Universidade Estadual de Londrina

GABRIEL BERTOLDO DA SILVA

EXPLORANDO PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO POR MEIO DE ORIGAMIS:

UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DO NONO ANO

Londrina
2022

GABRIEL BERTOLDO DA SILVA

EXPLORANDO PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO POR MEIO DE ORIGAMIS:

UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DO NONO ANO

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Matemática, por meio do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientador: Profa. Dra. Neuza Teramon

Londrina
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Silva, Gabriel Bertoldo da.

Explorando pontos notáveis do triângulo por meio de origamis: : Uma experiência com alunos do nono ano / Gabriel Bertoldo da Silva. - Londrina, 2022.

100 f. : il.

Orientador: Neuza Teramon.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2022.

Inclui bibliografia.

1. Geometria - Tese. 2. Origami - Tese. 3. Ensino de matemática - Tese. 4. Pontos notáveis de um triângulo - Tese. I. Teramon, Neuza. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDU 51

GABRIEL BERTOLDO DA SILVA

EXPLORANDO PONTOS NOTÁVEIS DO TRIÂNGULO POR MEIO DE ORIGAMIS:

UMA EXPERIÊNCIA COM ALUNOS DO NONO ANO

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do Título de Mestre em Matemática, por meio do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

BANCA EXAMINADORA

____
Orientadora: Profa. Dra. Neuza Teramon
Universidade Estadual de Londrina – UEL

____
Profa. Dra. Magna Natália Marin Pires
Universidade Estadual de Londrina – UEL

____
Profa. Dra. Anália Maria Dias de Gois Picelli
Universidade Estadual do Norte do Paraná – UENP

Londrina, 06 de maio de 2022.

Aos meus pais, que mesmo nas dificuldades, nunca deixaram de acreditar no meu potencial e que sempre investiram na minha formação, educacional e humana, contribuindo, assim, para que eu sou hoje.

AGRADECIMENTOS

À Profa. Dra. Neuza Teramon, pela orientação, parceria e ensinamentos para a elaboração deste trabalho e concretização do meu sonho. Agradeço muito pela confiança, paciência e pela amizade.

Aos meus pais, Marilene e Anselmo, não só pelo apoio e compreensão no decorrer dos meus estudos, mas pelo apoio e incentivo em toda a minha trajetória de vida, ajudando-me a me tornar quem eu sou hoje e permitindo-me conquistar mais uma vitória.

Aos membros da minha banca, professoras Anália Maria Dias de Gois Picelli e Magna Natália Marin Pires, pelas contribuições e apontamentos neste trabalho, que o tornaram muito melhor do que poderia ser.

Aos demais professores do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL), em especial aos que lecionaram as disciplinas que cursei nesses anos, contribuindo para minha formação acadêmica e ajudando-me a crescer como docente. Levarei seus ensinamentos para vida toda e estes serão passados aos meus alunos, geração a geração.

Aos meus amigos que me ampararam durante esse processo, os quais me acolheram e me ajudaram mesmo que indiretamente a não desistir do meu sonho.

Aos meus colegas da pós-graduação, que passaram pelo mesmo processo e os quais também contribuíram imensamente para minha formação, além das amizades que levarei para a vida toda.

Enfim, agradeço aos meus alunos, que me permitem a cada dia me tornar um professor melhor. Este trabalho não seria possível sem suas contribuições.

“A geometria é uma ciência de todas as espécies possíveis de espaços”.
Immanuel Kant

SILVA, Gabriel Bertoldo da. **Explorando pontos notáveis do triângulo por meio de origamis**: uma experiência com alunos do nono ano. 2022. 101 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, 2022.

RESUMO

O presente trabalho se propõe a investigar o processo de ensino e aprendizagem referente aos conteúdos de matemática, no âmbito da geometria, no que concerne aos pontos notáveis de um triângulo, utilizando como recurso didático-metodológico a técnica de origami. Ao iniciar tal proposta de investigação, optou-se por realizar uma sondagem dos conhecimentos prévios do alunado relativo aos conteúdos supracitados. Sendo assim, após o levantamento dos conhecimentos prévios, iniciou-se a aplicação de oficinas matemáticas, para alunos do nono ano do Ensino Fundamental, com o intuito de explorar conceitos fundamentais da geometria, utilizando-se de elementos da técnica de origami como material manipulável. Gradativamente, consolidou-se conceitos da geometria buscando conhecimento teórico para compreensão dos conceitos referentes aos pontos notáveis de um triângulo. Soma-se a isso, a aplicação de um questionário no intento de analisar o desenvolvimento do processo formativo dos educandos em comparação com o início de tal processo, buscando compreender se o uso da técnica de origami potencializou o processo de construção do conhecimento de tais conceitos.

Palavras-chave: Geometria; Origami; Ensino de matemática; Pontos notáveis de um triângulo; Recurso didático.

SILVA, Gabriel Bertoldo da.**Exploring remarkable points of the triangle through origamis**: an experience with ninth graders of Middle School. 2022. 101 p. Dissertation (Professional Master's in Mathematics) – Londrina State University, Londrina, 2022.

ABSTRACT

The present work aims to investigate the teaching-learning process related to the contents of mathematics, within the scope of geometry, with regard to the remarkable points of a triangle, using as a didactic-methodological resource the origami technique. When initiating this research proposal, it was decided to conduct a survey of the previous knowledge of the student regarding the aforementioned contents. Thus, after the survey of previous knowledge, the application of mathematical workshops was initiated for students of the ninth grade of Middle School, in order to explore fundamental concepts of geometry, using elements of the origami technique as a manipulable material. Gradually, concepts of geometry were consolidated seeking theoretical knowledge to understand the concepts related to the remarkable points of a triangle. In addition, the application of a questionnaire in order to analyze the development of the educational process of the students in comparison with the beginning of this process, seeking to understand whether the use of the origami technique enhanced the process of building knowledge of such concepts.

Keywords: Geometry; Origami; Mathematics teaching; Notable points of a triangle; Teaching resources.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Um dos maiores desafios educacionais na atualidade é atrair a atenção dos estudantes acerca dos conteúdos ministrados em sala de aula, principalmente quando estes se referem à matemática. Percebe-se hoje uma grande resistência e dificuldade do alunado em compreender assuntos inerentes à disciplina em questão, devido à própria sociedade conceber seus conceitos e aplicações como difíceis de serem aprendidos, limitando suas potencialidades e percepções do mundo em que vivem, o qual é cercado de matemática.

Por assim ser, o trabalho do professor torna-se cada vez mais difícil, haja vista a necessidade de desconstruir preconceitos enraizados na sociedade referentes ao aprendizado de matemática. Para tanto, práticas educacionais ultrapassadas, que seguem o modelo de aluno enquanto sujeito passivo do processo de aprendizado, devem ser abandonadas, de modo a dar lugar às novas tendências educacionais que colocam o aluno no centro do processo educativo.

Dentre os diversos conteúdos que os estudantes detêm dificuldades, que certamente prejudicam sua intervenção e compreensão da sociedade enquanto cidadãos, está a geometria. Como se sabe, a geometria, bem como seus variados conceitos geométricos, cerca a nossa vida à medida em que pode ser identificada em distintas situações, como, por exemplo, na necessidade do cálculo de áreas e volumes, em construções arquitetônicas, em variados objetos que possuem formato geométrico, no próprio corpo humano, além de diversos elementos da natureza. Podemos também nos deparar com geometria em objetos que podem ser construídos com uma simples folha de papel, como é o caso das figuras de origami.

Sob essa perspectiva, neste trabalho estão expostas análises realizadas acerca da apreensão dos alunos no que diz respeito a conhecimentos referentes a conceitos de geometria plana que serão descritos posteriormente. Tais análises foram realizadas após a aplicação de oficinas de geometria plana alicerçadas nos conceitos relacionados a pontos notáveis de um triângulo, através da utilização da técnica do origami. Para isso, o trabalho foi embasado em leituras realizadas sobre os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), bem como sobre a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), os quais explanam a utilização de diversificados recursos didáticos, dentre eles o origami, o qual pode indicar possível resultante positivo no que se refere à compreensão e assimilação de conceitos matemáticos por parte dos estudantes, haja visto outros trabalhos que se valeram da mesma técnica, os quais serão explicitados no decorrer do presente estudo, os quais demonstraram que tal técnica pode auxiliar os aprendizes na compreensão da geometria.

Recorreu-se aos aspectos históricos referentes ao origami, de modo a apresentar seu advento e desenvolvimento ao longo do tempo até os dias atuais. Analogamente, foi feito um relato histórico acerca da geometria, principalmente em sua manifestação por meio de Euclides de Alexandria, embasando, portanto, os dois principais segmentos de estudo e instrumento utilizados no desenvolvimento do trabalho.

Como consequência, são apresentadas exposições e análises referentes a aplicações de quatro oficinas que foram desenvolvidas com alunos de uma instituição de ensino privada, localizada no norte do Paraná. As oficinas estão descritas no capítulo 4 e no capítulo 5 deste trabalho. A ideia da realização das oficinas está, portanto, relacionada à análise dos principais documentos que regem a educação nacional, ou seja, dos PCN's e da BNCC, nos quais é possível notar a evidência voltada ao emprego de recursos didáticos que possam realizar papel significativo no processo de ensino e aprendizagem. Portanto, busca-se a aplicação e o desenvolvimento de tais conceitos geométricos com a utilização dos origamis.

Desse modo, para item de análise, são transcritos diálogos entre professor e alunos, feitos por meio de gravações realizadas durante o desenvolvimento das oficinas. Além disso, são também expostas algumas construções realizadas pelos alunos durante o processo de aplicação e, para item de análise de resultado, foram aplicados dois formulários: o Formulário Inicial, que antecede o início das oficinas e o Formulário Final, que fora aplicado após o término das oficinas. Assim sendo, foram levados em consideração dois pontos principais a item de análise: o primeiro sendo o diagnóstico dos escritos nos formulários inicial e final pelos alunos, acerca da compreensão sobre os principais conceitos desenvolvidos, sendo assim possível uma comparação mais objetiva sobre tal apreensão e, o segundo, levando em consideração uma autoavaliação do aluno sobre seu entendimento acerca dos conteúdos trabalhados, bem como suas falas e opiniões acerca de seu aprendizado.

Findando, busca-se observar a opinião do estudante sobre a realização das oficinas, de modo a obter um parecer positivo, no sentido de apreciação e aprovação da metodologia empregada, ou negativo, no sentido de reprovação da mesma.

1 GEOMETRIA

A fim de contextualizar o presente estudo e aplicação do produto educacional elaborado, propõe-se neste primeiro capítulo o estudo e conceituação de geometria, sua aplicação, sua história, bem como discorrer acerca do ensino da mesma tendo como base os principais documentos oficiais. Logo, pretende-se demonstrar a relevância da geometria dentro do ensino de matemática.

1.1 Um pouco da história

Quando olhamos atentamente para a realidade, percebemos que podemos compreendê-la através de medidas, formas, dimensões e figuras. Desse modo, nossa relação com o mundo está diretamente relacionada com conceitos geométricos/matemáticos. Ora, desde a antiguidade tais elementos geométricos/matemáticos estão associados ao sentido do cosmo.

Assim, antes de mais nada, como ponto de partida do presente estudo, é preciso que analisemos a origem e sentido da palavra geometria. Tal sentido pode ser visto nas palavras dos filósofos iluministas Diderot e D'Alambert:

> A palavra [Geometria] é formada por duas palavras gregas, γῆ, ou γαῖα, terra, e μέτρον, medida. Essa etimologia parece nos indicar o que propiciou o nascimento da Geometria. Imperfeita e obscura em sua origem, como todas as ciências, começou por uma espécie de tatear, com mensurações e operações grosseiras, e elevou-se aos poucos ao grau de exatidão e sublimidade em que a encontramos (DIDEROT & D'ALEMBERT, 2015, p. 89).

É possível pressupor que essa percepção de D'Alambert e Diderot esteja ligada ao fato de que para Heródoto, historiador grego, a geometria teria surgido no Egito através da necessidade de repartição de terras, visto que as cheias do Nilo atrapalhavam o reconhecimento dessas limitações. Dessa forma, os egípcios teriam desenvolvido formas de determiná-las e dividi-las. Entretanto, não se pode afirmar que a origem da Geometria seja exatamente essa. Afirmações sobre a origem da matemática, seja da aritmética seja da geometria, são necessariamente arriscadas, pois os primórdios do assunto são mais antigos que a arte de escrever (BOYER, 1974, p.4).

Contudo, sabe-se que a geometria, que hoje é considerada uma área da matemática, sofreu alterações no modo como é empregue ao longo da história. O ser humano evoluiu e com ele seu modo de observar, idealizar e conceber sistemas que lhe trouxessem progresso. O desenvolvimento da geometria pode também ter sido estimulado por necessidades práticas de construção e demarcação de terras, ou por sentimentos estéticos em relação a configurações e ordem (BOYER, 1974, p. 5). Assim, é possível presumir que, incorporado ao desenvolvimento da humanidade, a geometria também se desenvolveu ao passar dos anos, exercendo um importante papel no que cerne algumas questões, em suas respectivas épocas, até ser designada como ciência. Nesse processo de transformação entre utilização por necessidade e concepção de conceitos, acredita-se que Euclides foi o primeiro a apresentar a geometria organizada num encadeamento lógico-dedutivo, no qual cada proposição deveria ser deduzida de outra mais simples de maneira lógica e dedutiva (RIBEIRO, 2013, p. 20). Portanto, não há como falar de geometria sem falar em Euclides. Autor de *Os Elementos*, neles, mais especificamente nos seis primeiros volumes (de um total de treze), Euclides discorre sobre a geometria plana elementar, na qual apresenta definições, axiomas – também chamados de noções comuns – e postulados que, basicamente, fundamentam toda a geometria plana utilizada até os dias de hoje. De acordo com Boyer (2012):

> [...] trata-se de um texto introdutório cobrindo toda a matemática *elementar* – isto é, aritmética (no sentido de "teoria dos números), geometria sintética (de pontos, retas, planos, círculos e esferas), e álgebra (não no sentido simbólico moderno, mas um equivalente em roupagem geométrica) (BOYER, 2012, p.89).

Acredita-se que os antigos matemáticos faziam distinção entre axioma e postulado: "[...]axioma é uma noção comum aceitável como hipótese em qualquer ciência; postulado é hipótese própria da geometria" (RIBEIRO, 2013, p. 21). De acordo com Boyer (2012), os axiomas ou noções comuns presentes na obra de Euclides são:

> 1º. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si.
> 2º. Se iguais são somados a iguais, os totais são iguais.
> 3º. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
> 4º. Coisas que coincidem uma com a outra são iguais a uma outra.
> 5º. O todo é maior que a parte (BOYER, 1974, p. 77-78).

Ainda de acordo com Boyer (2012), os postulados são:

> 1º. Traçar uma reta de qualquer ponto a qualquer ponto.
> 2º. Prolongar uma reta finita continuamente em uma linha reta.
> 3º. Descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.
> 4º. Que todos os ângulos retos são iguais.
> 5º. Que, se uma reta cortando duas retas faz os ângulos interiores de um mesmo lado menores que dois ângulos retos, as duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram desse lado em que os ângulos são menores que dois ângulos retos (BOYER, 1974, p. 77).

Por aproximadamente dois mil anos a geometria apresentada por Euclides manteve-se praticamente inalterada, até que o quinto postulado passou a ser questionado devido a sua complexidade, não demonstrando ser tão óbvio assim por tratar-se do “infinito”. Desse modo, iniciou-se uma busca pela demonstração de tal postulado. Diante das tentativas de demonstração surgiram vários resultados equivalentes ao postulado expresso por Euclides, sendo denominados postulados *substitutos*. O postulado substituto mais conhecido foi apresentado em 1795 por John Playfair e ficou conhecido como Axioma de Playfair, cujo enunciado é*:* “[...] por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada” (RIBEIRO, 2013, p. 22). Outros postulados equivalentes surgiram e foram as tentativas de transformar o quinto postulado do sistema axiomático euclidiano em um teorema que lançaram as sementes para o desenvolvimento das geometrias não-euclidianas (RIBEIRO, 2013).

A importância da geometria no processo histórico e no desenvolvimento da sociedade é notório. Subsequente, tratar-se-á da geometria no que compete a seu segmento educacional como área de estudo da matemática.

1.2 O Ensino da Geometria

Tomando como referência da prática do processo de ensino e aprendizagem da matemática nas escolas brasileiras, bem como sobre as perspectivas sobre esse assunto, estas podem nos trazer a concepção de que o ensino da matemática se resume basicamente a resolver cálculos e decorar fórmulas. Evidentemente, isso se deve às concepções tradicionais de educação que percebem o aprendiz como sujeito meramente reprodutor do conhecimento, de modo a ser conduzido a aplicar sem questionar ou compreender o que lhe foi exposto, valendo-se, dessa forma, de uma aprendizagem mecânica, a qual, em muitos casos, acontece “[...] com a incorporação de um conhecimento novo de forma arbitrária, ou seja, o aluno precisa aprender sem entender do que se trata ou compreender o significado do porquê” (BRAATHEN, 2012, p.65). No que se refere ao aprendizado da matemática, essa situação torna-se extremamente problemática, haja visto que o aluno, sendo ensinado com base no modelo tradicional de ensino, pode não se tornar capaz de desenvolver competências e habilidades para aplicar tais conhecimentos de forma autônoma em seu dia a dia e nem adquirir outros conhecimentos que tenham como base conceitos reproduzidos de maneira tradicional, ou seja, sem a devida reflexão crítica e compreensão do mesmo (PONTES, 2018). Para Pontes (2013), os problemas com a matemática são responsáveis ainda por muitas situações de desestímulo e fracasso, inclusive em outros campos do saber, o que inegavelmente prejudica o pleno desenvolvimento do estudante em sua vida social e acadêmica.

Ao buscar um saber mais aprofundado sobre o ensino da matemática observa-se que ensinar e aprender essa disciplina vai muito além de meros cálculos e medições. De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC):

> A Matemática não se restringe apenas à quantificação de fenômenos determinísticos – contagem, medição de objetos, grandezas – e das técnicas de cálculo com os números e com as grandezas, pois também estuda a incerteza proveniente de fenômenos de caráter aleatório. A Matemática cria sistemas abstratos, que organizam e inter-relacionam fenômenos do espaço, do movimento, das formas e dos números, associados ou não a fenômenos do mundo físico (BRASIL, 2018, p.265).

Desse modo, o ensino da matemática estabelece um caráter mais abrangente, explorando um ensino que denote acepção dos conceitos desenvolvidos, ou seja, que haja a aprendizagem. Portanto, observa-se que o ensino da matemática está pautado no desenvolvimento do aluno, seja de natureza intelectual, seja de natureza social. Com isso, para que tais objetivos sejam atingidos, é possível observar a busca por estratégias e procedimentos de ensino analisando seus impactos no ensino dessa disciplina. De acordo com Motta e Silveira (2010):

> Analisando as atuais reformulações e adaptações curriculares do ensino de

> Matemática, pode-se afirmar que a educação atravessa um período de profundas mudanças, à medida que deseja conciliar seus objetivos ao interesse e realidade social (MOTTA & SILVEIRA, 2010, p. 115).

Visto que a matemática é um vasto campo de conhecimento, buscamos aqui estreitar tais processos naquilo que se refere aos conceitos geométricos.

De acordo com Oliva (1981, p. 28), "[...] é uma das áreas mais antigas de estudos e surgiu da necessidade dos povos de medir terras, construir moradias, templos, monumentos, etc". Observa-se na geometria, na sua essência, uma busca pela compreensão e conhecimento acerca de objetos do mundo físico. "As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência" (Brasil, 2018, p. 271). Atualmente, a geometria, no que consiste seu segmento educacional, é abordada desde os anos iniciais do ensino. Desse modo, no que tange a seu processo de aprendizagem no campo escolar, podemos observar um vasto acervo sobre as metodologias atualmente empregadas em sala de aula. De acordo com Rezi (2001), "os profissionais ligados ao ensino dessa disciplina têm buscado práticas mais adequadas e possíveis de serem desenvolvidas no contexto das diferentes instituições de ensino" (REZI, 2001, p. 01), pois, "[...] sem conhecer Geometria, a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das ideias fica reduzida e a visão da matemática torna-se distorcida (LORENZATO, 1995, p. 05).

Por outro lado, para Silva (2011), o ensino de Geometria, em diversos contextos, é realizado por meio de uma abordagem baseada em um mero conjunto de conceitos, propriedades e fórmulas, desconexo de quaisquer aplicações de natureza histórica, lógica ou cotidiana, o que interfere diretamente no entendimento dos estudantes acerca da importância e aplicação da geometria em sua vivência cotidiana. Por conseguinte, não se pode permitir que a geometria e o ensino apropriado de seus conceitos e aplicações sejam ignorados, pois, conforme explana Miguel (1986, p. 66), "a Geometria é tão importante para a humanidade, que é inconcebível não a estudar na escola, pois o mundo em que vivemos é quase espontaneamente geométrico" (apud ECCO, 2016, p.15).

Nesse sentido, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's), por meio dos conceitos geométricos o aluno é capaz de desenvolver "um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive” (BRASIL, 1998, p. 39). Portanto, observa-se uma grande importância no ensino da geometria no que se refere ao desenvolvimento do aluno em seu processo de abstração e compreensão. Assim, de acordo com Pinheiro e Carreira,

> Os estudos que têm sido desenvolvidos ao longo das últimas décadas revelam que a Geometria contribui, entre outros aspetos, para o desenvolvimento da visualização e do pensamento crítico e, por outro lado, esta capacidade de visualização, fazendo uso de diagramas e modelos geométricos para a interpretação e resolução de problemas, promove o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas. [...] Em suma, é consensual que a aprendizagem da Geometria é fundamental, devendo ser dada especial relevância ao desenvolvimento do raciocínio geométrico (PINHEIRO & CARREIRA, 2013, p.149).

Desse modo, a geometria exerce um importante papel no desenvolvimento do aluno, de modo a proporcionar situações de análise do mundo real, relacionando-o com conceitos aplicados, tornando possível a criação de relações com seus saberes e conhecimentos prévios. Tal conhecimento e interpretação favorece o desenvolvimento de capacidades cognitivas, como também a visão e compreensão de mundo do estudante. Portanto, assim como em outros ramos da matemática,

> [...] a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras (BRASIL, 2018, p.272).

À vista disso, através de pesquisas e análises foi possível observar propostas de ensino e procedimentos metodológicos que compartilham tais objetivos, almejando o ensino de matemática voltado para a aprendizagem, buscando, assim, proporcionar ao aluno a visualização dos conceitos desenvolvidos, bem como da capacidade de fomentar e promover noções espaciais. Nesse sentido, de acordo com a BNCC,

> Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem (BRASIL, 2018, p.266).

Buscando aprofundamento nesses processos matemáticos, especificamente no ensino da geometria, recorremos à utilização de recursos didáticos que possam servir de auxílio no processo de ensino dessa área. Conforme apontam os PCNs, “[...] recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, computadores e outros materiais têm um papel importante no processo de ensino e aprendizagem” (BRASIL, 1998, p.19). Observa-se, portanto, um vasto campo no que compete a esses recursos. Consoante a esses processos e arraigado ao ensino de geometria,

> As atividades geométricas podem contribuir também para o desenvolvimento de procedimentos de estimativa visual, seja de comprimentos, ângulos ou outras propriedades métricas das figuras, sem usar instrumentos de desenho ou de medida. Isso pode ser feito, por exemplo, por meio de trabalhos com dobraduras, recortes, espelhos, empilhamentos, ou pela modelagem de formas em argila ou massa (BRASIL, 1998, p.83).

Nesse sentido, encontramos no origami um recurso pedagógico a ser utilizado do ensino de geometria efetivando os propostos pelos documentos nacionais. O uso do origami como recurso didático no ensino de geometria pode favorecer a construção e o desenvolvimento desse processo, uma vez que a manipulação feita por meio desse recurso possa servir de estímulo concreto para o aluno observar a matemática no mundo físico, o que “[...] contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades e vice-versa” (BRASIL, 1998, p. 39).

2 ORIGAMI

Neste segundo capítulo, por se tratar de parte integrante da presente pesquisa e de sua utilização como ferramenta de aprendizagem na proposta do produto educacional a ser apresentado no decorrer dessa explanação, pretende-se discorrer acerca da arte japonesa do origami, seu conceito e construção, de modo a atrelar sua confecção à geometria, tema central deste estudo.

2.1 UM BREVE HISTÓRICO

Das grandes invenções ocorridas na história da civilização humana, destaca-se a invenção do papel. Etimologicamente a palavra papel vem do latim *papyrus*, referenciando a planta conhecida como papiro, nativa da África central e do território egípcio, utilizada para fabricação de uma folha que serviu como suporte para a escrita da época. Contudo, de acordo com Fritoli, Krüger e Carvalho (2016) e Rafael (2011), a origem do papel que conhecemos atualmente está por volta de 105 d. C. na China. Ainda de acordo com Rafael (2011) há, no Museu Britânico, um manuscrito contendo o relato de um funcionário – acredita-se que um oficial – da Corte Imperial de T'sai Lun sobre a invenção do papel.

Segundo Fritoli, Krüger e Carvalho (2016), o oficial teria observado vespas triturando fibras vegetais de bambu e amoreira de modo a obter uma pasta celulósica que, posteriormente, era utilizada na construção de ninhos. Ainda de acordo com Fritoli, Krüger e Carvalho (2016), a partir dessa observação, ele teria pilado cascas destas árvores até obter uma pasta úmida. Tal pasta fora estendida e colocada para secar. Desse modo surgia a primeira folha de papel.

Os chineses "[...] fabricavam papel desde o século II a.C. No ano de 610 d.C., a técnica já era conhecida na Coréia, de onde propagou-se para o Japão" (FRUGONI, 2007, p.59), através de um monge budista. De acordo com Honda (1969), historiadores usam o fato do surgimento do papel ter ocorrido em território chinês para atribuir a origem do origami àquela época, atribuição esta que não foi encontrada em nenhum documento.

2.2 A ARTE DE DOBRAR PAPEL

A arte milenar conhecida como origami exprime uma técnica japonesa de dobrar papel:

> A palavra japonesa “Origami” é composta por dois caracteres, o primeiro, “Ori”, deriva do desenho de uma mão e significa dobrar. O segundo, “Kami”, deriva do desenho da seda e significa papel, espírito e Deus. A junção das duas palavras fez cair o “k” surgindo o “Origami” (RAFAEL, 2011, p. 17).

Contudo, em seu primórdio, o papel não era acessível à população japonesa em geral e, de acordo com Honda (1969), mesmo após a fabricação ter se propagado pelo país, o preço do papel dificultava seu uso para o origami. Dessa forma, o uso do origami restringia-se a ocasiões cerimoniais. Com o passar dos anos, a fabricação do papel difundiu-se pelo mundo e com ela o origami.

No que se refere ao origami na atualidade, não se pode deixar de mencionar Akira Yoshizawa, considerado *o pai do origami moderno*. Akira Yoshizawa e Sam Randlett foram responsáveis pela criação de um sistema de símbolos com instruções para dobraduras. Pelo fato dessa simbologia não necessitar do conhecimento acerca de outro idioma, esse sistema (conhecido como *Sistema Yoshizawa – Randlett, 1956*) foi denominado a *linguagem do origami*. Ainda sobre Akira Yoshizawa:

> [...]ele padronizou regras para representação gráfica das dobras do origami, sistematizou um conjunto de dobras que servem de base para vários origamis e quebrou paradigmas tradicionais introduzindo a técnica do wetfolding, ou seja, dobrar com o papel molhado” (HAYASAKA & NISHIDA, 2019).

O origami desenvolveu-se ao longo do tempo e surgiram novas técnicas acerca de modelos e estilos. Com base no texto de Queiroz (2019), além do *Origami Tradicional*, encontra-se *Origami de Ação*, *Origami Modular*, *Origami com Dobradura Molhada* (de Akira Yoshizawa) e *Origami Tessalação*. Com tantas variações e com o auxílio do uso da tecnologia, Queiroz (2019) ainda retrata algumas aplicações do origami na construção de estruturas, objetos, além de programas de computação e designer. No que segue, às aplicações do origami deve-se expor sua utilização e participação no âmbito educacional. Sabe-se que a utilização do origami como recurso didático surgiu com o alemão Friderich Froebel

(1782-1852). Segundo Morosini e Wrobel (2014) ele foi o primeiro a explorar as dobraduras aplicadas à educação, ganhando visibilidade e relevância, principalmente nas escolas japonesas. Atualmente, no Brasil, é possível observar nos documentos que gerem a educação nacional a presença da utilização do origami como recurso pedagógico.

Para Novak e Passos (2007), o ensino de geometria utilizando-se de novas metodologias propicia ao educando “[...] uma noção mais relevante sobre seus pressupostos, podendo estabelecer uma atitude mais favorável à aprendizagem, como também se tornar um agente ativo na assimilação dos conteúdos” (NOVAK & PASSOS, 2007, p. 23), e, ainda, ao mencionar o uso do origami em sua proposta de trabalho com a educação básica, as pesquisadoras defendem que o referido recurso colabora “[...] para que sejam ensinados diferentes conceitos geométricos, uma vez que não há limites de se dobrar um papel, evidenciando sua condição de ser empregado no ensino da Matemática” (NOVAK & PASSOS, 2007, p. 23).

Nessa mesma perspectiva, Néia e Silva (2016) postulam, após aplicação prática de atividades e avaliação, que “[...] os conceitos geométricos são aprendidos com mais facilidade quando utilizada uma abordagem diferenciada, no caso as dobraduras de origami” (NÉIA & SILVA, 2016, p. 12), uma vez que o interesse dos estudantes teve um aumento significativo, pois “[...] puderam relacionar a teoria à prática, utilizando os conceitos previamente aprendidos para confeccionar os origamis” (NÉIA & SILVA, 2016, p. 12).

De modo a contribuir com a relevância do uso do origami no contexto educacional, Dias *et al.* (2019) aponta que os estudantes, além de se tornarem sujeitos ativos no processo de aprendizagem, questionando o professor e participando das atividades propostas, estes compreendem os conceitos de maneira prática mais facilmente, tornando-os aptos a aplicação dos conteúdos desenvolvidos, seja em avaliações escolares ou em seu cotidiano (DIAS *et al*., 2019). Para tanto, Dias *et al*. (2019) ainda destaca que, para a metodologia ser aplicada de maneira satisfatória, é necessário que

> “[...] o professor que irá aplicar a atividade deve conhecer muito bem o material, no caso, o origami, que vai ser utilizado. Precisa ter sido construído pelo professor várias vezes. Deve conhecer também as relações frente aos conceitos da geometria a serem

> contextualizados, para não haver distorções do conteúdo (DIAS *et al.,* 2019, p. 119).

Nesse sentido, como qualquer outro recurso didático ou metodologia, o origami não deve ser empregado em contexto escolar de aprendizado apenas como simples recurso expositivo de conceitos, mas como instrumento capaz de propiciar aos estudantes um aprendizado efetivo de conceitos matemáticos, no caso do presente estudo, os conceitos geométricos, desde que sejam aplicados de maneira adequada e coerente no ambiente em que o professor está inserido e de acordo com a realidade dos aprendizes. Consequentemente é necessário que o professor, independente dos conceitos que for ensinar, planeje e prepare sua proposta de trabalho de forma cuidadosa, recorrendo sempre aos estudos existentes e em outras experiências aplicados, para que o objetivo de aprendizagem seja concretizado na sala de aula e os estudantes obtenham o conhecimento e sejam capazes de utilizá-lo no seu cotidiano (DIAS *et al.*, 2019).

3 PROPOSTA DE TRABALHO

Nesse trabalho, propõe-se a aplicação de oficinas de geometria plana pautadas na utilização do origami como recurso didático no processo de ensino dos conceitos matemáticos que serão descritos a seguir, visando o estudo das relações existentes entre as aplicações de conceitos de geometria por meio da abordagem do origami no ensino e a compreensão, no sentido de conhecimento do aluno, no que se refere ao ensino de matemática. Soma-se a isso, a pretensão em arraigar os conceitos básicos de geometria plana desenvolvidos nos educandos, pautado na análise das relações existentes entre as aplicações das oficinas e o processo de ensino e aprendizagem.

O projeto segue da aplicação de oficinas de geometria a alunos do nono ano do ensino fundamental II, da rede particular de ensino, as quais valeram-se da técnica do origami para a explanação dos conceitos envolvidos. Com o intuito de coletar e registrar as percepções dos estudantes sobre o conhecimento dos conceitos de geometria plana, foi realizada uma investigação prévia. Para isso, no que antecedeu a realização das oficinas, foi aplicado um formulário inicial, no qual fez-se uma pesquisa acerca dos conceitos matemáticos que seriam desenvolvidos nas oficinas, com o intuito de analisar os conhecimentos prévios dos alunos sobre os temas em questão, considerando-se que estes alunos tiveram aulas sobre os mesmos conceitos, no ensino regular durante o oitavo ano.

Realizaram-se um total de 4 (quatro) oficinas, cada uma abordando conceitos de geometria plana, as quais denominamos: Oficina 1, Oficina 2, Oficina 3 e Oficina 4. Na Oficina 1, além da aplicação do Formulário Inicial foram construídos e desenvolvidos os conceitos primitivos da geometria plana: ponto, reta e plano. Partindo desse princípio, abordou-se e construiu-se os conceitos de segmento de reta, ponto médio de um segmento de reta, mais o postulado da determinação. Prosseguiu-se com a construção de retas concorrentes e retas perpendiculares, observando a relação entre os ângulos formados por estas retas. Tendo como base tais conceitos, foram construídas a mediatriz de um segmento de reta e a bissetriz de um ângulo. No desenvolvimento da Oficina 2, construiu-se um triângulo e, posteriormente, analisou-se a propriedade referente à soma de seus ângulos internos. Conhecido o conceito de bissetriz, deu-se início a construção, por meio da intersecção das bissetrizes, do incentro de um triângulo, introduzindo o conceito de pontos notáveis de um triângulo. Referente a Oficina 3, foram construídos o baricentro e o ortocentro, através das intersecções das medianas e alturas, respectivamente. Assim, foram analisadas suas propriedades nos triângulos. Na Oficina 4, fora construído o circuncentro de um triângulo através da intersecção das mediatrizes. Após a construção do circuncentro realizou-se a aplicação do Formulário Final, uma pesquisa detalhada acerca dos conceitos matemáticos desenvolvidos nas oficinas, com o intuito de analisar os conhecimentos desenvolvidos pelo aluno sobre os temas em questão.

Neste trabalho, portanto, apresentamos uma análise acerca de conhecimentos prévios apresentados pelos alunos e das metodologias de ensino até então utilizados no desenvolvimento da geometria, bem como a exposição de recortes da transcrição de áudios coletados durante as aplicações das oficinas e considerações sobre os relatos e vivências apresentadas. Além disso, será feita uma análise sobre os conhecimentos apresentados pelos alunos após as aplicações das oficinas e suas opiniões sobre a metodologia de ensino utilizada.

Inicialmente são apresentadas as definições dos conceitos matemáticos desenvolvidos durante as aplicações das oficinas, bem como as descrições das dobraduras a serem realizadas, detalhando o processo de construção de cada assunto desenvolvido.

4 CONCEITOS GEOMÉTRICOS E SUAS CONSTRUÇÕES

Nesse capítulo serão abordados os conceitos matemáticos desenvolvidos durante as oficinas, baseando-se nas obras *Fundamentos da Matemática Elementar*, Volume 9, de Osvaldo Dolce e José Nicolau Pompeo e *Geometria*, de Antonio Caminha Muniz Neto, além das construções de tais conceitos através do origami. Para isso, será feita a separação dos conceitos de acordo com as oficinas em que foram desenvolvidos.

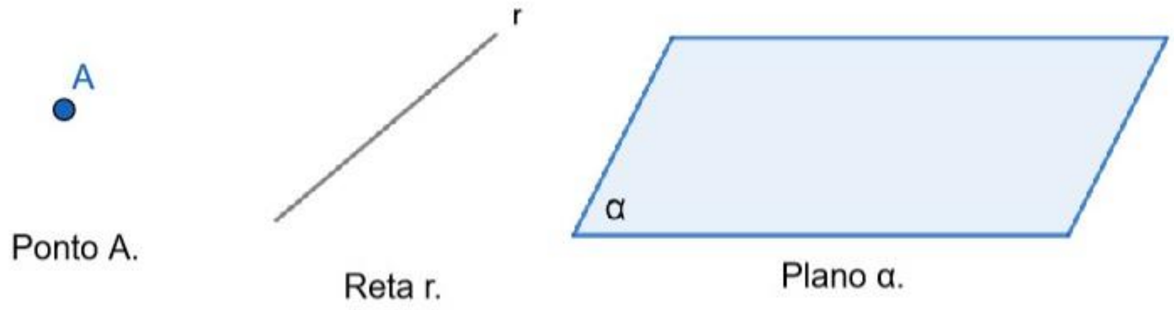
4.1 OFICINA 1

Na Oficina 1 foram abordados os entes primitivos ponto, reta e plano, além dos conceitos de segmento de reta, ponto médio de um segmento de reta, retas concorrentes, retas perpendiculares, mediatriz e bissetriz de um ângulo.

4.1.1 Entes Primitivos

De acordo com Dolce e Pompeo (2013) os entes primitivos são adotados sem definição. Desse modo, adota-se as noções de ponto, reta e plano como um conhecimento intuitivo, decorrente da experiência e da observação (DOLCE& POMPEO, 2013, p. 01).

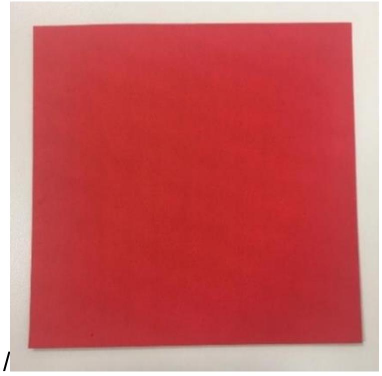
Figura 1 – Entes Primitivos



Fonte: (o autor, 2021)

Assim, podemos assumir o plano sendo representado pelo papel utilizado para realização das dobraduras.

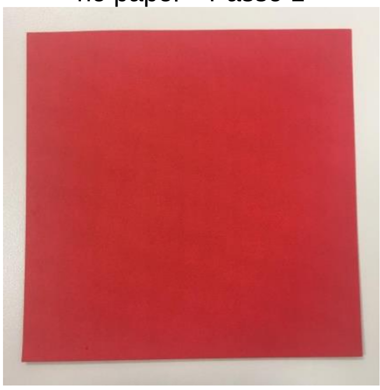
Figura 2 – Papel utilizado para realização das dobraduras



Fonte: (o autor, 2021)

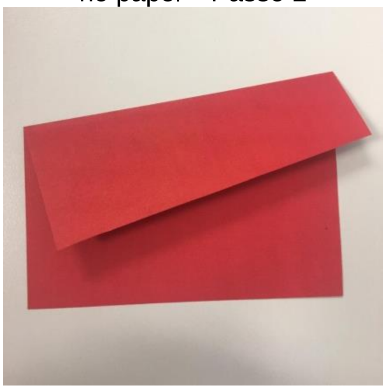
Construímos a reta, ou melhor, uma representação para a reta, por meio de uma dobra no papel, fazendo sua marcação.

Figura 3 – Construção da reta através da dobra no papel – Passo 1



Fonte: (o autor, 2021)

Figura 4 – Construção da reta através da dobra no papel – Passo 2

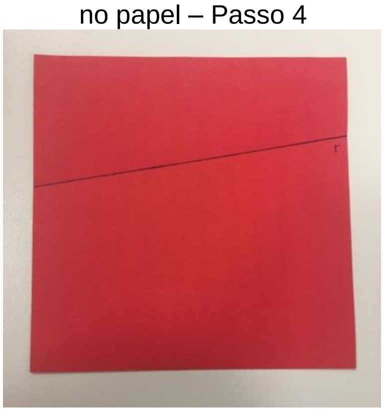


Fonte: (o autor, 2021)

Figura 5 – Construção da reta através da dobra no papel – Passo 3

Fonte: (o autor, 2021)

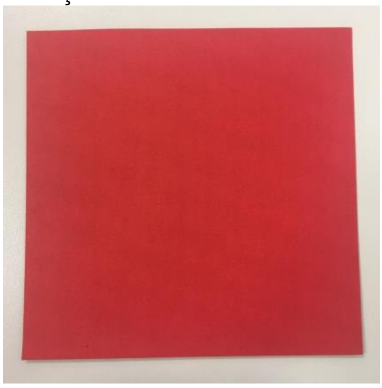
Figura 6 – Construção da reta através da dobra no papel – Passo 4



Fonte: (o autor, 2021)

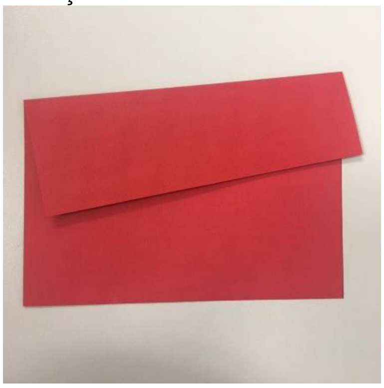
Por fim, podemos determinar um ponto através da intersecção entre duas dobras, que representam a interseção de duas retas, na figura tal ponto foi denotado por P:

Figura 7 – Determinação de um ponto através da intersecção entre duas dobras – Passo 1



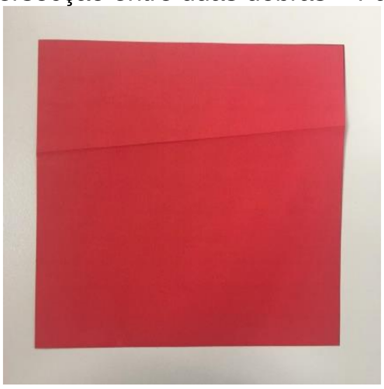
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 8 – Determinação de um ponto através da intersecção entre duas dobras – Passo 2



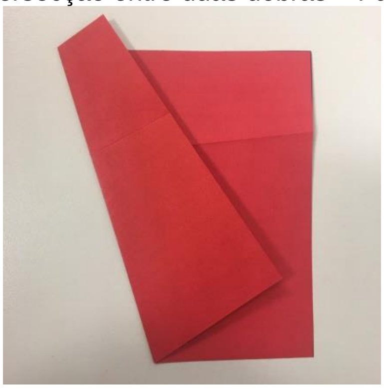
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 9 – Determinação de um ponto através da intersecção entre duas dobras – Passo 3



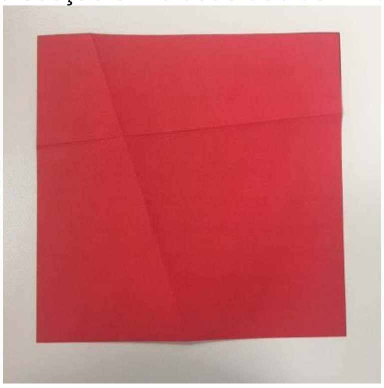
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 10 – Determinação de um ponto através da intersecção entre duas dobras – Passo 4



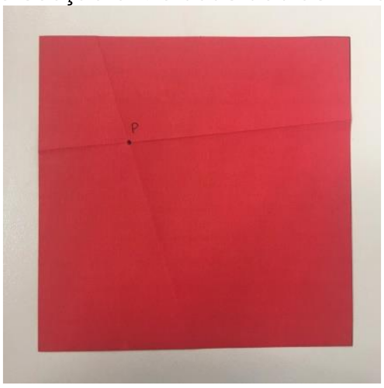
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 11 – Determinação de um ponto através da intersecção entre duas dobras – Passo 5



Fonte: (o autor, 2021)

Figura 12 – Determinação de um ponto através da intersecção entre duas dobras – Passo 6



Fonte: (o autor, 2021)

4.1.2 Construção de Um Segmento de Reta $\overline{AB}$

Dada uma reta determinada pelos pontos A e $B,$ o conceito de segmento de reta pode ser definido como “dados dois pontos distintos, a reunião do conjunto desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles é um segmento de reta” (DOLCE & POMPEO, 2013, p. 08).

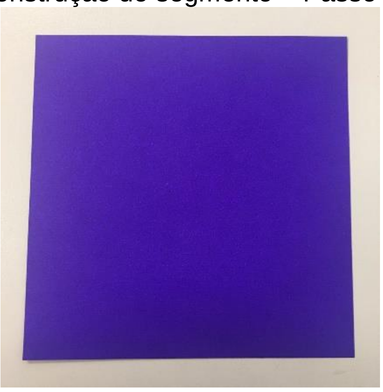
Figura 13 – Segmento de reta

Fonte: (o autor, 2021)

Assim, o segmento de reta de extremos A e B é representado por AB.

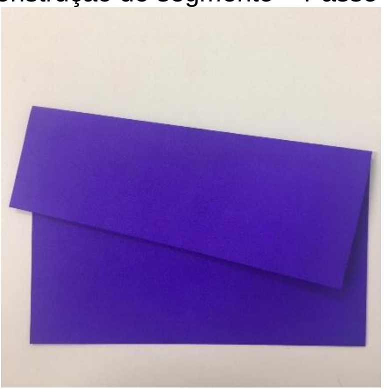
Para fazer a construção de um segmento de reta $\overline{AB}$ por meio do origami realizamos uma dobra qualquer no papel e marcamos dois pontos distintos A e B, ligando-os.

Figura 14 – Marcação dos pontos A e B para construção do segmento – Passo 1



Fonte: (o autor, 2021)

Figura 15 – Marcação dos pontos A e B para construção do segmento – Passo 2



Fonte: (o autor, 2021)

Figura 16 – Marcação dos pontos A e Bpara construção do segmento – Passo 3

Fonte: (o autor, 2021)

Figura 17 – Marcação dos pontos A e B para construção do segmento – Passo 4

Fonte: (o autor, 2021)

4.1.3 Construção de um ponto médio de um segmento de reta $\overline{AB}$

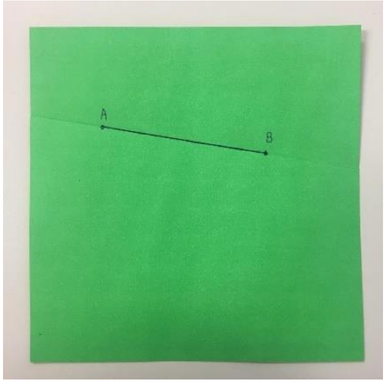
Um ponto M é ponto médio do segmento $\overline{AB}$ se, e somente se, Mestá entre A e B e $\overline{AM}\equiv\overline{BM}$ (DOLCE & POMPEO, 2013, p. 12).

Figura 18 – Ponto Médio de um Segmento

Fonte: (o autor, 2021)

Para ser feita a construção do ponto médio de um segmento de reta utilizamos um segmento de reta $\overline{AB}$ conforme construído anteriormente. Coloca-se o ponto A sobre o ponto B e realiza-se uma dobra de modo a obter o ponto médio M do segmento $\overline{AB}$. O ponto M é determinado pela interseção das duas dobras que foram realizadas.

Figura 19 – Construção do Ponto Médio – Passo 1

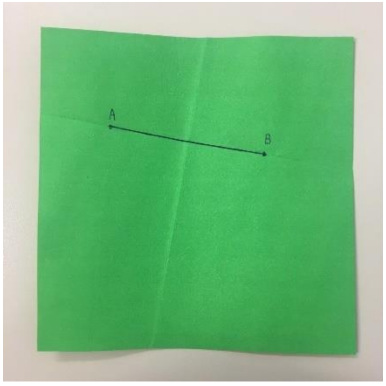


Fonte: (o autor, 2021)

Figura 20 – Construção do Ponto Médio – Passo 2

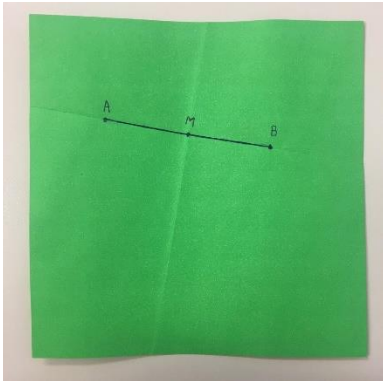
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 21 – Construção do Ponto Médio – Passo 3



Fonte: (o autor, 2021)

Figura 22 – Construção do Ponto Médio – Passo 4

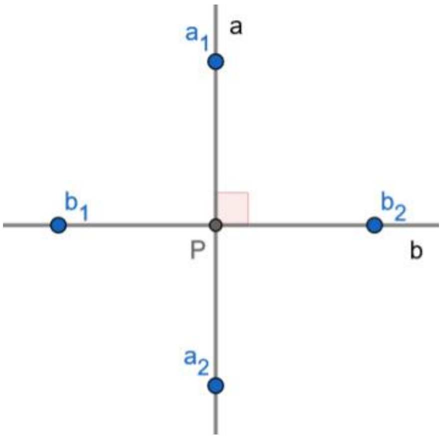


Fonte: (o autor, 2021)

4.1.4 Construção de retas concorrentes e retas perpendiculares

Dando continuidade, adentramos nos conceitos de retas oblíquas (também conhecidas como retas concorrentes) e retas perpendiculares. “Duas retas são perpendiculares se, e somente se, são concorrentes e formam ângulos adjacentes suplementares congruentes em que a_1 é uma das semirretas de *a* de origem P e b_1e b_2 são semirretas opostas de *b* com origem em P" (DOLCE & POMPEO, 2013, p. 78).

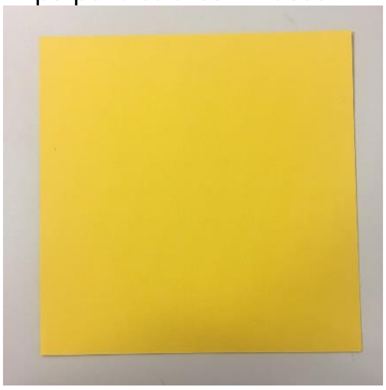
Figura 23 - Retas perpendiculares



Fonte: (o autor, 2021)

Para construir duas retas perpendiculares é necessária a construção inicial de uma reta qualquer através de uma dobra sobre a folha, fazendo sua marcação.

Figura 24 – Construção de retas perpendiculares – Passo 1

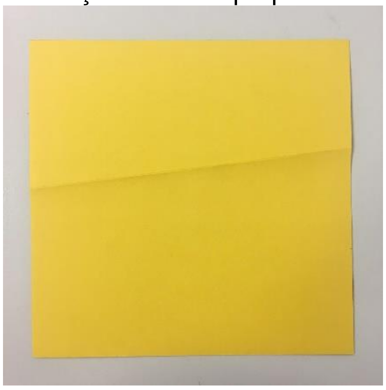


Fonte: (o autor, 2021)

Figura 25 – Construção de retas perpendiculares – Passo 2

Fonte: (o autor, 2021)

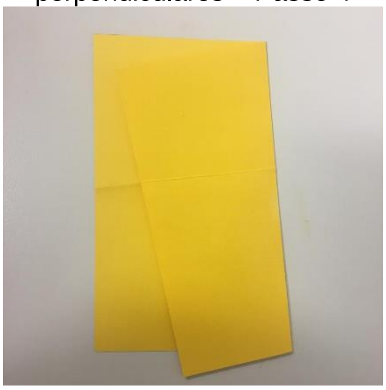
Figura 26 – Construção de retas perpendiculares – Passo 3



Fonte: (o autor, 2021)

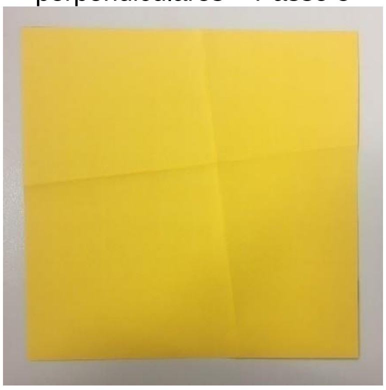
Em seguida, dobra-se novamente a folha de modo que a reta construída inicialmente fique sobre ela mesma. Desta maneira, a primeira reta construída é dividida em duas semirretas, as quais formam o mesmo ângulo com a segunda reta construída, ou seja, ângulos de 90º. Portanto, as retas construídas são perpendiculares.

Figura 27 – Construção de retas perpendiculares – Passo 4



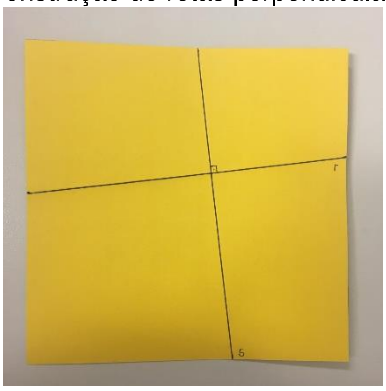
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 28 – Construção de retas perpendiculares – Passo 5



Fonte: (o autor, 2021)

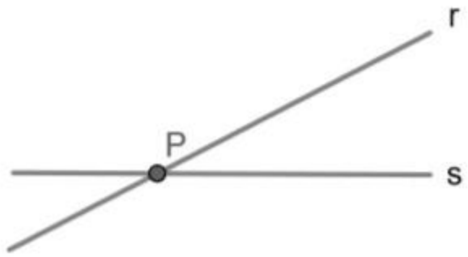
Figura 29 – Construção de retas perpendiculares – Passo 6



Fonte: (o autor, 2021)

Podemos conceituar que duas retas são concorrentes se, e somente se, existe um único ponto em comum entre elas.

Figura 30 – Retas Concorrentes



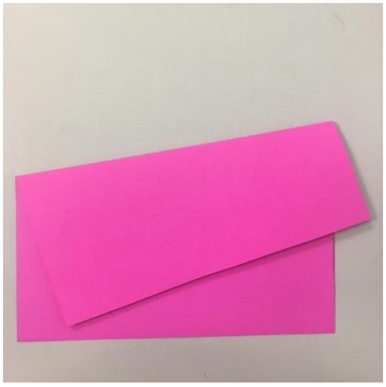
Fonte: (o autor, 2021)

Para realizar a construção de duas retas concorrentes é necessária a construção inicial de uma reta qualquer através de uma dobra sobre a folha, fazendo sua marcação.

Figura 31 – Construção de Retas Concorrentes – Passo 1

Fonte: (o autor, 2021)

Figura 32 – Construção de Retas Concorrentes – Passo 2



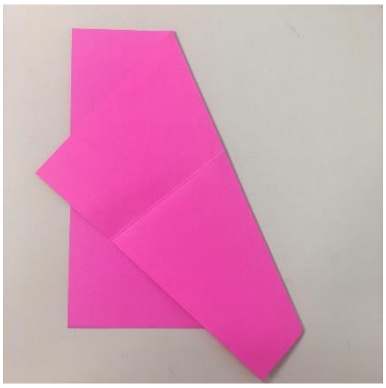
Fonte: (o autor, 2021)

Em seguida, dobra-se novamente a folha de modo que a reta construída inicialmente não esteja sobre ela mesma.

Figura 33 – Construção de Retas Concorrentes – Passo 3

Fonte: (o autor, 2021)

Figura 34 – Construção de Retas Concorrentes – Passo 4

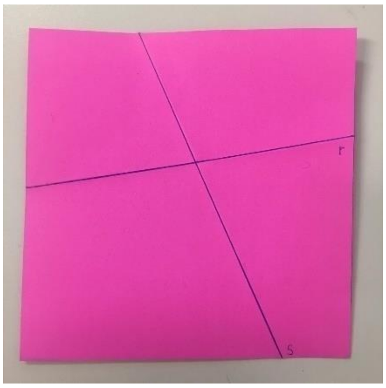


Fonte: (o autor, 2021)

Figura 35 – Construção de Retas Concorrentes – Passo 5

Fonte: (o autor, 2021)

Figura 36 – Construção de Retas Concorrentes – Passo 6

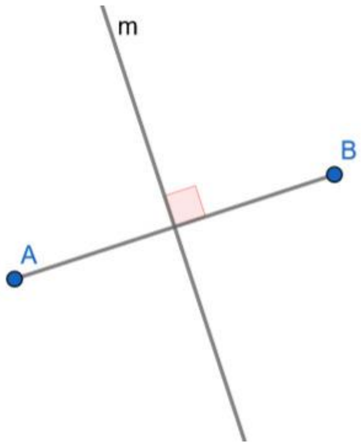


Fonte: (o autor, 2021)

4.1.5 Construção da mediatriz de um segmento

O próximo conceito a ser desenvolvido é o conceito de mediatriz. Define-se “mediatriz do segmento $\overline{AB}$ como sendo a reta perpendicular a AB e que passa por seu ponto médio” (NETO, 2013, p. 73).

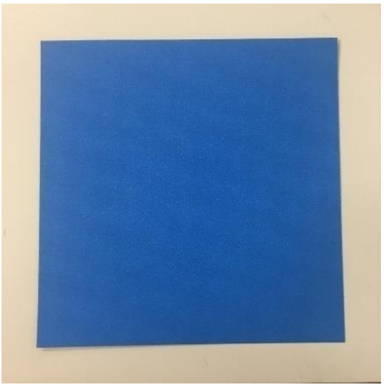
Figura 37 – Mediatriz de um Segmento



Fonte: (o autor, 2021)

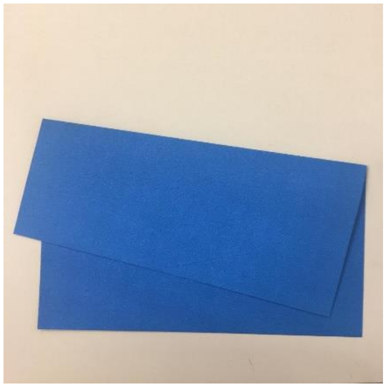
A construção da mediatriz através da dobradura inicia-se no desenvolvimento de um segmento de reta $\overline{AB}$.

Figura 38 – Construção de uma Mediatriz – Passo 1



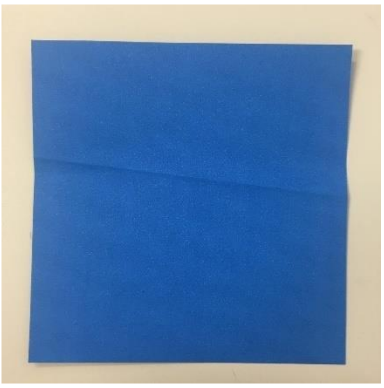
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 39 – Construção de uma Mediatriz – Passo 2



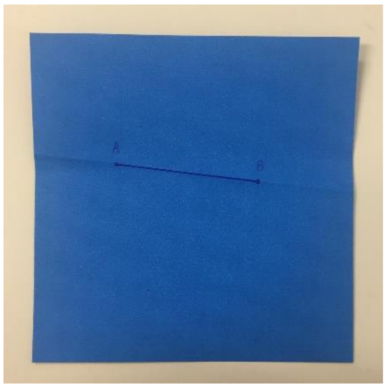
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 40 – Construção de uma Mediatriz – Passo 3



Fonte: (o autor, 2021)

Figura 41 – Construção de uma Mediatriz – Passo 4



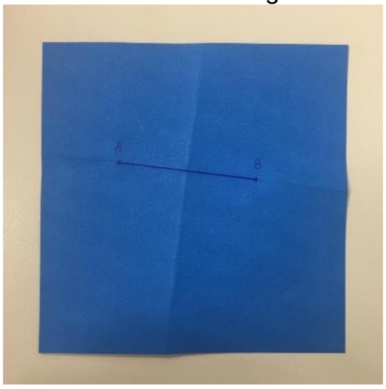
Fonte: (o autor, 2021)

Assim, de acordo com a definição de mediatriz, deve-se encontrar o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Para isso é colocado o ponto A sobre o ponto B e realizada outra dobra de modo a obter o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Estendendo a marcação dessa mesma dobra sobre o papel todo é obtida a mediatriz m do segmento $\overline{AB}$.

Figura 42 – Mediatriz m do segmento – Passo 1

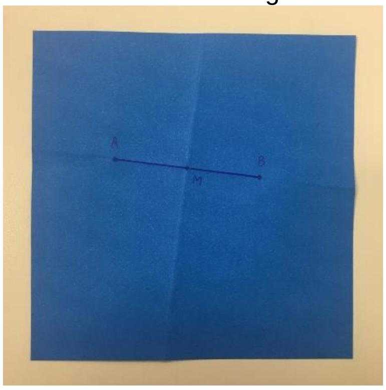
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 43 – Mediatriz m do segmento – Passo 2



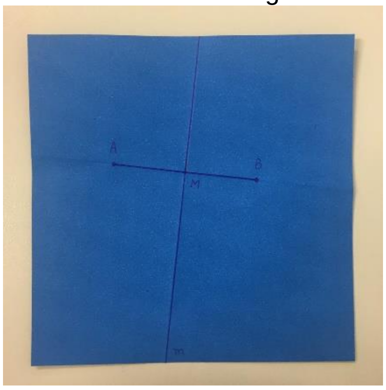
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 44 – Mediatriz m do segmento – Passo 3



Fonte: (o autor, 2021)

Figura 45 – Mediatriz m do segmento – Passo 4

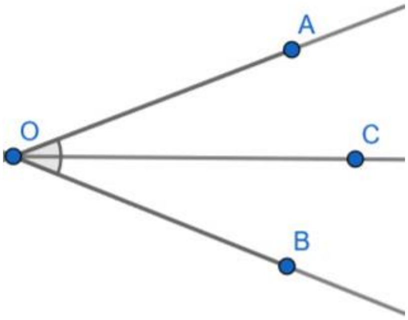


Fonte: (o autor, 2021)

4.1.6 Construção da Bissetriz de um Ângulo

O último conceito desenvolvido na Oficina 1 foi a bissetriz de um ângulo. “A bissetriz de um ângulo é uma semirreta interna ao ângulo, com origem no vértice do ângulo e que o divide em dois ângulos congruentes” (DOLCE & POMPEO, 2013, p. 25).

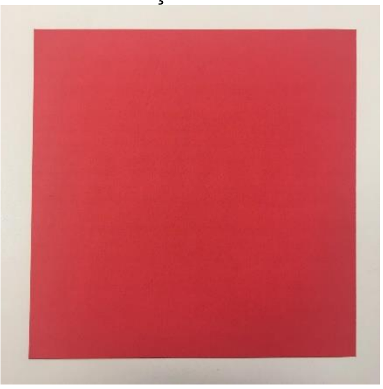
Figura 46 – Bissetriz de um Ângulo



Fonte: (o autor, 2021).

Para fazer a construção da bissetriz, partimos da definição de ângulo: “chama-se ângulo à reunião de duas semirretas de mesma origem, não contidas numa mesma reta (não colineares)” (DOLCE & POMPEO, 2013, p. 20). Assim, por meio da construção de duas retas concorrentes, podemos visualizar quatro ângulos e escolher um deles, fazendo a marcação.

Figura 47 – Construção da Bissetriz – Passo 1

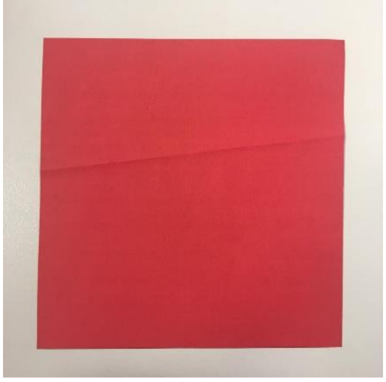


Fonte: (o autor, 2021)

Figura 48 – Construção da Bissetriz – Passo 2

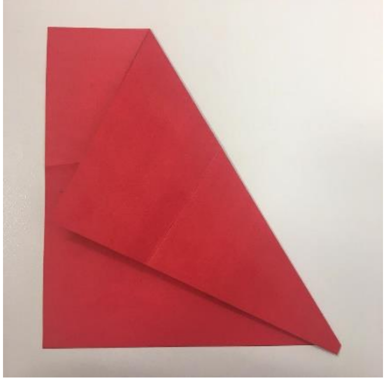
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 49 – Construção da Bissetriz – Passo 3



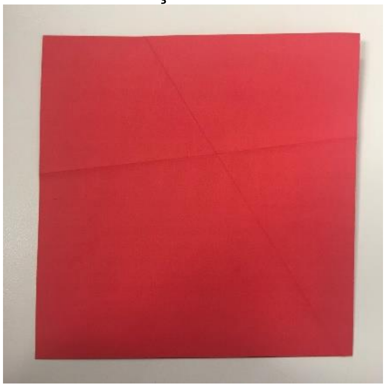
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 50 – Construção da Bissetriz – Passo 4



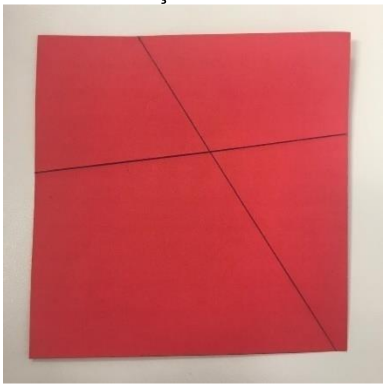
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 51 – Construção da Bissetriz – Passo 5



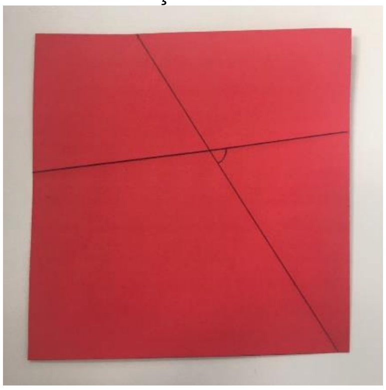
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 52 – Construção da Bissetriz – Passo 6



Fonte: (o autor, 2021)

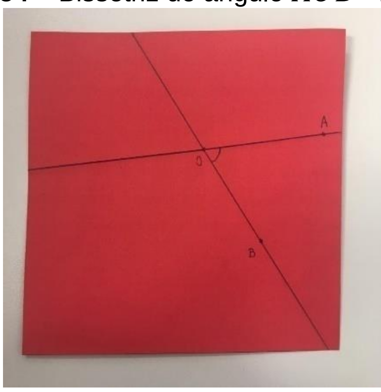
Figura 53 – Construção da Bissetriz – Passo 7



Fonte: (o autor, 2021)

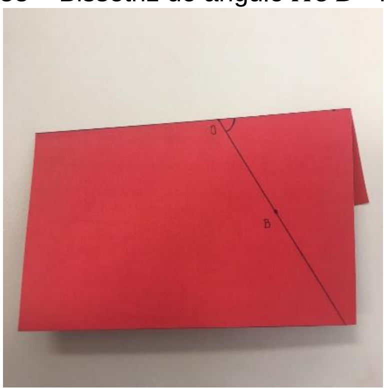
Em seguida, nomeia-se o vértice O, bem como um ponto em cada uma das semirretas (pontos A e B), obtendo o ângulo $A\hat{O}B$ através das semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$. Desse modo, dobra-se para trás a reta que contém AO e faz-se outra dobra em que a semirreta $\overrightarrow{OA}$ fique sobre a semirreta $\overrightarrow{OB}$, obtendo-se a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$.

Figura 54 – Bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$– Passo 1



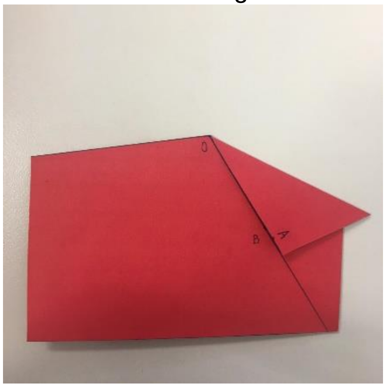
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 55 – Bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$– Passo 2



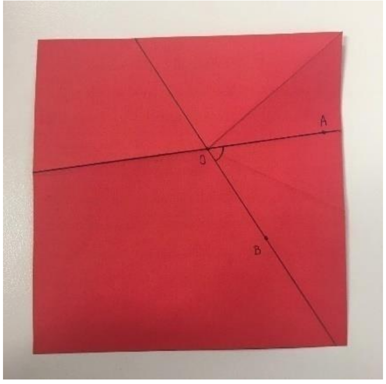
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 56 – Bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$– Passo 3



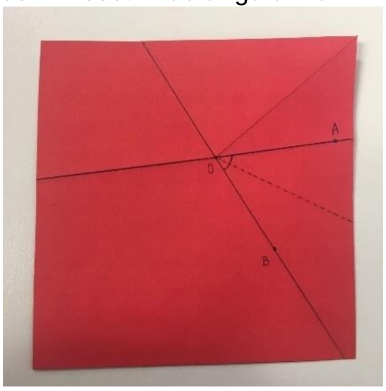
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 57 – Bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$– Passo 4



Fonte: (o autor, 2021)

Figura 58 – Bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$– Passo 5



Fonte: (o autor, 2021)

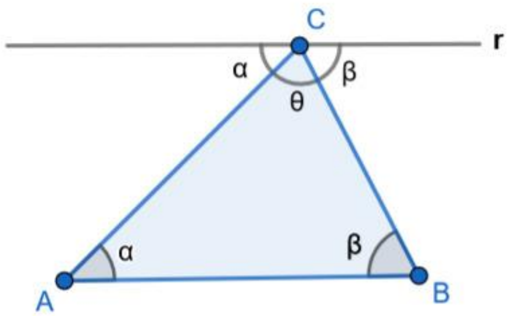
4.2 OFICINA 2

No que se refere a Oficina 2, temos o desenvolvimento dos conceitos de soma dos ângulos internos de um triângulo e incentro.

4.2.1 Soma dos ângulos internos de um triângulo

“A soma dos ângulos de um triângulo é igual a 180°” (NETO, 2013, p. 40).

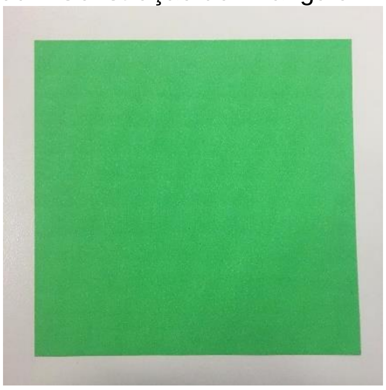
Figura 59 – Ângulos internos do Triângulo



Fonte: (o autor, 2021)

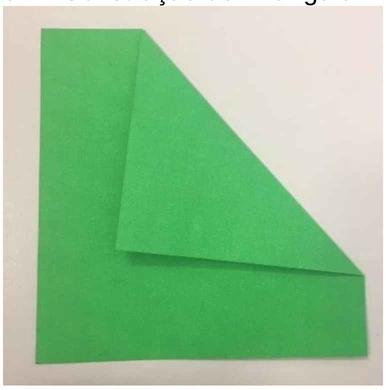
Para construir um triângulo através de dobraduras iniciamos o processo fazendo uma dobra qualquer no papel.

Figura 60 – Construção do Triângulo – Passo 1



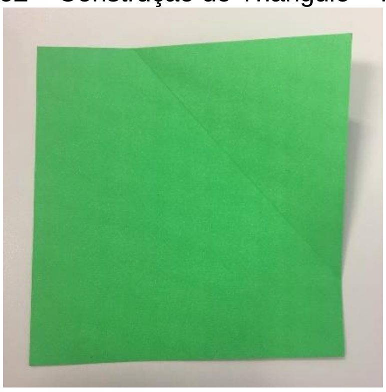
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 61 – Construção do Triângulo – Passo2



Fonte: (o autor, 2021)

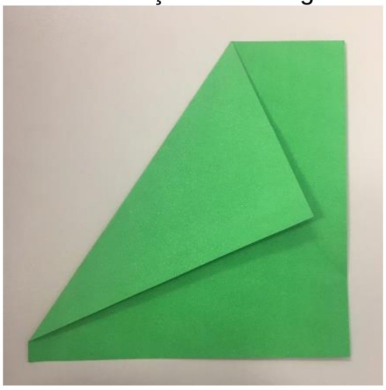
Figura 62 – Construção do Triângulo – Passo 3



Fonte: (o autor, 2021)

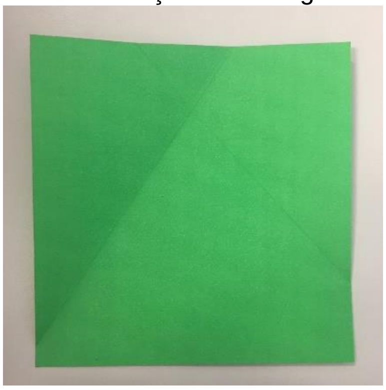
Em seguida, realiza-se outra dobra que seja concorrente com a primeira.

Figura 63 – Construção do Triângulo – Passo 4



Fonte: (o autor, 2021)

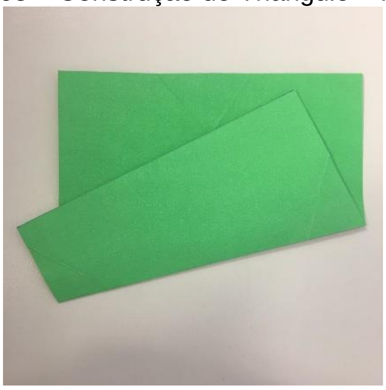
Figura 64 – Construção do Triângulo – Passo 5



Fonte: (o autor, 2021)

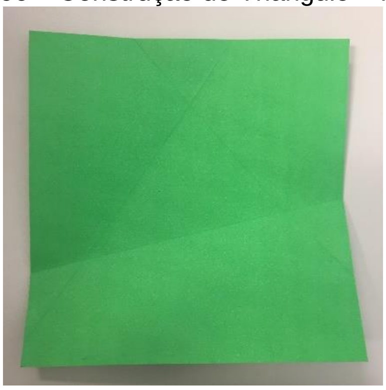
Na sequência, realiza-se uma terceira dobra de modo a interceptar as duas primeiras já feitas.

Figura 65 – Construção do Triângulo – Passo 6



Fonte: (o autor, 2021)

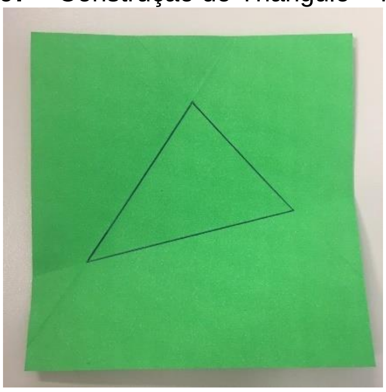
Figura 66 – Construção do Triângulo – Passo 7



Fonte: (o autor, 2021)

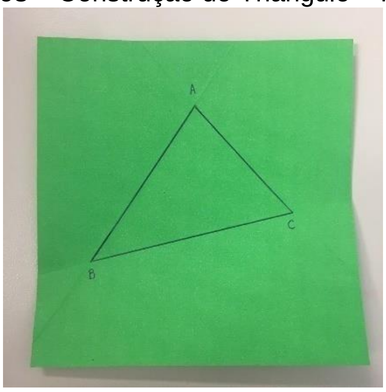
Para finalizar, realiza-se a marcação do triângulo formado e dos vértices nas intersecções das dobras.

Figura 67 – Construção do Triângulo – Passo 8



Fonte: (o autor, 2021)

Figura 68 – Construção do Triângulo – Passo 9



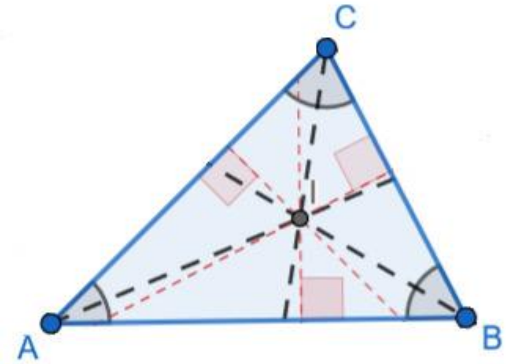
Fonte: (o autor, 2021)

Com a construção do triângulo finalizada, fazemos as medições dos três ângulos internos formados com o auxílio de um transferidor. Assim, podemos realizar a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo construído.

4.2.2 Construção do Incentro

De acordo com Dolce e Pompeo (2013) as três bissetrizes internas de um triângulo encontram-se num mesmo ponto, o qual é equidistante dos lados desse mesmo triângulo. O ponto de intersecção das três bissetrizes internas de um triângulo é chamado de incentro. “O incentro é o centro da circunferência inscrita no triângulo” (DOLCE & POMPEO, 2013, p. 125).

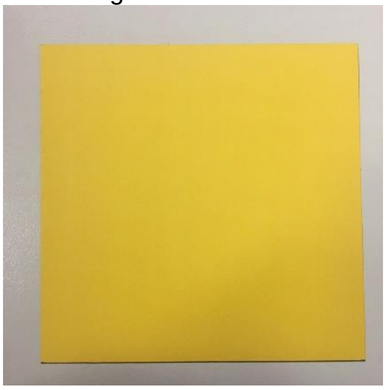
Figura 69 – Incentro do Triângulo



Fonte: (o autor, 2021)

Para a construção do incentro no papel, deve-se primeiro fazer a construção de um triângulo conforme descrito no item anterior. Desse modo, obtemos o triângulo de vértices ABC.

Figura 70 – Triângulo de vértices ABC – Passo 1

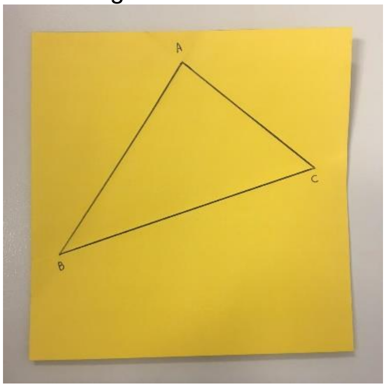


Fonte: (o autor, 2021)

Figura 71 – Triângulo de vértices ABC – Passo 2

Fonte: (o autor, 2021)

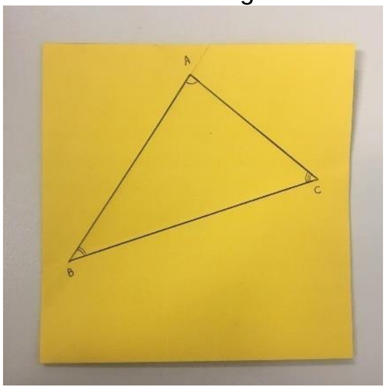
Figura 72 – Triângulo de vértices ABC – Passo 3



Fonte: (o autor, 2021)

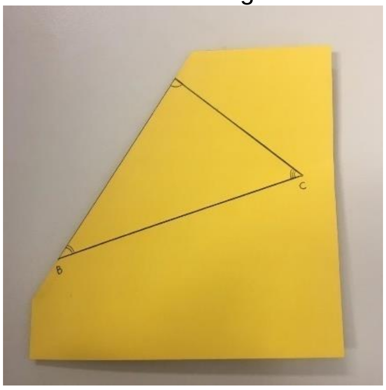
Assim, de acordo com a definição de incentro, construiremos as bissetrizes dos três ângulos internos do triângulo ABC. Para isso, é feita uma dobra de modo que o lado AB fique sobre o lado BC, obtendo assim a bissetriz do ângulo $\mathrm{A\widehat{B}C}$.

Figura 73 – Bissetriz do Ângulo $\mathrm{A\widehat{B}C}$ – Passo 1



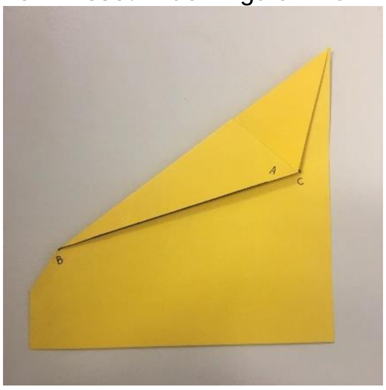
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 74 – Bissetriz do Ângulo $\mathrm{A\widehat{B}C}$ – Passo 2



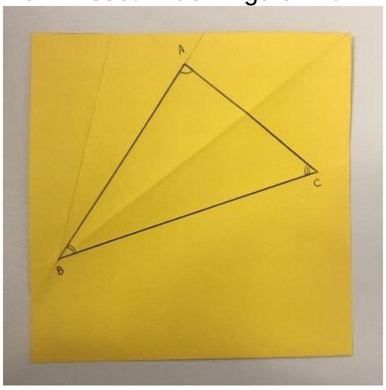
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 75 – Bissetriz do Ângulo $\mathrm{A\widehat{B}C}$ – Passo 3



Fonte: (o autor, 2021)

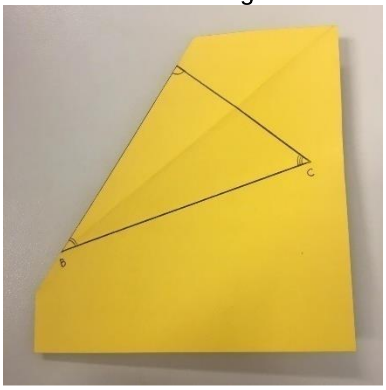
Figura 76 – Bissetriz do Ângulo$\mathrm{A\widehat{B}C}$ – Passo 4



Fonte: (o autor, 2021)

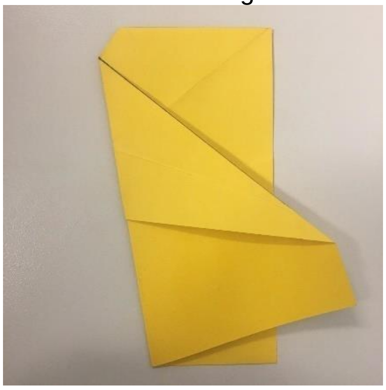
Analogamente, é feita uma dobra de modo que o lado AB fique sobre o lado AC, obtendo a bissetriz do ângulo $\mathrm{A\widehat{B}C}$ e, uma dobra de modo que o lado AC fique sobre o lado BC, obtendo a bissetriz do ângulo $\mathrm{A\hat{C}B}$.

Figura 77 – Bissetriz do Ângulo $\mathrm{A\hat{C}B}$ – Passo 1



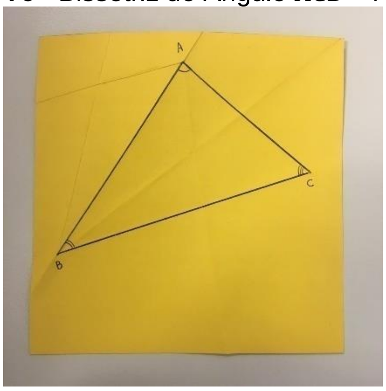
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 78 – Bissetriz do Ângulo $\mathrm{A\hat{C}B}$ – Passo 2



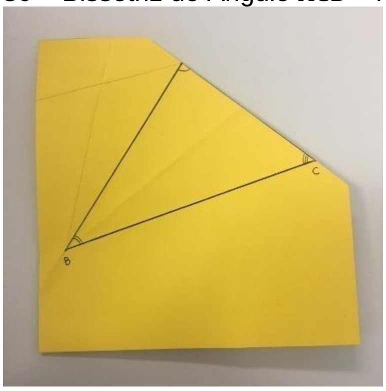
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 79– Bissetriz do Ângulo $\mathrm{A\hat{C}B}$ – Passo 3



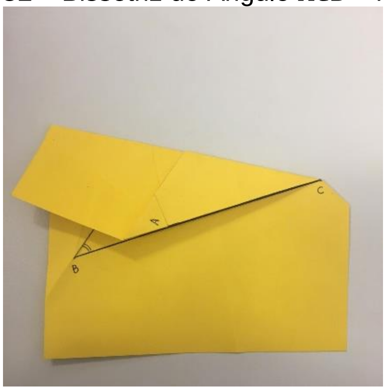
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 80 – Bissetriz do Ângulo $\mathrm{A\hat{C}B}$ – Passo 4



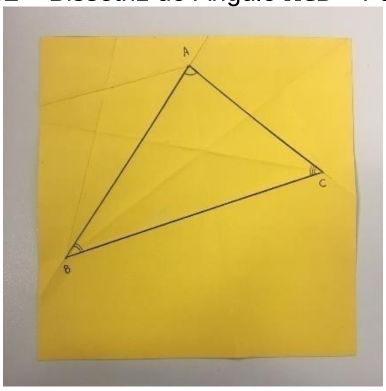
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 81 – Bissetriz do Ângulo $\mathrm{A\hat{C}B}$ – Passo 5



Fonte: (o autor, 2021)

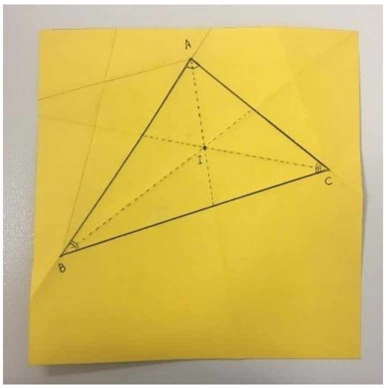
Figura 82 – Bissetriz do Ângulo $\mathrm{A\hat{C}B}$ – Passo 6



Fonte: (o autor, 2021)

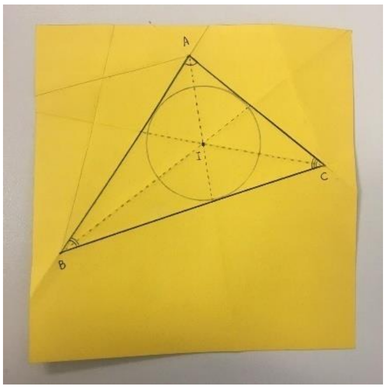
Desse modo, encontra-se o incentro através da intersecção das três bissetrizes construídas. Para a construção da circunferência inscrita no triângulo, coloca-se a ponta seca do compasso sobre o incentro e faz-se a abertura de modo que a ponta que contém o grafite incida sobre os lados do triângulo na menor distância possível, obtendo assim o raio da circunferência a ser construída. Traçase, portanto, a marcação, obtendo assim a circunferência circunscrita no triângulo.

Figura 83 – Incentro através da intersecção das três bissetrizes construídas – Passo 1



Fonte: (o autor, 2021)

Figura 84 – Incentro através da intersecção das três bissetrizes construídas – Passo 2



Fonte: (o autor, 2021)

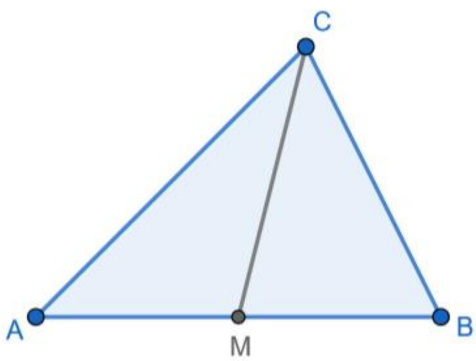
4.3 OFICINA 3

Na Oficina 3 foram desenvolvidos os conceitos de baricentro e ortocentro.

4.3.1 Construção do baricentro

Para compreender o conceito de baricentro, primeiramente é necessário entender o conceito de mediana. Entende-se mediana como sendo o segmento de reta que liga o vértice de um triângulo ao ponto médio do lado oposto a esse vértice.

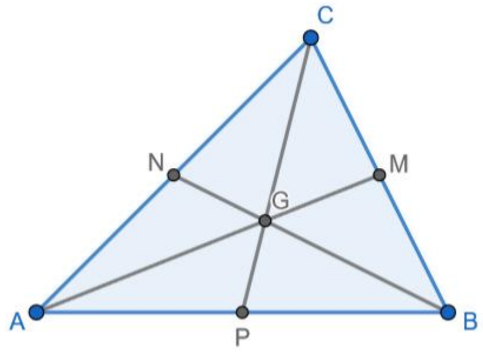
Figura 85 – Mediana de um triângulo



Fonte: (o autor, 2021)

De acordo com Dolce e Pompeo (2013) as três medianas de um triângulo encontram-se num mesmo ponto, o qual divide cada uma das três medianas em duas partes na proporção 2:1, sendo que a parte que contém o vértice mede o dobro da outra. “O ponto de intersecção (ou ponto de encontro, ou ponto de concurso) das três medianas de um triângulo é o *baricentro* do triângulo” (DOLCE & POMPEO, 2013, p. 122).

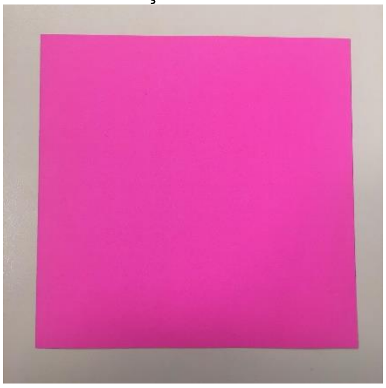
Figura 86 – Baricentro do Triângulo



Fonte: (o autor, 2021)

Para a construção do baricentro no papel deve-se primeiro fazer a construção de um triângulo fazendo a marcação de seus vértices (A, B e C) e de seus lados (AB, AC e BC).

Figura 87 – Construção do Baricentro – Passo 1

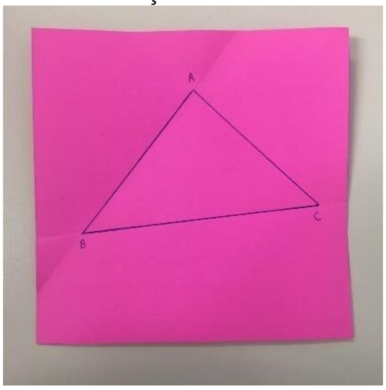


Fonte: (o autor, 2021)

Figura 88 – Construção do Baricentro – Passo 2

Fonte: (o autor, 2021)

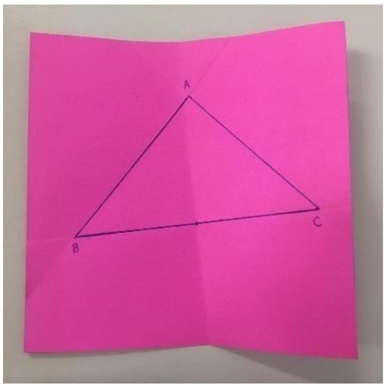
Figura 89 – Construção do Baricentro – Passo 3



Fonte: (o autor, 2021)

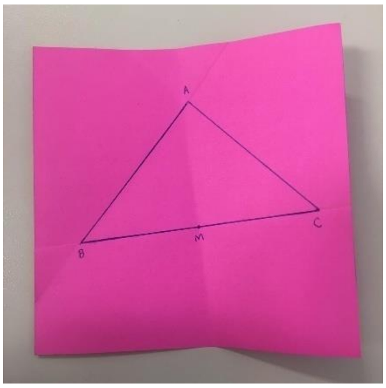
Assim, para construir a primeira mediana é feita a dobradura de modo obter o ponto médio M de um dos lados (aqui sendo o lado BC). Em seguida, realiza-se uma nova dobra de modo a ligar o ponto médio obtido ao vértice oposto ao lado que contém este ponto médio (neste caso o vértice A).

Figura 90 – Construção da Primeira Mediana – Passo 1



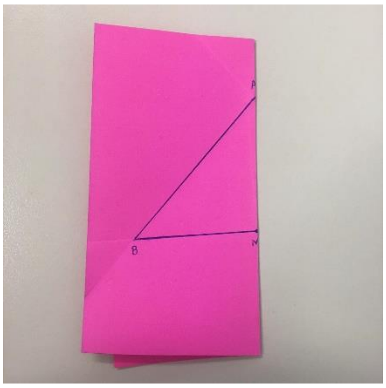
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 91 – Construção da Primeira Mediana – Passo 2



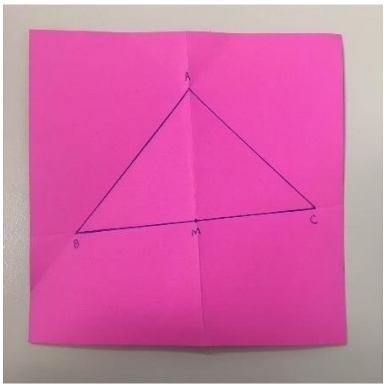
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 92 – Construção da Primeira Mediana – Passo 3



Fonte: (o autor, 2021)

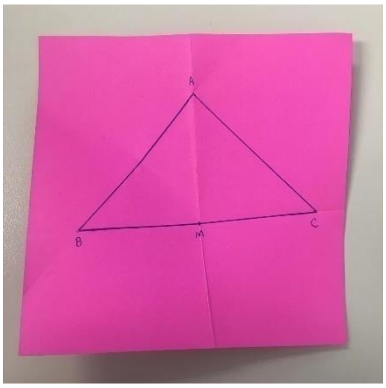
Figura 93 – Construção da Primeira Mediana – Passo 4



Fonte: (o autor, 2021)

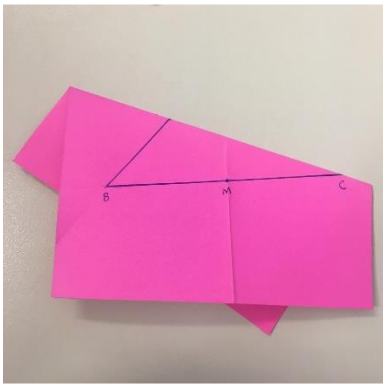
Analogamente, repete-se o processo para encontrar os pontos médios N e P dos lados AB e AC, respectivamente, ligando-os em seguida através da dobradura até os respectivos vértices opostos aos lados que contêm tais pontos médios, determinando assim as duas medianas restantes.

Figura 94 – Construção das Medianas remanescentes – Passo 1



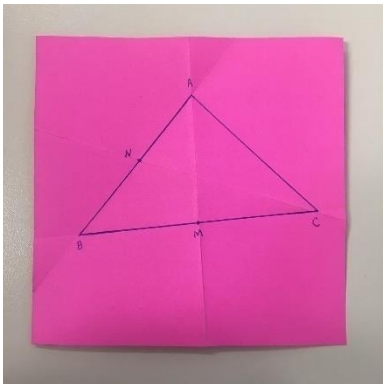
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 95 – Construção das Medianas remanescentes – Passo 2



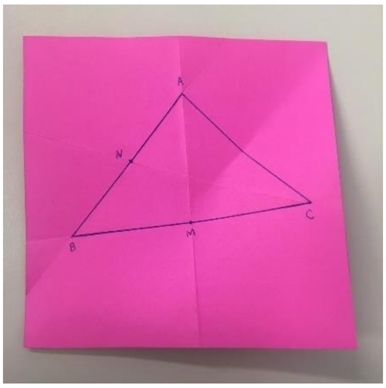
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 96 – Construção das Medianas remanescentes – Passo 3



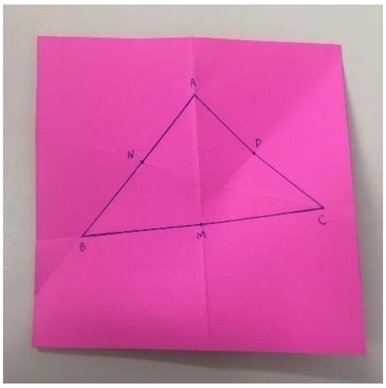
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 97 – Construção das Medianas remanescentes – Passo 4



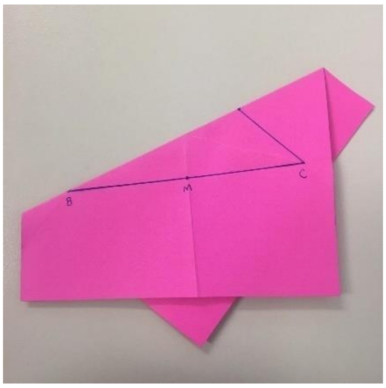
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 98 – Construção das Medianas remanescentes – Passo 5



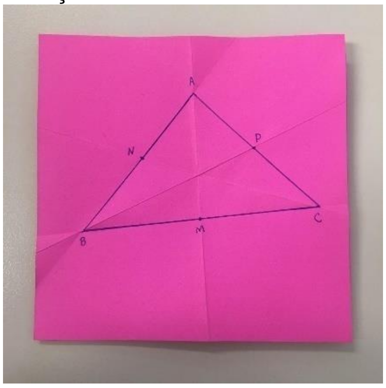
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 99 – Construção das Medianas remanescentes – Passo 6



Fonte: (o autor, 2021)

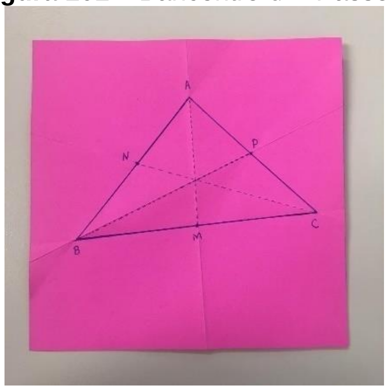
Figura 100 – Construção das Medianas remanescentes – Passo 7



Fonte: (o autor, 2021)

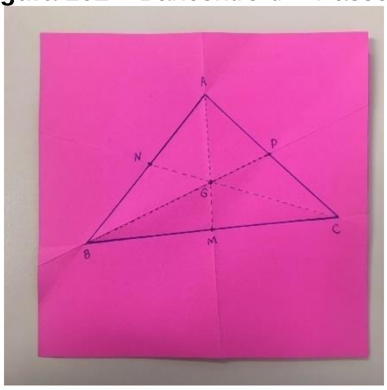
Desse modo, encontra-se o baricentro G através da intersecção das medianas construídas.

Figura 101 – Baricentro G – Passo 1



Fonte: (o autor, 2021)

Figura 102 – Baricentro G – Passo 2

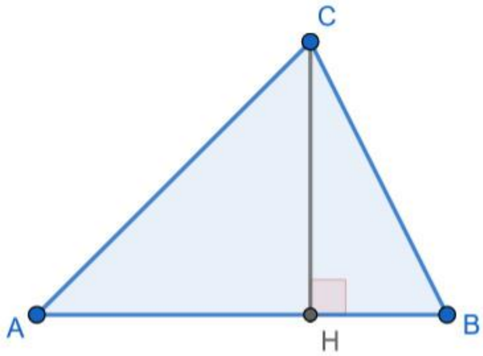


Fonte: (o autor, 2021)

4.3.2 Construção do ortocentro

Para a construção do ortocentro, inicialmente trataremos do conceito de altura de um triângulo. Entende-se que a “altura de um triângulo é o segmento de reta perpendicular à reta suporte de um lado do triângulo com extremidades nesta reta e no vértice oposto ao lado considerado” (DOLCE & POMPEO, 2013, p. 82).

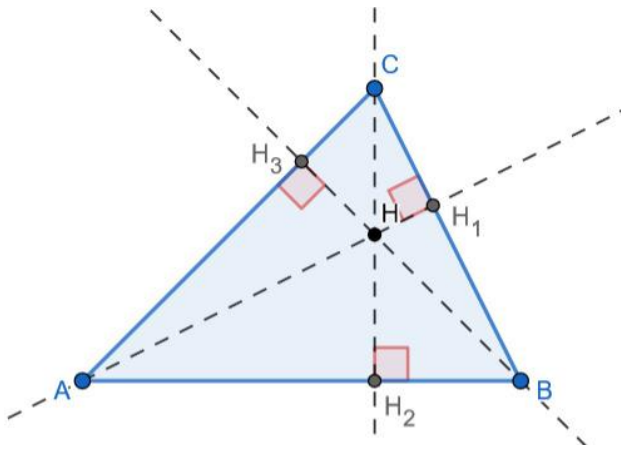
Figura 103 – Altura de um Triângulo



Fonte: (o autor, 2021)

Segundo Dolce e Pompeo (2013) as três retas suportes das alturas de um triângulo encontram-se em um único ponto. Desse modo, “o ponto de intersecção (ou ponto de encontro ou ponto de concurso) das retas suportes das alturas de um triângulo é o *ortocentro* do triângulo” (DOLCE & POMPEO, 2013, p. 127).

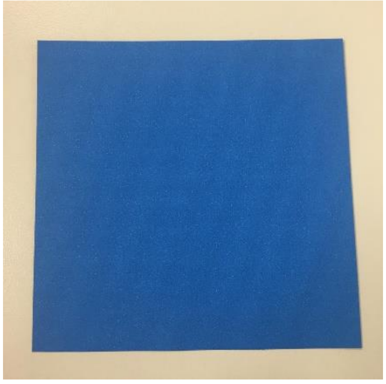
Figura 104 – Ortocentro



Fonte: (o autor, 2021)

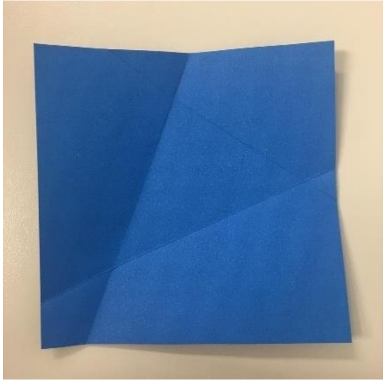
Para a construção do ortocentro no papel novamente deve-se primeiro fazer a construção de um triângulo fazendo a marcação de seus vértices (A, B e C) e de seus lados (AB, AC e BC).

Figura 105 – Construção de um triângulo – Passo 1



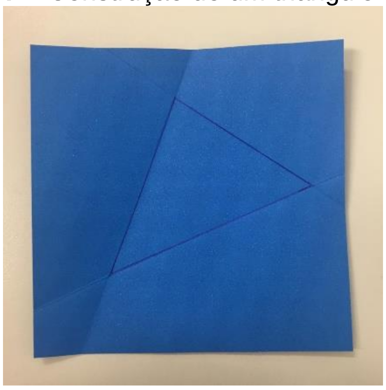
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 106 – Construção de um triângulo – Passo 2



Fonte: (o autor, 2021)

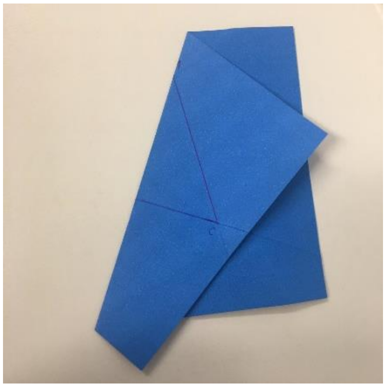
Figura 107 – Construção de um triângulo – Passo 3



Fonte: (o autor, 2021)

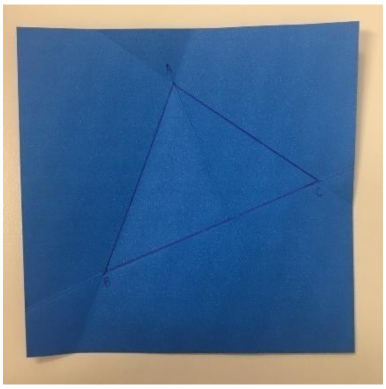
Em seguida, deve ser feita uma dobra que passe por um vértice (aqui escolhido o vértice A) e que seja perpendicular do lado oposto desse vértice (aqui o lado BC), formando assim a altura relativa ao lado escolhido.

Figura 108 – Construção do Ortocentro – Passo 1



Fonte: (o autor, 2021)

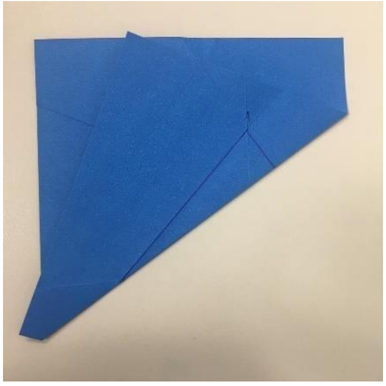
Figura 109 – Construção do Ortocentro – Passo 2



Fonte: (o autor, 2021)

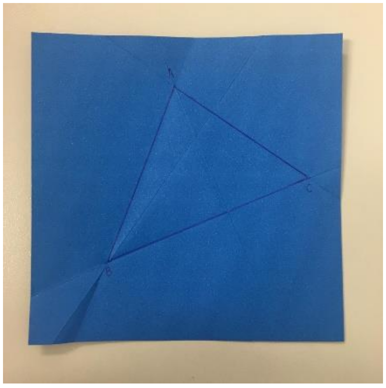
Analogamente, fazemos uma dobra que passe pelo vértice B e outra dobra que passe pelo vértice C e que sejam perpendiculares aos lados AC e AB, respectivamente.

Figura 110 – Construção do Ortocentro – Passo 3



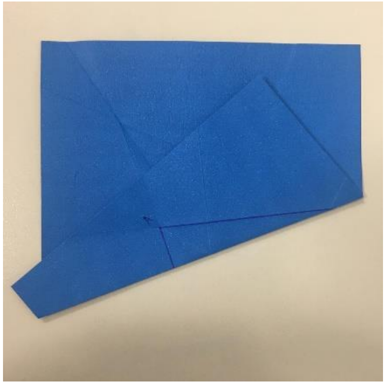
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 111 – Construção do Ortocentro – Passo 4



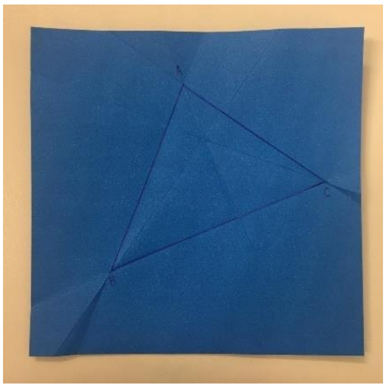
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 112 – Construção do Ortocentro – Passo 5



Fonte: (o autor, 2021)

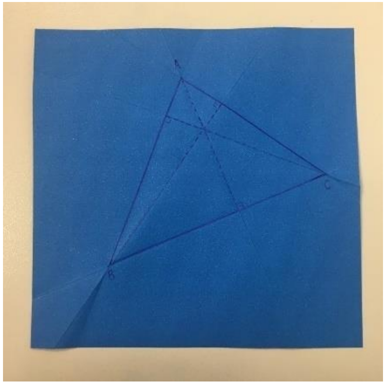
Figura 113 – Construção do Ortocentro – Passo 6



Fonte: (o autor, 2021)

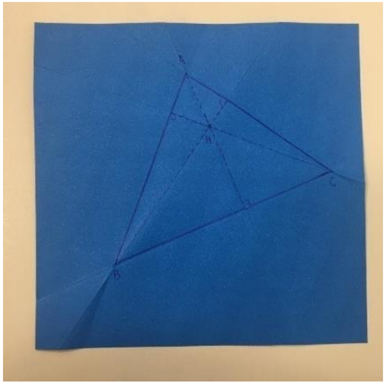
Desse modo, encontra-se o ortocentro H através da intersecção das alturas construídas.

Figura 114 – Construção do Ortocentro – Passo 7



Fonte: (o autor, 2021)

Figura 115 – Construção do Ortocentro – Passo 8



Fonte: (o autor, 2021)

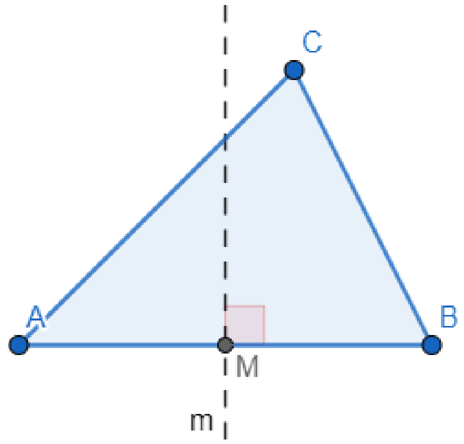
4.4 OFICINA 4

No que se refere a Oficina 4, temos o desenvolvimento do conceito de circuncentro.

4.4.1 Construção do circuncentro

Ao realizar a construção do circuncentro, é necessário anteriormente compreender o conceito de mediatriz. Entende-se mediatriz como a reta perpendicular a um segmento que passa pelo ponto médio do mesmo.

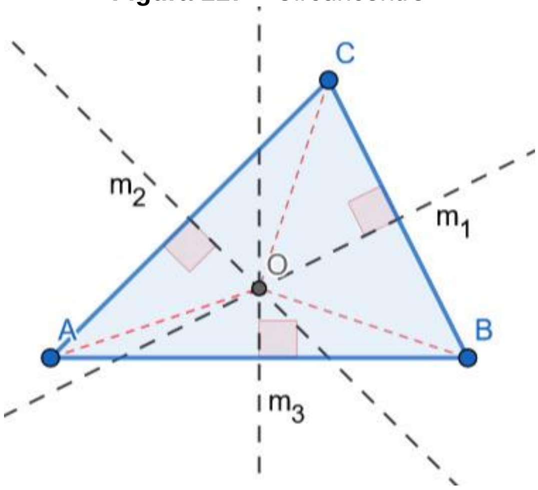
Figura 116 – Mediatriz de um Triângulo



Fonte: (o autor, 2021)

De acordo com Dolce e Pompeo (2013) as mediatrizes dos lados de um triângulo encontram-se em um único ponto, o qual é equidistante dos vértices desse triângulo. “O ponto de intersecção (ou ponto de encontro ou ponto de concurso) das mediatrizes dos lados de um triângulo é o *circuncentro* do triângulo” (DOLCE & POMPEO, 2013, p. 123).

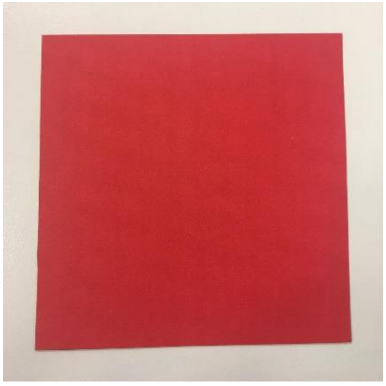
Figura 117 – Circuncentro



Fonte: (o autor, 2021)

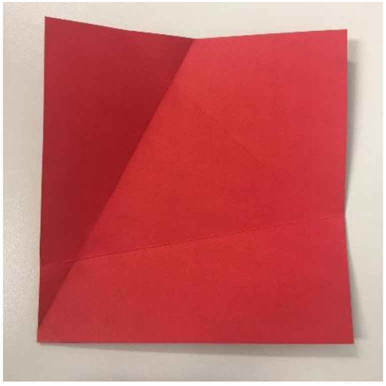
Para a construção do circuncentro realizamos novamente a construção de um triângulo fazendo a marcação de seus vértices (A, B e C) e de seus lados (AB, AC e BC).

Figura 118 – Construção do Circuncentro – Passo 1



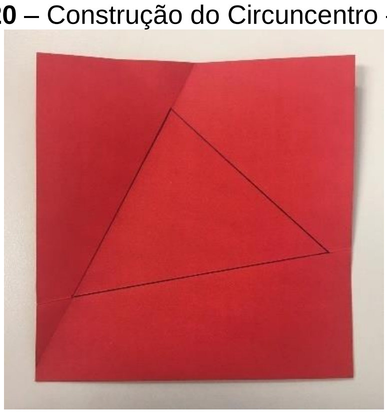
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 119 – Construção do Circuncentro – Passo 2



Fonte: (o autor, 2021)

Figura 120 – Construção do Circuncentro – Passo 3



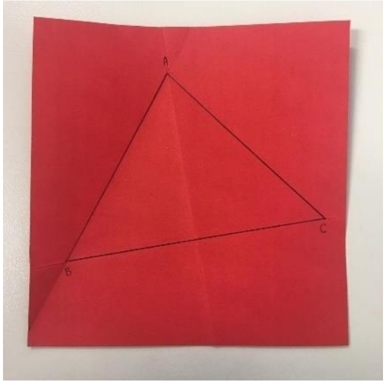
Fonte: (o autor, 2021)

Em seguida, fazemos a construção da mediatriz relativa ao lado BC.

Figura 121 – Construção do Circuncentro (Mediatriz relativa ao lado BC) – Passo 4

Fonte: (o autor, 2021)

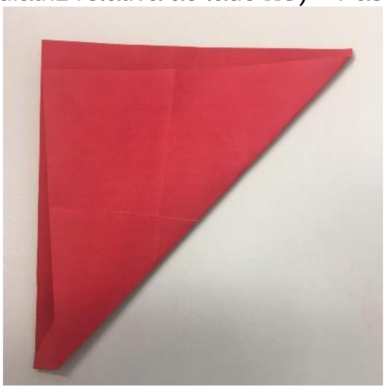
Figura 122 – Construção do Circuncentro (Mediatriz relativa ao lado BC) – Passo 5



Fonte: (o autor, 2021)

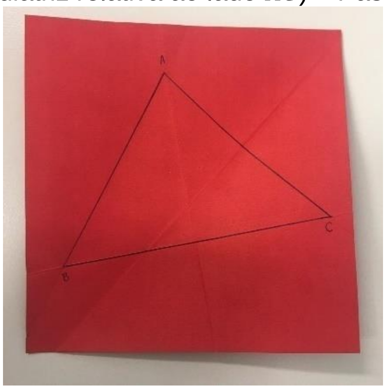
Analogamente, realizamos as mediatrizes relativas aos lados AC e AB.

Figura 123 – Construção do Circuncentro (Mediatriz relativa ao lado AC) – Passo 6



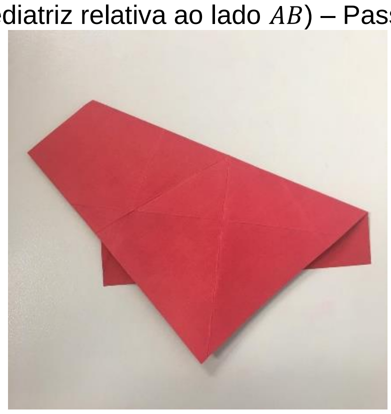
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 124 – Construção do Circuncentro (Mediatriz relativa ao lado AC) – Passo 7



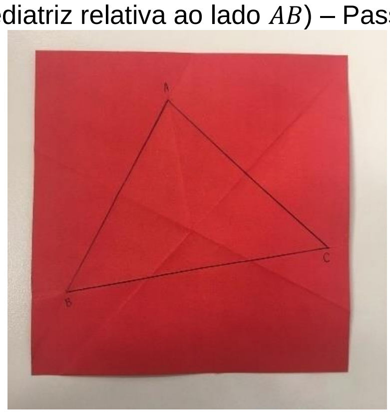
Fonte: (o autor, 2021)

Figura 125 – Construção do Circuncentro (Mediatriz relativa ao lado AB) – Passo 8



Fonte: (o autor, 2021)

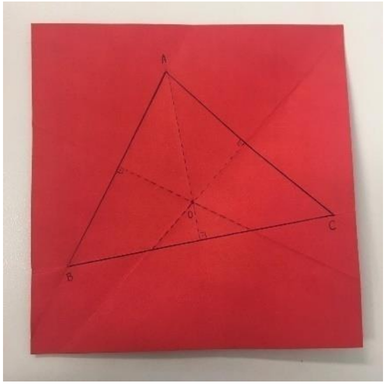
Figura 126 – Construção do Circuncentro (Mediatriz relativa ao lado AB) – Passo 9



Fonte: (o autor, 2021)

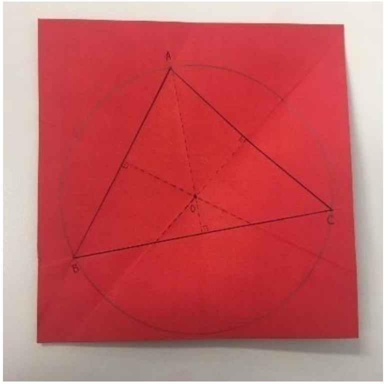
Desse modo, encontra-se o circuncentro O do triângulo ABC através da intersecção das mediatrizes construídas. O circuncentro determina o centro da circunferência na qual o triângulo está inscrito.

Figura 127 – Construção do Circuncentro (Intersecção das mediatrizes construídas) – Passo 10



Fonte: (o autor, 2021)

Figura 128 – Construção do Circuncentro (intersecção das mediatrizes construídas) – Passo 11



Fonte: (o autor, 2021)

5 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Nesse capítulo são apresentados os resultados obtidos por meio das análises das respostas adquiridos no Formulário Inicial e no Formulário Final, aplicados na primeira e na última oficina, respectivamente, além de análises inerentes ao processo de aplicação das oficinas. Para isso, fora realizada uma análise inicial para observar os conhecimentos prévios dos alunos, necessários para a realização e aplicação das oficinas. Subsequente, são apresentadas transcrições dos áudios obtidos durante o desenvolvimento das oficinas, de modo a ponderar observações, por parte do professor, inerentes ao processo de aplicação. Em seguida, são apresentados relatos dos alunos, no que compete o processo de metodologia de ensino vivenciados por eles, referentes aos conteúdos desenvolvidos. Dando continuidade, é realizada a comparação e análise das respostas obtidas nos formulários inicial e final, pertinentes aos conceitos de mediatriz, bissetriz, mediana, altura, incentro, circuncentro, baricentro e ortocentro. Findando, é exibido o relato dos alunos acerca de suas opiniões sobre as oficinas realizadas.

5.1 Apresentação dos Resultados

Para apresentação dos resultados foram analisados cinco tópicos principais, nos quais quatro deles revelam conclusões inerentes ao ensino, aprendizagem e metodologia, e um deles utilizado como pesquisa diagnóstica de conceitos matemáticos fundamentais necessários para a aplicação e desenvolvimento das oficinas.

As oficinas foram aplicadas para um total de 13 (treze) alunos de um colégio particular localizado no norte do Paraná, atendendo todos os protocolos estabelecidos pelos órgãos responsáveis, visto o estado de pandemia devido ao vírus SARS-CoV-2. Para sistematizarmos os resultados, listaremos os alunos como A_1, A_2, A_3, ..., A_{11}, A_{12}, A_{13}. As quatro oficinas foram realizadas em quatro dias diferentes, gerando, portanto, a ausência de alguns alunos em determinadas oficinas, como poderá ser observado a seguir nas análises realizadas no Formulário Inicial e no Formulário Final.

Os resultados, para melhor compreensão e aferição acerca de vertente da análise, foram separados em cinco tópicos denominados “eixos”. Os cinco eixos são: Pesquisa diagnóstica, Índice da quantidade de apreensão dos conceitos, Apreensão qualitativa dos alunos sobre o processo de aprendizado, Análise do pesquisador acerca das oficinas e Feedback dos alunos sobre as oficinas.

O quadro a seguir apresenta o método de análise utilizado em cada um dos eixos:

Tabela 1 – Método de análise

Título	Material	Método	Resultados
Pesquisa diagnóstica	Questão 1 do Formulário Inicial.	Tabela simples	Tabulação de dados
Análise do pesquisador acerca das oficinas	Gravações dos áudios das oficinas.	Seleção / agrupamento de trechos	Análise escrita
Apreensão qualitativa dos alunos sobre o processo de aprendizado	Questão 3 do Formulário Inicial; Questões 2 e 4 do Formulário Final.	Tabela sobre as aferições dos alunos	Análise escrita
Índice da quantidade de apreensão dos conceitos	Questão 2 do Formulário Inicial; Questões 1 e 5 do Formulário Final.	Tabulação acerca dos acertos	Análise escrita
Feedback dos alunos sobre as oficinas	Questão 3 do Formulário Final.	Tabulação das respostas	Gráfico

Fonte: (o autor, 2021)

5.1.1 Pesquisa diagnóstica

A pesquisa diagnóstica consta da aplicação de um questionário subjetivo contendo a explicação e o entendimento de cada aluno sobre cinco conceitos matemáticos essenciais para a aplicação das oficinas, visto as construções feitas através das dobraduras. Esses cinco conceitos competem aos itens *a*, *b*, *c*, *d* e *e* da questão 1 do Formulário Inicial, referentes aos conceitos de reta, segmento de reta, ponto médio de um segmento de reta, retas concorrentes e retas perpendiculares, respectivamente. Os resultados referentes à pesquisa diagnóstica serviram como base para que os conceitos fundamentais mencionados fossem retomados antes do início das oficinas de modo a obter uma melhor compreensão acerca dos conceitos que estavam para serem desenvolvidos.

Para item de análise, as respostas referentes a questão foram classificadas em *não compreende o conceito*, *compreende a ideia central do conceito*, *compreende o conceito parcialmente* e *compreende o conceito* *completamente*. A classificação "*não compreende o conceito"* contempla respostas relatadas como não sabidas ou relacionadas a outros conceitos. No item "*compreende a ideia central do conceito"* foram selecionadas as respostas que notavam um entendimento do conceito abordado em seu aspecto funcional, no sentido de aplicação, como, por exemplo, "bissetriz é a metade do ângulo". Já no item "*compreende o conceito parcialmente"* integra-se respostas que não obtiveram a descrição absolutamente correta do conceito, como, por exemplo, "bissetriz divide um ângulo ao meio". Findando, a classificação "*compreende o conceito completamente"* abrange as respostas que descrevem o conceito em sua plenitude, como, por exemplo, "bissetriz é uma semirreta que divide um ângulo em duas partes iguais". A tabela 2 apresenta os resultados obtidos na pesquisa diagnóstica.

Tabela 2 – Resultados obtidos na pesquisa diagnóstica

Conceito	Não compreende o conceito	Compreende a ideia central do conceito	Compreende o conceito parcialmente	Compreende o conceito completamente
Reta	A_7	A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}	X	X
Segmento de reta	A_2, A_7, A_8, A_9, A_{11}	A_1, A_5	A_3, A_6, A_{12}	A_4, A_{10}
Ponto médio de um segmento de reta	A_1, A_2, A_3, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}			A_4
Retas concorrentes	A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}			
Retas perpendiculares	A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}		A_1, A_8	

Fonte: (o autor, 2021)

Por meio dos resultados obtidos na pesquisa diagnóstica, foi possível fazer a retomada necessária desses conceitos a fim de dar início a aplicação das oficinas. A análise acerca da compreensão e do entendimento dos alunos no que se refere aos conceitos listados acima será descrita no eixo 2, através da análise das gravações.

5.1.2 Análise do pesquisador acerca das oficinas

Durante a aplicação das oficinas foram realizadas gravações dos diálogos entre o professor e os alunos. Tais gravações serviram como objeto de análise do desenvolvimento de ideias dos alunos no que compete os conceitos trabalhados durante as oficinas. A seguir, serão apresentados fragmentos dos diálogos gravados, bem como uma análise do pesquisador sobre estes. A apresentação dos fragmentos dos diálogos e das análises será realizada conforme o desenvolvimento das oficinas. Desse modo, estão separadas em: Oficina 1, Oficina 2, Oficina 3 e Oficina 4.

5.1.2.1 Oficina 1

Ao iniciar a Oficina 1, foram abordados os conceitos de ponto, reta e plano e como poderia ser feita a representação de cada ente por meio da dobradura. Logo de início, surgem as seguintes indagações (A letra “P” será compreendida neste trabalho como a fala do professor, já a letra “A” como a fala dos alunos. Ambas as identificações serão inseridas ao final da fala de cada um:

> *“Como vocês conseguem imaginar um ponto sendo feito no papel através de dobradura?” (P).*
> A resposta imediata foi:
> *“Não sei” (A).*
> Após alguns segundos pensando melhor, surge outra resposta:
> *“Fazendo duas dobras que se encontrassem, fazendo aparecer um pontinho” (A).*

Complementando a resposta: era possível observar o conceito de ponto através da intersecção entre as duas dobraduras (duas retas).

Figura 129 – Construção de um Ponto

Fonte: (o autor, 2021)

Ao realizar a primeira das dobraduras é possível observar um dos três conceitos iniciais apresentados: o conceito de reta. Assim, fora agregada ao raciocínio inicial a ideia de que, se o papel fosse infinito, a dobra também seria infinita, ou seja, a reta não tem início e não tem fim.

Ao fazer as duas dobraduras, os alunos puderam observar a formação de um ponto através da intersecção entre elas, além de sua identificação através de uma letra maiúscula. Dando continuidade, a análise da representação de um plano ficou exemplificada no próprio papel em que foram feitas as representações dos dois primeiros entes: ponto e reta.

Na sequência, fora abordado o conceito de segmento de reta. Ao mencionar o conceito “segmento de reta”, a resposta imediata de um dos alunos foi: *“É o que tem começo, mas não tem fim” (A)*.

Com isso, foi possível abordar o conceito de semirreta, descrito pelo aluno e então definir o conceito de segmento de reta.

Surge a seguinte pergunta por parte do professor: *“Como é que vocês conseguem imaginar a construção de um segmento de reta?” (P)*.

A resposta imediata pelos alunos: *“Dobrar só uma vez” (A)*.

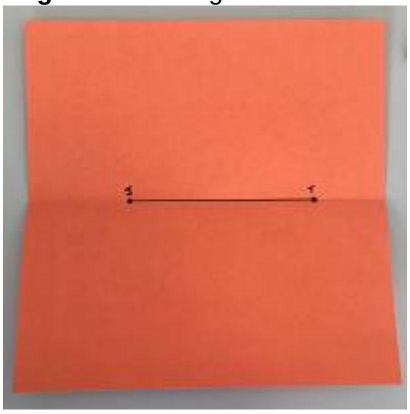
Fazendo a dobra, os alunos foram indagados pelo professor: *“Como é possível representar algo que tenha começo e que tenha fim?” (P)*.

A resposta, novamente é imediata: *“Com um ponto no começo e com um ponto no final” (A)*.

Surgem então dois questionamentos. O primeiro é: *“Posso fazer no lugar (da dobra) que eu quiser?” (A)*. E o segundo: *“As letras têm que ser iguais?” (A)*.

A resposta é que não, pelo contrário. Como são pontos diferentes, devem ser representados por letras diferentes. Desse modo, ligando os dois pontos foi possível criar o segmento de reta.

Figura 130 – Segmento de Reta



Fonte: (o autor, 2021)

Foi possível observar a falta de costume no manuseio de instrumentos como a régua, de modo que alguns alunos tentavam fazer as linhas sem o instrumento em questão. Dando prosseguimento, fora abordado o conceito de ponto médio de um segmento de reta. A pergunta que surge é: *"Como é possível construir o ponto médio de um segmento de reta?" (P)*.

Através do segmento construído anteriormente, foi possível fazer a construção do ponto médio através de uma pequena dobra realizada ao fazer os dois pontos marcados anteriormente se encontrarem. Surge a seguinte pergunta: *"Por que 'ponto médio'?" (P)*. A resposta é: "*Porque é um ponto que está no meio do segmento de reta" (A)*.

Figura 131 – Construção Ponto Médio

Fonte: (o autor, 2021)

Um dos alunos então indaga por ter feito uma dobra na folha inteira e não apenas uma pequena marcação no que seria o ponto médio. Sem saber, já estava sendo construída a mediatriz do segmento. Contudo, foi deixado para um momento adiante.

Como item de conferência, os alunos realizaram a medição, com a régua, de cada parte do segmento que foi dividida pelo ponto médio, de modo a analisarem os valores obtidos em cada um deles. Desse modo, foram obtidas várias respostas. Dentre elas: *“O meu deu certinho” (A)*. E ainda: *“O meu deu diferença de um milímetro” (A)*. Mas, em todos os casos, um valor muito próximo.

Sobre o segmento criado, os alunos tiveram um desafio: Neste mesmo segmento criado, tentarem criar outra reta que passasse pelos mesmos dois pontos. A resposta foi: *“É só dobrar em outro sentido” (A)*. Porém, neste caso, a reta seria a mesma. Outro aluno diz: *“Não tem como” (A)*. Surge uma outra solução: *“Pode ser uma reta aqui?” (A)* (uma reta sobre a reta já existente).

Novamente, seria uma mesma reta. E outro diz: *“Não dá” (A)*. Então é feita a pergunta: *“Conseguiram?” (P)*. E a resposta praticamente unânime é: *“Não” (A)*.

E novamente são indagados: *“Por quê?” (P)*. E a resposta: *“Porque não tem como” (A)*.

Desse modo, foi possível então observar o Postulado de Determinação no que compete a reta, ou seja, dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles. A partir daí, foram desenvolvidos os conceitos de retas concorrentes e retas perpendiculares, conforme é demonstrado a seguir: *“Mas como é possível criar duas retas concorrentes? Para entender melhor, imaginamos duas retas concorrentes como duas retas que se cruzam. E como é possível representar duas retas que se cruzam?” (P)*. A resposta vem logo em seguida: *“Assim e assim”* (A) (fazendo duas dobras, mostra um aluno).

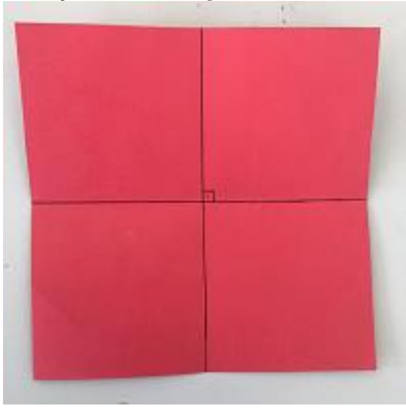
Estando correta a resposta, construímos, desse modo, duas retas concorrentes.

Figura 132 – Retas Concorrentes

Fonte: (o autor, 2021)

Assim, com a utilização do transferidor, os alunos fizeram as medições dos ângulos existentes entre as retas.

Figura 133 – Medições dos Ângulos existentes entre as Retas



Fonte: (o autor, 2021)

Foi possível observar que alguns alunos não sabiam ou não lembravam como era utilizado o transferidor. A maioria das dobras saíram nas diagonais ou nos pontos médios dos lados do papel utilizado na dobradura, com isso quase que em sua totalidade, os ângulos medidos foram retos. Contudo, houve ângulo cuja medida foi diferente de 90°. Com isso, foi possível estabelecer a diferença entre retas concorrentes e retas perpendiculares. Desse modo, foram feitas duas representações na lousa para observação: uma de retas perpendiculares na parte de cima e uma de retas concorrentes logo abaixo. Um dos alunos disse: *“As duas são concorrentes, (pois) as duas se ligam, as duas se cruzam” (A)*.

Em seguida, surge a pergunta: *“Então qual das duas é perpendicular?” (P).* Um aluno responde*: “A de cima”* (A). E o outro indaga: *“Por que* *a de cima?" (A)*. A resposta é: *"Porque tem que formar um ângulo de 90 graus para ser perpendicular" (A)*.

Figura 134 – Reta Perpendicular

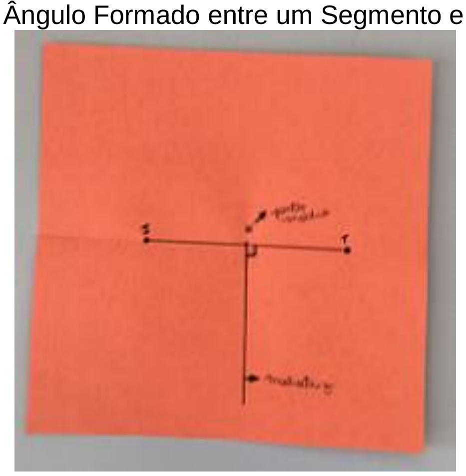
Fonte: (o autor, 2021)

Por conseguinte, foram desenvolvidos os conceitos de mediatriz e bissetriz. Logo após citar os temas a serem desenvolvidos, ouve-se ao fundo:

> *"Bissetriz é o que corta um ângulo no meio" (A)*.
> *"Como é possível construir uma mediatriz? Partindo do mesmo princípio da construção do ponto médio, basta fazer a dobra por completo" (P)*.
> Surge o comentário:
> *"É uma reta 'média" (A)*.

Temos, portanto, um segmento e a mediatriz deste segmento. Os alunos então são questionados sobre qual é o ângulo formado entre o segmento e sua mediatriz. Após a medição, surgem as respostas: *"90* (graus), *90* (graus)*, 90* (graus)*, 90* (graus)*, 91* (graus)*, 91,5* (graus)*" (A)*.

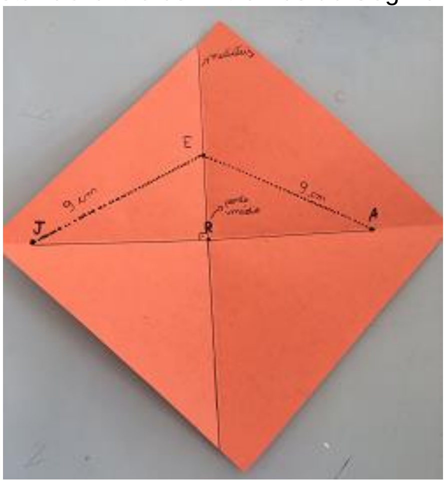
Figura 135 – Ângulo Formado entre um Segmento e sua Mediatriz



Fonte: (o autor, 2021)

Assim, foi pedido para que escolhessem um lugar sobre a mediatriz para que marcassem um ponto, de modo que na sequência calculassem a distância entre o ponto marcado e os pontos extremos do segmento de reta, anotando o valor observado. Surgem as respostas: *“Deram iguais os dois” (A)*; *“O meu também”* (A) (deu a mesma medida), diz a maioria.

Figura 136 – Distância entre os Extremos do Segmento e a Mediatriz

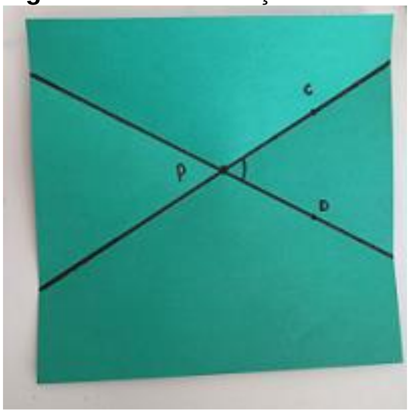


Fonte: (o autor, 2021)

Um aluno interfere dizendo que as medidas dos segmentos feitos por ele haviam sido diferentes. Foi possível observar que o aluno em questão havia feito todo o processo de dobradura do modo correto, contudo sua medição fora feita de maneira errada. Desse modo, após reajustar a régua no local correto, as medições dos segmentos em questão foram idênticas.

Finalizando a Oficina 1, fora feita a construção da bissetriz. Para isso, foi pedido para que fizessem novamente a construção de duas retas concorrentes. Dessa maneira, foi possível observar a existência de quatro ângulos e então pedido para que cada aluno escolhesse um dentre os quatro, de modo a fazer a marcação deste ângulo escolhido.

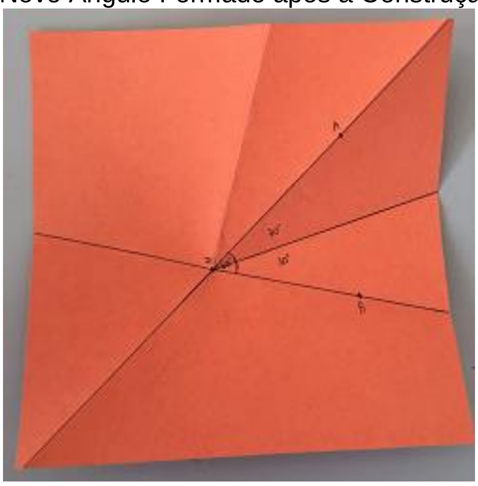
Figura 137 – Construção Bissetriz



Fonte: (o autor, 2021)

Assim, pediu-se que fosse feita uma dobra de modo que as duas semirretas que formavam o ângulo escolhido ficassem uma sobre a outra, formando assim a bissetriz do ângulo. Em seguida, pediu-se para que fosse feita a medição de cada novo ângulo formado após a construção da bissetriz. Logo surgem as respostas: *“As minhas duas medidas deram 32°”* (A); *“A de baixo deu 25º e a de cima deu 25º”* (A); *“Aqui deu 30º para cada” (A)*.

Figura 138 – Novo Ângulo Formado após a Construção da Bissetriz

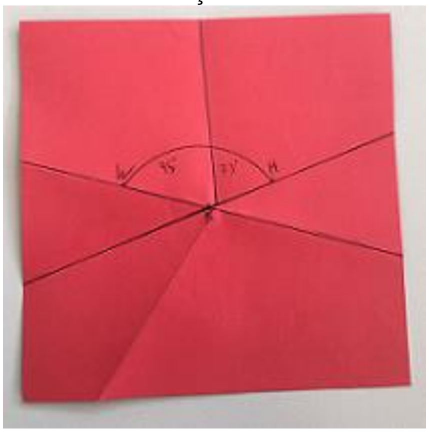


Fonte: (o autor, 2021)

Outro aluno pontua: *“O meu deu errado, fiz a dobra em outro lugar” (A)*.

Verificando, a dobradura não estava passando pelo vértice do ângulo.

Figura 139 – Construção Incorreta da Bissetriz



Fonte: (o autor, 2021)

Desse modo, foi pedido para que o aluno refizesse o processo, desta vez passando a dobradura pelo centro. Após ser refeito o processo, vem a resposta: *“Nossa, deu quase um dedo* (de diferença)*. Deu 75º exato agora” (A)*.

Durante a Oficina 1, como contato inicial, foi possível observar um engajamento dos alunos no processo de construção e participação das discussões realizadas. Os estudantes efetuaram em completude o que fora proposto, além de constantemente pedirem auxílio para verificação da assertividade no desenvolvimento das construções dos conceitos trabalhados, não acanhados em fazer questionamentos. Foi possível também observar, como já citado anteriormente, a falta de hábito e a dificuldade dos discentes na utilização de instrumentos como a régua e o transferidor. Contudo, análogo ao feito no processo de construção, notou-se a pretensão em aprender a forma correta de utilizá-los através dos vários pedidos de explicação feitos. No que compete ao processo de ensino, viu-se a participação dos alunos como ponto central no desenvolvimento das atividades realizadas, fazendo-se parte presente e atuante em tal processo. Além disso, as dúvidas surgidas tornaram-se elementos fundamentais para a troca de saberes e experiências entre os alunos.

5.1.2.2 Oficina 2

Dando início na Oficina 2, a primeira atividade a ser desenvolvida foi a construção de um triângulo. Para isso, é feita a seguinte pergunta: *“Quantas dobras serão necessárias?” (P)*. A resposta imediata: *“Três” (A)*.

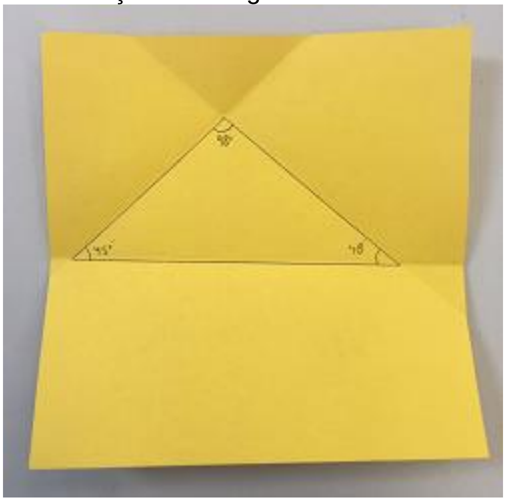
Para construí-lo fora pedido para que o aluno fizesse uma dobra qualquer. Surge então a primeira dúvida: *“A dobra tem que ter o formato de um triângulo?” (A)*, perguntando se deveriam ser feitas as dobras dos três lados simultaneamente.

A resposta foi “não”, pois seria feita uma dobra de cada vez. Para isso foi pedido para que fosse feita a primeira dobra, em seguida a segunda sobra sendo concorrente à primeira e então a terceira e última dobra sendo concorrente às duas primeiras dobras. Um aluno pontua: *“Eu fiz errado” (A)*.

Observando, o discente tentou realizar a duas dobras de uma vez, acarretando que duas dobras não se encontraram. Foi então pedido para que realizassem uma dobra por vez. Após segunda tentativa, o aluno conseguiu fazer a construção pedida. Dando continuidade fora pedido para que fizessem a marcação do triângulo construído utilizando a régua e caneta, para melhor visualização. Feito isso, pediu-se que, com o transferidor, fosse feita a medição e anotação de cada ângulo encontrado no triângulo construído.

Logo vem a pergunta: *“Professor, tem que dar o mesmo valor em todos?” (A)*. A resposta imediata é que “não”, que deveria ser anotado o valor que fosse observado em cada um, independente do resultado.

Figura 140 – Medição dos Ângulos Internos de um Triângulo



Fonte: (o autor, 2021)

Há uma pausa para a explicação sobre como deve ser feita a medição com o transferidor. Após a explicação é pedido para que os alunos realizem a soma das medidas encontradas nos três ângulos internos.

“181°” (A), logo surge.

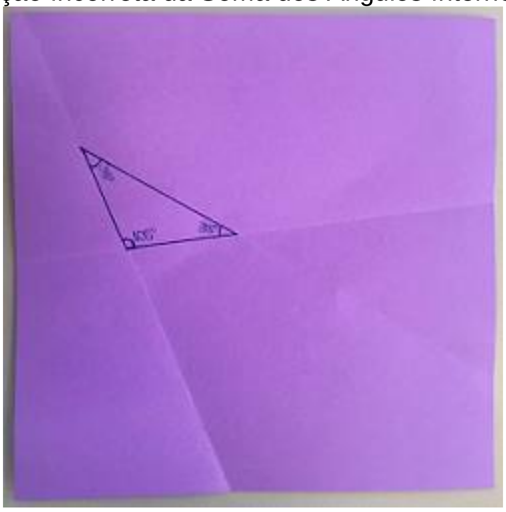
> *“183°” (A)*.
> *“182°” (A)*.
> *“O meu deu 180° certinho” (A)*.
> *“O meu 184°” (A)*.
> *“180°” (A)*.
> *“183°” (A)*.
> *“182°” (A)*.
> *“180°” (A).*
> *“180°” (A)*.
> *“182°” (A)*.
> *“183°” (A)*.
> *“182°” (A)*.
> *“186°” (A)*.
> *“176°” (A)*.

Sabemos que ao estudar a teoria sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo o resultado é 180°. Surge então um questionamento:

> *“Por que houve medidas maiores ou menores que 180°? A que vocês atribuem essa diferença?” (P)*.
> *“Deu errado” (A)*.
> *“Mediu errado” (A)*.
> *“Não é do mesmo tamanho o triângulo” (A)*.

Interfere-se aqui dizendo que o tamanho do triângulo não influencia. O que observou-se ter ocorrido após verificação foi a marcação sobre as dobras terem sido feitas de maneira errada, não estando exatamente sobre a as marcas formadas pela dobradura. Ao medirem novamente alguns alunos observaram que fizeram a medição errada com o transferidor. Após a nova medição, a soma obtida foi 180°. Um aluno aponta: *“A minha soma deu um a mais, nesse ângulo marquei 105°, era pra ser 104°” (A)*.

Figura 141 – Medição Incorreta da Soma dos Ângulos Internos de um Triângulo



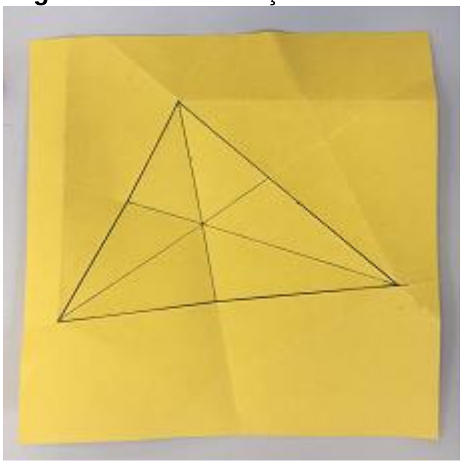
Fonte: (o autor, 2021)

É pedido para que novamente façam a construção de um triângulo. Então é feito o questionamento de quantos ângulos (internos) são formados. Os alunos respondem: *“Três” (A)*.

Desse modo, para construir o incentro realizamos a construção da bissetriz de cada ângulo interno do triângulo. Para isso foi pedido para que fosse feita uma dobra para trás de modo que a dobradura ficasse sobre um lado do triângulo. Em seguida, que fossem colocados os dois lados que formavam o ângulo um sobre o outro, de modo que fosse formada a primeira bissetriz.

Dando sequência foi pedido para que realizassem o mesmo procedimento com os demais ângulos.

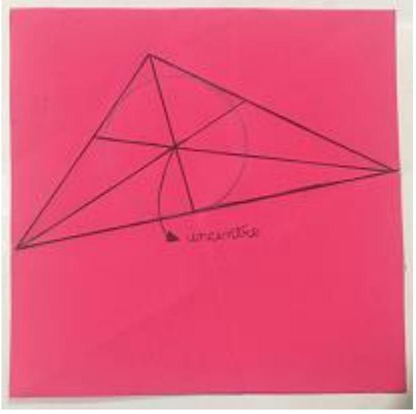
Figura 142 – Construção do Incentro



Fonte: (o autor, 2021)

Feitas as três bissetrizes, foi possível observar que todas se encontraram em um mesmo ponto. Desse modo, a instrução seguinte foi para que, com o compasso, fixassem a ponta seca nesse ponto encontrado e traçassem uma circunferência que tangenciasse todos os lados do triângulo. Alguns estudantes comentam: *“Tem que ser uma circunferência que fique dentro” (A)*; *“Meu Deus, deu certo. Ficou perfeito! Eu amei demais” (A)*; *“O meu também” (A)*.

Figura 143 – Construção da Circunferência Inscrita ao Triângulo



Fonte: (o autor, 2021)

Quando traçamos todas as bissetrizes todas se encontraram em um ponto que é o ponto de encontro das bissetrizes. Esse ponto de encontro das bissetrizes é o centro de uma circunferência que está dentro do triângulo. A pergunta que é feita é:

> *"Como ele (o ponto de encontro das bissetrizes) é chamado?" (P)*.
> *"Centroferência" (A)*.
> *"Incentro" (A)*, diz outro aluno logo em seguida.
> "*Exatamente, incentro*" (P).

No decorrer da Oficina 2 foi possível observar, assim como na Oficina 1, a dificuldade dos alunos em relação ao uso do transferidor. Contudo, notou-se que as dificuldades inerentes ao uso do instrumento em questão na Oficina 2 foram por desatenção ou precipitação, no sentido de que na medição dos ângulos valores mínimos foram adicionados ou subtraídos na contagem, o que gerou pequenas diferenças em relação ao esperado na soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. Entretanto, após verificar o ocorrido em cada caso, foi possível apresentar o erro ao discente, dando a oportunidade ao mesmo de realizar a correção. Desse modo, os alunos puderam observar através do compartilhamento das informações sobre o triângulo produzido que a propriedade da soma dos ângulos de um triângulo, indiferentemente de seu tamanho e forma, é válida. Além disso, na construção da circunferência inscrita ao triângulo, o correto a ser feito para encontrar os pontos que tangenciam a circunferência seria traçar o segmento perpendicular ao lado do triângulo que passa pelo incentro. Contudo, devido ao tempo disponível para a realização das oficinas, fora pedido para que os alunos encontrassem a menor distância entre o incentro e os lados do triângulo com o auxílio do compasso.

5.1.2.3 Oficina 3

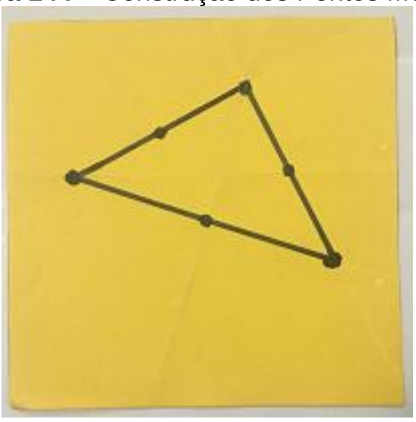
Na Oficina 3 foram realizadas as construções do baricentro e do ortocentro. Inicialmente, pediu-se para que fosse construído um triângulo, assim como nas oficinas anteriores. Após realizada a construção do triângulo, foi feita a pergunta:

> *“A palavra ‘mediana’ lembra o quê?” (P)*.
> *“Médio” (A)*.
> *“Vocês se lembram do ponto médio de um segmento?” (P)*.
> *“Sim” (A)*.

Para a construção da mediana, fora pedido ao aluno que escolhesse um dos lados do triângulo construído e que fizesse a dobradura para encontrar o ponto médio desse lado (segmento) conforme desenvolvido na Oficina 1.

Após encontrado o ponto médio, foi pedido para que o aluno fizesse a marcação do mesmo. Dando continuidade, pediu-se que o processo fosse repetido nos dois lados restantes do triângulo.

Figura 144 – Construção dos Pontos Médios



Fonte: (o autor, 2021)

Marcados os pontos médios dos três lados do triângulo, a instrução passada aos alunos foi para que fossem feitas as ligações de cada vértice do triângulo ao ponto médio obtido no lado oposto fazendo a dobra em sentido contrário (para trás) para que ficasse visível. Após a realização das três dobras, foi possível observar a intersecção entre os segmentos formados.

Logo em seguida, um aluno pergunta: *“Agora marca um pontinho?”*

(A), indicando a intersecção mencionada.

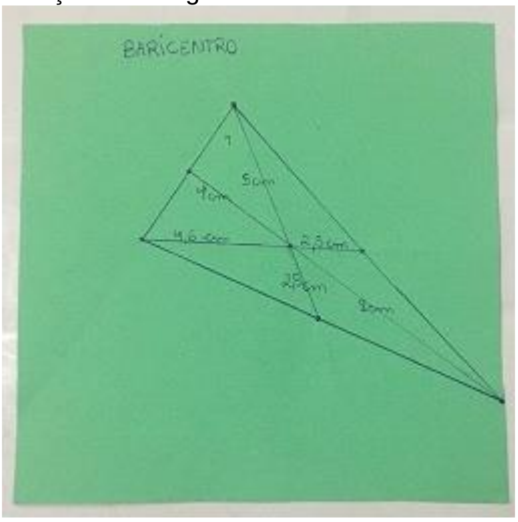
Então a resposta é positiva, solicitando aos demais alunos a realização da marcação proposta, identificando, portanto, o baricentro.

Figura 145 – Construção do Baricentro

Fonte: (o autor, 2021)

Feita a marcação, foi passada a instrução para que, com a régua, grifassem os segmentos formados e que fizessem a medição de um vértice até o baricentro e depois, nesse mesmo segmento, do baricentro até o ponto médio. Em seguida, que repetissem o processo para os demais segmentos, anotando as medidas encontradas. Posteriormente, pergunta-se o que foi possível observar com as duas medidas analisadas no mesmo segmento. Os alunos argumentam: *“Deu quase a metade um do outro” (A); “Deu metade (um do outro)” (A)*. Logo, o professor defende: *“Exatamente, esse ponto que vocês anotaram é o baricentro, ele divide o segmento na proporção 2:1. É exatamente isso, um segmento mede metade do outro” (P).*

Figura 146 – Medição dos Segmentos com Extremidades no Baricentro



Fonte: (o autor, 2021)

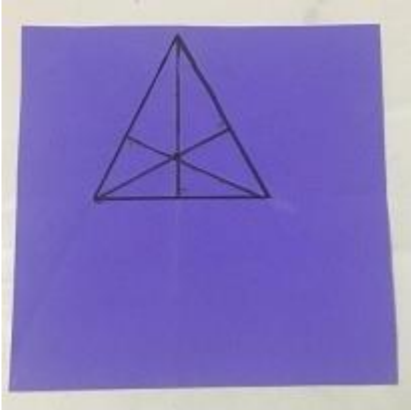
Dando continuidade, fora realizada a construção do ortocentro. Foi solicitado aos alunos, novamente, a construção de um triângulo, além da realização de suas marcações. Surge a primeira pergunta:

> *"O que é a altura de um triângulo?" (P)*.
> *"É que vai do vértice até a base" (A)*.
> *"É o segmento que vai do vértice até a reta suporte do lado oposto, mas deve acontecer algo a mais aqui. Alguém sabe me dizer?" (P)*.
> *"Tem que formar um ângulo de 90°" (A)*.
> *"Exatamente, tem que formar um ângulo de 90°, ou seja, deve ser perpendicular" (P).*

Para construir a altura, a dobra deve partir de um dos vértices. Para isso, fixando uma marcação no vértice escolhido, o lado oposto a esse vértice deve ser dobrado de modo que seja divido em dois segmentos, os quais deverão ficar alinhados. Fazendo a marcação, obtemos a altura.

Feita a construção da primeira altura, façam a construção das outras duas. O ponto de intersecção entre as três alturas é chamado de ortocentro.

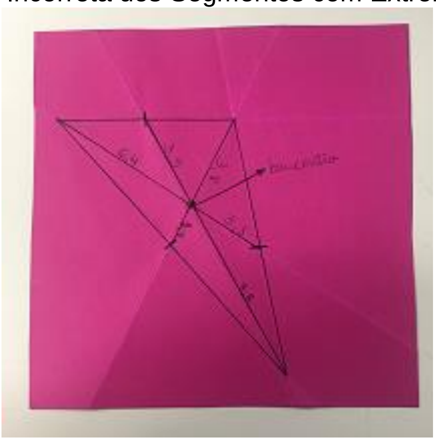
Figura 147 – Construção do Ortocentro



Fonte: (o autor, 2021)

Durante o desenvolvimento da Oficina 3 foi possível observar a compreensão do discente acerca da ideia central de cada tema, visto os questionamentos expostos e as respostas obtidas. Além disso, foi possível notar a assimilação da propriedade do baricentro com relação à proporção dos pares de segmentos gerados por ele, além da noção acertada no que se refere à altura de um triângulo. Entretanto, durante as medições dos segmentos obtidos através do baricentro, foi possível observar algumas anotações errôneas de determinados valores, principalmente em relação às casas decimais das medições obtidas, gerando assim divergências na comparação entre a proporção dos segmentos.

Figura 148 – Medição Incorreta dos Segmentos com Extremidades no Baricentro



Fonte: (o autor, 2021)

É possível observar que as medidas dos segmentos obtidos através da divisão da mediana pelo baricentro estão próximas da proporção 2:1, mas não são exatas. A primeira mediana é dividida em dois segmentos, sendo um de medida 3,8 cm e outro de medida 1,8 cm; a segunda mediana é dividida em dois segmentos, sendo um de medida 6,4 cm e outro de 3,1 cm; e a terceira mediana é dividida em dois segmentos, sendo um de medida 7,5 cm e outro de medida 3,9 cm.

Desse modo, houve a intervenção para que utilizassem o recurso (régua) da maneira correta, começando a contagem a partir do zero, visto que alguns estavam iniciando a medição a partir do início do objeto em questão, e que realizassem a contagem dos valores decimais com mais calma para que esta fosse feita de maneira correta. Em comparação às oficinas anteriores, observa-se nesta, a autonomia dos alunos no que se refere ao processo das construções realizadas, visto a ausência de auxílio necessário durante tal desenvolvimento.

5.1.2.4 Oficina 4

Na Oficina 4 realizamos a construção do circuncentro. Dando início, fora construído um triângulo e feita a marcação de seus vértices (A, B e C). Como o circuncentro é o ponto de intersecção das mediatrizes dos lados AB, AC e BC de um triângulo, foram feitas as construções das mediatrizes referentes a cada um dos três lados. Para isso, fora pedido para que fosse feita uma dobra de modo a ligar os vértices A e B para encontrar a mediatriz referente ao segmento AB. Um aluno questiona:

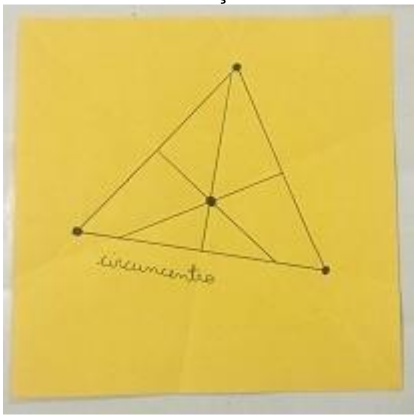
> *“Tem que passar pelo meio (do segmento)?” (A)*.
> A resposta é positiva:
> *“Sim, lembrem-se de que a mediatriz é uma reta perpendicular que passa pelo ponto médio de um segmento” (P)*.

Analogamente, pede-se para que seja feita uma dobra de modo a ligar os vértices A e C para encontrar a mediatriz do segmento AC e outra dobra de modo a ligar os vértices B e C para encontrar a mediatriz referente ao segmento BC. Os alunos tornam a questionar:

> *“Faz um pontinho aqui onde se encontraram?” (A)*.
> *“Exatamente, pode fazer a marcação” (P)*.
> “*Professor, o meu se encontrou fora (do triângulo)” (A)*.
> “Não tem problema, a marcação deve ser feita no ponto de encontro, independentemente de ser dentro ou fora do triângulo. Esse ponto recebe o nome de circuncentro” (P).

Nesse caso, fora explicado que a intersecção das mediatrizes era externa ao triângulo construído pelo fato deste ser um triângulo obtusângulo.

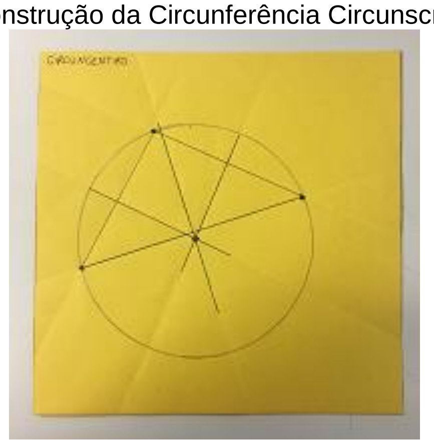
Figura 149 – Construção do Circuncentro



Fonte: (o autor, 2021)

Com o uso do compasso, fora pedido para que os alunos coloquem a ponta seca sobre o circuncentro e que fizessem a abertura do compasso até o grafite estar sobre um dos vértices do triângulo, realizando, portanto, o traço de uma circunferência. Construída a circunferência, foi possível observar que esta passava pelos três vértices do triângulo.

Figura 150 – Construção da Circunferência Circunscrita ao Triângulo

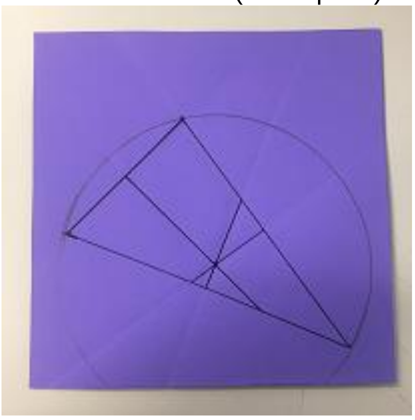


Fonte: (o autor, 2021)

Após a construção do circuncentro fora feita a aplicação do Formulário Final.

Durante a aplicação da Oficina 4 foi possível observar um correlato em relação à Oficina 3 no que compete a autonomia do discente nos processos das construções realizadas, no que se refere às dobraduras iniciais, já desenvolvidas nas oficinas anteriores. Contudo, nem todas as construções corresponderam à circunferência completa em torno do triângulo. Em alguns casos, o triângulo construído, a depender de sua posição no papel, bem como do tamanho produzido, tornaram impossibilitada parte da marcação da circunferência.

Figura 151 – Construção da Circunferência (Incompleta) Circunscrita ao Triângulo -



Fonte: (o autor, 2021)

No contexto geral, é possível enfatizar a participação dos alunos durante todo o processo, buscando sempre realizar o que fora proposto, instigando e buscando auxílio, seja com questionamentos ou com o compartilhamento de informações e conhecimentos com os demais colegas. Pondera-se que as oficinas ocorreram no período de pandemia causada pelo vírus SARS-Cov-2 e que os alunos estavam voltando à sua rotina de estudos e de convivência com os integrantes da turma.

Além disso, como já citado, fora aplicado o Formulário Final, no qual o aluno expôs a sua visão e o seu entendimento sobre os conceitos desenvolvidos durante as quatro oficinas. A apresentação das respostas obtidas será relatada no item 5.1.4 desta seção.

5.1.3 Apreensão qualitativa dos alunos sobre o processo de aprendizado

Nesse eixo buscamos analisar os métodos de ensino utilizados no desenvolvimento dos conceitos em questão durante o curso regular de ensino do aluno, fazendo uma relação, após a aplicação das oficinas, com o método de ensino que o aluno utilizaria se necessário explicar e/ou ensinar tais conceitos, além de verificar a opinião de cada aluno acerca de sua compreensão sobre os assuntos desenvolvidos ao final da aplicação. Para isso, na Tabela 3 foram tabuladas as respostas no que compete o método de ensino utilizado no ensino regular, fazendo a separação entre os alunos que não se recordam do método que os conceitos lhe foram ensinados e os que se recordam. Para os alunos que se recordam, foram descritos os métodos conforme relatado pelos mesmos no Formulário Inicial. Observamos que 75% dos alunos se manifestaram sobre como o assunto fora abordado no curso regular de ensino.

Tabela 3 – Metodologia explorada no ensino regular

Método utilizado no ensino regular		
Aluno	Lembra	Método
A_1	Sim	Desenhos
A_2	Não	-
A_3	Sim	Explicação no quadro
A_4	Sim	Desenhos e exemplos
A_5	Sim	Desenhos e explicações
A_6	Sim	Quadro
A_7	Não	-
A_8	Sim	Desenhos
A_9	Sim	Apostila
A_{10}	Sim	Desenho e atividade
A_{11}	Não	-
A_{12}	Sim	Quadro

Fonte: (o autor, 2021)

A seguir, na Tabela 4, podemos observar o método que cada aluno relatou utilizar para explicar os conceitos desenvolvidos durante as oficinas, se necessário. Além disso, é possível observar suas opiniões sobre a própria compreensão a respeito de tais conceitos.

Tabela 4 - Autoavaliação

Aluno	Método de explicação que utilizaria	Opinião do aluno acerca de sua compreensão dos conceitos
A_1	Faria com tópicos, com desenhos e dobraduras	Acho que compreendi
A_2	Reproduzindo as dobraduras	Acho que com a oficina eu aprendi
A_3	Usaria desenho, com papel e caneta e faria as dobraduras	No momento atual eu aprendi
A_4	Usaria desenhos, objetos e fotos	Depois do começo da oficina eu me lembrei
A_5	Através de desenhos	Através dessas aulas, eu consegui compreender melhor
A_6	Explicaria com o papel e uma caneta, e desenhando também	O modo como foi aplicado ao ensinar ajudou bastante
A_7	Da mesma forma em que fui ensinada, pois foi uma forma diferente e fácil	Acredito que aprendi
A_8	Usaria as dobraduras e desenhos	Consegui lembrar e aprender melhor com essa forma com origami
A_9	-	-
A_{10}	-	-
A_{11}	-	-
A_{12}	Desenharia e iria explicando por dobraduras	Acho que aprendi
A_{13}	Usaria desenho de passo a passo	Me aprofundei mais nesse ano

Fonte: (o autor, 2021)

Por meio da análise das respostas dos alunos é possível observar a preferência por métodos em que prevalecem a questão visual no que se refere a forma de explicação escolhida por eles, dando ênfase para a utilização de desenhos e de dobraduras. Também é possível observar a visão do aluno sobre sua apreensão no que compete os conceitos desenvolvidos, quase que em sua totalidade aferindo uma concepção positiva na assimilação dos mesmos, seja de forma escrita, conceitual ou visual, conforme relatado.

5.1.4 Índice da quantidade de apreensão dos conceitos

Ao aplicar as oficinas, alguns conceitos matemáticos foram selecionados como pilares das construções feitas denotando assim um produto final de aplicação. Esses conceitos são: mediatriz, bissetriz, mediana, altura, incentro, baricentro, ortocentro e circuncentro. Tais conceitos foram escolhidos por terem sido desenvolvidos no ano anterior durante o curso regular de ensino dos alunos. Desse modo, esses conceitos foram abordados na questão 2 do Formulário Inicial, na qual os alunos responderam de maneira subjetiva qual era a sua compreensão acerca de cada item.

Para item de análise, os conceitos de mediatriz, bissetriz, mediana, altura, incentro, baricentro, ortocentro e circuncentro, já aplicados na questão 2 do Formulário Inicial, foram retomados na questão 5 do Formulário Final. Desta maneira, foi possível comparar as respostas obtidas classificando-as em *resposta incorreta*, *resposta incompleta* ou *resposta correta*. A classificação "*resposta incorreta"* engloba respostas não coerentes com o conceito ou não sabidas. No item "*resposta incompleta"* integra-se respostas que contemplam a ideia geral do conceito ou de sua aplicação, mas que não fora descrita em sua plenitude. Já no item "*resposta correta"* compreende-se respostas que estabelecem total relação com o conceito e sua definição. A tabela 5 mostra os resultados obtidos.

Tabela 5 – Resultados obtidos nos Formulários Inicial e Final

	Formulário Inicial			Formulário Final		
	Resposta incorreta	Resposta incompleta	Resposta correta	Resposta incorreta	Resposta incompleta	Resposta correta
Mediatriz	A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}			A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_{12}		
Bissetriz	A_2, A_4, A_5, A_6, A_7, A_9, A_{12}	A_1, A_3, A_8, A_{10}, A_{11}		A_6	A_1, A_2, A_3, A_5, A_7, A_8, A_{12}	A_4
Mediana	A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}			A_1, A_2, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_{12}	A_3	
Altura	A_2, A_3, A_4, A_5, A_{11}	A_1, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{12}		A_2, A_4, A_6, A_7	A_1, A_3, A_5, A_8, A_{12}	
Incentro	A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}			A_2, A_3, A_6, A_7, A_{12}	A_5, A_8	A_1, A_4
Baricentro	A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}			A_2, A_3, A_6, A_8	A_1, A_5, A_7, A_{12}	A_4
Ortocentro	A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}, A_{12}			A_2, A_3, A_6, A_7, A_8, A_{12}	A_5	A_1, A_4
Circuncentro	A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_{10}, A_{12}	A_1, A_{11}		A_2, A_3, A_4, A_6, A_7	A_1, A_5, A_8, A_{12}	

Fonte: (o autor, 2021)

Analisando os dados coletados, por meio das respostas dos alunos, no que se refere aos questionamentos realizados, antes e após a aplicação das oficinas, é possível observar uma melhora significativa na compreensão, domínio e linguagem acerca das definições dos conceitos desenvolvidos. No que compete às respostas incompletas, foi possível estabelecer uma relação entre as respostas dadas pelos alunos em questão e a falta de vocabulário, que é necessária para que seja escrita uma definição matemática por completo, visto que as oficinas foram realizadas com alunos do nono ano do ensino fundamental. Desse modo, é possível observar nas respostas incompletas a compreensão do aluno sobre a ideia geral do conceito desenvolvido, mas a falta de conhecimento, ou falta de traquejo, de termos matemáticos utilizados na hora da escrita. Isto evidencia-se pelo fato de que, durante e após a aplicação do Formulário Final, alguns alunos relataram oralmente o conhecimento do conceito, bem como sua aplicação, além de que saberia dizer o que é o assunto desenvolvido se o visse, mas que não conseguia fazê-lo por escrito.

5.1.5 Feedback dos alunos sobre as oficinas

Neste eixo será feita uma análise sobre as impressões dos alunos sobre a utilização das dobraduras como recurso didático no ensino de geometria.

Tabela 6 – Feedback dos alunos sobre a oficina

Alunos	Feedback
A_1	“Eu achei super interessante, fácil e uma maneira rápida de aprender”.
A_2	“As explicações usando dobraduras de papel deixaram muito mais fácil e claro de entender”.
A_3	“Ajudou bastante (a dobradura), eu consegui fazer e entender”
A_4	“Eu gostei e achei uma forma diferente de ensinar esses conceitos”.
A_5	“Eu acho que as dobraduras de papel facilitaram muito a compreensão”.
A_6	“As dobraduras ajudaram muito a aprender melhor”.
A_7	“Foram mais simples de aprender, mais prático”.
A_8	“Acho que é uma maneira mais fácil de aprender, pois é o conteúdo, mas de uma forma mais lúdica e ficou bem mais fácil de prestar atenção”.
A_{12}	“Foi uma forma muito mais clara para entender”.
A_{13}	“As aulas foram fluídas, rápidas e muito bem aplicadas pelo professor (a explicação com as dobraduras)”.

Fonte: (o autor, 2021)

Através das respostas obtidas, conforme apresentado na Tabela 6, é possível observar a aceitação do alunado no que se refere a utilização do origami como material manipulável no ensino da geometria. Evidencia-se o fato de, no geral, analisarem e visualizarem a utilização do origami como um recurso facilitador, seja na visualização ou na compreensão dos conceitos desenvolvidos, entendendo-o como prático, lúdico e interessante.

CONCLUSÃO

A proposta desse trabalho foi explorar os pontos notáveis do triângulo por meio de origamis e analisar as aplicações de oficinas de geometria plana de modo a explorar associações decorrentes da proposta de aplicação com o aprendizado do aluno participante, procedente de um parecer concreto, ou seja, de apuração de resultados objetivos acerca dos conceitos matemáticos desenvolvidos, além de uma autoavaliação por parte do aluno, de modo a mostrar sua compreensão sobre tais conceitos, bem como expor sua opinião sobre a metodologia empregada.

Neste trabalho apresentamos os conceitos geométricos planos de ponto, reta, plano, segmento de reta, ponto médio de um segmento de reta, bissetriz de um ângulo, mediatriz de um segmento de reta, mediana de um triângulo, altura de um triângulo, incentro, circuncentro, baricentro e ortocentro, sendo possível observar suas representações e algumas propriedades.

Fundamentando-se nos PCNs e na BNCC, utilizou-se o origami como recurso didático no desenvolvimento e construções dos conceitos matemáticos citados anteriormente, na pretensão de inserir uma metodologia ativa neste processo de ensino. Assim, busca-se uma maior participação do aluno em seu curso de aprendizagem, de modo a torná-lo parte componente e atuante nesse processo.

Nesse sentido, a manipulação do papel na efetuação das dobraduras, bem como a representação e visualização dos conceitos matemáticos por meio do material, proporciona uma nova experiência no que se refere ao ensino e uma nova perspectiva acerca do objeto de estudo.

Analisando o relato dos alunos sobre a metodologia de ensino empregada, no que antecedeu às aplicações das oficinas, é possível observar a predominância do método tradicional pautado, quase que exclusivamente, na utilização do quadro. Desse modo, após o desenvolvimento das oficinas, é possível constatar através dos relatos objetivos e subjetivos dos estudantes, a aceitação da metodologia empregada, de maneira prática, vista como facilitadora e auspiciosa no que se refere ao processo de ensino, ao menos no estudo da geometria.

Além disso, é possível observar a abstração dos assuntos desenvolvidos, por parte dos alunos, de modo a reconhecer suas propriedades. Conforme relatado por eles, fora possível observar, visualizar e reconhecer os conceitos desenvolvidos, mesmo sendo difícil, para o estudante, conceituá-los de maneira correta em sua plenitude, visto ser esta conceituação algo elaborado para a idade e nível de ensino. Além disso, observou-se a aprovação dos alunos com relação a metodologia desenvolvida, entendendo a utilização do origami como um recurso atenuante do aprendizado e da compreensão dos conteúdos desenvolvidos durante as oficinas.

A experiência vivenciada por mim, com a utilização do origami durante as oficinas, bem como em todo processo de elaboração, fora de grande crescimento. Agrega-se a isso uma nova perspectiva sobre os conceitos trabalhados, ocasionando um novo olhar para a geometria e para matemática num todo, mais especificamente em sua visualização como algo concreto. Tal vivência trouxe a reflexão acerca da docência desenvolvida em sala de aula, levando a questionamentos sobre a metodologia utilizada, sobre a participação do alunado no processo de construção do conhecimento e sobre a prática da teoria no visível e tateável. Resulta-se a isso, a busca por metodologias que abranjam tais conceitos em sua completude, de modo a aperfeiçoar o trabalho docente, além da conservação da utilização do origami no processo de ensino. Para isso, é necessário um período maior de aplicação e desenvolvimento das oficinas, de modo a tornar possível o detalhamento e o aprofundamento ainda maior dos conceitos desenvolvidos.

Portanto, é possível concluir que a utilização do origami como recurso didático concreto no ensino da geometria favorece consideravelmente o trabalho do professor e o desenvolvimento do aluno, o qual se torna participante do processo de construção de conceitos e do aprendizado. Desse modo, espera-se que este trabalho possa auxiliar professores que desejem acrescentar o recurso em questão no desenvolvimento de sua docência, bem como servir de inspiração para o surgimento e criação de novas práticas em sala de aula.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. **História da matemática**; tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1974.

BOYER, C. B. **História da matemática**; tradução: Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

BRAATHEN, P. C. Aprendizagem mecânica e aprendizagem significativa no processo de ensino-aprendizagem de Química. **Revista Eixo**, v. 1, n. 1, p. 63-69, 2012.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

_____. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática/Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. Brasília: A Secretaria, Brasília 1998.

DIAS, C. F.; VEBBER, G. C.; FRONZA. Experimentação do origami no ensino da geometria. **Revista REMAT**, Bento Gonçalves, RS, v. 5, n.2, p. 108-122, julho de 2019.

DIDEROT, D.; D'ALEMBERT, J. L. R. **Enciclopédia, ou Dicionário razoado das ciências, das artes e dos ofícios**. Volume 3: Ciências da natureza. Organização e tradução Pedro Paulo Pimenta, Maria das Graças de Souza. – I.ed. – São Paulo: Editora Unesp, 2015.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de matemática elementar**: geometria plana. 9. ed. São Paulo: Atual Editora, 2013.

ECCO, O.C. **Compreensão de conceitos de geometria a partir da construção de sólidos geométricos em uma turma de EJA de Ensino Médio**. (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal da Santa Maria, Santa Maria, RS, 2016.

FRITOLI, C. L.; KRüGER, E. L.; CARVALHO, S. K. P. História do papel: panorama evolutivo das técnicas de produção e implicações para sua preservação. **Revista Ibero-Americana de Ciência da Informação**, v. 9 No 2, n. 2, p. 475-502, 2016. DOI: <10.26512/rici.v9.n2.2016.2424> Acesso em: 14 de julho de 2021.

FRUGONI, C. **Invenções da Idade Média: óculos, livros, bancos, botões e outras inovações geniais**. Tradução de Eliana Aguiar. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2007.

HAYASAKA, E. Y.; NISHIDA, S. M. **Pequena História Sobre Origami**. 2019. Disponível em: <https://www2.ibb.unesp.br/Museu_Escola/Ensino_Fundamental/Origami/Documentos/indice_origami.htm>. Acesso em: 18 de julho de 2021.

HONDA, I. **The world of origami**. Tokyo: JapanPublications, 1969.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria. **Educação matemática em Revista**, 4:3–13, 1995

MOROSINI, T. H. N.; WROBEL, J. S. Poliedros Estrelados E Origami: Uma Experiência Na Formação De Professores. **Revista Eletrônica Sala de Aula em Foco,** ISSN 2316-7297 - Volume 03, Número 01, 31 – 41, 2014. Disponível em: <https://ojs2.ifes.edu.br/index.php/saladeaula/article/view/140/242>. Acesso em 18 de julho de 2021.

MOTTA, M. S, SILVEIRA, I. F. **Contribuições do Superlogo ao ensino de geometria**. Informática na Educação: teoria & prática, Porto Alegre, v. 13, n. 1, p. 115-127, jan./jun. 2010.

NÉIA, A. L. O. L.; SILVA, F. O. Origami e matemática: uma forma lúdica e interessante de aprender geometria. In: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. **Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE, 2016**. Curitiba: SEED/PR., 2016. V.1. (Cadernos PDE). Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_artigo_mat_uenp_analuciaoliveiradelorenaneia.pdf>. Acesso em: 25/05/2022. ISBN 978-85-8015-093-3.

NETO, A. C. M. **Geometria**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

NOVAK, T. C. U. N.; PASSOS, A. M. **A utilização do origami no ensino da geometria: relatos de uma experiência**. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/719-4.pdf> Acesso em: 22/05/2022.

OLIVA, W. M. Geometria não euclidiana. **Revista do professor de matemática**. (2), p. 28-31, 1981.

PINHEIRO, A.; CARREIRA, S. O desenvolvimento do raciocínio geométrico no tópico triângulos e quadriláteros. **Investigação em Educação Matemática. Raciocínio Matemático**, p. 146-169, 2013. Disponível em: <http://spiem.pt/publicacoes/download-de-atas/> Acesso em: 24 de julho de 2021.

PONTES, E. A. S. HIPERMAT-Hipertexto Matemático: Uma ferramenta não ensinoaprendizagem da matemática na educação básica. **Psicologia & Saberes**, v. 2, n. 2, 2013.

_____. Modelo de ensino e aprendizagem de matemática baseado em resolução de problemas através de uma situação-problema. **Revista Sítio Novo**, v. 2, n. 2, 2018.

QUEIROZ, G. T. **Ensino de Geometria: uma abordagem a partir do uso do Origami**. 2019. 47 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2019.

RAFAEL, I. Origami. **Educação e Matemática**, Lisboa: Publicação da APM, 2011, n.

114, p.16-22. Disponível em: <https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/1968/2009>. Acesso em: 14 de julho de 2021.

REZI, V. **Um estudo exploratório sobre os componentes das habilidades matemáticas presentes no pensamento em geometria**. 2001. 174p. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP. Disponível em: <http://www.repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/253517>. Acesso em: 20 de julho de 2021.

RIBEIRO, R. S. **Geometrias não-euclidianas na escola: uma proposta de ensino através da geometria dinâmica**. Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, UFRGS. 2013.

Silva, J. J. **O Software Régua e Compasso como Recurso Metodológico para o Ensino de Geometria Dinâmica**. (Dissertação de Mestrado). Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande,PB, 2011.

ANEXOS

ANEXO A

Formulário Inicial

Universidade Estadual de Londrina

PROFMAT

FORMULÁRIO INICIAL

1. Escreva, em cada caso, o que você entende pelo conceito de:

a) reta.

b) semirreta.

c) segmento de reta.

d) retas concorrentes.

e) retas perpendiculares.

f) retas paralelas.

2. Em suas palavras, explique cada conceito que foi desenvolvido no ano anterior:

a) Mediatriz.

b) Bissetriz.

c) Mediana.

d) Altura.

e) Incentro.

f) Baricentro.

g) Ortocentro.

h) Circuncentro.

3. Você se lembra como estes conceitos foram ensinados?

ANEXO B
Formulário Final

FORMULÁRIO FINAL

1. Agora que encerramos a oficina, quais conceitos você construiu?

2. Se você fosse explicar esses conteúdos para um amigo, de que modo explicaria?

3. Dê sua opinião sobre as oficinas realizadas e da maneira como foram aplicadas, usando as dobraduras de papel.

4. Na sua opinião, você acha que aprendeu os conceitos de mediatriz, bissetriz, mediana, altura, incentro, baricentro, ortocentro e circuncentro no ano passado? Se a resposta foi NÃO, você considera (acha) que no momento atual aprendeu?

5. Escreva abaixo a sua compreensão sobre cada conceito mencionado no item anterior.