Universidade Estadual de Londrina

RUAN RICCI DE ANDRADE

TAXA DE LUCRO E PROPENSÕES A POUPAR EM UM MODELO PÓS-KEYNESIANO COM AGENTES HETERÊGENEOS DE VIDA INFINITA E CAPITAL HUMANO

Londrina
2025

RUAN RICCI DE ANDRADE

TAXA DE LUCRO E PROPENSÕES A POUPAR EM UM MODELO PÓS-KEYNESIANO COM AGENTES HETERÊGENEOS DE VIDA INFINITA E CAPITAL HUMANO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia Regional (PPE), Mestrado, da Universidade Estadual de Londrina, como exigência para a obtenção do título de Mestre em Economia Regional.

Orientador: Prof. Dr. Renato Nozaki Sugahara

Londrina
2025

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

A553t Andrade, Ruan Ricci de.

Taxa de lucro e propensões a poupar em um modelo pós-keynesiano com agentes heterogêneos de vida infinita e capital humano / Ruan Ricci de Andrade. - Londrina, 2025.

49 f. : il.

Orientador: Renato Nozaki Sugahara.

Dissertação (Mestrado Profissional em Economia Regional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Estudos Sociais Aplicados, Programa de Pós-Graduação em Economia Regional, 2025.

Inclui bibliografia.

1. equação de Cambridge - Tese. 2. taxa de lucro - Tese. 3. propensão a poupar; capital humano - Tese. 4. modelo pós-keynesiano. - Tese. I. Sugahara, Renato Nozaki. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Estudos Sociais Aplicados. Programa de Pós-Graduação em Economia Regional. III. Título.

CDU 33

RUAN RICCI DE ANDRADE

TAXA DE LUCRO E PROPENSÕES A POUPAR EM UM MODELO PÓS-KEYNESIANO COM AGENTES HETERÊGENEOS DE VIDA INFINITA E CAPITAL HUMANO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Economia Regional (PPE), Mestrado, da Universidade Estadual de Londrina, como exigência para a obtenção do título de Mestre em Economia Regional.

BANCA EXAMINADORA

Orientador: Prof. Dr. Renato Nozaki Sugahara
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. Angelo Rondina Neto
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. Michel Augusto Santana da Paixão
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. João Gabriel de Araujo Oliveira
Departamento de Administração e Economia - Ibmec/DF
ELCMU - IBRD/the World Bank

Londrina, 20 de fevereiro de 2025.

RESUMO

ANDRADE, Ruan Ricci de. **Taxa de lucro e propensões a poupar em um modelo pós-keynesiano com agentes heterogêneos de vida infinita e capital humano**. 2025. 49 f. Dissertação (Mestrado em Economia Regional) – Centro de Estudos Sociais Aplicados, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2025.

O presente trabalho investiga a taxa de lucro e as propensões a poupar em um modelo pós-keynesiano que incorpora agentes heterogêneos de vida infinita e capital humano. O estudo estende o modelo de Faria (2001) para incluir capital humano de Lucas Junior (1988), permitindo uma análise mais abrangente dos impactos das decisões de consumo, poupança e investimento em educação dos trabalhadores e capitalistas no crescimento econômico e na acumulação de capital físico e humano. Os resultados demonstram que, mesmo com a introdução do capital humano, a taxa de lucro de equilíbrio de longo prazo continua sendo determinada pela taxa de preferência intertemporal dos agentes, independentemente da função de produção adotada. Além disso, a Equação de Cambridge mantém sua validade no modelo ao determinar a propensão a poupar dos capitalistas, reforçando a sua importância no equilíbrio econômico. A introdução do capital humano altera o problema do trabalhador representativo, aumentando sua propensão a poupar para compensar a redução temporária da renda gerada pelo investimento em educação. No entanto, os capitalistas continuam poupando mais que os trabalhadores, invalidando o "Teorema Dual" e garantindo a viabilidade da distinção entre as duas classes econômicas. A alocação ótima de tempo entre trabalho e estudo é influenciada pela taxa de lucro e pela eficiência do aprendizado. O presente trabalho não apenas reforça a viabilidade da integração entre as abordagens neoclássica e pós-keynesiana, mas também abre espaço para extensões que permitam o desenvolvimento de modelos mais abrangentes e alinhados às complexidades das economias reais.

Palavras-chave: equação de Cambridge; taxa de lucro; propensão a poupar; capital humano; modelo pós-keynesiano.

ABSTRACT

ANDRADE, Ruan Ricci de. **Rate of profit and saving propensities in a Post-Keynesian model with heterogeneous agents of infinite horizon and human capital**. 2025. 49 p. Dissertation (Master’s in Regional Economics) - Center for Applied Social Studies, State University of Londrina, Londrina, 2025.

The present study investigates the profit rate and saving propensities in a Post-Keynesian model that incorporates heterogeneous agents with infinite horizon and human capital. The study extends Faria's (2001) model to include Lucas's Junior (1988) human capital, allowing for a more comprehensive analysis of the impacts of workers' and capitalists' consumption, saving, and education investment decisions on economic growth and the accumulation of both physical and human capital. The results demonstrate that, even with the introduction of human capital, the long-run equilibrium profit rate remains determined by agents' intertemporal preference rate, regardless of the production function adopted. Moreover, the Cambridge Equation retains its validity in the model by determining capitalists' propensity to save, reinforcing its importance in economic equilibrium. The introduction of human capital alters the representative worker's problem, increasing their propensity to save to compensate for the temporary income reduction caused by education investment. However, capitalists continue to save more than workers, invalidating the "Dual Theorem" and ensuring the feasibility of distinguishing between the two economic classes. The optimal allocation of time between work and study is influenced by the profit rate and the efficiency of learning. The present study not only reinforces the feasibility of integrating neoclassical and post-Keynesian approaches but also creates room for extensions that allow for the development of more comprehensive models aligned with the complexities of real economies.

Keywords: Cambridge equation; rate of profit; propensity to save; human capital; post-keynesian model.

LISTA DE SÍMBOLOS

s	Propensão a poupar
s_t	Propensão a poupar sobre os salários
$W(t)$	Salário agregado no tempo t
$Y(t)$	Produto total no tempo t
s_p	Propensão a poupar sobre os lucros
$P(t)$	Lucro agregado no tempo t
$K(t)$	Estoque de capital agregado no tempo t
r	Taxa de lucro
g_n	Taxa de crescimento natural
P_c	Lucro agregado pertencente à classe capitalista
P_w	Lucro agregado pertencente à classe trabalhadora
s_c	Propensão a poupar dos capitalistas
s_w	Propensão a poupar dos trabalhadores
$c_c(t)$	Consumo *per capita* dos capitalistas no tempo t
ρ	Taxa de desconto intertemporal
n	Taxa de crescimento populacional
$k_c(t)$	Estoque de capital *per capita* pertencente à classe capitalista
$c_w(t)$	Consumo *per capita* dos trabalhadores no tempo t
$k_w(t)$	Estoque de capital *per capita* pertencente à classe trabalhadora no tempo t
w	Taxa de salário
b	Percentual da população total composta por trabalhadores
H_c	Hamiltoniano a valor corrente
θ_1	Preço sombra do estoque de capital *per capita* da classe capitalista
θ_2	Preço sombra do estoque de capital *per capita* da classe trabalhadora
t_p	Alíquota de imposto sobre os lucros
t_w	Alíquota de imposto sobre os salários
$l(t)$	Tempo dedicado ao lazer pela classe trabalhadora no tempo t
$k(t)$	Estoque de capital *per capita* no tempo t
$c(t)$	Consumo *per capita* no tempo t
$g(t)$	Gasto *per capita* do governo no tempo t
$A(t)$	Nível de tecnologia no tempo t

$\propto$	Elasticidade do produto em relação ao capital
$u(t)$	Tempo dedicado a produção pelos trabalhadores
$h(t)$	Estoque de capital humano *per capita* no tempo t
$N(t)$	Quantidade de trabalhadores no tempo t
h_a	Efeito externo do capital humano *per capita*
γ	Elasticidade do efeito externo do capital humano *per capita*
φ	Eficiência do aprendizado
$L(t)$	População total no tempo t
$Z(t)$	Quantidade de capitalistas no tempo t
$H(t)$	Estoque total de capital humano no tempo t
$K_c(t)$	Estoque de capital agregado pertencente à classe capitalista no tempo t
K_w	Estoque de capital agregado pertencente à classe trabalhadora no tempo t
$H_w(t)$	Estoque de capital humano total pertencente aos trabalhadores no tempo t
$y(t)$	Renda *per capita* total no tempo t
$h_w(t)$	Estoque de capital humano *per capita* da classe trabalhadora no tempo t
$y_c(t)$	Renda *per capita* da classe capitalista no tempo t
$y_w(t)$	Renda *per capita* da classe trabalhadora no tempo t
θ_3	Preço sombra do estoque de capital humano *per capita* da classe trabalhadora

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A tradição pós-keynesiana, especialmente a Escola de Cambridge, teve início com os trabalhos de Kaldor (1956) e Pasinetti (1962). O primeiro autor desenvolveu um modelo onde a distribuição de renda entre lucros e salários é fundamental para explicar como a economia pode se manter em uma trajetória de crescimento a longo prazo. Já o segundo autor adicionou classes econômicas ao modelo, obtendo resultado ainda mais gerais.

A relação que determina a taxa de juros de equilíbrio de longo prazo nos modelos de Kaldor (1956) e Pasinetti (1962) ficou conhecida posteriormente como Equação de Cambridge. Na versão de Pasinetti (1962), ela mostra que a taxa de lucro de equilíbrio de longo prazo é determinada pela propensão a poupar dos capitalistas. Além disso, a taxa de lucro é totalmente independente da função de produção adotada, bem como da propensão a poupar dos trabalhadores.

A Equação de Cambridge desempenha um papel primordial no equilíbrio econômico dentro dos modelos dos autores, pois é responsável por determinar a fatia da renda nacional que pertence aos lucros, bem como aos salários, determinando, em última instância, a poupança e consumo de equilíbrio da economia.

Após as contribuições de Kaldor (1956) e Pasinetti (1962), uma vasta gama de trabalhos foi publicada, discutindo seus resultados, aplicações ou expandindo seus modelos. Segundo Baranzini e Mirante (2013), a agenda de pesquisa pós-keynesiana da Escola de Cambridge, desenvolvida a partir dessas contribuições, pode ser dividida em oito linhas distintas.

A primeira linha de pesquisa estuda a introdução de uma taxa de juros diferenciada sobre a riqueza, rejeitando a hipótese de que, no longo prazo, a taxa de lucro obtida pelos capitalistas em seus investimentos seja igual à taxa de juros recebida pelos trabalhadores sobre suas poupanças (Baranzini; Mirante, 2013).

A segunda, segundo os autores, se preocupou com a incorporação do setor monetário, buscando superar a crítica de que tais modelos não levavam em conta o papel da moeda.

A terceira linha de pesquisa trata da inclusão do setor público, nos modelos pós-keynesianos de Cambridge, com o objetivo de entender como o governo, por meio de impostos, gastos e de dívida pública, influencia a distribuição de renda e riqueza no longo prazo.

A quarta linha, segundo Baranzini e Mirante (2013), amplia os modelos ao incorporar novas classes socioeconômicas, além dos tradicionais trabalhadores e capitalistas.

A quinta linha de pesquisa busca integrar microfundamentações da escola neoclássica aos modelos pós-keynesianos, enquanto a sexta linha investiga a evolução da distribuição de riqueza e da participação da renda entre diferentes classes socioeconômicas ao longo do tempo.

A sétima linha introduz modelos de gerações sobrepostas, analisando a transmissão de riqueza entre diferentes gerações e seus impactos na distribuição de renda no longo prazo.

Por fim, a oitava e última linha, segundo Baranzini e Mirante (2013), examina a aplicabilidade do Teorema Dual de Meade-Samuelson e Modigliani no contexto dos modelos pós-keynesianos da Escola de Cambridge.

Como pode visto pela agenda de pesquisa proposta por Baranzini e Mirante (2013), as possibilidades e problemas de pesquisa que sucederam os trabalhos de Kaldor (1956) e Pasinetti (1962) é vasta. Segundo Baranzini (1991), o principal objetivo dos trabalhos iniciais que se propuseram a incluir microfundamentos nos modelos pós-keynesianos de Cambridge era endogenizar a propensão a poupar da classe capitalista e trabalhadora, representando-as como função da taxa de juros ou outras variáveis do modelo. Com esse mesmo objetivo, Faria (2001) adaptou um modelo do tipo Ramsey (1928) para incluir agentes heterogêneos pasinettianos, trabalhadores e capitalistas.

O arcabouço do modelo de Ramsey (1928) se tornou um pilar de teoria neoclássica, pois compreende como as decisões de consumo e poupança intertemporal em uma economia, impactam o seu crescimento econômico e acumulação de capital ao longo do tempo. A junção dessas duas abordagens, como realizada por Faria (2001), permite, evidentemente, utilizar as interações entre classes econômicas Kaldor-Pasinettianas em um contexto intertemporal, onde o resultado para a economia será determinado pela soma do comportamento de consumo e poupança ao longo do tempo de duas classes distintas, sendo possível verificar como o comportamento de cada uma delas afeta a economia e o resultado de equilíbrio.

Romer (1994) discute a "controvérsia da convergência" e como modelos de crescimento endógeno podem ajudar a entendê-la. Como mostra Lucas Junior (1988), os modelos neoclássicos de crescimento, ao assumirem que a taxa de crescimento econômico é determinada exogenamente, enfrentam dificuldades em explicar as diferenças persistentes nos níveis de renda e crescimento entre países. Nesse sentido, foi necessário a introdução de conceitos de crescimento endógeno para aumentar o grau de realismo dos modelos de crescimento neoclássicos e, consequentemente, a aderência deles aos dados empíricos observados na realidade.

O capital humano é uma das formas possíveis de endogenizar parte do progresso técnico e, assim, introduzir crescimento endógeno dentro do modelo. Segundo Schultz (1961), as habilidades e conhecimentos adquiridos pelos indivíduos ao longo do tempo podem ser considerados uma forma de capital e têm um papel central no aumento da produtividade e no crescimento econômico. Nesse sentido, o capital humano pode ser entendido como o conjunto de habilidades, conhecimentos e competências adquiridas por indivíduos ao longo do tempo, que podem, por sua vez, ser acumuladas de forma similar ao capital físico, impactando a produtividade dos trabalhadores de forma positiva, haja vista que um trabalhador mais qualificado consegue realizar tarefas de forma mais eficiente.

Lucas Junior (1988), em seu artigo seminal sobre o tema, introduziu capital humano em um modelo neoclássico. No seu modelo, os agentes homogêneos da economia escolhem quanto consumir e quanto poupar para acumular capital, mas também quanto tempo dedicam ao trabalho e aos estudos para acumular capital humano.

Sendo assim, o presente trabalho estende o modelo dinâmico intertemporal de Faria (2001), adaptando-o para incluir o capital humano de Lucas Junior (1988), com o objetivo de explorar suas implicações sobre os resultados econômicos. O modelo considera dois grupos principais de agentes: trabalhadores e capitalistas. Cada grupo possui diferentes fontes de renda e comportamentos intertemporais de consumo e poupança. O resultado para a economia será o resultado da combinação das escolhas intertemporais de consumo, poupança e acúmulo de capital humano de cada uma das classes propostas. Essa abordagem é relevante porque combina elementos da teoria de crescimento econômico pós-keynesiana com microfundamentos da teoria neoclássica, buscando estender os resultados e as discussões de ambas as escolas de pensamento, de forma a permitir uma melhor compreensão dos fatores que influenciam o crescimento econômico e a distribuição de renda em economias modernas.

Nesse sentido, os resultados deste estudo buscam contribuir para a literatura econômica ao fornecer uma análise dos efeitos associados à presença do capital humano em modelos pós-keynesianos, mais especificamente no que se trata da validade da Equação de Cambridge, da determinação da taxa de lucro de equilíbrio de longo prazo e da acumulação de capital físico e humano.

Sendo assim, a presente dissertação tem como objetivo analisar a taxa de lucro e as propensões a poupar em um modelo pós-keynesiano que considera o impacto do capital humano e incorpora agentes heterogêneos Kaldor-Pasinettianos com horizonte de vida infinito.

Nesse contexto, a extensão do modelo de Faria (2001) para incluir o capital humano de Lucas Junior (1988), desenvolvida na seção 3.1 desta dissertação, insere-se principalmente na quinta linha de pesquisa proposta por Baranzini e Mirante (2013), relacionada à introdução de microfundamentos nos modelos de crescimento pós-keynesianos.

Esta dissertação é composta por quatro seções. A primeira seção é esta introdução, cujo objetivo foi contextualizar a pesquisa e os principais elementos teóricos abordados. A segunda seção aprofunda-se nos modelos pós-keynesianos Kaldor-Pasinettianos e na microfundamentação, com ênfase no trabalho de Faria (2001) e nas contribuições subsequentes que o seguiram. A terceira seção discute o papel do capital humano nas teorias de crescimento econômico neoclássicas e estende o modelo de Faria (2001) para incorporar o capital humano de Lucas Junior (1988). Por fim, a quarta seção apresenta a conclusão, sintetizando os principais resultados do estudo e sugerindo possíveis direções para pesquisas futuras.

2 MODELOS PÓS-KEYNESIANOS DE CRESCIMENTO ECONÔMICO E DISTRIBUIÇÃO DE RENDA

Segundo Oreiro (2011), historicamente, a Escola Pós-Keynesiana desenvolveu-se em duas vertentes teóricas. A primeira, associada à Escola de Cambridge, e a segunda, denominada "keynesianismo fundamentalista".

De acordo com o autor, a vertente fundamentalista enfatiza os efeitos da incerteza, tempo e moeda sobre a dinâmica econômica, rejeitando a noção de equilíbrio. Por outro lado, a vertente de Cambridge foca no crescimento econômico e na distribuição de renda, tendo origem com os trabalhos de Kaldor (1956) e Pasinetti (1962), que elaboraram modelos formais para explicar o pleno emprego e a estabilidade econômica no longo prazo.

$$s = s_t \frac{W}{Y} + s_p \frac{P}{Y} \tag{1}$$

A equação (1) representa a propensão a poupar da economia no modelo de Kaldor (1956). Em seu trabalho seminal, o autor divide a renda da economia, Y, entre lucros, P, e salários, W, atribuindo uma propensão a poupar constante específica para cada tipo de renda, s_t para os salários e s_p para os lucros.

A partir da equação (1) é possível verificar que alterações na distribuição de renda entre lucros e salários altera a propensão a poupar da economia. Esta passa a ser determinada pelas propensões a poupar dos lucros e salários, ponderadas pela participação dos lucros e salários na renda nacional.

Dessa forma, Kaldor (1956) endogenizou a propensão a poupar da economia, sendo capaz de solucionar o problema de fio-de-navalha de Harrod (1939) e Domar (1946) (Hagemann, 2009). O autor, então, demonstra que existirá uma distribuição de renda entre lucros e salários, e uma correspondente taxa de lucro, que manterá a economia em equilibro de longo prazo.

$$\frac{P}{K} = r = \frac{g_n}{s_p} \tag{2}$$

$$\frac{P}{Y} = \frac{g_n K}{s_p Y}. \tag{3}$$

Supondo que a propensão a poupar sobre os salários é zero, Kaldor (1956) chega, a partir da equação (1), nas equações (2) e (3). A equação (2) representa a taxa de lucro de equilíbrio da economia, r. De acordo com o modelo de Kaldor (1956) ela é determinada pela taxa de crescimento natural e pela propensão a poupar sobre os lucros. Sendo assim, a taxa de lucro de equilíbrio se ajusta para garantir que a poupança seja suficiente para financiar o investimento necessário ao crescimento de longo prazo. Se a economia cresce mais rapidamente, g_n maior, ou a propensão a poupar sobre os lucros é menor, a taxa de lucro deve ser maior para gerar poupança suficiente para garantir o equilíbrio.

A equação (3) representa a participação do lucro na renda nacional. Sendo assim, quanto maior a taxa de lucro, maior a participação dos lucros na renda nacional, e, consequentemente, menor a participação dos salários na renda. Alterações na taxa de lucro irão alterar a propensão a poupar média da economia, s, como pode ser visto pela equação (1). Como a propensão a poupar sobre os lucros é maior que a propensão a poupar dos salários, um aumento da participação dos lucros na renda, aumenta a propensão a poupar da economia. Da mesma forma, uma diminuição da participação dos lucros, diminui. Essa relação evidencia a importância que taxa de lucro possuí na determinação do equilíbrio na economia.

Posteriormente, a equação (2) ficou conhecida como Equação de Cambridge. Ela relaciona a taxa de crescimento econômico com a propensão a poupar e a participação dos lucros na renda, destacando a importância das distribuições de renda no processo de acumulação de capital. Além disso, ela é totalmente independente da função de produção adotada ou da propensão a poupar dos trabalhadores. A Equação de Cambridge também ressalta o papel das decisões dos agentes econômicos, especialmente dos capitalistas, no ritmo de expansão da economia.

O modelo de Kaldor (1956) utiliza uma distribuição funcional da renda. Posteriormente, Pasinetti (1962) desenvolveu um novo modelo onde é possível trabalhar com classes econômicas. Sendo assim, o autor dividiu a população da economia entre trabalhadores e capitalistas, onde o primeiro grupo recebe salários e lucros correspondentes ao seu estoque de capital e o segundo apenas lucros.

$$P = P_c + P_w \tag{4}$$

Dessa forma, os lucros são divididos entre trabalhadores e capitalistas, como pode ser visto pela equação (4), onde P_c representa o montante dos lucros que pertencente à classe capitalista e P_w, à classe trabalhadora.

$$s = \frac{s_c(P_c)}{Y} + \frac{s_w(W + P_w)}{Y} \tag{5}$$

Sendo assim, Pasinetti (1962) altera a equação (1) para a equação (5), onde s_c é a propensão a poupar dos capitalistas e s_w, dos trabalhadores. Desse modo, cada classe econômica possui uma propensão a poupar específica sobre a sua renda.

$$\frac{P}{K} = r = \frac{g_n}{s_c} \tag{6}$$

A partir da equação (5), Pasinetti (1962) chega então na sua versão da Equação de Cambridge, equação (6). A diferença para a equação original de Kaldor (1956) é de que a propensão a poupar sobre os lucros foi substituída pela propensão a poupar dos capitalistas. Sendo assim, no modelo de Pasinetti (1962), é a propensão a poupar dos capitalistas que irá determinar a taxa de lucro de equilíbrio, e, por sua vez, a participação dos lucros na renda nacional, influenciando em última instância a propensão a poupar média da economia.

Pasinetti (1962) chega a esse resultado, sem a hipótese de que a propensão a poupar dos trabalhadores é igual a zero, como havia feito Kaldor (1956), o que confere ao seu resultado uma maior generalidade.

Assim como no modelo de Kaldor (1956), a Equação de Cambridge do modelo de Pasinetti (1962) é totalmente independente da função de produção, bem como da propensão a poupar dos trabalhadores. Contudo, apesar da incapacidade da propensão a poupar dos trabalhadores em afetar a distribuição de renda entre lucros e salários, ela tem impactos na distribuição de renda e riqueza entre os dois agentes do modelo. Se s_w for suficiente alto, os trabalhadores podem no longo prazo eliminar a classe capitalista, resultado que ficou conhecido como “Teorema Dual” ou “eutanásia dos capitalistas” e surgiu com os trabalhos de Meade (1963, 1966), Meade e Hahn (1965) e Samuelson e Modigliani (1966).

O trabalho de Samuelson e Modigliani (1966) buscou expandir, esclarecer limitações e generalizar os resultados obtidos por Pasinetti (1962), analisando sua aplicabilidade em diferentes contextos, como modelos neoclássicos e alternativas com diferentes funções de produção e condições de mercado.

Os autores utilizam um modelo baseado em uma função de produção com retornos constantes de escala, explorando as dinâmicas das duas classes econômicas: capitalistas e trabalhadores. Eles derivam equações para estudar o comportamento do sistema em diferentes condições e investigam a estabilidade dos estados estacionários. Desse modo, os autores obtêm que se a propensão a poupar dos trabalhadores ultrapassar um limite crítico, a distribuição e o equilíbrio passam a ser determinados por essa propensão, e não pela dos capitalistas.

O trabalho de Samuelson e Modigliani (1966) demonstra que a microfundamentação de modelos pós-Keynesianos é possível, além de permitir a introdução de novas ferramentas e teorias advindas da microeconomia ortodoxa, possibilitando expandir a quantidade de hipóteses que podem ser adotadas e, assim, aumentar a extensão dos resultados teóricos. Como mostra Baranzini (1991), a microfundamentação não só é compatível com modelos pós-Keynesianos, bem como pode ser realizada sem que o modelo perca suas qualificações mais importantes.

2.1 Microfundamentos em Modelos de Crescimento Econômico Pós-Keynesianos

Posteriormente a publicação do artigo de Pasinetti (1962), diversos autores se envolveram na tarefa de fornecer microfundamentos da escola neoclássica ao modelo ou extensões dele, começando, segundo Baranzini (1991), com o trabalho de Samuelson e Modigliani (1966). De acordo com o autor, o principal objetivo desses trabalhos iniciais era endogenizar a propensão a poupar da classe capitalista e trabalhadora, representando-as como função da taxa de juros ou outras variáveis do modelo.

Procurando contribuir para essa literatura, Faria (2001), Faria e Araujo (2004) e Wei e Araujo (2009) adaptaram um modelo do tipo Ramsey (1928) para incluir agente heterogêneos com o objetivo de flexibilizar as propensões a poupar dos trabalhadores e capitalistas. Segundo Groth (2010), o modelo de Ramsey (1928) se tornou um dos pilares da teoria de crescimento neoclássica após ser fundido com o modelo de Solow (1956).

Em seu artigo original, Ramsey (1928) aborda o problema de quanto uma nação deve poupar de sua renda para maximizar o seu bem-estar ao longo do tempo. O modelo consiste na resolução de um problema de maximização intertemporal, onde o resultado da economia em termos de equilíbrio de longo prazo, consumo e acumulação de capital ao longo do tempo são resultados da maximização de uma função de utilidade agregada da utilidade do consumo e da desutilidade. Essa função de utilidade é maximizada em um horizonte infinito de tempo.

Desse modo, Ramsey (1928) consegue endogenizar a propensão a poupar da economia, mostrando que ela se ajusta dinamicamente. O autor também obtém que a taxa de juros no longo prazo é determinada pela taxa de preferência intertemporal.

Após a contribuição de Ramsey (1928), os primeiros trabalhos de destaque que lidaram com problemas similares foram os de Koopmans (1963) e Cass (1966), que ajudaram a estruturar a abordagem neoclássica para os modelos macroeconômicos de crescimento (Chu, 2018). Koopmans (1963) estendeu o modelo de Ramsey (1928), discutindo o problema de maximizar o bem-estar social em um horizonte de longo prazo. Diferentemente de Ramsey (1928), que evitava incluir uma taxa de desconto explícita (considerando-a uma escolha ética discutível), Koopmans (1963) explicitou a necessidade de utilizar uma função utilidade intertemporal descontada para refletir as preferências sociais entre consumo presente e futuro, justificando sua utilização como uma forma de simplificar e tornar o problema resolvível em termos práticos.

A taxa de desconto reflete as preferências sociais pelo consumo presente em relação ao futuro, influenciando diretamente as trajetórias de consumo ótimo. A taxa de desconto em modelos intertemporais é semelhante à utilizada em análises de investimentos, pois tem o objetivo de trazer valores futuros a valor presente. Enquanto em investimentos ela é aplicada a valores monetários, no estudo em questão, ela é utilizada para descontar a utilidade ao longo do tempo.

Dessa forma, quanto maior a taxa de desconto, maior é a valorização da utilidade do consumo presente pela sociedade. Por outro lado, uma taxa mais baixa indica maior preocupação com o consumo futuro. Assim, uma taxa de desconto elevada favorece o consumo imediato e reduz a poupança, resultando em um crescimento mais lento. Em contraste, uma taxa de desconto menor prioriza o bem-estar das gerações futuras, incentivando maior poupança e investimento no presente.

Os trabalhos de Ramsey (1928), Koopmans (1963) e Cass (1966), formaram a base do chamado modelo Ramsey-Cass-Koopmans. Embora eficaz para simplificar a análise, o agente representativo desse tipo de modelo ignora a heterogeneidade entre indivíduos e questões de distribuição de renda, limitando o alcance do modelo em capturar desigualdades ou dinâmicas sociais. Nesse sentido, o artigo de Faria (2001) analisa a relevância da Equação de Cambridge dentro de um modelo dinâmico, baseado na adaptação do modelo de Ramsey (1928) com agentes heterogêneos pasinettianos. A principal motivação para a utilização do modelo de Ramsey (1928) é relaxar a hipótese de propensões a poupar fixas, até então tradicionais em modelos Kaldor-Pasinettianos, e, assim, permitir que os agentes determinem seu consumo e poupança ao longo do tempo.

Desse modo, assim como Pasinetti (1962), o modelo de Faria (2001) divide a população em duas classes econômicas: capitalistas, cuja única fonte de renda é o rendimento do seu estoque de capital, e trabalhadores, cuja fonte de renda advém do salário recebido pela sua atividade laboral e dos lucros provenientes do rendimento do seu estoque de capital. Cada classe é representada por um agente representativo que decide entre consumir e poupar para maximizar a sua função de utilidade intertemporal em um horizonte infinito de tempo, sujeito às suas restrições orçamentárias.

Sendo assim, no modelo de Faria (2001), o capitalista representativo enfrenta o seguinte problema:

$$Max \int_0^{\infty} U(c_c(t))\, e^{-(\rho-n)t} dt$$

Sujeito à:

$$\dot{k_c}(t) = rk_c(t) - c_c(t) - nk_c(t) \tag{7}$$

A função de utilidade do capitalista representativo, denotada por $U(c_c(\mathrm{t}))$, por hipótese, é estritamente côncava e crescente em relação ao consumo da classe capitalista no tempo t, representado por $c_c(t)$. A taxa de desconto intertemporal da classe capitalista é representada por ρ, e, no modelo, é assumida como igual à da classe trabalhadora. A taxa de crescimento populacional é dada por n, enquanto $k_c(t)$ é o estoque de capital *per capita* possuído pela classe capitalista no tempo t e r corresponde à taxa de lucro. Em suma, o capitalista representativo precisa maximizar a sua função de utilidade instantânea, sujeito à equação dinâmica do seu estoque de capital *per capita*, equação (7).

De forma similar, o trabalhador representativo enfrenta o seguinte problema:

$$Max \int_0^{\infty} U(c_w(t))\, e^{-(\rho-n)} dt$$

Sujeito à:

$$\dot{k_w}(t) = rk_w(t) + wb - c_w(t) - nk_w(t)$$

Onde $U(c_w(\mathrm{t}))$ representa a função de utilidade do trabalhador representativo, a qual, por hipótese, é uma função estritamente côncava e crescente em relação ao consumo da classe trabalhadora no tempo t, denotado por $c_w(t)$. A taxa de desconto intertemporal da classe trabalhadora é dada por ρ, enquanto $k_w(t)$ é o estoque de capital *per capita* possuído pela mesma classe no tempo t e wb é o seu salário *per capita*.

O resultado para essa economia será a soma do comportamento da classe capitalista e trabalhadora, considerando suas decisões de consumo e acumulação de capital ao longo do tempo.

$$H_c = U(c_c(t)) + \theta_1(rk_c(t) - c_c(t) - nk_c(t)) \tag{8}$$

$$H_c = U(c_w(t)) + \theta_2(rk_w(t) + wb - c_w(t) - nk_w(t)) \tag{9}$$

Resolvendo os Hamiltonianos a valores correntes, H_c, da classe capitalista, equação (8), e da classe trabalhadora, equação (9), Faria (2001) obtém que:

$$r = \rho \tag{10}$$

$$s_c = \frac{n}{r} \tag{11}$$

Sendo assim, no equilíbrio de longo prazo, a taxa de lucro é determinada pela taxa de preferência intertemporal dos agentes, equação (10), assim como é padrão nos modelos do tipo Ramsey (1928), e que a Equação de Cambridge irá determinar a propensão a poupar da classe capitalista, equação (11).

Desse modo, de acordo com Faria (2001), no equilíbrio de longo prazo, a taxa de lucro é determinada pela taxa de preferência intertemporal dos agentes, e não pela Equação de Cambridge, como originalmente proposto no "paradoxo de Pasinetti". A Equação de Cambridge, no entanto, é válida no modelo, mas seu papel é restrito à determinação da propensão a poupar dos capitalistas. Em outras palavras, ela endogeniza a propensão a poupar dessa classe. Além disso, Faria (2001) também destaca que o resultado principal do seu modelo implica que a taxa de lucro de longo prazo é independente de características específicas da função de produção, como a produtividade marginal do capital ou qualquer outro parâmetro relacionado à produção, assim como em Pasinetti (1962) e vários modelos que o seguiram.

Outro resultado destacado por Faria (2001) diz respeito a "eutanásia dos capitalistas" ou "equilíbrio dual", que diz que se s_w for suficientemente alto, os trabalhadores podem no longo prazo eliminar a classe capitalistas do modelo.

Do equilíbrio de longo prazo, Faria (2001) obtém:

$$s_w = \frac{nk_w(t)}{rk_w(t)+wb} \tag{12}$$

A equação (12) representa a propensão a poupar dos trabalhadores no equilíbrio de longo prazo, que é inferior à propensão a poupar dos capitalistas, dada pela equação (11). Esse resultado, no modelo, inválida o Teorema Dual proposto por Meade (1963, 1966), Meade e Hahn (1965) e Samuelson e Modigliani (1966).

Em resumo, o artigo de Faria (2001) posiciona seus resultados dentro de uma linha de estudos que integra elementos neoclássicos e pós-keynesianos. A inclusão de agentes heterogêneos pasinettianos no arcabouço do modelo de Ramsey (1928) é bem-sucedida e enriquece o debate teórico.

Posteriormente, seguindo a abordagem de Faria (2001), Faria e Araujo (2004) estendem o modelo para incluir a atividade governamental, com o objetivo de analisar como a introdução de *déficits* ou *superávits* temporários das contas públicas afetam a distribuição de renda entre lucros e salários. A extensão dos autores contribui para a discussão que teve início com o trabalho de Fleck e Domenghino (1987).

Fleck e Domenghino (1987) ampliaram o modelo original de Pasinetti adicionando atividades governamentais (como impostos e gastos públicos) e consideraram diferentes situações de balanço orçamentário (*superávit*, *déficit* e equilíbrio). Além disso, incluíram também o impacto do comércio exterior. Como resultado, os autores obtiveram que a Equação de Cambridge revisada demonstra que a versão original de Pasinetti (1962) é um caso especial, aplicável somente em cenários sem atividade governamental e sem comércio exterior. Sendo assim, segundo os autores, em um modelo pós-keynesiano ampliado, os resultados mostram que a poupança dos trabalhadores não pode ser desconsiderada.

O artigo de Fleck e Domenghino (1987) gerou uma série de publicações discutindo a validade da Equação de Cambridge quando o governo com orçamento desequilibrado é adicionado ao modelo.

Faria e Araujo (2004) introduzem um agente governamental ao modelo de Faria (2001), que financia seus gastos através da tributação de lucros, t_p, e salários, t_w. O governo divide a sua arrecadação entre consumo e investimento em capital próprio, podendo incorrer em *déficits* ou *superávits* temporários.

Resolvendo os problemas do capitalista e do trabalhador representativo com as alterações necessárias, Faria e Araujo (2004), no equilíbrio de longo prazo, obtiveram:

$$r = \frac{\rho}{(1-t_p)} \tag{13}$$

$$s_c = \frac{n}{(1-t_p)r} \tag{14}$$

$$s_w = \frac{nk_w(t)}{(1-t_p)rk_w(t)+(1-t_w)wb} \tag{15}$$

Sendo assim, como resultado, Faria e Araujo (2004) concluem que no equilíbrio de longo prazo a taxa de lucro, representada pela equação (13), é determinada pela taxa de preferência intemporal, tal como em Faria (2001), porém, agora, ajustada pela tributação sobre os lucros. O formato da Equação de Cambridge, equação (14), é similar as obtidas em Steedman (1972) e Dalziel (1989) utilizando a abordagem pasinettiana tradicional. Contudo, ela não determina a taxa de lucro, mas sim a propensão a poupar da classe capitalista, assim como no modelo de Faria (2001). Em relação ao Teorema Dual, Faria e Araujo (2004) também obtém que no equilíbrio de longo prazo a propensão a poupar dos capitalistas é maior que as dos trabalhadores, dada pela equação (15).

Além disso, como resultado, Faria e Araujo (2004) obtém que a distribuição de renda entre lucros e salários, conforme estabelecida pela Equação de Cambridge, não é afetada por *déficit*s ou *superávits* governamentais transitórios. Este resultado, apoia as conclusões obtidas por Dalziel (1989) e outros autores na discussão iniciada após a publicação do artigo de Fleck e Domenghino (1987).

Em termos de política tributária, é interessante destacar que Faria e Araújo (2004) concluem que somente os impostos sobre lucros influenciam a taxa de lucro, impactando assim o acúmulo de capital e a produção, enquanto a tributação sobre salários não exerce efeito sobre essas variáveis econômicas. Esse resultado é um indicativo da possível presença do chamado teorema de Chamley-Judd no modelo.

O teorema de Chamley-Judd tem origem com os trabalhos de Chamley (1985, 1986) e Judd (1985). Ele estabelece que, sob certas condições, a taxa ideal de tributação sobre os lucros no longo prazo é zero, pois a tributação dos rendimentos do capital pode gerar distorções que reduzem o bem-estar intertemporal. Essa conclusão é surpreendente e controversa, pois desafia a intuição convencional de que tributar os lucros pode ser necessário para financiar o setor público e reduzir as desigualdades.

Nesse sentido, Wei e Araujo (2009) estende o modelo de Faria e Araujo (2004) para incluir um agente governamental, cujo objetivo é maximizar as funções de utilidade intertemporal do trabalhador e capitalista representativo. A investigação foca na definição de taxações ótimas sobre lucros e salários, alinhando decisões individuais e políticas públicas.

Sendo assim, no modelo de Wei e Araujo (2009) o problema do governo representativo é:

$$Max \int_0^\infty [U(c_c(t)) + U(c_w(t), l(t))]\, e^{-(\rho-n)t} dt$$

Sujeito à:

$$\dot{k}(t) = f\big(k(t)\big) + c(t) - g(t) - nk(t)$$

Onde $f(k(t))$ representa o produto *per capita* da economia no tempo t, $g(t)$ são os gastos *per capita* do governo, definidos exogenamente, e $l(t)$ é o tempo dedicado ao lazer pela classe trabalhadora no tempo t. Esta última variável foi introduzida ao modelo pelos autores para aumentar seu grau de realismo.

Resolvendo o problema do governo representativo, Wei e Araujo (2009) obtém que no longo prazo a taxa ótima de imposto sobre os lucros é zero, enquanto a taxação sobre os salários é positiva. Além disso, os autores também concluem em seu trabalho que, assim como Faria (2001) e Faria e Araujo (2004), o Teorema Dual não se aplica ao modelo, haja vista que $s_c > s_w$, e que a Equação de Cambridge continua determinando a propensão a poupar dos capitalistas.

O resultado a respeito da política tributária ótima de Wei e Araujo (2009) está, portanto, em linha com o proposto pelo teorema de Chamley-Judd. Contudo, em relação a esse teorema, existem estudos que questionam a universalidade dessa conclusão, sugerindo que pode ser ideal manter impostos positivos sobre o capital, mesmo no longo prazo, como demonstrado por Jones, Manuelli e Rossi (1997). Os autores desafiam o teorema de Chamley-Judd com a inclusão de capital humano ao modelo, o que, segundo eles, adiciona um componente de estoque, fazendo com que a ideia proposta de que as alíquotas de impostos sobre estoques devem ser nulas, enquanto sobre fluxos devem ser não nulas, não se aplique.

Nesse sentido, a introdução de capital humano confere mais realismo ao modelo, além de alterar os seus resultados. Isso, por sua vez, levanta questionamentos a respeito dos impactos da introdução do capital humano na tributação ótima no modelo de Wei e Araujo (2009), além dos impactos na versão mais simples de Faria (2001), em resultados chaves como a taxa de lucro de equilíbrio de longo prazo, a Equação de Cambridge, a validade do Teorema Dual e a distribuição de renda.

3 CAPITAL HUMANO E CRESCIMENTO ECONÔMICO

Segundo Romer (1994), a teoria do crescimento endógeno engloba uma variedade de modelos que explicam o crescimento econômico como resultado de decisões e dinâmicas internas ao próprio sistema econômico, sem depender exclusivamente de fatores exógenos, como um progresso tecnológico arbitrário. Diversos desses modelos enfatizam o papel do capital humano como um fator determinante no avanço tecnológico, influenciando diretamente a taxa de crescimento econômico.

Schultz (1961) discute a ideia de que as habilidades e os conhecimentos adquiridos são uma forma de capital, que, por sua vez, resulta de investimentos deliberados, como em educação e treinamento. Essas habilidades possuem valor econômico porque aumentam a produtividade e os rendimentos dos indivíduos, assim como contribuem para o crescimento econômico geral. Nesse sentido, o capital humano pode ser entendido como o conjunto de habilidades, conhecimentos e competências adquiridas por indivíduos ao longo do tempo, que podem ser acumuladas de forma similar ao capital físico, impactando a produtividade dos trabalhadores de forma positiva.

Schultz (1961) examina dados e exemplos históricos para demonstrar como o capital humano contribui para o crescimento econômico. Segundo o autor, o capital humano é provavelmente o principal responsável pelo aumento da produtividade, até mais do que o capital físico.

Romer (1994) discute a evolução da teoria de crescimento endógeno, diferenciando-a do modelo neoclássico tradicional, que trata o crescimento econômico como um fenômeno exógeno. O autor aborda duas narrativas principais sobre a origem dessa teoria: a "controvérsia da convergência", que analisa as diferenças no crescimento entre países ricos e pobres; e a necessidade de abandonar o conceito de competição perfeita para modelar adequadamente o crescimento.

Dentro do arcabouço do tradicional modelo de Solow (1956), a convergência refere-se à ideia de que as economias mais pobres, com menor estoque de capital por trabalhador, tendem a crescer mais rapidamente do que economias mais ricas, aproximando-se do mesmo nível de renda *per capita* no longo prazo. Contudo, diversos trabalhos observam que dados empíricos mostram que a convergência absoluta não ocorre consistentemente entre países, especialmente quando se considera um conjunto amplo de economias, incluindo as mais pobres (Romer, 1994).

Ainda no tradicional modelo de Solow (1956), grande parte das explicações das taxas de crescimento econômico vêm de uma variável exógena, o progresso técnico. Segundo Lucas Junior (1988), existem enormes disparidades nos níveis de renda e taxas de crescimento de diferentes países, que não conseguem ser explicadas de forma satisfatória pelo modelo, o que mostra a necessidade de uma teoria robusta para organizar esses fatos e compreender melhor as oportunidades e limitações do crescimento. Nesse sentido, ele propõe usar modelos neoclássicos como base, mas sugere adaptações para incluir o papel do capital humano, acumulado por meio da educação e do aprendizado, como motor do desenvolvimento econômico.

Lucas Junior (1988) define o estudo do desenvolvimento econômico como a tarefa de explicar os padrões observados nos níveis e taxas de crescimento da renda *per capita* em diferentes países ao longo do tempo. Para esse propósito, o autor utiliza um problema de maximização intertemporal no estilo de Ramsey (1928). Por esse motivo e por sua destacada relevância acadêmica, o modelo de Lucas Junior (1988) foi a principal referência utilizada para estender o modelo de Faria (2001) para incluir capital humano.

$$Y(t) = A(t)K(t)^{\propto}[u(t)h(t)N(t)]^{1-\propto}h_a(t)^{\gamma} \tag{16}$$

A equação (16) é a função de produção utilizada por Lucas Junior (1988), onde $A(t)$ é o nível de tecnologia da economia no tempo t, $K(t)$ é o estoque de capital no tempo t, $u(t)$ é o tempo dedicado a produção no tempo t, $h(t)$ é o estoque de capital humano *per capita* no tempo t, $N(t)$ é número de trabalhadores no tempo t, $h_a(t)$ é o efeito externo do capital humano no tempo t e $\propto$ e γ são parâmetros de elasticidade da função de produção. O termo ${h_a}^{\gamma}$ tem como função capturar as externalidades positivas da acumulação de capital humano, de modo a capturar os efeitos positivos que o nível médio de conhecimento de uma sociedade exerce sobre a produtividade dos fatores.

Lucas Junior (1988) define o capital humano como o nível geral de habilidade de um trabalhador. Um trabalhador com mais capital humano é mais produtivo do que outro com menos, sendo sua produtividade proporcional ao nível de capital humano que possui. Assim, o capital humano é tratado como um ativo que pode ser acumulado ao longo do tempo.

$$\dot{h}(t) = h(t)\varphi(1 - u(t)) \tag{17}$$

A equação (17) mostra como o estoque de capital humano *per capita* varia no modelo de Lucas Junior (1988). De acordo com o autor, a variação do estoque de capital humano *per capita,* $\dot{h}(t)$, é proporcional ao nível possuído desse fator, $h(t)$, refletindo um efeito cumulativo onde os indivíduos aprendem mais rápido quanto maior for o seu estoque de capital humano. Além disso, o crescimento depende do tempo dedicado aos estudos, $(1-u(t))$, representando um *trade-off* entre adquirir habilidades e participar da produção atual. Já φ mede a eficiência do aprendizado, que, por hipótese, possui retornos constantes. A hipótese de Lucas Junior (1988) referente à φ é crucial para sustentar o crescimento econômico endógeno sem a necessidade de progresso tecnológico exógeno, pois permite que a economia experimente crescimento contínuo à medida que a população equilibra produção imediata e o investimento em capital humano.

A inclusão do capital humano no modelo de Lucas Junior (1988) permite explicar o crescimento econômico sustentado de forma endógena, sem depender exclusivamente de progresso tecnológico exógeno, além de ajudar a justificar disparidades persistentes de renda entre países.

Mankiw, Romer e Weil (1992) examinaram a validade do modelo de crescimento de Solow (1956) em relação às diferenças internacionais nos padrões de vida. No modelo tradicional, as taxas de poupança e crescimento populacional determinam o nível de renda no estado estacionário. Utilizando evidências empíricas, os autores concluem que o modelo original prevê corretamente a direção dos efeitos dessas variáveis, porém superestima os seus impactos.

Para corrigir isso, Mankiw, Romer e Weil (1992) propõem um modelo ampliado que inclui capital humano. Como resultados, os autores mostraram que o modelo de Solow ampliado com capital humano oferece uma explicação mais robusta para as variações na renda *per capita*. Além disso, a inclusão do capital humano melhora a precisão das previsões do modelo, ajustando as estimativas do impacto da poupança e do crescimento populacional sobre a renda. A análise dos autores revelou que o modelo ampliado é consistente com a "convergência condicional", onde países com características similares em taxas de poupança e crescimento populacional convergem para níveis semelhantes de renda *per capita*, embora em uma velocidade mais lenta do que a prevista pelo modelo tradicional.

Independentemente da controvérsia da convergência, Romer (1994), Lucas Junior (1988) e Mankiw, Romer e Weil (1992) mostram, com seus trabalhos, que o capital humano é um fator essencial para corrigir os desvios encontrados no modelo com crescimento exógeno.

Com base nesses resultados, na seção 3.1 estende-se o modelo de Faria (2001) para incluir o capital humano, a fim de analisar como a introdução desse fator altera os mecanismos de distribuição de renda e acumulação de riqueza do modelo original.

3.1 Inclusão de Capital Humano em um Modelo Pós-Keynesiano de Crescimento Econômico e Distribuição de Renda com Agentes Heterogêneos de Vida Infinita

Como já explicitado anteriormente, o modelo desta seção é uma extensão do modelo original de Faria (2001), com objetivo de introduzir capital humano a ele. Nesse sentido, as hipóteses e estrutura do modelo a seguir seguem a abordagem inicial do autor, com diferenças que serão explicitadas ao longo do texto.

Sendo assim, seguindo Faria (2001), a população total, $L(t)$, é dividida entre capitalistas e trabalhadores. Como em Pasinetti (1962), o primeiro grupo, representados por $Z(t)$, são definidos como aqueles agentes cuja renda advém exclusivamente de lucros, enquanto os trabalhadores, representados por $N(t)$, tem a renda proveniente de lucros e salários. Portanto, têm-se:

$$L(t) = Z(t) + N(t)$$

$$N(t) = bL(t) \tag{18}$$

$$0 < b < 1$$

Dessa forma, conforme a equação (18), os trabalhadores representam uma fração b da população total e, consequentemente, os capitalistas representam a fração $(1 - b)$.

A intenção de utilizar agentes heterogêneos é de representar melhor os diferentes grupos de classe dentro da economia, que, por sua vez, possuem diferentes comportamentos de consumo, poupança e investimento. Essa distinção permite analisar como o comportamento desses agentes irá afetar o crescimento e a distribuição de renda da economia.

Em relação ao crescimento populacional, supõe-se que a população, bem como cada classe do modelo, irá crescer a uma taxa exógena n:

$$\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = \frac{\dot{Z}(t)}{Z(t)} = \frac{\dot{N}(t)}{N(t)} = n$$

Para estender o modelo original de Faria (2001), incorpora-se capital humano à função de produção da economia. Por hipótese, essa função de produção é bem-comportada e apresenta retornos constantes de escala.

$$Y(t) \; = \; F\,(K(t), H(t)) \tag{19}$$

$$K(t) \; = \; K_w(t) + K_C(t) \tag{20}$$

$$H(t) = h(t)N(t)u(t) \tag{21}$$

$$0 < u(t) < 1$$

A equação (19) indica que o produto total da economia no tempo t, representado por $Y(t)$, é determinado pela combinação entre o capital físico, $K(t)$, e o capital humano, $H(t)$, disponíveis naquele período. A equação (20) desagrega o capital físico em dois componentes: o capital próprio dos trabalhadores, e o capital pertencente aos capitalistas. Por sua vez, a equação (21) define o capital humano, $H(t)$, como o produto do nível médio de capital humano por trabalhador, $h(t)$, pelo número de trabalhadores disponíveis, $N(t)u(t)$, ou, o que seria equivalente, pela quantidade total de tempo dedicado para a produção.

A fração do tempo que cada trabalhador dedica à atividade laboral é representado pela variável $u(t)$. A parcela complementar, $(1 - u(t))$, corresponde ao tempo alocado pelos trabalhadores para a aquisição de capital humano. Dessa forma, como é característico em alguns modelos que incorporam capital humano, como o de Lucas Junior (1988), existe um *trade-off* entre o tempo dedicado ao trabalho e o tempo investido em educação ou treinamento. Assim, o trabalhador enfrenta uma escolha intertemporal: dedicar-se integralmente ao trabalho, recebendo um salário maior no período t, ou sacrificar parte desse salário atual para investir no desenvolvimento de capital humano, visando um rendimento mais elevado no futuro.

É importante destacar outra hipótese relevante do modelo: considerando que apenas os trabalhadores atuam diretamente na produção de bens e serviços, eles são os únicos com autonomia para adquirir capital humano. No mundo real, é evidente que a classe capitalista também pode se qualificar e obter algum nível de capital humano, o que pode influenciar a atividade econômica, seja de forma direta ou por meio de externalidades positivas.

No entanto, no modelo, a classe capitalista é caracterizada como vivendo apenas da renda dos seus lucros, sem participação direta na produção de bens e serviços. Como o capital humano é definido como um fator que aumenta a produtividade da força de trabalho, mesmo que o capitalista possua maior instrução, ele não contribuiria diretamente para a produção.

Dessa forma, por simplicidade, o modelo assume que apenas os trabalhadores possuem e podem acumular capital humano:

$$H(t) = H_w(t)$$

Essa suposição reforça a ideia de que o desenvolvimento econômico está ligado ao investimento em educação e treinamento da força de trabalho, pois são os trabalhadores que exercem a atividade laboral e detêm o capital humano necessário para impulsionar a produtividade.

$$y(t) = \frac{Y(t)}{L(t)} = F(k(t), h(t), u(t), b) = F(k_c(t) + k_w(t), h_w(t), b) \tag{22}$$

A equação (22) representa a função de produção em termos *per capita* no tempo t, onde $k_c(t)$ é o estoque de capital *per capita* dos capitalistas, $k_w(t)$ é o estoque de capital *per capita* dos trabalhadores e $h_w(t)$ representa o estoque de capital humano *per capita* que pertence à classe trabalhadora, por hipótese, igual a $h(t)$.

$$Y(t) = P(t) + W(t) \tag{23}$$

$$Y(t) = rK_C(t) + rK_w(t) + wN(t)u(t)$$

Da identidade da renda nacional, equação (23), tem-se que a renda da economia é dividida entre lucros, $P(t)$, e salários, $W(t)$. Como destacado no início da seção, os capitalistas foram caracterizados como indivíduos cuja renda é derivada dos lucros associados ao seu estoque de capital. Enquanto isso, os trabalhadores foram definidos como aqueles cuja renda é composta tanto pelos rendimentos de capital quanto pelos salários recebidos em função de sua atividade laboral. Portanto, todo o montante de salário pertence aos trabalhadores, $wN(t)u(t)$, e o lucro total da economia é dividido entre aqueles que pertencem à classe capitalista, $rK_C(t)$, e à classe trabalhadora, $rK_w(t)$.

$$y_c(t) = rk_c(t) \tag{24}$$

$$y_w(t) = rk_w(t) + wbu(t) \tag{25}$$

Sendo assim, por definição, a renda *per capita* dos capitalistas, $y_c(t)$, e dos trabalhadores, $y_w(t)$, é representada pelas equações (24) e (25), respectivamente. Onde r é a taxa de lucro que irá remunerar os estoques de capital e w é a taxa de salário. Da equação (25) é possível verificar o efeito do *trade-off* na escolha do tempo dedicado a produção ao invés de tempo dedicado ao aprendizado. No tempo t, quanto maior o tempo dedicado ao estudo, menor será o número de horas dedicado a produção e, consequentemente, menor será a renda recebida pelo trabalhador como forma de salário. Desse modo, o trabalhador escolhe receber um salário menor no período presente para possuir uma taxa maior de salário no futuro.

Assim como em Faria (2001), assume-se que existem diversas firmas idênticas, que tomam o preço do capital e do trabalho como dado, de modo que a maximização de lucros da firma implica que:

$$r = F_k(k_c(t) + k_w(t), h_w(t), u(t), b) \tag{26}$$

$$wbu(t) = F(k_c(t) + k_w(t), h_w(t), u(t), b) - rk(t) \tag{27}$$

A equação (26) estabelece que a taxa de lucro deve ser igual à produtividade marginal do capital, enquanto a equação (27) define o salário *per capita* como o valor que resta da renda nacional após a remuneração do capital. A inclusão do capital humano na função de produção sendo definido, como em Lucas Junior (1988), como uma variável que aumenta a produtividade dos trabalhadores, tem como resultado, por consequência, em um aumento da produtividade marginal do capital e do trabalho. Sendo assim, para uma mesma quantidade de capital e trabalho a taxa de lucro e salário *per capita* são maiores do que caso o capital humano estivesse ausente do modelo.

Desde que o modelo possuí agora duas variáveis de estoque, sendo elas o estoque de capital e o estoque de capital humano, é necessário estabelecer, portanto, as equações dinâmicas dessas duas grandezas. Elas irão mostrar como essas duas variáveis se acumulam ao longo do tempo.

Primeiramente, em relação a variação do estoque de capital *per capita* total da economia, este será resultado da acumulação de capital *per capita* dos capitalistas e dos trabalhadores:

$$\dot{k}(t) = \dot{k_c}(t) + \dot{k_w}(t) \tag{28}$$

$$\dot{k_c}(t) = rk_c(t) - c_c(t) - nk_c(t) \tag{29}$$

$$\dot{k_w}(t) = rk_w(t) + wbu(t) - c_w(t) - nk_w(t) \tag{30}$$

Sendo assim, a variação do estoque de capital *per capita* dos capitalistas, equação (29), vai ser o resultado da renda *per capita* dessa classe, excluído o seu consumo e o efeito de diluição demográfica do crescimento populacional sobre o seu estoque de capital *per capita*. Da mesma forma, como pode ser visto pela equação (30), acontece para a variação do estoque de capital *per capita* dos trabalhadores. Desse modo, a partir da equação (28), tem-se, portanto, que a variação do estoque de capital *per capita* total da economia vai ser igual a renda *per capita* de ambas as classes, excluído os seus consumos *per capita* e o efeito de diluição demográfica.

A equação dinâmica da acumulação do capital *per capita* dos trabalhadores, equação (30), irá diferir da do modelo de Faria (2001) devido à inclusão de $u(t)$, que reduz o salário *per capita* dos trabalhadores no período t à medida que estes dedicam parte do seu tempo total disponível à aquisição de capital humano.

Em relação à equação dinâmica de acumulação do estoque de capital humano *per capita*, adota-se a formulação do modelo de Lucas Junior (1988), que, por sua vez, se inspirou nos trabalhos de Uzawa (1965) e Rosen (1976).

$$\dot{h}(t) = \dot{h_w}(t) = h_w(t)\varphi(1 - u(t)) \tag{31}$$

A equação (31) é a mesma utilizada por Lucas Junior (1988), com a diferença de que o modelo, agora, possuí duas classes, e apenas os trabalhadores são permitidos de adquirirem capital humano. Essa equação diz que a variação do estoque de capital *per capita* será uma função do nível de capital humano *per capita* no tempo t, indicando que, quanto maior o estoque de capital humano, mais rapidamente ele irá crescer, multiplicado pela fração do tempo que os trabalhadores decidem dedicar aos estudos no tempo t e φ, que mede a eficiência do aprendizado.

Assim como em Lucas Junior (1988), supõe-se que φ possui retornos constantes. Esta hipótese é importante, pois $\frac{\dot{h}_w(t)}{h_w(t)}$ não tende a zero à medida que $h_w(t)$ aumenta, fazendo com que a economia possa experimentar crescimento sustentado sem depender de fatores exógenos, como a taxa de progresso tecnológico no tradicional modelo de Solow (1956).

O resultado para essa economia será fruto das decisões de consumo e poupança intertemporal dos trabalhadores e capitalistas. Com as hipóteses do modelo bem definidas, pode-se voltar, agora, à resolução dos problemas dos agentes representativos.

Começando pelo problema do capitalista representativo, este não possuí alteração em relação a versão original de Faria (2001). Sendo assim, o problema continua sendo:

$$Max \int_0^{\infty} U(c_c(t))\, e^{-(\rho-n)t} dt$$

Sujeito à:

$$\dot{k_c}(t) = rk_c(t) - c_c(t) - nk_c(t) \tag{32}$$

Onde $U(c_c(t))$ representa a função de utilidade instantânea do capitalista representativo, por hipótese, estritamente côncava e crescente em relação ao consumo do agente, $c_c(t)$. A taxa de desconto intertemporal dessa classe é dada por ρ, que, na presente versão do modelo, é idêntica à taxa de desconto intertemporal da classe trabalhadora. Em suma, o capitalista representativo precisa maximizar a sua função de utilidade instantânea, escolhendo seu consumo, sujeito à equação dinâmica de acumulação do estoque de capital *per capita* em sua posse, equação (32).

Já em relação ao problema do trabalhador representativo, este sofre alterações com a inclusão do capital humano. Em termos matemáticos, a resolução do problema do trabalhador representativo agora envolve duas variáveis de controle, consumo e tempo dedicado ao trabalho, e duas variáveis de estado, capital e capital humano.

Sendo assim, o problema do trabalhador pode ser formulado da seguinte forma:

$$Max \int_0^{\infty} U(c_w(t))\, e^{-(\rho-n)t} dt$$

Sujeito à:

$$\dot{k_w}(t) = rk_w(t) + wbu(t) - c_w(t) - nk_w(t) \tag{33}$$

$$\dot{h}(t) = \dot{h_w}(t) = h_w(t)\varphi(1 - u(t)) \tag{34}$$

Onde $U(c_w(t))$ representa a função de utilidade instantânea da classe trabalhadora, que também, por hipótese, é estritamente côncava e crescente em relação ao consumo dessa mesma classe, $c_w(t)$. A taxa de desconto intertemporal dos trabalhadores é dada por ρ.

Dessa forma, o trabalhador representativo precisa maximizar a sua função de utilidade instantânea, escolhendo $c_w(t)$ e $u(t)$, sujeito à equação dinâmica de acumulação do estoque de capital *per capita* em sua posse, equação (33), e à equação dinâmica de acumulação de capital humano *per capita*, equação (34).

$$H_c = U(c_c(t)) + \theta_1(rk_c(t) - c_c(t) - nk_c(t)) \tag{35}$$

$$H_c = U(c_w(t)) + \theta_2\big(rk_w(t) + wbu(t) - c_w(t) - nk_w(t)\big) + \theta_3(h_w(t)\varphi(1 - u(t))) \tag{36}$$

Os Hamiltonianos a valores correntes, H_c, a serem maximizados pelo capitalista representativo e pelo trabalhador representativo são dados pelas equações (35) e (36), respectivamente. Começando pelo problema do capitalista representativo, a condição de transversalidade é:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(\rho-n)t}\,\theta_1(t)k_c(t)$$

E as condições de primeira ordem são:

$$\frac{\partial H_c}{\partial c_c(t)} = 0 \rightarrow \; U'(c_c(t)) = \theta_1 \tag{37}$$

$$\frac{\partial H_c}{\partial \theta_1} = 0 \rightarrow \; [r - n]k_c(t) - c_c(t) = 0$$

$$\dot{\theta}_1 - (\rho - n)\theta_1 = -\frac{\partial H_c}{\partial k_c(t)} \rightarrow \dot{\theta}_1 = [\rho - r]\theta_1 \tag{38}$$

Resolvendo as equações dinâmicas para o equilíbrio de longo prazo[1], obtém-se:

$$r = \rho \tag{39}$$

Sendo assim, como mostra a equação (39), no equilíbrio de longo prazo, a taxa de lucro é determinada pela taxa de preferência intertemporal dos agentes, assim como nos modelos de Faria (2001) e de Ramsey (1928). Dessa forma, a taxa de lucro de equilíbrio de longo prazo permanece independente da função de produção adotada, mesmo com a inclusão do capital humano no modelo. Esse resultado reforça que a taxa de lucro de equilíbrio de longo prazo depende exclusivamente das preferências e das escolhas intertemporais de consumo e acumulação de capital dos agentes.

Além disso, no equilíbrio de longo prazo, tem-se:

$$s_c = \frac{n}{r} \tag{40}$$

A equação (40) representa a propensão a poupar de equilíbrio de longo prazo da classe capitalista. De acordo com ela, a propensão a poupar dos capitalistas no equilíbrio de longo prazo será determinada pela taxa de crescimento populacional dividida pela taxa de lucro. Esse resultado endogeniza a propensão a poupar dos capitalistas, que passa ser a determinada pela Equação de Cambridge, assim como no modelo de Faria (2001).

Embora a Equação de Cambridge não determine mais a taxa de lucro de equilíbrio de longo prazo, ela continua sendo consistente com o modelo e apresenta a mesma relação inversa entre a taxa de juros e a propensão a poupar dos capitalistas. No modelo de Pasinetti (1962), uma taxa de lucro mais elevada era consequência de uma propensão a poupar menor dos capitalistas. No entanto, no modelo atual, ocorre o inverso: uma menor propensão a poupar dos capitalistas é resultado de uma taxa de juros maior.

Esse resultado é explicado, dentro do modelo, por meio de um efeito renda gerado pelo aumento da taxa de juros. Como a elevação da taxa de juros proporciona maior rendimento sobre a poupança acumulada, os capitalistas podem reduzir sua poupança ao longo do tempo

[1] Para resolução, vide apêndice

para elevar seu consumo intertemporal, mantendo o nível desejado de riqueza sem a necessidade de maiores sacrifícios.

Esses resultados são os mesmos obtidos por Faria (2001), haja vista que a inclusão do capital humano no modelo não afetou a formulação do problema do capitalista representativo, mantendo inalterados os padrões das suas decisões intertemporais de consumo e poupança.

Em relação ao problema do trabalhador representativo, as condições de transversalidade são:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(\rho-n)t}\,\theta_2(t)k_c(t)$$

$$\lim_{t\to\infty} e^{-(\rho-n)t}\,\theta_3(t)h_w(t)$$

E as condições de primeira ordem são:

$$\frac{\partial H_c}{\partial c_w(t)} = 0 \rightarrow\ U'(c_w(t)) = \theta_2 \tag{41}$$

$$\frac{\partial H_c}{\partial u(t)} = 0 \rightarrow \theta_2 bw = \theta_3\varphi h_w(t) \tag{42}$$

$$\frac{\partial H_c}{\partial \theta_2} = 0 \rightarrow\ [r-n]k_w(t) + wbu(t) - c_w(t) = 0$$

$$\frac{\partial H_c}{\partial \theta_3} = 0 \rightarrow\ h_w(t)\varphi\big(1-u(t)\big) = 0$$

$$\dot{\theta}_2 - (\rho-n)\theta_2 = -\frac{\partial H_c}{\partial k_w(t)} \rightarrow \dot{\theta}_2 =\ [\rho - r]\theta_2 \tag{43}$$

$$\dot{\theta}_3 - (\rho-n)\theta_3 = -\frac{\partial H_c}{\partial h_w(t)} \rightarrow \dot{\theta}_3 =\ [(\rho-n) - \varphi(1-u(t))]\theta_3 \tag{44}$$

Resolvendo as equações dinâmicas para o equilíbrio de longo prazo[2], obtém-se:

$$r = \rho \tag{45}$$

[2] Para resolução, vide apêndice

$$u(t) = 1 - \frac{r-n}{2\varphi} \tag{46}$$

A equação (45) representa o resultado padrão para a determinação da taxa de lucro de equilíbrio de longo prazo. Por sua vez, a equação (46) determina o valor ótimo do tempo alocado pelos trabalhadores à atividade laboral. Observa-se que o tempo dedicado ao trabalho está negativamente relacionado à taxa de lucro. Isso significa que, quanto maior a taxa de juros, menos tempo o trabalhador dedicará à atividade laboral e, consequentemente, mais tempo será destinado aos estudos. Esse resultado reflete o efeito renda do aumento dos juros na escolha intertemporal de alocação de tempo dos trabalhadores: um aumento na renda faz com que os indivíduos optem por trabalhar menos e dedicar mais tempo aos estudos.

Além disso, a equação (46) também indica que o tempo dedicado à produção está positivamente relacionado à eficiência do aprendizado. Isso sugere que quanto mais eficiente for o sistema educacional, menos tempo os trabalhadores precisarão investir nos estudos para alcançar o mesmo nível de conhecimento.

Evidentemente, de acordo com a teoria econômica, a variação da taxa de juros também pode gerar um efeito substituição, que atua no sentido oposto. Se o retorno do trabalho presente se tornar mais atrativo devido a uma taxa de juros mais alta, os trabalhadores podem reduzir o tempo dedicado aos estudos e aumentar sua oferta de trabalho. Da mesma forma, uma maior eficiência no aprendizado pode também aumentar o retorno do investimento em educação, incentivando os trabalhadores a dedicarem mais tempo aos estudos.

Nesse sentido, o resultado da equação (46) advém diretamente da equação de primeira ordem (42), que define a regra ótima para a escolha de $u(t)$, garantindo que a decisão da variável de controle escolhida maximize a função objetivo, equação (36). Desse modo, um aumento da taxa de lucro, por exemplo, precisa ser compensado por uma diminuição no tempo trabalhado. Da mesma forma, um aumento de φ, precisa ser compensado por um aumento de $u(t)$ ou, o que é equivalente, uma diminuição do tempo dedicado aos estudos.

Por fim, no equilíbrio de longo prazo, tem-se:

$$s_W = \frac{nk_W(t)}{rk_W(t) + wbu(t)} \tag{47}$$

A equação (47) dá a propensão a poupar de equilíbrio de longo prazo da classe trabalhadora. É possível perceber que a relação inversa entre a propensão a poupar e taxa de lucro se mantém, assim como na propensão a poupar do capitalista representativo.

A propensão a poupar dos trabalhadores é similar a obtida por Faria (2001), contudo é maior, haja vista que o tempo dedicado à atividade laboral aparece no denominador. Quanto menor o tempo dedicado ao trabalho, maior será a propensão a poupar da classe trabalhadora. Este último resultado é interessante, pois mostra que para compensar a queda na renda devido ao aumento no tempo de estudo, o trabalhador representativo aumenta a sua propensão a poupar, aumentando seus rendimentos de capital.

Em relação ao Teorema Dual de Samuelson e Modigliani (1966), a propensão a poupar dos trabalhadores precisa ser maior ou igual a propensão a poupar dos capitalistas. Matematicamente, isso é expresso como:

$$s_w = \frac{nk_w(t)}{rk_w(t)+wbu(t)} \geq s_c = \frac{n}{r}$$

Multiplicando cruzado, tem-se:

$$rnk_w(t) \geq \left(rk_w(t) + wbu(t)\right)n$$

Eliminando n e $rk_w(t)$ dos dois lados da desigualdade, obtém-se:

$$wbu(t) \leq 0$$

Portanto, para que a propensão a poupar dos trabalhadores seja maior ou igual à propensão a poupar dos capitalistas, a condição necessária é que $wbu(t)$ seja menor ou igual a zero. Evidentemente, um salário *per capita* negativo não faz sentido econômico. Já o caso em que $wbu(t) = 0$ pode ocorrer apenas se o tempo dedicado ao trabalho for nulo, $u(t) = 0$, ou seja, se os trabalhadores decidirem exclusivamente por investir em capital humano. Nesse cenário extremo, os trabalhadores deixariam de exercer atividades laborais e passariam a viver apenas da renda do seu capital acumulado, agindo como capitalistas e, consequentemente, adquirindo a mesma propensão a poupar destes.

Isso resultaria, na prática, em uma "eutanásia dos trabalhadores", pois a distinção entre as duas classes deixaria de existir. No entanto, como a produção requer trabalho ativo e a função de produção do modelo é bem-comportada, um cenário em que ninguém trabalha levaria a um produto econômico nulo, tornando tal situação inviável.

Sendo assim, esse resultado reforça a robustez do modelo contra o Teorema Dual, demonstrando que, mesmo quando os trabalhadores aumentam sua propensão a poupar devido ao acúmulo de capital humano, isso não é suficiente para eliminar a classe capitalista em condições economicamente plausíveis.

4 CONCLUSÃO

A extensão do modelo de Faria (2001) permite observar como as decisões de consumo, poupança e investimento em educação dos trabalhadores e capitalistas afetam o crescimento econômico e a acumulação de capital físico e humano. Primeiramente, o estudo confirma que, no equilíbrio de longo prazo, a taxa de lucro continua sendo determinada pela taxa de preferência intertemporal dos agentes, assim como nos modelos de Faria (2001) e Ramsey (1928). Esse resultado demonstra que, mesmo com a introdução do capital humano, a taxa de lucro de equilíbrio de longo prazo permanece independente da função de produção adotada. Constatação que reforça o papel central das preferências e escolhas intertemporais dos agentes na determinação da taxa de lucro e no processo de acumulação de capital ao longo do tempo.

Embora a Equação de Cambridge de Pasinetti (1962) não determine mais a taxa de lucro de equilíbrio de longo prazo, ela permanece consistente com o modelo, sendo responsável pela determinação da propensão a poupar dos capitalistas. Além disso, a Equação de Cambridge mantém a relação inversa originalmente estabelecida entre taxa de lucro e a propensão a poupar dos capitalistas. Esse resultado reforça a robustez da equação dentro da estrutura teórica do modelo, demonstrando que, apesar das modificações introduzidas, seus fundamentos permanecem válidos e relevantes para a análise do equilíbrio econômico.

Ademais, a introdução do capital humano no modelo não altera o problema do capitalista representativo, mas modifica o do trabalhador representativo, que, por hipótese, é o único a exercer atividade laboral na economia e, portanto, o único agente capaz de acumular capital humano. Nesse sentido, a introdução do capital humano altera a propensão a poupar dos trabalhadores, aumentando-a devido à necessidade de compensar a redução temporária da renda em decorrência do investimento em educação e treinamento.

Apesar do aumento na propensão a poupar dos trabalhadores devido à acumulação de capital humano, os capitalistas continuam poupando mais do que os trabalhadores no equilíbrio de longo prazo. Demonstrando que ao contrário do previsto no Teorema Dual, a classe capitalista não desaparece e a distinção entre trabalhadores e capitalistas permanece viável dentro do modelo.

Em relação à acumulação de capital humano, a decisão entre o tempo dedicado ao trabalho e aos estudos é diretamente influenciada pela taxa de lucro e pela eficiência do aprendizado. Esses determinantes desempenham um papel crucial na definição dos incentivos que os trabalhadores enfrentam ao decidir entre dedicar tempo a produção ou investir em qualificação, com implicações relevantes para a formulação de políticas educacionais e produtivas.

Devido às condições de controle ótimo, uma taxa de lucro mais elevada pode reduzir o tempo dedicado ao trabalho, incentivando os trabalhadores a investirem mais na sua educação, refletindo um efeito renda na decisão intertemporal de alocação do tempo. Por outro lado, um sistema educacional mais eficiente diminui o tempo necessário para alcançar determinado nível de conhecimento, possibilitando que os trabalhadores dediquem mais tempo à produção de bens e serviços, contribuindo para o aumento da produção da economia.

O presente modelo oferece, então, uma estrutura teórica robusta e flexível para analisar como as decisões de consumo, poupança e investimento em educação de diferentes agentes podem afetar o crescimento econômico e a acumulação de capital, quando o capital humano está presente na economia. Nesse sentido, ele abre portas para diversas possíveis extensões que podem gerar contribuições ainda mais valiosas para o debate econômico.

A introdução de atividade governamental, por exemplo, permitiria capturar de forma mais realista o papel do Estado na economia, seja por meio da tributação, dos gastos públicos ou dos investimentos em educação. A inclusão dessas variáveis possibilitaria uma análise mais aprofundada sobre como políticas fiscais e educacionais influenciam a acumulação de capital humano e físico, bem como seus efeitos sobre a distribuição de renda entre as classes e o crescimento de longo prazo.

Outra questão relevante que pode ser explorada refere-se à determinação da tributação ótima e do investimento ideal em educação, com o objetivo de maximizar as funções de utilidade das classes econômicas presentes no modelo. Nesse sentido, o teorema de Chamley-Judd afirma que a tributação ótima sobre lucros no longo prazo deve ser zero. No entanto, esse resultado não se mantém em alguns modelos que introduzem capital humano, como no trabalho de Jones, Manuelli e Rossi (1997). Além disso, os efeitos de políticas de transferências de renda entre as classes econômicas também poderiam ser incorporados e analisados.

Outra possível extensão diz respeito a hipótese de que capitalistas não acumulam capital humano, uma vez que não exercem atividade laboral. Reformular essa hipótese permitiria analisar de que forma um capitalista mais instruído pode influenciar a economia, seja internamente, ou externamente, ao gerar externalidades positivas.

Sendo assim, as conclusões deste trabalho destacam a relevância e a robustez da extensão do modelo de Faria (2001) para incluir o capital humano, demonstrando como essa ampliação contribui para a compreensão das dinâmicas econômicas de longo prazo. Os resultados obtidos reforçam que a integração de microfundamentos da escola neoclássica com a abordagem pós-keynesiana não apenas é possível, como também contribui para a geração de descobertas valiosas para ambas as tradições teóricas.

Trabalhos anteriores, como os de Faria (2001), Faria e Araujo (2004) e Wei e Araujo (2009), já apontavam essa compatibilidade, e o presente estudo avança nessa linha ao mostrar que a inclusão do capital humano mantém a coerência do modelo e fortalece suas previsões teóricas.

Essa síntese entre abordagens permite uma visão inovadora e complementar dos determinantes do crescimento econômico e da distribuição da renda, oferecendo uma estrutura teórica capaz de dialogar com diferentes correntes da economia. Assim, este trabalho não apenas reforça a viabilidade da integração entre essas tradições, mas também sugere caminhos promissores para futuras pesquisas que busquem construir modelos mais abrangentes e alinhados às complexidades das economias reais.

REFERÊNCIAS

BARANZINI, M. Wealth accumulation and income distribution in modern economic theories. *In*: BARANZINI, M. **A theory of wealth distribution and accumulation**. New York: Oxford University Press, 1991. p. 45-66.

BARANZINI, M.; MIRANTE, A. The Cambridge post-keynesian school of income and wealth distribution. *In*: HARCOURT, G. C.; KRIESLER, P. **The oxford handbook of post-keynesian economics**: theory and origins. New York: Oxford University Press, 2013. v. 1, p. 224-281.

CASS, D. Optimum growth in an aggregative model of capital accumulation. **Econometrica**, New Haven, v. 34, n. 4, p. 833-850, Oct. 1966. DOI: https://doi.org/10.2307/1910103.

CHAMLEY, C. Efficient taxation in a stylized model of intertemporal general equilibrium. **International Economic Review**, Philadelphia, v. 26, n. 2, p. 451-468, June 1985. DOI: https://doi.org/10.2307/2526595.

CHAMLEY, C. Optimal taxation of capital income in general equilibrium with infinite lives. **Econometrica**, New Haven, v. 54, n. 3, p. 607-622, May 1986. DOI: https://doi.org/10.2307/1911310.

CHU, Hugo. The Representative Agent in Microeconomics: A Samuelson-Koopmans Thread?. *In*: ENCONTRO NACIONAL DEECONOMIA, 46., 2018, Rio de Janeiro. **Anais** [...]. Niterói: ANPEC, 2018. Disponível em: https://en.anpec.org.br/previous-editions.php?r=encontro-2018. Acesso em: 24 jan. 2025.

DALZIEL, P. C. Cambridge (UK) versus Cambridge (Mass.): a keynesian solution of “pasinetti’s paradox”. **Journal of Post Keynesian Economics**, Christchurch, v. 11, n. 4, p. 648-653, 1989. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/4538160. Acesso em: 15 out. 2024.

DOMAR, E. D. Capital expansion, rate of growth, and employment. **Econometrica**, New Haven, v. 14, n. 2, p. 137-147, Apr. 1946. DOI: https://doi.org/10.2307/1905364.

FARIA, J. R. **The Pasinetti paradox in an intertemporal dynamic model**. Richardson: University of Texas at Dallas, 2001. (Political Economics Working Paper).

FARIA, J. R.; ARAUJO, R. A. An intertemporal Pasinettian model with government sector. **International Journal of Business and Economics**, Taichung, v. 3, n. 3, p. 257-268, 2004. Disponível em: https://EconPapers.repec.org/RePEc:ijb:journl:v:3:y:2004:i:3:p:257-268. Acesso em: 28 out. 2024.

FLECK, F. H.; DOMENGHINO, C. M. Cambridge (UK) versus Cambridge (Mass.): a keynesian solution of “Pasinetti’s paradox”. **Journal of Post Keynesian Economics**, Abingdon, v. 10, n. 1, p. 22-36, 1987. Disponível em: https://EconPapers.repec.org/RePEc:mes:postke:v:10:y:1987:i:1:p:22-36. Acesso em: 5 nov. 2024.

GROTH, C. **The ramsey model**. *In*: BECKMANN, M. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Copenhague: University of Copenhague, 2010. p. 277-314.

Disponível em: https://web.econ.ku.dk/okocg/VV/VV-2010/Lecture%20notes/Ch7-2010-1.pdf. Acesso em: 24 jan. 2025.

HAGEMANN, H. Solow's 1956: contribution in the context of the harrod-domar model. **History of Political Economy**, Durham, v. 41, p. 67-87, 2009. Suppl. 1.DOI: https://doi.org/10.1215/00182702-2009-017.

HARROD, R. F. An essay in dynamic theory. **The Economic Journal**, Oxford, v. 49, n. 193, p. 14-33, Mar. 1939. DOI: https://doi.org/10.2307/2225181.

JONES, L. E.; MANUELLI, R. E.; ROSSI, P. E. On the optimal taxation of capital income. **Journal of Economic Theory**, Amsterdam, v. 73, n. 1, p. 93-117, Mar. 1997. DOI: https://doi.org/10.1006/jeth.1996.2238.

JUDD, K. L. Redistributive taxation in a simple perfect foresight model. **Journal of Public Economics**, Amsterdam, v. 28, n. 1, p. 59-83, Oct. 1985. Disponível em: https://eml.berkeley.edu/~saez/course/Judd_JPubE(1985).pdf. Acesso em: 24 jan. 2025.

KALDOR, N. Alternative theories of distribution. **Review of Economic Studies**, Oxford, v. 23, n. 2, p. 83-100, Jan. 1956. DOI: https://doi.org/10.2307/2296292.

KOOPMANS, T. C. O. **On the concept of optimal economic growth**. New Haven: Yale University Library, 1963. (Cowles Foundation Discussion Papers, 163). Disponível em: https://elischolar.library.yale.edu/cowles-discussion-paper-series/392/. Acesso em: 24 jan. 2025.

LUCAS JUNIOR, R. E. On the mechanics of economic development. **Journal of Monetary Economics**, Rochester, v. 22, n. 1, p. 3-42, July 1988. DOI: https://doi.org/10.1016/0304-3932(88)90168-7.

MANKIW, N. G.; ROMER, D.; WEIL, D. N. A contribution to the empirics of economic growth. **The Quarterly Journal of Economics**, Oxford, v. 107, n. 2, p. 407-437, May 1992. DOI: https://doi.org/10.2307/2118477.

MEADE, J. E. The rate of profit in a growing economy. **The Economic Journal**, Oxford, v. 73, n. 292, p. 665-674, Dec. 1963. DOI: https://doi.org/10.2307/2228173.

MEADE, J. E. The outcome of the pasinetti-process: a note. **The Economic Journal**, Oxford, v. 76, n. 301, p. 161-165, Mar. 1966. DOI: https://doi.org/10.2307/2229072.

MEADE, J. E.; HAHN, F. H. The rate of profit in a growing economy. **The Economic Journal**, Oxford, v. 75, n. 298, p. 445-448, June 1965. DOI: https://doi.org/10.2307/2229456.

OREIRO, J. L. Economia pós-keynesiana: origem, programa de pesquisa, questões resolvidas e desenvolvimentos futuros. **Ensaios FEE**, Porto Alegre, v. 32, n. 2, p. 283-312, nov. 2011. Disponível em: http://200.198.145.164/index.php/ensaios/article/view/2367. Acesso em: 24 jan. 2025.

PASINETTI, L. L. Rate of profit and income distribution in relation to the rate of economic growth. **Review of Economic Studies**, Oxford, v. 29, n. 81, p. 267-279, Oct. 1962. DOI: https://doi.org/10.2307/2296303.

RAMSEY, F. P. A mathematical theory of saving. **The Economic Journal**, Oxford, v. 38, n. 152, p. 543-559, Dec. 1928. DOI: https://doi.org/10.2307/2224098.

ROMER, P. M. The origins of endogenous growth. **Journal of Economic Perspectives**, Nashville, v. 8, n. 1, p. 3-22, 1994. Disponível em: https://www.aeaweb.org/articles?id=10.1257/jep.8.1.3. Acesso em: 24 jan. 2025.

ROSEN, S. A theory of life earnings. **Journal of Political Economy**, Chicago, v. 84, n. 4, p. 45-67, Aug. 1976. Disponível em: https://www.journals.uchicago.edu/doi/abs/10.1086/260532. Acesso em: 24 jan. 2025.

SAMUELSON, P. A.; MODIGLIANI, F. The Pasinetti paradox in neoclassical and more general models. **The Review of Economic Studies**, Oxford, v. 33, n. 4, Oct. 1966. DOI: https://doi.org/10.2307/2974425.

SCHULTZ, T. W. Investment in human capital. **The American Economic Review**, Nashville, v. 51, n. 1, p. 1-17, Mar. 1961. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/1818907. Acesso em: 24 jan. 2025.

SOLOW, R. M. A contribution to the theory of economic growth. **The Quarterly Journal of Economics**, Oxford, v. 70, n. 1, p. 65-94, Feb. 1956. DOI: https://doi.org/10.2307/1884513.

STEEDMAN, I. The state and the outcome of the Pasinetti process. **The Economic Journal**, Oxford, v. 82, n. 328, p. 1387-1395, Dec. 1972. DOI: https://doi.org/10.2307/2231318.

UZAWA, H. Optimum technical change in an aggregative model of economic growth. **International Economic Review**, Philadelphia, v. 6, n. 1, p. 18-31, Jan. 1965. DOI: https://doi.org/10.2307/2525621.

WEI, H.; ARAUJO, R. A. Post keynesian model of growth and wealth distribution: government’s optimal tax choice using an intertemporal infinitely representative agent. **Revista de Economia Mackenzie**, São Paulo, v. 7, n. 1, May 2009. Disponível em: https://editorarevistas.mackenzie.br/index.php/rem/article/view/510. Acesso em: 24 jan. 2025.

APÊNDICES

APÊNDICE A – SOLUÇÃO DO PROBLEMA DO CAPITALISTA REPRESENTATIVO

Diferenciando a equação (37) em relação ao tempo, tem-se:

$$-U''\big(c_c(t)\big)\dot{c_c}(t) = \dot{\theta}_1 \tag{1A}$$

Substituindo as equações (37) e (1A) em (38), obtém-se:

$$-U''\big(c_c(t)\big)\dot{c_c}(t) = [\rho - r]U'(c_c(t)) \tag{2A}$$

Rearranjando a equação (2A), pode-se expressar $\dot{c_c}(t)$ como:

$$\dot{c_c}(t) = [r - \rho]\frac{U'(c_c(t))}{U''(c_c(t))}$$

No equilíbrio de longo prazo, onde $\dot{c_c}(t) = 0$, segue que:

$$r = \rho$$

Dessa forma, no equilíbrio de longo prazo, a taxa de lucro deve ser igual a taxa de desconto intertemporal. Se r for maior que ρ, o retorno sobre a poupança é maior do que a impaciência do agente, o que resulta em menos consumo presente e mais poupança, aumentando o consumo futuro. Por outro lado, se ρ for maior que r, a taxa de juros é relativamente baixa e o agente prefere consumir mais no presente e menos no futuro.

No equilíbrio de longo prazo, tem-se também que $\dot{k_c}(t)$ deve ser igual a zero. Sendo assim, a equação (32) implica que:

$$c_c(t) = [r - n]k_c(t) \tag{3A}$$

Como a propensão a poupar é definida como a fração da renda que não é consumida, tem-se:

$$s_c y_c(t) = y_c(t) - c_c(t)$$

Substituindo $y_c(t)$ por (24) e $c_c(t)$ por (3A), obtém-se:

$$s_c[rk_c(t)] = rk_c(t) - rk_c(t) + nk_c(t)$$

Simplificando, segue que:

$$s_c r = n$$

Portanto, a propensão a poupar dos capitalistas é:

$$s_c = \frac{n}{r} \tag{4A}$$

A equação (4A) é a Equação de Cambridge, que no modelo endogeniza a propensão a poupar da classe capitalista.

APÊNDICE B – SOLUÇÃO DO PROBLEMA DO TRABALHADOR REPRESENTATIVO

Assim como no problema do capitalista representativo, para encontrar a equação de Euler dos trabalhadores, é necessário diferenciar a equação (41) em relação ao tempo:

$$-U''\big(c_w(t)\big)\dot{c_w}(t) = \dot{\theta_2} \tag{1B}$$

Substituindo (41) e (1B) em (43), obtém-se:

$$-U''\big(c_w(t)\big)\dot{c_w}(t) = [\rho - r]U'(c_w(t)) \tag{2B}$$

Rearranjando a equação (2B), podemos expressar $\dot{c_w}(t)$ como:

$$\dot{c_w}(t) = [r - \rho]\frac{U'(c_c)}{U''(c_c)} \tag{3B}$$

No equilíbrio de longo prazo, onde $\dot{c_w}(t) = 0$, segue que:

$$r = \rho$$

Novamente, o equilíbrio de longo prazo requer que $\dot{k_w}(t)$ seja igual a zero. Assim, a equação (33) implica que:

$$c_w(t) = [r - n]k_c(t) + wbu(t) \tag{4B}$$

Como a propensão a poupar do trabalhador representativo é definida como a fração da sua renda que não é consumida, tem-se:

$$s_w y_w(t) = y_w(t) - c_w(t)$$

Substituindo $y_w(t)$ por (25) e $c_w(t)$ por (4B), obtém-se:

$$s_w[rk_w(t) + wbu(t)] = rk_w(t) + wbu(t) - rk_w(t) - wbu(t) + nk_w(t)$$

Simplificando:

$$s_w r k_w(t) + w b u(t) = n k_w(t)$$

Isolando s_w:

$$s_w = \frac{n k_w(t)}{r k_w(t) + w b u(t)} \tag{5B}$$

A equação (5B) determina a propensão a poupar dos trabalhadores no equilíbrio de longo prazo.

Para encontrar o valor ótimo de $u(t)$, pode-se reescrever a equação (42) da seguinte forma:

$$\theta_3 = \frac{bw}{\varphi h_w(t)} \theta_2 \tag{6B}$$

Diferenciando (6B) em relação ao tempo, tem-se:

$$\dot{\theta}_3 = \frac{bw}{\varphi h_w(t)} \left[\frac{\dot{h}_w(t)}{h_w(t)} \theta_2 + \dot{\theta}_2\right]$$

Substituindo θ_2 por (41) e $\dot{\theta}_2$ por (1B), segue que:

$$\dot{\theta}_3 = \frac{bw}{\varphi h_w(t)} \left[\frac{\dot{h}_w(t)}{h_w(t)} U'(c_w(t)) - U''(c_w(t)) \dot{c}_w(t)\right] \tag{7B}$$

Substituindo (7B) na equação dinâmica da variável adjunta do capital humano, equação (44), e θ_3 por (6B), obtém-se:

$$\frac{bw}{\varphi h_w(t)} \left[\frac{\dot{h}_w(t)}{h_w(t)} U'(c_w(t)) - U''\big(c_w(t)\big) \dot{c}_w(t)\right] = \left[(\rho - n) - \varphi(1 - u(t))\right] \frac{bw}{\varphi h_w(t)} U'(c_w(t))$$

Rearranjando a equação:

$$\frac{\dot{h}_w(t)}{h_w(t)} - \frac{U''(c_w(t))}{U'\big(c_c(t)\big)} \dot{c}_w(t) = \rho - n - \varphi(1 - u(t)) \tag{8B}$$

Isolando $\frac{U''(c_w(t))}{U'(c_c(t))}$ na equação (3B) e substituindo o resultado em (8B), tem-se:

$$\frac{\dot{h}_w(t)}{h_w(t)} - \frac{(r-\rho)}{\dot{c_w}(t)}\dot{c_w}(t) = \rho - n - \varphi(1 - u(t))$$

Rearranjando a equação (31), substituindo $\frac{\dot{h}_w(t)}{h_w(t)}$ pelo resultado e reorganizando os termos, obtém-se:

$$\varphi\big(1 - u(t)\big) - (r - \rho) = \rho - n - \varphi(1 - u(t))$$

Rearranjando a equação:

$$\varphi\big(1 - u(t)\big) + \varphi\big(1 - u(t)\big) = r - \rho + \rho - n$$

Simplificando:

$$2\varphi\big(1 - u(t)\big) = r - n$$

Por fim, isolando $u(t)$:

$$u(t) = 1 - \frac{r-n}{2\varphi} \tag{9B}$$

A equação (9B) descreve como o trabalhador escolhe entre trabalho e estudo de modo a maximizar a sua função objetivo.