



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

DAVINCY ANDRES TOVAR PABON

MODELOS COSMOLÓGICOS COM CURVATURA ESPACIAL
ANISOTRÓPICA

DAVINCY ANDRES TOVAR PABON

**MODELOS COSMOLÓGICOS COM CURVATURA ESPACIAL
ANISOTRÓPICA**

Dissertação de Mestrado em Física apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual Londrina, como requisito parcial à obtenção do Mestrado em Física.

Orientador: Prof. Dr. Thiago dos Santos Pereira.

Londrina
2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Pabon, Davincy Andres Tovar.

Modelos Cosmológicos com Curvatura Espacial Anisotrópica / Davincy Andres Tovar Pabon. - Londrina, 2016.
55 f. : il.

Orientador: Thiago dos Santos Pereira.

Coorientador: Mário César Baldiotti.

Coorientador: Paulo Laerte Natti.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2016.

Inclui bibliografia.

1. Curvatura Anisotrópica - Teses. 2. Cisalhamento - Teses. 3. Campo de 2-forma - Teses. I. Pereira, Thiago dos Santos. II. Baldiotti, Mário César. III. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física. IV. Título.

DAVINCY ANDRES TOVAR PABON

**MODELOS COSMOLÓGICOS COM CURVATURA ESPACIAL
ANISOTRÓPICA**

Dissertação de Mestrado em Física apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual Londrina, como requisito parcial à obtenção do Mestrado em Física.

BANCA EXAMINADORA

Orientador: Prof. Dr. Thiago dos Santos Pereira
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. Mário César Baldiotti
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. Paulo Laerte Natti
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 17 de Fevereiro de 2016.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor. Dr. Thiago dos Santos Pereira, pela orientação.

À OEA-GCUB e CAPES, pelo apoio e suporte financeiro.

A Jehová Dios, por todas sus bendiciones.

A mi madre, Dilia y hermanos, Samir y Cindy.

Y a mis hijos, Sharick, Luciana, Adrian y Samir.

PABON, Davincy Andres Tovar. **Modelos cosmológicos com curvatura espacial anisotrópica**. 2016. 55 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é estudar a dinâmica de modelos com curvatura anisotrópica, como mostrada numa classe de cosmologias anisotrópicas que apresenta expansão isotrópica. O desafio consiste em encontrar soluções que experimentem no sistema, curvaturas anisotrópicas e que não tenha cisalhamento. Além disso, que a resposta ao modelo cosmológico seja anisotrópicamente estável. Para isso estudaremos o sistema em duas etapas: A primeira é a de considerar uma equação de estado na qual esta expressão esteja ligada ao estresse e o cisalhamento. A segunda é considerar que no modelo propriamente existe um campo de 2-forma, que permite ampliar e desenvolver as soluções que requer este modelo. Determinou-se que o espaço de fase do sistema dinâmico experimenta trajetórias que convergem num ponto específico (atrator) onde o modelo cosmológico é considerado aceitável.

Palavras-chave: Curvatura anisotrópica. Cisalhamento. Campo de 2-forma.

PABON, Davincy Andres Tovar. **Models cosmological anisotropic with curvature espacial**. 2016. 55 p. Dissertation (Master's Degree in Physics) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

ABSTRACT

The aim of this work is study the dynamic of models with anisotropic curvature, as shown in a class of anisotropic cosmologies what present isotropic expansion. The challenge consists in find solutions that experimente at the system, anisotropic curvatures and which has not shear. In addition, the response to the cosmological model will be anisotropically stable. In order to study the system we work through two steps: The first one is to consider an equation of state in which this expression is connected to stress and to the shear. The second one is to consider that the models properly has a field of 2-form, what enables enlarge and develop the solutions that requires this model. Was determined that the phase space of the dynamic system, experiment paths that converge in a specific ponit (atractor) when the cosmologic model is considered acceptable.

Keywords: Anisotropic curvature. Shear. Field 2-form.

LISTA DE TABELAS

3.1	Modelos considerados neste trabalho.	21
5.1	Pontos fixos e estabilidades do sistema dinâmico em ausência do parâmetro Ω_ρ	41
5.2	Pontos fixos e estabilidades do sistema dinâmico onde prevalece o parâmetro Ω_B .	47

LISTA DE FIGURAS

1.1	Distribuição de pontos estatisticamente isotrópico em torno de cada ponto (à esquerda) e em torno de um único ponto P (à direita).	12
2.1	<i>Redshift</i> da luz.	19
4.1	Diagrama do comportamento de um oscilador harmônico subamortecido. A evolução do tempo se dá no sentido horário da curva.	25
4.2	Espaço de fases de um oscilador harmônico amortecido para vários conjuntos de condições iniciais. Este é um exemplo típico de um ponto atrator no espaço de fases.	26
4.3	Espaço de fases da função $\sin x$	27
4.4	Diagrama de fases onde o ponto de equilíbrio $(0,0)$ é um nó estável (à esquerda) e nó instável (à direita).	29
4.5	Espaço de fases onde o ponto crítico $(0,0)$ é um nó impróprio, trajetórias em forma de parábolas que tendem suas direções para fora da origem (à esquerda) e diagrama de um ponto crítico isolado conhecido como ponto de espiral ou foco. As trajetórias tendem à origem (à direita).	29
4.6	Diagrama de um ponto crítico isolado $(0,0)$ conhecido como ponto de sela (à esquerda) e diagrama de um ponto crítico isolado $(0,0)$ conhecido como centro, as trajetórias caminhando para $t > 0$, em sentido anti-horário (à direita).	30
4.7	Espaço de fase para um universo no plano $(\Omega_K, \Omega_\Lambda)$ (à esquerda) e $(\Omega_\rho, \Omega_\Lambda)$ (à direita) com $\gamma = 1$ ($\omega = 0$) [23].	35
4.8	Espaço de fase para um universo no plano $(\Omega_K, \Omega_\Lambda)$ (à esquerda) e $(\Omega_\rho, \Omega_\Lambda)$ (à direita) com $\gamma = \frac{1}{3}$ [23].	35
4.9	Espaço de fase para um universo no plano $(\Omega_K, \Omega_\Lambda)$ (à esquerda) e $(\Omega_\rho, \Omega_\Lambda)$ (à direita) com $\gamma = -1$ [23].	36
5.1	Espaço de fase do sistema dinâmico (5.54).	47

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	MODELOS DE UNIVERSOS HOMOGÊNEOS E ISOTRÓPICOS	14
2.1	Modelos de Friedmann-Robertson-Walker	14
2.2	Equações de Friedmann	15
2.3	A Lei de Hubble e o Redshift	17
3	MODELOS COSMOLÓGICOS ANISOTRÓPICOS	20
3.1	Uma Classe de Modelos Anisotrópicos com o Expansão Isotrópica	20
3.2	Tensor de Energia-Momento	21
4	ESTABILIDADE LINEAR E NÃO LINEAR	24
4.1	Estabilidade em Sistemas de Equações Diferenciais	24
4.1.1	Sistemas Autônomos	24
4.1.1.1	O Oscilador Harmônico Amortecido	25
4.1.2	Estabilidade	26
4.1.3	Classificação dos Pontos de Equilíbrio	27
4.1.3.1	Estabilidade Linear	27
4.1.3.2	Ponto Crítico Nodal	27
4.1.3.3	Ponto Crítico de Sela	28
4.1.3.4	Ponto Crítico Centro	28
4.1.3.5	Ponto Crítico Focal ou Espiral	28
4.1.4	Sistemas Não Lineares	30
4.1.4.1	Linearização e Estabilidade Não Linear	30
4.1.5	Análise dinâmica das Equações de Friedmann.	31
4.1.5.1	Estudo de Pontos Fixos e Estabilidade	32
5	ESTUDO DO SISTEMA DINÂMICOS	37
5.1	Equações Dinâmicas do Sistema	37
5.2	Determinação dos Pontos Fixos e Estabilidade	39
5.3	Um Modelo com Curvatura Anisotrópica mas sem Cisalhamento	42
5.3.1	Pontos de Equilíbrio e Estabilidade	46
6	CONCLUSÃO E PERSPECTIVA	48

REFERÊNCIAS	49
APÊNDICES	51
APÊNDICE A - Revisão da Relatividade Geral.	52
APÊNDICE B - Modelos Cosmológicos Anisotrópicos.	54

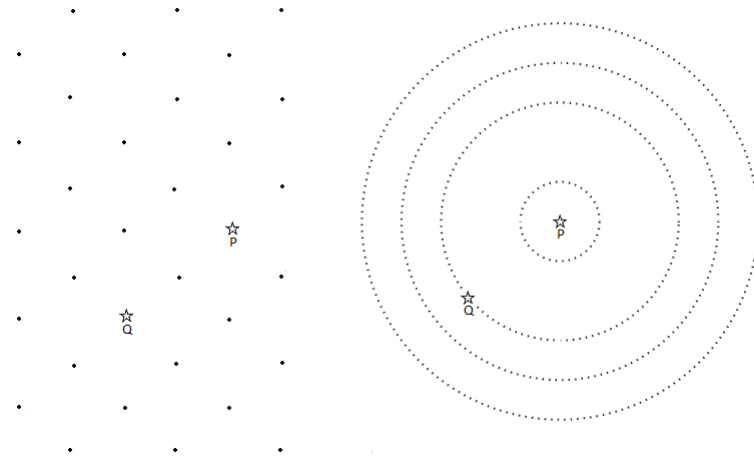
1 INTRODUÇÃO

Ao longo das últimas décadas houve um grande avanço, teórico e observacional, nos estudos acerca do universo. A cosmologia, cujo objetivo é compreender as propriedades globais e estruturas em grande escala do universo, i.e. sua origem, evolução, características e propriedades, atualmente se encontra em uma era de precisão e de grande volume de dados observacionais. Apesar desses desenvolvimentos e da abundância de observações, a cosmologia, no entanto, tem uma diferença fundamental em comparação com as demais áreas da física. Essa diferença é que temos acesso somente a um universo, e é no que vivemos, que é observado em uma posição única e particular no espaço e no tempo. Com isso inevitavelmente a cosmologia se ampara em um conjunto de hipóteses cuja verificação não está garantida a priori, mas que são sugeridas conforme as observações [1]. Tais hipóteses, como, por exemplo, a escolha de uma teoria da gravidade, ou ainda hipóteses sobre a natureza da matéria presente no universo, assim como hipóteses de simetrias do universo, caracterizam o que se define como um modelo cosmológico. De fato, não é possível interpretar as observações cosmológicas independentemente destas hipóteses teóricas. Por conseguinte, a validade de um modelo não pode ser provada. Ao contrário, o que se procura é uma coerência entre as observações e o *framework* teórico no qual estas observações são baseadas. Este tipo de procedimento nos permite testar os modelos cosmológicos fazendo uma série de previsões que podem ser confrontadas com os dados observacionais.

Uma das premissas fundamentais da cosmologia moderna é conhecida como princípio cosmológico, e corresponde a um conjunto de hipóteses acerca das simetrias do espaço-tempo. As observações cosmológicas sugerem que o universo parece ser o mesmo em todas as direções em uma escala suficientemente grande, em outras palavras o universo é estatisticamente isotrópico em grandes escalas. Isto sugere que o universo observável possui uma simetria esférica ao nosso redor. Com isso existem duas explicações: a primeira delas é de que nossa galáxia se encontra em uma lugar especial do universo, com as estruturas cosmológicas esfericamente distribuídas ao nosso redor em um universo inhomogêneo com um ponto privilegiado; a segunda explicação é de não existe nenhum ponto privilegiado no universo, i.e. ele é isotrópico ao redor de todos os seus pontos; como consequência disto o universo deve ser homogêneo. Veja a figura (1.1). O princípio cosmológico afirma que o universo é espacialmente isotrópico e homogêneo em grandes escalas. Por "grandes escalas" quer se dizer escalas acima das quais a distribuição de galáxias se torna aproximadamente homogênea. A partir da análise do Sloan Digital Sky Survey (SDSS) concluiu-se que as irregularidades na densidade de galáxias são pequenas o suficiente em escalas acima de $100h^{-1}Mpc^1$ [2].

¹As medições indicam que o parâmetro de Hubble é $70 \pm 10 \frac{km}{s \cdot Mpc}$. Com as incertezas esta constante se parametriza $H_0 = 100h \frac{km}{s \cdot Mpc}$, de modo a $h \approx 0.7$ onde um $Mpc = 3.09 \times 10^{24}cm$.

Figura 1.1: Distribuição de pontos estatisticamente isotrópico em torno de cada ponto (à esquerda) e em torno de um único ponto P (à direita).



Fonte: Próprio autor.

Sabemos também que a geometria do universo apresenta apenas pequenos desvios de um universo perfeitamente homogêneo e isotrópico já em escalas de poucos Mpc . A geometria do universo pode ser testada através do movimento peculiar de galáxias, com lentes gravitacionais, e em particular com a radiação cósmica de fundo (CMB) ². Embora o universo pareça ser bem descrito pelo modelo padrão da cosmologia (Λ CDM) ³, construído sob a hipótese de que a estrutura geométrica do universo é baseada nas soluções de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) ⁴, estudos experimentais da CMB mostraram que existem pequenas anomalias estatísticas que estimulam um interesse nos modelos cosmológicos anisotrópicos do universo [3, 4, 5, 6, 7, 8]. Os modelos de Bianchi representam uma alternativa plausível aos modelos de FRW, pois estes modelos também representam universos espacialmente homogêneos, porém anisotrópicos. A cosmologia moderna tem como finalidade mostrar como é o comportamento do universo, por isso investiga alguns parâmetros que descrevem a evolução da geometria espacial; uma dessas quantidades é o tensor de cisalhamento.

J. Mimoso e P. Crawford [9] desenvolveram um trabalho cuja finalidade era estudar modelos espacialmente anisotrópicos, mas com expansão isotrópica. Ou seja, nestes modelos a expansão do universo é descrita por um único fator de escala, sendo que a anisotropia se manifesta agora na curvatura das seções espaciais da métrica. A grande vantagem desses modelos é que eles são compatíveis com a isotropia do universo observada através dos dados da CMB, embora sejam uma classe mais ricas de modelos, podendo potencialmente descrever

²Acrônimo de Cosmic Microwave Background.

³Lambda (Λ) Cold Dark Matter.

⁴Cosmologias de universos homogêneos e isotrópicos.

fenômenos novos.

Na mesma linha de pesquisa, T. Koivisto, D. Mota, M. Quartin e T. Zlosnik [10] estudaram modelos com expansão isotrópica e com uma curvatura espacial anisotrópica, onde a anisotropia da curvatura é mantida por um tensor antissimétrico de ordem 2, ou seja, uma 2-forma. Usando dados recentes da curva de luminosidade de supernovas, estes autores mostraram que a abundância direcional de supernovas no universo pode ser usada com um indicativo da existência de anisotropias na curvatura da métrica, o que representa uma oportunidade observacional de verificar (ou falsificar) estes modelos.

Nosso objetivo neste trabalho é estudar a dinâmica no espaço de fase de modelos com curvatura espacial anisotrópica. Em particular, pretendemos descobrir se os modelos anisotrópicos com expansão isotrópica investigados em [9] são estáveis frente a perturbações lineares, ou seja, pretendemos investigar se estes modelos são atratores dentro de um espaço maior de modelos anisotrópicos. Para isso iremos considerar um tensor de energia-momento de um fluido imperfeito, onde o estresse anisotrópico deste fluido será descrito de duas maneiras distintas. Na primeira delas, propomos uma descrição fenomenológica para o estresse e investigamos suas consequências dinâmicas. Em seguida, consideramos o universo como sendo composto por um campo adicional descrito por uma 2-forma, e novamente estudamos suas consequências dinâmicas. Nossa principal conclusão é que os modelos cosmológicos com curvatura espacial anisotrópica e expansão isotrópica são estáveis, ou seja, estes modelos representam um ponto atrator na dinâmica de universos anisotrópicos.

O presente trabalho está organizado da seguinte forma. Primeiramente, na seção 2, apresentaremos um breve resumo do modelo cosmológico homogêneo e isotrópico Friedmann-Robertson-Walker (FRW). Na seção seguinte, introduziremos uma classe de modelos cosmológicos anisotrópicos que possuem uma expansão isotrópica, apresentando o tensor de Einstein e o tensor energia-momento associados a estes modelos. Na seção 4, consideraremos os tópicos relevantes no estudo de estabilidade linear e não linear, isto é, conceitos de sistemas autônomos, pontos de equilíbrio, linearização e estabilidade. Todo o estudo de estabilidade linear e não-linear será aplicado nos modelos cosmológicos anisotrópicos na seção 5, aonde a maior parte dos resultados deste estudo é apresentada. As características dinâmicas do modelo cosmológico com curvatura anisotrópica, juntamente com uma análise da ação para o campo canônico de 2-formas, as equações de Einstein, estudos dos pontos críticos e estabilidade do sistema são desenvolvidos nesta seção. Finalmente, a seção 6 é dedicada às conclusões. Durante todo este trabalho a assinatura da métrica utilizada será $(-, +, +, +)$. Índices gregos como μ, ν, λ, \dots referem-se a quantidades quadri-dimensionais (espaço-tempo) podendo obter valores entre 0 e 3, já índices latinos como i, j, k, \dots são empregados em quantidades espaciais. Também adotaremos as unidades naturais onde definimos $c = 8\pi G = 1$.

2 MODELOS DE UNIVERSOS HOMOGÊNEOS E ISOTRÓPICOS

2.1 MODELOS DE FRIEDMANN-ROBERTSON-WALKER

Seguindo a hipótese do princípio cosmológico, segundo a qual o universo é homogêneo e isotrópico em grandes escalas; que deu lugar primeiramente aos estudos efetuados por H. Robertson e A. Walker (independente), e mais tarde por A. Friedmann e G. Lemaître, ao qual deduzem as equações do movimento que governam o universo [12], chega-se à seguinte métrica

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \\ &= -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde k é a curvatura das seções espaciais do universo. O parâmetro k toma os valores de +1, que indica geometrias com curvatura espacial constante positiva; em termos gerais são chamados modelos fechados. Com um valor 0 são geometrias de seções espaciais euclidianas, que mostram modelos planos. Finalmente com um valor -1 estas geometrias espaciais são de curvatura negativa, e são chamados modelos abertos [13]. Na equação (2.1) o termo $a(t)$ é o chamado fator de escala e as variáveis r , θ e ϕ são coordenadas de co-movimento, ou seja, são as coordenadas adotadas por um observador em queda livre com a expansão. Para encontrar as equações dinâmicas para $a(t)$, temos que retomar as equações de campo de Einstein [14].

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}. \quad (2.2)$$

Aqui $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein [15]; $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, que depende da métrica e suas derivadas; $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, é a contração do tensor de Ricci com a métrica $g^{\mu\nu}$ e $T_{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento.

Baseado nestas informações vamos a calcular os fatores de conexão e o tensor de curvatura. Para visualizar os componentes métricos e os símbolos de Christoffel consulte a secção do Apêndice A. Uma maneira de estudar a curvatura do sistema é através do tensor de Ricci, que é obtido pela contração do tensor de Riemann com a métrica. Os componentes do

tensor de Ricci não nulos são os seguintes

$$\begin{aligned}
 R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}, \\
 R_{11} &= \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1 - kr^2}, \\
 R_{22} &= r^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k), \\
 R_{33} &= r^2 (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \sin^2 \theta,
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde os pontos denotam a diferenciação em relação a t . O escalar de Ricci é denotado da seguinte maneira

$$R = 6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right]. \tag{2.4}$$

Uma vez obtidos as quantidades acima, pode-se calcular as componentes do tensor de Einstein

$$\begin{aligned}
 G_{00} &= \frac{3}{a^2} (\dot{a}^2 + k), \\
 G_{i0} &= 0, \\
 G_{ij} &= \frac{1}{a^2} (2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k) g_{ij}.
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.2 EQUAÇÕES DE FRIEDMANN

Na seção anterior estudamos como está definida a estrutura geométrica espacial do sistema, assumindo que o universo, em grandes escalas de distância, tem um comportamento homogêneo e isotrópico; isto implica que os termos T^i_0 devem ser zero, devido a que a densidade de momento não proporciona efeito ao sistema na direção i , e que os componentes espaciais T^i_j devem ter uma forma diagonal com $T^1_1 = T^2_2 = T^3_3$, de modo que quando $j = i$ temos a pressão isotrópica na direção i . Tomando a consideração de que o conteúdo do universo seja descrita por um fluido perfeito [16] se pode escrever o tensor energia-momento como

$$T^\mu_\nu = (\rho + P) U^\mu U_\nu + P \delta^\mu_\nu, \quad U^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{dt}. \tag{2.6}$$

onde ρ é a densidade de energia do fluido no referencial de repouso de um observador comóvel com a expansão, P é a pressão que experimenta o fluido neste mesmo referencial e U^μ é a quadri-velocidade dos observadores comóveis com a expansão. Passamos agora às equações de Einstein, lembrando que elas podem ser escritas na forma

$$R_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}. \tag{2.7}$$

Com $\mu\nu = 00$ a equação é

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho + 3P). \quad (2.8)$$

Com $\mu\nu = ij$ as equações são

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{2k}{a^2} = \frac{1}{2}(\rho - P). \quad (2.9)$$

Podemos usar a equação (2.8) para eliminar as segundas derivadas em (2.9), dando a seguinte equação

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\rho}{3} - \frac{k}{a^2}. \quad (2.10)$$

Estas equações descrevem um modelo homogêneo e isotrópico do universo com densidade de energia total ρ e pressão total P . Continuando os cálculos, e levando em conta as identidades de Bianchi, vemos que o tensor energia-momento é conservado [14], ou seja

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.11)$$

Para chegamos à equação de conservação substituímos os termos (2.1) e (2.6) em (2.11). Isso nos dá

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P) = 0. \quad (2.12)$$

Para avançar no estudo devemos usar uma equação que relacione ρ e P . Esta equação descreve a evolução de um universo isotrópico que está composto de um fluido perfeito; expressão que está associada a uma equação de estado

$$P = w\rho, \quad (2.13)$$

onde w é considerado uma constante adimensional que, caracteriza e modela as propriedades termodinâmicas do conteúdo de matéria. Ora, se substituímos a equação (2.13) em (2.12), encontramos

$$\rho(t) \propto a^{-3(1+w)}. \quad (2.14)$$

A equação (2.14) mostra como é o comportamento da densidade de energia do fluido em um universo em expansão. Vejamos algumas classes de densidades importantes para a cosmologia.

- Matéria Fria, $P_m = 0$ e $w_m = 0$

$$\rho_m(t) \propto a^{-3}. \quad (2.15)$$

- Radiação, $P_r = \frac{\rho}{3}$ e $w_r = \frac{1}{3}$

$$\rho_r(t) \propto a^{-4}. \quad (2.16)$$

Vale a pena notar que nenhum destes casos produz um regime que mostre uma expansão acelerada do universo. Para tanto devemos ter a condição $\rho + 3P < 0$, veja equação (2.8), que leva a

$$w < -\frac{1}{3}. \quad (2.17)$$

Com essa restrição para o parâmetro da equação de estado é preciso introduzir um novo elemento de energia no universo que tenha pressão negativa. Este elemento poderia ser a energia escura [12, 17, 18].

2.3 A LEI DE HUBBLE E O REDSHIFT

O estudo apresentado a seguir se baseia na referência [13]. Considere o seguinte exemplo, vemos o comportamento de uma galáxia que esta a muitos anos-luz de distância de um observador que esta fixo em $r = 0$. Se a coordenada radial à galáxia é χ , então a distância própria da galáxia é $d_p = a\chi$. Ou seja, a velocidade da galáxia com relação ao observador é dada por

$$v = \frac{d}{dt}d_p = \frac{\dot{a}}{a}a\chi = Hd_p, \quad (2.18)$$

onde $H \equiv \dot{a}/a$, é conhecido como o parâmetro de Hubble. Na cosmologia atual é chamada constante de Hubble e tem a forma

$$H_0 = hH_1, \quad (2.19)$$

onde $H_1 \approx 100 \frac{km}{s.Mpc}$. Medições recentes [19] indicam que $h \approx 0,7$.

A lei de Hubble diz que a velocidade de uma galaxia é proporcional à sua distância, como se mostra na equação (2.18). Outra definição útil no estudo da expansão do universo é o parâmetro de densidade de matéria

$$\Omega_\rho \equiv \frac{\rho}{3H^2} = \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (2.20)$$

onde a densidade crítica é definida pela equação

$$\rho_c = 3H^2. \quad (2.21)$$

Usando o termo (2.20) em (2.10), a equação de Friedmann é reescrita como

$$1 - \Omega_\rho = -\frac{k}{a^2 H^2} \equiv \Omega_k. \quad (2.22)$$

Estudos recentes têm mostrado que o universo atualmente é aproximadamente plano, o que significa que $k = 0$, então $\Omega_\rho = 1$ [15, 19]. Quando o conteúdo do universo é dominado pela energia escura temos que o parâmetro de densidade de energia está dado por

$$\Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{3H^2}, \quad (2.23)$$

onde Λ é a constante cosmológica, exemplos de universos que apresentam constante cosmológica: de Sitter e anti-de Sitter, estas são soluções dominado pelo vazio. Nesse caso a equação (2.22) fica

$$1 = \Omega_\rho + \Omega_\Lambda + \Omega_k. \quad (2.24)$$

Para um universo com n fluidos, temos

$$1 = \sum_i \Omega_i + \Omega_k. \quad (2.25)$$

Até agora temos visto que a constante de Hubble tem influência sobre a expansão do universo, mas precisamos de antemão uma variável que mostre como é a rapidez ou a variação que se expande o universo. Esta função é chamada o parâmetro de desaceleração q , definido como

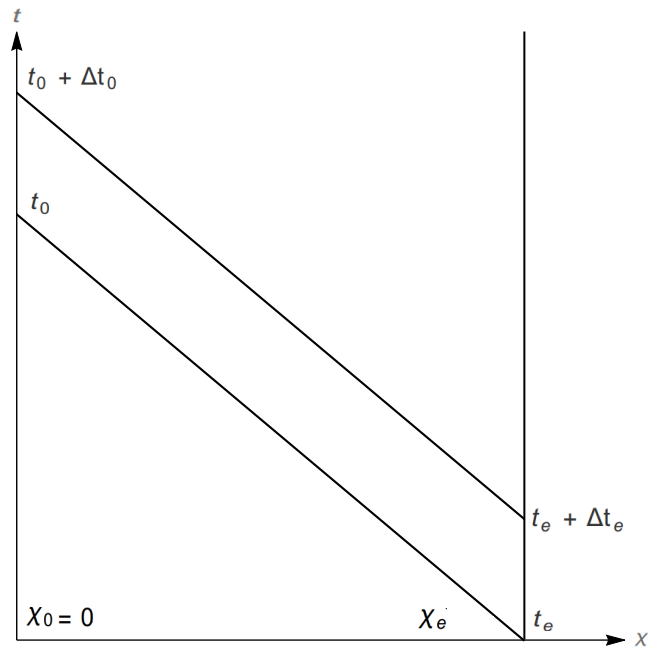
$$q = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{H} \right) - 1, \quad (2.26)$$

de modo que o sinal de q revela se o modelo se expande aceleradamente ($q < 0$) ou desaceleradamente ($q > 0$).

Um dos aspectos interessantes que acontece à luz quando esta viaja através do universo em expansão, é que seu comprimento de onda é submetida a um deslocamento para o vermelho – consequência direta da expansão da distância física entre nos e a galáxia. Os fótons que estão viajando para nós tem $ds^2 = 0$. Naturalmente, devido à isotropia do espaço a luz se dirige radialmente, de modo que $d\theta^2 = d\phi^2 = 0$, então nós temos da equação (2.1) com $k = 0$ que $dt = -a(t)dr$, o sinal negativo é que a luz viaja para a origem.

Imaginemos dois sinais dirigidos para nós. Um sinal é emitido em t_e e chega em t_0 ; o próximo sinal é enviado em $t_e + \Delta t_e$ e chega em $t_0 + \Delta t_0$ (veja a Figura 2.1). Existe uma relação entre Δt_0 e Δt_e , então

$$-\int_r^0 dr = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_e + \Delta t_e}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (2.27)$$

Figura 2.1: *Redshift* da luz.

Fonte: Próprio autor.

portanto

$$\int_{t_0}^{t_0 + \Delta t_0} \frac{dt}{a(t)} - \int_{t_e}^{t_e + \Delta t_e} \frac{dt}{a(t)} = 0. \quad (2.28)$$

Integrando desde os limites t_e a $t_e + \Delta t_e$ e t_0 a $t_0 + \Delta t_0$, o fator de escala pode ser aproximado por uma constante com os valores $a(t_e)$ e $a(t_0)$. Isso nos dá

$$\frac{\Delta t_e}{a(t_e)} = \frac{\Delta t_0}{a(t_0)}. \quad (2.29)$$

O comprimento de onda da luz é $\lambda = c\Delta t$, então

$$\frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e}. \quad (2.30)$$

Visto que λ é o comprimento de onda da luz, então definimos o *Redshift* como

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{a(t_0)}{a(t_e)} - 1. \quad (2.31)$$

Se o universo se expande, $a(t_0) > a(t_e)$, e portanto $z > 0$.

3 MODELOS COSMOLÓGICOS ANISOTRÓPICOS

3.1 UMA CLASSE DE MODELOS ANISOTRÓPICOS COM O EXPANSÃO ISOTRÓPICA

Uma das razões pela qual a métrica de FRW é tida como ideal é porque cumpre com os requisitos de isotropia e homogeneidade em grandes escalas; porém essa métrica está caracterizada por ter um único fator de escala que é o mesmo para cada uma das três direções espaciais, diferentemente dos modelos que apresentaremos neste trabalho, os quais são espacialmente anisotrópicos. Os modelos que nos interessam podem ser descritos pela seguinte métrica em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dt^2 + S^2 \gamma_{ij}(t) dx^i dx^j, \\ &= -dt^2 + e^{2\alpha(t)} \left[e^{2\sigma(t)} \left(d\rho^2 + \frac{1}{k} \left(\sin \sqrt{k} \rho \right)^2 d\varphi^2 \right) + e^{-4\sigma(t)} dz^2 \right], \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde e^α é o fator de escala médio e σ o escalar de cisalhamento (i.e., σ mede a anisotropia da expansão). A expressão acima engloba simultaneamente quatro modelos (i.e., métricas) distintas. De fato, se $k = 0 = \sigma$, temos a métrica isotrópica de FRW. Se $k = 0$, mas σ é não-nulo, temos a métrica de Bianchi I. Finalmente, para σ arbitrário temos as métricas de Bianchi III ($k = -1$) e Kantowski-Sachs ($k = +1$)¹. A tabela (3.1) resume as principais diferenças entre estes modelos. Note que a seção espacial dos modelos de Bianchi III e Kantowski-Sachs são o produto de espaços de curvaturas distintas, razão pela qual os mesmos são conhecidos como modelos com curvatura anisotrópica.

A métrica 3.1 admite dois fatores de escala que tem comportamentos tipo-FRW. O fator de escala médio é

$$S(t) = \sqrt[3]{e^{\alpha+\sigma} e^{\alpha+\sigma} e^{\alpha-2\sigma}} = e^\alpha, \quad (3.2)$$

e da definição de $H = \dot{S}/S$, temos que

$$H = \dot{\alpha}. \quad (3.3)$$

O sistema experimenta uma distorção por causa do escalar de cisalhamento mas o volume espacial comóvel $dV = \sqrt{\det\gamma(t)} dx^3 = d^3x$ permanece invariante. O escalar de curvatura (espacial) de Ricci é dado por

$${}^3R \equiv 2ke^{-2\alpha-2\sigma}, \quad (3.4)$$

onde a notação ⁽³⁾ faz referência a um espaço em 3-dimensões.

¹Vale a pena notar que o modelo de Kantowski-Sachs é o único modelo anisotrópico que não se enquadra na classificação de Bianchi. Para mais detalhes, veja [20].

Tabela 3.1: Modelos considerados neste trabalho.

Modelo	Seção espacial	Curvatura anisotrópica?
FRW	\mathbb{R}^3	Não
BI	\mathbb{R}^3	Não
BIII	$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$	Sim
KS	$\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$	Sim

Fonte: Próprio autor.

As componentes do tensor de Einstein do sistema são,

$$\begin{aligned}
G^0_0 &= -3H^2 + 3\dot{\sigma}^2 - \frac{{}^3R}{2} = T^0_0, \\
G^1_1 &= -2\dot{H} - 3H^2 + 3H\dot{\sigma} - 3\dot{\sigma}^2 + \ddot{\sigma} = T^1_1, \\
G^2_2 &= -2\dot{H} - 3H^2 + 3H\dot{\sigma} - 3\dot{\sigma}^2 + \ddot{\sigma} = T^2_2, \\
G^3_3 &= -2\dot{H} - 3H^2 - 6H\dot{\sigma} - 3\dot{\sigma}^2 - 2\ddot{\sigma} - \frac{{}^3R}{2} = T^3_3.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Note que $G^1_1 = G^2_2$, como consequência da simetria local de rotação no plano xy da métrica 3.1.

3.2 TENSOR DE ENERGIA-MOMENTO

No estudo de um universo de FRW tomamos por certo o fato de que o conteúdo deste comporta-se como um modelo com fluido perfeito [16]. De fato, imperfeições em $T_{\mu\nu}$ introduzem direções que violam as hipóteses de simetria do modelo cosmológico, e por isso devem ser descartadas. No entanto, se decidimos abrir mão da simetria rotacional (como faremos neste trabalho), o tensor de energia-momento pode desenvolver componentes também anisotrópicos. O $T_{\mu\nu}$ mais geral possível é [20]

$$T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu + q_\mu U_\nu + U_\mu q_\nu + P h_{\mu\nu} + \bar{\pi}_{\mu\nu}, \quad U^\nu U_\nu = -1, \tag{3.6}$$

onde, $h_{\mu\nu} = U_\mu U_\nu + g_{\mu\nu}$ é a métrica da seção espacial, e é ortogonal ao vetor U^μ , $U^\mu h_{\mu\nu} = 0$. Além disso, q_μ e $\bar{\pi}_{\mu\nu}$ são respectivamente a quadri-corrente e o tensor de estresse anisotrópico, os quais satisfazem as seguintes propriedades: $U^\mu q_\mu = 0$, $U^\mu \bar{\pi}_{\mu\nu} = 0$ e $\bar{\pi}^\mu{}_\mu = 0$. No referencial de repouso do observador com velocidade $U_\mu = (1, 0, 0, 0)$, estas condições implicam que

$$\bar{\pi}_{0\mu} = 0, \quad \sum_i \bar{\pi}^i{}_i = 0. \tag{3.7}$$

Iremos agora considerar um sistema com dois tipos de fluidos,

$$T^\mu{}_\nu = T^{\mu(1)}{}_\nu + T^{\mu(2)}{}_\nu, \quad (3.8)$$

onde o fluido (1) é perfeito e o fluido (2) é imperfeito. Utilizando a equação (2.6) e reescrevendo a equação (3.6), obtém-se o seguinte

$$\begin{aligned} T^{\mu(1)}{}_\nu &= (\rho^{(1)} + P^{(1)}) U^\mu U_\nu + P^{(1)} \delta^\mu_\nu, \\ T^{\mu(2)}{}_\nu &= (\rho^{(2)} + P^{(2)}) U^\mu U_\nu + P^{(2)} \delta^\mu_\nu + \bar{\pi}^\mu{}_\nu. \end{aligned} \quad (3.9)$$

No fluido imperfeito, os termos do vetor de corrente são $q^0 U_i = q_i U^0 = 0$, visto que as componentes do tensor de Einstein não nulas são aquelas expostas na equação (3.5). Com $\mu\nu = 00$ a equação (3.8) fica

$$T^0{}_0 = T^{0(1)}{}_0 + T^{0(2)}{}_0 \equiv -\rho. \quad (3.10)$$

onde

$$\rho = \rho^{(1)} + \rho^{(2)}. \quad (3.11)$$

Com $\mu\nu = AB$, onde A e B são índices que representam as coordenadas no plano xy , e $\mu\nu = 33$, a equação (3.8) fica

$$\begin{aligned} T^A{}_B &= P\delta^A_B + \bar{\pi}^A{}_B \equiv P_\perp, \\ T^3{}_3 &= P + \bar{\pi}^3{}_3 \equiv P_\parallel, \end{aligned} \quad (3.12)$$

onde chamaremos aos termos P_\perp e P_\parallel de pressão perpendicular e pressão paralela à direção z respectivamente. Note que, devido à simetria residual no plano xy , temos que $\bar{\pi}^1{}_1 = \bar{\pi}^2{}_2$. Usando a equação (3.7) temos ainda que $\bar{\pi}^3{}_3 = -2\bar{\pi}^1{}_1$. Nós também definimos a P como a pressão total do sistema de dois fluidos interagindo

$$P = P^{(1)} + P^{(2)}. \quad (3.13)$$

Com $\mu\nu = 00$ a equação de Einstein fica

$$3H^2 - 3\dot{\sigma}^2 + \frac{{}^3R}{2} = \rho. \quad (3.14)$$

Com $\mu\nu = AB$ a equação é

$$-2\dot{H} - 3H^2 + 3H\dot{\sigma} - 3\dot{\sigma}^2 + \ddot{\sigma} = P_\perp, \quad (3.15)$$

E finalmente quando $\mu\nu = 33$ a equação é

$$-2\dot{H} - 3H^2 - 6H\dot{\sigma} - 3\dot{\sigma}^2 - 2\ddot{\sigma} - \frac{{}^3R}{2} = P_\parallel, \quad (3.16)$$

A equação de conservação do sistema é dada por (2.11), e ela atua para os dois fluidos do seguinte modo

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu} T^{\mu\nu(1)} &= 0, \\ \nabla_{\mu} T^{\mu\nu(2)} &= 0.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Com $\nu = 0$ para o primeiro fluido a equação é

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu} T^{\mu 0(1)} &= \partial_{\mu} T^{\mu 0(1)} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} T^{\lambda 0(1)} + \Gamma_{\lambda\mu}^0 T^{\mu\lambda(1)}, \\ &= \partial_0 \rho^{(1)} + 3\dot{\alpha} \rho^{(1)} + 3\dot{\alpha} P^{(1)}.\end{aligned}$$

Reescrevendo, encontramos:

$$\dot{\rho}^{(1)} + 3H [\rho^{(1)} + P^{(1)}] = 0.\tag{3.18}$$

A equação de continuidade para o fluido imperfeito é da seguinte forma

$$\dot{\rho}^{(2)} + 3H [\rho^{(2)} + P^{(2)}] = -6\dot{\sigma} \bar{\pi}^1_1.\tag{3.19}$$

Resumindo, temos:

$$\begin{aligned}H^2 - \dot{\sigma}^2 &= \frac{\rho}{3} - \frac{{}^3R}{6}, \\ \dot{H} + 3H^2 &= \frac{\rho - P}{2} - \frac{{}^3R}{3}, \\ \ddot{\sigma} + 3H\dot{\sigma} &= \bar{\pi}^1_1 - \frac{{}^3R}{6}, \\ {}^3\dot{R} &= -2(H + \dot{\sigma})^3 R,\end{aligned}\tag{3.20}$$

além das equações (3.18) e (3.19). Nosso objetivo agora é estudar as possíveis implicações físicas que podem resultar dessas equações e o desenvolvimento de suas soluções ao modelo cosmológico. Para tanto, precisaremos rever os conceitos de sistemas dinâmicos [21].

4 ESTABILIDADE LINEAR E NÃO LINEAR

4.1 ESTABILIDADE EM SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Nesta seção apresentaremos outra abordagem ao estudo das equações e sistemas diferenciais, perguntando-nos agora como obter informação qualitativa do comportamento das equações. Essa abordagem tem uma razão fundamental: muitas das equações diferenciais são complicadas de resolver e ainda que pudéssemos conhecer suas soluções, em alguns casos só queremos uma ideia qualitativa do comportamento delas. O estudo apresentado a seguir se baseia na referência [21].

4.1.1 Sistemas Autônomos

Consideremos o seguinte sistema autônomo de duas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y),\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde nós assumimos que f e g são funções contínuas, com derivadas parciais também contínuas. As funções f e g são de classe C^1 em todo \mathbb{R}^2 ($f, g \in \mathbb{R}^2$), e recebem o nome de autônomas, porque as funções f e g não dependem explicitamente da variável independente t . É fácil ver que (4.1) pode ser generalizado para N dimensões, nesse caso:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x}),\tag{4.2}$$

onde \vec{F} representa um conjunto de funções não lineares nas variáveis $x_1 \dots x_n$, de modo que

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \vec{F}_1(x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= \vec{F}_n(x_1, \dots, x_n).\end{aligned}\tag{4.3}$$

Há algumas propriedades de tipo qualitativo que são interessantes e que com frequência podem dar respostas satisfatórias, sem precisar determinar explicitamente as soluções. É possível também transformar um sistema de equações de segunda ordem a um sistema de primeira ordem fazendo uma substituição de $y = \dot{x}$, como veremos num exemplo na continuação.

4.1.1.1 O Oscilador Harmônico Amortecido

A equação diferencial do movimento para o sistema é da forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (4.4)$$

onde x é variável de deslocamento do movimento, γ é a constante do amortecimento e ω_0^2 é a frequência natural do oscilador. Uma solução para equação (4.4) é

$$x \propto e^{pt},$$

onde p são raízes da equação característica

$$p^2 + \gamma p + \omega_0^2 = 0,$$

que são dadas por

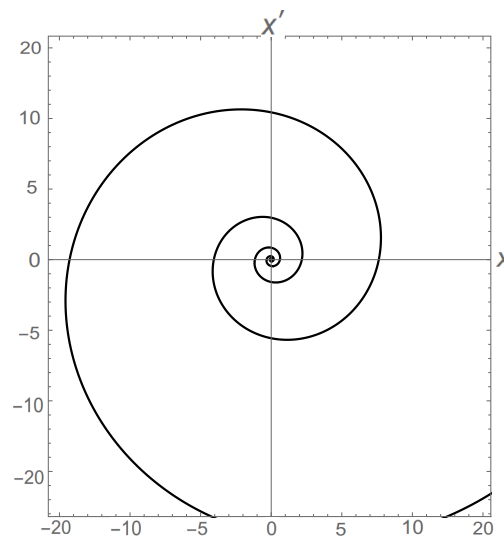
$$p_{\pm} = \frac{1}{2} \left[-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2} \right].$$

Para o caso de um amortecimento subcrítico ($\gamma^2 < 4\omega_0^2$), a solução é da forma

$$x(t) = C \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma t\right) \cos\left(-\frac{\Delta}{2t} + \alpha\right),$$

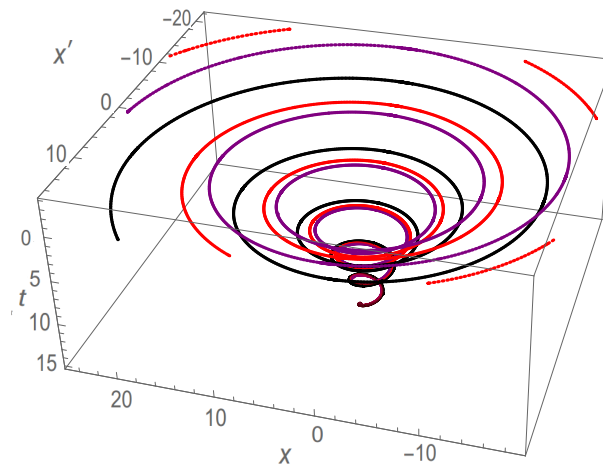
onde C e α são constantes que devem ser fixadas pelas condições iniciais do sistema e $\Delta = \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}$. Na figura (4.1) vemos o espaço de fase associado a este problema.

Figura 4.1: Diagrama do comportamento de um oscilador harmônico subamortecido. A evolução do tempo se dá no sentido horário da curva.



Fonte: Próprio autor.

Figura 4.2: Espaço de fases de um oscilador harmônico amortecido para vários conjuntos de condições iniciais. Este é um exemplo típico de um ponto atrator no espaço de fases.



Fonte: Próprio autor.

As diferentes trajetórias mostradas na Figura (4.2) representam diferentes condições iniciais. Da figura podemos visualizar que o único ponto de equilíbrio é a origem ($x = 0$, $\dot{x} = 0$), pois todas as trajetórias formam espirais que convergem para a origem. Dizemos que o ponto para o qual convergem as trajetórias no espaço de fase, depois de um determinado tempo, é um *atrator*.

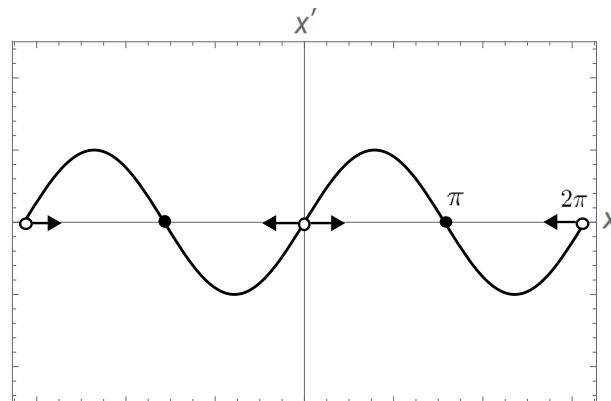
4.1.2 Estabilidade

Uma das maneiras de estudar o comportamento do sistema apresentado na equação (4.1) é introduzindo os conceitos de estabilidade e pontos fixos. Os pontos do diagrama de fases no qual os fluxos são estacionários recebem o nome de pontos fixos. Vamos apresentar um exemplo físico que esclareça a situação. Considere um fluido unidimensional em movimento, tal que a velocidade do fluido é dada pela fórmula $\dot{x} = \sin x$ [22]. Sua representação no espaço das fases está mostrada na figura (4.3). Um ponto fixo (x_0, y_0) é aquele que atende à seguinte condição

$$\dot{x} = 0. \quad (4.5)$$

Há dois tipos de pontos fixos apresentados na figura (4.3):

- **Estáveis**, que são os pontos pretos, também conhecidos como *atratores*. De fato, à esquerda do ponto preto, o fluido se move para a direita ($\dot{x} > 0$) e à direita, o fluido se move para a esquerda ($\dot{x} < 0$), portanto o fluido é atraído para este ponto.
- **Instáveis**, que são os pontos brancos, também conhecido como *repulsores* ou *fontes*. De fato, à direita deste ponto o fluido se move para a direita ($\dot{x} > 0$), enquanto à sua esquerda o fluido se move para a esquerda ($\dot{x} < 0$).

Figura 4.3: Espaço de fases da função $\sin x$.

Fonte: Próprio autor.

4.1.3 Classificação dos Pontos de Equilíbrio

Em seguida, observamos que no caso dos sistemas autônomos lineares, a natureza e a estabilidade do ponto de crítico fica caracterizada pelos autovalores da matriz do sistema. Embora nosso interesse esteja em sistemas não lineares (veja equação (3.20)) a discussão de sistemas lineares visa elucidar de maneira simples as principais ideias por trás da análise de sistemas dinâmicos.

4.1.3.1 Estabilidade Linear

Seja o seguinte sistema autônomo linear descrito na forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by = f(x, y), \\ \dot{y} &= cx + dy = g(x, y). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Este sistema apresenta um único ponto crítico em $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Supondo uma solução da forma $(x(t), y(t)) \sim (e^{\lambda t}, e^{\lambda t})$, a solução do problema fica determinada pelo determinante da seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{bmatrix} = 0. \quad (4.7)$$

Se a matriz do sistema tem determinante não nulo, então por conseguinte os autovalores λ_1, λ_2 são diferentes de zero. Levando em conta as trajetórias do sistema em relação com o ponto equilíbrio $(0,0)$, podemos definir este ponto como: Nó, Sela, Centro ou Foco.

4.1.3.2 Ponto Crítico Nodal

Este caso acontece quando os autovalores λ_1, λ_2 são do mesmo sinal. Existem duas classes de Nós:

- Nó estável: A parte real dos autovalores são distintas e negativas. O diagrama das fases esta formado por semirretas que cruzam o ponto de equilíbrio, veja a Figura (4.4).
- Nó instável: A parte real dos autovalores são distintas e positivas. O diagrama das fases esta formado por semirretas que saem do ponto de equilíbrio, veja a Figura (4.4).
- Nó impróprio: É quando um sistema linear tem autovalores iguais e do mesmo sinal. Nesse caso existem trajetórias com aparência de parábolas, veja a Figura (4.5).

4.1.3.3 Ponto Crítico de Sela

Este é um caso que se mostra quando os autovalores λ_1, λ_2 são reais e de diferente sinal. As trajetórias inicialmente tendem a aproximar-se ao ponto crítico mas depois divergem dele. Esta análise nos permite determinar que todo ponto de sela é instável, veja a Figura (4.6).

4.1.3.4 Ponto Crítico Centro

Este caso é apresentado quando os autovalores são imaginários puros. Todas as trajetórias são curvas (elipses) fechadas que estão centradas contorno da origem. É por isto que o ponto crítico é estável, visto que a orientação de todas suas orbitas é sempre a mesma, veja a Figura (4.6).

4.1.3.5 Ponto Crítico Focal ou Espiral

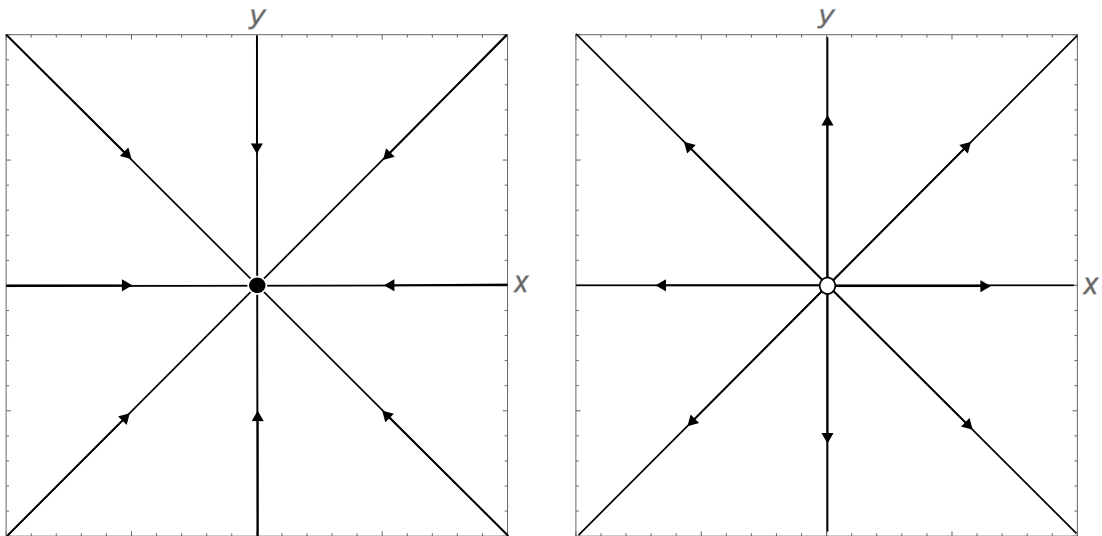
Nesta situação os autovalores são complexos conjugados e têm uma parte real não nula. As trajetórias são curvas em forma de espiral que quanto $t \rightarrow \infty$, podem apresentar duas características:

- Estável, quando todas as trajetórias tendem a aproximar-se da origem, caso a parte real dos autovalores seja negativa.
- Instável, quando todas as trajetórias afastam-se da origem, caso que a parte real dos autovalores seja positiva.

Isso nos mostra que o ponto crítico de foco ou espiral é um sumidouro espiral (autovalores com parte real negativa) ou fonte espiral (autovalores com parte real positiva), veja a Figura (4.5).

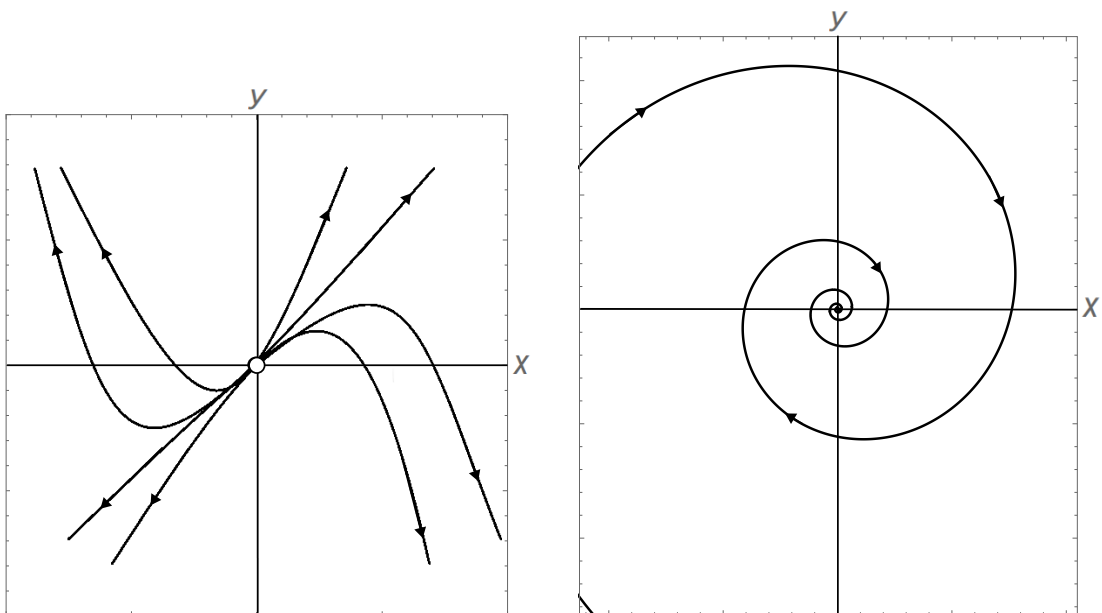
Em resumo: O ponto crítico (0,0) do sistema linear da equação (4.6) é estável se e somente se os autovalores têm parte real negativa; se existir um autovalor com parte real positiva, então o ponto crítico (0,0) do sistema linear da equação (4.6) será instável.

Figura 4.4: Diagrama de fases onde o ponto de equilíbrio $(0,0)$ é um nó estável (à esquerda) e nó instável (à direita).



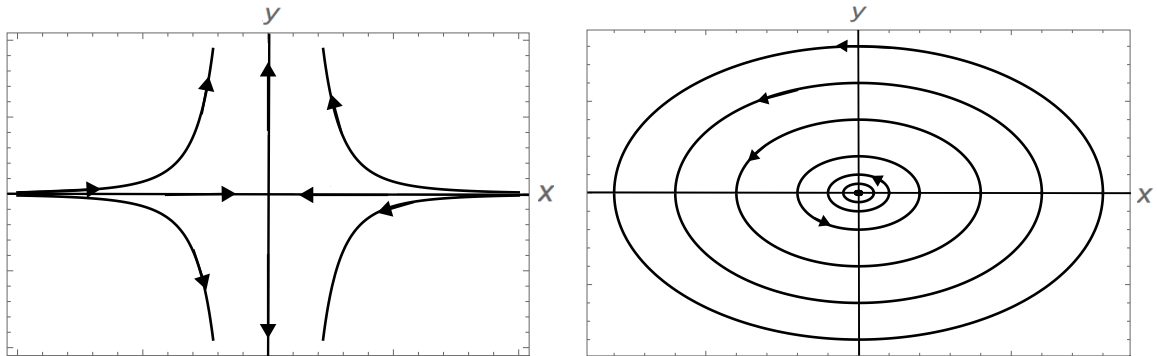
Fonte: Próprio autor.

Figura 4.5: Espaço de fases onde o ponto crítico $(0,0)$ é um nó impróprio, trajetórias em forma de parábolas que tendem suas direções para fora da origem (à esquerda) e diagrama de um ponto crítico isolado conhecido como ponto de espiral ou foco. As trajetórias tendem à origem (à direita).



Fonte: Próprio autor.

Figura 4.6: Diagrama de um ponto crítico isolado $(0,0)$ conhecido como ponto de sela (à esquerda) e diagrama de um ponto crítico isolado $(0,0)$ conhecido como centro, as trajetórias caminhando para $t > 0$, em sentido anti-horário (à direita).



Fonte: Próprio autor.

4.1.4 Sistemas Não Lineares

As equações de Einstein que pretendemos estudar são não lineares, de modo que a análise das seções anteriores não se aplicam. Iremos agora considerar o caso de sistemas não lineares.

4.1.4.1 Linearização e Estabilidade Não Linear

Seja o sistema de equações diferenciais não lineares da seguinte maneira

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y),\end{aligned}\tag{4.8}$$

Suporemos que as funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$ sejam de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ e que exista um ponto crítico (x_0, y_0) . Aproximando $f(x, y)$ e $g(x, y)$ perto do ponto (x_0, y_0) , temos:

$$\begin{aligned}f(x, y) &\approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0), \\ g(x, y) &\approx \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0).\end{aligned}\tag{4.9}$$

Reescrevendo

$$\begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix} \approx J \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix},\tag{4.10}$$

supondo $(x, y) \approx (x_0, y_0)$, e onde J é a matriz jacobiana representada por

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Dessa forma podemos imaginar que próximo ao ponto (x_0, y_0) o sistema da equação (4.1) seja descrito pelo sistema linear

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Examinemos agora uma aplicação da análise dinâmica na cosmologia como segue na continuação.

4.1.5 Análise dinâmica das Equações de Friedmann.

Nesta seção vamos a estudar o comportamento dinâmico das densidades de parâmetros (soluções das equações de Friedmann reescrita em sua forma reduzida) e como é sua evolução no universo ¹. Começamos primeiro reescrevendo o parâmetro de desaceleração a partir da equação (2.26) como

$$2q = (3\gamma - 2)(1 - \Omega_k) - 3\gamma\Omega_\Lambda, \quad (4.13)$$

onde usamos as equações (2.9), (2.13) e $\gamma \equiv \omega + 1$. O sistema das equações de Friedmann pode ser reescrito usando uma nova variável de tempo $y = \ln \frac{a}{a_0}$. A derivada com respeito a y de qualquer quantidade X é dada por

$$X' = \frac{\dot{X}}{H}, \quad \dot{X} = \frac{dX}{dt}, \quad X' = \frac{dX}{dy}. \quad (4.14)$$

Utilizando a definição acima na equações (2.26) e (2.12), obtemos

$$H' = -(1 + q)H, \quad (4.15)$$

e

$$\rho' = -3\rho\gamma. \quad (4.16)$$

Da equação (2.20), temos que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\rho}{3H^2} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{H^2} \dot{\rho} - \frac{2\rho}{H^3} \dot{H} \right). \quad (4.17)$$

¹Esta discussão é baseada em [1].

Substituindo as equações (4.15) e (4.16), encontramos

$$\dot{\Omega}_\rho = \frac{\rho}{3H} (2q - 3\gamma + 2). \quad (4.18)$$

Usando (4.14) obtemos uma das equações dinâmicas

$$\Omega'_\rho = \Omega_\rho (2q - 3\gamma + 2). \quad (4.19)$$

Analogamente, temos que a equação (2.22) pode-ser reescrita assim

$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{k}{a^2 H^2} \right) = 2k \left(\frac{1}{a^3 H^2} \dot{a} + \frac{1}{a^2 H^3} \dot{H} \right), \quad (4.20)$$

portanto

$$\dot{\Omega}_k = \frac{2k}{a^2 H} (-q), \quad (4.21)$$

e equação dinâmica é da seguinte forma

$$\Omega'_k = \Omega_k (2q). \quad (4.22)$$

Finalmente, para encontrar a terceira equação dinâmica temos que a relação (2.23) pode ser expressada como

$$\dot{\Omega}_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H} (2q + 2), \quad (4.23)$$

de modo que a equação dinâmica fica

$$\Omega'_\Lambda = \Omega_\Lambda (2q + 2). \quad (4.24)$$

O sistema de equações encontrado (4.19), (4.22) e (4.24) mostra como é a dinâmica que experimenta um universo composto por matéria e constante cosmológica, e é de grande importância conhecer o comportamento dessas soluções posto que elas mostraram como é a estabilidade ao longo do tempo.

4.1.5.1 Estudo de Pontos Fixos e Estabilidade

Temos o seguinte sistema de equações diferenciais exposto em (4.22) e (4.24)

$$\begin{aligned} \Omega'_k &= \Omega_k (2q) = f(\Omega_k, \Omega_\Lambda, \Omega_\rho), \\ \Omega'_\Lambda &= \Omega_\Lambda (2q + 2) = g(\Omega_k, \Omega_\Lambda, \Omega_\rho), \\ \Omega'_\rho &= \Omega_\rho (2q - 3\gamma + 2) = h(\Omega_k, \Omega_\Lambda, \Omega_\rho). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Porém, segue da equação (2.22) que $\Omega'_\rho + \Omega'_\Lambda + \Omega'_k = 0$, de modo que só precisamos de 2 equações. Vamos escolher Ω_k e Ω_Λ .

Assim, a condição para que exista um ponto fixo $(\Omega_{k_0}, \Omega_{\Lambda_0})$ é que $\Omega'_k = 0$ e $\Omega'_\Lambda = 0$, de modo que

$$\Omega_k q = 0, \quad \Omega_\Lambda (1 + q) = 0, \quad (4.26)$$

portanto

$$(\Omega_{k_0}, \Omega_{\Lambda_0}) = (0, 0) \quad (\Omega_{k_0}, \Omega_{\Lambda_0}) = (0, 1) \quad (\Omega_{k_0}, \Omega_{\Lambda_0}) = (1, 0), \quad (4.27)$$

onde temos usado a definição da equação (4.13). O sistema tem três tipos de soluções que representam as diferentes características que experimenta o universo, estudaremos cuidadosamente na continuação.

- *Universo de Einstein de Sitter* $(0, 0)$. O modelo representa um universo homogêneo, isotrópico, com curvatura espacial zero, pressão zero, sem constante cosmológica e apenas de matéria.
- *Universo de Sitter* $(0, 1)$. O modelo representa que o universo em seu conteúdo tem só constante cosmológica. O universo experimenta uma expansão exponencial com o tempo.
- *Universo de Milne* $(1, 0)$. O modelo assume que o universo em seu conteúdo carece de matéria e de constante cosmológica e experimenta uma curvatura espacial negativa.

Vamos agora analisar a estabilidade de cada modelo. A estabilidade é dada por

$$\begin{aligned} \Omega'_k &\approx \frac{\partial f}{\partial \Omega_k} (\Omega_{k_0}, \Omega_{\Lambda_0}) (\Omega_k - \Omega_{k_0}) + \frac{\partial f}{\partial \Omega_\Lambda} (\Omega_{k_0}, \Omega_{\Lambda_0}) (\Omega_\Lambda - \Omega_{\Lambda_0}), \\ \Omega'_\Lambda &\approx \frac{\partial g}{\partial \Omega_k} (\Omega_{k_0}, \Omega_{\Lambda_0}) (\Omega_k - \Omega_{k_0}) + \frac{\partial g}{\partial \Omega_\Lambda} (\Omega_{k_0}, \Omega_{\Lambda_0}) (\Omega_\Lambda - \Omega_{\Lambda_0}), \end{aligned} \quad (4.28)$$

veja a equação (4.9), reescrevendo o sistema da equação (4.25) e usando (4.13), obtemos de (4.28)

$$\begin{aligned} \Omega'_k &= (3\gamma - 6\gamma\Omega_{k_0} - 2 + 4\Omega_{k_0} - 3\gamma\Omega_{\Lambda_0}) (\Omega_k - \Omega_{k_0}) - (3\gamma\Omega_{k_0}) (\Omega_\Lambda - \Omega_{\Lambda_0}), \\ \Omega'_\Lambda &= (2\Omega_{\Lambda_0} - 3\gamma\Omega_{\Lambda_0}) (\Omega_k - \Omega_{k_0}) + (3\gamma - 3\gamma\Omega_{k_0} + 2\Omega_{k_0} - 6\gamma\Omega_{\Lambda_0}) (\Omega_\Lambda - \Omega_{\Lambda_0}). \end{aligned} \quad (4.29)$$

A matriz jacobinana do sistema está representada da seguinte forma

$$J(\Omega_{k_0}, \Omega_{\Lambda_0}) = \begin{pmatrix} 3\gamma - 6\gamma\Omega_{k_0} - 2 + 4\Omega_{k_0} - 3\gamma\Omega_{\Lambda_0} & -3\gamma\Omega_{k_0} \\ 2\Omega_{\Lambda_0} - 3\gamma\Omega_{\Lambda_0} & 3\gamma - 3\gamma\Omega_{k_0} + 2\Omega_{k_0} - 6\gamma\Omega_{\Lambda_0} \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

Na continuação vamos a estudar os diferentes comportamentos que cada universo pode experimentar e mostrar suas características:

- *Einstein de Sitter*: $(\Omega_{k_0}, \Omega_{\Lambda_0}) = (0, 0)$.

A matriz jacobiana fica

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} 3\gamma - 2 & 0 \\ 0 & 3\gamma \end{pmatrix}, \quad (4.31)$$

com autovalores

$$\mathcal{R}_1 = 3\gamma - 2 \quad \mathcal{R}_2 = 3\gamma. \quad (4.32)$$

Com base na nossa discussão sobre sistemas lineares, podemos ver que se $\gamma \in]-\infty, 0[$ é então considerado um *atrator*, enquanto que se $\gamma \in]0, \frac{2}{3}[$ este experimenta um *ponto de sela* e se $\gamma \in]\frac{2}{3}, +\infty[$ é propriamente um *repulsor*.

- *de - Sitter*: $(\Omega_{k_0}, \Omega_{\Lambda_0}) = (0, 1)$.

A matriz jacobiana fica

$$J(0, 1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 - 3\gamma & -3\gamma \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

com autovalores

$$\mathcal{M}_1 = -2 \quad \mathcal{M}_2 = -3\gamma. \quad (4.34)$$

É um *atrator*, se no sistema dinâmico o valor da variável $\gamma \in]0, +\infty[$. É um *ponto de sela*, se para o sistema $\gamma \in]-\infty, 0[$.

- *Milne*: $(\Omega_{k_0}, \Omega_{\Lambda_0}) = (1, 0)$.

A matriz jacobiana fica

$$J(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 - 3\gamma & -3\gamma \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (4.35)$$

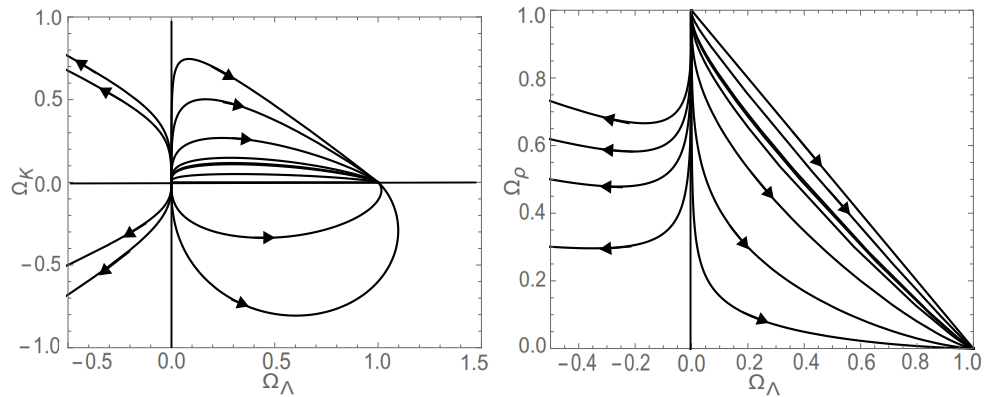
com autovalores

$$\mathcal{P}_1 = 2 - 3\gamma \quad \mathcal{P}_2 = 2. \quad (4.36)$$

É um *ponto de sela*, se no sistema dinâmico o valor de $\gamma \in]\frac{2}{3}, +\infty[$. É um *repulsor*, se no sistema dinâmico o valor de $\gamma \in]-\infty, \frac{2}{3}[$.

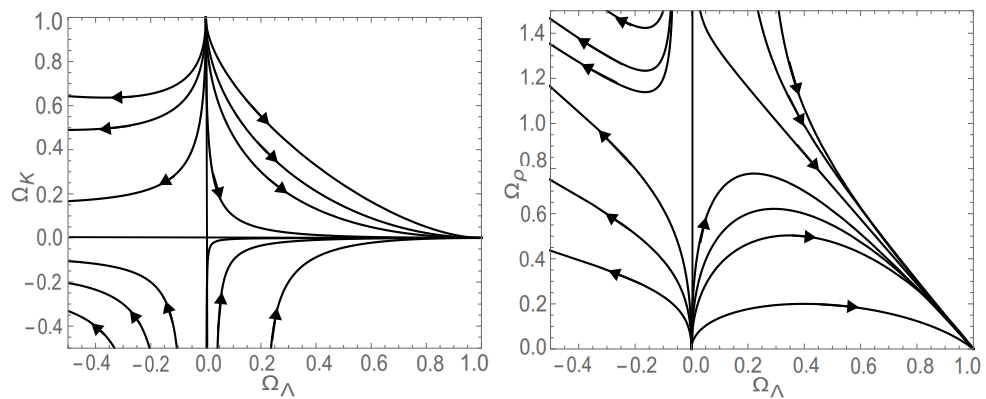
As figuras apresentadas na continuação mostram os diferentes comportamentos dos universos para alguns valores de γ .

Figura 4.7: Espaço de fase para um universo no plano $(\Omega_K, \Omega_\Lambda)$ (à esquerda) e $(\Omega_\rho, \Omega_\Lambda)$ (à direita) com $\gamma = 1$ ($\omega = 0$) [23].



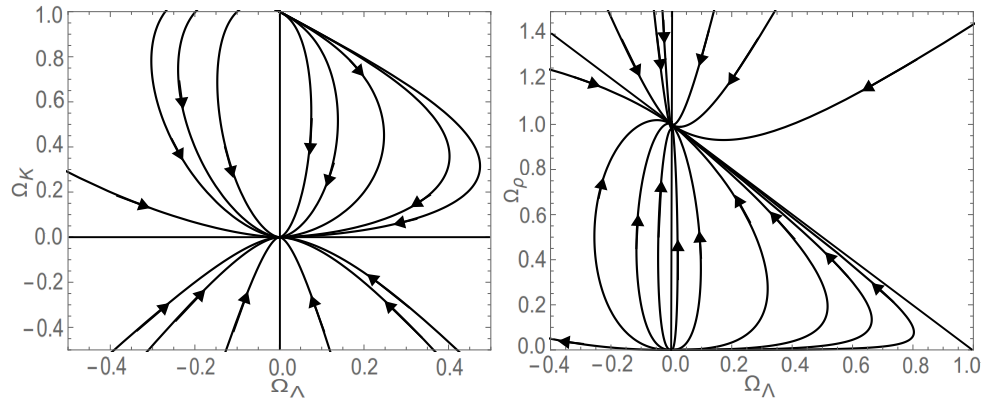
Fonte: Próprio autor.

Figura 4.8: Espaço de fase para um universo no plano $(\Omega_K, \Omega_\Lambda)$ (à esquerda) e $(\Omega_\rho, \Omega_\Lambda)$ (à direita) com $\gamma = \frac{1}{3}$ [23].



Fonte: Próprio autor.

Figura 4.9: Espaço de fase para um universo no plano $(\Omega_K, \Omega_\Lambda)$ (à esquerda) e $(\Omega_\rho, \Omega_\Lambda)$ (à direita) com $\gamma = -1$ [23].



Fonte: Próprio autor.

As observações astronômicas atuais apontam para um universo composto por 70% de energia escura (i.e., constante cosmológica) e 30% de matéria. Neste contexto vemos que $\gamma \geq 0$, o que implica que nosso universo está fadado a uma eterna expansão exponencial.

5 ESTUDO DO SISTEMA DINÂMICOS

Nesta seção vamos discutir o sistema dinâmico dos modelos anisotrópicos descritos pelas equações (3.20) e descobrir como é o comportamento de suas soluções.

5.1 EQUAÇÕES DINÂMICAS DO SISTEMA

Considerando os resultados já expostos na seção 3, temos que as equações de movimento do sistema são

$$H^2 - \dot{\sigma}^2 = \frac{\rho}{3} - \frac{{}^3R}{6}, \quad (5.1)$$

$$\dot{H} + 3H^2 = \frac{\rho - P}{2} - \frac{{}^3R}{3}, \quad (5.2)$$

$$\ddot{\sigma} + 3H\dot{\sigma} = \bar{\pi}^1_1 - \frac{{}^3R}{6}, \quad (5.3)$$

$${}^3\dot{R} = -2(H + \dot{\sigma})^3 R, \quad (5.4)$$

É importante enfatizar que, por enquanto, estamos considerando um único fluido (imperfeito) cuja equação de conservação que atua é da forma

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + P) = -6\dot{\sigma}\bar{\pi}^1_1. \quad (5.5)$$

Em princípio, a dinâmica da quantidade $\bar{\pi}^1_1$ deve resultar de uma teoria física microscópica para o fluido. Porém, não é nosso objetivo neste trabalho construir esta teoria. Ao contrário, adotaremos a solução fenomenológica proposta em [9] onde estresse anisotrópico está relacionado diretamente com o cisalhamento espacial σ . Em outras palavras, adotaremos uma “equação de estado” efetiva para $\bar{\pi}^1_1$ da forma

$$\bar{\pi}^1_1 \equiv \lambda H \dot{\sigma}, \quad (5.6)$$

onde λ é uma constante real. A análise dinâmica tendo em conta a equação (5.6) nos mostrará como é o comportamento do tensor de estresse anisotrópico e do tensor de cisalhamento com a evolução no tempo.

As características do sistema podem ser obtidas definindo-se variáveis auxiliares da seguinte maneira

$$\Sigma \equiv \frac{\dot{\sigma}}{H}, \quad \Omega_\rho \equiv \frac{\rho}{3H^2}, \quad \Omega_k \equiv -\frac{{}^3R}{6H^2}, \quad (5.7)$$

onde Σ é parâmetro de cisalhamento, Ω_ρ é parâmetro de densidade de energia e Ω_k o parâmetro

de curvatura anisotrópica. Reescrevendo a equação (5.1), temos

$$1 = \Sigma^2 + \Omega_\rho + \Omega_k. \quad (5.8)$$

A função de vínculo que associa todos os tipos de densidades que estão ligadas com a composição do universo. Mas sabemos que

$$\begin{aligned} \dot{H} &= (1 - \omega) \frac{\rho}{2} - \frac{{}^3R}{3} - 3H^2, \\ \ddot{\sigma} &= H\dot{\sigma}(\lambda - 3) - \frac{{}^3R}{6}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

onde usamos a equação de estado $P = \omega\rho$. A análise dinâmica para a variável auxiliar Σ é representada assim

$$\dot{\Sigma} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\sigma}}{H} \right) = \frac{1}{H} \ddot{\sigma} - \frac{\dot{\sigma}}{H^2} \dot{H}, \quad (5.10)$$

substituindo as equações de (5.9) na equação (5.10)

$$\dot{\Sigma} = \lambda\dot{\sigma} - \frac{{}^3R}{6H} - (1 - \omega) \frac{\rho\dot{\sigma}}{2H^2} + \frac{{}^3R\dot{\sigma}}{3H^2}. \quad (5.11)$$

Usando a definição da equação (4.14), temos que

$$\Sigma' = \lambda\Sigma - \frac{3}{2}\Sigma\Omega_\rho(1 - \omega) - 2\Sigma\Omega_k + \Omega_k. \quad (5.12)$$

De maneira análoga para Ω_ρ , encontramos

$$\dot{\Omega}_\rho = \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho}{3H^2} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{H^2} \dot{\rho} - \frac{2\rho}{H^3} \dot{H} \right). \quad (5.13)$$

Da equação (5.5), sabemos que

$$\dot{\rho} = -3H [2\lambda\dot{\sigma}^2 + \rho(1 + \omega)], \quad (5.14)$$

desta maneira temos que

$$\dot{\Omega}_\rho = -\frac{2\lambda\dot{\sigma}^2}{H} + \frac{\rho}{H} (1 - \omega) - (1 - \omega) \frac{\rho^2}{3H^3} + \frac{2}{9} \frac{{}^3R\rho}{H^3}. \quad (5.15)$$

Usando a definição da equação (4.14), obtemos:

$$\Omega'_\rho = 3(1 - \omega)\Omega_\rho - 2\lambda\Sigma^2 - 3(1 - \omega)\Omega_\rho^2 - 4\Omega_\rho\Omega_k. \quad (5.16)$$

Finalmente, a variável auxiliar Ω_k é tal que

$$\dot{\Omega}_k = \frac{d}{dt} \left(-\frac{{}^3R}{6H^2} \right) = \left(\frac{{}^3R}{3H^3} \dot{H} - \frac{1}{6H^2} \dot{{}^3R} \right), \quad (5.17)$$

portanto temos que

$$\dot{\Omega}_k = (1 - \omega) \frac{{}^3R\rho}{6H^3} - \frac{{}^3R^2}{9H^3} - \frac{2}{3} \frac{{}^3R}{H} + \frac{{}^3R\dot{\sigma}}{3H^2}. \quad (5.18)$$

Da mesma forma para casos anteriores vemos que o resultado é

$$\Omega'_k = 4\Omega_k - 4\Omega_k^2 - 2\Omega_k\Sigma - 3(1 - \omega)\Omega_\rho\Omega_k. \quad (5.19)$$

A dinâmica do sistema é representada pelo conjunto de equações diferenciais acopladas que estão descrita nas equações (5.12), (5.16) e (5.19). Elas têm toda a informação sobre a geometria espacial e o conteúdo material existente no universo. A seguir iremos encontrar os pontos fixos do sistema e estudar sua estabilidade.

5.2 DETERMINAÇÃO DOS PONTOS FIXOS E ESTABILIDADE

Seja o sistema autônomo exposto nas equações (5.12) e (5.19)

$$\begin{aligned} \Sigma' &= \lambda\Sigma - \frac{3}{2}\Sigma + \frac{3}{2}\Sigma^3 - \frac{1}{2}\Sigma\Omega_k + \Omega_k = f(\Sigma, \Omega_k), \\ \Omega'_k &= \Omega_k - \Omega_k^2 - 2\Sigma\Omega_k + 3\Omega_k\Sigma^2 = g(\Sigma, \Omega_k), \end{aligned} \quad (5.20)$$

onde novamente utilizamos o vínculo $\Omega_\rho = 1 - \Sigma^2 - \Omega_k$ para eliminar uma equação. Também usamos o valor $\omega = 0$, tendo em conta que nossa intenção é estudar o sistema em presença de matéria. Para que exista um ponto fixo (Σ_0, Ω_{k_0}) no sistema este deve verificar:

$$\begin{aligned} f(\Sigma_0, \Omega_{k_0}) &= 0, \\ g(\Sigma_0, \Omega_{k_0}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Portanto os pontos fixos são:

$$P_1 = (0, 0) \quad P_2 = \left(-\frac{\sqrt{3-2\lambda}}{\sqrt{3}}, 0 \right) \quad P_3 = \left(\frac{\sqrt{3-2\lambda}}{\sqrt{3}}, 0 \right),$$

$$P_4 = \left[\frac{1}{8} \left(4 - \sqrt{-8 + \lambda} \sqrt{\lambda} - \lambda \right), \right. \\ \left. \left[\frac{1}{32} \left(24 - 4\sqrt{-8 + \lambda} \sqrt{\lambda} - 16\lambda + 3\sqrt{-8 + \lambda} \lambda^{\frac{3}{2}} + 3\lambda^2 \right) \right] \right],$$

$$P_5 = \left[\frac{1}{8} \left(4 + \sqrt{-8 + \lambda} \sqrt{\lambda} - \lambda \right) \right],$$

$$\left[\frac{1}{32} \left(24 + 4\sqrt{-8 + \lambda} \sqrt{\lambda} - 16\lambda - 3\sqrt{-8 + \lambda} \lambda^{\frac{3}{2}} + 3\lambda^2 \right) \right].$$

Evidentemente, a existência destes pontos depende do parâmetro λ , já que Σ e Ω_k são reais. Determinamos a estabilidade do sistema definidos por estes pontos

$$\begin{aligned} \Sigma' &= \frac{\partial f}{\partial \Sigma} (\Sigma_0, \Omega_{k_0}) (\Sigma - \Sigma_0) + \frac{\partial f}{\partial \Omega_k} (\Sigma_0, \Omega_{k_0}) (\Omega_k - \Omega_{k_0}), \\ \Omega'_k &= \frac{\partial g}{\partial \Sigma} (\Sigma_0, \Omega_{k_0}) (\Sigma - \Sigma_0) + \frac{\partial g}{\partial \Omega_k} (\Sigma_0, \Omega_{k_0}) (\Omega_k - \Omega_{k_0}), \end{aligned} \quad (5.22)$$

portanto das equações expostas em (5.20) e usando as definições de (5.22), temos que

$$\begin{aligned} \Sigma' &= \left(\lambda + \frac{9}{2} (\Sigma_0)^2 - \frac{1}{2} \Omega_{k_0} - \frac{3}{2} \right) (\Sigma - \Sigma_0) + \left(1 - \frac{1}{2} \Sigma_0 \right) (\Omega_k - \Omega_{k_0}), \\ \Omega'_k &= (6\Sigma_0 \Omega_{k_0} - 2\Omega_{k_0}) (\Sigma - \Sigma_0) + (1 - 2\Omega_{k_0} - 2\Sigma_0 + 3(\Sigma_0)^2) (\Omega_k - \Omega_{k_0}), \end{aligned} \quad (5.23)$$

tendo em conta os dados das equações em (5.23), descobrimos que a matriz Jacobiana ou matriz de estabilidade do sistema dinâmico é descrita da seguinte forma

$$J(\Sigma_0, \Omega_{k_0}) = \begin{pmatrix} \lambda + \frac{9}{2} (\Sigma_0)^2 - \frac{1}{2} \Omega_{k_0} - \frac{3}{2} & 1 - \frac{1}{2} \Sigma_0 \\ 6\Sigma_0 \Omega_{k_0} - 2\Omega_{k_0} & 1 - 2\Omega_{k_0} - 2\Sigma_0 + 3(\Sigma_0)^2 \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

Para o sistema dinâmico foram encontrados cinco pontos críticos com suas respectivas estabilidades, estes pontos representam soluções que denotam como é o comportamento dinâmico do modelo cosmológico em função dos parâmetros de curvatura e cisalhamento quando no universo seu conteúdo é dominado pela matéria. A matriz exposta na equação (5.24) fornece informação necessária para a análise dinâmica; levando em conta que com os autovalores conhecemos as classes de pontos fixos que experimenta o sistema. O estudo mais detalhado é apresentado na tabela 5.1.

Tabela 5.1: Pontos fixos e estabilidades do sistema dinâmico em ausência do parâmetro Ω_ρ

<i>Nome</i>	Σ	Ω_k	<i>Existência</i>	<i>Estabilidade</i>
P_1	0	0	$\lambda = 3/2$	<i>Est.</i>
P_2	$-\frac{\sqrt{3-2\lambda}}{\sqrt{3}}$	0	$-\infty \leq \lambda \leq 3/2$	<i>Ins</i>
P_3	$\frac{\sqrt{3-2\lambda}}{\sqrt{3}}$	0	$-\infty \leq \lambda \leq 3/2$	<i>Ins</i>
P_4	$\frac{1}{8} \left(4 - \sqrt{-8 + \lambda} \sqrt{\lambda} - \lambda \right)$	$\frac{1}{32} (24 - 4\sqrt{-8 + \lambda} \sqrt{\lambda} - 16\lambda + 3\sqrt{-8 + \lambda} \lambda^{\frac{3}{2}} + 3\lambda^2)$	$-\infty \leq \lambda \leq 0$ $8 \leq \lambda \leq +\infty$	<i>Est</i> : $-\infty \leq \lambda \leq 0 \quad 8 \leq \lambda \leq +\infty$ <i>Ins</i> : $0 < \lambda < 8$
P_5	$\frac{1}{8} \left(4 + \sqrt{-8 + \lambda} \sqrt{\lambda} - \lambda \right)$	$\frac{1}{32} (24 + 4\sqrt{-8 + \lambda} \sqrt{\lambda} - 16\lambda - 3\sqrt{-8 + \lambda} \lambda^{\frac{3}{2}} + 3\lambda^2)$	$-\infty \leq \lambda \leq 0$ $8 \leq \lambda \leq +\infty$	<i>Est</i> : $-\infty \leq \lambda \leq 0 \quad 8 \leq \lambda \leq +\infty$ <i>Ins</i> : $0 < \lambda < 8$

Fonte: Próprio autor.

O resultado da tabela (5.1) mostra que os únicos pontos fixos estáveis são P_1 , P_4 e P_5 . O ponto P_1 possui $\Sigma = 0 = \Omega_k$, portanto este ponto representa o universo de Einstein-de Sitter que encontramos na seção anterior. Os pontos P_4 e P_5 também são estáveis, porém fisicamente eles só existem para $\lambda \geq 0$, já que estas quantidades devem ser números reais. Curiosamente, o caso $\lambda = 0$ equivale a $(\Sigma^2, \Omega_k, \Omega_\rho) = (1/4, 3/4, 0)$ e mostra que, mesmo na ausência de estresse na equação (5.6) o universo se mantém anisotrópico (i.e., $\Sigma \neq 0$), embora este não seja um modelo realista, pois $\Omega_\rho = 0$. Os pontos P_4 e P_5 também são estáveis se $\lambda \geq 8$. O caso $\lambda \gtrsim 8$ não é aceitável, pois produz $\Omega_k \gtrsim 11/4$, o que viola a condição (5.8). Se $\lambda \gg 8$, temos $P_4 \rightarrow (-\infty, +\infty)$ e $P_5 \rightarrow (0, 1)$. Porém, fisicamente é difícil justificar o caso $\lambda \rightarrow \infty$. Concluimos portanto que o único ponto fisicamente aceitável é P_1 , o que corresponde a um modelo isotrópico. Dado que nosso objetivo é estudar a dinâmica de modelos genuinamente anisotrópicos, concluimos que a condição (5.6) é muito restritiva, e precisa ser revista. Esse é o objetivo da próxima seção.

5.3 UM MODELO COM CURVATURA ANISOTRÓPICA MAS SEM CISALHAMENTO

Uma das razões pela qual o modelo (5.6) falha em descrever uma dinâmica anisotrópica está em nossa restrição de um único fluido. Nesta seção iremos seguir os estudos de [10, 24, 25] e considerar que, além da matéria usual, existe um campo anisotrópico – mais precisamente, uma 2-forma – que participa da expansão do universo. Fisicamente, o campo de 2-forma surge no contexto de teorias de cordas e/ou supergravidade [28]. A ação deste campo é:

$$S_B = \alpha \int J_{\mu\nu\beta} J^{\mu\nu\beta} \sqrt{-g} d^4x, \quad (5.25)$$

onde $J_{\mu\nu\beta} \equiv 3! \partial_{[\mu} B_{\nu\beta]}$ e $B_{\mu\nu}$. Fazendo a variação da equação (5.25) com relação a $g_{\mu\nu}$

$$\delta S_B = \alpha \int \delta (J_{\mu\nu\beta} J^{\mu\nu\beta}) \sqrt{-g} d^4x + \alpha \int J_{\mu\nu\beta} J^{\mu\nu\beta} \delta (\sqrt{-g}) d^4x, \quad (5.26)$$

e usando $\delta g^{\mu\nu} = g^{\mu\beta} g^{\nu\zeta} \delta g_{\beta\zeta}$ e $\delta (-g)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} (-g)^{\frac{1}{2}} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$ [15], temos que

$$\delta S_B = \int \left(-\frac{1}{2} \alpha g_{\nu\eta} J_{\mu\nu\beta} J^{\mu\nu\beta} + 3\alpha J_{\nu\beta} J^{\nu\beta}{}_{\eta} \right) \delta g^{\nu\eta} \sqrt{-g} d^4x, \quad (5.27)$$

então de acordo com o que precede o tensor de energia-momento é dada sob a forma

$$T_{\varepsilon\theta}^B = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_B}{\delta g^{\varepsilon\theta}}, \quad (5.28)$$

portanto

$$T_{\nu\eta}^B = -3\alpha J_{\nu\beta} J^{\nu\beta}{}_{\eta} + \frac{1}{2} \alpha g_{\nu\eta} J_{\mu\nu\beta} J^{\mu\nu\beta}. \quad (5.29)$$

Para encontrar a equação de movimento do campo mostrado em (5.25) devemos variar a ação com relação à $B_{\mu\nu}$

$$\delta S = \alpha \int \sqrt{-g} d^4x (\delta J_{\mu\nu\beta} J^{\mu\nu\beta} + J_{\mu\nu\beta} \delta J^{\mu\nu\beta}), \quad (5.30)$$

onde utilizamos a seguinte relação $J^{\mu\nu\beta} \delta J_{\mu\nu\beta} = J_{\mu\nu\beta} \delta J^{\mu\nu\beta}$, então a expressão fica

$$\begin{aligned} \delta S &= \alpha \int \sqrt{-g} d^4x (2J^{\mu\nu\beta} \partial_{[\mu} \delta B_{\nu\beta]}), \\ &= \alpha \int \sqrt{-g} d^4x [2J^{\mu\nu\beta} (\partial_\mu \delta B_{\nu\beta} - \partial_\mu \delta B_{\beta\nu} + \partial_\beta \delta B_{\mu\nu} - \partial_\beta \delta B_{\nu\mu} + \partial_\nu \delta B_{\beta\mu} - \partial_\nu \delta B_{\mu\beta})]. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Agora usamos o fato de que $J^{\mu\nu\beta}$ é antissimétrico e que todos os índices na integral acima são mudos. Portanto

$$\delta S = \alpha \int \sqrt{-g} d^4x (2J^{\mu\nu\beta} \partial_\mu \delta B_{\nu\beta}). \quad (5.32)$$

Usando o teorema de Gauss para eliminar o termo de superfície e supondo que o campo se anula no infinito, temos que a equação de movimento é

$$\partial_\mu (\sqrt{-g} J^{\mu\nu\beta}) = 0. \quad (5.33)$$

Em quatro dimensões, o tensor antissimétrico $J_{\mu\nu\beta}$ tem quatro componentes não-nulas, ou seja, o mesmo número de componentes de um quadri-vetor; em outras palavras, dizemos que $J_{\mu\nu\beta}$ é dual a um quadri-vetor, e portanto:

$$J_{\mu\nu\beta} \equiv \epsilon_{\mu\nu\beta\zeta} V^\zeta, \quad (5.34)$$

onde $\epsilon_{\mu\nu\beta\zeta}$ é o pseudo-tensor de Levi-Civita em quatro dimensões e V^ζ é um quadri-vetor arbitrário. É conveniente decompor V^ζ como sendo a soma de vetores paralelos e ortogonais a quadri-velocidade U^ζ , assim:

$$V^\zeta \equiv -\phi U^\zeta + V_\perp^\zeta, \quad U_\zeta V_\perp^\zeta = 0, \quad (5.35)$$

onde o campo ϕ é uma função escalar arbitrária. Das equações (5.29) e (3.6) podemos encontrar a densidade de energia do sistema como

$$\rho_B = U^\nu U^\eta T_{\nu\eta}^B = \left(-3\alpha U^\nu J_{\nu\beta} U^\eta J^{\nu\beta}_\eta - \frac{1}{2}\alpha J_{\mu\nu\beta} J^{\mu\nu\beta} \right). \quad (5.36)$$

Note também que $U^\varepsilon J_{\varepsilon\theta\sigma} = U^\varepsilon \epsilon_{\varepsilon\theta\sigma\alpha} V_\perp^\alpha$ pois $U^\varepsilon U^\alpha \epsilon_{\varepsilon\theta\sigma\alpha} = 0$.

Calculamos $J_{\mu\nu\beta}J^{\mu\nu\beta}$ assim

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu\beta}J^{\mu\nu\beta} &= \epsilon_{\mu\nu\beta\zeta}\epsilon^{\mu\nu\beta\gamma}V^\zeta V_\gamma, \\ &= -6\delta_\zeta^\gamma \left[\left(-\phi U^\zeta + V_\perp^\zeta \right) \left(-\phi U_\gamma + V_{\gamma\perp} \right) \right], \\ &= 6 \left(\phi^2 - V_\perp^2 \right), \end{aligned} \quad (5.37)$$

onde usamos o seguinte $\epsilon_{\zeta\nu\beta\mu}\epsilon^{\gamma\nu\beta\mu} = -6\delta_\zeta^\gamma$. Da equação (5.36), usando $U^\varepsilon V_\varepsilon^\perp = 0$

$$\rho_B = -3\alpha \left[U^\nu V_\perp^\xi \epsilon_{\nu\xi\beta} U^\eta V_\perp^\chi \epsilon^{\nu\beta}{}_{\eta\chi} + \left(\phi^2 - V_\perp^2 \right) \right]. \quad (5.38)$$

Usando $\epsilon_{\nu\xi\beta} \epsilon^{\eta\chi\nu\beta} = -2 \left(\delta_\nu^\eta \delta_\xi^\chi - \delta_\xi^\eta \delta_\nu^\chi \right)$, encontramos

$$\rho_B = -3\alpha \left[-2U^\nu U_\eta \delta_\nu^\eta V_\perp^\xi V_{\chi\perp} \delta_\xi^\chi + 2U^\nu U_\eta \delta_\xi^\eta V_\perp^\xi V_{\chi\perp} \delta_\nu^\chi + \left(\phi^2 - V_\perp^2 \right) \right], \quad (5.39)$$

sabemos que $U^\nu U_\nu = -1$, pelo qual densidade de energia do sistema fica

$$\rho_B = -3\alpha \left(\phi^2 + V_\perp^2 \right), \quad (\alpha < 0). \quad (5.40)$$

A pressão do sistema é obtida multiplicando o tensor de projeção com a contração de seus índices da seguinte forma

$$\begin{aligned} P_B &= \frac{1}{3} h^{\eta\eta} T_{\eta\eta}^B, \\ &= \frac{1}{3} \left(g^{\eta\eta} T_{\eta\eta}^B + \rho_B \right), \\ &= \frac{1}{3} \left[-3\alpha \left[J^\eta{}_{\nu\beta} J^{\nu\beta}{}_\eta - 4 \left(\phi^2 - V_\perp^2 \right) \right] + \rho_B \right], \\ &= \frac{1}{3} \left[-6\alpha \left(\phi^2 - V_\perp^2 \right) - 3\alpha \left(\phi^2 + V_\perp^2 \right) \right], \\ &= -\alpha \left(3\phi^2 - V_\perp^2 \right). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Para achar a componente da corrente do tensor energia-momento temos que

$$\begin{aligned} q^\varpi &= U^\nu T^\varpi{}_\nu + U^\varpi \rho_B, \\ &= -3\alpha \left[\phi U^\nu U_\sigma V_\perp^\rho \epsilon^{\varpi\sigma\nu\beta} \epsilon_{\rho\nu\beta} + U^\nu V_\perp^\rho V_{\sigma\perp} \epsilon^{\varpi\sigma\nu\beta} \epsilon_{\rho\nu\beta} - U^\varpi \left(\phi^2 - V_\perp^2 \right) \right] + U^\varpi \rho_B, \end{aligned} \quad (5.42)$$

então

$$q_B^t = 6\alpha\phi V_\perp^t. \quad (5.43)$$

Porém, já vimos na seção 3.2 pela equação (3.5) que $q^i = 0$. Logo, devemos ter $\phi = 0$. Agora vamos a reescrever a equação (5.29) da seguinte forma

$$\begin{aligned} T^\nu_\eta &= -3\alpha [J^\nu_{\nu\beta} J^{\nu\beta}_\eta - \delta^\nu_\eta (\phi^2 - V_\perp^2)], \\ &= 3\alpha V_\perp^2 \delta^\nu_\eta - 3\alpha \phi^2 \delta^\nu_\eta - 6\alpha \phi^2 U_\eta U^\nu - 6\alpha \phi U_\eta V_\perp^\nu - 6\alpha \phi U^\nu V_{\eta\perp} - 6\alpha V_{\eta\perp} V_\perp^\nu. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Finalmente, o estresse anisotrópico fica dada por

$$\begin{aligned} \bar{\pi}^\nu_\eta &= T^\nu_\eta - \rho_B U^\nu U_\eta - P_B (\delta^\nu_\eta + U^\nu U_\eta), \\ &= 2\alpha V_\perp^2 \delta^\nu_\eta + 2\alpha V_\perp^2 U_\eta U^\nu - 6\alpha V_{\eta\perp} V_\perp^\nu, \end{aligned} \quad (5.45)$$

Vamos nos concentrar no caso em que V^ν encontra-se ao longo da direção z , tendo em vista que esta é a direção privilegiada da métrica (3.1). Seja portanto $V(t) = (0, 0, 0, f(t))$, onde $f(t)$ é uma função arbitrária. Além disso, o tensor de estresse anisotrópico tem apenas 1 componente não nulo¹, e portanto deve ser proporcional à função escalar $f(t)$. Nós calculamos as componentes do tensor de estresse anisotrópico a partir da equação (5.45), o que nos dá:

$$\bar{\pi}^1_1 = 2\alpha e^{2\alpha} e^{-4\sigma} f^2(t), \quad \bar{\pi}^2_2 = 2\alpha e^{2\alpha} e^{-4\sigma} f^2(t), \quad \bar{\pi}^3_3 = -4\alpha e^{2\alpha} e^{-4\sigma} f^2(t), \quad (5.46)$$

onde foi utilizado nos cálculos

$$V_\perp^2 = V_{\perp\perp} V_\perp^\perp = g_{33} V_\perp^3 V_\perp^3 = e^{2\alpha} e^{-4\sigma} f^2(t). \quad (5.47)$$

As componentes do tensor energia-momento são dadas por:

$$T^0_0 = -\rho_B, \quad T^1_1 = P_B + 2\alpha e^{2\alpha} e^{-4\sigma} f^2(t), \quad (5.48)$$

$$T^2_2 = P_B + 2\alpha e^{2\alpha} e^{-4\sigma} f^2(t), \quad T^3_3 = P_B - 4\alpha e^{2\alpha} e^{-4\sigma} f^2(t). \quad (5.49)$$

Tendo em conta os resultados das as equações (5.48) e (5.49) nós achamos as equações de

¹Pois $\sum_i \bar{\pi}^i_i = \bar{\pi}^1_1 + \bar{\pi}^2_2 + \bar{\pi}^3_3 = 2\bar{\pi}^1_1 + \bar{\pi}^3_3 = 0$

Einstein

$$\begin{aligned}
H^2 - \dot{\sigma}^2 &= \frac{1}{3}(\rho + \rho_B) - \frac{{}^3R}{6}, \\
\dot{H} + 3H^2 &= \frac{\rho - P}{2} + \frac{\rho_B - P_B}{2} - \frac{{}^3R}{3}, \\
\ddot{\sigma} + 3H\dot{\sigma} &= \bar{\pi}^1_1 - \frac{{}^3R}{6},
\end{aligned} \tag{5.50}$$

onde ρ e P representam a contribuição total para a densidade e a pressão do fluido perfeito com $\omega = cte$. A equação de conservação da energia para o segundo fluido é dada por

$$\dot{\rho}_B + 3H(\rho_B + P_B) = 3\dot{\sigma}\bar{\pi}^3_3. \tag{5.51}$$

A equação de vínculo é

$$\Omega_\rho + \Omega_B + \Omega_k + \Sigma^2 = 1, \tag{5.52}$$

onde definimos

$$\Omega_B \equiv \frac{\rho_B}{3H^2}. \tag{5.53}$$

De acordo com as discussões anteriores o sistema dinâmico é

$$\begin{aligned}
\Omega'_\rho &= 6\Omega_\rho\Sigma^2 + 3(1 + \omega)(\Omega_\rho - 1)\Omega_\rho + 2\Omega_B\Omega_\rho + 2\Omega_\rho\Omega_k, \\
\Omega'_k &= 6\Omega_k\Sigma^2 - 2\Omega_k\Sigma + 3(1 + \omega)\Omega_\rho\Omega_k + 2\Omega_k^2 + 2\Omega_B\Omega_k - 2\Omega_k, \\
\Omega'_B &= 6\Omega_B\Sigma^2 + 4\Omega_B\Sigma + 3(1 + \omega)\Omega_\rho\Omega_B + 2\Omega_B^2 + 2\Omega_B\Omega_k - 2\Omega_B, \\
\Sigma' &= -2\Omega_B + \Omega_k + 3\Sigma(\Sigma^2 - 1) + 3/2(1 + \omega)\Omega_\rho\Sigma + \Omega_B\Sigma + \Omega_k\Sigma,
\end{aligned} \tag{5.54}$$

onde, mais uma vez, podemos eliminar uma destas variáveis utilizando a equação de vínculo.

5.3.1 Pontos de Equilíbrio e Estabilidade

De maneira análoga como na seção 5.2, mas com a diferença de que agora o sistema tem uma variável dinâmica adicional, temos que

$$\begin{aligned}
\Sigma' &= -2\Omega_B + \Omega_k + 3\Sigma^3 - 3\Sigma + \Omega_B\Sigma + \Omega_k\Sigma, \\
\Omega'_k &= 6\Omega_k\Sigma^2 - 2\Omega_k\Sigma + 2\Omega_k^2 + 2\Omega_B\Omega_k - 2\Omega_k, \\
\Omega'_B &= 6\Omega_B\Sigma^2 + 4\Omega_B\Sigma + 2\Omega_B^2 + 2\Omega_B\Omega_k - 2\Omega_B,
\end{aligned} \tag{5.55}$$

onde usamos o vínculo $\Omega_\rho = 1 - \Omega_k - \Omega_B - \Sigma^2$ e tomamos $\omega = -1$, isto é para estudar o sistema dinâmico do modelo em um universo sob a influência da constante cosmológica.

Do estudo seguem sete pontos de equilíbrio, um de eles é $(0, 0, 0)$ este não aporta informação

alguma ao sistema. Encontra-se também que para os pontos P_2 e P_4 a densidade de energia não tem significado físico. Os pontos críticos e estabilidades do sistema estão registrados na seguinte tabela 5.2

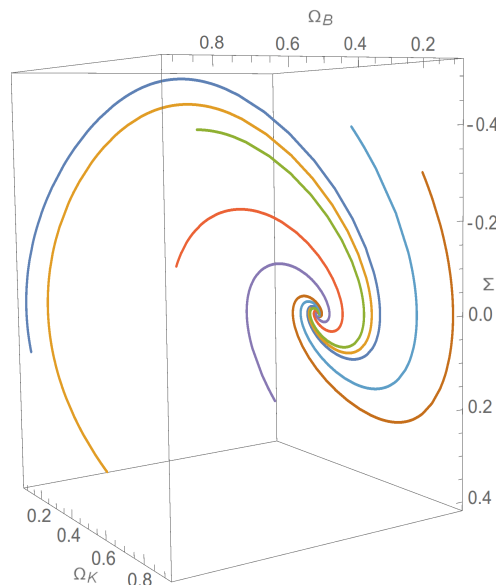
Tabela 5.2: Pontos fixos e estabilidades do sistema dinâmico onde prevalece o parâmetro Ω_B .

Nome	Σ	Ω_k	Ω_B	Estabilidade
P_1	-1	0	0	<i>Ins</i>
P_2	-1	-3	0	<i>Ins</i>
P_3	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	<i>Est</i>
P_4	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{4}$	<i>Est</i>
P_5	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	0	<i>Ins</i>
P_6	1	0	0	<i>Ins</i>

Fonte: Próprio autor.

Da tabela 5.2 encontramos que o sistema tem dois pontos fixos estáveis: P_3 e P_4 . O segundo deles não representa uma situação física, pois Ω_B é por definição uma quantidade positiva. O ponto fixo P_3 é a única solução dinamicamente estável, e representa um universo com curvatura anisotrópica ($\Omega_k = 2/3$) e com expansão isotrópica ($\Sigma \propto \sigma = 0$). Também é importante notar que, sendo $\Omega_k \propto -k > 0$ (veja a eq. (5.7)), logo este ponto fixo só existe no caso em que $k < 0$, ou seja, dentre as duas métricas com curvatura anisotrópica, somente a métrica de Bianchi III admite expansão anisotrópica estável. A figura (5.1) expõe a evolução das soluções para várias condições iniciais distintas, onde fica claro o caráter atrator do ponto P_3 .

Figura 5.1: Espaço de fase do sistema dinâmico (5.54).



Fonte: Próprio autor.

6 CONCLUSÃO E PERSPECTIVA

Nas referências [9, 10] expostas ao começo deste trabalho se faz um destaque da importância dos modelos cosmológicos em ausência do tensor de cisalhamento e como isso tem influência na geometria espacial do universo. Esta motivação é interessante já que quando estudamos modelos sem cisalhamento o comportamento do modelo experimenta uma expansão isotrópica, mas nosso objetivo era estudar a dinâmica de modelos com curvatura anisotrópica.

O primeiro caso foi estudar o sistema dinâmico do modelo quando a equação de estado era da forma apresentada em (5.6). Este resultado mostrou que para o valor ($\lambda = 0$) o sistema permanece anisotropicamente estável. Neste caso, é confirmando que ao evoluir o universo a isotropia permanece. Porém, para efeitos de nossos estudos este caso não funcionou, devido a que buscamos uma ou mais soluções que sejam anisotropicamente estáveis em ausência do cisalhamento.

Uma possível alternativa foi considerar um campo anisotrópico, que permite encontrar soluções que descrevam universos que tenham curvaturas anisotrópicas. Esta escolha funcionou porque encontramos que o sistema experimenta trajetórias que convergem a um ponto específico onde não há cisalhamento, portanto este sistema mostra que esse ponto de equilíbrio é anisotropicamente estável, ou seja, é um atrator. É interessante pois é compatível com as observações atuais. Realizou-se o mesmo estudo também com a introdução de um campo escalar específico para conhecer se ele têm qualquer relevância com os cálculos feitos para o campo anisotrópico, dando como resultado que experimenta as mesmas soluções.

Concluindo desta maneira que o modelo anisotrópico anteriormente estudado é cosmologicamente aceitável porque independente das condições iniciais do sistema eles vão manter-se invariável ao longo do tempo. Para os trabalhos futuros podemos testar este modelo propondo maneiras de se medir Ω_k .

REFERÊNCIAS

- [1] PETER, Patrick; UZAN, Jean-Philippe. **Primordial cosmology**. Oxford University Press, 2013.
- [2] HOGG, David W. et al. Cosmic homogeneity demonstrated with luminous red galaxies. **The Astrophysical Journal**, v. 624, n. 1, p. 54, 2005.
- [3] BERERA, Arjun; BUNIY, Roman V.; KEPHART, Thomas W. The eccentric universe. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2004, n. 10, p. 016, 2004.
- [4] GORDON, Christopher et al. Spontaneous isotropy breaking: a mechanism for CMB multipole alignments. **Physical Review D**, v. 72, n. 10, p. 103002, 2005.
- [5] PEREIRA, Thiago S.; PITROU, Cyril; UZAN, Jean-Philippe. Theory of cosmological perturbations in an anisotropic universe. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2007, n. 09, p. 006, 2007.
- [6] GUMRUKCUOGLU, A. Emir; CONTALDI, Carlo R.; PELOSO, Marco. Inflationary perturbations in anisotropic backgrounds and their imprint on the CMB. **arXiv preprint arXiv:0707.4179**, 2007.
- [7] YOKOYAMA, Shuichiro; SODA, Jiro. Primordial statistical anisotropy generated at the end of inflation. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2008, n. 08, p. 005, 2008.
- [8] WEINBERG, Steven. **Gravitation and cosmology: principles and applications of GR**. 1972.
- [9] MIMOSO, José P.; CRAWFORD, Paulo. Shear-free anisotropic cosmological models. **Classical and Quantum Gravity**, v. 10, n. 2, p. 315, 1993.
- [10] KOIVISTO, Tomi S. et al. Possibility of anisotropic curvature in cosmology. **Physical Review D**, v. 83, n. 2, p. 023509, 2011.
- [11] HERVIK, Sigbjørn; MOTA, David F.; THORSRUD, Mikjel. Inflation with stable anisotropic hair: Is it cosmologically viable?. **Journal of High Energy Physics**, v. 2011, n. 11, p. 1-26, 2011.
- [12] WEINBERG, Steven. **Cosmology**. Oxford Univ. Press, 2008.
- [13] GRØN, Øyvind; HERVIK, Sigbjørn. Non-inertial Reference Frames. **Einstein's General Theory of Relativity: With Modern Applications in Cosmology**, p. 89-108, 2007.

- [14] SCHUTZ, Bernard. **A first course in general relativity**. Cambridge university press, 2009.
- [15] CARROLL, Sean M. An introduction to general relativity. **Spacetime and Geometry**, 2004.
- [16] KOIVISTO, Tomi; MOTA, David F. Vector field models of inflation and dark energy. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2008, n. 08, p. 021, 2008.
- [17] WALD, Robert M. **General relativity**. University of Chicago press, 2010.
- [18] COPELAND, Edmund J.; SAMI, Mohammad; TSUJIKAWA, Shinji. Dynamics of dark energy. **International Journal of Modern Physics D**, v. 15, n. 11, p. 1753-1935, 2006.
- [19] PLANCK COLLABORATION et al. Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters. **arXiv preprint arXiv:1502.01589**, 2015.
- [20] ELLIS, George FR; MAARTENS, Roy; MACCALLUM, Malcolm AH. **Relativistic cosmology**. Cambridge University Press, 2012.
- [21] FIEDLER-FERRARA, Nelson; PRADO, Carmen P. Cintra do. **Caos. Uma introdução**, 1994.
- [22] STEVEN, H. Strogatz. **Nonlinear dynamics and chaos with applications to physics, biology, chemistry and engineering**. 1994.
- [23] UZAN, Jean-Philippe; LEHOUCQ, Roland. A dynamical study of the Friedmann equations. **European Journal of Physics**, v. 22, n. 4, p. 371, 2001.
- [24] MCMANUS, Des J.; COLEY, Alan A. Shear-free, irrotational, geodesic, anisotropic fluid cosmologies. **Classical and Quantum Gravity**, v. 11, n. 8, p. 2045, 1994.
- [25] BARROW, John D.; DABROWSKI, Mariusz P. Kantowski-Sachs string cosmologies. **Physical Review D**, v. 55, n. 2, p. 630, 1997.
- [26] MOOPANAR, S.; MAHARAJ, S. D. Relativistic shear-free fluids with symmetry. **Journal of Engineering Mathematics**, v. 82, n. 1, p. 125-131, 2013.
- [27] FADRAGAS, Carlos R.; LEON, Genly; SARIDAKIS, Emmanuel N. Dynamical analysis of anisotropic scalar-field cosmologies for a wide range of potentials. **Classical and Quantum Gravity**, v. 31, n. 7, p. 075018, 2014.
- [28] MARTIN, Jérôme; YOKOYAMA, Junichi. Generation of large scale magnetic fields in single-field inflation. **Journal of Cosmology and Astroparticle Physics**, v. 2008, n. 01, p. 025, 2008.

APÊNDICES

APÊNDICE A - Revisão da Relatividade Geral.

Em um universo de Friedmann-Robertson-Walker temos que os componentes métricos são dados da seguinte maneira

$$g_{00} = -1, \quad g_{11} = \frac{a^2}{1 - kr^2}, \quad g_{22} = (ar)^2, \quad g_{33} = (ar)^2 \sin^2 \theta. \quad (\text{A.1})$$

Os componentes métricos obedecem à seguinte simetria $g^{\lambda\sigma} g_{\sigma\mu} = \delta_{\mu}^{\lambda}$. Agora para encontrar as conexões temos que começar pelos símbolos de Christoffel, os quais são obtido pela seguinte relação:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_{\mu} g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}). \quad (\text{A.2})$$

Usando a seguinte definição $\dot{a} = da/dt$, e os componentes métricos já anteriormente mencionados, encontramos que

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= \frac{a\dot{a}}{1 - kr^2}, \\ \Gamma_{22}^0 &= a\dot{a}r^2, \\ \Gamma_{33}^0 &= a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{03}^3 = \frac{\dot{a}}{a}, \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{kr}{1 - kr^2}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -r(1 - kr^2), \\ \Gamma_{33}^1 &= -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta, \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{32}^3 &= \cot \theta. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

As componentes tensor de Riemann são definidas pela equação

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_{\mu} \Gamma_{\nu\sigma}^{\rho} - \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\sigma}^{\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\nu\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^{\rho} \Gamma_{\mu\sigma}^{\lambda}, \quad (\text{A.4})$$

enquanto as outras componentes podem ser encontradas com as propriedades deste tensor como

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}, \quad (\text{A.5})$$

$$R_{\rho[\sigma\mu\nu]} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Temos que

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda} R^{\lambda}{}_{\sigma\mu\nu}, \quad (\text{A.7})$$

e a contração do tensor de Riemann nos fornece o tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}. \quad (\text{A.8})$$

Finalmente, o traço do tensor de Ricci, chamado de escalar de curvatura, é dado por

$$R = R^{\mu}{}_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (\text{A.9})$$

O tensor momento-energia de um fluido perfeito com densidade de energia ρ e pressão P é

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P) U_{\mu} U_{\nu} + P g_{\mu\nu}, \quad (\text{A.10})$$

e as componentes da quadrivelocidade são

$$U_{\mu} = -a\delta_{\mu}^0, \quad U^{\mu} = a^{-1}\delta_0^{\mu}. \quad (\text{A.11})$$

Tendo em conta que para um observável comóvel com o quadrivetor de velocidade o marco referencial é

$$U^{\mu} = (-1, 0, 0, 0), \quad (\text{A.12})$$

estas as componentes temporais T_{tt} e espaciais T_{rr} , são dadas pela forma

$$T_{00} = \rho, \quad T_{i0} = 0, \quad T_{ij} = a^2 P g_{ij}, \quad (\text{A.13})$$

APÊNDICE B - Modelos Cosmológicos Anisotrópicos.

Para o modelo apresentado na equação (3.1) nós encontramos que os componentes métricos são definidos da seguinte forma

$$g_{00} = -1, \quad g_{11} = e^{2\alpha} e^{2\sigma}, \quad g_{22} = \frac{1}{k} \sin^2(\sqrt{k}\rho) e^{2\alpha} e^{2\sigma}, \quad g_{33} = e^{2\alpha} e^{-4\sigma}. \quad (\text{B.1})$$

Aplicando a equação (A.2) temos que os conetores são

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= e^{2\alpha} e^{2\sigma} (\dot{\alpha} + \dot{\sigma}), \\ \Gamma_{22}^0 &= e^{2\alpha} e^{2\sigma} (\dot{\alpha} + \dot{\sigma}) \frac{1}{k} \sin^2(\sqrt{k}\rho), \\ \Gamma_{33}^0 &= e^{2\alpha} e^{-4\sigma} (\dot{\alpha} - 2\dot{\sigma}), \\ \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{02}^2 = \dot{\alpha} + \dot{\sigma}, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{1}{\sqrt{k}} \sin(\sqrt{k}\rho) \cos(\sqrt{k}\rho), \\ \Gamma_{21}^2 &= \sqrt{k} \cot(\sqrt{k}\rho), \\ \Gamma_{30}^3 &= \dot{\alpha} - 2\dot{\sigma}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

As variáveis da equação de conservação (2.11), para $\nu = C$, são dadas por

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} T^{\mu C(1)} &= \partial_{\mu} T^{\mu C(1)} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} T^{\lambda C(1)} + \Gamma_{\lambda\mu}^C T^{\mu\lambda(1)}, \\ &= \partial_A T^{AC(1)} + \Gamma_{AB}^A T^{BC(1)} + \Gamma_{BA}^C T^{AB(1)}, \\ &= (\partial_A \gamma^{AC} + \Gamma_{AB}^A \gamma^{BC} + \Gamma_{BA}^C \gamma^{AB}) P e^{-2\alpha} e^{-2\sigma}, \\ &= \nabla_A \gamma^{AC}, \\ &= \partial_A \gamma^{AC} + \Gamma_{AB}^A \gamma^{BC} + \Gamma_{BA}^C \gamma^{AB}, \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Para $\nu = 3$,

$$\nabla_{\mu} T^{\mu 3(1)} = \partial_{\mu} T^{\mu 3(1)} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} T^{\lambda 3(1)} + \Gamma_{\lambda\mu}^3 T^{\mu\lambda(1)} = 0, \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu}T^{\mu 3^{(1)}} &= \Gamma_{0\lambda}^0 T^{\lambda 3^{(1)}} + \Gamma_{C\lambda}^C T^{\lambda 3^{(1)}} + \Gamma_{3\lambda}^3 T^{\lambda 3^{(1)}} + \Gamma_{\lambda 0}^3 T^{0\lambda^{(1)}} + \Gamma_{\lambda C}^3 T^{C\lambda^{(1)}} + \Gamma_{\lambda 3}^3 T^{3\lambda^{(1)}}, \\ &= 0.\end{aligned}$$

Analogamente, para $\nu = C$, temos que

$$\nabla_{\mu}T^{\mu C^{(2)}} = \partial_{\mu}T^{\mu C^{(2)}} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} T^{\lambda C^{(2)}} + \Gamma_{\lambda\mu}^C T^{\mu\lambda^{(2)}} = 0, \quad (\text{B.5})$$

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu}T^{\mu C^{(2)}} &= (\partial_A \gamma^{AC} + \Gamma_{AB}^A \gamma^{BC} + \Gamma_{BA}^C \gamma^{AB}) P e^{-2\alpha} e^{-2\sigma} + \partial_A \bar{\pi}^{AC} + \Gamma_{AB}^A \bar{\pi}^{BC} + \Gamma_{BA}^C \bar{\pi}^{AB}, \\ &= 0,\end{aligned}$$

mas, temos que

$$\partial_A \gamma^{AC} + \Gamma_{AB}^A \gamma^{BC} + \Gamma_{BA}^C \gamma^{AB} = 0,$$

então,

$$\nabla_A \bar{\pi}^{AC} = \partial_A \bar{\pi}^{AC} + \Gamma_{AB}^A \bar{\pi}^{BC} + \Gamma_{BA}^C \bar{\pi}^{AB} = 0,$$

portanto,

$$\nabla_{\mu}T^{\mu C^{(2)}} = 0. \quad (\text{B.6})$$

Para $\nu = 3$, é o mesmo resultado de (B.4).