



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

LEONARDO APARECIDO CAMARGO COSTA

**CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS INTEIROS E O USO DE JOGOS
COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO**

LONDRINA

2026

LEONARDO APARECIDO CAMARGO COSTA

CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS INTEIROS E O USO DE JOGOS COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Túlio Oliveira de Carvalho

Coorientador: Prof. Me. Andrielber da Silva Oliveira

Londrina
2026

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Costa, Leonardo Aparecido Camargo.

CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS INTEIROS E O USO DE JOGOS COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO / Leonardo Aparecido Camargo Costa. - Londrina, 2026.

175 f. : il.

Orientador: Túlio Oliveira de Carvalho.

Coorientador: Andrielber da Silva Oliveira.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2026.

Inclui bibliografia.

1. Números Inteiros - Tese. 2. Educação - Tese. 3. Ensino - Tese. 4. Jogos - Tese. I. Carvalho, Túlio Oliveira de. II. Oliveira, Andrielber da Silva. III. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. IV. Título.

CDU 51

LEONARDO APARECIDO CAMARGO COSTA

CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS INTEIROS E O USO DE JOGOS COMO ESTRATÉGIA DE ENSINO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Orientador: Prof. Dr. Túlio Oliveira de
Carvalho
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. Altair Santos de Oliveira Tosti
Universidade Estadual do Norte do Paraná -
UENP

Prof^ª. Dr^ª. Ana Márcia Fernandes Tucci de
Carvalho
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 25 de fevereiro de 2026.

*Dedico este trabalho a Deus, à minha esposa,
à minha família, aos meus professores, aos
meus alunos, aos meus amigos e a todos que
participaram dessa linda jornada.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ser a voz que sempre me guiou. Em todos os momentos, principalmente nos mais difíceis, Ele sempre esteve lá. Jesus Cristo é o caminho, a verdade e a vida.

Agradeço à minha esposa, Silvia Bevilacqua Costa, por ter segurado as pontas dentro de casa para que eu pudesse estudar e concluir este trabalho. Também agradeço por ter me ajudado e passado madrugadas confeccionando os materiais dos jogos.

Agradeço aos meus pais, Abidia e Neide, e à minha irmã Kátia, pois foram o núcleo familiar inicial da minha trajetória. Serei grato eternamente pelo que fizeram por mim. Obrigado por sempre terem acreditado em mim.

Agradeço ao meu cunhado Edmilson e aos meus sobrinhos Thais Isadora e Vitor Emanuel, por terem me escutado falando o tempo todo sobre esse trabalho.

Agradeço ao meu sogro Wilson e à minha sogra Zulene, que hoje está junto ao Pai, por terem presenciado esse processo de escrita.

Agradeço aos meus cunhados, Vinicius e Wilson, e à minha cunhada Tatiane, por terem acompanhado o meu entusiasmo durante esse trabalho, e ao meu sobrinho Kauã, que testou comigo um dos jogos deste trabalho.

Agradeço aos meus ex-colegas de trabalho, Epaminondas e Paulo, por me incentivarem a participar do PROFMAT. Sem vocês, eu não teria conhecido o programa.

Agradeço aos meus dois colegas, Fábio e Ricardo, que começaram o curso junto comigo. Nossas discussões foram muito importantes para o meu desenvolvimento crítico.

Agradeço a todos os meus professores do PROFMAT, que contribuíram com a minha evolução acadêmica. Foram anos desafiadores, porém de muito aprendizado.

Agradeço a todos os professores que passaram no decorrer da minha vida acadêmica e a todos os meus alunos. Saibam que vocês são muito importantes para aquilo em que me tornei.

Agradeço aos meus amigos e colegas professores, em especial ao Professor Everton e ao Professor André, que puderam ver de perto essa jornada sendo trilhada.

Agradeço à Universidade Estadual de Londrina e a todos os seus funcionários, pela oferta de uma Educação de qualidade, professores excelentes e uma estrutura impecável.

Agradeço ao programa PROFMAT, que capacita ano após ano milhares de professores, fazendo com que a nossa Educação se torne cada vez melhor e, principalmente, uma porta para mudar o mundo.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Túlio Oliveira de Carvalho, por ter aceitado esta empreitada e me ajudado em tudo de que precisei.

Agradeço ao meu coorientador, Prof. Me. Andrielber da Silva Oliveira, que está comigo desde quando esse trabalho era apenas uma ideia. Obrigado pelas conversas e pelo auxílio no decorrer do trabalho.

Agradeço ao Prof. Dr. Altair Santos de Oliveira Tosti e à Profa. Dra. Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho, por terem aceitado o convite para compor a minha banca de defesa.

“A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo.”

– Galileu Galilei

RESUMO

COSTA, Leonardo Aparecido Camargo. **Construção dos Números Inteiros e o Uso de Jogos como Estratégia de Ensino**. 2026. 175 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2026.

Este trabalho apresenta uma abordagem integrada entre a fundamentação teórica rigorosa do Conjunto dos Números Naturais e do Conjunto dos Números Inteiros e a prática pedagógica no Ensino Fundamental II. O estudo percorre inicialmente a construção axiomática dos números naturais ($\mathbb{N}$), fundamentada nos Axiomas de Peano, estabelecendo as operações de adição e multiplicação. Também é apresentada a construção do conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$) utilizando classes de equivalência de pares ordenados de números naturais. Complementando a estrutura teórica, o trabalho propõe um Produto Educacional composto por sequências didáticas gamificadas. Através dos jogos "Corrida ao Zero", "Gestão de Saldo" e "Combinação 100", busca-se mitigar as barreiras cognitivas nas questões relacionadas à subtração, e à existência do zero, além de guiar os primeiros passos na transição do pensamento aritmético para o algébrico. A metodologia associa a ludicidade à Educação Financeira, permitindo que o estudante vivencie conceitos de saldo, dívida, módulo e regras de sinais em contextos práticos e significativos, em conformidade com as competências da BNCC (Base Nacional Comum Curricular). O resultado é uma proposta que une o rigor da matemática à investigação ativa, transformando a abstração em uma ferramenta de leitura crítica do mundo.

Palavras-chave: Números Inteiros; Axiomas de Peano; Gamificação; Educação Financeira; Prática Docente.

ABSTRACT

COSTA, Leonardo Aparecido Camargo. **Construction of Integers and the Use of Games as a Teaching Strategy**. 2026. 175 f. Dissertation (Professional National Masters in Mathematics) – Londrina State University, Londrina, 2026.

This monograph presents an integrated approach between the rigorous theoretical foundation of the set of natural numbers and the set of integers with pedagogical practice in Lower Secondary Education. The study initially addresses the axiomatic construction of the natural numbers ($\mathbb{N}$), based on the Peano Axioms, establishing the operations of addition and multiplication. The axiomatic construction of the set of integers ($\mathbb{Z}$) is also presented, making use of equivalence classes of ordered pairs of natural numbers. Complementing the theoretical framework, the paper proposes an Educational Product consisting of gamified instructional sequences. Through the games “Race to Zero”, “Balance Management”, and “Combination 100”, the proposal seeks to mitigate cognitive barriers related to subtraction and the concept of zero, as well as to guide the initial steps in the transition from arithmetic to algebraic thinking. The methodology integrates playfulness with Financial Education, enabling students to experience concepts such as balance, debt, absolute value, and sign rules in practical and meaningful contexts, in accordance with the competencies established by the Brazilian BNCC (National Common Curricular Base). The result is a proposal that unites mathematical rigor with inquiry-based learning (IBL) transforming abstraction into a tool for critical interpretation of the world.

Keywords: Integers; Peano Axioms; Gamification; Financial Education; Teaching Practice.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Caso 1.	56
Figura 2 – Caso 2.	56
Figura 3 – Caso 3: Parte 1.	61
Figura 4 – Caso 3: Parte 2.	61
Figura 5 – Caso 4: Parte 1.	66
Figura 6 – Caso 4: Parte 2.	66
Figura 7 – Caso 5: Parte 1.	70
Figura 8 – Caso 5: Parte 2.	71
Figura 9 – Caso 6.	79
Figura 10 – Caso 7.	80
Figura 11 – Caso 8: Parte 1.	84
Figura 12 – Caso 8: Parte 2.	84
Figura 13 – Caso 9.	89
Figura 14 – Caso 10.	90
Figura 15 – Caso 11.	93
Figura 16 – Caso 12.	94
Figura 17 – Caso 13: Parte 1.	102
Figura 18 – Caso 13: Parte 2.	103
Figura 19 – Caso 14: Parte 1.	107
Figura 20 – Caso 14: Parte 2.	107
Figura 21 – Caso 15.	111
Figura 22 – Caso 16.	111
Figura 23 – Caso 17: Parte 1.	115
Figura 24 – Caso 17: Parte 2.	116
Figura 25 – Tabuleiro.	125
Figura 26 – Dados e Pinos.	126
Figura 27 – Cartas de Salário e de Água.	133
Figura 28 – Cartas de Água e de Luz.	134
Figura 29 – Cartas de Luz e Alimentação.	135
Figura 30 – Cartas de Alimentação, Lazer e Internet.	136
Figura 31 – Cartas de Internet e Gás.	137
Figura 32 – Cartas de Gás e Cartão de Crédito.	138
Figura 33 – Cartas de Cartão de Crédito, Dívida e Receita	139
Figura 34 – Tabela de Pontos (Gestão de Saldo).	140
Figura 35 – Cartas 0 Cinzas e 1 e 2 Azuis.	147
Figura 36 – Cartas 2, 3, 4, 5 e 6 Azuis.	148

Figura 37 – Cartas 7, 8, 9 e 10 Azuis.	149
Figura 38 – Cartas 10 Azuis e 1, 2, 3 e 4 Vermelhas.	150
Figura 39 – Cartas 5, 6, 7, 8 e 9 Vermelhas.	151
Figura 40 – Cartas 9 e 10 Vermelhas.	152

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES	x
1 INTRODUÇÃO	14
2 CONSTRUÇÃO AXIOMÁTICA DOS NÚMEROS NATURAIS	17
2.1 OS AXIOMAS DE PEANO	18
2.2 ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO	20
2.3 RELAÇÃO DE ORDEM	25
3 CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS INTEIROS A PARTIR DOS NÚMEROS NATURAIS	30
3.1 MOTIVAÇÃO HISTÓRICA E EPISTEMOLÓGICA	30
3.1.1 A Crise da Subtração e o Conceito de Dívida	30
3.1.2 O Legado de Brahmagupta: Fortunas e Dívidas	31
3.1.3 A Resistência Europeia e a Necessidade de Formalismo	32
3.2 FORMALIZAÇÃO	32
3.3 A FUNÇÃO IMERSÃO E A NOTAÇÃO SIMBÓLICA	43
3.3.1 Definição Formal e Teoremas	43
3.3.2 Definição dos Símbolos para os Inteiros	45
3.4 FUNÇÕES SUCESSOR E ANTECESSOR	45
3.4.1 A Função Sucessor	46
3.4.2 A Função Antecessor	46
4 Produto Educacional	47
4.1 ADIÇÃO ENTRE NÚMEROS POSITIVOS E NEGATIVOS	48
4.1.1 Atividade 1 - Corrida ao Zero	50
4.1.2 Atividade 2 - Exercícios de Fixação	58
4.1.3 Atividade 3 - Exercícios Contextualizados	63
4.1.4 Teste 1	68
4.2 ADIÇÃO ENTRE NÚMEROS NEGATIVOS	72
4.2.1 Atividade 4 - Gestão de Saldo	74
4.2.2 Atividade 5 - Exercícios de Fixação	81
4.2.3 Atividade 6 - Exercícios Contextualizados	86
4.2.4 Teste 2	91
4.3 MULTIPLICAÇÃO ENTRE NÚMEROS POSITIVOS E NEGATIVOS	95
4.3.1 Atividade 7 - Combinação 100	97
4.3.2 Atividade 8 - Exercícios de Fixação	104
4.3.3 Atividade 9 - Exercícios Contextualizados	108
4.3.4 Teste 3	113

CONCLUSÃO 117

REFERÊNCIAS 119

APÊNDICE A 121

APÊNDICE B 124

APÊNDICE C 159

1 INTRODUÇÃO

A Matemática, em sua essência, é uma linguagem que evoluiu da necessidade humana de compreender e quantificar o mundo. Desde a antiguidade, a contagem de objetos concretos moldou a intuição sobre os números naturais, estabelecendo uma zona de conforto cognitivo baseada na experiência tangível. Segundo D'Ambrosio (2001), a Matemática é uma estratégia desenvolvida pela espécie humana para explicar, entender e lidar com o ambiente natural, social e cultural no qual ela está inserida. No entanto, a história da ciência revela que a transição do pensamento puramente aritmético para o pensamento algébrico — exigida pela introdução dos números inteiros e, conseqüentemente, dos números negativos — não foi um processo trivial. Pelo contrário, representou uma ruptura epistemológica que levou séculos para ser plenamente aceita, desafiando intelectos de diversas eras a conceber a existência de quantidades "menores que o nada". Essa resistência histórica é detalhada por Boyer e Merzbach (2012), que descreve como grandes matemáticos do passado evitavam o uso de raízes negativas em suas equações, tratando-as como resultados absurdos ou inexistentes.

É neste contexto histórico e cognitivo que se insere a problemática central desta dissertação. No ambiente escolar contemporâneo, observa-se que a introdução do conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$) no Ensino Fundamental II constitui um dos maiores obstáculos pedagógicos para os estudantes. Como observa Glaeser (1981), a aprendizagem dos números negativos envolve a superação de barreiras conceituais que mimetizam, em certa medida, as dificuldades enfrentadas pelos próprios matemáticos ao longo da história, exigindo uma mudança profunda no modo de conceber o número. A dificuldade não reside apenas na mecânica ou operacionalização, mas na abstração necessária para compreender conceitos como o "saldo negativo" ou a regra de sinais, que frequentemente são ensinados de maneira despersonalizada e mnemônica. Para muitos alunos, a matemática torna-se um conjunto de regras arbitrárias, desconectadas da realidade, gerando uma resistência que bloqueia o desenvolvimento do raciocínio lógico necessário para etapas futuras da aprendizagem.

A justificativa para este trabalho nasce, portanto, da urgência em ressignificar o ensino dos números inteiros. Entende-se que, para superar a "crise da subtração" e a aversão aos números negativos, é necessário construir uma ponte sólida entre o rigor matemático e a prática pedagógica significativa. Não basta apresentar algoritmos; é preciso oferecer experiências que permitam ao estudante visualizar, manipular e, finalmente, abstrair esses conceitos. O alinhamento com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (2018), especialmente no que tange ao desenvolvimento do pensamento crítico e à Educação Financeira, reforça a relevância de propostas que integrem a teoria Matemática formal a situações de tomada de decisão e análise de riscos.

Diante desse cenário, o presente trabalho tem como objetivo: fundamen-

tar teoricamente a construção dos conjuntos numéricos e desenvolver um Produto Educacional baseado na gamificação para o ensino de números inteiros. Busca-se, primeiramente, revisitar a construção axiomática dos números naturais ($\mathbb{N}$) e a formalização dos inteiros ($\mathbb{Z}$) por meio de classes de equivalência, garantindo que a transposição didática esteja alicerçada em bases matemáticas robustas. Em um segundo momento, objetiva-se aplicar esses conceitos organizando sequências didáticas gamificadas, transformando a sala de aula em um laboratório de investigação. onde o erro é parte estratégica do aprendizado.

A metodologia adotada percorre um caminho que vai da teoria à prática. Inicialmente, realiza-se uma revisão bibliográfica e uma reconstrução formal dos sistemas numéricos, apoiada em autores como Lima (2014), Morgado e Carvalho (2023) e na evolução histórica descrita por Boyer e Merzbach (2012). Essa base teórica sustenta a criação do Produto Educacional, que se materializa em três jogos originais: "Corrida ao Zero", "Gestão de Saldo" e "Combinação 100". Cabe ressaltar que o modelo de linguagem Gemini (2026) foi utilizado como ferramenta de suporte para a geração das imagens das cartas que compõem os jogos 'Gestão de Saldo' e 'Combinação 100', enquanto a plataforma Canva (2026) foi utilizada para a confecção, design e diagramação do tabuleiro, dos dados e dos pinos do jogo 'Corrida ao Zero'. A abordagem metodológica propõe que o lúdico não seja apenas um passatempo, mas uma ferramenta estruturada para a modelagem matemática, permitindo que os alunos transitem da manipulação concreta para a formalização algébrica.

Para organizar esta investigação, a dissertação está estruturada da seguinte forma na sua apresentação:

O Capítulo 1 dedica-se à construção axiomática dos números naturais. Partindo dos Axiomas de Peano, estabelece-se o rigor necessário para definir as operações de adição e multiplicação, bem como a relação de ordem em $\mathbb{N}$. Discute-se também a natureza do zero e a escolha, para fins deste trabalho, de iniciar o conjunto dos naturais a partir do um, em consonância com a perspectiva histórica da contagem.

O Capítulo 2 aborda a construção dos números inteiros a partir dos naturais. Este capítulo explora a motivação histórica — desde a matemática indiana de Brahmagupta até a formalização ocidental — e define $\mathbb{Z}$ como o conjunto quociente de pares ordenados de naturais. São apresentadas as definições formais das operações, a prova da regra de sinais e a função de imersão que legitima $\mathbb{N}$ como subconjunto de $\mathbb{Z}$.

Por fim, o Capítulo 3 apresenta o Produto Educacional desenvolvido. Este capítulo detalha as sequências didáticas e os jogos criados para mitigar as dificuldades de aprendizagem diagnosticadas. São descritos os jogos "Corrida ao Zero" (focado na reta numérica e adição), "Gestão de Saldo" (focado na educação financeira e soma de negativos) e "Combinação 100" (focado na multiplicação e regras de sinais), de-

monstrando como a abstração matemática pode ser alcançada através de atividades contextualizadas e engajadoras.

2 CONSTRUÇÃO AXIOMÁTICA DOS NÚMEROS NATURAIS

Desde a antiguidade, a habilidade de contar esteve entre as primeiras capacidades cognitivas desenvolvidas pelos seres humanos. Marcas entalhadas em ossos, como o osso de Lebombo (datado de cerca de 35 mil a.C.), evidenciam que povos pré-históricos já registravam quantidades de forma rudimentar. A partir deste achado, Boyer e Merzbach (2012) argumenta que os números naturais emergem da experiência concreta de contar, comparar e organizar coleções de objetos, tendo sido associados por milênios à noção de quantidade discreta.

Neste contexto, o número zero não aparece como um conceito natural. Sua origem como símbolo é anterior à sua aceitação como número. Na matemática babilônica, o zero aparece como marcador de ausência, mas é na tradição indiana, entre os séculos VII e IX, que se encontra sua formalização como número, com propriedades próprias, disseminadas posteriormente pelos matemáticos árabes e, só mais tarde, assimiladas pela matemática ocidental. Meneghetti (2004) explica que essa transição foi fundamental para a consolidação da aritmética moderna e para o desenvolvimento de sistemas de numeração eficientes.

Na tradição escolar contemporânea, especialmente no ensino fundamental, é comum definir o conjunto dos números naturais como $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$, incluindo o zero. No entanto, essa definição não é universal e depende do contexto. O matemático italiano Giuseppe Peano (1858 - 1932), ao propor uma formalização axiomática dos números naturais no final do século XIX, não incluiu o zero entre os elementos de $\mathbb{N}$, em que $\mathbb{N}$ denota o conjunto cujos elementos são chamados números naturais.

O matemático brasileiro Elon Lages Lima (1929 - 2017), ao discutir o assunto, aponta:

“Zero é um número natural? Sim e não. Incluir ou não o número 0 no conjunto dos números naturais é uma questão de preferência pessoal ou, mais objetivamente, de conveniência.” (Lima, 2007)

O autor justifica essa ambiguidade com base na finalidade do conjunto $\mathbb{N}$. Segundo ele, em *álgebra*, incluir o zero pode ser conveniente, pois fornece um elemento neutro para a adição. Por outro lado, se o objetivo for descrever o conjunto dos números racionais, pode-se caracterizá-los como um par ordenado de números, sendo o primeiro um inteiro e o segundo um número natural. Esta descrição necessitaria de excluir o denominador zero, caso este número estivesse no conjunto $\mathbb{N}$.

Em (Lima, 1987), ao tratar do princípio de indução finita, o autor adota explicitamente o 1 como o primeiro número natural:

”Os números naturais são 1, 2, 3, 4, 5, ... A totalidade desses números constitui um conjunto, que indicaremos com o símbolo $\mathbb{N}$. [...] Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Este número é representado pelo símbolo 1 e chamado de número um.” (Lima, 1987)

Nesta dissertação, adotaremos a definição opcional do conjunto de números naturais como $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, em consonância com a concepção histórica, com a prática de contagem e com o entendimento defendido por Lima (1987), e também por Morgado e Carvalho (2023). Esta escolha se justifica não apenas por coerência com a origem conceitual dos números, mas também pela elegância teórica e clareza no desenvolvimento axiomático a ser apresentado.

A seguir, será desenvolvida a construção axiomática de $\mathbb{N}$, com base nas versões encontradas em Lima (1987) e Morgado e Carvalho (2023). Serão definidas as operações fundamentais de adição e multiplicação, estabelecidas suas propriedades e introduzida uma relação de ordem em $\mathbb{N}$.

2.1 OS AXIOMAS DE PEANO

Lentamente, à medida em que se civilizava, a humanidade apoderou-se desse modelo abstrato de contagem (um, dois, três, quatro, ...) que são os números naturais. Decorridos muitos milênios, podemos hoje descrever concisa e precisamente o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, valendo-nos da notável síntese feita pelo matemático italiano Giuseppe Peano no limiar do século XX. Esta formalização, que ecoa os trabalhos de Dedekind (1888 *apud* ROQUE, 2012), estabelece que os números naturais podem ser construídos puramente a partir da lógica e da noção de sucessão, independente de modelos físicos. Os chamados Axiomas de Peano foram propostos com o objetivo de estabelecer uma base lógica e axiomática rigorosa para o conjunto dos números naturais. A essência da caracterização de $\mathbb{N}$ reside na noção de *sucessor* de um número natural, intuitivamente, o que vem logo depois dele na lista dos números naturais. Apresentamos a seguir uma versão concisa desses axiomas, conforme adotada por Lima (2014) e pela obra clássica de Morgado e Carvalho (2023). Esta abordagem axiomática, segundo Ferreira (2010), permite estabelecer os Números Naturais como um sistema lógico perfeitamente estruturado, garantindo que as operações aritméticas elementares sejam independentes de modelos físicos ou interpretações subjetivas da contagem.

A1. Todo número natural tem um único sucessor, que também é um número natural.

A2. Números naturais diferentes têm sucessores diferentes.

A3. Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Esse número é chamado de *um* e é representado pelo símbolo 1.

A4. (Indução) Se um subconjunto de $\mathbb{N}$ contém o número 1, e contém o sucessor de todo número que ele contém, então ele contém todos os números naturais.

Esses quatro axiomas são suficientes para caracterizar a estrutura dos números naturais. A partir deles, é possível definir rigorosamente operações aritméticas de adição e multiplicação, bem como demonstrar propriedades fundamentais dessas operações. Podemos reescrever estes axiomas da seguinte forma:

A1. Existe uma função $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, que associa a cada $n \in \mathbb{N}$ um elemento $s(n) \in \mathbb{N}$, chamado *sucessor de* n .

A2. A função s é injetora.

A3. Existe um único elemento, designado por 1, no conjunto $\mathbb{N}$, tal que $1 \notin \text{Im}(s) = s(\mathbb{N})$.

A4. Se $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in X$ e $s(X) \subset X$, então $X = \mathbb{N}$.

Pode-se escrever $\mathbb{N} = \{1, s(1), s(s(1)), s(s(s(1))), \dots\}$, mas nossa linguagem fornece nome para os primeiros termos da sequência dos números naturais. Assim dizemos que o sucessor de 1 chama-se *dois*, o sucessor de dois chama-se *três*, o sucessor de três chama-se *quatro*, etc. Nossa civilização progrediu, ao ponto que temos um sistema de numeração, chamado de *sistema de numeração posicional decimal*, o qual nos permite representar qualquer número natural, mediante o uso apropriado dos dez símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, chamados de algarismos. Conforme detalhado por Ifrah (1997) em sua análise sobre a evolução universal dos algarismos, essa invenção permitiu que a humanidade representasse qualquer magnitude de forma concisa através do princípio posicional. Dessa forma, $2 = s(1)$, $3 = s(2) = s(s(1))$, $4 = s(3) = s(s(2)) = s(s(s(1)))$, etc. Por exemplo, a igualdade $2 = s(1)$ significa apenas que estamos usando o símbolo 2 para representar o sucessor de 1.

$$1 \xrightarrow{s} 2 \xrightarrow{s} 3 \xrightarrow{s} 4 \xrightarrow{s} 5 \xrightarrow{s} \dots$$

A noção de sucessor de um número natural está intimamente relacionada à ideia de adição. Veremos na próxima seção que tomar o sucessor é equivalente a somar uma unidade. Os axiomas de Peano podem ser reescritos representando o sucessor de n como $n + 1$, da seguinte forma:

A1. Todo número natural n tem um único sucessor, natural, representado por $n + 1$.

A2. Se $m + 1 = n + 1$, então $m = n$.

A3. Existe um único número natural, designado por 1, tal que $n + 1 \neq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

A4. Seja X um subconjunto do conjunto de números naturais, isto é $X \subset \mathbb{N}$. Se $1 \in X$, e se, além disso, $n + 1 \in X$, para cada $n \in X$, então $X = \mathbb{N}$.

O último axioma, conhecido como *axioma da indução*, é de especial importância. Ele garante que qualquer propriedade que valha para o número 1, e que continue a valer para o sucessor de um número sempre que valer para esse número, necessariamente valerá para todos os números naturais. Trata-se de uma ferramenta poderosa para demonstrações em Matemática, sendo a base para a definição de operações e para a prova de diversas propriedades aritméticas.

O axioma da indução, sob a formulação a seguir é conhecido como o *Princípio da Indução Finita*.

Princípio da Indução Finita. *Seja $P(n)$ uma proposição relativa a um número natural n . Suponhamos que:*

i) (Base) $P(1)$ seja válida;

ii) (Passo indutivo) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validade de $P(n)$ implica a validade de $P(n + 1)$.

Então, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como observa Milies e Coelho (2003), o Princípio da Indução Matemática é a propriedade fundamental que diferencia $\mathbb{N}$ de outros conjuntos numéricos. Para o autor, a indução não é apenas um método de prova, mas o pilar que sustenta as definições recursivas de soma e produto, permitindo que propriedades verificadas para o sucessor se estendam para a totalidade do conjunto infinito.”

Com efeito, se chamarmos de X o conjunto dos números naturais n para os quais $P(n)$ é válida, $X = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ é válida}\}$, vemos que

- $1 \in X$ em virtude de (i); e
- $n \in X \Rightarrow n + 1 \in X$ em virtude de (ii).

Logo, pelo axioma da indução, concluímos que $X = \mathbb{N}$.

Esse princípio reflete a estrutura recursiva dos números naturais e será amplamente utilizado nas próximas seções.

2.2 ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO

Entre os números naturais estão definidas duas operações fundamentais, a adição, que aos números m e n faz corresponder a soma $m + n$, e a multiplicação, que

os faz corresponder ao produto $m \cdot n$. Para definir estas operações adequadamente vamos recorrer ao axioma da indução.

Seja $a(n)$ um atributo relativo ao número natural n . Se definimos $a(1)$ e estabelecemos como $a(n+1)$ pode ser obtido a partir de $a(n)$ para $n \in \mathbb{N}$ arbitrário, o Axioma da Indução garante que o atributo $a(n)$ está definido para cada $n \in \mathbb{N}$. Definições construídas dessa forma são chamadas de *definições por recorrência* ou *indutivas*. A fundamentação dessas operações, conforme detalhada por Vieira e Carvalho (2017), assegura que a aritmética elementar em $\mathbb{N}$ goze de propriedades como a associatividade e a comutatividade, servindo de alicerce para a posterior extensão algébrica ao conjunto dos números inteiros.

Definição 2.1. A *adição* é definida por recorrência da seguinte forma:

- i) Para cada $m \in \mathbb{N}$, define-se: $m + 1 = s(m)$, em que $s(m)$ é o sucessor de m ;
- ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$, define-se: $m + s(n) = s(m + n)$, ou seja, $m + (n + 1) = (m + n) + 1$.

A parte (ii) desta definição diz que se sabemos adicionar o número n ao número m , então também sabemos adicionar o sucessor de n ao número m , bastando tomar o sucessor do número obtido ao adicionar o número n ao número m . Dado $m \in \mathbb{N}$, seja $X_m = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{sabemos determinar } m + n\}$, da parte (i) temos que $1 \in X_m$ e da parte (ii) temos que $n \in X_m$, implicando que $n + 1 \in X_m$, logo pelo Axioma da Indução $X_m = \mathbb{N}$, ou seja, dado $m \in \mathbb{N}$ sabemos determinar $m + n$ para qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Essa definição permite calcular, por exemplo, $5 + 4$ das seguintes formas:

$$\begin{aligned}
 5 + 4 &= 5 + s(3) = s(5 + 3) \\
 &= s(5 + s(2)) = s(s(5 + 2)) \\
 &= s(s(5 + s(1))) = s(s(s(5 + 1))) \\
 &= s(s(s(s(5)))) = s(s(s(s(6)))) = s(s(s(7))) = s(s(8)) = 9.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5 + 4 &= 5 + (3 + 1) = (5 + 3) + 1 \\
 &= (5 + (2 + 1)) + 1 = ((5 + 2) + 1) + 1 \\
 &= ((5 + (1 + 1)) + 1) + 1 = (((5 + 1) + 1) + 1) + 1 \\
 &= ((6 + 1) + 1) + 1 = (7 + 1) + 1 = 8 + 1 = 9.
 \end{aligned}$$

Definição 2.2. A *multiplicação* também pode ser definida por recorrência, com base na adição previamente construída:

- i) Para cada $m \in \mathbb{N}$, define-se $m \cdot 1 = m$;
- ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$, define-se $m \cdot s(n) = (m \cdot n) + m$, ou seja, $m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m$.

A parte (ii) desta definição diz que se sabemos multiplicar o número m pelo número n , então também sabemos multiplicar o número m pelo sucessor de n , bastando adicionar o número m ao número obtido pela multiplicação de m por n . Dado $m \in \mathbb{N}$, seja $Y_m = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{ sabemos determinar } m \cdot n\}$. Da parte (i) temos que $1 \in Y_m$ e da parte (ii) temos que $n \in Y_m$, implicando que $n + 1 \in Y_m$, logo pelo Axioma da Indução $Y_m = \mathbb{N}$, ou seja, dado $m \in \mathbb{N}$ sabemos determinar $m \cdot n$ para qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Essa definição permite calcular, por exemplo, $5 \cdot 4$ da seguintes formas:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 4 &= 5 \cdot s(3) = 5 \cdot 3 + 5 \\ &= 5 \cdot s(2) + 5 = (5 \cdot 2 + 5) + 5 \\ &= (5 \cdot s(1) + 5) + 5 = ((5 \cdot 1 + 5) + 5) + 5 \\ &= ((5 + 5) + 5) + 5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \cdot 4 &= 5 \cdot (3 + 1) = 5 \cdot 3 + 5 \\ &= 5 \cdot (2 + 1) + 5 = (5 \cdot 2 + 5) + 5 \\ &= (5 \cdot (1 + 1) + 5) + 5 = ((5 \cdot 1 + 5) + 5) + 5 \\ &= ((5 + 5) + 5) + 5 = (10 + 5) + 5 = 15 + 5 = 20. \end{aligned}$$

Provaremos algumas propriedades destas duas operações.

Teorema 2.1 ((Ferreira, 2010), p. 29). *Para todos m, n e p naturais vale que $(m+n)+p = m + (n + p)$, ou seja, a adição é associativa em $\mathbb{N}$.*

Demonstração. Vamos demonstrar por indução sobre p .

1. O caso base, $(m + n) + 1 = m + (n + 1)$, é valido, pois é a parte (ii) da definição de soma por recorrência.
2. Vamos supor que $(m + n) + p = m + (n + p)$ para algum $p \geq 1$. Vamos mostrar que $(m + n) + (p + 1) = m + (n + (p + 1))$. De fato,

$$\begin{aligned} (m + n) + (p + 1) &= ((m + n) + p) + 1 \quad (\text{def. 2. (ii)}) \\ &= (m + (n + p)) + 1 \quad (\text{hip. de indução}) \\ &= m + ((n + p) + 1) \quad (\text{def. 2 (ii)}) \\ &= m + (n + (p + 1)) \quad (\text{def. 2 (ii)}) \end{aligned}$$

Portanto, pelo P.I.F. (Princípio de Indução Finita), $(m + n) + p = m + (n + p)$ para quaisquer m, n, p naturais.

□

Lema 2.2 ((Ferreira, 2010), p. 29 e p. 30). *Para todo $m \in \mathbb{N}$, temos que $1 + m = m + 1$.*

Demonstração. Vamos demonstrar por indução sobre m .

1. O caso base, $1 + 1 = 1 + 1$, é claramente válido.
2. Vamos supor que $1 + m = m + 1$ para algum $m \geq 1$. Queremos mostrar que $1 + (m + 1) = (m + 1) + 1$. De fato,

$$\begin{aligned} 1 + (m + 1) &= (1 + m) + 1 && \text{(def. 2 (ii))} \\ &= (m + 1) + 1 && \text{(hip. de indução)} \end{aligned}$$

□

Teorema 2.3 ((Ferreira, 2010), p. 29). *Para todos m e n naturais vale que $m + n = n + m$, ou seja, a adição é comutativa em $\mathbb{N}$.*

Demonstração. Novamente, provamos por indução sobre n .

1. O caso base, $1 + m = m + 1$, é válido pois é o lema 2.2.
2. Vamos supor que, $n + m = m + n$, para algum $n \geq 1$, queremos mostrar então que $(n + 1) + m = m + (n + 1)$. De fato,

$$\begin{aligned} m + (n + 1) &= (m + n) + 1 && \text{(def. 2 (ii))} \\ &= (n + m) + 1 && \text{(hip. de indução)} \\ &= n + (m + 1) && \text{(def. 2 (ii))} \\ &= n + (1 + m) && \text{(lema 2.2)} \\ &= (n + 1) + m && \text{(teorema 2.1)} \end{aligned}$$

□

Lema 2.4 ((Ferreira, 2010), p. 31). *Para todo $m \in \mathbb{N}$, temos que $1 \cdot m = m$.*

Demonstração. Observe que, por definição, $m \cdot 1 = m$, trazendo para este lema o significado de que a multiplicação por 1 é comutativa em $\mathbb{N}$. A demonstração segue por indução sobre m . O caso base é imediato da definição da multiplicação.

Suponha que $1 \cdot m = m$ para algum $m \geq 1$. Queremos mostrar que $1 \cdot (m + 1) = (m + 1) \cdot 1$. De fato:

$$\begin{aligned} (m + 1) \cdot 1 &= m + 1 && \text{(def 2.2 (i))} \\ &= m \cdot 1 + 1 && \text{(def 2.2 (i))} \\ &= 1 \cdot m + 1 && \text{(hip. ind.)} \\ &= 1 \cdot (m + 1) && \text{(def 2.2 (ii))} \end{aligned}$$

Segue que $1 \cdot m = m = m \cdot 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

□

O resultado a seguir é usado na demonstração da comutatividade da multiplicação: o Teorema 2.6. A distributividade à esquerda seguirá da comutatividade da multiplicação.

Teorema 2.5 ((Ferreira, 2010), p. 31). *Para todos m, n e p naturais $(m+n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p$, ou seja, a multiplicação é distributiva à direita em relação à soma.*

Demonstração. Vamos demonstrar por indução sobre p . O caso base é válido, pois para $p = 1$, temos

$$(m + n) \cdot 1 = m + n = m \cdot 1 + n \cdot 1 \quad (\text{def. 2.2 (i)})$$

Vamos supor que $(m + n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p$ para algum $p \geq 1$. Queremos mostrar que $(m + n) \cdot (p + 1) = m \cdot (p + 1) + n \cdot (p + 1)$. De fato,

$$\begin{aligned} (m + n) \cdot (p + 1) &= (m + n) \cdot p + (m + n) && (\text{def. 2.2 (ii)}) \\ &= (m \cdot p + n \cdot p) + (m + n) && (\text{hip. indução}) \\ &= (m \cdot p + m) + (n \cdot p + n) && (\text{teoremas 2.1 e 2.3}) \\ &= m \cdot (p + 1) + n \cdot (p + 1) && (\text{def. 2.2 (ii)}) \end{aligned}$$

□

Teorema 2.6 ((Ferreira, 2010), p. 32). *Para todos m e n naturais vale que $m \cdot n = n \cdot m$, ou seja, a multiplicação é comutativa em $\mathbb{N}$.*

Demonstração. O lema 2.4 prova o caso base.

Suponhamos que $m \cdot n = n \cdot m$ para algum $n \geq 1$. Queremos mostrar que $m \cdot (n + 1) = (n + 1) \cdot m$. De fato,

$$\begin{aligned} m \cdot (n + 1) &= m \cdot n + m && (\text{def. 2.2 (ii)}) \\ &= n \cdot m + m \cdot 1 && (\text{hip. de indução e lema 2.4}) \\ &= (n + 1) \cdot m && (\text{teorema 2.5}) \end{aligned}$$

Pelo P.I.F. temos que $m \cdot n = n \cdot m$ para quaisquer m, n naturais.

□

Teorema 2.7 ((Ferreira, 2010), p. 31). *Para todos m, n e p naturais vale que $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$, isto é, a multiplicação é associativa.*

Demonstração. Prova-se por indução em p . O caso base, $(m \cdot n) \cdot 1 = m \cdot (n \cdot 1)$ é válido, já que

$$(m \cdot n) \cdot 1 = m \cdot n = m \cdot (n \cdot 1) .$$

Suponhamos que $(m \cdot n) \cdot p = m \cdot (n \cdot p)$ para algum $p \geq 1$. Assim

$$\begin{aligned}
 (m \cdot n) \cdot (p + 1) &= (m \cdot n) \cdot p + m \cdot n && (\text{def. 2.2 (ii)}) \\
 &= m \cdot (n \cdot p) + m \cdot n && (\text{hip de indução}) \\
 &= m \cdot ((n \cdot p) + n) && (\text{teorema 2.5}) \\
 &= m \cdot (n \cdot (p + 1)) && (\text{def. 2.2 (ii)})
 \end{aligned}$$

□

2.3 RELAÇÃO DE ORDEM

A relação de ordem no conjunto dos números naturais é a regra que organiza os elementos em uma sequência crescente e linear. Basicamente, ela nos permite comparar quaisquer dois números desse conjunto e decidir qual deles “vem antes” ou se são iguais. Quando dizemos que um número é menor ou igual a outro, estamos afirmando que, para sair do primeiro e chegar ao segundo, precisamos adicionar alguma quantidade natural ou simplesmente não fazer nada, no caso de serem iguais. Essa estrutura garante que não existem ciclos: se você avança na contagem, nunca volta para um número anterior.

Definição 2.3. Dados $a, b \in \mathbb{N}$, definimos a seguinte relação:

$$a \leq b \iff (a = b) \vee (\exists k \in \mathbb{N} \mid a + k = b).$$

Sobre a relação de ordem, temos o resultado a seguir.

Teorema 2.8 ((Ferreira, 2010), p. 33 e p. 34). *A relação de ordem em $\mathbb{N}$, definida em 2.3, é reflexiva, transitiva e antissimétrica.*

Demonstração. Ser reflexiva significa que $\forall a \in \mathbb{N}, a \leq a$.

Ser transitiva significa que se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$. Para ver esta propriedade, notemos inicialmente que se vale uma das igualdades, a implicação é evidente. Suponha agora que existam $k, j \in \mathbb{N}$ tais que

$$b = a + k \text{ e } c = b + j \Rightarrow c = a + (k + j) \Rightarrow a \leq c.$$

Ser antissimétrica significa que se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$. De fato, se fosse $a \neq b$, então existem $k, j \in \mathbb{N}$ tais que $a = b + k$ e $b = a + j$, o que implica em

$$a = a + (k + j).$$

A igualdade acima é um absurdo. De fato, se $a = 1$, então 1 seria o sucessor de $k + j \in \mathbb{N}$, contrariando o axioma A3. Dado $p \in \mathbb{N}$, defina o seguinte conjunto

$$A_p = \{a \in \mathbb{N} \mid a \neq a + p\}.$$

Provemos por indução que $A_p = \mathbb{N}$, qualquer que seja p . O axioma A3 garante que $1 \in A_p$. Agora, se $a \in A_p$, então $s(a) = s(a) + p = s(a + p)$ é uma condição contrária ao axioma A2, que garante a injetividade do sucessor. Como $k + j \in \mathbb{N}$ e $A_{k+j} = \mathbb{N}$, terminamos de provar que não pode acontecer $a \neq b$. $\square$

Como consequência da demonstração da antissimetria da relação de ordem, escrevemos que

$$a < b \iff a \leq b \wedge a \neq b. \quad (1)$$

Se $a < b$, podemos também escrever, equivalentemente, $b > a$.

O próximo teorema que será apresentado e demonstrado é a Lei da Tricotomia. A Lei da Tricotomia é a regra que elimina qualquer ambiguidade na comparação entre números. O nome vem do grego e significa “cortar em três”, o que resume perfeitamente o conceito: ao confrontarmos dois números naturais quaisquer, o universo de possibilidades se divide em apenas três caminhos excludentes.

Teorema 2.9 (Lei da Tricotomia - (Ferreira, 2010), p. 35). *Dados $a, b \in \mathbb{N}$, ocorre exatamente uma das três alternativas: $a < b$ ou $a = b$ ou $a > b$.*

Demonstração. Notemos que $a < b$ ou $b < a$ ocorre somente quando $a \neq b$, pela Definição 1. A demonstração da antissimetria da relação de ordem $\leq$ contém o argumento que mostra a impossibilidade da simultaneidade das relações $a < b$ e $b < a$.

Resta provar que pelo menos uma das relações ocorre. Fixe $n \in \mathbb{N}$ e defina

$$B_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k < n \text{ ou } k = n \text{ ou } k > n\}.$$

Algumas observações sobre B_n :

1. $\forall n, n \in B_n$;
2. se $k = s(n)$, então $n < k$ pela definição 2.3, isto é, $k \in B_n$;
3. pela transitividade da relação de ordem, $s^i(n) \in B_n$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Agora note que $1 \in B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Já vimos que $1 \in B_1$. Se $n = s(p)$ para algum $p \in \mathbb{N}$, então $1 < n$. Isto significa que $1 \in B_n, \forall n \in \mathbb{N}$.

Provemos por indução que $B_n = \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$. Este fato concluirá a demonstração. Como $1 = 1$ e $1 < n$ se $n \in s(\mathbb{N})$, então $B_1 = \mathbb{N}$. Suponha que, para um certo n , $B_n = \mathbb{N}$. Como $n < n + 1$, temos $n \in B_{n+1}$. Se $j \in \mathbb{N}$ satisfaz $j < n$, então $j < n + 1$ e daí $j \in B_{n+1}$. Por outro lado, $s(n + 1) \in B_{n+1}$ e pela transitividade $s^i(n + 1) \in B_{n+1}, \forall i \in \mathbb{N}$. Finalmente, já anotamos que $n + 1 \in B_{n+1}$ nas observações iniciais. Com isto, concluímos que $B_{n+1} = \mathbb{N}$, mostrando o passo de indução. $\square$

A seguir demonstraremos dois teoremas que envolvem a preservação da ordem sob as operações de adição e multiplicação, que podemos chamar de *teoremas de compatibilidade*. Esses são a garantia de que estas duas operações aritméticas, no conjunto de números naturais, não “quebram” a ordem dada de dois outros números.

Teorema 2.10 ((Ferreira, 2010), p. 37). *Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{N}$,*

$$a \leq b \iff a + c \leq b + c ,$$

ou seja, a relação de ordem $\leq$ é compatível com a adição.

Demonstração. Suponha que $a \leq b$. Se $a = b$, então $a + c = b + c$ e portanto $a + c \leq b + c$. Por outro lado, se $a < b$, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $b = a + k$. Pelo que acabamos de ver, segue que $b + c = (a + k) + c = (a + c) + k$, ou seja, $a + c < b + c$.

Reciprocamente, suponha que $a + c \leq b + c$. Suponha por absurdo que $b < a$. Pelo que já foi provado, $b + c < a + c$, contrariando a hipótese. $\square$

Teorema 2.11 ((Ferreira, 2010), p. 37). *Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{N}$, vale:*

$$a \leq b \iff a \cdot c \leq b \cdot c ,$$

ou seja, a relação de ordem $\leq$ é compatível com a multiplicação.

Demonstração. Suponha que $a \leq b$. Se for $a = b$, basta multiplicar por c ambos os membros da igualdade para concluir. Se $a < b$, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $b = a + k$ e daí, $bc = (a + k)c = ac + kc$. Mas $kc \in \mathbb{N}$, portanto $ac < bc$, neste caso. Isto finaliza a demonstração da implicação direta.

Reciprocamente, partindo de $ac \leq bc$, suponha, por absurdo, que $a > b$. Pelo que acabamos de provar, deve valer $bc < ac$, contrário à hipótese. $\square$

Importante lembrar que a compatibilidade da adição vai se estender para o conjunto dos números inteiros, mas não a compatibilidade da multiplicação.

O próximo teorema a ser apresentado e demonstrado é a lei do cancelamento (ou lei do corte) para a adição. Trata-se de um pilar fundamental para a manipulação de igualdades e simplificação de expressões. Embora o mecanismo prático seja simplesmente “eliminar” a parcela comum de ambos os lados, formalmente não estamos subtraindo, visto que a *subtração* não é uma operação definida no conjunto dos naturais. A condição que intervém na lei do cancelamento é a injetividade da adição, por sua vez, consequência do axioma A2: se somamos uma mesma quantidade a dois números e os resultados são idênticos, os dois números originais também precisam ser iguais.

Teorema 2.12 (Lei do Cancelamento Aditivo - (Ferreira, 2010), p. 29). *Dados $a, b, c \in \mathbb{N}$. Se $a + c = b + c$, então $a = b$.*

Demonstração. Para essa demonstração, vamos argumentar com a redução ao absurdo em conjunto com a lei da tricotomia. Temos que a nossa hipótese é que $a + c = b + c$ e a nossa tese é que $a = b$.

Vamos assumir que a tese é falsa, isto é, que $a \neq b$. Pela tricotomia, se a e b são diferentes, restam duas opções: $a < b$ ou $b < a$.

Se assumirmos que $a < b$, podemos aplicar o Teorema 2.10. Portanto, ao somarmos c em ambos os lados, chegamos que $a + c < b + c$. Isso contradiz a nossa hipótese inicial de que $a + c = b + c$.

Analogamente, se assumirmos que $b < a$, aplicamos novamente a compatibilidade da adição e chegamos que $b + c < a + c$. Novamente isso contradiz a nossa hipótese inicial de que $a + c = b + c$.

Como a suposição de que $a \neq b$ contradisse a hipótese de que $a + c = b + c$, concluímos que obrigatoriamente $a = b$. $\square$

O próximo Teorema a ser apresentado e demonstrado, é a Lei do Cancelamento (ou Lei do Corte) para a multiplicação. É uma propriedade crucial para a resolução de equações algébricas. Embora, na prática, simplesmente cortamos um fator dos dois lados, devemos lembrar que a condição que nos permite provar esta regra de cancelamento é a injetividade da multiplicação, que decorre da injetividade da adição.

Teorema 2.13 (Lei do Cancelamento Multiplicativo - (Ferreira, 2010), p. 37). *Dados $a, b, c \in \mathbb{N}$. Se $a \cdot c = b \cdot c$, então $a = b$.*

Demonstração. Temos que a hipótese é $a \cdot c = b \cdot c$ e a tese é $a = b$.

Vamos assumir que a tese é falsa, ou seja, que $a \neq b$. Pela tricotomia, se a e b são diferentes, restam duas opções: $a < b$ ou $b < a$.

Se $a < b$, sabemos que $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $a + k = b$. Multiplicando ambos os lados por c , temos que $(a + k) \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a \cdot c + k \cdot c = b \cdot c$. Como visto anteriormente, $k \cdot c$ é natural. Portanto, $a \cdot c < b \cdot c$. Isso contradiz a nossa hipótese inicial de que $a \cdot c = b \cdot c$.

Se $b < a$, sabemos que $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $b + k = a$. Multiplicando ambos os lados por c , temos que $(b + k) \cdot c = a \cdot c \Rightarrow b \cdot c + k \cdot c = a \cdot c$. Como visto anteriormente, $k \cdot c$ é natural. Portanto, $b \cdot c < a \cdot c$. Isso contradiz a nossa hipótese inicial de que $a \cdot c = b \cdot c$.

Como a suposição de que $a \neq b$ contradisse a hipótese de que $a \cdot c = b \cdot c$, concluímos que obrigatoriamente $a = b$. $\square$

Para finalizar este capítulo apresentamos a prova do Princípio da Boa Ordenação (PBO). Em alguns textos, este princípio é assumido como um axioma. No entanto, como observa Eves [8], o PBO é logicamente equivalente ao princípio da

indução finita, sendo fundamental para garantir que qualquer processo de 'descida' ou busca de mínimos em $\mathbb{N}$ possua um ponto de interrupção rígido.

Teorema 2.14 (Princípio da Boa Ordenação). [(Ferreira, 2010), p. 39] *Todo subconjunto não vazio $S \subset \mathbb{N}$ possui um elemento mínimo.*

Demonstração. Para demonstrarmos esse teorema, argumentamos com uma redução ao absurdo em conjunto com o princípio da indução finita.

Suponha que exista um conjunto $S \subseteq \mathbb{N}$ tal que $S \neq \emptyset$ (S não é vazio), mas que S não possui um elemento mínimo.

Vamos provar que, sob essa condição, o conjunto S teria que ser vazio, o que é uma contradição. Para isso, mostraremos que nenhum número natural n pertence a S .

Seja $P(n)$ a propriedade: “nenhum dos números naturais de 1 até n pertence a S ”. Formalmente: $P(n) : \{1, 2, \dots, n\} \cap S = \emptyset$.

Sabemos que 1 é o menor número natural. Se $1 \in S$, ele seria automaticamente o elemento mínimo de S , pois $1 \leq x$ para todo $x \in S$. Como assumimos que S não possui elemento mínimo, então obrigatoriamente: $1 \notin S$. Logo, $P(1)$ é verdadeira.

Suponha que $P(k)$ é verdadeira para algum $k \geq 1$. Isso significa que $1 \notin S, 2 \notin S, \dots, k \notin S$. Devemos provar que $P(k+1)$ é verdadeira, ou seja, que $k+1$ também não está em S .

Analisando $k+1$, temos que pela hipótese de indução, todos os números menores que $k+1$ (ou seja, $1, \dots, k$) não estão em S . Se $k+1$ estivesse em S , ele seria o menor elemento de S , pois não há outro menor do que ele dentro do conjunto. Pela hipótese de absurdo, S não possui elemento mínimo.

Logo, para não violar essa condição, $k+1$ não pode pertencer a S .

Portanto, $P(k+1)$ é verdadeira.

Pelo princípio da indução finita, concluímos que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \notin S$. Como $S \subset \mathbb{N}$, deve-se ter $S = \emptyset$. Esta contradição encerra a demonstração de que a suposição de que S não tem mínimo é falsa.

□

3 CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS INTEIROS A PARTIR DOS NÚMEROS NATURAIS

Com este capítulo, exploraremos a transição fundamental entre a contagem intuitiva dos números naturais e a abstração formal necessária para a construção dos números inteiros ($\mathbb{Z}$). Iniciamos com uma contextualização histórica e epistemológica, destacando a "crise da subtração" e as contribuições milenares de matemáticos como Brahmagupta, que transformaram conceitos práticos de fortunas e dívidas em regras algébricas rigorosas. Essa jornada nos conduz à legitimação do zero e dos números negativos como entidades matemáticas indispensáveis e logicamente sólidas.

Para conferir rigor a essa intuição, apresentamos a formalização dos inteiros como um conjunto quociente resultante de uma relação de equivalência em pares ordenados de números naturais. Ao longo das seções, definiremos as operações de adição e multiplicação, a relação de ordem e a função de imersão, que permite visualizar os naturais como uma cópia dos naturais como um subconjunto dos inteiros. Concluimos com a análise das funções sucessor e antecessor, demonstrando como essa nova estrutura supera as limitações de $\mathbb{N}$ e estabelece a base para o pensamento algébrico moderno.

3.1 MOTIVAÇÃO HISTÓRICA E EPISTEMOLÓGICA

A transição dos números naturais para os números inteiros não é, histórica ou cognitivamente, um passo trivial. Enquanto os números naturais emergem organicamente da necessidade humana de contar objetos discretos — rebanhos, dias, grãos — os números inteiros exigem uma abstração que desafiou os maiores intelectos da humanidade por milênios. A construção que apresentaremos, embora elegante e logicamente impecável em sua formulação moderna, é o resultado final de uma longa e tumultuada jornada para legitimar a existência do "nada" e do "menos que nada" como entidades matemáticas rigorosas.

3.1.1 A Crise da Subtração e o Conceito de Dívida

No domínio dos números naturais, a operação de adição é sempre possível; contudo, a subtração é uma operação defeituosa. A equação $a - b = x$ só possui solução em $\mathbb{N}$ se, e somente se, $a > b$. Para um matemático da Grécia Antiga, acostumado a associar números a magnitudes geométricas (comprimentos, áreas), a expressão $3 - 5$ não era apenas insolúvel; era absurda. Como se poderia retirar cinco metros de uma corda de três metros? Conforme discute Roque (2012), essa resistência dos gregos em aceitar o negativo decorria da impossibilidade de conceber uma magnitude geométrica menor que o vazio.

Esta limitação prática encontrou sua primeira resolução teórica não no Ocidente, mas na Índia Antiga. A motivação para a expansão do sistema numérico não veio da geometria, mas do comércio e da contabilidade. Foi a necessidade de quantificar o *déficit*, a ausência e a dívida que impulsionou a invenção dos números negativos.

Os matemáticos chineses, já no século II a.C., utilizavam um sistema de barras de contagem onde barras vermelhas representavam coeficientes positivos e barras pretas representavam negativos. No entanto, foi na Índia do século VII que estas entidades ganharam um tratamento formal sistemático. O matemático Brahmagupta (598–670 d.C.), em sua obra magna *Brāhmasphuṭasiddhānta* ("A Doutrina Corretamente Estabelecida de Brahma"), transcendeu a mera contabilidade para estabelecer as leis aritméticas que governam o zero e os negativos. Segundo Boyer (2012), ele estipulou regras precisas que antecipam a construção de classes de equivalência moderna, ao tratar as operações não por contagem física, mas por regras estruturadas de interação. Essa mudança de paradigma, como aponta Eves (2004), marca o nascimento de uma aritmética puramente simbólica.

3.1.2 O Legado de Brahmagupta: Fortunas e Dívidas

Brahmagupta introduziu uma terminologia que, embora financeira em origem, carregava a semente da abstração algébrica moderna. Ele chamou os números positivos de *dhana* (fortuna ou riqueza) e os números negativos de *rina* (dívida). O zero (*shunya*) era o ponto de equilíbrio, o resultado da subtração de um número por si mesmo.

O que torna a contribuição de Brahmagupta fundamental é que ele definiu as operações não por meio de contagem física, mas por meio de regras de interação (o que hoje chamaríamos de estrutura algébrica). Ele estipulou regras precisas que antecipam a construção de classes de equivalência, conforme registrado na obra de Brahmagupta (628 d.C. *apud* Boyer; Merzbach, 2012):

"Uma dívida menos zero é uma dívida. Uma fortuna menos zero é uma fortuna. Zero menos zero é zero."

"Uma dívida subtraída de zero é uma fortuna. Uma fortuna subtraída de zero é uma dívida."

"O produto de duas fortunas é uma fortuna. O produto de duas dívidas é uma fortuna."

Esta última regra — de que o produto de dois negativos resulta em um positivo — é frequentemente uma barreira pedagógica. Contudo, sob a ótica de Brahmagupta, a lógica era consistente: retirar (subtrair) uma dívida é equivalente a ganhar uma fortuna.

3.1.3 A Resistência Europeia e a Necessidade de Formalismo

É fascinante notar que, enquanto a Índia operava confortavelmente com esses conceitos no século VII, a Europa resistiu aos números negativos por mais de um milênio. Matemáticos renomados como Girolamo Cardano (século XVI) referiam-se às soluções negativas de equações como "fictícias" ou "falsas". Francis Maseres, membro da Royal Society no século XVIII, chegou a argumentar que os números negativos "escureciam todas as doutrinas das equações" e deveriam ser banidos da matemática rigorosa. Roque (2012) observa que essa longa resistência na Europa em aceitar os números negativos refletia a dificuldade em desvincular o número da ideia de grandeza geométrica ou quantidade absoluta.

A aceitação plena só ocorreu no século XIX, com o advento da álgebra abstrata e o trabalho de matemáticos como Hermann Hankel e George Peacock, que propuseram o "Princípio da Permanência das Leis Equivalentes". Segundo Katz (2009), essa perspectiva consolidou a ideia de que os números não precisavam ter contrapartidas físicas imediatas; eles precisavam apenas obedecer a regras consistentes que preservassem as propriedades das operações aritméticas fundamentais.

É neste espírito que baseamos a construção formal. Não definiremos os números inteiros como "dívidas" ou "temperaturas abaixo de zero", mas como objetos formais construídos a partir dos números naturais. Nosso objetivo é criar um conjunto no qual a equação $x + b = a$ tenha solução única para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$.

3.2 FORMALIZAÇÃO

Definição 3.1. Dados $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c$$

Mostremos que a relação definida na Definição 3.1 é uma relação de equivalência. A relação $\sim$ é claramente reflexiva. Pode-se verificar que ela é simétrica, pois, graças à simetria da igualdade e a comutatividade da soma dos números naturais, temos

$$a + d = b + c \implies b + c = a + d \implies c + b = d + a \implies (c, d) \sim (a, b),$$

a partir da comutatividade da soma de números naturais. Finalmente, $\sim$ é transitiva, pois

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c \tag{1}$$

$$(c, d) \sim (x, y) \iff c + y = d + x \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
(a+d) + y &\stackrel{1}{=} (b+c) + y = b + (c+y) \quad (\text{associatividade}) \\
&\stackrel{2}{=} b + (d+x) \\
\Rightarrow (a+y) + d &= (b+x) + d \quad (\text{comutatividade e associatividade}) \\
\Rightarrow a + y &= b + x \quad (\text{cancelamento aditivo}) \\
\Rightarrow (a,b) &\sim (x,y)
\end{aligned}$$

Portanto, a relação definida na Definição 3.1 é uma relação de equivalência. O conjunto dos pares ordenados de números naturais que se relacionam sob $\sim$ é chamado classe de equivalência. Vamos usar a notação $\overline{(x,y)}$ para denotar a classe de (x,y) .

Teorema 3.1 ((Ferreira, 2010), p. 14 e p. 45). *Dados* $(a,b), (c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$\overline{(a,b)} = \overline{(c,d)} \text{ ou } \overline{(a,b)} \cap \overline{(c,d)} = \emptyset .$$

Exemplo 3.2.

$$\begin{aligned}
\overline{(1,2)} &= \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6) \dots\} \\
\overline{(5,3)} &= \{(3,1), (4,2), (5,3), (6,4), (7,5) \dots\} \\
\overline{(5,6)} &= \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6) \dots\}
\end{aligned}$$

Podemos concluir com este exemplo, que $\overline{(1,2)} = \overline{(5,6)}$, pois $(1,2) \sim (5,6)$. Em contrapartida, concluímos que $\overline{(1,2)} \neq \overline{(5,3)}$, pois $1+3 \neq 2+5$, logo $(1,2) \not\sim (5,3)$.

Em outras palavras, $\alpha = \overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$, em que $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. A construção que apresentaremos a seguir fundamenta-se na Teoria dos Conjuntos, definindo os inteiros como classes de equivalência de pares ordenados de naturais (Lima, 2014). Para Hefez (2011), esse rigor formal permite ao aluno transitar da mera memorização algorítmica para a compreensão lógica da estrutura algébrica profunda.

Definição 3.2. Definimos o conjunto dos números inteiros como

$$\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) / \sim = \left\{ \overline{(a,b)} \mid (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \right\} .$$

Agora, definiremos as operações de adição e multiplicação.

Definição 3.3 (Adição de números inteiros). Seja $\alpha = \overline{(a,b)}, \beta = \overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$, definimos

$$\alpha + \beta = \overline{(a+c, b+d)} \quad (2)$$

Exemplo 3.3.

$$\overline{(1, 2)} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), \dots\},$$

$$\overline{(7, 3)} = \{(5, 1), (6, 2), (7, 3), (8, 4), \dots\}.$$

Temos $\overline{(1, 2)} + \overline{(7, 3)} = \overline{(1 + 7, 2 + 3)} = \overline{(8, 5)}$.

Sabemos que $\overline{(1, 2)} = \overline{(4, 5)}$ e $\overline{(7, 3)} = \overline{(5, 1)}$. Temos então que vale

$$\overline{(4, 5)} + \overline{(5, 1)} = \overline{(4 + 5, 5 + 1)} = \overline{(9, 6)}.$$

E $\overline{(9, 6)} = \overline{(8, 5)}$, pois $(9, 6) \sim (8, 5)$. Logo $\overline{(4, 5)} + \overline{(5, 1)} = \overline{(8, 5)} = \overline{(1, 2)} + \overline{(7, 3)}$.

A demonstração de que as operações operam independentemente do representante da classe escolhida é, de acordo com Milies e Coelho 2003, o passo crucial para validar a consistência algébrica dos inteiros, evitando ambiguidades no cálculo de saldos e produtos. Vamos examinar a questão sobre se a adição definida na Equação (2) está bem definida para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, ou seja, a adição não depende do representante da classe que tomamos em α e em β . Mostramos apenas um exemplo que funcionou como esperado.

Teorema 3.4 ((Ferreira, 2010), p. 47). *Se $\overline{(a, b)} = \overline{(x, y)}$ e $\overline{(c, d)} = \overline{(u, v)}$, então $\overline{(a + c, b + d)} = \overline{(x + u, y + v)}$. Em resumo, a adição (2) está bem definida.*

Demonstração. Se $a + y = b + x$ e $c + v = d + u$, então

$$\begin{aligned} (a + c) + (y + v) &= (a + y) + (c + v) \\ &= (b + x) + (d + u) \\ &= (b + d) + (x + u) \\ \Rightarrow (a + c, b + d) &\sim (x + u, y + v). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.5 ((Ferreira, 2010), p. 48). *A respeito da adição dos números inteiros, valem as seguintes propriedades:*

i) *Comutatividade:* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}, \alpha + \beta = \beta + \alpha$.

ii) *Associatividade:* $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}, \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

iii) *Existe um único $\varepsilon \in \mathbb{Z}$ tal que $\forall \alpha \in \mathbb{Z}, \alpha + \varepsilon = \alpha$.*

iv) *Cancelamento aditivo:* se $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ são tais que $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$, então $\alpha = \beta$.

v) *Dado $\alpha \in \mathbb{Z}$, existe um único $\alpha' \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha + \alpha' = \varepsilon$.*

Demonstração. Sejam $\alpha = \overline{(a, b)}$, $\beta = \overline{(c, d)}$, em que $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Temos que

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= \overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(a + c, b + d)} \\ &= \overline{(c + a, d + b)} \\ &= \overline{(c, d)} + \overline{(a, b)} \\ &= \beta + \alpha ,\end{aligned}$$

o que prova (i).

Para ver (ii), sejam α e β como acima e $\gamma = \overline{(x, y)}$, com $x, y \in \mathbb{N}$. Temos que

$$\begin{aligned}\alpha + (\beta + \gamma) &= \overline{(a, b)} + (\overline{(c, d)} + \overline{(x, y)}) \\ &= \overline{(a, b)} + \overline{(c + x, d + y)} \\ &= \overline{(a + (c + x), b + (d + y))} \\ &= \overline{((a + c) + x, (b + d) + y)} \\ &= \overline{(a + c, b + d)} + \overline{(x, y)} \\ &= (\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)}) + \overline{(x, y)} \\ &= (\alpha + \beta) + \gamma\end{aligned}$$

(iii) Considere $\epsilon = \overline{(1, 1)}$ e $\alpha = \overline{(a, b)}$. Temos que

$$\begin{aligned}\alpha + \epsilon &= \overline{(a, b)} + \overline{(1, 1)} = \overline{(a + 1, b + 1)} \\ &= \overline{(a, b)} \\ &= \alpha ,\end{aligned}$$

onde a terceira igualdade segue da Definição 3.1. Se $\epsilon' \in \mathbb{Z}$ é tal que $\alpha + \epsilon' = \alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{Z}$, então

$$\epsilon' = \epsilon' + \epsilon = \epsilon + \epsilon' = \epsilon .$$

(iv) Sendo α, β e γ como no item (ii), temos que

$$\begin{aligned}\alpha + \gamma &= \overline{(a, b)} + \overline{(x, y)} = \overline{(a + x, b + y)} \\ \beta + \gamma &= \overline{(c, d)} + \overline{(x, y)} = \overline{(c + x, d + y)}\end{aligned}$$

Por hipótese, $\overline{(a + x, b + y)} = \overline{(c + x, d + y)}$, então temos que

$$\begin{aligned}(a + x, b + y) &\sim (c + x, d + y) \\ \iff (a + x) + (d + y) &= (b + y) + (c + x) \\ \iff (a + d) + (x + y) &= (b + c) + (x + y) \\ \implies a + d &= b + c \\ \implies (a, b) \sim (c, d) &\implies \alpha = \beta .\end{aligned}$$

(v) Dado $\alpha = \overline{(a, b)}$, tomamos $\alpha' = \overline{(b, a)}$. Então

$$\alpha + \alpha' = \overline{(a + b, b + a)} = \overline{(1, 1)} = \varepsilon .$$

Se α'' satisfaz, assim como α' , a equação $\alpha + \alpha'' = \varepsilon$, então pelo item (iv)

$$\alpha + \alpha' = \alpha + \alpha'' \Rightarrow \alpha' = \alpha'' .$$

□

A notação usual para o número inteiro ε referido no item (iii) do Teorema 3.5 é 0, o número zero. A propriedade (iii) se interpreta como zero é o único elemento neutro da operação de adição. O número α' referido no item (v) do Teorema 3.5 é chamado oposto ou simétrico de α , cuja notação usual é $-\alpha$.

Definição 3.4 (Subtração de números inteiros). Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, definimos a subtração por

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta) . \quad (3)$$

Exemplo 3.6. Sejam $\alpha = \overline{(a, b)}$ e $\beta = \overline{(c, d)}$. Temos que:

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta) = \overline{(a, b)} + \overline{(d, c)} = \overline{(a + d, b + c)}$$

Proposição 3.7 ((Ferreira, 2010), p. 50). Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, valem as propriedades

- (i) $-(-\alpha) = \alpha$,
- (ii) $-\alpha + \beta = \beta - \alpha$,
- (iii) $\alpha - (-\beta) = \alpha + \beta$,
- (iv) $-\alpha - \beta = -(\alpha + \beta)$.

Demonstração. As duas primeiras propriedades são imediatas da definição, e a terceira é decorrente da lei do cancelamento na adição e de (i). Para ver (iv), sejam $\alpha = \overline{(a, b)}$ e $\beta = \overline{(c, d)}$, então

$$-\alpha - \beta = \overline{(b, a)} + \overline{(d, c)} = \overline{(b + d, a + c)} = -(\alpha + \beta) ,$$

pois $\alpha + \beta = \overline{(a + c, b + d)}$.

□

Definição 3.5 (Multiplicação de números inteiros). Dados $\alpha = \overline{(a, b)}, \beta = \overline{(c, d)} \in \mathbb{Z}$, definimos

$$\alpha \cdot \beta = \overline{(ac + bd, ad + bc)} \quad (4)$$

Exemplo 3.8.

(a) Se $\overline{(1, 2)}$ e $\overline{(3, 0)}$, então

$$\overline{(1, 2)} \cdot \overline{(3, 0)} = \overline{(1 \cdot 3 + 2 \cdot 0, 1 \cdot 0 + 2 \cdot 3)} = \overline{(3, 6)}$$

(b) Para $\overline{(1, 2)}$ e $\overline{(7, 3)}$, temos a multiplicação:

$$\overline{(1, 2)} \cdot \overline{(7, 3)} = \overline{(1 \cdot 7 + 2 \cdot 3, 1 \cdot 3 + 2 \cdot 7)} = \overline{(13, 17)}$$

Sabemos que $\overline{(1, 2)} = \overline{(4, 5)}$ e $\overline{(7, 3)} = \overline{(5, 1)}$. Portanto, deve-se verificar que $\overline{(4, 5)} \cdot \overline{(5, 1)} = \overline{(1, 2)} \cdot \overline{(7, 3)}$. O cálculo fornece

$$\overline{(4, 5)} \cdot \overline{(5, 1)} = \overline{(4 \cdot 5 + 5 \cdot 1, 4 \cdot 1 + 5 \cdot 5)} = \overline{(25, 29)}$$

e $\overline{(25, 29)} = \overline{(13, 17)}$, pois $25 + 17 = 29 + 13$.

Teorema 3.9 ((Ferreira, 2010), p. 51). Se $(a, b) \sim (x, y)$ e $(c, d) \sim (u, v)$, então

$$(ac + bd, ad + bc) \sim (xu + yv, xv + yu) ,$$

ou seja, a multiplicação de inteiros está bem definida.

Demonstração. Temos

$$\begin{aligned} (a, b) \sim (x, y) &\Rightarrow a + y = b + x \Rightarrow ac + yc = bc + xc \quad \text{e} \quad ad + yd = bd + xd , \\ (c, d) \sim (u, v) &\Rightarrow c + v = d + u \Rightarrow cy + vy = dy + uy \quad \text{e} \quad cx + vx = dx + ux . \end{aligned}$$

Efetuada uma soma de 4 termos de maneira estratégica, chegamos em

$$\begin{aligned} &(ac + yc) + (bd + xd) + (xc + xv) + (yd + yu) \\ &= (bc + xc) + (ad + yd) + (xd + xu) + (yc + yv) \end{aligned}$$

Cancelando os termos yc , xd , xc e yd presentes em ambos os membros,

$$\begin{aligned} ac + bd + xv + yu &= bc + ad + xu + yv \\ \Rightarrow (ac + bd, ad + bc) &\sim (xu + yv, xv + yu) , \end{aligned}$$

como queríamos. □

Lema 3.10 ((Ferreira, 2010), p. 52). Se $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, com $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$, então $\alpha \cdot \beta \neq 0$.

Demonstração. Tome $\alpha = \overline{(a, b)}$ e $\beta = \overline{(c, d)}$. Como $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$, temos $a \neq b$ e $c \neq d$. Suponha por absurdo que

$$\alpha \cdot \beta = \overline{(ac + bd, ad + bc)}$$

satisfaz $ac + bd = ad + bc$. Sem perda de generalidade, assumamos que $c > d$. Então $ac > ad$ e $bc > bd$. Com isto podemos escrever

$$ac + bd = ad + bc \Rightarrow a(c - d) = b(c - d).$$

Efetuada o cancelamento multiplicativo nos naturais, concluímos que $a = b$, absurdo. $\square$

Teorema 3.11 ((Ferreira, 2010), p. 51). *A multiplicação no conjunto dos números inteiros goza das seguintes propriedades:*

- (i) **Comutatividade:** $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}, \alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.
- (ii) **Associatividade:** $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}, (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.
- (iii) **Existe um único $e \in \mathbb{Z}$ tal que $\alpha \cdot e = \alpha, \forall \alpha \in \mathbb{Z}$.**
- (iv) **Distributividade:** $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}, \alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.
- (v) **Cancelamento multiplicativo:** se $\alpha \neq 0$ e $\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma$, então $\beta = \gamma$.

Demonstração. Nesta demonstração, vamos usar $\alpha = \overline{(a, b)}, \beta = \overline{(c, d)}$ e $\gamma = \overline{(x, y)}$, como as classes em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Para demonstrar (i), note que

$$\begin{aligned} \beta \cdot \alpha &= \overline{(c, d)} \cdot \overline{(a, b)} = \overline{(ca + db, cb + da)} \\ &= \overline{(ac + bd, ad + bc)} \quad (\text{comutatividade em } \mathbb{N}) \\ &= \alpha \cdot \beta \end{aligned}$$

Portanto $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$.

Para ver (ii), temos, por um lado,

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma &= \overline{[(a, b) \cdot (c, d)] \cdot (x, y)} \\ &= \overline{(ac + bd, ad + bc) \cdot (x, y)} \\ &= \overline{((ac + bd)x + (ad + bc)y, (ac + bd)y + (ad + bc)x)} \\ &= \overline{(acx + bdx + ady + bcy, acy + bdy + adx + bcx)}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) &= \overline{(a, b) \cdot [(c, d) \cdot (x, y)]} \\ &= \overline{(a, b) \cdot (cx + dy, cy + dx)} \\ &= \overline{(a(cx + dy) + b(cy + dx), a(cy + dx) + b(cx + dy))} \\ &= \overline{(acx + ady + bcy + bdx, acy + adx + bcx + bdy)} \\ &= \overline{(acx + bdx + ady + bcy, acy + bdy + adx + bcx)} \end{aligned}$$

Logo, $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$.

Considere $e = \overline{(2, 1)}$. Temos

$$\begin{aligned}\alpha \cdot e &= \overline{(a, b)} \cdot \overline{(2, 1)} = \overline{(a \cdot 2 + b \cdot 1, a \cdot 1 + b \cdot 2)} \\ &= \overline{(2a + b, a + 2b)} = \overline{(a, b)} = \alpha ,\end{aligned}$$

em que a penúltima igualdade se justifica pela relação de equivalência $\sim$. Suponha que $e' \in Z$ também satisfaz a propriedade, isto é, $\forall \alpha \in \mathbb{Z}, \alpha \cdot e' = \alpha$, então

$$e' = e' \cdot e = e \cdot e' = e .$$

Para ver (iv), note que

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (\beta + \gamma) &= \overline{(a, b)} \cdot [\overline{(c, d)} + \overline{(x, y)}] \\ &= \overline{(a, b)} \cdot \overline{(c + x, d + y)} \\ &= \overline{(a(c + x) + b(d + y), a(d + y) + b(c + x))} \\ &= \overline{(ac + ax + bd + by, ad + ay + bc + bx)} .\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma &= \overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} + \overline{(a, b)} \cdot \overline{(x, y)} \\ &= \overline{(ac + bd, ad + bc)} + \overline{(ax + by, ay + bx)} \\ &= \overline{(ac + bd + ax + by, ad + bc + ay + bx)}\end{aligned}$$

Comparando componente a componente os representantes das classes de equivalência, vemos que são iguais.

Finalmente, para mostrar o cancelamento multiplicativo no conjunto dos inteiros, temos

$$\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \gamma \implies \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot (-\gamma) = \alpha \cdot (\gamma - \gamma) = 0 ,$$

ou seja $\alpha \cdot (\beta - \gamma) = 0$. Como $\alpha \neq 0$, pelo Lema 3.10, devemos ter $\beta - \gamma = 0$, como queríamos.

□

A elemento neutro da multiplicação, cuja existência e unicidade foi mostrada no Teorema 3.11, é usualmente denotado por 1.

Teorema 3.12 ((Ferreira, 2010), p. 52). *Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, vale que*

$$(i) \quad (-\alpha) \cdot \beta = -(\alpha \cdot \beta) = \alpha \cdot (-\beta) \text{ e}$$

$$(ii) \quad (-\alpha) \cdot (-\beta) = \alpha \cdot \beta.$$

Demonstração. Sejam $\alpha = \overline{(a, b)}, \beta = \overline{(c, d)}$, em que $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Temos que

$$\begin{aligned} (-\alpha) \cdot \beta &= \overline{(b, a)} \cdot \overline{(c, d)} \\ &= \overline{(bc + ad, bd + ac)} = -\overline{(ac + bd, ad + bc)} \\ &= -(\alpha \cdot \beta). \end{aligned}$$

A igualdade com $\alpha \cdot (-\beta)$ é análoga.

Para demonstrar (ii), os cálculos são semelhantes:

$$\begin{aligned} (-\alpha) \cdot (-\beta) &= \overline{(b, a)} \cdot \overline{(d, c)} \\ &= \overline{(bd + ac, bc + ad)} = \overline{(ac + bd, ad + bc)} \\ &= \overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = \alpha \cdot \beta. \end{aligned}$$

□

Definição 3.6 (Relação de ordem nos inteiros). Dados $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, sejam $\alpha = \overline{(a, b)}$ e $\beta = \overline{(c, d)}$. Dizemos que $\alpha \leq \beta$ se $a + d \leq b + c$.

Entretanto, precisamos demonstrar antes que tal relação de ordem está bem definida.

Proposição 3.13 ((Ferreira, 2010), p. 52). Suponha que $(a, b) \sim (x, y)$ e $(c, d) \sim (u, v)$, então

$$a + d \leq b + c \iff x + v \leq y + u.$$

Demonstração. As hipóteses se traduzem nas igualdades: $a + y = b + x$ e $c + v = d + u$.
Temos

$$\begin{aligned} a + d \leq b + c &\implies a + d + v \leq b + c + v \\ &\implies a + d + v \leq b + (d + u) \quad (\text{pois } c + v = d + u) \\ &\implies a + v \leq b + u \quad (\text{cancelamento aditivo}) \\ &\implies x + a + v \leq x + b + u \\ &\implies x + a + v \leq (a + y) + u \quad (\text{pois } x + b = a + y) \\ &\implies x + v \leq y + u \quad (\text{cancelamento aditivo.}) \end{aligned}$$

□

Proposição 3.14 ((Ferreira, 2010), p. 53). A relação de ordem em $\mathbb{Z}$ é

(i) reflexiva: $\alpha \leq \alpha$;

(ii) antissimétrica: se $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \alpha$, então $\alpha = \beta$;

(iii) transitiva: se $\alpha \leq \beta$ e $\beta \leq \gamma$, então $\alpha \leq \gamma$.

Demonstração. A reflexividade é evidente. Sejam $\alpha = \overline{(a, b)}$, $\beta = \overline{(c, d)}$ e $\gamma = \overline{(x, y)}$. Para ver (ii),

$$a + d \leq b + c \text{ e } c + b \leq d + a \implies a + d = b + c \iff (a, b) \sim (c, d) .$$

Para mostrar (iii), note que a igualdade na primeira ou na segunda hipóteses permite concluir. Suponha que $\alpha < \beta$ e $\beta < \gamma$, isto é,

$$\begin{aligned} a + d &< b + c \\ c + y &< d + x \end{aligned}$$

Somando as duas desigualdades, e fazendo o cancelamento de $c + d$:

$$(a + d) + (c + y) < (b + c) + (d + x) \implies a + y < b + x ,$$

o que significa que $\alpha < \gamma$.

□

Proposição 3.15 ((Ferreira, 2010), p. 53).

- (i) Se $\alpha < \beta$, então $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$, $\forall \gamma \in \mathbb{Z}$;
- (ii) Se $\gamma > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma = \overline{(n + 1, 1)}$;
- (iii) Se $\alpha < \beta$ e $\gamma > 0$, então $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$.

Demonstração. Como de costume, escrevemos $\alpha = \overline{(a, b)}$, $\beta = \overline{(c, d)}$ e $\gamma = \overline{(x, y)}$, com $a, b, c, d, x, y \in \mathbb{N}$.

Pela definição da relação de ordem,

$$\alpha < \beta \iff a + d < b + c .$$

Somando $x + y \in \mathbb{N}$ em ambos os membros da desigualdade, temos

$$\begin{aligned} a + d + (x + y) &< b + c + (x + y) \\ (a + x) + (d + y) &< (b + y) + (c + x) \iff \\ \overline{(a + x, b + y)} &< \overline{(c + x, d + y)} , \end{aligned}$$

ou seja, $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$, provando o que queríamos.

Para mostrar (ii), de $\gamma > 0$ temos

$$x + 1 > y + 1 \iff x + 1 = y + 1 + n ,$$

para algum $n \in \mathbb{N}$. Logo

$$(x, y) \sim (n + y, y) \sim (n + 1, 1) .$$

Para mostrar (iii), tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma = \overline{(n+1, 1)}$. Temos

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \gamma &= \overline{(a(n+1) + b, a + b(n+1))}, & (a(n+1) + b, a + b(n+1)) &\sim (an, bn); \\ \beta \cdot \gamma &= \overline{(c(n+1) + d, c + d(n+1))}, & (c(n+1) + d, c + d(n+1)) &\sim (cn, dn).\end{aligned}$$

$\alpha < \beta$ significa que $a + d < b + c$, que implica em

$$(a + d)n < (b + c)n \Rightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma.$$

□

A introdução dos números inteiros a partir dos naturais permite estender a relação de ordem de forma que a lei da tricotomia seja preservada e estendida para cobrir os novos elementos (zero e negativos).

Teorema 3.16 (Lei da Tricotomia em $\mathbb{Z}$). ((Ferreira, 2010), p. 53)

Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos inteiros construído. Para qualquer elemento $\alpha \in \mathbb{Z}$, exatamente uma das seguintes condições é verdadeira:

1. α é um inteiro positivo ($\alpha \in \mathbb{Z}_+$).
2. α é o elemento nulo ($\alpha = 0$).
3. α é um inteiro negativo ($\alpha \in \mathbb{Z}_-$).

Demonstração. Seja $\alpha = \overline{(a, b)}$ uma classe de equivalência, onde $a, b \in \mathbb{N}$. Sabemos que, no conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, vale a propriedade da tricotomia. Logo, para os representantes a e b , temos três possibilidades mutuamente exclusivas: $a > b$, $a = b$ ou $a < b$.

• **Caso 1:** $a > b$

Se $a > b$, então existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $a = b + k$. A classe α pode ser escrita como:

$$\overline{(b + k, b)}$$

Observamos que $(b + k, b) \sim (k + 1, 1)$, pois $(b + k) + 1 = b + (k + 1)$. Portanto, $\alpha = \overline{(k + 1, 1)}$. Definimos o conjunto dos inteiros positivos $\mathbb{Z}_+$ como o conjunto de todas as classes desta forma. Assim, $\alpha \in \mathbb{Z}_+$.

• **Caso 2:** $a = b$

Se $a = b$, então a classe é $\overline{(a, a)}$. Observamos que $(a, a) \sim (1, 1)$, pois $a + 1 = a + 1$. Esta classe é única e independe de a . Definimos o zero como $0 = \overline{(1, 1)}$. Portanto, $\alpha = 0$.

• **Caso 3:** $a < b$

Se $a < b$, então existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $b = a + k$. A classe α torna-se:

$$\overline{(a, a + k)}$$

Observamos que $(a, a + k) \sim (1, k + 1)$, pois $a + (k + 1) = (a + k) + 1$. Definimos o conjunto dos inteiros negativos $\mathbb{Z}_-$ como o conjunto de classes desta forma. Assim, $\alpha \in \mathbb{Z}_-$.

Como os casos em $\mathbb{N}$ são mutuamente exclusivos, as categorias em $\mathbb{Z}$ também o são. Logo, $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_+$ é uma união disjunta.

□

3.3 A FUNÇÃO IMERSÃO E A NOTAÇÃO SIMBÓLICA

Para legitimar o uso de $\mathbb{Z}$ como uma extensão de $\mathbb{N}$, devemos demonstrar que existe uma cópia isomorfa de $\mathbb{N}$ contida em $\mathbb{Z}$. Formalizamos isso através de um homomorfismo injetor chamado imersão.

3.3.1 Definição Formal e Teoremas

Definição 3.7. Definimos a função $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ por:

$$\phi(n) = \overline{(n + 1, 1)}$$

Esta função associa cada número natural n à classe de equivalência que intuitivamente representa a diferença $(n + 1) - 1 = n$.

Teorema 3.17 (Injetividade da Função). ((Ferreira, 2010), p. 55)

A função ϕ é injetora.

Demonstração. Sejam $n, m \in \mathbb{N}$ tais que $\phi(n) = \phi(m)$.

$$\overline{(n + 1, 1)} = \overline{(m + 1, 1)}$$

Pela definição da relação de equivalência:

$$(n + 1) + 1 = 1 + (m + 1)$$

$$n + 2 = m + 2$$

Pela Lei do Cancelamento Aditivo em $\mathbb{N}$, temos que $n = m$. Logo, ϕ é injetora.

□

Teorema 3.18 (Preservação da Estrutura). ((Ferreira, 2010), p. 55)

Para que ϕ seja um isomorfismo estrutural sobre sua imagem, $\mathbb{Z}_+$, ela deve preservar a adição, a multiplicação e a ordem.

- **Preservação da Adição:** Queremos mostrar que $\phi(m + n) = \phi(m) + \phi(n)$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Calculando o lado esquerdo (aplicando a definição de ϕ na soma):

$$\phi(m + n) = \overline{((m + n) + 1, 1)}$$

Calculando o lado direito (somando as imagens):

$$\phi(m) + \phi(n) = \overline{(m + 1, 1)} + \overline{(n + 1, 1)}$$

Pela definição de adição em $\mathbb{Z}$ ($\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(a + c, b + d)}$):

$$\begin{aligned} &= \overline{((m + 1) + (n + 1), 1 + 1)} \\ &= \overline{(m + n + 2, 2)} \end{aligned}$$

Para concluir, devemos verificar se as classes $\overline{(m + n + 1, 1)}$ e $\overline{(m + n + 2, 2)}$ são iguais. Verificamos a relação de equivalência:

$$\begin{aligned} (m + n + 1) + 2 &\stackrel{?}{=} 1 + (m + n + 2) \\ m + n + 3 &= m + n + 3 \end{aligned}$$

A igualdade é verdadeira. Portanto, a adição é preservada.

□

- **Preservação da Multiplicação:** Queremos mostrar que $\phi(m \cdot n) = \phi(m) \cdot \phi(n)$.

Demonstração. Lado esquerdo:

$$\phi(m \cdot n) = \overline{(mn + 1, 1)}$$

Lado direito:

$$\phi(m) \cdot \phi(n) = \overline{(m + 1, 1)} \cdot \overline{(n + 1, 1)}$$

Pela definição de multiplicação ($\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = \overline{(ac + bd, ad + bc)}$):

$$\begin{aligned} &= \overline{((m + 1)(n + 1) + 1 \cdot 1, (m + 1) \cdot 1 + 1 \cdot (n + 1))} \\ &= \overline{((mn + m + n + 1) + 1, m + 1 + n + 1)} \\ &= \overline{(mn + m + n + 2, m + n + 2)} \end{aligned}$$

Verificamos a equivalência entre $\overline{(mn + 1, 1)}$ e $\overline{(mn + m + n + 2, m + n + 2)}$:

$$\begin{aligned} (mn + 1) + (m + n + 2) &\stackrel{?}{=} 1 + (mn + m + n + 2) \\ mn + m + n + 3 &= mn + m + n + 3 \end{aligned}$$

A igualdade é verdadeira. Portanto, a multiplicação é preservada.

□

- **Preservação da Ordem:** Queremos mostrar que $m < n \iff \phi(m) < \phi(n)$.

Demonstração.

$$\phi(m) < \phi(n) \iff \overline{(m+1, 1)} < \overline{(n+1, 1)}$$

Pela definição de ordem em $\mathbb{Z}$ ($\overline{(a, b)} < \overline{(c, d)} \iff a + d < b + c$):

$$(m+1) + 1 < 1 + (n+1)$$

$$m + 2 < n + 2$$

Pela lei do cancelamento da ordem em $\mathbb{N}$:

$$m < n$$

Logo, a ordem é estritamente preservada.

□

3.3.2 Definição dos Símbolos para os Inteiros

Com base na imersão e nas propriedades demonstradas, definimos a notação padrão:

- **Inteiros Positivos:** Identificamos o subconjunto $\phi(\mathbb{N})$ com os naturais.

$$+n := \phi(n) = \overline{(n+1, 1)}$$

- **Zero:** O elemento neutro aditivo.

$$0 := \overline{(1, 1)}$$

- **Inteiros Negativos:** Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $-n$ como o inverso aditivo de $+n$. O inverso de uma classe $\overline{(a, b)}$ é $\overline{(b, a)}$.

$$-n := \overline{(1, n+1)}$$

Isso completa a justificação formal para representarmos o Conjunto dos Números Inteiros como $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, +1, +2, \dots\}$.

3.4 FUNÇÕES SUCESSOR E ANTECESSOR

Uma das diferenças estruturais mais profundas entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ revela-se na análise das funções de sucessão e antecendência. Em $\mathbb{N}$, a aritmética tem um ponto de partida rígido; em $\mathbb{Z}$, ela é bidirecional e infinita.

3.4.1 A Função Sucessor

A função sucessor $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, dada por $S(n) = n + 1$, pode ser estendida para $\mathbb{Z}$ naturalmente:

$$S_{\mathbb{Z}}(z) = z + 1_{\mathbb{Z}} = z + \overline{(2, 1)}$$

Se $z = \overline{(a, b)}$, então:

$$S_{\mathbb{Z}}(\overline{(a, b)}) = \overline{(a + 2, b + 1)} = \overline{(a + 1, b)} = \overline{(S(a), b)}$$

A função sucessor em $\mathbb{Z}$ é uma bijeção. Cada inteiro tem um sucessor único.

3.4.2 A Função Antecessor

Aqui reside a distinção crítica. Em $\mathbb{N}$, o elemento 1 não possui antecessor (não existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n + 1 = 1$).

Em $\mathbb{Z}$, definimos a função antecessor $A : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ como a inversa da função sucessor, ou a adição de -1 :

$$A(z) = z + (-1) = z + \overline{(1, 2)}$$

Se aplicarmos isso a uma classe genérica $z = \overline{(a, b)}$:

$$A(\overline{(a, b)}) = \overline{(a, b)} + \overline{(1, 2)} = \overline{(a + 1, b + 2)} = \overline{(a, b + 1)} = \overline{(a, S(b))}$$

Exemplo 3.19 (O Antecessor de 1). Vamos calcular o antecessor do inteiro $+1$ (que corresponde ao natural 1). Seja $+1 = \overline{(2, 1)}$.

$$A(+1) = \overline{(2 + 1, 1 + 2)} = \overline{(3, 3)}$$

Sabemos que a classe $\overline{(3, 3)}$ é igual a $\overline{(1, 1)}$, pois $3 + 1 = 3 + 1$. E definimos $\overline{(1, 1)}$ como o **zero**. Portanto, em $\mathbb{Z}$, o número 1 tem antecessor, 0, algo impossível no conjunto dos números naturais.

4 PRODUTO EDUCACIONAL

O desenvolvimento deste Produto Educacional, composto pela sequência didática que integra os jogos "Corrida ao Zero", "Gestão de Saldo" e "Combinação 100", nasce da necessidade urgente de ressignificar o ensino dos números inteiros no Ensino Fundamental II. A transição do conjunto dos números naturais para o conjunto dos inteiros representa um dos marcos mais complexos na vida escolar do estudante, pois exige a ruptura com o pensamento puramente aritmético em direção a um pensamento mais abstrato e algébrico. Como destaca Caraça (1951), a história da matemática nos mostra que a aceitação dos números negativos não foi imediata, refletindo-se na resistência cognitiva dos alunos ao confrontarem valores que "não representam nada físico" à primeira vista. Esse cenário exige o que Shulman (1986) define como o conhecimento pedagógico do conteúdo, unindo o rigor técnico à estratégia didática necessária para superar tais obstáculos.

As dificuldades observadas em sala de aula são o motor principal desta proposta. Identifica-se que, enquanto a soma entre números positivos ou situações em que o saldo é superior à dívida são conceitos assimilados com relativa facilidade, o obstáculo torna-se severo em operações que envolvem o acúmulo de negatividade. Uma das maiores barreiras é levar o aluno a aceitar que a soma de duas dívidas resulta em uma dívida ainda maior em módulo, como no exemplo $-5-5 = -10$. Para muitos, a ideia de "somar" está intrinsecamente ligada ao aumento de valor positivo, gerando um conflito lógico quando o resultado é um afastamento ainda maior do ponto zero para a esquerda da reta numérica.

Posteriormente, surge a dificuldade em lidar com cenários onde a dívida supera o saldo disponível. Nesse estágio, o aluno frequentemente tenta forçar um resultado positivo por não conceber a existência de um saldo final negativo como uma resposta válida para um problema real. Por fim, a barreira da "regra de sinais" na multiplicação e divisão frequentemente se torna um processo de memorização mecânica, desprovido de sentido prático, onde o estudante aplica fórmulas sem compreender a inversão de estados que os sinais representam. Segundo Chevallard (1991), esse fenômeno de despersonalização do saber ocorre quando o conhecimento escolar se descola de sua utilidade e gênese, tornando-se apenas um conjunto de regras arbitrárias para aprovação.

Este produto educacional propõe, portanto, a utilização da gamificação e da contextualização financeira como ferramentas para superar esses obstáculos. Essa escolha justifica-se pelo potencial da gamificação em transformar o ambiente de aprendizagem em um espaço de experimentação ativa, onde o caráter lúdico reduz a resistência ao conteúdo abstrato e estimula a persistência através de ciclos de feedback imediato. Ao vivenciar fisicamente o deslocamento na reta numérica com o jogo "Corrida ao Zero", ao gerir um orçamento doméstico simulado no jogo "Gestão de Saldo" ou ao

aplicar estratégias de anulação e multiplicação no "Combinação 100", o estudante deixa de ser um executor de regras para tornar-se um investigador matemático. A proposta visa transformar o erro em oportunidade estratégica e a abstração em ferramenta de leitura de mundo, garantindo que o aprendizado dos números inteiros seja sólido, intuitivo e, sobretudo, significativo.

4.1 ADIÇÃO ENTRE NÚMEROS POSITIVOS E NEGATIVOS

O estudo dos números inteiros representa um dos marcos mais significativos na transição do pensamento aritmético para o pensamento algébrico. Para muitos estudantes, a introdução de valores negativos pode parecer abstrata e desafiadora. Com o objetivo de tornar esse processo intuitivo e significativo, estruturamos o tópico Adição entre Números Positivos e Negativos através de uma sequência didática dividida em três etapas fundamentais, que conduzem o aluno da exploração lúdica à aplicação prática no cotidiano.

A metodologia adotada utiliza a gamificação como porta de entrada para a compreensão de conceitos complexos, seguindo o cronograma abaixo:

- Etapa 1: A Vivência Lúdica (O Jogo Corrida ao Zero). Nesta fase inicial, o foco é a experimentação. Através do jogo "Corrida ao Zero", o estudante interage com a reta numérica de forma dinâmica. Os conceitos de "avançar" (positivo) e "recuar" (negativo) são vivenciados fisicamente no tabuleiro. O jogo estabelece as bases intuitivas para o entendimento de saldo, movimento relativo e a importância do elemento neutro (o zero) como ponto de equilíbrio.
- Etapa 2: A Formalização do Pensamento (Exercícios de Fixação). Após a prática no tabuleiro, o aluno é conduzido à abstração. Nesta segunda etapa, os exercícios de fixação retiram o suporte visual imediato do jogo e desafiam o estudante a realizar operações mentais e escritas. O objetivo é migrar a linguagem do jogo (dado azul e dado vermelho) para a simbologia matemática formal (+ e -), consolidando o domínio das propriedades da adição de inteiros e o raciocínio lógico-matemático.
- Etapa 3: A Transposição Prática (Contextualização e Migração). A etapa final foca na aplicabilidade. Aqui, o conhecimento deixa de ser apenas uma regra escolar e torna-se uma ferramenta de leitura do mundo. Através de situações-problema que envolvem educação financeira, variações térmicas e altitudes, o estudante percebe que os números positivos e negativos regem sistemas reais de controle e tomada de decisão. É o momento em que o aluno "migra" o conceito do tabuleiro para a vida, desenvolvendo autonomia e competência crítica.

- Etapa 4: Aferição da Competência (Teste 1). O ciclo se encerra com a verificação da autonomia individual. O Teste 1 atua como um instrumento diagnóstico para confirmar se a transição do suporte físico (tabuleiro) para o raciocínio abstrato foi efetivada. Nesta fase, avalia-se a capacidade do estudante de operar as regras de sinais, interpretar enunciados contextualizados e aplicar a lógica estratégica desenvolvida no jogo em situações de teste formal, garantindo que o conhecimento foi internalizado e não apenas mecanizado.

Essa abordagem está alinhada às competências da BNCC, pois promove o desenvolvimento do raciocínio lógico, da investigação e da resolução de problemas em contextos variados. Ao transformar a aprendizagem em um processo de camadas — onde cada etapa oferece um novo nível de complexidade — garantimos que o estudante não apenas decore “regras de sinais”, mas compreenda a natureza dos números inteiros e sinta-se seguro para utilizá-los em sua jornada acadêmica e cidadã.

4.1.1 Atividade 1 - Corrida ao Zero

Objetivo Geral

O jogo Corrida ao Zero apresenta como objetivo geral promover o domínio da reta numérica e das operações com números inteiros de forma lúdica e estratégica, permitindo que o estudante compreenda a matemática como uma ferramenta de navegação e tomada de decisão. Conforme aponta Dante (2011), o uso de situações lúdicas funciona como um cenário propício para a resolução de problemas, permitindo que o aluno construa significados próprios sobre os conceitos abordados. Essa prática alinha-se ao pensamento de Kishimoto (2011) sobre a relevância do jogo como material educativo que estimula a exploração de conceitos abstratos por meio da experimentação. Nesse sentido, a plataforma Canva (2026) foi utilizada para a confecção, design e diagramação do tabuleiro, dados e pinos, garantindo que o suporte material estivesse alinhado à proposta estética e pedagógica. Pedagogicamente, a atividade fundamenta-se na Competência 2 da BNCC, ao fomentar o raciocínio lógico e a investigação, exigindo que o aluno antecipe resultados e planeje movimentos para consolidar as operações em $\mathbb{Z}$.

Objetivos Específicos

- Contemplar diretamente a habilidade EF07MA03, que trata da comparação e ordenação de números inteiros em diferentes contextos.
- Atender à habilidade EF07MA04, ao exigir a resolução de problemas que envolvam adições e subtrações com inteiros.
- Integrar conceitos de direção, sentido e valor absoluto, transformando o tabuleiro em um laboratório prático para a exploração dos números positivos e negativos.
- Levar o aluno a aplicar corretamente as regras de adição de números inteiros, especialmente na "Zona de Soma", onde a combinação de vetores opostos exige cálculo mental preciso.
- Desenvolver a percepção espacial na reta numérica, associando o sinal positivo ao movimento para a direita e o sinal negativo ao movimento para a esquerda.
- Incentivar a gestão de risco e o desenvolvimento de competências socioemocionais, estimulando a resiliência e a reorganização do raciocínio matemático diante de novos desafios.
- Consolidar o conceito de elemento neutro e simétrico, fortalecendo competências cognitivas essenciais para o aprendizado das ciências exatas.

Materiais

Para a implementação do jogo em sala de aula, este trabalho disponibiliza no APENDICE B todos os moldes necessários para a criação do material de forma prática e acessível. O kit de componentes é composto por:

- **Tabuleiro:** Quatro seções impressas que compreendem os intervalos numéricos de -10 a -5 , de -4 a 1 , de 2 a 7 e de 8 a 10 . Três delas possuem margens laterais em branco projetadas para a união precisa das peças.
- **Dados de Papel:** Moldes para a construção de dois dados convencionais de seis faces, sendo um na cor azul (movimentos positivos) e outro na cor vermelha (movimentos negativos).
- **Peões:** Pequenos círculos coloridos que devem ser recortados pelos participantes.
- **Recursos Alternativos:** O professor possui total liberdade para utilizar materiais que já possua na unidade escolar. Pinos de plástico, tampinhas de garrafa ou peões de madeira podem substituir os marcadores de papel. Da mesma forma, dados plásticos reais podem ser adaptados com adesivos coloridos para identificar as polaridades, facilitando a preparação da aula.

Confeção

A montagem do material é o momento em que o professor atua como coordenador técnico e facilitador do engajamento. A preparação deve seguir os seguintes critérios:

- **Alinhamento e Precisão:** O docente deve supervisionar a colagem das seções do tabuleiro, garantindo que a transição entre cada casa signifique $+1$ ou -1 . Essa precisão é vital para evitar erros de interpretação espacial da reta numérica.
- **Reforço e Durabilidade:** Para suportar o manuseio constante, recomenda-se que o papel impresso seja colado sobre uma base rígida (papel cartão ou papelão) ou plastificado após a montagem.
- **Adaptabilidade Pedagógica:** A identidade visual é flexível. O professor pode estabelecer com a turma novas convenções cromáticas, como o uso de dados amarelos e vermelhos (em analogia ao jogo War, clássico de estratégia militar onde os dados vermelhos representam o ataque e os amarelos a defesa). Incentivar os alunos a trazerem materiais de casa e participarem da definição das cores aumenta o sentido de posse e o entusiasmo com o projeto.

Duração

Considerando o tempo de confecção do material, a explicação detalhada das regras e a dinâmica de jogo, a atividade é planejada para duas aulas de 50 minutos (ou uma aula dupla de 100 minutos). Este tempo garante que o professor consiga realizar paradas pedagógicas para discutir estratégias e que todos os alunos experimentem os diferentes cenários matemáticos propostos.

Execução

No início da partida, os jogadores posicionam-se nas extremidades (-10 e $+10$). Embora o padrão seja para duplas, a dinâmica permite grupos de até quatro pessoas, o que amplia a interação social. Durante a atividade, o professor deve assumir o papel de mediador estratégico:

- **Monitoramento da "Zona de Soma":** O docente deve circular entre os grupos especialmente quando um dos peões entra no intervalo entre -5 e $+5$, observando-se a regra de obrigatoriedade do lançamento dos dois dados nesta região (detalhada adiante nas Regras do Jogo) e se o cálculo mental da soma algébrica está correto.
- **Mediação da Direcionalidade:** Caso o aluno tenha dificuldade em converter o cálculo em movimento, o professor deve intervir reforçando a associação: "Resultado positivo, para onde o peão deve navegar? E se for negativo?".
- **Fiscalização Coletiva e Estratégia:** Em grupos maiores, os alunos devem ser instigados a monitorar os cálculos uns dos outros. O professor pode provocar o raciocínio clínico perguntando: "Você está na casa -6 , qual dado você escolheria para chegar mais perto do zero sem cair na Zona de Soma?".
- **Abstração do Conhecimento:** O professor deve destacar que a movimentação deixa de ser uma tarefa de memorização e passa a ser uma experiência de navegação espacial. O objetivo pedagógico de lidar com a frustração de ultrapassar o alvo, porque mesmo chegando muito próximo em ± 1 não se obtém uma vitória, se transforma em oportunidade de reorganização de estratégia que envolve noções de probabilidade.

Forma de Abstrair Conhecimento

Em um nível pedagógico mais profundo, o jogo tem o papel de fortalecer o cálculo mental enquanto estimula competências cognitivas. A movimentação entre os números inteiros deverá deixar de ser uma tarefa de memorização para tornar-se uma experiência de navegação, onde os conceitos de direção e sentido poderão ser internalizados. Segundo Grando (2004), a passagem do jogo para o conhecimento

formal requer uma mediação docente que permita ao aluno refletir sobre a ação realizada no tabuleiro, transformando a estratégia lúdica em saber matemático consciente. O professor deve buscar destacar que a 'Zona de Soma' representará o ponto alto da aprendizagem, incitando o estudante a lidar com a natureza dual dos números simultaneamente. Ao final, pretende-se que o foco não seja apenas a disputa, mas a construção de uma base sólida onde a ultrapassagem do alvo (o 0 no tabuleiro) possa ser transformada pelo professor em uma oportunidade estratégica de aprendizado.

Regras do Jogo

O jogo Corrida ao Zero é uma atividade estratégica desenvolvida para praticar a movimentação na reta numérica e a compreensão de números inteiros. O tabuleiro consiste em uma trilha de 21 casas numeradas sequencialmente de -10 a $+10$, tendo o número 0 como o ponto central e objetivo final. Para a partida, são necessários dois peões de cores distintas e dois dados de cores diferentes: um dado azul, que representa valores positivos (movimento para a direita), e um dado vermelho, que representa valores negativos (movimento para a esquerda).

No início da partida, os dois jogadores posicionam seus peões nas extremidades opostas do tabuleiro; enquanto um começa na casa -10 , o outro inicia na casa $+10$. O objetivo principal é percorrer a trilha e ser o primeiro a pousar exatamente na casa 0. A dinâmica do jogo é baseada em turnos alternados, nos quais a posição atual do peão determina quais dados o jogador poderá ou deverá utilizar para realizar seu movimento.

Enquanto o jogador estiver fora da chamada "Zona de Soma" – ou seja, posicionado entre as casas -10 e -6 ou entre $+6$ e $+10$ – ele possui maior liberdade de escolha. Nesse estágio, é permitido rolar apenas o dado azul para avançar para a direita, apenas o dado vermelho para recuar para a esquerda, ou ainda arriscar rolar ambos os dados simultaneamente para combinar seus valores. Essa flexibilidade permite que o jogador se aproxime do centro de forma mais controlada no início da corrida.

A complexidade aumenta quando o peão entra na "Zona de Soma", que compreende o intervalo entre as casas -5 e -1 e entre $+1$ e $+5$. Ao estar nessas casas, o jogador é obrigatoriamente forçado a rolar os dois dados. O movimento final é determinado pela soma algébrica dos resultados: o valor do dado azul (positivo) somado ao valor do dado vermelho (negativo). Se o resultado final dessa operação for um número positivo, o peão desloca-se para a direita; se for negativo, desloca-se para a esquerda; e caso a soma resulte em zero, o peão permanece imóvel naquela rodada.

Diferente de outros jogos de trilha, o movimento não é interrompido caso o jogador ultrapasse o ponto zero. Se a soma dos dados resultar em um valor que leve o peão para além do objetivo, o jogador deve realizar o movimento completo e parar

na casa correspondente, continuando a partida dali. Isso significa que é perfeitamente possível sair da "Zona de Soma" e retornar para as extremidades do tabuleiro; nesse caso, o jogador volta a ter a liberdade de escolher qual dado jogar até que entre novamente na zona obrigatória de soma. A vitória, contudo, permanece vinculada à precisão: o jogo só termina quando um competidor consegue, através de seus cálculos e da sorte nos dados, parar o seu peão exatamente sobre a casa zero.

Casos Especiais

Para compreender a profundidade estratégica e os nuances matemáticos do jogo, o professor pode utilizar os casos especiais a seguir:

- O Dilema na Fronteira da Zona de Soma: Imagine um jogador que inicia seu turno com o peão posicionado exatamente na casa -6 . Pela regra, ele ainda possui o direito de escolha, pois não entrou no território obrigatório. Se ele optar por lançar apenas o dado azul e tirar um 5, seu peão saltará para a casa -1 . O ponto crucial aqui é que, ao fazer esse movimento, ele aterrissa dentro da Zona de Soma, o que significa que, em sua próxima jogada, ele perderá a liberdade de usar apenas um dado e será forçado a calcular a combinação de ambos, o que pode tornar o ajuste final para o zero muito mais imprevisível. O professor pode discutir: "Valeu a pena ganhar distância mas perder a liberdade de escolher o dado na próxima rodada?".
- Movimento Nulo na Zona de Soma: Considere um jogador que já está posicionado na casa $+3$ e, por obrigação, lança os dois dados. Se o dado azul resultar em 4 e o dado vermelho também resultar em 4, a operação matemática será $(+4) + (-4) = 0$. Neste caso, embora o jogador tenha cumprido sua obrigação de jogar, o deslocamento resultante é inexistente. O peão permanece estático na casa $+3$, demonstrando como forças opostas de igual valor se anulam na reta numérica, resultando em um turno sem progresso espacial, mas que mantém o jogador na "Zona de Soma". O professor pode usar isso para explicar como forças opostas de igual valor se anulam.
- Ultrapassando o Zero e Mudando de Lado: Suponha que um competidor esteja na casa -2 e, ao lançar os dados, obtenha um 6 no azul e um 1 no vermelho. O cálculo $(-2) + 6 - 1$ resulta em um saldo positivo de 3, levando o peão para a casa $+3$. Pela regra de movimentação contínua, ele não vence o jogo e nem perde a vez; ele simplesmente atravessa a fronteira do zero e passa a jogar do "lado positivo" do tabuleiro. A partir de agora, seu objetivo muda ligeiramente de perspectiva, pois ele precisará de um resultado líquido negativo em suas próximas somas para tentar retornar ao centro. O docente deve observar se o

aluno compreendeu que agora precisa de resultados negativos para voltar ao centro.

- Saída estratégica da Zona de Soma: Imagine o mesmo jogador que atravessou para o lado positivo e agora está na casa +1. Em uma jogada azarada, ele tira 1 no azul e 6 no vermelho, resultando em um recuo para a casa -4. Se na jogada seguinte ele tirar um resultado líquido de -4 (como 1 no azul e 5 no vermelho), ele parará na casa -8. Embora esteja mais longe do objetivo final, essa saída da Zona de Soma pode ser vista como uma oportunidade de reorganização, já que, ao estar no -8, ele recupera o direito de escolher jogar apenas o dado azul na próxima rodada, permitindo um avanço mais preciso e sem a interferência negativa do dado vermelho.
- Precisão Matemática necessária para a Vitória: Como os dados possuem apenas faces de 1 a 6, o jogador na Zona de Soma só atingirá o objetivo se a combinação dos valores resultar exatamente na distância que o separa do zero. Por exemplo, se um jogador está na casa -3, ele precisa que o resultado de (Azul - Vermelho) seja exatamente +3. Isso pode acontecer com combinações como 4 no azul e 1 no vermelho, 5 no azul e 2 no vermelho, ou 6 no azul e 3 no vermelho. Caso ele tire, por exemplo, 6 no azul e 1 no vermelho, ele resultará em um avanço de 5 casas, parando na casa +2 e continuando o jogo dali. Essa mecânica reforça que a vitória não depende apenas de chegar perto, mas de encontrar o equilíbrio exato entre os valores positivos e negativos.

Possíveis Casos

Devido à pluralidade de combinações no jogo Corrida ao Zero, selecionamos dois cenários distintos para análise. Na Figura 1, observa-se que o Jogador Rosa ocupa a casa -5, enquanto o Jogador Azul posiciona-se na casa 5. No lançamento dos dados, obteve-se o valor 6 no dado azul e 1 no dado vermelho. Considerando que o azul representa valores positivos e o vermelho, valores negativos, o cálculo resultante é $6 - 1 = 5$. Consequentemente, o jogador da vez deverá avançar 5 casas à direita. Sendo o turno do Jogador Azul, este retornará para a casa 10; caso fosse o turno do Jogador Rosa, este alcançaria a vitória.

Na Figura 2, o Jogador Rosa encontra-se na casa -1 e o Jogador Azul na casa 3. Com o resultado de 3 no dado azul e 6 no dado vermelho, a operação é $-6 + 3 = -3$. Portanto, o movimento consiste em deslocar-se 3 casas à esquerda. Se fosse a vez do Jogador Rosa, ele se deslocaria até a casa -4. Contudo, sendo o turno do Jogador Azul, este atinge o marco zero, vencendo a partida.

Figura 1 – Caso 1.

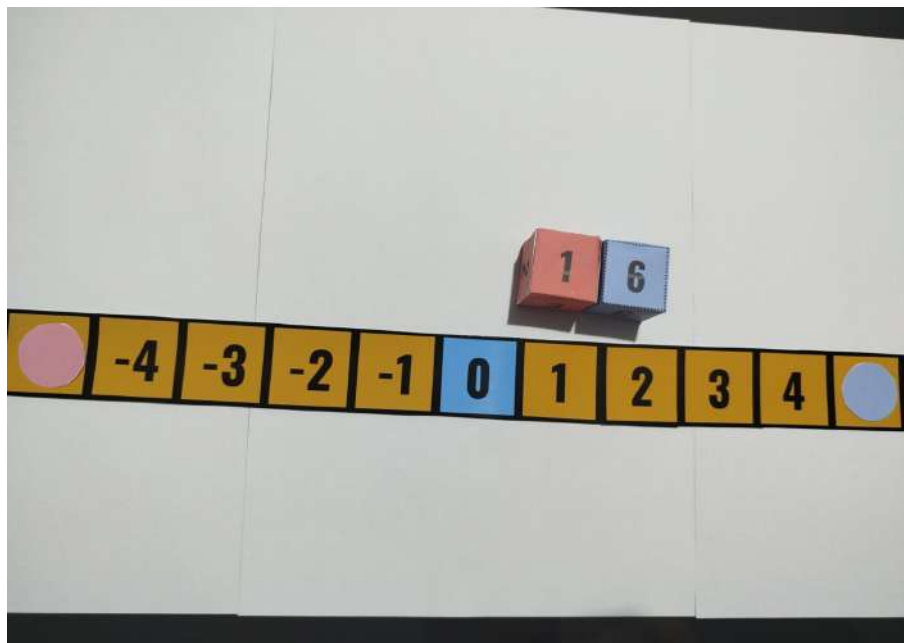
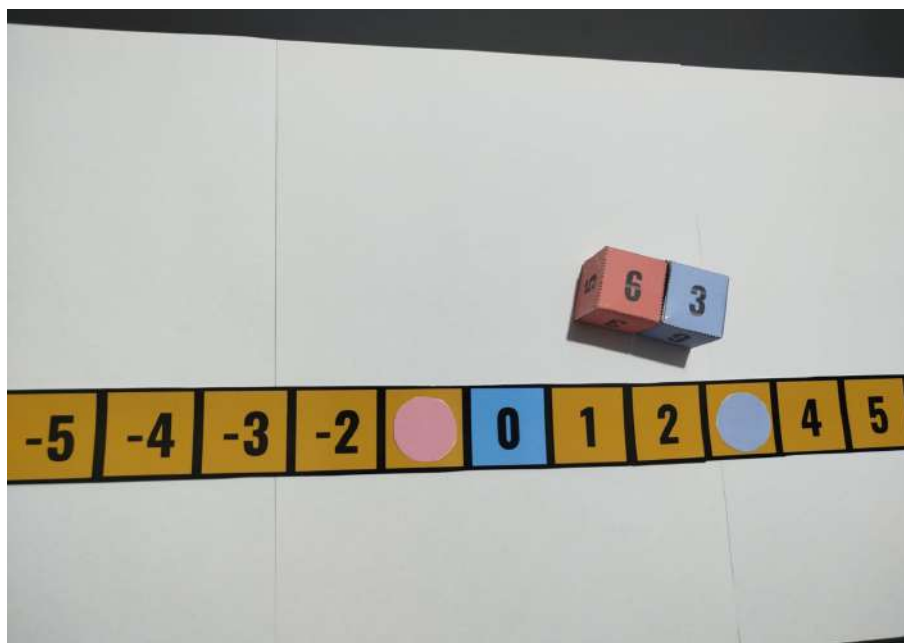


Figura 2 – Caso 2.



Conclusão

Em suma, o jogo Corrida ao Zero propõe-se a ser um recurso didático para a transposição do pensamento abstrato para uma compreensão espacial e concreta da reta numérica. Ao longo da proposta, pretende-se que a movimentação entre números inteiros deixe de ser uma tarefa de memorização e torne-se uma experiência de navegação, onde os conceitos de direção e sentido serão internalizados por meio da prática. A introdução da 'Zona de Soma' atuará como o ponto alto desse processo, com o objetivo de desafiar o estudante a lidar com a natureza dual dos números positivos e

negativos de forma simultânea e estratégica.

Sob a mediação do professor, a atividade transforma o tabuleiro em um ambiente de investigação no qual ultrapassar o alvo e precisar redirecionar o movimento é ressignificado como uma oportunidade de reorganização do raciocínio. Ao finalizar este ciclo, o jogo cumpre integralmente seu papel pedagógico ao fortalecer o cálculo mental e a resolução de problemas, preparando o aluno com competências essenciais para as ciências exatas. Assim, a reta numérica deixa de ser um conceito estático para tornar-se um verdadeiro mapa de decisões, fundamentado no rigor matemático e na autonomia.

4.1.2 Atividade 2 - Exercícios de Fixação

Objetivo Geral

Consolidar o entendimento da reta numérica e a operacionalização de números inteiros (adição e subtração) através da transposição da mecânica lúdica para o raciocínio abstrato.

Objetivos Específicos

- Desenvolver a habilidade de associar direções espaciais (direita/esquerda) a sinais matemáticos (positivo/negativo).
- Praticar o cálculo mental envolvendo múltiplos passos (posição inicial + avanço - recuo).
- Estimular a análise estratégica e a antecipação de resultados baseada em regras de probabilidade e restrição (Zona de Soma).
- Internalizar o conceito de elemento oposto (simétrico) e o resultado nulo na soma de inteiros.

Materiais

Para o desenvolvimento desta atividade, os alunos deverão utilizar a folha de exercícios de fixação disponível para download no APÊNDICE B. Além do material impresso e itens de escrita (lápis e borracha), será essencial o uso compartilhado do tabuleiro da Corrida ao Zero e dos dados utilizados na Atividade 1, servindo como laboratório de teste para as situações-problema propostas.

Duração

A atividade está prevista para durar 50 minutos, divididos em: 5 minutos para organização dos grupos e explicação; 35 minutos para a resolução conjunta dos exercícios; e 10 minutos para o fechamento pedagógico e correção das estratégias mais complexas.

Execução

A execução desta atividade visa transpor a experiência prática para o raciocínio formal. A organização ideal para esta etapa é em duplas ou pequenos grupos (até 4 alunos). Embora a entrega da folha de exercícios possa ser individual para garantir o registro, o trabalho coletivo é incentivado para otimizar o uso dos tabuleiros e permitir que os estudantes debatam as jogadas.

Durante o processo, o professor deve atuar como um provocador cognitivo e mediador, circulando entre os grupos com as seguintes funções:

- Validar a transposição: Garantir que o aluno entenda que o "Dado Azul" representa um deslocamento positivo ($+x$) e o "Dado Vermelho" um deslocamento negativo ($-x$).
- Estimular a argumentação: Em questões estratégicas (como a 8 e a 14), pedir que os alunos expliquem o "porquê" da escolha antes de escreverem.
- Fiscalizar a Zona de Soma: Intervir caso perceba que algum grupo está esquecendo a obrigatoriedade dos dois dados nas casas entre -5 e $+5$.
- Gestão de Recursos: Garantir que todos os integrantes do grupo tenham a oportunidade de manipular o peão no tabuleiro para testar suas hipóteses.

Os exercícios a serem resolvidos são:

1. Um jogador começa a partida na casa -10 . Ele lança apenas o dado azul e tira o número 4. Em qual casa ele deve colocar o seu peão?
2. O peão de Marcos está na casa -8 . Ele deseja se aproximar do zero, mas quer evitar entrar na "Zona de Soma" (casas entre -5 e -1) nesta rodada. Qual é o maior valor que ele pode tirar no dado azul para cumprir esse objetivo?
3. Um jogador está na casa -7 . Ele lança o dado azul e tira 6. Ao realizar o movimento, ele passa a ocupar uma casa dentro ou fora da "Zona de Soma"?
4. Na "Zona de Soma", o uso dos dois dados é obrigatório. Se um jogador está na casa -3 e tira 5 no azul e 2 no vermelho, para qual casa o seu peão deve ser deslocado?
5. Imagine que você está na casa $+4$. Por estar na Zona de Soma, você lança os dois dados e tira 3 no azul e 3 no vermelho. Descreva o que acontece com a posição do seu peão após essa jogada.
6. A vitória só acontece com o pouso exato no zero. Se você está na casa -2 e tira 6 no azul e 1 no vermelho, você ganha o jogo? Se não, em qual casa o seu peão irá parar?
7. Um jogador está na casa $+1$. Ele lança os dados e obtém 2 no azul e 6 no vermelho. Após o movimento, o peão terminará do lado positivo ou do lado negativo da reta numérica? Qual a casa exata?
8. Estrategicamente, se o seu peão está na casa $+9$, qual cor de dado é mais vantajosa para você escolher e jogar sozinho? Justifique sua escolha.

9. Um competidor está na casa -5 . Ele lança os dados obrigatórios e tira 1 no azul e 5 no vermelho. Determine a nova casa do jogador e responda: na próxima rodada, ele ainda será obrigado a lançar os dois dados?
10. Durante a partida, um aluno afirma: "Para eu ganhar estando na casa $+4$, eu preciso que o valor do dado vermelho seja 4 unidades maior que o valor do dado azul". Ele está correto? Explique o porquê.
11. O peão de Ana está na casa -2 e ela tira 6 no azul e 4 no vermelho. O peão de Bruno está na casa $+4$ e ele tira 1 no azul e 3 no vermelho. Qual dos dois jogadores terminou a rodada mais próximo do objetivo final (o zero)?
12. Um jogador está na casa $+5$ e, por estar na Zona de Soma, deve lançar obrigatoriamente os dois dados. Ele obtém 2 no dado azul e 6 no dado vermelho. Determine a posição final do peão e explique se, após esse movimento, o jogador permaneceu no lado positivo ou passou para o lado negativo da reta numérica.
13. Analise esta jogada: Posição inicial -1 . Dados sorteados: Azul 6 e Vermelho 5. O jogador conseguiu atingir o objetivo de chegar ao zero? Em qual casa ele parou?
14. Pensando na liberdade de escolha dos dados, por que estar na casa -6 pode ser estrategicamente melhor do que estar na casa -1 ?
15. Se você está na casa $+3$, invente uma combinação de valores para o dado azul e para o dado vermelho que resulte em uma vitória imediata (pouso exato no zero).

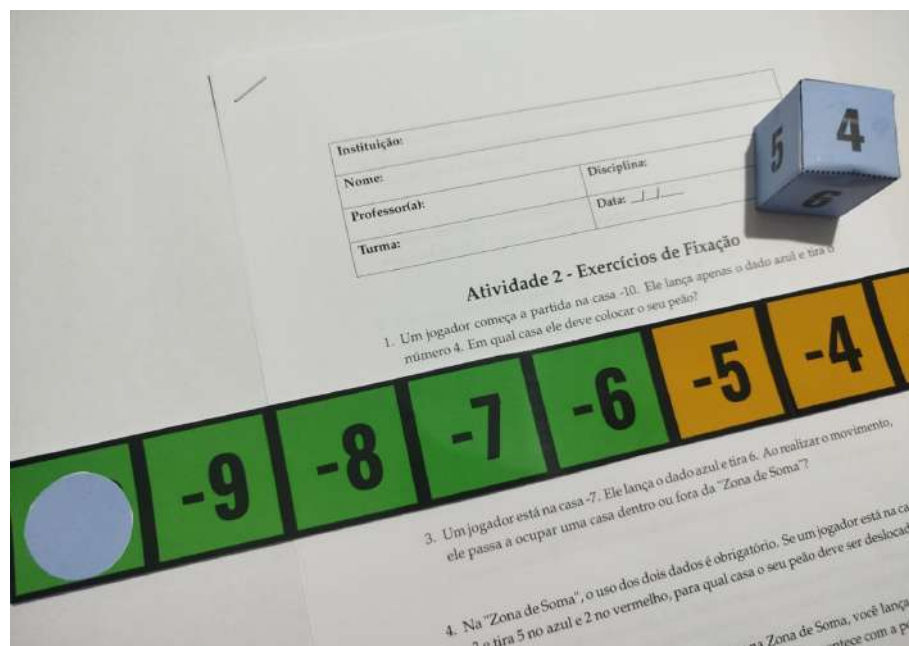
Forma de Abstrair Conhecimento

Uma forma de abstrair o conhecimento desta atividade é através da visualização mental da reta numérica. O aluno não deve apenas "fazer a conta", mas sim imaginar o peão se deslocando no tabuleiro. Ao retirar as fórmulas prontas e utilizar a linguagem dos dados (Azul e Vermelho), obrigamos o cérebro a realizar uma tradução semiótica: transformar uma cor e um valor em um vetor de movimento. Para potencializar isso, o professor pode pedir que, antes de escreverem o resultado, os alunos desenhem setas sobre uma reta impressa, consolidando a relação entre a aritmética e a geometria da reta.

Possíveis Casos

Para a resolução dos exercícios de fixação, é possível utilizar o tabuleiro em conjunto com os dados como recurso didático. Como demonstrado na Figura 3, apresenta-se a resolução do primeiro exercício: o enunciado é transposto para o

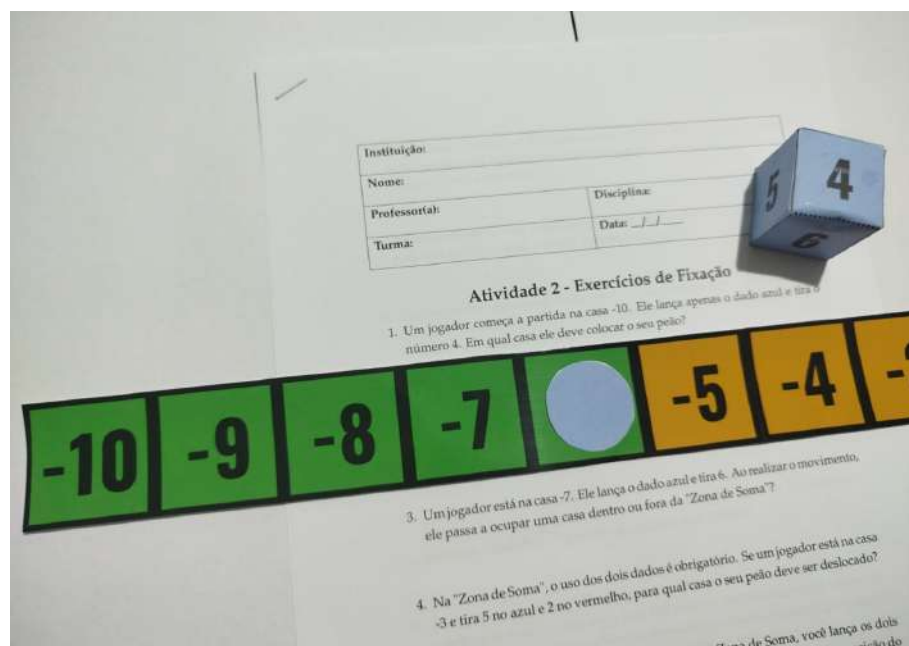
Figura 3 – Caso 3: Parte 1.



tabuleiro, posicionando-se o pino na casa – 10 e o dado azul com a face 4 voltada para cima.

A Figura 4, a seguir, ilustra a execução do movimento, resultando na posição –6, que constitui a resposta correta da questão.

Figura 4 – Caso 3: Parte 2.



Conclusão

Esta atividade funcionará como a ponte definitiva entre o 'brincar' e o 'formalizar'. Ao resolver situações-problema que simulam a partida, o aluno deixará de ser apenas um jogador dependente da sorte e passará a ser um estrategista que domina as leis matemáticas do jogo. A conclusão lógica será que a matemática dos números inteiros é, na verdade, um sistema de coordenadas que permite prever onde chegaremos, tornando o aprendizado significativo e prático.

4.1.3 Atividade 3 - Exercícios Contextualizados

Objetivo Geral

Aplicar os conceitos de números inteiros em situações cotidianas, realizando a transição da linguagem do jogo (Azul/Vermelho) para a linguagem matemática formal (Positivo/Negativo/Saldo).

Objetivos Específicos

- Interpretar situações de lucro/prejuízo, temperatura e altitude como movimentos em uma reta numérica.
- Utilizar a lógica da "Zona de Soma" para compreender o equilíbrio de contas e variações térmicas.
- Formalizar a escrita matemática a partir de problemas narrativos.
- Desenvolver a autonomia na resolução de problemas de adição e subtração sem o auxílio visual imediato do tabuleiro.

Materiais

Para a realização desta atividade, os alunos deverão utilizar a folha de "Exercícios Contextualizados" disponível no APÊNDICE B, que serve como o registro formal da transição para a linguagem matemática. Além do material de escrita individual, é fundamental que cada grupo tenha acesso ao tabuleiro da Corrida ao Zero e aos dados (Azul e Vermelho). Embora o objetivo final seja a autonomia e a abstração, o tabuleiro funciona aqui como um "porto seguro" para a validação de hipóteses, permitindo que o estudante comprove fisicamente o que o problema descreve textualmente.

Duração

Esta atividade está planejada para uma aula de 50 minutos. A distribuição recomendada do tempo consiste em 10 minutos para a introdução dos conceitos de "palavras-chave" (identificação de sinais em textos), 30 minutos para a resolução dos problemas contextualizados em grupo e os 10 minutos finais para o fechamento da atividade, onde o professor conecta os resultados das questões com a formalização da escrita de expressões numéricas.

Execução

A execução desta atividade marca o momento de integração do projeto, onde o aluno deixa de ser apenas um jogador para se tornar um analista de situações reais. O ideal é que a atividade seja realizada em grupos de até 4 pessoas, permitindo que

os alunos debatam as situações cotidianas e compartilhem o uso dos tabuleiros para simular os cenários propostos. O professor, durante este processo, deve atuar como um tradutor semiótico, circulando entre os grupos para desempenhar funções cruciais: auxiliar os estudantes a identificarem palavras que indicam valor (como "abaixo de", "dívida" ou "descida"), incentivar a comparação entre o saldo financeiro e a posição no tabuleiro e, principalmente, desafiar os alunos a abandonarem gradualmente o deslocamento físico do peão em favor do cálculo mental. O papel docente é garantir que a "lógica dos dados" seja convertida com sucesso na "lógica dos sinais", consolidando a compreensão de que o zero é o ponto de equilíbrio em diversos sistemas.

Os exercícios que compõem esta etapa são:

1. Um termômetro marcava $5^{\circ}C$ abaixo de zero. Durante a tarde, a temperatura teve um aumento de $3^{\circ}C$. Qual a nova temperatura? (Pense no termômetro como a reta do jogo).
2. Imagine que sua conta bancária é um tabuleiro. Você tem um saldo de R\$10,00. Se você pagar um lanche de R\$15,00, em qual "casa" (saldo) sua conta vai parar?
3. Um mergulhador está a 7 metros de profundidade (casa -7). Ele decide subir 6 metros. Ele já saiu da "Zona de Soma" da água (superfície) ou ainda está mergulhado?
4. Um elevador de shopping liga o subsolo aos andares de lojas. Se o subsolo é a casa -2 e o elevador sobe 5 andares, em qual andar ele para?
5. Em um campeonato de futebol, o time de Londrina tem um saldo de gols de -3 . Se no próximo jogo ele ganhar por 3 a 0 (marcando $+3$ gols), qual será o novo saldo? O time atingiu o "zero"?
6. Um alpinista está a 8 metros de altitude. Começa a nevar e ele precisa descer 10 metros para encontrar uma caverna. Em que posição em relação ao nível do solo ele se encontra agora?
7. Você tem uma dívida de R\$8,00 com um amigo. Você consegue um "dado azul" (ganha dinheiro) de R\$10,00. Após pagar seu amigo, quanto sobra para você?
8. Uma geladeira está a $3^{\circ}C$. Você liga a função turbo e a temperatura cai $5^{\circ}C$. Qual a temperatura final? Represente isso como um movimento no tabuleiro.
9. Um avião está voando e o piloto anuncia que a temperatura externa é de $-10^{\circ}C$. Após uma hora, a temperatura sobe $4^{\circ}C$. Qual é a nova temperatura externa?
10. Na Educação Financeira, dizemos que alguém está "no azul" quando tem dinheiro e "no vermelho" quando deve. Se uma empresa deve R\$5.000,00 e recebe um

pagamento de R\$5.000,00, qual o seu estado financeiro final? Relacione com a vitória no jogo.

11. Um balão meteorológico sobe 6 metros, depois desce 2 metros e, por fim, desce mais 4 metros. Se ele partiu do solo (zero), onde ele está agora?
12. Um estoque de loja tinha 2 itens. O gerente registrou uma "perda" (dado vermelho) de 6 itens. Como o estoque não pode ser negativo no mundo físico, o que esse número -4 representa para a contabilidade da loja?
13. Um jovem tem R\$20,00 de mesada. Ele gasta R\$12,00 com figurinhas e depois ganha mais R\$5,00 de sua avó. Escreva a expressão dessa "corrida" e o resultado final.
14. Durante uma experiência química, um líquido estava a -4°C . O cientista aumentou a temperatura em 2°C e depois diminuiu em 5°C . Qual foi a temperatura final registrada?
15. Se o objetivo da vida financeira é nunca ficar "no vermelho", por que estar na casa $+10$ é melhor do que estar na casa -10 , mesmo que a distância até o zero seja a mesma?

Forma de Abstrair Conhecimento

A abstração aqui ocorre através da analogia. O aluno deve perceber que o "Dado Azul" não é apenas um cubo de papel, mas representa um ganho, um aumento ou uma subida. Já o "Dado Vermelho" representa uma perda, uma dívida ou uma descida. Ao contextualizar, o aluno passa a pensar em "casas" e começa a pensar em unidades de valor. Uma técnica é pedir que o aluno, ao ler o problema, sublinhe as palavras-chave (ex: "subiu", "gastou", "abaixo de") e anote ao lado se aquele valor se comporta como um dado azul ou vermelho.

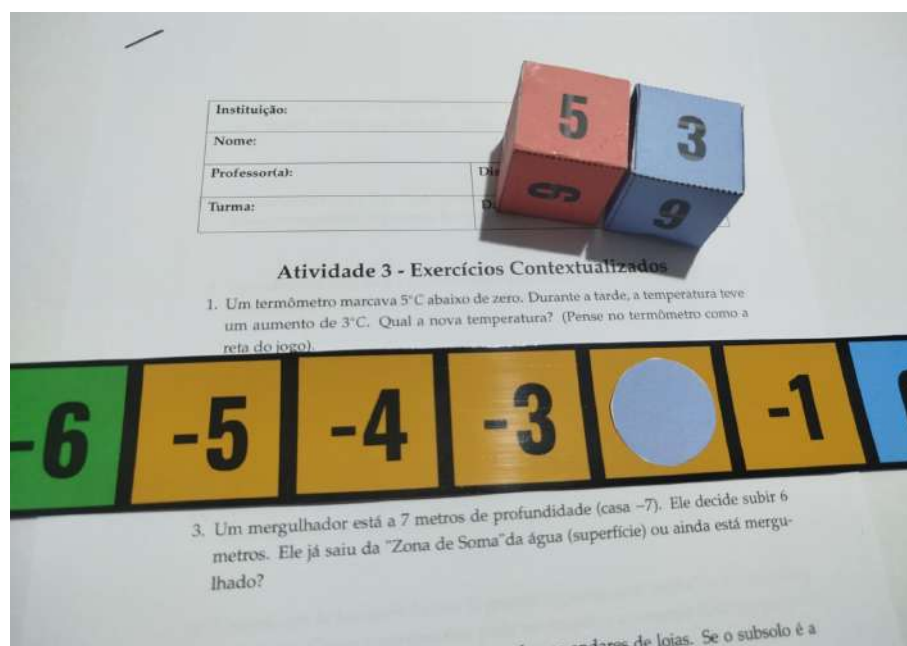
Possíveis Casos

A estrutura lógica empregada nos exercícios de fixação estende-se aos exercícios contextualizados. O uso do tabuleiro e dos dados auxilia na interpretação das situações-problema. Na Figura 5, a situação descrita no exercício 1 é representada fisicamente: o dado vermelho indica a temperatura inicial, enquanto o dado azul representa a elevação térmica de 3°C . Assim, a operação $-5 + 3 = -2$ elucida a resposta do exercício, conforme evidenciado na Figura 6.

Figura 5 – Caso 4: Parte 1.



Figura 6 – Caso 4: Parte 2.



Conclusão

Esta atividade encerra o ciclo da 'Corrida ao Zero', provando que a matemática dos jogos é a mesma que organiza o mundo. Ao migrar para contextos como finanças e física, o aluno perceberá que o 'ponto zero' (objetivo do jogo) será, na verdade, o ponto de equilíbrio de um orçamento ou a temperatura de congelamento da

água. O conhecimento se tornará duradouro porque deixará de ser uma regra de jogo e passará a ser uma ferramenta de leitura da realidade.

4.1.4 Teste 1

Objetivo Geral

Avaliar a competência do aluno em operar com números inteiros e sua capacidade de transpor o raciocínio lúdico para situações abstratas e cotidianas.

Objetivos Específicos

Verificar a compreensão da reta numérica, a correta aplicação das regras de sinais (adição/subtração), a interpretação de saldos (financeiro/térmico) e o pensamento estratégico-lógico.

Materiais

Para a realização desta avaliação, os alunos utilizarão a folha de teste impressa disponível no APÊNDICE B. Além do material de escrita (lápiz, borracha e caneta), o professor pode optar por manter os tabuleiros da Corrida ao Zero disponíveis nas mesas ou em uma bancada central. Embora o objetivo do teste seja medir a abstração, o tabuleiro serve como um recurso de acessibilidade e validação para alunos que ainda estão consolidando a transição do concreto para o abstrato, funcionando como o "mapa mental" mencionado na metodologia.

Duração

A aplicação deste teste está planejada para um período letivo de 50 minutos. Recomenda-se que os primeiros 5 minutos sejam utilizados para a leitura compartilhada das instruções e esclarecimento de dúvidas sobre os enunciados, deixando os 45 minutos restantes para a resolução individual e entrega.

Execução

Diferente das etapas anteriores, a execução do Teste 1 foca na avaliação da competência individual. O professor deve organizar a sala de forma a permitir a concentração, mas mantendo a postura de mediador. Durante a aplicação, o docente deve circular para observar não apenas as respostas finais, mas o processo de raciocínio: se o aluno utiliza os dedos para contar, se desenha uma reta numérica no rascunho ou se já consegue aplicar as regras de sinais diretamente. As funções do professor nesta etapa incluem: garantir que o aluno identifique corretamente os "gatilhos" de sinal (como interpretar "depósito" como $+x$ ou "descida" como $-x$), verificar se a regra da Zona de Soma está sendo aplicada corretamente nos cálculos teóricos e incentivar a justificativa lógica nas questões dissertativas. Esta é a oportunidade de diagnosticar se a transição da "linguagem do jogo" para a "linguagem formal" foi concluída com sucesso.

As questões que compõem esta avaliação são:

1. (Mecânica) Você inicia uma partida de "Corrida ao Zero" na casa -10 . No seu primeiro turno, você lança apenas o dado azul e obtém o número 6. Qual será a sua nova posição no tabuleiro?
2. (Zona de Soma) Um jogador está na casa $+2$. Por estar na Zona de Soma, ele lança os dois dados e obtém 4 no azul e 6 no vermelho. Ele atingiu o objetivo de chegar ao zero? Justifique com o cálculo.
3. (Abstração) Qual é o "deslocamento líquido" de uma jogada onde o dado azul marca 5 e o dado vermelho marca 2? Se você estivesse na casa -3 , para onde iria?
4. (Contextualizado - Finanças) João está com sua conta bancária "no vermelho" em R\$15,00. Ele faz um depósito de R\$20,00. Utilizando a lógica da reta numérica, qual o novo saldo de João?
5. (Contextualizado - Temperatura) Em uma cidade serrana, a temperatura era de -3°C ao amanhecer. Durante o dia, o sol apareceu e a temperatura subiu 7°C . Qual foi a temperatura máxima registrada?
6. (Estratégia) Um jogador está na casa -7 . Ele quer se aproximar do zero, mas não quer entrar na Zona de Soma (casas -5 a -1) nesta rodada. Qual o maior valor que ele pode tirar no dado azul para que isso aconteça?
7. (Abstração - Nulo) Se um jogador na casa -4 obtém o mesmo valor no dado azul e no dado vermelho (por exemplo, 5 e 5), o que acontece com a posição do seu peão? Explique o conceito matemático envolvido.
8. (Contextualizado - Altitude) Um mergulhador está a 8 metros de profundidade (casa -8). Ele sobe 5 metros em direção à superfície. Ele já ultrapassou o nível do mar (ponto zero) ou ainda está abaixo dele? Em qual posição?
9. (Precisão) Você está na casa -1 e precisa de um "pouso exato" no zero para vencer. Cite uma combinação de valores nos dados azul e vermelho que garanta sua vitória imediata nesta rodada.
10. (Migração de Conceitos) No jogo, o dado azul "soma" e o dado vermelho "subtrai". Na vida real, se uma empresa tem um prejuízo de R\$1.000,00 e depois um lucro de R\$800,00, ela terminou com saldo positivo ou negativo? De quanto?

Forma de Abstrair Conhecimento

Nesta prova, o aluno deve ser incentivado a usar o tabuleiro da "Corrida ao Zero" como um mapa mental. Ao ler "dívida", ele deve mentalizar o "dado vermelho"; ao ler "depósito", o "dado azul". A transição ocorre quando ele deixa de desenhar os saltos na reta e passa a realizar a operação aritmética de forma direta.

Possíveis Casos

Conforme demonstrado nas Atividades 1, 2 e 3, o tabuleiro e os dados permanecem como ferramentas eficazes durante a realização de testes. Na Figura 7, o exercício 2 é materializado: o pino indica a posição do jogador na casa 2, acompanhado pelos valores 6 no dado vermelho e 4 no dado azul. Dado que $-6+4=-2$, o jogador deve retroceder duas casas à esquerda — movimento este que culmina na vitória, como ilustrado na Figura 8.

Figura 7 – Caso 5: Parte 1.

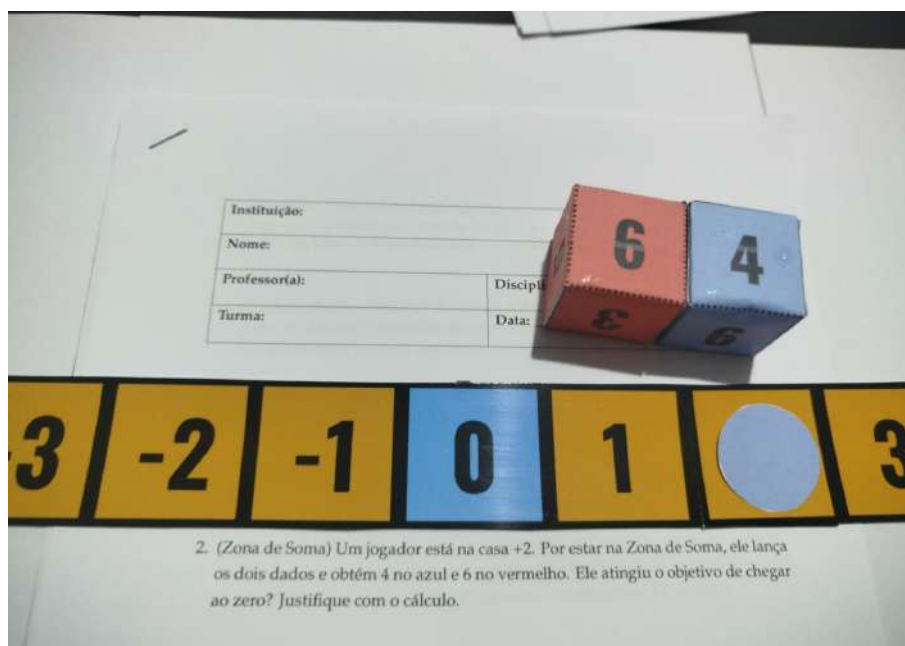


Figura 8 – Caso 5: Parte 2.



Conclusão

Esta avaliação encerra o ciclo de aprendizagem mostrando que o aluno que "joga bem" é o aluno que "pensa matematicamente". A transição do dado para o cifrão (R\$) e para o grau Celsius ($^{\circ}C$) solidifica a ideia de que os números inteiros são a linguagem que usamos para medir variações no nosso dia a dia.

4.2 ADIÇÃO ENTRE NÚMEROS NEGATIVOS

A compreensão da Adição entre Números Negativos é um passo decisivo para a literacia financeira e para o domínio do conjunto dos números inteiros. No cotidiano, raramente lidamos com números negativos de forma isolada; eles aparecem quase sempre como débitos que se somam, diminuindo o nosso poder de compra. Para tornar este conceito palpável, estruturamos o tópico através de uma sequência didática em três etapas, que conduz o aluno desde a percepção do "peso" das dívidas até a capacidade técnica de gerir um orçamento complexo.

A metodologia aplicada utiliza a simulação da vida real para desmistificar a operação com sinais, seguindo o cronograma abaixo:

- Etapa 1: A Vivência Lúdica (O Jogo Gestão de Saldo). Nesta fase inicial, o foco é a experimentação estratégica. Através do jogo "Gestão de Saldo", o estudante vivencia a dinâmica de um orçamento mensal. Ao manipular cartas de salários e diversas categorias de dívidas, o aluno percebe intuitivamente que somar várias dívidas resulta em um valor negativo maior em módulo. A introdução das "Cartas Amarelas" (eventos inesperados) adiciona uma camada de realidade, forçando o aluno a reagir matematicamente a ganhos ou perdas súbitas.
- Etapa 2: A Formalização do Pensamento (Exercícios de Fixação). Após a vivência prática, o aluno é conduzido à abstração operativa. Nesta etapa, os exercícios de fixação substituem as categorias de consumo (água, luz, alimentação) pela simbologia matemática formal (+ e -). O objetivo é que o aluno desenvolva agilidade no cálculo de somas de múltiplos termos negativos e aprenda a confrontar esses totais com valores positivos (receitas), consolidando as propriedades da adição de inteiros sem o suporte visual imediato das cartas.
- Etapa 3: A Transposição Prática (Contextualização e Migração). A etapa final foca na competência financeira e cidadã. O conhecimento migra definitivamente para a vida real, onde o aluno utiliza a matemática para analisar a viabilidade de um estilo de vida. Através de situações-problema baseadas na regra 50/30/20 — método que propõe a divisão da renda líquida em 50% para necessidades básicas, 30% para gastos pessoais e 20% para reserva financeira ou quitação de dívidas —, o estudante aprende a calcular porcentagens de poupança e a entender que o saldo final é o resultado de uma gestão consciente. É o momento em que a soma de números negativos deixa de ser apenas uma conta e passa a ser a base para o planejamento de sonhos e a prevenção de crises.
- Etapa 4: A Aferição da Competência (Teste 2). O ciclo se encerra com a verificação da autonomia individual. O Teste 2 atua como um instrumento diagnóstico para confirmar se a transição da simulação financeira (jogo) para o raciocínio

contábil abstrato foi efetivada. Nesta fase, avalia-se a capacidade do estudante de operar somas de débitos, interpretar variações orçamentárias (imprevistos) e aplicar a lógica de porcentagem desenvolvida no jogo em situações de teste formal, garantindo que a educação financeira foi assimilada como competência matemática.

Esta abordagem cumpre as diretrizes da BNCC ao integrar a Matemática com o tema transversal Educação Financeira. Ao trabalhar a adição de números negativos de forma contextualizada, promove-se o desenvolvimento do raciocínio lógico-crítico e a capacidade de tomada de decisão. A progressão em três camadas garante que o estudante compreenda que o sinal de "menos" em um saldo não é apenas um símbolo, mas um indicador de fluxo que exige ação, preparando-o para exercer uma cidadania financeira responsável e segura.

4.2.1 Atividade 4 - Gestão de Saldo

Objetivo Geral

O jogo Gestão de Saldo foi desenvolvido com o objetivo geral de consolidar a compreensão e a operacionalização da soma entre números positivos e negativos, utilizando a simulação de um orçamento doméstico para dar significado prático aos conceitos de crédito, débito e saldo. Pedagogicamente, a atividade fundamenta-se nas competências específicas da BNCC, destacando-se o desenvolvimento da Competência 5, ao exigir que o estudante utilize conceitos matemáticos para interpretar argumentos sobre instituições financeiras e planejar o consumo consciente. Nessa perspectiva, a proposta alinha-se à Educação Matemática Crítica de Skovsmose (2001), ao transformar a aritmética abstrata em uma ferramenta de tomada de decisão e leitura da realidade. O jogo permite que o estudante perceba como o acúmulo de valores negativos (dívidas) interage com valores positivos (receitas) para determinar a saúde financeira de um indivíduo, transcendendo o cálculo mecânico. Cabe ressaltar que as imagens das cartas que compõem este jogo foram geradas com o suporte do modelo Gemini (2026), garantindo uma identidade visual lúdica e contextualizada que promove o desenvolvimento do raciocínio lógico e da consciência crítica sobre o consumo e a poupança.

Objetivos Específicos

- Capacitar o aluno a realizar a soma de múltiplos números negativos de forma sistemática, compreendendo o deslocamento para a esquerda, o lado negativo da reta numérica.
- Exercitar a comparação de módulos para identificar se o valor absoluto total das dívidas supera a receita disponível (déficit e superávit).
- Desenvolver a habilidade de processar eventos inesperados (cartas amarelas) que exigem o ajuste imediato do saldo final.
- Aplicar noções de porcentagem para a avaliação de desempenho e definição da pontuação.
- Estimular a autonomia do estudante no uso de estratégia de cálculo mental e estimativa.
- Internalizar diretrizes da Educação Financeira, como a regra 50/30/20.
- Atender às competências da BNCC e elevar o nível cognitivo para "Análise" e "Avaliação" na Taxonomia de Bloom, incentivando o aluno a julgar a eficácia de seu planejamento financeiro.

Materiais

Para facilitar a replicação desta atividade, este trabalho disponibiliza no APÊNDICE B o material completo para a montagem do jogo. O kit consiste em uma folha com 63 cartas divididas em: cartas azuis (salário), sete categorias de dívidas vermelhas e cartas amarelas (Monte Especial).

Recomenda-se a impressão em papel de maior gramatura para garantir a durabilidade. Contudo, o docente possui total liberdade para utilizar recursos alternativos, como cartolinas, papéis reciclados ou até a adaptação de baralhos comerciais (como o jogo Uno), estabelecendo novas convenções de cores para representar receitas e despesas de forma intuitiva.

Confecção

Nesta etapa, o professor atua como orientador e facilitador, coordenando o corte e a organização das cartas para compor os nove montes fundamentais (salários, sete categorias de despesas e o monte especial). A preparação do material deve focar nos seguintes pilares pedagógicos:

- **Mediação Visual:** O docente deve coordenar a discussão sobre a simbologia das cores na matemática e na economia — relacionando, por exemplo, o “ficar no vermelho” às dívidas. Caso utilizem materiais alternativos, os alunos devem participar da escolha dessas convenções.
- **Estímulo ao Pertencimento:** Ao incentivar os alunos a participarem do corte, da criação dos componentes ou a trazerem materiais de casa, o professor aumenta o sentido de posse e o engajamento com o projeto.
- **Preparação Logística:** Cabe ao professor organizar a disposição da sala para que os nove montes fiquem acessíveis a todos os grupos, garantindo que o kit de simulação financeira esteja completo e funcional antes do início da partida.

Duração

A atividade é planejada para duas aulas de 50 minutos (ou uma aula dupla de 100 minutos). Este tempo garante que o professor consiga explicar a lógica da soma de negativos, supervisionar as 12 rodadas (meses) e conduzir o debate sobre quem conseguiu atingir a meta de investimento.

Execução

A dinâmica foi planejada para ser versátil em relação ao número de participantes, podendo ser realizada em duplas ou trios, embora o formato ideal seja em grupos de até 7 pessoas. Essa configuração favorece a interação coletiva, permitindo

que cada aluno acompanhe as contas dos colegas e participe ativamente das discussões estratégicas. Durante a execução, o papel do professor é de mediador ativo e observador tático, atuando conforme os pontos a seguir:

- **Observação do Cálculo Mental:** O professor deve circular entre os grupos para observar como os alunos processam a soma dos números negativos (dívidas), intervindo caso note que algum estudante está confundindo a direção do saldo na reta numérica.
- **Provocação Crítica:** No momento em que a "carta amarela" é revelada, o docente deve incentivar o debate, questionando como o imprevisto altera o saldo parcial e se o planejamento e a poupança realizados foram suficientes para gerir o risco.
- **Fiscalização de Regras e Valores:** Garantir que a soma algébrica inicial (salário vs. dívidas) seja executada corretamente antes da aplicação da carta especial, reforçando o rigor matemático necessário para a validade da partida.
- **Mediação da Aprendizagem Colaborativa:** Estimular que os estudantes discutam suas estratégias de gestão financeira em voz alta, transformando a resolução dos problemas em um processo de troca de experiências e aprendizado coletivo.

Forma de Abstrair Conhecimento

Em um nível pedagógico mais profundo, o jogo cumpre o papel de fortalecer o cálculo mental. A movimentação entre os números inteiros deixa de ser uma tarefa de memorização e passa a ser uma experiência de gestão real. Através da mediação, o professor demonstra que o equilíbrio financeiro depende da habilidade lógica de antecipar imprevistos. O domínio dos números inteiros é a ferramenta que transforma o caos financeiro em planejamento estratégico, permitindo que o estudante saia da posição de mero pagador de contas para a de um gestor consciente de seu próprio futuro.

Regras do Jogo

O jogo Gestão de Saldo é uma simulação de educação financeira que utiliza a soma de números positivos e negativos para ensinar o equilíbrio orçamentário. O material é composto por oito montes de cartas fundamentais. O primeiro monte contém as cartas de Salário (Azul), com os valores específicos de 1230, 1405, 1580, 1755, 1930, 2105 e 2280. Os outros sete montes representam as Dívidas (Vermelhas) fixas de uma pessoa, sendo elas: Água (50, 75, 100, 125, 150, 175 e 200), Luz (50, 100, 150, 200, 250, 300 e 350), Alimentação (500, 550, 600, 650, 700, 750 e 800), Lazer (125, 135, 145, 155, 165, 175 e 185), Internet (75, 90, 105, 120, 135, 150 e 165), Gás (100, 105, 110, 115, 120, 125 e 130) e Cartão de Crédito (330, 350, 370, 390, 410, 430 e 450).

A dinâmica da rodada inicia-se com cada jogador retirando uma carta de Salário, mantendo-a virada para baixo, e uma carta de cada um dos sete montes de dívidas disponíveis. O ponto central da atividade é o entendimento da soma de números negativos, que ocorre quando os jogadores revelam suas dívidas uma a uma para o oponente. Após somarem todos os débitos e anunciarem o total, os jogadores viram suas cartas azuis de salário e calculam a diferença inicial entre a receita e as despesas totais. Este cálculo gera um saldo parcial que servirá de base para a etapa final da rodada.

Após a definição desse saldo, entra em cena o Monte Especial de Cartas Amarelas, que representa os eventos inesperados do cotidiano. Cada jogador deve retirar uma carta deste monte, que estará identificada como Dívida ou Receita, e aplicar o valor ao seu saldo parcial, mesmo que este já esteja negativo. No grupo das dívidas inesperadas, os valores são: 50 (gasto desnecessário), 100 (remédios), 150 (conserto de celular) e 200 (multa de trânsito). Já no grupo das receitas extras, os valores são: 50 (hora extra), 100 (cashback) e 150 (bônus no trabalho). O resultado após o ajuste da carta amarela será o Saldo Final da rodada, que determinará a pontuação do jogador.

O sistema de pontuação é aplicado apenas ao término desta última operação, utilizando-se de uma tabela de consulta que será disponibilizada aos alunos para relacionar o saldo final ao salário inicial através de porcentagens. Se a quantidade de dívida for maior em módulo do que o salário (saldo final negativo), o jogador ganha 0 pontos na rodada. Se o saldo for positivo, a pontuação segue o critério da tabela: guardar menos que 10% do salário garante 1 ponto; poupar entre 10% e menos de 20% garante 2 pontos; e poupar 20% ou mais garante a pontuação máxima de 3 pontos.

O jogo consiste em 12 rodadas, simulando sete meses de planejamento financeiro, e vence quem acumular o maior número de pontos ao final. O sistema de pontuação adotado, que valoriza a reserva financeira de 20%, inspira-se no método 50/30/20 de planejamento pessoal. Conforme detalhado por Cerbasi [30], destinar 20% da renda para investimentos ou quitação de dívidas é o pilar que garante a saúde financeira, conceito este transposto para o jogo para premiar a tomada de decisão estratégica do aluno. Através desta mecânica, incentiva-se não apenas o cálculo matemático de somas negativas, mas a percepção de que poupar e investir é uma estratégia interessante para a vida. O jogo demonstra que, ao organizar as contas, é possível conciliar o pagamento das necessidades básicas, o lazer e a segurança financeira, seguindo princípios como a regra 50/30/20 para uma gestão consciente e bem-sucedida do orçamento pessoal.

Casos Especiais

O professor deve utilizar estes cenários para demonstrar a aplicação prática da matemática:

- **Impacto do Módulo na Soma das Dívidas:** Em uma partida real, os alunos podem observar o impacto do módulo na soma das dívidas quando um jogador retira o menor salário disponível, de R\$1.230,00. Durante a revelação das cartas vermelhas, ele começa a somar seus débitos: R\$200,00 de água, R\$350,00 de luz e R\$800,00 de alimentação. Apenas nessas três cartas, o valor absoluto da dívida já atinge R\$1.350,00, superando o salário total antes mesmo de abrir as outras categorias. Essa situação é ideal para explicar que, matematicamente, o aluno deve encontrar o saldo real negativo para verificar se uma possível carta amarela de receita seria capaz de reverter o cenário e "salvá-lo" do zero na pontuação final.
- **Reviravolta Crítica da Carta Amarela:** Um momento de grande tensão que ocorre frequentemente quando um jogador acredita estar seguro. Considere alguém com um salário de R\$1.930,00 e dívidas somadas em R\$1.800,00, resultando em um alívio inicial com o saldo positivo de R\$130,00. No entanto, ao retirar a carta especial de "Multa de Trânsito" no valor de R\$200,00, o cálculo final torna-se $130 - 200 = -70$. Esse cenário exemplifica como imprevistos desestabilizam orçamentos apertados, levando o jogador da zona de pontuação para a derrota automática, o que reforça a importância vital de uma margem de segurança financeira.
- **Desafio da Precisão na Meta de 20%:** A dinâmica do jogo exige atenção total aos cálculos, especialmente nos casos de fronteira entre as pontuações. Suponha um jogador com salário de R\$2.105,00 que, após todas as operações, termina com um saldo final de R\$415,00. Ao calcular a meta ideal, ele descobre que 20% do seu salário seriam R\$421,00. Como o seu saldo é ligeiramente inferior a esse valor, ele ganha apenas 2 pontos em vez de 3. Essa situação gera um debate rico sobre como pequenas escolhas de consumo, como optar por uma carta de lazer mais barata, poderiam ter garantido a pontuação máxima de "investidor".
- **Salário alto não garante Vitória:** Por fim, é essencial entender que retirar a Carta Azul com o maior Salário alto não garante vitória, uma das lições mais valiosas de educação financeira do jogo. Um jogador com a maior receita, de R\$2.280,00, pode retirar as dívidas mais caras em todas as categorias, elevando seu custo de vida para além de R\$2.100,00 e terminando com uma poupança inferior a 10% (1 ponto). Enquanto isso, um colega com salário de R\$1.580,00 e custos reduzidos pode poupar R\$350,00, garantindo os 3 pontos da rodada. Isso prova que a gestão consciente das dívidas e a soma correta dos números negativos são tão determinantes para o sucesso quanto o valor bruto da receita.

Possíveis Casos

Embora o jogo apresente inúmeras variáveis, é fundamental destacar duas situações que ilustram sua mecânica principal. Na Figura 9, um jogador possui um salário de R\$1.230,00, dívidas que totalizam R\$1.230,00 e uma carta de bônus (receita) de R\$150,00. Ao realizar o cálculo $1230 + 150 - 1230 = 150$, nota-se um saldo remanescente de R\$150,00. Consultando a tabela, verifica-se que este saldo equivale a 2 pontos.

Figura 9 – Caso 6.

TABELA DE PONTOS (GESTÃO DE SALDO)				
SALÁRIO	0 PONTOS	1 PONTO	2 PONTOS	3 PONTOS
1230	0 OU MENOS	MAIS QUE 0 E MENOS QUE 124	MAIS QUE 123 E MENOS QUE 246	246 OU MAIS
SALÁRIO 1230	ALIMENTAÇÃO 500	CARTÃO DE CRÉDITO 330	LAZER 125	RECEITA 150 BÔNUS NO TRABALHO
GÁS 100	INTERNET 75	LUZ 50	ÁGUA 50	

Em contrapartida, a Figura 10 apresenta um jogador com salário de R\$2.280,00, dívidas de R\$2.030,00 e um gasto desnecessário de R\$50,00. O cálculo $2280 - 2030 - 50 = 200$ indica um saldo final de R\$200,00. Embora este valor seja nominalmente superior aos R\$150,00 do exemplo anterior, a tabela de pontuação atribui a este jogador apenas 1 ponto. Tal disparidade exemplifica a lógica de porcentagem intrínseca ao jogo: a pontuação não depende apenas do valor poupado, mas de sua proporção em relação ao salário recebido na rodada.

Figura 10 – Caso 7.



Conclusão

A conclusão do jogo Gestão de Saldo consolida a ideia de que a matemática não é um conjunto de regras isoladas, mas a linguagem fundamental para a organização da vida. Ao finalizar as rodadas, o aluno compreende que a soma de números negativos transcende a teoria, representando o peso real das dívidas e das escolhas de consumo no orçamento pessoal. Esta atividade demonstra que o equilíbrio financeiro não depende apenas do valor bruto da receita, mas da habilidade lógica de gerir despesas e antecipar imprevistos, transformando o domínio dos números inteiros em uma ferramenta estratégica que permite o estudante reconhecer como suas escolhas refletem diretamente no equilíbrio de um orçamento.

Ao integrar a aritmética à Educação Financeira, o trabalho reforça que o planejamento e o investimento são atos de liberdade que exigem precisão matemática. A aplicação de metas de poupança e a análise da regra 50/30/20 mostram que o saldo positivo é o resultado direto de uma vigilância constante sobre as somas negativas. Assim, o papel pedagógico do professor se cumpre ao transformar a sala de aula em um ambiente de investigação, preparando cidadãos capazes de interpretar a realidade, equilibrar recursos e tomar decisões fundamentadas diante da volatilidade e dos desafios do mundo real.

4.2.2 Atividade 5 - Exercícios de Fixação

Objetivo Geral

Operacionalizar a soma de múltiplos números inteiros (positivos e negativos) através da simulação de um orçamento doméstico, desenvolvendo a fluência em cálculos de saldo e porcentagem.

Objetivos Específicos

- Realizar o agrupamento de múltiplos valores negativos (dívidas) para encontrar o total de débitos em módulo.
- Aplicar a soma de números com sinais diferentes para determinar o saldo parcial e final.
- Interpretar o impacto de eventos aleatórios (Cartas Amarelas) no resultado financeiro.
- Utilizar o raciocínio proporcional para classificar o desempenho financeiro em faixas de pontuação (1, 2 ou 3 pontos).

Materiais

Para a realização desta atividade, os alunos utilizarão a folha de "Exercícios de Fixação" disponível para consulta e download no APÊNDICE B. Além do material impresso e itens de escrita (lápis, borracha e caneta), é indispensável o uso do kit de cartas do jogo Gestão de Saldo (Cartas de Salário, Cartas de Dívidas e Cartas Amarelas de eventos) e, principalmente, da Tabela de Pontos, que servirá como guia para os cálculos de porcentagem e classificação de desempenho. O uso de calculadoras pode ser permitido a critério do professor, embora o estímulo ao cálculo mental e ao agrupamento de valores seja o foco pedagógico central.

Duração

A atividade está planejada para um período de 50 minutos. A organização do tempo deve ser distribuída em: 5 minutos para a contextualização do orçamento doméstico; 35 minutos para a resolução individual ou em duplas das situações-problema; e 10 minutos para uma discussão coletiva sobre as melhores estratégias de poupança e a correção dos cálculos de saldo.

Execução

A execução desta atividade propõe uma imersão na matemática financeira através da simulação de orçamentos. A organização recomendada é o trabalho em

duplas ou trios, o que favorece o compartilhamento dos kits de cartas e a discussão sobre como priorizar pagamentos. O professor deve atuar como um "Consultor Financeiro", circulando entre as mesas para desempenhar funções essenciais: orientar os alunos na estratégia de agrupar todas as dívidas (números negativos) antes de subtraí-las do salário, auxiliar na interpretação das Cartas Amarelas como variáveis imprevistas e mediar o uso da Tabela de Pontos para o cálculo das metas de 10% e 20%. O objetivo é que o docente transforme o erro de cálculo em uma oportunidade de reflexão sobre o "estar no vermelho".

Os exercícios a serem resolvidos, baseados na mecânica do jogo, são:

1. Um jogador inicia o mês com um salário de $R\$1.580,00$. Suas dívidas vermelhas de Água, Luz e Gás somam, respectivamente, $R\$100,00$, $R\$200,00$ e $R\$110,00$. Qual o total de dívidas acumulado até agora e qual o saldo parcial?
2. Imagine que você tem um salário de $R\$1.405,00$. A soma de todas as suas sete dívidas vermelhas resultou em $R\$1.300,00$. Se você tirar uma carta amarela de "Cashback" ($R\$100,00$), qual será seu saldo final?
3. Um aluno possui um salário de $R\$1.230,00$. Suas dívidas totalizam $R\$1.100,00$. No entanto, ele tira a carta amarela de "Multa de Trânsito" ($R\$200,00$). O que acontece com o saldo final e quantos pontos ele faz nesta rodada?
4. Considere as dívidas de Alimentação ($R\$750,00$) e Cartão de Crédito ($R\$450,00$). Qual o valor total que essas duas cartas retiram do salário em módulo?
5. Você recebeu $R\$2.280,00$ de salário. Suas dívidas totais somam $R\$1.800,00$. Para ganhar 3 pontos, seu saldo final deve ser de pelo menos 20% do salário. Você já atingiu essa meta ou precisaria de uma carta amarela de receita para chegar lá?
6. Um jogador tem um saldo parcial de $-R\$50,00$ (está devendo). Ele tira uma carta amarela de "Bônus no Trabalho" ($R\$150,00$). Qual o saldo final após esse bônus?
7. Compare duas situações: No mês A, você tem salário de $R\$2.105,00$ e dívidas de $R\$1.900,00$. No mês B, você tem salário de $R\$1.230,00$ e dívidas de $R\$1.000,00$. Em qual dos meses você poupou uma porcentagem maior do seu salário?
8. Um competidor somou suas dívidas: Água ($R\$150,00$), Internet ($R\$120,00$) e Lazer ($R\$165,00$). Qual o valor total negativo que essas três cartas representam juntas?
9. O salário é de $R\$1.930,00$. O total de dívidas vermelhas é de $R\$1.500,00$. O jogador tira uma carta amarela de "Gasto Desnecessário" ($R\$50,00$). Calcule o saldo final e verifique se ele poupou mais ou menos que 10% do salário.

10. Se um jogador está com saldo de $R\$100,00$ e tira a carta amarela de "Concerto de Celular", qual será sua pontuação final na rodada?
11. Um aluno tirou o salário de $R\$2.105,00$. Suas dívidas são: Luz ($R\$350,00$), Alimentação ($R\$800,00$) e Cartão de Crédito ($R\$450,00$). Sem contar as outras dívidas, quanto ainda resta do salário?
12. Qual é o valor máximo de dívida que um jogador pode ter em uma rodada para ainda conseguir 3 pontos (20%) se o seu salário for de $R\$1.000,00$ (valor hipotético para facilitar o cálculo)?
13. Um jogador termina com saldo de $R\$150,00$. O salário era de $R\$1.580,00$. Baseado na regra de que menos de 10% vale 1 ponto, qual a pontuação dele?
14. A carta amarela de "Hora Extra" adiciona $R\$50,00$. Se um jogador estava com saldo de $-R\$30,00$, essa carta é suficiente para deixá-lo com saldo positivo?
15. Invente uma combinação de 3 dívidas vermelhas que, juntas, somem exatamente $R\$1.000,00$.

Forma de Abstrair Conhecimento

A abstração nesta atividade ocorre através da visualização do "peso" das dívidas. O aluno deve ser incentivado a ver as cartas vermelhas não como números isolados, mas como um bloco único de "débito" que pressiona o salário azul. Uma forma de abstrair é pedir que o aluno faça a soma de todas as cartas vermelhas primeiro (agrupando os negativos) para só então confrontar esse total com o valor positivo do salário. Isso ensina a propriedade associativa de forma orgânica e prepara o terreno para entender que, na vida real, somamos todas as contas antes de saber o que "sobra" do pagamento.

Possíveis Casos

Mantendo a coerência metodológica da "Corrida ao Zero", o jogo Gestão de Saldo utiliza seus componentes para facilitar a resolução de exercícios de fixação. O recurso primordial, neste contexto, é a tabela de pontos. Na Figura 11, são apresentados problemas para resolução; o exercício 5, especificamente, é solucionado com o auxílio da tabela (Figura 12). Ao analisar os dados, constata-se que a meta foi atingida, visto que o valor poupado é de $R\$480,00$ (resultado de $2280 - 1800 = 480$). De acordo com a tabela, $R\$480,00$ conferem ao jogador 3 pontos, por ultrapassar o patamar de $R\$456,00$.

Figura 11 – Caso 8: Parte 1.

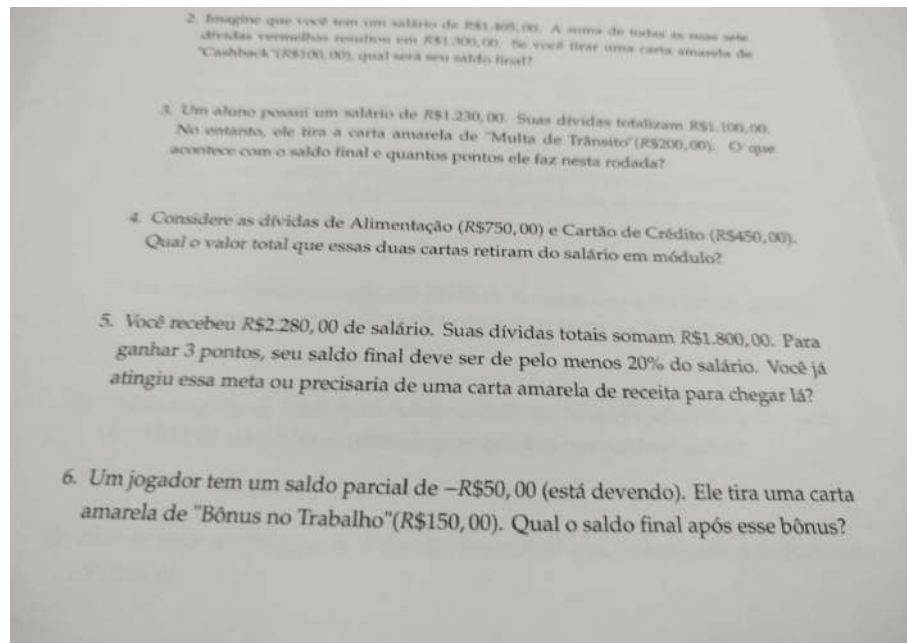


Figura 12 – Caso 8: Parte 2.

**TABELA DE PONTOS
(GESTÃO DE SALDO)**

SALÁRIO	0 PONTOS	1 PONTO	2 PONTOS	3 PONTOS
1230	0 OU MENOS	MAIS QUE 0 E MENOS QUE 124	MAIS QUE 123 E MENOS QUE 245	246 OU MAIS
1405	0 OU MENOS	MAIS QUE 0 E MENOS QUE 141	MAIS QUE 140 E MENOS QUE 281	282 OU MAIS
1580	0 OU MENOS	MAIS QUE 0 E MENOS QUE 159	MAIS QUE 158 E MENOS QUE 315	316 OU MAIS
1755	0 OU MENOS	MAIS QUE 0 E MENOS QUE 176	MAIS QUE 175 E MENOS QUE 351	352 OU MAIS
1930	0 OU MENOS	MAIS QUE 0 E MENOS QUE 194	MAIS QUE 193 E MENOS QUE 385	386 OU MAIS
2105	0 OU MENOS	MAIS QUE 0 E MENOS QUE 211	MAIS QUE 210 E MENOS QUE 421	422 OU MAIS
2280	0 OU MENOS	MAIS QUE 0 E MENOS QUE 229	MAIS QUE 228 E MENOS QUE 455	456 OU MAIS

5. Você recebeu R\$2.280,00 de salário. Suas dívidas totais somam R\$1.800,00. Para ganhar 3 pontos, seu saldo final deve ser de pelo menos 20% do salário. Você já atingiu essa meta ou precisaria de uma carta amarela de receita para chegar lá?

Conclusão

Esta atividade finaliza o ciclo mostrando que a matemática é o pilar da organização pessoal. Ao resolver estas situações, o aluno percebe que o sinal de "menos" em um orçamento exige estratégia e vigilância. A conclusão lógica é que a saúde financeira é o resultado de uma aritmética consciente: saber quanto se deve

e quanto se pode poupar transforma o estudante de um espectador passivo em um gestor ativo de sua própria realidade econômica.

4.2.3 Atividade 6 - Exercícios Contextualizados

Objetivo Geral

Realizar a transição do pensamento lúdico para a modelagem matemática, aplicando a soma de números inteiros em situações de planejamento financeiro e análise de variações orçamentárias.

Objetivos Específicos

- Converter a simbologia das cores (Azul/Vermelho) em operações formais de números positivos e negativos.
- Analisar o impacto proporcional de despesas fixas e variáveis no saldo final.
- Desenvolver a capacidade de prever resultados financeiros através de estimativas e arredondamentos.
- Formalizar a regra de sinais na soma de dívidas como a soma de valores absolutos precedida pelo sinal negativo.

Materiais

Para o desenvolvimento desta etapa, os alunos utilizarão a folha de "Exercícios Contextualizados" que se encontra no APÊNDICE B para download e impressão. Além do material de registro, cada grupo deverá ter à disposição o kit do jogo Gestão de Saldo (composto pelas cartas de Salário, Dívidas e Eventos Amarelos) e a Tabela de Pontuação. O uso destes componentes físicos é essencial para que o estudante possa simular as situações descritas nos enunciados antes de formalizá-las no papel, servindo como uma ponte concreta para a abstração dos fluxos de caixa.

Duração

Esta atividade está estruturada para uma aula de 50 minutos. A sugestão de cronograma é: 10 minutos para a introdução da lógica de colunas (Receitas vs. Despesas) e revisão de palavras-chave; 30 minutos para a resolução dos problemas contextualizados em grupo; e os 10 minutos finais para a discussão coletiva, com foco na montagem das expressões numéricas da Questão 15, que sintetiza todo o aprendizado da unidade.

Execução

A execução desta atividade foca na transição da linguagem visual das cores para a modelagem matemática formal. Recomenda-se a organização da turma em duplas ou grupos de até 4 integrantes, o que permite a troca de percepções sobre as

variações orçamentárias e otimiza o uso dos materiais do jogo. Durante a atividade, o professor deve atuar como um mentor de modelagem, circulando entre os grupos para desempenhar as seguintes funções:

- Estimular a conversão simbólica: Orientar o aluno a substituir termos como "gasto" ou "perda" pelo sinal de subtração ($-$) e "bônus" ou "salário" pelo sinal de adição ($+$).
- Promover a análise proporcional: Nas questões que envolvem porcentagem (como a 6 e a 10), auxiliar o aluno a compreender que o valor absoluto de uma dívida tem impactos diferentes dependendo do salário total.
- Fiscalizar a montagem de expressões: Garantir que, nas questões finais, o aluno não faça apenas cálculos isolados, mas consiga estruturar uma única expressão numérica que represente todo o fluxo financeiro.
- Mediar a interpretação de texto: Ajudar na identificação de "gatilhos" textuais que definem a operação matemática a ser realizada.

Os exercícios propostos para esta etapa de modelagem são:

1. Um trabalhador recebe um salário de $R\$1.930,00$ (sua carta azul). Se ele gastar exatamente o mesmo valor com cartas vermelhas, qual será a sua expressão matemática e o seu saldo final?
2. Imagine que a soma das suas dívidas vermelhas de Água, Luz e Gás resultou em $-R\$350,00$. Se você receber um bônus (carta amarela) de $R\$150,00$, como fica a situação da sua "dívida de serviços"?
3. Um estudante tem um salário de $R\$1.230,00$. Ele somou suas dívidas de Alimentação ($R\$550,00$) e Cartão de Crédito ($R\$330,00$). Quanto ele ainda tem de "espaço" no orçamento antes de ficar no vermelho?
4. Na matemática financeira, somar duas dívidas é o mesmo que somar dois números negativos. Se você tem uma dívida de $R\$150,00$ e faz outra de $R\$200,00$, qual o valor total da sua dívida em módulo e qual o sinal do resultado?
5. Você está com um saldo de $R\$400,00$. Uma carta amarela de "Conserto de Celular" retira $R\$150,00$. Escreva isso como uma soma de um número positivo com um negativo e dê o resultado.
6. Um pai de família quer poupar 20% do seu salário de $R\$2.105,00$. Qual o valor em reais que ele deve deixar "sobrar" para ganhar os 3 pontos da rodada da vida real?

7. A conta de Internet subiu de $R\$75,00$ para $R\$120,00$. Represente esse aumento como uma nova carta vermelha. Como isso afeta a soma total das suas dívidas?
8. Se você tem um salário de $R\$1.405,00$ e suas dívidas totais são de $R\$1.500,00$, você está em "déficit". De quanto é esse déficit e como ele é representado na reta numérica?
9. Uma pessoa fez uma hora extra e ganhou $R\$50,00$ (carta amarela). No mesmo dia, teve um gasto desnecessário de $R\$50,00$ (outra carta amarela). Qual o efeito líquido dessas duas situações no saldo final?
10. O Cartão de Crédito é a dívida mais perigosa. Se você tem um salário de $R\$1.755,00$ e a carta de Cartão é de $R\$450,00$, que porcentagem do seu salário já está comprometida apenas com essa dívida?
11. No jogo, somamos as dívidas uma a uma. No mundo real, isso se chama "fluxo de caixa". Se o seu fluxo de saída é de $-R\$1.800,00$ e seu fluxo de entrada é de $+R\$2.280,00$, qual o seu saldo?
12. Por que tirar a carta amarela de "Remédios" ($-R\$100,00$) dói mais em quem tem o salário de $R\$1.230,00$ do que em quem tem o de $R\$2.280,00$? Explique usando a ideia de proporção.
13. Um jovem poupou $R\$300,00$ de um salário de $R\$1.405,00$. De acordo com a tabela de pontuação, quantos pontos ele marcou? (Dica: Calcule 10% e 20% do salário dele).
14. Represente a seguinte situação com uma única expressão numérica: Salário de $R\$2.105,00$, menos alimentação de $R\$700,00$, menos luz de $R\$150,00$, mais cashback de $R\$100,00$.
15. Roberto está organizando seu orçamento mensal no aplicativo do banco. Ele recebeu seu salário de $R\$2.105,00$ e um bônus por meta batida no trabalho de $R\$150,00$. Ao longo do mês, ele registrou as seguintes despesas: Alimentação ($R\$700,00$), Cartão de Crédito ($R\$430,00$), Água ($R\$175,00$), Luz ($R\$150,00$), Internet ($R\$135,00$), Lazer ($R\$125,00$) e Gás ($R\$100,00$). Escreva uma única expressão numérica que represente o fluxo financeiro de Roberto, calcule o saldo final e responda: ele conseguiu poupar algum dinheiro ou terminou o mês em déficit?

Forma de Abstrair Conhecimento

A abstração nesta fase deve focar na identificação de fluxos. O professor deve orientar o aluno a classificar qualquer evento financeiro em duas colunas: (+) Receitas e (–) Despesas. A grande "virada" de chave ocorre quando o aluno percebe

que a soma de várias cartas vermelhas é, na verdade, a soma de vários números negativos, resultando em um número ainda mais negativo (uma dívida maior). Para abstrair, peça que o aluno substitua o nome da carta (ex: "Luz") pelo símbolo aritmético (ex: -250), transformando o cenário do jogo em uma expressão numérica única.

Possíveis Casos

A utilização das cartas como recurso visual em exercícios de representação constitui um excelente instrumento facilitador. Nos exercícios contextualizados, diversas situações exigem essa transposição. A Figura 13 exemplifica a resolução do exercício 14 apenas pela representação da situação descrita. Já na Figura 14, a representação compõe uma etapa do exercício 15, servindo de base para o desenvolvimento dos itens subsequentes.

Figura 13 – Caso 9.



Figura 14 – Caso 10.



Conclusão

Ao concluir esta etapa, o aluno entende que o "Saldo Final" é o termômetro da sua saúde financeira. A atividade mostra que a matemática é a ferramenta que permite antecipar se haverá sobra ou falta de recursos. O aluno descobre que gerir dinheiro é, essencialmente, gerir a soma de sinais, e que o objetivo de "poupar 20%" é uma meta matemática que garante segurança contra os "eventos amarelos" da vida real.

4.2.4 Teste 2

Objetivo Geral

Avaliar a capacidade do aluno em operar com a soma de números positivos e negativos, aplicando o raciocínio de saldo e porcentagem em um contexto de orçamento doméstico.

Objetivos Específicos

Consolidar a soma de múltiplos valores negativos (dívidas), interpretar o impacto de variáveis inesperadas (cartas amarelas) e converter resultados numéricos em faixas de desempenho baseadas na poupança.

Materiais

Para a aplicação desta avaliação, os alunos utilizarão a folha de teste impressa disponível no APÊNDICE B. Além do material de escrita individual (lápis, borracha e caneta), é fundamental que o professor disponibilize a Tabela de Pontos do jogo Gestão de Saldo em cada carteira ou projetada no quadro. Embora o teste avalie a abstração, a tabela funciona como um instrumento de consulta técnica para as regras de pontuação e porcentagem, permitindo que o aluno foque no raciocínio lógico-aritmético em vez da memorização de faixas de valores.

Duração

O teste está dimensionado para uma aula de 50 minutos. Recomenda-se reservar os 5 minutos iniciais para a leitura dos enunciados e conferência dos valores da Tabela de Pontos, destinando os 45 minutos restantes para a resolução individual e entrega.

Execução

A execução do Teste 2 representa o fechamento do ciclo de educação financeira. Nesta etapa, o professor deixa o papel de "consultor" para tornar-se um avaliador da fluência numérica. A organização da sala deve ser individual, garantindo que cada estudante demonstre sua capacidade de processar fluxos de caixa de forma autônoma. Durante a aplicação, o docente deve observar se o aluno consegue:

- Realizar o agrupamento de dívidas (soma de negativos) sem confundir com a regra de sinais da multiplicação.
- Interpretar corretamente o impacto das "Cartas Amarelas" como adições ou subtrações diretas no saldo acumulado.

- Utilizar a lógica proporcional para julgar o "peso" das dívidas em diferentes salários.
- Formalizar expressões numéricas completas que sintetizem um mês de movimentação financeira.

As questões que compõem este teste de encerramento são:

1. (Mecânica) Um jogador possui um salário (Azul) de $R\$1.860,00$ e retirou as seguintes dívidas vermelhas: Alimentação ($R\$800,00$), Luz ($R\$250,00$) e Internet ($R\$120,00$). Qual o valor total da dívida acumulada até agora e qual o sinal que representa esse total?
2. (Mecânica) Se um aluno possui dívidas que somam $R\$2.100,00$ em módulo e o seu salário é de $R\$2.070,00$, qual o seu saldo parcial? Ele está com saldo positivo ou negativo?
3. (Estratégia da Carta Amarela) Seu saldo parcial após pagar as contas é de $R\$130,00$. Você retira a carta amarela de "Conserto de Celular" ($-R\$150,00$). Escreva a expressão matemática que representa essa situação e dê o resultado do Saldo Final.
4. (Fixação) Um jogador está com o saldo negativo de $-R\$80,00$. Ele recebe uma carta amarela de "Bônus no Trabalho" ($+R\$150,00$). Com quanto ele ficará de Saldo Final? Ele marcará pontos nesta rodada?
5. (Cálculo de Meta) Para um salário de $R\$1.440,00$, a tabela de consulta indica que poupar 20% garante 3 pontos. Qual é o valor exato em reais que o aluno precisa ter de saldo final para atingir essa pontuação?
6. (Contextualizado - Imprevistos) João tinha planejado um mês perfeito, mas uma "Multa de Trânsito" ($-R\$200,00$) apareceu como carta amarela. Se o saldo dele antes da multa era de $R\$180,00$, explique o que acontece com a pontuação dele na rodada de acordo com as regras do jogo.
7. (Contextualizado - Proporção) Por que uma dívida amarela de "Remédios" ($-R\$100,00$) é considerada matematicamente mais "pesada" para quem ganha o salário de $R\$1.230,00$ do que para quem ganha $R\$2.280,00$?
8. (Análise de Fluxo) Represente com uma única expressão numérica a seguinte sequência: Salário de $R\$1.650,00$, menos Alimentação de $R\$600,00$, menos Lazer de $R\$145,00$, mais Cashback de $R\$100,00$. Qual o saldo resultante?
9. (O Desafio do Orçamento) Um jogador termina com saldo positivo de $R\$150,00$. O seu salário era de $R\$2.070,00$. Sabendo que 10% desse salário é $R\$207,00$, consulte mentalmente a regra e diga: quantos pontos ele marcou nesta rodada?

10. (Análise Crítica) É possível que um jogador com o maior salário do jogo (R\$2280,00) ganhe 0 pontos, enquanto um jogador com o menor salário (R\$1230,00) ganhe 3 pontos? Justifique sua resposta com base na gestão das dívidas.

Forma de Abstrair Conhecimento

Nesta prova, o aluno deve transitar da manipulação das cartas para o registro contábil. As cartas azuis representam o crédito (+), as vermelhas representam o débito (–) e as amarelas são os ajustes de percurso. A abstração ocorre quando o estudante percebe que “somar dívidas” significa acumular valores negativos, afastando-se do zero à esquerda, e que o sucesso financeiro depende da magnitude do saldo positivo que resta após todos os confrontos aritméticos.

Possíveis Casos

O emprego de recursos físicos durante avaliações é uma estratégia eficaz para a consolidação do conhecimento. Conforme exposto nas Figuras 15 e 16, a consulta à tabela de pontos permite a resolução direta dos Exercícios 5 e 9. Ressalta-se que, embora o exercício 9 solicite o cálculo mental, a tabela atua como um importante mecanismo de conferência e validação dos resultados obtidos.

Figura 15 – Caso 11.

TABELA DE PONTOS (GESTÃO DE SALDO)				
SALÁRIO	0 PONTOS	1 PONTO	2 PONTOS	3 PONTOS
1230	0 OU MENOS	MAIS QUE 0 E MENOS QUE 124	MAIS QUE 123 E MENOS QUE 246	246 OU MAIS
1405	0 OU MENOS	MAIS QUE 0 E MENOS QUE 141	MAIS QUE 140 E MENOS QUE 281	281 OU MAIS
1580	0 OU MENOS	MAIS QUE 0 E MENOS QUE 159	MAIS QUE 158 E MENOS QUE 316	316 OU MAIS
1755	0 OU MENOS	MAIS QUE 0 E MENOS QUE 176	MAIS QUE 175 E MENOS QUE 351	351 OU MAIS
1930	0 OU MENOS	MAIS QUE 0 E MENOS QUE 194	MAIS QUE 193 E MENOS QUE 386	386 OU MAIS
2105	0 OU MENOS	MAIS QUE 0 E MENOS QUE 211	MAIS QUE 210 E MENOS QUE 421	421 OU MAIS
2280	0 OU MENOS	MAIS QUE 0 E MENOS QUE 229	MAIS QUE 228 E MENOS QUE 456	456 OU MAIS

5. (Cálculo de Meta) Para um salário de R\$1440,00, a tabela de consulta indica que poupar 20% garante 3 pontos. Qual é o valor exato em reais que o aluno precisa ter de saldo final para atingir essa pontuação?

Figura 16 – Caso 12.

TABELA DE PONTOS (GESTÃO DE SALDO)				
SALÁRIO	0 PONTOS	1 PONTO	2 PONTOS	3 PONTOS
1230	0 OU MENOS	MAIS QUE 0 E MENOS QUE 124	MAIS QUE 123 E MENOS QUE 246	246 OU MAIS
1405	0 OU MENOS	MAIS QUE 0 E MENOS QUE 141	MAIS QUE 140 E MENOS QUE 281	281 OU MAIS
1580	0 OU MENOS	MAIS QUE 0 E MENOS QUE 159	MAIS QUE 158 E MENOS QUE 316	316 OU MAIS
1755	0 OU MENOS	MAIS QUE 0 E MENOS QUE 176	MAIS QUE 175 E MENOS QUE 351	351 OU MAIS
1930	0 OU MENOS	MAIS QUE 0 E MENOS QUE 194	MAIS QUE 193 E MENOS QUE 386	386 OU MAIS
2105	0 OU MENOS	MAIS QUE 0 E MENOS QUE 211	MAIS QUE 210 E MENOS QUE 421	421 OU MAIS
2280	0 OU MENOS	MAIS QUE 0 E MENOS QUE 229	MAIS QUE 228 E MENOS QUE 456	456 OU MAIS

9. (O Desafio do Orçamento) Um jogador termina com saldo positivo de R\$150,00. O seu salário era de R\$2070,00. Sabendo que 10% desse salário é R\$207,00, consulte mentalmente a regra e diga: quantos pontos ele marcou nesta rodada?

Conclusão

Esta avaliação encerra o ciclo de estudos dos números inteiros mostrando que a soma de negativos tem nome e sobrenome na vida real: planejamento financeiro. O aluno que domina a Gestão de Saldo compreende que a matemática é a base para a segurança pessoal, aprendendo que cada número negativo retirado exige uma contrapartida estratégica para manter o saldo acima da linha do zero e dentro da meta de poupança.

4.3 MULTIPLICAÇÃO ENTRE NÚMEROS POSITIVOS E NEGATIVOS

Após a consolidação dos conceitos de deslocamento e saldo no estudo da adição, avançamos para um novo patamar de complexidade e abstração: a Multiplicação de Números Positivos e Negativos. Nesta fase, o desafio do estudante é compreender como diferentes fatores interagem entre si para determinar a magnitude e o sinal de um produto. Mais do que apenas memorizar uma "tabela de sinais", o objetivo desta etapa de aprendizagem é permitir que o aluno perceba a multiplicação como uma ferramenta de controle, escala e transformação de valores.

Assim como no bloco anterior, a aprendizagem é construída em quatro etapas interdependentes, garantindo uma transição suave do lúdico para o rigor matemático:

- Etapa 1: A Vivência Lúdica (O Jogo Combinação 100). A jornada começa com o jogo "Combinação 100". Aqui, a multiplicação deixa de ser uma conta no papel e torna-se uma estratégia de sobrevivência. Ao manipular cartas azuis (positivas), vermelhas (negativas) e cinzas (neutras), o aluno experimenta, na prática, como o agrupamento de fatores altera o resultado final. A necessidade de reorganizar pares para evitar o "estouro" de 100 pontos estimula a descoberta intuitiva das regras de sinais e a compreensão do papel do zero como elemento aniquilador na multiplicação.
- Etapa 2: A Formalização do Pensamento (Exercícios de Fixação). Nesta segunda etapa, o foco é a tradução. O aluno deixa de lidar com cartas coloridas e passa a operar com fatores numéricos formais. Os exercícios de fixação são desenhados para que o estudante internalize as regras de sinais — especialmente a natureza contraintuitiva do produto entre dois números negativos — e desenvolva a fluência necessária para resolver expressões multiplicativas complexas. O objetivo é transformar a estratégia do jogo em um procedimento matemático sólido e automático.
- Etapa 3: A Transposição Prática (Contextualização e Migração). A última etapa é o momento da aplicação real. O conhecimento migra para cenários do cotidiano, como a Educação Financeira (lucros e prejuízos compostos, cancelamento de dívidas), a Física (variações térmicas) e a Lógica (inversão de estados). Ao contextualizar a multiplicação de inteiros, o aluno compreende que saber multiplicar sinais é essencial para medir o impacto de decisões e prever resultados em sistemas dinâmicos.
- Etapa 4: A Aferição da Competência (Teste 3). O ciclo se encerra com a verificação da autonomia individual. O Teste 3 atua como um instrumento diagnóstico para confirmar se a transição da mecânica de combinação de cartas para o algoritmo da multiplicação foi efetivada. Nesta fase, avalia-se a capacidade do estudante

de aplicar as regras de sinais, interpretar o conceito de fatores e produtos em contextos variados e utilizar a lógica de reorganização (propriedade associativa) para resolver problemas formais, garantindo que a competência multiplicativa foi plenamente atingida.

Este tópico está alinhado à competência de Educação Financeira e às habilidades da BNCC (especialmente a EF07MA04), ao incentivar o uso das operações fundamentais com números inteiros para a resolução de problemas críticos. A metodologia de "quatro etapas" garante que a multiplicação de números positivos e negativos seja vista como uma linguagem poderosa, capaz de descrever desde a economia de uma empresa até fenômenos científicos, preparando o aluno para o raciocínio matemático avançado e para a cidadania financeira.

4.3.1 Atividade 7 - Combinação 100

Objetivo Geral

O jogo Combinação 100 tem como objetivo geral proporcionar o domínio das operações de multiplicação com números inteiros e a aplicação prática das regras de sinais. Como aponta Lorenzato (2006), o uso de materiais manipuláveis é essencial para que o estudante visualize propriedades que pareceriam arbitrárias apenas no papel. Para esta atividade, o design das imagens das cartas foi produzido com suporte do Gemini(2026), sob a supervisão do autor. Através desta dinâmica que integra cálculo mental e gestão de probabilidades, a justificativa pedagógica para esta atividade encontra respaldo na BNCC ao promover o pensamento crítico e a tomada de decisão (Competência 4), focando primordialmente na habilidade EF07MA04, que estabelece a necessidade de resolver e elaborar problemas com números inteiros envolvendo as quatro operações fundamentais. Ao trabalhar com um baralho de 50 cartas e a busca pelo "cem perfeito", o jogo transforma propriedades aritméticas abstratas em ferramentas estratégicas de sobrevivência e sucesso na partida.

Objetivos Específicos

- Internalizar as combinações de sinais (positivo/positivo, negativo/negativo e sinais opostos) de forma automática e contextualizada.
- Desenvolver a flexibilidade cognitiva através da reorganização constante de arranjos numéricos para otimização de resultados.
- Compreender a propriedade do elemento neutro, utilizando o zero para anulação de valores e controle tático do saldo.
- Fortalecer a capacidade de planejamento e a análise de informações abertas, incentivando o monitoramento do progresso alheio.
- Estimular a precisão e o rigor matemático, utilizando os números negativos como um recurso estratégico de "freio".
- Transitar do pensamento aritmético para o algébrico, conforme as orientações pedagógicas de transição, utilizando a Taxonomia de Bloom — estrutura que categoriza os níveis de complexidade dos processos de aprendizagem — para atingir os níveis de "Análise"(comparar arranjos) e "Avaliação"(gestão de riscos).

Materiais

Para a implementação do jogo Combinação 100, este trabalho disponibiliza no APÊNDICE B um conjunto completo de 50 cartas prontas para impressão, permitindo

uma produção rápida e eficiente. A organização visual das cartas respeita a lógica pedagógica do jogo para facilitar a identificação imediata das operações:

- **Cartas Azuis (Positivas):** Duas unidades de cada número (1 a 9) e quatro cartas do número 10.
- **Cartas Vermelhas (Negativas):** Duas unidades de cada número (1 a 9) e quatro cartas do número 10.
- **Cartas Cinzas (Neutras):** Seis cartas representando o número zero, essenciais para o equilíbrio estratégico.
- **Alternativas:** O docente possui a liberdade de adaptar o jogo utilizando materiais já disponíveis na unidade escolar, como cartas de baralhos comerciais (ex: UNO). Nesse caso, pode-se estabelecer a "Corrida ao 81" (9 vezes 9) ou manter o alvo em 100 para elevar o nível de dificuldade, exigindo que os alunos realizem mais combinações e turnos para atingir a meta.

Confecção

O professor deve coordenar a produção do material, garantindo que as cartas sejam recortadas e, preferencialmente, coladas em uma superfície resistente ou plastificadas para suportar o manuseio constante. Nesta etapa, o docente atua como o arquiteto do recurso didático, focando em:

- **Mediação Visual:** Orientar a padronização das cores para tornar o cálculo mental mais fluido. Caso opte por baralhos alternativos, o professor deve coordenar com a turma a definição de novas convenções (ex: amarelo e verde para sinais opostos), discutindo a simbologia das cores.
- **Adaptação Criativa:** Incentivar os alunos a participarem da criação da identidade visual do jogo, o que aumenta o engajamento e o sentido de posse sobre o material produzido.
- **Calibragem Pedagógica:** Atuar como consultor para definir, com base no nível de proficiência da turma, se o objetivo será o "cem perfeito" ou metas menores. Manter metas altas com valores baixos é uma estratégia valiosa para forçar a flexibilidade cognitiva e o pensamento algébrico.

Duração

Considerando o tempo para a preparação das cartas, a explicação detalhada da mecânica de multiplicação e a realização das rodadas, a atividade é planejada para duas aulas de 50 minutos (ou uma aula dupla de 100 minutos). Este tempo permite que o professor realize demonstrações práticas antes do início da competição real.

Execução

O jogo demonstra grande versatilidade, podendo ser jogado em duplas, trios ou grupos de até cinco pessoas — limite estabelecido para garantir que o baralho de 50 cartas atenda à necessidade de cada jogador acumular até nove cartas. Durante a partida, o professor assume o papel de mediador estratégico e observador tático:

1. Observação da Regra de Sinais: Circular entre os grupos para garantir a aplicação correta da multiplicação de inteiros, especialmente no desafio de transformar dois números negativos em um saldo positivo para a vitória.
2. Estímulo à Reorganização: Intervir quando notar alunos com combinações fixas, incentivando a flexibilidade: "Você percebeu que ao trocar esse par, seu 'estouro' de saldo volta para a meta?".
3. Monitoramento de Informações Abertas: Como as estratégias são visíveis, o docente deve instigar os alunos a monitorarem as combinações dos adversários, promovendo a análise de dados e a antecipação de riscos.
4. Uso Tático do Zero: Orientar os alunos a perceberem o zero cinza não apenas como ausência de valor, mas como um "escudo" tático capaz de neutralizar prejuízos e ajustar a precisão do resultado final.

Forma de Abstrair Conhecimento

O Combinação 100 encerra o ciclo de propostas lúdicas ao elevar o desafio para o campo da multiplicação. A desmistificação dos números negativos é a conclusão fundamental: o valor negativo deixa de ser um símbolo de "perda" para tornar-se um "freio" estratégico essencial. Através da mediação do professor, o aluno exerce a flexibilidade cognitiva ao recombina seus pares a cada turno. O domínio das regras de sinais deixa de ser mecânico e torna-se uma ferramenta de sobrevivência e precisão, preparando o estudante para o pensamento algébrico e para a tomada de decisões baseada em dados de forma rigorosa e engajadora.

Regras do Jogo

O jogo **Combinação 100** é uma atividade de estratégia e cálculo mental que utiliza um baralho customizado de 50 cartas, distribuídas em três categorias: cartas azuis (números positivos), cartas vermelhas (números negativos) e cartas cinzas (zeros neutros). A composição do baralho conta com duas cartas azuis e duas vermelhas para cada número de 1 a 9, além de um reforço estratégico de quatro cartas azuis do número 10 e quatro cartas vermelhas do número 10. Completando o conjunto, seis cartas cinzas representam o zero, funcionando como elementos neutros. O objetivo central é

acumular uma pontuação total o mais próxima possível de 100, sem nunca ultrapassar esse valor. A mecânica baseia-se na multiplicação: cada par de cartas formado resulta em um valor determinado pela regra de sinais, e a soma desses resultados compõe o score total do jogador.

A cada turno, o jogador compra duas novas cartas do monte e as adiciona ao seu conjunto pessoal exposto na mesa. O diferencial estratégico reside no fato de as combinações não serem fixas; a cada nova compra, o competidor tem a liberdade de reorganizar todas as suas cartas para formar novos pares. Com a inclusão das cartas cinzas, o zero ganha uma função tática de neutralização, permitindo que um jogador "anule" uma carta de valor alto que poderia fazê-lo ultrapassar o limite de 100. Essa flexibilidade permite mudar drasticamente a trajetória matemática, transformando prejuízos em lucros através da recombinação inteligente de sinais e valores.

Para ilustrar essa dinâmica, imagine um jogador que, no primeiro turno, retira uma carta 3 azul e uma 3 vermelha, resultando em -9 pontos. Se na rodada seguinte ele comprar uma 4 vermelha e uma 6 azul, ele poderá reorganizar as quatro cartas: ao combinar a 3 vermelha com a 4 vermelha, ele obtém $+12$ (negativo com negativo), e ao unir a 3 azul com a 6 azul, obtém $+18$. O saldo, que antes era negativo, torna-se uma pontuação positiva de 30. Se ele possuísse uma carta cinza (zero), poderia ainda utilizá-la para neutralizar qualquer uma dessas cartas, caso o resultado da multiplicação fosse indesejado para o seu planejamento.

O jogo possui um limite de três turnos por jogador, totalizando seis cartas acumuladas. Após cada compra, deve-se decidir entre "continuar" ou "parar". Como todas as cartas e cálculos estão visíveis para ambos os oponentes, a partida torna-se um duelo de informações abertas. O aumento na quantidade de cartas 10 (tanto positivas quanto negativas) eleva o potencial de pontuação, mas também aumenta o risco de "estourar" o limite de 100 pontos, exigindo que o jogador utilize as cartas cinzas ou as multiplicações negativas com cautela para manter o controle sobre o resultado final.

O desfecho do jogo ocorre de forma imediata caso um dos jogadores atinja a marca exata de 100 pontos, sendo este o objetivo máximo da partida. Caso ninguém atinja o valor exato após os três turnos ou após ambos decidirem parar, a vitória é declarada para aquele que possuir a soma mais próxima do limite, sem ultrapassá-lo. Através da manipulação de 50 cartas e da busca pelo 100 perfeito, o jogo transforma o aprendizado das regras de sinais e da neutralidade do zero em uma ferramenta pedagógica de planejamento, precisão e gestão de riscos.

Casos Especiais

O professor deve utilizar estes cenários práticos para realizar paradas pedagógicas e explicar as nuances do jogo:

- **Neutralidade Estratégica:** Imagine que um competidor já possui uma pontuação sólida de 90 pontos, composta por dois pares que resultaram em +50 e +40. No seu último turno, ele é "obrigado" a comprar mais duas cartas e retira uma 10 Azul e uma 0 Cinza. Se ele não tivesse a carta cinza, seria forçado a multiplicar o 10 por alguma outra carta de sua mão, o que provavelmente o faria ultrapassar o limite de 100, resultando no "estouro". No entanto, ao utilizar a carta cinza, ele pode formar o par ($10 \times 0 = 0$). Dessa forma, ele anula o valor da carta alta e mantém seus 90 pontos intactos, exemplificando como o zero cinza funciona como um "escudo" que permite ao jogador proteger uma boa pontuação contra compras arriscadas no final do jogo.
- **O Peso das Cartas 10 e a Vitória Imediata:** Considere um jogador que inicia o jogo de forma agressiva e, em seus dois primeiros turnos, consegue reunir duas cartas 10 Azuis e duas cartas 10 Vermelhas. Em vez de formar pares mistos que resultariam em valores negativos, ele pode optar pela simetria: um par de Azuis ($10 \times 10 = 100$) e um par de Vermelhas ($(-10) \times (-10) = 100$). Entretanto, se ele fizesse isso, somaria 200 pontos e estouraria. A grande sacada estratégica ocorre na recombinação: ele pode usar apenas um par de Vermelhas para gerar o +100 e, caso tenha comprado uma carta 0 Cinza no processo, anular as outras cartas. Se ele conseguir formar exatamente um par que resulte em +100 e neutralizar o restante das cartas com zeros ou combinações que somem zero, ele atinge a vitória suprema instantaneamente, o que prova que o excesso de cartas 10 é, de fato, uma faca de dois gumes.
- **Recombinação Final para o 100 Perfeito:** Imagine que um jogador possui as cartas: 8 Azul, 5 Azul, 4 Vermelho, 5 Vermelha, 10 Azul e 10 Vermelha. Se ele multiplicar aleatoriamente, pode acabar muito longe do alvo. Porém, ao analisar o conjunto, ele pode planejar uma soma exata: ele pode formar o par (10Azul $\times$ 8Azul = 80) e o par (4Vermelho $\times$ 5 Vermelho = 20). Até aqui, ele já atingiu os 100 pontos. As duas cartas restantes, 5 Azul e 10 Vermelha, se multiplicadas, resultariam em -50, estragando o resultado final. O desafio estratégico, então, é perceber se ele pode trocar as peças; se possuir uma carta 0 Cinza guardada, ele poderia anular as sobras. Caso contrário, ele deve tentar reorganizar todos os pares para que a soma total chegue o mais próximo possível de 100 sem ultrapassar, testando diversas combinações de sinais.
- **Números Negativos como Freio de Pontuação:** Suponha que um jogador, após suas combinações, perceba que sua soma total deu 120 pontos, o que o eliminaria do jogo. Se ele possuir entre suas seis cartas uma 10 Azul e uma 3 Vermelha, ele pode evitar o estouro ao desmanchar um par positivo e criar o par ($10 \times (-3) = -30$). Ao introduzir esse resultado negativo na sua conta final, ele consegue

"puxar" sua pontuação de volta para baixo do limite, transformando os 120 em 90 pontos (considerando a diferença da troca de pares). Essa situação costuma gerar muitas dúvidas, pois os alunos tendem a buscar apenas resultados positivos, mas este cenário prova que saber subtrair através de multiplicações de sinais diferentes é a única forma de sobreviver quando as cartas de valor alto aparecem em excesso no baralho.

Possíveis Casos

O jogo Combinação 100 destaca-se pela alta complexidade e variedade de jogadas. Na Figura 17, o jogador possui quatro cartas (dois pares). A estratégia ideal para aproximar-se do valor 100 seria multiplicar as cartas azuis: $6 \times 10 = 60$ e $5 \times 10 = 50$ (ou combinações similares que priorizem o valor positivo). No exemplo citado, o jogador optou por retirar um novo par: um 0 cinza e um 1 vermelho.

Embora inicialmente parecesse desvantajoso, a recombinação das cartas permitiu um resultado superior. Ao agrupar o 10 azul com o outro 10 azul (100), o 0 cinza com o 6 azul (0) e o 5 azul com o 1 vermelho (-5), obteve-se o total de 95 pontos (Figura 18). Este cenário demonstra que a capacidade de recombinar cartas é um dos pilares estratégicos do jogo.

Figura 17 – Caso 13: Parte 1.



Figura 18 – Caso 13: Parte 2.



Conclusão

A atividade Combinação 100 demonstra que o domínio das operações com inteiros é a chave para a organização lógica e tática, elevando o desafio para o campo da multiplicação e da gestão estratégica de riscos. Ao transformar a aritmética em uma ferramenta de sobrevivência e precisão, o jogo consolida uma aprendizagem onde o rigor matemático e a autonomia caminham juntos, desmistificando a natureza dos números negativos. Nesta dinâmica, o valor negativo deixa de ser um mero símbolo de "perda" para tornar-se um "freio" estratégico essencial, permitindo que o aluno exerça sua flexibilidade cognitiva ao recombinar cartas e antecipar resultados para não ultrapassar o limite da vitória.

Dessa forma, a transição do processo mecânico das regras de sinais para o seu uso aplicado fortalece o pensamento algébrico e a tomada de decisões baseada em dados. O ciclo encerra-se não apenas com alunos que dominam a tabuada de sinais, mas com cidadãos preparados para analisar informações, gerir riscos e agir com segurança diante da volatilidade do mundo real. A proposta consolida, assim, uma experiência pedagógica que é, simultaneamente, rigorosa e profundamente engajadora.

4.3.2 Atividade 8 - Exercícios de Fixação

Objetivo Geral

Dominar as operações de multiplicação com números inteiros e a aplicação da regra de sinais, utilizando o raciocínio lógico para otimizar resultados em um sistema de pontuação acumulada.

Objetivos Específicos

- Internalizar as regras de sinais: $(+) \cdot (+) = (+)$, $(-) \cdot (-) = (+)$, $(+) \cdot (-) = (-)$ e $(-) \cdot (+) = (-)$.
- Compreender a função do zero como elemento neutro na multiplicação, independente do sinal do fator oposto.
- Desenvolver a flexibilidade cognitiva através da reorganização de conjuntos numéricos para alterar o resultado final (Propriedade Associativa).
- Praticar a gestão de risco e o cálculo mental estimativo para evitar ultrapassar o limite de 100 pontos.

Materiais

Para a realização desta atividade, os alunos deverão utilizar a folha de exercícios disponível no APÊNDICE B. Além do material de escrita, é fundamental o uso do kit de cartas do jogo Combinação 100, composto por cartas Azuis (positivas), Vermelhas (negativas) e Cinzas (zero). O uso físico das cartas é essencial para que os estudantes possam testar diferentes combinações e agrupamentos antes de registrar os cálculos, permitindo uma compreensão tátil das propriedades da multiplicação.

Duração

A atividade está planejada para uma aula de 50 minutos. A distribuição recomendada é de 5 minutos para a recapitulação das regras de sinais; 35 minutos para a resolução individual ou em duplas dos exercícios propostos; e os 10 minutos finais para a discussão das estratégias de "reorganização de pares" que permitiram aos alunos atingir ou se aproximar do limite de 100 pontos.

Execução

A execução desta atividade marca a entrada no domínio das operações multiplicativas. O professor deve atuar como um orientador estratégico, incentivando os alunos a perceberem que a multiplicação de números inteiros é uma ferramenta de controle de magnitude. A organização da sala pode ser em duplas, facilitando a

manipulação das cartas e o debate sobre qual combinação resulta em um valor mais seguro para não "estourar" o limite do jogo.

Durante a aula, as funções do professor incluem:

- Mediar a regra de sinais: Garantir que o aluno compreenda que multiplicar dois "negativos" (cartas vermelhas) resulta em um avanço positivo no saldo.
- Demonstrar a Propriedade Associativa: Mostrar como a troca de "parceiros" entre as cartas altera drasticamente o produto final.
- Explorar o elemento neutro: Reforçar o papel da carta Cinza (0) como um recurso de "segurança" para anular valores altos e evitar o estouro.
- Estimular a escrita formal: Garantir que o aluno transcreva a jogada para a forma de expressão numérica $(a \cdot b + c \cdot d)$.

Os exercícios para esta etapa de fixação são:

1. No primeiro turno, você compra um 5 Azul e um 6 Azul. Qual o seu saldo de pontos atual?
2. Você retira um par de cartas da mesma cor: 4 Vermelho e 8 Vermelho. Qual o resultado da multiplicação deste par?
3. Um jogador forma um par com um 9 Azul e um 3 Vermelho. Ele ganha ou perde pontos? Qual o valor exato?
4. Você já tem 90 pontos (vindos de dois pares: $(-10) \times (-5) = 50$ e $8 \times 5 = 40$). No último turno, você compra o par 10 Azul e 0 Cinza. Se você apenas somar as novas cartas como um par extra, você estoura? Como você deve organizar essas 6 cartas para atingir o "Cem Perfeito"?
5. Você tem as cartas 2 Azul, 2 Vermelho, 5 Azul e 5 Vermelho. Reorganize essas 4 cartas para obter a maior pontuação positiva possível através de dois pares.
6. Um jogador possui duas cartas 10 Vermelhas. Ele afirma que seu saldo é de -100 . Ele está correto? Explique.
7. Você tem 95 pontos e compra o par 8 Azul e 2 Vermelho. Se você formar um novo par com essas duas cartas e somar ao que já tinha, você "estoura" o limite de 100?
8. Você está com 98 pontos. No último turno, você deve escolher entre dois montes de compra (cada um com um par). O Monte A tem (10 Azul e 0 Cinza) e o Monte B tem (5 Azul e 4 Azul). Por que o Monte A é estrategicamente mais seguro, considerando que você não pode passar de 100?

9. Suas cartas são: 7 Azul, 3 Azul, 7 Vermelho e 3 Vermelho. Qual a diferença de pontos entre combinar as cores iguais (Azul/Azul e Vermelha/Vermelha) e combinar as cores diferentes (Azul/Vermelha)?
10. Você chegou ao final do jogo com 6 cartas: dois 10 Azuis, dois 10 Vermelhos, um 0 Cinza e um 2 Azul. Como você deve organizar esses três pares para conseguir exatamente 100 pontos e vencer a partida?
11. Um aluno diz: "Multiplicar duas cartas vermelhas é ruim porque o resultado é negativo". Baseado nas regras, ele está certo?
12. Você tem as cartas 8 Azul, 2 Azul e dois 10 Vermelhos. No turno seguinte, compra o par 2 Vermelho e 0 Cinza. Qual a melhor combinação de pares para chegar o mais perto possível de 100 sem passar?
13. Você está com 110 pontos (estourou). Suas cartas são $(10 \times 10 = 100)$ e $(5 \times 2 = 10)$. Você compra o par 6 Vermelha e 1 Azul. Como reorganizar para voltar a ter menos de 100 pontos?
14. Qual o resultado final de um conjunto de 6 cartas onde todas são 0 Cinzas?
15. Invente uma combinação de 6 cartas (3 pares) que resulte em exatamente 100 pontos, utilizando pelo menos uma carta de cada cor (Azul, Vermelha e Cinza).

Forma de Abstrair Conhecimento

A abstração neste jogo ocorre quando o aluno deixa de ver "cartas coloridas" e passa a enxergar fatores e produtos. Uma forma de potencializar isso é incentivar o aluno a escrever as expressões matemáticas de cada rodada antes e depois da reorganização. Ao notar que o valor total muda drasticamente apenas trocando os pares, o aluno compreende, na prática, como os sinais operam. O professor deve estimular a pergunta: "Qual combinação de sinais me protege do estouro?". Isso transforma o sinal de "menos" de um símbolo de perda em um aliado estratégico de controle.

Possíveis Casos

Utilizar as cartas como suporte na resolução de exercícios de fixação é uma prática recomendável. No exemplo do exercício 5, as cartas são selecionadas após a leitura do enunciado, como mostra a Figura 19. Para obter o maior resultado possível, deve-se aplicar a regra de sinais: multiplicar cartas azuis entre si e cartas vermelhas entre si (Figura 20). Uma vez que o produto de dois números positivos ou de dois números negativos resulta em um valor positivo, essa estratégia garante a otimização da pontuação. Neste caso específico, o valor máximo alcançável é 20.

Figura 19 – Caso 14: Parte 1.

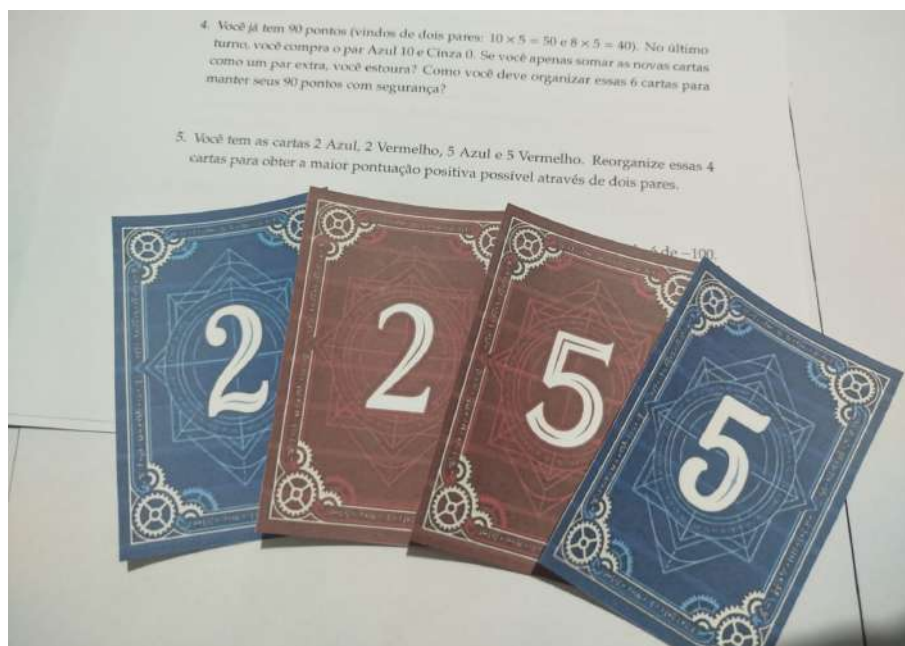
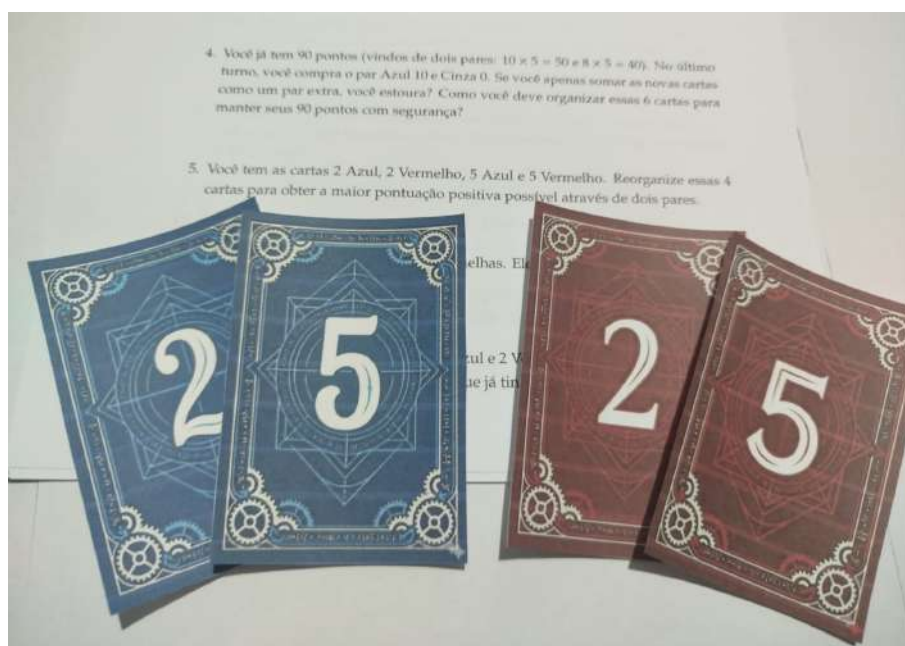


Figura 20 – Caso 14: Parte 2.



Conclusão

Esta atividade solidifica o conceito de que, na matemática, a forma como organizamos os dados altera o impacto do resultado. O Combinação 100 ensina que os números negativos e o zero são fundamentais para o equilíbrio de qualquer sistema. Ao final, o aluno não apenas sabe a tabuada, mas entende como manipular sinais para atingir um objetivo preciso, desenvolvendo uma fluência numérica essencial para o estudo futuro de equações e funções.

4.3.3 Atividade 9 - Exercícios Contextualizados

Objetivo Geral

Aplicar a multiplicação de números inteiros e a regra de sinais em contextos reais, compreendendo como diferentes fatores interagem para gerar resultados positivos ou negativos.

Objetivos Específicos

- Interpretar a multiplicação como a repetição de um ganho ou de uma perda (ex: 5 dívidas de R\$10,00).
- Compreender o impacto estratégico do "duplo negativo" (a inversão de uma perda) em contextos lógicos ou financeiros.
- Utilizar o conceito de "estouro" (limite de 100) para trabalhar a gestão de riscos e o cálculo estimativo em problemas do cotidiano.
- Formalizar expressões matemáticas complexas (produto de pares) a partir de narrativas situacionais.

Materiais

Para a realização desta atividade, os alunos deverão utilizar a folha de "Exercícios Contextualizados" disponível para download no APÊNDICE B. Além do material de escrita, será essencial o uso do kit de cartas do jogo Combinação 100 (cartas Azuis, Vermelhas e Cinzas). As cartas servirão como suporte concreto para que os estudantes possam simular a repetição de ganhos ou perdas descritas nos problemas antes de converterem as narrativas em expressões matemáticas formais.

Duração

A atividade está prevista para um período letivo de 50 minutos. A distribuição do tempo deve seguir este cronograma: 10 minutos para a explicação da lógica de "Quantidade vs. Valor Unitário" e revisão rápida da regra de sinais; 30 minutos para a resolução dos problemas em grupo; e 10 minutos finais para a sistematização dos conceitos, focando especialmente na interpretação do "duplo negativo" (cancelamento de dívidas).

Execução

A execução desta atividade visa consolidar a multiplicação de números inteiros como uma ferramenta de leitura do cotidiano. A organização ideal é em duplas ou pequenos grupos (até 4 alunos), promovendo a troca de interpretações sobre os

enunciados. O professor deve atuar como um moderador de lógica, circulando entre os grupos para garantir que os alunos não apenas decorem a "tabela de sinais", mas compreendam o seu significado. As funções docentes nesta etapa incluem: auxiliar na identificação dos dois fatores da multiplicação (quem é o agente multiplicador e qual é o valor unitário), mediar a compreensão de que "perder uma dívida" ou "anular uma multa" resulta em algo positivo para o saldo, e desafiar os alunos a realizarem cálculos estimativos para evitar o "estouro" do limite de 100 pontos.

Os exercícios propostos para esta etapa de aplicação são:

1. Uma loja vendeu 5 camisetas e teve um lucro de 10 reais em cada uma. Utilizando as cores do jogo, como representarias este par de fatores e qual o lucro total?
2. Um investidor comprou 4 ações que desvalorizaram 8 reais cada uma. Qual o saldo final desta operação? Representa-o como uma multiplicação de inteiros.
3. Na Educação Financeira, anular uma multa é algo positivo. Se tens 2 multas de 20 reais cada e o banco as cancela (multiplica por zero), qual o impacto no teu saldo? Relaciona com a carta Cinza.
4. Um tanque de água perde 10 litros por hora. Se passarem 6 horas, qual a variação total do volume de água? Representa o tempo como fator positivo e a perda como fator negativo.
5. Num jogo de perguntas e respostas, cada erro retira 5 pontos. Se um aluno cometer 4 erros, qual o impacto na sua pontuação? (Pense no par de cartas: 4 Azul e 5 Vermelho).
6. Imagina que deves 10 reais a 3 amigos diferentes (3 vezes -10). Se ganhares um prémio de 50 reais, o teu saldo final será positivo ou negativo? Qual o valor?
7. Uma equipa de mergulho desce 2 metros por minuto. Onde estará a equipa após 10 minutos? Representa a descida como um número negativo.
8. Um comerciante tem 90 pontos de crédito. Ele faz uma compra de 2 produtos que custam 10 reais cada, mas recebe um desconto total que anula essa compra (multiplica por zero). Ele ultrapassou o limite de 100 pontos?
9. Se "perder uma dívida" é o mesmo que ganhar dinheiro, como explicarias o resultado de $(-5) \times (-4)$ usando o exemplo de cancelar 5 faturas de 4 reais cada?
10. Estás a organizar um evento e tens 10 mesas com 10 cadeiras cada. Se todas as mesas estiverem ocupadas (10 Azul x 10 Azul), atingiste o "Cem Perfeito"?

11. Numa experiência de física, a temperatura de um gás desce 3 graus a cada 10 minutos. Se a temperatura inicial era de 20 graus, qual será a temperatura após 30 minutos (3 intervalos de 10)?
12. Tens 6 cartas que representam o teu stock: (10 Azul, 10 Azul), (5 Vermelha, 5 Vermelha) e (8 Azul, 0 Cinza). Qual o valor total do teu stock? Estás dentro do limite de 100?
13. Um submarino está a -50 metros. Ele duplica a sua profundidade (multiplica por 2). Em que posição se encontra agora? O resultado é mais "positivo" ou mais "negativo" que o anterior?
14. Um esquema de pontos de fidelidade dá 10 pontos por cada compra. Se um cliente fizer 10 compras e depois usar um cupom que retira 10 pontos, qual o saldo final? Escreve a expressão matemática.
15. Por que razão, num planeamento financeiro, ter $10 \times (-3)$ é preferível a ter $10 \times (-10)$, se o objetivo é manter o saldo o mais próximo possível de $+100$?

Forma de Abstrair Conhecimento

A abstração nesta etapa deve focar na relação "Quantidade vs. Valor Unitário". O aluno deve perceber que o primeiro fator de uma multiplicação pode representar "quantas vezes" algo acontece, e o segundo fator "o que" está a acontecer. A cor Azul deixa de ser apenas uma carta e passa a ser um multiplicador de sucesso ou lucro, enquanto a Vermelha representa o multiplicador de débito ou decréscimo. Uma forma de abstrair é pedir ao aluno que identifique, em cada problema, quem é o "agente" (quantidade) e quem é o "objeto" (valor), aplicando a regra de sinais para prever o saldo final antes de efetuar o cálculo.

Possíveis Casos

Nos exercícios contextualizados, as cartas auxiliam na interpretação de problemas de maior complexidade. A Figura 21 demonstra a resolução simplificada de uma questão utilizando as cartas 4 azul e 5 vermelho, escolhidas após análise criteriosa do enunciado. A Figura 22 segue o mesmo princípio metodológico. O uso desses recursos físicos facilita a identificação de padrões matemáticos pré-estabelecidos, como o fato de que a multiplicação entre um número positivo e um negativo resulta invariavelmente em um valor negativo.

Figura 21 – Caso 15.

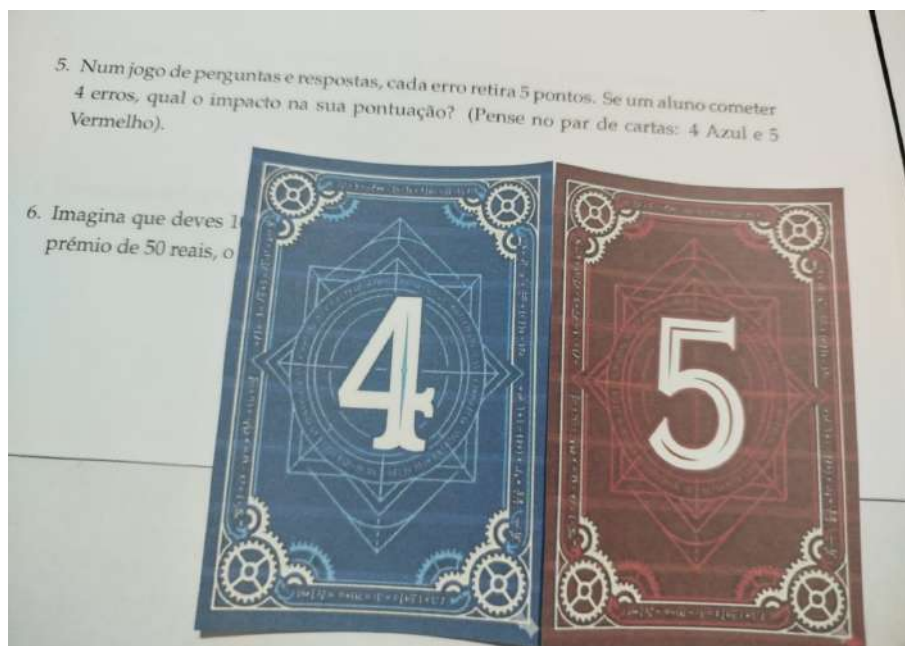
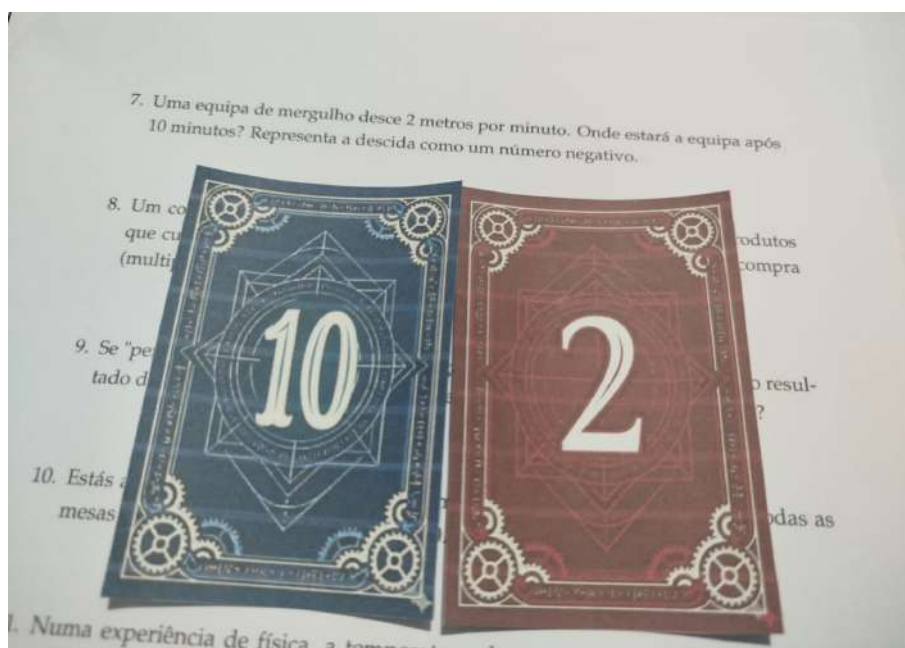


Figura 22 – Caso 16.



Conclusão

Esta atividade demonstra que a multiplicação de números inteiros é a ferramenta matemática que usamos para medir o peso das nossas decisões. Ao contextualizar o Combinação 100, o aluno descobre que "menos vezes menos resulta em mais" não é apenas uma regra de papel, mas uma lógica que pode representar, por exemplo, o cancelamento de uma dívida. Ao final, o aluno estará apto a manipular grandes

valores e a compreender que o equilíbrio (o 100 perfeito) exige tanto o crescimento (azul) quanto o freio estratégico (vermelho ou cinza).

4.3.4 Teste 3

Objetivo Geral

Avaliar a competência do aluno em realizar multiplicações com números inteiros e aplicar a regra de sinais em diferentes contextos.

Objetivos Específicos

Verificar a capacidade de reorganizar fatores para alterar resultados, compreender o papel do zero na anulação de valores e interpretar situações de lucro/prejuízo como operações matemáticas.

Materiais

Para a realização desta avaliação, os alunos utilizarão a folha de teste impressa disponível no APÊNDICE B. Além do material de escrita (lápis, borracha e caneta), recomenda-se que o professor disponibilize os kits de cartas do jogo Combinação 100 (Azul, Vermelha e Cinza) sobre as mesas ou em uma área de consulta. O uso das cartas durante o teste auxilia na visualização das propriedades associativas e na aplicação da regra de sinais, funcionando como um suporte concreto para a resolução das situações de reorganização de fatores.

Duração

O tempo previsto para esta avaliação é de 50 minutos. A organização sugerida é de 5 minutos para a leitura inicial e orientações sobre a interpretação das cores como sinais matemáticos, seguidos de 45 minutos para a resolução individual e entrega do material.

Execução

A execução do Teste 3 avalia a fluência do aluno em operações multiplicativas com números inteiros. O professor deve organizar a sala de modo a favorecer a autonomia, mas atuando como um observador do raciocínio lógico. Durante a aplicação, o docente deve circular para identificar se os estudantes estão apenas aplicando a "decoreba" da tabela de sinais ou se compreendem o efeito de cada operação no saldo final. As funções principais do professor nesta etapa são:

- Verificar a aplicação da Regra de Sinais: Observar se o aluno compreende que o produto de dois números negativos $((-) \cdot (-))$ resulta em um avanço positivo.
- Monitorar a Reorganização: Avaliar como o aluno manipula os pares de fatores para evitar o "estouro" de 100 pontos, um indicador crítico de flexibilidade cognitiva.

- Validar o Efeito do Zero: Confirmar se o papel da carta Cinza (0) está claro como elemento de anulação estratégica.
- Interpretar Contextos: Garantir que o aluno consiga transpor conceitos como "cancelar uma dívida" para uma expressão de multiplicação formal.

As questões que compõem esta avaliação final são:

1. (Mecânica) No jogo, você retira um par de cartas da mesma cor: 7 Vermelho e 9 Vermelha. Qual é o resultado da multiplicação deste par? O saldo final é positivo ou negativo?
2. (Mecânica) Um jogador forma um par com um 8 Azul e um 4 Vermelho. Qual o valor exato dessa combinação? Explique por que o resultado possui esse sinal.
3. (Estratégia do Zero) Você possui 92 pontos. No seu turno, você compra as cartas 10 Azul e 0 Cinza. Qual combinação você deve fazer para garantir que sua pontuação não ultrapasse 100 e por que essa estratégia funciona?
4. (Reorganização) Você tem as cartas 5 Azul, 5 Vermelha, 2 Azul e 2 Vermelha. Se você organizar os pares por cores diferentes (Azul x Vermelha), qual será sua pontuação total? E se organizar por cores iguais (Azul x Azul e Vermelha x Vermelha)?
5. (O Freio Negativo) Um jogador "estourou" e está com 120 pontos. Ele possui um par ($10 \times 10 = 100$) e outro ($5 \times 4 = 20$). Ele recebe uma carta 6 Vermelho e um 1 Azul. Como ele pode reorganizar esses pares para que sua pontuação total volte a ficar abaixo de 100?
6. (Contextualizado - Comércio) Uma loja vendeu 8 camisetas e teve um lucro de R\$10,00 em cada uma. Utilizando a lógica das cartas do jogo, represente essa situação como uma multiplicação e dê o resultado final.
7. (Contextualizado - Dívidas) Se "cancelar uma dívida" é uma operação positiva, como você explica matematicamente (usando a regra de sinais) o ato de retirar 3 multas de R\$15,00 de um cliente?
8. (Contextualizado - Ciência) Em um experimento, a temperatura de um líquido cai 4 graus a cada 10 minutos. Qual será a variação total de temperatura após 5 intervalos de 10 minutos? (Represente a queda como um número negativo).
9. (O Cem Perfeito) Para vencer a partida com o "Cem Perfeito", um aluno organizou suas 6 cartas assim: $(-10) \times (-10)$, 5×0 e 2×0 . Faça os cálculos de cada par e confirme se ele atingiu exatamente 100 pontos.

10. (Análise Crítica) Um colega diz: "É impossível ter uma pontuação positiva se eu só tiver cartas vermelhas na mão". Baseado nas regras do jogo e na multiplicação de inteiros, prove que ele está errado.

Forma de Abstrair Conhecimento

Nesta prova, o aluno deve enxergar as cartas como fatores de uma conta. Onde houver "Azul", ele deve ler um número positivo; onde houver "Vermelho", um número negativo. A transição para a vida real ocorre ao perceber que multiplicar dois valores negativos (como cancelar uma dívida) resulta em um benefício (positivo).

Possíveis Casos

De forma análoga às demais atividades, as cartas são recursos valiosos na resolução de testes. No exercício 4, são apresentados dois cenários distintos. Na Figura 23, observa-se a primeira situação; embora existissem outras formas de recombinação, a configuração escolhida atende ao objetivo primordial do jogo: aproximar-se do valor 100.

A título de curiosidade, uma combinação alternativa (azul 5 com vermelho 5 e vermelho 2 com azul 2) resultaria em -29 , valor inferior ao obtido com a combinação apresentada (-20). Por fim, a Figura 24 exhibe a segunda parte do exercício, que representa o maior resultado possível com as quatro cartas disponíveis: o valor 20.

Figura 23 – Caso 17: Parte 1.

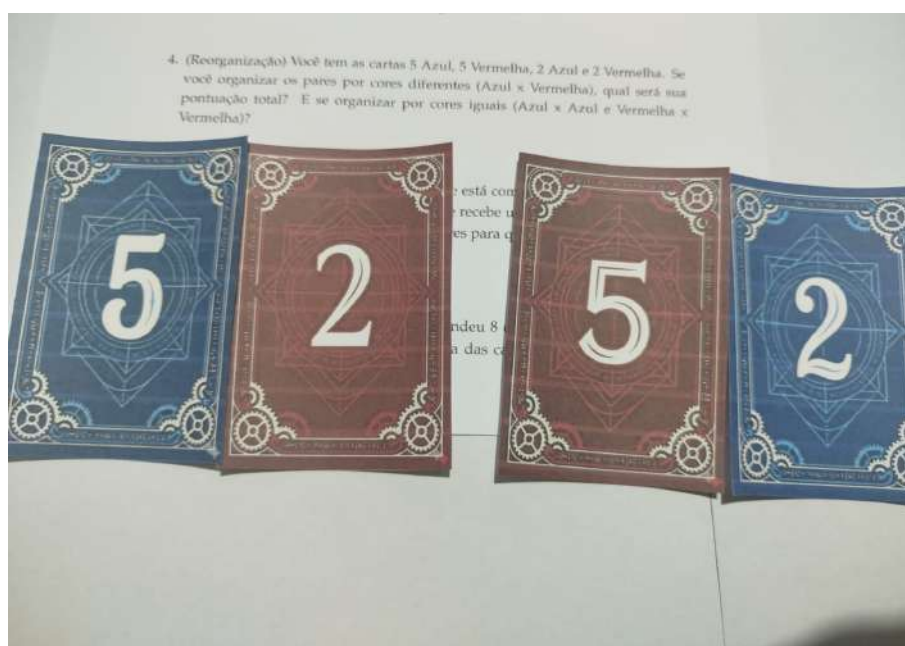


Figura 24 – Caso 17: Parte 2.



Conclusão

Esta avaliação demonstra que a multiplicação de inteiros é uma ferramenta de precisão. O aluno que domina o Combinação 100 entende que o sinal não é apenas um detalhe, mas o que define se ele ganha ou perde em um sistema de saldo. A transição para problemas reais solidifica a utilidade prática da regra de sinais na gestão de recursos e dados.

CONCLUSÃO

A presente dissertação buscou estabelecer uma conexão teórico-prática entre o rigor da construção formal dos conjuntos numéricos e as demandas pragmáticas da transposição didática no Ensino Fundamental II. Ao revisitar os axiomas de Peano para a construção do conjunto dos números naturais e a formalização dos números inteiros via classes de equivalência de pares ordenados, foi possível consolidar uma base teórica robusta. Esta fundamentação revelou-se essencial para desmistificar a percepção de que as regras operatórias em $\mathbb{Z}$, como a regra de sinais, seriam convenções arbitrárias, demonstrando que elas derivam das propriedades estruturais dos referidos sistemas numéricos.

O Produto Educacional desenvolvido, materializado nas sequências didáticas e nos jogos "Corrida ao Zero", "Gestão de Saldo" e "Combinação 100", cumpriu seu papel de mitigar a abstração que frequentemente caracteriza o ensino de matemática. A utilização da gamificação permitiu que obstáculos epistemológicos históricos — como a aceitação de quantidades menores que o nada — fossem vivenciados e superados pelos estudantes de forma lúdica e intuitiva. Através do deslocamento espacial na reta numérica e da gestão de recursos financeiros simulados, a aprendizagem se constrói a partir de ressignificações, que envolvem tanto a correção dos cálculos como a formulação de estratégias nos jogos, constituindo um processo investigativo, e até permitindo a transição do pensamento puramente aritmético para o raciocínio algébrico.

A integração entre a Matemática e a Educação Financeira demonstrou ser uma estratégia eficaz para conferir significado ao aprendizado. Ao lidar com situações de crédito, débito e planejamento orçamentário, os estudantes deverão perceber a utilidade imediata dos números inteiros na leitura e interpretação do mundo contemporâneo. Essa abordagem não apenas atende às competências gerais da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), mas também promove a autonomia e o pensamento crítico, preparando o aluno para tomar decisões fundamentadas em dados e na compreensão lógica de equilíbrios e variações. Esta abordagem contextualizada é defendida por Skovsmose (2001), que argumenta que a literacia matemática é essencial para o exercício pleno da cidadania e para a compreensão das estruturas sociais.

Observou-se, ao longo da proposta, que a mediação docente foi potencializada pelo uso dos materiais manipuláveis e das cartas de estratégia. A mudança na dinâmica da sala de aula, que passou de um modelo passivo para um ambiente de "comunidade de prática", favoreceu a correção entre pares e a validação coletiva do conhecimento. O uso estratégico do zero como elemento neutro e a compreensão de que a multiplicação de fatores negativos resulta em um produto de valor positivo foram internalizados com maior fluidez quando inseridos em um contexto de tomada de decisão, superando as tradicionais dificuldades de memorização mecânica.

Conclui-se, portanto, que a união entre o rigor axiomático e a ludicidade

estratégica oferece um caminho viável para o fortalecimento do ensino de Matemática. A fundamentação teórica apresentada nos capítulos iniciais garantiu a segurança conceitual necessária, enquanto o produto educacional forneceu a interface prática para o engajamento discente. A proposta reafirma que a compreensão profunda da gênese dos números é o alicerce de uma prática pedagógica transformadora. O trabalho cumpre seu papel de mitigar a abstração através da gamificação, em sintonia com a visão de Huizinga (2004) sobre a natureza lúdica do homem como elemento fundamental da cultura.

Por fim, espera-se que este estudo e os materiais desenvolvidos sirvam de subsídio para outros professores da educação básica que buscam alternativas metodológicas para o ensino de álgebra e sistemas numéricos. As evidências aqui discutidas sugerem que, ao conferir sentido histórico, lógico e prático aos números inteiros, é possível reduzir a aversão à disciplina e fomentar um aprendizado que seja, ao mesmo tempo, rigoroso em sua forma e significativo em sua essência.

Referências

- BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.
- Brasil. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.
- Canva. **Canva**. 2026. Versão de 25 de jan. [S. l.]: Canva, 2026. Disponível em: <https://www.canva.com/>.
- CARAÇA, B. d. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Gradiva, 1951.
- CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado**. Buenos Aires: Aique, 1991.
- D'AMBROSIO, U. **Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- DANTE, L. R. **Formulação e resolução de problemas de matemática: teoria e prática**. 1. ed. São Paulo: Ática, 2011.
- EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Unicamp, 2004.
- FERREIRA, J. **A Construção dos Números**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.
- GLAESER, G. Epistemologia dos números relativos. *In*: **A Matemática em Questão**. Lisboa: Dom Quixote, 1981.
- Google. **Gemini**. 2026. Versão de 25 de jan. [S. l.]: Google, 2026. Disponível em: <https://gemini.google.com/>.
- GRANDO, R. C. **O jogo e a matemática no contexto da sala de aula**. São Paulo: Paulus, 2004.
- HEFEZ, A. **Elementos de Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2011.
- HUIZINGA, J. **Homo Ludens: o jogo como elemento da cultura**. São Paulo: Perspectiva, 2004.
- IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar: conjuntos e funções**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013. v. 1.
- IFRAH, G. **História Universal dos Algarismos: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.
- KATZ, V. J. **A History of Mathematics: an introduction**. 3. ed. Boston: Addison-Wesley, 2009.
- KISHIMOTO, T. M. **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. 14. ed. São Paulo: Cortez, 2011.
- LIMA, E. L. **Princípio da indução finita**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, 1987. Coleção Ensino de Matemática, vol. 4.

LIMA, E. L. Zero é um número natural? **Revista do Professor de Matemática**, n. 76, p. 3–4, jul./dez. 2007. Disponível em: <https://rpm.org.br/cdrpm/76/2.html>.

LIMA, E. L. **Análise Real: funções de uma variável**. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. v. 1.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática**. Campinas: Autores Associados, 2006.

MENEGHETTI, R. **O número zero e sua trajetória histórica**. São Paulo: Cortez, 2004.

MILIES, F. C. P.; COELHO, S. P. **Números: Uma Introdução à Matemática**. 3. ed. São Paulo: EDUSP, 2003.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. 4. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2023. ISBN 978-85-8337-195-3.

ROQUE, T. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, 1986.

SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática Crítica: a questão da democracia**. Ijuí: Unijuí, 2001.

VIEIRA, F.; CARVALHO, R. A. d. **Elementos de Aritmética e da Álgebra**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. 7. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

APÊNDICE A

Este apêndice tem como objetivo apresentar definições e propriedades fundamentais sobre relações e funções. A decisão de organizar este conteúdo em um apêndice justifica-se pela necessidade de preservar a fluidez e a objetividade do texto principal, evitando que digressões técnicas sobrecarreguem a narrativa central. As definições aqui apresentadas seguem a estruturação clássica da teoria dos conjuntos, fundamentada em obras de referência para a formação docente, como a de Iezzi e Murakami (2013).

Ainda que este material não componha o corpo principal da dissertação, sua consulta é altamente recomendada. Os conceitos aqui expostos — como as propriedades de reflexividade, simetria e transitividade, além de uma classificação de funções — funcionam como ferramentas de suporte. Elas garantem o rigor matemático necessário para a compreensão das aplicações e discussões avançadas apresentadas anteriormente.

Lembramos que o conceito de relação foi várias vezes usado no texto, principalmente a relação de ordem.

Relações e suas propriedades

Sejam A e B dois conjuntos não vazios. Uma relação R de A em B , é qualquer subconjunto de $A \times B$, o produto cartesiano de A e B , isto é, R é um conjunto tal que: $R \subseteq A \times B$. Se $A = B$, dizemos apenas que R é uma relação em A ao invés de dizer relação de A em A .

Se $(a, b) \in R$, podemos também escrever aRb .

Se A é um conjunto não vazio e R é uma relação em A , podemos explorar as seguintes situações:

1. Reflexividade: Se $a \in A$, pode ser que aRa ou que a não esteja em relação com o próprio a . Se aRa para todos os elementos $a \in A$, dizemos que R é uma relação reflexiva. Se não é verdade que aRa para todo $a \in A$, dizemos que R não é reflexiva. Uma forma de interpretar essa propriedade é entender que todo elemento do conjunto está relacionado consigo mesmo. Exemplo: A relação "menor do que ou igual a" ($\leq$) no conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ é reflexiva, pois para qualquer inteiro a , a afirmação $a \leq a$ é verdadeira.
2. Simetria: Se aRb então pode ser que bRa ou não. Se para todo par $(a, b) \in R$ temos que aRb implica que bRa , dizemos que R é simétrica. Se existe algum par $(a, b) \in R$ tal que $(b, a) \notin R$, então R não é simétrica. Uma forma de interpretar a simetria é perceber a relação como uma "via de mão dupla". Se a está relacionado com b , então b deve estar relacionado com a . Exemplo: a relação R definida em

$\mathbb{Z}$ por " $a + b$ é par" é simétrica. De fato, se $a + b$ é par, então $b + a$ também é par, logo, se $(a, b) \in R$, então $(b, a) \in R$.

3. Transitividade: Se aRb e bRc , pode acontecer que aRc ou que $(a, c) \notin R$. Se, para todo par $(a, b) \in R$ e para todo par $(b, c) \in R$ temos que $(a, c) \in R$, dizemos que R é transitiva. Para que R não seja transitiva, basta que exibir um par $(a, b) \in R$ e um outro par $(b, c) \in R$ de tal modo que $(a, c) \notin R$. Uma forma de interpretar essa propriedade, é que se existe um caminho de a para c passando por b , então deve existir um "atalho" direto de a para c . Exemplo: a relação de "divisibilidade" no conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ é transitiva. Se a divide b e b divide c , então a necessariamente divide c .
4. Antissimetria: Se $(a, b) \in R$, pode ocorrer que $(b, a) \in R$ ou que $(b, a) \notin R$. Se $(a, b) \in R$ com $a \neq b$ implicar que $(b, a) \notin R$, dizemos que R é antissimétrica. Para que R não seja anti-simétrica, basta exibir dois pares $(a, b) \in R$ e $(b, a) \in R$ com $a \neq b$. Uma forma intuitiva de interpretar essa propriedade, é considerar a relação antisimétrica como uma "rua de mão única". Se existe um caminho que leva a até b (e $a \neq b$), a propriedade antissimétrica garante que não pode haver um caminho de volta de b para a . A única situação em que um "caminho de ida e volta" é permitido é se $a = b$. Exemplo: A relação de "menor ou igual" ($\leq$) no conjunto dos números inteiros é antissimétrica.

Funções e suas Propriedades

Uma função f de A em B é uma relação em $A \times B$ que associa para cada $x \in A$ um único $y \in B$. Uma das notações mais usadas para uma função de A em B , é:

$$f : A \rightarrow B .$$

Há quatro aspectos essenciais na definição de função:

1. O domínio A da relação f .
2. O contradomínio B da relação f .
3. Todo elemento de A deve ter algum correspondente em B .
4. Cada elemento de A só pode ter no máximo um correspondente no contradomínio B .

Como nem toda relação é uma função, às vezes, alguns elementos podem não ter correspondentes associados para todo elemento de A .

Como nem todos os elementos do contradomínio de uma função f precisam estar relacionados, define-se a imagem de f , denotada por $Im(f)$, como o conjunto

de todos os elementos do contradomínio que estão relacionados com elementos do domínio de f , isto é:

$$Im(f) = \{y \in B : \text{existe } x \in A \text{ tal que } y = f(x)\} .$$

Se uma relação R é uma função de A em B , então A é o domínio de R e B é o contradomínio da função R . Se x é um elemento do domínio de uma função f , então a imagem de x é denotada por $f(x)$.

- 1. Função Injetora:** Uma função $f : A \rightarrow B$ é injetora se dois elementos distintos de A possuem imagens distintas em B , isto é:

$$x_1 \neq x_2 \text{ implica que } f(x_1) \neq f(x_2) ,$$

ou de forma equivalente $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$.

A noção intuitiva é que cada elemento do contradomínio que é atingido, é atingido por no máximo uma "seta" vinda do domínio. Exemplo: A função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = 5x + 7$ é injetora. Se $f(x_1) = f(x_2)$, então $5x_1 + 7 = 5x_2 + 7$, o que implica $5x_1 = 5x_2$, e finalmente, $x_1 = x_2$.

- 2. Função Sobrejetora:** Uma função $f : A \rightarrow B$ é sobrejetora se todo elemento de B é imagem de pelo menos um elemento de A . Isto equivale a afirmar que a imagem da função deve ser exatamente igual a B que é o contradomínio da função, ou seja, para todo $y \in B$ existe $x \in A$ tal que $y = f(x)$.

A noção intuitiva é que todo elemento do contradomínio é "atingido" por pelo menos uma "seta". Não há elementos "sobrando" no conjunto de chegada.

Exemplo: A função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = x + 1$ é sobrejetora. Para qualquer $y \in \mathbb{Z}$, ao tomar especificamente $x = y - 1$, temos que $f(x) = (y - 1) + 1 = y$.

- 3. Uma função $f : A \rightarrow B$ é bijetora se ela é ao mesmo tempo injetora e sobrejetora.**

Exemplo: A função $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por $f(x) = x + 3$ é bijetora. Se $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 + 3 = x_2 + 3$, o que implica $x_1 = x_2$. Portanto, concluímos que a função f é injetora. Para qualquer $y \in \mathbb{Z}$, ao tomar especificamente $x = y - 3$, temos que $f(x) = f(y - 3) = (y - 3) + 3 = y$. Portanto concluímos que a função f é sobrejetora.

APÊNDICE B

Este Apêndice está estruturado em três eixos temáticos principais, que agrupam os materiais práticos e avaliativos destinados à aplicação em sala de aula. No total, o conteúdo é composto por doze subitens, organizados de forma a facilitar a identificação e a sequência de aplicação das atividades propostas. A organização modular de cada eixo temático foi pensada especificamente para auxiliar outros professores na logística de impressão e distribuição dos materiais, permitindo que cada parte seja reproduzida de forma independente, conforme a necessidade do planejamento docente.

O primeiro eixo temático é dedicado à Adição entre Números Positivos e Negativos. Esta seção subdivide-se em quatro partes: a Atividade 1 – Corrida ao Zero, a Atividade 2 – Exercícios de Fixação, a Atividade 3 – Exercícios Contextualizados e o Teste 1.

O segundo eixo temático concentra as divisões referentes à Adição entre Números Negativos. Este eixo compreende a Atividade 4 – Gestão de Saldo, a Atividade 5 – Exercícios de Fixação, a Atividade 6 – Exercícios Contextualizados e o Teste 2.

Por fim, o terceiro eixo temático contempla a Multiplicação entre Números Positivos e Negativos. Sua estrutura inclui os quatro subitens finais: a Atividade 7 – Combinação 100, a Atividade 8 – Exercícios de Fixação, a Atividade 9 – Exercícios Contextualizados e o Teste 3. A disposição desses doze subitens oferece um roteiro organizado e pronto para a reprodução física e uso pedagógico imediato.

Atividade 1 - Corrida ao Zero

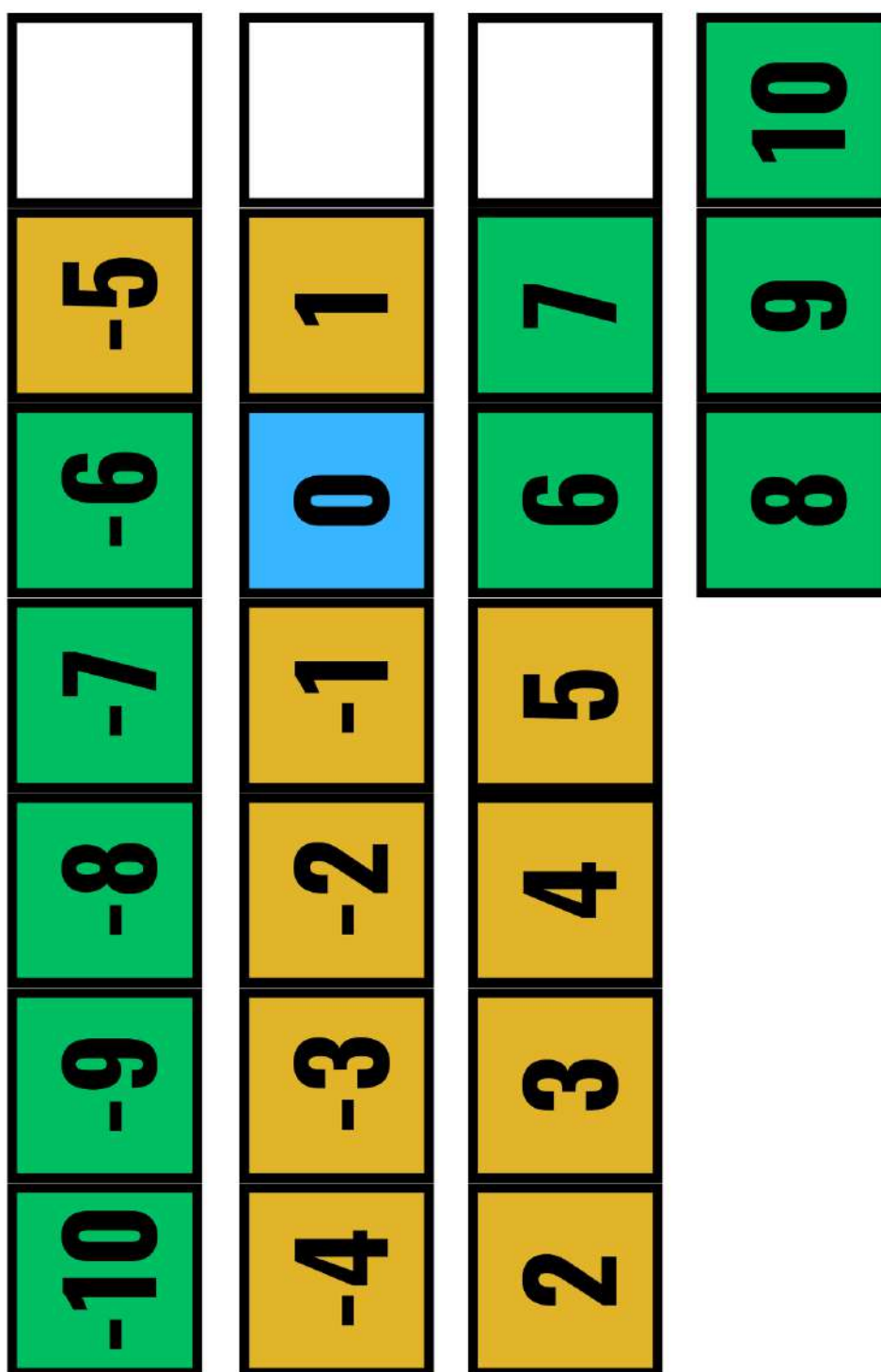


Figura 25 – Tabuleiro.

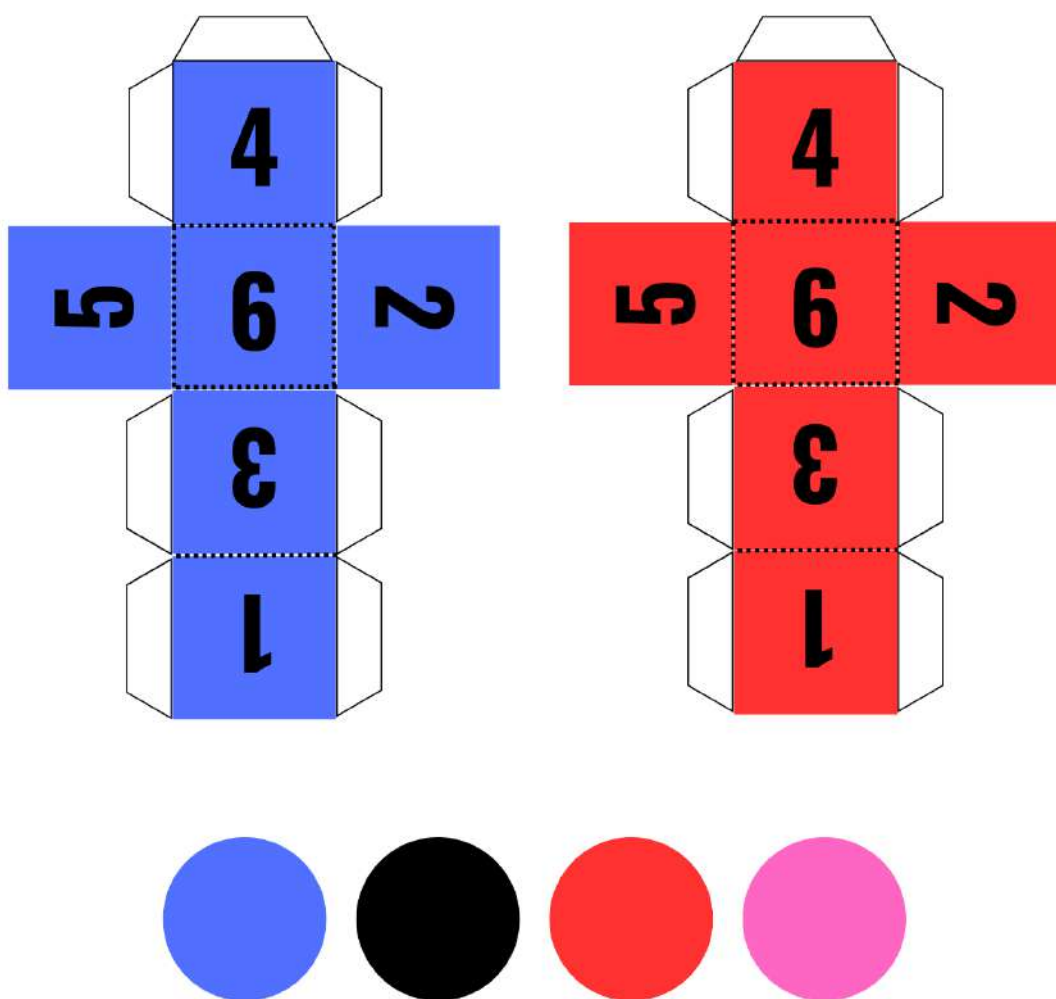


Figura 26 – Dados e Pinos.

Instituição:	
Nome:	
Professor(a):	Disciplina:
Turma:	Data: __/__/____

Atividade 2 - Exercícios de Fixação

1. Um jogador começa a partida na casa -10 . Ele lança apenas o dado azul e tira o número 4. Em qual casa ele deve colocar o seu peão?
2. O peão de Marcos está na casa -8 . Ele deseja se aproximar do zero, mas quer evitar entrar na "Zona de Soma" (casas entre -5 e -1) nesta rodada. Qual é o maior valor que ele pode tirar no dado azul para cumprir esse objetivo?
3. Um jogador está na casa -7 . Ele lança o dado azul e tira 6. Ao realizar o movimento, ele passa a ocupar uma casa dentro ou fora da "Zona de Soma"?
4. Na "Zona de Soma", o uso dos dois dados é obrigatório. Se um jogador está na casa -3 e tira 5 no azul e 2 no vermelho, para qual casa o seu peão deve ser deslocado?
5. Imagine que você está na casa $+4$. Por estar na Zona de Soma, você lança os dois dados e tira 3 no azul e 3 no vermelho. Descreva o que acontece com a posição do seu peão após essa jogada.
6. A vitória só acontece com o pouso exato no zero. Se você está na casa -2 e tira 6 no azul e 1 no vermelho, você ganha o jogo? Se não, em qual casa o seu peão irá parar?
7. Um jogador está na casa $+1$. Ele lança os dados e obtém 2 no azul e 6 no vermelho. Após o movimento, o peão terminará do lado positivo ou do lado negativo da reta numérica? Qual a casa exata?
8. Estrategicamente, se o seu peão está na casa $+9$, qual cor de dado é mais vantajosa para você escolher e jogar sozinho? Justifique sua escolha.
9. Um competidor está na casa -5 . Ele lança os dados obrigatórios e tira 1 no azul e 5 no vermelho. Determine a nova casa do jogador e responda: na próxima rodada, ele ainda será obrigado a lançar os dois dados?

10. Durante a partida, um aluno afirma: "Para eu ganhar estando na casa $+4$, eu preciso que o valor do dado vermelho seja 4 unidades maior que o valor do dado azul". Ele está correto? Explique o porquê.
11. O peão de Ana está na casa -2 e ela tira 6 no azul e 4 no vermelho. O peão de Bruno está na casa $+4$ e ele tira 1 no azul e 3 no vermelho. Qual dos dois jogadores terminou a rodada mais próximo do objetivo final (o zero)?
12. Um jogador está na casa $+5$ e, por estar na Zona de Soma, deve lançar obrigatoriamente os dois dados. Ele obtém 2 no dado azul e 6 no dado vermelho. Determine a posição final do peão e explique se, após esse movimento, o jogador permaneceu no lado positivo ou passou para o lado negativo da reta numérica.
13. Analise esta jogada: Posição inicial -1 . Dados sorteados: Azul 6 e Vermelho 5. O jogador conseguiu atingir o objetivo de chegar ao zero? Em qual casa ele parou?
14. Pensando na liberdade de escolha dos dados, por que estar na casa -6 pode ser estrategicamente melhor do que estar na casa -1 ?
15. Se você está na casa $+3$, invente uma combinação de valores para o dado azul e para o dado vermelho que resulte em uma vitória imediata (pouso exato no zero).

Instituição:	
Nome:	
Professor(a):	Disciplina:
Turma:	Data: __/__/____

Atividade 3 - Exercícios Contextualizados

1. Um termômetro marcava $5^{\circ}C$ abaixo de zero. Durante a tarde, a temperatura teve um aumento de $3^{\circ}C$. Qual a nova temperatura? (Pense no termômetro como a reta do jogo).
2. Imagine que sua conta bancária é um tabuleiro. Você tem um saldo de R\$10,00. Se você pagar um lanche de R\$15,00, em qual "casa" (saldo) sua conta vai parar?
3. Um mergulhador está a 7 metros de profundidade (casa -7). Ele decide subir 6 metros. Ele já saiu da "Zona de Soma" da água (superfície) ou ainda está mergulhado?
4. Um elevador de shopping liga o subsolo aos andares de lojas. Se o subsolo é a casa -2 e o elevador sobe 5 andares, em qual andar ele para?
5. Em um campeonato de futebol, o time de Londrina tem um saldo de gols de -3 . Se no próximo jogo ele ganhar por 3 a 0 (marcando $+3$ gols), qual será o novo saldo? O time atingiu o "zero"?
6. Um alpinista está a 8 metros de altitude. Começa a nevar e ele precisa descer 10 metros para encontrar uma caverna. Em que posição em relação ao nível do solo ele se encontra agora?
7. Você tem uma dívida de R\$8,00 com um amigo. Você consegue um "dado azul" (ganha dinheiro) de R\$10,00. Após pagar seu amigo, quanto sobra para você?
8. Uma geladeira está a $3^{\circ}C$. Você liga a função turbo e a temperatura cai $5^{\circ}C$. Qual a temperatura final? Represente isso como um movimento no tabuleiro.
9. Um avião está voando e o piloto anuncia que a temperatura externa é de $-10^{\circ}C$. Após uma hora, a temperatura sobe $4^{\circ}C$. Qual é a nova temperatura externa?
10. Na Educação Financeira, dizemos que alguém está "no azul" quando tem dinheiro e "no vermelho" quando deve. Se uma empresa deve R\$5.000,00 e recebe um

pagamento de $R\$5.000,00$, qual o seu estado financeiro final? Relacione com a vitória no jogo.

11. Um balão meteorológico sobe 6 metros, depois desce 2 metros e, por fim, desce mais 4 metros. Se ele partiu do solo (zero), onde ele está agora?
12. Um estoque de loja tinha 2 itens. O gerente registrou uma "perda" (dado vermelho) de 6 itens. Como o estoque não pode ser negativo no mundo físico, o que esse número -4 representa para a contabilidade da loja?
13. Um jovem tem $R\$20,00$ de mesada. Ele gasta $R\$12,00$ com figurinhas e depois ganha mais $R\$5,00$ de sua avó. Escreva a expressão dessa "corrida" e o resultado final.
14. Durante uma experiência química, um líquido estava a $-4^{\circ}C$. O cientista aumentou a temperatura em $2^{\circ}C$ e depois diminuiu em $5^{\circ}C$. Qual foi a temperatura final registrada?
15. Se o objetivo da vida financeira é nunca ficar "no vermelho", por que estar na casa $+10$ é melhor do que estar na casa -10 , mesmo que a distância até o zero seja a mesma?

Instituição:	
Nome:	
Professor(a):	Disciplina:
Turma:	Data: __/__/____

Teste 1

1. (Mecânica) Você inicia uma partida de "Corrida ao Zero" na casa -10 . No seu primeiro turno, você lança apenas o dado azul e obtém o número 6. Qual será a sua nova posição no tabuleiro?
2. (Zona de Soma) Um jogador está na casa $+2$. Por estar na Zona de Soma, ele lança os dois dados e obtém 4 no azul e 6 no vermelho. Ele atingiu o objetivo de chegar ao zero? Justifique com o cálculo.
3. (Abstração) Qual é o "deslocamento líquido" de uma jogada onde o dado azul marca 5 e o dado vermelho marca 2? Se você estivesse na casa -3 , para onde iria?
4. (Contextualizado - Finanças) João está com sua conta bancária "no vermelho" em R\$15,00. Ele faz um depósito de R\$20,00. Utilizando a lógica da reta numérica, qual o novo saldo de João?
5. (Contextualizado - Temperatura) Em uma cidade serrana, a temperatura era de -3°C ao amanhecer. Durante o dia, o sol apareceu e a temperatura subiu 7°C . Qual foi a temperatura máxima registrada?
6. (Estratégia) Um jogador está na casa -7 . Ele quer se aproximar do zero, mas não quer entrar na Zona de Soma (casas -5 a -1) nesta rodada. Qual o maior valor que ele pode tirar no dado azul para que isso aconteça?
7. (Abstração - Nulo) Se um jogador na casa -4 obtém o mesmo valor no dado azul e no dado vermelho (por exemplo, 5 e 5), o que acontece com a posição do seu peão? Explique o conceito matemático envolvido.
8. (Contextualizado - Altitude) Um mergulhador está a 8 metros de profundidade (casa -8). Ele sobe 5 metros em direção à superfície. Ele já ultrapassou o nível do mar (ponto zero) ou ainda está abaixo dele? Em qual posição?

9. (Precisão) Você está na casa -1 e precisa de um "pouso exato" no zero para vencer. Cite uma combinação de valores nos dados azul e vermelho que garanta sua vitória imediata nesta rodada.
10. (Migração de Conceitos) No jogo, o dado azul "soma" e o dado vermelho "subtrai". Na vida real, se uma empresa tem um prejuízo de $R\$1.000,00$ e depois um lucro de $R\$800,00$, ela terminou com saldo positivo ou negativo? De quanto?

Atividade 4 - Gestão de Saldo



Figura 27 – Cartas de Salário e de Água.



Figura 28 – Cartas de Água e de Luz.



Figura 29 – Cartas de Luz e Alimentação.



Figura 30 – Cartas de Alimentação, Lazer e Internet.

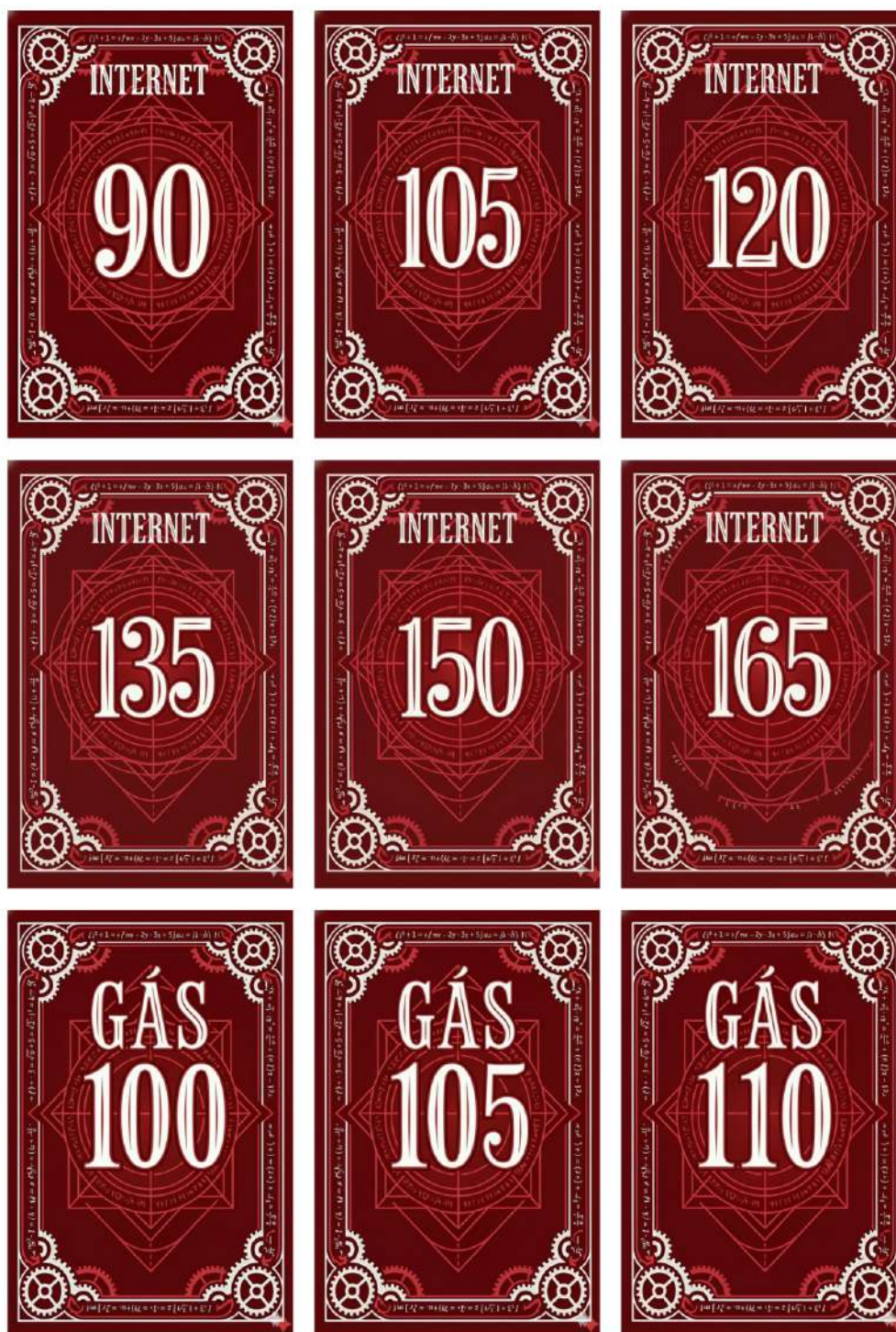


Figura 31 – Cartas de Internet e Gás.



Figura 32 – Cartas de Gás e Cartão de Crédito.



Figura 33 – Cartas de Cartão de Crédito, Dívida e Receita

TABELA DE PONTOS

(GESTÃO DE SALDO)

SALÁRIO	0 PONTOS	1 PONTO	2 PONTOS	3 PONTOS
1230	0 OU MENOS	MAIS QUE 0 E MENOS QUE 124	MAIS QUE 123 E MENOS QUE 246	246 OU MAIS
1405	0 OU MENOS	MAIS QUE 0 E MENOS QUE 141	MAIS QUE 140 E MENOS QUE 281	281 OU MAIS
1580	0 OU MENOS	MAIS QUE 0 E MENOS QUE 159	MAIS QUE 158 E MENOS QUE 316	316 OU MAIS
1755	0 OU MENOS	MAIS QUE 0 E MENOS QUE 176	MAIS QUE 175 E MENOS QUE 351	351 OU MAIS
1930	0 OU MENOS	MAIS QUE 0 E MENOS QUE 194	MAIS QUE 193 E MENOS QUE 386	386 OU MAIS
2105	0 OU MENOS	MAIS QUE 0 E MENOS QUE 211	MAIS QUE 210 E MENOS QUE 421	421 OU MAIS
2280	0 OU MENOS	MAIS QUE 0 E MENOS QUE 229	MAIS QUE 228 E MENOS QUE 456	456 OU MAIS

Figura 34 – Tabela de Pontos (Gestão de Saldo).

Instituição:	
Nome:	
Professor(a):	Disciplina:
Turma:	Data: __/__/____

Atividade 5 - Exercícios de Fixação

1. Um jogador inicia o mês com um salário de $R\$1.580,00$. Suas dívidas vermelhas de Água, Luz e Gás somam, respectivamente, $R\$100,00$, $R\$200,00$ e $R\$110,00$. Qual o total de dívidas acumulado até agora e qual o saldo parcial?
2. Imagine que você tem um salário de $R\$1.405,00$. A soma de todas as suas sete dívidas vermelhas resultou em $R\$1.300,00$. Se você tirar uma carta amarela de "Cashback" ($R\$100,00$), qual será seu saldo final?
3. Um aluno possui um salário de $R\$1.230,00$. Suas dívidas totalizam $R\$1.100,00$. No entanto, ele tira a carta amarela de "Multa de Trânsito" ($R\$200,00$). O que acontece com o saldo final e quantos pontos ele faz nesta rodada?
4. Considere as dívidas de Alimentação ($R\$750,00$) e Cartão de Crédito ($R\$450,00$). Qual o valor total que essas duas cartas retiram do salário em módulo?
5. Você recebeu $R\$2.280,00$ de salário. Suas dívidas totais somam $R\$1.800,00$. Para ganhar 3 pontos, seu saldo final deve ser de pelo menos 20% do salário. Você já atingiu essa meta ou precisaria de uma carta amarela de receita para chegar lá?
6. Um jogador tem um saldo parcial de $-R\$50,00$ (está devendo). Ele tira uma carta amarela de "Bônus no Trabalho" ($R\$150,00$). Qual o saldo final após esse bônus?
7. Compare duas situações: No mês A, você tem salário de $R\$2.105,00$ e dívidas de $R\$1.900,00$. No mês B, você tem salário de $R\$1.230,00$ e dívidas de $R\$1.000,00$. Em qual dos meses você poupou uma porcentagem maior do seu salário?
8. Um competidor somou suas dívidas: Água ($R\$150,00$), Internet ($R\$120,00$) e Lazer ($R\$165,00$). Qual o valor total negativo que essas três cartas representam juntas?
9. O salário é de $R\$1.930,00$. O total de dívidas vermelhas é de $R\$1.500,00$. O jogador tira uma carta amarela de "Gasto Desnecessário" ($R\$50,00$). Calcule o saldo final e verifique se ele poupou mais ou menos que 10% do salário.

10. Se um jogador está com saldo de $R\$100,00$ e tira a carta amarela de "Concerto de Celular", qual será sua pontuação final na rodada?
11. Um aluno tirou o salário de $R\$2.105,00$. Suas dívidas são: Luz ($R\$350,00$), Alimentação ($R\$800,00$) e Cartão de Crédito ($R\$450,00$). Sem contar as outras dívidas, quanto ainda resta do salário?
12. Qual é o valor máximo de dívida que um jogador pode ter em uma rodada para ainda conseguir 3 pontos (20%) se o seu salário for de $R\$1.000,00$ (valor hipotético para facilitar o cálculo)?
13. Um jogador termina com saldo de $R\$150,00$. O salário era de $R\$1.580,00$. Baseado na regra de que menos de 10% vale 1 ponto, qual a pontuação dele?
14. A carta amarela de "Hora Extra" adiciona $R\$50,00$. Se um jogador estava com saldo de $-R\$30,00$, essa carta é suficiente para deixá-lo com saldo positivo?
15. Invente uma combinação de 3 dívidas vermelhas que, juntas, somem exatamente $R\$1.000,00$.

Instituição:	
Nome:	
Professor(a):	Disciplina:
Turma:	Data: __/__/____

Atividade 6 - Exercícios Contextualizados

1. Um trabalhador recebe um salário de $R\$1.930,00$ (sua carta azul). Se ele gastar exatamente o mesmo valor com cartas vermelhas, qual será a sua expressão matemática e o seu saldo final?
2. Imagine que a soma das suas dívidas vermelhas de Água, Luz e Gás resultou em $-R\$350,00$. Se você receber um bônus (carta amarela) de $R\$150,00$, como fica a situação da sua "dívida de serviços"?
3. Um estudante tem um salário de $R\$1.230,00$. Ele somou suas dívidas de Alimentação ($R\$550,00$) e Cartão de Crédito ($R\$330,00$). Quanto ele ainda tem de "espaço" no orçamento antes de ficar no vermelho?
4. Na matemática financeira, somar duas dívidas é o mesmo que somar dois números negativos. Se você tem uma dívida de $R\$150,00$ e faz outra de $R\$200,00$, qual o valor total da sua dívida em módulo e qual o sinal do resultado?
5. Você está com um saldo de $R\$400,00$. Uma carta amarela de "Conserto de Celular" retira $R\$150,00$. Escreva isso como uma soma de um número positivo com um negativo e dê o resultado.
6. Um pai de família quer poupar 20% do seu salário de $R\$2.105,00$. Qual o valor em reais que ele deve deixar "sobrar" para ganhar os 3 pontos da rodada da vida real?
7. A conta de Internet subiu de $R\$75,00$ para $R\$120,00$. Represente esse aumento como uma nova carta vermelha. Como isso afeta a soma total das suas dívidas?
8. Se você tem um salário de $R\$1.405,00$ e suas dívidas totais são de $R\$1.500,00$, você está em "déficit". De quanto é esse déficit e como ele é representado na reta numérica?

9. Uma pessoa fez uma hora extra e ganhou $R\$50,00$ (carta amarela). No mesmo dia, teve um gasto desnecessário de $R\$50,00$ (outra carta amarela). Qual o efeito líquido dessas duas situações no saldo final?
10. O Cartão de Crédito é a dívida mais perigosa. Se você tem um salário de $R\$1.755,00$ e a carta de Cartão é de $R\$450,00$, que porcentagem do seu salário já está comprometida apenas com essa dívida?
11. No jogo, somamos as dívidas uma a uma. No mundo real, isso se chama "fluxo de caixa". Se o seu fluxo de saída é de $-R\$1.800,00$ e seu fluxo de entrada é de $+R\$2.280,00$, qual o seu saldo?
12. Por que tirar a carta amarela de "Remédios" ($-R\$100,00$) dói mais em quem tem o salário de $R\$1.230,00$ do que em quem tem o de $R\$2.280,00$? Explique usando a ideia de proporção.
13. Um jovem poupou $R\$300,00$ de um salário de $R\$1.405,00$. De acordo com a tabela de pontuação, quantos pontos ele marcou? (Dica: Calcule 10% e 20% do salário dele).
14. Represente a seguinte situação com uma única expressão numérica: Salário de $R\$2.105,00$, menos alimentação de $R\$700,00$, menos luz de $R\$150,00$, mais cashback de $R\$100,00$.
15. Roberto está organizando seu orçamento mensal no aplicativo do banco. Ele recebeu seu salário de $R\$2.105,00$ e um bônus por meta batida no trabalho de $R\$150,00$. Ao longo do mês, ele registrou as seguintes despesas: Alimentação ($R\$700,00$), Cartão de Crédito ($R\$430,00$), Água ($R\$175,00$), Luz ($R\$150,00$), Internet ($R\$135,00$), Lazer ($R\$125,00$) e Gás ($R\$100,00$). Escreva uma única expressão numérica que represente o fluxo financeiro de Roberto, calcule o saldo final e responda: ele conseguiu poupar algum dinheiro ou terminou o mês em déficit?

Instituição:	
Nome:	
Professor(a):	Disciplina:
Turma:	Data: __/__/____

Teste 2

1. (Mecânica) Um jogador possui um salário (Azul) de $R\$1.860,00$ e retirou as seguintes dívidas vermelhas: Alimentação ($R\$800,00$), Luz ($R\$250,00$) e Internet ($R\$120,00$). Qual o valor total da dívida acumulada até agora e qual o sinal que representa esse total?
2. (Mecânica) Se um aluno possui dívidas que somam $R\$2.100,00$ em módulo e o seu salário é de $R\$2.070,00$, qual o seu saldo parcial? Ele está com saldo positivo ou negativo?
3. (Estratégia da Carta Amarela) Seu saldo parcial após pagar as contas é de $R\$130,00$. Você retira a carta amarela de "Conserto de Celular" ($-R\$150,00$). Escreva a expressão matemática que representa essa situação e dê o resultado do Saldo Final.
4. (Fixação) Um jogador está com o saldo negativo de $-R\$80,00$. Ele recebe uma carta amarela de "Bônus no Trabalho" ($+R\$150,00$). Com quanto ele ficará de Saldo Final? Ele marcará pontos nesta rodada?
5. (Cálculo de Meta) Para um salário de $R\$1.440,00$, a tabela de consulta indica que poupar 20% garante 3 pontos. Qual é o valor exato em reais que o aluno precisa ter de saldo final para atingir essa pontuação?
6. (Contextualizado - Imprevistos) João tinha planejado um mês perfeito, mas uma "Multa de Trânsito" ($-R\$200,00$) apareceu como carta amarela. Se o saldo dele antes da multa era de $R\$180,00$, explique o que acontece com a pontuação dele na rodada de acordo com as regras do jogo.
7. (Contextualizado - Proporção) Por que uma dívida amarela de "Remédios" ($-R\$100,00$) é considerada matematicamente mais "pesada" para quem ganha o salário de $R\$1.230,00$ do que para quem ganha $R\$2.280,00$?

8. (Análise de Fluxo) Represente com uma única expressão numérica a seguinte sequência: Salário de $R\$1.650,00$, menos Alimentação de $R\$600,00$, menos Lazer de $R\$145,00$, mais Cashback de $R\$100,00$. Qual o saldo resultante?
9. (O Desafio do Orçamento) Um jogador termina com saldo positivo de $R\$150,00$. O seu salário era de $R\$2.070,00$. Sabendo que 10% desse salário é $R\$207,00$, consulte mentalmente a regra e diga: quantos pontos ele marcou nesta rodada?
10. (Análise Crítica) É possível que um jogador com o maior salário do jogo ($R\$2280,00$) ganhe 0 pontos, enquanto um jogador com o menor salário ($R\$1230,00$) ganhe 3 pontos? Justifique sua resposta com base na gestão das dívidas.

Atividade 7 - Combinação 100

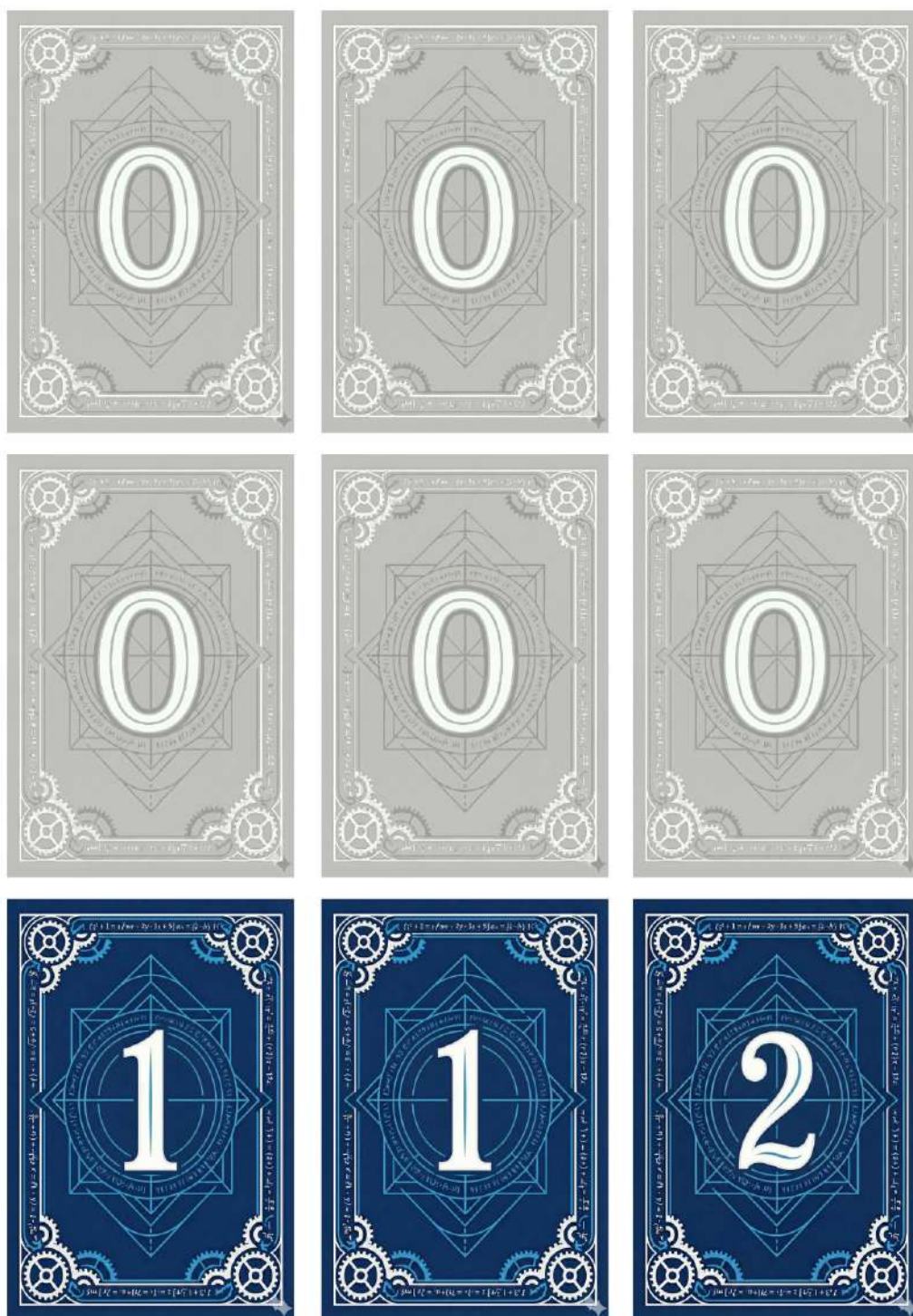


Figura 35 – Cartas 0 Cinzas e 1 e 2 Azuis.



Figura 36 – Cartas 2, 3, 4, 5 e 6 Azuis.



Figura 37 – Cartas 7, 8, 9 e 10 Azuis.



Figura 38 – Cartas 10 Azuis e 1, 2, 3 e 4 Vermelhas.



Figura 39 – Cartas 5, 6, 7, 8 e 9 Vermelhas.

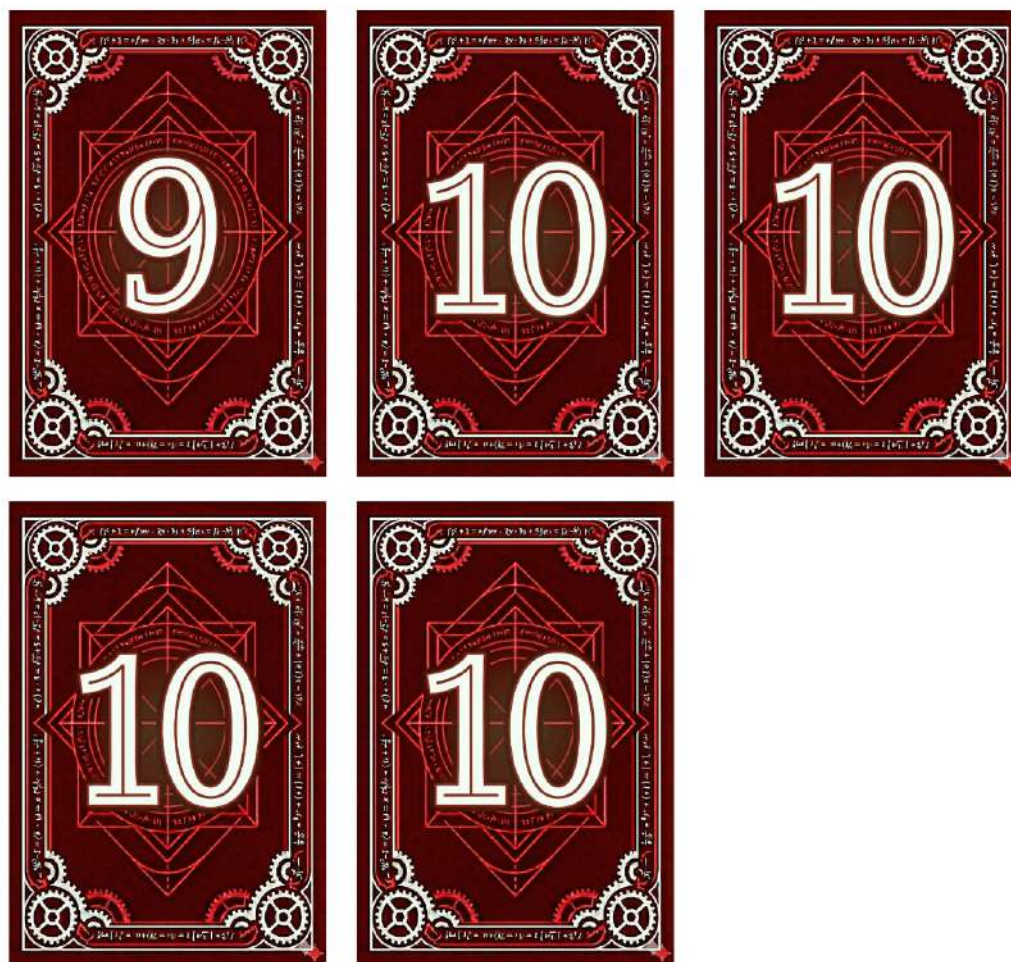


Figura 40 – Cartas 9 e 10 Vermelhas.

Instituição:	
Nome:	
Professor(a):	Disciplina:
Turma:	Data: __/__/____

Atividade 8 - Exercícios de Fixação

1. No primeiro turno, você compra um 5 Azul e um 6 Azul. Qual o seu saldo de pontos atual?
2. Você retira um par de cartas da mesma cor: 4 Vermelho e 8 Vermelho. Qual o resultado da multiplicação deste par?
3. Um jogador forma um par com um 9 Azul e um 3 Vermelho. Ele ganha ou perde pontos? Qual o valor exato?
4. Você já tem 90 pontos (vindos de dois pares: $(-10) \times (-5) = 50$ e $8 \times 5 = 40$). No último turno, você compra o par 10 Azul e 0 Cinza. Se você apenas somar as novas cartas como um par extra, você estoura? Como você deve organizar essas 6 cartas para atingir o "Cem Perfeito"?
5. Você tem as cartas 2 Azul, 2 Vermelho, 5 Azul e 5 Vermelho. Reorganize essas 4 cartas para obter a maior pontuação positiva possível através de dois pares.
6. Um jogador possui duas cartas 10 Vermelhas. Ele afirma que seu saldo é de -100 . Ele está correto? Explique.
7. Você tem 95 pontos e compra o par 8 Azul e 2 Vermelho. Se você formar um novo par com essas duas cartas e somar ao que já tinha, você "estoura" o limite de 100?
8. Você está com 98 pontos. No último turno, você deve escolher entre dois montes de compra (cada um com um par). O Monte A tem (10 Azul e 0 Cinza) e o Monte B tem (5 Azul e 4 Azul). Por que o Monte A é estrategicamente mais seguro, considerando que você não pode passar de 100?
9. Suas cartas são: 7 Azul, 3 Azul, 7 Vermelho e 3 Vermelho. Qual a diferença de pontos entre combinar as cores iguais (Azul/Azul e Vermelha/Vermelha) e combinar as cores diferentes (Azul/Vermelha)?

10. Você chegou ao final do jogo com 6 cartas: dois 10 Azuis, dois 10 Vermelhos, um 0 Cinza e um 2 Azul. Como você deve organizar esses três pares para conseguir exatamente 100 pontos e vencer a partida?
11. Um aluno diz: "Multiplicar duas cartas vermelhas é ruim porque o resultado é negativo". Baseado nas regras, ele está certo?
12. Você tem as cartas 8 Azul, 2 Azul e dois 10 Vermelhos. No turno seguinte, compra o par 2 Vermelho e 0 Cinza. Qual a melhor combinação de pares para chegar o mais perto possível de 100 sem passar?
13. Você está com 110 pontos (estourou). Suas cartas são $(10 \times 10 = 100)$ e $(5 \times 2 = 10)$. Você compra o par 6 Vermelha e 1 Azul. Como reorganizar para voltar a ter menos de 100 pontos?
14. Qual o resultado final de um conjunto de 6 cartas onde todas são 0 Cinzas?
15. Invente uma combinação de 6 cartas (3 pares) que resulte em exatamente 100 pontos, utilizando pelo menos uma carta de cada cor (Azul, Vermelha e Cinza).

Instituição:	
Nome:	
Professor(a):	Disciplina:
Turma:	Data: __/__/____

Atividade 9 - Exercícios Contextualizados

1. Uma loja vendeu 5 camisetas e teve um lucro de 10 reais em cada uma. Utilizando as cores do jogo, como representarias este par de fatores e qual o lucro total?
2. Um investidor comprou 4 ações que desvalorizaram 8 reais cada uma. Qual o saldo final desta operação? Representa-o como uma multiplicação de inteiros.
3. Na Educação Financeira, anular uma multa é algo positivo. Se tens 2 multas de 20 reais cada e o banco as cancela (multiplica por zero), qual o impacto no teu saldo? Relaciona com a carta Cinza.
4. Um tanque de água perde 10 litros por hora. Se passarem 6 horas, qual a variação total do volume de água? Representa o tempo como fator positivo e a perda como fator negativo.
5. Num jogo de perguntas e respostas, cada erro retira 5 pontos. Se um aluno cometer 4 erros, qual o impacto na sua pontuação? (Pense no par de cartas: 4 Azul e 5 Vermelho).
6. Imagina que deves 10 reais a 3 amigos diferentes (3 vezes -10). Se ganhares um prémio de 50 reais, o teu saldo final será positivo ou negativo? Qual o valor?
7. Uma equipa de mergulho desce 2 metros por minuto. Onde estará a equipa após 10 minutos? Representa a descida como um número negativo.
8. Um comerciante tem 90 pontos de crédito. Ele faz uma compra de 2 produtos que custam 10 reais cada, mas recebe um desconto total que anula essa compra (multiplica por zero). Ele ultrapassou o limite de 100 pontos?
9. Se "perder uma dívida" é o mesmo que ganhar dinheiro, como explicarias o resultado de $(-5) \times (-4)$ usando o exemplo de cancelar 5 faturas de 4 reais cada?
10. Estás a organizar um evento e tens 10 mesas com 10 cadeiras cada. Se todas as mesas estiverem ocupadas (10 Azul x 10 Azul), atingiste o "Cem Perfeito"?

11. Numa experiência de física, a temperatura de um gás desce 3 graus a cada 10 minutos. Se a temperatura inicial era de 20 graus, qual será a temperatura após 30 minutos (3 intervalos de 10)?
12. Tens 6 cartas que representam o teu stock: (10 Azul, 10 Azul), (5 Vermelha, 5 Vermelha) e (8 Azul, 0 Cinza). Qual o valor total do teu stock? Estás dentro do limite de 100?
13. Um submarino está a -50 metros. Ele duplica a sua profundidade (multiplica por 2). Em que posição se encontra agora? O resultado é mais "positivo" ou mais "negativo" que o anterior?
14. Um esquema de pontos de fidelidade dá 10 pontos por cada compra. Se um cliente fizer 10 compras e depois usar um cupom que retira 10 pontos, qual o saldo final? Escreve a expressão matemática.
15. Por que razão, num planeamento financeiro, ter $10 \times (-3)$ é preferível a ter $10 \times (-10)$, se o objetivo é manter o saldo o mais próximo possível de $+100$?

Instituição:	
Nome:	
Professor(a):	Disciplina:
Turma:	Data: __/__/____

Teste 3

1. (Mecânica) No jogo, você retira um par de cartas da mesma cor: 7 Vermelho e 9 Vermelha. Qual é o resultado da multiplicação deste par? O saldo final é positivo ou negativo?
2. (Mecânica) Um jogador forma um par com um 8 Azul e um 4 Vermelho. Qual o valor exato dessa combinação? Explique por que o resultado possui esse sinal.
3. (Estratégia do Zero) Você possui 92 pontos. No seu turno, você compra as cartas 10 Azul e 0 Cinza. Qual combinação você deve fazer para garantir que sua pontuação não ultrapasse 100 e por que essa estratégia funciona?
4. (Reorganização) Você tem as cartas 5 Azul, 5 Vermelha, 2 Azul e 2 Vermelha. Se você organizar os pares por cores diferentes (Azul x Vermelha), qual será sua pontuação total? E se organizar por cores iguais (Azul x Azul e Vermelha x Vermelha)?
5. (O Freio Negativo) Um jogador "estourou" e está com 120 pontos. Ele possui um par ($10 \times 10 = 100$) e outro ($5 \times 4 = 20$). Ele recebe uma carta 6 Vermelho e um 1 Azul. Como ele pode reorganizar esses pares para que sua pontuação total volte a ficar abaixo de 100?
6. (Contextualizado - Comércio) Uma loja vendeu 8 camisetas e teve um lucro de R\$10,00 em cada uma. Utilizando a lógica das cartas do jogo, represente essa situação como uma multiplicação e dê o resultado final.
7. (Contextualizado - Dívidas) Se "cancelar uma dívida" é uma operação positiva, como você explica matematicamente (usando a regra de sinais) o ato de retirar 3 multas de R\$15,00 de um cliente?
8. (Contextualizado - Ciência) Em um experimento, a temperatura de um líquido cai 4 graus a cada 10 minutos. Qual será a variação total de temperatura após 5 intervalos de 10 minutos? (Represente a queda como um número negativo).

9. (O Cem Perfeito) Para vencer a partida com o "Cem Perfeito", um aluno organizou suas 6 cartas assim: $(-10) \times (-10)$, 5×0 e 2×0 . Faça os cálculos de cada par e confirme se ele atingiu exatamente 100 pontos.
10. (Análise Crítica) Um colega diz: "É impossível ter uma pontuação positiva se eu só tiver cartas vermelhas na mão". Baseado nas regras do jogo e na multiplicação de inteiros, prove que ele está errado.

APÊNDICE C

Este Apêndice reúne os gabaritos comentados e as orientações pedagógicas referentes aos materiais práticos e avaliativos apresentados anteriormente. No total, o conteúdo é composto por doze subitens, organizados de forma a manter a correspondência direta com os eixos temáticos do trabalho. A organização modular deste apêndice foi projetada para auxiliar outros professores na conferência de resultados e na mediação das atividades, permitindo uma consulta rápida e independente para cada parte do planejamento docente.

O primeiro eixo temático é dedicado à Adição entre Números Positivos e Negativos. Esta seção compreende orientações e comentários pedagógicos sobre a Atividade 1 – Corrida ao Zero, seguidos pelos gabaritos detalhados e comentados da Atividade 2 – Exercícios de Fixação, da Atividade 3 – Exercícios Contextualizados e do Teste 1.

O segundo eixo temático concentra as resoluções referentes à Adição entre Números Negativos. Este eixo inclui considerações sobre a dinâmica da Atividade 4 – Gestão de Saldo, além dos gabaritos comentados da Atividade 5 – Exercícios de Fixação, da Atividade 6 – Exercícios Contextualizados e do Teste 2.

Por fim, o terceiro eixo temático contempla a Multiplicação entre Números Positivos e Negativos. Sua estrutura abrange comentários sobre a execução da Atividade 7 – Combinação 100, encerrando-se com os gabaritos detalhados da Atividade 8 – Exercícios de Fixação, da Atividade 9 – Exercícios Contextualizados e do Teste 3. A disposição desses doze subitens oferece ao corpo docente um suporte para a correção e análise do desempenho dos alunos.

Atividade 1 - Comentário

O grande mérito do jogo reside na transposição da reta numérica de um conceito estático para um território de navegação. Frequentemente, os alunos do 7º ano encaram os números negativos como entidades abstratas ou meras regras de sinais a serem memorizadas. Ao transformar a reta em um "mapa" onde cada decisão (escolha do dado) e cada resultado (soma algébrica) possui uma consequência espacial imediata, o professor permite que o estudante desenvolva uma intuição geométrica sobre o valor absoluto e a relatividade da posição. O erro de movimento deixa de ser uma falha punitiva e passa a ser um dado de navegação que exige uma nova estratégia de correção.

A implementação da "Zona de Soma" (intervalos de -5 a -1 e $+1$ a $+5$) funciona como um catalisador de dissonância cognitiva controlada. Ao retirar a liberdade de escolha do aluno e obrigá-lo a operar com dois vetores opostos simultaneamente, o jogo simula a complexidade dos sistemas reais, onde múltiplas variáveis influenciam o resultado final. Pedagogicamente, isso impede o "vício de raciocínio" de usar apenas o dado que caminha em uma única direção, forçando o estudante a lidar com a natureza dual dos inteiros — a ideia de que um avanço positivo pode ser mitigado por um recuo negativo, resultando em um deslocamento líquido que exige cálculo mental constante.

A dimensão estratégica nas zonas de fronteira (casas -6 e $+6$) é onde o letramento matemático se funde com a gestão de risco. Quando o professor questiona o aluno sobre a vantagem de entrar ou não na Zona de Soma, ele está estimulando o pensamento de ordem superior da Taxonomia de Bloom: a Avaliação. O aluno não está apenas calculando; ele está analisando cenários e antecipando probabilidades. Essa autonomia na escolha dos dados (azul, vermelho ou ambos) empodera o estudante, transformando-o de um executor de tarefas em um tomador de decisões fundamentadas em lógica matemática.

O aspecto da fiscalização mútua e colaboração durante as partidas cria um ambiente de "comunidade de prática" dentro da sala de aula. Quando um colega corrige o movimento do outro, ocorre um processo de validação de conhecimento que é, muitas vezes, mais eficaz do que a correção tradicional no quadro negro. Essa interação social reduz a ansiedade matemática, pois o foco está na dinâmica do jogo, enquanto o aprendizado da habilidade EF07MA04 ocorre de forma orgânica. Tal processo promove a aprendizagem colaborativa através da zona de desenvolvimento proximal, conceito central na obra de Vygotsky (2007). Segundo Hefez (2011), o entendimento das propriedades estruturais das operações é o que permite ao aluno transitar para a compreensão lógica dos números. O professor, ao circular entre os grupos, deixa de ser o detentor único do saber para se tornar um mentor que calibra os raciocínios em tempo real.

Por fim, o tratamento dado ao "excesso de movimento" (ultrapassar o zero) é

uma lição valiosa sobre a simetria dos números inteiros. No ensino tradicional, passar do ponto pode ser visto como um erro; na Corrida ao Zero, é uma mudança de polaridade que exige uma reorientação completa do pensamento. Se o aluno está no -2 , obtém um saldo de $+5$ e para no $+3$, ele é forçado a entender, na prática, que sua necessidade matemática mudou: ele agora precisa de valores negativos para atingir o objetivo. Essa percepção da flutuação em torno do elemento neutro é a base fundamental para o futuro estudo de funções, equilíbrios químicos e balanços financeiros.

Atividade 2 - Gabarito Comentado

Para o item 1, o raciocínio parte da posição inicial -10 ; como o dado azul representa um deslocamento positivo (para a direita), avançamos 4 unidades, parando na casa -6 . No item 2, o objetivo de Marcos é aproximar-se do zero sem entrar na "Zona de Soma" (intervalo entre -5 e -1); estando no -8 , o maior valor permitido no dado azul é 2, pois um resultado 3 o levaria à casa -5 , retirando sua liberdade de escolha na rodada seguinte. Já no item 3, ao sair da casa -7 e avançar 6 unidades com o dado azul, o jogador para na casa -1 , o que o coloca oficialmente dentro da "Zona de Soma".

No item 4, a jogada na "Zona de Soma" exige a composição de movimentos: partindo do -3 , o avanço de 5 e o recuo de 2 resultam em um deslocamento líquido de $+3$, levando o peão exatamente à casa 0 (vitória). No item 5, o jogador na casa $+4$ obtém valores iguais nos dois dados (3 e 3); como os vetores são opostos, eles se anulam (elemento simétrico), mantendo o peão estático na casa $+4$. Para o item 6, saindo do -2 com um saldo líquido de $+5$ (6 no azul e 1 no vermelho), o jogador ultrapassa o objetivo e para na casa $+3$, não vencendo a partida nesta rodada.

No item 7, partindo da casa $+1$, a combinação de um avanço de 2 com um recuo de 6 resulta em um saldo de -4 , fazendo o peão atravessar o zero e parar na casa -3 , agora no lado negativo. No item 8, a análise estratégica mostra que na casa $+9$ a escolha mais vantajosa é o dado vermelho, pois ele é o único que garante o sentido de movimento necessário (esquerda) para retornar ao zero. No item 9, do -5 , um avanço de 1 e um recuo de 5 levam o jogador para a casa -9 ; como esta posição está fora do intervalo crítico, ele recupera o direito de escolher apenas um dado na próxima jogada.

No item 10, a afirmação do aluno está correta: para sair do $+4$ e atingir o zero, o valor negativo (vermelho) deve anular a posição inicial e qualquer avanço do dado azul, o que exige que o dado vermelho seja exatamente 4 unidades maior que o azul. No item 11, comparando os desempenhos, Ana atinge o saldo exato para chegar ao zero ($-2 + 6 - 4 = 0$), enquanto Bruno termina na casa $+2$; portanto, Ana vence a rodada. No item 12, partindo do $+5$, o jogador avança 2 e recua 6, resultando em um deslocamento final de -4 unidades, o que o posiciona na casa $+1$, permanecendo ainda no lado positivo da reta numérica.

No item 13, saindo do -1 , o saldo líquido de $+1$ (6 no azul e 5 no vermelho) é o valor exato para que o peão pouse no ponto central, garantindo a vitória. No item 14, a casa -6 é estrategicamente superior à casa -1 porque oferece autonomia ao jogador; no -6 , ele controla o risco jogando um único dado, enquanto no -1 ele é forçado a lidar com a variabilidade de dois dados, que pode facilmente afastá-lo do alvo. Finalmente, no item 15, para vencer a partir da casa $+3$, o aluno deve propor qualquer combinação onde o dado vermelho supere o azul em 3 unidades, como as duplas $(1, 4)$, $(2, 5)$ ou $(3, 6)$.

Atividade 3 - Gabarito Comentado

No item 1, o termômetro funciona exatamente como a reta do nosso jogo: partindo de 5 graus abaixo de zero (-5) e observando um aumento de 3 graus, avançamos três casas para a direita, parando na marca de $-2^{\circ}C$. No item 2, aplicamos a lógica financeira básica onde ter $R\$10,00$ e gastar $R\$15,00$ equivale a sair da casa $+10$ e recuar 15 posições; o resultado é um saldo de -5 , indicando que a conta ficou "no vermelho". Já no item 3, o mergulhador inicia no -7 e sobe 6 metros, parando na casa -1 ; como o nível do mar é o nosso "zero", ele ainda está mergulhado, restando 1 metro para atingir a superfície. No item 4, o elevador parte do subsolo (-2) e sobe 5 andares, atravessando o térreo e parando no 3º andar positivo. No item 5, o time de futebol sai de um saldo de -3 e marca $+3$, resultando em um equilíbrio total (0), o que no jogo representaria a vitória exata.

No item 6, o alpinista realiza um movimento de descida a partir do $+8$; como ele desce 10 metros, ele "atravessa o zero" e para na posição -2 em relação ao solo. No item 7, pagar uma dívida de $R\$8,00$ com uma nota de $R\$10,00$ é a representação prática da operação $(-8) + 10$, resultando em um saldo positivo (azul) de $R\$2,00$. No item 8, a temperatura da geladeira cai de $3^{\circ}C$ para $-2^{\circ}C$, um recuo típico no tabuleiro que desloca o ponto para o lado negativo da escala. No item 9, a temperatura externa sobe de $-10^{\circ}C$ para $-6^{\circ}C$; embora tenha ocorrido um aquecimento (movimento para a direita), o valor final ainda permanece abaixo de zero. No item 10, a empresa atinge o equilíbrio financeiro ao anular uma dívida com um pagamento de igual valor, o que reforça o objetivo máximo do jogo de liquidar pendências na reta numérica.

No item 11, o balão meteorológico executa uma sequência de movimentos $(+6 - 2 - 4)$ que o traz de volta exatamente ao ponto de partida, o solo (zero). No item 12, o estoque negativo de -4 representa contabilmente uma "falta" ou uma entrega pendente, mostrando que o número negativo serve para indicar um compromisso não cumprido. No item 13, a vida financeira do jovem é traduzida pela expressão $20 - 12 + 5$, resultando em um saldo final de $R\$13,00$. No item 14, a experiência química segue o percurso inicial de -4 , sobe para -2 e, após a queda de 5 unidades, termina na temperatura de $-7^{\circ}C$. Por fim, no item 15, a explicação pedagógica destaca que, embora a distância (valor absoluto) até o zero seja a mesma, o sinal positivo representa posse e segurança, enquanto o negativo representa dívida e privação, ensinando que o sentido do número é fundamental para a interpretação da realidade.

Teste 1 - Gabarito Comentado

No item 1, o raciocínio deve partir do extremo negativo da reta (-10); ao obter 6 no dado azul, o aluno realiza um avanço para a direita, parando exatamente na casa -4 . No item 2, o desafio exige o cálculo na Zona de Soma: partindo do $+2$, somamos o avanço do azul ($+4$) e subtraímos o recuo do vermelho (-6), resultando em um saldo zero, o que garante a vitória imediata do jogador. Para o item 3, trabalhamos a abstração do "deslocamento líquido", que neste caso é de $+3$ unidades; se o peão estivesse na casa -3 e recebesse esse deslocamento, ele atingiria o objetivo final no centro da reta. No item 4, migramos para a lógica financeira, onde estar "no vermelho" em 15 reais e fazer um depósito de 20 é o mesmo que a operação $(-15) + 20$, resultando em um saldo positivo (azul) de R\$5,00.

O item 5 utiliza a mesma percepção térmica: partindo de -3°C e observando uma subida de 7 graus, a temperatura atravessa o zero e atinge a máxima de 4°C . No item 6, o foco é a gestão de risco; para o jogador no -7 não entrar na Zona de Soma (que inicia na casa -5), o maior valor permitido no dado azul é 1, fazendo-o parar na casa -6 e preservando seu direito de escolha na próxima rodada. Já no item 7, introduzimos o conceito de elemento neutro na prática: ao tirar valores iguais nos dois dados (5 e 5), os movimentos se anulam por serem simétricos, mantendo o peão estático na casa -4 .

No item 8, aplicamos a altitude negativa para o mergulhador; saindo do -8 e subindo 5 metros, ele para na posição -3 , o que indica que ele ainda se encontra abaixo do nível do mar. Para o item 9, o aluno deve exercitar a precisão matemática: estando na casa -1 , qualquer combinação onde o dado azul seja exatamente uma unidade maior que o vermelho (como 2 e 1, ou 5 e 4) garantirá o pouso exato no zero. Por fim, no item 10, a saúde financeira da empresa é analisada pela soma de um prejuízo (-1000) com um lucro ($+800$), resultando em um saldo final negativo de R\$200,00, o que reforça para o aluno que o sinal negativo representa a persistência de uma dívida ou falta.

Atividade 4 - Comentário

O jogo "Gestão de Saldo" opera uma mudança fundamental na percepção do aluno sobre os números inteiros: a transição da contagem para a mensuração de valor. Ao associar o sinal negativo ao conceito de débito e o positivo ao de crédito, o professor retira o símbolo "—" do campo puramente operacional e o insere no campo semântico da responsabilidade. Essa abordagem permite que o estudante compreenda que o "zero" na vida financeira não é apenas um ponto de origem, mas um estado de equilíbrio crítico. A matemática, portanto, deixa de ser uma disciplina de respostas prontas para se tornar uma linguagem de diagnóstico da própria realidade socioeconômica.

Um dos pontos mais ricos da atividade é a introdução do "Monte Especial" (Cartas Amarelas), que insere a imprevisibilidade no modelo matemático. Pedagogicamente, isso quebra o determinismo das operações simples e força o aluno a exercitar a resiliência cognitiva. Ao lidar com um bônus inesperado ou uma multa súbita, o estudante é desafiado a reajustar seu saldo mentalmente em tempo real. Essa dinâmica simula o "estresse financeiro" de forma controlada, permitindo que o professor discuta não apenas a aritmética, mas a importância da reserva de emergência e do planejamento preventivo, elevando o debate para o nível de "Avaliação" na Taxonomia de Bloom.

A inclusão de metas baseadas em porcentagem de poupança (10% ou 20%) adiciona uma camada de complexidade que conecta a habilidade EF07MA04 a conceitos de proporcionalidade. Não basta para o aluno "terminar no positivo"; ele é incentivado a otimizar seu recurso. Quando o professor propõe casos especiais onde um salário menor bem gerido supera um salário alto desperdiçado, ele está desconstruindo um mito comum e ensinando que a saúde financeira depende mais da precisão aritmética e do autocontrole do que do montante bruto. Isso transforma a aula de matemática em um laboratório de cidadania e pensamento crítico.

No contexto da execução e mediação, o papel do docente como "consultor estratégico" é vital. Ao circular pelos grupos e questionar as decisões de consumo e poupança, o professor estimula o letramento financeiro através da metacognição — o ato de pensar sobre o próprio processo de escolha. A "fiscalização de regras" pelos próprios colegas cria um ambiente de aprendizagem entre pares, onde o erro de cálculo de um aluno é corrigido pelo outro em um contexto de relevância mútua. Essa interação social valida o conhecimento matemático como uma ferramenta de poder e proteção no cotidiano.

Por fim, a transição do cálculo de módulos para a análise do saldo final consolida a compreensão de que dívidas acumuladas (soma de negativos) possuem um peso real que "puxa" o resultado para longe do objetivo. A atividade encerra-se não apenas com um vencedor, mas com a percepção clara de que o domínio dos números inteiros é o que separa o caos financeiro da liberdade de escolha. O jogo entrega ao

aluno a percepção de que a matemática é o mapa que permite navegar com segurança em um mundo de incertezas econômicas, preparando-o para as competências financeiras exigidas na vida adulta.

Atividade 5 - Gabarito Comentado

No item 1, somamos as dívidas iniciais de água, luz e gás ($100 + 200 + 110$), resultando em um total de débitos de $R\$410,00$; subtraindo esse valor do salário de $R\$1.580,00$, o aluno encontra um saldo parcial de $R\$1.170,00$. No item 2, o cálculo parte da diferença entre o salário e as dívidas ($1.405 - 1.300 = 105$) e adiciona o bônus de "Cashback" de $R\$100,00$, totalizando um saldo final de $R\$205,00$. Já no item 3, a situação financeira torna-se negativa: após pagar as dívidas, restam $R\$130,00$ ($1.230 - 1.100$), mas a multa de trânsito de $R\$200,00$ leva o saldo para $-R\$70,00$, o que resulta em 0 pontos na rodada devido ao saldo devedor. No item 4, focamos no conceito de módulo (valor absoluto), onde a soma das cartas de alimentação e cartão ($750 + 450$) indica que $R\$1.200,00$ são retirados do orçamento.

No item 5, o saldo final do jogador é de $R\$480,00$ ($2.280 - 1.800$); como a meta de 20% do salário de $R\$2.280,00$ é de $R\$456,00$, o aluno já atingiu o objetivo para ganhar os 3 pontos sem depender de novas receitas. No item 6, trabalhamos a soma de sinais diferentes, onde o bônus de $R\$150,00$ anula a dívida de $R\$50,00$ e deixa o jogador com $R\$100,00$ positivos. No item 7, comparamos a eficiência da poupança: no mês A, poupou-se cerca de 9,7% ($205/2.105$), enquanto no mês B a poupança foi de 18,7% ($230/1.230$), mostrando que o Mês B foi proporcionalmente mais econômico. No item 8, as três despesas somadas representam um impacto negativo total de $R\$435,00$ no orçamento.

No item 9, o salário de $R\$1.930,00$ menos as dívidas e o gasto extra ($1.500 + 50$) resulta em um saldo final de $R\$380,00$; como 10% do salário seria $R\$193,00$, o jogador poupou significativamente mais que o mínimo, garantindo 2 pontos. No item 10, o custo do conserto do celular ($R\$150,00$) supera o saldo disponível de $R\$100,00$, deixando o saldo final em $-R\$50,00$ (0 pontos). No item 11, ao subtrair as três contas principais do salário de $R\$2.105,00$, ainda resta uma reserva de $R\$505,00$. No item 12, para garantir 20% de reserva em um salário de $R\$1.000,00$ ($R\$200,00$), o limite máximo de endividamento permitido é de $R\$800,00$.

No item 13, calculamos que 10% do salário de $R\$1.580,00$ equivale a $R\$158,00$; como o saldo final de $R\$150,00$ ficou abaixo desse patamar, o jogador recebe apenas 1 ponto conforme a regra. No item 14, a entrada da "Hora Extra" ($+50$) é superior à dívida de -30 , resultando em um saldo positivo de $R\$20,00$. Por fim, no item 15, uma combinação estratégica para somar exatamente $R\$1.000,00$ em dívidas poderia ser: Alimentação ($R\$500,00$), Gás ($R\$100,00$), Luz ($R\$50,00$) e Cartão de Crédito ($R\$350,00$), reforçando a percepção de como grandes gastos consomem rapidamente o salário.

Atividade 6 - Gabarito Comentado

No item 1, a expressão matemática que representa o equilíbrio entre ganho e gasto é $1930 - 1930 = 0$; o saldo final nulo indica que o trabalhador vive no limite de sua renda, sem sobras para poupança. No item 2, a dívida de serviços de $-R\$350,00$ é amenizada pelo bônus de $+R\$150,00$, resultando em uma dívida reduzida de $-R\$200,00$, mostrando como créditos diminuem o saldo devedor. No item 3, ao somar as dívidas de alimentação e cartão ($550 + 330$), obtemos $R\$880,00$; subtraindo esse valor do salário de $R\$1.230,00$, o aluno percebe que ainda restam $R\$350,00$ de "espaço" positivo antes de entrar no vermelho. No item 4, somar dívidas é acumular valores negativos: -150 com -200 resulta em $-R\$350,00$, onde o valor absoluto (módulo) é 350 e o sinal é negativo por representar um débito. Para o item 5, a escrita formal como soma de sinais diferentes é $400 + (-150) = 250$, ensinando que subtrair um valor é o mesmo que somar o seu oposto.

No item 6, o cálculo de 20% sobre o salário de $R\$2.105,00$ resulta em $R\$421,00$, que é o valor necessário para atingir a meta de pontuação máxima. No item 7, o aumento da internet de 75 para 120 representa uma nova variação negativa de $-R\$45,00$, o que aumenta o peso total das dívidas sobre o orçamento. No item 8, o déficit é de $R\$95,00$ ($1500 - 1405$), sendo representado na reta numérica como o ponto -95 , localizado à esquerda do zero. No item 9, as cartas de bônus e gasto desnecessário se anulam ($+50 - 50 = 0$), resultando em um efeito líquido nulo, o que reforça o conceito de elementos neutros na soma. No item 10, ao dividir a dívida do cartão pelo salário ($450 \div 1755$), descobrimos que aproximadamente 25,6% da renda já está comprometida com o cartão de crédito.

No item 11, o fluxo de caixa é positivo, pois a entrada de $R\$2.280,00$ supera a saída de $R\$1.800,00$, resultando em um saldo de $R\$480,00$. No item 12, a explicação pela proporção mostra que 100 reais representam cerca de 8,1% do salário menor, enquanto representam apenas 4,3% do salário maior; logo, o impacto é sentido com muito mais intensidade por quem ganha menos. No item 13, calculamos que 10% do salário de João é $R\$140,50$ e 20% é $R\$281,00$; como ele poupou $R\$300,00$, ele ultrapassou a meta de 20% e marcou 3 pontos. No item 14, a expressão consolidada é $2105 - 700 - 150 + 100 = 1355$, representando o saldo final após todas as movimentações.

Por fim, no item 15, a situação de Roberto é traduzida pela expressão $(2105 + 150) - (700 + 430 + 175 + 150 + 135 + 125 + 100)$. O total de receitas é $R\$2.255,00$ e o total de despesas é $R\$1.815,00$, resultando em um saldo final positivo de $R\$440,00$. Portanto, Roberto não terminou em déficit e conseguiu poupar dinheiro, embora o valor poupado tenha ficado ligeiramente abaixo dos 20% necessários para a pontuação máxima ($R\$451,00$), garantindo a ele os 2 pontos da rodada (por ter poupado mais de 10%).

Teste 2 - Gabarito Comentado

No item 1, o total da dívida acumulada é a soma dos módulos das cartas vermelhas ($800 + 250 + 120$), resultando em $R\$1.170,00$; o sinal que representa esse total é o negativo ($-$), indicando o valor que será subtraído do salário. No item 2, como a dívida de $R\$2.100,00$ supera o salário de $R\$2.070,00$, o saldo parcial é de $-R\$30,00$, mostrando que o aluno "atravessou o zero" para o lado negativo da reta numérica. No item 3, a expressão matemática $130 - 150$ resulta em um saldo final de $-R\$20,00$, ilustrando como um imprevisto representado pela carta amarela pode anular um saldo positivo anterior. Para o item 4, a soma de sinais diferentes ($-80 + 150$) resulta em um saldo final positivo de $R\$70,00$, o que permite ao jogador limpar sua dívida e pontuar na rodada.

No item 5, o cálculo da meta de 20% sobre o salário de $R\$1.440,00$ resulta em $R\$288,00$, que é o valor exato necessário para atingir a pontuação máxima de 3 pontos. Para o item 6, o imprevisto da multa de trânsito faz com que o saldo de João seja negativado ($180 - 200 = -20$), resultando em 0 pontos na rodada, já que as regras do jogo não permitem pontuação para saldos devedores. No item 7, a explicação reside na proporção matemática: uma dívida de $R\$100,00$ representa um impacto de aproximadamente 8,1% no salário menor, enquanto para o salário maior representa apenas 4,3%, tornando o gasto proporcionalmente mais "pesado" para quem ganha menos.

No item 8, a expressão única $1650 - 600 - 145 + 100$ resulta em um saldo resultante de $R\$1.005,00$, organizando de forma clara o fluxo de entradas e saídas. No item 9, como o saldo de $R\$150,00$ é menor que o limite de 10% do salário ($R\$207,00$), o jogador marca apenas 1 ponto na rodada, conforme a tabela de consulta. Por fim, no item 10, a análise crítica confirma que a vitória depende da gestão: um jogador com salário de $R\$2.280,00$ pode terminar com 0 pontos se tiver um endividamento descontrolado, enquanto o jogador com $R\$1.230,00$ pode garantir os 3 pontos mantendo dívidas mínimas e uma economia eficiente, provando que a disciplina financeira supera o valor bruto recebido.

Atividade 7 - Comentário

O "Combinação 100" promove uma quebra de paradigma fundamental no ensino da regra de sinais: a percepção de que o número negativo pode ser um aliado para a obtenção de resultados positivos. Ao entender que $(-10) \times (-10) = +100$, o aluno deixa de ver o sinal de menos apenas como uma "perda" ou "subtração" e passa a compreendê-lo como uma operação de inversão de sentido. Essa "jogada mestre" de transformar dois valores negativos em um saldo positivo vitorioso é o que consolida a regra de sinais de forma orgânica, fixando o conceito muito além da simples memorização de tabelas.

A característica de flexibilidade e recombinação a cada turno é o que prepara o terreno para o pensamento algébrico. Na álgebra, frequentemente precisamos reorganizar termos e agrupar fatores para simplificar expressões; no jogo, o aluno faz exatamente isso ao desfazer um par e criar outro para evitar o "estouro" do limite. Essa agilidade mental em testar diferentes arranjos (como decidir se é melhor ter 10×8 e 5×4 ou outra combinação qualquer) desenvolve a propriedade associativa de forma intuitiva, mostrando que a estrutura do cálculo é moldável conforme o objetivo final.

A inserção da carta cinza (zero) como um "escudo tático" é uma lição prática sobre o elemento nulo da multiplicação. Em muitos problemas tradicionais, multiplicar por zero é visto como algo trivial ou sem utilidade; no jogo, o zero torna-se a carta mais valiosa para o controle de danos. O professor pode destacar como a propriedade $n \cdot 0 = 0$ permite "limpar" o tabuleiro de um valor indesejado, ensinando que a neutralidade é uma ferramenta de gestão de risco. Isso reforça a ideia de que na matemática, assim como na estratégia, saber quando anular uma variável é tão importante quanto saber quando aumentá-la.

O uso do número negativo como "freio" introduz uma camada sofisticada de raciocínio: a subtração através da multiplicação. Quando um aluno percebe que está com 120 pontos e precisa "descer" para 100, ele é forçado a buscar um par com sinais opostos (ex: $5 \times -4 = -20$). Esse movimento é contra-intuitivo para muitos estudantes que ainda estão presos ao pensamento aritmético básico. O professor, como mediador, deve brilhar nesse momento, demonstrando que o número negativo funciona como um vetor de correção, permitindo uma precisão que os números positivos sozinhos não alcançariam.

Por fim, a dinâmica de informação aberta transforma a sala de aula em um ambiente de análise de dados em tempo real. Ao observar as cartas dos adversários, o aluno não está apenas jogando, mas realizando uma leitura de ambiente e probabilidades. Ele precisa avaliar: "Se meu colega já tem um 10 azul, as chances de eu comprar outro diminuem". Esse nível de engajamento social e fiscalização mútua valida o rigor matemático; a correção do cálculo do colega torna-se parte da defesa da própria vitória. O jogo termina não apenas com um vencedor, mas com uma turma capaz de realizar

operações complexas com uma autonomia que dificilmente seria alcançada apenas com exercícios de fixação no caderno.

Atividade 8 - Gabarito Comentado

No item 1, a multiplicação de duas cartas azuis ($+5$ e $+6$) resulta em $+30$ pontos, reforçando que o produto de dois números positivos é sempre positivo. No item 2, aplicamos a regra fundamental de que sinais iguais na multiplicação resultam em positivo; portanto, o par de cartas vermelhas (-4 e -8) produz um saldo de $+32$. Já no item 3, o encontro de sinais diferentes (9 Azul e 3 Vermelho) resulta inevitavelmente em um produto negativo de -27 , o que faz o jogador perder pontos na rodada. No item 4, a adição do par (10 Azul $\times$ 0 Cinza) resulta em zero, mantendo o saldo seguro em 90. Para atingir o "Cem Perfeito", reorganize os pares: some (10 Vermelho $\times$ 5 Vermelho = 50) com (10 Azul $\times$ 5 Azul = 50). A carta restante é neutralizada pelo zero (8 Azul $\times$ 0 Cinza = 0), totalizando exatos 100 pontos.

No item 5, para obter a maior pontuação positiva, o aluno deve agrupar as cartas de mesma cor para garantir produtos positivos: (2 Azul $\times$ 5 Azul = 10) e (2 Vermelho $\times$ 5 Vermelho = 10), totalizando $+20$ pontos. No item 6, o aluno que afirma ter um saldo de -100 está incorreto, pois na mecânica do jogo, duas cartas vermelhas de valor 10 resultam em $(-10) \times (-10) = +100$. No item 7, o novo par ($+8$ e -2) gera um saldo negativo de -16 ; ao somar esse valor aos 95 pontos atuais, o total cai para 79, o que evita que o jogador ultrapasse o limite de 100. No item 8, o Monte A é estrategicamente superior porque a carta Cinza (0) permite anular o Azul 10, enquanto o Monte B forçaria um acréscimo de pelo menos $+20$ pontos, causando o "estouro" da pontuação.

No item 9, demonstramos o impacto da escolha de pares: combinar cores iguais gera dois produtos positivos ($+21$ e $+21$), somando $+42$ pontos, enquanto combinar cores diferentes gera dois produtos negativos (-21 e -21), somando -42 ; a diferença entre as duas estratégias é de expressivos 84 pontos. No item 10, a vitória matemática é atingida ao isolar o valor máximo em um par e anular o restante: (10 Vermelho $\times$ 10 Vermelho = 100) garante o objetivo, enquanto o par (10 Azul $\times$ 0 Cinza = 0) neutraliza as cartas altas que poderiam fazer o jogador passar do limite.

No item 11, o aluno comete um erro comum de interpretação; a regra de sinais dita que o produto de dois negativos é positivo, logo, cartas vermelhas podem ser muito benéficas. No item 12, a melhor pontuação possível é 96. Garanta o máximo com (10 Vermelho $\times$ 10 Vermelho = 100), reduza o saldo com (2 Azul $\times$ 2 Vermelho = -4) e anule a sobra com (8 Azul $\times$ 0 Cinza = 0). O total final é $100 - 4 + 0 = 96$. No item 13, para corrigir um saldo de 110, o jogador deve criar propositalmente um par negativo, como (10 Azul $\times$ 6 Vermelho = -60), derrubando o saldo para 50 e retornando ao jogo. No item 14, o resultado é zero, pois o zero é o elemento absorvente da multiplicação. Por fim, no item 15, uma solução elegante que utiliza todas as cores é formar um par de (10 Vermelho $\times$ 10 Vermelho = 100) para atingir a meta, e usar cartas Cinzas para anular as cartas Azuis restantes ($5 \times 0 = 0$ e $2 \times 0 = 0$).

Atividade 9 - Gabarito Comentado

No item 1, a venda de 5 camisetas com lucro de R\$10,00 cada é representada pelo par de fatores positivos ($5 \text{ Azul} \times 10 \text{ Azul}$), resultando num lucro total de R\$50,00. No item 2, a desvalorização das ações é traduzida pela multiplicação $(+4) \times (-8)$, onde um fator positivo e um negativo resultam num saldo final de -32 reais. Já no item 3, o cancelamento de dívidas introduz a função estratégica da carta Cinza (zero): qualquer valor, mesmo uma multa, multiplicado por zero resulta em zero, protegendo o patrimônio do jogador. No item 4, a variação do volume de água é calculada multiplicando o tempo positivo pela perda negativa ($6 \times (-10)$), totalizando uma redução de 60 litros no tanque. No item 5, aplicamos a mesma lógica aos erros no jogo de perguntas: o par 4 Azul e 5 Vermelho resulta em $4 \times (-5)$, gerando um impacto de -20 pontos na conta do aluno.

No item 6, a dívida acumulada com os amigos é de $3 \times (-10) = -30$; ao somar o prêmio de R\$50,00, o saldo final torna-se positivo em R\$20,00, mostrando como um ganho pode anular múltiplos débitos. No item 7, o mergulho contínuo de 10 minutos a uma taxa de -2 metros por minuto leva a equipe à profundidade de -20 metros. No item 8, o comerciante mantém sua pontuação de 90, pois a compra foi integralmente anulada pelo desconto ($2 \times 0 = 0$), evitando que ele ultrapasse o limite de 100 pontos. No item 9, explicamos o conceito do "duplo negativo": se "perder uma dívida" é ganhar, multiplicar $(-5) \times (-4)$ significa retirar cinco faturas de quatro reais, o que gera um benefício líquido de $+20$ reais. No item 10, a ocupação total das mesas ($10 \text{ Azul} \times 10 \text{ Azul}$) resulta no produto exato de 100, atingindo o objetivo máximo do jogo.

No item 11, em um intervalo de 30 minutos ocorrem três reduções térmicas: $3 \times (-3) = -9$; partindo de 20 graus, a temperatura final estabiliza em 11°C . No item 12, ao somar os produtos do estoque $10 \times 10 = 100$, $(-5) \times (-5) = 25$ e $8 \times 0 = 0$, o total atinge 125 pontos, o que significa que o jogador "estourou" o limite permitido. No item 13, a duplicação da profundidade ($2 \times (-50)$) leva o submarino para -100 metros; o resultado é numericamente menor e mais negativo, indicando uma posição ainda mais profunda. No item 14, o fluxo de fidelidade é representado pela expressão $(10 \times 10) - 10$, resultando em um saldo final de 90 pontos. Por fim, no item 15, a análise estratégica revela que ter -30 é preferível a -100 , pois o valor está muito mais próximo da meta positiva de 100 e representa uma perda patrimonial significativamente menor, facilitando a recuperação do saldo nas rodadas seguintes.

Teste 3 - Gabarito Comentado

No item 1, o resultado da multiplicação entre duas cartas vermelhas (-7 e -9) é $+63$; o saldo final é positivo porque a regra de sinais define que o produto de dois números negativos resulta sempre em um valor positivo. No item 2, a combinação de um 8 azul e um 4 vermelho resulta no valor exato de -32 ; o sinal é negativo porque os fatores possuem sinais diferentes (opostos), o que na mecânica do jogo representa uma perda de pontos. Para o item 3, a estratégia de garantir que a pontuação não ultrapasse 100 é multiplicar $10 \times 0 = 0$, mantendo os 92 pontos originais; isso funciona porque o zero é o elemento absorvente da multiplicação, permitindo neutralizar cartas altas que poderiam causar o "estouro" do limite.

No item 4, analisamos a importância da organização das cartas: o primeiro arranjo (cores diferentes) gera dois produtos negativos ($5 \times (-2) = -10$ e $2 \times (-5) = -10$), resultando em uma pontuação de -20 . Já o segundo arranjo (cores iguais) gera dois produtos positivos ($5 \times 2 = 10$ e $(-5) \times (-2) = 10$), totalizando $+20$ pontos, o que demonstra como a mesma mão de cartas pode ter resultados opostos dependendo da organização.

No item 5, o jogador que ultrapassou o limite deve agir estrategicamente para reduzir seu saldo: ao desmanchar o par positivo e criar um par negativo, como o 10 Azul multiplicado pelo 6 Vermelho (-60), ele consegue derrubar sua pontuação total para 40 pontos (considerando o par de 100 mantido), voltando com segurança para a disputa. No item 6, a situação comercial é representada pela multiplicação 8×10 , resultando em um lucro real de R\$80,00. No item 7, explicamos o "duplo negativo": o cancelamento é um sinal negativo agindo sobre uma dívida que também é negativa; logo, $(-3) \times (-15) = +45$, o que indica um benefício financeiro ou ganho para o cliente.

No item 8, a variação térmica é calculada multiplicando o tempo pela queda: $5 \times (-4) = -20$ graus, reforçando a aplicação dos inteiros na ciência. Para o item 9, o cálculo detalhado confirma a vitória do "Cem Perfeito": $(-10) \times (-10) = 100$, $5 \times 0 = 0$ e $2 \times 0 = 0$ e efetuando a soma, temos que $100 + 0 + 0 = 100$, mostrando que a neutralização de cartas menores é a chave para o pouso exato no objetivo. Por fim, no item 10, o aluno prova que o colega está errado ao demonstrar que cartas vermelhas em número par (como duas cartas -10) resultam em um produto positivo ($+100$), permitindo pontuar alto e vencer a partida mesmo sem possuir cartas azuis na mão.