2\theta - \sqrt{2}G_F N_j(x) \end{pmatrix}, \quad (4.99)$$

onde  $N_j(x)$  é a densidade eletrônica no elemento infinitesimal  $j$ .

Considerando

$$N_j(x) = \bar{N}_j + \delta N_j(x) \quad (4.100)$$

com

$$\bar{N}_j = \int_{x_{j-1}}^{x_j} dx N_j(x) \frac{1}{x_j - x_{j-1}} \quad (4.101)$$

obtém-se a seguinte relação para o hamiltoniano

$$H_j = \bar{H}_j + \delta H_j(x), \quad (4.102)$$

onde a parte constante é



$$\bar{H}_j = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2}G_F\bar{N}_j - k \cos 2\theta & k \sin 2\theta \\ k \sin 2\theta & k \cos 2\theta - \sqrt{2}G_F\bar{N}_j \end{pmatrix} \quad (4.103)$$

e a perturbação

$$\delta H_j(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} G_F \begin{pmatrix} \delta \bar{N}_j(x) & 0 \\ 0 & -\delta \bar{N}_j(x) \end{pmatrix}. \quad (4.104)$$

Portanto,

$$\mathbf{v}_f(x_F) = \prod_j U_j(x_j, x_{j-1}) \mathbf{v}_f(x_I), \quad (4.105)$$

sendo o operador de evolução

$$U_j(x_j, x_{j-1}) = \text{Exp} \left[ -i \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\bar{H}_j + \delta H_j(x)) dx \right]. \quad (4.106)$$

Utilizando a propriedade (4.10) de expansionais

$$U_j(x_j, x_{j-1}) = \text{Exp} \left[ -i \int_{x_{j-1}}^{x_j} \bar{H}_j dx \right] \text{Exp} \left[ -i \int_{x_{j-1}}^{x_j} dx E_1(x) \delta H_j(x) E_2(x) \right] \quad (4.107)$$

com  $E_1(x) = \text{Exp} \left[ -i \int_x^{x_{j-1}} \bar{H}_j du \right]$  e  $E_2(x) = \text{Exp} \left[ -i \int_{x_{j-1}}^x \bar{H}_j du \right]$ .

Como  $\bar{H}_j$  é constante, os expansionais deste termo se reduzem a exponenciais

$$U_j(x_j, x_{j-1}) = e^{-i(x_j - x_{j-1})\bar{H}_j} \text{Exp} \left[ -i \int_{x_{j-1}}^{x_j} dx e^{-i(x_{j-1} - x)\bar{H}_j} \delta H_j(x) e^{-i(x - x_{j-1})\bar{H}_j} \right]. \quad (4.108)$$

Definir o hamiltoniano na forma (4.102) permite que o operador de evolução infinitesimal seja tomado em primeira ordem de aproximação, sendo dado por

$$U_j(x_j, x_{j-1}) = e^{-i(x_j - x_{j-1})\bar{H}_j} - i \int_{x_{j-1}}^{x_j} dx e^{-i(x_j - x)\bar{H}_j} \delta H_j(x) e^{-i(x - x_{j-1})\bar{H}_j}. \quad (4.109)$$

Ao efetuar a integração, cálculo apresentado em detalhes no apêndice E, obtém-se a seguinte expressão

$$U_j(x_j, x_{j-1}) = \begin{pmatrix} c_j + is_j \cos 2\tilde{\theta} & -is_j \sin 2\tilde{\theta} \\ -is_j \sin 2\tilde{\theta} & c_j - is_j \cos 2\tilde{\theta} \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \sin 2\tilde{\theta} \begin{pmatrix} \sin 2\tilde{\theta} C_j & \cos 2\tilde{\theta} C_j - i \sin 2\tilde{\theta} S_j \\ \cos 2\tilde{\theta} C_j + i \sin 2\tilde{\theta} S_j & -\sin 2\tilde{\theta} C_j \end{pmatrix}, \quad (4.110)$$

onde

$$c_j = \cos \left( k_m \frac{x_j - x_{j-1}}{2} \right), \quad (4.111)$$

$$s_j = \sin \left( k_m \frac{x_j - x_{j-1}}{2} \right) \quad (4.112)$$

e, ainda,

$$C_j = \sqrt{2} G_F \int_{x_{j-1}}^{x_j} dx \delta N_j(x) \cos(k_m(x - \bar{x})), \quad (4.113)$$

$$S_j = \sqrt{2} G_F \int_{x_{j-1}}^{x_j} dx \delta N_j(x) \sin(k_m(x - \bar{x})), \quad (4.114)$$

onde

$$\bar{x} = \frac{x_j + x_{j-1}}{2} \quad (4.115)$$

e com as seguintes quantidades sendo definidas

$$k_m = \frac{\tilde{\Delta}_{21}}{2E}, \quad (4.116)$$

$$\text{sen } 2\tilde{\theta} = \frac{\Delta_{21}}{\tilde{\Delta}_{21}} \text{sen } 2\theta, \quad (4.117)$$

$$\tilde{\Delta}_{21} = \sqrt{\Delta_{21}^2 + \bar{A}^2 - 2\bar{A}\Delta_{21} \cos 2\theta}. \quad (4.118)$$

Ao tomar o operador de evolução infinitesimal em primeira ordem de aproximação, este não é automaticamente unitário, sendo necessário normalizá-lo. A unitariedade de  $U_j(x_j, x_{j-1})$  fica garantida pela redefinição

$$U'_j(x_j, x_{j-1}) = \frac{2}{\sqrt{4 + \text{sen}^2 2\tilde{\theta} (S_j^2 - C_j^2)}} U_j(x_j, x_{j-1}). \quad (4.119)$$

Para neutrinos atmosféricos, as probabilidades de oscilação entre três sabores de neutrinos são aproximadas para as relações (4.84) a (4.88). Destas aproximações, a probabilidade de sobrevivência de neutrinos muônicos e a probabilidade de transição de neutrinos muônicos para os outros dois sabores podem ser descritas pelas equações (4.93) e (4.94) que são similares à oscilação em duas famílias, com a redefinição (4.92) do ângulo de mistura entre os sabores muônico e tauônico, levando a estados de partícula 1 e 2.

As probabilidades de sobrevivência e transição de neutrinos muônicos considerando três sabores de neutrinos na presença de matéria variável, então, podem ser definidas como probabilidades de oscilação entre sabores muônico e tauônico com novo ângulo de mistura efetivo  $\tilde{\alpha}$  obtidas a partir de um operador de evolução com a forma (4.110). Sendo assim, o operador de evolução infinitesimal normalizado é dado pela relação

$$U'_j(x_j, x_{j-1}) = \frac{2}{\sqrt{4 + \text{sen}^2 2\tilde{\alpha} (S_j^2 - C_j^2)}} \begin{pmatrix} c_j + is_j \cos 2\tilde{\alpha} & -is_j \text{sen } 2\tilde{\alpha} \\ -is_j \text{sen } 2\tilde{\alpha} & c_j - is_j \cos 2\tilde{\alpha} \end{pmatrix}, \quad (4.120)$$

$$-\frac{i}{2} \text{sen } 2\tilde{\alpha} \begin{pmatrix} \text{sen } 2\tilde{\alpha} C_j & \cos 2\tilde{\alpha} C_j - i \text{sen } 2\tilde{\alpha} S_j \\ \cos 2\tilde{\alpha} C_j + i \text{sen } 2\tilde{\alpha} S_j & -\text{sen } 2\tilde{\alpha} C_j \end{pmatrix}$$

onde  $s_j$ ,  $c_j$ ,  $S_j$  e  $C_j$  são dados pelas relações (4.111) a (4.114), o ângulo  $\tilde{\alpha}$  é definido em (4.92) e os parâmetros são redefinidos como

$$k_m = \frac{\tilde{\Delta}_{32}}{2E}, \quad (4.121)$$

$$\text{sen } 2\tilde{\phi} = \frac{\Delta_{32}}{\tilde{\Delta}_{32}} \text{sen } 2\phi, \quad (4.122)$$

$$\tilde{\Delta}_{32} = \sqrt{\Delta_{32}^2 + \bar{A}^2 - 2\bar{A}\Delta_{32} \cos 2\alpha}, \quad (4.123)$$

com  $\bar{A} = 2\sqrt{2}G_F \bar{N}_e E$ ,  $\Delta_{32}$  a diferença de massas quadráticas,  $\phi$  e  $\psi$  os ângulos de mistura no vácuo.

## 5 Procedimentos e resultados

### 5.1 Cálculo do fluxo de neutrinos não oscilantes

Os espectros de neutrinos são calculados seguindo o procedimento descrito no capítulo 3 que, de forma resumida envolve os seguintes passos:

- Considerar o fluxo de mésons dado pela expressão de interpolação (3.113) com  $\pi_L^\pm(t)$ ,  $K_L^j(t)$ ,  $\pi_H^\pm(t)$  e  $K_H^j(t)$  definidos por (3.108), (3.109), (3.111) e (3.112) respectivamente.
- Considerar as fontes de múons polarizados devido ao decaimento de  $\pi^\pm$  e  $K^\pm$  dadas pela relação (3.136).
- Calcular o fluxo de múons polarizados levando em conta perda de energia através da equação (3.137) com a fonte de múons do passo anterior.
- Calcular o fluxo de neutrinos e antineutrinos muônicos produzidos diretamente pelo decaimento de mésons a partir de (3.150) e (3.151) com os fluxos de mésons do primeiro passo.
- Das relações (3.154) a (3.155), calcular o fluxo de neutrinos gerados pelo decaimento de múons.

$i \backslash j$	$p$	$n$	$\pi^+$	$\pi^-$	$K^+$	$K^-$	$K_L$
$p$	0,2630	0,0350	0,0460	0,0330	0,0090	0,0028	0,0059
$n$	0,0350	0,2630	0,0330	0,0460	0,0065	0,0028	0,0014
$\pi^+$	0	0	0,2430	0,0280	0,0067	0,0067	0,0067
$\pi^-$	0	0	0,0280	0,2430	0,0067	0,0067	0,0067
$K^+$	0	0	0	0	0,2110	0	0,0070
$K^-$	0	0	0	0	0	0,2110	0,0070
$K_L$	0	0	0	0	0,0070	0,0070	0,2110

Tabela 5.1: Valores dos fatores de interação hadrônica  $Z_{ij}$ .

Os fluxos de múons e neutrinos são calculados numericamente para um determinado ângulo zenital e para uma dada profundidade. Para a efetuação destes passos os parâmetros que descrevem o fluxo primário, os fatores hadrônicos  $Z$  e os comprimentos de interação precisam ser definidos.

Na referência [1] são usados os seguintes valores dos parâmetros do fluxo primário

$$\alpha = 2,7 ,$$

$$p_0 (1 + \delta_0) = 1,7 \frac{\text{GeV}^{1,7}}{\text{cm}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{sr}} , \quad (5.1)$$

$$\delta_0 = 0,14 .$$

Para os comprimentos de interação e para os fatores  $Z_{ij}$  são utilizados por Lipari [1] os valores sugeridos por Gaisser [2]. Na tabela 5.1 estão listados estes valores de  $Z_{ij}$  e os comprimentos de interação são

$$\lambda_p = 86 \text{ g/cm}^2 ,$$

$$\lambda_\pi = 116 \text{ g/cm}^2 , \quad (5.2)$$

$$\lambda_K = 138 \text{ g/cm}^2 .$$

O comprimento de decaimento de uma partícula depende da sua massa e de sua vida média que constam, para as partículas de interesse, na tabela 5.2.

	$c\tau_0$ (cm)	$m$ (MeV/c <sup>2</sup> )
$\mu^\pm$	$6,59 \times 10^4$	105,659
$\pi^\pm$	780	139,569
$K^\pm$	371	493,67
$K_L$	1554	497,72

Tabela 5.2: Constantes de decaimento.

Além da massa e da vida média da partícula,  $\lambda^{dec}$  depende da densidade  $\rho(t, \theta)$  que não é definida analiticamente para uma direção  $\theta$  qualquer. A forma de contornar este problema, numericamente, é gerar uma tabela da altura, densidade e profundidade utilizando a relação entre estas quantidades definida no apêndice A. Dessa forma, no programa montado para calcular os fluxos de neutrinos, são utilizadas a profundidade e a densidade que constam nesta tabela. Já a perda de energia dos múons é aproximada para  $\frac{dE}{dt} = a$  [2], onde a constante  $a$  é definida como  $a = 2 \frac{\text{MeV}}{\text{g/cm}^2}$

O fluxo de múons é calculado numericamente como descrito acima, sendo assim, os fluxos de neutrinos produzidos pelo decaimento de múons podem ser calculados de duas formas: a primeira é gerar uma tabela no terceiro passo com o fluxo de múons para várias energias e várias profundidades diferentes e utilizar esta tabela para o quinto passo; a segunda opção é utilizar diretamente a equação (3.137) do fluxo de múons para obter o fluxo de neutrinos das relações (3.152), (3.153), (3.154) e (3.155). Foi escolhida a segunda opção para a obtenção do fluxo de neutrinos.

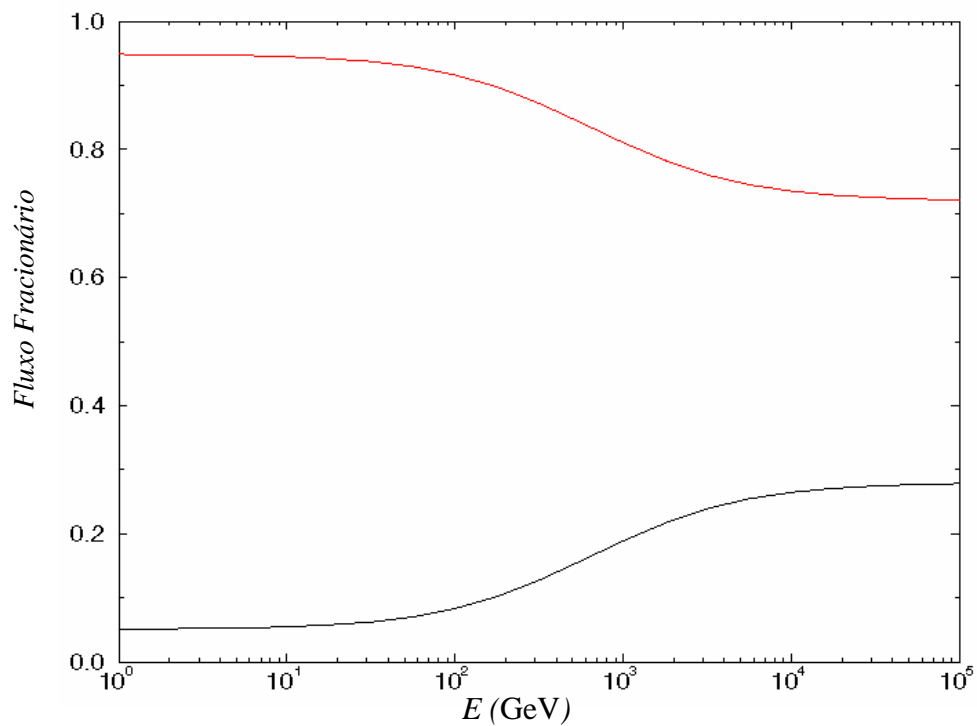


Figura 5.1: Contribuição fracionária do decaimento de píons (vermelho) e káons (preto) ao fluxo de  $\mu^+ + \mu^-$  em função da energia do múon no nível do mar para ângulo zenital  $\theta = 0$ .

Nas figuras 5.1 e 5.2 são apresentados gráficos da contribuição fracionária de píons e káons ao fluxo de múons mais antimúons no nível do mar para  $\theta=0^\circ$  e do fluxo de neutrinos mais antineutrinos no nível do mar produzidos pelo decaimento de píons, káons e múons para  $\cos\theta=0,4$ .

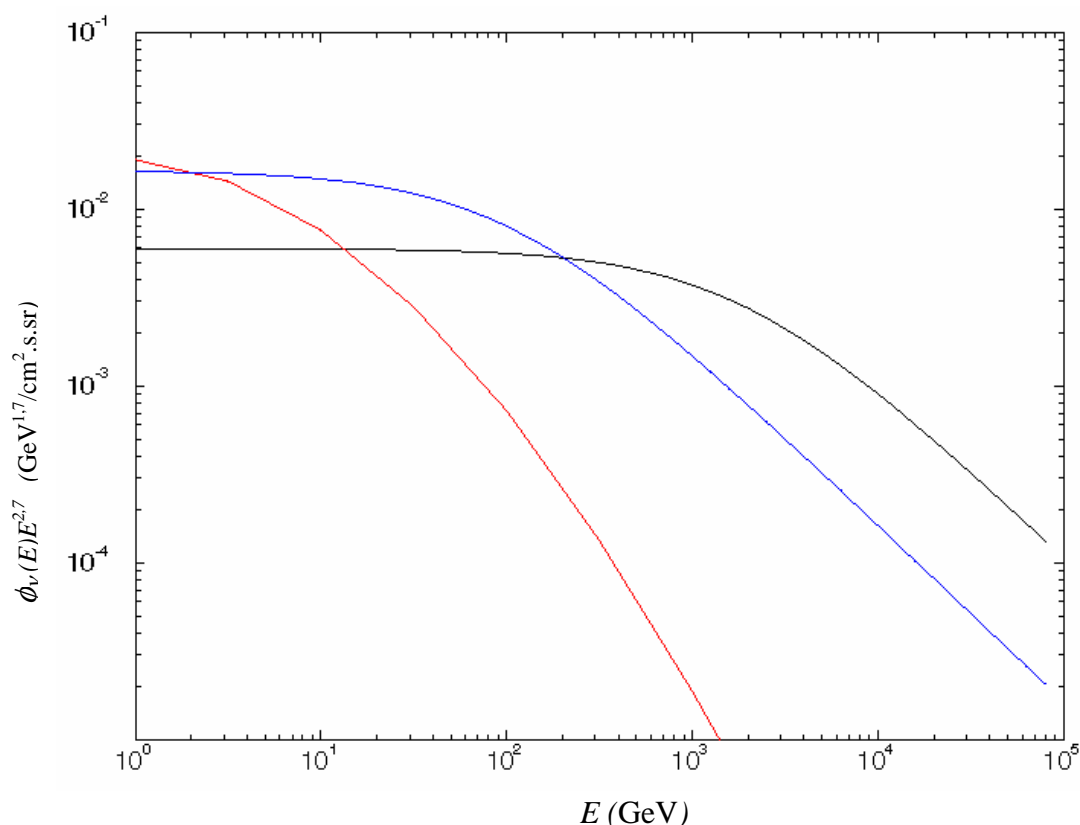


Figura 5.2: Fluxo de  $\nu_\mu + \bar{\nu}_\mu$  multiplicado por  $E^{2.7}$  em função da energia dos neutrinos para  $\cos\theta = 0,4$  no nível do mar gerados por píons (azul), káons (preto) e múons (vermelho).

Os gráficos das figuras 5.1 e 5.2 também constam no artigo de Lipari [1] e são reobtidos aqui como forma de verificar se as considerações feitas em [1] foram bem compreendidas e se os programas para calcular o fluxo de múons e de neutrinos foram montados corretamente.



## 5.2 Cálculo da taxa de produção de neutrinos

Para que a oscilação entre sabores de neutrinos seja levada em conta é necessário obter a taxa de produção de neutrinos atmosféricos em função da profundidade para uma determinada direção e uma dada energia que é a soma das fontes de cada um dos neutrinos dada pelas relações (3.139), (3.140), (3.141) e (3.142).

Os passos para o cálculo das taxas de produção de neutrinos são semelhantes aos da seção anterior. A diferença é que a integral na profundidade nos dois últimos passos não é realizada, a energia é tomada como parâmetro e a profundidade torna-se a variável.

A taxa de produção de neutrinos pode ser escrita em função da distância entre o ponto de produção e o detector fazendo uso do Jacobiano na forma

$$\frac{\partial \phi_{\nu_i}(E, t, \theta)}{\partial l} = \frac{\partial \phi_{\nu_i}(E, t, \theta)}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial l}, \quad (5.3)$$

onde da relação (A.3)

$$\frac{\partial t}{\partial l} = \rho(h(l, \theta)) \quad (5.4)$$

Como para energias maiores que alguns GeVs, os efeitos geomagnéticos passam a ser desprezíveis, a aproximação de chuvaros unidimensionais é válida e a faixa que engloba neutrinos solares é evitada e, ainda, sabendo que energias muito altas levam a comprimento de ondas de oscilação muito grandes foi escolhida uma energia intermediária de 5 GeV para ser trabalhada. O cálculo da taxa de produção envolve outra escolha, o ângulo zenital. Para  $\theta$  optou-se pelo valor de  $70^\circ$ , pois para este ângulo o fluxo de neutrinos down passa apenas pela camada mais externa da Terra, o manto externo (Apêndice D).

A tabela 5.3 contém valores da taxa de produção de neutrinos muônicos em função da distância  $l$  para  $\theta = 70^\circ$  e energia dos neutrinos de 5 GeV. Na figura 5.3 estes dados são apresentados graficamente

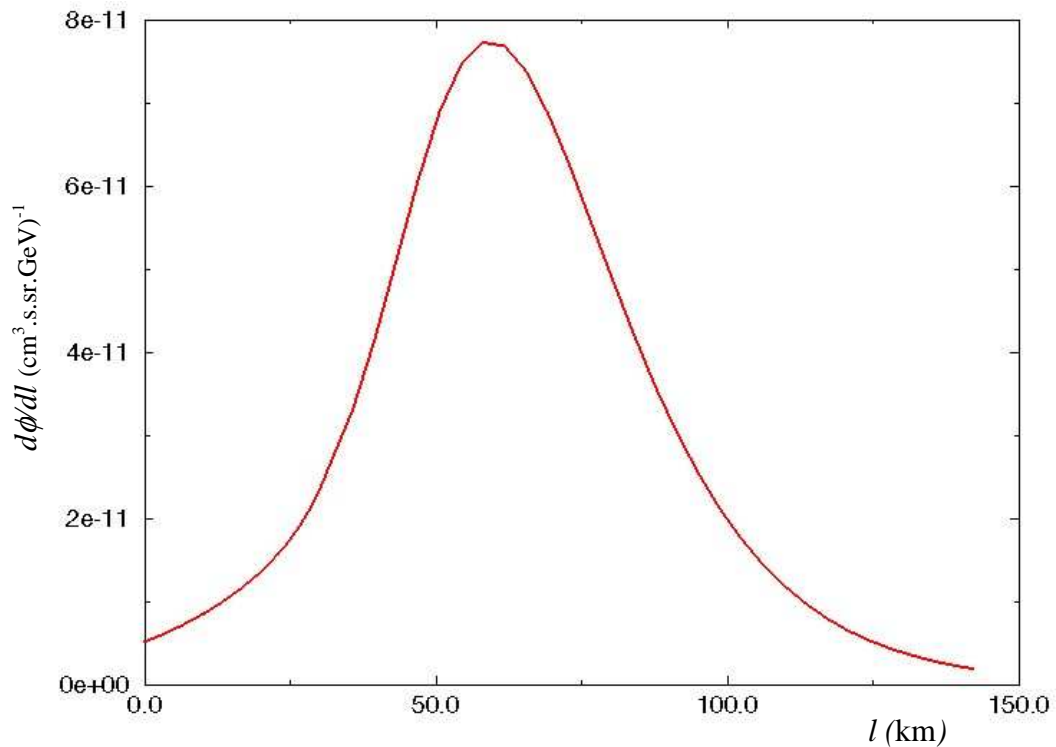


Figura 5.3: Produção de neutrinos muônicos em função da distância  $l$  entre a fonte e o detector.

### 5.3 Fluxo de neutrinos up com oscilação entre sabores

O fluxo up de neutrinos muônicos no nível do mar, considerando oscilação entre sabores, é obtido calculando a integral em  $l$  do fluxo de neutrinos multiplicado pela probabilidade de sobrevivência de neutrinos muônicos no vácuo.

O estado  $\nu_f(l) = \begin{pmatrix} \nu_\mu(l) \\ \nu_x(l) \end{pmatrix}$  para neutrinos inicialmente muônicos evoluindo no vácuo é dado por

$$\nu_f(l) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Delta_{32}l}{4E} + i \cos 2\alpha \sin \frac{\Delta_{32}l}{4E} \\ \sin 2\alpha \sin \frac{\Delta_{32}l}{4E} \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

com

$$S^2 2\alpha = 4S^2 \psi C^2 \phi (1 - S^2 \psi C^2 \phi) \quad (5.6)$$

A probabilidade de sobrevivência de múons evoluindo no vácuo após percorrer uma distância  $l$  é dada, então, pela relação

$$P(\nu_\mu, \nu_\mu) \approx 1 - S^2 2\alpha \text{sen}^2 \frac{\Delta_{32} l}{4E} \quad (5.7)$$

que para a distância entre o ponto de produção e o detector dada em quilômetros, energia dos neutrinos dada em GeV e diferença de massas quadráticas em  $\text{eV}^2$  é reescrita como

$$P(\nu_\mu, \nu_\mu) \approx 1 - S^2 2\alpha \text{sen}^2 1,27 \frac{\Delta_{32} l}{E} \quad (5.8)$$

Os valores adotados para os parâmetros de oscilação do sistema de neutrinos, conforme [13], são

$$\begin{aligned} \Delta_{32} &= 3 \times 10^{-3} \text{ eV}^2, \\ \text{sen}^2 \psi &= 0,6, \\ \text{sen}^2 \phi &= 0,01, \end{aligned} \quad (5.9)$$

que levam a

$$S^2 2\alpha = 0,96. \quad (5.10)$$

O fluxo de neutrinos muônicos de energia de 5 GeV sem a hipótese de oscilação foi calculado no nível do mar para ângulo zenital de  $70^\circ$  integrando numericamente a taxa de produção obtida na seção anterior resultando em

$$\phi_{\nu_\mu} = 4,25076 \times 10^{-4} (\text{cm}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}. \quad (5.11)$$

Nas mesmas condições, considerando a oscilação entre sabores foi obtido, considerando o ângulo de mistura (5.10) da evolução em dois sabores, o seguinte valor para o fluxo de neutrinos muônicos

$$\phi_{\nu_\mu} = 4,25048 \times 10^{-4} (\text{cm}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}. \quad (5.12)$$

Os valores calculados para o fluxo utilizando as duas diferentes hipóteses, com as considerações já descritas, foram muito próximos.

## 5.4 Cálculo do operador de evolução na Terra

As probabilidades de oscilação no contexto da existência de sabores muônico e tauônico de neutrinos são obtidas a partir da produtória do operador de evolução infinitesimal em primeira ordem de aproximação normalizado definido em (4.119). Os coeficientes do operador são dados de (4.111) a (4.114) e os parâmetros definidos de (4.116) a (4.118) com a substituição de  $\tilde{\Delta}_{21}$  por  $\tilde{\Delta}_{32}$ .

A quantidade  $x$  é a distância percorrida pelos neutrinos dentro da Terra em uma determinada direção, como representado no apêndice D. A densidade eletrônica da Terra é definida ao longo da trajetória dos neutrinos em função de  $y$ , que relaciona-se a distância  $x$  como  $y = \frac{x}{R_\odot}$  onde  $R_\odot$  é o raio da Terra, na equação D.6 do apêndice D.

Considerando que o ângulo de incidência dos neutrinos seja de  $70^\circ$ , a partir da relação D.4, a distância percorrida pelos neutrinos no interior da Terra é dado pela relação

$$\overline{IF} = 0,684R_\odot \quad (5.13)$$

lembrando que a densidade eletrônica da Terra é simétrica com relação ao

ponto médio  $M$  da trajetória (figura D.2), que para este ângulo corresponde a  $\overline{IM} = 0,342R_{\odot}$ .

Como a produção de neutrinos no interior da Terra é negligenciada, o fluxo de neutrinos não é alterado ao longo da trajetória  $\overline{IF}$  para a faixa de energia analisada, desconsiderando oscilação. Sendo assim, ao considerar oscilação, o operador de evolução de neutrinos que descreve a oscilação entre sabores na Terra independe do fluxo, pois opera em neutrinos que percorrem a mesma distância  $\overline{IF}$ .

Para o mesmo conjunto de parâmetros (5.9) da seção anterior, com ângulo de mistura no vácuo de  $S^2 2\theta = 0,96$ , para distâncias dadas em quilômetros,  $\tilde{\Delta}_{32}$  em  $\text{eV}^2$  e energia em GeV com  $x = yR_{\odot}$ ,  $k_m = 2,54R_{\odot} \frac{\tilde{\Delta}_{32}}{E}$  e  $\delta N_j(y) = N_j(y) - \bar{N}_j$ .

O operador de evolução é calculado numericamente. Uma forma de se verificar a coerência do procedimento é calcular os operadores  $U(0; 0,342R_{\odot})$  e  $U(0,342R_{\odot}; 0,684R_{\odot})$  separadamente, que dividindo a trajetória em 684 elementos e energia de 5 GeV, resulta para o segundo operador em

$$\begin{aligned} U_{11} &= -0,101045954 + i0,229711105, \\ U_{12} &= -0,009422979 - i0,967953372, \\ U_{21} &= 0,009422979 - i0,967953372, \\ U_{22} &= -0,101045954 - i0,229711105, \end{aligned} \tag{5.14}$$

que se relaciona com o primeiro na forma esperada

$$U(0; 0,342R_{\odot}) = U^T(0,342R_{\odot}; 0,684R_{\odot}). \tag{5.15}$$

Esta relação é consequência da simetria da distribuição eletrônica em torno do ponto médio. Deste teste, também pôde ser verificado que para 684 elementos o termo de primeira ordem é desprezível. Isto significa que em cada intervalo  $(x_j, x_{j-1})$  a densidade eletrônica pode ser considerada como constante e igual a  $\bar{N}_j$ .

Sendo assim, o operador de evolução pode ser tomado como

$$U(x_F, x_I) = \prod_j \overline{U_j(x_j, x_{j-1})}, \quad (5.16)$$

onde  $\overline{U_j}$  equivale ao primeiro termo da equação (4.110).

Na figura 5.4 são apresentadas as probabilidades de permanência e troca para neutrinos que incidem na crosta terrestre em um estado inicial

$\nu_f(x_I) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$  para energia de 3 GeV, 4 GeV e 5 GeV como forma de se

verificar a influência da energia nas amplitudes de oscilação. O cálculo para a obtenção destas probabilidades foi efetuado no contexto de duas famílias de neutrinos.

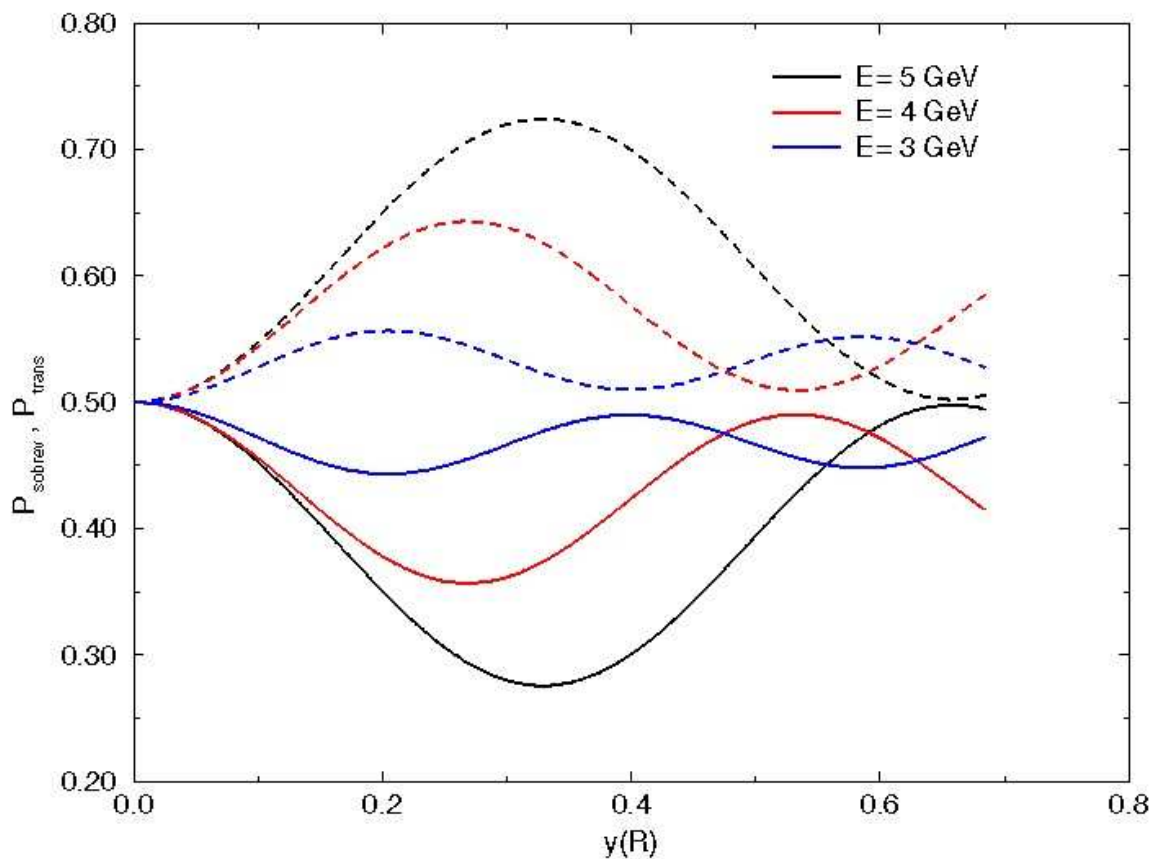


Figura 5.4: Probabilidade de transição (linha tracejada) e probabilidade de sobrevivência (linha sólida) para energias de 3, 4 e 5 GeV considerando dois sabores de neutrinos.

No contexto de oscilação em três famílias de neutrinos com aproximação de oscilação em duas, o operador de evolução de neutrinos atmosféricos que atravessam a Terra é dado pela produtória de operadores infinitesimais que em primeira ordem são descritos por (4.119). Como o termo de primeira ordem pode ser desconsiderado, o operador de evolução infinitesimal normalizado pode ser reescrito como

$$U'_j(x_j, x_{j-1}) = \begin{pmatrix} c_j + is_j \cos 2\tilde{\alpha} & -is_j \sin 2\tilde{\alpha} \\ -is_j \sin 2\tilde{\alpha} & c_j - is_j \cos 2\tilde{\alpha} \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

O ângulo de mistura efetivo na aproximação de oscilação entre três sabores para dois sabores é definido como

$$S^2 2\tilde{\alpha} = 4S^2 \psi C^2 \tilde{\phi} (1 - S^2 \psi C^2 \tilde{\phi}). \quad (5.18)$$

Os coeficientes  $c_j$  e  $s_j$  são definidos em (4.111) e (4.112) com os parâmetros dados pelas relações (4.122) e (4.123). Para distâncias dadas em quilômetros,  $\tilde{\Delta}_{32}$  em  $\text{eV}^2$  e energia em GeV,  $k_m = 2,54R_\odot \frac{\tilde{\Delta}_{32}}{E}$  para a substituição de  $x$  por  $y$ .

O operador de evolução calculado como descrito nesta aproximação de três sabores para energia dos neutrinos de 5 GeV, parâmetros físicos (5.9), ângulo de incidência down  $70^\circ$ , com  $x_I = 0$  e  $x_F = 0,684R_\odot$  é obtido como

$$\begin{aligned} U_{11} &= -0,354945994 + i0,152437, \\ U_{12} &= 2,32111422 \times 10^{-15} - i0,922375359, \\ U_{21} &= -2,32111422 \times 10^{-15} - i0,922375359, \\ U_{22} &= -0,354945994 - i0,152437. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Como forma de avaliar a diferença entre considerar oscilação no contexto de duas famílias e no contexto de três famílias aproximando para

duas famílias como descrito pelas equações (5.17) e (5.18), estão representadas graficamente as probabilidades de sobrevivência e transição para neutrinos com estado inicial  $\nu_f(x_I) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$  incidindo na crosta terrestre com energia de 5 GeV para estes dois casos.

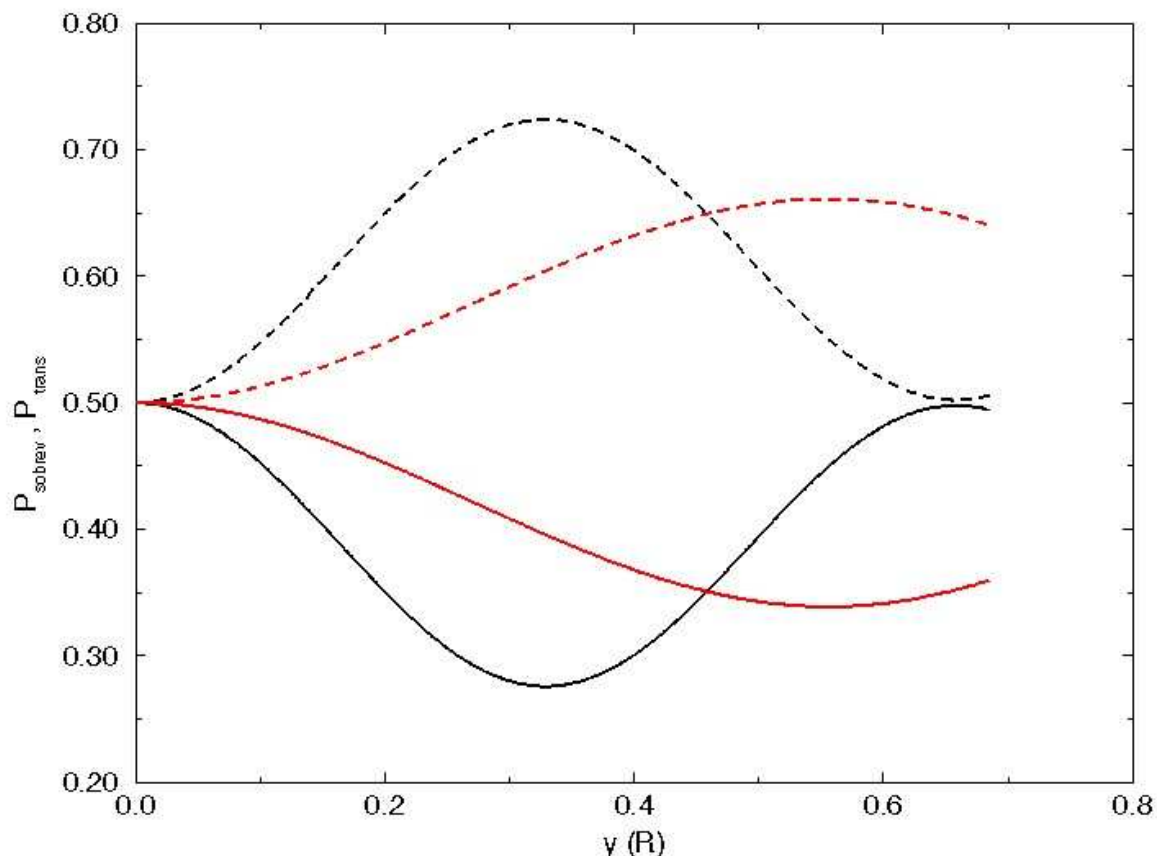


Figura 5.5: Probabilidade de transição (tracejado) e sobrevivência (sólido) para oscilação em duas famílias (preto) e em três famílias com aproximação para duas (vermelho).

## 5.5 Fluxo de neutrinos down com oscilação entre sabores

O fluxo de neutrinos down percorre uma trajetória equivalente a de neutrinos up no vácuo até chegar no nível do mar no ponto  $I$  para  $x$  igual a



zero, como representado na figura D.2 do Apêndice D. Depois, atravessa a trajetória  $\overline{IF}$  no interior da Terra.

Para um estado inicial muônico, o estado dos neutrinos no ponto  $F$  é obtido multiplicando o estado da seção 5.3 pelo operador de evolução da seção anterior (5.19).

$$\begin{pmatrix} \nu_\mu(x_f) \\ \nu_x(x_f) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\Delta_{32}l}{4E} + i \cos 2\alpha \sin \frac{\Delta_{32}l}{4E} \\ \sin 2\alpha \sin \frac{\Delta_{32}l}{4E} \end{pmatrix}.$$

A probabilidade de sobrevivência do neutrino muônico é dada por  $P(\nu_\mu, \nu_\mu) = |\nu_\mu(x_f)|^2$ . Multiplicando a taxa da produção de neutrinos muônicos por esta probabilidade e integrando em  $l$  é obtido o seguinte valor para o fluxo de neutrinos muônicos down.

$$\phi_{\nu_\mu} = 6 \times 10^{-5} (\text{cm}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{sr} \cdot \text{GeV})^{-1}$$

para energia dos neutrinos de 5 GeV e  $\theta$  igual a  $70^\circ$ .

Este fluxo de neutrinos muônicos corresponde a aproximadamente 15% do fluxo de múons calculado desconsiderando oscilação.

## 6 Discussão e conclusão

O primeiro aspecto a ser destacado com relação aos resultados obtidos é que o fluxo up praticamente não varia ao considerar a oscilação entre sabores, enquanto que o fluxo down é reduzido a 15% ao considerar oscilação com os parâmetros físicos para o sistema de neutrinos escolhidos. Conseqüentemente, o fluxo down relaciona-se ao fluxo up para neutrinos de energia de 5GeV com os parâmetros de oscilação dados por (5.9) como

$$\phi_{down} \approx 0,15\phi_{up}$$

Este resultado não apresenta grande relevância se não for comparado a dados experimentais, o que permite definir quais são os valores dos parâmetros de oscilação que melhor acomodam os resultados experimentais. No entanto, demonstra que a oscilação entre sabores revela-se como uma explicação para a assimetria up-down.

O procedimento desenvolvido ao longo do trabalho aponta para alguns aspectos que podem levar a uma futura compreensão sobre os corretos valores dos parâmetros físicos do sistema, diferença entre as massas quadráticas e ângulos de mistura, se o fenômeno de oscilação entre sabores acontece. Dentre eles é salientada a dependência do comprimento médio de oscilação com a energia dos neutrinos no intervalo de energia analisado e para a densidade de matéria presente na manta terrestre. Tal dependência, aliada a dependência das probabilidades de transição e permanência com a trajetória percorrida no interior terrestre, a qual pode ser devidamente escolhida, permite manipular estas quantidades para que, a partir dos dados experimentais, sejam elucidados alguns aspectos referentes aos neutrinos. Neste sentido, variações nas probabilidades de troca ou permanência geradas por diferentes energias dos neutrinos, como representado no diagrama 5.4, ou por diferentes ângulos de incidência ou, ainda, uma combinação na variação das duas quantidades leva a diferentes probabilidades de permanência ou troca, permitindo, assim,

que valores para os parâmetros físicos sejam explorados de tal forma que acomodem os dados experimentais.

A pequena influência do termo de primeira ordem do operador de evolução na Terra permite considerar a densidade eletrônica constante e igual a  $\bar{N}_j$  em cada elemento da trajetória. Tal fato merece ser ressaltado, pois leva à extensão direta dos cálculos de duas famílias para o cálculo de três famílias que apresentam grande diferença dependendo dos parâmetros utilizados, como pode ser observado no gráfico da figura 5.5. Como consequência da desconsideração da perturbação, a oscilação no contexto de três famílias descrita pelo operador de evolução na crosta terrestre calculado em ordem zero de aproximação pode ser facilmente introduzida sem a necessidade da utilização da aproximação de duas famílias.

O cálculo realizado pode ser estendido para diferentes ângulos de incidência dos neutrinos assim como para diferentes valores de energia sem exigir a introdução de grandes modificações, desde que a aproximação unidimensional continue sendo válida, ou seja, os neutrinos analisados tenham energias maiores que alguns GeVs.

A extensão direta deste trabalho é a busca por dados experimentais correntes com energias definidas, em situações que a simetria up-down é objeto de análise para comparação com resultados obtidos. A extensão do procedimento adotado neste trabalho ao contexto de três famílias sem utilização da aproximação em duas famílias pode ser realizada.

## **APÊNDICES**

## APÊNDICE A

### DESCRIÇÃO DA ATMOSFERA

Para calcular o fluxo de partículas geradas por chuveiros atmosféricos é necessário um modelo de  $\rho(h)$  – a densidade atmosférica como função da altura acima do mar – ou equivalentemente de  $t(h, \theta)$  – a profundidade como função da altura e do ângulo zenital  $\theta$ .

A densidade da atmosfera, segundo Lipari (ref. [1]), tem a forma

$$\rho(h) = \begin{cases} \rho_0 e^{-h/h_0} & h \geq h_t, \\ B(h_b - h)^\beta & h \leq h_t, \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

onde  $h$  é a altitude, a região  $h \geq h_t$  corresponde a estratosfera e a região  $h \leq h_t$  a troposfera, sendo a altura entre estas duas regiões  $h_t$  igual a 11 km.

Para distâncias medidas em km e densidade em  $\text{g/cm}^3$ , as constantes presentes nas equações (A.1) tomam os seguintes valores:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= 2,054 \times 10^{-3}, & h_0 &= 6,344, & B &= 1,210 \times 10^{-10}, \\ h_b &= 44,33, & \beta &= 4,253. \end{aligned}$$

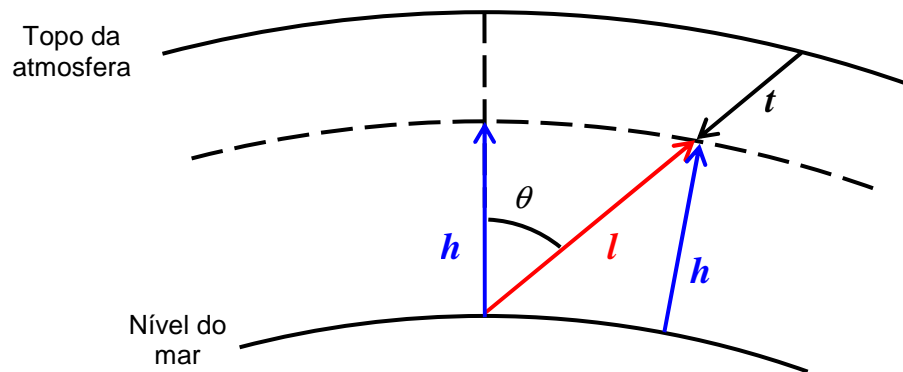


Figura A.1: Representação das quantidades – altura, profundidade e trajetória – que descrevem a atmosfera.

A coluna de densidade  $t$  representa o quanto a partícula entrou na atmosfera em unidades de  $\text{g/cm}^2$ . A profundidade é medida a partir do topo da atmosfera ao longo da direção da partícula incidente, ou seja, da trajetória  $l$ . A altura  $h$  e a trajetória  $l$  estão representadas na figura A.1 e, para uma determinada direção, satisfazem a relação

$$l = \sqrt{R_{\odot}^2 \cos^2 \theta + 2hR_{\odot} + h^2} - R_{\odot} \cos \theta, \quad (\text{A.2})$$

onde  $R_{\odot}$  é o raio da Terra.

A profundidade é calculada a partir da densidade atmosférica pela equação

$$t(h, \theta) = \int_l^{\infty} \rho(h') dl', \quad (\text{A.3})$$

sendo que as variáveis  $h'$  em função de  $l'$  e  $l$  em função de  $h$  são obtidas através da equação (A.2).

## APÊNDICE B

### DECAIMENTO DE MÉSONS

#### B.1 Decaimento de Píons

Os processos  $\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu (\bar{\nu}_\mu)$  são típicos decaimentos em duas partículas, podendo ser representados conforme a figura B.1.

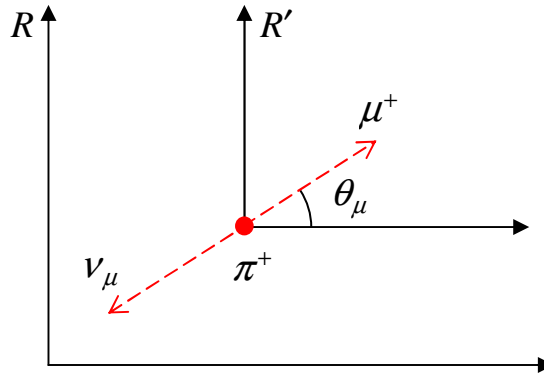


Figura B.1: Representação do decaimento  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ .

No referencial de repouso do píon R', das leis de conservação de energia e momento tem-se que

$$m_\pi c^2 = E'_\mu + E'_{\nu_\mu}, \quad (\text{B.1})$$

$$0 = \vec{P}'_\mu + \vec{P}'_{\nu_\mu}. \quad (\text{B.2})$$

A energia e o momento do múon e do neutrino neste referencial são, portanto, dados pelas relações

$$\begin{cases} E'_\mu = (m_\pi^2 + m_\mu^2) \frac{c^2}{2m_\pi}, \\ P'_\mu = (m_\pi^2 - m_\mu^2) \frac{c}{2m_\pi}, \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{cases} E'_{\nu_\mu} = (m_\pi^2 - m_\mu^2) \frac{c^2}{2m_\pi}, \\ P'_{\nu_\mu} = (m_\pi^2 - m_\mu^2) \frac{c}{2m_\pi}. \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

As expressões para energia do múon e do neutrino no referencial de laboratório são obtidas das transformações de Lorentz.

$$E_{\mu} = \frac{E_{\pi}}{2} \left[ (1+r_{\pi}) + \beta_{\pi} (1-r_{\pi}) \cos \theta_{\mu} \right], \quad (\text{B.5})$$

$$E_{\nu_{\mu}} = \frac{E_{\pi}}{2} \left[ (1-r_{\pi}) + \beta_{\pi} (1-r_{\pi}) \cos \theta_{\mu} \right]. \quad (\text{B.6})$$

Seja  $dn$  o número de partículas emitidas entre  $\theta_{\mu}$  e  $\theta_{\mu} + d\theta_{\mu}$  (figura B.2), como todas as direções são igualmente prováveis

$$dn = \frac{2\pi}{4\pi} \sin \theta_{\mu} d\theta_{\mu}, \quad (\text{B.7})$$

ou ainda,

$$\frac{dn}{dE} \frac{dE}{d\theta_{\mu}} = \frac{1}{2} \sin \theta_{\mu}. \quad (\text{B.8})$$

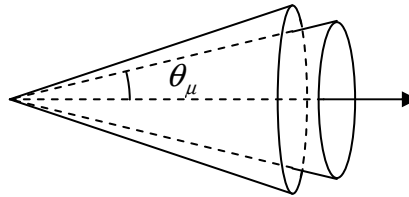


Figura B.2: Emissão de partículas em um elemento de ângulo sólido.

Pode ser obtido das equações (B.5) e (B.6) que tanto para o neutrino quanto para o múon

$$\frac{dE}{d\theta} = -\frac{1}{2} E_{\pi} \beta_{\pi} (1-r_{\pi}) \sin \theta_{\mu} \quad (\text{B.9})$$

resultando na relação para neutrinos e múons



$$\frac{dn}{dE} = \frac{1}{\beta_\pi} \frac{1}{E_\pi (1-r_\pi)}. \quad (\text{B.10})$$

No limite ultra-relativístico, para o qual  $\beta_\pi \rightarrow 1$ , os valores de energia dos neutrinos e múons estão compreendidos entre os seguintes limites

$$r_\pi E_\pi \leq E_\mu \leq E_\pi, \quad (\text{B.11})$$

$$0 \leq E_{\nu_\mu} \leq r_\pi E_\pi. \quad (\text{B.12})$$

Estas relações podem ser arranjadas na forma

$$r_\pi \leq x \leq 1, \quad (\text{B.13})$$

$$0 \leq x \leq r_\pi - 1 \quad (\text{B.14})$$

para múons e neutrinos respectivamente, onde  $x$  é a razão entre as energias da partícula produto e da partícula inicial.

Toda a análise feita para o decaimento  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$  é válida, também, para o decaimento  $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$ . Portanto, os espectros diferenciais de energia de neutrinos, múons e suas antipartículas provenientes do decaimento de píons, para  $\beta_\pi \rightarrow 1$ , é dado por

$$F_{\pi^\pm \rightarrow \mu^\pm}(x) = \frac{1}{(1-r_\pi)} \theta(x-r_\pi), \quad (\text{B.15})$$

$$F_{\pi^\pm \rightarrow \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)}(x) = \frac{1}{(1-r_\pi)} \theta(1-r_\pi-x). \quad (\text{B.16})$$

A função de Heaviside  $\theta(x)$  é definida como

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

e tem o papel de limitar, nas equações (B.15) e (B.16), os valores que o espectro pode assumir de acordo com os permitidos para  $x$  obtidos nas relações (B.13) e (B.14).

## B.2 Decaimento de Káons

Os modos de decaimento de káons significantes para a faixa de energia considerada são os seguintes:  $K^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)$ . Estes também são, como no caso dos píons, decaimentos em duas partículas.

O procedimento para o cálculo dos espectros de energia das partículas produto é similar ao tomado na análise do decaimento dos píons. São necessárias apenas a troca óbvia de  $r_\pi$  por  $r_K$ .

Portanto, as expressões para os espectros de neutrino, múon e as respectivas antipartículas produzidos no decaimento de káon são

$$F_{K^\pm \rightarrow \mu^\pm}(x) = \frac{1}{(1-r_K)} \theta(x-r_K) \quad (\text{B.18})$$

$$F_{K^\pm \rightarrow \nu_\mu(\bar{\nu}_\mu)}(x) = \frac{1}{(1-r_K)} \theta(1-r_K-x) \quad (\text{B.19})$$

onde  $r_K = m_\mu/m_K$  e  $x$  é a razão entre a energia do produto e a energia do káon.

## APÊNDICE C

### DECAIMENTO DE MÚONS

Os múons gerados pelos já discutidos decaimentos de mésons são polarizados. As distribuições de energia dos léptons produzidos no decaimento do múon são obtidas a partir da regra de ouro de Fermi e dependem da direção do spin do múon. Os canais de decaimento  $M^\pm \rightarrow \mu^\pm \rightarrow l$  são representados, no referencial de repouso do múon, nas figuras (C.1) e (C.2), incluindo os spins das partículas produto do decaimento do méson.

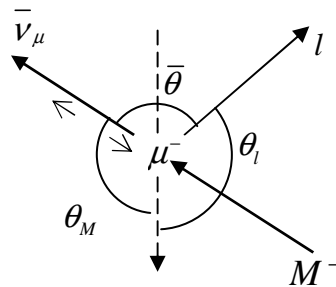


Figura C.1: Canal de decaimento  $M^- \rightarrow \mu^- \rightarrow l$  no referencial de repouso do múon.

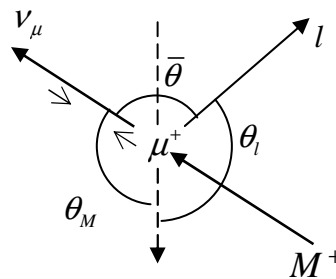


Figura C.2: Canal de decaimento  $M^+ \rightarrow \mu^+ \rightarrow l$  no referencial de repouso do múon.

Negligenciando a massa dos elétrons, as distribuições de energia dos neutrinos dos decaimentos  $\mu^\pm \rightarrow e^\pm + \nu_e(\bar{\nu}_e) + \bar{\nu}_\mu(\nu_\mu)$  resultam, no referencial de repouso do múon, segundo a referência [8], nas equações

$$\frac{d\bar{\nu}_\mu(\nu_\mu)}{dy'd\Omega} = \frac{1}{4\pi} \left[ 2y'^2(3-2y') \mp 2y'^2(1-2y')\cos\theta \right], \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{d\nu_e(\bar{\nu}_e)}{dy'd\Omega} = \frac{1}{4\pi} \left[ 12y'^2(1-y') \mp 12y'^2(1-y')\cos\theta \right], \quad (\text{C.2})$$

onde  $\theta$  é o ângulo entre a direção partícula emitida e o spin do múon e  $y' = 2E'_\nu/m_\mu c^2$  restrito, portanto, ao intervalo  $0 \leq y' \leq 1$ , sendo que o índice linha representa as quantidades no referencial de repouso do múon. O elemento de ângulo sólido leptônico em função dos ângulos polares do lépton com relação ao eixo z definido pela direção de movimento do múon é dado por  $d\Omega = d\varphi_l d\cos\theta_l$  sendo  $\varphi_l$  o ângulo azimutal do lépton relativo ao plano que contém o méson e o múon.

Seja  $\bar{\theta}$  definido nas figuras (C.1) e (C.2) como o ângulo entre o lépton emitido no decaimento do múon e o méson, então

$$\cos\bar{\theta} = \cos\theta_M \cos\theta_l + \text{sen}\theta_M \text{sen}\theta_l \cos\varphi_l. \quad (\text{C.3})$$

Por causa da helicidade oposta de  $\nu_\mu$  e  $\bar{\nu}_\mu$  obtém-se a relação

$$\cos\bar{\theta} = \pm \cos\theta, \quad (\text{C.4})$$

sendo que  $\theta_M$  é o ângulo entre a direção de movimento do méson e o eixo z.

Substituindo (C.4) em (C.2) e (C.1) e integrando no ângulo azimutal são obtidas as seguintes distribuições de energia

$$\frac{d\bar{\nu}_\mu(\nu_\mu)}{dy'd\cos\theta_l} = \frac{1}{2} \left[ 2y'^2(3-2y') - 2y'^2(1-2y')\cos\theta_M \cos\theta_l \right], \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{d\nu_e(\bar{\nu}_e)}{dy' d\cos\theta_l} = \frac{1}{2} \left[ 12y'^2(1-y') - 12y'^2(1-y')\cos\theta_M \cos\theta_l \right]. \quad (\text{C.6})$$

Para múons que decaem em vôo, as distribuições devem ser transformadas para o referencial de laboratório. Isto pode ser feito a partir do vínculo existente entre o ângulo  $\theta_l$  e a energia dos léptons no referencial de laboratório ([14] e [15]) que é obtida da transformação de Lorentz em função de  $y'$  e da energia do múon no referencial de laboratório

$$E_l = \frac{E_\mu y'}{2} (1 + \beta_\mu \cos\theta_l). \quad (\text{C.7})$$

Da relação (C.7), as equações (C.6) e (C.5) podem ser reescritas como

$$\frac{d\bar{\nu}_\mu(\nu_\mu)}{dy' dy} = \frac{2y'^2}{y'\beta_\mu} \left[ (3-2y') - (1-2y') \frac{1}{\beta_\mu} \left( \frac{2y}{y'} - 1 \right) \cos\theta_M \right], \quad (\text{C.8})$$

$$\frac{d\nu_e(\bar{\nu}_e)}{dy' dy} = \frac{12y'^2}{y'\beta_\mu} (1-y') \left[ 1 - \frac{1}{\beta_\mu} \left( \frac{2y}{y'} - 1 \right) \cos\theta_M \right] \quad (\text{C.9})$$

com as seguintes condições

$$\text{se } y \leq \frac{1-\beta_\mu}{2} \Rightarrow \frac{2y}{1+\beta_\mu} \leq y' \leq \frac{2y}{1-\beta_\mu}, \quad (\text{C.10})$$

$$\text{se } y > \frac{1-\beta_\mu}{2} \Rightarrow \frac{2y}{1+\beta_\mu} \leq y' \leq 1, \quad (\text{C.11})$$

onde  $y = E_l/E_\mu$  e, ainda,  $0 \leq y \leq 1$ .

Tomando o limite ultra-relativístico, para o qual  $\beta_\mu \rightarrow 1$ , e sabendo que  $y$  é sempre maior que zero, o termo  $y'$  é limitado pelos valores  $y \leq y' \leq 1$ . As equações (C.8) e (C.9) são escritas, então, para  $\beta_\mu \rightarrow 1$  como

$$\frac{d\bar{\nu}_\mu(\nu_\mu)}{dy} = \int_y^1 2y' \left[ (3-2y') - (1-2y') \left( \frac{2y}{y'} - 1 \right) \cos\theta_M \right] dy', \quad (\text{C.12})$$

$$\frac{d\nu_e(\bar{\nu}_e)}{dy} = \int_y^1 12y'(1-y') \left[ 1 - \frac{1}{\beta_\mu} \left( \frac{2y}{y'} - 1 \right) \cos\theta_M \right] dy'. \quad (\text{C.13})$$

Sendo assim, as distribuições de energia dos neutrinos geradas pelo decaimento de múons em vôo são dadas por

$$\frac{d\bar{\nu}_\mu(\nu_\mu)}{dy} = \left( \frac{5}{3} - 3y^2 + \frac{4}{3}y^3 \right) - \left( \frac{1}{3} - 3y^2 + \frac{8}{3}y^3 \right) \cos\theta_M, \quad (\text{C.14})$$

$$\frac{d\nu_e(\bar{\nu}_e)}{dy} = (2 - 6y^2 + 4y^3) - (-2 + 12y - 18y^2 + 8y)^3 \cos\theta_M, \quad (\text{C.15})$$

sendo que o termo  $\cos\theta_M$  é definido em função da energia do múon e da energia do pión no referencial de laboratório.

## APÊNDICE D

### DENSIDADE ELETRÔNICA DA TERRA

A descrição da densidade eletrônica da Terra apresentada na referência [10] segue o Modelo da Terra da referência [11]. Neste modelo, a Terra é dividida em oito camadas, no entanto, para análise de evolução de neutrinos na Terra, segundo Lisi [10], as quatro camadas mais externas podem ser agrupadas em uma única. As cinco camadas em que a Terra é dividida são definidas na tabela D.1 limitadas pela quantidade  $r$ .

O termo  $r$  é o raio normalizado com relação ao raio da Terra e é definido como

$$r = \frac{R}{R_{\odot}} \quad (\text{D.1})$$

onde  $R_{\odot}$  é o raio da Terra.

$j$	Camada	$[r_{j-1}; r_j]$
1	Núcleo interno	[0; 0,192]
2	Núcleo externo	[0,192; 0,546]
3	Manta inferior	[0,546; 0,895]
4	Zona de transição	[0,895; 0,937]
5	Manto externo	[0,937; 1]

Tabela D.1: Camadas da Terra.

Para cada camada  $j$ , a densidade eletrônica radial da Terra é aproximada por um polinômio na forma

$$N_j(r) = \alpha_j + \beta_j r^2 + \gamma_j r^4, \quad (\text{D.2})$$

para o qual os coeficientes  $\alpha_j$ ,  $\beta_j$  e  $\gamma_j$  são dados na tabela D.2.

$j$	$\alpha_j$	$\beta_j$	$\gamma_j$
1	6,099	-4,119	0,000
2	5,803	-3,653	-1,086
3	3,156	-1,459	0,280
4	-5,376	19,210	-12,520
5	11,540	-20,280	10,410

Tabela D.2: Coeficientes da densidade eletrônica de cada camada  $j$  da Terra.

O gráfico da densidade eletrônica da Terra  $N_j$  em função do raio normalizado  $r$  é apresentado na figura D.1 para as cinco camadas da Terra,

Na figura D.2 estão representadas as cinco camadas da Terra e uma trajetória que começa no ponto I e atinge o ponto F, não passando pelo centro da Terra. O ponto M representa o ponto da trajetória que corresponde ao menor raio, o segmento  $\overline{OM}$ , que forma um ângulo de  $90^\circ$  com a trajetória. A distribuição eletrônica em torno de M, o ponto médio da trajetória, é simétrica. Esta trajetória corresponde a neutrinos interceptando um determinado detector com ângulo zenital de  $\pi - \theta$  que representa um fluxo down.

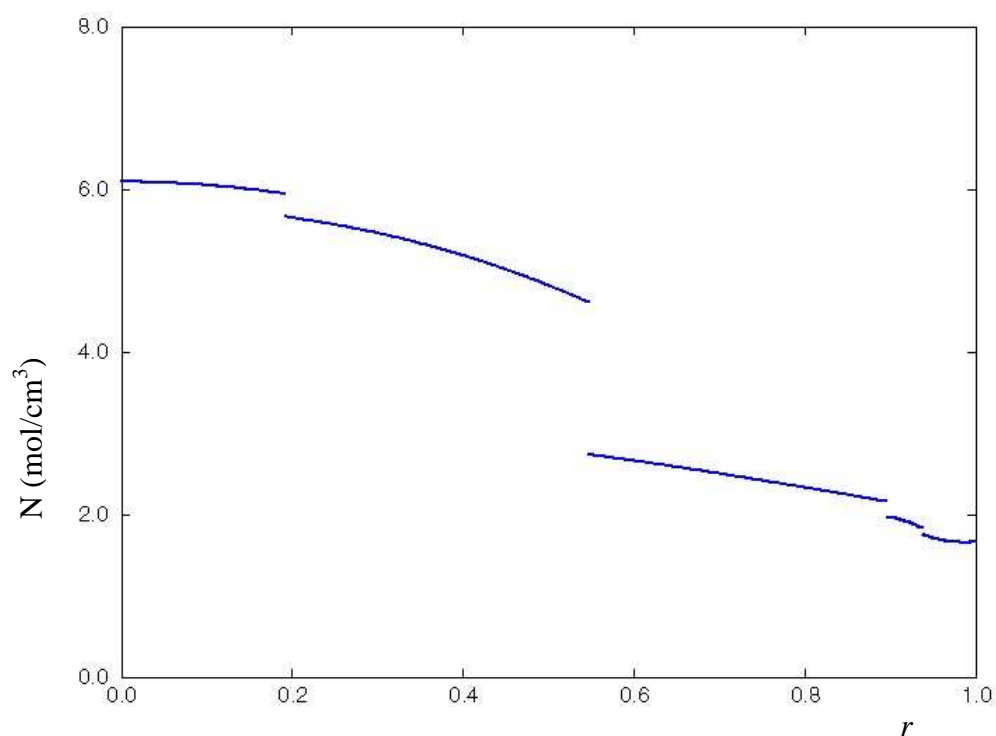


Figura D.1: Densidade eletrônica em função do raio normalizado  $r$ .



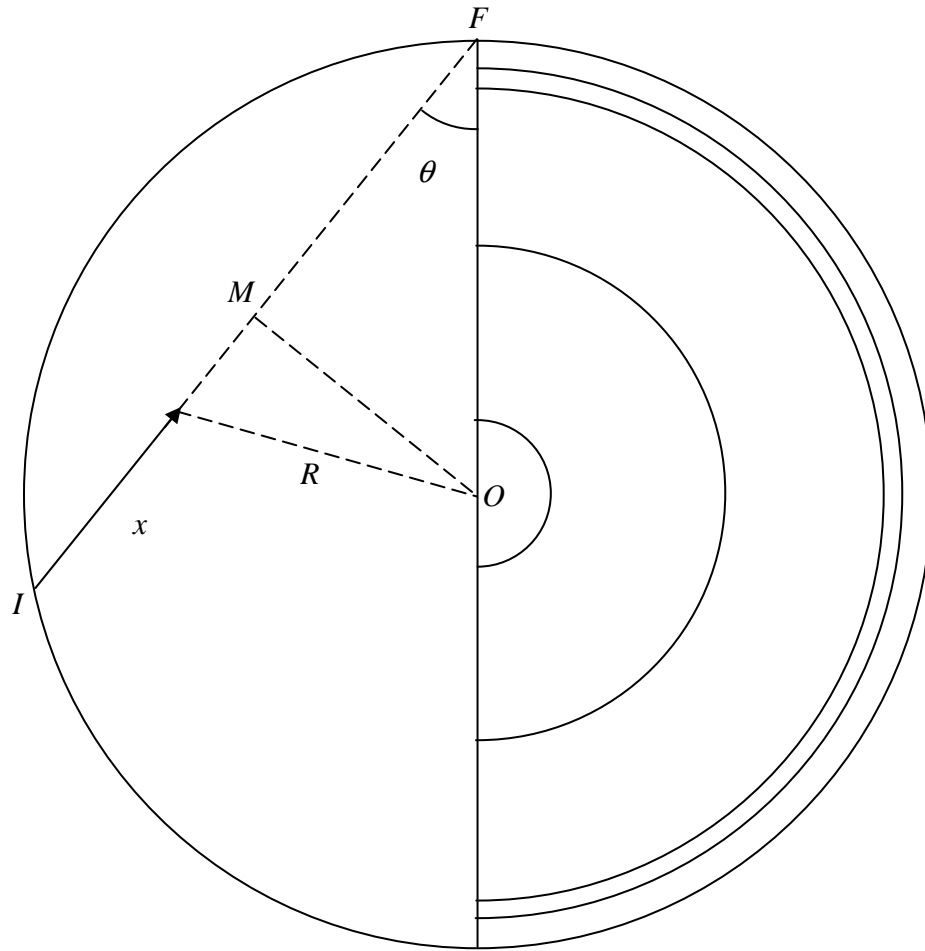


Figura D.2: Camadas da Terra e trajetória  $\overline{IF}$  descrita pela distância  $x$ .

A expressão que relaciona a posição  $x$ , que descreve esta trajetória, ao raio e ao ângulo  $\theta$ , é obtida, geometricamente, na forma

$$R^2 = x^2 + R_{\odot}^2 - 2xR_{\odot} \cos \theta, \quad (\text{D.3})$$

como  $r = \frac{R}{R_{\odot}}$  e definido  $y = \frac{x}{R_{\odot}}$  tem-se que

$$r^2 = y^2 + 1 - 2y \cos \theta. \quad (\text{D.4})$$

Substituindo (D.4) em (D.2)

$$N_j(r) = \alpha_j + \beta_j (y^2 + R_{\odot}^2 - 2yR_{\odot} \cos \theta) + \gamma_j (y^2 + R_{\odot}^2 - 2yR_{\odot} \cos \theta)^2. \quad (\text{D.5})$$

Desta forma a equação (D.2) pode ser reescrita em função de  $y$  a partir de (D.5) como um polinômio

$$N_j(y) = \alpha_{j0} + \alpha_{j1}y + \alpha_{j2}y^2 + \alpha_{j3}y^3 + \alpha_{j4}y^4, \quad (\text{D.6})$$

onde os novos coeficientes são

$$\alpha_{j0} = \alpha_j + \beta_j + \gamma_j, \quad (\text{D.7})$$

$$\alpha_{j1} = -2(\beta_j + 2\gamma_j) \cos \theta, \quad (\text{D.8})$$

$$\alpha_{j2} = \beta_j + 2\gamma_j(1 + 2\cos^2 \theta), \quad (\text{D.9})$$

$$\alpha_{j3} = -4\gamma_j \cos \theta, \quad (\text{D.10})$$

$$\alpha_{j4} = \gamma_j. \quad (\text{D.11})$$

## APÊNDICE E

### OPERADOR DE EVOLUÇÃO INFINITESIMAL

O operador de evolução infinitesimal em primeira ordem de aproximação é dado pela relação

$$U_j(x_j, x_{j-1}) = e^{-i(x_j-x_{j-1})\bar{H}_j} - i \int_{x_{j-1}}^{x_j} dx e^{-i(x_j-x)\bar{H}_j} \delta H_j(x) e^{-i(x-x_{j-1})\bar{H}_j}. \quad (\text{E.1})$$

Escrevendo  $\bar{H}_j$  em termos das matrizes de Pauli  $\sigma$

$$\bar{H}_j = \frac{1}{2} \left[ k \sin 2\theta \sigma_x + \left( \sqrt{2} G_F \bar{N}_j - k \cos 2\theta \right) \sigma_z \right] \quad (\text{E.2})$$

e sabendo que  $e^{-i\hat{\beta} \cdot \frac{\sigma}{2}} = \cos \frac{\beta}{2} - i(\hat{\beta} \cdot \sigma) \sin \frac{\beta}{2}$ , as exponenciais são dadas por

$$e^{-i(x_j-x_{j-1})\bar{H}_j} = \cos \left[ \frac{\tilde{\Delta}_{21}}{4E} (x_j - x_{j-1}) \right] + i \left( \sigma_z \cos 2\tilde{\theta} - \sigma_x \sin 2\tilde{\theta} \right) \sin \left[ \frac{\tilde{\Delta}_{21}}{4E} (x_j - x_{j-1}) \right], \quad (\text{E.3})$$

onde  $\tilde{\Delta}_{21} = \sqrt{\Delta_{21}^2 + \bar{A}^2 - 2\bar{A}\Delta_{21} \cos 2\theta}$  e  $\sin 2\tilde{\theta} = \frac{\Delta_{21}}{\tilde{\Delta}_{21}} \sin 2\theta$ .

Definido  $k_m = \frac{\tilde{\Delta}_{21}}{2E}$

$$e^{-i(x_j-x_{j-1})\bar{H}_j} = \cos \left[ k_m \frac{x_j - x_{j-1}}{2} \right] + i \left( \sigma_z \cos 2\tilde{\theta} - \sigma_x \sin 2\tilde{\theta} \right) \sin \left[ k_m \frac{x_j - x_{j-1}}{2} \right] \quad (\text{E.4})$$

ou, explicitamente

$$e^{-i(x_j-x_{j-1})\bar{H}_j} = \begin{pmatrix} c_j + is_j \cos 2\tilde{\theta} & -is_j \sin 2\tilde{\theta} \\ -is_j \sin 2\tilde{\theta} & c_j - is_j \cos 2\tilde{\theta} \end{pmatrix}, \quad (\text{E.5})$$

onde

$$c_j = \cos \left[ k_m \frac{x_j - x_{j-1}}{2} \right], \quad (\text{E.6})$$

$$s_j = \text{sen} \left[ k_m \frac{x_j - x_{j-1}}{2} \right], \quad (\text{E.7})$$

Resta da relação (E.1) calcular a seguinte integral

$$-i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \int_{x_{j-1}}^{x_j} dx e^{-i(x_j-x)\bar{H}_j} \delta N_j(x) \sigma_z e^{-i(x-x_{j-1})\bar{H}_j}, \quad (\text{E.8})$$

sendo que

$$e^{-i(x_j-x)\bar{H}_j} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{11}^* \end{pmatrix}, \quad (\text{E.9})$$

onde

$$A_{11} = \cos \left( k_m \frac{x_j - x}{2} \right) + i \cos 2\tilde{\theta} \text{sen} \left( k_m \frac{x_j - x}{2} \right), \quad (\text{E.10})$$

$$A_{12} = -i \text{sen} 2\tilde{\theta} \text{sen} \left( k_m \frac{x_j - x}{2} \right) \quad (\text{E.11})$$

e

$$e^{-i(x-x_{j-1})\bar{H}_j} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12} & B_{11}^* \end{pmatrix}, \quad (\text{E.12})$$

onde

$$B_{11} = \cos \left( k_m \frac{x - x_{j-1}}{2} \right) + i \cos 2\tilde{\theta} \text{sen} \left( k_m \frac{x - x_{j-1}}{2} \right), \quad (\text{E.13})$$

$$B_{12} = -i \operatorname{sen} 2\tilde{\theta} \operatorname{sen} \left( k_m \frac{x - x_{j-1}}{2} \right). \quad (\text{E.14})$$

Sendo assim, a integral a ser calculada é

$$-i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \delta N_j(x) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{11}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12} & B_{11}^* \end{pmatrix} dx. \quad (\text{E.15})$$

Multiplicando as matrizes no integrando

$$-i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \delta N_j(x) \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} - A_{12}B_{12} & A_{11}B_{12} - A_{12}B_{11}^* \\ A_{12}B_{11} - A_{11}^*B_{12} & A_{12}B_{12} - A_{11}^*B_{11}^* \end{pmatrix} dx. \quad (\text{E.16})$$

Das relações (E.10), (E.11), (E.13) e (E.14), obtém-se que

$$A_{11}B_{11} - A_{12}B_{12} = i \cos 2\tilde{\theta} \operatorname{sen} k_m \bar{x} + \cos^2 2\tilde{\theta} \cos k_m \bar{x} + \operatorname{sen}^2 2\tilde{\theta} \cos(k_m(x - \bar{x})), \quad (\text{E.17})$$

$$A_{11}B_{12} - A_{12}B_{11}^* = -i \operatorname{sen} 2\tilde{\theta} \operatorname{sen}(k_m(x - \bar{x})) + \operatorname{sen} 2\tilde{\theta} \cos 2\tilde{\theta} [\cos(k_m(x - \bar{x})) - \cos k_m \bar{x}], \quad (\text{E.18})$$

onde

$$\bar{x} = \frac{x_j + x_{j-1}}{2}, \quad (\text{E.19})$$

$$\bar{\bar{x}} = \frac{x_j - x_{j-1}}{2}. \quad (\text{E.20})$$

Como os termos  $A_{12}$  e  $B_{12}$  são puramente complexos

$$A_{12}B_{12} - A_{11}^*B_{11}^* = -(A_{11}B_{11} - A_{12}B_{12})^*, \quad (\text{E.21})$$

$$A_{12}B_{11} - A_{11}^*B_{12} = (A_{11}B_{12} - A_{12}B_{11}^*)^*. \quad (\text{E.22})$$

Da definição (4.99) a integral

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} \delta N_j(x) dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} N_j(x) dx - (x_j - x_{j-1}) \bar{N}_j = 0. \quad (\text{E.23})$$

Os termos na matriz da equação (E.16) que não dependem de  $x$  tornam-se nulos quando a integração é efetuada resultando na expressão

$$-\frac{i}{2} \text{sen } 2\tilde{\theta} \begin{pmatrix} \text{sen } 2\tilde{\theta} C_j & \cos 2\tilde{\theta} C_j - i \text{sen } 2\tilde{\theta} S_j \\ \cos 2\tilde{\theta} C_j + i \text{sen } 2\tilde{\theta} S_j & -\text{sen } 2\tilde{\theta} C_j \end{pmatrix}, \quad (\text{E.24})$$

onde

$$C_j = \sqrt{2} G_F \int_{x_{j-1}}^{x_j} dx \delta N_j(x) \cos(k_m(x - \bar{x})), \quad (\text{E.25})$$

$$S_j = \sqrt{2} G_F \int_{x_{j-1}}^{x_j} dx \delta N_j(x) \text{sen}(k_m(x - \bar{x})). \quad (\text{E.26})$$

Portanto, o operador de evolução em primeira ordem de aproximação é obtido como

$$U_j(x_j, x_{j-1}) = \begin{pmatrix} c_j + i s_j \cos 2\tilde{\theta} & -i s_j \text{sen } 2\tilde{\theta} \\ -i s_j \text{sen } 2\tilde{\theta} & c_j - i s_j \cos 2\tilde{\theta} \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \text{sen } 2\tilde{\theta} \begin{pmatrix} \text{sen } 2\tilde{\theta} C_j & \cos 2\tilde{\theta} C_j - i \text{sen } 2\tilde{\theta} S_j \\ \cos 2\tilde{\theta} C_j + i \text{sen } 2\tilde{\theta} S_j & -\text{sen } 2\tilde{\theta} C_j \end{pmatrix}. \quad (\text{E.27})$$

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] *Lipari, Paolo*. Lepton spectra in the earth's atmosphere. *Astrop. Phys.* 1 (1993) 195.
- [2] *Gaisser, T. K.* Cosmic Rays and Particle Physics. *Cambridge University Press* (1990).
- [3] *Lipari, Paolo*. The geometry of atmospheric neutrinos production. *Astrop. Phys.*, 14 (2000) 153.
- [4] *Engel, Ralph; Gaisser, T. K.; Stanev, Todor*. Pion production in proton collisions with light nuclei: implications for atmospheric neutrinos. *Phys. Lett. B* 472 (2000) 113.
- [5] *Volkova, L. V.; Zatsepin, G. T.; Kuz'michev, L. A.* The cosmic-ray muon spectrum at sea level and the primary cosmic-ray nucleon spectrum. *Sov. J. Nucl. Phys.* 29 (1979) 645.
- [6] *Volkova, L. V.* Energy spectra and angular distributions of atmospheric neutrinos. *Sov. J. Nucl. Phys.* 31 (1980) 784.
- [7] *Lohmann, W.; Kopp, R.; Voss, R.* Energy loss of muons in the energy range 1-10000 GeV. *CERN Yellow Report 85-03* (1985) 29.
- [8] *Okun', Lev Borisovich*. Leptons and Quarks. *North-Holland Physics Publishing* (1984) Amsterdam.
- [9] *Kuo, T. K.; e Pantaleone, James*. Neutrino oscillations in matter. *Rev. Mod. Phys.* 61 (1989) 937.

- [10] *Lisi, Eligio; Montanino, Daniele.* Earth Regeneration in solar neutrino oscillations: an analytic approach. *Physical Review D* 56 (1997) 3.
- [11] *Dziewonski, A. M.; Anderson, D. L..* Preliminary Earth reference model. *Phys. Earth Planet. Inter.* 25 (1981) 297.
- [12] Fogli, Lisi e Montamino aproximação para duas famílias
- [13] *Bernabéu, J.; Palomarez-Ruiz, Sergio; Petcov, S. T..* Atmospheric neutrinos oscillations,  $\theta_{13}$  and neutrino mass hierarchy. *Nuclear Physics B* 669 (2003) 255-276.
- [14] *Barr, Stephen; Gaisser, T. K.; Lipari, Paolo; Tilav, Serap.* Ratio of  $\nu_e/\nu_\mu$  in atmospheric neutrinos. *Physics Letters B* 214 (1988) 147.
- [15] *Barr, Giles; Gaisser, T. K.; Stanev, Todor.* Flux of atmospheric neutrinos. *Physical Review D* 39 (1989) 3532.
- [16] *Griffiths, David.* Introduction to Elementary Particles. *John Wiley & Sons, Inc.* (1987) New York.
- [17] *K2K Collaboration.* Indications of Neutrino Oscillation in a 250 km Long-baseline Experiment. *hep-ex/0212007 v2* (2002).
- [18] *Gaisser, T. K..* Atmospheric Neutrino Flux: A Review of Calculations. *Nuclear Physics B (Proceedings Supplements)* 87 (2000) 145-151.