



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

ANDRÉ DOS REIS BOMBARDI

LÍQUIDOS NEMÁTICOS E RELATIVIDADE GERAL

Londrina
2010

ANDRÉ DOS REIS BOMBARDI

LÍQUIDOS NEMÁTICOS E RELATIVIDADE GERAL

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-graduação, em Física, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre

Orientador: Prof. Dr. Manuel Simões Filho

Londrina
2010

ANDRÉ DOS REIS BOMBARDI

LÍQUIDOS NEMÁTICOS E RELATIVIDADE GERAL

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-graduação, em Física, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Manuel Simões Filho
UEL – Londrina – PR

Prof. Dr. Marcio Pazetti
UNIVASF – Juazeiro – BA

Prof. Dr. Thiago dos Santos Pereira
UEL – Londrina – PR

Londrina, 27 de setembro de 2010.

Aos meus pais, meus irmãos e a Franciele, que tornaram possível a realização deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Manuel Simões Filho, pela gigantesca paciência e a valiosa orientação;

A minha família, sem a qual a realização deste trabalho não seria possível;

A minha namorada, Franciele, pela inestimável ajuda na execução deste trabalho;

Ao meu amigo Rafael, que doou um pouco do seu precioso tempo para que, finalmente, este trabalho fosse concluído;

Aos amigos do grupo de fluidos complexos, que contribuíram em muitos aspectos na realização deste trabalho;

Aos amigos do departamento de Física, que tornaram esta tarefa mais agradável;

A Capes pelas bolsas recebidas durante a realização deste trabalho;

A todos os que colaboraram para que este trabalho fosse realizado.

“Ainda que chegues a viver 100
anos, nunca deixes de aprender.”

(PROVÉRPIO PERSA)

BOMBARDI, André R. **Líquidos nemáticos e relatividade geral**. 2010. 97f. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Estadual de Londrina.

RESUMO

Em meados da década de 80, foi apresentada uma proposta onde as propriedades reológicas de um cristal líquido poderiam ser obtidas através de uma transformação afim, na qual o potencial de interação de uma molécula esférica é deformado para assumir a forma elipsoidal do potencial de interação das moléculas de um cristal líquido qualquer. Quando este procedimento é feito ponto a ponto, as derivadas usuais não se transformam como um vetor covariante usual, e como consequência, devem ser substituídas por derivadas covariantes. Matematicamente, a aproximação de conexão afim para um cristal líquido Nemático é semelhante à teoria do campo gravitacional descrita pela teoria da relatividade geral, semelhança a qual nos fornece embasamento suficiente para estudar a correspondência entre as duas teorias. O primeiro resultado apresentado é a demonstração que a aproximação de conexão afim revela que a descrição matemática das texturas nemáticas tem necessariamente uma superfície com curvatura intrínseca associada. Como consequência, algumas texturas de cristais líquidos nemáticos podem ser descritas através de uma equação semelhante à de Einstein, da Relatividade Geral, com o tensor de stress elástico tomando o lugar do tensor energia momento. O limite de curvatura nula desta equação é a generalização da equação de Poisson que descreve as texturas geradas pelos defeitos dos cristais líquidos, com a vantagem desta equação ser dependente da temperatura.

Palavras-chave: Geometria diferencial. Relatividade geral. Cristais líquidos nemáticos. Hipótese de hess.

BOMBARDI, André R. **Nematic liquids and general relativity**. 2010. 97f. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Estadual de Londrina.

ABSTRACT

In the mean 80's, it was proposed that the rheologic properties of liquid crystal could be obtained through affine transformation, in which the interaction potential of a spheric molecule is deformed to assume the ellipsoidal shape of potential liquid crystal's molecular interaction. When this procedure is done point to point, the usual derivatives do not get transformed into usual covariant vectors, and consequently, they should be substituted by covariant derivatives. Mathematically, the connection approach to Nematic liquid crystal resembles the gravitational field described by Relativity Theory, which provides sufficient data to study the correspondences between these two theories. The first result presented is the demonstration that the approach of the affine connection reveals that the mathematical description of Nematic textures has necessarily an intrinsic curved surface. Consequently, some textures of Nematic liquid crystals may be described through a similar equation to Einstein's General Relativity, with the elastic stress tensor taking place of the energy-momentum tensor. The null curvature limit of this equation is the generalization of Poisson's equation, which describes the generated textures by liquid crystal's defects, with the advantage, in this case, of being temperature dependent.

Key-words: Differential geometry. General relativity. Nematic liquid crystals. Hess hypothesis.

LISTA DE FIGURA

Figura 2.1 – Curva plana definida por um vetor	14
Figura 2.2 – Vetor tangente de uma curva	15
Figura 2.3 – Curvatura total de uma curva plana	17
Figura 2.4 – Imagem Circular	18
Figura 3.1 – Componentes covariantes e contravariantes de um vetor	46
Figura 4.1 – Molécula do PAA	62
Figura 4.2 – Molécula do MBBA.....	63
Figura 4.3 – Organização das moléculas calamíticas de cristais líquidos.....	63
Figura 4.4 – Organização das moléculas discóticas de cristais líquidos.....	63
Figura 4.5 – Distorções elásticas de um cristal líquido Nemático	72
Figura 4.6 – Textura do tipo Schlieren de um cristal líquido Nemático	75
Figura 4.7 – Arranjo geométrico das moléculas na região de um defeito.....	75
Figura 4.8 – Processo geométrico que gera uma disclinação.....	78
Figura 4.9 – Forma de uma disclinação de força $m = \pm 1/2$	77
Figura 4.10 – Forma de uma disclinação do tipo Twist de força $m = 1/2$	78

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
2 FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA DIFERENCIAL	13
2.1 CURVAS PLANAS REGULARES	13
2.1.1 Linhas e Vetores Tangentes a uma Curva Plana	14
2.1.2 Comprimento de uma Curva Plana	16
2.1.3 Curvatura de Curvas Planas	17
2.1.4 Equações de Frenet para Curvas Planas	20
2.2 CURVAS REGULARES NO ESPAÇO	21
2.2.1 Comprimento de uma Curva Espacial	22
2.2.2 Curvatura de uma Curva Espacial	22
2.2.3 Triedro Móvel de uma Curva	23
2.2.4 Torção de uma Curva Espacial	24
2.2.5 As Equações de Frenet para curvas Espaciais	25
2.3 SUPERFÍCIES REGULARES NO ESPAÇO EUCLIDIANO	25
2.3.1 Plano Tangente e Vetor Normal	26
2.3.2 Comprimento das Curvas e a Primeira Forma Fundamental	26
2.3.3 Ângulo e Área em uma Superfície	27
2.3.4 Segunda Forma Fundamental	29
2.3.5 Parabolóide Osculador	30
2.3.6 Curvatura	31
2.3.7 Terceira Forma Fundamental	35
2.3.8 As Equações Diferenciais da Teoria das Superfícies	37
3 TEORIA DA RELATIVIDADE GERAL	42
3.1 RELATIVIDADE RESTRITA	42
3.2 PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA	44
3.3 TENSORES E COVARIANCIA GERAL	45
3.4 DERIVADA COVARIANTE	48
3.5 TENSOR ENERGIA-MOMENTO	51
3.6 TENSOR DE CURVATURA	57
3.7 EQUAÇÃO DE EINSTEIN	59

4 FÍSICA DE CRISTAIS LÍQUIDOS E ELASTICIDADE	62
4.1 CRISTAIS LÍQUIDOS NEMÁTICOS	62
4.2 PARÂMETRO DE ORDEM	65
4.3 ELASTICIDADE.....	66
4.3.1 Tensor de Stress	69
4.1 TEXTURAS	72
5 CRISTAIS LÍQUIDOS E RELATIVIDADE	74
5.1 HIPÓTESE DE HESS E O TENSOR MÉTRICO	80
5.2 EQUAÇÃO DE EINSTEIN PARA N.L.C.	81
6 CONCLUSÕES	94
REFERÊNCIAS	96

1 INTRODUÇÃO

O estudo da Física de altas energias e campos nos leva a crer que o universo, em seu início, passou por uma série de transições de fase. Estas transições de fase são a causa do surgimento de defeitos topológicos, como as cordas cósmicas, monopolos e paredes. Qualquer tentativa de comprovar experimentalmente estas idéias esbarra em certas limitações: a escala de energia é extremamente alta para experimentos em aceleradores de partículas. A única situação onde energias desta magnitude poderiam ser encontradas ocorreu na primeira fração de segundo após o Big Bang, e não existe a possibilidade de se ter um acesso direto a essas informações. Uma tentativa de se resolver este problema é a procura de processos análogos em outros sistemas. Na última década, vem se tornando comum o estudo de amostras de matéria condensada para se verificar experimentalmente estas propriedades cosmológicas inacessíveis a medidas diretas¹⁻⁷. Os defeitos topológicos do universo são semelhantes a defeitos encontrados em sistemas de matéria condensada, como espinhos, vórtices ou tubos de fluxo e sólitons.

Vários estudos relacionando cosmologia e matéria condensada estão sendo feitos, principalmente experimentos envolvendo Hélio Superfluido, Supercondutores e Cristais Líquidos¹⁻¹². A grande maioria destes trabalhos é voltada para a relação entre os defeitos topológicos das duas teorias.

O objetivo deste trabalho é propor que algumas texturas de Cristais Líquidos Nemáticos com a configuração do diretor não alinhada, incluindo aquelas que contém singularidades, disclinações e também defeitos topológicos, podem ser descritas por uma equação equivalente a parte espacial da equação de Einstein da Relatividade Geral.

Formalmente, enquanto na Relatividade Geral a fonte do campo gravitacional é descrito pelo tensor energia-momento, a fonte da curvatura observada no campo diretor do Cristal Líquido é o tensor de Stress elástico do meio Nemático.

Como uma aplicação desta aproximação, será apresentado um estudo do limite de pequena curvatura. Exatamente como ocorre na Relatividade Geral, onde a gravitação Newtoniana pode ser obtida como o limite não-relativístico da equação de Einstein, a equação proposta tem como limite de pequena curvatura a equação de Poisson, que descreve a configuração do diretor em uma interação entre os defeitos nemáticos. A vantagem da equação de Poisson obtida através deste método é sua dependência da temperatura.

Nos capítulos 2 e 3 serão apresentados os fundamentos matemáticos em que se baseiam as idéias deste trabalho. No capítulo 2 será apresentada a Geometria Diferencial,

pois a Relatividade Geral é uma teoria puramente geométrica, na qual a dinâmica da matéria é totalmente descrita pela geometria do espaço, e pela analogia com esta teoria, seus conceitos serão largamente utilizados no estudo da Física dos Cristais Líquidos.

No Capítulo 3 serão apresentados os fundamentos da Relatividade Geral relevantes ao trabalho, com ênfase no tratamento do tensor energia-momento e o tratamento do caso especial do limite de pequena curvatura.

No Capítulo 4 serão tratados todos os fundamentos da Física de Cristais Líquidos necessários, com atenção especial aos Cristais Líquidos Nemáticos e sua elasticidade.

Com todos os pré-requisitos expostos, o capítulo 5 apresentará a determinação do tensor métrico de um Cristal Líquido Nemático e a correspondente equação de Einstein para o estudo de texturas e a aproximação de pequena curvatura, que nos leva a equação de Poisson dependente da temperatura.

E Finalmente no capítulo 6 serão apresentadas as conclusões do trabalho.

2 FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA DIFERENCIAL^{13,14}

Em meados da década de 80, Hess e seus colaboradores apresentaram uma proposta onde as propriedades reológicas de um cristal líquido poderiam ser obtidas através uma transformação afim, na qual o potencial de interação de uma molécula esférica é deformado para assumir a forma elipsoidal do potencial de interação das moléculas de um Cristal Líquido qualquer.¹⁵⁻¹⁹ Recentemente, Simões e colaboradores, propuseram um modelo geométrico que generaliza a idéia anterior, de maneira que a transformação de conexão afim se torne dependente da posição e permita a modelagem de configurações não alinhadas de Cristais Líquidos Nemáticos.^{20,21}

Uma consequência destas idéias é a semelhança formal da abordagem da Física de Cristais Líquidos pela Geometria Diferencial com a Relatividade Geral, a qual é o maior exemplo do contato entre Geometria e Física e que possui diversos resultados bem estabelecidos, servindo como guia para nossa proposta de estudos.

A Geometria diferencial não é um assunto cotidiano em relação à Física dos Cristais Líquidos, e por este motivo este capítulo é dedicado a apresentação de alguns conceitos mais importantes deste assunto para o entendimento do trabalho.

2.1 CURVAS PLANAS REGULARES

As curvas planas são os objetos mais simples de se lidar na geometria diferencial e seu estudo apresenta alguns desenvolvimentos que prevalecerão até o estudo das superfícies, onde as circunstâncias são mais complicadas.

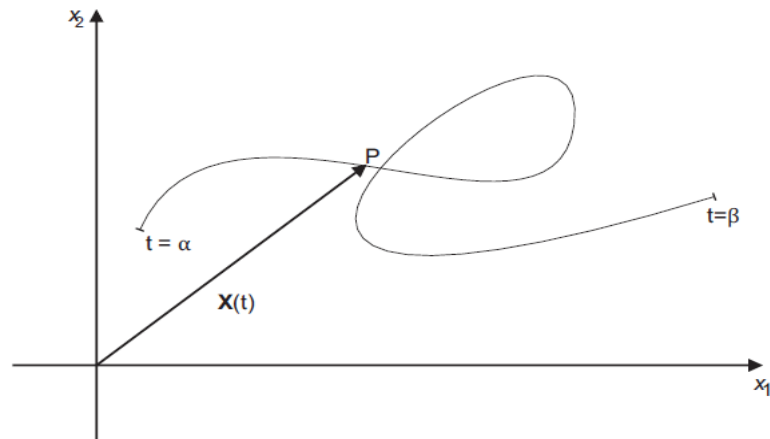
Uma curva regular é definida pela localização de pontos indicados por vetor posição $\mathbf{X}(t)$ em um plano x_1, x_2 :

$$\mathbf{X}(t) = (x_1(t), x_2(t)), \quad \alpha \leq t \leq \beta \quad e \quad (2.1)$$

$$\frac{dx_i(t)}{dt} \neq 0 \quad \text{para algum } i.$$

O vetor posição $\mathbf{X}(t)$, que descreve a curva plana, deve ter a segunda derivada contínua no intervalo dado e sua derivada primeira deve ser sempre diferente de zero.

Figura 2.1 – Curva plana definida por um vetor.



A condição relacionada à primeira derivada é imposta para garantir que o mapeamento do intervalo imposto no plano seja localmente topológico. Por mapeamento topológico, entendemos como a correspondência de um para um (um único ponto para cada valor de t) que é contínua nas duas direções.

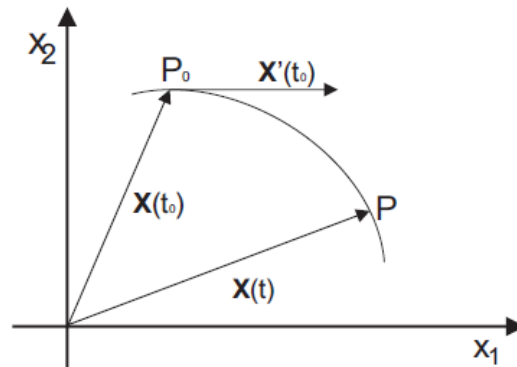
A curva ilustrada na Fig. 2.1 não é uma imagem topológica no intervalo adotado, pois tem um ponto duplo, o que descaracteriza a correspondência de um para um. Entretanto, localmente (em uma vizinhança suficientemente pequena de um ponto) o mapeamento é de um para um se a curva for regular.

2.1.1 Linhas e Vetores Tangentes a uma Curva Plana

Uma linha tangente em um ponto P_0 de uma curva regular é definida como uma linha reta que liga o ponto P_0 a outro ponto P próximo a ele, de maneira que P tenda a P_0 quando t tende a t_0 . Esta linha reta une os pontos indicados pelos vetores $X(t_0)$ e $X(t)$.

No limite $t \rightarrow t_0$, o quociente $[X(t_0) - X(t)]/(t - t_0)$, com $t \neq t_0$, é um vetor que passa pela origem, paralelo a reta que une P e P_0 (Fig. 2.2). Assumimos que a curva $X(t)$ é regular, então sua derivada $X'(t)$ existe e é dada pela relação $\lim_{t \rightarrow t_0} [X(t_0) - X(t)]/(t - t_0)$, ou seja, a derivada $X'(t)$ é paralela a tangente definida acima.

Figura 2.2 – Vetor tangente de uma curva.



A linha tangente a um ponto P_0 agora é definida como a linha reta que passa por P_0 paralela a direção da derivada $X'(t)$ de $X(t)$. Como para curvas regulares $X'(t) \neq \mathbf{0}$, temos uma reta unicamente determinada, a qual é a principal razão da imposição da condição $X'(t) \neq \mathbf{0}$.

A linha tangente é uma curva regular dada pela equação vetorial:

$$\mathbf{T}(r) = \mathbf{X}(t_0) + r\mathbf{X}'(t_0), \quad -\infty < r < \infty \quad (2.2)$$

Na geometria diferencial, é vantajoso definir vetores tangentes localizados sobre um ponto na curva. A derivada $X'(t)$ poderia ser definida como o vetor tangente, mas esta definição leva a desvantagem de todos os vetores tangentes partirem da origem das coordenadas ao invés de partirem de um ponto sobre a curva. Uma maneira razoável de se lidar com este problema é usar uma possibilidade proporcionada pela geometria euclidiana, que é transportar um vetor paralelo a ele mesmo.

O vetor tangente a um ponto $X(t_0)$ de uma curva é definido como o vetor obtido pelo transporte paralelo de $X'(t_0)$ até este ponto. Este vetor continuará sendo chamado de $X'(t_0)$. Também é possível obter este resultado transladando a origem do sistema coordenado a um ponto da curva, e então obter a derivada $X'(t_0)$. Os dois procedimentos levam ao mesmo vetor tangente.

O vetor tangente também define a orientação da curva. A direção do vetor tangente fixa a direção da curva quando o valor do parâmetro t aumenta.

2.1.2 Comprimento de uma Curva Plana

Para definirmos o comprimento de uma curva, necessitamos de uma relação mais formal para o vetor tangente:

$$\mathbf{X}'(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{X}(t) = \frac{d}{dt} (x_1(t), x_2(t)) = \left(\frac{d}{dt} x_1(t), \frac{d}{dt} x_2(t) \right) = (x'_1(t), x'_2(t)) \quad (2.3)$$

Assim, temos que o comprimento de uma curva plana é definido pela integral:

$$L_{\alpha}^{\beta} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\mathbf{X}'(t) \cdot \mathbf{X}'(t)} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2} dt \quad (2.4)$$

Partindo dessa definição, é interessante considerar o comprimento de um arco qualquer $s(t)$ de um ponto fixo a um ponto variável:

$$s(t) = L_{\alpha}^t = \int_{\alpha}^t \sqrt{\mathbf{X}'(\tau) \cdot \mathbf{X}'(\tau)} d\tau \quad (2.5)$$

Essa integral, que define um comprimento de arco, nos leva ao seguinte resultado:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{\mathbf{X}}^2(t)} \quad (2.6)$$

O comprimento de arco s de uma curva regular pode sempre ser introduzido como um parâmetro regular, e se s é introduzido como um parâmetro a seguinte relação é verdadeira:

$$s = \int_{\alpha}^s \sqrt{\mathbf{X}'(\tau)^2} d\tau \quad (2.7)$$

Que tem como consequência:

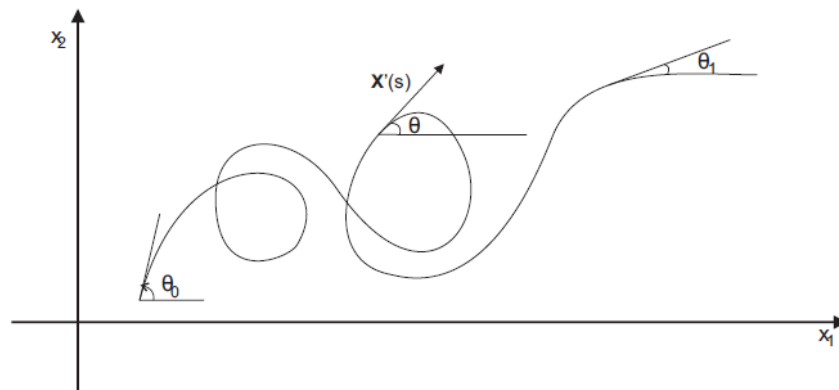
$$|\dot{\mathbf{X}}(s)| = \frac{ds}{ds} = 1 \quad (2.8)$$

Essa equação nos mostra um resultado importante: o vetor tangente é unitário quando o comprimento de arco s é escolhido como o parâmetro da curva. Em outras palavras, quando $|\dot{\mathbf{X}}(t)| = 1$, o parâmetro t descreve o comprimento de arco com uma constante aditiva, essa afirmação segue da equação (2.5).

2.1.3 Curvatura de Curvas Planas

Na geometria diferencial, a noção de curvatura das curvas e superfícies é fundamental para o desenvolvimento da teoria. Para começar a discussão sobre curvatura vamos introduzir o conceito de curvatura total κ_T de uma curva plana como a da Fig. 2.3.

Figura 2.3 – Curvatura total de uma curva plana.



A inclinação da tangente da curva com o eixo x_1 , descrita por $\theta(s)$, é definida de maneira que a função seja contínua. Assim, a curvatura total é definida como a diferença entre os valores de θ nos extremos da curva.

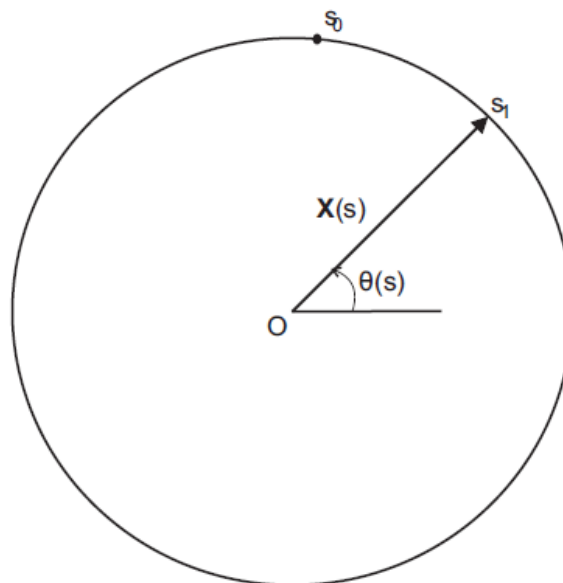
$$\kappa_T = \theta_1 - \theta_0 \quad (2.9)$$

Esta quantidade mede de uma maneira razoável o ângulo total percorrido pela tangente. A definição (2.9) requer um pouco mais de atenção. A direção da tangente é

dada pelo vetor $\dot{\mathbf{X}}(s)$ em todos os pontos, mas o ângulo θ em qualquer ponto é determinado apenas por múltiplos inteiros de 2π , o que torna definir a função $\theta(s)$ como contínua um problema. Podemos considerar a função $\theta(s)$ como contínua, sem dificuldade, considerando a vizinhança de qualquer ponto no intervalo $s_0 \leq s \leq s_1$ desde que $\dot{\mathbf{X}}(s)$ seja um vetor unitário contínuo. Assim, $\theta(s)$ pode ser definido com o auxílio tanto de $\cos\theta(s) = \dot{x}_1(s)$, quanto de $\sin\theta(s) = \dot{x}_2(s)$.

Existe uma maneira útil de interpretar (2.9) que permite a generalização para curvas no espaço e até mesmo para superfícies. Considere que o vetor tangente unitário $\dot{\mathbf{X}}(s)$ é carregado para um ponto fixo, que denominaremos de O, e o ponto final do vetor $\dot{\mathbf{X}}(s)$ traça um arco de um círculo unitário centrado em O (Fig. 2.4), quando s percorre o intervalo $s_0 \leq s \leq s_1$. O resultado desse mapeamento da curva no círculo unitário é chamado de imagem circular da curva.

Figura 2.4 – Imagem Circular.



A curvatura total κ_T é definida como comprimento do arco percorrido no círculo, onde o comprimento de arco da imagem circular deve ser utilizada com sinal apropriado (definido pelo sinal de $\dot{\theta}(s)$) e as porções do círculo podem ser percorridas mais de uma vez.

É natural definir também a curvatura média sobre o arco como sendo $\kappa_T/(s_1 - s_0)$ e através desta relação chegamos a definição de curvatura em um ponto:

$$\kappa(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\theta(s+\Delta s) - \theta(s)}{\Delta s} = \dot{\theta}(s) \quad (2.10)$$

Essa equação nos mostra que $\dot{\theta}(s)$ é contínua se $\ddot{\mathbf{X}}(s)$ é contínua, o que pode ser verificado através da derivada de $\cos\theta(s) = \dot{x}_1(s)$, que resulta em $\dot{\theta}\sin\theta(s) = -\ddot{x}_1(s)$, ou no caso de $\theta = 0$, $\dot{\theta}\cos\theta(s) = \ddot{x}_1(s)$.

Com essas informações agora podemos calcular a curvatura κ de uma curva dada por um vetor $\mathbf{X}(s)$. Como o vetor tangente $\dot{\mathbf{X}}(s)$ é unitário, podemos escrevê-lo, com ajuda de um sistema de coordenadas ortogonal $\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, na seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{X}}(s) = \cos\theta(s)\mathbf{u}_1 + \sin\theta(s)\mathbf{u}_2 \quad (2.11)$$

Diferenciando (2.11) obtemos

$$\ddot{\mathbf{X}}(s) = (-\sin\theta(s)\mathbf{u}_1 + \cos\theta(s)\mathbf{u}_2) \frac{d\theta}{ds} \quad (2.12)$$

ou, com (2.10):

$$\ddot{\mathbf{X}}(s) = (-\sin\theta(s)\mathbf{u}_1 + \cos\theta(s)\mathbf{u}_2)\kappa. \quad (2.13)$$

O vetor do lado direito dessa equação deve ser unitário, assim

$$|\kappa| = \sqrt{\ddot{\mathbf{X}} \cdot \ddot{\mathbf{X}}} = |\ddot{\mathbf{X}}|. \quad (2.14)$$

Em outras palavras o valor numérico de $|\kappa|$ da curvatura κ é o comprimento do vetor $\ddot{\mathbf{X}}(s)$.

Para que o conceito de curvatura fique mais claro, é conveniente introduzir a cada ponto da curva um par de vetores unitários ortogonais, \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 . O vetor \mathbf{v}_1 é definido como o vetor tangente da curva, e é o mesmo que $\dot{\mathbf{X}}(s)$, ou seja,

$$\mathbf{v}_1(s) = \dot{\mathbf{X}}(s) \quad (2.15)$$

Neste caso, o vetor $\mathbf{v}_2(s)$ é definido como um vetor normal ao vetor tangente $\mathbf{v}_1(s)$. Esse sistema coordenado é definido partindo-se do princípio que os vetores \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 , nesta ordem, tenham a mesma orientação que os eixos coordenados. Nestas circunstâncias, a equação seguinte é verdadeira:

$$\kappa \mathbf{v}_2 = \ddot{\mathbf{X}} \quad (2.16)$$

O lado da linha tangente para a qual $\ddot{\mathbf{X}}$ aponta é definido como o lado positivo, o que tem como consequência:

- se $\kappa > 0$, \mathbf{v}_2 aponta para o lado positivo;
- se $\kappa < 0$, \mathbf{v}_2 aponta para o lado negativo.

2.1.4 Equações de Frenet para Curvas Planas

Com o comprimento de arco s de uma curva regular escolhido como parâmetro, os vetores, tangente $\mathbf{v}_1(s)$ e normal $\mathbf{v}_2(s)$, foram definidos na seção anterior. Conseqüentemente qualquer vetor pode ser descrito como uma combinação linear de \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 . Em particular, as derivadas $\dot{\mathbf{v}}_1$ e $\dot{\mathbf{v}}_2$ também podem ser expressas dessa maneira. Então, as equações a seguir devem ser verdadeiras em termos de funções escalares apropriadas, $\alpha_i(s)$ e $\beta_i(s)$:

$$\dot{\mathbf{v}}_1 = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 \quad (2.17)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_2 = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2 \quad (2.18)$$

Com as relações $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = 1$ e $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$, e diferenciando as relações (2.17) e (2.18) em relação à variável s temos:

$$\dot{\mathbf{v}}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \cdot \dot{\mathbf{v}}_2 = 0 \quad (2.19)$$

$$\mathbf{v}_1 \cdot \dot{\mathbf{v}}_1 = \dot{\mathbf{v}}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = 0 \quad (2.20)$$

Após alguma álgebra simples encontramos as equações

$$\dot{\mathbf{v}}_1 = \alpha_2 \mathbf{v}_2 \quad (2.21)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_2 = -\alpha_2 \mathbf{v}_1 \quad (2.22)$$

É conhecido, de (2.15) e (2.16), que $\dot{\mathbf{v}}_1 = \kappa \mathbf{v}_2$, então

$$\dot{\mathbf{v}}_1 = \kappa \mathbf{v}_2 \quad (2.23)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_2 = -\kappa \mathbf{v}_1 \quad (2.24)$$

Essas equações diferenciais são conhecidas como equações de Frenet para o caso especial de curvas planas e formam um sistema de equações diferenciais lineares homogêneas para determinação dos vetores $\mathbf{v}_1(s)$ e $\mathbf{v}_2(s)$. Como $\mathbf{v}_1(s) = \dot{\mathbf{X}}(s)$ é determinado, podemos encontrar $\mathbf{X}(s)$ por integração.

2.2 CURVAS REGULARES NO ESPAÇO

Uma curva regular espacial é definida localmente pelo vetor:

$$\mathbf{X}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)), \quad \alpha \leq t \leq \beta \quad \text{e} \quad (2.25)$$

$$\frac{dx_i(t)}{dt} \neq 0 \quad \text{para algum } i.$$

Onde as funções $x_i(t)$ possuem segundas e terceiras derivadas contínuas e diferentes de zero.

Como nas curvas planas, o vetor $\mathbf{X}'(t)$ é por definição o vetor tangente da curva e encontra-se no ponto de tangência. Este vetor tangente é invariante em relação a

transformações de coordenadas, mas não em relação a transformações de parâmetro. Entretanto, a noção de linha tangente, a linha que passa pelo ponto $\mathbf{X}(t_0)$, que tem a sua direção determinada por $\mathbf{X}'(t_0)$ é invariante em relação a transformações de parâmetro.

Um caso especial interessante surge quando o vetor tangente é constante, o que determina que a curva em questão seja uma linha reta, pois em coordenadas cartesianas $x_i(t)$ é linear em t .

2.2.1 Comprimento de uma Curva Espacial

O comprimento $s(t)$ de um arco de uma curva de um ponto inicial t_0 até um ponto variável t é definido por:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{X'(\sigma) \cdot X'(\sigma)} d\sigma = \int_{t_0}^t \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2} d\sigma \quad (2.26)$$

Como nas curvas planas o comprimento de arco s sempre pode ser escolhido como parâmetro desde que $ds/dt \neq 0$: a regularidade exige que $\mathbf{X}'(t) \neq \mathbf{0}$. No caso do comprimento de arco escolhido como parâmetro, $|\dot{\mathbf{X}}(s)| = 1$. A função $s(t)$ é invariante em relação a transformações de coordenada e também em relação a transformações de parâmetro.

2.2.2 Curvatura de uma Curva Espacial

A curvatura total κ_T de uma curva espacial não pode ser definida, como foi feito para as curvas planas, introduzindo o ângulo do vetor tangente com uma direção fixa, pois a curvatura total $\kappa_T = \kappa_T(C_1 + C_2)$ de uma curva C composta de dois arcos C_1 e C_2 acoplados geralmente não é igual a soma $\kappa_T(C_1) + \kappa_T(C_2)$ das curvaturas totais dos dois arcos separados.

Entretanto, o procedimento de introduzir a imagem circular de uma curva plana pode ser aplicado de uma forma análoga as curvas espaciais, mas agora a imagem esférica da curva espacial será usada. Desta maneira os vetores tangentes da curva serão

transportados para o centro de uma esfera unitária. O comprimento da curva traçada por $\dot{\mathbf{X}}(s)$ na esfera com a variação de s sobre um arco de $\mathbf{X}(s)$ é definido como a curvatura total do arco. Esse método também é razoável para medir a mudança total na direção da tangente.

Como o comprimento de uma curva qualquer é definido por (2.26) segue que o comprimento de uma curva dada por $\dot{\mathbf{X}}(s)$ é encontrada através da equação:

$$\kappa_T = \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{\ddot{\mathbf{X}} \cdot \ddot{\mathbf{X}}} ds \quad (2.27)$$

E a partir daí definimos a curvatura $\kappa(s)$ em um ponto

$$\kappa(s) = \sqrt{\ddot{\mathbf{X}} \cdot \ddot{\mathbf{X}}} = |\ddot{\mathbf{X}}| \quad (2.28)$$

2.2.3 Triedro Móvel de uma Curva

Como foi feito para as curvas planas, é conveniente introduzir um sistema de coordenadas especial de vetores unitários ortogonais linearmente independentes em cada ponto da curva, denotados como $\mathbf{v}_1(s)$, $\mathbf{v}_2(s)$ e $\mathbf{v}_3(s)$, com o comprimento de arco s como parâmetro. O primeiro desses vetores é identificado como vetor tangente unitário:

$$\mathbf{v}_1(s) = \dot{\mathbf{X}}(s) \quad (2.29)$$

Na teoria das curvas planas o vetor normal \mathbf{v}_2 foi definido com a única exigência de formar, com o vetor \mathbf{v}_1 , um sistema positivamente orientado. Isso não pode ser feito em três dimensões. Assim, um vetor normal especial, chamado principal normal $\mathbf{v}_2(s)$, é definido de maneira que seja ortogonal ao vetor tangente. Como $\mathbf{v}_1 \cdot \dot{\mathbf{v}}_1 = 0$, temos que $\dot{\mathbf{v}}_1 = \ddot{\mathbf{X}}$ é um vetor ortogonal ao vetor tangente. No caso em que $\ddot{\mathbf{X}} \neq 0$, o vetor unitário nesta direção é definido como principal normal e denotado por $\mathbf{v}_2(s)$. Entretanto, como se pode ver na equação (2.28) este processo falha se a curvatura κ tem o valor zero, por isso, assumimos que κ é maior que zero e neste caso o vetor principal normal é definido por

$$\mathbf{v}_2 = \kappa^{-1} \dot{\mathbf{v}}_1 = \kappa^{-1} \ddot{\mathbf{X}} \quad (2.30)$$

O plano determinado por \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 é conhecido como plano osculador.

A relação

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \quad (2.31)$$

Define o terceiro vetor unitário \mathbf{v}_3 , chamado de binormal, que é ortogonal tanto a \mathbf{v}_1 quanto a \mathbf{v}_2 . Os três vetores unitários \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_3 formam um sistema necessariamente destrogiro que é conhecido como triedro móvel de uma curva.

2.2.4 Torção de uma Curva Espacial

A torção τ de uma curva espacial é definida em relação ao vetor binormal \mathbf{v}_3 através de um processo análogo a maneira que a curvatura κ é definida em função do vetor tangente \mathbf{v}_1 . A torção é definida de maneira que ela meça a taxa que o plano osculador gira, enquanto κ é definido para medir como plano normal da curva gira. O vetor unitário \mathbf{v}_3 é transportado para o centro de uma esfera unitária e o comprimento da curva traçada por este vetor com a variação de s é tomado como medida da torção total do arco dado. A torção total τ_T é dada por:

$$\tau_T = \int_{s_0}^{s_1} \sqrt{\dot{\mathbf{v}}_3 \cdot \dot{\mathbf{v}}_3} ds \quad (2.32)$$

E o valor numérico da torção em um ponto s é definido pela relação:

$$|\tau| = \sqrt{\dot{\mathbf{v}}_3^2} = |\dot{\mathbf{v}}_3| \quad (2.33)$$

Como $\dot{\mathbf{v}}_3$ é perpendicular tanto a \mathbf{v}_1 como a \mathbf{v}_3 , e considerando ainda $\dot{\mathbf{v}}_3 = \pm\tau\mathbf{v}_2$, a equação (2.33) e um pouco de álgebra, encontramos a definição completa da torção $\tau(s)$ para um ponto dado:

$$\dot{\mathbf{v}}_3 = -\tau\mathbf{v}_2 \quad (2.34)$$

O valor nulo para a variável torção indica que a curva em questão é uma curva plana.

2.2.5 As Equações de Frenet para Curvas Espaciais

Como os vetores \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 e \mathbf{v}_3 são mutuamente ortogonais e linearmente independentes, qualquer vetor pode ser expresso como a combinação linear desses três vetores. Em particular isto é verdade para as derivadas $\dot{\mathbf{v}}_1$, $\dot{\mathbf{v}}_2$ e $\dot{\mathbf{v}}_3$. As relações (2.30) e (2.34) já foram obtidas. A equação para $\dot{\mathbf{v}}_2$ é obtida, após alguns passos, de:

$$\dot{\mathbf{v}}_2 = \alpha \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_2 + \gamma \mathbf{v}_3 \quad (2.35)$$

Assim, com as equações de $\dot{\mathbf{v}}_1$, $\dot{\mathbf{v}}_2$ e $\dot{\mathbf{v}}_3$, temos as seguintes equações, conhecidas como as equações de Frenet:

$$\dot{\mathbf{v}}_1 = \kappa \mathbf{v}_2 \quad (2.36)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_2 = -\kappa \mathbf{v}_1 + \tau \mathbf{v}_3 \quad (2.37)$$

$$\dot{\mathbf{v}}_3 = -\tau \mathbf{v}_2 \quad (2.38)$$

Essas equações formam a base de toda a teoria das curvas espaciais (ao menos as curvas com $\kappa \neq 0$).

2.3 SUPERFÍCIES REGULARES NO ESPAÇO EUCLIDIANO

Exemplos familiares de superfícies são o plano, a superfície de uma esfera e a superfície de um cilindro. Estes são exemplos de superfícies vistas de maneira global. O nosso tratamento de superfícies parte de um pressuposto diferente, as superfícies serão definidas apenas em uma vizinhança de um de seus pontos, ou de maneira local. Partindo dessas considerações uma superfície regular é definida como se segue:

- Uma superfície é um grupo de pontos em um espaço euclidiano definido por um vetor $\mathbf{X} = \mathbf{X}(u, v)$ que depende de dois parâmetros reais, u e v :

$$\mathbf{X}(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v)) \quad (2.39)$$

Onde os $x_i(u, v)$ são os componentes do vetor.

➤ Os vetores $X_u = X_1 = \partial X / \partial u$ e $X_v = X_2 = \partial X / \partial v$ são chamados de “vetores coordenada”, e são linearmente independentes

$$\frac{\partial X}{\partial u} \times \frac{\partial X}{\partial v} = X_1 \times X_2 \neq 0 \quad (2.40)$$

2.3.1 Plano Tangente e Vetor Normal

Considere $u = u(t)$, $v = v(t)$ como funções de t , com derivadas contínuas até segunda ordem, de maneira que $u'(t)$ e $v'(t)$ não são iguais a zero simultaneamente. Essa curva, regular no plano parâmetro, tem uma imagem na superfície regular S , que é a curva $X[u(t), v(t)] = X(t)$ que também é regular desde que

$$X'(t) = X_u u' + X_v v' \quad (2.41)$$

O lado direito dessa equação não pode ser um vetor nulo, porque X_u e X_v são tangentes as curvas de parâmetro e linearmente independentes. Neste caso, $X'(t)$ está no plano determinado por X_u e X_v . Este plano é definido como plano tangente. A partir daí podemos verificar um importante teorema: todas as tangentes de todas as curvas regulares que passam por um ponto da superfície regular estão no plano tangente.

O vetor normal a superfície é definido pelo vetor unitário X_3 que é perpendicular ao plano tangente e é dado pela equação

$$X_3 = \frac{X_u \times X_v}{\sqrt{(X_u \times X_v)^2}} = \frac{X_1 \times X_2}{\sqrt{(X_1 \times X_2)^2}} \quad (2.42)$$

2.3.2 Comprimento das Curvas e a Primeira Forma Fundamental

Considere uma curva regular $X(t) = X[u(t), v(t)]$ sobre uma superfície, definimos seu comprimento $s(t)$ pela integral

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{(X'(\sigma))^2} d\sigma, \quad (2.43)$$

da mesma maneira como foi feito para as curvas no espaço. Como $X'(t) = X_u du/dt + X_v dv/dt$, temos:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = X' \cdot X' = E \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \quad (2.44)$$

A forma quadrática acima é conhecida como primeira forma fundamental. É conveniente escrever o elemento de linha usado para definir a primeira forma fundamental como:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = X' \cdot X' = \sum_{i,k} g_{ik}(u_1, u_2) u'_i u'_k \quad (2.45)$$

Com

$$g_{ik} = g_{ki} = X_i \cdot X_k \quad (2.46)$$

A primeira forma fundamental define uma métrica na superfície. As quantidades g_{ik} que foram introduzidas constituem uma notação comum da primeira forma fundamental, descrevendo tal métrica. Partindo de (2.44) encontramos uma forma muito útil, o discriminante da primeira forma fundamental:

$$(X_1 \times X_2)^2 = EG - F^2 \quad (2.47)$$

2.3.3 Ângulo e Área em uma Superfície

É um fato importante que o ângulo entre dois vetores tangentes em um ponto sobre um superfície pode ser calculado em termos dos coeficientes E, F e G da primeira forma fundamental. Considere duas curvas $u = u_1(t)$, $v = v_2(t)$ e $u = u_2(\tau)$, $v = v_2(\tau)$ com $u_1(0) = u_2(0)$, $v_1(0) = v_2(0)$. Seus vetores tangentes são dados por:

$$\frac{dX}{dt} = X_u \frac{du_1}{dt} + X_v \frac{dv_1}{dt} = X_t \quad (2.48)$$

$$\frac{dX}{d\tau} = X_u \frac{du_2}{d\tau} + X_v \frac{dv_2}{d\tau} = X_\tau \quad (2.49)$$

Assim,

$$\cos \phi = \frac{X_t \cdot X_\tau}{\sqrt{(X_t)^2 (X_\tau)^2}} \quad (2.50)$$

$$= \frac{E \frac{du_1}{dt} \frac{du_2}{d\tau} + F \left(\frac{du_1}{dt} \frac{dv_2}{d\tau} + \frac{du_2}{d\tau} \frac{dv_1}{dt} \right) + G \frac{dv_1}{dt} \frac{dv_2}{d\tau}}{\sqrt{E \left(\frac{du_1}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du_1}{dt} \frac{dv_1}{d\tau} + G \left(\frac{dv_1}{dt} \right)^2} \cdot \sqrt{E \left(\frac{du_2}{d\tau} \right)^2 + 2F \frac{du_2}{d\tau} \frac{dv_2}{d\tau} + G \left(\frac{dv_2}{d\tau} \right)^2}}$$

Evidentemente, os coeficientes E, F e G são suficientes para determinar o ângulo das curvas dadas. Se as duas curvas são curvas parâmetro com $u_2 = \text{const}$ e $v_1 = \text{const}$ temos:

$$\cos \phi = \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad (2.51)$$

De (2.51) fica claro que coordenadas curvilineares são ortogonais se e somente se $F = 0$. Em particular, o seno do ângulo ω entre as tangentes das curvas coordenadas é dado por

$$\text{sen } \phi = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}} \quad (2.52)$$

A área de uma superfície é definida também a partir das funções E, F e G. Por definição, a área de uma de uma superfície curva é dada pela integral

$$A = \iint_R \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv = \iint_R \sqrt{(X_1 \times X_2)^2} \, du \, dv, \quad (2.53)$$

sobre a região R do plano u, v que é mapeado na superfície. Pode ser mostrado que esta é a única definição possível para a área de uma superfície curva que satisfaz os requerimentos seguintes: (a) é dada por uma integral da forma $\iint f \, du \, dv$ na qual f depende apenas de u, v, X_1, X_2, X_3 ; (b) é invariante em relação a transformações ortogonais e também por transformações de parâmetro que preservam a orientação da superfície; (c) Fornece o valor unitário para um quadrado de lado l no plano.

Conhecendo essas propriedades podemos determinar o elemento de área de uma superfície. Considere um paralelogramo na superfície delimitado pelas curvas parâmetro $u, v, u + du, v + dv$ e ds_u, ds_v como comprimento dos lados do paralelogramo. De (2.44) $ds_u = \sqrt{E} du, ds_v = \sqrt{G} dv$. Assim:

$$dA = \sqrt{EG - F^2} \, du \, dv \quad (2.54)$$

2.3.4 Segunda Forma Fundamental

O próximo passo na teoria das superfícies nos leva ao estudo do desvio da superfície em relação ao seu plano tangente na vizinhança do ponto de tangência, o que nos leva a vários desenvolvimentos em relação à curvatura da superfície. É conveniente introduzir a função $\rho(u, v) = [\mathbf{X}(u, v) - \mathbf{X}(0, 0)] \cdot \mathbf{X}_3(0, 0)$, onde \mathbf{X}_3 é o vetor unitário normal. A função $\rho(u, v)$ representa a distância perpendicular do plano tangente ao ponto na superfície S descrito por $\mathbf{X}(u, v)$. Assumindo que $\mathbf{X}(u, v)$ tem terceira derivada contínua, podemos desenvolvê-las como:

$$\mathbf{X}(u, v) = \mathbf{X}(0, 0) + \mathbf{X}_1 u + \mathbf{X}_2 v + \frac{1}{2} (\mathbf{X}_{11} u^2 + 2\mathbf{X}_{12} uv + \mathbf{X}_{22} v^2) + \dots \quad (2.55)$$

Assim, a função $\rho(u, v)$ é dada por:

$$\rho(u, v) = \frac{1}{2} (\mathbf{X}_{11} \cdot \mathbf{X}_3 u^2 + 2\mathbf{X}_{12} \cdot \mathbf{X}_3 uv + \mathbf{X}_{22} \cdot \mathbf{X}_3 v^2) + \dots \quad (2.56)$$

Pois $X_i \cdot X_3 = 0$. As quantidades $L = X_{11} \cdot X_3 = L_{11}$, $M = X_{12} \cdot X_3 = L_{12}$ e $N = X_{22} \cdot X_3 = L_{22}$ são introduzidas e a segunda forma fundamental é definida pela equação quadrática:

$$II = Lu^2 + 2Muv + Nv^2. \quad (2.57)$$

Os coeficientes $L_{ik} = X_{ik} \cdot X_3 = X_{ik} \cdot (X_1 \times X_2) / \sqrt{EG - F^2}$ da segunda forma fundamental são invariantes em relação a transformações de coordenadas que preservam a orientação dos eixos, mas mudam de sinal se o sistema é revertido. Como os coeficientes g_{ik} , não são invariantes em relação a transformações de parâmetros.

2.3.5 Parabolóide Osculador

É interessante considerar a seguinte superfície em um espaço euclidiano u, v, ρ :

$$\rho = Lu^2 + 2Muv + Nv^2. \quad (2.58)$$

Essa superfície quadrática é chamada de parabolóide osculador da superfície S . Este parabolóide determina de maneira qualitativa a natureza da superfície na vizinhança do ponto de tangência. É apropriado distinguir quatro casos, dependendo do sinal do determinante $LN - M^2$ da segunda forma fundamental:

(a) Caso elíptico: $LN - M^2 > 0$. Parabolóide osculador é um parabolóide elíptico. Neste caso, ele se situa apenas de um lado da superfície de tangência, em contato com um único ponto, o ponto de tangência.

(b) Caso hiperbólico: $LN - M^2 < 0$. A forma quadrática é um parabolóide hiperbólico. As duas linhas retas que dividem o plano tangente em quatro regiões nas quais o parabolóide osculador se alterna sob e sobre o plano tangente são dadas por:

$$L \left(\frac{u}{v}\right)^2 + 2M \left(\frac{u}{v}\right) + N = 0. \quad (2.59)$$

(c) Caso parabólico: $LN - M^2 = 0$, mas os coeficientes não são simultaneamente iguais a zero. Neste caso é um cilindro parabólico que se situa inteiramente de um lado do plano tangente.

(d) Caso planar: $L = M = N = 0$. Neste caso temos um plano.

2.3.6 Curvatura

A discussão acima se limita a descrever o desvio da superfície em relação ao seu plano tangente. Para obter informações mais precisas, a curvatura das curvas individuais que passam através de um ponto na superfície será analisada. Considerando $\mathbf{X}(s) = \mathbf{X}[u(s), v(s)]$ uma curva na superfície onde s é o comprimento de arco, temos as derivadas

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{X}_1 \dot{u} + \mathbf{X}_2 \dot{v} \quad (2.60)$$

$$\ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{X}_1 \ddot{u} + \mathbf{X}_2 \ddot{v} + (\mathbf{X}_{11} \dot{u}^2 + 2\mathbf{X}_{12} \dot{u}\dot{v} + \mathbf{X}_{22} \dot{v}^2). \quad (2.61)$$

Tomando o produto escalar das equações anteriores com o vetor \mathbf{X}_3 temos:

$$\mathbf{X}_3 \cdot \ddot{\mathbf{X}} = L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2, \quad (2.62)$$

equação encontrada através da expressão (2.28) e também da relação $\mathbf{X}_3 \cdot \ddot{\mathbf{X}} = \kappa \mathbf{X}_3 \cdot v_2$ onde κ é a curvatura da curva $\mathbf{X}(s)$ e θ é o ângulo entre o vetor unitário normal \mathbf{X}_3 e a normal principal v_2 da curva. Partindo dessas considerações, é obtida a relação:

$$\kappa \cos \theta = L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2 = (Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2) \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \quad (2.63)$$

Fazendo uma mudança de parâmetro de t no lugar de s :

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2 \quad (2.64)$$

Assim obtemos o resultado

$$\kappa \cos \theta = \frac{Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2}{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2} = \frac{II}{I} \quad (2.65)$$

Esta equação nos leva ao seguinte teorema: todas as curvas regulares em uma superfície que possuem o mesmo vetor tangente (portanto, com o mesmo plano osculador) em um ponto P da superfície têm a mesma curvatura.

Para obtermos a informação completa dos possíveis valores de κ de curvas regulares em um ponto, precisamos verificar as curvas planas que cortam a superfície neste ponto. A curvatura κ é determinada por uma curva plana cortada por um plano contendo a normal da superfície (secção normal), e os valores de κ para todas as outras secções por planos que possuam a mesma tangente podem ser calculados através de (2.65). É suficiente para o que necessitamos considerarmos a curvatura das secções normais sozinhas, implicando em $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, em (2.65). Assim podemos definir:

$$k = \frac{II}{I}, \quad (2.66)$$

onde $|k|$ é a curvatura das secções normais planares determinada pelas direções u' e v' no plano tangente. No intuito de obter mais detalhes sobre a grandeza k , é necessário introduzir alguns parâmetros especiais. O plano tangente de uma superfície regular é pego como parâmetro, com a origem no plano de tangência, onde $u = x_1$ e $v = x_2$. Feito isso temos que os vetores X_1 e X_2 são dados por $X_1 = (1, 0, 0)$ e $X_2 = (0, 1, 0)$. Vamos considerar agora a curva $X(s) = X[u(s), v(s)]$ que passa sobre o ponto de tangência na superfície. Então $\dot{X}(s) = \dot{u}X_1 + \dot{v}X_2$ com $\dot{u}^2 + \dot{v}^2 = 1$ e conseqüentemente $\dot{u} = \cos\phi$ e $\dot{v} = \sin\phi$, onde ϕ é o ângulo em coordenadas polares entre \dot{X} e X_1 . Para essa escolha de parâmetros, a equação (2.66) nos leva a:

$$k = \frac{L\dot{u}^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N\dot{v}^2}{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} = L \cos^2 \phi + 2M \sin \phi \cos \phi + N \sin^2 \phi \quad (2.67)$$

Fazendo $|k| = 1/r^2$ temos:

$$\begin{aligned}\pm 1 &= L(r \cos \phi)^2 + 2M(r \cos \phi)(r \sin \phi) + N(r \sin \phi)^2 \\ &= Lx_1^2 + 2Mx_1x_2 + Nx_2^2,\end{aligned}\tag{2.68}$$

Pois $x_1 = r \cos \phi$ e $x_2 = r \sin \phi$. A secção cônica dada por (2.68) é chamada de indicatriz de Dupin.

Considerando agora os quatro casos possíveis discutidos na seção anterior, mas agora com referência a indicatriz:

(a) Caso elíptico: $LN - M^2 > 0$. A indicatriz é uma elipse.

(b) Caso hiperbólico: $LN - M^2 < 0$. A indicatriz consiste em um par de hipérbolos conjugadas.

(c) Caso parabólico: $LN - M^2 = 0$, mas os coeficientes não são simultaneamente iguais a zero. O lado direito de (2.68) é um quadrado perfeito e a indicatrix é um par de linhas paralelas.

(d) Caso planar: $L = M = N = 0$. A indicatrix não existe.

Excluindo o caso planar e o caso onde a indicatrix se torna um círculo, sempre existe um par de direções ortogonais para os quais k assume o valor máximo e o valor mínimo k_1, k_2 ; eles são as curvaturas normais das secções normais na direção principal dos eixos da indicatrix. Essas direções são definidas como direções principais da superfície e suas correspondentes curvaturas normais são definidas como curvaturas principais. É interessante obter as curvaturas principais por cálculo direto, assim:

$$k(u', v') = \frac{II}{I} = \frac{Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2}{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}.\tag{2.69}$$

Podemos sempre escolher coordenadas especiais em qualquer ponto, de maneira que $u'^2 + v'^2 = 1$ e que o denominador I de (2.69) nunca seja igual a zero, exceto para $u' = v' = 0$. Assim, o máximo e o mínimo de k existem, desde que k seja contínuo em um domínio fechado de $u'^2 + v'^2 = 1$. Para os extremos de k quando u' e v' variam, (os coeficientes g_{ik} e L_{ik} das formas fundamentais são constantes nesta discussão) as equações:

$$(L - kE)u' + (M - kF)v' = 0 \quad (2.70)$$

$$(M - kF)u' + (N - kG)v' = 0 \quad (2.71)$$

são obtidas a partir de $\frac{\partial k}{\partial u'} = 0$ e $\frac{\partial k}{\partial v'} = 0$. Para que a quantidade k seja obtida, u' e v' não podem ser nulos ao mesmo tempo. Para valores extremos, o determinante dos coeficientes deve ser igual a zero

$$\begin{vmatrix} L - kE & M - kF \\ M - kF & N - kG \end{vmatrix} = 0 \quad (2.72)$$

e esta “equação secular” é uma forma quadrática que possui duas raízes reais chamadas de k_1 e k_2 . Os valores de k_1 e k_2 quando inseridos nas equações lineares levam as direções principais, que consistem em duas direções ortogonais se $k_1 \neq k_2$, ou para todas as direções possíveis se $k_1 = k_2$. Neste último caso o ponto é chamado de planar se $k_1 = k_2 = 0$ e é chamado de ponto umbilical se $k_1 = k_2 \neq 0$. Um ponto umbilical é caracterizado pela condição $L/E = M/F = N/G$, o que fica claro devido à equação (2.69) e ao fato de k ser independente de u' e v' .

Expandindo o determinante (2.72) temos:

$$k^2 - 2Hk + K = 0 \quad (2.73)$$

Com os coeficientes H e K definidos como se segue:

$$H = \frac{1}{2} \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \quad (2.74)$$

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = k_1 k_2 \quad (2.75)$$

Essas quantidades importantes definidas acima são conhecidas como curvatura média e curvatura gaussiana, respectivamente. Cada uma delas tem certa analogia com a noção de curvatura de uma curva plana.

Dessas noções de curvatura introduzidas agora, a curvatura gaussiana é a mais importante na teoria das superfícies. Em primeiro lugar o sinal de K fixa de maneira

qualitativa a forma da superfície na vizinhança de um ponto: no caso em que K é positivo o ponto é elíptico, se K é negativo é hiperbólico, e se K é zero pode ser parabólico ou plano.

Agora vamos verificar que a curvatura gaussiana K pode ser obtida usando o método da imagem esférica de maneira análoga ao utilizado para definir curvatura e torção das curvas espaciais. O vetor normal unitário $\mathbf{X}_3(u, v)$ de uma região R de uma superfície S , que é dada por $\mathbf{X}(u, v)$ é deslocado para a origem; o grupo de pontos indicados por esse vetor é o conjunto Ω , na esfera unitária chamada de imagem esférica da parte R da superfície S . A curvatura total K_T de R por definição a área coberta de Ω ; esta quantidade é definida por:

$$K_T = \iint_D \sqrt{(\mathbf{X}_{31} \times \mathbf{X}_{32})^2} du dv \quad (2.76)$$

O domínio D é a imagem de R no plano parâmetro. A grandeza K_T é a integral sobre R da curvatura gaussiana K como mostrado na equação a seguir:

$$K_T = \iint_R K dA = \iint_D K \sqrt{(\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2)^2} du dv \quad (2.77)$$

Esse fato é provado estabelecendo a relação abaixo:

$$\mathbf{X}_{31} \times \mathbf{X}_{32} = K(\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2) \quad (2.78)$$

Que é válida para todas as superfícies regulares. Partindo dessa idéia fica claro que a relação entre o elemento de área da imagem esférica e o correspondente elemento de área da superfície é a curvatura gaussiana. A equação (2.78) mostra que a imagem esférica $\mathbf{X}_3(u, v)$ é uma superfície regular se K for diferente de zero, e também a orientação fixada na superfície pelos vetores coordenados \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 é a mesma, ou reversa, da imagem esférica de acordo com o sinal de K ser positivo ou negativo.

2.3.7 Terceira Forma Fundamental

Para determinarmos a terceira forma fundamental, utilizaremos a notação apresentada anteriormente, onde $g_{ik} = \mathbf{X}_i \cdot \mathbf{X}_j$, $L_{ik} = \mathbf{X}_3 \cdot \mathbf{X}_{ij} = -\mathbf{X}_{3i} \cdot \mathbf{X}_j$, são os

coeficientes das duas primeiras formas fundamentais. Fazendo $u = u_1$ e $v = u_2$ a equação (2.69) toma a forma:

$$k = \frac{\sum_{i,j} L_{ij} \dot{u}_i \dot{u}_j}{\sum_{i,j} g_{ij} \dot{u}_i \dot{u}_j}, \quad \text{com } i, j = 1, 2. \quad (2.79)$$

As derivadas de k com respeito à u' e v' são:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial k}{\partial u_j} = \frac{\sum_i (L_{ij} - k g_{ij}) \dot{u}_i}{\sum_{i,j} g_{ij} \dot{u}_i \dot{u}_j} = - \frac{\sum_i (X_{3i} + k X_i) \dot{u}_i \cdot X_j}{\sum_{i,j} g_{ij} \dot{u}_i \dot{u}_j}, \quad (2.80)$$

quando as formas dos coeficientes g_{ik} e L_{ik} são usadas. Mas também a seguinte relação é válida:

$$\sum_i (X_{3i} + k X_i) \dot{u}_i = X'_3 + k X' \quad (2.81)$$

desde que, por exemplo, $X' = X_1 \dot{u}_1 + X_2 \dot{u}_2 = \sum_i X_i \dot{u}_i$. Se o par de valores \dot{u}_1 e \dot{u}_2 determinam a direção principal, as equações $\partial k / \partial \dot{u}_j = 0$ devem ser verdadeiras, então $(X'_3 + k X') \cdot X_j = 0$ para $j = 1, 2$. Mas como os vetores X_j no plano tangente são linearmente independentes e o vetor $X'_3 + k X'$ está neste plano, temos:

$$X'_3 + k X' = 0 \quad (2.82)$$

na direção principal, esta é a fórmula de Rodrigues. Para qualquer direção fixada por (\dot{u}_1, \dot{u}_2) temos que as equações abaixo são válidas:

$$X' = X_1 \dot{u}_1 + X_2 \dot{u}_2 \quad (2.83)$$

$$X'_3 = X_{31} \dot{u}_1 + X_{32} \dot{u}_2 = -k_1 \dot{u}_1 X_1 - k_2 \dot{u}_2 X_2 \quad (2.84)$$

Combinando estas equações e derivando em relação a curvas arbitrárias, temos:

$$\mathbf{X}'_3 + k_1 \mathbf{X}' = a \mathbf{X}_2 \quad (2.85)$$

$$\mathbf{X}'_3 + k_2 \mathbf{X}' = b \mathbf{X}_2 \quad (2.86)$$

onde a e b são escalares. O produto escalar entre (2.85) e (2.86) nos leva a seguinte equação:

$$\mathbf{X}'_3 \cdot \mathbf{X}'_3 + (k_1 + k_2) \mathbf{X}'_3 \cdot \mathbf{X}' + k_1 k_2 \mathbf{X}' \cdot \mathbf{X}' = 0 \quad (2.87)$$

Desde que $\mathbf{X}_1 \cdot \mathbf{X}_2 = 0$. De maneira natural a terceira forma fundamental é definida:

$$III = \mathbf{X}'_3 \cdot \mathbf{X}'_3 = (\mathbf{X}'_3)^2 \quad (2.88)$$

A terceira forma fornece o elemento de linha da imagem esférica da superfície. Tendo em mente as relações $\mathbf{X}'_3 \cdot \mathbf{X}' = -II$ e $I = \mathbf{X}' \cdot \mathbf{X}'$, a equação (2.87) nos leva a seguinte identidade que envolve as três formas fundamentais:

$$III - 2HII + KI = 0 \quad (2.89)$$

A equação (2.89) mostra que as três formas não são independentes.

2.3.8 As Equações Diferenciais da Teoria das Superfícies

Este tópico será destinado a apresentar às equações diferenciais parciais para as superfícies, que desempenham um papel análogo as equações de Frenet para as curvas espaciais. Em cada ponto de uma superfície regular foram definidos três vetores linearmente independentes, os vetores tangentes \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 das curvas parâmetro, e o vetor normal \mathbf{X}_3 . Como cada vetor pode ser descrito como uma combinação linear desses três vetores, em particular as derivadas $\mathbf{X}_{ij} = \partial^2 \mathbf{X} / \partial u_i \partial u_j$ e $\mathbf{X}_{3j} = \partial \mathbf{X}_3 / \partial u_j$ também podem ser expressas dessa maneira. Esta é a idéia básica usada para obter as equações de Frenet. Como passo preliminar é interessante introduzir a matriz G dos coeficientes g_{ik} da primeira forma fundamental

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

E a sua inversa

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{|G|} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{21} & g_{11} \end{pmatrix} \quad (2.91)$$

onde $|G|$ é o determinante de G , que é sempre diferente de zero, pois assumimos que a primeira forma fundamental é positiva. As matrizes G e G^{-1} são simétricas.

O primeiro grupo de equações diferenciais parciais expressa as derivadas segundas X_{ij} de $X(u^1, u^2)$ em termos dos vetores X_i com $i = 1, 2$, e X_3 . Esses vetores são escritos da seguinte maneira:

$$X_{ik} = \Gamma_{ik}^l X_l + a_{ik} X_3, \quad \text{com } i, k = 1, 2. \quad (2.92)$$

Os coeficientes Γ_{ik}^l são chamados de símbolos de Christoffel de segundo tipo. Os coeficientes a_{ik} são determinados de maneira simples: o produto escalar com X_3 leva $X_{ik} \cdot X_3 = a_{ik}$, pois $X_1 \cdot X_3 = 0$; o que nos revela que $a_{ik} = L_{ik}$. Falta calcular agora os valores do símbolo de Christoffel. Com esta finalidade tomamos o produto escalar em ambos os lados de (2.92) com X_m :

$$X_{ik} \cdot X_m = \Gamma_{ik}^l g_{lm} \quad (2.93)$$

desde que $X_l \cdot X_m = g_{lm}$ e $X_l \cdot X_3 = 0$. As equações (2.93) formam um sistema linear de equações não homogêneas para os coeficientes Γ_{ik}^l , que pode ser resolvido com auxílio das quantidades g^{ik} introduzidas anteriormente.

Os símbolos de Christoffel Γ_{ik}^l dependem apenas dos coeficientes g_{ik} e suas primeiras derivadas. Essa dependência se torna explícita quando consideramos o produto

escalar $\mathbf{X}_{ik} \cdot \mathbf{X}_m$. Partindo de $g_{im} = \mathbf{X}_i \cdot \mathbf{X}_m$ e diferenciando em relação à u^k temos as equações:

$$\frac{\partial g_{im}}{\partial u^k} = \mathbf{X}_{ik} \cdot \mathbf{X}_m + \mathbf{X}_i \cdot \mathbf{X}_{mk}, \quad (2.94)$$

$$\frac{\partial g_{mk}}{\partial u^i} = \mathbf{X}_{mi} \cdot \mathbf{X}_k + \mathbf{X}_m \cdot \mathbf{X}_{ki}, \quad (2.95)$$

$$\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^m} = \mathbf{X}_{km} \cdot \mathbf{X}_i + \mathbf{X}_k \cdot \mathbf{X}_{im}. \quad (2.96)$$

A soma de (2.94) e (2.95), e a subtração de (2.96) nos leva à relação

$$\mathbf{X}_{ik} \cdot \mathbf{X}_m = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial u^k} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^m} \right) = \Gamma_{ikm} \quad (2.97)$$

Na qual a nova quantidade Γ_{ikm} definida em (2.97) é chamada de símbolo de Christoffel de três índices do primeiro tipo. A equação seguinte é responsável por conectar os dois tipos do símbolo de Christoffel

$$\Gamma_{ik}^l = g^{lm} \Gamma_{ikm} \quad (2.98)$$

Partindo da equação (2.92), com as relações dos coeficientes Γ_{ik}^l definidas a partir de (2.98), (2.97) e (2.91), encontramos a primeira equação diferencial parcial da teoria das superfícies:

$$\mathbf{X}_{ik} = \Gamma_{ik}^l \mathbf{X}_l + L_{ik} \mathbf{X}_3. \quad (2.99)$$

A próxima equação diferencial envolve as derivadas do vetor normal \mathbf{X}_3 . Como \mathbf{X}_3 é um vetor unitário normal a superfície segue que suas derivadas \mathbf{X}_{3i} estão no plano tangente e conseqüentemente podem ser escritas desta forma:

$$\mathbf{X}_{3i} = -L_i^k \mathbf{X}_k, \text{ com } i = 1, 2. \quad (2.100)$$

Com coeficientes escalares $-L_i^k$ a serem determinados. Para isso tomamos o produto escalar da equação (2.100) com X_j :

$$X_{3i} \cdot X_j = -L_i^k g_{kj} \quad (2.101)$$

desde que $X_j \cdot X_k = g_{kj}$. Lembrando que $X_3 \cdot X_j = 0$, temos:

$$X_{3i} \cdot X_j + X_3 \cdot X_{ij} = X_{3i} \cdot X_j + L_{ij} = 0 \quad (2.102)$$

Pois $L_{ij} = X_3 \cdot X_{ij}$, e de (2.101) temos:

$$L_{ij} = L_i^k g_{kj} = L_i^r g_{rj} \quad (2.103)$$

Esse grupo de equações lineares para as quantidades L_i^r pode ser resolvido multiplicando por g^{kj} que resulta em.

$$L_{ij} g^{kj} = L_i^r g_{rj} g^{kj} = L_i^r \delta_r^k = L_i^k \quad (2.104)$$

E os coeficientes L_i^k são agora definidos em termos dos coeficientes das duas formas fundamentais. As equações diferenciais parciais (2.100) agora têm os coeficientes conhecidos:

$$X_{3i} = -L_{ij} g^{kj} X_k, \text{ com } i = 1, 2. \quad (2.105)$$

Estas equações são chamadas de equações de Weingarten.

As equações (2.99) e (2.105) são conhecidas como as equações diferenciais parciais fundamentais da teoria das superfícies. Elas expressam a primeira derivada parcial do triedro X_1, X_2 e X_3 dos vetores de superfície, definidas para todos os pontos da superfície, em termos desses vetores. Nesse sentido elas são análogas as equações de Frenet para curvas espaciais. Entretanto, existem algumas diferenças importantes. No caso das equações de Frenet os coeficientes κ e τ são invariantes em relação a todas as transformações de

parâmetro que preservam a orientação, assim como em relação a transformações de coordenadas. No caso presente, os coeficientes das equações diferenciais dependem das funções $g_{ik} = X_i \cdot X_k$ e $L_{ik} = X_3 \cdot X_{ik}$ que não são invariantes em relação à transformações de parâmetros, o que também ocorre com as grandezas Γ_{ik}^l e L_i^k .

Outro tópico importante neste ponto é o teorema Egregium de Gauss, no qual a curvatura Gaussiana K , originalmente definida em termos dos coeficientes L_{ik} da segunda forma fundamental, depende realmente apenas dos coeficientes g_{ik} da primeira forma e de suas primeiras e segundas derivadas. Uma forma de expressar este teorema é através da definição da grandeza r_{ijk}^n :

$$r_{ijk}^n = \frac{\partial \Gamma_{ik}^n}{\partial u^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^n}{\partial u^k} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lj}^n - \Gamma_{ij}^l \Gamma_{lk}^n \quad (2.106)$$

A equação (2.106) nos permite definir uma nova grandeza:

$$r_{mijk} = g_{nm} r_{ijk}^n \quad (2.107)$$

Recorrendo a relação:

$$r_{mijk} = L_{ik} L_{mj} - L_{ij} L_{mk} \quad (2.108)$$

Cujo caso especial:

$$r_{2121} = L_{11} L_{22} - L_{12}^2 \quad (2.109)$$

É a forma do teorema Egregium de Gauss. As quantidades r_{ijkl} contem apenas as funções g_{ik} e algumas de suas primeiras e segundas derivadas, e $K = (g_{11}g_{22} - g_{12}^2)^{-1} r_{2121}$. As grandezas r_{ijk}^n e r_{ijkl} representam as componentes do tensor de curvatura de Riemann, fundamentais na teoria da Relatividade Geral.

3 TEORIA DA RELATIVIDADE²²⁻²⁸

Neste capítulo serão apresentados os princípios da Relatividade, tanto a teoria especial quanto a geral. No capítulo anterior, foi apresentada a geometria diferencial, que é a base matemática desta teoria e também da maior parte deste trabalho. Assim, no desenvolvimento deste capítulo ficará clara a conexão entre os dois assuntos.

A teoria da Relatividade é bem desenvolvida e sua semelhança com a teoria dos Cristais Líquidos Nemáticos apresentada posteriormente justifica sua introdução neste ponto do trabalho, e seus conceitos acrescentam e facilitam o desenvolvimento proposto.

3.1 RELATIVIDADE RESTRITA^{22,23}

A experiência mostra a existência de um princípio chamado de relatividade. Esta hipótese estipula que todas as leis da natureza são idênticas em todos os referenciais inerciais. Em outras palavras, as equações que traduzem as leis da natureza são invariantes em relação às transformações de coordenadas e do tempo, quando se passa de um referencial inercial a outro. Isso significa que a equação que descreve certa lei da natureza, quando expressa pelas coordenadas espaciais e pelo tempo, tem a mesma forma qualquer que seja o referencial inercial escolhido.

Na natureza não existe interação instantânea. O princípio da relatividade nos diz que a velocidade de propagação de algumas interações é a mesma em todos os referenciais, essa velocidade é uma constante universal. A velocidade máxima de propagação de qualquer informação é a mesma que a velocidade da luz no vácuo:

$$c = 2,99792 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Estes são os princípios da relatividade de Einstein.

A teoria da relatividade especial é melhor formulada em uma configuração matemática conhecida como espaço-tempo de Minkowski. Nessa configuração, as três dimensões usuais do espaço são combinadas com a dimensão do tempo para formar uma variedade quadridimensional para representar um espaço-tempo. É interessante comparar o espaço-tempo de Minkowski com o espaço Euclidiano: as dimensões do espaço Euclidiano

são apenas do tipo espacial, enquanto no espaço de Minkowski a assinatura $(-, +, +, +)$, que decorre da existência de um limite para c , lhe confere um caráter pseudo-euclidiano.

A base do espaço de Minkowski é um grupo de vetores ortogonais (e_0, e_1, e_2, e_3) de maneira que:

$$-(e_0) = (e_1) = (e_2) = (e_3) = 1 \quad (3.1)$$

Esta condição pode ser escrita na forma:

$$\langle e_\mu, e_\nu \rangle = \eta_{\mu\nu} \text{ com } \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (3.2)$$

onde

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

que é conhecido como tensor de Minkowski.

Em relação à base, as componentes de um vetor v são escritas como (v^0, v^1, v^2, v^3) , ou utilizando a convenção de soma de Einstein, $v = v^\mu e_\mu$. A componente v^0 é chamada de componente temporal, enquanto as outras são as componentes espaciais.

O espaço-tempo de Minkowski só se aplica no limite Newtoniano de campo gravitacional fraco. Quando a gravitação começa a influenciar no sistema, o espaço-tempo se torna curvo, e a teoria geral da relatividade toma o lugar da especial. Mesmo assim, o espaço-tempo de Minkowski ainda é uma boa descrição em uma região infinitesimal em qualquer ponto (sem singularidades). De maneira mais formal, a presença da gravidade é descrita por uma variedade de 4 dimensões curvo, o qual tem como espaço tangente o espaço de Minkowski de 4 dimensões.

3.2 PRINCÍPIO DA EQUIVALÊNCIA²²

O estudo da teoria geral da relatividade se inicia com o princípio da equivalência. O princípio da equivalência entre a gravitação e a inércia nos diz como um sistema físico arbitrário responde a um campo gravitacional externo. Este princípio se baseia na igualdade entre a massa gravitacional e massa inercial. Como consequência dessa equivalência, Einstein percebeu que nenhum campo gravitacional pode ser detectado no interior de um elevador em queda livre.

De uma maneira mais formal, podemos descrever o princípio da equivalência desta maneira: “em qualquer ponto do espaço tempo sob um campo gravitacional arbitrário é possível escolher um sistema de coordenadas localmente inercial o qual, em uma região suficientemente pequena do ponto em questão, as leis da natureza se comportam da mesma maneira em um sistema de coordenadas cartesianas desacelerado na ausência da gravidade”.

No estudo da geometria diferencial apresentado no capítulo anterior observamos que em qualquer ponto de uma superfície nós podemos definir um sistema de coordenadas localmente cartesianas no qual as distâncias obedecem a lei de Pitágoras. Por motivo desta analogia profunda, esperamos que as leis da gravitação tenham uma forte relação com as fórmulas da geometria de Riemann. Em particular, isto implica que todas as propriedades locais de uma superfície curva podem ser descritas em termos das derivadas $\partial\xi^\alpha/\partial x^\mu$ da função $\xi^\alpha(x)$ que define a transformação $x \rightarrow \xi$ de um sistema de coordenadas geral x^μ que cobre a superfície do sistema cartesiano local ξ^α , onde o princípio da equivalência nos diz que todos os efeitos do campo gravitacional podem ser escritos em termos das derivadas $\partial\xi^\alpha/\partial x^\mu$ da função $\xi^\alpha(x)$ que define a transformação das coordenadas de “laboratório” x^μ para as coordenadas localmente inerciais ξ^α . Além disso, foi mostrado no capítulo dois que as funções geometricamente relevantes são as quantidades $g_{\mu\nu}$, e logo veremos que o campo gravitacional é descrito da mesma maneira.

Para tirarmos proveito do princípio da equivalência em todo o seu potencial, é necessária a introdução de ferramentas matemáticas adequadas, que neste caso é a análise tensorial, que será abordada no próximo tópico.

3.3 TENSORES E COVARIÂNCIA GERAL^{22,24,25}

Com intenção de construir equações físicas que são covariantes sob transformações de coordenadas gerais necessitamos entender como as quantidades descritas por essas equações se comportam sob essas transformações. Existe a tendência de que todas as quantidades de interesse físico se transformem de maneira simples, entretanto, pode ser difícil juntá-las em equações covariantes. Este tópico tem a intenção de descrever uma classe de objetos que se transformam de maneira simples, sob uma transformação do sistema de coordenadas.

A mais simples regra de transformação é dos escalares. Os escalares simplesmente não sofrem alterações sob transformações de coordenadas gerais.

Agora vamos considerar a simples regra de transformação de coordenada X^μ para $X'^\mu = f^\mu(X^\nu)$. Os diferenciais dx^μ se transformam de acordo com a regra

$$dx^\mu \rightarrow dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (3.4)$$

Nós chamamos de vetor contravariante o objeto geométrico de quatro componentes $A^\mu = (A^0, A^1, A^2, A^3)$ o qual, sob uma transformação de coordenadas, segue a regra de transformação dos diferenciais:

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu. \quad (3.5)$$

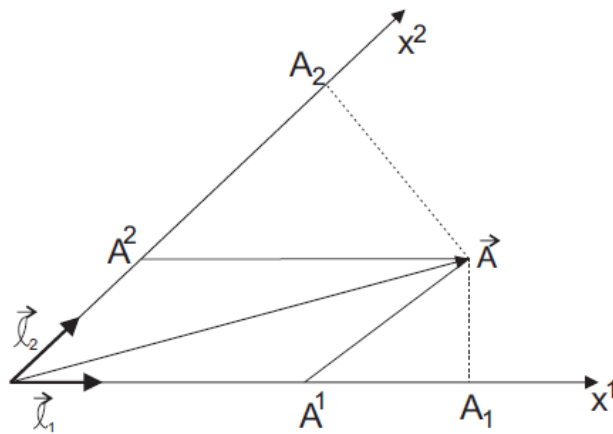
Um vetor covariante é um objeto quadridimensional $A_\mu = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ que segue a seguinte transformação:

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu \quad (3.6)$$

Ou seja, na nossa notação índice subscrito representa que o vetor é covariante, e índice sobrescrito é contravariante. Para visualizarmos a diferença entre as componentes covariantes e contravariantes vamos considerar dois vetores unitários não ortogonais $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, |\hat{e}_1| = |\hat{e}_2| = 1)$ que definem dois eixos x^1 e x^2 em um plano. As

componentes contravariantes (A^1, A^2) de um vetor \mathbf{A} são dadas pelas projeções de \mathbf{A} paralelas aos eixos x^1 e x^2 enquanto, as projeções ortogonais de \mathbf{A} dão as componentes covariantes (A_1, A_2) (Fig. 3.1) (se os eixos são ortogonais, as componentes covariantes e contravariantes são iguais).

Figura 3.1 – Componentes covariantes e contravariantes de um vetor.



Dos vetores covariantes e contravariantes nós podemos imediatamente generalizá-los para os tensores. Um tensor com índices sobrescritos μ, ν e índices subscritos κ, λ se transformam como os produtos de vetores contravariantes $U^\mu W^\nu$ e covariantes $V_\kappa Y_\lambda$. Por exemplo, sob a transformação de coordenada $x \rightarrow x'$, o tensor $T^\mu{}_\nu$, vai se transformar em

$$T'^{\mu}{}_{\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}} T^{\kappa}{}_{\rho}{}^{\lambda}{}_{\sigma} \quad (3.7)$$

Se todos os índices forem sobrescritos o tensor é chamado contravariante, se são subscritos, covariante. No caso como descrito na equação acima, são tensores mistos.

O próximo passo na descrição dos tensores é entender algumas operações algébricas simples. A primeira operação, a combinação linear, consiste na soma ou subtração de tensores com mesmos índices resultando em um novo tensor:

$$T^{\mu}_{\nu} \equiv aA^{\mu}_{\nu} + bB^{\mu}_{\nu} \quad (3.8)$$

Onde a e b são escalares.

A segunda operação, o produto direto, consiste em um produto entre dois tensores que resulta em outro tensor com todos os índices dos dois tensores originais:

$$T^{\mu\lambda}_{\nu} \equiv A^{\mu}_{\nu} B^{\lambda} \quad (3.9)$$

Outra operação comum entre os tensores é a contração. Tomando um índice superior igual a um inferior e somando sobre os quatro valores temos um novo tensor com esses índices ausentes, ou seja:

$$T^{\mu\lambda} \equiv T^{\mu\lambda\nu}_{\nu} \quad (3.10)$$

Após apresentadas as operações mais simples relacionadas aos tensores, lembramos que o princípio da equivalência estabelece uma relação entre a geometria não euclidiana e a gravitação. Nós poderíamos continuar seguindo essa aproximação, mas este método nos levaria a um processo tedioso quando chegarmos às equações de campo. Entretanto, podemos seguir um caminho diferente, com exatamente o mesmo conteúdo físico, porém mais elegante na aparência e conveniente na execução.

Esse método é baseado em uma versão alternativa do princípio da equivalência, conhecido como princípio da covariância geral. Ele afirma que uma equação física se mantém em um campo gravitacional geral, se duas condições são respeitadas:

1. A equação permanece formalmente na ausência da gravitação; ou seja, é equivalente as leis da relatividade especial quando o tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ se torna igual ao tensor de Minkowski $\eta_{\alpha\beta}$, o que resulta na anulação da conexão afim $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$.

2. A equação é geralmente covariante; ou seja, preserva a forma sob uma transformação geral de coordenadas $x \rightarrow x'$.

Para verificarmos que o princípio da covariância geral segue do princípio da equivalência, vamos supor um campo gravitacional arbitrário, e considerar qualquer equação que satisfaz as duas condições acima. Da condição (2) nós verificamos que a equação será verdadeira em todos os sistemas de coordenadas se ela é verdadeira em um. Mas em qualquer ponto existe uma classe de sistemas de coordenadas, os sistemas localmente inerciais, no qual

os efeitos da gravitação são nulos. A condição (1) nos diz que a nossa equação permanece igual neste sistema e também em todos os outros sistemas coordenados.

O princípio da covariância geral pode ser aplicado apenas em uma escala pequena em comparação com as distâncias do espaço tempo típicas do campo gravitacional. Apenas nessa escala pequena é assegurada pelo princípio da equivalência a construção de sistemas de coordenadas onde os efeitos da gravitação são nulos.

3.4 DERIVADA COVARIANTE^{22,23,26}

Para definirmos algumas grandezas e operações importantes da relatividade geral, consideraremos uma partícula apenas sob a influência de forças puramente gravitacionais. De acordo com o princípio da equivalência existe um sistema de coordenadas ξ^α no qual a equação de movimento é de uma linha reta no espaço tempo, ou seja,

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (3.11)$$

onde $d\tau$ é o tempo próprio

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta. \quad (3.12)$$

Agora supondo o uso de qualquer outro sistema de coordenadas x^μ . As coordenadas ξ^α são funções de x^μ , neste caso a equação (3.11) toma a forma:

$$0 = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau}. \quad (3.13)$$

Multiplicando por $\partial x^\lambda / \partial \xi^\alpha$, temos a equação de movimento:

$$0 = \frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad (3.14)$$

Onde $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ é a conexão afim definida por:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \equiv \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}. \quad (3.15)$$

O tempo próprio pode ser expresso em um sistema de coordenada arbitrário da seguinte maneira:

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} \quad (3.16)$$

ou,

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (3.17)$$

Onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico que é definido por:

$$g_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\nu}} \eta_{\alpha\beta} \quad (3.18)$$

Os valores do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e da conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ em um ponto X em um sistema de coordenadas arbitrário x^{μ} nos dá informações suficientes para determinar as coordenadas localmente inerciais $\xi^{\alpha}(x)$ na vizinhança de X .

A conexão afim precisa ser melhor analisada neste ponto. Fazendo uma transformação de coordenadas de x^{μ} para x'^{μ} temos:

$$\Gamma'_{\mu\nu}{}^{\lambda} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\tau\sigma}{}^{\rho} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \quad (3.18)$$

O primeiro termo a direita é o que nós esperaríamos se $\Gamma'_{\mu\nu}{}^{\lambda}$ fosse um tensor; o segundo termo é não homogêneo e a torna um não tensor.

Tendo a informação de que a conexão afim possui uma transformação de coordenadas não homogênea e que a derivada usual de alguns tensores pode seguir o mesmo caminho vamos considerar um vetor contravariante V^{μ} , o qual tem sua lei de transformação:

$$V'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu} \quad (3.19)$$

Diferenciando em relação a x'^{λ} temos:

$$\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} V^\nu \quad (3.20)$$

O primeiro termo da direita é o que nós esperávamos caso $\partial V^\nu / \partial x^\lambda$ fosse um tensor; o segundo termo destrói as propriedades tensoriais.

Mesmo $\partial V^\nu / \partial x^\lambda$ não sendo um tensor, podemos usá-lo para construir um. Considere o produto:

$$\begin{aligned} \Gamma'^\lambda_{\mu\nu} V'^k &= \left[\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^k} \Gamma_{\rho\sigma}^\nu - \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^k} \right] \frac{\partial x'^k}{\partial x^\eta} V^\eta \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \Gamma_{\rho\sigma}^\nu V^\sigma - \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} V^\sigma \end{aligned} \quad (3.21)$$

Somando (3.20) com (3.21) percebemos que o termo não homogêneo é cancelado levando a:

$$\frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\lambda} + \Gamma'^\lambda_{\mu\nu} V'^k = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \left(\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho} + \Gamma_{\lambda k}^\mu V^\sigma \right) \quad (3.22)$$

O que nos leva a definir a derivada covariante de um vetor contravariante:

$$V'^\mu{}_{;\lambda} \equiv \frac{\partial V'^\mu}{\partial x'^\lambda} + \Gamma'^\lambda_{\mu\nu} V'^k \quad (3.23)$$

Através do mesmo processo definimos a derivada covariante de um vetor covariante:

$$V_{\mu;\nu} = \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\lambda} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda V^k. \quad (3.24)$$

Essas definições podem ser estendidas para tensores gerais, por exemplo:

$$T^{\mu\sigma}{}_{\lambda;\rho} = \frac{\partial}{\partial x^\rho} T^{\mu\sigma}{}_\lambda + \Gamma_{\rho\nu}^\mu T^{\nu\sigma}{}_\lambda + \Gamma_{\rho\nu}^\sigma T^{\mu\nu}{}_\lambda - \Gamma_{\lambda\rho}^k T^{\mu\sigma}{}_k. \quad (3.25)$$

A importância da derivada covariante aparece por duas de suas propriedades: ela converte tensores em outros tensores e se reduz a diferenciação ordinária na ausência da gravitação, ou seja, quando $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = 0$. Essas propriedades sugerem o seguinte algoritmo para acessar os efeitos da gravitação em sistemas físicos: Escreva as equações da

relatividade especial apropriadas na ausência da gravidade, substitua $\eta_{\mu\nu}$ por $g_{\mu\nu}$ e substitua todas as derivadas ordinárias por derivadas covariantes.²²

Através desse algoritmo, as equações resultantes serão geralmente covariantes e verdadeiras na ausência da gravitação e também, de acordo com o princípio da covariância geral elas serão verdadeiras na presença de campos gravitacionais em escalas suficientemente pequenas em relação à escala do campo gravitacional.

3.5 TENSOR ENERGIA-MOMENTO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO²⁶

No estudo da relatividade, é importante encontrarmos uma expressão para a fonte de energia. Vamos procurar esta expressão sob a forma quadri-dimensional. A princípio, vamos considerar um sistema cuja integral da ação se escreve:

$$S = \int \Lambda \left(q, \frac{\partial q}{\partial x_i} \right) dV dt = \frac{1}{ic} \int \Lambda d\Omega \quad (3.26)$$

Onde Λ é certa função dos q que determinam o estado do sistema e de suas derivadas em relação às coordenadas e ao tempo. Para simplificar a notação, as equações serão escritas apenas para um q . A integral estendida ao espaço $\int \Lambda dV$ é a lagrangeana do sistema, de modo que Λ pode ser considerada como a “densidade” da lagrangeana.

Obtemos as equações do campo de acordo com o princípio da ação mínima, fazendo S variar. Para uma notação mais sintética, faremos $q_{,i} = \frac{\partial q}{\partial x_i}$ e assim:

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{ic} \int \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \delta q_{,i} \right) d\Omega \\ &= \frac{1}{ic} \int \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \delta q \right) - \delta q \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

Aplicando o teorema de Gauss, o segundo termo desaparece depois de integrarmos por todo espaço e então obtemos as equações de campo (usando a convenção de soma sobre os índices repetidos):

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q} = 0 \quad (3.28)$$

Tendo em mãos esta equação, vamos seguir um método análogo ao usado em mecânica para estabelecer a conservação de energia:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x_i} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x_i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \frac{\partial q_{,k}}{\partial x_i} \quad (3.29)$$

Definindo $T_{ik} = \delta_{ik}\Lambda - q_{,i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}}$ e um pouco de álgebra nos leva a equação:

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (3.30)$$

Como escrito acima existem varias quantidades q , neste caso a equação (3.29) toma a forma:

$$T_{ik} = \delta_{ik}\Lambda - \sum_{\ell} q_{,i}^{(\ell)} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,(\ell)k}} \quad (3.31)$$

Uma equação da forma $\frac{\partial A_k}{\partial x_k} = 0$, ou seja, a anulação da 4-divergência de um vetor expressa a conservação da integral desse vetor $\int A_k dS_k$ sobre uma hipersuperfície que contem todo o espaço tridimensional. O mesmo se aplica em relação à divergência de um tensor; a equação $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0$ é a afirmação da conservação do vetor P_i que tem por componentes as integrais dos T_{ik} sobre a hipersuperfície:

$$P_i = Cte \int T_{ik} dS_k \quad (3.32)$$

Esse vetor deve ser identificado como o momento do sistema. A constante diante da integral deve ser escolhida de modo que, de acordo com a definição anterior, a

quarta componente de P_i seja igual à energia do sistema multiplicado por i/c . Para isso, definimos P_4 como:

$$P_4 = Cte \int T_{4k} dS_k = Cte \int T_{44} dV \quad (3.33)$$

A integração sendo feita sobre o hiperplano $x_4 = cte$. Mas de acordo com (3.31):

$$-T_{44} = \dot{q} \frac{\partial \Lambda}{\partial \dot{q}} - \Lambda \quad \left(\dot{q} \equiv \frac{\partial q}{\partial t} \right) \quad (3.34)$$

Esta grandeza deve ser considerada como a densidade de energia do sistema e como consequência, $-\int T_{44} dV$ é a energia total do sistema. Assim, definindo $cte = -i/c$ temos definitivamente o momento do sistema:

$$P_i = -\frac{i}{c} \int T_{ik} dS_k \quad (3.35)$$

O tensor T_{ik} é chamado de tensor energia-momento do sistema. Este tensor deve satisfazer uma condição importante, a ser determinada pela lei de conservação do momento angular:

$$M_{ik} = \int (x_i dP_k - x_k dP_i) = -\frac{i}{c} \int (x_i T_{kl} - x_k T_{il}) dS_l. \quad (3.36)$$

A lei da conservação do momento deve ser dada pela anulação da divergência da expressão que esta sob o sinal de soma em M_{ik} , assim:

$$\frac{\partial}{\partial x_l} (x_i T_{kl} - x_k T_{il}) = 0. \quad (3.37)$$

Notamos que $\frac{\partial x_i}{\partial x_l} = \delta_{il}$ e $\frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l} = 0$ então:

$$\delta_{il} T_{kl} - \delta_{kl} T_{il} = T_{ki} - T_{ik} = 0 \quad (3.38)$$

ou,

$$T_{ki} = T_{ik}. \quad (3.39)$$

O que exprime que o tensor energia-momento deve ser simétrico.

As componentes espaciais P_i formam o vetor momento do sistema e a componente temporal é o produto por i/c de sua energia. Podemos então chamar o vetor de componentes $-(i/c)T_{\alpha 4}$ de densidade de momento, e a quantidade $W = -T_{44}$ de densidade de energia.

Para interpretarmos as outras componentes T_{ik} , a equação (3.30) na forma tridimensional, nos dá:

$$\frac{1}{ic} \frac{\partial T_{44}}{\partial t} + \frac{\partial T_{4\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0, \quad \frac{1}{ic} \frac{\partial T_{\alpha 4}}{\partial t} + \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0 \quad (3.40)$$

Integramos estas equações num certo volume V do espaço. A primeira fornece:

$$\frac{1}{ic} \frac{\partial}{\partial t} \int T_{44} dV + \int \frac{\partial T_{4\alpha}}{\partial x_\alpha} dV = 0 \quad (3.41)$$

Ou, transformando a segunda integral por aplicação do teorema de Gauss,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int (-T_{44}) dV = ic \oint T_{4\alpha} df_\alpha \quad (3.42)$$

Onde a integral da direita é tomada sobre a superfície que delimita o volume V . Temos a esquerda a velocidade de variação da energia compreendida em V ; vemos então, que a expressão da direita é a quantidade de energia que atravessa o limite de V e que o vetor S de componentes

$$S_\alpha = -icT_{4\alpha} \quad (3.43)$$

é a densidade deste fluxo, a quantidade de energia que atravessa a unidade de superfície por unidade de tempo. Chegamos à importante conclusão: as condições de invariância relativística contidas no caráter tensorial das grandezas T_{ik} induzem uma relação determinada entre o

fluxo de energia e o momento, a densidade do fluxo de energia é igual ao produto da densidade de momento por c^2 .

De um modo análogo partindo da segunda equação, temos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \left(-\frac{i}{c} T_{\alpha 4} \right) dV = - \oint T_{\alpha\beta} df_{\beta}. \quad (3.44)$$

À esquerda temos a variação do momento por unidade de tempo do sistema no volume V ; segue-se que $\oint T_{\alpha\beta} df_{\beta}$ é o momento que sai por unidade de tempo do volume V . Assim, $T_{\alpha\beta}$ é a densidade de fluxo do momento. A densidade de fluxo de energia é um vetor; a densidade de fluxo de momento, que é um vetor, deve ser um tensor (a componente $T_{\alpha\beta}$ desse tensor é a α -ésima componente do momento que atravessa por unidade de tempo a unidade de superfície ortogonal ao eixo x_{β}).

Para finalizarmos o estudo do tensor energia-momento, vamos utilizar outro procedimento para o cálculo deste tensor, que apresenta a vantagem de fornecer de início uma expressão exata.

Em coordenadas curvilíneas a equação (3.26) deve ser escrita sob a forma:

$$S = \frac{1}{c} \int \Lambda \sqrt{-g} d\Omega \quad (3.45)$$

(em coordenadas de Galileu $g = -1$ e S se torna $\int \Lambda dV dt$) A integração é feita em todo o espaço (tridimensional) e entre dois instantes dados, isto é, no domínio infinito entre duas hipersuperfícies.

Faremos agora uma transformação de coordenadas de x^i para $x'^i = x^i + \xi^i$, onde os ξ^i são pequenos na equação (3.45). Neste caso as componentes g^{ik} se transformam da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} g'^{ik}(x'^l) &= g^{lm}(x^l) \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} = g^{lm} \left(\delta_l^i + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} \right) \left(\delta_m^k + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} \right) \\ &\approx g^{ik}(x^l) + g^{im} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^m} + g^{kl} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} \end{aligned} \quad (3.46)$$

O tensor g'^{ik} é função dos x'^l , e o tensor g^{ik} é função das coordenadas antigas x^l . Para que todos os termos se expressem em função das mesmas variáveis, vamos desenvolver os $g'^{ik}(x^l + \xi^l)$ em potencia de ξ^l . Assim, desprezando os termos de segunda ordem podemos substituir g'^{ik} por g^{ik} , ou seja:

$$g'^{ik}(x^l) = g^{ik}(x^l) - \xi^l \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} + g^{il} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^l} + g^{kl} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^l} \quad (3.47)$$

Como a ação S é um escalar, ela é invariante em relação a uma transformação de coordenadas. Podemos escrever a variação δS da ação partindo do princípio que em uma transformação de coordenadas as quantidades q variam de δq . Porém, não é necessário escrever os termos relacionados à variação dos q , pois estes termos se reduzem mutuamente em virtude das equações de campo. Conseqüentemente, é suficiente escrever os termos relacionados com a variação dos g_{ik} . Utilizando o teorema de Gauss e colocando sobre a fronteira de integração $\delta g^{ik} = 0$, obtemos δS sob a forma:

$$\begin{aligned} \delta S &= \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial g^{ik}} \delta g^{ik} + \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} \delta \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l} \right\} d\Omega \\ &= \frac{1}{c} \int \left\{ \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} \right\} \delta g^{ik} d\Omega \end{aligned} \quad (3.48)$$

Colocando

$$\frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{ik} = \frac{\partial}{\partial x^l} \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}} - \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial g^{ik}} \quad (3.49)$$

Temos:

$$\delta S = -\frac{1}{2c} \int T_{ik} \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega = -\frac{1}{2c} \int T_{ik} \delta g_{ik} \sqrt{-g} d\Omega \quad (3.50)$$

Levando em conta a simetria de T_{ik} e um pouco de álgebra, temos, anulando a variação da ação:

$$\delta S = \frac{1}{c} \int T_{i;k}^k \xi^i \sqrt{-g} d\Omega = 0 \quad (3.51)$$

Como os ξ^i são arbitrários, temos que:

$$T_{i;k}^k = 0. \quad (3.52)$$

Comparando esta equação com (3.30), que ocorre em coordenadas de Galileu, temos que o tensor definido por (3.49) é o tensor energia-momento, a menos de um fator constante. Este processo nos permite calcular o tensor energia-momento derivando covariantemente Λ em relação às componentes do tensor métrico diretamente em uma forma simétrica.

3.6 TENSOR DE CURVATURA^{13,22,23,26}

Para descrever as equações do campo gravitacional de maneira mais exata, vamos considerar novamente o princípio da equivalência. Como já foi visto em tópicos anteriores, é conveniente aplicar este princípio procurando equações de campo que são geralmente covariantes e que se reduzem a forma conhecida em campos fracos. Este processo nos leva a uma questão: quais tensores podem ser construídos a partir do tensor métrico e suas derivadas. Neste tópico, este problema será tratado como puramente matemático, e as informações obtidas serão usadas a seguir na determinação das equações de campo da gravitação.

Para isso, lembremos da regra de transformação da conexão afim:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\tau}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma'_{\rho\sigma} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\tau}} \frac{\partial^2 x^{\tau}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \quad (3.53)$$

Isolando o termo da direita:

$$\frac{\partial^2 x^{\tau}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} = \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \Gamma'_{\rho\sigma} \quad (3.54)$$

E após um pouco de álgebra encontramos a relação:

$$0 = \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} \right)$$

$$-\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\kappa}} \left(\frac{\partial \Gamma'^{\tau}_{\rho\sigma}}{\partial x'^{\eta}} - \frac{\partial \Gamma'^{\tau}_{\rho\eta}}{\partial x'^{\sigma}} + \Gamma'^{\tau}_{\lambda\sigma} \Gamma'^{\lambda}_{\eta\rho} - \Gamma'^{\tau}_{\lambda\eta} \Gamma'^{\lambda}_{\sigma\rho} \right) \quad (3.55)$$

Que pode ser escrita como a regra de transformação:

$$R'^{\tau}_{\rho\sigma\eta} = \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\eta}} R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa} \quad (3.56)$$

Onde

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa} \equiv \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\nu} \Gamma^{\lambda}_{\kappa\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\kappa} \Gamma^{\lambda}_{\nu\eta} \quad (3.57)$$

É o tensor de curvatura de Riemann-Christoffel.

Contraindo o tensor de curvatura, podemos deduzir um tensor de segunda ordem. Esta contração só pode ser efetuada de uma maneira: a contração do tensor R_{iklm} sobre os índices i e k ou l e m anulam o tensor devido à anti-simetria desses índices, e a contração sobre outro par qualquer dá o mesmo resultado, sem levar em conta o sinal. Assim, definimos o tensor de Ricci R_{ik} como segue:

$$R_{ik} = g^{lm} R_{limk} = R^l_{ilk} \quad (3.58)$$

Que é um tensor simétrico, ou seja:

$$R_{ik} = R_{ki}. \quad (3.59)$$

Usando o mesmo processo de contração, agora sobre o tensor de Ricci, obtemos o invariante:

$$R = g^{ik} R_{ik} = g^{il} g^{km} R_{iklm}, \quad (3.60)$$

Chamado curvatura escalar do espaço.

3.7 EQUAÇÃO DE EINSTEIN^{22,23,27,28}

As equações de campo da gravitação são inevitavelmente mais complicadas do que as já conhecidas do eletromagnetismo. No eletromagnetismo as equações são lineares porque o campo não carrega carga, enquanto o campo gravitacional carrega energia e momento, o que deve contribuir para sua própria fonte. Isto representa a não-linearidade das equações diferenciais parciais que descrevem o campo gravitacional, onde esta não-linearidade representa a influência do campo gravitacional sobre ele mesmo.

Para lidar com estes efeitos de não-linearidade, vamos recorrer novamente ao princípio da equivalência. Em um ponto X qualquer de um campo gravitacional forte podemos definir um sistema de coordenadas localmente inercial no qual:

$$g_{\alpha\beta}(X) = \eta_{\alpha\beta} \quad (3.61)$$

$$\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^\gamma}\right)_{x=X} = 0 \quad (3.62)$$

Considerando agora um campo fraco produzido por uma massa não relativística de densidade ρ , a componente tempo-tempo do tensor métrico é aproximadamente dada pela relação²²:

$$g_{00} \simeq -(1 + 2\phi) \quad (3.63)$$

Neste caso ϕ é o potencial Newtoniano, determinado pela equação de Poisson:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (3.64)$$

Onde G é a constante gravitacional de Newton. A densidade de energia T_{00} para objetos não relativísticos é igual à densidade de massa:

$$T_{00} \simeq \rho \quad (3.65)$$

Ou seja,

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G T_{00} \quad (3.66)$$

Esta equação de campo é válida apenas para campos estacionários fracos gerados por massas não relativísticas. Esta equação nos permite inferir que as equações para campos fracos gerados por uma distribuição geral de energia e momento $T_{\alpha\beta}$ tenham a forma:

$$G_{\alpha\beta} = -8\pi G T_{\alpha\beta} \quad (3.67)$$

Onde $G_{\alpha\beta}$ é a combinação linear do tensor métrico e suas primeiras e segundas derivadas. Do princípio da equivalência, partimos que a equação que descreve campos arbitrários deve ter a forma:

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (3.68)$$

E neste caso $G_{\mu\nu}$ é um tensor que se reduz a $G_{\alpha\beta}$ em campos fracos.

Para determinarmos $G_{\mu\nu}$ vamos observar algumas de suas propriedades:

- (a) Por definição $G_{\mu\nu}$ é um tensor;
- (b) $G_{\mu\nu}$ consiste em uma combinação linear da métrica e suas primeiras e segundas derivadas;
- (c) Como $T_{\mu\nu}$ é simétrico, $G_{\mu\nu}$ também é;
- (d) Como $T_{\mu\nu}$ é conservado em relação à derivação covariante, $G_{\mu\nu}$ também é, ou seja:

$$G^{\mu}_{\nu;\mu} = 0 \quad (3.69)$$

- (e) Para um campo estacionário produzido por matéria não relativística a componente 00 de (3.67) deve se reduzir a (3.65), então neste limite:

$$G_{00} \simeq \nabla^2 g_{00} \quad (3.70)$$

Com estas propriedades verificamos que $G_{\mu\nu}$ tem a forma:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (3.71)$$

O que nos dá às equações de campo de Einstein²²:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu} \quad (3.72)$$

No vácuo, $T_{\mu\nu}$ se anula, fornecendo as equações no espaço vazio²²:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (3.73)$$

Em um espaço-tempo de duas ou três dimensões isto implica na anulação do tensor de curvatura $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$, e a conseqüente ausência do campo gravitacional. Apenas em quatro ou mais dimensões pode existir campo gravitacional no espaço vazio²².

4 FÍSICA DE CRISTAIS LÍQUIDOS²⁹⁻³³

Neste capítulo serão apresentados os fundamentos da física dos cristais líquidos e sua elasticidade. O foco deste trabalho está voltado aos cristais líquidos nemáticos, tanto calamíticos quanto discóticos, termotrópicos e liotrópicos. O capítulo segue este caminho.

Aqui será feita uma abordagem usual na apresentação dos conceitos, baseada na literatura básica de cristais líquidos e elasticidade. A teoria relacionada à geometria e a relatividade surgirá no próximo capítulo.

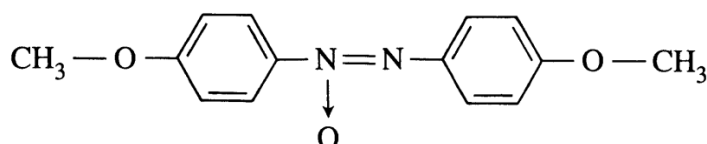
4.1 CRISTAIS LÍQUIDOS NEMÁTICOS²⁹⁻³²

Alguns materiais orgânicos não apresentam uma única transição de sólido para líquido, mas sim uma cascata de transições envolvendo novas fases. As propriedades mecânicas e simetrias dessas fases são intermediárias as propriedades dos líquidos e dos cristais. Por essa razão, esses materiais receberam o nome de cristais líquidos. A maneira mais correta de se referir a estes materiais seria dizer que eles apresentam fases mesomórficas.

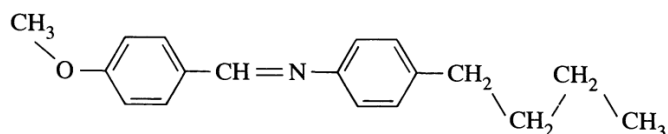
Os cristais líquidos são sistemas nos quais a ordem presente nos líquidos aparece em pelo menos uma direção do espaço e também existe algum grau de anisotropia. Além dessa propriedade os cristais líquidos dependem de forma muito forte da estrutura de suas moléculas. Por exemplo, cristais líquidos nemáticos e esméticos são feitos de objetos prolatos enquanto alguns outros tipos de nemáticos e colunares são feitos de objetos oblatos.

Uma molécula prolata bastante conhecida é o PAA que a forma na Fig. 4.1.

Figura 4.1 – Molécula do PAA.

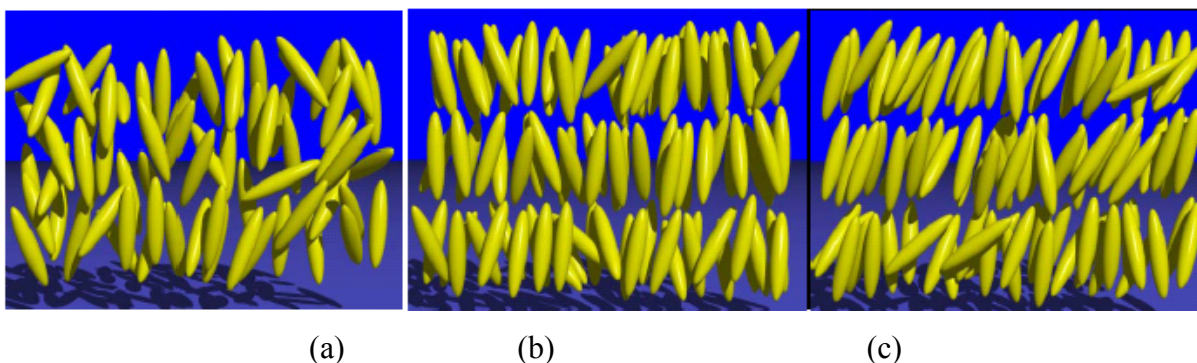


Essa molécula pode ser aproximada a um bastonete rígido de 20Å de comprimento e 5Å de largura. Outro exemplo é o MBBA cuja forma esta na Fig. 4.2.

Figura 4.2 – Molécula do MBBA.

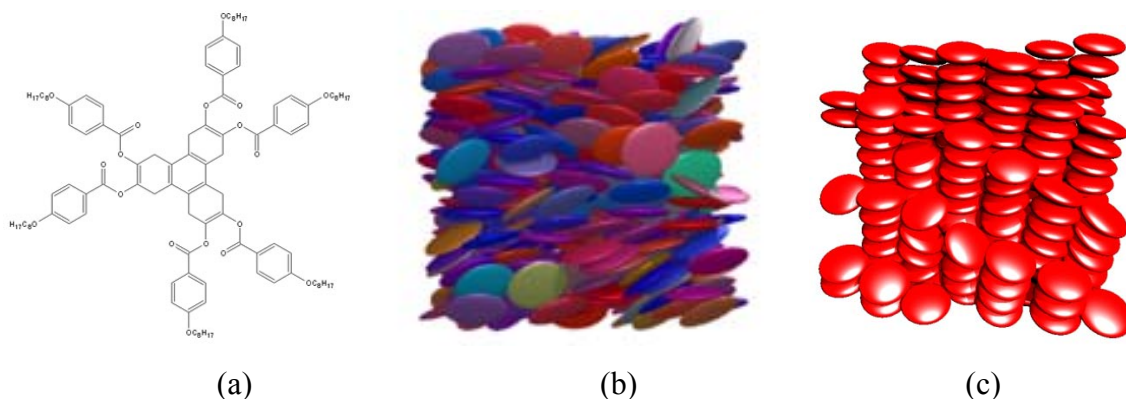
Para o PAA o estado nemático é encontrado apenas em temperaturas mais altas, entre 116°C e 135°C na pressão atmosférica, enquanto MBBA tem seu estado nemático entre 20°C e 47°C o que o tornaria mais acessível experimentalmente se não fosse a sua instabilidade química. Todos os sistemas citados são sistemas puros e a maneira de induzir a transição de fase dessas substâncias é variando a temperatura. Por essa razão, esses sistemas são conhecidos como termotrópicos. Existem também cristais líquidos compostos por misturas. Geralmente, esta mistura envolve um solvente (polar ou apolar) e certa quantidade de moléculas anfífilas que formam estruturas no solvente, onde a concentração de soluto é a principal responsável pelas transições de fase. Estas misturas são classificadas como cristais líquidos Liotrópicos.

Os Cristais líquidos termotrópicos são classificados de acordo com a maneira que suas moléculas se organizam e também a forma da molécula. As moléculas alongadas podem se organizar de varias maneiras, algumas mostradas na Fig.4.3:

Figura 4.3 – Organização das moléculas calamíticas de cristais líquidos: (a) Nemático, (b) Esmético A e (c) Esmético C.

As moléculas achatadas podem se organizar da seguinte forma:

Figura 4.4 – Organização das moléculas discóticas de cristais líquidos: (a) Molécula em forma de disco (b) Nemático Discótico, (c) Colunar.



Após apresentadas algumas fases dos cristais líquidos, a atenção será voltada para os Nemáticos. Uma representação da ordem na fase nemática pode ser vista nas Figuras 4.3(a) e 4.4(b). As principais características desse material são as seguintes:

(a) Os centros de gravidade das moléculas não têm ordem de longo alcance. As correlações na posição entre os centros de gravidade das moléculas vizinhas são similares aquelas existentes em um líquido convencional, exceto pela anisotropia na escala de comprimento. De fato, os nemáticos escoam como líquidos. Para um nemático típico como PAA a viscosidade é da ordem de 0,1 poise.

(b) Existe certa ordem na direção das moléculas; elas tendem a ser paralelas a algum eixo comum, que será definido como um vetor unitário \mathbf{n} , o diretor. Isso é refletido em todas as propriedades macroscópicas tensoriais: óticamente um nemático é um meio uniaxial com o eixo óptico na direção de \mathbf{n} (a diferença entre os índices de refração medidos com polarização paralela ou normal a \mathbf{n} é considerável, para o PAA é 0,2). Em todos os casos conhecidos desse material existe uma simetria rotacional completa em torno do eixo \mathbf{n} .

(c) A direção de \mathbf{n} é arbitrária no espaço; na prática é imposta por forças menores como a orientação das moléculas na parede do substrato.

(d) Os estados do diretor \mathbf{n} e $-\mathbf{n}$ são indistinguíveis. Se moléculas individuais são dipolos elétricos permanentes existirão dipolos orientados para cima na mesma quantidade dos dipolos orientados para baixo.

(e) As fases nemáticas ocorrem apenas com materiais que não distinguem direita de esquerda; cada molécula constituinte deve ser igual a sua imagem no espelho

(aquiral), caso não seja, o sistema deve ser uma mistura racêmica (1:1) entre os dois tipos de moléculas.

4.2 PARÂMETRO DE ORDEM³²

A fase nemática tem uma simetria menor que um líquido isotrópico. Qualitativamente isso quer dizer que a fase nemática é mais ordenada. Para quantificar essa propriedade é necessário definir um parâmetro de ordem que é não nulo na fase nemática, mas desaparece, por razões de simetria, na fase isotrópica. Em alguns sistemas físicos essa escolha é óbvia, mas na fase nemática não é trivial e para encontrar o parâmetro devemos proceder através de alguns passos.

Bastonetes rígidos são os objetos mais simples que permitem o comportamento nemático. O eixo de um bastonete será nomeado como um vetor unitário \mathbf{a} . O bastonete tem simetria cilíndrica completa em relação à \mathbf{a} . O diretor da fase nemática \mathbf{n} será o eixo z do sistema de coordenadas do laboratório. Definindo o vetor \mathbf{a} em relação as suas coordenadas polares θ e ϕ temos

$$\begin{aligned} a_x &= \text{sen}\theta\cos\phi, \\ a_y &= \text{sen}\theta\text{sen}\phi \quad e \\ a_z &= \cos\theta. \end{aligned} \tag{4.1}$$

O estado de alinhamento dos bastonetes pode ser descrito por uma função de distribuição $f(\theta, \phi)d\Omega$ (que nos dá a probabilidade de encontrar os bastonetes em um pequeno ângulo sólido $d\Omega = \text{sen}\theta d\theta d\phi$ em torno da direção (θ, ϕ)).

Partindo da discussão do tópico anterior, sabemos que em um nemático convencional temos as propriedades:

(a) $f(\theta, \phi)$ é independente de ϕ (a fase tem simetria cilíndrica completa em torno de \mathbf{n});

(b) $f(\theta)$ é igual a $f(\pi - \theta)$ (as direções \mathbf{n} e $-\mathbf{n}$ são equivalentes).

Por questões de praticidade nós gostaríamos de caracterizar o alinhamento não através de todo o valor de $f(\theta)$, mas preferencialmente por um parâmetro numérico

relacionado. Assim, a função que melhor mescla estas propriedades é a que descreve o momento de quadrupolo:

$$S = \frac{1}{2} \langle (3\cos^2\theta - 1) \rangle = \int f(\theta) \frac{1}{2} (3\cos^2\theta - 1) d\Omega \quad (4.2)$$

Quando o alinhamento é paralelo ($\theta = 0$ ou $\theta = \pi$), temos $S = 1$; se o alinhamento é perpendicular, ou seja, $\theta = \frac{\pi}{2}$ deveremos ter $S = -1/2$; se temos uma orientação completamente randômica ($f(\theta)$ independente de θ) nós devemos ter $\langle \cos^2\theta \rangle = \frac{1}{3}$ e $S = 0$. Então a variável S mede o alinhamento.

Para generalizarmos o parâmetro de ordem obtido, consideremos \mathbf{a} , \mathbf{b} e \mathbf{c} três vetores ortogonais unitários ligados a molécula e a matriz de ordenamento:

$$S_{ij}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \langle 3i_{\alpha}j_{\beta} - \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} \rangle \quad (4.3)$$

onde $\alpha, \beta = x, y, z$ são índices que se referem ao sistema de laboratório, enquanto a, b, c . $S_{ij}^{\alpha\beta}$ é simétrico em ij e em $\alpha\beta$ e também é um tensor de traço nulo com respeito a cada par.

$$S_{ij}^{\alpha\alpha} = 0 \text{ e } S_{ii}^{\alpha\beta} = 0 \quad (4.4)$$

Como visto no tópico anterior, a estrutura nemática tem simetria completa em torno do eixo óptico. Definido este eixo novamente como o eixo z, essa propriedade nos leva a:

$$S_{ij}^{xx} = S_{ij}^{yy} \text{ e } S_{ij}^{xy} = 0 \quad (4.5)$$

O plano xy é o plano de reflexão da estrutura, assim:

$$S_{ij}^{xx} = S_{ij}^{zy} = 0 \quad (4.6)$$

Em uma estrutura nemática uniaxial, as únicas componentes não nulas de

$S_{ij}^{\alpha\beta}$ são:

$$S_{ij}^{zz} = -2S_{ij}^{xx} = S_{ij} \quad (4.7)$$

E o estado de alinhamento da molécula rígida é descrito por uma matriz 3×3 , S_{ij} , que é simétrica e de traço zero.

O tensor $S_{ij}^{\alpha\beta}$ pode descrever estados menos simétricos. A matriz de ordenamento S é simétrica real e de traço nulo. Ou seja, ela pode ser diagonalizada em um sistema de referencia ortogonal xyz . Assim podemos escrever:

$$S_{ij}^{xy} = S_{ij}^{xx} = S_{ij}^{yz} = 0 \quad (4.8)$$

e

$$S_{ij}^{xx} + S_{ij}^{yy} + S_{ij}^{zz} = 0 \quad (4.9)$$

Mas em geral $S_{ij}^{xx} \neq S_{ij}^{yy} \neq S_{ij}^{zz}$. Uma fase caracterizada por essa matriz de ordenamento é menos simétrica que a nemática usual que descrevemos a pouco. Ela possui três planos de simetria (xy , xz e yz), três eixos duplos xyz e um ponto de inversão: esta é a fase biaxial. Essas fases foram observadas em vários tipos de cristais líquidos³².

Partindo deste resultado podemos fazer uma aproximação macroscópica. A diferença típica entre um líquido isotrópico e um nemático é encontrada na medida de todas as propriedades macroscópicas tensoriais. A relação entre o momento magnético \mathbf{M} e o campo \mathbf{H} é dada por:

$$M_{\alpha} = \chi_{\alpha\beta} H_{\beta} \quad (4.10)$$

Onde $\alpha, \beta = x, y, z$. Quando o campo \mathbf{H} é estático, o tensor $\chi_{\alpha\beta}$, que representa a susceptibilidade magnética, é simétrico. Num líquido isotrópico temos:

$$\chi_{\alpha\beta} = \chi \delta_{\alpha\beta} \quad (4.11)$$

Enquanto numa fase nemática uniaxial (sempre escolhendo o eixo z paralelo ao eixo do nemático) temos:

$$\chi_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} \chi_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{\parallel} \end{vmatrix} \quad (4.12)$$

Para definir um parâmetro de ordem nulo na fase isotrópica extraímos a parte anisotrópica $Q_{\alpha\beta}$ da suscetibilidade magnética:

$$Q_{\alpha\beta} = G \left(\chi_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \sum_y \chi_{yy} \right) \quad (4.13)$$

Onde nós chamamos $Q_{\alpha\beta}$ de parâmetro de ordem tensorial. Este Tensor é real, simétrico e de traço nulo. A constante de normalização G é mais convenientemente definida quando fazemos $Q_{zz} = 1$ em um sistema totalmente orientado.

Essa definição de parâmetro de ordem cobre uma classe de cristais líquidos que vai além dos nemáticos. Quando os eixos α e β são escolhidos de maneira própria a diagonalizar a matriz simétrica Q , a estrutura mais geral é:

$$Q_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} Q_1 & 0 & 0 \\ 0 & Q_2 & 0 \\ 0 & 0 & -(Q_1 + Q_2) \end{vmatrix} \quad (4.14)$$

Isso corresponde a um nemático biaxial que já foi descrito em termos da matriz S . Em um nemático uniaxial a forma diagonal é simplificada para:

$$Q_{\alpha\beta} = G \begin{vmatrix} \frac{1}{3}(\chi_{\perp} - \chi_{\parallel}) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(\chi_{\perp} - \chi_{\parallel}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}(\chi_{\parallel} - \chi_{\perp}) \end{vmatrix}. \quad (4.15)$$

A estrutura da energia livre termodinâmica, como função de $Q_{\alpha\beta}$, que decide qual é a melhor forma, ou seja, o que descreve se nós temos um nemático uniaxial ou biaxial.

Quando as moléculas são consideradas rígidas esperamos encontrar uma conexão simples entre o tensor macroscópico $\chi_{\alpha\beta}$ e a quantidade microscópica $S_{ij}^{\alpha\beta}$.

Como o acoplamento magnético entre moléculas vizinhas é muito pequeno, $\chi_{\alpha\beta}$ pode ser considerada simplesmente a soma das respostas moleculares individuais. Vamos chamar o tensor de polarizabilidade magnética de uma molécula de A_{ij} , referente ao sistema de coordenadas molecular. A partir da regra de transformação para tensores temos:

$$\chi_{\alpha\beta} = c \sum_{ij} A_{ij} \langle j_{\alpha} j_{\beta} \rangle \quad (4.16)$$

Onde c é o numero de moléculas por cm^{-3} . Usando a definição (4.3), a parte anisotrópica de χ é:

$$\chi_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \chi_{yy} = c A_{ij} S_{ij}^{\alpha\beta} \quad (4.17)$$

A dependência da temperatura do coeficiente A_{ij} é fraca.

4.3 ELASTICIDADE^{32,33}

Num cristal líquido nemático ideal as moléculas estão em média alinhadas na direção comum $\pm n$. Esse sistema é uniaxial e o parâmetro de ordem tensorial tem a forma:

$$Q_{\alpha\beta} = Q(T) \left(n_{\alpha} n_{\beta} - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (4.18)$$

Entretanto, normalmente haverá algum tipo de deformação no alinhamento e o parâmetro de ordem $Q_{\alpha\beta}$ vai variar ponto a ponto. Na maioria das situações de interesse as distâncias que ocorrem variações significativas de $Q_{\alpha\beta}$ são muito maiores que as dimensões moleculares.

Essas deformações devem descritas por uma teoria contínua desconsiderando os detalhes da estrutura na escala molecular. Para construir esta teoria partimos da densidade de energia livre F que é expressa em função de $Q_{\alpha\beta}$. Em sistemas fracamente distorcidos, em qualquer ponto, as propriedades ópticas locais são as mesmas de

um cristal uniaxial e a magnitude da anisotropia não se altera, apenas a orientação do eixo óptico que é rotacionada. Em termos do parâmetro de ordem $Q_{\alpha\beta}$ isso significa:

$$Q_{\alpha\beta}(r) = Q(T) \left\{ n_{\alpha}(r)n_{\beta}(r) - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta} \right\} \quad (4.19)$$

O estado distorcido pode ser descrito inteiramente em termos do campo vetorial \mathbf{r} . O diretor \mathbf{n} é um vetor unitário. Assumimos que \mathbf{n} varia devagar e de maneira suave em relação a \mathbf{r} (exceto em alguns pontos ou linhas singulares).

Vamos impor em nosso nemático certo grau de distorção descrito por um diretor variável $\mathbf{n}(\mathbf{r})$. Vamos fazer algumas suposições sobre esse sistema.

As variações de \mathbf{n} são lentas na escala molecular, assim:

$$a\nabla\mathbf{n} \ll 1 \quad (4.20)$$

(isto não implica que \mathbf{n} permaneça paralelo a uma direção fixa).

As únicas forças de importância entre as moléculas são de curto alcance. Vamos chamar F_a de energia livre por cm^3 do material nemático devido à distorção de \mathbf{n} , assim F_a se anulará caso $\nabla\mathbf{n} = 0$. Devemos impor algumas condições sobre F_a :

- (a) F_a deve ser par em \mathbf{n} ; pois os estados \mathbf{n} e $-\mathbf{n}$ são indistinguíveis.
- (b) Não existem termos lineares no $\nabla\mathbf{n}$. Os únicos termos dessa forma que são invariantes por rotações são:
 - $\nabla\mathbf{n}$: é excluído pela condição (a);
 - $\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n}$: esse termo muda de sinal através da transformação $x \Rightarrow -x, y \Rightarrow -y, z \Rightarrow -z$.

(c) Os termos em F_a que são da forma $\nabla\mathbf{u}$, onde $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ é um campo vetorial arbitrário, deve ser descartado. Isso é consequência da identidade:

$$\int \nabla\mathbf{u} \, dr \equiv \int d\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} \quad (4.21)$$

Onde $\int d\boldsymbol{\sigma}$ representa uma integral de superfície e $d\boldsymbol{\sigma}$ é normal a superfície.

Assim temos a forma da energia livre:

$$F_d = \frac{1}{2}K_1(\nabla\mathbf{n})^2 + \frac{1}{2}K_2(\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n})^2 + \frac{1}{2}K_3(\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{n})^2 \quad (4.22)$$

Essa equação é a formula fundamental da teoria continua dos nemáticos.

Uma análise interessante a se fazer é obter as condições de equilíbrio na ausência de campos externos. Para isso, consideramos que a energia total de distorção $\mathcal{F}_d = \int F_d dr$ é um mínimo em relação a todas as variações do diretor onde $n^2 = 1$. Essa ultima condição nos leva a:

$$\delta\mathcal{F}_d = \int dr \frac{1}{2}\lambda(r)\delta(n^2) = \int dr \lambda(r)\mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{n}(r) \quad (4.23)$$

Onde $\lambda(\mathbf{r})$ é uma função arbitrária de \mathbf{r} e $\delta\mathbf{n}$ é uma variação arbitrária do vetor \mathbf{n} .

Como visto na equação (4.22), F_d é uma função quadrática dos gradientes $g_{\alpha\beta} = \partial_\alpha n_\beta$, e também é uma função de \mathbf{n} . Fazendo uma pequena variação em todos os pontos, temos:

$$\delta\mathcal{F}_d = \int \left\{ \frac{\partial F_d}{\partial n_\beta} \delta n_\beta + \frac{\partial F_d}{\partial g_{\alpha\beta}} \partial_\alpha (\delta n_\beta) \right\} \quad (4.24)$$

Após alguma álgebra, encontramos a equação de equilíbrio:

$$\mathbf{h}_\beta \equiv -\frac{\partial F_d}{\partial n_\beta} + \partial_\alpha \left(\frac{\partial F_d}{\partial g_{\alpha\beta}} \right) = -\lambda(\mathbf{r})n_\beta \quad (4.25)$$

Onde \mathbf{h} representa campo molecular. Esta equação impõe que o diretor deve ser paralelo ao campo molecular em todos os pontos. Observando a equação (4.22), o campo molecular toma uma forma um pouco mais complexa:

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_S + \mathbf{h}_T + \mathbf{h}_B \quad (4.26)$$

Onde cada parte se refere às deformações Splay, Twist e Bend respectivamente, e são dadas por:

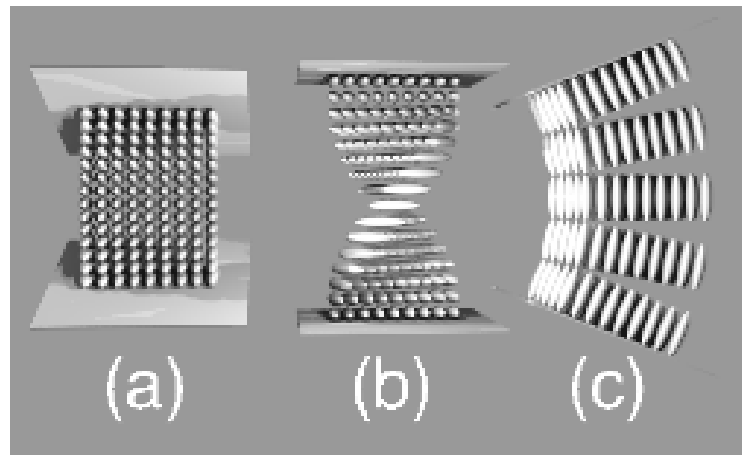
$$h_S = K_1 \nabla(\nabla \cdot \mathbf{n}) \quad (4.27)$$

$$h_T = -K_2 \{A \nabla \times \mathbf{n} + \nabla \times (A \mathbf{n})\} \quad (4.28)$$

$$h_B = K_3 \{B \times \nabla \times \mathbf{n} + \nabla \times (B \times \mathbf{n})\} \quad (4.29)$$

Com $A = \mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n}$ e $B = \mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{n}$.

Figura 4.5 – Distorções elásticas de um cristal líquido Nemático: (a) Splay, (b) Twist e (c) Bend.



4.3.1 Tensor de Stress^{32,33}

Em um corpo que não está deformado a distribuição das moléculas corresponde ao estado de equilíbrio dinâmico, ou seja, se considerarmos uma porção do corpo, as forças resultantes naquela região são zero.

Quando ocorre uma deformação, a distribuição das moléculas muda e o corpo tende a procurar o seu estado original de equilíbrio. Surgem forças que procuram levar o corpo ao equilíbrio. Essas forças internas que aparecem quando o corpo é deformado são os stresses internos. Se não ocorre deformação, não existe stress interno.

Os stresses internos são devidos a forças moleculares, ou seja, as forças de interação entre as moléculas. Na teoria da elasticidade, as forças moleculares são consideradas de curto alcance. Os seus efeitos se estendem apenas na vizinhança da molécula. A teoria da elasticidade é uma teoria macroscópica, as únicas distâncias consideradas são muito maiores que as distâncias moleculares, ou seja, o campo de ação das forças moleculares é considerado

como zero na teoria da elasticidade. Então, as forças aplicadas em qualquer parte do corpo agem apenas na superfície na mesma região do corpo.

Vamos considerar a força total em uma região do corpo. Primeiramente, essa força total é igual à soma de todas as forças em todos os elementos de volume naquela região do corpo. Matematicamente isso pode ser escrito como a integral volumétrica $\int \mathbf{F} dV$ onde \mathbf{F} é a força por unidade de volume e $\mathbf{F} dV$ é a força no elemento de volume dV . As forças internas se cancelam pelo princípio da terceira lei de Newton.

Para qualquer parte do corpo, cada uma das três componentes $\int F_i dV$ de todos stresses internos resultantes podem ser transformados em uma integral de superfície. Como sabemos da análise vetorial, a integral de um escalar sobre um volume arbitrário pode ser transformada em uma integral de superfície se o escalar é o divergente de um vetor. Neste caso, nós temos a integral de um vetor e não de um escalar. Então, o vetor F_i deve ser a divergência de um tensor de segunda ordem da forma:

$$F_i = \partial \sigma_{ik} / \partial x_k \quad (4.30)$$

Assim, força em qualquer volume pode ser escrita como uma integral sobre a superfície fechada envolvendo este volume.

Agora vamos considerar o momento angular das forças em uma parte do corpo. O momento angular de uma força \mathbf{F} pode ser descrita por um tensor antisimétrico de segunda ordem, onde suas componentes são $F_i x_k - F_k x_i$, com x_i representando as coordenadas do ponto onde a força é aplicada. Então, o momento angular das forças no elemento de volume dV é $(F_i x_k - F_k x_i) dV$ e em todo volume é $\int (F_i x_k - F_k x_i) dV$. Como a força total em qualquer volume, isso pode ser expresso como uma integral de superfície:

$$M_{ik} = \int \left(\frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_k - \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} x_i \right) dV = \int \frac{\partial (\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i)}{\partial x_l} dV - \int \left(\sigma_{il} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} - \sigma_{kl} \frac{\partial x_i}{\partial x_l} \right) dV \quad (4.31)$$

No segundo termo recorreremos à propriedade $\frac{\partial x_k}{\partial x_l} = \delta_{kl}$. No primeiro termo, o integrando é a divergência de um tensor; a integral pode ser transformada em uma integral de superfície:

$$M_{ik} = \oint (\sigma_{il}x_k - \sigma_{kl}x_i)df_l + \int (\sigma_{ki} - \sigma_{ik})dV \quad (4.32)$$

O tensor M_{ik} vai ser uma integral sobre a superfície apenas se o tensor de stress for simétrico:

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki} \quad (4.33)$$

Assim, a integral de volume se anula. Então, o momento angular das forças em uma parte do corpo pode ser escrito na forma:

$$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i)dV = \oint (\sigma_{il}x_k - \sigma_{kl}x_i)df_l \quad (4.34)$$

Em equilíbrio, os stresses internos em todos os elementos de volume devem se balancear, assim temos $F_i = 0$. Então a equação de equilíbrio de um corpo deformado é:

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0 \quad (4.35)$$

4.4 TEXTURAS³²

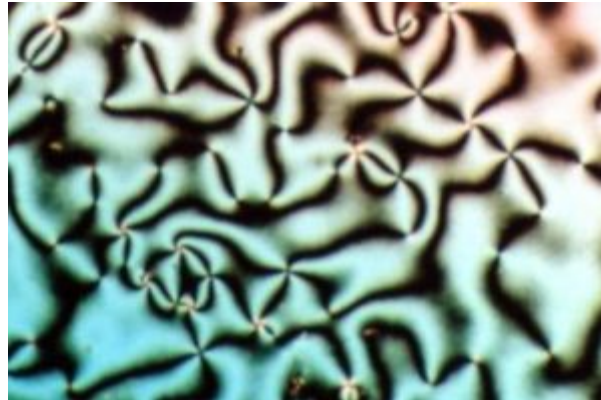
Nos tópicos anteriores, nossa atenção ficou restrita nos arranjos nemáticos que envolvem apenas variações contínuas do diretor $\mathbf{n}(\mathbf{r})$. Mas existem outras situações físicas importantes onde $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ não é uma função suave de \mathbf{r} em todos os pontos.

Considerando amostras finas de líquidos nemáticos sob polarizadores cruzados, é comum observar um sistema de filamentos flexíveis e escuros. Alguns desses filamentos aparentam flutuar livremente no fluido. Outros parecem presos as paredes ou não tão livres como no caso anterior. Nas primeiras análises das propriedades ópticas desses filamentos foi verificado que eles não eram devidos a impurezas no material, e sim correspondentes a linhas de singularidade no alinhamento molecular. Posteriormente, essas propriedades foram denominadas de disclinações.

Quando as condições de contorno, que são impostas pelas paredes de vidro sobre o líquido nemático, são continuamente degeneradas (tangenciais ou cônicas, sem nenhum eixo preferido no plano das paredes) normalmente se verifica um sistema de pontos

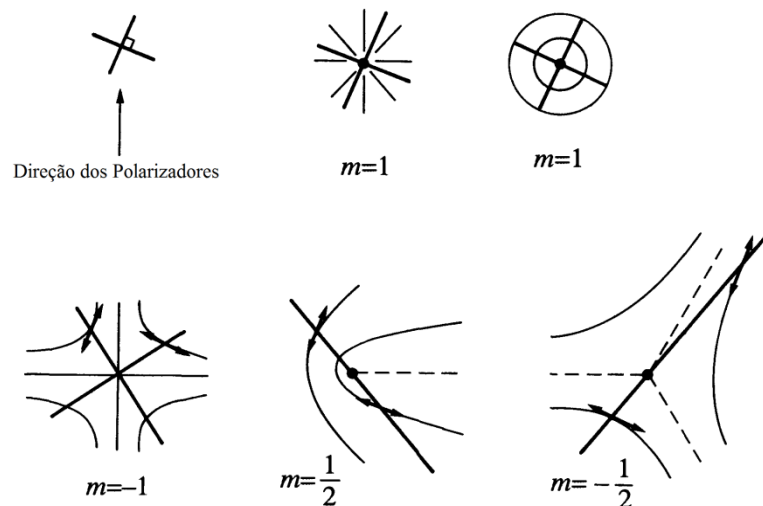
singulares na superfície. Através dos polarizadores cruzados é possível ver que esses pontos são conectados por tiras escuras, mostrando as regiões onde o eixo óptico do material é paralelo a um dos polarizadores. A textura geral resultante desses pontos é conhecida como Schlieren (Fig. 4.6).

Figura 4.6 – Textura do tipo Schlieren de um cristal líquido Nemático entre polarizadores cruzados.



O arranjo das moléculas na vizinhança das superfícies pode ser observado de varias maneiras. Com todos os métodos conhecidos são observados quatro tipos de arranjos moleculares como mostrado na Fig. 4.7. Esses quatro tipos de arranjos são classificados de acordo com o índice m , que toma os valores: $(-1, -1/2, 1/2, 1)$.

– Arranjo geométrico das moléculas na região de um defeito.



Estruturas de vários tipos em duas dimensões podem ser resumidas da seguinte forma: assumimos que o diretor \mathbf{n} está no plano da parede e define dois eixos ortogonais (x, y) neste plano. O vetor \mathbf{r} descreve a distância entre a singularidade e o ponto de observação, e $\phi(\mathbf{r})$ é o ângulo entre \mathbf{r} e x . O ângulo entre \mathbf{n} e x é denominado $\theta(\mathbf{r})$. Uma relação aproximada para θ que é correta para o ponto de vista da simetria é:

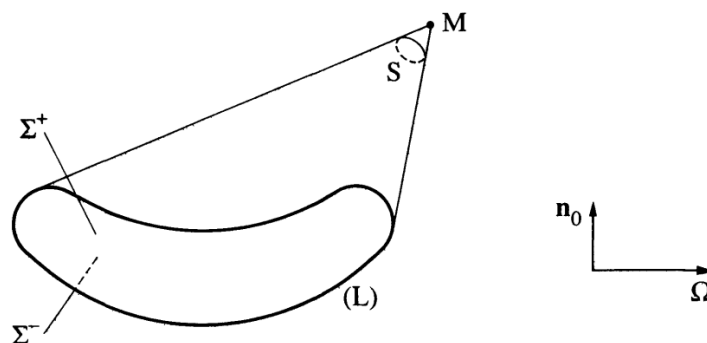
$$\theta(r) = m\phi(r) + \text{const.} \quad (4.36)$$

Assim, se percorrermos um caminho fechado em torno de um ponto circular, e dermos uma volta completa ($\Delta\phi = 2\pi$), verificamos que o diretor foi rotacionado de $\Delta\theta = 2\pi m$. Isso é aceitável apenas se m é um inteiro ou semi - inteiro.

Uma disclinação é uma descontinuidade na orientação, ou seja, uma descontinuidade no campo diretor $\mathbf{n}(\mathbf{r})$. Esta descontinuidade pode ser localizada em um ponto, uma linha ou em uma superfície. Entretanto, disclinações planares são completamente instáveis e podem ser desconsideradas. Assim temos apenas dois tipos de disclinações em nemáticos: linhas e pontos.

Para ficar mais claro, vamos considerar um processo geométrico simples, gerando uma linha de disclinação fechada L em um nemático (Fig. 4.8). Vamos considerar uma superfície Σ , limitada por L , com os lados Σ^+ e Σ^- . Utilizando uma força externa qualquer, giramos o diretor das moléculas em contato com Σ^+ em torno de um eixo Ω , que é normal ao eixo óptico \mathbf{n}_0 do material não perturbado. A variável Ω define tanto o eixo quanto a magnitude da rotação. Do lado de Σ^- , a situação se mantém não perturbada.

Figura 4.8 – Processo geométrico que gera uma disclinação L . O ponto M situa o observador.



A distâncias finitas de Σ , o diretor $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ será ajustado naturalmente e passará a variar de maneira contínua com \mathbf{r} . A configuração resultante é contínua exceto em Σ ; neste caso, teremos uma descontinuidade em forma de folha que pode ser mantida apenas na presença de forças externas. Entretanto, se o ângulo de rotação Ω é tal que os eixos ópticos acima e abaixo do corte coincidam, podemos desligar as forças externas e manter uma conformação não trivial. A condição para que isto ocorra é:

$$\Omega = 2\pi m \quad (4.37)$$

A conformação resultante é contínua em todas as partes exceto na linha L . Dizemos que L é uma disclinação de força m . Nas Figuras 4.9 e 4.10 vemos o arranjo molecular em torno de uma linha de disclinação, para dois casos de importância respectivamente: Ω paralelo a linha e Ω normal a linha.

Figura 4.9 – Forma de uma disclinação de força $m = \pm 1/2$. (A linha L é normal ao plano da página).

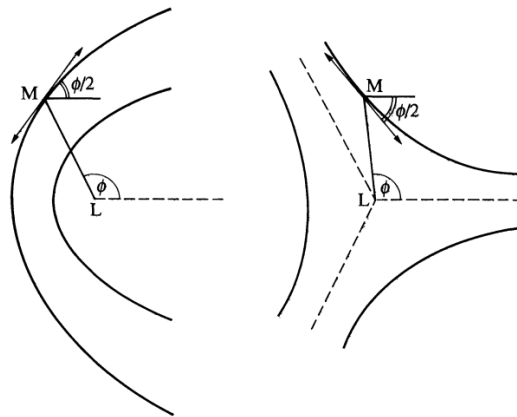
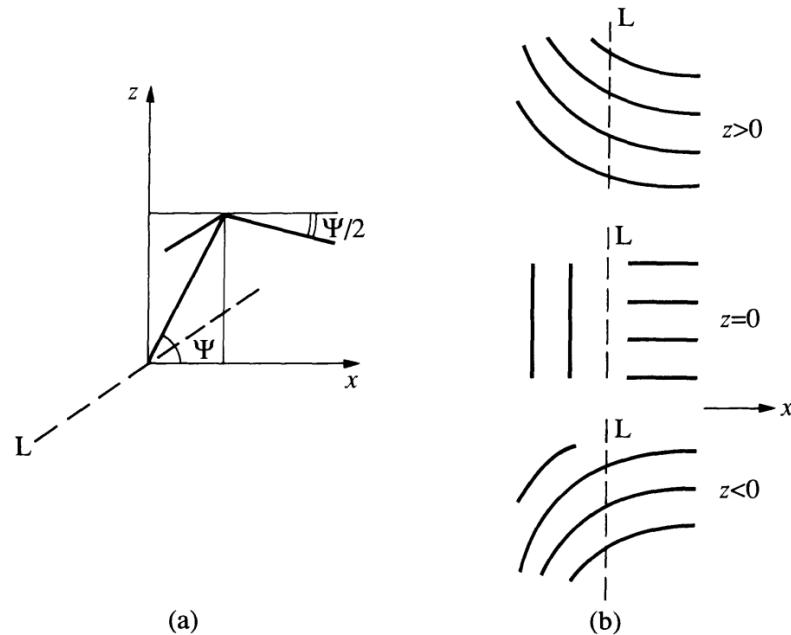


Figura 4.10 – Forma de uma disclinação do tipo Twist de força $m = 1/2$. (a) Construção geométrica; (b) Distribuição molecular: As moléculas estão sempre na horizontal.



Como as disclinações nos sólidos, o cálculo das distorções em torno de uma linha é um tanto complexo. Para simplificar este cálculo, usaremos a aproximação de uma constante para a energia de distorção:

$$F_d = \frac{1}{2}K[(\nabla \cdot \mathbf{n})^2 + (\nabla \times \mathbf{n})^2] = \frac{1}{2}K\partial_\alpha n_\beta \partial_\alpha n_\beta \quad (4.38)$$

Verificando o caso apresentado na Figura 4.9 o eixo z é considerado sobre a linha. O diretor \mathbf{n} está no plano xy e tem um ângulo θ com o eixo x . Assim, a energia de distorção (4.38) se reduz a:

$$F_d = \frac{1}{2}K(\nabla\theta)^2 \quad (4.39)$$

Minimizando $\mathcal{F}_d = \int F_d dr$ temos a condição de equilíbrio:

$$\nabla^2\theta = 0 \quad (4.40)$$

As soluções da equação (4.40) são descontínuas no eixo z e precisamente da forma empírica encontrada anteriormente. Nessa textura, θ é uma função linear do ângulo ϕ e rotações de 2π em torno da linha recupera a direção inicial do eixo óptico: θ varia apenas por valores de π ou 2π . Assim, o coeficiente m deve ser inteiro ou semi-inteiro.

Para verificar se a equação (4.36) é compatível com a equação (4.40) é conveniente investigar o vetor $\nabla\theta$. De acordo com a equação (4.36) esse vetor é sempre tangencial e de magnitude:

$$|\nabla\theta| = \frac{m}{\rho} \quad (4.41)$$

Onde $\rho = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ é a distância para a linha. Esse campo vetorial não possui divergência, ou seja, $\nabla(\nabla\theta) \equiv \nabla^2\theta = 0$.

5 CRISTAIS LÍQUIDOS E RELATIVIDADE

Na década de 80, Hess e colaboradores propuseram que as propriedades reológicas anisotrópicas de um cristal líquido poderiam ser obtidas através de uma transformação afim, na qual o potencial esférico de uma molécula esférica de um líquido isotrópico hipotético é deformado até assumir a forma elipsoidal do potencial de interação de um cristal líquido.¹⁵⁻¹⁹ O objetivo principal deste trabalho é propor um método geométrico que generaliza esta aproximação de maneira que essa deformação seja dependente da posição.

Iniciaremos o processo com a observação que em um nemático usual, a orientação do diretor não é homogênea e como conseqüência, a deformação molecular que produz a aproximação de conexão afim é dependente da posição. Assim, as ferramentas matemáticas correspondentes devem ser levadas em consideração. Essencialmente será mostrado que após esse tipo de transformação, as derivadas usuais não se transformam como um vetor covariante usual, e como conseqüência, devem ser substituídas por derivadas covariantes. As ferramentas matemáticas que descrevem essa mudança não são costumeiramente usadas na física de cristais líquidos. Assim, a maneira natural de implementar essa nova matemática é considerar que o uso da aproximação de conexão afim de Hess mapeia as texturas nemáticas em uma superfície diferenciável não plana.

Um dos pontos deste trabalho é enfatizar que as ferramentas da geometria diferencial são relevantes e podem ser usadas no estudo dos cristais líquidos nemáticos. Outro ponto é a verificação de que esta abordagem aos cristais líquidos é formalmente semelhante à teoria do campo gravitacional descrita pela teoria da relatividade geral, apresentada no capítulo 3. É possível formular os princípios das duas teorias usando desenvolvimentos semelhantes, o que nos leva ao estabelecimento de uma correspondência entre alguns aspectos das duas teorias.

Como conseqüência, algumas texturas de cristais líquidos nemáticos podem ser descritas por uma equação semelhante à de Einstein da Relatividade Geral, com o tensor de stress elástico tomando o lugar do tensor energia momento. No mais, o limite plano desta equação é a generalização da equação de Poisson que descreve as texturas geradas pelos defeitos dos cristais líquidos, com a vantagem desta equação ser dependente da temperatura.

5.1 HIPÓTESE DE HESS E O TENSOR MÉTRICO¹⁵⁻²¹

A interação entre as moléculas de cristal líquido pode ser obtida da interação entre moléculas esféricas de um líquido isotrópico hipotético, desde que o potencial esférico seja deformado até assumir a forma elipsoidal. Matematicamente, assumimos que o potencial de interação elipsoidal Φ_E entre as moléculas nemáticas podem ser transformadas num potencial de interação esférico Φ_S , desde que o vetor \mathbf{r} que conecta as duas partículas seja submetido a uma transformação afim apropriada. Ou seja,

$$\Phi_E(r_S) = \Phi_S(r_E) \quad (5.1)$$

Onde os índices E e S se referem as simetrias elipsoidal e esférica respectivamente. O potencial não esférico pode ser substituído pelo esférico se a distância entre dois pontos é dada por uma métrica na qual dois pontos na superfície equipotencial não esférica se tornam equidistantes do centro do potencial. Como consequência deve haver uma transformação afim que leva a física dos líquidos formada por moléculas esféricas para a física dos líquidos com moléculas elipsoidais. Essa afirmação nos leva ao ponto onde a medida das distancias nos dois potenciais devem ser conectadas por relações da forma:

$$r_S^i = \frac{dr_S^i}{dr_E^k} r_E^k \quad e \quad \frac{d}{dr_S^i} = \frac{dr_E^k}{dr_S^i} \frac{d}{dr_E^k} \quad (5.2)$$

A primeira equação é a lei de transformação para vetores enquanto a segunda, dá a lei de transformação das derivadas.

Uma consequência essencial dessa hipótese surge quando se assume que a amostra nemática não esta alinhada de forma homogênea e a correspondente transformação afim se torna efetivamente dependente da posição. Nestas condições, as derivadas de um vetor não se comportam como um tensor.

Quando a configuração do diretor não é homogênea, mudando de ponto a ponto, normalmente o comportamento das derivadas de um vetor não é o comportamento de um tensor. A maneira comum de lidar com este problema é alterar a regra de diferenciação:

derivadas comuns dão lugar às derivadas covariantes, discutidas no capítulo 3. Mesmo com o uso da diferenciação covariante necessária, é possível que este procedimento seja um problema em um sistema de coordenadas inconveniente, e a apropriada mudança no sistema de coordenadas recupera a regra de derivação usual. Porém, existem situações nas quais o uso das derivadas covariantes é inevitável, e não existe mudança de coordenada apta a restabelecer a regra de diferenciação usual. Neste caso, a superfície onde o fenômeno físico acontece tem uma curvatura intrínseca.

O primeiro resultado apresentado é a demonstração que a aproximação de conexão afim revela que a descrição matemática das texturas nemáticas tem necessariamente uma superfície com curvatura intrínseca associada.

Como foi visto acima, existe a necessidade do uso da derivada covariante quando é usada a aproximação de conexão afim para descrever a física dos nemáticos. Para que isso seja feito, devemos determinar a métrica da superfície gerada pelas texturas nemáticas. Para encontrarmos a métrica lembramos que a distância em uma geometria esférica é dada por:

$$d_S^2 = \delta_{ij} r_S^i r_S^j \quad (5.3)$$

Enquanto na geometria não esférica:

$$d_E^2 = g_{ij} r_E^i r_E^j \quad (5.4)$$

Onde a métrica g_{ij} é induzida pelas superfícies equipotenciais do potencial não esférico. Para obter as leis de transformação, dadas na equação (5.2), observamos que os pontos localizados na mesma superfície equipotencial elipsoidal são equidistantes do centro do potencial. Isto nos leva a concluir que a hipótese de Hess pode ser formulada de maneira que satisfaça a regra:

$$d^2 \equiv d_S^2 = d_E^2 \quad (5.5)$$

Assim, a passagem do potencial esférico para o potencial elipsoidal pode ser feita através de uma mudança de métrica. Ou seja, a medida das distancias nos dois potenciais

deve ser conectada por alguma lei determinada pela equação (5.2). Para obter uma relação formal entre a métrica e essa mudança no sistema de coordenada é suficiente observar, através da substituição de (5.1, 5.3 e 5.4) na equação anterior:

$$\delta_{ij} r_S^i r_S^j = \delta_{ij} \frac{dr_S^i}{dr_E^k} \frac{dr_S^j}{dr_E^l} r_E^k r_E^l \quad (5.6)$$

Ou seja,

$$g_{kl} = \frac{dr_S^i}{dr_E^k} \frac{dr_S^j}{dr_E^l} \delta_{ij} \quad (5.7)$$

Essas regras dão a lei de transformação da métrica para o método da transformação afim; quando a quantidade física é conhecida num sistema esfericamente simétrico, a equação (5.1) diz que é suficiente aplicar a transformação sobre ela para obter a expressão correspondente em um sistema não esférico. Para obter de forma explícita a métrica, é necessário conhecer a mudança de coordenadas que gera essa transformação. A obtenção desta métrica em termos dos parâmetros nemáticos é o nosso próximo objetivo.

Vamos assumir que a métrica g_{kl} é determinada pela mesma matriz E_{kt} , que caracteriza a forma quadrática de um elipsóide uniaxial. Dado um elipsóide uniaxial, sempre existe um sistema de coordenadas local no qual ele assume a forma:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{b^2} = 1 \quad (5.8)$$

Onde os comprimentos dos três eixos principais são dados, respectivamente, por $\{a, b, b\}$, cada um apontando para as direções dadas pelos três vetores ortonormais $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$, onde:

$$\vec{e}_x = (1,0,0), \quad \vec{e}_y = (0,1,0), \quad \vec{e}_z = (0,0,1) \quad (5.9)$$

Com x_1, x_2 e x_3 sendo os eixos. Em uma forma compacta este elipsóide pode ser escrito como $E_{kl} x^i x^j = 1$, onde:

$$E_{ij}^d = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

Que é a matriz diagonalizada que caracteriza o elipsóide, a qual é completamente caracterizada pelos autovalores:

$$\left\{ \frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{b^2} \right\} \quad (5.11)$$

E autovetores dados pela equação (5.9). O índice d na matriz do elipsóide é utilizado para descrever que essa matriz é diagonal. A matriz E_{kl} , que representa um elipsóide uniaxial arbitrário que possui os mesmos comprimentos dos eixos, pode ser obtida da matriz E_{ij}^d através de uma rotação arbitrária na qual os três eixos principais $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ são rotacionados de maneira rígida para um novo grupo de vetores ortonormais $\{\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\}$. Depois deste processo E_{kl} assume a forma:

$$E_{ij} = \frac{1}{a^2} p_i p_j + \frac{1}{b^2} q_i q_j + \frac{1}{b^2} r_i r_j \quad (5.12)$$

Uma propriedade importante desses autovetores é que eles formam uma base completa e são relacionados pela equação:

$$p_i p_j + q_i q_j + r_i r_j = \delta_{ij} \quad (5.13)$$

Combinando essa equação com (5.12) temos:

$$E_{ij} = \frac{1}{a^2} p_i p_j + \frac{1}{b^2} (\delta_{ij} - p_i p_j) = \frac{1}{1-e} \{\delta_{ij} - e p_i p_j\} \quad (5.14)$$

Onde,

$$e = 1 - b^2 \quad (5.15)$$

É a excentricidade elipsoidal e \vec{p} é o eixo de simetria do elipsóide uniaxial. Fixamos o comprimento $a = 1$ para estar de acordo com a normalização da esfera de raio $r = 1$.

Generalizando para um sistema de coordenadas arbitrariamente rotacionado, o elipsóide pode ser escrito como:

$$E_{ij}y^i y^j = 1 \quad (5.16)$$

Como a condição $e = 0$ reduz o elipsóide a uma esfera de raio $r = 1$, a anisotropia encontrada nos parâmetros reológicos pode ser interpretada como a deformação induzida no meio nemático pelas superfícies equipotenciais não esféricas. Conseqüentemente, essa anisotropia pode ser quantificada medindo o quanto este elipsóide difere da esfera equivalente. Para obter tal esfera lembramos que, de acordo com a equação (5.10), o tensor que caracteriza o elipsóide passa a caracterizar uma esfera se os eixos se tornam iguais. A esfera equivalente pode ser definida como aquela a qual o seu raio r satisfaz a relação:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{3}Tr(E) = \frac{1}{1-e} \left(1 - \frac{e}{3}\right) \quad (5.17)$$

Entretanto, se E é a matriz característica de um elipsóide, os elementos da matriz característica da esfera equivalente devem dados por $S_{ij} = \delta_{ij}Tr(E)/3$, e como consequência, a deformação elipsoidal ΔE pode ser definida pela diferença entre o elipsóide e a esfera equivalente:

$$\Delta E_{ij} = E_{ij} - S_{ij} = E_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}Tr(E) \quad (5.18)$$

Com (5.14) e (5.17):

$$\Delta E_{ij} = \frac{e}{1-e} \left\{ \frac{1}{3}\delta_{ij} - p_i p_j \right\} \quad (5.19)$$

Ou seja, a deformação elipsoidal ΔE é determinada pelo produto de dois termos distintos, $e/(1-e)$ e e :

$$Q_{ij}^E = \frac{1}{3}\delta_{ij} - p_i p_j \quad (5.20)$$

O último termo é a componente anisotrópica da deformação elipsoidal. Ele coincide com o tensor momento de quadrupolo, sendo formalmente similar a expressão do parâmetro de ordem tensorial de um cristal líquido nemático. De fato, o parâmetro de ordem tensorial pode ser medido através da diferença entre as partes anisotrópica e isotrópica de uma dada propriedade física. Foi exatamente o que foi feito com E_{ij} para chegar à equação (5.19). Nesta equação, o termo de excentricidade fornece a magnitude do alongamento do elipsóide; excentricidades diferentes correspondem a formas moleculares diferentes; quando $e < 0$, temos $b > 1$, o que corresponde à fase discótica; quando $e > 0$, temos $b < 1$, ou seja, a fase é calamítica.

Resumindo, a matriz elipsoidal dada pela equação (5.12) pode ser escrita como:

$$E_{ij} = S_{ij} + \frac{e}{b^2} Q_{ij}^E = \frac{1}{1-e} \left\{ \left(1 - \frac{e}{3}\right) \delta_{ij} + e Q_{ij}^E \right\} \quad (5.21)$$

Onde o primeiro termo corresponde à parte isotrópica e o segundo termo descreve o desvio da forma esférica. Como definido por Hess e explicado anteriormente, a aproximação de conexão afim pode ser realizada pela deformação de um potencial esférico até o ponto onde ele assume a forma elipsoidal de uma molécula nemática. Então, esse desvio é descrito por um termo que é estruturalmente igual ao parâmetro de ordem tensorial. Será desta forma de E_{ij} que a métrica g_{ij} será construída.

É importante ressaltar, que até este momento, a igualdade entre o parâmetro de ordem tensorial e a matriz elipsoidal é restrita a forma matemática desses objetos. Conceitualmente, elas descrevem objetos diferentes. Nosso objetivo agora é mostrar que essa igualdade formal pode ser melhorada até o ponto onde os dois conceitos se tornam idênticos e uma métrica dependente da temperatura é obtida. Para temperaturas maiores que o ponto de transição de fase nemática- isotrópica, todas as direções são equivalentes. Para temperaturas menores que a transição de fase nemática-isotrópica, o líquido se torna anisotrópico e em cada ponto várias propriedades físicas adquirem uma direção privilegiada.

Para construir a métrica vamos distinguir entre a natureza microscópica e macroscópica de Q_{ij} , colocando um acento circunflexo sobre o parâmetro vetorial \hat{n} quando ele descreve vetores unitários e microscópicos. Então, $Q_{ij}(\hat{n})$ descreve uma variável microscópica – o eixo molecular – e o parâmetro de ordem associado é microscópico. Da

mesma maneira, sem o acento em \mathbf{n} , $Q_{ij}(\mathbf{n})$ significa que \mathbf{n} é uma variável macroscópica, o diretor, e o correspondente parâmetro de ordem é macroscópico. A conexão entre essas duas quantidades é feita assumindo que a variável microscópica $\hat{\mathbf{n}}$ oscila de maneira tão rápida que quando $Q_{ij}(\hat{\mathbf{n}})$ tem a sua média tomada, no tempo ou na vizinhança de um ponto, essa média determina o parâmetro de ordem macroscópico. Matematicamente,

$$\langle Q_{ij}(\hat{\mathbf{n}}) \rangle = S Q_{ij}(\mathbf{n}) \quad (5.22)$$

Onde $\langle x \rangle$ é a média estatística da variável x . A partir dessa forma podemos determinar o parâmetro de ordem escalar. Assim, multiplicamos a equação anterior pelo parâmetro de ordem macroscópico e tomamos o traço da equação resultante:

$$Q^{ji}(\mathbf{n}) \langle Q_{ij}(\hat{\mathbf{n}}) \rangle = S Q^{ji}(\mathbf{n}) Q_{ij}(\mathbf{n}) \quad (5.23)$$

Para obter:

$$S = \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{3} + \langle (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{n})^2 \rangle \right) \quad (5.24)$$

Agora vamos considerar que o potencial de interação relacionado a cada molécula de um nemático tem uma superfície equipotencial que pode ser representada pela matriz E_{ij} . Quando, na vizinhança de um ponto, um grande grupo desses objetos é agrupado podemos considerar, em uma analogia exata com a equação (5.22), que esse grupo pode ser, ou não, alinhado, gerando, ou não, uma fase nemática. A representação desses resultados macroscópicos do alinhamento microscópico pode ser feita através da matriz Q_{ij}^E assumindo que ela satisfaz a mesma relação do parâmetro de ordem microscópico:

$$\langle Q_{ij}^E(\hat{\mathbf{n}}) \rangle = S Q_{ij}(\mathbf{n}) \quad (5.25)$$

O que significa que anisotropia microscópica de cada molécula se torna acoplada com as suas vizinhas; o eixo longo de cada uma das moléculas oscila através da mesma direção, gerando a fase nemática. Uma consequência importante da discussão acima é que anisotropia elipsoidal microscópica de cada molécula nemática tem consequências macroscópicas. Como Q_{ij}^E aparece na definição de E_{ij} , a equação (5.21) revela que a matriz

elipsoidal E_{ij} também tem uma contrapartida macroscópica. Ou seja, dando significado à $\langle Q_{ij}^E \rangle$; um significado correspondente deve ser dado a $\langle E_{ij} \rangle$. Esta matriz mede a passagem da simetria macroscópica e isotrópica para uma simetria elipsoidal macroscópica da fase nemática. Será assumido aqui que tal anisotropia surge através da métrica macroscópica g_{ij} . Ou seja, $g_{ij} = N \langle E_{ij} \rangle$; o que corresponde a:

$$g_{ij} = N \left\{ \frac{1}{3} \text{Tr}(E) \delta_{ij} + \frac{e}{1-e} \langle Q_{ij}(\hat{n}) \rangle \right\} = \frac{N}{(1-e)} \left\{ \left(1 - \frac{e}{3}\right) \delta_{ij} + e S Q_{ij}(n) \right\} \quad (5.26)$$

Onde N é a constante de normalização introduzida para assegurar a normalização do diretor:

$$n^i n_j = g^{ij} n_i n_j = 1 \quad (5.27)$$

Um cálculo direto revela o valor de N , mostrando que:

$$g_{ij} = \frac{1}{[3-e(1+2S)]} \{ (3-e) \delta_{ij} + 3e S Q_{ij}(n) \} \quad (5.28)$$

e,

$$g^{ij} = \frac{1}{[3-e(S-1)]} \{ [3-e(S+1)] \delta^{ij} + 3e S Q^{ij}(n) \} \quad (5.29)$$

Estas equações mostram que a métrica induzida pela anisotropia elipsoidal depende do parâmetro de ordem escalar S , é macroscópica e é determinada pela temperatura nemática; na fase isotrópica ($S = 0$), a métrica descreve uma esfera e as medidas macroscópicas são isotrópicas. Quando a temperatura é reduzida, a transição de fase nemática-isotrópica cria um valor de S não nulo, o qual induz uma anisotropia macroscópica elipsoidal descrita por um parâmetro de ordem S e excentricidade e .

A hipótese de Hess leva a uma superfície tridimensional não plana, a qual tem uma curvatura escalar não nula. Para chegarmos a este resultado, algumas fórmulas da geometria diferencial, apresentadas nos capítulos 2 e 3 serão utilizadas. Para calcular a curvatura associada à métrica g_i , necessitamos da conexão afim. Todos os cálculos são diretos e extensos, e resultam:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{3eS}{2[3-e(1+2S)][3-e(1-S)]} \{ [3 - e(1 + 2S)][n^k(\partial_i n_j - \partial_j n_i) + n_j(\partial_i n^k - \partial^k n_i)] - [3 - e(1 - S)]n_i(\partial_j n^k - \partial^k n_j) + 3eSn_i n^m (n^k \partial_m n_j + n_j \partial_m n^k) \} \quad (5.30)$$

A curvatura escalar:

$$R = \frac{9e^2 S^2}{2[3-e(1-S)]^2} [\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{n})]^2 - \frac{3eS}{[3-e(1-S)]} \nabla \cdot [\mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n})] \quad (5.31)$$

Este resultado justifica todos os cálculos feitos até aqui. Ele revela que a curvatura associada a uma textura nemática é não nula, e é dada pela soma de duas texturas nemáticas comuns, o termo de textura Bend $[\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{n})]^2$, e o termo de textura Saddle-Splay $\nabla \cdot [\mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n})]$. Como R é uma quantidade escalar, terá sempre o mesmo valor em todos os sistemas coordenados e não pode ser eliminado. É a curvatura que expressa a propriedade básica da aproximação de conexão afim; associa intrinsecamente as texturas nemáticas com uma superfície não plana.

5.2 EQUAÇÃO DE EINSTEIN PARA N.L.C.S

O objetivo deste tópico é mostrar que algumas texturas de cristais líquidos nemáticos com uma configuração não alinhada do diretor, incluindo singularidades, disclinações e defeitos podem ser descritas por uma equação equivalente a parte espacial da equação de Einstein. Enquanto na relatividade geral a fonte do campo gravitacional é o tensor energia momento, a fonte da curvatura observada no perfil do diretor é o tensor de stress elástico do meio nemático. Como aplicação dessa aproximação, estudaremos o limite de pequena curvatura. Exatamente como acontece na relatividade geral, onde a gravitação newtoniana pode ser obtida como um limite não relativístico da equação de Einstein, a equação para os cristais líquidos deve ter como limite de pequena curvatura a equação de Poisson que descreve a configuração do diretor numa interação entre os defeitos nemáticos, com a vantagem que essa equação de Poisson será dependente da temperatura.

Formalmente, é assumido como no tópico anterior, que o potencial de interação elipsoidal entre as moléculas nemáticas pode ser transformado num potencial de interação esférico, desde que o vetor \mathbf{r} que conecta duas partículas seja submetido à transformação apropriada. Esta aproximação é análoga ao princípio da relatividade: “em

qualquer ponto do espaço tempo em um campo gravitacional arbitrário é possível escolher um sistema de coordenadas localmente inercial no qual em uma região suficientemente pequena do ponto em questão, as leis da natureza tomam a mesma forma que em um sistema de coordenadas cartesianas desacelerado na ausência da gravitação”. Como consequência, ambas as teorias devem ter analogias matemáticas.

Inicialmente, para determinarmos a equação que rege a física dos cristais líquidos semelhante a equação de Einstein, utilizaremos a métrica encontrada no tópico anterior. Dois aspectos dessa métrica expressam a diferença essencial entre essa teoria e a teoria da gravitação: a equação (5.28) nos dá uma métrica de uma variedade tridimensional com a assinatura (+, +, +) e através da dependência do parâmetro de ordem S , é dependente da temperatura.

Partindo do escalar de curvatura, determinado também no tópico anterior, vemos que esta equação nos dá uma curvatura que tem sua origem na energia elástica. Os termos elásticos que não aparecem em R correspondem àquelas deformações elásticas que geram uma curvatura nula. Conseqüentemente, a equação (5.31) nos permite definir:

$$\Lambda = K_{22}(\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n})^2 - (K_{22} + K_{24}) \nabla \cdot [\mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n})] \quad (5.32)$$

como a porção da densidade de energia elástica que contribui com a curvatura, onde K_{22} e K_{24} são as constantes elásticas bend e saddle-splay, respectivamente. Usando as coordenadas generalizadas definidas na equação (5.7) para escrever a equação acima e sua integral no volume da amostra, é encontrado que a porção de energia elástica devida a estes termos é dada por:

$$E_{\Lambda} = \int \Lambda \sqrt{-g} dV \quad (5.33)$$

Mas, como consequência da equação (5.31), a energia elástica deve determinar a curvatura da amostra nemática, nos permitindo supor que existe uma constante G tal que:

$$E_{\Lambda} = \frac{1}{G} \int R \sqrt{-g} dV \quad (5.34)$$

Então, quando procuramos uma configuração que nos dá um mínimo de energia, podemos encontrar através do valor mínimo da equação (5.33) ou (5.34). A igualdade

dos resultados deve corresponder exatamente à derivação usual da equação de Einstein, e a equação resultante deve ser dada por:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = G\sigma_{ij} \quad (5.35)$$

Onde R_{ij} é o tensor de Ricci e

$$\sigma_j^i = \frac{\partial n}{\partial x_i} \frac{\partial(\Lambda\sqrt{-g})}{\partial\left(\frac{\partial n}{\partial x_j}\right)} - \delta_j^i \Lambda\sqrt{-g} \quad (5.36)$$

É o tensor de stress elástico da energia elástica dada por Λ .

A característica particular da métrica dos cristais líquidos nemáticos mostrada acima restringe a equivalência dessa equação com as componentes espaciais do campo gravitacional. Conseqüentemente, as componentes espaciais do tensor energia momento são as componentes do tensor de stress. Então, enquanto a equação de Einstein gravitacional impõe que a fonte do campo gravitacional é descrita pelo tensor energia-momento, a equação para os nemáticos impõe que a fonte da curvatura é o tensor de stress.

Usualmente, a procura pelo limite não relativístico do campo gravitacional demanda o estudo de R_{00} e g_{00} , justamente os termos temporais que não temos em um modelo puramente espacial. Neste caso, estudaremos o limite plano de R observando que, quando $\sigma_{ij} = 0$, devemos ter $R = 0$ que também pode ser usado para obter soluções planas. Devemos observar que a condição $R_{ij} = 0$ não é totalmente equivalente a condição $R = 0$, mas fornece informações suficientes para vislumbrar a riqueza obtida com a equivalência entre as duas teorias. Para representar o sistema de coordenadas, e também o campo diretor, usaremos coordenadas cilíndricas. Assim, as variáveis $\{r, \varphi, z\}$ serão utilizadas como representantes cilíndricas do sistema cartesiano local $\{x_1, x_2, z\}$ e as componentes do diretor neste sistema serão dadas por $n = \left\{ \sqrt{(1 - n_z^2)}\cos\theta, \sqrt{(1 - n_z^2)}\sen\theta, n_z \right\}$, com θ representando o ângulo da projeção do diretor no plano $z = 0$ com o eixo x_1 . Nestas coordenadas, a equação (5.31) toma a forma:

$$R = \frac{9e^2S^2}{2[3-e(1-S)]^2} \left\{ \frac{\partial n_z}{\partial z} + \left[\frac{m(1-n_z^2) - r \frac{\partial n_z^2}{\partial r}}{r\sqrt{1-n_z^2}} \right] \cos[(1-m)\varphi - \varphi_0] + \left(\frac{1}{r\sqrt{1-n_z^2}} \frac{\partial n_z^2}{\partial \varphi} \right) \text{sen}[(1-m)\varphi - \varphi_0] \right\}^2 - \frac{3eS}{[3-e(1-S)]} [2\mathbf{n} \cdot (\nabla\theta \times \nabla n_z)] \quad (5.37)$$

Esta equação revela as condições totais para que a curvatura escalar dos nemáticos seja não nula. Para qualquer m , $m \neq 0$ e $n_z \neq 1$ esta equação se torna singular.

O mesmo ocorre quando $\frac{\partial n_z^2}{\partial r} \neq 0$ e/ou $\frac{\partial n_z^2}{\partial \varphi} \neq 0$. Para fazer esta equação adequada a comparação com problemas gravitacionais, vamos considerar as condições usuais usadas nos estudo de defeitos de cristais líquidos nemáticos. É assumido que a relação entre θ e φ é simplesmente dada por $\theta = m\varphi + \varphi_0$ e a amostra é invariante translacionalmente ao longo do eixo \vec{e}_z , que são as condições que definem o nosso limite plano. Sob estas condições, é simples notar que o segundo termo da equação (5.37) se torna nulo e que a única configuração planar ($n_z = 0, m = 1$) fornece um interessante termo de comparação desta curvatura escalar com um campo gravitacional produzido por uma massa no ponto $r = 0$. Para este caso, a curvatura escalar R assume a forma:

$$R = [(\nabla^2)^{-1}\rho]^2 \cos^2|\varphi_0| \quad (5.38)$$

Onde $U = q/r$, e

$$\nabla^2 U = q\rho, \quad q = \frac{3eS}{\sqrt{2}[3-e(1-S)]} \quad (5.39)$$

Com $\rho = \delta(r)$. A equação (5.38) descreve a curvatura escalar de um defeito do pontual de uma carga topológica $m = 1$. Ela contém a parte espacial do limite Newtoniano da relatividade geral e, na sua equivalente dos cristais líquidos nemáticos, descreve o potencial de interação de defeitos pontuais. A junção destes dois formalismos forneceu a contribuição da temperatura (através de S) e da forma molecular (através de e) para o potencial de interação dos cristais líquidos nemáticos. Quando cargas topológicas semi-inteiras com defeitos fora do plano $n_z \neq 0$ são permitidas, a equação (5.37) se reduz a:

$$R = [(\nabla^2)^{-1}\rho]^2 \frac{1}{1-n_z^2} \left\{ [m(1-n_z^2)] \cos[(1-m)\varphi - \varphi_0] + \frac{\partial n_z^2}{\partial \varphi} \sin[(1-m)\varphi - \varphi_0] \right\}^2 \quad (5.40)$$

De acordo com a equação acima, a curvatura também se torna singular em

todos os pontos nos quais $n_z \rightarrow 1$ e/ou $\frac{\partial n_z^2}{\partial \varphi} \rightarrow \infty$. Como se sabe, a primeira condição acontece para todo defeito, no qual o diretor, para relaxar a energia da singularidade no plano, é permitido a apresentar defeitos fora do plano. A segunda condição ocorre em todas as linhas de singularidade que acompanham cargas semi-inteiras nas quais defeitos fora do plano são permitidos. Conseqüentemente, a equação de Einstein para cristais líquidos nemáticos não apenas fornece a generalização da equação de Poisson, onde a temperatura e a forma da molécula/micela são incluídas na carga efetiva q , mas também descreve paredes de singularidades criadas por cargas semi-inteiras.

6 CONCLUSÕES

Neste trabalho, foi mostrado que uma amostra de cristal líquido nemático, com uma configuração não homogênea do diretor, pode ser descrita como um manifold diferenciável e não plano, com uma curvatura escalar determinada por dois tipos comuns de texturas nemáticas: o termo Bend e o termo Saddle-Splay, ambos relacionados à elasticidade Nemática. Este fato torna importante a discussão das conseqüências do valor não nulo encontrado para a curvatura escalar. Foi provado que, de acordo com a transformação de conexão afim, as texturas de um nemático não homogêneo são descritas por uma superfície curva tridimensional, a qual, pela sua construção, é a superfície determinada pela distribuição não homogênea do campo diretor através da amostra. Uma curvatura escalar diferente de zero implica que não existe um sistema de coordenadas onde ela se anula; ou, usando uma analogia física, este tipo de superfície não pode ser continuamente deformada para outra superfície com uma distribuição homogênea do diretor. Esta é a razão da ausência das deformações elásticas Twist e Splay na equação obtida para a curvatura escalar. Como sabemos, a textura do tipo Twist pode ser vista como uma seqüência de planos, nos quais a configuração do diretor é alinhada de forma homogênea. Assim, uma simples rotação pode fornecer um alinhamento global, levando a uma curvatura nula. A textura do tipo Splay, com exceção de seu ponto singular, é plana; ela também possui curvatura nula. Um interessante aspecto deste resultado é que ele expõe um contraste curioso entre a elasticidade e a curvatura de uma amostra nemática; existem deformações elásticas que não contribuem com a curvatura, assim como existem termos da curvatura que não contribuem com a elasticidade. Enquanto os termos Splay e Twist contribuem para a elasticidade do nemático, eles não aparecem na curvatura escalar. Já o termo Saddle-Splay, que só contribui com a energia elástica na superfície da amostra, tem sua contribuição à curvatura nemática por toda a amostra.

Como conseqüência destes resultados, as regras de diferenciação foram alteradas através da introdução de uma métrica que realiza a hipótese da conexão afim; o potencial gerado por uma molécula nemática elipsoidal pode ser obtido pela distorção do potencial de uma molécula esférica, o qual é deformado até assumir a forma do elipsóide correspondente. Como a deformação da esfera para um elipsóide é descrita por um objeto que tem a mesma forma do parâmetro de ordem, ela pode ser tomada como parâmetro de ordem microscópico e, na passagem do parâmetro de ordem microscópico para parâmetro de ordem macroscópico, a métrica introduzida se torna dependente da temperatura.

A transformação de conexão afim exige a alteração da regra de derivação, o que é responsável pelo surgimento de objetos conhecidos de geometria diferencial na teoria dos cristais líquidos nemáticos, como a métrica e a curvatura. Estes objetos são amplamente utilizados na teoria de Relatividade Geral, que é o principal representante da geometria diferencial na física. Outro ponto a se observar é a semelhança formal do tensor de Stress elástico e o tensor energia momento da relatividade. São dois objetos matemáticos que executam a mesma função, em teorias diferentes. Estes dois fatores foram o ponto de partida deste estudo; a equação de Einstein da relatividade geral possui uma parte totalmente geométrica, que na física dos cristais líquidos surge da transformação de conexão afim, e uma parte que representa a fonte da curvatura, o tensor energia momento, que é formalmente igual ao tensor de Stress elástico de um nemático. Assim, foi possível determinar uma equação equivalente para os cristais líquidos nemáticos. O estudo do limite plano desta equação forneceu um bom material no estudo de defeitos das texturas nemáticas, com a vantagem do surgimento da dependência da temperatura.

Outro ponto a ser observado, é que as texturas de cristais líquidos nemáticos são ferramentas naturais para o estudo do comportamento do campo gravitacional gerado por pontos, cordas, paredes e todos os tipos de estruturas descritas pela estrutura nemática. Além disso, os resultados da relatividade geral também podem ser usados para melhorar nosso conhecimento na física dos nemáticos.

REFERÊNCIAS

- 1 – ZUREK W. H., Nature **317**, 505 (1985);
- 2 – CHUANG I., DURRER R., TUROK N., YURKE B., Science **251**, 4999, 1336 (1991);
- 3 – KIBBLE T. W. B., Physica C **369**, 87 (2002);
- 4 – KIBBLE T. W. B., Physics Today **september**, 47 (2007);
- 5 – KIBBLE T. W. B., Phil. Trans. R. Soc. **366**, 2793 (2008);
- 6 – RAY R., SRIVASTAVA A. M., Physical Review D **69**, 103525 (2004);
- 7 – MONACO R., MYGIND J., AAROE M., RIVERS R. J., KOSHOLETS V. P., PRL **96**, 180604 (2006);
- 8 – MUKAI H., FERNANDES P. R. G., OLIVEIRA B. F., DIAS G. S., P R E **75**, 061704 (2007);
- 9 – SPERGEL D. N., TUROK N. G., Textures and cosmic structure. Sci. Am. **266**, 52;
- 10 – BOWICK M. J., CHANDAR L., SCHIFF E. A., SRIVASTAVA A. M., Science **263**, 943 (1994);
- 11 – SATIRO C., MORAES F., Modern Physics Letters A, Vol. 20, **33**, 2561 (2005);
- 12 – SATIRO C., MORAES F., European Physical Journal E **20** (2), 173 (2006);
- 13 – STOKER J. J., Differential Geometry, John Wiley and Sons (1969);
- 14 – SHARIPOV R. A., Course of Differential Geometry, Bashkir State University (1996);
- 15 – BAALSS D., HESS S., Phys. Rev. Lett. **57**, 86 (1986);
- 16 – BAALSS D., HESS S., Z. Naturforsch A 43, 662 (1988);
- 17 – SOLLICH H., BAALSS D., HESS S., Mol. Cryst. Liq. Cryst. **168**, 189 (1989);
- 18 – HESS S., SCWARZL J. F., BAALSS D., Phys. Condens. Matter SA279 (1990);
- 19 – EHRENTAUT H., HESS S., Phys. Rev. E **51**, 2203 (1995);
- 20 – SIMOES M., PALANGANA A. J., GONÇALVES A. E., Phys. Rev. E **61**, 6007 (2000);
- 21 – SIMOES M., CAMPOS A., BARBATO D., Phys. Rev. E **75**, 061710 (2007);
- 22 – WEINBERG S., Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity, John Wiley and Sons (1972);
- 23 – SCHUTZ B. F., A First Course in General Relativity, Cambridge University Press (1985);
- 24 – SABBATA V., GASPERINI M., Introduction to Gravitation, World Scientific (1985)

- 25 – MEDRANO R. A., Campos Vetoriais, Espaços Lineares e Tensores na Física, Transtec Editorial (1994);
- 26 – LANDAU L., LIFCHITZ E., Teoria do Campo, Hemus (1974);
- 27 – TOLMAN R. C., Relativity, Thermodynamics and cosmology, Clarendon Press, Oxford (1934);
- 28 – DIRAC P. A. M., General Theory of Relativity, John Wiley and Sons (1975);
- 29 – COLLINGS P. J., Liquid Crystals: Nature's Delicate Phase of Matter, Adam Hilger (1990);
- 30 – COLLINGS P. J., HIRD M., Introduction to Liquid Crystals: Chemistry and Physics, Taylor and Francis (1997);
- 31 – KUMAR S., Liquid Crystals: Experimental Study of Physical Properties and Phase Transitions, Cambridge (2001);
- 32 – DE GENNES P. G., PROST J., The Physics of Liquid Crystals, Clarendon Press, Oxford (1993);
- 33 – LANDAU L., LIFCHITZ E., Theory of Elasticity Third Edition, Heinenmann (1986).