



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

PAULO JOSÉ DOS REIS

**EMARANHANDO UM QUBIT REMOTO COM UM
PAR DE BELL ATRAVÉS DA INTERAÇÃO COM UM CAMPO
COMPRIMIDO DE DOIS MODOS**

Londrina
2008

PAULO JOSÉ DOS REIS

**EMARANHANDO UM QUBIT REMOTO COM UM PAR DE
BELL ATRAVÉS DA INTERAÇÃO COM UM CAMPO
COMPRIMIDO DE DOIS MODOS**

Dissertação apresentada ao Programa de
Mestrado em Física do Centro de Ciências
Exatas da Universidade Estadual de Lond-
rina, como requisito parcial à obtenção do
título de Mestre em Física.

Orientadora: Prof. Dra. Santosh Shelly
Sharma

Londrina
2008

**Catálogo na publicação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da
Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina.**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

R375e Reis, Paulo José dos.

Emaranhando um qubit remoto com um par de Bell através da interação com um campo comprimido de dois modos / Paulo José dos Reis. – Londrina, 2008.

viii, 91f. : il.

Orientador: Santosh Shelly Sharma.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2008.

Inclui bibliografia.

1. Física da matéria condensada – Teses. 2. Estados comprimidos (Física) – Teses. 3. Átomos – Cavidade – Teses. 4. Emaranhamento (Física) – Teses. I. Sharma, Santosh Shelly. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

CDU 539.2

PAULO JOSÉ DOS REIS

**EMARANHANDO UM QUBIT REMOTO COM UM
PAR DE BELL ATRAVÉS DA INTERAÇÃO COM UM
CAMPO COMPRIMIDO DE DOIS MODOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física.

Banca Examinadora

Prof. Dra. Santosh Shelly Sharma
Universidade Estadual de Londrina
Orientador

Prof. Dr. Antonio Edson Gonçalves
Universidade Estadual de Londrina

Prof. Dr. Sadhan Kumar Adhikari
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho

Aprovada em 29 de Fevereiro de 2008

Aos meus pais.

"O único caminho para desvendar os limites do possível é aventurar-se além dele,
através do impossível. "

Arthur C. Clarke

Agradecimentos

Agradeço a Prof. Dra. Santosh Shelly Sharma, pela paciência e disponibilidade que foram muito importantes nos esclarecimentos das dúvidas.

Meu pai José de Paula (Zé Paulo), minha mãe Ivone, minha namorada Gessica que é o grande amor da minha vida e meus irmãos Moacir e Ana Paula por sempre terem incentivado e me apoiado nos momentos difíceis.

Aos professores Antonio Edson Gonçalves e Sadhan Kumar Adhikari, pela disponibilidade na correção do trabalho e sugestões que foram muito importantes para a conclusão do mesmo.

Aos meus amigos do curso de mestrado Fausto, Ademar, Leonardo, Ricardo M., Ricardo G. e Rafael pela boa convivência e amizade.

Aos companheiros de sala Marcio Daldin e Daniel, que sempre se mostraram dispostos a me ajudar, além da amizade e companherismo.

Ao amigo do grupo de computação quântica Eduardo, pela ajuda na programação em fortran, pois sem ela o trabalho não seria concluído.

Resumo

O emaranhamento entre sistemas não locais, vem gerando grande interesse nas pesquisas pois esse recurso pode ser utilizado na comunicação quântica e computação quântica distribuída. Nesse trabalho propomos a geração de emaranhamento entre dois átomos (A_1A_2) aprisionados em uma cavidade possuída por Alice, e um único átomo (B) aprisionado em uma cavidade que está com Bob, através da interação com um campo eletromagnético no estado comprimido de dois modos injetado nas cavidades com uso de um divisor de feixe. Analisamos a evolução do emaranhamento dos três átomos, devido à interação átomo campo, fazendo um traço sobre os graus de liberdade do campo. Deste modo obtivemos expressões analíticas para o estado dos átomos, estado do campo, negatividade, extensão "convex-roof" da negatividade e entropia linear, como função do tempo de interação, intensidade de interação e parâmetro de compressão. Esses resultados foram utilizados para o estudo da dinâmica do emaranhamento do átomo (B) com o par (A_1A_2). Também calculamos o emaranhamento dos átomos individuais através da "two-way" negatividade. Verificamos que a quantidade de transferência de emaranhamento das variáveis contínuas do campo para os átomos depende do parâmetro de compressão, assim obtivemos o valor de parâmetro de compressão e o parâmetro de interação, que gera maior emaranhamento do átomo (B) com o par (A_1A_2). Além disso, comparamos a entropia de Von Neumann do campo, com a entropia de Von Neumann dos átomos para verificar a transferência de emaranhamento do campo para o sistema de três átomos.

Palavras-chave: Estados comprimidos. Átomos em cavidade. Emaranhamento.

Abstract

The entanglement between non local systems has been received much attention during the last years, because it can be used in distributed quantum computation and quantum communication. In this work we examine the entanglement generation between the two-trapped atoms (A_1A_2) in a cavity held by Alice and a single trapped atom (B) in a second cavity owned by Bob, through interaction with two mode squeezed light injected into the cavities by a beam splitter. The entanglement dynamics of the three atoms due to atom field interaction is analyzed after tracing out the field degrees of freedom. Analytical expressions are obtained for the negativity, convex roof extended negativity and linear entropy as function interaction time, interaction intensity and squeezing parameter. These results were used to examine the entanglement dynamic of atom (B) with the pair (A_1A_2). We have also calculated the entanglement of individuals atoms through of two-way negativities, and verified that the quantity of entanglement transference between the continuous variables of the field to the atoms have a squeezing parameter dependence. The individuals atoms entanglement have been calculated through of two-way negativity, and have a dependency on the squeezing parameter. Therefore, the squeezing parameter value as well as the interaction parameter were obtained, which generated a higher entanglement among the atom (B) and the pair (A_1A_2). Moreover, we have compared the Von Neumann entropy of the field with the Von Neumann entropy of the atoms to verify the entanglement transfer.

Keywords: Squeezed states. Atoms in cavities. Entanglement.

Sumário

1	Introdução	ix
2	Campo eletromagnético e oscilador harmônico	2
2.1	Quantização do campo eletromagnético	3
2.2	Relações de incerteza e compressão das flutuações quânticas	6
2.3	Compressão das quadraturas do campo	7
2.4	Estados de Fock	8
2.5	Estados Coerentes	11
2.5.1	Propriedades dos estados coerentes.	14
2.6	Estados Comprimidos	16
2.6.1	Estados comprimidos de dois modos	20
3	Átomos aprisionados em cavidades	23
3.1	Um átomo de dois níveis interagindo com o campo na Cavidade	24
3.1.1	A aproximação de onda girante	25
3.1.2	Evolução temporal	27
3.2	Dois átomos interagindo com o campo na cavidade.	29
3.2.1	Evolução temporal	31
4	Medidas de Emaranhamento	34
4.1	Entropia.	38

	2
4.2 Entropia Linear	40
4.3 Concorrência	40
4.4 Negatividade	42
4.5 Extensão "convex roof" da negatividade.	43
4.6 "K-way" Negatividade	45
4.7 Emaranhamento de variáveis contínuas.	48
5 Emaranhando um qubit remoto com um par de Bell através da interação com um campo comprimido de dois modos	51
5.1 Campo na Cavidade	53
5.2 Interação Átomo Campo	55
5.3 Geração de estados emaranhados dos átomos A_1 , A_2 e B.	58
5.3.1 Probabilidade de gerar pares de Bell emaranhados com o qubit B.	61
5.4 Dinâmica de emaranhamento dos átomos A_1A_2 e B.	66
5.4.1 Emaranhamento entre o qubit B e o par A_1A_2	68
5.4.2 Emaranhamento do qubit A_1	75
5.4.3 Emaranhamento do qubit B	77
5.5 Parâmetro de compressão	79
5.6 Transferência do emaranhamento das variáveis contínuas para os qubits	80
6 Conclusão	83

Capítulo 1

Introdução

Em 1965 Gordon More [1] observou que a densidade de transistores em um chip dobrava em média a cada dois anos. Ao reduzir as dimensões dos transistores integrados num único microchip, e ao colocar, um número maior deles na mesma área, aumenta-se o poder computacional. Para termos uma idéia da observação de More, em 1964 um chip possuía 32 transistores, um exemplo atual é o processador Pentium IV que possui 40 milhões de transistores. Essa observação fez com que os limites físicos da informação clássica fossem questionados uma vez que com essa taxa de crescimento levaria rapidamente à escala dos componentes na região de domínio da mecânica quântica.

Paul Beniof em 1980 [2], [3], demonstrou a possibilidade de um sistema intrinsecamente quântico reproduzir computação clássica. R. P. Feynman em 1982 [4], [5], propôs que sistemas quânticos poderiam ser simulados eficientemente em computadores quânticos, isto é com um ganho exponencial em relação aos computadores clássicos. Em 1985 D. Deutsch [6], formalizou a idéia de computador quântico, em seu trabalho ele utilizou características quânticas próprias de sistemas microscópicos, como superposição de amplitudes de probabilidades para resolver um problema com funções binárias. Com isso teve surgimento a ciência da informação quântica.

Devido a seu grande potencial e superioridade no processamento da informação em relação a computação clássica, existe um grande interesse na computação quântica. Exis-

tem alguns sistemas quânticos que possibilitam a implementação do computador quântico que são: fótons, spin nucleares, pontos quânticos, íons em armadilhas e átomos de dois níveis em cavidades.

As cavidades quânticas com átomos de dois níveis representam um sistema que pode ser utilizado no processamento da informação quântica. Experimentalmente isso é possível, quando colocamos átomos em cavidades sem dissipação, ou seja, com altos valores de Q (Q é chamado de fator de qualidade), os modos do campo eletromagnético na cavidade com alto valor de intensidade de campo elétrico, permitem um acoplamento dipolar entre átomo e campo muito alto. Por este motivo os fótons podem interagir com os átomos.

Existem várias propostas, para geração de estados emaranhados em sistemas de uma cavidade com átomos de dois níveis, [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13].

O emaranhamento compartilhado entre sistemas espacialmente separados representa um recurso central para a comunicação quântica [14] e computação quântica distribuída [15]. Quando se fala em computação quântica distribuída equivale a um computador quântico formado por uma rede de processadores locais conectados por uma linha de transmissão [16]. Por este motivo atualmente tem havido grande interesse no emaranhamento entre átomos aprisionados em cavidades distintas.

Nessa dissertação apresentamos um sistema de duas cavidades onde a primeira possui dois átomos de dois níveis, e a segunda cavidade possui um átomo de dois níveis aprisionado. As cavidades estão inicialmente no estado vácuo, depois é enviado para as cavidades um estado comprimido de dois modos.

No capítulo 2, demonstramos a quantização do campo eletromagnético e compressão nas quadraturas do campo. Descrevemos alguns estados do campo eletromagnético que são os estados de Fock, estados coerentes e os estados comprimidos. Também estudamos os estados comprimidos de dois modos que serão utilizados no sistema proposto.

No capítulo 3, apresentamos a interação de um átomo de dois níveis com um

campo de modo único no estado de Fock na cavidade, e também estudamos o caso em que dois átomos de dois níveis interagem com um campo de modo único no estado de Fock na cavidade. Para os dois casos, verificamos a dinâmica do sistema e obtivemos o operador evolução.

No capítulo 4, listamos as propriedades que uma medida de emaranhamento deve satisfazer, além de apresentarmos as definições da entropia de Von Neumann, entropia linear, concorrência, negatividade, extensão "convex roof" da negatividade e negatividade "K-way". Além disso, demonstramos que o estado comprimido de dois modos possui emaranhamento que depende do parâmetro de compressão e utilizamos a entropia de Von Neumann para quantificar o emaranhamento do estado comprimido de dois modos.

No capítulo 5, estudamos a dinâmica de um sistema de duas cavidades separadas espacialmente, onde a cavidade 1 está no laboratório de Alice e possui dois átomos aprisionados e a cavidade 2 que está no laboratório de Bob possui um único átomo de dois níveis. Estas cavidades estão inicialmente no estado vácuo, e lhes são enviadas um estado comprimido de dois modos onde cada modo é enviado para uma cavidade distinta. A junção entre campo externo e campo na cavidade é feita por um divisor de feixe (beam splitter). Deste modo, obtivemos expressões analíticas para o estado dos átomos, estado do campo, negatividade, extensão "convex-roof" da negatividade e entropia linear, como função do tempo de interação, intensidade de interação e parâmetro de compressão. Esses resultados foram utilizados para o estudo da dinâmica do emaranhamento do átomo (B) com o par $(A_1 A_2)$, com isso pode-se verificar qual medida de emaranhamento é a mais apropriada para o sistema reduzido dos átomos. Também calculamos o emaranhamento dos átomos individuais através da negatividade "two-way", e verificamos que a quantidade de transferência de emaranhamento das variáveis contínuas do campo para os átomos dependem do parâmetro de compressão, assim obtivemos o valor de parâmetro de compressão e o parâmetro de interação, que gera maior emaranhamento do átomo (B) com o par $(A_1 A_2)$. Além disso, observamos a transferência do emaranhamento do campo para os átomos utilizando a entropia de Von Neumann.

Capítulo 2

Campo eletromagnético e oscilador harmônico

A luz sempre foi objeto de estudo pelos físicos. Newton proporcionou grandes contribuições no campo da óptica, por outro lado ele não acreditava no comportamento ondulatório da luz. A unificação dos campos elétricos e magnéticos foi feita por Maxwell, que demonstrou que a luz tinha propriedades ondulatórias. As equações de Maxwell também admitem uma classe de soluções denominadas ondas eletromagnéticas, nas quais campos elétrico e magnético oscilam perpendicularmente, propagando no meio.

No início do século XX Mas Planck propôs um modelo para explicar o espectro de radiação do corpo negro, para isso Planck assumiu que as energias das oscilações na cavidade são quantizadas. Utilizando-se dessa idéia, Einstein propôs a quantização da radiação eletromagnética para explicar o efeito fotoelétrico, e com isso introduziu o conceito de fóton atribuindo propriedades corpusculares ao campo de radiação.

Dirac [20], combinou os aspectos ondulatórios e corpusculares da luz, para explicar todos os fenômenos de interferência, além de mostrar a excitação de um específico átomo localizado ao longo de uma onda frontal absorvendo um único fóton de energia. Com isso Dirac, associou cada modo do campo de radiação com um oscilador harmônico quantizado, essa é a essência da teoria quântica da radiação.

2.1 Quantização do campo eletromagnético

Para demonstrarmos como o campo eletromagnético é quantizado, primeiramente consideraremos ondas eletromagnéticas em uma região do espaço, onde a parte transversal da densidade de corrente é igual a zero ($J_T = 0$). Utilizando-se do gauge de Coulomb $\nabla \cdot \bar{A}(\bar{r}, t) = 0$, o potencial vetor $\bar{A}(\bar{r}, t)$ deverá satisfazer a equação de onda,

$$\nabla^2 \bar{A}(\bar{r}, t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{A}(\bar{r}, t) = 0. \quad (2.1)$$

Podemos considerar que o campo eletromagnético existe em uma caixa de lado L . Neste caso o potencial vetor pode ser expandido em uma série de Fourier,

$$\bar{A}(\bar{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \bar{A}_{\vec{k}}(t) e^{i \vec{k} \cdot \bar{r}} + \bar{A}_{-\vec{k}}(t) e^{-i \vec{k} \cdot \bar{r}}, \quad (2.2)$$

onde os componentes $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$, assumem valores discretos $k_j = 2\pi u_j/L$, com $u_j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. A condição do gauge de Columb é satisfeita apenas se $\vec{k} \cdot \bar{A}_{\vec{k}}(t) = 0$ e $-\vec{k} \cdot \bar{A}_{-\vec{k}}(t) = 0$. As componentes de $\bar{A}(\bar{r}, t)$ são independentes e separáveis satisfazendo a equação do campo,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{A}_{\vec{k}}(t) + \omega_k^2 \bar{A}_{\vec{k}}(t) = 0 \quad (2.3)$$

onde $\omega_k = c |\vec{k}|$.

Devemos introduzir uma posição efetiva e momento associado, com o modo do campo eletromagnético da caixa e também analisar o valor médio da energia.

A solução da Eq. (2.3) pode ser dada como $\bar{A}_{\vec{k}}(t) = \bar{A}_{\vec{k}} \exp(-i\omega_k t)$, deste modo o potencial vetor complexo é escrito como,

$$\bar{A}_{\vec{k}}(\bar{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \bar{A}_{\vec{k}} e^{-i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \bar{r})} + \bar{A}_{-\vec{k}} e^{i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \bar{r})}. \quad (2.4)$$

O valor médio da energia contendo um único modo de \vec{k} e obtido através da

integral,

$$\bar{\xi}_k = \frac{1}{2} \int_{\text{caixa}} (\epsilon_0 \bar{E}^2 + \mu_0 \bar{H}^2) d^3V. \quad (2.5)$$

Os campos elétrico e magnético associado com o modo \bar{k} , podem ser expressos em termos do potencial vetor \bar{A}_k , através das equações,

$$\bar{E}_k(\bar{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \bar{A}_k, \quad (2.6)$$

$$\bar{H}_k(\bar{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \bar{A}_k. \quad (2.7)$$

Através das relações do campo elétrico e magnético, com o potencial vetor, podemos obter a relação,

$$\bar{E}_k = -\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \nabla \times \bar{H}_k. \quad (2.8)$$

Desta maneira podemos expressar o valor médio de energia, contendo um único modo de k como,

$$\bar{\xi}_k = 2\epsilon_0 V \omega_k^2 \bar{A}_k \cdot \bar{A}_k, \quad (2.9)$$

onde $V = L^3$.

O potencial vetor associado a um dado modo k , é um número complexo e pode ser escrito como $z = a + ib$. Com isso conseguimos escrever o potencial, substituindo por uma quadratura generalizada adimensional x e p , ou seja,

$$\bar{A}_k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} (x_k + ip_k) \quad (2.10)$$

$$\bar{A}_k^\dagger = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_k}} (x_k - ip_k) \quad (2.11)$$

as coordenadas x_k e p_k são quantidades escalares.

A energia média associada a um único modo do campo pode ser expressa como,

$$\bar{\xi}_k = \frac{\omega_k}{4} x_k^2 + p_k^2. \quad (2.12)$$

A aproximação mais direta para a quantização do campo eletromagnético, consiste na substituição das variáveis clássicas x_k e p_k pelos operadores quânticos \hat{x}_k e \hat{p}_k , de maneira que,

$$[\hat{x}_k, \hat{p}_k] = 2i\delta_{kk'} \hat{1} \quad (2.13)$$

Nós associamos a cada modo do campo eletromagnético um oscilador harmônico quântico, definindo os operadores de aniquilação e criação de fótons,

$$\hat{a}_k = \frac{1}{2} (\hat{x}_k + i \hat{p}_k) \quad \text{e} \quad \hat{a}_k^\dagger = \frac{1}{2} (\hat{x}_k - i \hat{p}_k). \quad (2.14)$$

Conseqüentemente o operador número de fótons no modo k , e dado por,

$$\hat{n}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k. \quad (2.15)$$

Os potenciais vetores são quantizados, usando as definições da equação (2.14), nas equações (2.10) e (2.11), com isso temos,

$$\hat{A}_k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_k}{2\varepsilon_0 V}} \hat{a}_k, \quad (2.16)$$

$$\hat{A}_k^\dagger = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_k}{2\varepsilon_0 V}} \hat{a}_k^\dagger. \quad (2.17)$$

Utilizando-se das expressões quantizadas do potencial vetor, podemos escrever as

expressões quantizadas para o campo elétrico e magnético associado ao modo k , como

$$\hat{E}_k = i \frac{\omega_k}{2\epsilon_0 V} \left[\hat{a}_k e^{-i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r})} - \hat{a}_k^\dagger e^{i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \right], \quad (2.18)$$

$$\hat{H}_k = \frac{1}{2\mu_0 V} \omega_k^2 \left[\vec{k} \times \left(\hat{a}_k e^{-i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r})} - \hat{a}_k^\dagger e^{i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \right) \right]^2. \quad (2.19)$$

O Hamiltoniano para o campo eletromagnético quantizado pode ser escrito como,

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\text{caixa}} \left(\epsilon_0 \hat{E}^2 + \mu_0 \hat{H}^2 \right) d^3V = \sum_k \omega_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right), \quad (2.20)$$

onde a somatória em k representa um conjunto de osciladores harmônicos.

2.2 Relações de incerteza e compressão das flutuações quânticas

Considerando a relação de incerteza de um observável \hat{A} , a variação média é definida por,

$$(\Delta A)^2 = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2. \quad (2.21)$$

Para dois observáveis \hat{A} e \hat{B} , que não comutam, temos a seguinte relação,

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}, \quad (2.22)$$

neste caso não existem auto-estados simultâneos entre os observáveis \hat{A} e \hat{B} , deste modo eles não podem ser determinados precisamente quando medidos.

A relação de incerteza entre os dois observáveis pode ser expressa como,

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} \langle \hat{C} \rangle. \quad (2.23)$$

O estado em que $\Delta A \Delta B = \frac{\hbar}{2} \sqrt{\langle \hat{C}^2 \rangle}$, é chamado de estado inteligente. Se obtemos a incerteza mínima para os observáveis \hat{A} e \hat{B} , ou seja, $\Delta A = \Delta B = U$. Então o estado inteligente satisfaz a relação,

$$U^2 = \frac{\hbar^2}{4} \langle \hat{C}^2 \rangle. \quad (2.24)$$

Um estado inteligente, com incerteza $\Delta A < U$, é chamado de estado comprimido em relação ao observável \hat{A} .

2.3 Compressão das quadraturas do campo

Considerando um campo eletromagnético que possua um único fóton, e que os operadores \hat{x} e \hat{p} satisfaçam as relações de comutação de Heisenberg,

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar, \quad (2.25)$$

as relações de incerteza desses observáveis podem ser escritas como,

$$(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}. \quad (2.26)$$

Podemos também definir \hat{x}_θ , de modo que,

$$\hat{x}_\theta = \frac{1}{2} (\hat{a} e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{-i\theta}). \quad (2.27)$$

Com isso temos,

$$\hat{x} = \frac{1}{2} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) = \hat{x}_0 \quad (2.28)$$

e

$$\hat{p} = \frac{1}{2i} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) = \hat{x}_{\pi/2}. \quad (2.29)$$

A relação de incerteza para duas quadraturas \hat{x}_θ e $\hat{x}_{\theta+\pi/2}$, pode ser escrita como

$$(\Delta \hat{x}_\theta)^2 (\Delta \hat{x}_{\theta+\pi/2})^2 \geq \frac{1}{4}. \quad (2.30)$$

Existe uma determinada classe de estados para qual a igualdade na relação de incerteza é satisfeita. Estes estados são estados de incerteza mínima, dentro deste grupo de estados com incerteza mínima existe um grupo de estados comprimidos para qual,

$$(\Delta \hat{x}_\theta)^2 \leq \frac{1}{4}. \quad (2.31)$$

Para o caso em que o Hamiltoniano livre é invariante sob rotações de fase, os auto-estados do Hamiltoniano livre, podem ser estados de incerteza mínima, mas não podem ser estados comprimidos.

2.4 Estados de Fock

Considerando um único modo do campo eletromagnético com frequência ν , onde os operadores de criação e aniquilação para o campo são \hat{a}^\dagger e \hat{a} , respectivamente, e o vetor $|n\rangle$ é um auto estado do operador \hat{n} , com correspondente auto-valor de energia E_n , ou seja

$$\hat{H} |n\rangle = \hbar \nu \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = E_n |n\rangle. \quad (2.32)$$

Aplicando o operador \hat{a} no lado direito da equação (2.32), e utilizando a relação de comutação $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$, nós obtemos a seguinte equação,

$$\hat{H}\hat{a}|n\rangle = (E_n - \hbar\nu)\hat{a}|n\rangle. \quad (2.33)$$

Isso significa que o estado

$$\alpha_n |n - 1\rangle = \hat{a}|n\rangle, \quad (2.34)$$

na Eq. (2.34) temos um auto-vetor $|n - 1\rangle$, com auto-valor de energia reduzido de $\hbar\nu$, ou seja

$$E_{n-1} = E_n - \hbar\nu. \quad (2.35)$$

Se repetirmos o procedimento da Eq. (2.34) n vezes, nós descemos a escada de energias em degraus de $\hbar\nu$, até que obtemos,

$$\hat{H}\hat{a}|0\rangle = (E_0 - \hbar\nu)\hat{a}|0\rangle. \quad (2.36)$$

O auto valor de energia E_0 representa a energia do estado vácuo. Nós não possuímos valores de energia menores que E_0 para o oscilador, com isso concluímos que,

$$\hat{a}|0\rangle = 0. \quad (2.37)$$

A energia do estado vácuo é obtida aplicando o operador \hat{H} sobre o estado $|0\rangle$,

$$\hat{H}|0\rangle = \frac{\hbar\nu}{2}|0\rangle = E_0|0\rangle. \quad (2.38)$$

Através da Eq. (2.32), concluímos que a energia para o oscilador tem a seguinte forma,

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\nu. \quad (2.39)$$

Podemos determinar a constante de normalização α_n Eq. (2.34), da seguinte forma,

$$\langle n-1 | n-1 \rangle = \frac{1}{|\alpha_n|^2} \langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle = \frac{n}{|\alpha_n|^2} \langle n | n \rangle = \frac{n}{|\alpha_n|^2} = 1. \quad (2.40)$$

Com isso temos que $\alpha_n = \sqrt{n}$, desta maneira podemos escrever a Eq (2.34) como,

$$\hat{a} | n \rangle = \sqrt{n} | n-1 \rangle. \quad (2.41)$$

Também podemos calcular o valor de α_n para o caso em que \hat{a}^\dagger atua sobre o estado $| n \rangle$,

$$\hat{a}^\dagger | n \rangle = \sqrt{n+1} | n+1 \rangle. \quad (2.42)$$

Se aplicarmos \hat{a}^\dagger repetidas vezes sobre o estado $| 0 \rangle$, obtemos,

$$| n \rangle = \frac{\hat{a}^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} | 0 \rangle. \quad (2.43)$$

Os auto estados $| n \rangle$ são chamados de estados de Fock ou estados número. Eles formam um conjunto completo de estados, de modo que,

$$\sum_{n=0}^{\infty} | n \rangle \langle n | = 1. \quad (2.44)$$

Os auto valores de energia para esses estados são discretos, e o quanta de energia corresponde a $\hbar\omega$, o auto valor de energia do estado $| 0 \rangle$ equivale $\hbar\omega/2$, e é conhecido como energia do vácuo. As energias dos estados de Fock contrastam com os valores de energias para um campo eletromagnético clássico que possui um espectro contínuo de energia.

2.5 Estados Coerentes

Os estados coerentes foram primeiramente descobertos por Schrödinger em 1926, nesse ano ele produziu seis importantes artigos [19], onde o principal artigo se tratava da solução do átomo de hidrogênio.

Usando a função geradora encontrada no livro clássico de Courant e Hilbert, Schrödinger demonstrou que uma função de onda Gaussiana pode ser construída como uma superposição particular de funções de ondas, correspondentes para os auto-valores discretos do oscilador harmônico. Ele também descobriu que esses estados possuíam propriedades semi-clássicas.

No início da década de sessenta Glauber [22] apresentou relações entre os estados coerentes e propriedades do campo de radiação, dando origem ao que se conhece hoje como óptica quântica.

Um estado coerente é um estado não clássico com comportamento bem próximo ao dos estados clássicos. Esses estados são definidos como auto estados do operador aniquilação, ou seja,

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (2.45)$$

onde α é um número complexo. Atuando com o operador identidade sobre $|\alpha\rangle$, temos

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|\alpha\rangle. \quad (2.46)$$

Utilizando-se da equação (2.43), podemos escrever a equação (2.46) como,

$$|\alpha\rangle = \langle 0|\alpha\rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)^n}{n!} |n\rangle. \quad (2.47)$$

Através da relação de ortogonalidade $\langle n|\alpha\rangle = 1$, podemos determinar a constante de normalização $\langle 0|\alpha\rangle$,

$$\langle \alpha | \alpha \rangle = \langle 0 | \alpha \rangle^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = 1,$$

com isso temos,

$$\langle 0 | \alpha \rangle = \exp \left[-\frac{|\alpha|^2}{2} \right]. \quad (2.48)$$

Deste modo, a expressão para o estado coerente $|\alpha\rangle$, tem a seguinte forma,

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{n!} |n\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha \hat{a}^\dagger{}^n}{n!} |0\rangle. \quad (2.49)$$

Podemos utilizar a propriedade $\exp(-\alpha \hat{a}) |0\rangle = |0\rangle$, para reescrever a equação (2.50), de modo que,

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{\alpha \hat{a}} |0\rangle. \quad (2.50)$$

Definindo o operador de deslocamento

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha \hat{a}}, \quad (2.51)$$

verificamos que $|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle$.

Utilizando-se da fórmula de Baker-Hausdorff, que demonstra que se os operadores \hat{A} e \hat{B} , comutam com $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$, se,

$$[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{A}] = [[\hat{A}, \hat{B}], \hat{B}] = 0, \quad (2.52)$$

eles possuem a seguinte propriedade,

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{[\hat{A}, \hat{B}]/2} e^{\hat{A}} e^{\hat{B}}. \quad (2.53)$$

Como \hat{a}^\dagger e \hat{a} , possuem a mesma relação de comutação da equação (2.53) podemos ree-

escrever o operador deslocamento $\hat{D}(\alpha)$ como,

$$\hat{D}(\alpha) = e^{(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})}. \quad (2.54)$$

O operador deslocamento é unitário,

$$\hat{D}(\alpha) = \hat{D}(\alpha)^{-1} = \hat{D}(\alpha)^\dagger. \quad (2.55)$$

Atuando $\hat{D}(\alpha)$, sobre os operadores de aniquilação e criação, \hat{a} e \hat{a}^\dagger temos,

$$\hat{D}^{-1}(\alpha)\hat{a}\hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha \quad (2.56)$$

$$\hat{D}^{-1}(\alpha)\hat{a}^\dagger\hat{D}(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*. \quad (2.57)$$

Isso representa um deslocamento nas quadraturas x e p , do campo eletromagnético. Podemos verificar esse deslocamento nas quadraturas do campo aplicando o operador deslocamento em \hat{x} e \hat{p} ,

$$\hat{D}^{-1}(\alpha)\hat{x}\hat{D}(\alpha) = \frac{\hbar}{2\omega m}(\hat{a}^\dagger + \alpha^* + \hat{a} + \alpha) = \frac{\hbar}{2\omega m}[\hat{x} + \text{Re}(\alpha)], \quad (2.58)$$

$$\hat{D}^{-1}(\alpha)\hat{p}\hat{D}(\alpha) = \frac{\hbar\omega m}{2}(\hat{a}^\dagger + \alpha^* - \hat{a} - \alpha) = \frac{\hbar\omega m}{2}[\hat{p} - \text{Im}(\alpha)]. \quad (2.59)$$

Através das equações (2.58) e (2.59), demonstramos que a ação do operador deslocamento provoca um deslocamento nas quadraturas do campo. Conseqüentemente um estado coerente $|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle$, tem quadraturas ,

$$\langle\hat{x}\rangle = \frac{\hbar}{2\omega m}\text{Re}(\alpha) \text{ e } \langle\hat{p}\rangle = -\frac{\hbar\omega m}{2}\text{Im}(\alpha).$$

2.5.1 Propriedades dos estados coerentes.

Não ortogonalidade

O produto escalar entre dois estados coerentes tem resultado não nulo, ou seja estados coerentes, são estados não ortogonais. Podemos verificar essa propriedade calculando o produto escalar entre os estado $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$,

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}|\beta|^2 + \alpha\beta^* - \frac{1}{2}|\alpha|^2\right], \quad (2.60)$$

fazendo o módulo da equação (1.61) temos

$$|\langle\beta|\alpha\rangle|^2 = \exp\left[-|\beta - \alpha|^2\right] \quad (2.61)$$

ou

$$|\langle\beta|\alpha\rangle| = \exp\left[-\frac{1}{2}|\beta - \alpha|^2\right]. \quad (2.62)$$

Supercompleteza

O conjunto de todos os estados coerentes $|\alpha\rangle$, formam um conjunto supercompleto. Para demonstrarmos essa propriedade primeiro devemos considerar a seguinte integral,

$$J = \int |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha, \quad (2.63)$$

onde $d^2\alpha = d(\text{Re } \alpha)d(\text{Im } \alpha)$. Reescrevendo a integral, com o estado $|\alpha\rangle$, escrito em função do estado $|n\rangle$ Eq. (2.48) temos,

$$J = \sum_{n, n^0} \frac{|n^0 i h n|}{n^0! n!} \int_0^\infty (\alpha^0)^{n^0} \alpha^n \exp[-|\alpha|^2] d^2\alpha. \quad (2.64)$$

Para calcular a integral utilizaremos coordenadas polares,

$$\alpha = r e^{i\theta}, \quad d^2\alpha = r dr d\theta. \quad (2.65)$$

Deste modo a integral tem a seguinte forma,

$$J = \sum_{n, n^0} \frac{|n^0 i h n|}{n^0! n!} \int_0^\infty r^{n^0+n+1} e^{-r^2} dr \int_0^\infty e^{i(n^0-n)\theta} d\theta. \quad (2.66)$$

Para todo $n^0 = n$ a expressão acima se anula, desta maneira ela assume a seguinte forma,

$$J = \sum_n \frac{|n i h n|}{n!} \int_0^\infty r^{2n+1} e^{-r^2} dr = \pi. \quad (2.67)$$

Com isso podemos verificar que a relação de completudeza para os estados coerentes é escrita como,

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha i h \alpha| d^2\alpha = 1. \quad (2.68)$$

Relação de incerteza para estados coerentes.

Utilizando-se da equação (2.49), $\hat{a} |\alpha i = \alpha |\alpha i$ obtemos os valores esperados dos operadores \hat{x} , \hat{x}^2 , \hat{p} e \hat{p}^2 , como

$$\langle \alpha | \hat{x} | \alpha \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} (\alpha + \alpha^0), \quad (2.69)$$

$$\langle \alpha | \hat{x}^2 | \alpha \rangle = \frac{\hbar^2}{2m\omega^2} (\alpha + \alpha^0)^2 + \frac{\hbar}{2m\omega}, \quad (2.70)$$

$$\langle \alpha | \hat{p} | \alpha \rangle = i \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} (\alpha - \alpha^*) \quad (2.71)$$

e

$$\langle \alpha | \hat{p}^2 | \alpha \rangle = -\frac{\hbar^2 m \omega}{2} (\alpha - \alpha^*)^2 - \hbar^2.$$

Fazendo uso dos valores esperados podemos calcular as incertezas Δx e Δp , com isso temos,

$$(\Delta x)^2 = \langle \hat{x}^2 \rangle - \langle \hat{x} \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{2m\omega} \quad (2.72)$$

e

$$(\Delta p)^2 = \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2 = \hbar^2 m \omega. \quad (2.73)$$

Desta maneira obtemos a relação de incerteza $\Delta x \Delta p = \hbar/2$, mostrando com isso que estados coerentes são estados com incerteza mínima.

2.6 Estados Comprimidos

Em 1927, Kennard [21] escreveu um artigo sobre movimento quântico, onde introduziu os estados comprimidos. Esses estados são distribuições gaussianas, e suas larguras não são as mesmas do estado fundamental, e a largura do produto das incertezas para estes estados varia com tempo. Na época este artigo não teve muita importância, só sendo estudado tempos mais tarde.

Para estudarmos os estados comprimidos, primeiramente verificaremos a relação de incerteza para estes estados.

Considerando dois operadores hermitianos \hat{A} e \hat{B} , que satisfazem a seguinte relação de comutação,

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}, \quad (2.74)$$

de acordo com as relações de incerteza de Heisenberg, o produto das incertezas de dois observáveis A e B, é dado por,

$$4\hat{\Delta}_A \hat{\Delta}_B \geq \frac{1}{2} \langle \hat{C} \rangle. \quad (2.75)$$

Um estado é chamado de comprimido se a incerteza em um observável (A, por exemplo) satisfaz a relação,

$$4\hat{\Delta}_A^2 < \frac{1}{2} \langle \hat{C} \rangle, \quad (2.76)$$

além desta condição esse estado deve possuir incerteza mínima ou seja,

$$4\hat{\Delta}_A \hat{\Delta}_B = \frac{1}{2} \langle \hat{C} \rangle. \quad (2.77)$$

Satisfazendo essas duas propriedades o estado é chamado de estado comprimido ideal.

O operador de compressão $\hat{S}(\xi)$, é definido como,

$$\hat{S}(\xi) = \exp \frac{1}{2} i \xi^* \hat{a}^2 - \xi \hat{a}^{\dagger 2}, \quad (2.78)$$

onde $\xi = s \exp(i\theta)$, é um número complexo arbitrário. Também podemos verificar que $\hat{S}(\xi)$, é um operador unitário,

$$\hat{S}(\xi) = \hat{S}(\xi)^{-1} = \hat{S}^\dagger(\xi). \quad (2.79)$$

Atuando com $\hat{S}(\xi)$ sobre os operadores de aniquilação e criação, \hat{a} e \hat{a}^\dagger temos,

$$\hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a} \hat{S}(\xi) = \hat{a} \cosh s - \hat{a}^\dagger e^{i\theta} \sinh s = \mu \hat{a} - \nu \hat{a}^\dagger, \quad (2.80)$$

$$\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{a}^\dagger\hat{S}(\xi) = \hat{a}^\dagger \cosh s - \hat{a}e^{-i\theta} \sinh s. = \mu\hat{a}^\dagger - v\hat{a}, \quad (2.81)$$

onde $\mu = \cosh s$, e $v = e^{i\theta} \sinh s$. As equações acima são obtidas utilizando a seguinte propriedade dos operadores ,

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} - [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \quad (2.82)$$

Podemos reescrever as Eqs (2.80) e (2.81) definindo novos operadores de aniquilação e criação de fótons do campo comprimido, \hat{b} e \hat{b}^\dagger ,

$$\mu\hat{a} - v\hat{a}^\dagger = \hat{b}, \quad (2.83)$$

$$\mu\hat{a}^\dagger - v\hat{a} = \hat{b}^\dagger. \quad (2.84)$$

Dado as quadraturas do campo eletromagnético,

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (2.85)$$

$$\hat{X}_2 = \frac{1}{i\sqrt{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \quad (2.86)$$

Atuando com $\hat{S}(\xi)$, sobre as quadraturas do campo temos,

$$\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{X}_1\hat{S}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) = \hat{Y}_1, \quad (2.87)$$

$$\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{X}_2\hat{S}(\xi) = \frac{1}{i\sqrt{2}} (\hat{b} - \hat{b}^\dagger) = \hat{Y}_2. \quad (2.88)$$

Podemos reescrever \hat{Y}_1 e \hat{Y}_2 , em termos de \hat{X}_1 e \hat{X}_2 ,

$$\hat{Y}_1 = \hat{X}_1 e^{-s}, \quad (2.89)$$

$$\hat{Y}_2 = \hat{X}_2 e^s. \quad (2.90)$$

Através das Eqs. (2.89) e (2.90), podemos concluir que a ação do operador de compressão sobre as quadraturas do campo, causa um alargamento em uma quadratura e a compressão de outra, dependendo se o valor de s for positivo ou negativo.

Um estado coerente comprimido $|\alpha, \xi\rangle$, é obtido a partir da ação do operador deslocamento $\hat{D}(\alpha)$, sobre o estado vácuo, seguido da ação do operador de compressão $\hat{S}(\xi)$,

$$|\alpha, \xi\rangle = \hat{S}(\xi)\hat{D}(\alpha)|0\rangle. \quad (2.91)$$

Um estado coerente é gerado a partir de termos lineares de \hat{a} e \hat{a}^\dagger , enquanto um estado comprimido é gerado via termos quadráticos em a e a^\dagger . Verificaremos a seguir os valores esperados de \hat{a} , \hat{a}^\dagger , \hat{a}^2 , $(\hat{a}^\dagger)^2$ e $\hat{a}^\dagger\hat{a}$, para o estado $|\alpha, \xi\rangle$. Com isso temos,

$$\begin{aligned} \langle \hat{a} \rangle &= \langle \alpha, \xi | \hat{a} | \alpha, \xi \rangle = \langle 0 | \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a} \hat{S}(\xi) \hat{D}(\alpha) | 0 \rangle \\ &= \langle \alpha | \hat{a} \cosh s - \hat{a}^\dagger e^{i\theta} \sinh s | \alpha \rangle \\ &= \alpha \cosh s - \alpha e^{i\theta} \sinh s, \end{aligned} \quad (2.92)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^2 \rangle &= \langle \alpha, \xi | \hat{a}^2 | \alpha, \xi \rangle = \langle 0 | \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a}^2 \hat{S}(\xi) \hat{D}(\alpha) | 0 \rangle \\ &= \langle \alpha | \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a} \hat{S}(\xi) \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a} \hat{S}(\xi) | \alpha \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha^2 \cosh^2 s - (\alpha^{\square})^2 e^{2i\theta} \sinh^2 s - 2|\alpha|^2 e^{i\theta} \sinh s \cosh s \\
&\quad - e^{i\theta} \sinh s \cosh s, \tag{2.93}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{a}^{\dagger} \hat{a}^{\psi} &= |\alpha|^2 (\cosh^2 s + \sinh^2 s) - (\alpha^{\square})^2 e^{i\theta} \sinh s \cosh s \\
&\quad - \alpha^2 e^{-i\theta} \sinh s \cosh s + \sinh^2 s. \tag{2.94}
\end{aligned}$$

Utilizando desses resultados, as incertezas nas quadraturas Y_1 e Y_2 , são

$$\Delta \hat{Y}_1^2 = \langle (\hat{Y}_1)^2 \rangle - \langle \hat{Y}_1 \rangle^2 = \frac{1}{4} e^{-2s}, \tag{2.95}$$

$$(\Delta Y_2)^2 = \langle (Y_2)^2 \rangle - \langle Y_2 \rangle^2 = \frac{1}{4} e^{2s}. \tag{2.96}$$

Com isso podemos verificar que um estado coerente comprimido possui incerteza mínima,

$$\Delta \hat{Y}_1 \Delta \hat{Y}_2 = \frac{1}{4}.$$

Verificando o resultado das incertezas ΔY_1 e ΔY_2 , percebemos que estas quantidades dependem do valor de s . Então se uma quadratura é comprimida conseqüentemente a outra quadratura é alargada.

2.6.1 Estados comprimidos de dois modos

Estados comprimidos são gerados através de conversão paramétrica descendente. Este processo consiste na incidência de fótons sobre um meio óptico não linear (cristal de KH_2PO_4). Considerando um fóton com frequência ω_1 enviado através de um meio

óptico não linear, após a interação com o meio, o campo é convertido para dois fótons com frequência ω_2 e ω_3 , onde $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$.

Na representação de interação o Hamiltoniano efetivo correspondente para o processo de conversão paramétrica descendente, é escrito como,

$$\hat{H}_I = i\hbar(\xi \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger - \xi^* \hat{a}_1 \hat{a}_2), \quad (2.97)$$

a quantidade ξ , inclui a amplitude do campo dirigido e também a suscetibilidade de segunda ordem para a conversão paramétrica. Os subscritos 1 e 2 dos operadores bosônicos de criação e aniquilação indicam em qual modo do campo eles atuam, pois se trata de um campo comprimido de dois modos. O operador evolução para o processo de conversão paramétrica descendente é dado por,

$$\hat{U}(t) = \exp[-i\hat{H}_I t/\hbar] = \exp(\xi \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger - \xi^* \hat{a}_1 \hat{a}_2) \equiv \hat{S}_{12}(\xi), \quad (2.98)$$

onde $\hat{S}_{12}(\xi)$ é chamado de operador de compressão de dois modos, com $\xi = s \exp(i\theta)$. O termo s é o parâmetro de compressão e θ é o ângulo de fase. O operador $\hat{S}_{12}(\xi)$ pode ser escrito como um produto de exponenciais, de modo que,

$$\hat{S}_{12}(\xi) = (\cosh s)^{-1} \exp \left[-\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger e^{2i\theta} \tanh s \right] \exp \left[-\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \right] \ln(\cosh s) \times \exp \left[-\hat{a}_1 \hat{a}_2 e^{2i\theta} \tanh s \right]. \quad (2.99)$$

A ação do operador compressão $\hat{S}_{12}(\xi)$, sobre o vácuo produz um estado comprimido de dois modos,

$$\hat{S}_{12}(\xi) |0i_1\rangle |0i_2\rangle = (\cosh s)^{-1} \exp \left[-\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger e^{2i\theta} \tanh s \right] |0i_1\rangle |0i_2\rangle =$$

$$|\xi_{12}\rangle = \frac{1}{\cosh s} \sum_{m=0}^{\infty} e^{im\theta} (\tanh s)^m |mi_1\rangle |mi_2\rangle. \quad (2.100)$$

Os estados comprimidos são estados do campo, que possuem emaranhamento de variáveis contínuas. No capítulo V de nosso trabalho estudaremos a transferência desse emaranhamento para átomos aprisionados em cavidades espacialmente separadas. A quantificação do emaranhamento para estados comprimidos será apresentada no capítulo IV sobre medidas de emaranhamento.

Capítulo 3

Átomos aprisionados em cavidades

Em 1963 Jaynes e Cummings [32], apresentaram um modelo para descrever a interação de um átomo de dois níveis com o campo eletromagnético de um único modo, que é conhecida como modelo Jaynes-Cummings (JCM). Esse modelo é de grande simplicidade e com uma vasta riqueza de detalhes, e vem sendo vastamente estudado nas últimas décadas. Um trabalho de revisão sobre o modelo JCM e algumas das aplicações foi publicado por Shore e Knight [33].

O modelo JCM oferece uma grande possibilidade para gerar estados não clássicos dos modos do campo nas cavidades. G. Rempe et al [34], realizaram experimentos com átomos interagindo com os estados comprimidos de luz nas cavidades ópticas. Além disso, existem outras propostas para geração de estados do campo como, os estados de Fock [37] [38], estados gato [39] e uma superposição geral de estados [40], [41] nas cavidades. Outras propostas envolvendo a implementação do modelo JCM são observações de colapsos e revivamentos da inversão da população atômica [42] [43], tomografia quântica [47], teste de desigualdade Bell [45] [46], teletransporte quântico [47] e computação quântica [48].

Neste capítulo utilizaremos o modelo JCM para descrição da evolução temporal de um sistema composto de um átomo de dois níveis, interagindo com um campo de único modo na cavidade, e também apresentaremos a dinâmica de um sistema de dois átomos de dois níveis cada interagindo com um campo de único modo na cavidade.

3.1 Um átomo de dois níveis interagindo com o campo na Cavidade

O modelo JCM é um dos mais elementares no estudo da interação do campo eletromagnético com a matéria. Utilizaremos o modelo JCM para descrever a interação de um átomo de dois níveis em uma cavidade sem dissipação com um campo quantizado de modo único. Como estamos tratando de átomos de dois níveis podemos escrever seus vetores na base computacional atribuindo o vetor base $|0\rangle$ para o estado fundamental e $|1\rangle$ para o estado excitado. O Hamiltoniano JCM para esse sistema é escrito como,

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hbar\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z + g(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) \hat{a} e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}, \quad (3.1)$$

onde ω_0 é a frequência do campo e $\hbar\omega_a$ é a energia de excitação do átomo, g é a constante de acoplamento entre átomo e o campo. Os operadores de Pauli $\hat{\sigma}_z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|$, $\hat{\sigma}_+ = |1\rangle\langle 0|$ e $\hat{\sigma}_- = |0\rangle\langle 1|$, atuam sobre os estados do átomo de dois níveis, da forma que,

$$\hat{\sigma}_+ |0\rangle = |1\rangle, \quad \hat{\sigma}_- |1\rangle = |0\rangle, \quad (3.2)$$

$$\hat{\sigma}_z |1\rangle = |1\rangle, \quad \hat{\sigma}_z |0\rangle = -|0\rangle. \quad (3.3)$$

Os operadores de criação e aniquilação de fóton, \hat{a}^\dagger e \hat{a} , obedecendo a relação de comutação,

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad (3.4)$$

atuam sobre os estados números de fótons $|n\rangle$, auto vetor do operador número $\hat{a}^\dagger \hat{a}$, de

modo que,

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = \hat{n} |n\rangle, \hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \quad (3.5)$$

O Hamiltoniano da equação (3.1) pode ser escrito como uma soma de

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hbar\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z \quad (3.6)$$

e do Hamiltoniano de interação átomo campo,

$$\hat{H}_I = g\hbar (\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) (\hat{a} e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}). \quad (3.7)$$

Expandindo \hat{H}_I , obtemos quatro termos, sendo que $\hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger$, descreve o processo pelo qual o átomo é levado do estado excitado para o fundamental, com isso o campo na cavidade ganha um fóton. O termo $\hat{\sigma}_+ \hat{a}$, corresponde a aniquilação de um fóton na cavidade levando o átomo de um estado fundamental para o estado excitado. O termo $\hat{\sigma}_- \hat{a}$ descreve o processo em que o átomo vai para o estado fundamental e o campo perde um fóton. O termo $\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger$ descreve o processo em que o átomo é excitado e o campo ganha um fóton.

3.1.1 A aproximação de onda girante

Reescrevemos o Hamiltoniano de interação na representação de interação fazendo a transformação unitária.

$$\hat{H}_{II} = \hat{U}_0^\dagger \hat{H}_I \hat{U}_0, \quad (3.8)$$

onde $\hat{U}_0 = \exp[-i\hat{H}_0 t/\hbar]$. Através da relação de Baker-Campbell-Hausdorff generalizada,

$$e^{c\hat{A}} B e^{-c\hat{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} c^n [\hat{A}, \cdot]^n B = e^{c[\hat{A}, \cdot]} B, \quad (3.9)$$

onde

$$[\hat{A}, \cdot]^0 B = B, \quad [\hat{A}, \cdot]^1 B = [\hat{A}, B], \quad [\hat{A}, \cdot]^2 B = [\hat{A}[\hat{A}, B]].$$

Obtemos,

$$e^{i\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} t} \hat{a} e^{-i\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} t} = \hat{a} e^{-i\omega_0 t}, \quad (3.10)$$

$$e^{i\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} t} \hat{a}^\dagger e^{-i\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} t} = \hat{a}^\dagger e^{i\omega_0 t}, \quad (3.11)$$

$$e^{\frac{i}{2} \omega_a \hat{\sigma}_z t} \hat{\sigma}_+ e^{-\frac{i}{2} \omega_a \hat{\sigma}_z t} = \hat{\sigma}_+ e^{i \omega_a t}, \quad (3.12)$$

$$e^{\frac{i}{2} \omega_a \hat{\sigma}_z t} \hat{\sigma}_- e^{-\frac{i}{2} \omega_a \hat{\sigma}_z t} = \hat{\sigma}_- e^{-i \omega_a t}. \quad (3.13)$$

Deste modo o Hamiltoniano de interação na representação de interação tem a seguinte forma,

$$H_{II} = g \left(\hat{a} \hat{\sigma}_+ e^{i\delta t} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- e^{-i\delta t} + \hat{a} \hat{\sigma}_- e^{-i4t} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_+ e^{-i4t} \right),$$

onde a dissintonia do campo é dada por $\delta = \omega_a - \omega_0$ e $4 = \omega_a + \omega_0$.

Utilizando a aproximação de onda girante [36] $\omega_a - \omega_0 \ll 0$, deste modo temos que $\sim (\omega_a + \omega_0) \hat{A} \sim (\omega_a - \omega_0)$, com essa aproximação podemos desprezar os termos $\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_+$ e $\hat{a} \hat{\sigma}_-$, pois esses termos oscilam com frequências mais altas, ou seja $\omega_a + \omega_0 \gg 0$, e os termos $\hat{a} \hat{\sigma}_+$ e $\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-$, oscilam mais lentamente perto da ressonância com $\omega_a - \omega_0 \ll 0$.

Com a aproximação de onda girante o Hamiltoniano de interação na representação de interação é escrito da seguinte forma,

$$\hat{H}_{II} = g \sim \left[\hat{a} \hat{\sigma}_+ e^{i\omega t} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- e^{-i\omega t} \right]. \quad (3.14)$$

3.1.2 Evolução temporal

Para calcularmos a evolução temporal do sistema que envolve átomo de dois níveis e o campo de um único modo no estado de Fock, utilizaremos a condição $\omega_a - \omega_0 = 0$. Deste modo podemos escrever o Hamiltoniano de interação da equação (3.14), na forma matricial, utilizamos a base acoplada $| \sigma_z, n \rangle$, onde os vetores bases para o sistema são escritos como,

$$| -1, n \rangle \text{ e } | 1, n - 1 \rangle, \quad (3.15)$$

que na base computacional tem a seguinte forma,

$$| 0, n \rangle \text{ e } | 1, n - 1 \rangle, \quad (3.16)$$

onde $| 0 \rangle$ representa o átomo no estado fundamental e $| 1 \rangle$ o átomo no estado excitado e $| n \rangle$ representa o número de fótons. Deste modo H_{II} na forma matricial é escrito como,

$$H_{II} = g \sim \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{n} \\ \sqrt{n} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Diagonalizando o hamiltoniano de interação da equação (3.17), obtemos os autovetores

$$| \phi_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (| 0, n \rangle + | 1, n - 1 \rangle), \quad (3.18)$$

e

$$| \phi_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (| 0, n \rangle - | 1, n - 1 \rangle). \quad (3.19)$$

Que correspondem aos autovalores de energia,

$$E_1 = g\sqrt{n} \text{ e } E_2 = -g\sqrt{n}.$$

Podemos escrever os vetores base $|0, n\rangle$ e $|1, n-1\rangle$, em termos de $|\varphi_1\rangle$ e $|\varphi_2\rangle$, como,

$$|0, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle), \quad (3.20)$$

$$|1, n-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\varphi_1\rangle - |\varphi_2\rangle). \quad (3.21)$$

Para calcularmos a evolução temporal do sistema no estado inicial $|0, n\rangle$ e $|1, n-1\rangle$, usamos o operador de evolução temporal,

$$\hat{U}(t) = \exp(-i\hat{H}_{II}t/\hbar), \quad (3.22)$$

que pode ser escrito na forma matricial como,

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\sqrt{\hbar}gt}{2} & -i \sin \frac{\sqrt{\hbar}gt}{2} \\ -i \sin \frac{\sqrt{\hbar}gt}{2} & \cos \frac{\sqrt{\hbar}gt}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Deste modo

$$\hat{U}(t)|0, n\rangle = |\Psi_1(t)\rangle, \quad (3.24)$$

onde

$$|\Psi_1(t)\rangle = \cos \frac{\sqrt{\hbar}gt}{2} |0, n\rangle - i \sin \frac{\sqrt{\hbar}gt}{2} |1, n-1\rangle \quad (3.25)$$

e

$$U(t)|1, n-1\rangle = |\Psi_2(t)\rangle, \quad (3.26)$$

onde

$$|\Psi_2(t)\rangle = -i \sin\left(\frac{\sqrt{\hbar} g t}{2}\right) |0, n\rangle + \cos\left(\frac{\sqrt{\hbar} g t}{2}\right) |1, n-1\rangle. \quad (3.27)$$

3.2 Dois átomos interagindo com o campo na cavidade.

O Hamiltoniano para o sistema que consiste dois átomos de dois níveis interagindo com um campo de único modo na cavidade, tem a seguinte forma,

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hbar\omega_a}{2} \hat{\sigma}_z + g(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-) \hat{a} e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}, \quad (3.28)$$

onde,

$$\hat{\sigma}_z = \hat{\sigma}_z^{(1)} + \hat{\sigma}_z^{(2)}, \quad \hat{\sigma}_+ = \hat{\sigma}_+^{(1)} + \hat{\sigma}_+^{(2)} \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}_- = \hat{\sigma}_-^{(1)} + \hat{\sigma}_-^{(2)}, \quad (3.29)$$

o sobrescrito (1) e (2), denota em que átomo o operador atua.

Com a aproximação de onda girante o Hamiltoniano de interação na representação de interação é escrito da seguinte forma,

$$\hat{H}_{I1} = g(\hat{a}\hat{\sigma}_+ e^{i\omega t} + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- e^{-i\omega t}). \quad (3.30)$$

Para calcularmos a evolução temporal utilizando a condição $\omega_a - \omega_0 = 0$, utilizamos a base acoplada $|\sigma_z, a^\dagger a\rangle$, onde os vetores bases para o sistema são escritos como,

$$|-2, n+1\rangle, |0, n\rangle \quad \text{e} \quad |2, n-1\rangle, \quad (3.31)$$

que na base computacional tem a seguinte forma,

$$|0, 0, n+1\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|0, 1\rangle + |1, 0\rangle) |n\rangle \text{ e } |1, 1, n-1\rangle. \quad (3.32)$$

O Hamiltoniano de interação na forma matricial é dado por,

$$H_{II} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & B & 0 \\ B & 0 & A \\ 0 & A & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

onde,

$$B = \sqrt{n+1} \text{ e } A = \sqrt{n}$$

Diagonalizando o Hamiltoniano de interação obtemos os autovalores,

$$E_1 = \sqrt{2(A^2 + B^2)}, \quad E_2 = 0 \text{ e } E_3 = -\sqrt{2(A^2 + B^2)}, \quad (3.34)$$

que correspondem aos autovetores,

$$|\varphi_1\rangle = \frac{B}{\sqrt{2(A^2 + B^2)}} |-2, n+1\rangle + \frac{1}{2} |0, n\rangle + \frac{A}{\sqrt{2(A^2 + B^2)}} |2, n-1\rangle, \quad (3.35)$$

$$|\varphi_2\rangle = \frac{-A}{\sqrt{A^2 + B^2}} |-2, n+1\rangle + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} |2, n-1\rangle \quad (3.36)$$

e

$$|\varphi_3\rangle = \frac{-B}{\sqrt{2(A^2 + B^2)}} |-2, n+1\rangle + \frac{1}{2} |0, n\rangle - \frac{A}{\sqrt{2(A^2 + B^2)}} |2, n-1\rangle. \quad (3.37)$$

Podemos escrever os vetores base equação (3.31) em termos de $|\varphi_1 i$, $|\varphi_2 i$ e $|\varphi_3 i$ como,

$$|-2, n + 1 i = \frac{B}{2(A^2 + B^2)} (|\varphi_1 i - |\varphi_3 i) - \frac{A}{(A^2 + B^2)} |\varphi_2 i, \quad (3.38)$$

$$|0, n i = \frac{1}{2} (|\varphi_1 i + |\varphi_3 i) \quad (3.39)$$

e

$$|2, n - 1 i = \frac{A}{2(A^2 + B^2)} (|\varphi_1 i - |\varphi_3 i) - \frac{B}{(A^2 + B^2)} |\varphi_2 i. \quad (3.40)$$

3.2.1 Evolução temporal

A evolução temporal para os vetores base $|-2, n + 1 i$, $|0, n i$ e $|2, n - 1 i$, e calculada atuando com o operador evolução,

$$\hat{U}(t) = \exp(-i \hat{H}_{II} t/\hbar), \quad (3.41)$$

que pode ser escrito na forma matricial como,

$$U(t) = \begin{pmatrix} \frac{B^2 \cos \sqrt{2A^2 + 2B^2} t + A^2}{A^2 + B^2} & -iB \frac{\sin \sqrt{2A^2 + 2B^2} t}{A^2 + B^2} & AB \frac{\cos \sqrt{2A^2 + 2B^2} t - 1}{A^2 + B^2} \\ -iB \frac{\sin \sqrt{2A^2 + 2B^2} t}{A^2 + B^2} & \frac{\cos \sqrt{2A^2 + 2B^2} t}{A^2 + B^2} & -iA \frac{\sin \sqrt{2A^2 + 2B^2} t}{A^2 + B^2} \\ AB \frac{\cos \sqrt{2A^2 + 2B^2} t - 1}{A^2 + B^2} & -iA \frac{\sin \sqrt{2A^2 + 2B^2} t}{A^2 + B^2} & \frac{A^2 \cos \sqrt{2A^2 + 2B^2} t + B^2}{A^2 + B^2} \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Atuando com $\hat{U}(t)$ sobre os vetores base temos,

$$U(t) |-2, n + 1 i = |\Psi_1(t) i, \quad (3.43)$$

onde

$$|\Psi_1(t)\rangle = \frac{B^2 \cos \frac{\sqrt{2(A^2 + B^2)}gt}{2} + A^2}{A^2 + B^2} |-2, n + 1\rangle - \frac{iB \sin \frac{\sqrt{2(A^2 + B^2)}gt}{2}}{\sqrt{A^2 + B^2}} |0, n\rangle + \frac{AB \cos \frac{\sqrt{2(A^2 + B^2)}gt}{2} - 1}{A^2 + B^2} |2, n - 1\rangle, \quad (3.44)$$

$$\hat{U}(t) |0, n\rangle = |\Psi_2(t)\rangle, \quad (3.45)$$

onde

$$|\Psi_2(t)\rangle = -\frac{iB \sin \frac{\sqrt{2(A^2 + B^2)}gt}{2}}{\sqrt{A^2 + B^2}} |-2, n + 1\rangle + \cos \frac{\sqrt{2(A^2 + B^2)}gt}{2} |0, n\rangle - \frac{iA \sin \frac{\sqrt{2(A^2 + B^2)}gt}{2}}{\sqrt{A^2 + B^2}} |2, n - 1\rangle \quad (3.46)$$

e

$$\hat{U}(t) |2, n - 1\rangle = |\Psi_3(t)\rangle, \quad (3.47)$$

onde

$$|\Psi_3(t)\rangle = \frac{AB \cos \frac{\sqrt{2(A^2 + B^2)}gt}{2} - 1}{A^2 + B^2} |-2, n + 1\rangle - \frac{iA \sin \frac{\sqrt{2(A^2 + B^2)}gt}{2}}{\sqrt{A^2 + B^2}} |0, n\rangle + \frac{A^2 \cos \frac{\sqrt{2(A^2 + B^2)}gt}{2} + B^2}{A^2 + B^2} |2, n - 1\rangle. \quad (3.48)$$

Os operadores de evolução $\hat{U}(t)$, para um e dois átomos serão utilizados no capítulo V de nosso trabalho no estudo do emaranhamento de três átomos.

Capítulo 4

Medidas de Emaranhamento

O emaranhamento é uma das características de maior estranheza na mecânica quântica. Essa propriedade de sistemas quânticos compostos, foi primeiramente descrita por Einstein, Podolsky e Rosen [49], que propuseram um experimento conhecido como paradoxo EPR, onde o resultado de uma medida realizada em uma parte do sistema quântico pode ter efeito instantâneo no resultado de uma medida realizada em uma outra parte, independente da distância entre as partes.

Em 1964 Bell [51], apresentou um teorema chamado de desigualdade de Bell. Esse teorema propõe uma desigualdade que relaciona as probabilidades de detecção de dois observáveis dicotômicos, relativos a dois sistemas. Se a correlação entre os dois sistemas for descrita por uma teoria realista local, a desigualdade é sempre satisfeita. Por outro lado a violação dessa desigualdade implica que os sistemas em questão exibem uma correlação não-local, prevista pela mecânica quântica.

A desigualdade de Bell tem base no experimento do paradoxo EPR, em que dois observadores remotos, (denominados posteriormente Alice e Bob) compartilham um par de partículas emaranhadas. Bell afirmou que a correlação entre as partículas é devido ao emaranhamento quântico do par, o estado não pode ser determinado até o momento em que uma medida é feita por um dos observadores. Esta idéia está inteiramente de acordo com o princípio da incerteza de Heisenberg, um dos conceitos mais fundamentais

na mecânica quântica. O emaranhamento quântico, não possui nenhum análogo clássico, este elemento aparece na violação da desigualdade de Bell.

Podemos verificar que um sistema é emaranhado quando o operador densidade de um sistema bipartido não pode ser representado por uma soma de estados produtos,

$$\hat{\rho} = \sum_i \hat{\rho}_a(i) \otimes \hat{\rho}_b(i), \quad (4.1)$$

onde $\hat{\rho}_a$ e $\hat{\rho}_b$ são os operadores densidades para os subsistemas a e b.

Além de sabermos se um sistema está emaranhado ou não, é interessante saber a quantidade de emaranhamento que o sistema possui. As medidas de emaranhamento têm como função quantificar o emaranhamento de um estado quântico. Uma medida de emaranhamento deve satisfazer as seguintes propriedades [71]:

(i) Valor zero para estados separáveis:

Para um estado separável ρ , $E(\rho) = 0$.

(ii) Normalização:

O emaranhamento do estado $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_i |ii^A\rangle |ii^B\rangle$, é

$$E(|\Psi\rangle) = \log_2 d \quad (4.2)$$

com $|ii^A\rangle$, uma base ortonormal.

(iii) Não crescente por LOCC:

Seja um mapa Λ_{LOCC} , implementado por uma operação local e comunicação clássica (LOCC), então

$$E(\Lambda_{\text{LOCC}} \rho) \leq E(\rho). \quad (4.3)$$

(iv) Continuidade:

$E(\rho)$ deve ser uma função contínua de ρ ,

$$E(\rho) - E(\sigma) \rightarrow 0 \text{ para } \|\rho - \sigma\| \rightarrow 0. \quad (4.4)$$

(v) Aditividade Parcial:

As n cópias idênticas do estado ρ , contém n vezes o emaranhamento de ρ ,

$$E(\rho^{\otimes n}) = nE(\rho). \quad (4.5)$$

(vi) Subaditividade

Para dois sistemas independentes ρ e σ , dizemos que o sistema global é descrito por $\rho \otimes \sigma$, e as funções que medem emaranhamento devem satisfazer,

$$E(\rho \otimes \sigma) \leq E(\rho) + E(\sigma). \quad (4.6)$$

(vii) Convexidade

$E(\rho)$ deve ser convexa no espaço dos operadores,

$$E\left(\sum_i p_i \rho_i\right) \leq \sum_i p_i E(\rho_i), \quad (4.7)$$

onde $\rho = \sum_i p_i \rho_i$, para todos $\{\rho_i | \Psi_i\}$, com $p_i > 0$ e $\sum_i p_i = 1$.

Encontrar uma medida que satisfaça todas essas propriedades é algo muito difícil. G. Vidal [72] propôs que um bom quantificador de emaranhamento seria aquele que satisfaz apenas a propriedade de não crescimento, em média, por operações locais e comunicação clássica (LOCC). Deste modo definiu-se o que se chama de monótono de emaranhamento.

Vidal também demonstrou um conjunto de condições necessárias para que E seja um monótono de emaranhamento são:

1. Para qualquer operação local não-determinística $\xi_{i,k}(\rho)$, realizada na i -ésima parte,

$$E(\rho) \leq \sum_k p_k E(\rho_k) \quad (4.8)$$

onde

$$p_k = \text{Tr} \{ \xi_{i,k}(\rho) \},$$

$$\rho_k = \frac{\xi_{i,k}(\rho)}{p_k}.$$

2. Convexidade: para qualquer ensemble $\{q_k, \rho_k\}$,

$$E(\rho) \leq \sum_k q_k E(\rho_k). \quad (4.9)$$

As medidas de emaranhamento devem satisfazer às propriedades citadas e são divididas em dois tipos, operacionais e abstratas. As medidas operacionais são obtidas por meio de operações locais e comunicação clássicas (LOCC), as medidas operacionais mais comuns são emaranhamento destilável [60] e custo de emaranhamento [61]. As medidas abstratas, são usadas como limites para medidas operacionais, dois exemplos de medidas abstratas são concorrência [53], que mede emaranhamento de formação e entropia relativa [62], [63].

Um grande problema nas medidas de emaranhamento é a quantificação do emaranhamento de estados mistos, esses estados são escritos como uma combinação convexa de estados,

$$\rho = \sum_j p_j \rho_j \quad (4.10)$$

onde $\sum_j p_j = 1$, e $p_j \geq 0$. Fisicamente isso corresponde a uma mistura de estados puros, de modo que ρ_j tem probabilidade p_j . Os estados mistos não podem ser escritos como função de onda, mas podemos escrevê-los como uma soma de estados puros. Um estado puro não pode ser representado como uma somatória de outros estados e pode ser escrito como função de onda. Estados mistos podem ter emaranhamento ligado, não existe regra geral para saber se um estado possui esse tipo de emaranhamento. Primeiramente devemos verificar se o estado está emaranhado, e se o estado pode ser destilado em singletos. Se um estado misto não pode ser destilado em singletos, mas possui emaranhamento, então esse estado possui emaranhamento ligado.

Atualmente o estudo das medidas de emaranhamento, é usado em pesquisas nas áreas de computação quântica e criptografia quântica. Neste capítulo, mostraremos algumas medidas de emaranhamento, que serão utilizadas para detectar o emaranhamento do sistema de três átomos que apresentaremos no capítulo V, também mostraremos que o campo eletromagnético no estados comprimidos de dois modos possui emaranhamento.

4.1 Entropia.

No início do século XX Von Neumann generalizou o conceito de entropia, para sistemas de partículas quânticas, onde um estado misto definido por uma matriz densidade ρ , tem a entropia definida como,

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \ln \rho). \quad (4.11)$$

Bennett et al [52], utilizaram-se da entropia de Von Neumann como uma medida de emaranhamento para estados bipartidos.

Dado o operador densidade $\hat{\rho}$ de um par de sistemas quânticos A e B, considerando todos os estados puros decompostos de $\hat{\rho}$, que são todos os ensembles do estado

$|\Psi_i\rangle$, com probabilidade p_i ,

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|. \quad (4.12)$$

Para cada estado puro, o emaranhamento $E(\Psi)$ é definido como a entropia de Von Neumann, de qualquer um dos subsistemas A e B,

$$E(\Psi) = -\text{Tr}(\hat{\rho}_a \log_2 \hat{\rho}_a) = -\text{Tr}(\hat{\rho}_b \log_2 \hat{\rho}_b), \quad (4.13)$$

onde $\hat{\rho}_a$ é obtido através do traço parcial de $\hat{\rho}$ sobre o subsistema B, e da mesma maneira conseguimos $\hat{\rho}_b$, fazendo o traço parcial de $\hat{\rho}$ sobre o subsistema A.

Para demonstrarmos como é calculado o traço parcial tomaremos como exemplo o seguinte estado de dois qubits¹,

$$|\Psi_{AB}\rangle = \cos\theta |00\rangle - \sin\theta |11\rangle, \quad (4.14)$$

o operador densidade para este estado é,

$$\rho_{AB} = |\Psi_{AB}\rangle\langle\Psi_{AB}| = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta \\ -\cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Verificando traço parcial em relação ao subsistema B temos,

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB}) = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Agora iremos verificar a entropia para o estado $|\Psi_{AB}\rangle$,

$$E(\Psi_{AB}) = -\cos^2\theta \log_2(\cos^2\theta) - \sin^2\theta \log_2(\sin^2\theta). \quad (4.17)$$

Podemos ver que a quantidade $E(\Psi_{AB})$ tem valor 0, para $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$, para

¹Unidade de informação quântica, que é descrita por um vetor de estado de um sistema quântico de dois níveis.

estes valores de θ temos estados separáveis. Para $\theta = \pi/4$ temos $E(\Psi_{AB}) = 1$, para este valor de θ temos um estado maximamente emaranhado de dois qubits.

4.2 Entropia Linear

A entropia linear é uma medida de pureza de um estado [73], e é definida como,

$$S_l(\rho) = \frac{d}{d-1} \ln(1 - \text{Tr}(\rho^2)). \quad (4.18)$$

Para um estado puro no espaço de Hilbert com dimensão d a entropia linear é zero e para um estado maximamente misto $S_l(\rho) = 1$.

4.3 Concorrência

Hill e Wootters [53], apresentaram um tipo de medida de emaranhamento de formação, denominada concorrência, neste trabalho eles obtiveram uma expressão exata para medida de emaranhamento de formação de dois qubits.

Para demonstrarmos esta medida de emaranhamento, primeiramente iremos introduzir uma transformação de "spin flip", que é uma função aplicável sobre estados de um número arbitrário de qubits. O primeiro passo é demonstrar essa transformação sobre um estado puro de um único qubit,

$$\tilde{\Psi} = \sigma_y |\Psi^* \rangle, \quad (4.19)$$

onde $|\Psi^* \rangle$ representa o conjugado complexo de $|\Psi \rangle$.

Para realizarmos a transformação spin flip sobre n qubits, devemos fazer essa operação individualmente em cada qubit. A operação spin flip para um estado geral ρ de dois qubits, tem o seguinte forma,

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho (\sigma_y \otimes \sigma_y). \quad (4.20)$$

Podemos utilizar a transformação spin flip para expressar emaranhamento de estados puros. De modo que a medida de emaranhamento que definimos na equação Eq. (4.13), pode ser escrita como,

$$E(\Psi) = \xi(C(\Psi)), \quad (4.21)$$

onde a concorrência C é escrita como,

$$C(\Psi) = \sqrt{\langle \Psi | \tilde{\Psi} \rangle}, \quad (4.22)$$

a função ξ é dada por,

$$\xi(C) = h \left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2} \right), \quad (4.23)$$

onde $h(x)$ é a função entropia binária, que tem a seguinte forma,

$$h(x) = -[x \log_2 x + (1 - x) \log_2(1 - x)]. \quad (4.24)$$

$\xi(C)$ é uma função monotônica e varia de 0 a 1, assim como C também varia de 0 a 1. A concorrência, pode ser tomada como medida de emaranhamento, como exemplo consideraremos um estado maximamente emaranhado de dois qubits.

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle), \quad (4.25)$$

a concorrência que é dada por $\sqrt{\langle \Psi | \tilde{\Psi} \rangle}$, para o estado da equação (4.25) tem valor 1.

Podemos tomar como outro exemplo um estado separável $|\Psi_{AB}\rangle = |01\rangle$, para este estado a concorrência tem valor 0.

A concorrência pode ser expressa utilizando a seguinte operação,

$$C(\rho) = \{0, \Lambda_1, \Lambda_2\Lambda_3\Lambda_4\}, \quad (4.26)$$

onde os Λ_i s são as raízes quadradas dos auto valores da matriz não hermitiana $\rho\tilde{\rho}$. A determinação física da concorrência $C(\rho)$, como também a execução experimental foram obtidas para um sistema de dois qubits, esses resultados são encontrados nos trabalhos de Mintert [64], Horodecki [65] e Walborn [66].

4.4 Negatividade

O conceito de negatividade tem origem na observação feita por Peres [55], onde a transposta parcial de uma matriz densidade, associada com um estado separável ainda é uma matriz densidade válida. Horodecki et al [56], demonstram que o critério de Peres é uma condição necessária para um estado ser separável, para dimensões do espaço de Hilbert, 2×2 e 2×3 . O critério de Peres nos leva a uma medida de emaranhamento chamada de negatividade.

A negatividade é uma medida de emaranhamento para qualquer tipo de estado puro ou misto de um sistema bipartido arbitrário [67] [57] [68]. Essa medida se baseia na norma do traço da transposta parcial $\rho_{AB}^{T_A}$, do estado bipartido ρ_{AB} . Com isso temos a negatividade definida como,

$$N(\rho_{AB}) = \|\rho_{AB}^{T_A}\| - 1, \quad (4.27)$$

onde $\|\rho_{AB}^{T_A}\|$, é a norma do traço de $\rho_{AB}^{T_A}$, que é o mesmo que a soma dos módulos dos autovalores de $\rho_{AB}^{T_A}$. Utilizando a definição da norma do traço e o fato que $\text{Tr}(\rho_{AB}^{T_A}) = 1$, nós temos,

$$\overline{\rho_{AB}^{T_A}} = 2 \sum_i \lambda_i^- + 1, \quad (4.28)$$

onde λ_i^- , são os autovalores negativos da matriz $\rho_{AB}^{T_A}$. Deste modo a negatividade pode ser escrita como,

$$N(\rho_{AB}) = 2 \sum_i \lambda_i^-. \quad (4.29)$$

A negatividade de um estado bipartido maximamente emaranhado equivale a 1, e para um estado separável tem valor 0.

A negatividade é uma medida de emaranhamento bastante usada pois ela tem capacidade de detectar emaranhamento de estados bipartido² de qualquer dimensão, que possuam transposta parcial negativa (NPT). Temos que lembrar que estados que possuem transposta parcial positiva e possuem emaranhamento, são estados com emaranhamento ligado, ou emaranhamento não destilável e para esses estados a negatividade não detecta o emaranhamento.

4.5 Extensão "convex roof" da negatividade.

Existe um conjunto de estados que possuem transposta parcial positiva (PPT) e são emaranhados, essa classe de estados possuem emaranhamento ligado ou emaranhamento não destilável, a negatividade não detecta esse emaranhamento. Uma medida que pode detectar esse emaranhamento é a extensão "convex roof" da negatividade (CRE negatividade) [58].

Para definirmos a (CRE) negatividade, devemos considerar a negatividade de um estado puro $d \times d$ com $d \in \mathbb{C}$, e com Hamiltoniano total $H_A \otimes H_B$. Através do teorema de decomposição de Schmit, um estado puro $|\Psi\rangle$ pode ser escrito como,

²estados de duas partículas

$$|\Psi\rangle = \bigwedge_{j=0}^{d-1} \sqrt{\mu_j} |a_j b_j\rangle = \hat{U}_A \otimes \hat{U}_B |\Phi\rangle, \quad (4.30)$$

onde $\sqrt{\mu_j}$ são os coeficientes de Schmidt e \hat{U}_A e \hat{U}_B são operadores unitários definidos por, $\hat{U}_A |j\rangle = |a_j\rangle$ e $\hat{U}_B |j\rangle = |b_j\rangle$ respectivamente, e

$$|\Phi\rangle = \bigwedge_{j=0}^{d-1} \sqrt{\mu_j} |jj\rangle. \quad (4.31)$$

Para um estado puro, a negatividade não se modifica quando se aplica uma transformação local sobre o estado $|\Psi\rangle$, de modo que,

$$N(|\Psi\rangle \langle \Psi|) = N(|\Phi\rangle \langle \Phi|) = \frac{2}{d-1} \bigwedge_{i < j} \sqrt{\mu_i \mu_j} \equiv N_p(\mu), \quad (4.32)$$

onde

$$\mu = (\sqrt{\mu_0}, \sqrt{\mu_1}, \dots, \sqrt{\mu_{d-1}}),$$

é o vetor de Schmidt. Podemos verificar que $N_p(\mu) = 0$ se e somente se $|\Psi\rangle$ for um estado separável. Desta maneira N_p pode ser uma medida de emaranhamento para um estado bipartido puro e pode ser estendida como uma medida de emaranhamento para um estado misto $\hat{\rho}$ através da extensão "convex roof" da negatividade.

Para calcularmos a extensão "convex roof" da negatividade para um estado misto $\hat{\rho}$, primeiro devemos diagonalizar este estado, deste modo conseguimos calcular os autovetores e autovalores de $\hat{\rho}$, após a diagonalização um estado misto arbitrário $\hat{\rho}$, pode ser escrito como,

$$\hat{\rho} = \bigwedge_k p_k |\Psi_k\rangle \langle \Psi_k|. \quad (4.33)$$

Utilizando-se da equação (4.33), temos que a (CRE) negatividade é dada por,

$$N_{\text{CRE}}(\rho) = \min_k \widehat{\rho}_k N(\bar{\mu}_k), \quad (4.34)$$

onde \min representa que o estado $\hat{\rho}$, deve ser decomposto de forma que $N_{\text{CRE}}(\rho)$, assumo o menor valor possível, e $\bar{\mu}_k$ são os vetores de Schmidt de $|\Psi_k\rangle$.

Nós podemos mostrar que $N_{\text{CRE}}(\rho) = 0$, somente se $\hat{\rho}$ for separável. Isso implica que a extensão "convex roof" da negatividade, diferencia separabilidade e emaranhamento ligado, que não pode ser detectado pela negatividade de ρ^T . A função N_{CRE} é convexa, e $N_{\text{CRE}}(\rho) > N_p(\rho)$ pela convexidade da negatividade original [57].

4.6 "K-way" Negatividade

Para um sistema N-partido, composto com três ou mais partes, pode-se dividir o sistema em M partes, onde cada parte contém um ou mais subsistemas. Se considerarmos um único subsistema, de um sistema composto por M partes, esse subsistema pode estar emaranhado, com seu complemento de diferentes maneiras. Por exemplo, num sistema de três qubits (ABC), o subsistema A pode não estar emaranhado com o sistema BC, como também pode haver emaranhamento entre A e BC, ou AB com C e AC com B

Para demonstrarmos como é calculada a negatividade "K-way" [59], primeiro mostraremos como é feita a transposta parcial "K-way". A transposta parcial "K-way" ($2 \leq K \leq N$) de um estado $\hat{\rho}$ com relação a um qubit p, é obtida da matriz ρ mediante a aplicação das seguintes condições:

$${}_{i_1 i_2 \dots i_N} \langle \hat{\rho}_K^{TA} | j_1 j_2 \dots j_N \rangle = {}_{i_1 i_2 \dots i_{p-1}, j_p, i_{p+1} \dots i_N} \langle \hat{\rho}_K^{TA} | j_1 j_2 \dots j_{p-1}, i_p, j_{p+1} \dots j_N \rangle$$

$$\text{se } \prod_{m=1}^K (1 - \delta_{i_m, j_m}) = K, \quad (4.35)$$

$${}_{i_1 i_2 \dots i_N | \hat{\rho}_K^T | j_1 j_2 \dots j_N} = {}_{i_1 i_2 \dots i_N | \hat{\rho} | j_1 j_2 \dots j_N} \text{ se } \prod_{m=1}^K (1 - \delta_{i_m, j_m}) = K, \quad (4.36)$$

onde

$$\delta_{i_m, j_m} = 1 \text{ para } i_m = j_m,$$

$$\delta_{i_m, j_m} = 0 \text{ para } i_m \neq j_m. \quad (4.37)$$

Um elemento de matriz típico do operador $\hat{\rho}$ envolve a troca de estado dos K subsistema, com $K=0$ até N . Para um sistema N -partite, o operador $\hat{\rho}$ pode ser dividido em N partes rotuladas por $K(0 \leq K \leq N)$ e escrita como,

$$\hat{\rho} = \prod_{m=1}^K \hat{R}_K, \quad (4.38)$$

com

$$\hat{R}_K = \sum_{i_k} |i_1 i_2 \dots i_N | \hat{\rho} | j_1 j_2 \dots j_N \rangle \langle i_1 i_2 \dots i_N | j_1 j_2 \dots j_N \rangle, \quad (4.39)$$

onde

$$i_k = i_1 i_2 \dots i_N, j_1 j_2 \dots j_N : \prod_{m=1}^K \delta_{i_m, j_m} = N - K. \quad (4.40)$$

A tranposta parcial "K-way" com relação ao subsistema p é escrita como,

$$\hat{\rho}_K^{T_p} = \widehat{\sum_{K^0=0,1,\dots,N} \hat{R}_{K^0} + \hat{R}_K^{T_p}}. \quad (4.41)$$

A negatividade "K-way" é calculada a partir da transposta parcial "K-way" da matriz $\hat{\rho}$ com respeito a um subsistema p, e é definida como,

$$N_K^p = \overline{\rho_K^{T_p}} - 1, \quad (4.42)$$

onde $\overline{\rho_K^{T_p}}$, é a norma do traço de $\rho_K^{T_p}$. Usando a definição da norma do traço, e o fato que $\text{tr}(\rho_K^{T_p}) = 1$, nos temos,

$$\overline{\rho_K^{T_p}} = 2 \widehat{\sum_i \lambda_i^{K^-}} + 1, \quad (4.43)$$

onde $\lambda_i^{K^-}$, são os autovalores negativos da matriz $\rho_K^{T_p}$. Com isso a negatividade pode ser escrita como,

$$N_K^p = 2 \widehat{\sum_i \lambda_i^{K^-}}, \quad (4.44)$$

com

$$(p = 2, 3, \dots, N). \quad (4.45)$$

A negatividade N_K^p , depende das correlações quânticas "K-way", e é uma medida de todos os tipos possíveis de emaranhamento atribuídos para as correlações quânticas "K-way". Intuitivamente para um sistema que tem emaranhamento N-partite puro, é necessário que as correlações quânticas "N-way" não sejam zero. Por outro lado emaranhamento N-partite pode ser gerado por correlações quânticas (N-1)-way .

No capítulo V do nosso trabalho utilizaremos a negatividade "k-way" para caracterização do emaranhamento dos três átomos.

4.7 Emaranhamento de variáveis contínuas.

Estados quânticos que possuem variáveis contínuas, são estados com dimensão do espaço de Hilbert infinita, por exemplo estados coerentes e estados comprimidos. Nessa seção demonstramos o emaranhamento dos estados comprimidos de dois modos. Como foi mostrada na seção (2.6.1), o estado comprimido de dois modos (2.100), é escrito como,

$$|\xi\rangle_{12} = \frac{1}{\cosh s} \sum_{n=0}^{\infty} e^{in\theta} (\tanh s)^n |n\rangle_1 |n\rangle_2, \quad (4.46)$$

onde o subscrito 1 e 2 se referem aos dois modos do campo. É fácil observar através da equação (4.46) que o número de fótons em cada modo é perfeitamente correlacionado com o número de fótons no outro modo.

Para estudarmos as correlações quânticas entre os dois modos do estado comprimido, precisamos quantificar o seu emaranhamento, para isso usaremos a entropia de Von Neumann (4.13) [69]. Para calcularmos a entropia necessitamos do operador densidade para o estado comprimido de dois modos, que é dado por,

$$\rho_{12} = |\xi\rangle_{12} \langle \xi|_{12} = \frac{1}{\cosh s} \sum_{\substack{n=0 \\ n^0=0}}^{\infty} (\tanh s)^{n+n^0} |n\rangle_1 |n\rangle_2 \langle n^0|_1 \langle n^0|_2. \quad (4.47)$$

Com isso temos que,

$$E = -\text{Tr}(\rho_2 \log \rho_2) = -\text{Tr}(\rho_1 \log \rho_1), \quad (4.48)$$

onde $\rho_2 = \text{Tr}_1\{\rho_{12}\}$ e $\rho_1 = \text{Tr}_2\{\rho_{12}\}$. Deste modo a entropia de Von Neumann para um único modo do estado comprimido, é dado por [70],

$$E = \cosh^2 s \log_2(\cosh^2 s) - \sinh^2 s \log_2(\sinh^2 s). \quad (4.49)$$

Através da equação (4.49), fizemos um gráfico do emaranhamento E em função

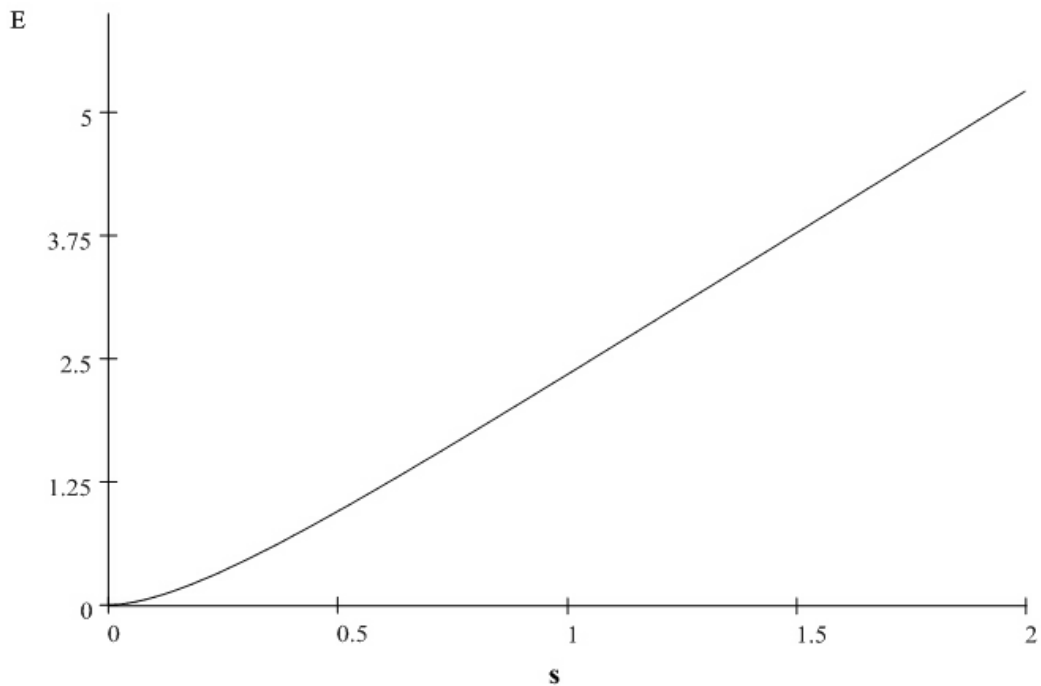


Figura 4.1: Emaranhamento do estado comprimido de dois modos versus parâmetro de compressão s .

do parâmetro de compressão s , que está demonstrado na figura (4.1).

O gráfico da figura (4.1), mostra que o emaranhamento é praticamente linear em relação ao parâmetro de compressão s . Para o parâmetro de compressão s tendendo ao infinito ($s \rightarrow \infty$), o estado comprimido de dois modos é maximamente comprimido e maximamente emaranhado, mas isso não é possível pois implica na necessidade de energia infinita para se conseguir máximo emaranhamento. Podemos verificar essa afirmação através do número médio de fótons em cada modo do estado comprimido, que é dado por,

$$\langle n_1 \rangle = \langle n_2 \rangle = \sinh^2 s \quad (4.50)$$

Através da equação (4.50) fizemos um gráfico que está demonstrado na figura (4.2).

O gráfico da figura (4.2) demonstra que quando o parâmetro de compressão tende ao infinito ($s \rightarrow \infty$), o número médio de fótons do estado comprimido de dois modos

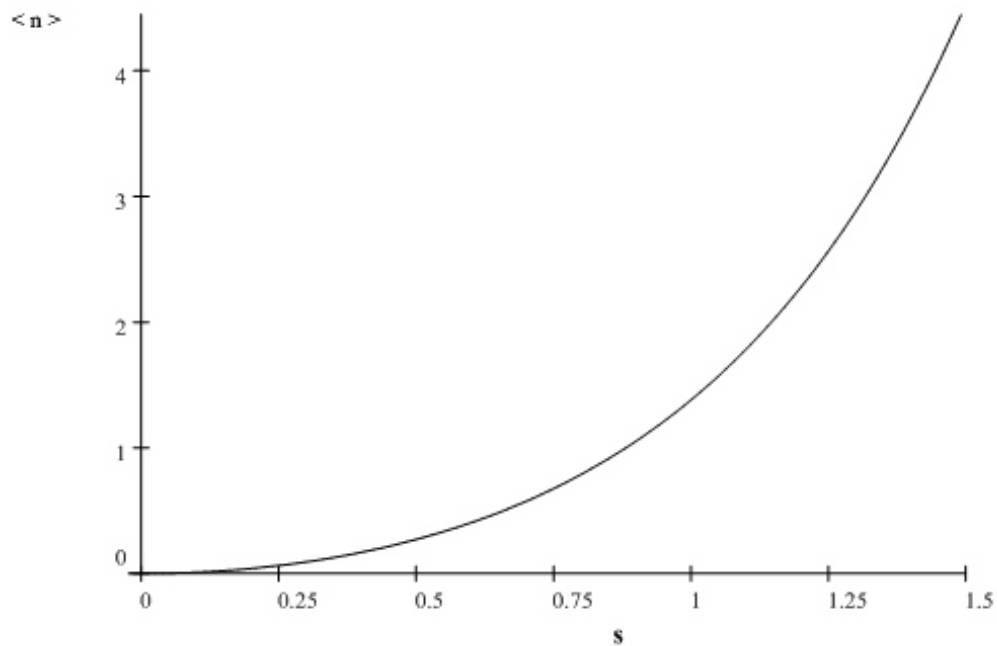


Figura 4.2: Número médio de fótons $\langle n \rangle$ versus parâmetro de compressão s .

também tende ao infinito ($\langle n \rangle \rightarrow \infty$), o equivalente também acontece com a energia do estado comprimido ($E \rightarrow \infty$).

Nesta seção demonstramos a existência de emaranhamento entre os fótons do estado comprimido de dois modos e sua dependência em função do parâmetro de compressão. No capítulo V, demonstraremos o procedimento para a transferência de emaranhamento de variáveis contínuas para um sistema de estados quânticos discretos, ou seja átomos aprisionados em cavidades.

Capítulo 5

Emaranhando um qubit remoto com um par de Bell através da interação com um campo comprimido de dois modos

Existe um grande interesse no emaranhamento de qubits remotos, pois estes podem ser usados na implementação de protocolos de comunicação, atualmente necessitamos de grande segurança no envio de dados, no comércio eletrônico, transações financeiras, movimentações bancárias e troca de informação militar. Bennett e Brassard [74], propuseram um novo conceito de comunicação segura, chamado de distribuição de chave quântica (QKD). Nessa nova proposta eles apresentaram um tipo de comunicação onde Alice e Bob (dois laboratórios distintos), compartilham uma chave secreta, e a mensagem é transferida através do envio de qubits únicos, que são fótons polarizados (vertical ou horizontal), a mensagem é criptografada utilizando a chave secreta compartilhada entre eles.

Outra possibilidade de envio de mensagens com segurança, é a comunicação quântica segura e direta (QSDC). Nesse tipo de comunicação não é necessário o compartilha-

hamento de chave secreta, para o envio da mensagem. F. G. Deng et al [84], apresentaram um protocolo onde Alice possui um conjunto de pares EPR, ela fica com um qubit do par, e envia o outro qubit para Bob. Um grupo aleatório de qubits é enviado para Bob com a finalidade de checar a segurança na comunicação e verificar se existe um interceptor. Caso não exista interceptor eles dão continuidade ao processo de comunicação, deste modo a mensagem é criptografada através do envio de um conjunto de partículas dos pares EPR para Bob.

Neste capítulo, apresentamos uma proposta de geração de estados emaranhados de átomos localizados em cavidades distintas, onde Alice possui uma cavidade com dois átomos de dois níveis (A_1 e A_2) aprisionados, e Bob possui uma cavidade com um átomo de dois níveis (B) aprisionado. Essas cavidades estão inicialmente em um estado vácuo e será enviado a elas um campo comprimido de dois modos. O campo comprimido de dois modos, é gerado através de um processo de conversão paramétrica descendente, onde fótons interagem com um meio óptico não linear (cristal), produzindo um estado comprimido de fótons de dois modos. Cada modo do campo comprimido é enviado para uma cavidade. A junção entre o campo comprimido externo e cavidade é feita usando um divisor de feixe. No artigo de W. Son et al [75], a possibilidade de emaranhar dois qubits remotos através de estados bipartidos com variáveis contínuas foi demonstrada. Nesse trabalho foram considerados duas cavidades separadas espacialmente, com um átomo em cada cavidade. O estado comprimido de dois modos é compartilhado entre as cavidade, de maneira que cada modo do campo é enviado para uma cavidade distinta.

Estados que possuem três qubits emaranhados podem ser utilizados na comunicação. Jian Wang et al [81], apresentaram um protocolo onde eles utilizam estados W para a comunicação. Nesse protocolo Alice fica com dois qubits e envia o qubit remanescente para Bob, Alice criptografa a mensagem fazendo operações locais I e $i\sigma_y$. Utilizando-se de outra classe de estados de três qubits Jian Wang et al [82], demonstraram um protocolo de comunicação com estados GHZ. Nesse protocolo existem três laboratórios comunicando-se, Alice, Bob e Charlie e a mensagem é criptografada através de operações

unitárias.

Além disso, estados emaranhados de três partículas podem ser utilizados no teletransporte de estados quânticos [83]. No teletransporte Alice e Bob compartilham um par EPR, Alice possui uma partícula com estado desconhecido. Alice pode enviar o estado quântico da partícula desconhecida para Bob, através de operações locais e comunicação clássica.

Como o sistema estudado possui átomos aprisionados em cavidades com separação espacial, devemos verificar se após a interação com o campo comprimido os átomos possuem emaranhamento. Para quantificar o emaranhamento dos átomos no sistema proposto foram usados três tipos de medidas de emaranhamento, que são entropia linear, negatividade [57] e uma extensão "convex roof" da negatividade [58]. Com essas medidas pode-se verificar se o sistema possui o emaranhamento livre durante a interação átomo, ou se possui emaranhamento ligado. Examinamos também, a evolução temporal do estado do sistema e a dinâmica do emaranhamento dos átomos.

Para melhor entendimento da dinâmica do sistema, o capítulo foi dividido em três seções, que são: campo na cavidade, interação átomo campo e emaranhamento entre os átomos.

5.1 Campo na Cavidade

Como foi demonstrado na seção (2.6.1), os estados comprimidos de dois modos [76], podem ser gerados através de um processo de conversão paramétrica descendente. O operador de compressão associado a esse processo pode ser escrito como,

$$\hat{S}(s) = \exp(-s\hat{a}\hat{b} + s\hat{a}^\dagger\hat{b}^\dagger), \quad (5.1)$$

onde s é parâmetro de compressão e \hat{a} e \hat{b} são os operadores bosônicos de aniquilação e \hat{a}^\dagger e \hat{b}^\dagger são os operadores bosônicos de criação dos fótons. A atuação do operador $\hat{S}(s)$

sobre os estado vácuo $|0, 0\rangle$, produz um estado comprimido de dois modos.

$$|\Psi_F\rangle = \frac{1}{\cosh s} \sum_{n=0}^{\infty} (\tanh s)^n |n, n\rangle, \quad (5.2)$$

Como foi verificado no capítulo IV, a quantidade de emaranhamento do estado comprimido de dois modos é linearmente proporcional ao parâmetro de compressão s [77].

A junção entre campo externo e cavidade, é feita através do operador divisor de feixe

$$\hat{B}(\theta) = \exp \frac{\theta}{2} (\hat{c}\hat{f}^\dagger - \hat{c}^\dagger\hat{f}), \quad (5.3)$$

onde \hat{c} e (\hat{c}^\dagger) , são os operadores de aniquilação e (criação) para o campo na cavidade e \hat{f} (e \hat{f}^\dagger), são os operadores de aniquilação e (criação) para o campo externo, o coeficiente $r = \cos \theta/2$, representa a refletividade do divisor de feixe.

Como o campo comprimido possui dois modos, cada modo é enviado para uma cavidade. Com a injeção de $\rho_F = |\Psi_F\rangle\langle\Psi_F|$ nas cavidade que tem estado inicial vácuo, obtemos o operador densidade total para o estado do campo numa única cavidade,

$$\hat{\rho}_{fC_1} = \hat{B}_1(\theta)\hat{\rho}_f|0\rangle\langle 0|_C\hat{B}_1^\dagger(\theta). \quad (5.4)$$

Em nosso trabalho estamos interessados somente no comportamento do campo na cavidade, para conseguirmos ter acesso a esse campo, devemos fazer um traço sobre o modo do campo externo na equação (5.4), com isso temos,

$$\hat{\rho}_{C_1} = \text{Tr}_f \hat{\rho}_{fC_1}. \quad (5.5)$$

Depois de feito o traço sobre o campo externo, o estado quântico do campo nas

cavidades, tem a seguinte forma,

$$\hat{\rho}_C = \frac{1}{\cosh s} \prod_{n,m=0}^{\infty} \prod_{k,l=0}^{\min[n,m]} (\tanh s)^{n+m} G_{kl}^{nm}(\theta) \times |n-k, n-l\rangle \langle m-k, m-l| \quad (5.6)$$

onde

$$G_{kl}^{nm}(\theta) = C_k^n(\theta) C_k^m(\theta) C_l^n(\theta) C_l^m(\theta),$$

com

$$C_k^n(\theta) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cos^k \frac{\theta}{2} \sin^{n-k} \frac{\theta}{2}.$$

O operador densidade $\hat{\rho}_C$ representa o campo nas cavidades em um estado emaranhado misto, independentemente do valor de θ que é a refletividade do divisor de feixe, como foi demonstrado na seção (4.7) do capítulo (4).

5.2 Interação Átomo Campo

Para verificarmos como se dá a interação átomo campo nas cavidades, primeiro devemos examinar a interação de dois átomos com o campo no estado de Fock na cavidade e um átomo com o campo no estado de Fock. Para descrevermos a interação átomo campo, utilizaremos o modelo Jaynes Cummings de interação [80].

Uma cavidade sem dissipação que está localizada no laboratório de Alice, possui dois átomos (A_1 e A_2) aprisionados interagindo com os fótons no estado de Fock $|n-k\rangle$, o Hamiltoniano de interação, conforme a equação (3.28) da seção (3.3), pode ser escrito como,

$$H_{I1} = \begin{pmatrix} \square & & & & \square \\ \square & 0 & \sqrt{2}\beta & & \square \\ \square & \sqrt{2}\beta & 0 & \sqrt{2}\alpha & \square \\ \square & & & & \square \\ \square & 0 & \sqrt{2}\alpha & 0 & \square \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

onde

$$\alpha = \sqrt{(n-k-1)gt},$$

$$\beta = \sqrt{(n-k)gt}.$$

Também verificamos na seção (3.2), que Hamiltoniano de interação para um único átomo aprisionado em uma cavidade sem dissipação interagindo com um campo de fótons no estado de Fock $|n-k\rangle$ é escrito como,

$$H_{12} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

onde

$$\gamma = gt \sqrt{(n-1)}.$$

Os operadores unitários que determinam a evolução temporal do sistema quântico nas cavidades (1) e (2) são,

$$\hat{U}_1(t) = \exp \left[-\frac{i\hat{H}_{11}t}{\hbar} \right] \text{ e } \hat{U}_2(t) = \exp \left[-\frac{i\hat{H}_{12}t}{\hbar} \right], \quad (5.9)$$

o estado quântico do sistema composto é determinado por,

$$\hat{U}_{12}(t) = \hat{U}_1(t) \hat{U}_2(t). \quad (5.10)$$

Na base $|n, \sigma_z, i\rangle, |a^\dagger a\rangle$, onde os estados possíveis do sistema na cavidade (1) são: $|2, n-k, 1\rangle, |0, n-k-1, 1\rangle$ e $|2, n-k-2, 1\rangle$, a representação matricial do operador $\hat{U}_1^{n-k}(t)$ é dada por,

$$U_1^{n-k}(t) = \begin{pmatrix} \frac{\beta^2 \cos \sqrt{2\alpha^2 + 2\beta^2} t + \alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} & \frac{-i\beta \sin \sqrt{2\alpha^2 + 2\beta^2} t}{\alpha^2 + \beta^2} & \frac{\alpha\beta \cos \sqrt{2\alpha^2 + 2\beta^2} t - 1}{\alpha^2 + \beta^2} \\ \frac{-i\beta \sin \sqrt{2\alpha^2 + 2\beta^2} t}{\alpha^2 + \beta^2} & \cos \sqrt{2\alpha^2 + 2\beta^2} t & \frac{-i\alpha \sin \sqrt{2\alpha^2 + 2\beta^2} t}{\alpha^2 + \beta^2} \\ \frac{\alpha\beta \cos \sqrt{2\alpha^2 + 2\beta^2} t - 1}{\alpha^2 + \beta^2} & \frac{-i\alpha \sin \sqrt{2\alpha^2 + 2\beta^2} t}{\alpha^2 + \beta^2} & \frac{\alpha^2 \cos \sqrt{2\alpha^2 + 2\beta^2} t + \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

5.3 Geração de estados emaranhados dos átomos A_1 , A_2 e B.

Nesta seção estudaremos a evolução temporal do sistema, átomo campo, com finalidade de gerar estados emaranhados dos átomos remotos usando o campo comprimido. Consideramos os átomos preparados inicialmente no estado separável $\Psi_{A_1 A_2 B}(0) = |-2i_1\rangle |-1i_2\rangle$ e o campo no estado comprimido $\hat{\rho}_C$, dado pela equação (5.6). Os subscritos A_1 e A_2 correspondem aos dois átomos na cavidade de Alice e o subscrito B, corresponde ao único átomo na cavidade de Bob.

O efeito da emissão espontânea é minimizado pelo fato dos três átomos estarem no estado fundamental no instante ($t = 0$). Os operadores unitários que determinam a evolução temporal do sistema quântico nas cavidades (1) e (2) são,

$$\hat{U}_1(t) = \exp \left[-\frac{i\hat{H}_{11}t}{\hbar} \right] \text{ e } \hat{U}_2(t) = \exp \left[-\frac{i\hat{H}_{12}t}{\hbar} \right], \quad (5.15)$$

onde \hat{H}_{11} é o Hamiltoniano da equação (3.14), e \hat{H}_{12} é o Hamiltoniano da equação (3.30).

A evolução temporal do sistema é determinada pelo operador unitário

$$\hat{U}_{12}(t) = \hat{U}_1(t) \otimes \hat{U}_2(t).$$

O operador densidade do sistema composto por átomo e campo no instante t , é escrito como,

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) &= \hat{U}_{12}(t) \left\{ \frac{1}{\cosh s} \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^{\min[n,m]} (\tanh s)^{n+m} G_{kl}^{nm}(\theta) \right. \\ &\quad \times \left. |-2, n - ki\rangle |-1, n - li\rangle |h-2, m - k\rangle |h-1, m - l\rangle \right\} \hat{U}_{12}^\dagger(t) \\ &= \frac{1}{\cosh s} \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^{\min[n,m]} (\tanh s)^{n+m} G_{kl}^{nm}(\theta) \left[\hat{U}_1^{n-k}(t) \otimes \hat{U}_2^{n-l}(t) \right. \\ &\quad \left. |-2, n - ki\rangle |-1, n - li\rangle |h-2, m - k\rangle |h-1, m - l\rangle \hat{U}_1^{\dagger m-k}(t) \otimes \hat{U}_2^{\dagger m-l}(t) \right]. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Com o objetivo de investigar o emaranhamento entre átomos, um traço sobre os modos do campo, é feito para obter uma expressão analítica para o estado reduzido dos átomos,

$$\hat{\rho}_{A_1 A_2 B}(t) = \text{Tr}_C \{ \hat{\rho}(t) \}. \quad (5.17)$$

Considerando o caso em que os átomos são inicialmente preparados no estado $|-2i_1\rangle|-1i_2\rangle$, a matriz densidade reduzida $\hat{\rho}_{A_1 A_2 B}(t)$ na base,

$$|-2i_1\rangle|-1i_2\rangle, |0i_1\rangle|-1i_2\rangle, |2i_1\rangle|-1i_2\rangle, |-2i_1\rangle|1i_2\rangle, |0i_1\rangle|1i_2\rangle, |2i_1\rangle|1i_2\rangle, \quad (5.18)$$

tem a seguinte forma,

$$\rho_{A_1 A_2 B}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & 0 & \rho_{15} & 0 \\ 0 & \rho_{22} & 0 & 0 & 0 & \rho_{26} \\ 0 & 0 & \rho_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{44} & 0 & 0 \\ \rho_{15} & 0 & 0 & 0 & \rho_{55} & 0 \\ 0 & \rho_{26} & 0 & 0 & 0 & \rho_{66} \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

Os elementos da matriz $\rho_{A_1 A_2 B}(t)$ são escritos como,

$$\rho_{11} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^n F_{kl}^{nn}(s, \theta) \frac{\cos^2 \frac{P(n-l)gt}{\hbar}}{(2n-2k-1)^2} \times \frac{P(n-k)gt}{(4n-4k-2)gt} + (n-k-1)^2, \quad (5.20)$$

$$\rho_{22} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^n F_{kl}^{nn}(s, \theta) \frac{(n-k)}{(2n-2k-1)} \times \quad (5.21)$$

$$\cos^2 \sqrt{\frac{p}{(n-l)gt}} \sin^2 \sqrt{\frac{p}{(4n-4k-2)gt}},$$

$$\rho_{33} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^n F_{kl}^{nn}(s, \theta) \frac{(n-k-1)(n-k)}{(2n-2k-1)^2} \times \quad (5.22)$$

$$\cos^2 \sqrt{\frac{p}{(n-l)gt}} \cos^2 \sqrt{\frac{p}{(4n-4k-2)gt}} - 1^2,$$

$$\rho_{44} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^n F_{kl}^{nn}(s, \theta) \frac{\sin^2 \sqrt{\frac{p}{(n-l)gt}}}{(2n-2k-1)^2} \times \quad (5.23)$$

$$\frac{h}{(n-k) \cos \sqrt{\frac{p}{(4n-4k-2)gt}}} + (n-k-1)^2,$$

$$\rho_{55} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^n F_{kl}^{nn}(\theta) \frac{(n-k)}{(2n-2k-1)} \times \quad (5.24)$$

$$\sin^2 \sqrt{\frac{p}{(n-l)gt}} \sin^2 \sqrt{\frac{p}{(4n-4k-2)gt}},$$

$$\rho_{66} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^n F_{kl}^{nn}(\theta) \frac{(n-k-1)(n-k)}{(2n-2k-1)^2} \times \quad (5.25)$$

$$\sin^2 \sqrt{\frac{p}{(n-l)gt}} \cos^2 \sqrt{\frac{p}{(4n-4k-2)gt}} - 1^2,$$

$$\rho_{15} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^n F_{kl}^{nn+1}(\theta) \frac{e^{-\frac{\mu(n-k+1)}{(2n-2k+1)(2n-2k-1)}}}{\cos \frac{\mu(n-l)gt}{(n-l)gt} \cos \frac{\mu(n-k) \cos \frac{\mu(4n-4k-2)gt}{(4n-4k-2)gt} + (n-k-1)} \times \sin \frac{\mu(n-l+1)gt}{(n-l+1)gt} \sin \frac{\mu(4n-4k+2)gt}{(4n-4k+2)gt} , \quad (5.26)$$

$$\rho_{26} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^n F_{kl}^{nn+1}(\theta) \frac{e^{-\frac{\mu(n-k) \cos \frac{\mu(n-k+1)}{(2n-2k-1)(2n-2k+1)} \cos \frac{\mu(n-l)gt}{(n-l)gt}}}{\sin \frac{\mu(4n-4k-2)gt}{(4n-4k-2)gt} \sin \frac{\mu(n-l)gt}{(n-l)gt} \cos \frac{\mu(4n-4k+2)gt}{(4n-4k+2)gt} - 1} \times \quad (5.27)$$

onde

$$F_{kl}^{nn}(s, \theta) = \frac{(\tanh s)^{2n}}{(\cosh s)^2} G_{kl}^{nn}(\theta). \quad (5.28)$$

5.3.1 Probabilidade de gerar pares de Bell emaranhados com o qubit B.

Os elementos fora da diagonal principal no operador densidade reduzido $\rho_{A_1 A_2 B}(t)$ (5.19), indicam há possibilidade de emaranhamento entre os estados $| -2\mathbf{i}_1 | -1\mathbf{i}_2$ e $| 0\mathbf{i}_1 | 1\mathbf{i}_2$, e os estados, $| 0\mathbf{i}_1 | -1\mathbf{i}_2$ e $| 2\mathbf{i}_1 | 1\mathbf{i}_2$. Isso representa emaranhamento do qubit B com um par Bell na cavidade de Alice pois os estados $| 0\mathbf{i}_1 | -1\mathbf{i}_2$ e $| 0\mathbf{i}_1 | 1\mathbf{i}_2$, correspondem aos estados de Bell, e podem ser escritos na base computacional como,

$$| 0\mathbf{i}_1 | -1\mathbf{i}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (| 01\mathbf{i}_1 + | 10\mathbf{i}_1) | 0\mathbf{i}_2 ,$$

$$| 0\mathbf{i}_1 | 1\mathbf{i}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (| 01\mathbf{i}_1 + | 10\mathbf{i}_1) | 1\mathbf{i}_2 . \quad (5.29)$$

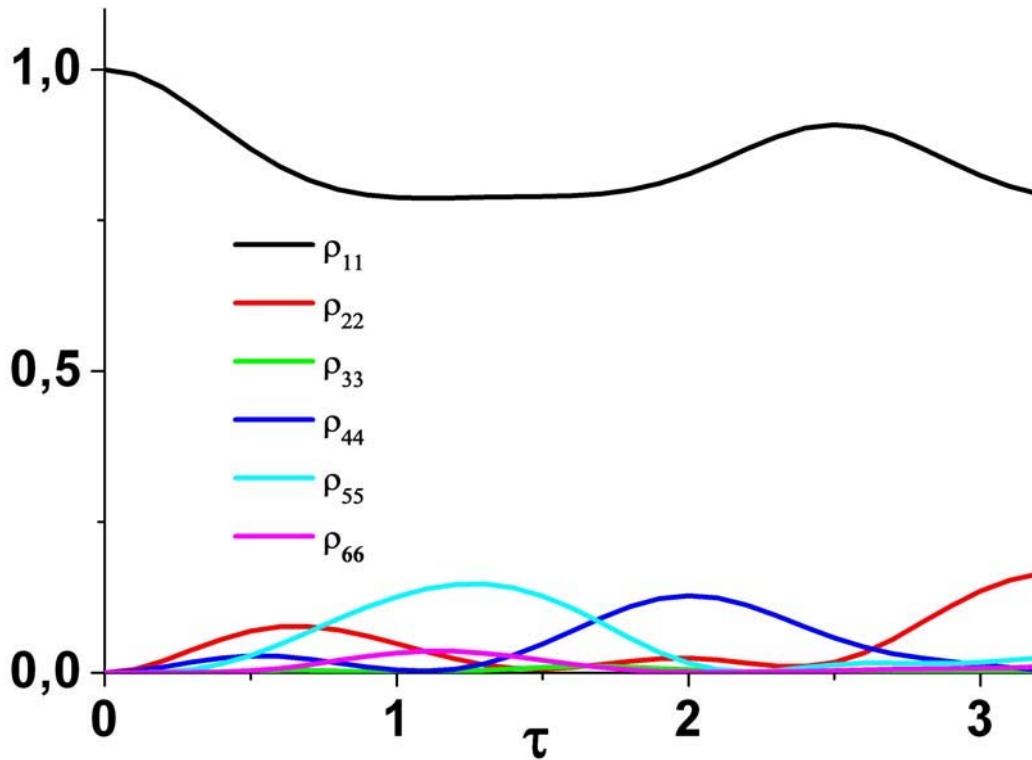


Figura 5.1: Probabilidades de ocupação ρ_{11} , ρ_{22} , ρ_{33} , ρ_{44} , ρ_{55} e ρ_{66} , versus parâmetro de interação τ , para $s = 0,5$ e $\theta = 3,14$.

Para escolher o valor do parâmetro de compressão para a geração de estados emaranhados de três átomos, fizemos quatro gráficos onde plotamos as probabilidades de ocupação dos estados base em função do parâmetro de interação $\tau = gt$, onde g é a intensidade de interação, e t é o tempo de interação, para os valores de parâmetro de compressão ($s = 0,5$), ($s = 0,94$), ($s = 1,2$) e ($s = 1,5$), com ($\theta = 3,14$) ou seja refletividade do divisor de feixe zero pois ($r = \cos(\theta/2)$). Esses gráficos estão representados nas figuras (5.1), (5.2), (5.3) e (5.4).

Através da análise dos gráficos das figuras (5.1), (5.2), (5.3) e (5.4), verificamos que para o tempo de interação ($\tau = 0,8$), na figura (5.1), ($\rho_{11} = 0,8$) e ($\sum_{i=2}^6 \rho_{ii} = 0,2$), na figura (5.2), ($\rho_{11} = 0,48$) e ($\sum_{i=2}^6 \rho_{ii} = 0,52$), na figura (5.3), ($\rho_{11} = 0,34$) e ($\sum_{i=2}^6 \rho_{ii} = 0,66$) e

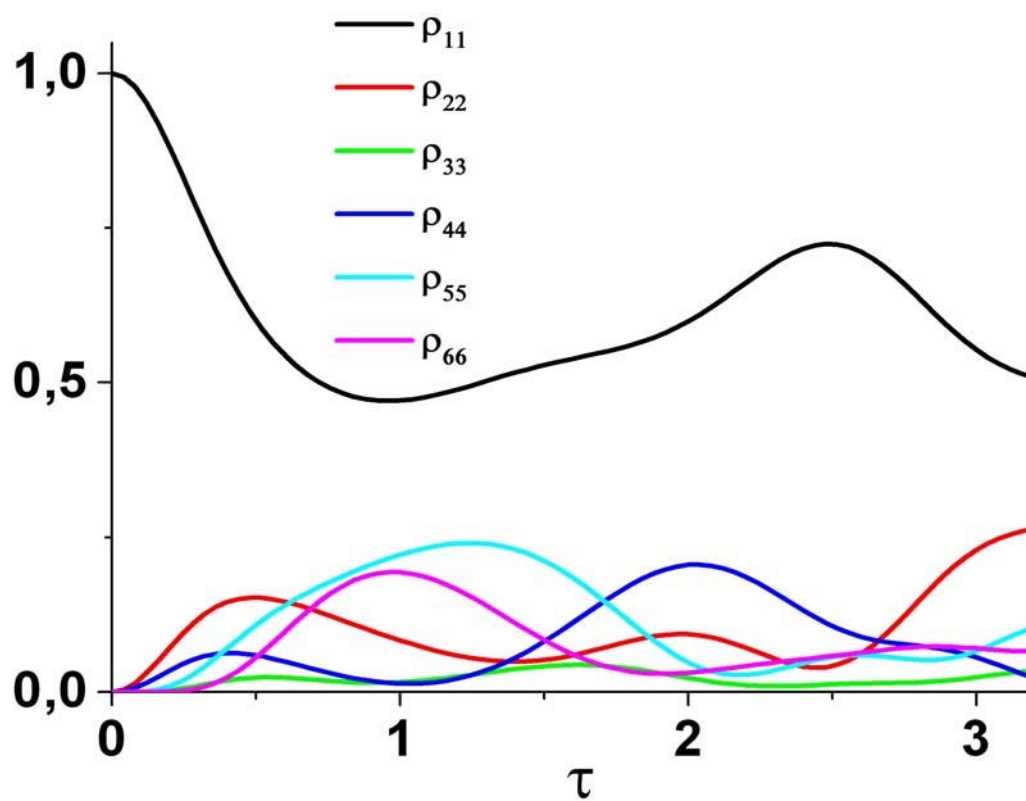


Figura 5.2: Probabilidades de ocupação ρ_{11} , ρ_{22} , ρ_{33} , ρ_{44} , ρ_{55} e ρ_{66} , versus parâmetro de interação τ , para $s = 0,94$ e $\theta = 3,14$.

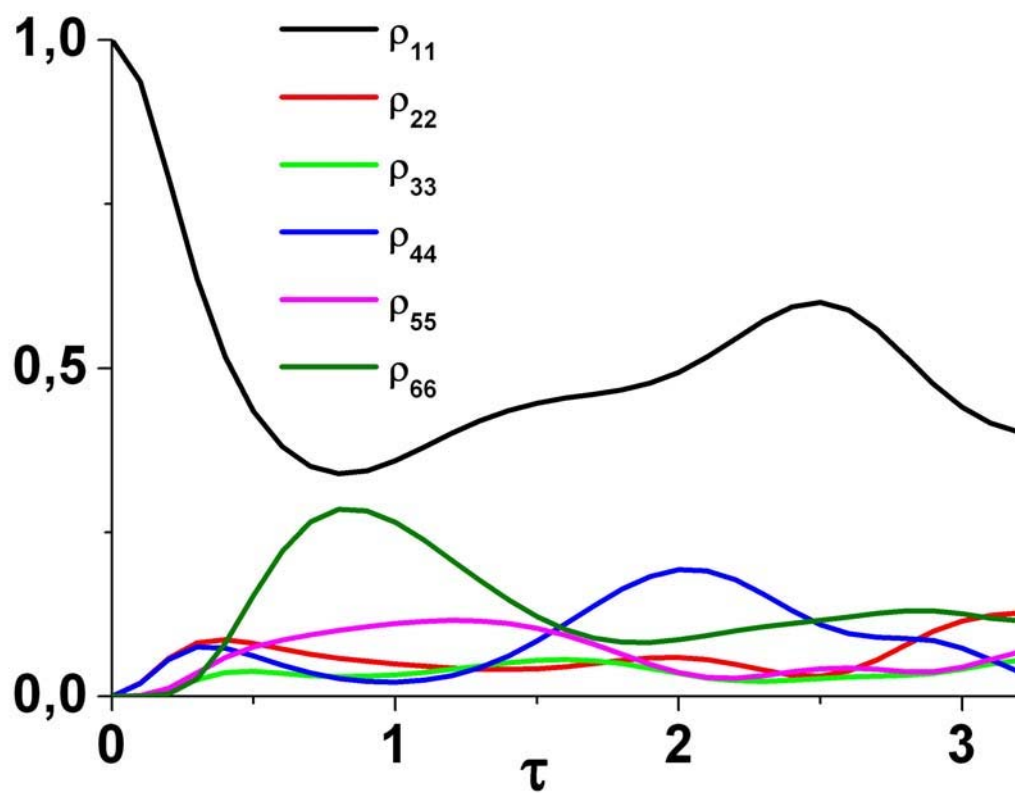


Figura 5.3: Probabilidades de ocupação ρ_{11} , ρ_{22} , ρ_{33} , ρ_{44} , ρ_{55} e ρ_{66} , versus parâmetro de interação τ , para $s = 1.2$ e $\theta = 3, 14$.

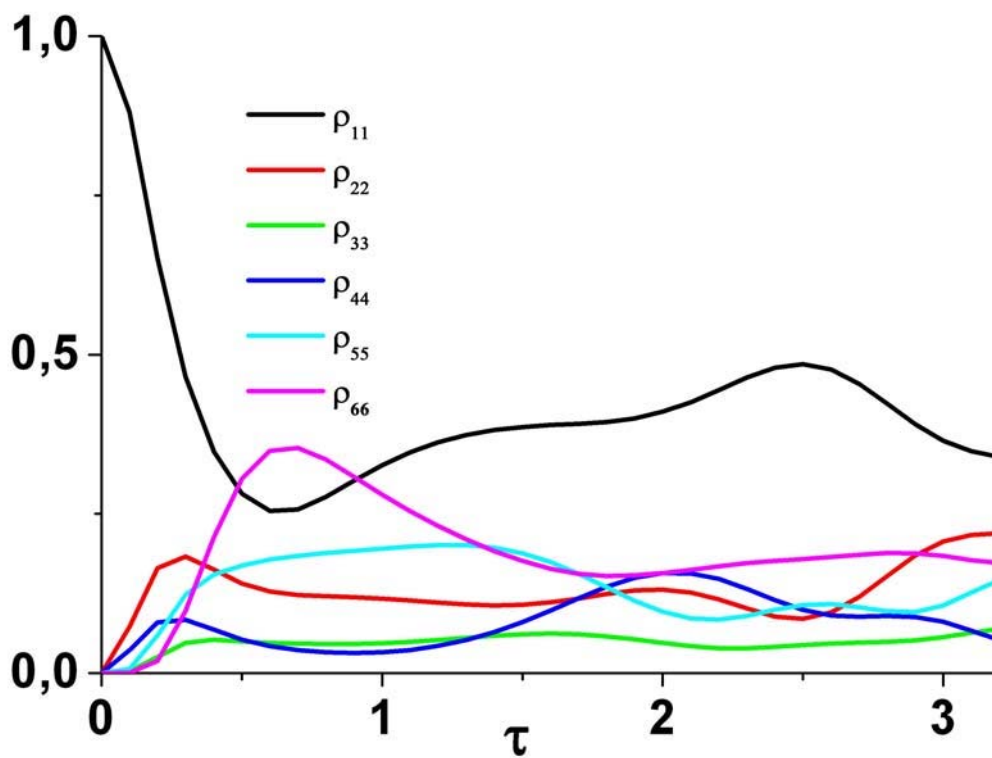


Figura 5.4: Probabilidades de ocupação ρ_{11} , ρ_{22} , ρ_{33} , ρ_{44} , ρ_{55} e ρ_{66} , versus parâmetro de interação τ , para parâmetro de compressão $s = 1,5$ e $\theta = 3,14$.

na figura (5.4), ($\rho_{11} = 0,27$) e ($\sum_{i=2}^6 \rho_{ii} = 0,73$). Utilizando-se desses resultados verificamos que na figura (5.1) para ($\tau = 0,8$), ρ_{11} é maior que a $\sum_{i=2}^6 \rho_{ii}$, na figura (5.2) para ($\tau = 0,8$), o valor de ρ_{11} é aproximadamente igual a $\sum_{i=2}^6 \rho_{ii}$, ou seja a probabilidade de numa medida encontramos o sistema no estado inicial é muito grande em relação a $\sum_{i=2}^6 \rho_{ii}$, para os valores de parâmetro de compressão ($s = 0,5$) e ($s = 0,94$). Nas figuras (5.3) e (5.4) para ($\tau = 0,8$), a probabilidade ρ_{11} é menor $\sum_{i=2}^6 \rho_{ii}$. No gráfico da figura (5.4), onde utilizamos ($s = 1,5$), verificamos que ρ_{11} possui menor valor em relação a $\sum_{i=2}^6 \rho_{ii}$, porém para esse valor de parâmetro de compressão ($s = 1,5$), o número médio de fótons é quase o dobro em relação ao valor de parâmetro ($s = 1,2$). Isso pode ser observado através da figura (4.2), da seção (4.7). Para o parâmetro de compressão ($s = 1,5$), necessitamos de uma energia do estado comprimido maior conseqüentemente um número médio de fótons maior, isso gera uma maior dissipação na cavidade. Adotamos como valor de parâmetro de compressão ($s = 1,2$) no estudo do emaranhamento entre os átomos, pois para esse valor, uma boa fração do estado inicial do campo interage com os átomos, enquanto o número médio de fótons dentro da cavidade não é muito grande.

Os elementos da diagonal principal da matriz $\rho_{A_1A_2B}(t)$, e os elementos fora da diagonal ρ_{15} e ρ_{26} que são responsáveis pelo emaranhamento, estão representados na figura (5.5) em função do parâmetro de interação utilizando parâmetro de compressão ($s = 1,2$).

5.4 Dinâmica de emaranhamento dos átomos A_1A_2 e B.

Nesta seção estudamos o emaranhamento do qubit B com o par A_1A_2 , para está análise utilizamos três medidas de emaranhamento que são: entropia linear, negatividade e a extensão "convex roof" da negatividade. Para verificar o emaranhamento do qubit A_1 com os qubits individuais A_2 e B calculamos a negatividade two-way e fizemos um gráfico

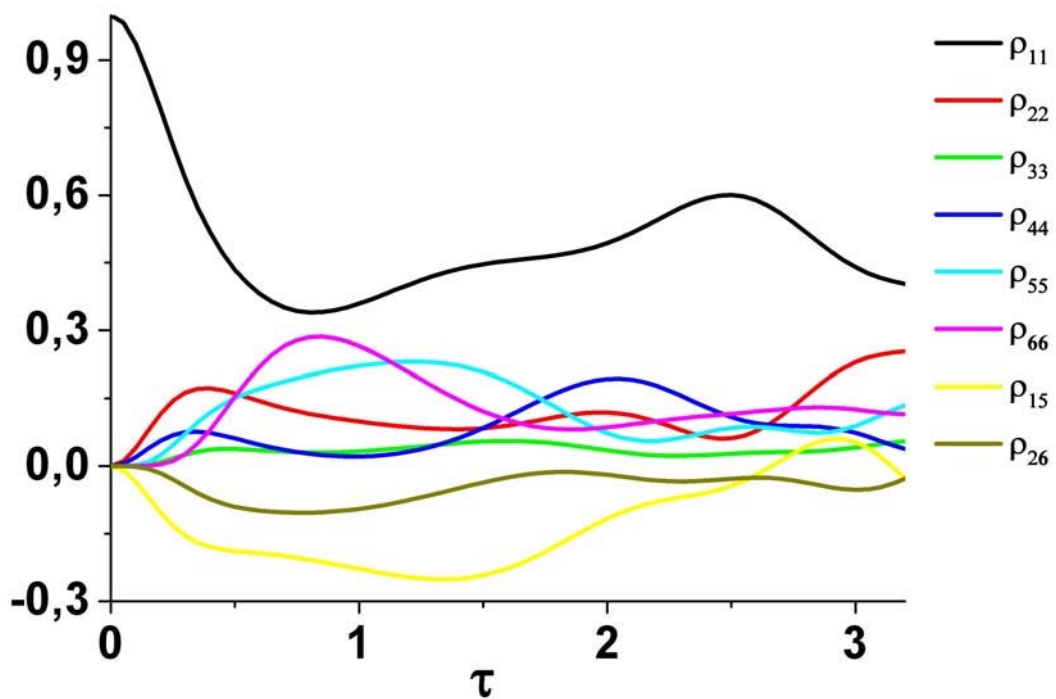


Figura 5.5: Probabilidades de ocupação ρ_{11} , ρ_{22} , ρ_{33} , ρ_{44} , ρ_{55} e ρ_{66} e termos fora da diagonal principal ρ_{15} e ρ_{26} versus parâmetro de interação τ , para parâmetro de compressão ($s = 1, 2$) e ($\theta = 3, 14$).

onde representamos a negatividade "two-way" e a extensão "convex roof" negatividade do qubit A_1 . O emaranhamento do qubit B com qubit A_1 também foi verificado. Além disso verificamos qual valor de parâmetro de compressão gera maior emaranhamento do qubit B com o par A_1A_2 .

5.4.1 Emaranhamento entre o qubit B e o par A_1A_2

Para calcularmos o emaranhamento entre o qubit B e o par A_1A_2 , primeiramente necessitamos reescrever $\rho_{A_1A_2B}(t)$ (5.19) na base computacional,

$$\begin{aligned}
 &|000\rangle_{A_1A_2B}, |010\rangle_{A_1A_2B}, |100\rangle_{A_1A_2B}, |110\rangle_{A_1A_2B}, \\
 &|001\rangle_{A_1A_2B}, |011\rangle_{A_1A_2B}, |101\rangle_{A_1A_2B}, |111\rangle_{A_1A_2B}. \tag{5.30}
 \end{aligned}$$

Lembrando que,

$$\begin{aligned}
 |-2, -1\rangle &= |000\rangle_{A_1A_2B}, |0, -1\rangle = \frac{|010\rangle_{A_1A_2B} + |100\rangle_{A_1A_2B}}{\sqrt{2}}, |0, -1\rangle = |110\rangle_{A_1A_2B} \tag{5.31} \\
 |-2, 1\rangle &= |001\rangle_{A_1A_2B}, |0, 1\rangle = \frac{i|011\rangle_{A_1A_2B} + |101\rangle_{A_1A_2B}}{\sqrt{2}}, |2, 1\rangle = |111\rangle_{A_1A_2B},
 \end{aligned}$$

deste modo temos,

$$\rho_{A_1A_2B}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_{15}}{\sqrt{2}} & \frac{\rho_{15}}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{\rho_{22}}{2} & \frac{\rho_{22}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_{26}}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\rho_{22}}{2} & \frac{\rho_{22}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_{26}}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{44} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho_{15}}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_{55}}{2} & \frac{\rho_{55}}{2} & 0 \\ \frac{\rho_{15}}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_{55}}{2} & \frac{\rho_{55}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\rho_{26}}{\sqrt{2}} & \frac{\rho_{26}}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho_{66} \end{pmatrix}. \quad (5.32)$$

O operador densidade $\hat{\rho}_{A_1A_2B}(t)$, caracteriza os três átomos em um estado misto. Para calcularmos o emaranhamento entre o qubit B e o par A_1A_2 , foram utilizadas três medidas de emaranhamento que são: entropia linear, negatividade e a extensão "convex roof" da negatividade.

Fazendo o traço parcial sobre o operador densidade da equação (5.32), obtemos o estado reduzido do qubit B com isso temos,

$$\hat{\rho}_B = \text{Tr}_{A_1A_2}(\hat{\rho}_{A_1A_2B})$$

$$\rho_B = \begin{pmatrix} \rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33} & 0 \\ 0 & \rho_{44} + \rho_{55} + \rho_{66} \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

Utilizando a equação (4.18), a entropia linear $S_B(s, \theta, gt)$ associada ao estado $\hat{\rho}_B$, é escrita como,

$$S_B(s, \theta, gt) = 2\{[\text{Tr}(\rho_B)]^2 - \text{Tr}[(\rho_B)^2]\},$$

$$S_B(s, \theta, gt) = 2 \sqrt{1 - (\rho_{11} + \rho_{22} + \rho_{33})^2 - (\rho_{44} + \rho_{55} + \rho_{66})^2}. \quad (5.34)$$

A negatividade para qubit B, é calculada a partir da transposta parcial $\rho_{A_1 A_2 B}^{T_{A_1 A_2}}$ do operador densidade equação (5.32). Usando a equação (4.29), a negatividade para o qubit é dada por,

$$N_B(s, \theta, gt) = \rho_{A_1 A_2 B}^{T_{A_1 A_2}} - 1 = 2 \sum_i \lambda_i^-, \quad (5.35)$$

Diagonalizando $\rho_{A_1 A_2 B}^{T_{A_1 A_2}}$, obtemos os auto valores negativos λ_1^- e λ_2^- . A expressão analítica para o cálculo da negatividade N_B , é escrita como,

$$N_B(s, \theta, gt) = 2 \left(\lambda_1^- + \lambda_2^- \right), \quad (5.36)$$

onde,

$$\lambda_1^- = (\rho_{33} + \rho_{55}) - \sqrt{(\rho_{33} - \rho_{55})^2 + 4\rho_{26}^2}$$

$$\text{se } (\rho_{33} + \rho_{55}) < \sqrt{(\rho_{33} - \rho_{55})^2 + 4\rho_{26}^2},$$

$$\lambda_1^- = 0, \text{ se } (\rho_{33} + \rho_{55}) \geq \sqrt{(\rho_{33} - \rho_{55})^2 + 4\rho_{26}^2} \quad (5.37)$$

e

$$\lambda_2^- = (\rho_{22} + \rho_{44}) - \sqrt{(\rho_{22} - \rho_{44})^2 + 4\rho_{15}^2}$$

$$\text{se } (\rho_{22} + \rho_{44}) < \sqrt{(\rho_{22} - \rho_{44})^2 + 4\rho_{15}^2}.$$

$$\lambda_2^- = 0, \text{ se } (\rho_{22} + \rho_{44}) \geq \sqrt{(\rho_{22} - \rho_{44})^2 + 4\rho_{15}^2}. \quad (5.38)$$

A extensão "convex roof" da negatividade é calculada através da diagonalização de $\rho_{A_1A_2B}(t)$ (5.32), o operador $\rho_{A_1A_2B}$ diagonalizado tem a seguinte forma,

$$\rho_{A_1A_2B} = \rho_1 |\mu_1 \mathbf{i} h \mu_1\rangle + \rho_2 |\mu_2 \mathbf{i} h \mu_2\rangle + \rho_3 |\mu_3 \mathbf{i} h \mu_3\rangle + \rho_4 |\mu_4 \mathbf{i} h \mu_4\rangle + \rho_{33} |110 \mathbf{i} h 110\rangle + \rho_{44} |001 \mathbf{i} h 001\rangle, \quad (5.39)$$

onde

$$\rho_1 = \frac{1}{2}(\rho_{11} + \rho_{55} + \sqrt{(\rho_{11} - \rho_{55})^2 + 4\rho_{15}^2}), \quad (5.40)$$

$$\rho_2 = \frac{1}{2}(\rho_{11} + \rho_{55} - \sqrt{(\rho_{11} - \rho_{55})^2 + 4\rho_{15}^2}), \quad (5.41)$$

$$\rho_3 = \frac{1}{2}(\rho_{22} + \rho_{66} + \sqrt{(\rho_{22} - \rho_{66})^2 + 4\rho_{26}^2}), \quad (5.42)$$

$$\rho_4 = \frac{1}{2}(\rho_{22} + \rho_{66} - \sqrt{(\rho_{22} - \rho_{66})^2 + 4\rho_{26}^2}), \quad (5.43)$$

os estados $|\mu_1 \mathbf{i} h \mu_1\rangle$, $|\mu_2 \mathbf{i} h \mu_2\rangle$, $|\mu_3 \mathbf{i} h \mu_3\rangle$ e $|\mu_4 \mathbf{i} h \mu_4\rangle$ são escritos como,

$$\begin{aligned} |\mu_1 \mathbf{i} h \mu_1\rangle = & |a_1|^2 |000 \mathbf{i} h 000\rangle + a_1 b_1 |000 \mathbf{i} h 101\rangle + a_1 c_1 |000 \mathbf{i} h 011\rangle + \\ & b_1 a_1 |101 \mathbf{i} h 000\rangle + |b_1|^2 |101 \mathbf{i} h 101\rangle + b_1 c_1 |101 \mathbf{i} h 011\rangle + \\ & c_1 a_1 |011 \mathbf{i} h 000\rangle + c_1 b_1 |011 \mathbf{i} h 101\rangle + |c_1|^2 |011 \mathbf{i} h 011\rangle, \end{aligned} \quad (5.44)$$

onde

$$a_1 = \frac{2\rho_{15}}{\rho_{11} + \rho_{55} + \sqrt{(\rho_{11} - \rho_{55})^2 + 4\rho_{15}^2}}, \quad (5.45)$$

$$b_1 = c_1 = \frac{1}{2} \frac{\rho_{11} + \rho_{55} + \sqrt{(\rho_{11} - \rho_{55})^2 + 4\rho_{15}^2} - 2\rho_{11}}{(2\rho_{15})^2 + \rho_{11} + \rho_{55} + \sqrt{(\rho_{11} - \rho_{55})^2 + 4\rho_{15}^2} - 2\rho_{11}}. \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned} |\mu_2 \mathbf{i} h \mu_2| = & |a_2|^2 |000 \mathbf{i} h 000| + a_2 b_2 |000 \mathbf{i} h 101| + a_2 c_2 |000 \mathbf{i} h 011| + \\ & b_2 a_2 |101 \mathbf{i} h 000| + |b_2|^2 |101 \mathbf{i} h 101| + b_2 c_2 |101 \mathbf{i} h 011| + \\ & c_2 a_2 |011 \mathbf{i} h 000| + c_2 b_2 |011 \mathbf{i} h 101| + |b_2|^2 |011 \mathbf{i} h 011|, \end{aligned} \quad (5.47)$$

onde

$$a_2 = \frac{2\rho_{15}}{\rho_{11} + \rho_{55} - \sqrt{(\rho_{11} - \rho_{55})^2 + 4\rho_{15}^2}}, \quad (5.48)$$

$$b_2 = c_2 = \frac{1}{2} \frac{\rho_{11} + \rho_{55} - \sqrt{(\rho_{11} - \rho_{55})^2 + 4\rho_{15}^2} - 2\rho_{11}}{(2\rho_{15})^2 + \rho_{11} + \rho_{55} - \sqrt{(\rho_{11} - \rho_{55})^2 + 4\rho_{15}^2} - 2\rho_{11}}. \quad (5.49)$$

$$\begin{aligned} |\mu_3 \mathbf{i} h \mu_3| = & |a_3|^2 |100 \mathbf{i} h 100| + a_3 b_3 |100 \mathbf{i} h 010| + a_3 c_3 |100 \mathbf{i} h 111| + \\ & b_3 a_3 |010 \mathbf{i} h 100| + |b_3|^2 |010 \mathbf{i} h 010| + b_3 c_3 |010 \mathbf{i} h 111| + \\ & c_3 a_3 |111 \mathbf{i} h 100| + c_3 b_3 |111 \mathbf{i} h 010| + |b_3|^2 |111 \mathbf{i} h 111|, \end{aligned} \quad (5.50)$$

onde

$$a_3 = b_3 \frac{2\rho_{26}}{(\rho_{22} + \rho_{66} + \sqrt{(\rho_{22} - \rho_{66})^2 + 4\rho_{26}^2 - 2\rho_{66}})^2 + (2\rho_{26})^2}, \quad (5.51)$$

$$c_3 = \frac{1}{2} \frac{\rho_{22} + \rho_{66} + \sqrt{(\rho_{22} - \rho_{66})^2 + 4\rho_{26}^2 - 2\rho_{66}}}{\rho_{22} + \rho_{66} + \sqrt{(\rho_{22} - \rho_{66})^2 + 4\rho_{26}^2 - 2\rho_{66}}^2 + (2\rho_{26})^2}. \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned} |\mu_4 \text{ i } h \mu_4| &= |a_4|^2 |100 \text{ i } h 100| + a_4 b_4 |100 \text{ i } h 010| + a_4 c_4 |100 \text{ i } h 111| + \\ &b_4 a_4 |010 \text{ i } h 100| + |b_4|^2 |010 \text{ i } h 010| + b_4 c_4 |010 \text{ i } h 111| + \\ &c_4 a_4 |111 \text{ i } h 100| + c_4 b_4 |111 \text{ i } h 010| + |b_4|^2 |111 \text{ i } h 111|, \end{aligned}$$

onde

$$a_4 = b_4 \frac{2\rho_{26}}{(\rho_{22} + \rho_{66} + \sqrt{(\rho_{22} - \rho_{66})^2 + 4\rho_{26}^2 - 2\rho_{66}})^2 + (2\rho_{26})^2}, \quad (5.53)$$

$$c_4 = \frac{1}{2} \frac{\rho_{22} + \rho_{66} + \sqrt{(\rho_{22} - \rho_{66})^2 + 4\rho_{26}^2 - 2\rho_{66}}}{\rho_{22} + \rho_{66} + \sqrt{(\rho_{22} - \rho_{66})^2 + 4\rho_{26}^2 - 2\rho_{66}}^2 + (2\rho_{26})^2}. \quad (5.54)$$

Utilizando-se do operador densidade diagonalizado (equação (5.39)), podemos calcular a CRE negatividade para o qubit B, através da expressão (4.34), como,

$$N_{\text{CRE}}^B(\rho_{A_1 A_2 B}) = \min_k \widehat{\rho_k} N^B(\widehat{\mu}_k), \quad (5.55)$$

Os resultados numéricos foram obtidos a partir das equações (5.34), (5.36) e (5.55), utilizando o programa fortran. Os cálculos foram feitos para $\theta = 3, 14$, ou seja reflectividade do divisor de feixe $r = 0$ ($r = \cos \theta/2$) e $s = 1, 2$. Os resultados numéricos da entropia linear, negatividade e extensão "convex roof" da negatividade são representados na figura (5.6), como função do parâmetro $\tau = gt$.

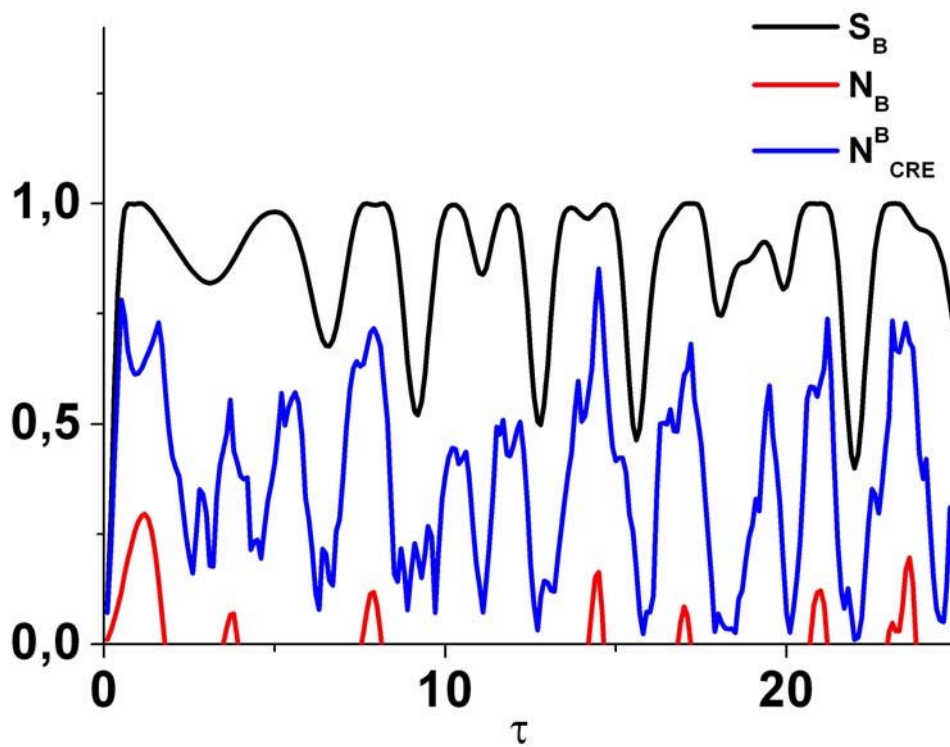


Figura 5.6: Entropia linear S_B , negatividade N_B e CRE negatividade N_{CRE}^B , para $s = 1, 2$, $\theta = 3, 14$ em função do parâmetro de interação $\tau = g t$.

A figura (5.6) mostra que a negatividade tem valor zero para alguns valores de τ , isso ocorre porque trata-se de um estado misto que possui emaranhamento ligado. A extensão "convex roof" da negatividade é capaz de detectar tanto emaranhamento livre como emaranhamento ligado. A entropia linear assim como a extensão "convex roof" da negatividade demonstra que o estado está emaranhado para todos os valores de $\tau > 0$. Com essa análise verificamos que o sistema estudado possui emaranhamento ligado e que a negatividade, não é capaz de detectar esse emaranhamento. Por outro lado a extensão "convex roof" da negatividade e entropia linear detectam o emaranhamento ligado.

Também verificamos que apesar de haver uma correspondência entre os picos dos gráficos da entropia linear e da extensão "convex roof" da negatividade, a forma da curva da extensão "convex roof" da negatividade não segue exatamente o mesmo padrão que o da entropia linear. O efeito tem sua origem no fato de que o grau de mistura do estado do qubit B é devido ao emaranhamento com qubits A_1 , A_2 e campo eletromagnético. Por outro lado a extensão "convex roof" da negatividade foi calculada a partir do estado $\rho_{A_1A_2B}$ (5.55), e detecta somente o emaranhamento do qubit B com o par de qubits A_1A_2 .

Para examinarmos a dinâmica do emaranhamento dos qubits, não utilizaremos a medida de negatividade pois ela não detecta o emaranhamento ligado do sistema, também não será usada a entropia linear, pois ela não mede somente o emaranhamento dos átomos, ela também quantifica o emaranhamento átomo campo. Deste modo, utilizaremos apenas a extensão "convex roof" da negatividade para verificação do emaranhamento entre os átomos, pois ela depende somente do emaranhamento dos átomos, além de detectar o emaranhamento ligado.

5.4.2 Emaranhamento do qubit A_1

Para o emaranhamento do qubit A_1 , primeiro calcularemos o seu emaranhamento com o par A_2B , este cálculo é feito usando o operador $\rho_{A_1A_2B}^{T_{A_2B}}$, com isso pode-se calcular a extensão "convex roof" da negatividade $N_{CRE}^{A_1}$. O emaranhamento do qubit A_1 com o qubit A_2 , assim como o emaranhamento de A_1 com B, foi calculado através da negatividade

"two-way", para isso calculamos $\rho_{A_1A_2B}^{T_{A_1-A_2}}$ e $\rho_{A_1A_2B}^{T_{A_1-B}}$, deste modo obtemos as negatividades "two-way" $N_{CRE}^{A_1-A_1A_2}$ e $N_{CRE}^{A_1-A_1B}$. Utilizando-se desses resultados foi feito um gráfico, onde representamos $N_{CRE}^{A_1}$, $N_{CRE}^{A_1-A_1A_2}$ e $N_{CRE}^{A_1-A_1B}$, em função do parâmetro de interação τ , para $\theta = 3, 14$ e $s = 1, 2$, como mostra a Figura (5.7).

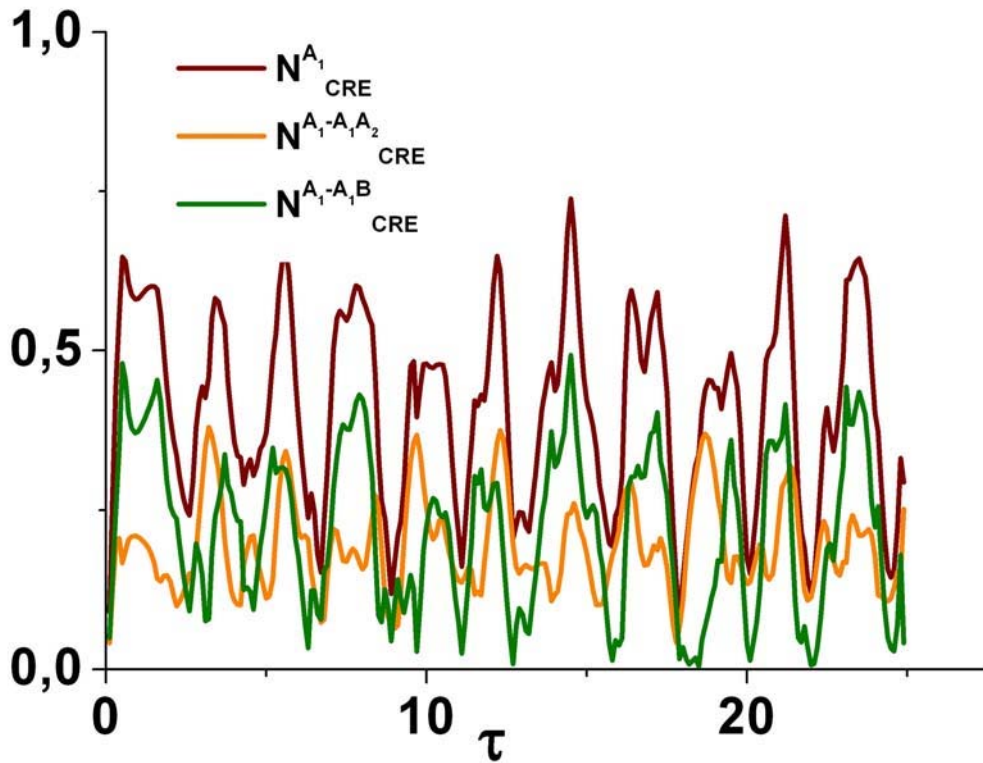


Figura 5.7: Negatividade $N_{CRE}^{A_1}$, negatividade tipo-2 $N_{CRE}^{A_1-A_1A_2}$ e $N_{CRE}^{A_1-A_2B}$, para $\theta = 3, 14$ e $s = 1, 2$ versus o parâmetro de interação τ .

Na figura (5.7) verificamos que para $\tau = 14, 6$, o emaranhamento entre os átomos nas cavidades distintas é maior que o emaranhamento entre os átomos A_1 e A_2 da cavidade de Alice. Isso ocorre devido à transferência de emaranhamento do estado comprimido para os estados dos átomos. Cada modo do estado comprimido é enviado para uma cavidade, a correlação quântica do estado comprimido é transferida para os estados dos átomos, por esse motivo a extensão "convex roof" da negatividade $N_{CRE}^{A_1}$, que mede o emaranhamento do qubit A_1 com o par A_2B , e $N_{CRE}^{A_1-A_1B}$ que verifica o emaranhamento entre o qubit A_1 e

B, é maior que $N_{CRE}^{A_1-A_1A_2}$, que demonstra o emaranhamento entre os qubits A_1 e A_2 , que estão localizados na mesma cavidade. Também observamos que para os parâmetros de interação $\tau = (0,48)$, $(7,85)$ e $(14,6)$, os picos de $N_{CRE}^{A_1}$ coincidem com os picos de $N_{CRE}^{A_1-A_1B}$. Esses pontos demonstram que onde há maior emaranhamento entre o qubit B com A_1 equivalem aos pontos onde o existe maior emaranhamento do qubit B com o par A_1A_2 .

5.4.3 Emaranhamento do qubit B

O emaranhamento do qubit B com o par A_1A_2 , é obtido através do operador $\rho_{A_1A_2B}^{TA_1A_2}$, deste modo calculamos a extensão "convex roof" da negatividade N_{CRE}^B . Para calcular emaranhamento do qubit B com A_1 necessitamos do operador $\rho_{A_1A_2B}^{TB-A_1}$, deste modo obtemos a negatividade "two-way" $N_{CRE}^{B-A_1}$. O emaranhamento do qubit B com A_1 é o mesmo que o emaranhamento do qubit B com A_2 , pois $\rho_{A_1A_2B}^{TB-A_1} = \rho_{A_1A_2B}^{TB-A_2}$. Utilizando-se desses resultados fizemos um gráfico, onde representamos N_{CRE}^B e $N_{CRE}^{B-A_1}$, em função do tempo de interação τ , para $\theta = 3, 14$ e $s = 1, 2$, como mostra a figura (5.8).

A figura (5.8) mostra que a extensão "convex roof" da negatividade N_{CRE}^B , que mede o emaranhamento do qubit B com o par A_1A_2 , para $\tau = 14,5$ é maior que a negatividade two-way $N_{CRE}^{B-A_1}$, que verifica o emaranhamento entre o qubit B com A_1 . Como o emaranhamento do estado comprimido é compartilhado entre as cavidades e transferido para os átomos, a quantidade de emaranhamento da cavidade de Alice é dividida entre os átomos A_1 e A_2 , por este motivo N_{CRE}^B é maior que $N_{CRE}^{B-A_1}$. Também verificamos que para os parâmetros de interação $\tau = (0,48)$, $(7,85)$ e $(14,6)$, os picos de N_{CRE}^B e $N_{CRE}^{B-A_1}$ coincidem, da mesma forma que foi observado na figura (5.7), isso confirma a análise que os pontos onde o emaranhamento do qubit B com o par A_1A_2 é maior, equivalem aos pontos onde se tem maior emaranhamento do qubit B com A_1 .

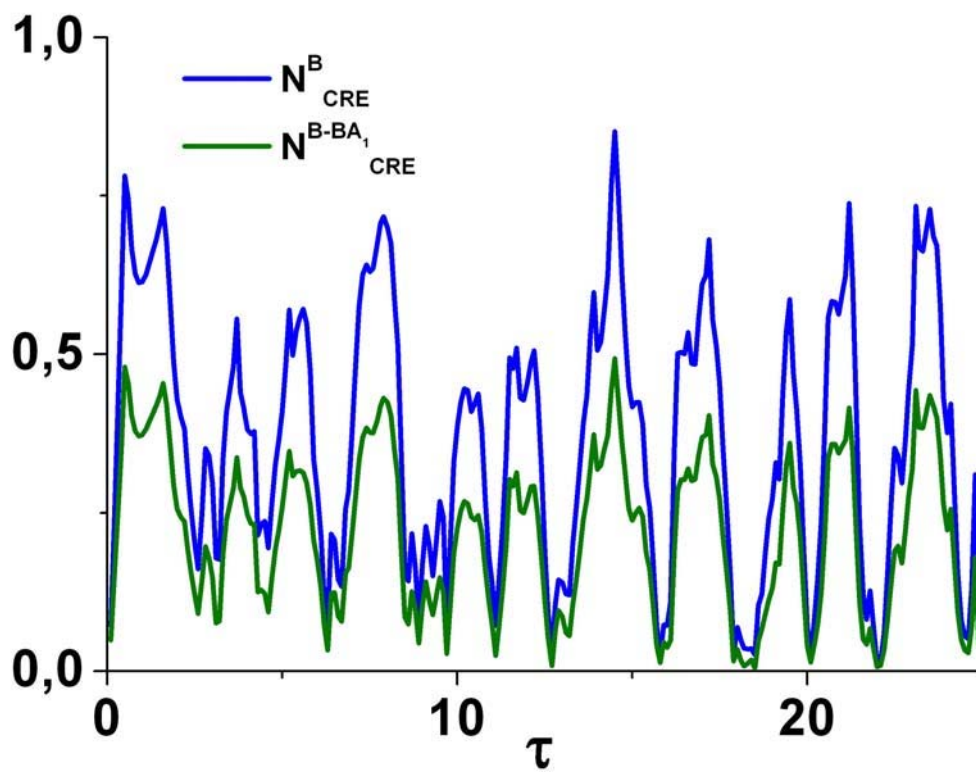


Figura 5.8: Negatividade N_{CRE}^B e negatividade tipo-2 $N_{CRE}^{B-A_1}$, para $\theta = 3, 14$ e $s = 1, 2$ versus o parâmetro de interação τ

5.5 Parâmetro de compressão

O valor do parâmetro de compressão s , que gera o maior emaranhamento entre os átomos, foi verificado através de um gráfico onde plotamos as negatividades $N_{CRE}^{A_1}$ e N_{CRE}^B , e das two-ways negatividades $N_{CRE}^{A_1-A_1A_2}$ e $N_{CRE}^{A_1-A_1B}$, em função do parâmetro de compressão s , para $\theta = 3, 14$ e $\tau = 14, 5$, este gráfico está representado na figura (5.9).

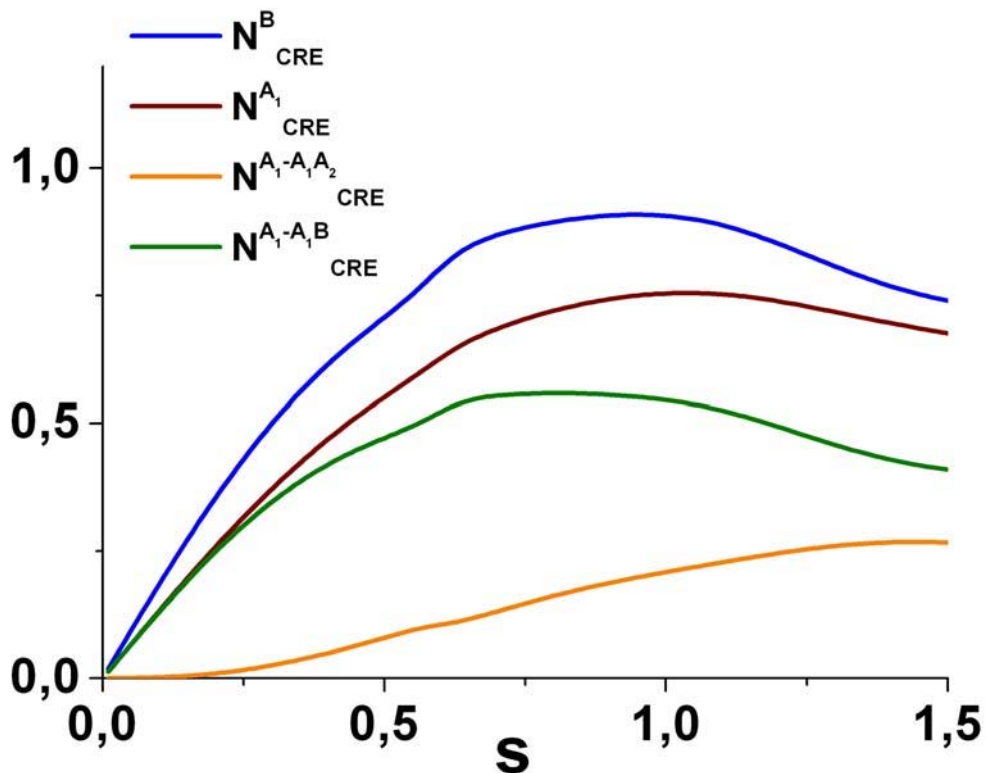


Figura 5.9: Negatividades (N_{CRE}^B , $N_{CRE}^{A_1}$) e two-ways negatividades ($N_{CRE}^{A_1-A_1A_2}$, $N_{CRE}^{A_1-A_1B}$) versus parâmetro de compressão s , para $\theta = 3, 14$ e $\tau = 14, 5$.

O parâmetro de interação ($\tau = 14, 5$), foi utilizado pois este equivale ao ponto de maior emaranhamento entre o qubit B e o par A_1A_2 para ($0 \leq \tau \leq 25$), isso pode ser notado através da figura (5.6). Na figura (5.8) verificamos que o valor do parâmetro de compressão para o maior emaranhamento do qubit B com o par A_1A_2 (linha azul figura 5.9) é $s = 0,94$. Como foi verificado na figura (5.3), para esse valor de parâmetro de

compressão a componente ρ_{11} é aproximadamente igual a $\prod_{i=2}^6 \rho_{ii}$, ou seja, em uma medida no sistema a probabilidade de encontrar o sistema no estado inicial é muito alta. Por este motivo utilizamos ($s = 1.2$), no cálculo do emaranhamento dos átomos, um ponto próximo do pico de emaranhamento.

5.6 Transferência do emaranhamento das variáveis contínuas para os qubits

Nesta seção, comparamos a entropia de Von Neumann para estado reduzido dos átomos como função do parâmetro de interação, com a entropia de Von Neumann do estado inicial do campo comprimido, com o objetivo de verificar a transferência de emaranhamento das variáveis contínuas do campo para o sistema quântico composto de três qubits. O operador densidade $\hat{\rho}(t)$, obtido a partir de transformação unitária atuando sobre o estado inicial do sistema átomo campo, caracteriza os três átomos e o campo em um estado puro. Para calcularmos a entropia de Von Neumann dos átomos A_1A_2B , devemos fazer um traço sobre o campo, no operador densidade $\hat{\rho}(t)$ da equação (5.16), e obter o operador densidade reduzido $\hat{\rho}_{A_1A_2B}(t)$. A forma analítica do operador $\hat{\rho}_{A_1A_2B}(t)$ foi apresentada na equação (5.19). Diagonalizando o operador $\hat{\rho}_{A_1A_2B}(t)$, obtemos os autovalores, ρ_i ($i = 1 - 6$), que são escritos como,

$$\begin{aligned}
 \rho_1 &= \frac{1}{2}(\rho_{11} + \rho_{55} + \sqrt{(\rho_{11} - \rho_{55})^2 + 4\rho_{15}^2}), \\
 \rho_2 &= \frac{1}{2}(\rho_{11} + \rho_{55} - \sqrt{(\rho_{11} - \rho_{55})^2 + 4\rho_{15}^2}), \\
 \rho_3 &= \frac{1}{2}(\rho_{22} + \rho_{66} + \sqrt{(\rho_{22} - \rho_{66})^2 + 4\rho_{26}^2}), \\
 \rho_4 &= \frac{1}{2}(\rho_{22} + \rho_{66} - \sqrt{(\rho_{22} - \rho_{66})^2 + 4\rho_{26}^2}), \\
 \rho_5 &= \rho_{33} \\
 \rho_6 &= \rho_{44}
 \end{aligned} \tag{5.56}$$

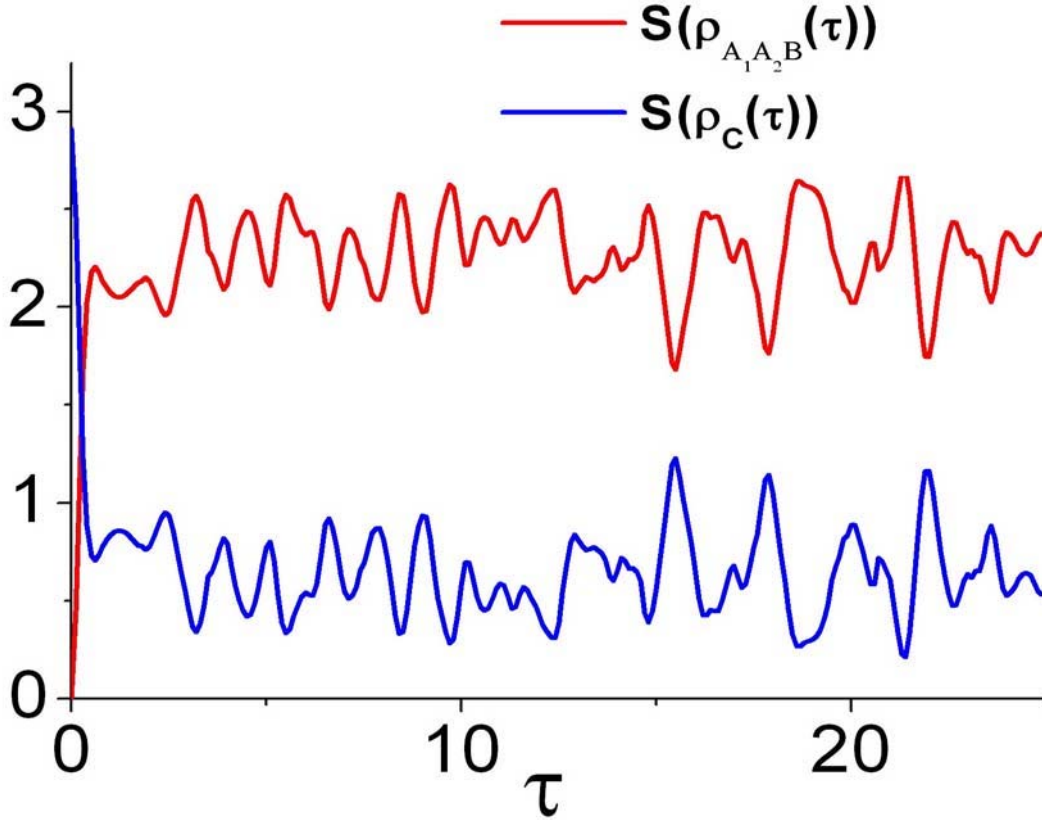


Figura 5.10: Entropias de Von Neumann $S(\hat{\rho}_{A_1 A_2 B}(gt))$ e $S(\hat{\rho}_C(gt))$, versus parâmetro de interação τ , para $s = 1, 2$ e $\theta = 3, 14$

A entropia de Von Neumann para estado $\hat{\rho}_{A_1 A_2 B}(t)$, é escrita como,

$$S(\hat{\rho}_{A_1 A_2 B}(gt)) = - \sum_i \hat{p}_i \log_2(p_i). \quad (5.57)$$

A entropia de Von Neumann para o estado inicial do campo, $S(\hat{\rho}_C(0))$, foi obtida como função do parâmetro de compressão no capítulo (4), seção (4.7), e representa o emaranhamento presente no estado inicial devido ao fato de que os três átomos são inicialmente preparados em um estado separável. Na figura (5.10) plotamos as entropias de Von Neumann $S(\hat{\rho}_{A_1 A_2 B}(gt))$ e $S(\hat{\rho}_C(gt)) = S(\hat{\rho}_C(0)) - S(\hat{\rho}_{A_1 A_2 B}(gt))$, como função do parâmetro $\tau = gt$ para parâmetro de compressão ($s = 1.2$) e ($\theta = 3, 14$).

Podemos verificar na figura (5.10) que a entropia de Von Neumann para o campo em $\tau = 0$ tem como valor $S(\hat{\rho}_C(gt)) = 2,95$, que é o mesmo valor da entropia do estado comprimido de dois modos para o parâmetro de compressão $(s = 1,2)$, isso pode ser verificado através da figura (4.1) do capítulo (4). Por outro lado a entropia de Von Neumann para o campo no tempo zero é $S(\hat{\rho}_{A_1A_2B}(gt)) = 0^{\mathcal{C}}$, isso acontece porque átomos e campo são inicialmente preparados em um estado separável. Também observamos que para o parâmetro de interação $(\tau = 3,2)$ temos o primeiro pico de $S(\hat{\rho}_{A_1A_2B}(gt))$, esse valor de tempo de interação corresponde ao primeiro vale de $S(\hat{\rho}_C(gt))$, para o parâmetro de interação $(\tau = 3,2)$ temos maior transferência de emaranhamento do campo para o estados dos átomos a partir de $t = 0$. Para os parâmetros de interação $(\tau = 4,5)$, $(\tau = 5,6)$, $(\tau = 8,4)$, $(\tau = 9,8)$ e $(\tau = 18,7)$, observa-se picos, da entropia de Von Neumann $S(\hat{\rho}_{A_1A_2B}(gt))$, indicando que para estes valores de parâmetro de interação ocorre uma transferência significativa de emaranhamento das variáveis contínuas do campo para os átomos em comparação com o estado inicial do sistema.

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho estudamos a transferência de emaranhamento das variáveis contínuas do estado comprimido do campo eletromagnético de dois modos, para um sistema de átomos aprisionados em cavidades distintas. O sistema estudado é composto por três átomos aprisionados em duas cavidades onde o laboratório de Alice tem uma cavidade com dois átomos aprisionados e o laboratório de Bob possui uma cavidade com um único átomo aprisionado. Um campo comprimido de dois modos é enviado para as cavidades, sendo que cada modo do campo é enviado para uma cavidade distinta. A junção entre campo externo e campo na cavidade é feita através de um divisor de feixe.

Para verificarmos o possível existência de emaranhamento entre os átomos foi feito um traço sobre os modos do campo no operador densidade do sistema composto dos átomos A_1 , A_2 e B e campo quantizado no tempo t . Com isso obtivemos a matriz densidade reduzida $\rho_{A_1A_2B}(t)$ (equação (5.19)), essa matriz possui elementos fora da diagonal principal, o que caracteriza um possível emaranhamento. Utilizando-se das probabilidades de ocupação dos estados base do sistema dado pela matriz $\rho_{A_1A_2B}$ em função do parâmetro de interação, verificamos que o melhor valor de parâmetro de compressão para o cálculo do emaranhamento dos átomos é ($s = 1.2$). Para este valor de parâmetro de compressão a probabilidade ρ_{11} possui menor valor em relação a $\sum_{i=2}^{\infty} \rho_{ii}$, além disso, esse valor de parâmetro de compressão possui um número médio de fótons pequeno figura

(4.2). Quando utilizamos um parâmetro de compressão maior que ($s = 1.2$), observamos uma diminuição no valor de ρ_{11} em relação a $\sum_{i=2}^{\infty} \rho_{ii}$, mas para valores de parâmetro de compressão maiores que ($s = 1.2$), ocorre um aumento no número médio de fótons, o que contribui para uma maior dissipação na cavidade.

No estudo do emaranhamento do qubit B com o par A_1A_2 (figura (5.5)), onde plotamos a entropia linear, extensão "convex roof" da negatividade e negatividade do qubit B em função do parâmetro de interação τ , verificamos que a negatividade assume valor zero para alguns valores de τ , isso ocorre porque se trata de um estado misto que possui emaranhamento ligado. A extensão "convex roof" da negatividade é capaz de detectar tanto emaranhamento livre como emaranhamento ligado mostrando que o sistema tem emaranhamento para todos os valores de $\tau > 0$. Também observamos que apesar de haver uma correspondência entre os picos dos gráficos da entropia linear e da extensão "convex roof" da negatividade, a forma da curva da extensão "convex roof" da negatividade não segue o mesmo padrão que o da entropia linear. O efeito tem sua origem no fato de que o grau de mistura do estado do qubit B é devido ao emaranhamento com qubits A_1 , A_2 e campo eletromagnético. Por outro lado a extensão "convex roof" da negatividade foi calculada a partir do estado $\rho_{A_1A_2B}$, e detecta somente o emaranhamento do qubit B com o par de qubits A_1A_2 . Deste modo utilizamos a extensão "convex roof" da negatividade, para calcular o emaranhamento dos átomos.

Nos gráficos das figuras (5.6) e (5.7), que os picos nas medidas de emaranhamento, para os parâmetros de interação $\tau = (0,48)$, $(7,85)$ e $(14,6)$, coincidem para as medidas de emaranhamento entre átomos em cavidade separadas $N_{CRE}^{A_1-A_1B}$, $N_{CRE}^{A_1}$, $N_{CRE}^{B-BA_1}$ e N_{CRE}^B , o que indica pontos de maior emaranhamento entre o qubit remoto e o par de Bell.

Também verificamos que parâmetro de compressão ($s = 0,94$), gera maior emaranhamento do qubit B com o par A_1A_2 . Apesar desse valor gerar maior emaranhamento, para parâmetro de interação ($\tau = 0,8$), este parâmetro de compressão tem probabilidade de ocupação ρ_{11} aproximadamente igual a $\sum_{i=2}^{\infty} \rho_{ii}$ figura (5.3), ou seja existe grande probabilidade de medir o sistema no estado inicial que corresponde a essa probabilidade.

Preferimos o valor ($s = 1, 2$), como valor de parâmetro de compressão para verificação da dinâmica do emaranhamento do sistema de átomos, pois para esse valor, uma boa fração do estado inicial interage com o campo, enquanto o número médio de fótons dentro da cavidade não é muito grande.

No sistema estudado ocorre a transferência de emaranhamento do campo para os átomos. Para verificarmos a transferência do emaranhamento, calculamos a entropia Von Neumann para os átomos e o campo. Para os parâmetros de interação ($\tau = 4, 5$), ($\tau = 5, 6$), ($\tau = 8, 4$), ($\tau = 9, 8$) e ($\tau = 18, 7$), observamos picos, da entropia de Von Neumann $S(\hat{\rho}_{A_1 A_2 B}(gt))$, indicando que para estes valores de parâmetro de interação ocorre uma transferência significativa de emaranhamento das variáveis contínuas do campo para os átomos em comparação com o estado inicial do sistema.

O Emaranhamento entre átomos aprisionados em cavidades distintas, pode ser utilizado na comunicação quântica e na computação quântica distribuída. Por outro lado o sistema proposto está em um estado misto, a quantificação desse emaranhamento ainda é uma questão em aberto.

Referências Bibliográficas

- [1] R. More, Eletronics Magazine, 19, 1965.
- [2] P. Beinof, Phys. Rev. Lett. 48(23):1581-1585, Jun (1982)
- [3] P. Beinof, J. Stat. Phys, 22:563, (1980).
- [4] R. P. Feynman, Feynman Lectures on Computation, Hayger Collins Canada / Perseus Boock (1996).
- [5] R. P. Feynman, Int. J. Theor. Phys., 21:467, (1982).
- [6] D. Deutsh, Proc. Royal Soc. London, A400(1818), 97-117, (1985).
- [7] J. I. Cirac, P. Zoller, Phys. Rev. A. 50, R2799 (1994).
- [8] E. Hagle, X. Maître, G. Nogues, C. Wunderlich, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche, Phys. Rev. Lett. 79, 1 (1997).
- [9] J. M. Raimond, M. Brune, and S. Haroche, Rev. Mod. Phys. 73, 565 (2001).
- [10] S. B. Zheng, G. C. Guo, Phys. Rev. Lett. 85, 2392 (2000).
- [11] G.P. Guo, C.F. Li, G. C. Guo, Phys. Rev. A. 65, 042102 (2002).
- [12] M. Brune, E. Hagle, J. Dreyer, X. Maître, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond, and S. Haroche, Phys. Rev. Lett. 77, 4887 (1996).
- [13] S. B. Li and J.B. Xu, Phys. Rev. A. 72, 022332 (2005).

- [14] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, *Nature (London)* 404, 247 (2000).
- [15] A. Ekert and R. Jozsa, *Rev. Mod. Phys.* 68, 733(1996); V. Vedral and M.B. Plenio, *Prog. Quantum Electronics.* 22, 1 (1997).
- [16] J. I. Cirac, A. K. Ekert, S. F. Huelga, and C. Macchiavello, *Phys. Rev. A.* 59, 4249 (1999).
- [17] M. O. Scully, M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, (1997).
- [18] P. L. Knight, V. Busek, *Lecture Notes in Physics*, pp 3-32, (2002)
- [19] E. Schrödinger, *Naturwiss.* 14, 664 (1926).
- [20] P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. A* 114, 243 (1927).
- [21] E. H. Kennard, *Z. Physik* 44, 326 (1927).
- [22] R. Glauber, The quantum theory of optical coherence. *Phys. Rev.* 130 (6), 2529 (1963). Coherent and incoherent states of the radiation field. *Phys. Rev.* 131 (6), 2766 (1963).
- [23] R. J. Glauber, *Quantum Optics and Electronics*, Les Houches, ed. C. DeWitt, A. Blandin, and C. Cohen-Tannoudji (Gordon and Breach, New York 1965).
- [24] L. Mandel, E. Wolf, *Rev. Mod. Phys.* 37, 231 (1965).
- [25] J. R. Klauder, B. S. Skagerstam, *Coherent States*, (World Scientific, Singapore 1985).
- [26] D. Stoler, *Phys Rev. D.* 1, 3217 (1970).
- [27] C. Y. E. Lu, *Lett. Nuovo Cim.* 2, 1241 (1971),
- [28] M. Sargent III, M. O. Scully, W. E. Lamb Jr., *Laser Physics*, (Addison Wesley, Mass, 1974).
- [29] H. P. Yuen, *Phys. Rev. A* 13, 2226 (1976).

- [30] J. N. Hollenhorst, Phys. Rev. D 19, 1669 (1979).
- [31] W. Schleich, J. A. Wheeler, Nature 326, 574 (1987); J. Opt. Soc. Am. B 4, 1715 (1987).
- [32] E. T. Jaynes, F. W. Cummings, Proc. IEEE 51, 89 (1963).
- [33] B. W. Shore, P. L. Knight, J. Mod. Opt. 40, 1195, (1993).
- [34] G. Rempe, R. J. Thompson, R. J. Brecha, W. D. Lee, H. J. Kimble, Phys. Rev. Lett. 67, 1727 (1991)
- [35] Rodney Loudon. The Quantum Theory of Light. University of Press, Oxford, 1973.
- [36] B. W. Shore, P. L. Knight, The jaynes-cummings model. J. mod. Opt., 40:1195, 1993.
- [37] M. J. Holland, D. F. Walls, P. Zoller, Phys. REv. Lett. 67, 1716 (1991).
- [38] M. Bruce, S. Horoché, J. M. Raimond, L. Davidovich, N. Zagury, Phys. Rev. A 45, 519 (1992).
- [39] P. Meystre, M. Sargent III, Elements of Quantum Optics (Springer, Berlin, 1990).
- [40] K. Vogel, V. M. Akulin, W. P. Schleich, Phys. Rev. Lett. 71, 1816 (1993).
- [41] A. S. Parkins, P. Marte, P. Zoller, O. Carnal, H. J. Kimbel, Phys. Rev. A 51, 1578 (1995).
- [42] J. H. Erbely, N. B. Narozhny, J. J. Sánchez-Mondragón, Phys. Rev. Lett. 44,1323, (1980).
- [43] Yoo, H. -I., J. J. Sánchez-Mondragón, J. H. Erbely, J. Phys. A 14, 1383 (1981).
- [44] P. J. Bardrow, E. Mayr, W. P. Schleich, Phys. Rev. A 51, 4963 (1995).
- [45] S. J. D. Phoenix, S. M. Barnett, J. Mod. Opt. 40, 979 (1993).

- [46] J. I. Cirac, L. J. Garay, R. Blatt, A. S. Parkins, P. Zoller, Phys. Rev. A 49, 1202 (1994).
- [47] L. Davidovich, N. Zagury, M. Bruce, J. M. Raimond, S. Haroche, Phys. Rev. A 50, R895 (1994).
- [48] T. Sleator, H. Weinfurter, Phys. Rev. Lett. 74, 4087 (1995).
- [49] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, Phys. Rev. 47 (1935) 777.
- [50] E. Schrödinger. Naturwissenschaften 23 (1935) 807.
- [51] J. S. Bell, Physics 1, 195 (1964).
- [52] C. H. Bennett, H. J. Bernstein, S. Popescu, B. Schumacher, Phys. Rev. A 53, 2046 (1996).
- [53] S. Hill, W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. 78, 5022 (1997).
- [54] W. Wootters, Phys. Rev. Lett. 80 2245 (1998).
- [55] A. Peres, Phys. Rev. Lett. 76 1413 (1996).
- [56] M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, Phys. Lett. A 223 1 (1996).
- [57] G. Vidal, R. F. Werner, Phys. Rev. A 65 32314 (2002).
- [58] S. Lee, D. P. Chi, S. D. Oh, J. Kim, Phys. Rev. A 68, 062304 (2003).
- [59] S. Shelly Sharma, N. K. Sharma, Phys. Rev. A 76, 012326 (2007).
- [60] C.H. Bennett, G. Brassard, S. Popescu, B. Schumacher, J. A. Smolin, W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. 76 (1996) 722-725. C. H. Bennett, D. P. Di Vincenzo, J. Smolin, and W. K. Wootters, Phys. Rev. A 54, 3824 (1996).
- [61] P. Hayden, M. Horodecki, and B.M. Terhal, J. Phys. A 34, 6891 (2001).

- [62] V. Vedral, M.B. Plenio, M.A. Rippin, and P.L. Knight, Phys. Rev. Lett. 78, 2275 (1997).
- [63] V. Vedral and M.B. Plenio, Phys. Rev. A 57, 1619 (1998).
- [64] F. Mintert, M. Kus and A. Buchleitner. Phys. Rev. Lett., 95:260502, (2005).
- [65] P. Horodecki. Phys. Rev. Lett., 90:167901, (2003).
- [66] S. P. Walborn, P. H. Souto Ribeiro, L. Davidovich, F. Mintert and A. Buchleitner. Nature, 440:1022, (2006).
- [67] J. Eisert, PhD thesis (University of Potsdam, February 2001).
- [68] M.B. Plenio, Phys. Rev. Lett. 95, 090503 (2005).
- [69] Matteo G. A. Paris, Phys. Rev. A 59, 1615 (1999).
- [70] S. J. van Enk, Phys. Rev. A 60, 5095 (1999).
- [71] D. Brub, J. Math. Phys. 43, 4237 (2002).
- [72] G. Vidal, J. Mod. Opt. 47, 355 (2000).
- [73] S. Bose V. Vedral, Phys. Rev. A 61, 040101 (2000).
- [74] C. H. Bennett, and G. Brassard, in in Proceedings of IEE International Conference on Computers, Systems and signal Processing, Bangalore, India (IEEE, New York), pp. 175 - 179 (1984).
- [75] W. Son, M. S. Kim, Jinhyoung Lee, and D. Ahn. Journal Of Modern Optics 49, 1739 (2002).
- [76] B. L. Schumaker, and C. M. Caves, Phys. Rev. A 31, 3093 (1985); S. M. Barnett and, P. L. Knight, J. mod. Opt. 34, 841 (1987).
- [77] S. Parker, S. Bose and M. Plenio, Phys. Rev. A 61, 032305 (2000).

- [78] J. Lee, H. Joeong, and M. S. Kim, Phys. Rev. A 62, 032305 (2000).
- [79] L. M. Duan, G. Giedke, J. I. Cirac and P. Zoller, Phys. Rev. Lett. 84, 2722 (2000)
- [80] E. T. Jaynes, and F. W. Cummings, Proc. IEEE 51, 89 (1963); B. W. Shore, and P. L. Knigh, J. Mod. Opt. 40, 1195 (1993).
- [81] J. Wang, Q. Zhang and C. J. Tang, arXiv:quant-ph/0603144v1
- [82] J. Wang, Q. Zhang and C. J. Tang, arXiv:quant-ph/0602166v2
- [83] C.H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. 70, 1895 (1993).
- [84] F. G. Deng, and G. L. Long, Phys. Rev. A 68, 042315 (2003).