



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

LADISLAU VIEIRA TEIXEIRA TAVARES

MODELO ESFÉRICO QUÂNTICO  
SUPERSIMÉTRICO COM INTERAÇÕES DE  
CURTO ALCANCE

---

Londrina  
2021

LADISLAU VIEIRA TEIXEIRA TAVARES

**MODELO ESFÉRICO QUÂNTICO  
SUPERSIMÉTRICO COM INTERAÇÕES DE  
CURTO ALCANCE**

Tese de Doutorado apresentada ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Pedro Rogério Sérgio Gomes

Londrina

2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Tavares, Ladislau Vieira Teixeira.

Modelo esférico supersimétrico com interações de curto alcance / Ladislau Vieira Teixeira Tavares. - Londrina, 2021.  
67 f. : il.

Orientador: Pedro Rogério Sérgio Gomes.

Tese (Doutorado em Física) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2021.  
Inclui bibliografia.

1. Transições de fase clássicas - Tese. 2. Transições de fase quânticas - Tese. 3. Modelos de rede solúveis - Tese. I. Gomes, Pedro Rogério Sérgio . II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

CDU 53

LADISLAU VIEIRA TEIXEIRA TAVARES

**MODELO ESFÉRICO QUÂNTICO SUPERSIMÉTRICO COM INTERAÇÕES  
DE CURTO ALCANCE**

Tese de Doutorado apresentada ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Física.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Orientador: Prof. Dr. Pedro Rogério Sérgio Gomes  
Universidade Estadual de Londrina – UEL

---

Profa. Dra. Paula Fernanda Bienzobas  
Universidade Estadual de Londrina – UEL

---

Prof. Dr. Carlos André Hernaski  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná –  
UTFPR

---

Prof. Dr. Leandro Ibiapina Bevilaqua  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte –  
UFRN

---

Prof. Dr. Marcelo Otavio Caminha Gomes  
Universidade de São Paulo – USP

Londrina, 28 de setembro de 2021

*Dedico este trabalho aos meus pais, Cristina e João, e à minha irmã, Priscila.*

# Agradecimentos

Ao meu orientador, professor Pedro Rogério Sérgio Gomes, pela orientação e paciência ao longo do Doutorado, e por ter me proporcionado o contato com a Teoria Quântica de Campos e com a Supersimetria.

À professora Paula Fernanda Bienzobaz, pelas inúmeras discussões relacionadas à Mecânica Estatística.

Ao meu amigo de pesquisa Lucas Gabriel dos Santos, por todo o incentivo e pelas inúmeras discussões com respeito à física, em geral ligadas à Supersimetria, ao modelo esférico e ao modelo sigma não-linear supersimétrico.

À minha namorada Ligia Ayumi Kikuchi, por todo o incentivo e pela revisão ortográfica deste trabalho.

Aos professores e funcionários do departamento de física da UEL, que de alguma maneira contribuíram para a minha formação desde a graduação.

Aos todos aos meus colegas da pós-graduação e em especial aos da sala 25 do departamento de física.

Aos meus pais, João Vieira Tavares Neto e Cristina Teixeira Tavares, e à minha irmã, Priscila Teixeira Vieira Tavares, por todo o apoio.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior e à Fundação Araucária pelo apoio financeiro.

# Resumo

Este trabalho é dedicado ao estudo de um sistema de spins esféricos quânticos supersimétricos com interações de curto alcance. Examinamos as propriedades críticas do sistema, ambas à temperatura zero e a temperatura finita. O modelo exhibe uma transição de fase quântica à temperatura zero sem quebra de supersimetria. À temperatura finita, a supersimetria é quebrada e o sistema exhibe uma transição de fase térmica. Determinamos as dimensões críticas e computamos os expoentes críticos. Em particular, descobrimos que o modelo é caracterizado por um expoente crítico dinâmico  $z = 2$ . Também investigamos as propriedades de correlações em uma rede unidimensional. Finalmente, exploramos a conexão com uma versão não-relativística do modelo sigma não-linear supersimétrico  $O(N)$ , e mostramos que é equivalente ao sistema de spins esféricos no limite de  $N$  grande.

**Palavras-chave:** 1. Transições de Fase Clássicas. 2. Transições de Fase Quânticas 3. Modelos de Rede Solúveis.

Tavares, Ladislau Vieira Teixeira. **Modelo Esférico Quântico Supersimétrico com Interações de Curto Alcance**. 2021. Tese de Doutorado em Física – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

# Abstract

This work is dedicated to the study of a system of supersymmetric quantum spherical spins with short-range interactions. We examined the critical properties of the system both at zero and finite temperature. The model undergoes a quantum phase transition at zero temperature without breaking supersymmetry. At finite temperature, the supersymmetry is broken and the system exhibits a thermal phase transition. We determined the critical dimensions and computed critical exponents. In particular, we found that the model is characterized by a dynamical critical exponent  $z = 2$ . We also investigated properties of correlations in the one-dimensional lattice. Finally, we explored the connection with a nonrelativistic version of a supersymmetric  $O(N)$  nonlinear sigma model and showed that it is equivalent to the system of spherical spins in the large  $N$  limit.

**Keywords:** 1. Classical Phase Transitions 2. Quantum Phase Transitions. 3. Solvable Lattice Models.

Tavares, Ladislau Vieira Teixeira. **Supersymmetric Quantum Spherical Model with Short-Range Interactions.** 2021. Doctor in Physics Thesis – Londrina State University, Londrina, 2021.

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>ASPECTOS SOBRE TRANSIÇÕES DE FASE . . . . .</b>	<b>4</b>
2.1	Noções de Transições de Fases . . . . .	4
<b>3</b>	<b>MODELO ESFÉRICO QUÂNTICO . . . . .</b>	<b>11</b>
3.1	Introdução ao Modelo Esférico . . . . .	11
3.2	Formulação e Solução do Modelo Esférico Quântico . . . . .	12
3.3	Comportamento Crítico . . . . .	17
3.3.1	Comportamento do Multiplicador de Lagrange $\mu$ Próximo da Criticalidade no Caso Quântico . . . . .	17
3.3.2	Comportamento do Multiplicador de Lagrange $\mu$ Próximo da Criticalidade no Caso Térmico . . . . .	20
<b>4</b>	<b>MODELO SIGMA NÃO-LINEAR E A EQUIVALÊNCIA COM O MODELO ESFÉRICO . . . . .</b>	<b>23</b>
4.1	Formulação do Modelo Sigma não-Linear . . . . .	23
<b>5</b>	<b>GENERALIDADES SOBRE SUPERSIMETRIA E O FORMALISMO DO SUPERESPAÇO . . . . .</b>	<b>28</b>
5.1	Uma Ideia Sobre Supersimetria . . . . .	28
5.2	O Formalismo do Superespaço . . . . .	29
<b>6</b>	<b>MODELO ESFÉRICO QUÂNTICO SUPERSIMÉTRICO . . . . .</b>	<b>34</b>
6.1	Formulação do Modelo a partir do Formalismo do Superespaço . . . . .	34
6.2	Função de Partição e Quebra de Supersimetria . . . . .	35
<b>7</b>	<b>COMPORTEAMENTO CRÍTICO QUÂNTICO DO MODELO ESFÉRICO SUPERSIMÉTRICO . . . . .</b>	<b>38</b>
7.1	Comportamento do Multiplicador de Lagrange $\gamma$ Próximo da Criticalidade . . . . .	38
7.2	Magnetização, Condensado Fermiônico e Suscetibilidade . . . . .	41
<b>8</b>	<b>COMPORTEAMENTO CRÍTICO TÉRMICO DO MODELO ESFÉRICO SUPERSIMÉTRICO . . . . .</b>	<b>44</b>
8.1	Comportamento do Multiplicador de Lagrange $\gamma$ Próximo da Criticalidade . . . . .	44
8.1.1	Soluções com $\mu \neq 0$ . . . . .	45
8.1.1.1	Magnetização, Condensado Fermiônico e Suscetibilidade . . . . .	46

8.1.2	Soluções com $\mu = 0$ . . . . .	48
8.1.2.1	<b>Magnetização, Condensado Fermiônico, e Suscetibilidade</b> . . . . .	<b>48</b>
<b>9</b>	<b>FUNÇÃO DE CORRELAÇÃO</b> . . . . .	<b>51</b>
9.1	Interações Competitivas entre as Variáveis Bosônicas . . . . .	51
9.2	Função de Correlação . . . . .	52
<b>10</b>	<b>EQUIVALÊNCIA COM O MODELO SIGMA NÃO-LINEAR</b> . . . . .	<b>55</b>
10.1	Formulação do Modelo Sigma não-Linear . . . . .	55
10.2	Ação em Componentes e a Expansão $1/N$ . . . . .	57
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>64</b>

# 1 Introdução

Este trabalho é dedicado, principalmente, ao estudo de um modelo de spins esféricos quânticos supersimétricos com interações de curto alcance. Esse modelo refere-se a uma extensão supersimétrica de um sistema de spins esféricos quânticos, isto é, um modelo de rede envolvendo variáveis de spin contínuas,  $-\infty < S_{\mathbf{r}} < \infty$ , associadas a cada sítio de uma rede hipercúbica. Os spins estão sujeitos ao chamado vínculo esférico  $\sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}^2 = N$ , em que  $N$  corresponde ao número total de sítios da rede.

A Hamiltoniana  $\mathcal{H}_c$  associada ao modelo esférico clássico, proposta originalmente em [1], é dada por

$$\mathcal{H}_c = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'}. \quad (1.1)$$

Uma versão quântica do modelo esférico pode ser construída introduzindo uma dinâmica não-trivial para aos spins por meio de um termo cinético envolvendo o momento conjugado à  $S_{\mathbf{r}}$ , por exemplo, da forma  $\sim \sum_{\mathbf{r}} P_{\mathbf{r}}^2$  [2]. Desse modo, a quantização canônica pode ser imediatamente realizada. Alternativamente, características quânticas podem ser introduzidas usando as integrais de trajetória [3].

Versões clássicas e quânticas de spins esféricos tem sido estudadas intensamente em um grande número de situações [2, 3, 4, 5, 6, 7]. Isso se deve principalmente ao fato de que eles são exatamente solúveis, mesmo na presença de um campo externo, e apresentam expoentes críticos não-triviais. Isso está em contraste com o modelo de Ising, que na presença de campo possui solução analítica apenas em uma dimensão espacial. Dessa maneira, o modelo esférico constitui uma ferramenta útil para examinar uma série de questões de grande interesse no estudo de fenômenos críticos e transições de fase.

O modelo esférico supersimétrico tem sua origem na busca de mais generalizações de estudos anteriores mantendo o mesmo espírito do modelo esférico, isto é, sem perder as propriedades notáveis mencionadas acima. Normalmente, as versões esféricas envolvem apenas variáveis de spin escalares  $S_{\mathbf{r}}$  em cada sítio, que depois de serem quantizadas correspondem a graus de liberdade bosônicos. Uma generalização natural dessa situação, consiste em adicionar graus de liberdade de caráter fermiônico em cada sítio. Isso pode ser feito de uma maneira controlada, exigindo que os novos graus de liberdade estejam em pé de igualdade com os graus de liberdade bosônicos, isto é, exigindo que o sistema seja supersimétrico.

Ao longo dos anos, o cenário de supersimetria tornou-se muito mais amplo, indo muito além de sua concepção original na descrição de partículas e cordas [8]. Os esforços para colocar a supersimetria em um contexto mais amplo, além da física de altas energias, devem-se em grande parte à dissonância com outras teorias físicas, nas quais, em geral, a elegância das descrições teóricas é agraciada por evidências experimentais.

Além do cenário de altas energias, lugares favoráveis para encontrar supersimetria estão em sistemas envolvendo muitos graus de liberdade, como aqueles frequentemente considerados em mecânica estatística e física da matéria condensada. Um dos primeiros exemplos é o surgimento da supersimetria no modelo de Ising tricrítico [9, 10]. Mais recentemente, um número de estudos tem reportado que a supersimetria emerge em pontos especiais do espaço de parâmetros em vários modelos quânticos [11, 12, 13, 14, 15, 16]. Naturalmente, em todos esses casos, a supersimetria é pensada em um sentido efetivo, diferente da proposta original. É nesse sentido que tratamos o modelo supersimétrico discutido neste trabalho, isto é, descrevendo graus de liberdade efetivos.

Lembramos que o modelo esférico quântico é semelhante a um modelo de rotores quânticos [7], que por sua vez pode ser usado para descrever excitações a baixa energia de muitos sistemas [17]. Portanto, é esperado que o seu equivalente supersimétrico possa também desempenhar um papel interessante em tais sistemas.

Esta tese está dividida em duas partes. A primeira parte, que possui um caráter mais introdutório compreende os capítulos 2, 3, 4 e 5. Os demais capítulos são dedicados ao estudo do modelo supersimétrico.

O capítulo 2 apresenta alguns conceitos básicos associados às transições de fase. Concentrando nas transições de fase contínuas, são estudadas as transições líquido-gás e ferro-paramagnética e, ao final é feita a comparação entre elas. O capítulo 3 é dedicado ao estudo do modelo esférico. Inicialmente são discutidas as principais características do modelo. Em seguida, é feita a formulação do modelo esférico quântico, e é obtida a sua solução empregando o formalismo de integração funcional. Focando nas interações de curto alcance, é estudado o comportamento crítico em ambos os casos de temperatura zero e temperatura finita. No capítulo 4, é mostrada a equivalência entre o modelo esférico e o modelo sigma não-linear. É calculada a ação efetiva do modelo na expansão  $1/N$ , e em seguida é mostrado que os modelos são equivalentes no limite estrito  $N \rightarrow \infty$ . O capítulo 5 é dedicado ao estudo de supersimetria. Inicialmente, é dada uma ideia sobre supersimetria. Logo depois, é apresentado o conceito de superespaço, nos casos em que o número de supersimetrias é  $\mathcal{N} = 1$  e  $\mathcal{N} = 2$ .

No capítulo 6, é investigado o modelo esférico supersimétrico. Esse modelo é obtido empregando o formalismo do superespaço e, em seguida é calculada a função de partição. São analisadas sob quais condições a supersimetria é quebrada. No capítulo 7, é feita a análise do comportamento crítico quântico do modelo esférico supersimétrico no caso de interações de curto alcance. São obtidos os expoentes críticos associados, a magnetização bosônica e a suscetibilidade. No capítulo 8 também é estudado o comportamento crítico do modelo, no entanto, para o caso de temperatura finita. O objetivo do capítulo 9 é analisar a função de correlação do modelo esférico supersimétrico. No capítulo 10 é discutida a equivalência do modelo esférico supersimétrico com uma versão não-relativística do modelo sigma não-linear supersimétrico. É obtida a ação efetiva do modelo na expansão

$1/N$  e, ao final é feita a comparação com o modelo esférico.

Este trabalho é baseado nas seguintes publicações:

- L. G. dos Santos, **L. V. T. Tavares**, P. F. Bienzobaz, Pedro R. S. Gomes, *Supersymmetric Quantum Spherical Spins*, J. Stat. Mech. (2018) 123104, arXiv:1806.05656.
- **L. V. T. Tavares**, L. G. dos Santos, G. T. Landi, Pedro R. S. Gomes, P. F. Bienzobaz, *Supersymmetric Quantum Spherical Spins with Short-Range Interactions*, J. Stat. Mech. (2020) 023104, arXiv:1910.04007.

## 2 Aspectos Sobre Transições de Fase

O objetivo deste capítulo é discutir alguns conceitos básicos sobre transições de fase. Inicialmente é dada uma ideia geral sobre transições, por meio de exemplos. Focando nas transições de fase contínuas, é investigada a transição líquido-gás empregando a teoria de Landau e é feita a comparação com a transição ferro-paramagnética. Ao final é mencionada a existência de um mapeamento entre transições de fase térmicas e quânticas.

### 2.1 Noções de Transições de Fases

Em nosso cotidiano, nos deparamos com inúmeras situações nas quais se torna evidente o fenômeno de transição de fase ou, comumente chamado, de mudança de estado físico. A passagem de um sistema termodinâmico de um estado físico para outro decorre da variação de parâmetros de controle externo. Entre os inúmeros exemplos em que este fenômeno é observado podemos citar o derretimento do gelo a  $0\text{ }^\circ\text{C}$  (submetido a pressão de 1 atm), a evaporação da água a  $100\text{ }^\circ\text{C}$  e a transição ferro-paramagnética do ferro a  $770\text{ }^\circ\text{C}$  [18].

As transições de fase são divididas em duas categorias: as transições descontínuas (ou de primeira ordem, de acordo com a antiga classificação de Ehrenfest) e as transições de fase contínuas (de segunda ordem) [19]. Para nos aprofundarmos no entendimento das transições de fase utilizaremos a água e um sistema ferromagnético como exemplos.

O diagrama de fase da água, ilustrado na figura (1), é muito rico e além disso contempla ambas as classes de transições de fase, contínua e descontínua. Sendo assim, este diagrama pode nos fornecer uma ideia geral sobre as transições. Nesse diagrama, são

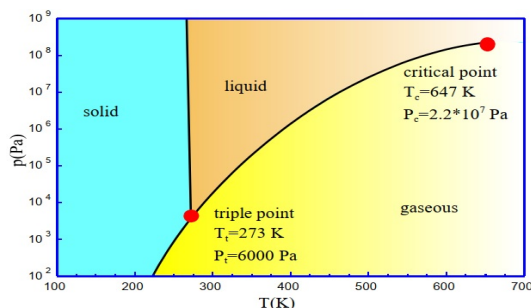


Figura 1 – Diagrama de fase da água em termos da temperatura e da pressão. O ponto tricrítico está localizado em  $(T_t = 273\text{ K}, P_t = 6000\text{ Pa})$  e o ponto crítico em  $(T_c = 647\text{ K}, P_c = 2,2 \times 10^7\text{ Pa})$ . Fonte: [20].

representadas três fases da água, a sólida, a líquida e a gasosa. De maneira geral, uma vez

conhecidos os valores da temperatura e da pressão,  $(T, P)$ , podemos dizer em que estado físico a água se encontra.

Entre uma fase e outra existe uma "fronteira", denominada curva de coexistência de fases (ou linha de transição de primeira ordem). Dependendo do interesse, podem ser estudadas, por exemplo, a transição sólido-líquido, líquido-gasoso, entre outras. O ponto representado pelo par de coordenadas de temperatura e pressão,  $(T_t = 273 \text{ K}, P_t = 6000 \text{ Pa})$ , é chamado de ponto triplo, e neste ponto a água coexiste nos estados sólido, líquido e gasoso. Outro ponto muito importante é o que correspondente às coordenadas  $(T_c = 647 \text{ K}, P_c = 2,2 \times 10^7 \text{ Pa})$ , e é conhecido como ponto crítico. A linha de coexistência de fase líquido-gás termina no ponto crítico. Neste diagrama, este é o único ponto que exhibe uma transição de fase contínua ao ser cruzado tangencialmente. Para valores maiores que  $(T_c, P_c)$  não há distinção entre líquido e gás.

A transição líquido-gás pode ser caracterizada em termos das respectivas densidades,  $\rho_l$  da fase líquida e  $\rho_g$  da fase gasosa. Existem inúmeros caminhos que podem ser percorridos no diagrama (1) a fim de atravessar a linha de coexistência líquido-gás, sejam eles considerando a pressão constante e variando a temperatura, ou variando a pressão e mantendo a temperatura fixa. Para todos estes caminhos a transição de fase é descontínua, e antes do sistema passar a estar integralmente na outra fase é observada a coexistência de fases.

Podemos pensar em percorrer exatamente a linha de coexistência das fases líquido-gás do diagrama (1) variando simultaneamente a temperatura e a pressão. Como nesta linha ambas as fases coexistem, é natural pensar em algum parâmetro que dependa da diferença entre as densidades,  $\rho \propto (\rho_l - \rho_g)$ . À medida que nós aproximamos da temperatura crítica, a densidade da água tanto na fase líquida como da fase gasosa vão se tornando iguais e, conseqüentemente,  $\rho$  vai se aproximando de zero continuamente. No ponto crítico não existe distinção entre  $\rho_l$  e  $\rho_g$ , e a diferença entre as densidades se torna nula. Isto nos leva a ideia de que possamos definir a diferença de densidades  $\rho$  como o chamado parâmetro de ordem. Por meio deste parâmetro temos informação com respeito ao estado físico no qual o sistema se encontra.

A identificação de um parâmetro de ordem nos permite analisar o problema em questão por meio da teoria fenomenológica de Landau, proposta na década de 30, [21]. A teoria de Landau é muito utilizada para investigar as transições de fase contínuas, e a ideia básica é estudar a transição de fase nas vizinhanças do ponto crítico [22, 23]. Isso justifica escrever a energia livre de Gibbs como uma expansão em série de potências do parâmetro de ordem, pois na região da criticalidade o parâmetro de ordem possui um valor pequeno. No caso da transição líquido-gás, podemos considerar que a energia livre do sistema tem a forma

$$g(T, P, \rho) \sim A_0 + A_1\rho + A_2\rho^2 + A_3\rho^3 + A_4\rho^4, \quad (2.1)$$

em que os coeficientes  $A_0, A_1, A_2, A_3$  e  $A_4$  podem depender da temperatura e da pressão.

Um dos coeficientes da expressão acima pode ser anulado fazendo um deslocamento no parâmetro de ordem, isto é,  $\rho \rightarrow \rho' + c$ , conduzindo a expressão

$$g(T, P, \rho') \sim B_0 + B_1\rho' + B_2\rho'^2 + B_3\rho'^3 + B_4\rho'^4, \quad (2.2)$$

com os novos coeficientes

$$\begin{aligned} B_0 &= A_0 + A_1c + c^2A_2 + c^3A_3 + c^4A_4 \\ B_1 &= A_1 + 2cA_2 + 3c^2A_3 + 4c^3A_4 \\ B_2 &= A_2 + 3cA_3 + 6c^2A_4 \\ B_3 &= A_3 + 4cA_4 \\ B_4 &= A_4. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Ao fazer a escolha  $c = -\frac{A_3}{4A_4}$ , o termo cúbico é anulado e a energia livre (2.2) é reduzida a

$$g(T, P, \rho') \sim B_0 + B_1\rho' + B_2\rho'^2 + B_4\rho'^4, \quad (2.4)$$

no qual os coeficientes se tornam

$$\begin{aligned} B_0 &= A_0 - \frac{A_1A_3}{4A_4} + \frac{A_2A_3^2}{16A_4^2} \\ B_1 &= A_1 - \frac{A_2A_3}{2A_4} + \frac{A_3^3}{8A_4^2} \\ B_2 &= A_2 - \frac{3A_3^3}{8A_4} \\ B_4 &= A_4. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ao escolher um caminho para atravessar o ponto crítico tal que o coeficiente  $B_1(T, P)$  é nulo, obtemos uma transição de fase contínua. Este caminho corresponde precisamente a uma trajetória tangencial à linha de coexistência [23]. Neste caso a equação (2.4) passa a ser escrita essencialmente em termos de potências pares do parâmetro de ordem,

$$g(T, P, \rho') \sim B_0 + B_2\rho'^2 + B_4\rho'^4. \quad (2.6)$$

Assim, podemos determinar as soluções de  $\rho$  que minimizam a energia livre. A condição de mínimo para (2.6),

$$2\rho' (B_2 + 2B_4\rho'^2) = 0, \quad (2.7)$$

admite as seguintes soluções para o parâmetro de ordem:

$$\rho' = \begin{cases} 0, & \text{se } B_2 > 0 \\ \pm\sqrt{-\frac{B_2}{2B_4}}, & \text{se } B_2 < 0 \end{cases}. \quad (2.8)$$

Isso mostra que  $B_2$  é uma função que muda de sinal conforme atravessamos o ponto crítico, por exemplo  $B_2 \propto (T - T_c)$ . Essa suposição pode ser justificada empregando a teoria de van der Waals no estudo do comportamento de fluidos em que é possível concluir que  $B_2 \sim (T - T_c) + \mathcal{O}((T - T_c)^2)$  [22].

A figura (2) mostra o comportamento de  $(g(T, P, \rho') - B_0)$  como função do parâmetro de ordem. No caso em que  $T > T_c$ , a energia livre (2.6) apresenta um mínimo em  $\rho' = 0$ . Na situação em que  $T < T_c$  (linha tracejada) a energia livre possui dois mínimos, com  $\rho' \neq 0$ .

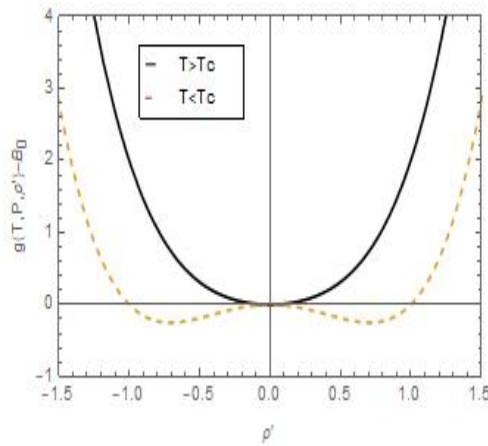


Figura 2 – O parâmetro de ordem que minimiza a equação (2.6) apresenta diferentes valores dependendo do valor da temperatura. Quando  $T > T_c$ ,  $\rho' = 0$  e no caso em que  $T < T_c$ ,  $\rho' \neq 0$ .

Consideremos agora a transição ferro-paramagnética. À temperatura ambiente, o ferro exibe uma fase ordenada (ferromagnética) em que a magnetização total do sistema é não-nula. Para temperaturas superiores a  $770^\circ\text{C}$  a magnetização é nula e, por sua vez, o sistema se apresenta em uma fase desordenada (paramagnética).

A figura (3) ilustra a configuração dos spins nas fases ordenada e desordenada de um sistema ferromagnético bidimensional. A fase desordenada (figura (3a)) é simétrica, no sentido de que ao girar os spins em torno de uma direção aleatória a magnetização é invariante (continua sendo nula). Por outro lado, na figura (2b), os spins apontam na mesma direção e a invariância rotacional é espontaneamente quebrada.

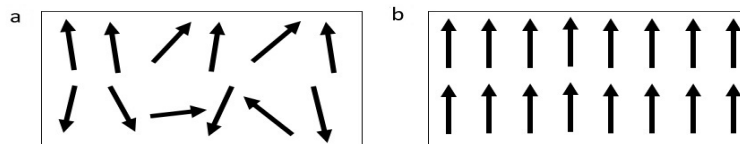


Figura 3 – Em (a) cada spin aponta em uma direção aleatória (fase desordenada) e em (b) todos os spins apontam em uma única direção (fase ordenada).

Vamos considerar o modelo de Ising, em que os spins são substituídos por variáveis binárias,  $S_i = \pm 1$ . Nesse caso, a magnetização é dada pelo escalar  $m = \langle \frac{1}{N} \sum_i S_i \rangle$  e a

simetria quebrada é a simetria discreta de inversão  $Z_2$ ,  $m \rightarrow -m$ . Portanto, o parâmetro de ordem pode ser identificado como  $m$ , uma vez que a partir do valor associado a ele podemos saber em qual fase o sistema magnético se encontra. A energia livre para este sistema também pode ser escrita em termos de potências do parâmetro de ordem, levando em conta a simetria  $Z_2$ ,

$$f(T) \sim C_0 + C_2 m^2 + C_4 m^4, \quad (2.9)$$

em que os coeficientes  $C_0$ ,  $C_2$  e  $C_4$  são funções dependentes da temperatura. Assim como no caso da transição líquido-gás, o coeficiente  $C_2$  muda de sinal conforme atravessamos o ponto crítico.

Uma pergunta natural que surge é a seguinte: como pode sistemas com características tão distintas como a água e o modelo de Ising (em três dimensões espaciais) terem comportamentos similares para a energia livre nas proximidades do ponto crítico? A resposta para esta questão é que as transições de fase contínuas são mais universais que as transições de fase descontínuas, no sentido de que dependem apenas das simetrias e da dimensionalidade do sistema em questão. A existência de correlações de longo alcance no caso das transições contínuas, faz com que o sistema ignore a maioria dos detalhes microscópicos, dependendo apenas de elementos mais gerais. Nesse sentido, dizemos que a transição contínua líquido-gás e a transição ferro-paramagnética se enquadram na mesma classe de universalidade.

A tabela (1) expressa o parâmetro de ordem e algumas quantidades termodinâmicas como função de uma grandeza adimensional chamada de temperatura reduzida, que é definida como  $t \equiv \frac{T-T_c}{T_c}$ . O papel de  $t$  é medir a distância do ponto crítico. O com-

<b>Transição líquido-gás</b>	<b>Transição ferro-para.</b>
Par. de ordem: $\rho(T) \sim  t ^\beta$	Par. de ordem: $m(T) \sim  t ^\beta$
Compres. térmica: $\kappa(T) \sim  t ^{-\gamma}$	Suscetibilidade: $\chi(T) \sim  t ^{-\gamma}$
Calor específico: $C(T) \sim  t ^{-\alpha}$	Calor específico: $C(T) \sim  t ^{-\alpha}$
Isot. crítica: $\rho(T = T_c, P) \sim (P - P_c)^{1/\delta}$	Isot. crítica: $m(T = T_c, H) \sim H^{1/\delta}$

Tabela 1 – Comparação entre algumas quantidades físicas associadas a um fluido e um sistema magnético.

portamento de cada uma destas quantidades físicas está associado a uma lei de potência, que por sua vez está caracterizada por um expoente crítico. A magnetização, a suscetibilidade, o calor específico e a isotérma crítica, estão associados aos expoentes críticos  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha$  e  $\delta$ , respectivamente. O conjunto de expoentes críticos ditam o comportamento crítico e enquadram determinado sistema em uma classe de universalidade.

Dois outros expoentes críticos podem ser adicionados à tabela (1), um associado ao comprimento de correlação, e outro ligado à função de correlação. O comprimento de correlação é governado pelo expoente crítico  $\nu$ , definido como

$$\xi(T) \sim |t|^{-\nu}. \quad (2.10)$$

Na temperatura de transição, o comprimento de correlação diverge e conseqüentemente haverá correlação entre dois spins quaisquer, que se comporta de acordo com a lei de potência

$$G(\mathbf{r}) \sim \frac{1}{r^{d-2+\eta}}, \quad (2.11)$$

com  $\eta$  sendo o expoente crítico da função de correlação. O parâmetro  $d$  presente na expressão acima corresponde à dimensão espacial do sistema.

As expressões das energias livres (2.6) e (2.9) não levam em conta as flutuações do parâmetro de ordem. Nesse caso, os expoentes críticos associados são ditos expoentes de campo médio e são mostrados na última coluna da tabela (2). Em geral, um sistema exibe duas dimensões típicas, chamadas de dimensão crítica superior  $d_u$  e inferior  $d_l$ . Abaixo de  $d_l$  o sistema não é capaz de ordenar, ao passo que acima de  $d_u$  as flutuações do parâmetro de ordem são irrelevantes e, conseqüentemente, o sistema manifesta um comportamento tipicamente de campo médio. Entre  $d_l$  e  $d_u$  o sistema exibe expoentes críticos não triviais, tais como mostrados na primeira e segunda coluna da tabela (2).

A tabela (2) mostra os expoentes críticos associados ao modelo de Ising 3d. Os expoentes críticos não triviais diferem dos expoentes críticos de campo médio, mas possuem valores próximos dos resultados obtidos experimentalmente. Experimentalmente é observado uma semelhança entre os expoentes críticos da transição líquido-gás e do modelo de Ising 3d.

Exp. crítico	Experimental	Teórico	Campo médio
$\beta$	0,32-0,39	0,31	$\frac{1}{2}$
$\gamma$	1,3-1,4	1,25	1
$\alpha$	0-0,14	0,12	0
$\delta$	4-5	5	3
$\nu$	0,6-0,7	0,64	$\frac{1}{2}$
$\eta$	0,05	0,05	0

Tabela 2 – Expoentes críticos experimentais, não-triviais e de campo médio, associados ao modelo de Ising em três dimensões espaciais. Os expoentes críticos apresentados nessa tabela foram retirados da referência [24].

Tanto a transição líquido-gás como a transição ferro-paramagnética que acabamos de discutir são conhecidas como transições de fase térmicas. Esse tipo de transição está ligada às flutuações térmicas do sistema e, portanto, são governadas pela temperatura.

Além das transições de fase térmicas, podemos encontrar também transições de fase governadas por flutuações quânticas. Essas transições acontecem no limite estrito de temperatura nula, e são conhecidas como transições de fase quânticas. Nesse caso, o parâmetro responsável pela transição obviamente não é a temperatura, mas sim algum parâmetro não térmico, como pressão, campo magnético, ou constante de acoplamento. As transições de fase quânticas podem ser entendidas e caracterizadas de modo semelhante

às transições térmicas, uma vez que existe um mapeamento entre elas. Supondo que um sistema exibe uma transição de fase quântica em  $d$  dimensões espaciais, este mesmo sistema estará submetido, em geral, a uma transição de fase térmica em  $(d + z)$  dimensões, em que  $z$  é conhecido como expoente crítico dinâmico. Discutiremos essa conexão explicitamente no capítulo 10.

## 3 Modelo Esférico Quântico

Este capítulo é dedicado ao modelo esférico quântico. Inicialmente, são apresentadas as características principais do modelo e na sequência é discutida a sua versão quântica. Considerando interações de curto alcance, é estudado em detalhes o comportamento crítico à temperatura nula e à temperatura finita.

### 3.1 Introdução ao Modelo Esférico

Na década de 50, T. H. Berlin e M. Kac publicaram um artigo intitulado "Modelo esférico de um ferromagneto", [1]. Nesse trabalho, os autores apresentaram dois modelos similares ao modelo de Ising, o modelo gaussiano e o modelo esférico, os quais a priori, poderiam ser empregados no estudo de transições de fase e fenômenos críticos.

Inicialmente, Berlin e Kac substituíram as variáveis de spin,  $S = \pm 1$ , do modelo de Ising por variáveis de spin contínuas, que poderiam assumir qualquer valor entre  $-\infty < S < +\infty$ . Em ambos os modelos o Hamiltoniano de partida é dado por

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'} - H \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}, \quad (3.1)$$

com o parâmetro  $J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} = J(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  representando a interação entre os spins e dependente apenas do módulo da distância entre eles. O modelo é definido sobre uma rede  $d$ -dimensional e  $H$  é o campo externo. A somatória é realizada sobre os  $N$  spins pertencentes à rede.

O primeiro dos modelos discutidos em [1], chamado de modelo gaussiano, tem inserido na função de partição o chamado peso gaussiano. O papel deste termo é garantir a convergência da função de partição. Entretanto, mesmo com este termo adicional, o modelo não é válido para temperaturas abaixo da temperatura crítica. Nesse caso, a função de partição torna-se complexa. Sendo assim, este modelo não é um bom candidato para o estudo de transições de fase.

Em contrapartida, para contornar a "patologia" do modelo gaussiano, Berlin e Kac propuseram o modelo esférico clássico [1], válido para altas e baixas temperaturas e exibindo uma transição de fase térmica para as dimensões espaciais  $d \geq 3$ . O modelo esférico clássico possui um comportamento anômalo a baixas temperaturas, com a entropia divergindo à medida que  $T \rightarrow 0$ .

Nesse modelo, as variáveis de spin  $S$  estão sujeitas ao chamado vínculo esférico, definido como

$$\sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}^2 = N. \quad (3.2)$$

Do ponto de vista das configurações que podem ser assumidas pelos spins, o modelo esférico possui um número maior quando comparado ao modelo de Ising. Geometricamente, as configurações associadas ao modelo de Ising podem ser vistas como os vértices de um cubo  $N$ -dimensional. No caso do modelo esférico, as configurações assumidas pelos spins são representadas por meio dos pontos pertencentes a uma esfera  $N$ -dimensional com raio  $N^{\frac{1}{2}}$ .

O modelo esférico é exatamente solúvel em qualquer dimensão  $d$  (mesmo com  $H \neq 0$ ), enquanto que o modelo de Ising possui solução analítica na presença de campo em uma dimensão. Na ausência de campo externo, o modelo de Ising é exatamente solúvel em  $d = 2$  [25].

H. W. Lewis e G. H. Wannier em [26, 27], apresentaram outra versão do modelo esférico, o chamado "modelo esférico médio". A solução proposta por Lewis e Wannier é matematicamente menos trabalhosa do que em [1] e o "vínculo esférico médio" é dado por

$$\left\langle \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}^2 \right\rangle = N. \quad (3.3)$$

De acordo com o vínculo esférico médio, os spins ocupam em média a superfície de uma hiperesfera [28]. As quantidades termodinâmicas associadas a ambos os modelos são basicamente as mesmas [4].

## 3.2 Formulação e Solução do Modelo Esférico Quântico

Como dito anteriormente, o modelo esférico clássico possui certas anomalias a baixas temperaturas, que são corrigidas na sua versão quântica.

A versão quântica do modelo esférico pode ser obtida adicionando-se um termo cinético à Hamiltoniana (3.1)

$$\mathcal{H} = \frac{g}{2} \sum_{\mathbf{r}} p_{\mathbf{r}}^2 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'} - H \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}, \quad (3.4)$$

em que o termo cinético é governado por um parâmetro  $g$  que controla as flutuações quânticas e funciona como a temperatura no caso térmico. Além disso, as variáveis  $S_{\mathbf{r}}$  e  $p_{\mathbf{r}}$  são promovidas a operadores, de tal maneira que o conjunto de operadores  $\{S_{\mathbf{r}}\}$  e  $\{p_{\mathbf{r}}\}$  agora satisfazem a relação de comutação

$$[S_{\mathbf{r}}, p_{\mathbf{r}'}] = i\delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}. \quad (3.5)$$

O modelo esférico clássico pode ser recuperado tomando-se  $g \rightarrow 0$ .

O modelo esférico pode ser quantizado de diferentes maneiras: por meio da quantização canônica [28, 29], pelo método de quantização estocástica [30], ou através do formalismo de integração funcional [31, 32]. Naturalmente, todos os métodos conduzem aos mesmos resultados. Prosseguimos, neste trabalho, com o formalismo de integração

funcional. Para isto, é necessário primeiramente fazer a transformada de Legendre de (3.4), com o intuito de obter a Lagrangiana  $\mathcal{L}$ , isto é,

$$\mathcal{L} = -\mathcal{H} + \sum_{\mathbf{r}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{\mathbf{r}}} p_{\mathbf{r}}. \quad (3.6)$$

O segundo termo de (3.6) fornece o resultado  $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_{\mathbf{r}}} = g p_{\mathbf{r}}$  e, conseqüentemente, conduz a Lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{g}{2} \sum_{\mathbf{r}} p_{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'} \\ &= \frac{1}{2g} \sum_{\mathbf{r}} \left( \frac{\partial S_{\mathbf{r}}}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

em que consideramos momentaneamente o campo magnético nulo. Passando para o Euclidiano por meio de  $t = -i\tau$ , e usando que  $\mathcal{L}_E = -\mathcal{L}(\tau)$ , obtemos a versão Euclidiana de (3.7),

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2g} \sum_{\mathbf{r}} \left( \frac{\partial S_{\mathbf{r}}(\tau)}{\partial \tau} \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'}. \quad (3.8)$$

A função de partição do formalismo do tempo imaginário é definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}S \delta \left( \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}^2 - N \right) \exp \left( - \int_0^{\beta} d\tau \mathcal{L}_E \right) \\ &= \int \mathcal{D}S \delta \left( \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}^2 - N \right) \\ &\quad \times \exp \left[ - \int_0^{\beta} d\tau \left( \frac{1}{2g} \sum_{\mathbf{r}} \left( \frac{\partial S_{\mathbf{r}}(\tau)}{\partial \tau} \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.9)$$

em que as variáveis de spin bosônicas satisfazem as condições periódicas de contorno  $S_{\mathbf{r}}(0) = S_{\mathbf{r}}(\beta)$  e conduzem as frequências de Matsubara  $\omega_n = \frac{2n\pi}{\beta}$  com  $n \in Z$ . A medida de integração  $\mathcal{D}S \equiv \prod_{\mathbf{r}} dS_{\mathbf{r}}$  corre sobre as variáveis de spin de todos os sítios da rede.

É conveniente representar a delta funcional que implementa o vínculo esférico (3.2) por meio de,

$$\delta \left( \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}^2 - N \right) = \int \mathcal{D}\mu \exp \left[ - \int_0^{\beta} d\tau \mu \left( \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}^2 - N \right) \right], \quad (3.10)$$

com o parâmetro  $\mu$  correspondendo ao multiplicador de Lagrange. Assim a expressão (3.9) pode ser reescrita como

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\mu \mathcal{D}S \exp \left\{ - \int_0^{\beta} d\tau \left[ \frac{1}{2g} \sum_{\mathbf{r}} \left( \frac{\partial S_{\mathbf{r}}}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'} + \mu \left( \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}^2 - N \right) \right] \right\}. \quad (3.11)$$

Para dar continuidade com o cálculo da função de partição é conveniente escrevê-la no espaço dos momentos. A transformada de Fourier do operador de spin é

$$S_{\mathbf{r}}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} S_{\mathbf{q}}(\tau). \quad (3.12)$$

Com isso, a transformada de cada um dos termos em (3.11) conduz aos seguintes resultados

$$\sum_{\mathbf{r}} \left( \frac{\partial S_{\mathbf{r}}}{\partial \tau} \right)^2 = \sum_{\mathbf{q}} \left( \frac{\partial S_{\mathbf{q}}}{\partial \tau} \right) \left( \frac{\partial S_{-\mathbf{q}}}{\partial \tau} \right), \quad (3.13)$$

$$\sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'} = \sum_{\mathbf{q}} S_{\mathbf{q}} J(\mathbf{q}) S_{-\mathbf{q}}, \quad (3.14)$$

e

$$\mu \sum_{\mathbf{r}} (S_{\mathbf{r}})^2 = \sum_{\mathbf{q}} S_{\mathbf{q}} S_{-\mathbf{q}}. \quad (3.15)$$

Substituindo (3.13), (3.14) e (3.15) em (3.11), a função de partição toma a forma

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}\mu \mathcal{D}S \exp \left[ - \int_0^\beta d\tau \left( \frac{1}{2g} \sum_{\mathbf{q}} \left( \frac{\partial S_{\mathbf{q}}}{\partial \tau} \right) \left( \frac{\partial S_{-\mathbf{q}}}{\partial \tau} \right) - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} S_{\mathbf{q}} J(\mathbf{q}) S_{-\mathbf{q}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mu \sum_{\mathbf{q}} S_{\mathbf{q}} S_{-\mathbf{q}} - \mu N \right) \right] \\ &= \int \mathcal{D}\mu \mathcal{D}S \exp \left[ - \int_0^\beta d\tau \left( \sum_{\mathbf{q}} S_{\mathbf{q}} \left( -\frac{1}{2g} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{1}{2} J(\mathbf{q}) + \mu \right) S_{-\mathbf{q}} - \mu N \right) \right] \\ &= \int \mathcal{D}\mu \mathcal{D}S \exp \left[ - \int_0^\beta d\tau \left( \sum_{\mathbf{q}} S_{\mathbf{q}} \hat{\mathcal{O}}_{\mathbf{q}} S_{-\mathbf{q}} - \mu N \right) \right], \end{aligned} \quad (3.16)$$

em que o operador  $\hat{\mathcal{O}}_{\mathbf{q}}$  é definido como  $\hat{\mathcal{O}}_{\mathbf{q}} \equiv -\frac{1}{2g} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{1}{2} J(\mathbf{q}) + \mu$ .

Para prosseguir com o cálculo da função de partição, vamos decompor os spins  $S_{\mathbf{q} \neq \mathbf{0}}$  em termos das componentes real e imaginária

$$S_{\mathbf{q}} = \frac{\text{Re} S_{\mathbf{q}} + i \text{Im} S_{\mathbf{q}}}{\sqrt{2}}, \quad (3.17)$$

em que  $S_{-\mathbf{q}} = S_{\mathbf{q}}^\dagger$  devido ao fato de  $S_{\mathbf{r}}$  ser real. Consequentemente, o modo  $S_{\mathbf{0}}$  é real.

Com a ajuda dessas decomposições, o termo dependente dos spins em (3.16) toma a forma

$$S_{\mathbf{q}} \hat{\mathcal{O}}_{\mathbf{q}} S_{-\mathbf{q}} = \frac{\text{Re} S_{\mathbf{q}} \hat{\mathcal{O}}_{\mathbf{q}} \text{Re} S_{\mathbf{q}} + \text{Im} S_{\mathbf{q}} \hat{\mathcal{O}}_{\mathbf{q}} \text{Im} S_{\mathbf{q}}}{2} + S_{\mathbf{0}} \hat{\mathcal{O}}_{\mathbf{0}} S_{\mathbf{0}}, \quad (3.18)$$

e conseqüentemente, obtemos a função de partição

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}\mu \mathcal{D}\text{Re}S_{\mathbf{q}} \mathcal{D}\text{Im}S_{\mathbf{q}} \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \left[ \sum_{\mathbf{q} \neq \mathbf{0}} \left( \frac{\text{Re}S_{\mathbf{q}} \hat{\mathcal{O}}_{\mathbf{q}} \text{Re}S_{\mathbf{q}} + \text{Im}S_{\mathbf{q}} \hat{\mathcal{O}}_{\mathbf{q}} \text{Im}S_{\mathbf{q}}}{2} \right) - \mu N \right] \right\} \\ &\times \int dS_{\mathbf{0}} \exp \left( - \int_0^\beta d\tau S_{\mathbf{0}} \hat{\mathcal{O}}_{\mathbf{0}} S_{\mathbf{0}} \right), \end{aligned} \quad (3.19)$$

com as medidas de integração  $\mathcal{D}\text{Re}S_{\mathbf{q}} = \prod_{\mathbf{q} \neq \mathbf{0}} d\text{Re}S_{\mathbf{q}}$  e  $\mathcal{D}\text{Im}S_{\mathbf{q}} = \prod_{\mathbf{q} \neq \mathbf{0}} d\text{Im}S_{\mathbf{q}}$ . Manipulando as somatórias contidas no argumento de (3.19), obtemos a expressão

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}\mu \exp \left( \int_0^\beta d\tau \mu N \right) \int dS_{\mathbf{0}} \exp \left( - \int_0^\beta d\tau S_{\mathbf{0}} \hat{\mathcal{O}}_{\mathbf{0}} S_{\mathbf{0}} \right) \\ &\times \prod_{\mathbf{q} > \mathbf{0}} \left[ \int d\text{Re}S_{\mathbf{q}} d\text{Im}S_{\mathbf{q}} \right] \exp \left[ - \int_0^\beta d\tau 2 \sum_{\mathbf{q} > \mathbf{0}} \left( \frac{\text{Re}S_{\mathbf{q}} \hat{\mathcal{O}}_{\mathbf{q}} \text{Re}S_{\mathbf{q}} + \text{Im}S_{\mathbf{q}} \hat{\mathcal{O}}_{\mathbf{q}} \text{Im}S_{\mathbf{q}}}{2} \right) \right] \\ &= \int \mathcal{D}\mu \exp \left( \int_0^\beta d\tau \mu N \right) \int \mathcal{D}S_{\mathbf{0}} \exp \left( - \int_0^\beta d\tau S_{\mathbf{0}} \hat{\mathcal{O}}_{\mathbf{0}} S_{\mathbf{0}} \right) \prod_{\mathbf{q} > \mathbf{0}} \left[ \int d\text{Re}S_{\mathbf{q}} \right] \\ &\times \exp \left( - \int_0^\beta \sum_{\mathbf{q} > \mathbf{0}} \text{Re}S_{\mathbf{q}} \hat{\mathcal{O}}_{\mathbf{q}} \text{Re}S_{\mathbf{q}} \right) \prod_{\mathbf{q} > \mathbf{0}} \left[ \int d\text{Im}S_{\mathbf{q}} \right] \exp \left( - \int_0^\beta d\tau \sum_{\mathbf{q} > \mathbf{0}} \text{Im}S_{\mathbf{q}} \hat{\mathcal{O}}_{\mathbf{q}} \text{Im}S_{\mathbf{q}} \right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Realizando as integrais gaussianas sobre as variáveis de spin e recorrendo à propriedade  $\det A = \exp(\text{Tr}(\ln A))$ , a função de partição é reduzida a

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \int \mathcal{D}\mu \exp \left( \int_0^\beta d\tau \mu N \right) \prod_{\mathbf{q} > \mathbf{0}} \left[ \frac{1}{(\text{Det} \hat{\mathcal{O}}_{\mathbf{q}})^{1/2} (\text{Det} \hat{\mathcal{O}}_{\mathbf{q}})^{1/2}} \right] \int dS_{\mathbf{0}} \exp \left( - \int_0^\beta d\tau S_{\mathbf{0}} \hat{\mathcal{O}}_{\mathbf{0}} S_{\mathbf{0}} \right) \\ &= \int \mathcal{D}\mu \exp \left( \int_0^\beta d\tau \mu N \right) \frac{1}{(\text{Det} \hat{\mathcal{O}}_{\mathbf{0}})^{1/2}} \prod_{\mathbf{q} \neq \mathbf{0}} \left[ \frac{1}{(\text{Det} \hat{\mathcal{O}}_{\mathbf{q}})^{1/2}} \right] \\ &= \int \mathcal{D}\mu \exp \left( \int_0^\beta d\tau \mu N \right) \prod_{\mathbf{q}} \left[ \frac{1}{(\text{Det} \hat{\mathcal{O}}_{\mathbf{q}})^{1/2}} \right] \\ &= \int \mathcal{D}\mu \exp \left( \int_0^\beta d\tau \mu N \right) \exp \left[ - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}} \text{Tr}(\ln \hat{\mathcal{O}}_{\mathbf{q}}) \right] \\ &= \int \mathcal{D}\mu \exp \left\{ -N \left[ - \int_0^\beta d\tau \mu + \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{q}} \text{Tr}(\ln \hat{\mathcal{O}}_{\mathbf{q}}) \right] \right\} \\ &= \int \mathcal{D}\mu \exp(-N S_{eff}), \end{aligned} \quad (3.21)$$

em que a ação efetiva  $S_{eff}$  é definida como

$$S_{eff} \equiv - \int_0^\beta d\tau \mu + \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{q}} \text{Tr} \left[ \ln \left( - \frac{1}{2g} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{1}{2} J(\mathbf{q}) + \mu \right) \right]. \quad (3.22)$$

Nessa expressão, a transformada de Fourier da energia de interação  $J_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \equiv J(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  é dada por

$$J(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{h}} J(\mathbf{h}) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{h}), \quad \text{em que} \quad \mathbf{h} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'. \quad (3.23)$$

A integral sobre o multiplicador de Lagrange  $\mu$  pode ser feita por meio do método do ponto de sela, que torna-se exato no limite termodinâmico,  $N \rightarrow \infty$ . A equação de ponto de sela é determinada pela condição

$$\frac{\delta S_{eff}}{\delta \mu} = 0. \quad (3.24)$$

Recorrendo à identidade  $\delta \text{Tr} \ln A = \text{Tr} A^{-1} \delta A$ , o cálculo da condição (3.24) prossegue da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{eff}}{\delta \mu(\tau')} &= - \int_0^\beta \frac{\delta \mu(\tau)}{\delta \mu(\tau')} + \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{q}} \frac{\delta}{\delta \mu} \left\{ \text{Tr} \left[ \ln \left( -\frac{1}{2g} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{1}{2} J(\mathbf{q}) + \mu \right) \right] \right\} = 0 \\ &= -1 + \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{q}} \text{Tr} \left[ \frac{\delta(\tau - \tau')}{-\frac{1}{2g} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{1}{2} J(\mathbf{q}) + \mu} \right] = 0 \\ &= -1 + \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{q}} \int_0^\beta d\tau \langle \tau | \left[ \frac{\delta(\tau - \tau')}{-\frac{1}{2g} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{1}{2} J(\mathbf{q}) + \mu} \right] | \tau \rangle = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Na expressão acima o traço é tomado na base "coordenada"  $|\tau\rangle$ . É conveniente considerarmos uma base de "momento"  $|n\rangle$ , que por sua vez, diagonaliza o operador  $\frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$ , tal que  $\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} |n\rangle = -\omega_n^2 |n\rangle$  e  $\langle \tau | n \rangle = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \exp^{i\omega_n \tau}$ . Inserindo a relação de completeza  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n\rangle \langle n|$  em (3.25), obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{q}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^\beta d\tau \langle \tau | n \rangle \left[ \frac{\delta(\tau - \tau')}{\frac{1}{2g} \omega_n^2 - \frac{1}{2} J(\mathbf{q}) + \mu} \right] \langle n | \tau \rangle \\ 1 &= \frac{1}{2\beta N} \sum_{\mathbf{q}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{\frac{1}{2g} \omega_n^2 - \frac{1}{2} J(\mathbf{q}) + \mu} \right]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Nessa expressão, a soma sobre as frequências bosônicas de Matsubara  $\omega_n = \frac{2n\pi}{\beta}$ , em que  $n \in Z$ , pode ser efetuada com o auxílio da relação [33]

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + y^2} = \frac{\pi}{y} \coth(\pi y), \quad y > 0, \quad (3.27)$$

conduzindo a expressão

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2N\beta} \left( \frac{\beta}{2\pi} \right)^2 \sum_{\mathbf{q}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2g \left[ \frac{1}{n^2 + 2g \left( -\frac{1}{2} J(\mathbf{q}) + \mu \right) \left( \frac{\beta}{2\pi} \right)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{q}} \frac{2g}{\left[ 2g \left( \mu - \frac{1}{2} J(\mathbf{q}) \right) \right]^{\frac{1}{2}}} \coth \left\{ \frac{\beta}{2} \left[ 2g \left( \mu - \frac{1}{2} J(\mathbf{q}) \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{q}} \frac{g}{\omega_{\mathbf{q}}} \coth \left( \frac{\beta}{2} \omega_{\mathbf{q}} \right), \end{aligned} \quad (3.28)$$

com a frequência bosônica  $\omega_{\mathbf{q}}$  definida como

$$\omega_{\mathbf{q}}^2 \equiv 2g \left[ \mu - \frac{1}{2} J(\mathbf{q}) \right]. \quad (3.29)$$

A frequência em (3.29) é definida apenas quando  $\mu \geq \mu_c \equiv \max \frac{1}{2} J(\mathbf{q})$ . Para interações ferromagnéticas de primeiros vizinhos, em que a transformada de Fourier da energia de interação é

$$J(\mathbf{q}) = 2J \sum_i^d \cos(q_i), \quad (3.30)$$

com  $J > 0$ , vemos que  $\mathbf{q}_c = (0, 0, 0, \dots, 0)$ , o que implica  $\mu_c = dJ$ .

A seguir é investigado o comportamento crítico do sistema à temperatura nula e temperatura finita, respectivamente.

### 3.3 Comportamento Crítico

Com o intuito de estudar o comportamento crítico do sistema é fundamental investigar a expressão do vínculo (3.28) próximo do ponto crítico. Vamos, inicialmente, determinar em quais dimensões a expressão de ponto de sela converge. Para isso, consideramos o limite termodinâmico

$$\frac{1}{N} \sum_q \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d q}{(2\pi)^d}, \quad (3.31)$$

de modo que a equação (3.28) passa a ser escrita como

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{g}{\omega_{\mathbf{q}}} \coth\left(\frac{\beta}{2} \omega_{\mathbf{q}}\right) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{g}{[2g(\mu - J \sum_i \cos(q_i))]^{\frac{1}{2}}} \coth\left\{\frac{\beta}{2} \left[2g\left(\mu - J \sum_i \cos(q_i)\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Nessa expressão o ponto crítico está localizado em  $\mu_c = dJ$  com  $J > 0$ , desde que a integral seja convergente.

#### 3.3.1 Comportamento do Multiplicador de Lagrange $\mu$ Próximo da Criticalidade no Caso Quântico

No caso de temperatura nula as flutuações quânticas são responsáveis pela transição de fase. Nesse limite, a função hiperbólica se comporta como  $\coth(x) \rightarrow 1$  e a equação do ponto de sela (3.32) é reduzida a

$$1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{2J}} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{\mu}{J} - \sum_i \cos(q_i)\right]}}. \quad (3.33)$$

Ao empregar a identidade [33]

$$\frac{1}{x^p} = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_0^{\infty} dt t^{p-1} \exp(-xt), \quad p, x > 0, \quad (3.34)$$

obtemos

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{2\Gamma(1/2)} \sqrt{\frac{g}{2J}} \int_0^\infty dt t^{-\frac{1}{2}} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \exp \left[ -t \left( \frac{\mu}{J} - \sum_i \cos(q_i) \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{2\pi J}} \int_0^\infty dt t^{-\frac{1}{2}} \exp \left( -\frac{\mu}{J} t \right) \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \exp \left( t \sum_i \cos(q_i) \right) \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{2\pi J}} \int_0^\infty dt t^{-\frac{1}{2}} \exp \left( -\frac{\mu}{J} t \right) [I_0(t)]^d, \tag{3.35}
\end{aligned}$$

com  $I_0(t)$  sendo a função de Bessel de primeiro tipo. Para dar continuidade na análise do comportamento crítico do sistema é conveniente definir a função

$$\mathcal{I}_d(\mu) \equiv \int_0^\infty dt t^{-\frac{1}{2}} \exp \left( -\frac{\mu}{J} t \right) [I_0(t)]^d, \tag{3.36}$$

e considerar o comportamento assintótico de  $I_0(t)$

$$\begin{aligned}
I_0(t) &\sim 1, & t \rightarrow 0 \\
I_0(t) &\sim \frac{e^t}{\sqrt{2\pi t}}, & t \rightarrow \infty. \tag{3.37}
\end{aligned}$$

A expressão (3.36) poderá apresentar uma divergência para grandes valores de  $t$  dependendo do valor da dimensão  $d$ . Desse modo

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_d(\mu) &\sim \int_0^\infty dt t^{-\frac{1}{2}} \exp \left( -\frac{\mu}{J} t \right) \frac{e^{dt}}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} \\
&\sim \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^\infty dt \exp \left[ -\left( \frac{\mu}{J} - d \right) t \right] t^{-\left(\frac{d+1}{2}\right)}. \tag{3.38}
\end{aligned}$$

Tomando essa expressão no ponto crítico,  $\mu_c = dJ$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_d(\mu_c) &\sim \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^\infty dt \exp \left[ -\left( \frac{dJ}{J} - d \right) t \right] t^{-\left(\frac{d+1}{2}\right)} \\
&\sim \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^\infty dt t^{-\left(\frac{d+1}{2}\right)}. \tag{3.39}
\end{aligned}$$

A integral acima converge para  $d > 1$  e, dessa maneira, pode ser definida a dimensão crítica inferior  $d_l = 1$ . Assim, no ponto crítico, o valor do parâmetro  $g$  adquire o valor crítico determinado pela expressão (3.35).

Com o objetivo de determinar a dimensão crítica superior  $d_u$ , é analisada a convergência da derivada de (3.38) [34],

$$\mathcal{I}'_d(\mu) \sim -\frac{1}{J(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^\infty dt t^{-\left(\frac{d-1}{2}\right)} \exp [-t(\mu - \mu_c)]. \tag{3.40}$$

Ao tomar novamente o valor  $\mu = \mu_c$ , é notado que essa equação converge quando  $d > 3$ , fornecendo a dimensão crítica superior  $d_u = 3$ .

Uma vez definida as dimensões críticas inferior e superior, podemos estudar o comportamento de  $(\mu - \mu_c)$  à medida que  $\sqrt{g}$  se aproxima da transição.

No caso em que a dimensão  $1 < d < 3$ , é conveniente fazer a mudança de variável,  $y = (\mu - \mu_c)t$ , de modo que a expressão (3.40) passa a ser escrita como

$$\mathcal{I}'_d(\mu) \sim (\mu - \mu_c)^{-\left(\frac{3-d}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{3-d}{2}\right). \quad (3.41)$$

Integrando em seguida no multiplicador de Lagrange  $\mu$  e utilizando a equação de ponto de sela (3.35), obtemos

$$\frac{\sqrt{g} - \sqrt{g_c}}{\sqrt{g_c}} \sim (\mu - \mu_c)^{-\left(\frac{1-d}{2}\right)}. \quad (3.42)$$

Definindo a medida reduzida "quântica"  $\tau_g \equiv \frac{\sqrt{g} - \sqrt{g_c}}{\sqrt{g_c}}$ , a dependência de  $(\mu - \mu_c)$ , para  $\sqrt{g}$  próximo da criticalidade é dada por

$$(\mu - \mu_c) \sim \tau_g^{\left(\frac{2}{d-1}\right)}. \quad (3.43)$$

Para o caso em que  $d = 3$ , é necessário considerar a derivada de (3.36),

$$\mathcal{I}'_3(\mu) \sim - \int_0^\infty dt t^{-1} \exp\left[-\frac{t}{J}(\mu - \mu_c)\right]. \quad (3.44)$$

A integral deve ser separada em duas regiões  $f_0^\infty = f_0^1 + f_1^\infty$ , em que a divergência estará concentrada na segunda integral

$$\begin{aligned} \mathcal{I}'_3(\mu) &\sim \int_1^\infty dt t^{-1} \exp\left[-\frac{t}{J}(\mu - \mu_c)\right] \\ &\sim -\Gamma\left(0, \frac{1}{J}(\mu - \mu_c)\right), \end{aligned} \quad (3.45)$$

em que  $\Gamma\left(0, \frac{1}{J}(\mu - \mu_c)\right)$  corresponde à função gamma incompleta, e seu comportamento para  $(\mu - \mu_c)$  pequeno é dada por

$$\Gamma\left(0, \frac{(\mu - \mu_c)}{J}\right) = -\ln\left(\frac{\mu - \mu_c}{J}\right) + \Gamma'(1) + \mathcal{O}(\mu - \mu_c). \quad (3.46)$$

Integrando (3.45) com relação a  $\mu$ , obtemos

$$\mathcal{I}_d(\mu) - \mathcal{I}_d(\mu_c) \sim -(\mu - \mu_c)\ln(\mu - \mu_c) - (\mu - \mu_c). \quad (3.47)$$

Por fim, utilizando (3.35), podemos mostrar que

$$(\mu - \mu_c) \sim -\frac{\tau_g}{\ln\tau_g}. \quad (3.48)$$

Quando  $d > 3$ , a equação do vínculo é convergente, e portanto, pode ser expandida em torno do ponto crítico, conduzindo a

$$\mathcal{I}_d(\mu) - \mathcal{I}_d(\mu_c) \sim (\mu - \mu_c)\mathcal{I}'_d(\mu_c), \quad (3.49)$$

ou, então

$$(\mu - \mu_c) \sim \tau_g. \quad (3.50)$$

Os resultados obtidos em (3.43), (3.48) e (3.50) podem ser organizados de acordo com a dimensionalidade  $d$ ,

$$(\mu - \mu_c) \sim \begin{cases} \tau_g^{\frac{2}{d-1}}, & \text{para } 1 < d < 3 \\ -\frac{\tau_g}{\ln \tau_g}, & \text{para } d = 3 \\ \tau_g, & \text{para } d > 3 \end{cases}, \quad (3.51)$$

lembrando que a distância do ponto crítico quântico é definida como  $\tau_g \equiv \frac{\sqrt{g} - \sqrt{g_c}}{\sqrt{g_c}}$ .

### 3.3.2 Comportamento do Multiplicador de Lagrange $\mu$ Próximo da Criticalidade no Caso Térmico

No caso de temperatura finita, a energia  $k_B T \gg \hbar \omega$ , e a transição é governada pela temperatura. Nessa situação o argumento da função hiperbólica em (3.32) pode ser expandida para pequenos valores do argumento, isto é,  $\coth(x) \sim \frac{1}{x}$ , levando à seguinte expressão de ponto de sela

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{2g}{\beta \omega_q^2} \\ &= \frac{1}{2\beta} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{\left[\mu - \frac{1}{2}J(q)\right]}, \end{aligned} \quad (3.52)$$

ou

$$1 = \frac{1}{2\beta J} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{\left[\frac{\mu}{J} - \sum_i \cos(q_i)\right]}, \quad (3.53)$$

em que novamente estamos considerando as interações de primeiros vizinhos representadas em (3.30).

A estratégia utilizada para obter as dimensões críticas inferior e superior, bem como o comportamento de  $(\mu - \mu_c)$  próximo da criticalidade segue o mesmo raciocínio utilizado no caso quântico.

A expressão (3.53) pode ser escrita em termos da função Bessel de primeiro tipo utilizando-se a identidade (3.34),

$$1 = \frac{1}{2\beta J} \int_0^\infty dt \exp\left(-t\frac{\mu}{J}\right) [\text{I}_0(t)]^d. \quad (3.54)$$

Definindo

$$\mathcal{I}_d(\mu) \equiv \int_0^\infty dt \exp\left(-\frac{\mu}{J}t\right) [\text{I}_0(t)]^d, \quad (3.55)$$

e recorrendo a (3.37), obtemos a dimensão crítica inferior  $d_l = 2$ . A partir da derivada de (3.55) é determinada a dimensão crítica superior,  $d_u = 4$ . Portanto, o sistema possui um ponto crítico em  $T = T_c$  e  $\mu = \mu_c$  quando  $d > 2$ . Por meio das equações (3.54) e (3.55) e a derivada de (3.55) obtemos o comportamento de  $(\mu - \mu_c)$  próximo da transição. Os resultados são mostrados abaixo

$$(\mu - \mu_c) \sim \begin{cases} \tau_\beta^{\frac{2}{d-2}}, & \text{para } 2 < d < 4 \\ -\frac{\tau_\beta}{\ln \tau_\beta}, & \text{para } d = 4 \\ \tau_\beta, & \text{para } d > 4 \end{cases}, \quad (3.56)$$

com a distância do ponto crítico térmico  $\tau_\beta \equiv \frac{T-T_c}{T_c}$ .

Para finalizar análise do comportamento crítico do modelo esférico vamos calcular dois expoentes críticos, associados à magnetização e a suscetibilidade. A magnetização pode ser determinada incluindo o campo externo  $H$  em (3.7). A expressão do vínculo se torna

$$1 = \frac{H^2}{4 \left[ \mu - \frac{J(\mathbf{0})}{2} \right]^2} + \frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{g}{\omega_{\mathbf{q}}} \coth \left( \frac{\beta}{2} \omega_{\mathbf{q}} \right) \quad (3.57)$$

A partir daí vemos que em ambos os casos de temperatura zero e temperatura finita a magnetização tem a forma

$$m = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}} \right\rangle = -\frac{\partial f}{\partial H} = \frac{H}{2(\mu - \mu_c)} \sim \tau^{1/2}, \quad (3.58)$$

em que o expoente crítico não possui nenhuma dependência associada à dimensão e vale  $\beta = 1/2$ .

Com relação à suscetibilidade, no caso de temperatura zero é obtida a expressão

$$\chi = \frac{\partial m}{\partial H} = (\mu - \mu_c)^{-1}. \quad (3.59)$$

Para dimensões entre  $1 < d < 3$  o expoente crítico obtido é  $\gamma = 2/(d-1)$ , e vemos claramente que depende da dimensão  $d$ .

No caso de temperatura finita, a suscetibilidade também é dada pela expressão

$$\chi = \frac{\partial m}{\partial H} = (\mu - \mu_c)^{-1}, \quad (3.60)$$

entretanto, com o expoente crítico  $\gamma = 2/(d-2)$  para o caso em que  $2 < d < 4$ .

A tabela (3) resume os expoentes críticos com interações de curto alcance associados à suscetibilidade, ao comprimento de correlação, à função de correlação e à magnetização, respectivamente.

$T$	$d_l$	$d_u$	$\gamma$	$\nu$	$\eta$	$\beta$	Classe de univ.
0	1	3	$\begin{cases} 2/(d-1) \\ 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 1/(d-1) \\ 1/2 \end{cases}$	0	$\frac{1}{2}$	quântico
$>0$	2	4	$\begin{cases} 2/(d-2) \\ 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 1/(d-2) \\ 1/2 \end{cases}$	0	$\frac{1}{2}$	clássico

Tabela 3 – Alguns dos expoentes críticos associados ao modelo esférico clássico (térnico) e quântico de acordo com a dimensão  $d$ .

# 4 Modelo Sigma não-Linear e a Equivalência com o Modelo Esférico

O objetivo desse capítulo é mostrar a equivalência entre o modelo esférico e o modelo sigma não-linear. Inicialmente é introduzido o modelo sigma não-linear e em seguida é calculada a ação efetiva na expansão  $1/N$ . É mostrado que os modelos são equivalentes no limite estrito  $N \rightarrow \infty$ .

## 4.1 Formulação do Modelo Sigma não-Linear

O modelo sigma não-linear é construído em termos de campos escalares  $\varphi$  e é definido pela Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_a \partial^\mu \varphi_a, \quad (4.1)$$

no qual o índice  $a$  corre sobre  $a = 1, \dots, N$ . Assim como no modelo esférico, o modelo sigma não-linear também possui um vínculo, que é dado pela expressão

$$\varphi_a(x) \varphi_a(x) = \frac{N}{2g}, \quad (4.2)$$

em que o parâmetro  $g$  corresponde a uma constante de acoplamento. No caso do modelo sigma não-linear, para cada ponto  $x$  do espaço-tempo existem  $N$  campos escalares  $\varphi_a$ , que obedecem a (4.2). Sendo assim, a equação (4.2) é entendida como sendo um vínculo local, diferente de (3.2), que é visto como um vínculo global, no sentido de que relaciona spins em pontos distintos da rede.

A equação de movimento associada ao campo  $\varphi_a$  pode ser obtida por meio da equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} = 0. \quad (4.3)$$

Neste ponto é conveniente introduzir um termo de massa na Lagrangiana (4.1), o que é inócuo devido ao vínculo (4.2). Daí segue que

$$\left( \partial_\mu \partial^\mu + m^2 \right) \varphi_a = 0. \quad (4.4)$$

O propagador dessa teoria pode ser calculado por meio da equação de movimento, impondo

$$\left( \partial_\mu \partial^\mu + m^2 \right) \Delta(x) = -i\delta(x), \quad (4.5)$$

em que a transformada de Fourier do propagador é definida como

$$\Delta(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \Delta(p) e^{-ipx}. \quad (4.6)$$

Inserindo a equação (4.6) em (4.5), e utilizando a métrica  $(+, -, \dots, -)$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \Delta(p) (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) e^{-ipx} &= -i \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-ipx} \\ \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \Delta(p) (p^2 - m^2) e^{-ipx} &= -i \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} e^{-ipx}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

determinamos o propagador no espaço dos momentos

$$\Delta(p) = \frac{i}{p^2 - m^2}. \quad (4.8)$$

Podemos obter o funcional gerador integrando nos campos escalares e levando em conta o vínculo

$$\mathcal{Z} = A \int \mathcal{D}\varphi \delta \left( \varphi_a^2 - \frac{N}{2g} \right) \exp \left[ i \int d^D x \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_a \partial^\mu \varphi_a - \frac{m^2}{2} \varphi_a^2 \right) \right], \quad (4.9)$$

em que  $A$  corresponde a uma constante de normalização e  $\mathcal{D}\varphi = \prod_a \varphi_a$  à medida de integração. A fim de evitar que as expressões a seguir fiquem muito carregadas, o índice  $a$  será omitido daqui em diante. É conveniente implementar o vínculo no funcional gerador utilizando a representação da integral funcional da função delta

$$\begin{aligned} \delta \left( \varphi^2 - \frac{N}{2g} \right) &= \int \mathcal{D}\lambda(x) \exp \left[ i \int d^D x \lambda(x) \left( \varphi^2 - \frac{N}{2g} \right) \right] \\ &= \int \mathcal{D}\lambda(x) \exp \left[ -i \int d^D x \frac{\lambda(x)}{\sqrt{2N}} \left( \varphi^2 - \frac{N}{2g} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.10)$$

em que  $\lambda(x)$  corresponde a um multiplicador de Lagrange e foi reescalado,  $\lambda(x) \rightarrow -\frac{\lambda(x)}{\sqrt{2N}}$ . O reescalamento empregado no campo auxiliar é útil para prosseguir com a expansão  $1/N$  futuramente.

Inserindo (4.10) em (4.9), a função de partição é escrita da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= A \int \mathcal{D}\lambda(x) \mathcal{D}\varphi \exp \left[ i \int d^D x \left( \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{m^2}{2} \varphi^2 \right) - \frac{\lambda(x)}{\sqrt{2N}} \left( \varphi^2 - \frac{N}{2g} \right) \right] \\ &= A \int \mathcal{D}\lambda(x) \exp \left( i \int d^D x \frac{\lambda(x)}{\sqrt{2N}} \frac{N}{2g} \right) \\ &\times \int \mathcal{D}\varphi \exp \left[ -\frac{1}{2} i \int d^D x \varphi \left( \partial_\mu \partial^\mu + m^2 + \sqrt{\frac{2}{N}} \lambda(x) \right) \varphi \right]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Nessa expressão, a integral sobre os campos escalares é gaussiana e pode ser realizada diretamente. Fazendo o uso da propriedade  $\text{Det} \hat{\mathcal{O}} = \exp [\text{Tr} (\ln) \hat{\mathcal{O}}]$ , obtemos

$$\mathcal{Z} = A \int \mathcal{D}\lambda(x) \exp \left( -\frac{N}{2} \text{Tr} \ln \mathcal{O} + i \int d^D x \frac{\lambda(x)}{\sqrt{2N}} \frac{N}{2g} \right), \quad (4.12)$$

com o operador  $\hat{\mathcal{O}}$  definido como  $\hat{\mathcal{O}} \equiv \partial_\mu \partial^\mu + m^2 + \sqrt{\frac{2}{N}} \lambda(x)$ . O primeiro termo da expressão acima pode ser escrito em termos de um produto de propagadores (4.8) e multiplicadores de Lagrange  $\lambda$ . Para demonstrar isso é usada a propriedade

$$\begin{aligned} \text{Trln}(\hat{\mathcal{O}}) &= \text{Trln} \left( \partial_\mu \partial^\mu + m^2 + \sqrt{\frac{2}{N}} \lambda(x) \right) \\ &= \text{Trln}(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) + \text{Trln} \left( 1 + \frac{1}{(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)} \sqrt{\frac{2}{N}} \lambda(x) \right), \end{aligned} \quad (4.13)$$

de modo que o segundo termo da expressão acima pode ser expandido para  $N$  grande,

$$\text{Trln} \left( 1 + \frac{1}{(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)} \sqrt{\frac{2}{N}} \lambda(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \text{Tr} \left( \frac{1}{(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)} \sqrt{\frac{2}{N}} \lambda(x) \right)^n. \quad (4.14)$$

Nessa expressão foi utilizada a relação  $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ . Escrevendo o traço em uma base contínua,  $\text{Tr}(\dots) \equiv \int dx \langle x | (\dots) | x \rangle$  e abrindo o somatório em (4.14), obtemos

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left( \sqrt{\frac{2}{N}} \frac{\lambda(x)}{(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)} \right)^n &= \int dx_1 \langle x_1 | \left( \sqrt{\frac{2}{N}} \frac{\lambda(x)}{(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)} \right)^n | x_1 \rangle \\ &= \int dx_1 \langle x_1 | \left( \sqrt{\frac{2}{N}} \frac{\lambda(x)}{(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)} \right) \int dx_2 | x_2 \rangle \langle x_2 | \\ &\quad \times \dots \int dx_n | x_n \rangle \langle x_n | \left( \sqrt{\frac{2}{N}} \frac{\lambda(x)}{(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)} \right) | x_1 \rangle \\ &= \int dx_1 dx_2 \dots dx_n \langle x_1 | \left( \sqrt{\frac{2}{N}} \frac{\lambda(x)}{(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)} \right) | x_2 \rangle \\ &\quad \times \langle x_2 | \left( \sqrt{\frac{2}{N}} \frac{\lambda(x)}{(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)} \right) | x_3 \rangle \dots \langle x_n | \left( \sqrt{\frac{2}{N}} \frac{\lambda(x)}{(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)} \right) | x_1 \rangle. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Focando em um único elemento de matriz na expressão acima, obtemos o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \langle x_n | \left( \sqrt{\frac{2}{N}} \frac{\lambda(x)}{(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)} \right) | x_1 \rangle &= \lambda(x_1) \sqrt{\frac{2}{N}} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \langle x_n | \left( \frac{1}{\partial_\mu \partial^\mu + m^2} \right) | p \rangle \langle p | x_1 \rangle \\ &= \lambda(x_1) \sqrt{\frac{2}{N}} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \left( \frac{1}{-p^2 + m^2} \right) e^{-ip(x_n - x_1)} \\ &= i\lambda(x_1) \sqrt{\frac{2}{N}} \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \left( \frac{i}{p^2 - m^2} \right) e^{-ip(x_n - x_1)} \\ &= i\lambda(x_1) \sqrt{\frac{2}{N}} \Delta(x_n - x_1), \end{aligned} \quad (4.16)$$

com o propagador (4.8) sendo identificado nessa expressão. Sendo assim, os  $n$  elementos de matriz de (4.15) podem ser escritos em termos dos propagadores do campo escalar. Por conta disso, (4.14) toma a forma

$$\begin{aligned} \text{Trln} \left( 1 + \frac{1}{(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)} \sqrt{\frac{2}{N}} \lambda(x) \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left( i \sqrt{\frac{2}{N}} \right)^n \int dx_1 dx_2 \cdots dx_n \Delta(x_1 - x_2) \\ &\times \Delta(x_2 - x_3) \cdots \Delta(x_n - x_1) \lambda(x_1) \lambda(x_2) \cdots \lambda(x_n). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Consequentemente, (4.13) se reduz a

$$\begin{aligned} \text{Trln}(\hat{\mathcal{O}}) &= \text{Trln} \left( \partial_\mu \partial^\mu + m^2 + \sqrt{\frac{2}{N}} \lambda(x) \right) \\ &= \text{Trln}(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) + \text{Trln} \left( 1 + \frac{1}{(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)} \sqrt{\frac{2}{N}} \lambda(x) \right) \\ &= \text{Trln}(-p^2 + m^2) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left( i \sqrt{\frac{2}{N}} \right)^n \int dx_1 dx_2 \cdots dx_n \Delta(x_1 - x_2) \\ &\times \Delta(x_2 - x_3) \cdots \Delta(x_n - x_1) \lambda(x_1) \lambda(x_2) \cdots \lambda(x_n), \end{aligned} \quad (4.18)$$

de tal maneira que o gerador funcional é escrito agora como

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= A' \int \mathcal{D}\lambda(x) \exp \left[ -\frac{N}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left( i \sqrt{\frac{2}{N}} \right)^n \int dx_1 dx_2 \cdots dx_n \Delta(x_1 - x_2) \right. \\ &\times \Delta(x_2 - x_3) \cdots \Delta(x_n - x_1) \lambda(x_1) \lambda(x_2) \cdots \lambda(x_n) + i \int d^D x \frac{\lambda(x)}{\sqrt{2N}} \frac{N}{2g} \left. \right], \end{aligned} \quad (4.19)$$

com a nova constante de normalização  $A' = A \exp \left( -\frac{N}{2} \text{Trln}(-p^2 + m^2) \right)$ . A partir dessa expressão podemos identificar a ação efetiva  $S_{eff}$

$$\begin{aligned} S_{eff} &= \int d^D x \frac{\lambda(x)}{\sqrt{2N}} \frac{N}{2g} + i \frac{N}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left( i \sqrt{\frac{2}{N}} \right)^n \int dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &\times \Delta(x_1 - x_2) \Delta(x_2 - x_3) \cdots \Delta(x_n - x_1) \lambda(x_1) \lambda(x_2) \cdots \lambda(x_n). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Para mostrar a equivalência entre o modelo esférico e o modelo sigma não-linear é conveniente escrever explicitamente as ordens dominantes na expansão  $1/N$  para a ação efetiva

$$\begin{aligned} S_{eff} &= N^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \int d^D x \lambda(x) \left( \frac{1}{2g} - \Delta(0) \right) \\ &+ N^0 \frac{i}{2} \int dx_1 dx_2 \lambda(x_1) \Delta(x_1 - x_2) \Delta(x_2 - x_1) \lambda(x_2) \\ &+ N^{-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{3} \int dx_1 dx_2 dx_3 \lambda(x_1) \Delta(x_1 - x_2) \lambda(x_2) \Delta(x_2 - x_3) \lambda(x_3) \Delta(x_3 - x_1) + \cdots \\ &\equiv N^{\frac{1}{2}} S_{\frac{1}{2}} + N^0 S_0 + N^{-\frac{1}{2}} S_{-\frac{1}{2}} + \cdots \end{aligned} \quad (4.21)$$

No limite  $N \rightarrow \infty$ , para que a expansão  $1/N$  seja finita, temos que impor que a contribuição do termo dominante da ação efetiva seja nula, isto é,  $S_{\frac{1}{2}} = 0$ . Portanto

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int d^D x \lambda(x) \left( \frac{1}{2g} - \Delta(0) \right) = 0, \quad (4.22)$$

ou então

$$\frac{1}{2g} - \frac{i}{(2\pi)^D} \int d^D p \frac{1}{p^2 - m^2} = 0, \quad (4.23)$$

o que define a chamada equação de *gap*. Fazendo o uso do formalismo do tempo imaginário,  $p_0 \rightarrow ip_E$ , a equação acima toma a forma

$$\frac{1}{2g} - \frac{i}{(2\pi)^D} \int id^D p_E \frac{1}{-p_E^2 - m^2} = 0, \quad (4.24)$$

em que  $D = 1 + d$ . Considerando o sistema à temperatura finita, podemos utilizar a seguinte relação

$$\int \frac{d^{1+d} p}{(2\pi)^{1+d}} \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d}, \quad (4.25)$$

no qual a componente zero do momento é substituída por uma soma sobre as frequências de Matsubara,  $\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}$ , e  $d$  corresponde à dimensão espacial. Portanto

$$\frac{1}{2g} - \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2} = 0. \quad (4.26)$$

Definindo a frequência bosônica  $\omega_{\mathbf{p}}^2 \equiv \mathbf{p}^2 + m^2$ , e utilizando a identidade (3.27), podemos escrever a equação do *gap* finalmente como

$$\frac{1}{2g} - \frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{\omega_{\mathbf{p}}} \coth \left( \frac{\beta}{2} \omega_{\mathbf{p}} \right) = 0. \quad (4.27)$$

Para finalizar a equivalência, reescrevemos a expressão (3.32) próximo do ponto crítico,

$$1 = \frac{1}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{g}{\left[ 2g \left( \mu - dJ + \frac{J}{2} \mathbf{q}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}} \coth \left\{ \frac{\beta}{2} \left[ 2g \left( \mu - dJ + \frac{J}{2} \mathbf{q}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (4.28)$$

Reescalando  $q_i \rightarrow q'_i \sqrt{\frac{2}{J}}$ , e comparando (4.27) com (4.28), temos a seguinte identificação dos parâmetros

$$\begin{aligned} m^2 &\Leftrightarrow \mu - dJ \\ \tilde{g} &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{2}} \left( \frac{2}{J} \right)^{\frac{d}{2}}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

A equivalência entre modelos empregados em Mecânica Estatística e modelos utilizados em Teoria de Campos será discutida novamente no capítulo 10, mas considerando suas extensões supersimétricas.

# 5 Generalidades Sobre Supersimetria e o Formalismo do Superespaço

O objetivo deste capítulo é apresentar alguns conceitos básicos sobre supersimetria. Inicialmente é dada uma ideia sobre supersimetria, e em seguida é apresentado o conceito de superespaço, em ambos os casos em que o número de supersimetrias é  $\mathcal{N} = 1$  e  $\mathcal{N} = 2$ . Ao final do capítulo é discutida a formulação *on-shell*.

## 5.1 Uma Ideia Sobre Supersimetria

Na natureza, as partículas podem ser classificadas em dois grupos segundo o spin associado a elas: bósons (o fóton, por exemplo), e férmions (como o elétron e o próton). Os bósons possuem valores de spin inteiros, isto é,  $S = 0, 1, 2, \dots$ , enquanto que os férmions possuem spin semi-inteiro, ou seja,  $S = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ . Esses dois grupos de partículas possuem papéis diferentes na natureza. Os férmions constituem a matéria, enquanto que os bósons são as partículas mediadoras das interações entre os férmions e bósons

Do ponto de vista de Mecânica Quântica, esses grupos distintos de partículas obedecem a álgebras diferentes: os bósons obedecem a relações de comutação, por outro lado, os férmions satisfazem a relações de anticomutação.

Ainda que tais partículas tenham características diferentes, não é estranho pensar que essas partículas possam ter uma origem comum, e que ainda poderiam ser tratadas em pé de igualdade no início do universo [35, 8]. Nessa situação, isto nos conduz à ideia da existência de alguma simetria não-trivial que envolve bósons e férmions.

Teorias que são invariantes sob transformações que mapeiam bósons em férmions e vice-versa, chamadas de transformações de supersimetria, e que tem a forma genérica

$$\delta(\text{férmion}) \sim \text{bóson} \quad \text{e} \quad \delta(\text{bóson}) \sim \text{férmion}, \quad (5.1)$$

são denominadas teorias supersimétricas. Isso implica em teorias com mesmo número de graus de liberdade bosônicos e fermiônicos. Sendo assim, para cada partícula bosônica deve existir uma partícula fermiônica correspondente, que por sua vez é chamada de parceira supersimétrica.

Apesar do fato da supersimetria ainda não ter sido observada, podemos pensar que se ela existir, ela deve se manifestar na forma espontaneamente quebrada, que por sua vez está relacionado a um desbalanço entre os graus de liberdade fermiônicos e bosônicos. Isso nos leva a investigar também os mecanismos de quebra de supersimetria em

teorias supersimétricas e um agente natural responsável pela quebra da supersimetria é a temperatura.

## 5.2 O Formalismo do Superespaço

É conveniente iniciarmos uma discussão com respeito ao formalismo do superespaço em mecânica quântica supersimétrica [36, 37, 38, 39]. Esse formalismo é bastante útil para a construção de modelos de física estatística, e em especial para o modelo esférico supersimétrico que é a essência deste trabalho.

O superespaço é a generalização do espaço-tempo usual a fim de acomodar variáveis grassmannianas. Então, começamos fixando nossas convenções para as operações com variáveis grassmannianas. Para o conjunto de variáveis de grassmann,  $\{\theta_i, \theta_j\} = 0$ , definimos

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i}(1) \equiv \int d\theta_i(1) \equiv 0 \quad \text{e} \quad \int d\theta_i \theta_j \equiv \frac{\partial}{\partial \theta_i} \theta_j \equiv \delta_{ij}, \quad (5.2)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i}(\theta_j \theta_k) \equiv \left( \frac{\partial}{\partial \theta_i} \theta_j \right) \theta_k - \theta_j \left( \frac{\partial}{\partial \theta_i} \theta_k \right) = \delta_{ij} \theta_k - \delta_{ik} \theta_j. \quad (5.3)$$

Nosso objetivo inicial é discutir a formulação do superespaço para um sistema quântico envolvendo um único grau de liberdade bosônico,  $x(t)$ . Essa é uma teoria em (0+1) dimensões no qual o "espaço-tempo" corresponde apenas ao tempo,  $t$ . O superespaço mais simples consiste, além da coordenada temporal, de uma variável de grassmann real,  $\theta$ . Essa situação corresponde ao chamado superespaço com o número de supersimetria  $\mathcal{N} = 1$ .

Como veremos, as transformações de supersimetria correspondem às translações no superespaço,

$$t \rightarrow t' = t + i\epsilon\theta \quad \text{e} \quad \theta \rightarrow \theta' = \theta + \epsilon, \quad (5.4)$$

em que  $\epsilon$  corresponde ao parâmetro grassmanniano infinitesimal da translação, que são gerados pela supercarga

$$Q = \frac{\partial}{\partial \theta} + i\theta \frac{\partial}{\partial t}. \quad (5.5)$$

Agora podemos considerar uma função escalar real no superespaço,  $\Phi(t, \theta)$ , que é chamado de um supercampo escalar real. Como  $\theta^2 = 0$ , sua expansão em potências de  $\theta$  é bastante simples,

$$\Phi(t, \theta) = x(t) + i\theta\psi(t). \quad (5.6)$$

Nessa expressão,  $x(t)$  é identificado como o grau de liberdade bosônico e  $\psi(t)$  o grau de liberdade fermiônico dinâmico. Vemos que o supercampo incorpora simultaneamente os graus de liberdade bosônico e fermiônico. Além de tudo, o número de graus de liberdade bosônico e fermiônico é o mesmo no supercampo, que é um requisito básico da supersimetria. Voltaremos a este ponto no caso da supersimetria estendida ( $\mathcal{N} = 2$ ).

Sendo um escalar, sob as translações em (5.4), o supercampo deve se transformar como  $\Phi'(t', \theta') = \Phi(t, \theta)$ . Sob as translações (5.4), o lado esquerdo de (5.6) toma a forma,

$$\Phi'(t + i\epsilon\theta, \theta + \epsilon) = \Phi'(t, \theta) + i\epsilon\theta \frac{\partial}{\partial t} \Phi' + \epsilon \frac{\partial}{\partial \theta} \Phi'. \quad (5.7)$$

Vemos que existe uma arbitrariedade em relação ao último termo da expressão acima, pois poderíamos tê-lo escrito com o parâmetro  $\epsilon$  à direita da derivada, ou seja,  $\frac{\partial}{\partial \theta} \Phi' \epsilon$ . Como  $\{\frac{\partial}{\partial \theta}, \epsilon\} = 0$ , isso produzirá um sinal de menos se tentarmos deixá-lo na forma acima. Neste trabalho, sempre usamos a definição como a representada em (5.7) para a expansão em série de Taylor envolvendo as variáveis anticomutantes.

De acordo com a expressão (5.7), segue que

$$\delta_\epsilon \Phi \equiv \Phi'(t, \theta) - \Phi(t, \theta) = -\epsilon Q \Phi. \quad (5.8)$$

Comparando ambos os lados da expressão acima, vemos que as transformações das componentes  $x$  e  $\psi$  são

$$\delta_\epsilon x = -i\epsilon\psi \quad \text{e} \quad \delta_\epsilon \psi = \epsilon \dot{x}. \quad (5.9)$$

Essas são as transformações de supersimetria. Como mencionado anteriormente, elas em geral levam bósons em férmions e férmions em bósons. Esse é o sentido de uma simetria entre bósons e férmions.

É interessante observar que a supersimetria amarra simetrias internas e geométricas (espaço-tempo),

$$\{Q, Q\} = 2i \frac{\partial}{\partial t}. \quad (5.10)$$

Em outras palavras, o anticomutador das supercargas é proporcional ao gerador das translações temporais, ou seja, o hamiltoniano do sistema.

Existe outro operador que desempenha um papel importante na construção de uma ação no superespaço, chamado de derivada supercovariante,

$$D = \frac{\partial}{\partial \theta} - i\theta \frac{\partial}{\partial t}. \quad (5.11)$$

Note que ele satisfaz a seguinte relação  $\{Q, D\} = 0$ . Isto implica que  $D\Phi$  transforma-se sob as transformações de supersimetria como o próprio supercampo,  $\delta_\epsilon(D\Phi) = -\epsilon Q(D\Phi)$ . O mesmo é verdadeiro para a derivada temporal do supercampo,  $\dot{\Phi}$ , isto é,  $\delta_\epsilon \dot{\Phi} = -\epsilon Q \dot{\Phi}$ . Então, qualquer ação escrita em termos de  $\Phi$ ,  $D\Phi$  e  $\dot{\Phi}$  será manifestamente supersimétrica.

Considere a ação no superespaço,

$$S = \int dt d\theta \mathcal{L}(\Phi, D\Phi, \dot{\Phi}). \quad (5.12)$$

Notamos aqui que a Lagrangiana,  $\mathcal{L}$ , deve possuir alguns números grassmannianos a fim de produzir uma ação escalar não nula. Sob uma transformação de supersimetria, a variação desaparece automaticamente,

$$\delta_\epsilon S = \int dt d\theta \delta_\epsilon \mathcal{L} = \int dt d\theta (-\epsilon Q) \mathcal{L} = 0, \quad (5.13)$$

uma vez que é uma derivada total.

Uma ação simples que podemos propor é

$$S = \frac{i}{2} \int dt d\theta \dot{\Phi} D\Phi = \int dt \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \frac{i}{2} \dot{\psi} \psi \right), \quad (5.14)$$

que é a ação da partícula livre supersimétrica. É fácil verificar que ela é invariante sob as transformações em (5.9). Agora podemos tentar construir termos semelhantes ao potencial, por exemplo, um termo proporcional a  $x^2$ . Isso é importante para nossos propósitos, uma vez que a parte de interação do modelo esférico (supersimétrico),  $J_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'}$ , é essencialmente dessa forma. A conclusão é que para  $\mathcal{N} = 1$  não podemos construir tal termo e temos que considerar a supersimetria estendida.

Passamos para o caso de duas supersimetrias  $\mathcal{N} = 2$ . Nesse caso, o superespaço é dimensionalmente superior e contém, além do tempo, duas variáveis de grassmann,  $\theta$  e  $\bar{\theta}$ , que podem ser pensadas como o complexo conjugado um do outro. Portanto, podemos considerar duas translações independentes no superespaço<sup>1</sup>, que corresponderá a duas transformações de supersimetria independentes,

$$\begin{aligned} \epsilon : \quad t &\rightarrow t + i\bar{\theta}\epsilon, & \theta &\rightarrow \theta - \epsilon, & \text{e} & \bar{\theta} &\rightarrow \bar{\theta} \\ \bar{\epsilon} : \quad t &\rightarrow t - i\bar{\epsilon}\theta, & \theta &\rightarrow \theta, & \text{e} & \bar{\theta} &\rightarrow \bar{\theta} - \bar{\epsilon}, \end{aligned} \quad (5.15)$$

em que  $\epsilon$  e  $\bar{\epsilon}$  são parâmetros grassmanianos infinitesimais. Essas translações são geradas pelas duas supercargas

$$Q \equiv -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} - i\theta \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{e} \quad \bar{Q} \equiv \frac{\partial}{\partial \theta} + i\bar{\theta} \frac{\partial}{\partial t}, \quad (5.16)$$

satisfazendo as seguintes relações de anticomutação

$$\{Q, Q\} = 0, \quad \{\bar{Q}, \bar{Q}\} = 0 \quad \text{e} \quad \{Q, \bar{Q}\} = -2i \frac{\partial}{\partial t}. \quad (5.17)$$

Agora podemos considerar um supercampo escalar real,  $\Phi(t, \theta, \bar{\theta})$ . Sua expansão em potência das variáveis grassmanianas tem mais componentes do que no caso anterior,

$$\Phi(t, \theta, \bar{\theta}) = x + \bar{\theta}\psi + \bar{\psi}\theta + \bar{\theta}\theta F. \quad (5.18)$$

Temos dois graus de liberdade bosônicos,  $x$  e  $F$ , e dois graus de liberdade fermiônicos,  $\psi$  e  $\bar{\psi}$ . Observe novamente a combinação dos graus de liberdade fermiônico e bosônico. No entanto, em contraste com o caso  $\mathcal{N} = 1$ , uma distinção importante a respeito da combinação de graus de liberdade ocorre agora. Para apreciar isso, observe que até agora não há nada sobre equações de movimento, que ditam a dinâmica do modelo. Assim, dizemos que a correspondência é *off-shell*. Não necessariamente todas as variáveis

<sup>1</sup> Na verdade, é a combinação dessas duas transformações que produz uma translação real para a coordenada do tempo  $t \rightarrow t + i(\bar{\theta}\epsilon - \bar{\epsilon}\theta)$ , mas podemos considerar uma de cada vez.

presentes no supercampo correspondem a graus de liberdade físicos. Para uma ação simples que iremos considerar, as equações de movimento resultantes implicam que  $F$  é um grau de liberdade auxiliar, enquanto que os graus de liberdade fermiônicos  $\psi$  e  $\bar{\psi}$  não são independentes.

Sob translações, o supercampo escalar se transforma conforme  $\Phi'(t', \theta', \bar{\theta}') = \Phi(t, \theta, \bar{\theta})$ . Fazendo o uso da mesma definição da expansão em série de Taylor como em (5.7), obtemos as variações funcionais

$$\delta_\epsilon \Phi = -\bar{Q}\epsilon\Phi \quad \text{e} \quad \delta_{\bar{\epsilon}}\Phi = -\bar{\epsilon}Q\Phi. \quad (5.19)$$

Essas relações conduzem as seguintes transformações para as componentes

$$\epsilon: \quad \delta_\epsilon x = \bar{\psi}\epsilon, \quad \delta_\epsilon \psi = -i\dot{x}\epsilon + F\epsilon, \quad \delta_\epsilon \bar{\psi} = 0, \quad \text{e} \quad \delta_\epsilon F = i\dot{\bar{\psi}}\epsilon; \quad (5.20)$$

e

$$\bar{\epsilon}: \quad \delta_{\bar{\epsilon}} x = \bar{\epsilon}\psi, \quad \delta_{\bar{\epsilon}} \psi = 0, \quad \delta_{\bar{\epsilon}} \bar{\psi} = i\dot{x}\bar{\epsilon} + F\bar{\epsilon}, \quad \text{e} \quad \delta_{\bar{\epsilon}} F = -i\bar{\epsilon}\dot{\psi}. \quad (5.21)$$

As derivadas supercovariantes são construídas tomando as combinações opostas de derivadas das supercargas em (5.16),

$$D \equiv -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} + i\theta \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{e} \quad \bar{D} \equiv \frac{\partial}{\partial \theta} - i\bar{\theta} \frac{\partial}{\partial t}, \quad (5.22)$$

satisfazendo as seguintes relações de anticomutação com as supercargas,

$$\{D, Q\} = \{D, \bar{Q}\} = \{\bar{D}, Q\} = \{\bar{D}, \bar{Q}\} = 0. \quad (5.23)$$

Como já discutido no caso  $\mathcal{N} = 1$ , essas relações garantem que qualquer ação no superespaço envolvendo supercampos e derivada supercovariante de supercampos seja manifestamente supersimétrica. Em geral, temos

$$S = \int dt d\theta d\bar{\theta} \mathcal{L}(\Phi, \dot{\Phi}, D\Phi, \bar{D}\Phi), \quad (5.24)$$

em que, em contraste ao caso  $\mathcal{N} = 1$ , a Lagrangiana é um escalar.

Podemos propor uma forma simples para a ação,

$$S = \int dt d\theta d\bar{\theta} \left( \frac{1}{2} \bar{D}\Phi D\Phi - U(\Phi) \right), \quad (5.25)$$

em que  $U$  é uma função arbitrária do supercampo. Para escrever a ação em termos das componentes, expandimos o potencial  $U$  em potências de  $\theta$  e  $\bar{\theta}$  e então selecionamos a contribuição  $\bar{\theta}\theta$ ,

$$U(x + \bar{\theta}\psi + \bar{\psi}\theta + \bar{\theta}\theta F) \Big|_{\bar{\theta}\theta} = U'(x)F - U''(x)\bar{\psi}\psi, \quad (5.26)$$

em que as aspas significam derivadas com respeito a  $x$ . Então, em componentes, a ação é

$$S = \int dt \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 + i\bar{\psi}\dot{\psi} + \frac{1}{2} F^2 - U'(x)F + U''(x)\bar{\psi}\psi \right). \quad (5.27)$$

Essa é a chamada ação *off-shell* para a mecânica quântica supersimétrica com  $\mathcal{N} = 2$ . É fácil verificar que ela é invariante sob as transformações (5.20) e (5.21). Essa expressão mostra que  $F$  é um grau de liberdade auxiliar, já que o mesmo não possui dinâmica (não possui derivada temporal). Sua equação de movimento é apenas algébrica,

$$F = U', \quad (5.28)$$

e conseqüentemente,  $F$  pode ser eliminado da Lagrangiana, levando à formulação *on-shell*,

$$S = \int dt \left( \frac{1}{2} \dot{x}^2 + i\bar{\psi}\dot{\psi} - \frac{1}{2}(U'(x))^2 + U''(x)\bar{\psi}\psi \right). \quad (5.29)$$

Dessa forma, é imediato construir termos de potenciais de interesse. Por exemplo, o potencial do harmônico corresponde a  $U' = \omega x$ , que, por sua vez, vem do seguinte termo no superespaço:

$$U(\Phi) = \frac{1}{2}\omega\Phi^2. \quad (5.30)$$

Como último ponto, discutimos a contagem dos graus de liberdade na formulação *on-shell*. À primeira vista, parece que não há correspondência, uma vez que temos um grau de liberdade bosônico,  $x$ , e os dois graus de liberdade fermiônicos,  $\psi$  e  $\bar{\psi}$ . No entanto, suas equações de movimento são,

$$i\dot{\bar{\psi}} + U''\bar{\psi} = 0 \quad \text{e} \quad i\dot{\psi} - U''\psi = 0. \quad (5.31)$$

Eles são apenas o complexo conjugado um do outro. Escrevendo  $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ , com  $\psi_1$  e  $\psi_2$  sendo variáveis reais de grassmann, vemos que elas não são independentes,

$$\dot{\psi}_2 + U''\psi_1 = 0 \quad \text{e} \quad \dot{\psi}_1 - U''\psi_2 = 0. \quad (5.32)$$

Assim, vemos que, de fato, temos apenas um grau de liberdade fermiônico independente. O ponto chave é que a correspondência de graus de liberdade é alcançada somente após o uso das equações de movimento na formulação *on-shell*. Essa é uma propriedade geral das teorias supersimétricas. Notamos também que não existe tal distinção no caso com  $\mathcal{N} = 1$  discutido anteriormente.

Para resumir o caso  $\mathcal{N} = 2$ , o formalismo do superespaço naturalmente cumpre a formulação *off-shell*, onde a correspondência dos graus de liberdade é automática, ao preço da introdução de variáveis auxiliares. Por outro lado, a formulação *on-shell* lida com graus de liberdade físicos e a correspondência é alcançada com o uso de equações de movimento.

No próximo capítulo discutimos a formulação do modelo esférico supersimétrico utilizando a formulação do superespaço.

## 6 Modelo Esférico Quântico Supersimétrico

Esse capítulo é dedicado ao estudo do modelo esférico supersimétrico. Inicialmente é obtido brevemente o modelo empregando o formalismo do superespaço. É calculada a função de partição e em seguida é analisado sob quais condições a supersimetria é quebrada.

### 6.1 Formulação do Modelo a partir do Formalismo do Superespaço

Uma maneira apropriada de obter o modelo supersimétrico é procedendo com o formalismo do superespaço [40]. Temos que generalizar o vínculo esférico, equação (3.2), em conformidade com a supersimetria, e trabalhando no superespaço isso é levado em conta automaticamente. O modelo supersimétrico mínimo requer uma supersimetria estendida com  $\mathcal{N} = 2$  supercargas. Nesse caso, a variável de spin usual  $S_{\mathbf{r}}$  é substituída por um supercampo  $\Phi_{\mathbf{r}}(t, \theta, \bar{\theta}) = S_{\mathbf{r}} + \bar{\theta}\psi_{\mathbf{r}} + \bar{\psi}_{\mathbf{r}}\theta + \bar{\theta}\theta F_{\mathbf{r}}$ , que contém, em adição à variável de spin  $S_{\mathbf{r}}$ , dois graus de liberdade fermiônicos  $\psi_{\mathbf{r}}$  e  $\bar{\psi}_{\mathbf{r}}$ , e um grau de liberdade auxiliar não físico  $F_{\mathbf{r}}$ . As variáveis grassmanianas  $\theta$  e  $\bar{\theta}$ , juntas com a variável temporal  $t$ , são as coordenadas do superespaço. A generalização do vínculo esférico corresponde simplesmente a

$$\sum_{\mathbf{r}} \Phi_{\mathbf{r}}^2 = N. \quad (6.1)$$

Fazendo uma analogia com o modelo esférico quântico, podemos construir a ação no superespaço, que é escrita da seguinte maneira

$$S = \int dt d\theta d\bar{\theta} \left[ \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}} \bar{D}\Phi_{\mathbf{r}} D\Phi_{\mathbf{r}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} U_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \Phi_{\mathbf{r}} \Phi_{\mathbf{r}'} - \Xi \left( \sum_{\mathbf{r}} \Phi_{\mathbf{r}}^2 - N \right) \right]. \quad (6.2)$$

Nessa expressão, o primeiro termo do lado direito corresponde ao termo cinético, que é escrito em termos de  $D$  e  $\bar{D}$  que são as superderivadas covariantes,

$$D \equiv -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} + i\theta \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{e} \quad \bar{D} \equiv \frac{\partial}{\partial \theta} - i\bar{\theta} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (6.3)$$

A energia de interação  $U_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} = U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  presente na ação (6.2) controla o alcance da interação. O supermultiplicador de Lagrange  $\Xi$  é definido como

$$\Xi(t, \theta, \bar{\theta}) = \gamma + \bar{\theta}\xi + \bar{\xi}\theta + \bar{\theta}\theta\mu, \quad (6.4)$$

que impõe os vínculos

$$\sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}^2 = N, \quad \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}} = 0, \quad \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} = 0, \quad \text{e} \quad \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}} F_{\mathbf{r}} = \sum_{\mathbf{r}} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}}. \quad (6.5)$$

É também instrutivo escrever a Lagrangina em termos das componentes do supercampo. Depois de integrar sobre as variáveis grassmanianas, obtemos

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}} \dot{S}_{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}} F_{\mathbf{r}}^2 + i \sum_{\mathbf{r}} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \dot{\psi}_{\mathbf{r}} + \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} U_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} (S_{\mathbf{r}} F_{\mathbf{r}'} - \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}'}) \\ & + \gamma \sum_{\mathbf{r}} (F_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}} - \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}}) - \sum_{\mathbf{r}} (\bar{\psi}_{\mathbf{r}} \xi + \bar{\xi} \psi_{\mathbf{r}}) S_{\mathbf{r}} - \mu \left( \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}^2 - N \right), \end{aligned} \quad (6.6)$$

com os multiplicadores de Lagrange redefinidos para absorver fatores numéricos não importantes. As transformações de supersimetria que deixam a Lagrangiana invariante são:

$$\epsilon: \quad \delta_{\epsilon} S_{\mathbf{r}} = \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \epsilon, \quad \delta_{\epsilon} \psi_{\mathbf{r}} = -i \dot{S}_{\mathbf{r}} \epsilon + F_{\mathbf{r}} \epsilon, \quad \delta_{\epsilon} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} = 0, \quad \text{e} \quad \delta_{\epsilon} F_{\mathbf{r}} = i \dot{\bar{\psi}}_{\mathbf{r}} \epsilon; \quad (6.7)$$

e

$$\bar{\epsilon}: \quad \delta_{\bar{\epsilon}} S_{\mathbf{r}} = \bar{\epsilon} \psi_{\mathbf{r}}, \quad \delta_{\bar{\epsilon}} \psi_{\mathbf{r}} = 0, \quad \delta_{\bar{\epsilon}} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} = i \dot{S}_{\mathbf{r}} \bar{\epsilon} + F_{\mathbf{r}} \bar{\epsilon}, \quad \text{e} \quad \delta_{\bar{\epsilon}} F_{\mathbf{r}} = -i \bar{\epsilon} \dot{\psi}_{\mathbf{r}}, \quad (6.8)$$

em que  $\epsilon$  e  $\bar{\epsilon}$  são parâmetros grassmanianos da transformação.

## 6.2 Função de Partição e Quebra de Supersimetria

Nesta seção, revisamos brevemente o cálculo da função de partição via o método do ponto de sela [41, 42]. Em termos do formalismo do tempo imaginário,  $t = -i\tau$ , com  $\tau \in [0, \beta]$  e  $\beta = 1/T$ , a função de partição é

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\Omega \exp \left\{ - \int_0^{\beta} d\tau \left[ L_E + H_B \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}} + H_F \sum_{\mathbf{r}} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}} \right] \right\}, \quad (6.9)$$

em que a medida  $\mathcal{D}\Omega$  corresponde a integral sobre todos os campos bem como sobre todos os multiplicadores de Lagrange que implementam os vínculos supersimétricos,  $\mathcal{D}\Omega \equiv \mathcal{D}S \mathcal{D}F \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\mu \mathcal{D}\gamma \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\bar{\xi}$ , e  $L_E$  é a versão Euclidiana da Lagrangiana em (6.6),

$$\begin{aligned} L_E = & \frac{1}{2g} \sum_{\mathbf{r}} \left( \frac{\partial S_{\mathbf{r}}}{\partial \tau} \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}} F_{\mathbf{r}}^2 + \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\mathbf{r}} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \frac{\partial \psi_{\mathbf{r}}}{\partial \tau} - \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} U_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} (S_{\mathbf{r}} F_{\mathbf{r}'} - \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}'}) \\ & - \gamma \left( \sum_{\mathbf{r}} F_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}} - \sum_{\mathbf{r}} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}} \right) + \sum_{\mathbf{r}} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \xi S_{\mathbf{r}} + \sum_{\mathbf{r}} \bar{\xi} \psi_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}} + \mu \left( \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}^2 - N \right). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Note que introduzimos um parâmetro  $g$  na Lagrangiana Euclidiana através do reescalonamento  $\tau \rightarrow \sqrt{g}\tau$ , que mede as flutuações quânticas no sistema. No caso de temperatura zero, esse é o parâmetro que controla a distância do ponto crítico quântico, desempenhando um papel similar à temperatura no caso de uma transição de fase conduzida por

flutuações térmicas. Incluímos também na função de partição dois campos externos,  $H_B$  e  $H_F$ , de modo que tomando as derivadas com respeito a eles obtemos respectivamente o parâmetro de ordem  $\langle \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}} \rangle$  e o condensado fermionico  $\langle \sum_{\mathbf{r}} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}} \rangle$ .

A integral sobre os campos  $S, \psi, \bar{\psi}$ , e  $F$  são no máximo quadráticas e podem ser realizadas diretamente. Isso conduz à função de partição

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\mu \mathcal{D}\gamma \mathcal{D}\bar{\xi} \mathcal{D}\xi e^{-N S_{eff}}, \quad (6.11)$$

com a ação efetiva dada por

$$\begin{aligned} S_{eff} &\equiv \frac{1}{2N} \text{Tr} \sum_{\mathbf{q}} \ln \left[ -\frac{1}{2g} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \mu + \frac{(U(\mathbf{q}) + \gamma)^2}{2} \right] \\ &\quad - \frac{1}{N} \text{Tr} \sum_{\mathbf{q}} \ln \left[ \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \tau} + U(\mathbf{q}) + \gamma + H_F - \frac{1}{2} \xi \mathcal{O}_{\mathbf{q}}^{-1} \bar{\xi} \right] \\ &\quad - \frac{1}{4} \int_0^\beta d\tau \frac{H_B^2}{\mu + \frac{[U(0) + \gamma]^2}{2}} - \int_0^\beta d\tau \mu, \end{aligned} \quad (6.12)$$

em que  $U(\mathbf{q})$  é a transformada de Fourier da interação  $U_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} \equiv U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ ,

$$U(\mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{r}-\mathbf{r}'} U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{h}}, \quad (6.13)$$

e o operador  $\hat{\mathcal{O}}_{\mathbf{q}}$  é definido como

$$\hat{\mathcal{O}}_{\mathbf{q}} \equiv -\frac{1}{2g} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \mu + \frac{1}{2} [U(\mathbf{q}) + \gamma]^2. \quad (6.14)$$

As integrais remanescentes em (6.11) podem ser avaliadas através do método do ponto de sela, que torna-se exato no limite termodinâmico  $N \rightarrow \infty$ . As equações de ponto de sela são determinadas pelas condições

$$\frac{\delta S_{eff}}{\delta \mu} = \frac{\delta S_{eff}}{\delta \gamma} = \frac{\delta S_{eff}}{\delta \xi} = \frac{\delta S_{eff}}{\delta \bar{\xi}} = 0. \quad (6.15)$$

As duas últimas equações (fermiônicas) são trivialmente satisfeitas com  $\xi = \bar{\xi} = 0$ , enquanto que as bosônicas levam a equações do vínculo para os parâmetros  $\mu$  e  $\gamma$ ,

$$1 = \frac{H_B^2}{4 \left[ \mu + \frac{1}{2} (U(0) + \gamma)^2 \right]^2} + \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{q}} \frac{g}{w_{\mathbf{q}}^B} \coth \left( \frac{\beta}{2} w_{\mathbf{q}}^B \right), \quad (6.16)$$

e

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{H_B^2}{4 \left[ \mu + \frac{(U(0) + \gamma)^2}{2} \right]^2} [U(0) + \gamma] + \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{q}} \frac{g}{w_{\mathbf{q}}^B} [U(\mathbf{q}) + \gamma] \coth \left( \frac{\beta}{2} w_{\mathbf{q}}^B \right) \\ &\quad - \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{q}} \frac{g}{w_{\mathbf{q}}^F} [U(\mathbf{q}) + \gamma + H_F] \tanh \left( \frac{\beta}{2} w_{\mathbf{q}}^F \right), \end{aligned} \quad (6.17)$$

com as frequências bosônicas e fermiônicas definidas como

$$(w_{\mathbf{q}}^B)^2 \equiv 2g \left\{ \mu + \frac{1}{2} [U(\mathbf{q}) + \gamma]^2 \right\} \quad \text{e} \quad (w_{\mathbf{q}}^F)^2 = g [U(\mathbf{q}) + \gamma + H_F]^2. \quad (6.18)$$

As análises das propriedades de convergência das equações (6.16) e (6.17) determinam o comportamento crítico do modelo. Na próxima seção, faremos uma análise detalhada para o caso de interações de curto alcance (9.4), cuja transformada de Fourier toma a forma,

$$U(\mathbf{q}) = 2U \sum_{i=1}^d \cos q_i. \quad (6.19)$$

Antes de fazer isso, entretanto, é instrutivo olhar a energia livre do sistema,  $f = \frac{1}{\beta} S_{eff}$ , que dá

$$f = -\frac{H_B^2}{4 \left[ \mu + \frac{1}{2} (U(0) + \gamma)^2 \right]} - \mu + \frac{1}{\beta N} \sum_{\mathbf{q}} \ln \left[ \frac{2 \sinh \left( \frac{\beta}{2} w_{\mathbf{q}}^B \right)}{2 \cosh \left( \frac{\beta}{2} w_{\mathbf{q}}^F \right)} \right]. \quad (6.20)$$

No limite  $T \rightarrow 0$  essa expressão se reduz a energia do estado fundamental, que na ausência de campos externos se reduz à:

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{N} &= -\mu + \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{q}} (w_{\mathbf{q}}^B - w_{\mathbf{q}}^F) \\ &= -\mu + \frac{1}{2N} \sum_{\mathbf{q}} \left\{ \left[ 2g \left( \mu + \frac{1}{2} (U(\mathbf{q}) + \gamma)^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} - \left[ 2g \left( \frac{1}{2} (U(\mathbf{q}) + \gamma)^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Vemos que  $E_0$  é nula apenas para  $\mu = 0$ , independente de  $\gamma$ . Portanto, uma energia do estado fundamental não nula é um diagnóstico de quebra de supersimetria e isso implica que qualquer solução de (6.16) e (6.17) com  $\mu \neq 0$  corresponde a uma quebra espontânea de supersimetria. No caso de temperatura finita, a supersimetria sempre é quebrada por efeitos térmicos, independente dos valores tomados por  $\mu$  e  $\gamma$ .

# 7 Comportamento Crítico Quântico do Modelo Esférico Supersimétrico

O objetivo deste capítulo é estudar o comportamento crítico quântico do modelo esférico supersimétrico a temperatura zero. Inicialmente é analisado o comportamento do multiplicador de Lagrange  $\gamma$  próximo da criticalidade. Posteriormente são obtidos os expoentes críticos associados a algumas quantidades termodinâmicas, entre elas, a magnetização bosônica e a suscetibilidade.

## 7.1 Comportamento do Multiplicador de Lagrange $\gamma$ Próximo da Criticalidade

Para estudar o comportamento crítico quântico temos que analisar os vínculos esféricos (6.16) e (6.17) no limite de temperatura zero ( $\beta \rightarrow \infty$ ), que nos possibilita obter os parâmetros  $\mu$  e  $\gamma$  como uma função  $g$ ,  $H_B$ , e  $H_F$ . É útil lembrar aqui que o parâmetro  $\mu$  implementa o vínculo usual  $\sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}^2 = N$ , enquanto que  $\gamma$  implementa o vínculo  $\sum_{\mathbf{r}} (F_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}} - \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}}) = 0$ . Portanto,  $\gamma$  é o parâmetro responsável pelo acoplamento entre os graus de liberdade bosônicos e fermiônicos.

Considerando primeiramente  $H_B = H_F = 0$ , é imediato verificar que a expressão (6.17) é satisfeita apenas se  $\mu = 0$  independente do valor de  $\gamma$ , implicando que a supersimetria não é espontaneamente quebrada neste modelo. No limite termodinâmico,

$$\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{q}} \rightarrow \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d}, \quad (7.1)$$

e o comportamento crítico é então governado pela equação (6.16) com  $H_B = \mu = 0$ ,

$$1 = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{q}} \frac{g}{2w_{\mathbf{q}}^B} = \frac{\sqrt{g}}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{|\gamma + 2U \sum_i \cos(q_i)|}, \quad (7.2)$$

que envolve apenas o multiplicador de Lagrange  $\gamma$  que carrega a informação de interação entre bósons e férmions. Isso é uma diferença crucial comparado ao modelo esférico não-supersimétrico do capítulo 3. O modelo exibirá um ponto crítico se a integral de momento em (7.2) convergir mesmo quando o denominador se aproxima de zero. O ponto crítico está, portanto, localizado em  $\gamma_c + 2U \max(\sum_i \cos q_i) = 0$  se  $\gamma$  e  $U$  tem sinais opostos, e em  $\gamma_c + 2U \min(\sum_i \cos q_i) = 0$  se  $\gamma$  e  $U$  tem o mesmo sinal. Escrevendo a versão *on-shell* da ação (6.6), podemos ver que o produto  $\gamma U$  é efetivamente uma interação entre primeiros

vizinhos (mostramos explicitamente no capítulo 9, equação (9.6)), de modo que  $\gamma U < 0$  corresponde a uma interação ferromagnética enquanto que  $\gamma U > 0$  a uma interação anti-ferromagnética. Por simplicidade, ao longo deste trabalho vamos considerar que  $\gamma$  e  $U$  tem sinais opostos, digamos  $\gamma > 0$  e  $U < 0$ , em que

$$\gamma_c = 2|U|d. \quad (7.3)$$

Para proceder vamos assumir momentaneamente que  $\gamma + 2U \sum_i \cos(q_i) > 0$ , tal que podemos nos livrar do valor absoluto no denominador de (7.2) (devemos ver na solução numérica que quando  $\gamma > 0$  e  $U < 0$ , este é de fato o caso). É conveniente reescrever (7.2) com a ajuda da identidade (3.34), de modo que a equação do vínculo é expressa como

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\sqrt{g}}{4|U|} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \int_0^{\infty} dt \exp \left\{ \left[ - \left( \frac{\gamma}{2|U|} - \sum_i \cos q_i \right) t \right] \right\} \\ &= \frac{\sqrt{g}}{4|U|} \int_0^{\infty} dt \exp \left( - \frac{\gamma}{2|U|} t \right) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \exp \left( t \sum_i \cos q_i \right) \\ &= \frac{\sqrt{g}}{4|U|} \int_0^{\infty} dt \exp \left( - \frac{\gamma}{2|U|} t \right) [I_0(t)]^d, \end{aligned} \quad (7.4)$$

em que novamente  $I_0(t)$  é a função de Bessel modificada de primeiro tipo. A análise agora segue a abordagem padrão empregada no capítulo 3 com respeito ao modelo esférico usual. Temos que investigar as propriedades de convergência da integral aparecendo nesta expressão,

$$\mathcal{I}_d(\gamma) \equiv \int_0^{\infty} dt \exp \left( - \frac{\gamma}{2|U|} t \right) [I_0(t)]^d. \quad (7.5)$$

Para isso, usamos os comportamentos assintóticos de  $I_0(t)$ , repetidos aqui por conveniência

$$\begin{aligned} I_0(t) &\sim 1, & t \rightarrow 0, \\ I_0(t) &\sim \frac{e^t}{(2\pi t)^{\frac{1}{2}}}, & t \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Esses comportamentos mostram que uma divergência potencial de (7.5) está localizado na região de grandes valores de  $t$ . A expressão (7.5) converge no ponto crítico para  $d > 2$ , que determina a dimensão crítica inferior do modelo  $d_l^0 = 2$ . Neste caso o modelo exibe um ponto crítico quando  $\gamma$  alcança  $\gamma_c$ , com um valor correspondente  $g = g_c$ . Para extrair a dependência em  $(\gamma - \gamma_c)$  de acordo com a dimensionalidade em  $d > 2$ , consideramos a derivada de  $\mathcal{I}_d$  com respeito a  $\gamma$  na região para grandes valores de  $t$  [34],

$$\mathcal{I}'_d(\gamma) \sim - \int_0^{\infty} dt t^{-\frac{(d-2)}{2}} \exp[-t(\gamma - \gamma_c)]. \quad (7.7)$$

Essa expressão converge no ponto crítico para  $d > 4$ , que determina a dimensão crítica superior do modelo  $d_u^0 = 4$ . Para  $2 < d < 4$ , nós podemos encontrar a ordem de

contribuição dominante para  $\gamma \sim \gamma_c$  avaliando a integral em (7.7):

$$\mathcal{I}'_d(\gamma) \sim -(\gamma - \gamma_c)^{-\frac{(4-d)}{2}} \Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right). \quad (7.8)$$

Integrando essa expressão em  $\gamma$  obtemos

$$\mathcal{I}_d(\gamma) - \mathcal{I}_d(\gamma_c) \sim -\frac{(\gamma - \gamma_c)^{\frac{(d-2)}{2}}}{\left(\frac{d-2}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right). \quad (7.9)$$

Uma vez que a equação (7.4) é da forma  $1/\sqrt{g} \sim \mathcal{I}_d(\gamma)$ , expandindo a mesma em torno do ponto crítico e usando (7.9), segue que

$$\tau_g \sim (\gamma - \gamma_c)^{\frac{(d-2)}{2}}, \quad \text{para } 2 < d < 4, \quad (7.10)$$

em que  $\tau_g \equiv (\sqrt{g} - \sqrt{g_c})/\sqrt{g_c}$ .

Para  $d = 4$ , precisamos ter um pouco mais de cuidado com (7.5). Também consideramos a derivada com respeito a  $\gamma$ ,

$$\mathcal{I}'_d(\gamma) \sim -\int_0^\infty dt \exp\left(-\frac{\gamma}{2|U|}t\right) t [\mathcal{I}_0(t)]^4. \quad (7.11)$$

Então dividimos a região de integração como  $\int_0^\infty = \int_0^1 + \int_1^\infty$ . A integral na primeira parte é claramente finita e para a segunda parte nós utilizamos o comportamento assintótico em (7.6),

$$\begin{aligned} \mathcal{I}'_d(\gamma) &\sim -\int_1^\infty dt \exp\left(-\frac{t}{2|U|}(\gamma - \gamma_c)\right) t^{-1} \\ &\sim -\Gamma\left(0, \frac{1}{2|U|}(\gamma - \gamma_c)\right), \end{aligned} \quad (7.12)$$

em que  $\Gamma\left(0, \frac{(\gamma - \gamma_c)}{2|U|}\right)$  é a função gama incompleta [33]. Seu comportamento para  $(\gamma - \gamma_c)$  pequeno é dado por

$$\Gamma\left(0, \frac{1}{2|U|}(\gamma - \gamma_c)\right) = -\ln\left[\frac{(\gamma - \gamma_c)}{2|U|}\right] + \Gamma'(1) + O(\gamma - \gamma_c), \quad (7.13)$$

em que  $-\Gamma'(1)$  é a constante de Euler. Usando esse resultado em (7.12) e integrando em  $\gamma$ , obtemos

$$\mathcal{I}_d(\gamma) - \mathcal{I}_d(\gamma_c) \sim (\gamma - \gamma_c) \ln(\gamma - \gamma_c), \quad (7.14)$$

que, junto com a equação (7.4), implica em

$$\tau_g \sim -(\gamma - \gamma_c) \ln(\gamma - \gamma_c). \quad (7.15)$$

Para  $d > 4$ , como  $\mathcal{I}'(\gamma)$  é convergente no ponto crítico segue imediatamente que

$$\mathcal{I}(\gamma) = \mathcal{I}(\gamma_c) + (\gamma - \gamma_c)\mathcal{I}'(\gamma_c) + \dots, \quad (7.16)$$

que, por sua vez, quando substituído em (7.4) e expandido em torno do ponto crítico, fornece

$$\tau_g \sim (\gamma - \gamma_c). \quad (7.17)$$

Os resultados acima podem ser resumidos como

$$(\gamma - \gamma_c) \sim \begin{cases} \tau_g^{\frac{2}{d-2}} & \text{para } 2 < d < 4 \\ -\frac{\tau_g}{\ln \tau_g} & \text{para } d = 4 \\ \tau_g & \text{para } d > 4 \end{cases}, \quad (7.18)$$

mostrando o comportamento de  $\gamma$  próximo do ponto crítico quântico. Isso corresponde a uma transição de fase quântica sem a quebra de supersimetria.

Uma análise numérica da equação (6.16) pode nos ajudar a revelar a relação entre os parâmetros  $\gamma$  e  $\sqrt{g}$  como uma função de  $N$ . Os resultados são mostrados na figura (4) para alguns valores inteiros da dimensão, em que observamos os pontos de surgimento de não analiticidade à medida que aumentamos  $N$ , isto é, à medida que nos aproximamos do limite termodinâmico, sinalizando a transição de fase quântica. Além do mais, a solução numérica representada na figura (4) mostra que  $\sqrt{g} > \sqrt{g_c}$  para  $\gamma > \gamma_c$ , enquanto que  $\sqrt{g} < \sqrt{g_c}$  para  $\gamma = \gamma_c$ . Note que  $\gamma$  nunca fica abaixo do valor crítico  $\gamma_c$ .

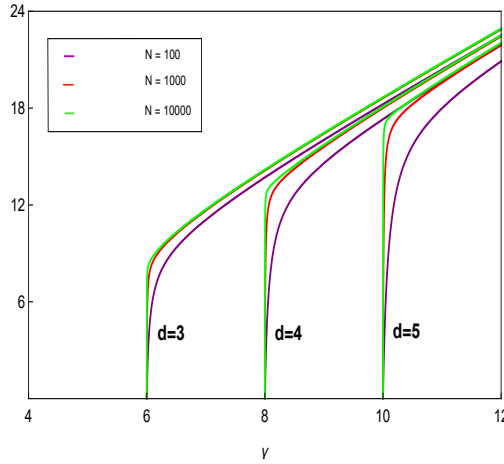


Figura 4 – Formação da singularidade de acordo com a análise numérica da equação (6.16) com  $H_B = \mu = 0$  a medida  $N$  é aumentado. O modo zero (que conduz ao ponto crítico para  $\gamma > 0$  e  $U < 0$ ) é tratado separadamente antes de tomar o limite termodinâmico. Para  $U \equiv -1$ , os pontos críticos são  $\sqrt{g_c} = 7.91, 12.9,$  e  $17.29$ , as dimensões 3, 4 e 5, respectivamente.

## 7.2 Magnetização, Condensado Fermiônico e Suscetibilidade

No caso quântico, as quantidades termodinâmicas podem ser computadas a partir da energia livre (6.20) no limite de temperatura zero, com  $\mu = 0$ ,

$$f = -\frac{H_B^2}{2[U(0) + \gamma]^2} + \frac{\sqrt{g}}{2N} \sum_{\mathbf{q}} \left\{ [(U(\mathbf{q}) + \gamma)^2]^{\frac{1}{2}} - [(U(\mathbf{q}) + \gamma + H_F)^2]^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad (7.19)$$

em que  $U(0) = -2d|U| = -\gamma_c$ . Primeiramente calculamos a magnetização,

$$m_B \equiv \left\langle \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}} \right\rangle = -\frac{\partial f}{\partial H_B} = \frac{H_B}{(\gamma - \gamma_c)^2}, \quad (7.20)$$

que é nula para  $H_B = 0$  e  $\sqrt{g} > \sqrt{g_c}$ , uma vez que  $\gamma$  é sempre diferente de  $\gamma_c$ , conforme vimos no fim da seção anterior. Entretanto, quando  $H_B = 0$  e  $\sqrt{g} < \sqrt{g_c}$  existe uma indeterminação na magnetização pois nesta região  $\gamma = \gamma_c$ . Neste caso, podemos utilizar a expressão do vínculo com  $H_B$  para resolver essa indeterminação. Note primeiramente que, de acordo com a equação (7.4),  $g_c$  é dado por

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g_c}} &= \frac{1}{4|U|} \int_0^\infty dt \exp\left(-\frac{\gamma_c}{2|U|}t\right) [I_0(t)]^d \\ &= \frac{1}{4|U|} \int_0^\infty dt e^{-dt} [I_0(t)]^d. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Agora, considerando a equação do vínculo para valores  $\sqrt{g} < \sqrt{g_c}$  e incluindo a dependência no campo externo  $H_B$ , obtemos

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{H_B^2}{(\gamma - \gamma_c)^4} + \frac{\sqrt{g}}{4|U|} \int_0^\infty dt \exp\left(-\frac{\gamma_c}{2|U|}t\right) [I_0(t)]^d \\ &= \frac{H_B^2}{(\gamma - \gamma_c)^4} + \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_c}}. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Utilizando a equação (7.20) nesta relação segue imediatamente que

$$m = \pm \left( \frac{\sqrt{g_c} - \sqrt{g}}{\sqrt{g_c}} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (7.23)$$

fornecendo um expoente crítico quântico  $\beta_g = 1/2$  para  $d > 2$ . Como no equivalente não supersimétrico, a magnetização não depende da dimensão [7], (tabela (3)).

Analogamente à magnetização bosônica, o condensado fermiônico pode ser calculado como

$$\begin{aligned} C_F \equiv \left\langle \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{r}} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}} \right\rangle &= -\frac{\partial f}{\partial H_F} \\ &= \frac{\sqrt{g}}{2} \frac{1}{N} \text{sign} \sum_{\mathbf{q}} (\gamma + U(\mathbf{q}) + H_F) \\ &= \frac{\sqrt{g}}{2} \text{sign}(\gamma + H_F), \end{aligned} \quad (7.24)$$

em que usamos  $\sum_{\mathbf{q}} U(\mathbf{q}) = U(|\mathbf{h}| = 0) = 0$ , uma vez que não há auto-interação. Portanto, para  $H_F = 0$ , o condensado fermiônico é uma função de  $g$ , ambos acima e abaixo do ponto crítico.

Finalmente, obtemos a suscetibilidade bosônica a partir da equação (7.20),

$$\chi_B = \frac{\partial m_B}{\partial H_B} = (\gamma - \gamma_c)^{-2}, \quad (7.25)$$

que diverge para  $\sqrt{g} < \sqrt{g_c}$  uma vez que  $\gamma = \gamma_c$ . Essa é uma característica de modelos esféricos [4]. Para  $\sqrt{g} > \sqrt{g_c}$  a quantidade  $(\gamma - \gamma_c)$  depende da dimensão de acordo com a equação (7.18). Em particular, para  $2 < d < 4$ , obtemos

$$\chi_B = \tau_g^{-\frac{4}{d-2}}, \quad (7.26)$$

de modo que encontramos um novo expoente crítico  $\gamma_g = \frac{4}{d-2}$ , mostrando que o modelo esférico supersimétrico de fato exhibe um comportamento crítico não trivial para o caso de interações de curto alcance. É instrutivo comparar esse expoente crítico com o equivalente não supersimétrico, dado por  $\gamma_g = \frac{2}{d-2}$  [7], (tabela (3)).

Acima da dimensão crítica superior,  $d > 4$ , a equação (7.18) implica em

$$\chi \sim \tau_g^{-2}, \quad (7.27)$$

recuperando o expoente crítico de campo médio  $\gamma_g = 2$  [42].

# 8 Comportamento Crítico Térmico do Modelo Esférico Supersimétrico

Neste capítulo, essencialmente é realizado o mesmo procedimento do capítulo anterior, entretanto, é analisado o comportamento crítico térmico do modelo. Inicialmente é analisado o comportamento do multiplicador de Lagrange  $\gamma$  próximo da criticalidade em duas situações diferentes, quando  $\mu \neq 0$  e quando  $\mu = 0$ . Também são investigados a magnetização bosônica, o condensado fermiônico e a suscetibilidade para ambos os valores de  $\mu$ .

## 8.1 Comportamento do Multiplicador de Lagrange $\gamma$ Próximo da Criticalidade

No caso anterior, vimos que a supersimetria não é espontaneamente quebrada à temperatura zero uma vez que as equações de ponto de sela impõem que  $\mu = 0$ . À temperatura finita, entretanto, a supersimetria é quebrada. Isso é uma consequência da forma diferente como bósons e férmions comportam-se na presença de flutuações térmicas [43, 44]. Portanto, é esperado nesse caso que as equações de ponto de sela admitam soluções com  $\mu \neq 0$ .

À temperatura finita as flutuações térmicas em geral dominam sobre as flutuações quânticas ( $\beta w_{\mathbf{q}}^{B/F} \ll 1$ ), de modo que o comportamento crítico é governado essencialmente pelas flutuações térmicas. Nessa situação, podemos expandir as funções hiperbólicas nas equações (6.16) e (6.17) para pequenos argumentos ( $\coth x \sim \frac{1}{x} + \frac{x}{3}$  e  $\tanh x \sim x$ ) para estudar o comportamento crítico. Na ausência de campos externos, encontramos

$$1 \approx \frac{1}{2\beta N} \sum_{\mathbf{q}} \frac{1}{\left[\mu + \frac{1}{2}(\gamma + 2U \sum_i \cos(q_i))\right]^2}, \quad (8.1)$$

e

$$0 \approx \frac{1}{2\beta N} \sum_{\mathbf{q}} \frac{1}{\left[\mu + \frac{1}{2}(\gamma + 2U \sum_i \cos(q_i))\right]^2} \left[2U \sum_i \cos(q_i) + \gamma\right] - \frac{\beta g}{6N} \sum_{\mathbf{q}} \left[2U \sum_i \cos(q_i) + \gamma\right]. \quad (8.2)$$

A equação (8.1) mostra que o modelo exibe um comportamento crítico para toda a região de  $\mu \leq 0$ . Lembrando que  $\gamma > 0$  e  $U < 0$ , o ponto crítico ocorre no mínimo de  $U(\mathbf{q})$ , que

agora é lido como

$$\gamma_c = 2|U|d + \sqrt{2|\mu|}. \quad (8.3)$$

A análise do comportamento crítico segue similarmente como no caso de temperatura zero e pode ser obtido a partir de (8.1) no limite termodinâmico,

$$\begin{aligned} \beta &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{[-2|\mu| + [\gamma - 2|U| \sum_i \cos(q_i)]^2]} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2|\mu|}} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left[ \frac{1}{|\gamma - 2|U| \sum_i \cos(q_i) - \sqrt{2|\mu|}} - \frac{1}{|\gamma - 2|U| \sum_i \cos(q_i) + \sqrt{2|\mu|}} \right] \\ &= \frac{1}{2|U|\sqrt{2|\mu|}} \int_0^\infty dt \exp\left(-\frac{\gamma t}{2|U|}\right) \sinh\left(\frac{\sqrt{2|\mu|}}{2|U|}t\right) [I_0(t)]^d, \end{aligned} \quad (8.4)$$

em que na última linha empregamos a representação em (3.34). Analisando os comportamentos assintóticos, é direto mostrar que a integral converge quando  $t \rightarrow 0$  para qualquer dimensão independentemente do valor de  $\mu$ . Por outro lado, para grandes valores de  $t$  a convergência depende da dimensão bem como do parâmetro  $\mu$  e devemos investigar os casos  $\mu \neq 0$  e  $\mu = 0$  separadamente.

### 8.1.1 Soluções com $\mu \neq 0$

Para  $\mu \neq 0$  o comportamento assintótico da integral

$$\mathcal{I}_d(\gamma, \mu) \equiv \int_0^\infty dt \exp\left(-\frac{\gamma}{2|U|}t\right) \sinh\left(\frac{\sqrt{2|\mu|}}{2|U|}t\right) [I_0(t)]^d, \quad (8.5)$$

mostra que a divergência ocorre para grandes valores de  $t$  dependendo da dimensionalidade. Nesse caso, a integral  $\mathcal{I}_d(\gamma, \mu)$  é convergente para  $d > 2$  quando  $\gamma > \gamma_c$ , exibindo um ponto crítico em  $\gamma_c = 2|U|d + \sqrt{2|\mu|}$ . Como na seção anterior, obtemos a dependência de  $(\gamma - \gamma_c)$  na região para grandes  $t$  a partir da derivada da equação (8.5) com respeito a  $\gamma$ ,

$$\mathcal{I}'_d(\gamma, \mu) \sim - \int_0^\infty dt t^{-\frac{(d-2)}{2}} \exp[-t(\gamma - \gamma_c)]. \quad (8.6)$$

Comparando com a equação (7.7) verificamos que para temperatura finita e  $\mu \neq 0$  o modelo exhibe as mesmas propriedades de convergência como no caso quântico, mostrando uma transição de fase com quebra de supersimetria. De acordo com a equação (8.4), a integral  $\mathcal{I}_d(\gamma, \mu)$  é proporcional a  $1/T$ , de modo que

$$(\gamma - \gamma_c) \sim \begin{cases} \tau_\beta^{\frac{2}{d-2}} & \text{para } 2 < d < 4 \\ -\frac{\tau_\beta}{\ln \tau_\beta} & \text{para } d = 4 \\ \tau_\beta & \text{para } d > 4 \end{cases}, \quad (8.7)$$

com  $\tau_\beta \equiv (T - T_c)/T_c$ . Os pontos de formação de não-analiticidade em  $\gamma = \gamma_c$  e como eles dependem das dimensões do sistema são ilustrados na figura (5).

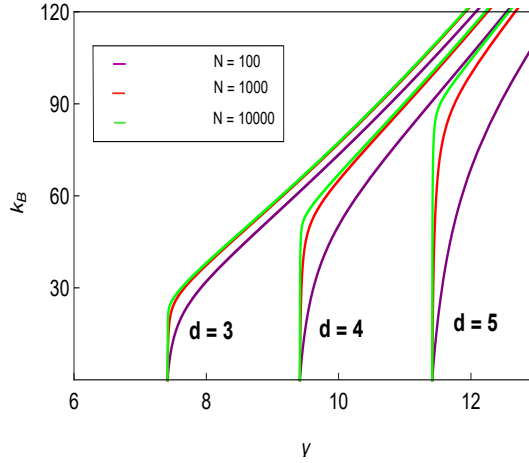


Figura 5 – A equação (8.1) conduz a um ponto de não-analiticidade à medida que  $N$  é aumentado. O plot foi feito usando  $\mu = U = -1$  para  $d = 3, 4$ , e  $5$ , definindo os respectivos conjuntos de pontos críticos:  $(\gamma_c = 7.41; k_B T_c = 22.02)$ ,  $(\gamma_c = 9.41; k_B T_c = 51.69)$ , e  $(\gamma_c = 11.41; k_B T_c = 88.71)$ .

### 8.1.1.1 Magnetização, Condensado Fermiônico e Suscetibilidade

Vamos começar com a magnetização bosônica, que pode ser obtida a partir da energia livre (6.20),

$$m = -\frac{\partial f}{\partial H_B} = \frac{H_B}{2 \left[ -|\mu| + \frac{1}{2} (\gamma - 2|U|d)^2 \right]}. \quad (8.8)$$

De acordo com a solução numérica mostrada na figura (5), quando  $T > T_c$  o parâmetro  $\gamma$  é sempre maior do que  $\gamma_c$ , tal que a quantidade  $\left[ -|\mu| + \frac{1}{2} (\gamma - 2|U|d)^2 \right]$  é diferente de zero. Então, para  $H_B = 0$  a magnetização desaparece. Para  $T < T_c$ , nós temos  $\gamma = \gamma_c$  e a magnetização conduz a uma indeterminação quando  $H_B = 0$ . Como no caso de temperatura zero, podemos resolver isso usando o vínculo esférico, equação (8.1), na presença de  $H_B$ . Com isso encontramos

$$m_B = \pm \left( \frac{T_c - T}{T_c} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (8.9)$$

caracterizando um expoente crítico térmico  $\beta_T = 1/2$  para todas as dimensões  $d > 2$ .

Assim como a magnetização bosônica, a partir da energia livre (6.20), obtemos a expressão para o condensado fermiônico,

$$C_F = -\frac{\partial f}{\partial H_F} = \frac{1}{\beta} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{\gamma - 2|U| \sum_i \cos(q_i)}{\left[ -2|\mu| + (\gamma - 2|U| \sum_i \cos(q_i))^2 \right]}. \quad (8.10)$$

Nessa expressão, utilizamos a segunda equação do vínculo (8.2) para expressar  $g$  em termos de  $\gamma$ ,  $\mu$  e  $\beta$ . A partir disso, vemos que para  $T < T_c$ , como  $\gamma$  é fixado em  $\gamma = \gamma_c$ , o condensado comporta-se como

$$C_F \propto T, \quad (8.11)$$

independente da dimensão. Quando  $T > T_c$ ,  $\gamma$  muda com a temperatura mas a expressão (8.1) não fornece uma expressão explícita de  $\gamma = \gamma(\beta)$ . Nesse caso, procedemos com uma análise numérica do condensado fermiônico na região  $\gamma > \gamma_c$ . Para isso, usamos a identidade (3.34) para reescrever (8.10) de uma maneira mais conveniente,

$$C_F = \frac{1}{\beta} \frac{1}{2|U|\sqrt{2|\mu|}} \int_0^\infty dt e^{-\left(\frac{t\gamma}{2|U|}\right)} \sinh\left(\frac{t\sqrt{2|\mu|}}{2|U|}\right) [\gamma [I_0(t)]^d - 2|U|d [I_0(t)]^{d-1} I_1(t)]. \quad (8.12)$$

Os resultados são mostrados na figura (6), em que vemos que acima da temperatura crítica o condensado também não depende da dimensão,

$$C_F \propto T^{\frac{1}{2}}. \quad (8.13)$$

Para temperaturas muito altas, podemos ver esse comportamento emergindo em (8.10). De fato, neste limite a relação (8.1) implica em  $\gamma \sim T^{\frac{1}{2}}$  (negligenciando  $\mu$  e  $U$  comparado a  $\gamma$ ), que quando substituído em (8.10) conduz ao resultado acima. Precisamente as mesmas dependências com a temperatura são obtidas na versão do modelo de campo médio [42].

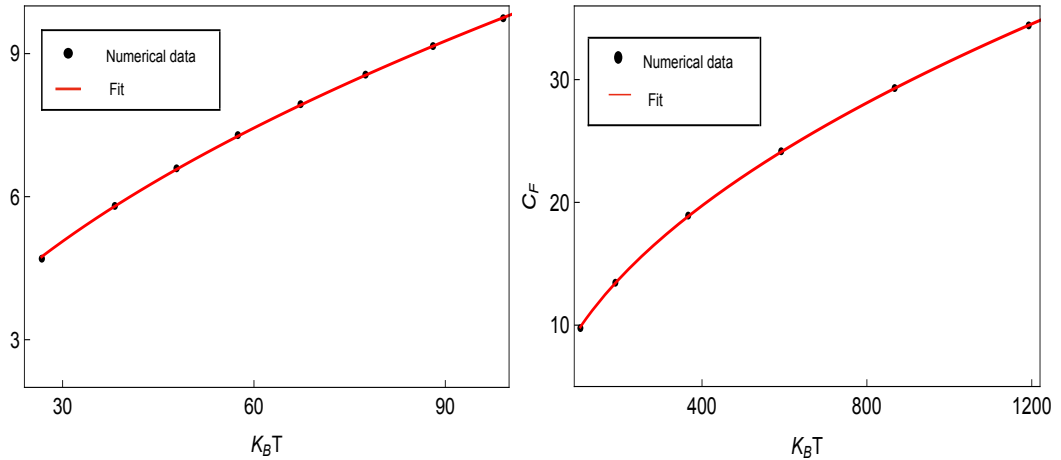


Figura 6 – Análise numérica do condensado fermiônico, com  $\mu \neq 0$ , na região  $T > T_c$  para  $d = 3$  e  $d = 5$ , representados pelos gráficos da esquerda e da direita, respectivamente. O melhor fit dos dados numéricos é  $C_F = a + b\sqrt{T}$ , em que  $a$  e  $b$  são constantes.

Em seguida, voltamos com a suscetibilidade bosônica a partir da equação (8.8),

$$\chi_B = \frac{\partial m_B}{\partial H_B} = \frac{1}{2} \left[ -|\mu| + \frac{1}{2} (\gamma - 2d|U|)^2 \right]^{-1}, \quad (8.14)$$

a qual diverge para  $T < T_c$ , uma vez que  $\gamma = \gamma_c$ . Para  $T > T_c$ , expandimos a expressão acima em torno do ponto crítico,

$$\chi_B \sim \frac{1}{2} \left[ \sqrt{2|\mu|}(\gamma - \gamma_c) + \frac{1}{2}(\gamma - \gamma_c)^2 \right]^{-1}. \quad (8.15)$$

Como  $\mu \neq 0$ , o comportamento da suscetibilidade é governado pelo termo dominante  $(\gamma - \gamma_c)$ . Usando a equação (8.7) para expressar  $(\gamma - \gamma_c)$  em termos da temperatura, obtemos finalmente,

$$\chi_B \sim \begin{cases} \tau_\beta^{-\left(\frac{2}{d-2}\right)} & \text{para } 2 < d < 4 \\ -\left(\frac{\tau_\beta}{\ln \tau_\beta}\right)^{-1} & \text{para } d = 4 \\ \tau_\beta^{-1} & \text{para } d > 4 \end{cases} . \quad (8.16)$$

Para  $2 < d < 4$ , obtemos um novo expoente crítico,  $\gamma_T = \left(\frac{2}{d-2}\right)$  e para  $d > 4$  recuperamos o expoente crítico de campo médio,  $\gamma_T = 1$  [42].

### 8.1.2 Soluções com $\mu = 0$

Tomando  $\mu = 0$  em (8.4), obtemos

$$\beta = \frac{1}{4|U|^2} \int_0^\infty dt t \exp\left(-\frac{\gamma}{2|U|}t\right) [I_0(t)]^d . \quad (8.17)$$

Vemos que um fator adicional de  $t$  no integrando comparado ao caso anterior, muda as propriedades de convergências, e conseqüentemente o comportamento crítico. De fato, a integral que deveremos investigar agora é

$$\mathcal{I}_d^0(\gamma) \equiv \int_0^\infty dt t \exp\left(-\frac{\gamma}{2|U|}t\right) [I_0(t)]^d . \quad (8.18)$$

Essa integral converge no ponto crítico  $\gamma = \gamma_c$  para  $d > 4$ , determinando a dimensão crítica inferior  $d_l^0 = 4$ . Para determinar a dimensão crítica superior, consideramos a derivada com respeito a  $\gamma$ ,

$$\mathcal{I}_d^{\prime 0}(\gamma) \sim - \int_0^\infty dt t^{-\left(\frac{d-4}{2}\right)} \exp(-t(\gamma - \gamma_c)) . \quad (8.19)$$

Essa expressão converge no ponto crítico para  $d > 6$ , fornecendo a dimensão crítica  $d_u^0 = 6$ . Procedendo similarmente como na seção anterior, obtemos a relação entre  $(\gamma - \gamma_c)$  e  $\tau_\beta$  de acordo com a dimensionalidade,

$$(\gamma - \gamma_c) \sim \begin{cases} \tau_\beta^{\frac{2}{d-4}} & \text{para } 4 < d < 6 \\ -\frac{\tau_\beta}{\ln \tau_\beta} & \text{para } d = 6 \\ \tau_\beta & \text{para } d > 6 \end{cases} . \quad (8.20)$$

Então, o modelo exibe um comportamento crítico não trivial para  $4 < d < 6$ .

#### 8.1.2.1 Magnetização, Condensado Fermiônico, e Suscetibilidade

Seguindo a análise das seções anteriores, os expoentes críticos podem ser prontamente computados. Para evitar repetições desnecessárias, apenas exibimos os resultados.

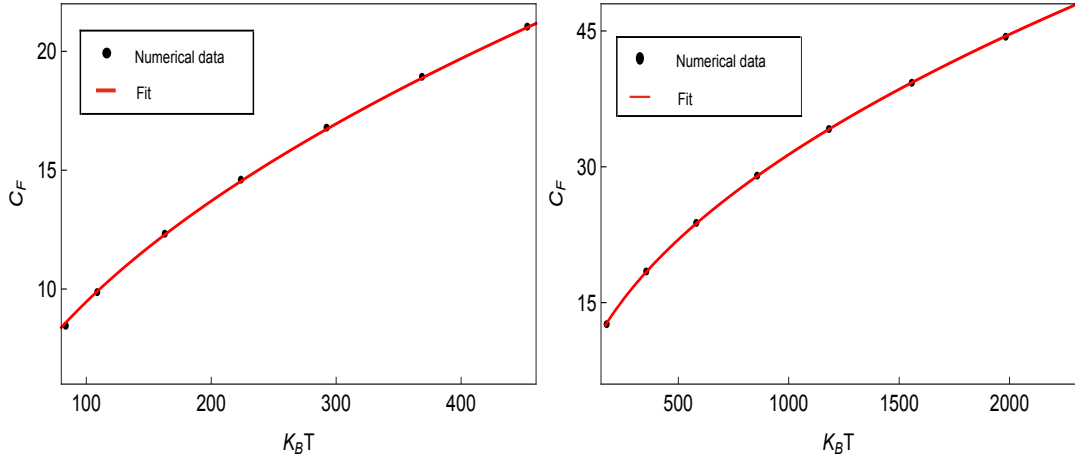


Figura 7 – Condensado Fermiônico para  $\mu = 0$  e  $T > T_c$ . Os plots, para  $d = 5$  (gráfico esquerdo) e  $d = 7$  (gráfico direito), mostram os mesmos comportamentos comparado ao caso com  $\mu \neq 0$ .

O expoente crítico da magnetização é  $\beta_T = 1/2$  para todas as dimensões  $d > 4$ . O condensado fermiônico também mostra o mesmo comportamento como no caso  $\mu \neq 0$ , que é dado por

$$C_F \propto \begin{cases} T & \text{para } T < T_c \\ T^{1/2} & \text{para } T > T_c \end{cases}, \quad (8.21)$$

em que a dependência a alta temperatura é determinada numericamente, como mostrado na figura (7). Os resultados são também independentes da dimensão.

Finalmente, próximo do ponto crítico, a suscetibilidade comporta-se como

$$\chi_B \sim \begin{cases} \tau_\beta^{-\left(\frac{4}{d-4}\right)} & \text{para } 4 < d < 6 \\ \left(\frac{\tau_\beta}{\ln \tau_\beta}\right)^{-2} & \text{para } d = 6 \\ \tau_\beta^{-2} & \text{para } d > 6 \end{cases}, \quad (8.22)$$

a qual conduz aos expoentes críticos  $\gamma_T = \frac{4}{d-4}$  para  $4 < d < 6$ , e  $\gamma_T = 2$  para  $d > 6$ . Um resumo dos resultados é exibido na tabela (4).

$T$	$\mu$	$d_l$	$d_u$	$\gamma_g/T$	$\nu$	$\eta$	$\beta$	Classe de univ.
0	0	2	4	$\begin{cases} 4/(d-2) \\ 2 \end{cases}$	$\begin{cases} 1/(d-2) \\ 1/2 \end{cases}$	-2	$\frac{1}{2}$	quânt. sup.
> 0	$\neq 0$	2	4	$\begin{cases} 2/(d-2) \\ 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 1/(d-2) \\ 1/2 \end{cases}$	0	$\frac{1}{2}$	térm. sup. I
> 0	0	4	6	$\begin{cases} 4/(d-4) \\ 2 \end{cases}$	$\begin{cases} 1/(d-4) \\ 1/2 \end{cases}$	-2	$\frac{1}{2}$	térm. sup. II
0	-	1	3	$\begin{cases} 2/(d-1) \\ 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 1/(d-1) \\ 1/2 \end{cases}$	0	$\frac{1}{2}$	quântico
> 0	-	2	4	$\begin{cases} 2/(d-2) \\ 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 1/(d-2) \\ 1/2 \end{cases}$	0	$\frac{1}{2}$	clássico

Tabela 4 – Resumo do comportamento crítico. Para facilitar a comparação, incluímos nas duas linhas inferiores na tabela os resultados das versões clássicas e quânticas não-supersimétricas do modelo esférico. Adicionalmente, incluímos os resultados para os expoentes críticos  $\eta$  e  $\nu$ . O expoente  $\eta$  segue diretamente a partir do comportamento da função de correlação  $\langle S_{-\mathbf{q}} S_{\mathbf{q}} \rangle$  para pequenos momentos (grandes distâncias) e tomado no ponto crítico, isto é,  $\langle S_{-\mathbf{q}} S_{\mathbf{q}} \rangle \sim (w_{\mathbf{q}}^B)^{-2} \sim \left( -\sqrt{2|\mu|} U |\mathbf{q}|^2 + \frac{1}{2} U^2 |\mathbf{q}|^4 + \dots \right)^{-1} \sim |\mathbf{q}|^{-2+\eta}$ , que mostra claramente a diferença dos valores de  $\eta$  nos casos de  $\mu = 0$  e  $\mu \neq 0$ . O expoente  $\nu$  pode ser computado em todos os casos a partir de  $\xi \sim (\gamma - \gamma_c)^{-\frac{1}{2}}$ , e então usando as relações (7.18), (8.7) e (8.20) para expressar  $\xi$  na forma  $\xi \sim \tau^{-\nu}$  para cada um dos casos. Podemos checar imediatamente que todos os expoentes satisfazem as relações de escalar padrão, lembrando que no caso de temperatura zero devemos substituir  $d \rightarrow d + z$ , como comentado no final do capítulo 2.

## 9 Função de Correlação

Neste capítulo, é analisada a função de correlação do modelo supersimétrico com o objetivo de investigar a possibilidade de interações competitivas. Essa análise é motivada pela versão *on-shell* da Lagrangiana supersimétrica, que apresenta uma potencial competição entre as variáveis bosônicas.

### 9.1 Interações Competitivas entre as Variáveis Bosônicas

A forma *on-shell* da Lagrangiana (6.6) revela uma característica interessante das interações entre as variáveis bosônicas  $S_{\mathbf{r}}$  de diferentes sítios. A formulação *on-shell* é obtida integrando o campo auxiliar  $F_{\mathbf{r}}$ . Como aparece no máximo quadraticamente na ação, esse processo é equivalente a utilizar sua equação de movimento, que é puramente algébrica

$$\frac{\partial L}{\partial F_{\mathbf{r}}} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{\mathbf{r}} = -\gamma S_{\mathbf{r}} - \sum_{\mathbf{r}'} U_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}'}, \quad (9.1)$$

isto é, não há derivada temporal de  $F_{\mathbf{r}}$  e assim não é um grau de liberdade físico dinâmico. Substituindo  $F_{\mathbf{r}}$  de volta em (6.6), obtemos a Lagrangiana *on-shell*

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r}} \dot{S}_{\mathbf{r}}^2 + i \sum_{\mathbf{r}} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \dot{\psi}_{\mathbf{r}} - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} J_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'} - \sum_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} U_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}'} - \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}} (\bar{\psi}_{\mathbf{r}} \xi + \bar{\xi} \psi_{\mathbf{r}}) \\ & - \mu \sum_{\mathbf{r}} (S_{\mathbf{r}}^2 - N) - \frac{1}{2} \gamma^2 N - \gamma \left( \sum_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} U_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'} + \sum_{\mathbf{r}} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}} \right), \end{aligned} \quad (9.2)$$

em que  $J_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} \equiv \sum_{\mathbf{r}''} U_{\mathbf{r},\mathbf{r}''} U_{\mathbf{r}'',\mathbf{r}'}$ .

Vamos focar nos termos envolvendo interações de  $S_{\mathbf{r}}$  em diferentes sítios,

$$L_{SS} \equiv -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} J_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'} - \gamma \sum_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} U_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} S_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}'}. \quad (9.3)$$

Para tornar claro o papel desses termos, consideramos explicitamente as interações de curto alcance

$$U_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} \equiv U \sum_{i=1}^d (\delta_{\mathbf{r},\mathbf{r}'+\mathbf{e}^i} + \delta_{\mathbf{r},\mathbf{r}'-\mathbf{e}^i}), \quad (9.4)$$

em que  $U$  é a energia de interação que pode ser positiva (ferro) e negativa (anti-ferro), e consideramos uma rede hipercúbica  $d$ -dimensional com  $\mathbf{e}^i$  sendo um conjunto de vetores unitários ortogonais,

$$\{\mathbf{e}^i\} = \{(1, 0, \dots, 0); (0, 1, 0, \dots, 0); \dots; (0, \dots, 0, 1)\}. \quad (9.5)$$

No caso unidimensional, temos  $U_{r,r'} = U(\delta_{r,r'+1} + \delta_{r,r'-1})$  e  $J_{r,r'} = U^2(\delta_{r,r'+2} + \delta_{r,r'} + \delta_{r,r'-2})$ , de modo que (9.3) torna-se

$$L_{SS} = -\frac{U^2}{2} \sum_r (S_r S_{r+2} + S_r S_{r-2}) - \gamma U \sum_r (S_r S_{r+1} + S_r S_{r-1}), \quad (9.6)$$

com o multiplicador de Lagrange  $\gamma$  juntamente com  $U$  desempenhando o papel de uma energia de interação de primeiros vizinhos. Portanto, vemos que mesmo se  $U_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}$  é apenas uma interação de primeiros vizinhos, umas vez que integramos sobre o campo auxiliar  $F_{\mathbf{r}}$ , as interações resultantes  $J_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}$  serão efetivamente de segundos vizinhos. Como  $\gamma$  e  $U$  tem sinais opostos, as energias de interação  $U^2/2 > 0$  e  $\gamma U < 0$  favorecem diferentes ordenamentos entre primeiros e segundos vizinhos (ferro e anti-ferro, respectivamente). Em geral, modelos com interações competitivas dão origem a diagramas de fase ricos, como tem sido observado em vários modelos de rede [45, 46, 47, 48], incluindo versões clássicas [49, 50] e quânticas [32, 51] do modelo esférico.

## 9.2 Função de Correlação

As interações competitivas também afetam as funções de correlação. Quando as interações são independentes uma das outras, dependendo da sua magnitude relativa, elas geralmente conduzem a um comportamento oscilatório na correlação, além do decaimento exponencial usual. Em particular, como mostrado em [32] para o modelo esférico quântico com interações competitivas, tal oscilação é manifestada já na função de correlação unidimensional.

No presente caso, entretanto, as interações não são independentes umas das outras, uma vez que as soluções de ponto de sela para  $\gamma$  implicam que os vínculos esféricos devem ser satisfeitos para  $\gamma$ , que envolve outros parâmetros, incluindo  $U$ . Além disso, não é claro a priori se as funções de correlação exibirão um comportamento oscilatório.

A função de correlação pode ser computada trocando na função de partição o campo bosônico uniforme  $H_B$  por um campo dependente da posição do sítio, isto é,

$$H_B \sum_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}} \Rightarrow \sum_{\mathbf{r}} H_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}}, \quad (9.7)$$

que resulta na função de partição,

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\Omega \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \left[ L_E + \sum_{\mathbf{r}} H_{\mathbf{r}} S_{\mathbf{r}} \right] \right\}. \quad (9.8)$$

Com isso, a energia livre torna-se

$$\begin{aligned} f &= -\frac{1}{4N} \sum_{\mathbf{q}} (2g) \frac{H_{\mathbf{q}} H_{-\mathbf{q}}}{(w_{\mathbf{q}}^B)^2} - \mu + \frac{1}{\beta N} \sum_{\mathbf{q}} \ln \left[ 2 \sinh \left( \frac{\beta}{2} w_{\mathbf{q}}^B \right) \right] \\ &\quad - \frac{1}{\beta N} \sum_{\mathbf{q}} \ln \left[ 2 \cosh \left( \frac{\beta}{2} w_{\mathbf{q}}^F \right) \right]. \end{aligned} \quad (9.9)$$

No espaço dos momentos, as função de correlação segue imediatamente,

$$\langle S_{\mathbf{q}} S_{-\mathbf{q}} \rangle = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 f}{\partial H_{\mathbf{q}} \partial H_{-\mathbf{q}}} = \frac{g}{\beta N} \frac{1}{(w_{\mathbf{q}}^B)^2}. \quad (9.10)$$

Voltando para o espaço das posições, a função de correlação unidimensional é dada por,

$$\langle S_r S_{r+h} \rangle = \frac{1}{2\beta} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq}{2\pi} \frac{e^{iqh}}{\mu + \frac{1}{2}(\gamma - 2|U| \cos q)^2}. \quad (9.11)$$

Por simplicidade, nas análises seguintes consideraremos as soluções de ponto de sela com  $\mu = 0$ , uma vez que  $\mu$  não é um parâmetro relevante para a questão que estamos investigando. Naturalmente, as conclusões gerais não são afetadas quando  $\mu \neq 0$ . Temos que analisar a função de correlação junto com a equação do vínculo,

$$1 = \frac{1}{\beta} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq}{2\pi} \frac{1}{(\gamma - 2|U| \cos q)^2}. \quad (9.12)$$

Para tornar claro o ponto principal dessa análise, consideramos um cálculo um pouco mais geral, deformando a função de correlação de acordo com

$$\langle S_r S_{r+h} \rangle = \frac{1}{\beta} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dq}{2\pi} \frac{\exp\{iqh\}}{(\gamma - 2|U| \cos q)^2 + \alpha \cos q}, \quad (9.13)$$

com a modificação correspondente no vínculo (9.12). Isso é equivalente a adicionar na Lagrangiana um termo de interação entre primeiros vizinhos independente com energia  $\alpha$ . Em princípio, adicionando apenas esse termo o modelo é incompatível com a supersimetria<sup>1</sup>. No final tomaremos o limite  $\alpha \rightarrow 0$ .

Com a mudança de variável  $z = e^{iq}$ , trocamos a integração em  $q$  por uma integração ao longo de um caminho fechado (círculo unitário) no plano complexo. O denominador de (9.13) pode ser escrito como um polinômio de quarta ordem em  $z$ ,

$$\langle S_r S_{r+h} \rangle = \frac{1}{2\pi i \beta |U|^2} \oint_{\mathcal{C}} dz \frac{z^{1+h}}{\left[ z^4 + \left( \frac{\alpha}{2|U|^2} - \frac{2\gamma}{|U|} \right) z^3 + \left( \frac{\gamma^2}{|U|^2} + 2 \right) z^2 + \left( \frac{\alpha}{2|U|^2} - \frac{2\gamma}{|U|} \right) z + 1 \right]}, \quad (9.14)$$

em que o contorno  $\mathcal{C}$  é um círculo unitário percorrido no sentido anti-horário. As raízes do polinômio são dadas por

$$z_1 = \frac{1}{8|U|^2} (-\alpha + 4|U|\gamma - A - B), \quad z_2 = \frac{1}{8|U|^2} (-\alpha + 4|U|\gamma + A + B^*), \quad (9.15)$$

e as raízes complexas conjugadas são,  $z_1^*$  e  $z_2^*$ , com

$$\begin{aligned} A &\equiv \sqrt{\alpha(\alpha - 8|U|\gamma)}, \\ B &\equiv \sqrt{-8|U|\gamma[A + 2(\alpha - |U|\gamma)] - 64|U|^4 + 2\alpha(\alpha + A)}. \end{aligned} \quad (9.16)$$

<sup>1</sup> É possível em princípio modificar a Lagrangiana bem como as transformações de supersimetria a fim de acomodar tal termo sem quebrar a supersimetria. Voltaremos neste ponto na próxima seção em que discutimos uma deformação similar sem destruir a supersimetria em um modelo de teoria de campos equivalente.

Das quatro raízes, apenas  $z_1$  e  $z_1^*$  estão dentro do círculo unitário se consideramos valores de  $\alpha$  no intervalo<sup>2</sup>  $0 \leq \alpha < 4|U|\gamma$ . Realizando a integração no plano complexo obtemos,

$$\langle S_r S_{r+h} \rangle = \frac{1}{|U|^{2\beta}} \left[ \frac{z_1^{(h+1)}}{w(\alpha, \gamma, U)} + \frac{z_1^{*(h+1)}}{w^*(\alpha, \gamma, U)} \right], \quad (9.17)$$

no qual escrevemos o denominador como

$$w(\alpha, \gamma, U) \equiv (z_1 - z_2)(z_1 - z_1^*)(z_1 - z_2^*) \equiv |w|e^{i\delta}. \quad (9.18)$$

A integral do vínculo (9.12) (com a introdução do termo  $\alpha \cos q$ ) pode ser realizada de maneira semelhante, resultando em

$$1 = \frac{1}{|U|^{2\beta}} \left[ \frac{z_1}{w(\alpha, \gamma, U)} + \frac{z_1^*}{w^*(\alpha, \gamma, U)} \right]. \quad (9.19)$$

Com isso, podemos escrever a função de correlação (9.17) de uma forma compacta,

$$\langle S_r S_{r+h} \rangle = \frac{\cos[\delta - (h+1)\theta]}{\cos(\delta - \theta)} \exp(h \ln |z_1|), \quad (9.20)$$

em que,

$$z_1 \equiv |z_1|e^{i\theta}. \quad (9.21)$$

Vemos que no limite  $\alpha \rightarrow 0$  a raiz  $z_1$  torna-se real de modo que  $\theta$  é nulo. Nesse caso, o fator oscilatório desaparece na função de correlação (9.20), restando apenas o decaimento exponencial usual, uma vez que  $|z_1| < 1$  (essa raiz está dentro do círculo unitário). Portanto, o modelo não exhibe as oscilações características de interações competitivas. Elas são geradas apenas quando deformamos a teoria com o termo  $\alpha \cos q$ , que corresponde a introduzir uma interação de primeiros vizinhos no modelo.

<sup>2</sup> Impomos esse limite superior  $\alpha$  apenas para simplificar a análise. O que realmente importa aqui é que o valor  $\alpha = 0$  pertence ao intervalo, que é o limite na qual pretendemos adotar para recuperar o modelo original.

# 10 Equivalência com o Modelo Sigma não-Linear

Neste capítulo, é discutida a equivalência do modelo esférico supersimétrico com uma versão não-relativística do modelo sigma não-linear supersimétrico. Primeiramente é apresentada a formulação do modelo bem como as transformações de supersimetria das componentes do supercampo. Ao final do capítulo é obtida a ação efetiva do modelo na expansão  $1/N$ , o que possibilita a comparação com o modelo esférico.

## 10.1 Formulação do Modelo Sigma não-Linear

Um guia útil para esclarecer a conexão com a teoria de campos é lembrar do mapeamento quântico-clássico baseado em argumentos do grupo de renormalização, conectando fenômenos críticos clássicos (térmicos) em  $D$  dimensões espaciais a fenômenos críticos quânticos (temperatura zero) em  $d = D - z$  dimensões espaciais. Em nosso caso, notamos um deslocamento em ambas as dimensões críticas inferior e superior por um fator de 2, isto é,  $(2, 4) \rightarrow (4, 6)$ , para os casos de temperatura zero e temperatura finita com  $\mu = 0$ , mostrando que o expoente crítico dinâmico é  $z = 2$ . Isso pode também ser obtido diretamente a partir da divergência da temporal correlação no ponto crítico,  $\tau_c \sim (w_{\mathbf{q}}^B)^{-1} \sim \left(-\sqrt{2|\mu|U|\mathbf{q}|^2} + \frac{1}{2}U^2|\mathbf{q}|^4 + \dots\right)^{-\frac{1}{2}} \sim |\mathbf{q}|^{-z}$ , que para  $\mu = 0$ , fornece  $z = 2$ . Isso implica que o comprimento de correlação e a correlação temporal escalam de maneira anisotropicamente no modelo, ponderado pelo expoente  $z = 2$ . Sendo assim, qualquer conexão com teoria de campos deve ser não-relativística.

A característica não-relativística mencionada acima, pode também ser notada ainda mais diretamente considerando ingenuamente o limite do contínuo da ação no superespaço (6.2) no caso em que  $U_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}$  corresponde a interações de primeiros vizinhos. Enquanto as derivadas temporais aparecem apenas dentro das derivadas supercovariantes, as derivadas espaciais que emergem no limite do contínuo aparecem explicitamente na ação,

$$\int dt d\theta d\bar{\theta} \sum_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} U_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} \Phi_{\mathbf{r}} \Phi_{\mathbf{r}'} \xrightarrow{\text{limite do contínuo}} \int dt d\theta d\bar{\theta} \int d^d r \left( \Phi_{\mathbf{r}}^2 - \frac{1}{2} (\nabla \Phi_{\mathbf{r}})^2 \right), \quad (10.1)$$

e, portanto não estão em pé de igualdade com as derivadas temporais. O resultado é uma teoria que, quando escrita em componentes, possui um número diferente de derivadas temporais e espaciais, o que leva a um escalamento anisotrópico ponderado por  $z = 2$ .

A correspondência entre as simetrias globais é crucial na identificação da teorias equivalentes. De acordo com a discussão anterior, devemos então olhar para uma teoria

que é supersimétrica, mas não invariante de Lorentz. Um modelo sigma não-linear com essas propriedades foi construído em [52], e é um candidato natural para ser equivalente ao modelo esférico quântico supersimétrico. Em adição, o modelo sigma não-linear tem uma simetria interna  $O(N)$  que não está presente no modelo esférico. Esse é o motivo pelo qual a equivalência será estabelecida estritamente no limite de  $N \rightarrow \infty$ , em que efetivamente a simetria  $O(N)$  desaparece.

Por conveniência, antes de fazer a equivalência, revisamos brevemente a construção do modelo seguindo as convenções de [52]. Como o tamanho do espinor e consequentemente a estrutura do superespaço dependem da dimensão do espaço-tempo, devemos considerar aqui explicitamente o espaço-tempo de  $2 + 1$  dimensões, que também pode ser usado para o caso de  $1 + 1$  dimensões, em que temos em ambas as situações espinores de duas componentes. Nesse caso, o superespaço é constituído de coordenadas bosônicas  $x^0$  e  $x^i$ , com  $i = 1, 2$ , e um par de coordenadas grassmanianas reais  $\theta_\alpha$ , com  $\alpha = 1, 2$ .

O modelo é construído a partir de um conjunto de  $N$  supercampos escalares <sup>1</sup>,

$$\Phi_a = \varphi_a + \bar{\theta}\psi_a + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta F_a, \quad a = 1, \dots, N, \quad (10.2)$$

tendo como componentes, campos escalares reais,  $\varphi_a$ , campos espinoriais de Majorana,  $\psi_a$ , e campos auxiliares bosônicos  $F_a$ . A variável grassmaniana conjugada é definida como  $\bar{\theta} \equiv \theta^T \gamma^0$  e similarmente para  $\bar{\psi}$ . As matrizes de Dirac na representação  $2 \times 2$  são dadas em termos das matrizes de Pauli como  $\gamma^0 = \sigma_2$ ,  $\gamma^1 = i\sigma_1$  e  $\gamma^2 = i\sigma_3$ .

Os supercampos satisfazem o vínculo

$$\Phi_a \Phi_a = \frac{N}{2\tilde{g}}, \quad (10.3)$$

com  $\tilde{g}$  sendo a constante de acoplamento. É importante enfatizar novamente a diferença fundamental comparado com o vínculo do modelo esférico (6.1). Enquanto o vínculo acima é local, uma vez que envolve apenas campos no mesmo ponto do espaço-tempo, o vínculo esférico (6.1) envolve as variáveis de spin de todos os sítios da rede, mesmo aquelas que estão longe umas das outras.

Em termos das componentes dos campos, os vínculos são,

$$\varphi_a \varphi_a = \frac{N}{2\tilde{g}}, \quad \psi_a \varphi_a = 0, \quad \text{e} \quad \varphi_a F_a = \frac{1}{2} \bar{\psi}_a \psi_a. \quad (10.4)$$

Esses vínculos podem ser implementados por meio de um supercampo multiplicador de Lagrange

$$\Sigma = \sigma + \bar{\theta}\xi + \frac{1}{2}\bar{\theta}\theta\lambda, \quad (10.5)$$

<sup>1</sup> Embora estamos usando a mesma letra  $N$  em ambos os modelos, ele tem um significado diferente em cada um dos casos. No modelo esférico, o limite termodinâmico necessariamente corresponde a  $N \rightarrow \infty$ , uma vez que representa o número total de sítios da rede. Por outro lado, é um parâmetro livre no modelo sigma não-linear, isto é, o número de campos, que pode ser escolhido conforme a nossa conveniência.

através da inclusão do termo  $\Sigma(\Phi_a\Phi_a - N/2\tilde{g})$  na ação.

A ação do modelo, incorporando o escalamento anisotrópico caracterizado por  $z = 2$ , é dada por

$$S = \frac{1}{2} \int dt d^2x d^2\theta \left[ \Phi_a \bar{D} D \Phi_a + a_2 \Phi_a \nabla^2 \Phi_a - \Sigma(\Phi_a \Phi_a - \frac{N}{2\tilde{g}}) \right], \quad (10.6)$$

em que  $a_2$  é um parâmetro positivo adimensional e a derivada supercovariante é definida como

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial \theta} - i\bar{\theta}\gamma^\mu \tilde{\partial}_\mu, \quad (\tilde{\partial}_\mu \equiv \partial_0, a_1 \partial_i). \quad (10.7)$$

Na expressão acima  $a_1$  é um parâmetro de dimensão ( $[a_1] = 1$  em unidades massa) para dar a dimensão correta para a derivada supercovariante, uma vez que para o caso  $z = 2$  é mais conveniente atribuir as dimensões  $[x^0] = 2$  e  $[x^i] = 1$  em unidades de comprimento.

As transformações de supersimetria podem ser obtidas a partir da supercarga,

$$Q \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} + i\gamma^\mu \theta \tilde{\partial}_\mu, \quad (10.8)$$

definida de tal maneira que anti-comuta com a derivada supercovariante, isto é,  $\{D, Q\} = 0$ . Isso é obrigatório para assegurar que  $D\Phi_a$  se transforma como o supercampo em si, de modo que qualquer termo envolvendo derivadas supercovariantes é manifestamente supersimétrico. A supercarga gera translações no superespaço,

$$\delta x^0 \equiv \bar{\epsilon} Q x^0 = i\bar{\epsilon} \gamma^0 \theta, \quad \delta x^i \equiv \bar{\epsilon} Q x^i = i a_1 \bar{\epsilon} \gamma^i \theta \quad \text{e} \quad \delta \theta \equiv \bar{\epsilon} Q \theta = \epsilon, \quad (10.9)$$

em que  $\epsilon_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , é um parâmetro Grassmaniano da transformação, sob a qual o supercampo se transforma como

$$\delta \Phi_a \equiv \bar{\epsilon} Q \Phi_a. \quad (10.10)$$

Utilizando as propriedades  $\bar{\theta}_\alpha \theta_\beta = i\theta_2 \theta_1 \delta_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \bar{\theta} \theta \delta_{\alpha\beta}$  e  $\bar{\epsilon} \theta = \bar{\theta} \epsilon$ , e comparando as potências correspondentes de ordem  $\theta$  em ambos os lados, encontramos as transformações de supersimetria das componentes

$$\begin{aligned} \delta \varphi_a &= \bar{\epsilon} \psi_a, \\ \delta \psi_a &= -i\gamma^\mu \epsilon \tilde{\partial}_\mu \varphi_a + F_a \epsilon, \\ \delta F_a &= -i\bar{\epsilon} \gamma^\mu \tilde{\partial}_\mu \psi_a. \end{aligned} \quad (10.11)$$

## 10.2 Ação em Componentes e a Expansão $1/N$

Agora estamos prontos para discutir a equivalência entre os modelos. Para mostrar isso é conveniente escrever a ação (10.6) em termos de componentes,

$$\begin{aligned} S &= \int dt d^2x \left[ -\frac{1}{2} \varphi \tilde{\partial}^2 \varphi + \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \tilde{\partial}_\mu \psi + \frac{1}{2} F^2 - a_2 F \nabla^2 \varphi + \frac{a_2}{2} \bar{\psi} \nabla^2 \psi \right. \\ &\quad \left. + \sigma(F\varphi - \frac{1}{2} \bar{\psi} \psi) - \bar{\xi} \psi \varphi + \frac{\lambda}{2} (\varphi^2 - \frac{N}{2\tilde{g}}) \right]. \end{aligned} \quad (10.12)$$

Podemos utilizar a equação de movimento do campo auxiliar  $F_a$ ,

$$F_a = a_2 \nabla^2 \varphi_a - \sigma \varphi_a, \quad (10.13)$$

para eliminá-lo da Lagrangiana,

$$\begin{aligned} S = \int dt d^2x & \left[ -\frac{1}{2} \varphi \tilde{\partial}^2 \varphi - \frac{a_2^2}{2} \nabla^2 \varphi \nabla^2 \varphi + \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \tilde{\partial}_\mu \psi + \frac{a_2}{2} \bar{\psi} \nabla^2 \psi \right. \\ & \left. + a_2 \sigma \varphi \nabla^2 \varphi - \frac{1}{2} \sigma^2 \varphi^2 - \frac{1}{2} \sigma \bar{\psi} \psi - \bar{\xi} \psi \varphi + \frac{\lambda}{2} \left( \varphi^2 - \frac{N}{2\tilde{g}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (10.14)$$

A quebra espontânea de supersimetria está relacionada com a possibilidade de que os campos multiplicadores de Lagrange possam adquirir um valor esperado no vácuo diferente de zero. Para apreciar este ponto, fazemos os deslocamentos  $\sigma \rightarrow \sigma + m^2$  e  $\lambda \rightarrow \lambda + \lambda_0$ , em que  $m^2$  e  $\lambda_0$  são os valores esperados no vácuo dos campos  $\sigma$  e  $\lambda$ , isto é,  $\langle \sigma \rangle \equiv m^2$  e  $\langle \lambda \rangle \equiv \lambda_0$ . A invariância rotational implica em  $\langle \xi \rangle = 0$ . Esses deslocamentos fornecem massas para bósons e férmions,

$$\mathcal{L}_{massa} = -\frac{1}{2} (m^4 - \lambda_0) \varphi^2 - \frac{m^2}{2} \bar{\psi} \psi. \quad (10.15)$$

Portanto, qualquer que seja  $\lambda_0 \neq 0$ , a quebra espontânea de supersimetria induz um desbalanceamento entre as massas bosônicas e fermiônicas, independente do valor de  $m^2$ .

Como a dependência nos campos  $\varphi$  e  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  é no máximo quadrática, eles podem ser integrados na função de partição. Isso produz uma ação efetiva que pode ser rearranjada em uma expansão em potências de ordem  $1/N$ . Para esse fim, depois de fazer os as mudanças acima, fazemos um rescalamento apropriado dos multiplicadores de Lagrange,  $\sigma \rightarrow \sigma/\sqrt{N}$ ,  $\lambda \rightarrow \lambda/\sqrt{N}$  e  $\xi \rightarrow \xi/\sqrt{N}$ , que afeta os termos de interação na segunda linha de (10.14),

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sigma \varphi (a_2 \nabla^2 - m^2) \varphi - \frac{1}{2N} \sigma^2 \varphi^2 - \frac{1}{2\sqrt{N}} \sigma \bar{\psi} \psi - \frac{1}{\sqrt{N}} \bar{\xi} \psi \varphi + \frac{\lambda}{2\sqrt{N}} \left( \varphi^2 - \frac{N}{2\tilde{g}} \right). \quad (10.16)$$

As regras de Feynman dessa teoria são mostradas nas figuras (8) e (9). Em adição aos fatores de  $N$  vindo dos vértices, sempre que há um *loop* bosônico ou fermiônico, isso produz um fator de  $N$  no numerador, uma vez que o *loop* é produzido pela contração de  $N$  campos. O propagador fermiônico é dado por

$$S_{ab}(p) = \frac{i\delta_{ab}}{\tilde{p}_\mu \gamma^\mu - (a_2 \mathbf{p}^2 + m^2) + i\epsilon} = i\delta_{ab} \frac{\tilde{p}_\mu \gamma^\mu + (a_2 \mathbf{p}^2 + m^2)}{\tilde{p}^2 - (a_2 \mathbf{p}^2 + m^2)^2 + i\epsilon}, \quad (10.17)$$

enquanto que o propagador bosônico é

$$\Delta_{ab}(p) = \frac{i\delta_{ab}}{\tilde{p}^2 - (a_2 \mathbf{p}^2 + m^2)^2 + \lambda_0 + i\epsilon}. \quad (10.18)$$

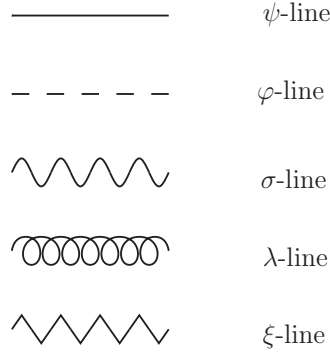


Figura 8 – Regras de Feynman - tipo de linhas.

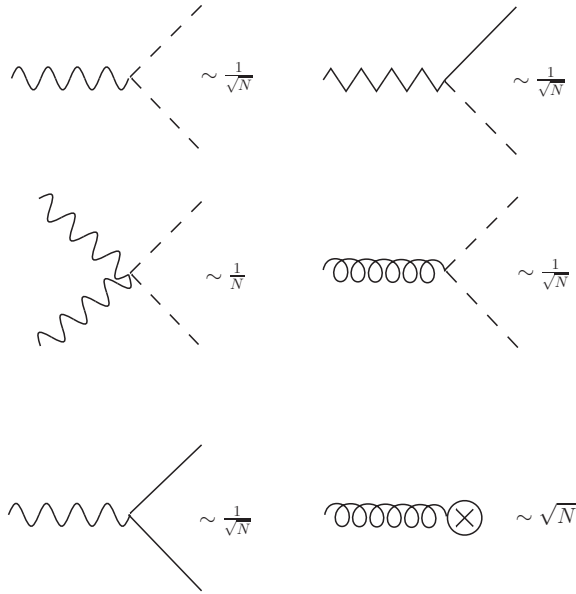


Figura 9 – Vértices de interação obtidos a partir de (10.16).

A ação efetiva é obtida efetuando a integração sobre os campos  $\varphi$ ,  $\psi$  e  $\bar{\psi}$ , o qual conduzirá à estrutura de uma expansão  $1/N$ ,

$$S_{eff}[\sigma, \lambda, \xi] = N^{\frac{1}{2}}S_1 + N^0S_2 + O(N^{-\frac{1}{2}}), \quad (10.19)$$

em que  $S_1$  representa as funções de um ponto de  $\sigma$  e  $\lambda$ ,

$$S_1 = \int dx \Gamma_{\sigma}^{(1)}(x=0)\sigma(x) + \int dx \Gamma_{\lambda}^{(1)}(x=0)\lambda(x), \quad (10.20)$$

com  $dx \equiv dx^0 d^d x$  e,  $\Gamma_{\sigma}^{(1)}(x=0)$  e  $\Gamma_{\lambda}^{(1)}(x=0)$  dado pelos diagramas 1PI correspondendo a figura (10), que são da ordem de  $N^{\frac{1}{2}}$ . Note que extraímos o fator de  $N^{\frac{1}{2}}$  para exibí-lo explicitamente em (10.19). A contribuição gaussiana  $S_2$  envolve as funções de dois pontos,

$$\begin{aligned} S_2 &= -\frac{i}{2} \int dx dy \sigma(x) \Gamma_{\sigma\sigma}^{(2)}(x-y) \sigma(y) - \frac{i}{2} \int dx dy \lambda(x) \Gamma_{\lambda\lambda}^{(2)}(x-y) \lambda(y) \\ &\quad - \frac{i}{2} \int dx dy \bar{\xi}(x) \Gamma_{\xi\xi}^{(2)}(x-y) \xi(y), \end{aligned} \quad (10.21)$$

com  $\Gamma^{(2)}$  dados pelos diagramas 1PI correspondendo a figura (11).

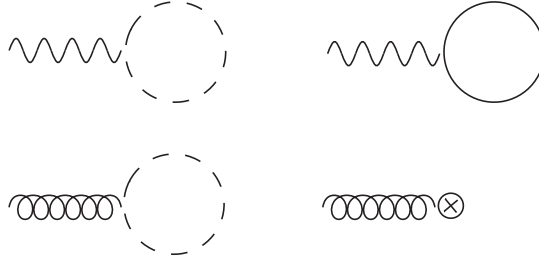


Figura 10 – Contribuições de um *loop* para as funções 1PI de um ponto. Todos esses diagramas são de ordem  $\sqrt{N}$ .

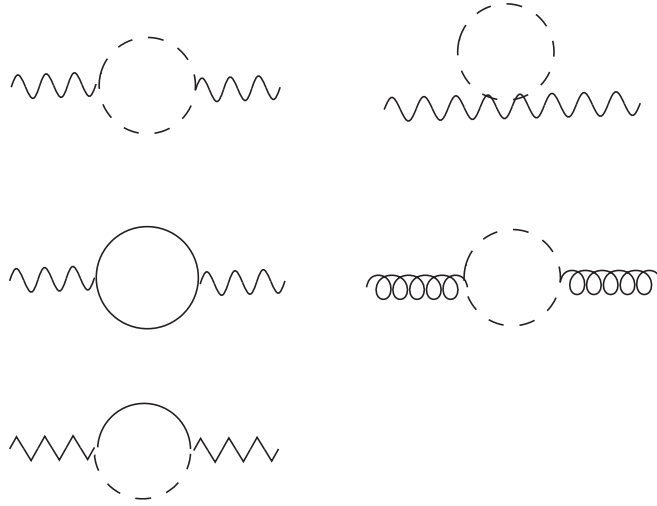


Figura 11 – Contribuições de um *loop* para as funções 1PI de dois pontos. Todos esses diagramas são da ordem de  $N^0$ . Apenas esses diagramas sobrevivem no limite de  $N$  grande.

Em seguida, para ter uma expansão bem definida para grandes valores de  $N$ , devemos impor que as contribuições de  $S_1$  desapareçam. Dessa forma, no limite de  $N \rightarrow \infty$ , a ação efetiva é dominada pela contribuição gaussiana  $S_2$ , precisamente como no caso da função de partição do modelo esférico supersimétrico (6.11). Agora resta identificar os parâmetros das duas teorias. Podemos fazer isso simplesmente analisando as contribuições em  $S_1$ . A soma dos dois diagramas no topo da figura (10) conduz a

$$\int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{a_2 \mathbf{k}^2 + m^2}{\tilde{k}^2 - (a_2 \mathbf{k}^2 + m^2)^2 + \lambda_0 + i\epsilon} - \int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{a_2 \mathbf{k}^2 + m^2}{\tilde{k}^2 - (a_2 \mathbf{k}^2 + m^2)^2 + i\epsilon} = 0, \quad (10.22)$$

enquanto que a soma dos diagramas na parte inferior da figura (10) implica em,

$$\int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{\tilde{k}^2 - (a_2 \mathbf{k}^2 + m^2)^2 + \lambda_0 + i\epsilon} - \frac{1}{2\tilde{g}} = 0, \quad (10.23)$$

em que  $d = 1, 2$ . A equação de gap (10.22) implica que  $\lambda_0 = 0$ , e então a supersimetria não é espontaneamente quebrada. Com isso, a equação (10.23) é reduzida a

$$\int \frac{dk_0}{2\pi} \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{\tilde{k}^2 - (a_2 \mathbf{k}^2 + m^2)^2 + i\epsilon} = \frac{1}{2\tilde{g}}. \quad (10.24)$$

Em seguida para comparar com a equação do vínculo do modelo esférico supersimétrico, precisamos integrar sobre a componente  $k_0$ , fornecendo a expressão

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^2} \frac{1}{\sqrt{a_1 \mathbf{k}^2 + (a_2 \mathbf{k}^2 + m^2)^2}} = \frac{1}{\tilde{g}}. \quad (10.25)$$

Há um último passo para comparar essa equação com a equação do vínculo (7.2) o qual reescrevemos aqui por conveniência,

$$1 = \frac{\sqrt{g}}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{\gamma + 2U \sum_i \cos(q_i)}. \quad (10.26)$$

Precisamos tomar o limite do contínuo nessa expressão. Para isso, reinsertamos o espaçamento da rede  $a$  por meio de  $q_i \rightarrow a q_i$ , e então tomamos o limite do contínuo  $a \rightarrow 0$ , de modo que a primeira zona de Brillouin  $[-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}]$  estende-se ao infinito. Portanto, as integrais sobre as componentes do momento tornam-se ilimitadas como em (10.25). Com isso, a equação acima torna-se

$$\frac{2}{\sqrt{g} a^{d-1}} = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{\left(\frac{\gamma - \gamma_c}{a}\right) + a|U| \mathbf{q}^2 + O(a^3)}, \quad (10.27)$$

relembrando que  $\gamma_c = 2d|U|$ . A comparação desta expressão com (10.25) conduz a seguinte identificação dos parâmetros,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{g}} &\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{g} a^{d-1}}, \\ a_1 &\Leftrightarrow 0, \\ a_2 &\Leftrightarrow a|U|, \\ m^2 &\Leftrightarrow \left(\frac{\gamma - \gamma_c}{a}\right), \end{aligned} \quad (10.28)$$

completando então a discussão da equivalência entre os dois modelos.

Como um comentário final, relembremos o cálculo da função de correlação com a presença do termo  $\alpha \cos q$  do capítulo 9. Naquele caso, não discutimos como modificar a teoria de uma maneira compatível com a supersimetria. Isso é automático no modelo sigma não-linear, uma vez que o termo  $\alpha \cos q$  está associado com o termo  $a_1 \mathbf{k}^2$  em (10.25). Isso vem do propagator bosônico ou equivalentemente da parte quadrática bosônica da Lagrangiana. O parâmetro  $a_1$  está também incluso na parte quadrática fermiônica da Lagrangiana (10.12), bem como nas transformações de supersimetria (10.11). Vemos claramente que as contribuições envolvendo  $a_1$  cedem a uma estrutura relativística quando  $a_2 \rightarrow 0$ . Nesse sentido, o comportamento oscilatório aparecendo na função de correlação (9.20) para  $\alpha \neq 0$  pode ser pensado como devido a uma competição entre escalamentos de Lorentz ( $z = 1$ ) e Lifshitz ( $z = 2$ ).

# Considerações Finais

Concluimos este trabalho com um breve resumo dos principais resultados, juntamente com alguns comentários adicionais. Os principais resultados se referem a uma análise extensiva do comportamento crítico de spins esféricos quânticos supersimétricos para o caso de interações de curto alcance. Começando com o caso de temperatura zero, descobrimos que o sistema passa por uma transição de fase quântica (contínua) sem quebra espontânea da supersimetria. Em particular, para dimensões  $2 < d < 4$ , o comportamento crítico não é trivial no sentido de que não é caracterizado por expoentes críticos de campo médio. Acima da dimensão crítica superior, recuperamos os resultados de campo médio apresentados em [42].

No caso de temperatura finita, a supersimetria é sempre quebrada por efeitos térmicos. Isso permite uma solução de ponto de sela adicional com  $\mu \neq 0$ , que não está disponível no caso de temperatura zero. Em nossa análise, mantivemos o parâmetro  $\mu$  fixado em um valor arbitrário compatível com as condições do ponto de sela. Consequentemente,  $\mu$  pode ser visto como definindo uma família de modelos que, curiosamente, se divide em duas classes de universalidade à medida que consideramos as soluções com  $\mu = 0$  e  $\mu \neq 0$ . Para  $\mu \neq 0$ , o modelo exibe um comportamento crítico não trivial para dimensões  $2 < d < 4$ , enquanto que para  $\mu = 0$ , o comportamento crítico não-trivial ocorre para  $4 < d < 6$ .

Dentre as grandezas estudadas, é interessante aprofundar a discussão sobre o condensado fermiônico.  $\langle \sum_{\mathbf{r}} \bar{\psi}_{\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{r}} \rangle$ , uma vez que exibe uma dependência incomum da temperatura. Em princípio, esperaríamos que o valor do condensado fosse anulado à medida que aumentamos a temperatura. No entanto, nossos resultados mostram que o condensado fermiônico realmente aumenta com  $T$ . Isso é uma consequência da estrutura de vínculos do modelo. Para apreciar melhor este ponto, podemos calcular o condensado fermiônico a partir da identidade termodinâmica  $\frac{\partial f}{\partial H_F}$ , sem levar em conta que todos os parâmetros são amarrados pelas equações do ponto de sela (8.1) e (8.2). Ao fazer isso, estamos na verdade ignorando os vínculos do modelo. Nesse caso, é fácil ver que o condensado desaparece em temperaturas muito altas. Agora, levando em consideração as equações de vínculo, isso afeta a dependência da temperatura do condensado fermiônico, produzindo o comportamento incomum mostrado em (8.21).

A dependência do condensado fermiônico em  $T$  não é muito sensível à forma específica da interação no modelo. Para entender isso, notamos primeiro que para  $T < T_c$ , a equação (8.10) implica que toda a dependência da temperatura vem do fator  $\beta$  na frente da integral, uma vez que  $\gamma$  está fixado em  $\gamma_c$ , independentemente da forma da interação. Além disso, para  $T > T_c$  a análise numérica mostra que o comportamento do condensado é ditado essencialmente pelo limite de altas temperaturas, onde também a interação tem

pouca influência. Portanto, a dependência da temperatura está mais intimamente relacionada com a estrutura de vínculos do modelo, e isso é amparado pelo fato de que o mesmo comportamento é observado no modelo com interações de campo médio [42].

Embora a investigação da função de correlação unidimensional mostra que o modelo não tem interações competitivas, também indica que com uma deformação adequada da teoria podemos, em princípio, gerar tais interações competitivas. Naturalmente, é necessário tomar certo cuidado para deformar a teoria de uma forma compatível com a supersimetria. Embora isso seja automático no modelo correspondente de teoria de campos, é menos óbvio em termos de spins esféricos quânticos. No entanto, constitui um efeito interessante a ser perseguido em investigações futuras, principalmente devido ao potencial de produzir ricos diagramas de fases com fases moduladas, o que pode ser útil na aplicabilidade do modelo.

Finalmente, a conexão com o modelo sigma não-linear  $O(N)$  supersimétrico se estende a uma série de equivalências entre as variações dos modelos esféricos no limite de grandes valores de  $N$  dos modelos de teoria de campos com interações de curto alcance.

Os principais esforços daqui em diante estão concentrados na tentativa de estabelecer uma conexão entre a versão do modelo esférico quântico proposto em [3] (que é diferente dos modelos discutidos neste trabalho) e o correspondente modelo sigma não-linear, que é esperado ser governado por um termo cinético do tipo Schrödinger. Além disso, pretendemos encontrar aplicações associadas ao modelo esférico supersimétrico em sistemas físicos concretos. Dada a rica fenomenologia envolvida, esperamos que isso possa ser alcançado em várias situações.