UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA

DIRCEU DOS SANTOS BRITO

PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO GEOMÉTRICA APLICADOS AO ESTUDO DE PRAÇAS:

UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO COM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Londrina
2013

DIRCEU DOS SANTOS BRITO

PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO GEOMÉTRICA APLICADOS AO ESTUDO DE PRAÇAS:

UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO COM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Dissertação de mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientadora: Profª Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida.

Londrina
2013

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

B862p Brito, Dirceu dos Santos.
Problemas de otimização geométrica aplicados ao estudo de praças : uma experiência de ensino com atividades de modelagem matemática / Dirceu dos Santos Brito. – Londrina, 2013.
122f. : il.

Orientador: Lourdes Maria Werle de Almeida.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2013.
Inclui bibliografia.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Otimização matemática – Teses. 3. Geometria plana – Teses. 4. Modelos matemáticos – Teses. I. Almeida, Lourdes Maria Werle de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Sociedade Brasileira de Matemática. IV. Título.

CDU 51:37.02

DIRCEU DOS SANTOS BRITO

PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO GEOMÉTRICA APLICADOS AO ESTUDO DE PRAÇAS:

UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO COM MODELAGEM MATEMÁTICA

Dissertação de mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

____
Profª Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida
UEL – Londrina - PR

____
Profª Dra. Luci Harue Fatori
UEL – Londrina - PR

____
Profª Dra. Lilian Akemi Kato
UEM – Maringá - PR

Londrina, _____de ___________de _____.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela vida e força que me sustentam nessa caminhada;

À professora Lourdes pelo apoio, disposição e clareza nas orientações;

Aos meus alunos do CENSE 2 pela empenho e enorme alegria durante as aulas;

Aos colegas e professores do PROFMAT-UEL pela amizade e dedicação;

À minha família, Claudia, Elisa e Esther pelo amor infinito;

Às professoras da Banca Examinadora, Luci e Lilian pelas contribuições valiosas;

À CAPES pelo apoio financeiro.

A todos e a todas que de algum modo tornaram esse trabalho possível,

Meu muitíssimo obrigado!!!

São poucos
que entram em campo pra vencer
A alma guarda
o que a mente tenta esquecer

***Racionais Mc´s** , in "**Negro Drama**"*

BRITO, Dirceu dos Santos. **Problemas de otimização geométrica aplicados ao estudo de praças**: uma experiência de ensino com atividades de modelagem matemática. 2013. 122f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

RESUMO

Este trabalho relata uma experiência de ensino envolvendo problemas de otimização geométrica e atividades de Modelagem Matemática sobre o tema “praças”. Apresenta-se inicialmente algumas reflexões sobre o ensino da Geometria na Educação Básica e, em seguida, discute-se alguns problemas clássicos de otimização em Geometria Euclidiana Plana. Depois, retoma-se algumas considerações sobre Modelagem no Ensino da Matemática e, finalmente, descreve e analisa a experiência desenvolvida com alunos do Ensino Fundamental.

Palavras-chave: Geometria. Ensino. Otimização. Problemas. Modelagem. Praças.

BRITO, Dirceu dos Santos. **Geometric optimization problems applied to the study of squares:** a teaching experience with mathematical modeling activities. 2013. 122f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

ABSTRACT

This paper describes an educational experience in optimization problems involving geometric and mathematical modeling activities on the theme "squares". It first presents some reflections on the teaching of Geometry in Elementary Education and discusses some classical optimization problems in Euclidean plane geometry. Then it takes some considerations on Modeling in Mathematics Teaching and finally describes and analyzes the experience developed with elementary school students.

Key words: Geometry. Teaching. Optimization. Problems. Modeling. Squares.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O que é Matemática? É bem provável que grande parte das pessoas responda a essa pergunta dizendo que a Matemática consiste em aplicar regras, fórmulas e fazer cálculos. É muito provável também que esse tipo de crença seja uma consequência da experiência que se tem com a Matemática na Escola. Para grande maioria dos estudantes as aulas de Matemática se resumem ao seguinte enredo: os alunos observam o professor ensinando um jeito de aplicar uma regra, uma fórmula ou fazer uma conta e, em seguida, praticam o que foi ensinado na forma de exercícios. Alguns educadores chamam essa aula de “paradigma do exercício”.

Essa visão da Matemática tem sido contestada por diversos autores que procuram destacar outros aspectos importantes da Matemática além daqueles ligados aos procedimentos algorítmicos (DAVIS e HERSH, 1995; CARAÇA, 2003; LAKATOS, 1993). Nesse sentido, é mais adequado dizer que a aplicação de regras, fórmulas e procedimentos de cálculos é apenas uma das faces da Matemática dentre muitas outras. Para discutir melhor o que se entende por “outras faces da Matemática” vamos emprestar algumas ideias do Prof. Elon Lages Lima acerca do que considera os três componentes principais do ensino da Matemática: conceituação, manipulação e aplicações (LIMA, 2001).

A primeira componente engloba o que é feito usualmente pelo professor nas chamadas “aulas teóricas”, nas quais são apresentadas definições e proposições, deduz-se, se possível, as fórmulas e relações entre conceitos novos com outros já conhecidos pelos alunos são estabelecidas. A segunda componente compreende o trabalho realizado com a prática dos chamados “exercícios de fixação”, mediante os quais o aluno aplica os conceitos e, principalmente, as fórmulas ensinadas, em uma lista de questões progressivamente mais complicadas. A terceira componente, comumente identificada com a chamada “contextualização”, consiste na elaboração e/ou resolução de problemas que se referem a situações reais ou não matemáticas, com o propósito de mostrar as interações da Matemática com os diversos domínios do conhecimento.

Porém, os resultados obtidos com a utilização de metodologias baseadas na conceituação, seguida de exercícios de manipulação, com algumas aplicações não têm sido satisfatórios. Dentre as razões desse insucesso, podemos citar duas: material teórico apresentado como lista de fatos e fórmulas de Matemática, muitas vezes sem qualquer justificativa que o aluno memoriza mediante exercícios repetitivos e aplicações divorciadas da realidade (pelo menos da realidade dos alunos), frustrando o objetivo de mostrar a relevância das aplicações da Matemática.

Faz-se necessário, portanto, refletir sobre a relação entre conceituação, manipulação e aplicações expressa tanto nos livros didáticos quanto, e principalmente, na organização do trabalho em sala de aula.

Primeiro, é necessário entender que a aula de Matemática não pode se resumir a desenvolver habilidades com cálculos. Mais especificamente, o trabalho com algoritmos, o “transformismo algébrico”; a habilidade de manipular equações, fórmulas e números são destrezas importantes para quem aprende Matemática, mas está longe de ser sua parte mais interessante. A *forma* (manipulação de símbolos) pela qual a Matemática é expressa não deve se sobrepor ao seu *conteúdo* (conceituação de ideias e aplicações).

Segundo, é preciso recuperar nas aulas de Matemática o trabalho com a conceituação. Nesse sentido, compreender e avaliar definições matemáticas, reconhecer e utilizar corretamente os teoremas; praticar o raciocínio dedutivo; saber que grande parte das proposições em Matemática é proveniente de premissas que se admitem verdadeiras; elaborar e avaliar textos matemáticos são metas fundamentais para o desenvolvimento de conceitos em Matemática.

Terceiro, é importante que as aulas de Matemática reforcem a ideia de que esta disciplina é um conjunto de modelos abstratos úteis para descrever, analisar, fazer previsões, obter resultados, avaliar e tomar decisões, enfim; agir sobre a realidade. O trabalho com aplicações da Matemática nas aulas é uma das principais razões que justifica seu ensino. A Modelagem pode inserir nas aulas de Matemática questões que são relevantes para a sociedade. Empregabilidade, sustentabilidade, segurança alimentar, segurança pública, distribuição de renda, qualidade de vida, etc. são questões de interesse social que podem ser abordadas nas aulas de Matemática via Modelagem.

Este trabalho, no qual relatamos uma experiência de ensino, traduz o esforço no sentido de expressar nossa crença na prática. Procuramos, nesta experiência de ensino, unir alguns aspectos da conceituação com as aplicações da

Matemática. Nesse sentido, nossas escolhas no planejamento e na execução das atividades de Modelagem que ora relatamos neste trabalho, foram motivadas por duas preocupações.

A primeira resulta da constatação de que a Geometria, principalmente a Euclidiana Plana, tem sido pouco tratada nos trabalhos de Modelagem. De um modo geral, a maioria dos trabalhos de Modelagem (publicações apresentadas em forma de artigo, dissertação de mestrado, tese de doutorado, livro sobre Modelagem, etc.) enfatizam funções, cálculo diferencial, equações diferenciais, equações de diferenças, dentre outros temas mais ligados à Análise, mas se faz pouca Modelagem com Geometria.

É particularmente preocupante notar que alguns “trabalhos de Modelagem” exibem o chamado “ajuste de curvas” (os dados de uma tabela são “transformados” numa função) como sendo o “exemplo exemplar” do que é fazer Modelagem Matemática. A razão que justifica fazer ajuste de curvas num trabalho de Modelagem é a possibilidade de fazer previsões, de obter estimativas. Porém, o uso dessa técnica sem uma avaliação crítica pode resultar em trabalhos nos quais a obtenção de uma função serve apenas para fazer o “cálculo pelo cálculo” ou a “conta pela conta”. É a *forma* prevalecendo sobre o *conteúdo*. É o fascínio da técnica e o declínio da crítica (GARNICA, 1995).

Mas, esse aspecto também está presente em alguns trabalhos de Modelagem envolvendo Geometria. Boa parte dos trabalhos que exibe Modelagem com Geometria faz apenas uso de fórmulas para cálculo de grandezas geométricas. Fórmulas para calcular comprimento, área, perímetro, volume e capacidade são frequentes nesses trabalhos. Esse tipo de abordagem deixa a impressão que o propósito de aprender Geometria é obter fórmulas para calcular, para fazer contas. É a *forma* novamente prevalecendo sobre o *conteúdo*. É outro tipo de fascínio da técnica com o mesmo declínio da crítica.

A segunda preocupação refere-se à lacuna que existe entre conceituação e aplicação na abordagem dos conteúdos de Geometria, principalmente nos livros didáticos. Os Guias do Livro Didático, lançados anualmente desde 2004 pelo Ministério da Educação - MEC concordam que a Geometria é a parte da Matemática menos “contextualizada” nos livros destinados às escolas públicas da Educação Básica (BRASIL, 2005; BRASIL, 2011).

"Contextualizar" não significa, nesse caso, mostrar aplicações da Geometria. Boa parte das pouquíssimas contextualizações apresentadas nos livros didáticos é artificial. É clássico o exemplo: uma escada está apoiada na parede e utilizando algumas informações e uma fórmula de trigonometria ou o Teorema de Pitágoras calcule seu comprimento. Outro exemplo muito conhecido é aquele do terreno perfeitamente retangular, contido perfeitamente num plano horizontal, com medidas laterais perfeitamente inteiras e apresentado convenientemente logo depois da fórmula da área de retângulos para o qual se deve calcular a área.

É claro que essa é uma análise muito superficial do conteúdo de Geometria nos livros didáticos, mas serve para ilustrar algumas limitações da sua abordagem nos livros didáticos. Os conceitos, os teoremas, as "fórmulas" são em geral apresentados sem muitas justificativas, sem discutir, por exemplo, o papel da argumentação e do raciocínio dedutivo na organização da Geometria.

Dessas duas preocupações, resultam dois objetivos principais deste trabalho. O primeiro é ampliar a abordagem dos conteúdos de Geometria em atividades de Modelagem, mostrando que, além das grandezas geométricas, outros resultados importantes da Geometria podem ser ensinados com Modelagem. O segundo objetivo é aproximar conceituação e aplicações da Geometria em atividades de Modelagem, mostrando que é possível discutir definições de conceitos e analisar demonstrações de teoremas em Geometria numa aula com Modelagem. Esses dois objetivos são traduzidos nas duas questões norteadoras deste trabalho.

- Como abordar, com alunos do Ensino Fundamental, aplicações da Geometria, utilizando problemas de otimização em atividades de Modelagem?
- Como desenvolver nos estudantes a argumentação e o raciocínio dedutivo em Geometria, mediante a experimentação, análise e comunicação de problemas de otimização abordados com atividades de Modelagem?

Este trabalho representa uma modesta contribuição para reflexão em torno dessas duas questões. Sua organização foi pensada visando discutir alguns aspectos "teóricos" do Ensino de Geometria e da Modelagem no Ensino. Além disso, antes da apresentação propriamente dita da experiência de ensino, uma discussão mais direta de alguns problemas de otimização em Geometria pareceu nos adequada.

Assim, o capítulo 1 apresenta algumas reflexões sobre a Geometria e sobre o Ensino da Geometria na Educação Básica, particularmente no Ensino

Fundamental. O capítulo 2 exibe uma coleção de problemas clássicos de otimização em geometria plana com suas respectivas soluções, mediante uma abordagem mais “tradicional”. O capítulo 3 apresenta alguns aspectos da Modelagem Matemática e Modelagem no Ensino da Matemática. Finalmente, o capítulo 4 descreve e analisa a experiência de ensino realizada com duas turmas de alunos do Ensino Fundamental.

2 O ENSINO DA GEOMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Neste capítulo, apresentamos uma visão geral da Geometria Euclidiana como teoria axiomática e como fonte de modelos matemáticos úteis à resolução de diversos tipos de problemas. Em seguida discutimos alguns problemas e avanços no Ensino da Geometria Euclidiana na Educação Básica. Analisamos também a importância da argumentação, das demonstrações e da prova formal no ensino de Geometria. Concluímos o capítulo com algumas reflexões sobre a necessidade de ensinar os alunos da Educação Básica a fazer Modelagem Matemática utilizando a Geometria Euclidiana.

2.1– Geometria Euclidiana: Teoria e Modelos Matemáticos

É quase um clichê começar um capítulo sobre o ensino da Matemática dizendo que no mundo de hoje a Matemática está presente em praticamente todas as atividades humanas e que, por isso, a aquisição de competências matemáticas é fundamental para o pleno exercício da cidadania. Mas, embora não discordando desse tipo de afirmação, não nos parece tão simples estabelecer uma relação direta entre as supostas “competências matemáticas” e as demandas do mundo de hoje, permeado por tecnologias de base científica e crescente acúmulo e troca de informações em todos os níveis.

Uma reflexão mais cuidadosa sobre a relação “competências matemáticas” e “demandas do mundo atual” aponta, quase sempre, para a questão clássica: o que é a Matemática? Uma maneira interessante de pensar a Matemática, no contexto de ensino, é dizer que “*os conceitos abstratos da Matemática servem de modelos para situações concretas, permitindo analisar, prever e tirar conclusões em circunstâncias onde uma abordagem empírica é insatisfatória*.” (LIMA, 1997).

De fato, conceber a Matemática como uma fonte de modelos para os fenômenos nas mais diversas áreas do saber é um modo interessante para começar a compreender as chamadas “competências matemáticas”. Mas, é preciso tomar cuidado! O conceito de modelo matemático não deve ser visto restrito às aplicações tecnológicas ou científicas da Matemática.

Modelos matemáticos são construções abstratas que se constituem em instrumentos para ajudar na compreensão de inúmeros fenômenos. Modelos matemáticos incluem conceitos, relações entre conceitos, procedimentos e representações simbólicas que, num processo contínuo, passam de instrumento na resolução de problemas a objeto próprio de conhecimento.

Nesse sentido Elon Lages Lima afirma que:

> "... os conjuntos são o modelo matemático para a organização do pensamento lógico; os números são o modelo para as operações de contagem e medida; as funções afins; as quadráticas; as exponenciais, as logarítmicas e as trigonométricas, cada uma delas é estudada como modelo matemático adequado para representar uma situação específica." (LIMA, 1997).

Além isso, os modelos matemáticos podem ser construídos com vários graus de abrangência e de sistematização. Nos estágios mais simples, eles são associados, por exemplo, a objetos do mundo físico. Exemplos típicos desses modelos são as chamadas figuras ou sólidos geométricos. Assim, associar uma determinada embalagem de óleo de soja a uma figura geométrica definida abstratamente como um cilindro, exemplifica a construção de um modelo matemático nesse estágio mais simples.

Mas, os modelos matemáticos particulares são, quase sempre, enfeixados em teorias matemáticas gerais que, por sua vez, se constituem em modelos abstratos para amplas classes de fenômenos em vários outros campos do saber. A geometria euclidiana, as estruturas algébricas, a teoria das probabilidades são exemplos desses modelos matemáticos mais gerais, construídos num estágio mais avançado de sofisticação e abrangência.

Mas, o que significa pensar a Geometria Euclidiana como uma teoria matemática e, ao mesmo tempo, uma fonte de modelos matemáticos?

Primeiro, significa pensar a Geometria Euclidiana como uma teoria matemática significa entender que, numa teoria matemática, independente de seu objeto de estudo, a principal característica é que seus resultados (os teoremas) devem ser demonstrados (de forma rigorosa) a partir de inferências lógicas a partir de outras afirmações já demonstradas ou admitidas como verdadeiras. Em resumo, numa teoria matemática, cada teorema é consequência lógica de proposições anteriormente provadas (outros teoremas) e/ou afirmações admitidas como verdadeiras (postulados ou axiomas) para as quais não se exige prova.

Além dos postulados/axiomas, uma teoria matemática também deve apresentar alguns poucos conceitos não definidos, os chamados conceitos primitivos. Esses conceitos, sobre os quais geralmente se referem os axiomas, devem ser úteis para definir outros conceitos dentro da teoria.

Todavia, axiomas, conceitos primitivos e conceitos definidos não são escolhidos arbitrariamente para compor uma teoria matemática. Em geral, são escolhidos pela sua simplicidade, economia (no sentido de que os axiomas sejam independentes, ou seja, nenhum deles pode ser consequência lógica de outros), consistência (no sentido de que nenhum par de teoremas possa ser mutuamente contraditório) e completude (no sentido de que todo teorema do sistema seja deduzido utilizando somente os axiomas e conceitos primitivos escolhidos).

Desde os tempos de Euclides, com sua obra monumental *Os Elementos*, a Geometria alcançou o status de teoria axiomática. Entretanto, nas últimas décadas do século XIX, a Geometria de Euclides passou por cuidadoso estudo dos seus fundamentos que culminou no importante livro publicado por David Hilbert (1862-1943), chamado *Fundamentos da Geometria*. Neste livro, Hilbert precisou de vinte axiomas para livrar o trabalho de Euclides de suas imperfeições. Nos Elementos, Euclides havia utilizado apenas cinco axiomas em sua estruturação axiomática da Geometria.

A partir dos trabalhos de Hilbert, a Geometria passou a ser um modelo de estrutura axiomática, uma teoria matemática fundamentada em certos conceitos primitivos e axiomas, a partir dos quais os resultados são deduzidos num perfeito encadeamento lógico.

O segundo significado de pensar a Geometria como uma fonte de modelos resulta de uma reflexão sobre a natureza de seu objeto de estudo. Costuma-se afirmar que a Geometria Euclidiana é o estudo do **espaço** e da **forma**. Embora, os conceitos de **forma** e **espaço** sejam de uso bastante amplo, o que gera ambiguidade e interpretações equivocadas a respeito do que trata a Geometria, ainda assim servem para entender como a Geometria pode ser concebida como uma fonte de modelos matemáticos.

O estudo da **forma** dos objetos conduz a elaboração das figuras geométricas (ponto, reta, plano, curvas, polígonos, ângulos, poliedros, superfícies, etc.) e sistematização de suas propriedades (métrica, de posição, topológica, projetiva, etc.). Por outro lado, o estudo do posicionamento dos objetos no **espaço** leva a formação importantes conceitos geométricos e suas propriedades (paralelismo, perpendicularidade, isometrias, semelhança, distância, localização, etc.).

De fato, a relação entre Geometria Euclidiana e realidade tem se mostrada bem mais fecunda do que mostra sua teoria axiomática. Para o matemático holandês Hans Freudenthal, "*a geometria ocorre pela experiência e pela interpretação do espaço no qual as pessoas vivem, respiram e se movem*." (FREUDENTHAL, 1973). Para o matemático inglês Harold Coxeter, "*a Geometria é a mais elementar das ciências que habilita o homem a fazer predições baseadas em observações sobre o mundo físico a partir de processos unicamente intelectuais*." (COXETER, 1969)

Albert Einstein, em seu famoso artigo Geometria e Experiência, afirma que "*... é certo que a matemática em geral, e a geometria em particular, devem a sua existência à necessidade que se sentiu de aprender algo acerca do comportamento dos objetos reais*." (EINSTEIN, 2005, p. 42). Logo adiante, Einstein conclui que "*a geometria é, evidentemente, uma ciência natural; podemos, na verdade, considerá-la como o ramo mais antigo da física. Suas afirmações baseiam-se essencialmente na indução a partir da experiência e não apenas nas inferências lógicas. Chamaremos essa geometria complementada de* ***geometria prática****, e, na sequência, distingui-la-emos da* ***geometria puramente axiomática****".* (EINSTEIN, 2005, p.43).

A conclusão de Einstein de que a Geometria é o ramo mais antigo da Física encontra apoio nas reflexões do físico brasileiro Mário Schenberg. Schenberg afirma que "*pela observação dos trabalhos originais de Galileu Galilei ou de Isaac Newton, nos quais é possível notar como as provas geométricas eram usadas de forma ampla com o objetivo de demonstrar ou verificar as leis naturais propostas nestes trabalhos – a geometria foi, então, a principal linguagem estruturante para a revolução científica que deu origem à Física clássica*." (SCHENBERG, M. 2001, p.31)

Em síntese, a Geometria Euclidiana é, ao mesmo tempo, um notável exemplo de teoria axiomática e também uma fonte de modelos matemáticos que permitem compreender, descrever e representar, de forma organizada, uma infinidade de objetos e espaços na vida diária e nos sistemas produtivos e de serviços presentes no mundo atual. A compreensão desses dois aspectos da Geometria é fundamental para entender seu papel no Currículo da Educação Básica.

2.2 A GEOMETRIA NO CURRÍCULO DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Diversos educadores têm apontado o problema do histórico abandono do ensino da Geometria na Educação Básica (PAVANELLO, 1989; LORENZATO, 1995; PEREZ, 1995; FONSECA, 2002; CRESCENTI, 2005). As razões, todavia, para que a Geometria Euclidiana seja ainda hoje pouca estudada nas escolas têm mudado muito ao longo dos anos.

Uma das razões é decorrente do movimento de reforma do ensino da Matemática, chamado de movimento da Matemática Moderna. A partir da década dos anos 1950, os defensores da Matemática Moderna passaram a defender a incorporação da álgebra moderna, lógica simbólica, noções de topologia e teoria dos conjuntos nos currículos de Matemática.

Para Pavanello (1989, p.103), "*a ideia central da Matemática Moderna consistia em trabalhar a matemática do ponto de vista de estruturas algébricas com a utilização da linguagem simbólica da teoria dos conjuntos. Sob esta orientação, não só se enfatizava o ensino da álgebra, como se inviabilizava o da Geometria da forma como este era feito tradicionalmente*".

Antes da chegada da Matemática Moderna ao Brasil, o ensino de Geometria era marcantemente lógico-dedutivo, com demonstrações que os alunos detestavam (LORENZATO, 1995). A proposta da Matemática Moderna não vingou no Brasil, mas conseguiu eliminar o modelo anterior, criando assim uma lacuna nas nossas práticas pedagógicas, que perdura até hoje. O abandono do ensino de Geometria estabeleceu um círculo vicioso: a geração que não estudou Geometria também não sabe como ensiná-la.

Na década dos anos 1990, Lorenzato (1995) apontava como principais causas para o abandono ao ensino de Geometria: a má formação dos professores, tratamento inadequado nos livros didáticos e nos programas e diretrizes curriculares.

Todavia, nos últimos anos diversos esforços têm sido feitos no sentido de resgatar o ensino da Geometria na Educação Básica. Vamos analisar aqui dois desses avanços que ocorreram no Brasil: a elaboração dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN-Matemática) e o Programa Nacional do Livro Didático com seus Guias de Livros Didáticos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN – tanto para o Ensino Fundamental como para o Ensino Médio – incorporam concepções atuais acerca do ensino de Geometria e estão em sintonia com propostas curriculares de muitos outros países do mundo. Um grande número de propostas curriculares estaduais ou municipais também contem avanços.

Em particular os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (PCN-Matemática) organiza os conteúdos dessa disciplina no Ensino Fundamental em quatro grandes blocos: Números e Operações; Espaço e Forma; Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação.

A organização do Currículo de Matemática nesses quatro blocos é necessária, pois, de acordo com os PCN, permitem "*identificar, dentro de cada um desses vastos campos que conceitos, procedimentos e atitudes são socialmente relevantes.*" (PCN, 1988, p.49).

Além disso, os conteúdos expressos nesses blocos "contribuem *para o desenvolvimento intelectual do aluno, ou seja, para a construção e coordenação do pensamento lógico-matemático, para o desenvolvimento da criatividade, da intuição, da capacidade de análise e de crítica, que constituem esquemas lógicos de referência para interpretar fatos e fenômenos*." (PCN, 1988, p.49).

Ao apresentar a Geometria como estudo do espaço e das formas, os PCN colocam esse campo da Matemática no mesmo nível de importância dos outros blocos. Mais especificamente, os PCN apresentam a Geometria não apenas como o estudo das formas, mas também noções relativas a posição, localização de figuras e deslocamentos no plano e sistemas de coordenadas.

Destacam também o trabalho com as transformações geométricas (isometrias, homotetias), para desenvolver a percepção espacial e como recurso para apresentar as condições de congruência ou semelhança entre duas figuras.

Os PCN defendem que o ensino da Geometria é importante porque seus conceitos "*constituem parte importante do currículo de Matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive*." (PCN, 1988, p.49).

Além disso, a Geometria "*é um campo fértil para trabalhar com situações-problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente. O trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades etc.*" (PCN, 1988, p.49).

Seguindo a tendência iniciada pelos Parâmetros Curriculares de Matemática de 1998, surgiram os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, as Diretrizes Curriculares do Ensino Médio e a Matriz de Referência para elaboração da prova do ENEM; PROVA BRASIL; etc. entre outros documentos oficiais que também procuram resgatar a importância no Ensino da Geometria na Educação Básica.

Além das mudanças nos guias curriculares, outro avanço importante para resgatar o ensino de Geometria é representado pelo Plano Nacional do Livro Didático. No âmbito desse plano é disponibilizado o Guia do Livro Didático que orienta a escolha dos livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental para todas as escolas brasileiras. Esses guias, lançados todos os anos, avaliam as coleções de livros didáticos de Matemática e organizam seus conteúdos em cinco blocos: Geometria, Grandezas e Medidas, Números e Operações, Álgebra e Tratamento de Informação.

Dentre os critérios utilizados para avaliar a abordagem da Geometria nos livros didáticos, o Guia do Livro Didático (PNLD, 2007, p.46) verifica se o livro avaliado:

- Ajuda a desenvolver a capacidade de situar-se, reconhecer a posição dos objetos no espaço e orientar-se;
- Ajuda a desenvolver a capacidade de visualização;

- Apresenta atividades de desenho apoiadas em instrumentos ou construção de modelos concretos de objetos geométricos;
- Ajudam a construir o raciocínio dedutivo;
- Leva o aluno a compreender o caráter aproximado das medições empíricas;
- Apresenta equilíbrio nas classificações e nomenclaturas;
- Aborda adequadamente o conceito de simetria;
- Respeita a articulação entre geometria espacial e a plana.

O esforço das editoras e autores de livros didáticos de Matemática em atender os critérios apresentados nos Guias do Livro Didático representa um avanço no sentido de valorizar o conhecimento geométrico que será apresentado aos alunos da Educação Básica. Esse avanço é significativo, pois é bastante provável que grande parte dos professores de Matemática orienta-se mais pelo livro didático do que pelos documentos oficiais (Parâmetros Curriculares e/ou Diretrizes Curriculares) no momento de planejar suas aulas.

A despeito dos avanços ocorridos com a elaboração de novas propostas curriculares, com política pública do livro didático, com a avaliação do rendimento escolar de nosso sistema educacional, entre outros avanços, o ensino da Geometria na Educação Básica continua ainda deficitário. De fato, "*as políticas de formação – inicial e continuada - de professores, até o presente, não têm sido eficazes para modificar as práticas docentes que, em geral, permanecem alheias às inovações curriculares.*" (LIMA, 2009).

Pesquisas recentes apontam que uma forte razão para que não se ensine Geometria na Educação Básica é a formação deficiente dos professores (FONSECA, 2002; CRESCENTI, 2005). A frágil posição que a Geometria ocupa nos cursos de Licenciatura prejudica a formação dos futuros professores e provoca deficiências no conhecimento tanto de conteúdos quanto de metodologias. O professor, não tendo um bom conhecimento de Geometria, prefere, provavelmente, não ensiná-la em suas aulas.

2.3 ENSINO DA GEOMETRIA, ARGUMENTAÇÃO E PROVA FORMAL.

A Geometria Euclidiana tem sido tradicionalmente apontada como a disciplina que melhor retrata o aspecto dedutivo da Matemática (DAVIS e HERSH, 1995, PCN, 1998). Não é coincidência, portanto, que o primeiro contato dos alunos com a ideia de demonstração e prova formal, mediante a utilização de raciocínio lógico-dedutivo, costuma ocorrer (ou pelo menos deveria!) nas aulas de Geometria.

Embora os alunos estejam acostumados com a argumentação como prática cotidiana inerente a comunicação, o primeiro contato com demonstrações e provas formais em Matemática costuma causar desconforto. Isto porque a ideia de demonstração ou prova formal que se encontra abundante na Geometria Euclidiana é diferente da ideia de argumentação.

De fato, "*a argumentação está fortemente vinculada à capacidade de justificar uma afirmação e, para tanto, é importante produzir alguma explicação, bem como justificá-la. Assim, um argumento será aceito se for pertinente, ou seja, se ele estiver sustentado por conteúdos matemáticos e se for possível responder aos contra-argumentos ou réplicas que lhe forem impostos*." (PCN, 1998, p.86).

Uma argumentação distingue-se de uma demonstração, pois enquanto a argumentação é mais caracterizada por sua pertinência e visa ao plausível, a demonstração tem por objetivo a prova dentro de um referencial assumido.

Portanto, "*a argumentação está mais próxima das práticas discursivas espontâneas e é regida mais pelas leis de coerência da língua materna do que pelas leis da lógica formal que, por sua vez, sustenta a demonstração. Se por um lado a prática da argumentação tem como contexto natural o plano das discussões, na qual se podem defender diferentes pontos de vista, por outro ela também pode ser um caminho que conduz à demonstração*." (PCN, 1998, p.86).

Compreender a diferença entre argumentação e demonstração em Geometria Euclidiana é importante para evitar o equívoco frequentemente encontrado nos livros didáticos de tentar validade propriedades por meio da visualização, de experimentação com materiais concretos ou de medições em desenhos.

"*Um caso típico é o do tratamento do Teorema Tales, em que muitas coleções restringem-se à comprovação da proporcionalidade entre os segmentos formados por um feixe de paralelas cortadas por transversais, baseada na medição em desenhos, sem alertar para os erros inerentes a este processo*." (PNLD, 2007, p.46).

Embora experimentações e deduções informais não se constituam em "provas matemáticas", é necessário que as atividades experimentais em Geometria sejam vistas como um caminho que pode levar os alunos "*a compreender a importância e a necessidade da prova para legitimar as hipóteses levantadas*." (PCN, 1988, p.126). Nesse sentido, observações de materiais concretos podem tornar-se "elementos desencadeadores de conjecturas e processos que levem às justificativas mais formais." (PCN, 1988, p.127).

É nesse sentido que os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCNEM - sintetizam a proposta para o trabalho com argumentação e demonstrações na Educação Básica em nosso país.

"O ensino de Geometria no ensino fundamental está estruturado para propiciar uma primeira reflexão dos alunos através da experimentação e de deduções informais sobre propriedades relativas a lados, ângulos e diagonais de polígonos, bem como o estudo de congruência e semelhança de figuras planas. Para alcançar um maior desenvolvimento do raciocínio lógico, é necessário que no ensino médio haja um aprofundamento dessas ideias no sentido de que o aluno possa conhecer um sistema dedutivo, analisando o significado de postulados e teoremas e o valor de uma demonstração para fatos que lhe são familiares." (PCN, 2002, p. 123)

Concluímos esse tópico apresentando algumas sugestões do matemático brasileiro Geraldo Ávila para o trabalho com demonstrações nas aulas de Geometria Euclidiana (ÁVILA, 2010). Das reflexões que Geraldo Ávila realizou sobre o ensino da Geometria, podemos ressaltar que:

Primeiro: O professor deve começar com demonstrações de teoremas que não sejam verdades evidentes ao senso comum para que o aluno possa entender a necessidade de demonstrações. Sendo exposto ao encadeamento das demonstrações, o aluno vai adquirindo maturidade para entender que a sequência de definições, teoremas e demonstrações não pode continuar indefinidamente.

Segundo: As demonstrações devem ser feitas de maneira compreensível para os alunos, e nem sempre com todo o rigor lógico, sendo necessário atentar para os requisitos didáticos. Por exemplo, demonstrar que a razão do comprimento da circunferência para o diâmetro é a mesma em todos os círculos ou demonstrar a fórmula da área do círculo requer o uso do conceito de limite. Mas isso pode ser feito de maneira intuitiva, não sendo necessário insistir em apresentar uma prova rigorosa na Educação Básica.

Terceiro: O que não se deve admitir nas aulas de Geometria é que afirmações sejam ensinadas dogmaticamente, sem qualquer justificativa. Mas, cuidado! Não se deve ir de um extremo ao outro. Sair de uma situação em que nada é demonstrado para outra em que tudo é rigorosamente provado com pesadas demonstrações é contraproducente. O ideal é encontrar o ponto de equilíbrio entre a prática e a teoria. Tudo tem de ser devidamente dosado e judiciosamente entremeado com a parte prática, para que o aluno possa compreender bem a necessidade e o mérito das demonstrações.

Esses três argumentos sugerem maneiras de abordar a argumentação matemática em sala de aula. Embora o trabalho com demonstrações no ensino de Matemática possui uma complexidade que evidentemente extrapola o alcance desse trabalho, entendemos que é fundamental que as atividades envolvendo Geometria tenham como um dos principais objetivos o desenvolvimento da argumentação e das demonstrações formais.

2.4 O ENSINO DA GEOMETRIA COM MODELAGEM: UM PROBLEMA DE PESQUISA?

É consenso que a Geometria possui muitas e variadas aplicações. Mais especificamente a Geometria dos Fractais, Geometria Projetiva, Geometria das Transformações e Tesselações desempenham papel fundamental no desenvolvimentos tecnológicos modernos, incluindo a televisão de alta definição (HDTV), sistemas de posicionamento global (GPS), animação computadorizada ou imagens geradas por computado (CGI), tomografia axial computadorizada (TAC), redes de telefonia celular, robótica, realidade virtual, acoplamento do ônibus espacial, maquetes eletrônicas, etc.

Mas, ainda que conhecimentos em Geometria costumem ser apontados como fundamentais para a compreensão da realidade e formação dos indivíduos, o ensino desse tema, em todos os níveis, ainda continua deficitário. A omissão e o abandono do ensino da Geometria na Educação Básica apontados em inúmeras pesquisas indicam que a insegurança e despreparo do professor para lidar com esse tema é uma das principais razões para o que o não resgate do seu ensino se perpetue.

Defendemos a hipótese de que é possível incorporar, nas aulas de Geometria, algumas das diversas aplicações anteriormente mediante atividade de Modelagem Matemática. De fato, a Modelagem costuma ser defendida como um modo de ensinar Matemática (BASSANEZI, R. 2002), (ALMEIDA, L. W., FERRUZZI, E. C. 2012). Para esses autores a Modelagem é uma alternativa pedagógica que visa relacionar a Matemática escolar com questões não matemáticas de interesse dos alunos. A inserção de atividades de Modelagem como uma prática de ensino conduz a discussão sobre a importância que os conteúdos de Matemática assumem no âmbito educacional.

Fazer Modelagem na Educação Básica como uma estratégia para ensinar e aprender Geometria deve salientar as inúmeras aplicações desse campo da Matemática. E, com isso, a Modelagem com Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. (PCN, ORIENTAÇÕES CURRICULARES, 2006, p. 75).

Entre as várias possibilidades de fazer Modelagem com Geometria na Educação Básica, destacamos neste trabalho, os chamados “Problemas de Otimização Geométrica”. Em Matemática, o termo otimização refere-se ao estudo de problemas em que se busca minimizar ou maximizar uma função. Problemas de otimização, em geral, costumam ser resolvidos somente nos cursos superiores de Matemática com o uso do Cálculo Diferencial.

No contexto da Educação Básica, porém, problemas de otimização costumam aparecer relacionados às funções quadráticas, em que a obtenção do valor extremo é identificada com a obtenção das coordenadas do vértice de uma parábola, gráfico de funções quadráticas. Existe, porém, uma ampla gama de problemas elementares de otimização que não se enquadram no estudo das funções quadráticas. Em alguns desses casos, mesmo sem o uso do conceito de função e de ferramentas do cálculo diferencial, é possível abordar problemas de otimização na Educação Básica utilizando apenas conhecimentos de Geometria.

São numerosos os exemplos de aplicações dos processos de otimização. Como a indústria automobilística faz para conseguir maior espaço interno dos carros com a mesma quantidade de material para a lataria e vidros? Como confeccionar embalagens que utilizem o mínimo de material, tendo o máximo de acondicionamento? Como obter rotas para os caminhões que fazem coleta de lixo que minimizem os custos com combustível e manutenção desses veículos? Como projetar espaços públicos, como praças, escolas, hospitais, etc que acomodem o máximo de pessoas com o mínimo de custo possível?

Nesses, e em muitos outros exemplos, conhecimentos de Geometria são fundamentais para modelar, para entender, para fazer previsões, para tirar conclusões a respeito de objetos da realidade com objetivo de apresentar um resultado satisfatório. Portanto, a Modelagem de Problemas de Otimização em Geometria Euclidiana na Educação Básica é uma forma de motivar o aluno para o estudo desse campo da Matemática e, ao mesmo tempo, um modo exibir suas aplicações, seu alcance e sua importância num mundo cada vez mais dominado pelas tecnologias.

3 PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO EM GEOMETRIA PLANA

Neste capítulo apresentamos alguns problemas clássicos de otimização em Geometria Euclidiana Plana. Esses problemas, também chamados de problemas de valores extremos, envolvem a minimização ou maximização de distâncias, áreas, perímetros, ângulos, etc. de figuras planas.

Os problemas aqui abordados são: problema de Heron, Problema do triângulo de Fagnano-Schwarz, Problema de Fermat-Steiner e Problema Isoperimétrico.

Problemas de otimização geométrica podem ser abordados, em cursos mais avançados, utilizando ferramentas do Cálculo Diferencial. Neste trabalho, porém, eles serão abordados utilizando apenas conceitos e resultados da Geometria Euclidiana Plana.

Por isso, questões relacionadas à demonstração da existência de solução para esses problemas, apesar de fundamentais, não serão aqui abordadas. Muitas dessas questões envolvem argumentos de continuidade, passagem ao limite, etc. que extrapolam as ferramentas da Geometria Euclidiana e aos objetivos deste trabalho.

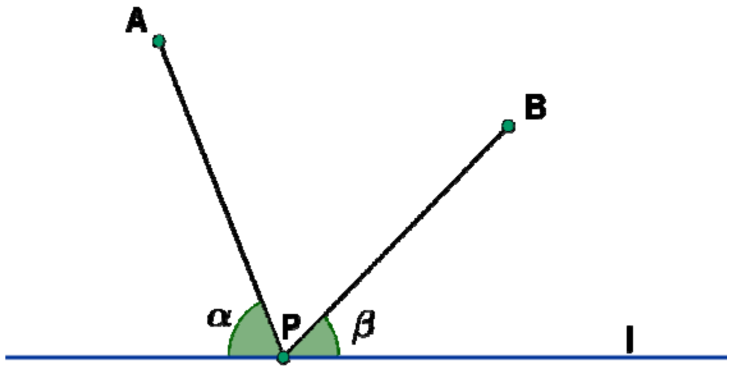
Os leitores interessados nessas e noutras questões, além de referência histórica sobre os problemas aqui abordados, deve consultar as seguintes referências bibliográficas: **O que é Matemática?** de Richard Courant e Herber Robbins, **Introduction to geometry** de H. S. M. Coxeter, **Maxima and Minima without Calculus** de Ivan Niven e **Geometric Problems on Maxima and Minima** de Titu Andreescu, Oleg Mushkarov e Luchezar Stoyanov.

3.1 PROBLEMA DE HERON

Seja uma reta l e dois pontos A e B localizados no mesmo lado de l. Determine um ponto P sobre l de tal forma que a soma $\overline{AP} + \overline{BP}$ seja a menor possível.

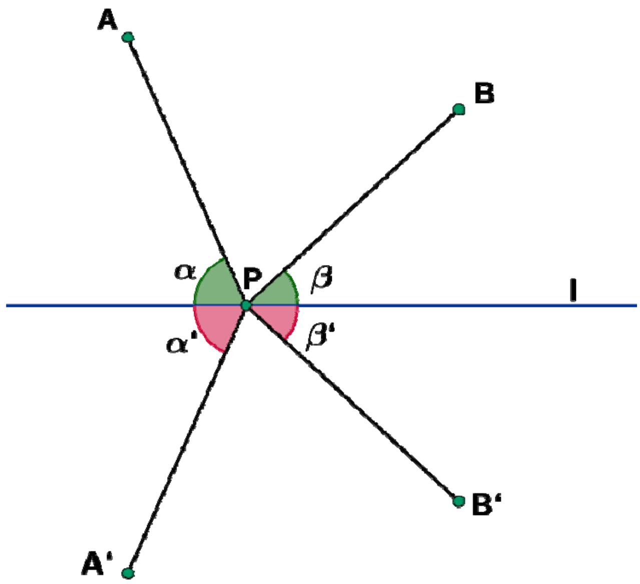
SOLUÇÃO: Seja um ponto P qualquer sobre a reta l. Considere os ângulos de medidas α e β, formados em P entre AP, BP e a reta l, como mostra a figura a seguir.

Figura 2.1 P é um ponto arbitrário sobre *l*



Observe que, refletindo os segmentos AP e BP em relação à reta ℓ, obtemos, respectivamente, os segmentos simétricos $A'P'$ e $B'P'$. Como P´= P, segue que $\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{AP}+\overline{B'P}=\overline{A'P}+\overline{B'P}$.

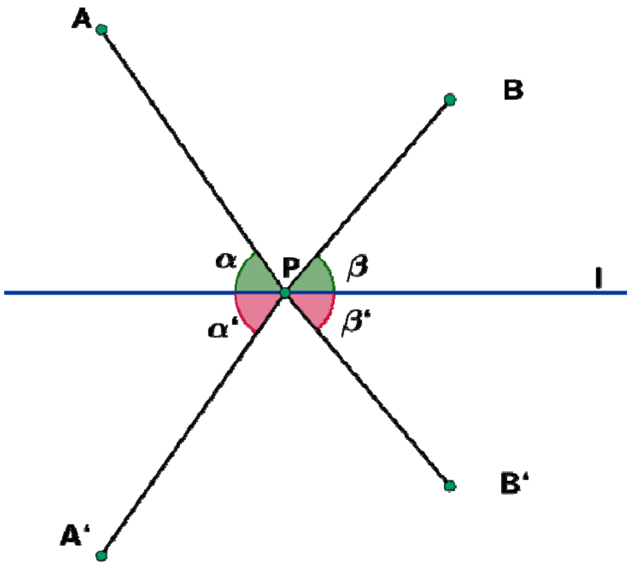
Figura 2.2 Reflexão da dos segmentos AP e PB em relação a *l*



Note agora que a soma $\overline{AP}+\overline{B'P}$ é minimizada quando A, P e B´ estão contidos numa mesma reta. De modo análogo, $\overline{A'P}+\overline{BP}$ é minimizada exatamente quando A´, P e B estão contidos numa mesma reta.

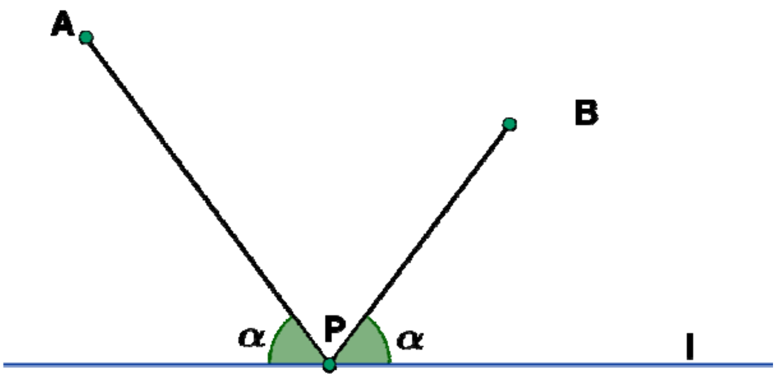
Mas, em ambos os casos, A, P e B´são colineares ou A´ e P e B são colineares, quando os ângulos de medidas α + α´e β + β´são opostos pelo vértice, como ilustra a figura a seguir.

Figura 2.3 Ângulos opostos pelo vértice



Logo, α + α´= β + β´. Mas α = α´e β = β´. Segue que 2α = 2β. Portanto, α = β. Desse modo, concluímos que o ponto P é tal que AP e BP formam ângulos iguais com a reta ℓ.

Figura 2.4 Resolução do problema de Heron



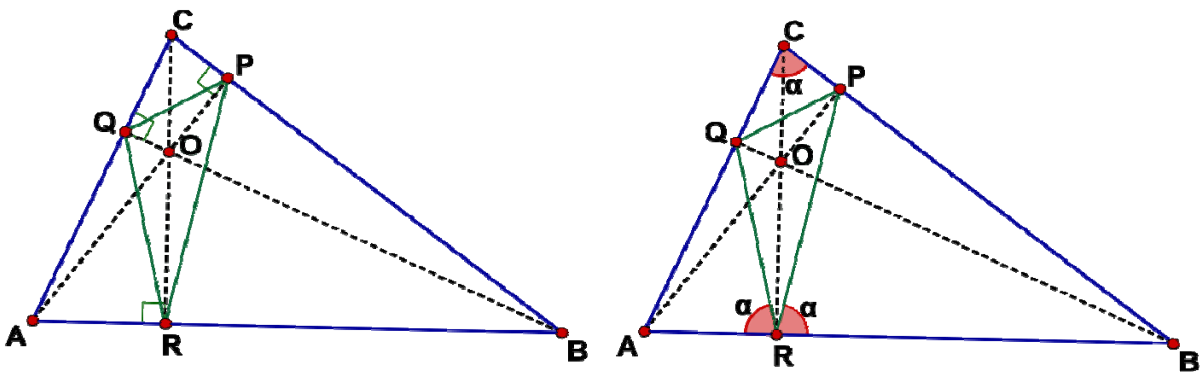
3.2 Problema do Triângulo de Fagnano-Schwarz

Dado um triângulo acutângulo ABC, inscrever nele o triângulo PQR, com o menor perímetro possível?

SOLUÇÃO: Afirmamos que o triângulo PQR[1] é o triângulo órtico de ABC, ou seja, PQR é o triângulo cujos vértices são os pés das alturas do triângulo ABC.

Para demonstrar esta afirmação vamos antes mostrar que em cada vértice P, Q, R os dois lados do triângulo órtico formam ângulos iguais com o lado do triângulo original; este ângulo é igual ao ângulo no vértice oposto do triângulo original.

Figura 2.5 Triângulo órtico de ABC, mostrando ângulos iguais.



Seja O a intersecção das alturas. Note que o quadrilátero OPBR é inscritível numa circunferência de diâmetro OB. De fato, os ângulos OPB e ORB são retos e subtendem ângulos de 180º cada, conforme a propriedade de ângulos inscritos. Do fato de OPBR ser inscritível concluiu-se que $P\hat{R}O = P\hat{B}O$.

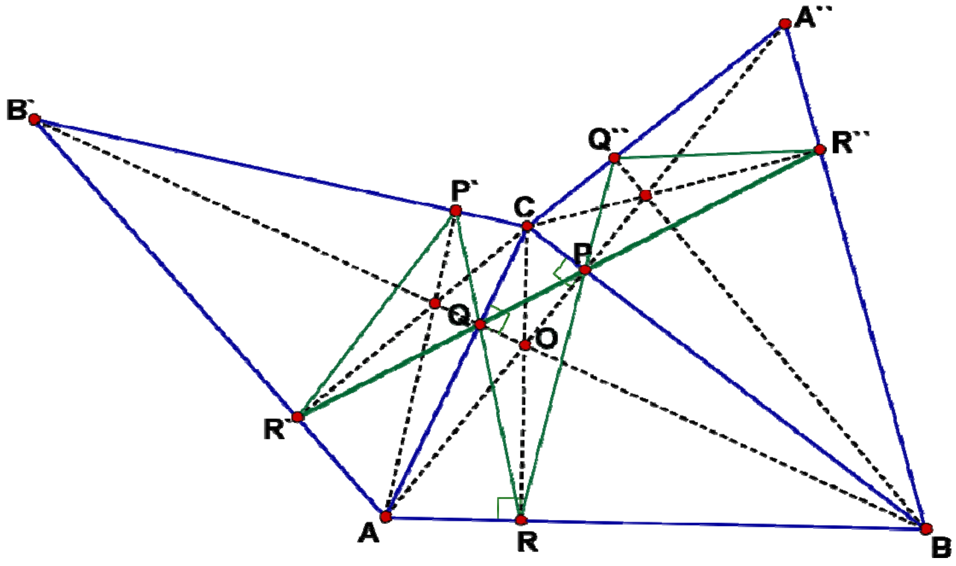
Observe agora que o ângulo PBO é complementar ao ângulo ACB ($P\hat{B}C + A\hat{C}B = 90^0$) , uma vez que o triângulo CBQ é retângulo. De modo análogo, concluímos que o ângulo PRO é complementar ao ângulo PRB, pois $B\hat{R}C = B\hat{R}P + P\hat{R}C = 90^0$.

Desses resultados, concluímos que $P\hat{R}O + A\hat{C}B = P\hat{R}O + A\hat{C}B = P\hat{R}B + P\hat{R}O$. Simplificando está última igualdade, obtemos que $A\hat{C}B = P\hat{R}B$. A propriedade para os outros ângulos prova-se de forma análoga.

---

[1] Neste texto, preferimos escrever “triângulos ABC” para dizer o triângulo de vértices A, B e C; e, “ângulo ABC” para dizer ângulo de lados AB e BC com vértice em B. “A$\hat{B}$C para dizer a medida do ângulo ABC”.

Figura 2.6 Propriedade de reflexão do triângulo órtico

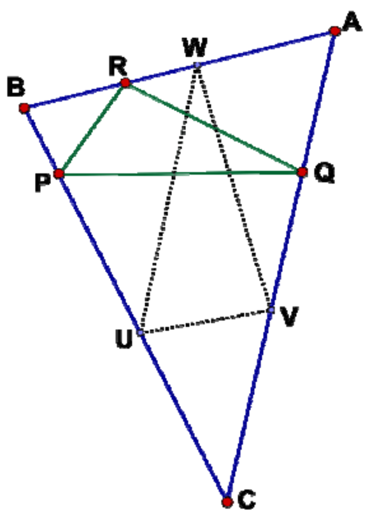


Logo, uma vez que os ângulos AQR e CQP são iguais, a reflexão do segmento RQ no lado AC é o prolongamento do segmento PQ, e vice-versa.

De modo análogo, uma vez que os ângulos BPR e CPQ são iguais, a reflexão do segmento PR no lado BC também será o prolongamento do segmento PQ. Isto mostra que QR, PR e PQ estão contidos numa única reta R`R”.

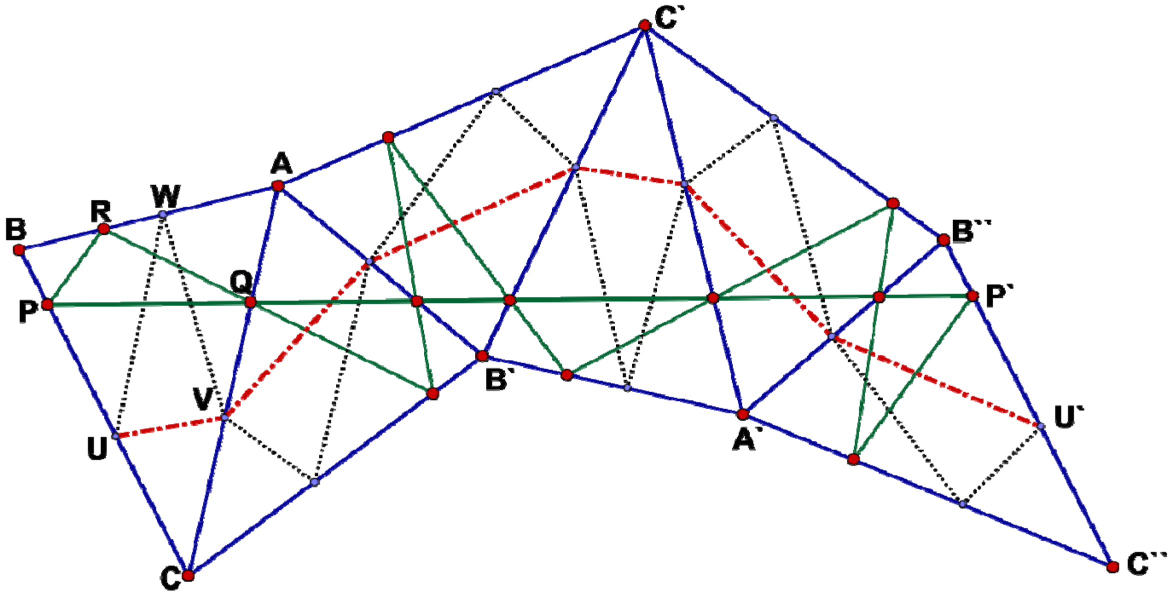
Falta agora demonstrar a propriedade de mínimo do triângulo órtico. De fato, no triângulo ABC, consideremos juntamente com o triângulo órtico PQR outro triângulo UVW qualquer também inscrito no triângulo ABC.

Figura 2.7 Triângulo órtico PQR e triângulo qualquer UVW



Refletimos a figura 2.7, primeiramente no lado AC, depois, repetimos a operação com o triângulo resultante sobre o lado AB, em seguida sobre BC, depois sobre AC e finalmente sobre AB. Assim, obtemos seis triângulos congruentes como mostra a figura a seguir.

Figura 2.8 Prova de Schwarz de que o triângulo órtico tem o menor perímetro.



Observe que o lado B"C" do último triângulo é paralelo ao lado original BC. De fato, note que, na primeira reflexão, BC é girado no sentido anti-horário de um ângulo 2C (o dobro da medida do ângulo ABC), depois de 2B no sentido horário; na terceira reflexão não é afetado, na quarta gira de 2C no sentido anti-horário, e na quinta de 2B no sentido anti-horário. Logo, o ângulo total em que girou é zero.

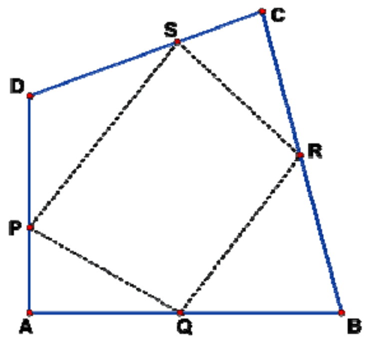
Devido a propriedade de reflexão do triângulo órtico, o segmento PP`é igual a duas vezes o perímetro do triângulo órtico; isto porque, PP` é composto de seis partes que são, por sua vez, iguais ao primeiro, segundo e terceiro lado do triângulo, cada lado ocorrendo duas vezes.

De maneira análoga, a poligonal UU`é duas vezes o comprimento do perímetro do outro triângulo inscrito. Note que esta poligonal não é mais curta do que o segmento de reta UU´. Como UU´ é paralelo a PP`, a poligonal de U a U` não é mais curta do que PP`, e, portanto, o perímetro do triângulo órtico é o menor possível para qualquer triângulo inscrito. Desse modo, demonstramos que existe um triângulo inscrito PQR de perímetro mínimo e que ele é fornecido pelo triângulo órtico de ABC.

3.3 Problema de Fagnano-Schwarz para Quadriláteros

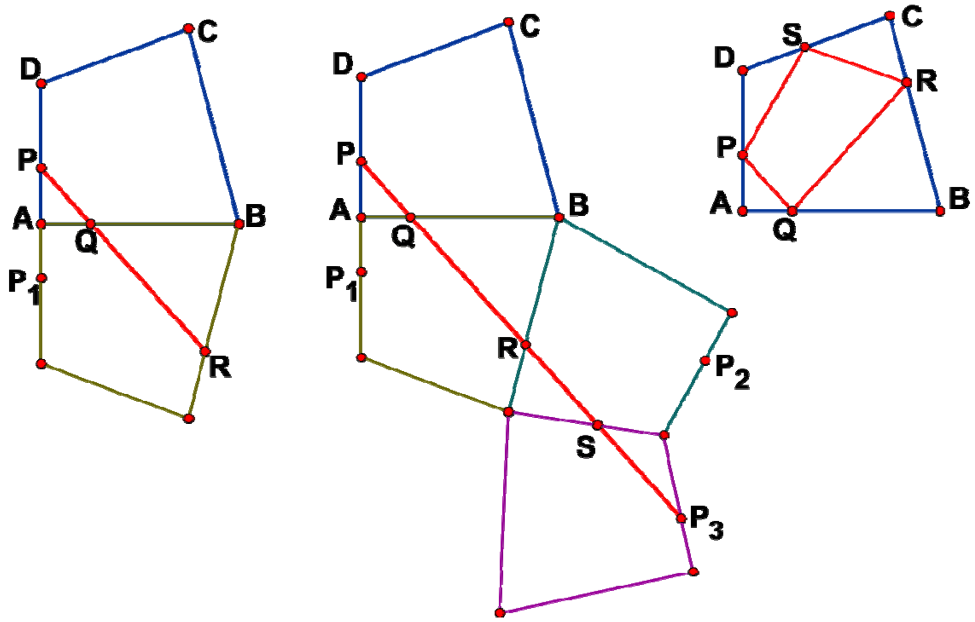
Dado um quadrilátero ABCD e um ponto P sobre o lado AD. Determine os pontos Q, R e S sobre os lados AB, BC e CD, respectivamente de modo que o perímetro do quadrilatero PQRS seja o menor possível.

Figura 2.9 Problema de Fagnano-Schwarz para quadriláteros



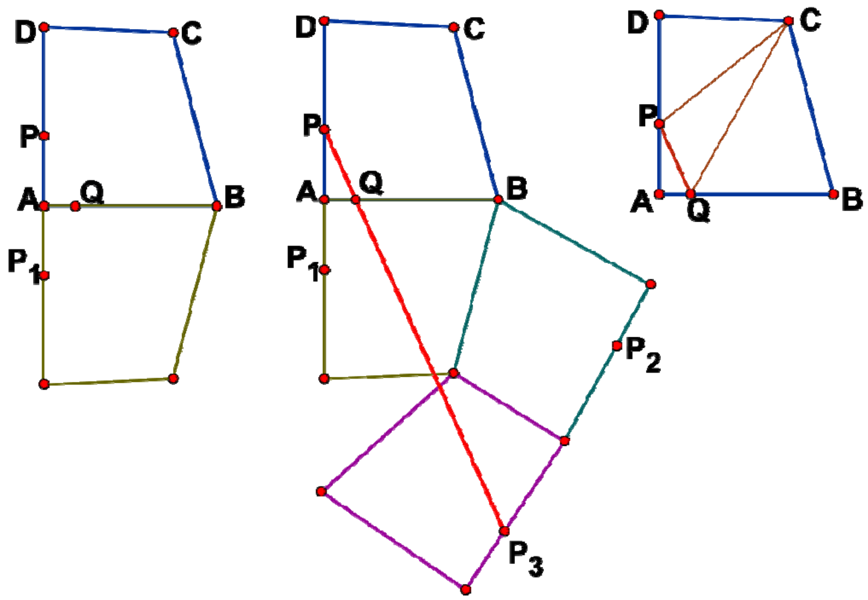
Solução: De modo análogo ao problema do triângulo de Fagnano-Schwarz, PQRS é o quadrilátero de perímetro mínimo inscrito em ABCD, se cada par de ângulos formado em P, Q, R e S tiverem a mesma medida. De fato, do problema de Heron segue que se PQ + RQ é mínino, então $P\hat{Q}A = R\hat{Q}B$. Pelo mesmo motivo, se cada par de lados de PQRS tem comprimento mínimo, então acarreta que $Q\hat{R}B = C\hat{R}S$; $C\hat{S}R = D\hat{S}P$ e $D\hat{P}S = A\hat{P}Q$.

Figura 2.10 Reflexão sucessiva de ABCD em relação aos seus lados



Observe que, os pontos P, Q, R e S podem ser obtidos utilizando o método de reflexão. Refletimos o quadrilátero ABCD sucessivamente em relação aos lados AB, BC e CD, como mostra a figura 2.11 abaixo. A reta que passa por P e seu simétrico P_3 determina sobre cada lado de ABCD os pontos Q, R e S, intersecções de PP_3 com os diferentes lados refletidos de ABCD.

Figura 2.11 quadrilátero ABCD com solução degenerada



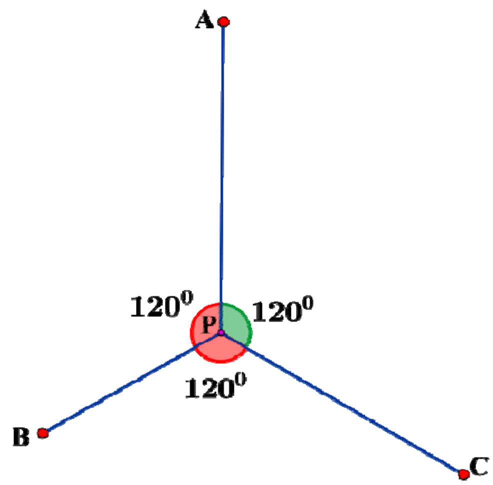
Mas, note que dependendo da forma do quadrilátero ABCD original, pode acontecer da reta PP_3 não intersectar a linha de BC. Neste caso, ao invés de uma quadrilátero de perímetro mínimo, teremos um triângulo de perímetro mínimo PSC.

3.4 PROBLEMA DE FERMAT-STEINER

Dados três pontos não colineares A, B e C localizados num mesmo plano, determine um ponto P desse mesmo plano de modo que a soma $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ *seja a menor possível.*

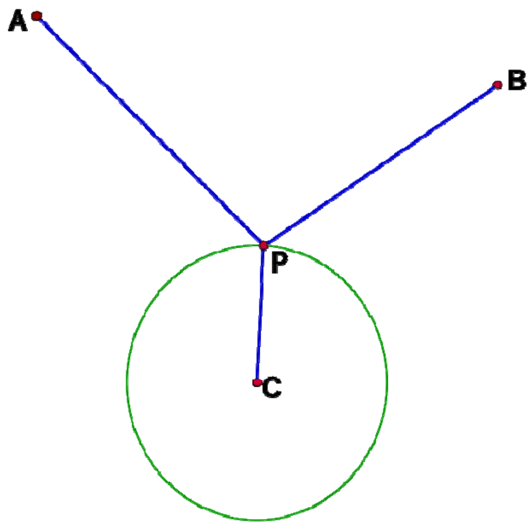
SOLUÇÃO 1: Afirmamos que, se no triângulo ABC todos os ângulos são menores do que 120^0, então P é o ponto a partir do qual cada um dos três lados AB, BC e CA subentende um ângulo de 120^0. Caso um ângulo de ABC, por exemplo, o ângulo em C, for igual ou maior do que 120^0, então o ponto P coincidirá com o vértice C.

Figura 2.12 Conexão do ponto mínimo de Fermat-Steiner P



De fato, sejam A, B e C pontos contidos num mesmo plano. Suponhamos que P seja o ponto mínimo procurado. Construímos um círculo com centro em C e raio igual à distância PC.

Figura 2.13 Poligonal AP e PB tangente ao círculo em P



Observe que P deve ser o ponto tal que $\overline{PA} + \overline{PB}$ seja mínimo. Se A e B estão fora do círculo, como mostra a figura anterior, então, segue do problema de Heron que PA e PB devem formar ângulos iguais com o círculo centrado em C. De modo inteiramente análogo, concluímos que, se a soma $\overline{PC} + \overline{PB}$ é mínima, então PC e PB devem formar ângulos iguais com o círculo centrado em A e raio AP, desde que B e C estejam ambos fora desse círculo.

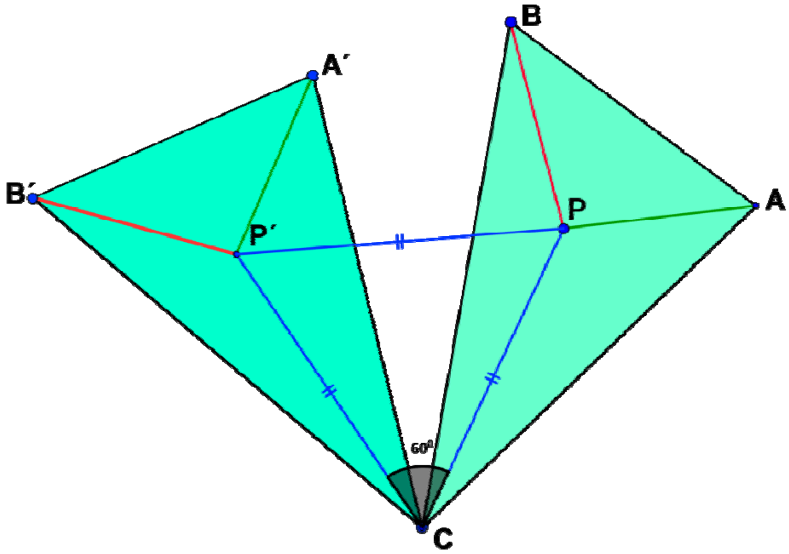
Logo, se a soma $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ é mínima, então todos os ângulos formados pelos segmentos PA, PB e PC são iguais, e consequentemente iguais a 120^0.

Perceba que o raciocínio utilizado nessa demonstração baseou-se na hipótese de que A e B estão ambos fora do círculo centrado em C e que B e C estão ambos fora do círculo centrado em A. É fácil demonstrar que isso sempre ocorrerá desde que todos os ângulos do triângulo ABC sejam menores do que 120^0. No caso particular em que algum dos ângulos de ABC seja maior do que ou igual a 120^0, então P deve coincidir com o vértice de maior ângulo, pois a soma dos dois lados que formam o maior ângulo de ABC é menor do que qualquer outra soma de dois lados desse triângulo.

Solução 2: Outro modo de provar que, se todos os ângulos formados entre AP, BP e CP iguais a 120^0, então a soma $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ é mínima, é utilizando rotações.

De fato, seja P um ponto qualquer localizado no interior do triângulo ABC. Girando esse o triângulo em torno do vértice C, no sentido anti-horário, em 60^0, obtemos o triângulo A`B`C` e o ponto P`, interior a esse triângulo, como mostra a figura a seguir.

Figura 2.14 Rotação do triângulo ABC, obtendo-se A`B`C



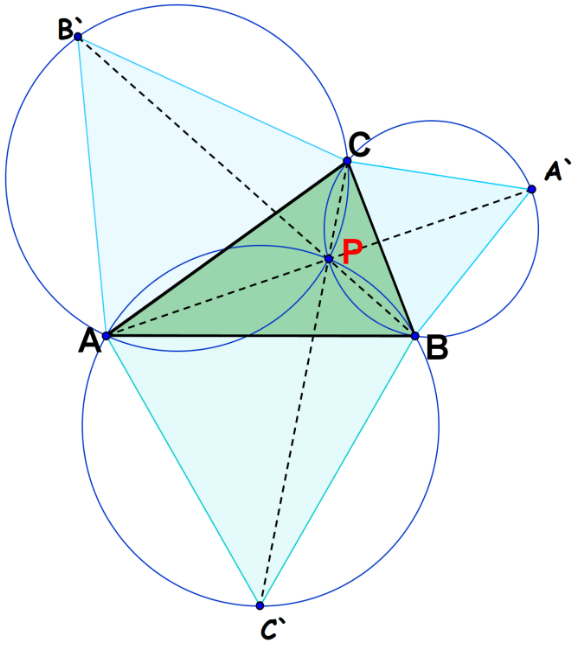
Observe que o triângulo CPP`é equilátero. De fato, como CP = CP`, segue que CPP´é isósceles e, desse fato, resulta que os ângulos formados em P em P`, possuem a mesma medida. Mas, como o ângulo PCP´mede 60º, conclui-se que os outros dois ângulos também medem 60º. Portanto, CPP´ é equilátero.

Logo, a soma $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ é igual a $\overline{A`P`} + \overline{P`P} + \overline{PB}$ . Percebe-se facilmente que esta última soma é minimizada quando os pontos A`, P, P e B estão todos contidos numa mesma reta.

Assim, supondo que A`, P` e P estão contidos numa mesma reta, e utilizando o fato de que o ângulo CP`P mede $60^0$, concluímos que o ângulo A`P`C mede 120º. De modo análogo, supondo que P, P, B estão contidos numa mesma reta, e utilizando o resultado de que ângulo P`PC mede 60^0, concluímos que o ângulo CPB também mede em 120^0. Portanto, o ponto P que minimiza a soma $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ é tal que os ângulos formados entre PA, PB e PC medem cada um em 120^0.

OBSERVAÇÃO 1: Um modo prático, para obter o ponto mínimo P é devido ao matemático inglês Thomas Simpson (1710-1761). Simpson mostrou que o ponto mínimo P é a intersecção das três circunferências circunscritas respectivamente aos triângulos equiláteros construídos sobre cada lado do triângulo ABC, como mostra a figura.

Figura 2.15 Construção de Simpson para obtenção de P



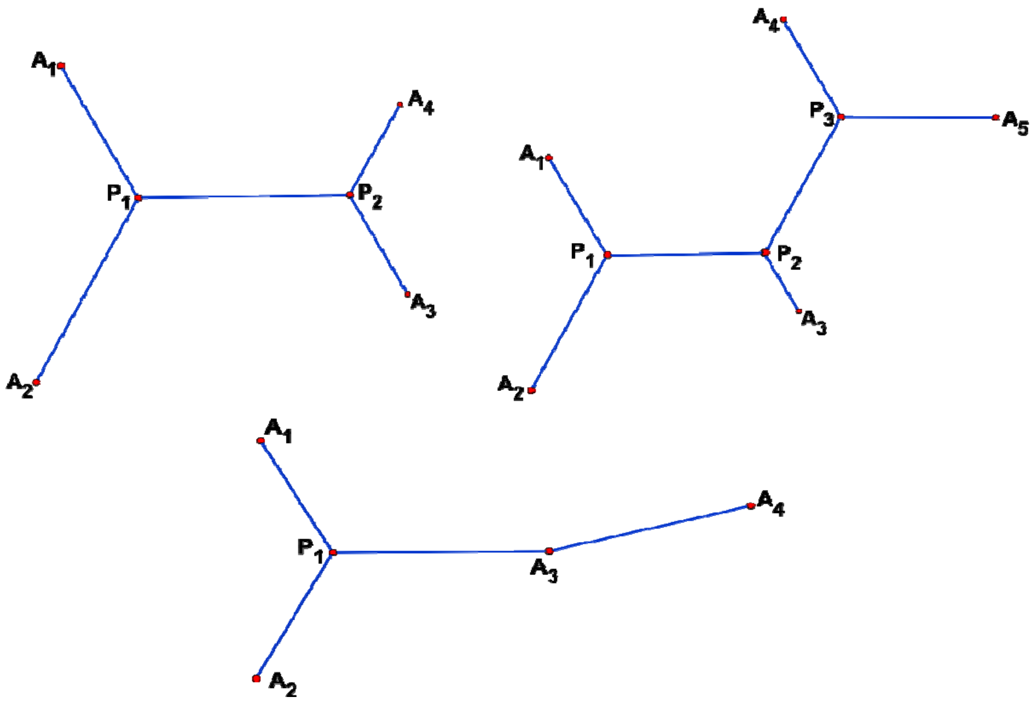
Além disso, Simpson mostrou que o ponto P pode ser obtido, ligando-se, respectivamente, os vértices A, B e C aos vértices externos F, D e E dos triângulos equiláteros BCF, ACD e ABE.

Não apresentaremos aqui a demonstração dessas duas afirmações, mas remetemos os leitores interessados às referências bibliográficas citadas no início deste capítulo.

OBSERVAÇÃO 2: O matemático Jacob Steiner (1796-1863) trabalhou na generalização do problema de Fermat-Steiner. A generalização desse problema tornou-se interessante porque Steiner abandonou a busca por um único ponto P. Em vez disso, Steiner passou a procurar "redes mínimas" de comprimento total mais curto. Mais precisamente, *dados n pontos* A_1, A_2,... , A_n; *encontre um sistema conectado de segmentos de retas de comprimento total mais curto tal que quaisquer dois pontos dados possam ser unidos por uma poligonal formada por segmentos do* *sistema.* (COURANT, 2000, p. 436). Para esse problema, o aspecto da solução, naturalmente dependerá da disposição dos n pontos dados.

Steiner demonstrou que, no caso de n pontos, haverá no máximo n–2 intersecções múltiplas, em cada uma das quais três segmentos se encontram em ângulos de 120^0. A figura a seguir exibe alguns exemplos de redes mínimas de Steiner.

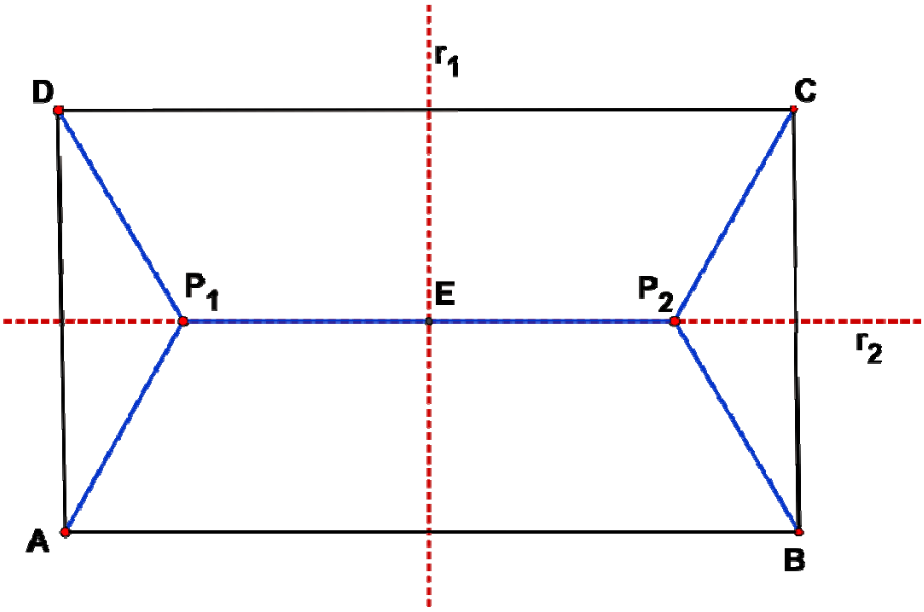
Figura 2.16 Redes de Steiner com várias conexões



Vamos analisar apenas o caso da rede mínima que une os vértices de um retângulo. Nesse caso, é fácil verificar que a solução consiste em cinco segmentos com duas intersecções múltiplas onde três segmentos se encontram em ângulos de 120º.

Vamos mostrar que essa rede mínima é tal que as duas interconexões múltiplas em P_1 e P_2 são simétricos em relação aos eixos vertical e horizontal do retângulo, como mostra a figura a seguir.

Figura 2.17 Solução do problema de Steiner para os vértices do retângulo ABCD



De fato, seja o retângulo ABCD com eixos de simetria vertical e horizontal r_1 e r_2, respectivamente, que se intersectam no ponto E. Admitamos que P_1 e P_2 sejam vértices das duas intersecções múltiplas da rede mínima que une A, B, C e D.

Supondo, sem perda de generalidade, que P_1 e P_2 estão localizados em lados diferentes de r_1. Afirmamos que, nesse caso, P_1 e P_2 devem ser simétricos em relação a r_1. De fato, se assim não ocorresse, a rede que une ADE teria comprimento diferente da rede que une CBE, mas isso é impossível, pois ADE e CBE são simétricos em relação a r_1.

Utilizando o mesmo raciocínio demonstra-se que, se P_1 e P_2 estão em semiplanos diferentes em relação a r_2, então P_1 e P_2 devem também ser simétricos em relação a r_2.

Esse resultado mostra que, dada uma malha ligando os quatro vértices de um retângulo, essa malha terá como eixos de simetria os mesmos eixos horizontal e vertical do retângulo ABCD.

Logo, para obter a rede mínima que une os vértices de ABCD basta tomar a intersecção E dos eixos de simetria r_1 e r_2 de ABCD e determinar os pontos de Fermat P_1 e P_2 dos triângulos ADE e CBE ou dos triângulos ABE E CDE.

3.5 PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

O problema isoperimétrico clássico consiste em encontrar, dentre todas as curvas planas fechadas de um dado comprimento L, aquela que engloba maior área possível. Em 1836, o matemático Jacob Steiner (1796-1863), mostrou que, de fato, a circunferência encerra a maior área entre todas as curvas fechadas com um comprimento dado. (COURANT, 2000) A demonstração do problema isoperimétrico clássico pode ser consultada nas referências bibliográficas indicadas no início deste capítulo.

Neste trabalho, apresentamos alguns problemas isoperimétricos envolvendo polígonos. Mais especificamente, os problemas aqui abordados envolvem a determinação de polígonos que englobam maior área, em determinadas condições.

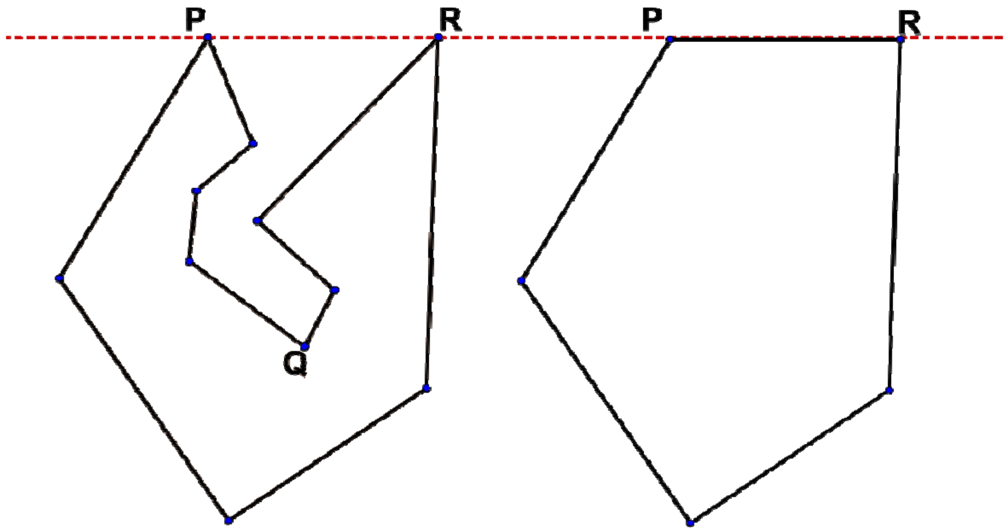
Vamos inicialmente demonstrar que esses polígonos devem ser convexos. Uma região P do plano é convexa, se qualquer segmento de reta, unindo dois pontos quaisquer de P, está inteiramente contido em P.

PROBLEMA 1: *Dado um polígono F_1 não convexo, mostre que sempre é possível encontrar outro polígono F_2 com número de lados menor, perímetro menor e área maior.*

De fato, sejam P, Q e R vértices, não necessariamente consecutivos, de um polígono não convexo em Q, ou seja, o segmento PR não está inteiramente contido na região delimitada pelo polígono. Sem perda de generalidade, supomos que a reta PR tem o polígono todo contido inteiramente em um dos semiplanos determinados por ela.

Unindo PR com um segmento de reta e excluindo todos os vértices intermediários entre P e R, ou seja, a parte côncava do polígono F_1 original, obterem-se um polígono F_2, com menor número de lados, menor perímetro e maior área do que F_1.

Figura 2.18 O polígono não convexo tem número de lados maior, perímetro maior e área menor que o convexo



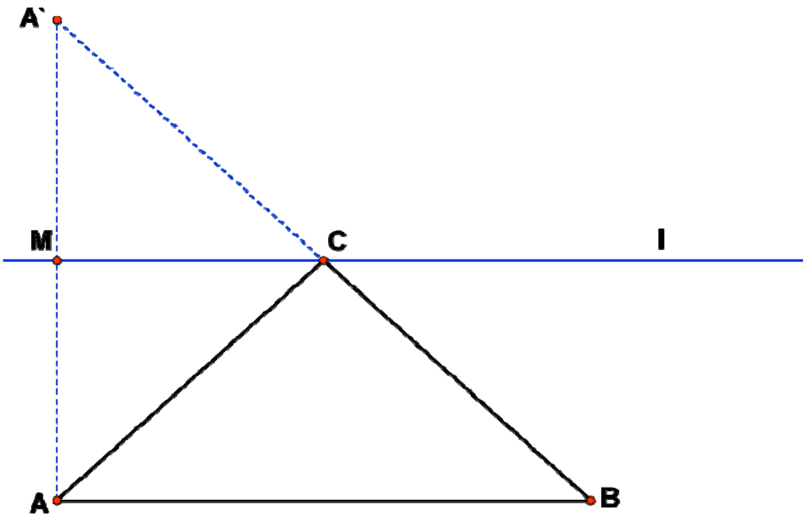
Note que utilizamos a hipótese de que a reta AC tem o polígono F_1 contido inteiramente num dos seus semiplanos. Mas, caso isso não ocorra, é fácil perceber que sempre podemos obter três vértices em que as condições acima sejam atendidas.

***PROBLEMA 2:** Sejam dados área S e um lado de um triângulo ABC. Encontrar entre todos os triângulos aquele que tem a soma mínima dos outros dois lados.*

SOLUÇÃO: Seja o triângulo ABC de lado AB e área S fixadas. Se h é a altura desse triângulo em relação a AB, então $h=2\times S\times\overline{AB}$. Segue que, fixando o lado AB e a área de ABC, estamos escolhendo o lado e a altura sobre esse lado de ABC. Assim, o problema consiste em encontrar um ponto C de tal forma que a distância de C ao segmento AB seja igual a altura h dada de tal modo que a $\overline{AC}+\overline{BC}$ seja a menor possível. Observe que o ponto C deve estar sobre uma reta l paralela ao segmento AB e a uma distância h deste segmento.

Novamente, a solução deste problema é dada da mesma forma da solução do Problema de Heron. Primeiro, refletimos o ponto A em relação à l, obtendo seu ponto simétrico A’.

Figura 2.19 O triângulo isósceles possui perímetro menor e mesma área

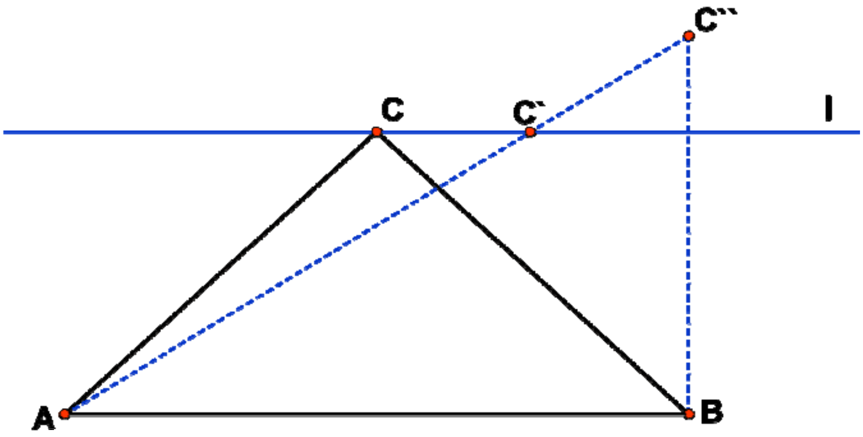


A reta que passa pelos pontos A’ e B corta a reta l em um ponto C, o qual fornece a menor soma $\overline{AC}+\overline{BC}$, pelo Problema de Heron. A reta que passa pelos pontos A’ e A, por sua vez, corta a reta l em um ponto M, tal que A’M = AM (M é o ponto médio do segmento A`A). Logo, como l é paralela a AB, l cruza o segmento A´B em seu ponto médio em C e, portanto, temos A’C = BC. Da igualdade A’C = AC resulta que AC = BC. Concluímos, portanto, que ABC deve ser isósceles. Note que este é o caso do problema de Heron em que os pontos estão a uma mesma distância da reta.

PROBLEMA 3: *Sejam dados um lado de um triângulo e a soma dos outros dois lados desse triângulo. Encontrar entre todos os triângulos o de área máxima.*

SOLUÇÃO: Seja ABC um triângulo isósceles com $\overline{AC} = \overline{BC}$ e ℓ uma reta paralela ao segmento AB passando por C.

Figura 2.20 $\overline{AC''} + \overline{C''B} > \overline{AC'} + \overline{C'B} > \overline{AC} + \overline{CB}$.



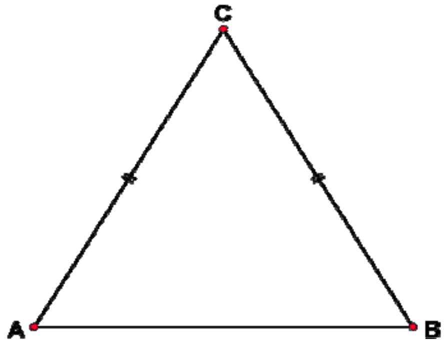
Observe que, para qualquer ponto C’ em ℓ, teremos $\overline{AC'} + \overline{C'B} > \overline{AC} + \overline{CB}$, (Consequência do problema 2). Mas, dado um ponto qualquer C” acima de ℓ (ou seja, tal que C” e AB estejam em semiplanos distintos em relação à reta ℓ), também teremos $\overline{AC''} + \overline{C''B} = \overline{AC'} + \overline{C'C''} + \overline{C''B} > \overline{AC'} + \overline{C'B} > AC + CB$.

Logo, somente abaixo da reta ℓ podemos ter outros pontos D tais que $\overline{AD} + \overline{DB} < \overline{AC} + \overline{BC}$, mas então a área do triângulo ABD será menor do que a área de triângulo ABC. Logo, o triângulo ABC tem área máxima com o perímetro dado.

PROBLEMA 4: *Entre todos os triângulos de perímetro dado encontre aquele que possui área máxima?*

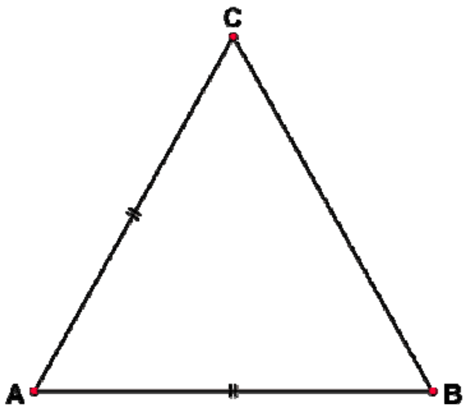
SOLUÇÃO: Admitamos que ABC seja o triângulo solução. Note que, fixando como base o lado AB, a soma dos outros dois lados desse triângulo estará fixada, pois o perímetro é dado. Segue do problema 3 que ABC com área máxima é isósceles e $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Figura 2.21 Triângulo isósceles em AC e BC possui área máxima



Agora, se triângulo de área máxima ABC, considerarmos como base o lado BC, resulta em que a soma dos outros dois lados também é fixada e, do problema 3, concluímos que ABC continua sendo isósceles, logo temos que $\overline{AB} = \overline{AC}$.

Figura 2.22 Triângulo isósceles em AB e AC possui área máxima

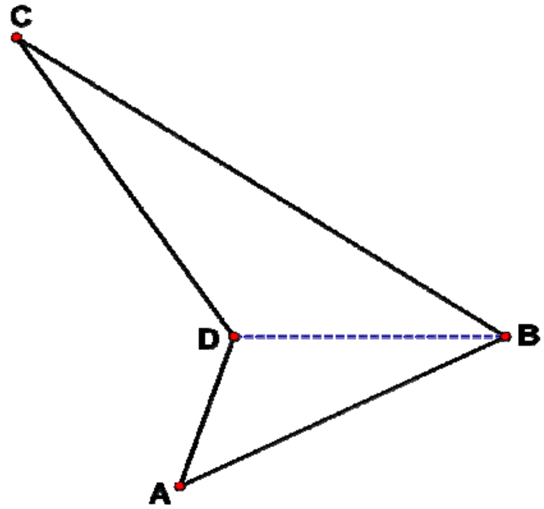


Portanto, podemos concluir que $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC}$, ou seja, os lados do triângulo são todos iguais. Logo entre todos os triângulos de perímetro dado o que engloba a maior área é triângulo equilátero.

PROBLEMA 5: *Entre todos os quadriláteros de perímetro dado qual possui maior área?*

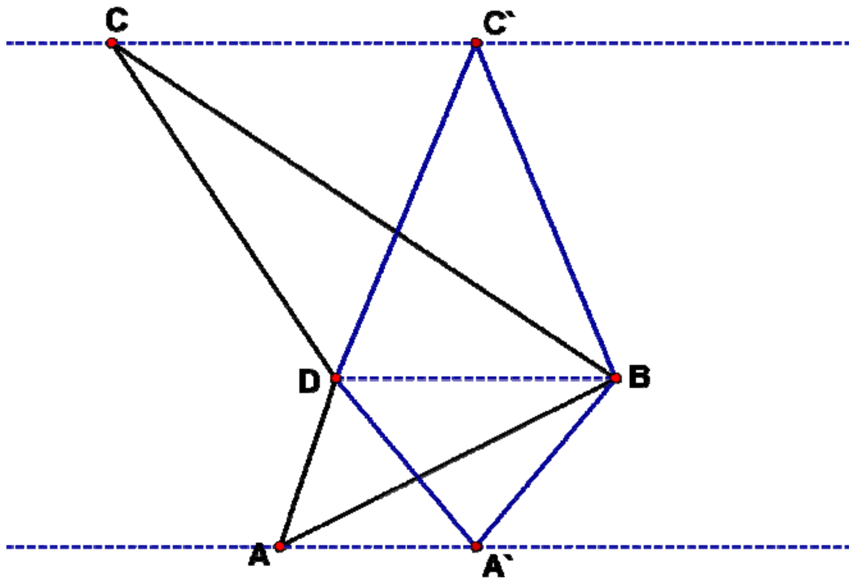
SOLUÇÃO: Seja ABCD um quadrilátero qualquer de perímetro dado. Traçando o segmento BD, podemos observar que este divide o quadrilátero em dois triângulos BAD e BCD.

Figura 2.23 Quadrilátero ABCD com diagonal BD



Note que a soma das áreas dos dois triângulos é igual a área total do quadrilátero ABCD. Vamos então analisar o triângulo BAD. Fixando o lado BD e a soma $\overline{AB} + \overline{AD}$, resulta do problema 3 que o triângulo de área máxima com mesmo perímetro de BAD deve ser isósceles. Assim, tomando-se um ponto A' tal que $\overline{A'B} + \overline{A'D} = \overline{AB} + \overline{AD}$, temos que $\overline{A'B} = \overline{A'D}$. De modo análogo, tomando um ponto C' tal que $\overline{C'B} + \overline{C'D} = \overline{CB} + \overline{CD}$, segue que $\overline{C'D} = \overline{C'B}$.

Figura 2.24 $\overline{A'B} = \overline{A'D}$ e $\overline{C'D} = \overline{C'B}$

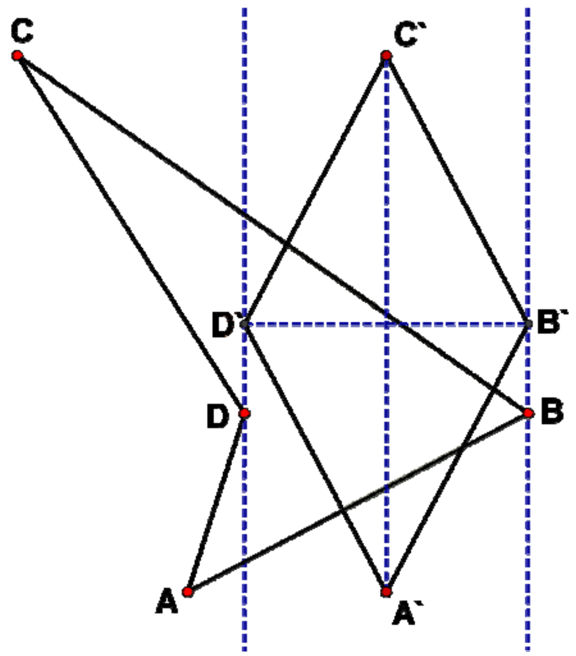


Temos agora um novo quadrilátero A'BC'D de perímetro igual ao perímetro do quadrilátero ABCD, mas com área maior a daquele quadrilátero.

Traçando agora o segmento A`C` percebemos que ele divide o novo quadrilátero em dois outros triângulos A’DC’ e A’BC’ tais que $\overline{A'D} + \overline{C'D} = \overline{A'B} + \overline{C'B}$. Fixando o lado A`C` e as somas $\overline{A'D} + \overline{C'D} = \overline{A'B} + \overline{C'B}$, concluímos, pelo problema 3, que os triângulos de área máxima com mesmo perímetro de A’DC’ e A’BC’ devem ser também isósceles.

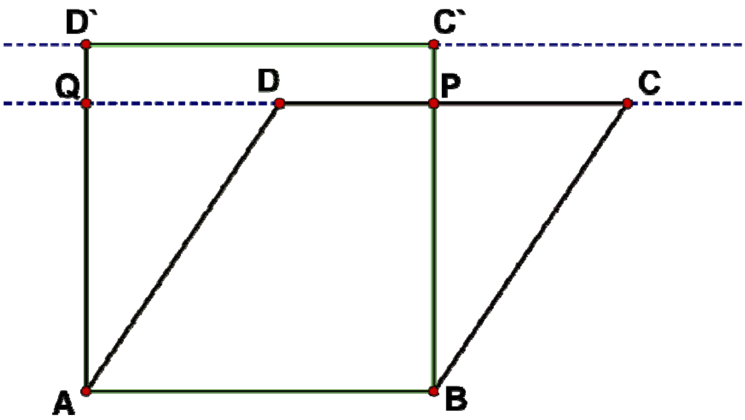
Assim, escolhendo pontos D’ e B’ tais que $\overline{A'D'} + \overline{C'D'} = \overline{A'D} + \overline{C'D}$ com $\overline{A'D'} = \overline{C'D'}$, e ainda $\overline{A'B'} + \overline{C'B'} = \overline{A'B} + \overline{C'B}$ com $\overline{A'B'} = \overline{C'B'}$, teremos um outro quadrilátero A’B’C’D’, de perímetro igual ao perímetro dos outros dois anteriores, e tal que $\overline{A'B'} = \overline{B'C'} = \overline{C'D'} = \overline{D'A'}$ e com área maior ou igual área de A’BC’D.

Figura 2.25 $\overline{A'B'} = \overline{A'D'} = \overline{C'D'} = \overline{C'B'}$



Concluímos, portanto, que o quadrilátero de perímetro dado que engloba área máxima é o losango. Vamos mostrar agora que o quadrado é o losango que encerra a maior área para o quadrilátero de perímetro dado. Para chegar neste resultado, utilizaremos a figura a seguir, para concluir que o quadrado encerra a maior área entre todos os losangos de perímetro dado.

Figura 2.26 O quadrado é o losango de maior área



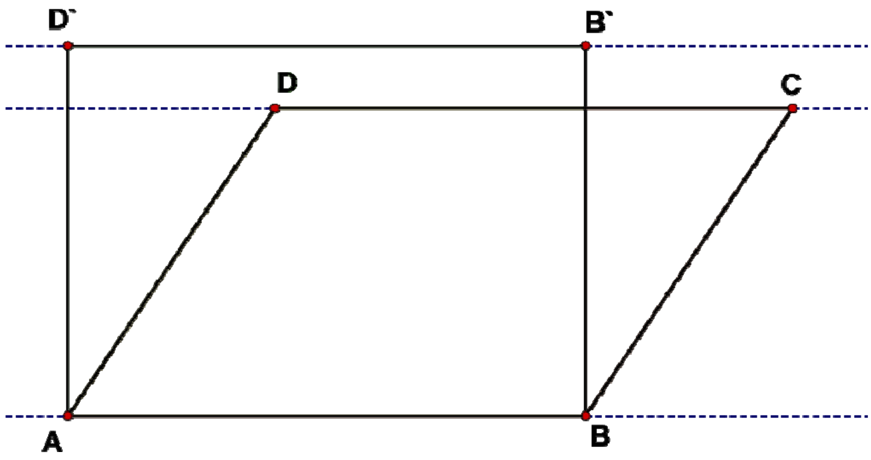
De fato, admitamos que o losango ABCD e o quadrado ABC`D` possuem o mesmo perímetro. Comparando estes dois quadriláteros, é fácil verificar que as áreas dos triângulos AQD e BPC são iguais. Além isso, verifica-se sem dificuldade que a área do quadrado é a soma da área do losango com a área do retângulo PQD`C`. Logo, o quadrado ABC`D` possui área maior que o losango ABCD. Como o losango é o quadrilátero de perímetro dado que encerra maior área, concluímos, por transitividade, que o quadrado é o quadrilátero de perímetro dado que possui a maior área.

PROBLEMA 6: *Mostre que, dentre todos os triângulos com dois lados de medidas fixas, o de maior área é o triângulo retângulo que possui esses lados por catetos.*

SOLUÇÃO: Seja ABC um triângulo com lados BC e AC, cujas medidas a e b, respectivamente, estão fixadas. Afirmamos que, dentre todos os paralelogramos construídos com os lados de medidas a e b, o retângulo é o que tem área maior.

De fato, a área de um paralelogramo é a medida da base multiplicada pela da altura. Se fixarmos o lado AB e movermos os outros, utilizando o mesmo argumento do Problema 5, facilmente percebemos que a altura máxima que se pode obter é a, quando o ângulo é reto.

Figura 2.27 O retângulo é o paralelogramo de maior área



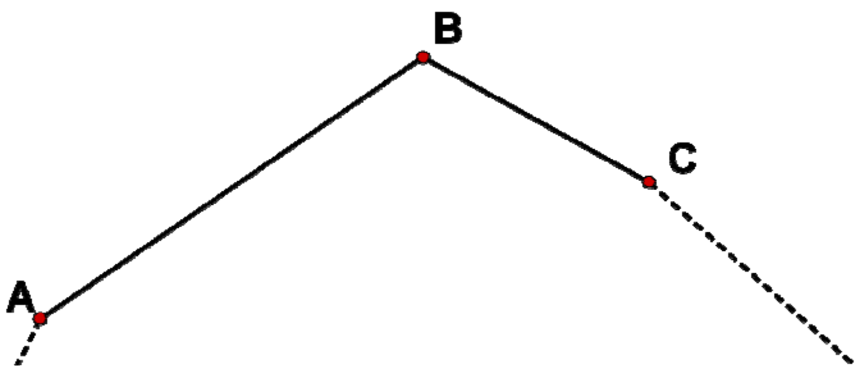
Para concluir a demonstração, basta observar que a área dos triângulos de lados a e b é a metade da área do paralelogramo correspondente.

OBSERVAÇÃO 3: Note que este resultado equivale a mostrar que o triângulo ABC está contido num semicírculo de diâmetro AB e ângulo inscrito ACB.

PROBLEMA 7: *Mostre que, dentre todos os polígonos de n lados e perímetro fixado, o que tem maior área é o polígono regular.*

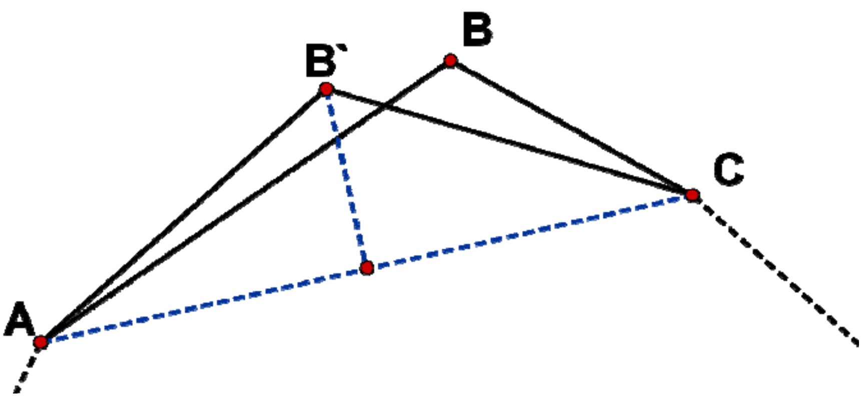
SOLUÇÃO: Primeiro vamos provar que o polígono solução deve ser equilátero. De fato, suponha que o polígono solução não seja equilátero. Noutros termos, suponha que no polígono solução existam pelos menos dois lados consecutivos, digamos AB e BC, de comprimentos distintos.

Figura 2.28 Lados AB e BC consecutivos de um polígono qualquer



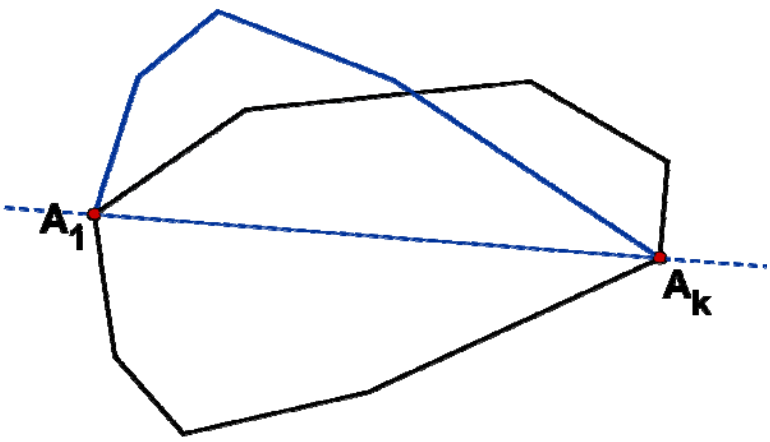
Substituindo o ponto B por um ponto B’ tal que $\overline{AB'} = \overline{B'C}$ com $\overline{AB'} + \overline{B'C} = \overline{AB} + \overline{BC}$, concluímos, pelo problema 1, que a área do triângulo AB’C será maior do que a área do triângulo ABC. Portanto, o novo polígono obtido substituindo B por B` tem área maior do que o suposto polígono solução original. Esta contradição mostra que o polígono solução deve ser equilátero.

Figura 2.29 $\overline{AB'} + \overline{B'C} = \overline{AB} + \overline{BC}$



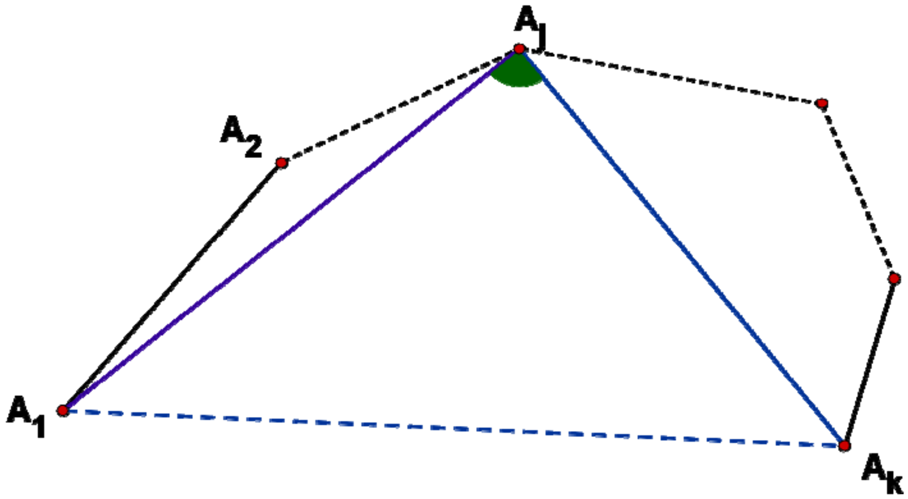
Falta provar agora que o polígono solução é equiângulo. Seja P_n o polígono de n lados que engloba a maior área possível, dentre todos os polígonos de mesmo perímetro que P_n. Primeiro, suponhamos que o número n é par, ou seja, n = 2k, e que A_1; A_2;...; A_{2k} são os vértices desse polígono. Devemos, então, concluir que a reta A_1A_k divide o polígono em duas partes de mesma área, pois, caso contrário, poderíamos refletir a parte de área maior na reta A_1A_k e obter um polígono de área maior.

Figura 2.30 Reflexão da parte do polígono com menor área (azul)



Vamos então analisar uma dessas partes. Considere então qualquer vértice A_j entre A_1 e A_k. Então, o ângulo $A_1\hat{A}_jA_k$ mede 90º, pois como vimos no problema 6, essa é a condição para que o triângulo $A_1A_jA_k$ tenha área máxima, mantendo inalterados os lados A_1A_j e A_jA_k. Noutros termos, concluímos, utilizando o problema 6, que todos os vértices de cada uma das duas partes do polígono estão contidos num semicírculo.

Figura 2.31 $A_1\hat{A}_jA_k = 90^o$



Mas, se o ângulo $A_1\hat{A}_jA_k$ mede 90º, para $1 < j < k$, concluímos então que o polígono P_n terá que ser necessariamente inscrito em uma circunferência e, como ele é equilátero, ele deve ser também regular. Portanto, se n é par, só existe um polígono de perímetro dado e área máxima. É o polígono regular!

Vejamos agora o caso em que n é ímpar. Seja P o polígono solução com perímetro l e um número n ímpar de lados. Segue-se que P possui pelo menos dois ângulos internos adjacentes distintos.

Seja P_n um polígono regular de n lados e perímetro l. Construamos sobre P_n o polígono regular de 2n lados, inscrito no mesmo círculo que circunscreve P_n. Chamemos de P_{2n} tal polígono que terá um perímetro $l' > l$. Pela argumentação anterior, este é o único polígono de 2n lados, de perímetro l' e área máxima.

Observe que, unindo dois vértices alternados de P_{2n}, obtemos uma diagonal que é igual aos lados de P_n e também de P. Agora, se a área de P_n for menor ou igual à área de P, então recortando os n triângulos formados por dois lados consecutivos de P_{2n} e pela diagonal de vértices alternados, e colando-os sobre os lados de P, obteríamos um polígono de 2n lados com perímetro l' mas não regular, e com área maior ou igual à área de P_{2n}.

Mas, isto é uma contradição, já que o polígono P_{2n} é o único polígono de 2n lados e perímetro l' de área máxima. Portanto, o polígono de n lados e perímetro l dado deve ser obrigatoriamente um polígono regular.

OBSERVAÇÃO 4: O problema isoperimétrico clássico é determinar, dentre todas as curvas planas fechadas de comprimento L, aquela que engloba maior área. A solução desse problema é obtida quando se mostra que, qualquer que seja a curva C fechada no plano de comprimento L, sua área é menor do que ou igual à área do círculo de mesmo comprimento L.

Como vimos, tomando-se *n* pontos igualmente espaçados em relação ao comprimento de arco em *C* e ligando-os por segmentos de reta, obtemos um polígono de perímetro menor ou igual a *L* e, portanto, com área menor ou igual ao do *n*-ágono regular de mesmo comprimento, que é, por sua vez, menor do que o comprimento dessa circunferência.

Intuitivamente, percebemos que para *n* suficientemente grande, a área de *C* fica arbitrariamente próxima da área do *n*-ágono e, assim sendo, não pode ser maior do que a área da circunferência de mesmo comprimento.

Finalmente, devemos notar que, tendo provado a existência de uma curva de área maximal, os argumentos expostos até aqui mostram que ela tem que ser a circunferência, que é, assim, a única solução do problema isoperimétrico.

4 MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Este capítulo é uma breve exposição do que usualmente se entende como Modelagem Matemática e Modelagem no Ensino de Matemática. Algumas razões que justificam o trabalho com Modelagem no Ensino e alguns possíveis encaminhamentos de uma atividade de Modelagem em sala de aula são também apresentados. Concluímos com uma reflexão sobre a concepção e a metodologia utilizada na experiência de Ensino relatada neste trabalho.

4.1 MODELOS MATEMÁTICOS E REALIDADE

Modelos matemáticos são geralmente definidos como representações da realidade. É nesse sentido que se costuma afirmar que "*um modelo matemático é um conjunto consistente de equações ou estruturas matemáticas, elaborado para corresponder a algum fenômeno – este pode ser físico, biológico, social, psicológico, conceptual ou até mesmo um outro modelo matemático*" (BASSANEZI, 2002, p.174).

Na Matemática Escolar, os exemplos mais comuns de modelos são tabelas de números, relações funcionais, gráficos, figuras geométricas, equações, fórmulas, expressões algébricas, etc. Dentre esses, os modelos matemáticos mais usuais são aqueles que incluem relações entre grandezas variáveis dadas por funções.

A importância dos modelos matemáticos está em seu poder de representar, ou seja, descrever um fenômeno ou objeto, permitindo a análise e obtenção de respostas às perguntas formuladas sobre esse fenômeno ou objeto. Em alguns casos, modelos matemáticos podem viabilizar a realização de provisões sobre o fenômeno ou objeto em estudo.

Modelos matemáticos são, em certo sentido, simplificações da realidade. Na medida em que um modelo matemático simplifica aquilo que pretende representar, ele ignora alguns de seus aspectos e salienta outros. É típico dos bons modelos matemáticos simplificar adequadamente uma situação sem perder de vista o comportamento da situação que pretende simular e predizer.

O processo de obtenção de modelos matemáticos é usualmente chamado de Modelagem. A Modelagem Matemática de uma situação-problema engloba um conjunto de **ações** normalmente agrupadas em **etapas**.

Ainda que a ordem dessas etapas possa variar de uma Modelagem para outra, quase todos os esquemas explicativos da Modelagem começam com um problema do mundo real, passam pela elaboração de um modelo matemático e, retornam à realidade para a resolução do problema ou reelaboração do modelo. Portanto, uma Modelagem parte de uma realidade e encerra ou reinicia seu ciclo nessa mesma realidade.

Para o professor Rodney Carlos Bassanezi, precursor da Modelagem no Ensino a partir da década de 80, as etapas de uma Modelagem são: (BASSANEZI, 2013, p. 11)

- **Escolha de temas**: levantamento de possíveis situações de estudo as quais devem ser, preferencialmente, abrangentes para que possam propiciar questionamentos em várias direções.
- **Coleta de dados**: busca por informações qualitativas e/ou quantitativas relacionadas ao tema. Pode ser feita mediante entrevistas, pesquisas bibliográficas; experimentos, etc.
- **Análise de dados e formulação de modelos**: compreensão de como é a variação das variáveis e como elas se correlacionam no fenômeno analisado.
- **Validação**: processo de aceitação ou rejeição de um modelo matemático. Dentre os vários fatores que influenciam na validação, destaca-se o confronto dos dados reais com os valores do modelo.

Para Lourdes Werle de Almeida, pesquisadora dos processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática com atividade de Modelagem, as etapas de uma Modelagem são as seguintes: (ALMEIDA, 2011, p. 32)

- **Inteiração:** representa o primeiro contato com uma situação-problema. Implica, portanto, cercar-se de informações sobre essa situação por meio de coleta de dados quantitativos e qualitativos. A inteiração conduz a formulação do problema e a definição de metas para sua resolução. Essa fase envolve como processos cognitivos a *compreensão* e a *estruturação* da situação-problema.

- **Matematização:** Tendo sido identificado o problema e também estruturado esse problema numa linguagem natural. A transformação da representação da linguagem natural para a linguagem matemática constitui-se a fase da matematização. Essa fase envolve como processo cognitivo a *matematização* da situação-problema. Reconhecer os aspectos matemáticos da situação, selecionar variáveis e formular hipóteses fazem parte dessa etapa.
- **Resolução:** Com a simplificação da situação-problema, sua abordagem com estruturas matemáticas resultam num modelo matemático. Esse modelo e seus resultados são usualmente interpretados à luz das informações obtidas na situação investigada. Essa fase envolve como processo cognitivo a *síntese* das informações coletadas.
- **Interpretação de resultados e validação:** O modelo matemático obtido e seus resultados são interpretados à luz das informações obtidas na situação investigada. Esta fase implica na análise da solução obtida para o problema original e se constitui numa avaliação do modelo que resulta na sua aceitação ou rejeição. O retorna à situação-problema original na validação faz com que a modelagem tenha um caráter cíclico.

Agrupar as ações de uma Modelagem certamente ajuda na compreensão da complexidade de cada uma delas. Reconhecer uma situação-problema; buscar informações; identificar e selecionar variáveis; elaborar hipóteses simplificadoras da realidade, obter modelos matemáticos; resolver o problema; analisar a solução obtida; validar modelos matemáticos; etc. são ações que, independente da etapa a que pertençam, constituem o coração da Modelagem e situam-se entre as principais razões para ensinar Matemática na Educação Básica. (ALMEIDA e FERRUZI, 2009, p. 120-121)

4.2 A Modelagem no Ensino da Matemática

Diversos educadores matemáticos defendem a necessidade de se utilizar Modelagem como uma estratégia de Ensino e Aprendizagem da Matemática. (ALMEIDA, 2012), (BASSANEZI, 2002). Várias experiências em sala de aula, utilizando Modelagem no Ensino, têm sido desenvolvidas e divulgadas nos eventos ligados ao ensino da Matemática, artigos científicos, etc.

Todavia, a transferência conceitual dos esquemas explicativos da Modelagem para o contexto do Ensino da Matemática pode requerer algumas adaptações. Em sala de aula, a obtenção e a validação de modelos matemáticos, por exemplo, assumem outro significado. De fato, numa Modelagem voltada para o ensino de Matemática, "*o mais importante não é chegar imediatamente a um modelo bem sucedido, mas caminhar seguindo etapas onde o conteúdo matemático vai sendo sistematizado e aplicado*" (BASSANEZI, 2002).

No ensino da Matemática, a validação do modelo pode não ser uma etapa prioritária. "*Mais importante do que os modelos obtidos é o processo utilizado, a análise crítica e sua inserção no contexto sociocultural. O fenômeno modelado deve servir de pano de fundo ou motivação para o aprendizado das técnicas e conteúdos da própria matemática. As discussões sobre o tema escolhido favorecem a preparação do estudante como elemento participativo na sociedade em que vive*" (BASSANEZI, 2002, p.38).

Nesse sentido, as razões para fazer Modelagem em sala de aula não se esgotam em aprender técnicas de Modelagem ou em aprender Matemática de um modo mais fácil.

Mais do que esses motivos, a Modelagem para o Ensino da Matemática é uma maneira de desenvolver Competências Matemáticas essenciais para a vida o aluno. De fato, "*a competência matemática tem adquirido uma importância crescente para a preparação das crianças e dos jovens para o trabalho e para a cidadania, estudos mostram que não é suficiente saber-se apenas matemática pura para ser capaz aplicá-la em situações extramatemáticas*" (BLUM e NISS, 1991, p.1). Além disso, fazer Modelagem certamente motiva para o estudo da Matemática. De fato, "*é frequente encontrar alunos francamente desmotivados nas aulas de matemática por não serem capazes de encontrar qualquer utilidade nos conhecimento que o professor lhes pretende transmitir*". (TAVARES, 1996, p. 30).

Outra boa razão, talvez a principal, para fazer Modelagem em sala de aula relaciona-se com a necessidade de tornar visível aos estudantes o papel que a Matemática desempenha no mundo atual. De fato, diversas decisões são tomadas na sociedade com base em modelos matemáticos. A presença da Matemática como um dos sustentáculos das tecnologias modernas tem afetado direta e indiretamente a vida das pessoas. De acordo com Skovsmose:

"A humanidade está envolvida pela tecnologia. A sociedade e a tecnologia estão integradas e a tecnologia tornou-se o aspecto dominante da civilização. A matemática é o sustentáculo lógico do processamento da informação, e o pensamento matemático é também a base para as atuais aplicações da tecnologia da informação."(SKOVMOSE, 2001, p. 77)

Skovsmose emprega as ideias defendidas por Davis e Hersh (1998) para afirmar que a Matemática está ***formatando*** a sociedade e que ela tem um poder de formatação. Esse poder de formatação relaciona-se com o uso de modelos matemáticos para descrever, predizer e prescrever situações importantes da vida social. Com o uso prescritivo a matemática leva a algum tipo de ação humana ou tecnológica. São exemplos de matemática prescritiva:

"*as medidas de massa e espaço, os relógios e calendários, os projetos de edifícios e máquinas, o sistema monetário, são exemplos de prescrições matemáticas bastante antigas. Exemplos mais recentes podem ser encontrados no sistema de previdência social pública, no sistema de arrecadação de impostos, no sistema de trânsito de veículos das grandes cidades, na coordenação de semáforos, controle das epidemias, agricultura, etc*" (DAVIS & HERSH, 1998, p.287).

Assim, além de servir como estratégia de motivação, a Modelagem pode criar um ambiente de aprendizagem em que se possa discutir e questionar o poder de formatação da Matemática, tornando visível aos alunos o papel que ela desempenha no mundo de hoje. Com isso, o aluno pode situar-se no seu ambiente sociocultural e instrumentalizar-se para atuar e modificar esse ambiente.

Nesse sentido, o educador matemático Ole Skovsmose defende que numa Modelagem o aluno pode desenvolver três diferentes tipos de conhecimento: o conhecimento matemático, o conhecimento tecnológico e o conhecimento reflexivo (SKOVSMOSE, 2001, p. 115).

- **Conhecimento matemático**: refere-se à competência normalmente entendida como habilidades matemáticas, incluindo-se as competências na reprodução de teoremas e provas, bem como ao domínio de uma variedade de algoritmos.
- **Conhecimento tecnológico**: engloba as habilidades de aplicar a Matemática e as competências ligadas à construção de modelos.

- **Conhecimento reflexivo**: trata-se da competência de refletir sobre o uso da matemática e avaliá-lo. Reflexões têm a ver com avaliações das consequências do empreendimento tecnológico.

Essas três formas de conhecimento são importantes no processo de modelagem. Todavia, particularmente importante é o desenvolvimento do conhecimento reflexivo. Concordamos com Skovsmose quando afirma que:

"*Como parte de nossa cultura, estruturada pela tecnologia, uma competência no reconhecer e interpretar a matemática como atividade social e instituição torna-se importante. Especialmente: o conhecer reflexivo tem de ser desenvolvido para dar à alfabetização matemática uma dimensão crítica*" (SKOVSMOSE, 2001, p. 118).

Alfabetização matemática nesse caso relaciona-se com a capacidade de ler e interpretar situações diversas, utilizando-se da Matemática. Essa capacidade, entretanto, não se desenvolve apenas com a aquisição do conhecimento matemático ou com o domínio do conhecimento tecnológico. A alfabetização matemática se dá com o desenvolvimento da capacidade de avaliar e refletir sobre o uso (e abusos) da matemática na sociedade.

4.3 A AULA DE MATEMÁTICA COM MODELAGEM

Experiências de ensino com Modelagem têm sido conduzidas em sala de aula não só no Brasil, mas em muitos outros países. O modo como são conduzidas essas atividades reflete, muitas vezes, a necessidade de se atender às demandas características do contexto escolar. Mas, também refletem as concepções sobre o papel da Modelagem no currículo.

Em sala de aula, a condução de uma atividade de Modelagem não deve ser vista como uma receita a ser seguida. Para Bassanezi, "*aprender modelagem matemática não se restringe ao aprendizado de técnicas padronizadas ou procedimentos sequenciais tal como um protocolo cirúrgico; só se aprende modelagem, modelando!*" (BASSANEZI, 2002, p.49).

A condução de atividades de Modelagem em sala de aula envolve um conhecimento que é empírico, no sentido de que não pode ser transferido acriticamente de uma situação para outra. E, trata-se de um conhecimento que se constrói a partir da reflexão crítica sobre os erros e acertos. Mesmo após muita experiência acumulada, o professor não consegue planejar exatamente tudo o que vai acontecer numa aula com Modelagem.

Alguns autores orientam que um modo de encaminhar uma atividade de Modelagem em sala de aula é organizar a turma de alunos em pequenos grupos, cada qual escolhe um tema, e, com a ajuda do professor desenvolve um trabalho de Modelagem. Barbosa (2002), por exemplo, afirma que uma forma de conduzir a Modelagem consiste em "... *dividir os alunos em grupos, os quais devem eleger temas de interesse para serem investigados por meio da matemática, contando com o acompanhamento do professor*".

Nesse caso, a matemática pode surgir à medida que se vai lidando com os problemas levantados. Nessa forma de organização, "*o programa vai sendo desenvolvido à medida que problema exige novos conceitos*" (BASSANEZI, 1990, p.147).Outra maneira de encaminhar atividades de Modelagem em cursos regulares é introduzir essas atividades de forma gradativa, respeitando diferentes momentos do processo de ensino e aprendizagem. Almeida (2012) defende que a familiarização dos alunos com as atividades de Modelagem em cursos regulares deve ocorrer de forma gradativa em três momentos:

- **Momento 1:** O professor propõe à turma de alunos uma situação-problema, juntos com os dados e demais informações relevantes para sua compreensão. As demais ações da atividade de Modelagem são acompanhadas pelo professor que orienta e avalia o trabalho dos alunos.
- **Momento 2:** O professor sugere a escolha de um tema. Os alunos, organizados em grupos, realizam a coleta de informações, a formulação das hipóteses, a dedução e a validação do modelo. A diferença principal do primeiro momento para o segundo é a independência do estudante na realização das ações de Modelagem.
- **Momento 3:** Os alunos organizados em pequenos grupos, escolhem um tema e realizam, com a orientação do professor, todas as ações da atividade de Modelagem. Cabe aos alunos, nesta fase, identificar a situação-problema, coletar e analisar os dados, enunciar o problema em linguagem matemática, identificar conceitos matemáticos, obter e validar o modelo e discutir seu uso para a comunidade escolar.

A familiarização gradativa dos alunos com atividades de Modelagem é uma forma de evitar obstáculos que normalmente são apontados em seu uso em cursos regulares. De acordo com Almeida (2012): "*Este encaminhamento para a introdução de atividades de Modelagem Matemática em aulas com alunos ainda não familiarizados com este tipo de atividade, embora não seja uma prescrição rigorosa, tem se mostrado adequada em inúmeras experiências realizadas*". (ALMEIDA, 2012, P. 28).

De fato, a proposta de incorporar às práticas letivas atividades de Modelagem em três momentos, aumentando gradativamente a independência dos alunos em relação às ações de numa Modelagem, considera a necessidade do aluno desenvolver "habilidades de fazer Modelagem" simultaneamente à aprendizagem dos conteúdos de Matemática.

Essa proposta é, no sentido didático, uma metodologia para utilizar Modelagem em cursos regulares. Adotar essa metodologia leva em conta, portanto, as características de estruturação das aulas de Matemática. Definir objetivos, selecionar conteúdos, escolher instrumentos de avaliação e de recuperação de estudos são exemplos de características de grande parte dos cursos regulares que precisam estar incorporadas no trabalho com Modelagem.

4.4 METODOLOGIA E CONCEPÇÃO DA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Na experiência de ensino, relatada nesta dissertação, abordamos vários conteúdos de Geometria utilizando atividades de Modelagem. Essas atividades foram elaboradas a partir da escolha do tema "*Praças públicas*". Os conteúdos abordados incluem escala, proporção, cálculo de área, ângulo, simetria, transformações no plano, congruência e semelhança de polígonos.

Os objetivos gerais de ensino nessas atividades de Modelagem são: Interpretar problemas de natureza geométrica; reconhecer problemas de otimização geométrica em situações do cotidiano; utilizar construções geométricas para tomada de decisões; realizar experimentos de natureza geométrica; desenvolver argumentações em Geometria; construir demonstrações formais e informais de proposições geométricas.

A metodologia que adotamos para atingir esses objetivos fundamenta-se na proposta de introduzir gradualmente as atividades de Modelagem.

Na escolha do tema “praças”, por exemplo, os alunos poderiam escolher qualquer assunto que fosse do interesse deles, desde que a coleta de dados pudesse ser feita utilizando o Google Earth. Fizemos essa restrição, pois as fotografias áreas obtidas no Google Earth e algumas ferramentas desse software, tais como régua, escala, elevação de terreno e inserção de polígonos conduzem a temas que podem envolver otimização de distâncias, áreas e perímetros de figuras planas.

Várias localizações foram citadas pelos alunos: o autódromo Internacional Airton Senna, o telhado do Museu Histórico Padre Carlos Weiss; a rodoviária Celso Garcia; rotatórias com maior número de acidentes; os reservatórios elevados de água (caixas d´água da Sanepar), etc.

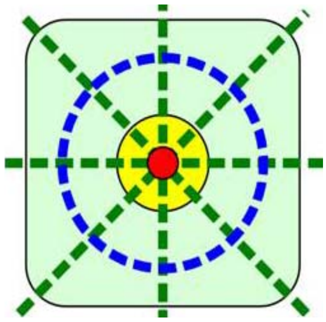
Dentre as questões sugeridas pelos alunos, apareceu a proposta de “tirar” as medidas da Praça Rocha Pombo e fazer uma maquete para apresentar num evento de final do ano. Sugerimos, então, ampliar para o estudo das praças públicas de Londrina. De fato, a ideia de elaborar um projeto para reforma da Praça Rocha Pombo e concretizar esse projeto numa grande maquete a ser confeccionada ao longo das aulas motivou fortemente os alunos para escolha do tema “praças”.

A nossa sugestão de ampliar o estudo para praças públicas de Londrina não foi por acaso. De fato, levamos em conta que a elaboração de projetos de praças públicas envolve diversos aspectos matemáticos, especialmente relacionados à Geometria.

Na elaboração de um projeto de praça pública, diversos problemas de otimização podem ser abordados: minimização de custos com material de construção, minimização do comprimento dos caminhos que interligam os acessos, maximização das áreas reservadas para canteiros; maximização de espaços de lazer; entre outros, mostram que a escolha do tema praças públicas mostra bastante adequado para abordar Problemas de Otimização Geométrica com atividades de Modelagem.

De fato, as características principais dos projetos de praças elaborados dentro da chamada *linha clássica*, são: “*a geometria, a simetria e a construção de perspectivas monumentais com a utilização de planos ortogonais, caminhos em cruz, passeios perimetrais, estar central com ponto focal e espaços espelhados*” (MACEDO e ROBBA, 20O2).

Figura 2.32 ESQUEMA DA “TRÍADE” DA LINHA CLÁSSICA



- Caminhos em cruz; (verdes)
- Estar central (amarelo) com ponto focal (vermelho)
- Passeio perimetral (azul)

Fonte: Macedo e Robba (2002)

Traçados em cruz; eixos com pontos focais e estar central; hierarquia nas circulações com presença de caminhos secundários perimetrais; canteiros que apresentam formas geométricas e espelhadas; eixos de circulação ortogonais; grande quantidade de áreas permeáveis, dentre outras, são aspectos que possibilitam abordar os Problemas de Otimização Geométrica apresentados no Capítulo 2.

Sabe-se que na elaboração de um projeto de praça pública, aspectos estéticos, estilo arquitetônico, concepção de planejamento urbano, funcionalidade do mobiliário, conforto térmico, sustentabilidade, segurança, etc. podem acabar se sobrepondo aos problemas de otimização. Em geral, um projeto como esse não é avaliado apenas por critérios matemáticos. Este é um aspecto importante das atividades de Modelagem que precisa ser adequadamente discutido com os alunos.

Além da escolha do tema, a coleta de dados, neste trabalho, foi orientada pelo professor. Essa etapa, feita medindo distâncias em imagens de praças públicas. Essas imagens foram extraídas do Google Earth e impressas em folha de sulfite A4.

O processo de experimentação e levantamento de hipóteses foi feito a partir da análise das medidas obtidas das imagens citadas anteriormente. Nesse caso, também houve acompanhamento do professor para encaminhar as reflexões dos alunos e garantir que formulassem hipóteses adequadas para abordar os Problemas de Otimização Geométrica.

Além disso, a obtenção de modelos matemáticos significou neste trabalho a exibição de uma construção geométrica que maximizasse ou minimizasse alguma medida da praça em estudo. Essas construções foram feitas, com orientação do professor, sempre após a etapa de experimentação em que os alunos eram convidados a propor e testar soluções obtidas por tentativas.

De modo semelhante, na validação desses modelos foi solicitado aos alunos que apresentassem um argumento justificando as ideias utilizadas nas construções. Assim, a validação equivale a obtenção de uma demonstração para as afirmações e hipóteses subjacentes às construções geométricas exibidas como modelo matemático. A obtenção dessas demonstrações também foi feita, em muitos momentos, com a orientação do professor.

Portanto, em quase todas as etapas dessa Modelagem houve a participação do professor. A sugestão do tema, orientação na coleta de dados, auxílio na obtenção dos modelos matemáticos, e discussão com os alunos que construíssem demonstrações para validação dos modelos. Nesse sentido, a metodologia adotada nessa Modelagem mantém sempre no horizonte, os objetivos de ensino a serem atingidos, o cuidado com a aprendizagem dos conteúdos de geometria e a coerência na utilização de instrumentos de avaliação.

5 A EXPERIÊNCIA DE ENSINO: MODELAGEM NO ESTUDO DE PRAÇAS

Este capítulo descreve e analisa a experiência de ensino com atividades de Modelagem, abordando problemas de otimização em geometria. Primeiro, apresenta informações relevantes para a compreensão do contexto em que essa experiência ocorreu.

A escola, os alunos e a organização das aulas foram elementos muito peculiares na realização das atividades de Modelagem. Em seguida, são descritas e analisadas as atividades de Modelagem feitas em cada encontro com os alunos. Conclui com reflexões sobre a apresentação final do trabalho dos alunos e sobre aspectos positivos e negativos dessa experiência.

Ao longo do texto em que relatamos a experiência de ensino, indicamos nossa presença na realização das atividades como “o professor”, uma vez que o autor e o professor que desenvolve esse trabalho de ensino é a mesma pessoa. Noutras vezes, referimos à presença do professor na sala de aula na 1ª pessoa do plural.

5.1 A ESCOLA, OS ALUNOS E A ORGANIZAÇÃO DAS AULAS.

A escola em que este trabalho foi desenvolvido é o Centro de Socioeducação – CENSE 2 Londrina. Os CENSES são instituições mantidas pelo Governo do estado da Paraná, destinados à internação de adolescentes em cumprimento de medidas sócio-educativas. Essas medidas sócio-educativas estão prevista no Estatuto da Criança e do Adolescente e são aplicadas pelo juiz da vara competente.

Para os CENSEs são destinados os adolescentes que cumprem medida sócio-educativa de restrição de liberdade. Assim, esses adolescentes ficam acomodados em alojamentos, as chamadas alas, e circulam pelo CENSE apenas com acompanhamento dos educadores sociais.

Além dos educadores sociais, os adolescentes com restrição de liberdade recebem assistência de psicólogo, assistente social, psicopedagoga e são compulsoriamente matriculados nas disciplinas curriculares para garantir o direito à educação formal.

As aulas ofertas nos CENSEs são organizadas, pensando-se, em primeiro lugar, na segurança das pessoas que ali estão. Todos os materiais utilizados pelos alunos na realização das atividades de Modelagem, por exemplo, foram providenciados pelo professor devido ao cuidado com a segurança. Materiais como: lápis, réguas, canetas, borracha, pincéis, etc são cuidadosamente contados na entrada e saída da sala de aula. Tesoura com ponta, estilete, compasso ou qualquer outro material que colocam em risco a segurança são expressamente proibidos.

A modalidade de educação oferecida nos CENSEs é o EJA – Educação de Jovens e Adultos. Nessa modalidade, os alunos são matriculados nas disciplinas e concluem essas disciplinas quando se atingirem a carga horária exigida ou cumprem os chamados módulos de estudo. Cada módulo engloba um conjunto de conteúdos.

Em particular, os alunos que realizaram as atividades de Modelagem aqui relatadas, estavam matriculados em Matemática e em até outras três disciplinas (não necessariamente as mesmas). Cada disciplina atendia os alunos em grupos de até cinco pessoas por um período de 3,5 horas (4 aulas por período). Em Matemática os alunos tinham dois encontros por semana; cada encontro com 4 aulas seguidas (3,5 horas) com um intervalo de 15 minutos.

As atividades de Modelagem aqui relatadas foram desenvolvidas com duas turmas de alunos do Ensino Fundamental. Cada uma dessas duas turmas contava com cinco alunos. Ao longo do desenvolvimento das atividades, três alunos foram desinternados e outros três foram matriculados em Matemática, de modo que mantiveram sempre dez alunos em cada turma.

Eram turmas multisseriadas, ou seja, cada aluno encontra-se matriculado na disciplina de Matemática, em módulos diferentes que correspondem a diferentes séries no ensino regular. No desenvolvimento das atividades de Modelagem, porém, os alunos realizaram atividades comuns por se tratar de conteúdos de Geometria presentes em todos os módulos.

As atividades de Modelagem foram desenvolvidas levando em conta que os alunos deveriam ser gradativamente familiarizados com essa proposta de ensino. Desse modo, boa parte das atividades situam-se nos Momentos 1 e 2, definidos em (ALMEIDA, 2012). A elaboração do projeto e da maquete da Praça

Rocha Pombo foram atividades que poderíamos situar no Momento 3, na qual os alunos são mais independentes em relação as ações de Modelagem.

Assim, ao longo desse período, organizamos as atividades para serem realizadas em cada encontro. Devido às questões de segurança e também ao cuidado com a aprendizagem dos alunos, procuramos planejar todas as ações de cada encontro e encaminhá-las com o máximo cuidado para melhor aproveitamento do tempo e qualidade no trabalho final a ser apresentado pelos alunos.

Essas atividades foram realizadas em oito encontros. Cada encontro corresponde a 4 aulas ou um período de 3,5 horas, ou seja, um encontro acontece no período todo da manhã ou da tarde. Como o trabalho foi desenvolvido com duas turmas, então são dois encontros com cada uma dessas turmas, totalizando quatro encontros por semana. As atividades desenvolvidas com essas duas turmas foram as mesmas, por isso, no relato dos encontros não diferenciamos uma turma da outra.

Como esses encontros aconteciam duas vezes por semana, as atividades de Modelagem foram desenvolvidas em quatro semanas, final de novembro e começo de dezembro de 2012. No dia 18 de dezembro, os alunos das duas turmas apresentaram o trabalho de Modelagem para toda a comunidade. O quadro a seguir apresenta as atividades realizadas em cada encontro, assim como os respectivos objetivos.

Tabela 1 Atividades e seus objetivos em cada encontro

	ATIVIDADES	OBJETIVOS
1º	Praças no Google Earth	Reconhecer formas geométricas em praças; Utilizar a legenda de escala das imagens dos Google Earth para resolver problemas; Formular problemas de otimização para estudo futuro.
2º	Caminho mínimo entre dois pontos de uma praça	Realizar medidas de distâncias e ângulos; Construir figuras simétricas utilizando reflexão; Reconhecer ângulos opostos pelo vértice; Resolver e utilizar o Problema de Heron.
3º	Caminho mínimo entre os lados de uma praça triangular	Realizar medidas de distâncias e ângulos; Construir figuras simétricas utilizando reflexão; Reconhecer a propriedade de reflexão do triângulo órtico; Resolver e utilizar o Problema do triângulo de Schwarz.
4º	Caminho mínimo entre os lados de uma praça em quadrilátero.	Realizar medidas de distâncias e ângulos; Construir figuras simétricas utilizando reflexão; Utilizar o método de reflexão; Reconhecer condições para existência de solução para os problemas.
5º	Localização do chafariz numa praça triangular	Realizar medidas de distâncias e ângulos; Utilizar rotações na resolução de problemas; Reconhecer condições do ponto de mínimo; Resolver e aplicar o problema de Fermat-Steiner.
6º	Localização do chafariz numa praça retangular	Realizar medidas de distâncias e ângulos; Obter o ponto de Fermat utilizando simetria; Reconhecer redes de Fermat; Utilizar o problema de Fermat-Steiner para obter experimentalmente pontos de mínimo
7º	Otimização de canteiros	Resolver problemas isoperimétricos simples; Reconhecer condições em que polígonos com perímetro dado tenham área máxima;
8º	Projeto e confecção da maquete da praça	Elaborar um projeto de praça aplicando os conhecimentos adquiridos; Avaliar projetos de praças; Apresentar o trabalho realizado, justificando as escolhas.

Nessa apresentação final do trabalho dos alunos, além de duas maquetes da Praça Rocha Pombo, os alunos também confeccionaram painéis por meio dos quais apresentaram os problemas abordados ao longo das aulas e o entendimento que tiveram das atividades de Modelagem. Por isso, nesse relato, utilizamos fotografias desses painéis para explicar como foram desenvolvidas as atividades.

5.2 PRIMEIRO ENCONTRO: PRAÇAS, ESCALA DE MAPA, PROPORÇÃO E GOOGLE EARTH

No primeiro encontro, o professor apresenta aos alunos cinco imagens aéreas, impressas em folha A4, de praças brasileiras (Figura 4.1). Essas imagens, obtidas no Google Earth, foram levadas impressas, pois não é permitido o acesso à internet aos alunos internados no CENSE.

Figura 4.1 Cinco praças extraídas do Google Earth

Inicialmente o professor solicita aos alunos que identifiquem semelhanças e diferenças visíveis nas praças. O objetivo é levar os alunos a reconhecer formas geométricas e identificar os elementos característicos de uma praça, tais como: canteiros, chafariz, espelhos d´água, organização dos caminhos de acesso, mobiliários, etc.

As imagens das praças, mostradas na figura 4.1, são, em sentido anti-horário, começando do canto superior à esquerda: Praça Raul Soares de Belo Horizonte, Praça do Jardim Botânico em Curitiba, Praça do Triângulo em Goiânia, Praça Rocha Pombo em Londrina e Praça da República em São Paulo.

Após reconhecerem e identificar formas geométricas e elementos comuns das praças, o professor chama a atenção dos alunos para observar a barra de escala presente nas imagens das praças.

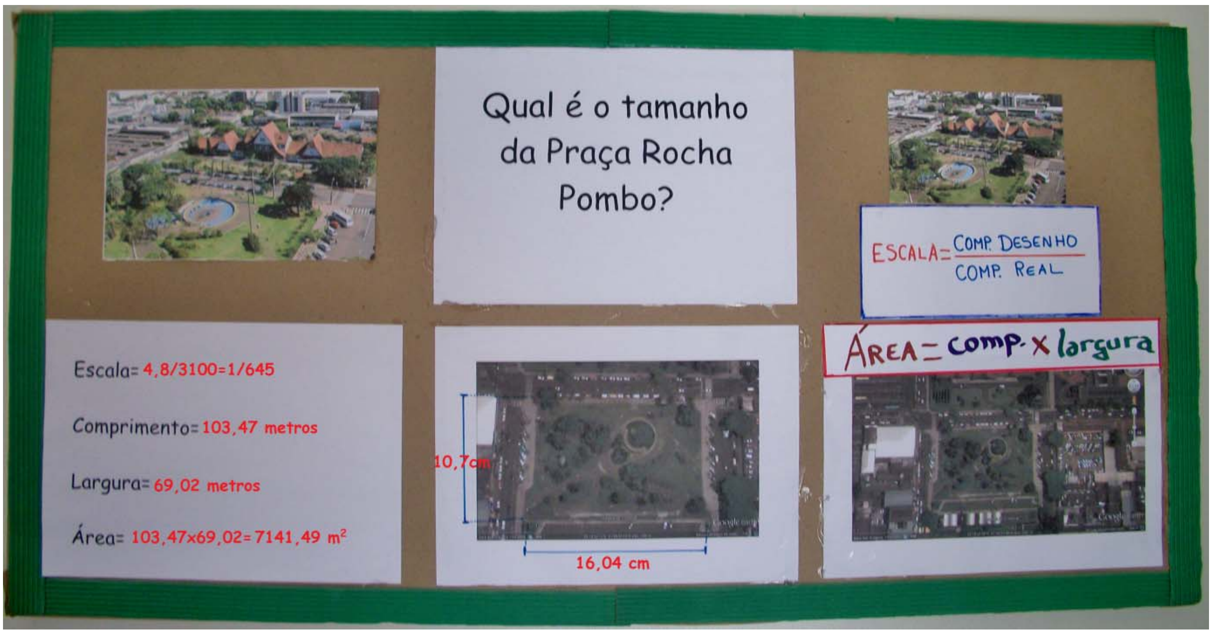
Barra de escala (ou legenda de escala) é um segmento de reta que aparece nas imagens aéreas do Google Earth, indicando a relação entre o tamanho da imagem e o tamanho do objeto real, ou seja, a barra indica a escala com a qual os objetos aparecem representados na imagem.

Figura 4.2 Barra de escala ou legenda de escala da Praça Rocha Pombo

Escala, por sua vez, é uma razão entre duas grandezas expressas na mesma unidade de medida. A escala da imagem da praça pode ser expressa verbalmente (cada 1 cm de comprimento na imagem vale 645 cm de comprimento praça real), ou na forma de fração, $\frac{1}{645}$, ou na forma decimal.

Com essa explicação os alunos são convidados a obter a escala das imagens das cinco praças. Medindo com régua o comprimento da legenda da escala e anotando o valor real correspondente, os alunos obtiveram, por exemplo, a escala para a imagem da Praça Rocha Pombo: $\frac{4,8}{3100}$, ou seja, como o comprimento da barra é 4,8 cm e o valor real correspondente é 31 metros, então cada 4,8 cm na imagem correspondem a 3100 cm na praça.

Figura 4.3 Várias medidas obtidas da Praça Rocha Pombo



O professor solicita então que os alunos convertam as escalas obtidas das praças em frações da unidade, ou seja, em que o numerador é 1. A escala da Praça Rocha Pombo, por exemplo, representada por $\frac{4,8}{3100}$. Frações da unidade são melhores representações para escala, pois para saber o comprimento real da largura da Praça Rocha Pombo, por exemplo, basta multiplicar seu comprimento na imagem por 645.

Com as escalas convertidas em frações da unidade, os alunos obtiveram as medidas reais das praças. As medidas obtidas foram: comprimento dos caminhos internos, comprimento do caminho perimetral, área e perímetro dos canteiros e área e perímetro total das praças.

Após concluir a inteiração com o tema da Modelagem, o professor propõe aos alunos a discussão acerca de algumas questões elaboradas previamente, com o objetivo de levantar problemas a serem abordados nas próximas aulas. As questões foram as seguintes:

Que fatores influenciam no uso e manutenção de uma praça pública?

Como a forma geométrica dos elementos de uma praça e sua distribuição espacial afetam seu uso e conservação?

Como a forma e o comprimento total da rede de caminhos que interligam os diversos pontos de uma praça influenciam no seu uso e conservação?

Como a relação entre as áreas verdes, jardins e gramas, e as áreas de circulação de pessoas pode influenciar no uso e conservação de uma praça pública?

Da discussão em torno dessas questões, o professor obtém dos alunos algumas sugestões de problemas a serem estudados. Os alunos concluíram que o uso e a manutenção de uma praça pública dependem do que a praça oferece de interessante. Vegetação, canteiros de flores, iluminação, espaço para lazer, elementos decorativos são coisas que podem ajudar na conservação das praças.

A forma geométrica dos canteiros e caminhos de circulação também pode ajudar ou atrapalhar na conservação de praças. Praças muito assimétricas, com elementos mal distribuídos espacialmente, podem favorecer a concentração de pessoas em apenas alguns pontos da praça e provocar o mau aproveitamento de outros pontos.

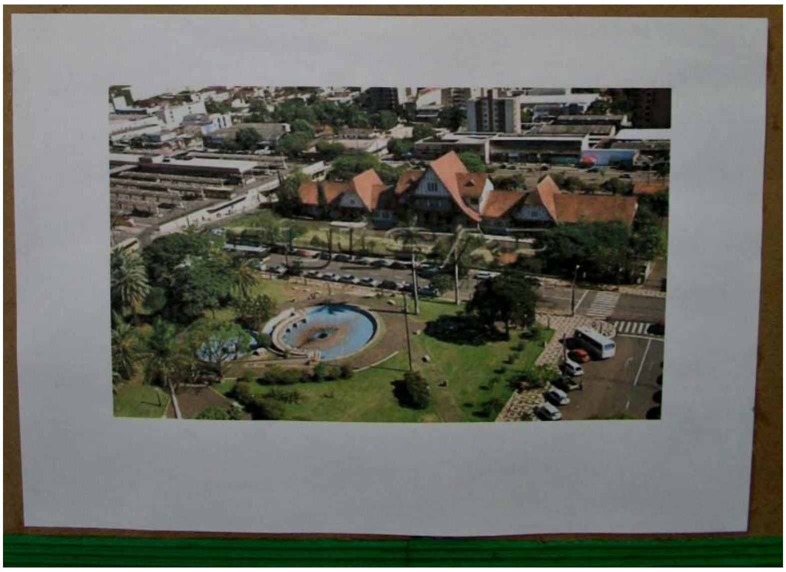
Além disso, caminhos muito longos de um ponto a outro da praça podem estimular os visitantes a andar sobre os canteiros, desrespeitando as famosas plaquinhas de “*Não pise na grama!*”.

Finalmente, muito espaço para circulação de pessoas e pouco para vegetação pode acarretar desconforto térmico e cria excesso de áreas impermeáveis dificultando o escoamento das águas de chuva.

Essas observações, feitas pelos alunos, junto com informações apresentadas pelo professor ao longo da conversa, permitiram elencar os seguintes problemas: Como obter caminhos mais curtos interligando os diversos pontos de acesso numa praça? Onde construir o elemento central da praça (chafariz, espelho d água, etc.) para que o comprimento total desse elemento aos acessos da praça seja o menor possível? Qual forma deve ter os canteiros para maximizar a área com vegetação e minimizar o comprimento do seu passeio perimetral?

Para encaminhar o estudo desses problemas o professor propõe a elaboração de um projeto de revitalização e reforma da Praça Rocha Pombo. Essa praça, inaugurada na década de 50, foi construída no centro de Londrina, entre a estação rodoviária (hoje Museu de Arte de Londrina) e a estação ferroviária (hoje Museu Histórico de Londrina).

Figura 4.4 Praça Rocha Pombo



Seu traçado harmonioso combina áreas gramadas, árvores, palmeiras, pinheiros, e dois espelhos d’água circular, integrou de maneira expressiva às edificações, ambientando-as. Trata-se de um verdadeiro cartão postal da cidade.

Mas, nos últimos anos essa praça vem passando por diversos problemas. Falta de conservação e planejamento; abrigo dos esquecidos; depósito de lixo e entulho; vandalismo, etc. transformaram a praça em ruínas.

O professor propõe aos alunos descobrir formas de melhorar a Praça Rocha Pombo. Quais problemas dessa praça poderiam abordar e resolver nas aulas de matemática? Da discussão em torno dessa questão, surge a possibilidade de se elaborar um projeto para reforma e revitalização dessa praça e, com isso, fazer uma maquete para apresentar ao final do projeto.

Neste projeto, os alunos deveriam apresentar uma rede de caminhos do passeio público dessa praça com comprimento mínimo, e exibir formas para os canteiros e áreas verdes com a maior área possível e perímetro mínimo.com isso, professor e alunos decidiram definir como objetivos do projeto de Modelagem: (1) *encontrar soluções para minimizar a rede de caminhos que interligam os diversos pontos da Praça Rocha Pombo e (2) melhorar a relação entre áreas verdes e áreas de circulação de pessoas*.

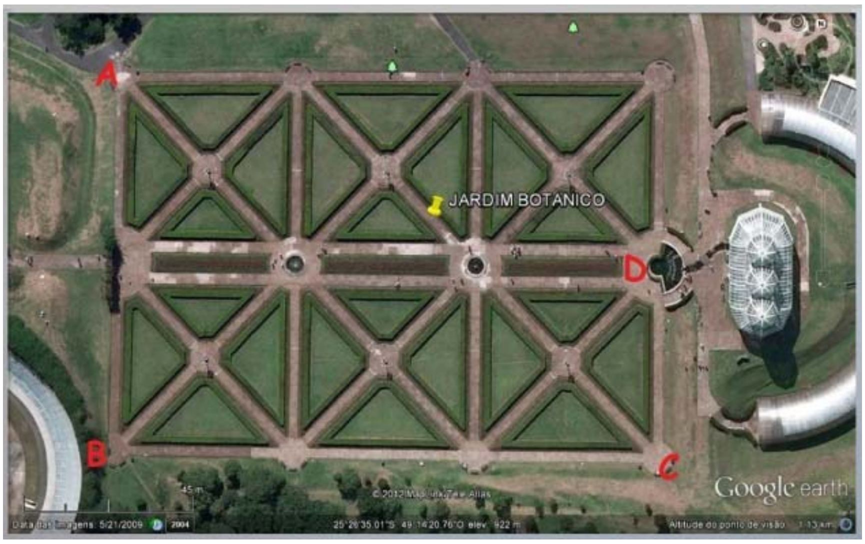
Nesse primeiro encontro os alunos aprenderam os seguintes conceitos matemáticos: Área de regiões planas; Comprimento e distância; Simetria. Além de lidar com ideias ligadas a outras disciplinas, tais como: Sustentabilidade; Acessibilidade; Estética. Urbanismo e paisagismo; Ecologia.

5.3 SEGUNDO ENCONTRO: CAMINHO MÍNIMO NUMA PRAÇA E O PROBLEMA DE HERON.

No segundo encontro, iniciamos a aula retomando com os alunos alguns objetivos do projeto de Modelagem e, em seguida, propomos o problema de encontrar caminhos mais curtos numa praça, em particular, encontrar um caminho mínimo ligando dois pontos da Praça do Jardim Botânico de Curitiba. O problema apresentado aos alunos é o seguinte:

Figura 4.5 Problema de Heron na Praça do Jardim Botânico de Curitiba

Problema 1: *Qual é o caminho mais curto para, num passeio, uma pessoa que sai do ponto A chegar ao ponto D, passando antes por um ponto qualquer no lado BC da praça?*

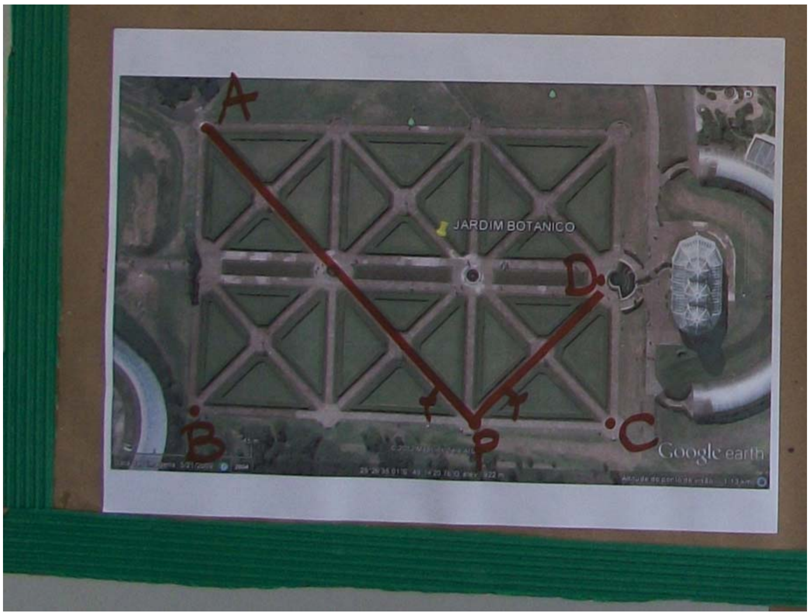


O objetivo desse problema é familiarizar os alunos com a ideia de percurso de comprimento mínimo. O professor exemplifica para os alunos que entre dois pontos de um plano, por exemplo, um percurso mínimo é dado por um segmento de reta. Mas, se esse percurso deve incluir algum outro ponto que desliza sobre uma reta, então o problema de encontrar o percurso de comprimento mínimo tem certas condições. Descobrir essas condições é o primeiro passo para entender o Problema de Heron.

Assim, o professor orienta os alunos para que obtenham com uma régua os comprimentos dos caminhos possíveis e, que tentem encontrar, experimentalmente o caminho mais curto. Comparando as medidas obtidas, os alunos perceberam que o caminho mais é o que forma ângulos iguais com o lado oposto. Nas palavras dos alunos é onde o "ângulo da ida e o ângulo da volta" são iguais.

A figura a seguir mostra um exemplo de solução apresentada. Nesse caso, o aluno mostra que o ponto P determina o caminho mais curto para ir dos pontos que chamou de A e B da praça. Esse ponto P é tal que os ângulos formados pelos lados do percurso com o lado oposto da praça medem 45º cada um.

Figura 4.6 Solução apresentada por um aluno que mostra o caminho formando ângulos iguais.



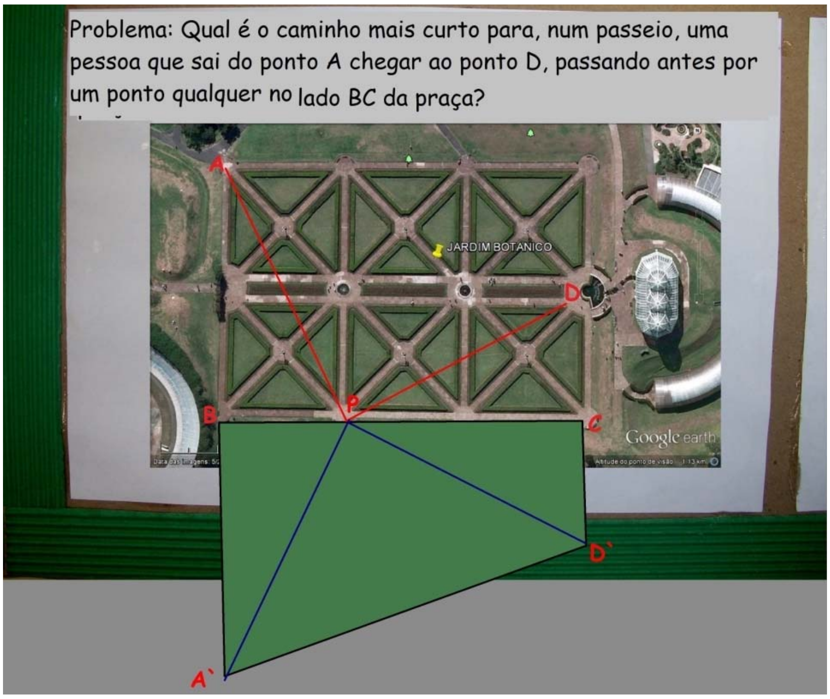
Encontrar e exibir uma solução para o problema não foi difícil para os alunos. Nem mesmo foi difícil perceber que, no caminho mais curto "o ângulo de ida deve ser igual ao ângulo da volta". A dificuldade dos alunos, em geral, foi justificar porque o caminho mais tem curto tem essa propriedade. O professor então propõe aos alunos a realização de uma atividade para ajudá-los a entender e explicar essa propriedade do caminho mínimo.

Em seguida, o professor pede que cada aluno, recorte de uma folha de cartolina, uma figura igual ao trapézio ABCD, da imagem anterior, explicando a eles que o problema a ser investigado é equivalente ao da Praça do Jardim Botânico de Curitiba.

O professor pede aos alunos que escolham um ponto P qualquer sobre o lado BC, marcando com caneta esse ponto e desenhando o caminho AP e PD. Em seguida, os alunos mediram o comprimento total desse caminho. Em seguida, solicitamos que fizessem a reflexão desse caminho no trapézio de cartolina, do caminho feito na imagem da praça.

Desse modo, os alunos obtiveram assim os pontos A`e D` como ilustrado na figura a seguir.

Figura 4.7 Reflexão do caminho na praça em recorte de cartolina

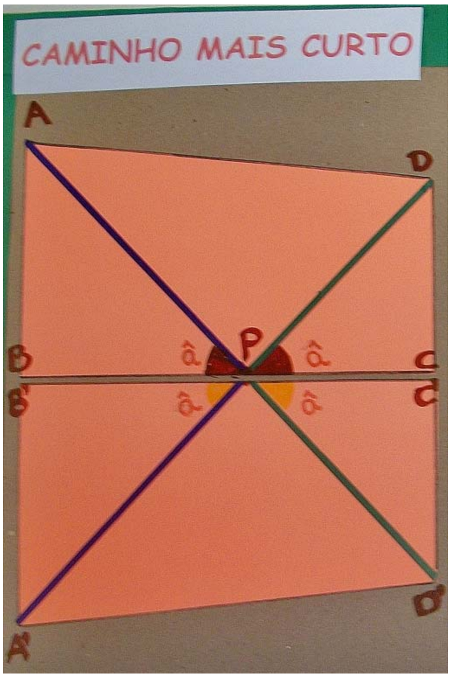


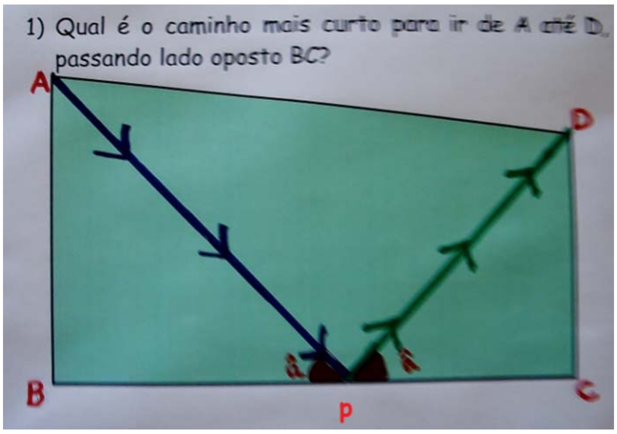
Com essa construção, os alunos foram convidados a pensar na relação entre o caminho AP + PD, seu simétrico A`P + PD` e os ângulos que formavam com o lado BC. Como P foi escolhido arbitrariamente pelos alunos, em todas as construções exibidas pelos alunos, P não determinava o caminho mais curto, mas por quê?

Pensar por que esse caminho não é o mais curto levou os alunos a perceberem o seguinte fato: para que o caminho AP + PD fosse o mais curto possível, os segmentos AP e PD´ deveriam estar ambos contidos numa mesma reta, pois como PD = PD`, então AP + PD = AP + PD`. Mas AP + PD`têm comprimento mínimo somente quando AP e PD`estão ambos contidos numa mesma reta.

Essa conclusão obtida com os alunos permitiu que entendessem o “método” para encontrar o ponto P que determina o caminho mínimo. Basta refletir o quadrilátero ABCD em relação ao lado BC, obtendo os pontos simétricos A`e D`. Nessa construção, traçando a reta entre A e D`, obtemos o ponto P, intersecção da reta AD`e o lado BC como mostra a figura a seguir.

Figura 4.8 Solução do problema de Heron





Portanto, o caminho mínimo AP + PD é obtido encontrando o ponto P na intersecção de AD\`com BC. Mas, como isso determina ângulos iguais? Para compreender esse fato, o professor retomou a definição e propriedade dos ângulos opostos pelo vértice. Dois ângulos opostos pelo vértice são ângulos não adjacentes formados entre duas retas. Assim, os alunos puderam verificar que ângulos opostos pelo vértice possuem medidas iguais.

A partir dessa constatação, os alunos concluíram que, como AD\` e A\`D na construção do caminho mínimo, determinam os ângulos APA\`e DPD\`, opostos pelo vértice P, então, observaram nessa construção que os ângulos APB e CPD devem também possuir medidas iguais.

Para sistematizar os conhecimentos elaborados na realização das atividades desse segundo encontro, o professor retoma com os alunos o enunciado formal do Problema de Heron e, interagindo com os eles, discute as definições e as propriedades utilizadas em cada passo da demonstração desse problema, conforme se encontra no capítulo 2 deste trabalho. O professor apresenta também uma aplicação do problema de Heron no estudo da trajetória da luz sobre um espelho plano. Nesse caso, o professor explica que os “ângulos da ida e o da volta” se chamam ângulos de incidência e de reflexão, respectivamente.

Com essa sistematização, os alunos tiveram a oportunidade de aprofundar no estudo das definições do conceito de ângulo, de ângulos opostos pelo vértice, simetria, reflexão no plano e eixo de simetria.

5.4 TERCEIRO ENCONTRO: CAMINHO MÍNIMO NUMA PRAÇA TRIANGULAR E O PROBLEMA DE SCHWARZ.

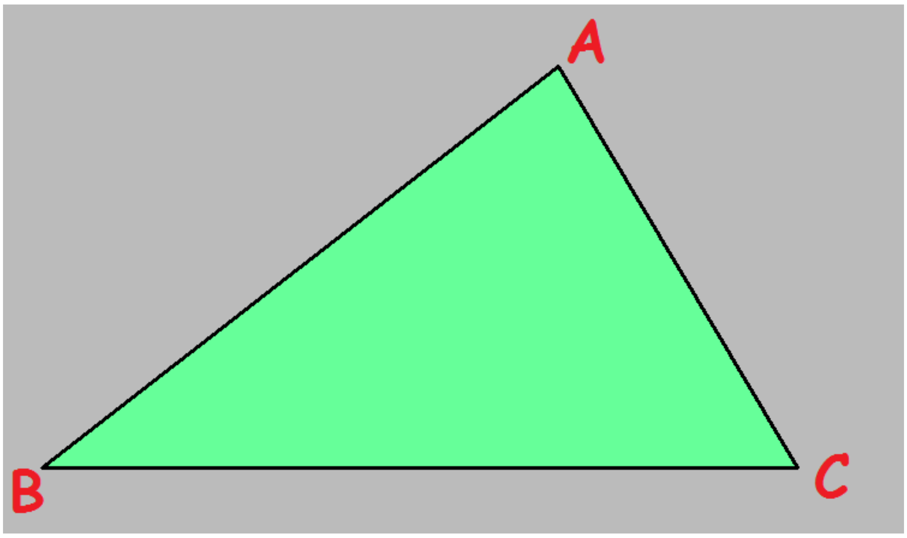
No terceiro encontro, novamente o professor retoma os objetivos do projeto e a discussão sobre o problema de Heron realizada no encontro anterior. A ideia que se procurou passar aos alunos é que o estudo para encontrar caminhos mínimos numa praça deveria acrescentar mais condições do que aquelas apresentadas para a Praça do Jardim Botânico. Uma condição que poderia ser acrescentada para melhorar nosso modelo matemático é pensar num caminho fechando um circuito com os pontos da praça.

Mais especificamente, se para ir de um ponto a outro do mesmo lado de uma reta, passando por ela, o ponto da reta que minimiza a distancia é aquele em que os ângulos são iguais, quais pontos deveríamos encontrar sobre os lados da praça para fechar um caminho em circuito de comprimento mínimo?

Para familiarizar melhor os alunos com essa questão, o professor propõe começar com o estudo de uma praça triangular em que todos os ângulos são agudos. O problema proposto é o seguinte:

Figura 4.9 Problema de Schwarz

Problema 2: *Numa praça com formato triângulo ABC e ângulos internos agudos, encontre o caminho mais curto possível para ir de um ponto P no lado AB a um ponto Q no lado AC, seguindo para um ponto R no lado BC, e voltando ao ponto de saída P no lado AB.*

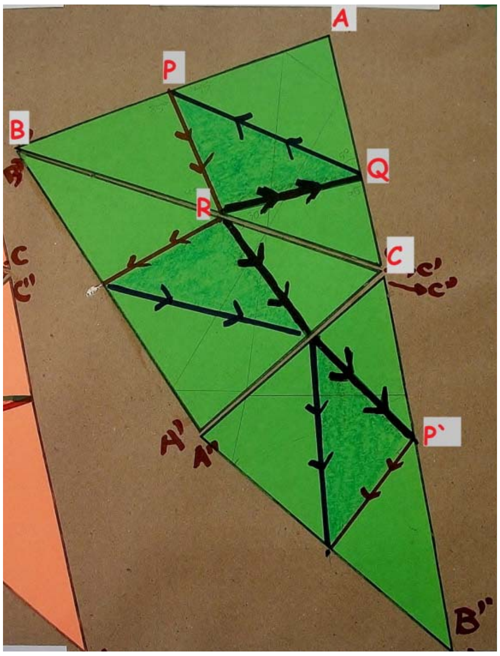


Recortando em papel cartolina, triângulos com ângulos agudos, os alunos iniciaram o estudo desse problema testando, experimentalmente, a seguinte hipótese: se o trecho do caminho PQ + QR têm comprimento mínimo, então, pelo problema de Heron, os ângulos AQP e CQR devem possuir medidas iguais. Pelo mesmo motivo, devemos concluir que $B\hat{R}P = C\hat{R}Q$ e $B\hat{P}R = A\hat{P}Q$.

Encontrar, experimentalmente, os pontos P, Q e R para testar essa hipótese se mostrou bastante infrutífero. Como os alunos logo perceberam, ao determinar a localização de um ponto do caminho, o ponto P, por exemplo, e fixar ângulos iguais nesse ponto, inviabiliza a obtenção de ângulos iguais em Q e R. Desse modo, o professor sugere aos alunos que utilizassem o “método de reflexão” utilizado para obter o ponto de mínimo no Problema de Heron.

Assim, com a orientação do professor os alunos reproduziram em cartolina mais duas réplicas do triângulo ABC a fim de utilizar o “método da reflexão”. Feitas estas réplicas, os alunos escolheram arbitrariamente pontos P, Q e R sobre os lados AB, AC e BC, respectivamente. Assim, o caminho PQR desenhado no triângulo ABC foi também reproduzido nos outros dois triângulos.

Figura 4.10 Reflexão do triângulo ABC com o triângulo PQR



Em seguida, para analisar a reflexão do caminho PQ + QR + RP do triângulo original, os alunos agruparam os três triângulos de modo a refletir sucessivamente o triângulo ABC no lado BC e, em seguida, no lado AC, obtendo uma poligonal PP`com mesmo comprimento do caminho PQ + QR + RP, como pode ser observada nas figuras 4.10.

Interagindo com os alunos, o professor chama sua atenção para observar que na construção realizada a soma dos trechos PQ, QR e RP é igual ao comprimento da poligonal PP`. O fato dessa poligonal não estar contida numa única reta, implica em que os pares de ângulos formados em P, Q e tenham medidas diferentes. Além disso, PP`não ser retilínea significa que não é o caminho mais curto possível.

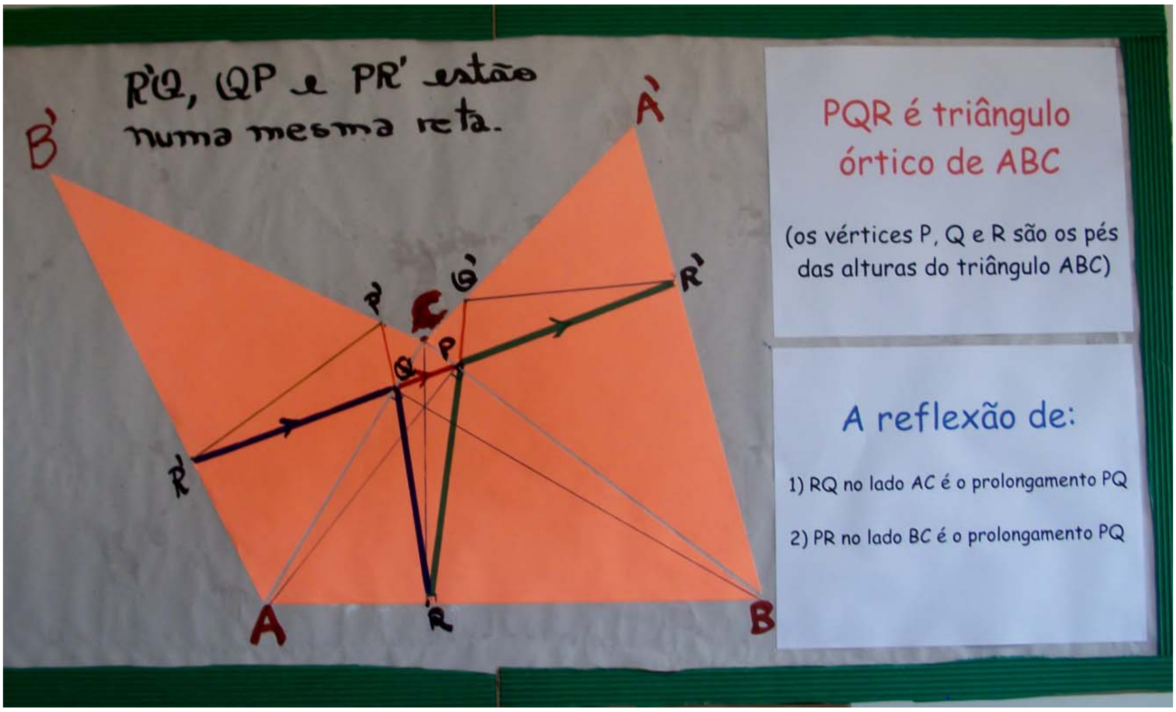
Assim, tornou-se óbvio para os alunos que, de fato, os ângulos, formados entre os lados do triângulo ABC e o caminho a ele interno deveriam ser, em cada lado, iguais, confirmando a hipótese levantada inicialmente. Os ângulos AQP = CQR, BRP = CRQ e BPR = APQ significa que o poligonal PP`é retilínea e com isso o caminho a soma dos PQ + QR + RP é o caminho mínimo procurado.

Portanto, o “método de reflexão” não apenas confirmou a hipótese dos ângulos iguais, mas também indicou um modo de obter os pontos P, Q e R, do caminho mínimo. De fato, o professor retoma com toda a turma esse tópico, explicando a eles essa propriedade de reflexão dos lados do caminho mínimo é equivalente à propriedade de reflexão dos lados do chamado triângulo órtico.

Triângulo órtico é o triângulo PQR, obtido unindo-se os pés P, Q e R das alturas do triângulo ABC. Com essa explicação, os alunos puderam perceber a restrição no estudo de triângulos acutângulo. Nos triângulos obtusos o pé da altura estaria fora do triângulo ABC.

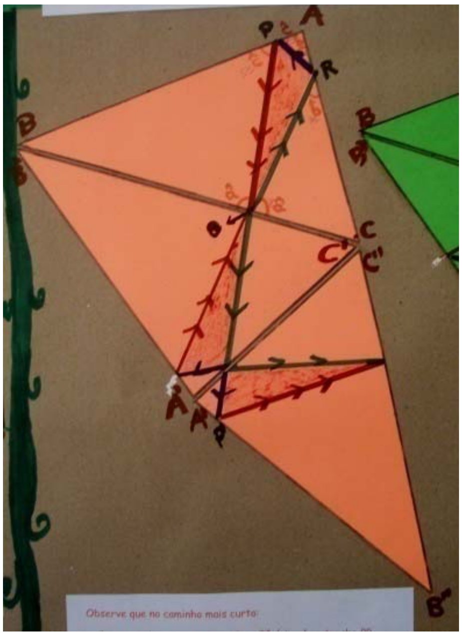
Construindo na lousa o triângulo órtico PQR de um triângulo ABC, o professor ilustra para os alunos que AQR = CQP e que a reflexão de RQ no lado AC é o prolongamento de PQ, e vice-versa, como mostra a figura 4.11. Em seguida, o professor acrescenta que essa propriedade também é válida para os outros lados.

Figura 4.11 Propriedade de reflexão do triângulo órtico



Após a fala do professor, os alunos construíram o triângulo órtico do triângulo ABC original e, em seguida, reproduziram o caminho PQR nos demais triângulos. Refletindo o triângulo ABC no lado BC e, em seguida, no lado AC, como mostra a figura a seguir à esquerda puderam verificar que o caminho mínimo PQ + QR + RP é igual ao segmento PP` que, nessa construção está contida numa única reta. Além disso, verificaram que os ângulos “de ida e volta” são iguais em P, Q e R, como a figura abaixo à direita.

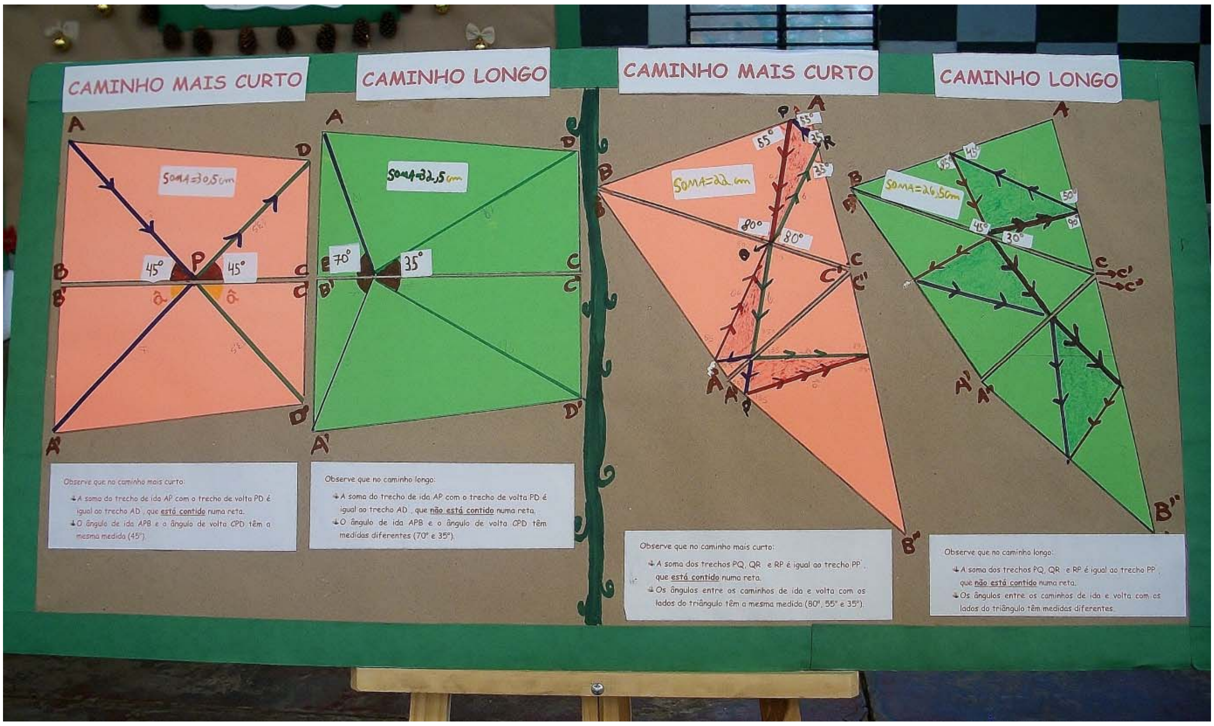
Figura 4.12 Solução do problema de Schwarz



A sistematização dos conteúdos trabalhos nesse encontro ocorreu quando o professor retomou alguns aspectos importantes da demonstração da propriedade de reflexão do triângulo órtico. Nesse momento, o professor discutiu os conceitos e afirmações que são utilizadas em cada passo da demonstração das propriedades do triângulo órtico, tais como, igualdade nos pares de ângulos em cada lado do triângulo ABC, igualdade desses pares de ângulos com o ângulo do vértice oposto do triângulo ABC, propriedade de reflexão dos lados do triângulo órtico e propriedade de perímetro mínimo do triângulo órtico.

Nessa sistematização, foram retomadas definições normalmente ignoradas pelos alunos, tais como: altura relativa a uma base, perímetro de triângulo, ângulos internos, perpendicularidade, ângulo reto, reflexão e simetria. Além disso, foram sistematizados e/ou retomados os seguintes conteúdos: reflexão, ângulo, ângulos opostos pelo vértice, triângulos congruentes.

Figura 4.13 Painel comparativo da solução dos problemas de Heron e Schwarz



Além disso, o professor retomou com os alunos o Problema de Heron. Levar os alunos a perceber aspectos comuns entre o Problema de Heron e o Problema do triângulo de Schwarz tais como, igualdade de ângulos, possibilidade de resolver os dois problemas pelo “método de reflexão” e propriedade do caminho mais curto possuir sua poligonal refletida numa reta (ver figura 4.13**),** são maneiras de organizar a aprendizagem dos alunos para que adquiram ferramentas preciosas para enfrentar outros problemas.

5.5 QUARTO ENCONTRO: CAMINHO MÍNIMO NUMA PRAÇA QUADRANGULAR.

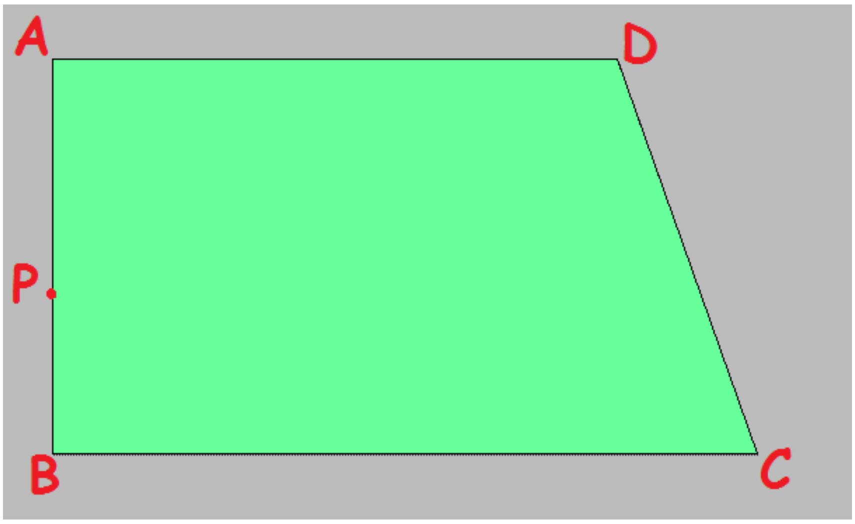
Assim como aconteceu nos encontros anteriores, o professor inicia a aula retomando alguns objetivos do projeto e das atividades de Modelagem. Nessa aula, o professor retomou também alguns conceitos e resultados aprendidos nos encontros anteriores.

Além disso, procurou-se situar os alunos em relação ao que ainda se almejava atingir, ou seja, elaborar um projeto de reforma da Praça Rocha Pombo. O professor argumentou com os alunos, então, que, no encontro anterior, o problema era encontrar um caminho em circuito ligando os três lados de uma praça triangular. Mas, a Praça Rocha Pombo possui a forma de um quadrilátero, bastante aproximada de um retângulo. Nesse caso, portanto, era necessário ampliar o problema do encontro anterior.

Por isso, foi apresentado aos alunos o seguinte problema:

Figura 4.14 Problema de Schwarz para quadriláteros

Problema 3: *Qual é o caminho mais curto para ir de um ponto P fixado no lado AB até um ponto Q no lado BC, seguindo para um ponto R em CD, depois para um ponto S em AD e retornando ao ponto inicial em AB?*

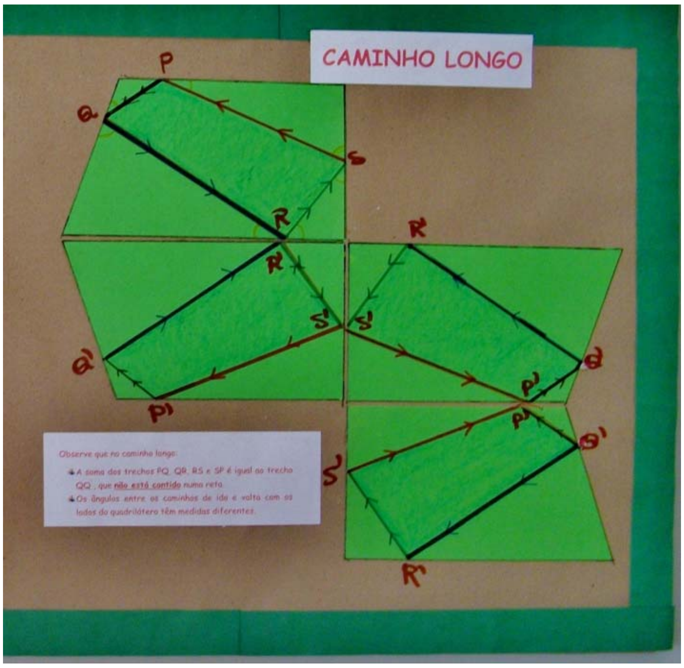


Para realizar essa atividade, o professor sugere inicialmente que cada aluno recorte em papel cartolina um trapézio como o mostrado na figura anterior, marcando sobre o lado AB um ponto P qualquer e que tentassem descobrir a localização dos outros três pontos Q, R e S.

Primeiro, os alunos são orientados para que desenhassem a partir de P um caminho qualquer sobre o quadrilátero, de modo que os pontos Q, R e S fossem arbitrários. Em seguida, retomando algumas ações da atividade anterior, os alunos deveriam refletir o quadrilátero ABCD, sucessivamente no lado BC, em seguida, em CD e, por último, a reflexão em AD.

Os alunos, ao reproduzir o caminho PQRS nas reflexões de ABCD, perceberam que, nessa construção a soma dos trechos PQ, QR, RS e SP é igual ao trecho QQ`. Mas, observaram que este segmento QQ`não está contido numa única reta. Além disso, verificaram que os pares de ângulos “de ida e volta” entre lados do caminho e os lados do quadrilátero têm medidas diferentes. A figura a seguir ilustra essa construção feita pelos alunos.

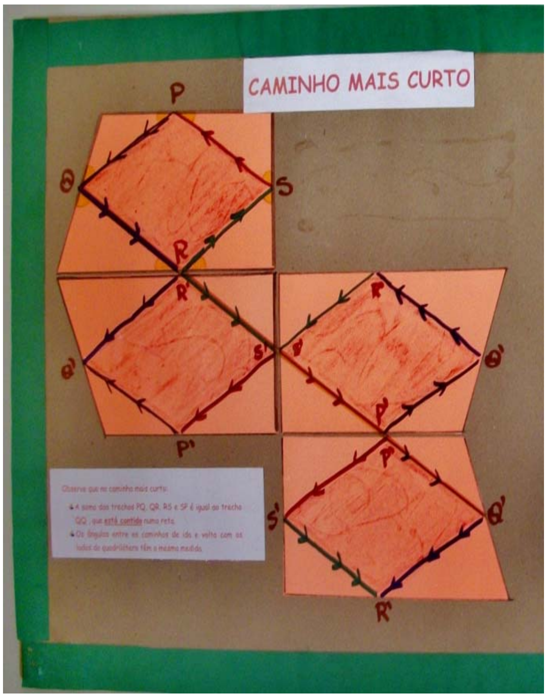
Figura 4.15 Reflexão do quadrilátero ABCD e do caminho PQRS



Em seguida, o professor questiona os alunos como deveria ser então o caminho de comprimento mínimo. Os alunos, utilizando os conhecimentos anteriores, sugeriram que os ângulos de “ida e volta” para cada lado deveria ser iguais. Nesse caso, é sugerido que utilizassem o método de reflexão para obter os pontos Q, R e S.

Assim, para efetuar a construção do caminho mais curto, os alunos refletiram sucessivamente o quadrilátero ABCD sobre uma de cartolina, contornando com lápis os quadriláteros obtidos. Refletiram sucessivamente em relação ao lado AB, BC e CD. Em seguida, trançando uma reta sobre os quatro quadriláteros e determinando os pontos P, Q, R e S. A construção que os alunos fizeram encontra sugerida na figura 4.16.

Figura 4.16 Solução do problema de Schwarz para quadriláteros



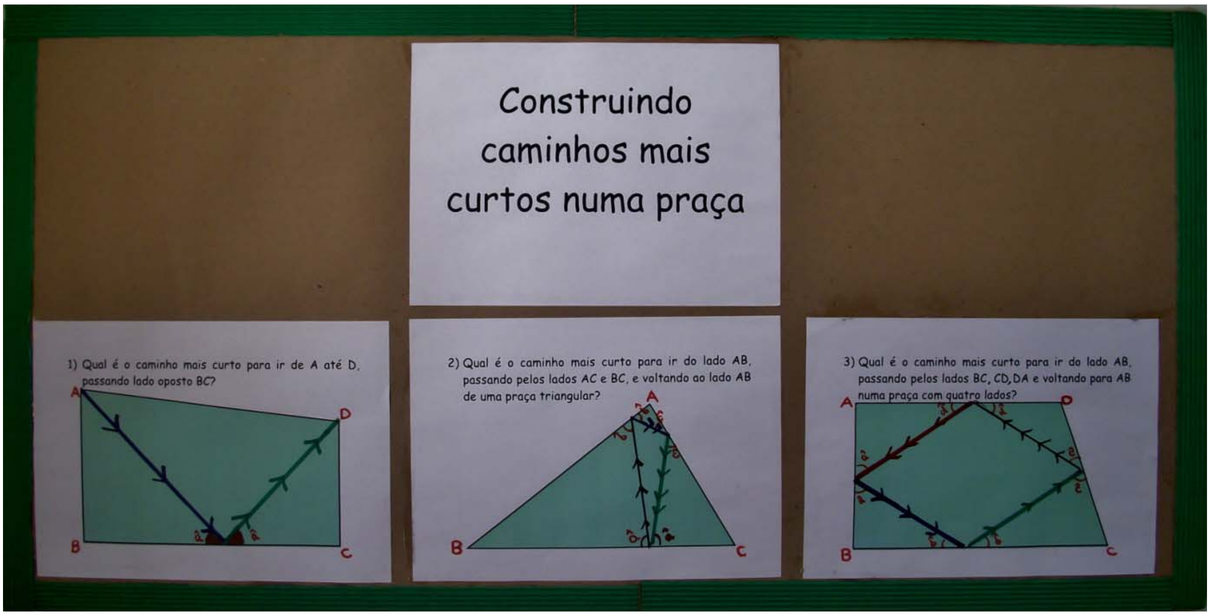
Nessa construção, os alunos puderam perceber que no caminho de comprimento mínimo, a soma PQ + QR + RS + SP = QQ\`. Este segmento QQ\`, por sua vez, está inteiramente contido numa única reta. Verificaram também que os ângulos “de ida e de volta” formados entre os lados do percurso mínimo e os lados do quadrilátero têm a mesma medida.

Com isso, o professor apresenta a seguinte questão: o método de reflexão sempre vai fornecer um caminho mínimo, independente da forma do quadrilátero? Desse questionamento, o professor encaminha a discussão para que os alunos percebessem que o método de reflexão para obter o caminho mínimo depende da forma do quadrilátero. Também depende do ponto P dado. Os alunos concluíram então que a resolução, utilizando o método de reflexão, do problema de construir caminhos curtos dentro de uma praça, ligando os diferentes lados da mesma, depende da forma específica da praça e do ponto de onde começa o percurso.

Ao final, o professor retoma com os alunos uma discussão para analisar as diferenças e semelhanças na resolução dos problemas já formulados. No primeiro caso, o problema de Heron, temos uma solução única e, além disso, intuitivamente é possível perceber que sempre existirá uma solução para o problema. No problema do triângulo de Schwarz, temos restrições, pois o triângulo deve ser acutângulo. Nesse caso, a unicidade e existência de solução para o problema já não são intuitivas; é preciso considerar várias informações para se convencer delas.

Além disso, se no triângulo acrescentássemos que o ponto de partida seria um ponto P dado, a unidade e existência já dependeriam de algumas condições. No problema do quadrilátero, se não fosse dado o ponto P de partida do caminho mínimo, seria impossível obter uma solução.

Figura 4.17 Painel comparativo com as soluções dos problemas de Heron e Schwarz



Todas essas reflexões foram feitas interagindo com os alunos para que percebessem que num trabalho de Modelagem cada solução deve ser analisada em relação aos dados e informações coletas. As soluções ou modelos matemáticos são ferramentas úteis para a resolução de diversos problemas, mas possuem restrições como toda forma de conhecimento.

Feitas essas discussões com os alunos, o professor solicita que construam sobre a imagem impressa da Praça Rocha Pombo (imagem extraída do Google Earth e impressa em folha A4) um caminho na forma de circuito ligando seus quatro lados. Mas, nesse caso deveriam escolher o ponto de partida e justificar sua escolha. Adotando um ponto de partida e utilizando o método de reflexão, os alunos construíram várias soluções possíveis. O professor pede então que os alunos avaliem as soluções e escolham uma para utilizar na elaboração do projeto de reforma dessa praça.

Essa atividade foi finalizada com a sistematização e retomada de alguns conteúdos nela utilizados, tais como: reflexão de figuras planas, ângulo, quadriláteros congruentes, ângulos opostos pelo vértice.

5.6 Quinto Encontro: A Construção do Chafariz e o Problema de Fermat-Steiner.

Como de costume, o professor neste quinto encontro iniciou retomando alguns resultados já alcançados e incentivando os alunos a se esforçarem para apresentar um trabalho bem feito. Os alunos estavam ansiosos para iniciar a construção da maquete. O professor alerta então os alunos que para iniciar a construção da maquete era necessário elaborar um projeto de reforma da Praça Rocha Pombo. E, para fazer esse projeto, era necessário saber os dois problemas básicos apontados no início dos trabalhos:

- *Encontrar soluções para minimizar a rede de caminhos que interligam os diversos pontos da Praça Rocha Pombo e;*
- *Melhorar a relação entre áreas verdes e áreas de circulação de pessoas*.

Nesse sentido, argumentamos que um dos problemas da Praça Rocha Pombo é a conservação do espelho d´água e do chafariz. No projeto de reforma dessa praça os alunos deveriam apresentar soluções para esse problema. Dessa discussão, obtivemos algumas sugestões dos alunos no sentido de melhorar a localização desses elementos centrais da praça.

De fato, tanto o chafariz quanto o espelho d´água estão localizados de forma assimétrica em relação à área total da praça. Já havíamos debatido com os alunos, que um dos problemas no projeto de uma praça pública é saber onde construir o chafariz, ou espelho d´água ou onde colocar a estátua que é o elemento central de uma praça. Uma nova localização, portanto, deveria levar em conta que as distâncias entre os pontos de acesso da praça até seus elementos centrais deveriam ser melhoradas.

Assim, o problema de estudo, nesse encontro, era determinar no projeto da Praça Rocha Pombo onde construir um chafariz para que para que a soma das distâncias aos acessos da praça seja a menor possível?

Para familiarizar os alunos com esse problema, propomos aos alunos que tentassem encontrar um ponto que minimizasse a soma das distâncias aos vértices na imagem área da Praça do Triângulo, localizada em Goiânia (ver figura 4.18).

Figura 4.18 Problema de Fermat-Steiner

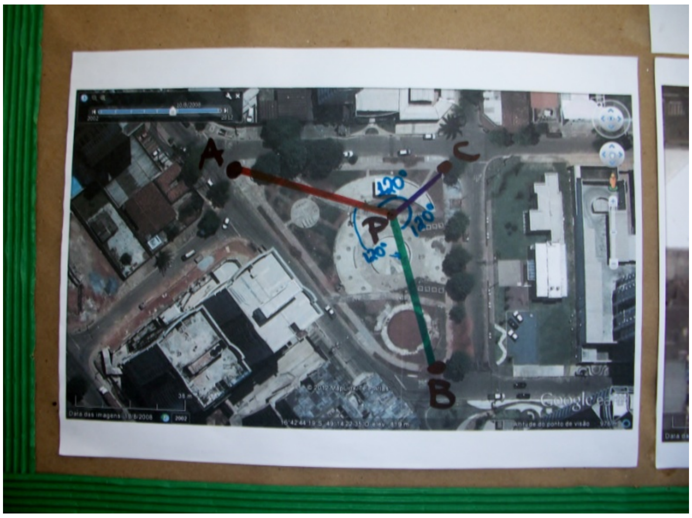
Problema 4: *Encontre um ponto P da Praça do Triângulo de modo que a soma das distâncias desse ponto até os cantos A, B e C da praça seja a menor possível.*

O objetivo desse problema é levar os alunos a perceber que a soma das distâncias aos vértices é minimizada quando cada ângulo formando entre os segmentos que ligam os vértices ao ponto P mede 120º.

A experiência realizada pelos alunos foi a seguinte: marcaram sobre a imagem da praça cinco pontos diferentes. Utilizando régua e transferidor mediram as distâncias desses pontos até os três vértices da praça. Mediram também os ângulos entre os segmentos que unem esses pontos aos vértices e organizaram todos dados numa tabela, a fim de comparar a relação entre os ângulos e soma das medidas dos lados.

Essa experiência e a discussão em torno dos dados da tabela levaram os alunos a apresentar a hipótese de que a soma era sempre menor quanto mais próximo os três ângulos estavam de 120º.

Figura 4.19 Solução do problema de Fermat-Steiner



Estimulamos os alunos a tentarem obter uma explicação para o fato. Para auxiliá-los discutimos com os alunos a seguinte ideia: nos problemas abordados anteriormente, o caminho mínimo era obtido pelo método de reflexão e os trechos do caminho ficavam alinhados numa única reta. Nesse caso, é possível tentar alinhar num reta os três segmentos? Perguntamos a eles.

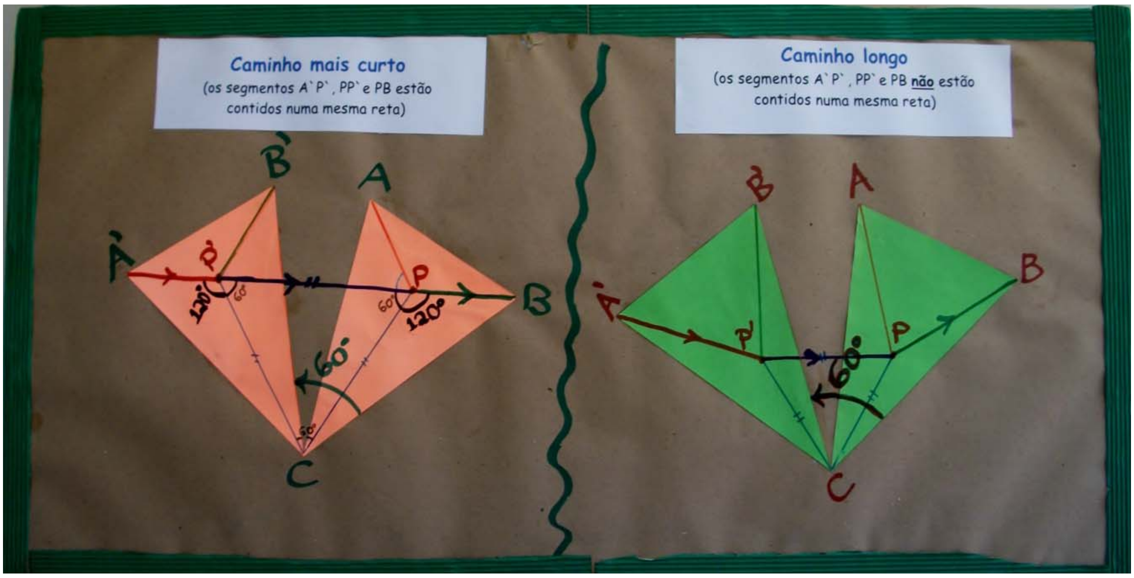
Os alunos, com objetivo de verificar essa questão, recortaram em cartolina três formas triangulares iguais e tentaram fazer reflexões com esses triângulos para observar em qual construção os segmentos ligando os vértices do triângulo ao ponto P marcado em seu interior ficariam realmente alinhados numa reta. Não houve sucesso. Sugerimos outras transformações como girar o triângulo.

Assim, a solução que os alunos obtiveram com o auxílio e orientação do professor foi baseada no "método de rotação". Primeiro, os alunos marcaram num triângulo ABC, recortado em cartolina, um ponto P qualquer. Em seguida, traçaram os segmentos AP, BP e CP e reproduziram essa construção nos dois triângulos.

Ilustraremos as ações dos alunos com a figura a seguir. Ao fazer uma rotação em torno do vértice C com um ângulo 60º em sentido horário, os alunos perceberam que o triângulo CPP\` obtido pela rotação era equilátero. De fato, os alunos notaram que CP = CP´ e que CPP´é isósceles e, como o ângulo PCP´ mede

60º os outros dois ângulos também medem 60º, e, com isso, os alunos justificaram que CPP´ é equilátero, como mostra a figura a seguir.

Figura 4.20 O triângulo ABC é girado em 60º, obtendo-se A`B`C



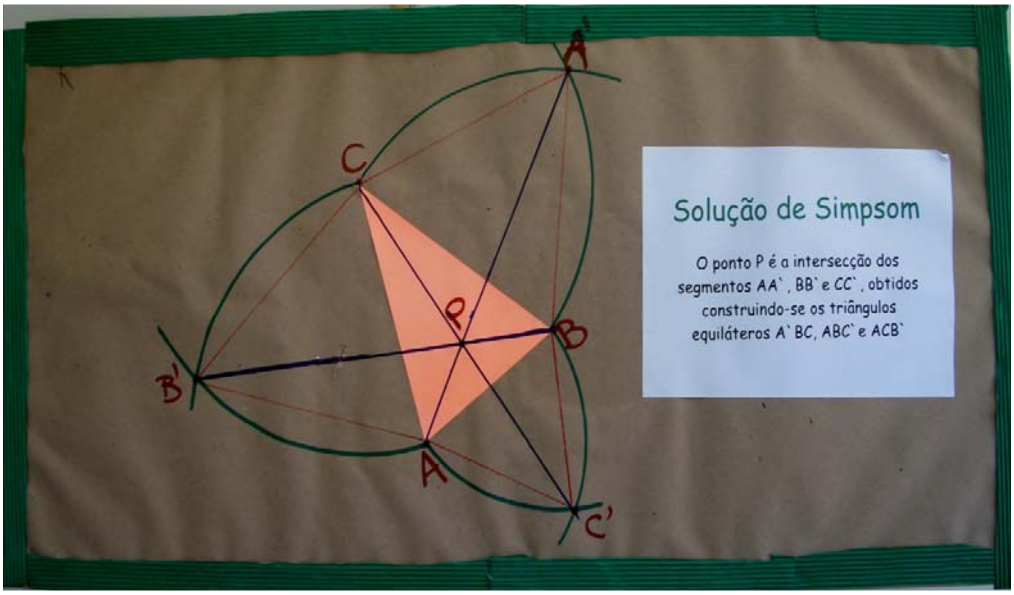
Os alunos concluíram também que a soma AP + CP + BP = A`P` + P`P + PB. Mas essa soma é minimizada quanto os pontos A`, P, P e B estão contidos numa mesma reta. Com essa observação, os alunos chegaram a conclusão de que se A, P` e P estão contidos numa mesma reta e, como o ângulo CP`P mede 60º, então o o ângulo A`P`C deve medir 120º. Do mesmo modo, se os pontos P`, P, B estão contidos numa mesma reta e o ângulo P`PC mede 60º então o ângulo CPB também mede 120º.

Seguindo esse raciocínio, os alunos perceberam que o ponto P que minimiza a soma AP + BP + CP é onde as retas PA, PB, PC formando três ângulos iguais de 120 graus.

Concluímos então com os alunos que, encontrar um ponto P no triângulo ABC de modo que a soma AP+BP+CP seja mínima, equivale a encontrar um ponto de ABC em que os ângulos entre PA, PB e PC tenham a mesma medida.

Para sistematizar esses resultados, explicamos aos alunos um método para encontrar o ponto P para o caso do triângulo em que nenhum ângulo é maior que 120º. A explicação dessa construção baseia-se na solução dada pelo matemático Simpson. Solicitamos que sobre o triângulo ABC, os alunos construíssem triângulos equiláteros, ou seja, nos três lados do triângulo ABC construíssem três triângulos equiláteros do lado de fora de ABC, como mostra a imagem a seguir.

Figura 4.21 Construção de Simpson para obter o ponto P de Fermat



Em seguida, os alunos desenharam os três segmentos de reta que unem cada vértice do triângulo ABC ao vértice oposto do triângulo equilátero construído no lado oposto. Estes segmentos de reta são chamados *segmentos de Simpson*. Os alunos verificaram experimentalmente, ou seja, medindo com transferidor, que os três segmentos de Simpson intersectam-se num ponto que coincide com o ponto em que os ângulos entre PA, PB e PC medem 120º.

Concluímos este encontro, sistematizando alguns conteúdos abordados na resolução do problema. Retomamos algumas propriedades de triângulos isósceles (os dois lados iguais formam ângulos iguais com o lado diferente), o triângulo isósceles, em que os ângulos são todos iguais, é o equilátero. Além disso, procuramos justificar de forma intuitiva e informal por que a construção de Simpson é verdadeira.

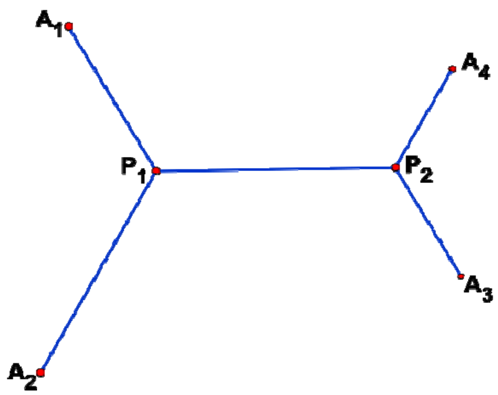
5.7 Sexto Encontro: Onde Construir Chafariz em Praças Retangulares.

No sexto encontro, retomamos algumas ideias principais abordados no problema do encontro anterior. Com isso, apresentamos aos alunos uma noção mais geral do que são redes de caminhos de comprimento mínimo. Explicamos que, numa praça com vários acessos, para interligar esses acessos com uma rede de caminhos que tenha o menor comprimento possível, os pontos de interconexões desses caminhos devem ter ângulos com 120º. E, que esse resultado é uma generalização do problema estudado no encontro anterior.

Utilizando o argumento que se encontra no capítulo 2, explicamos que redes de caminhos com interconexões determinando ângulos iguais a 120º, possuem comprimento mais curtos. Explicamos que os pontos de interconexão nesses caminhos, os chamados pontos de Fermat, podem ser obtidos experimentalmente, utilizando folhas transparentes, tipo slides, com três retas conectadas formando ângulos iguais a 120º.

Com essa explicação e com o objetivo de retomar os objetivos do projeto de Modelagem, propusemos aos alunos o problema de localizar dois pontos P_1 e P_2, onde poderiam ser construídos dois chafarizes na Praça Rocha Pombo, de modo que esses pontos fossem as conexões de uma rede de caminhos ligando os cantos da praça. Como essa rede deve ter comprimento mínimo, esses pontos P_1 e P_2, devem determinar ângulos que medem 120º.

Figura 4.22 Rede de caminhos de comprimento mínimo com duas conexões em P_1 e P_2.



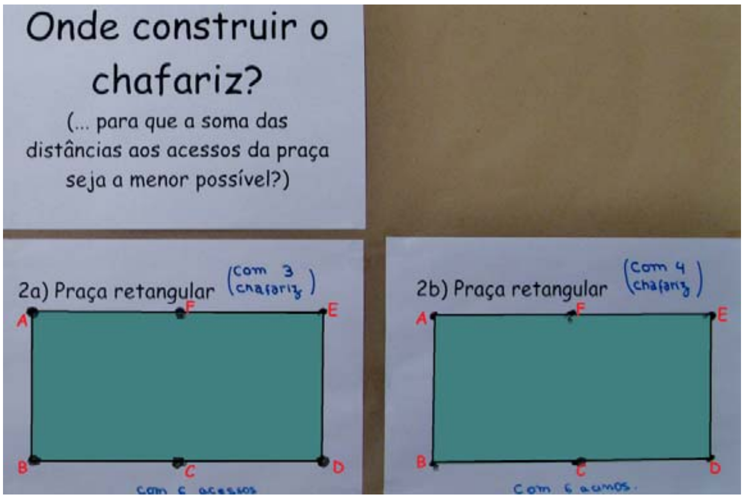
Os alunos procuraram então descobrirem os pontos P_1 e P_2 numa imagem impressa da Praça Rocha Pombo, utilizando o seguinte recurso experimental: desenharam três retas com ângulos de 120º entre si em duas folhas de plásticos transparentes e deslizando-as sobre a imagem impressa da Praça Rocha Pombo, descobriram dois possíveis caminhos mínimos para essa praça com dois pontos de Fermat, onde deveria ser construído um chafariz. Assim obtiveram as seguintes soluções:

Figura 4.23 Soluções com redes de caminhos mínimos encontrados para a Praça Rocha Pombo

Para testarem se essa rede de caminhos realmente tinha comprimento mínimo, sugerimos aos alunos, os alunos compararam com outros caminhos possíveis. O primeiro deles é construir as duas diagonais AC e BD da praça. Outro caminho testado foi construir a diagonal AC e determinar os pontos P_1 e P_2 como sendo os pés das alturas dos triângulos ACB e ABD, como mostram as figuras a seguir. Assim os alunos perceber que, experimentalmente, o caminho em que P_1 e P_2 determinam ângulos de 120º era ainda o mais curto.

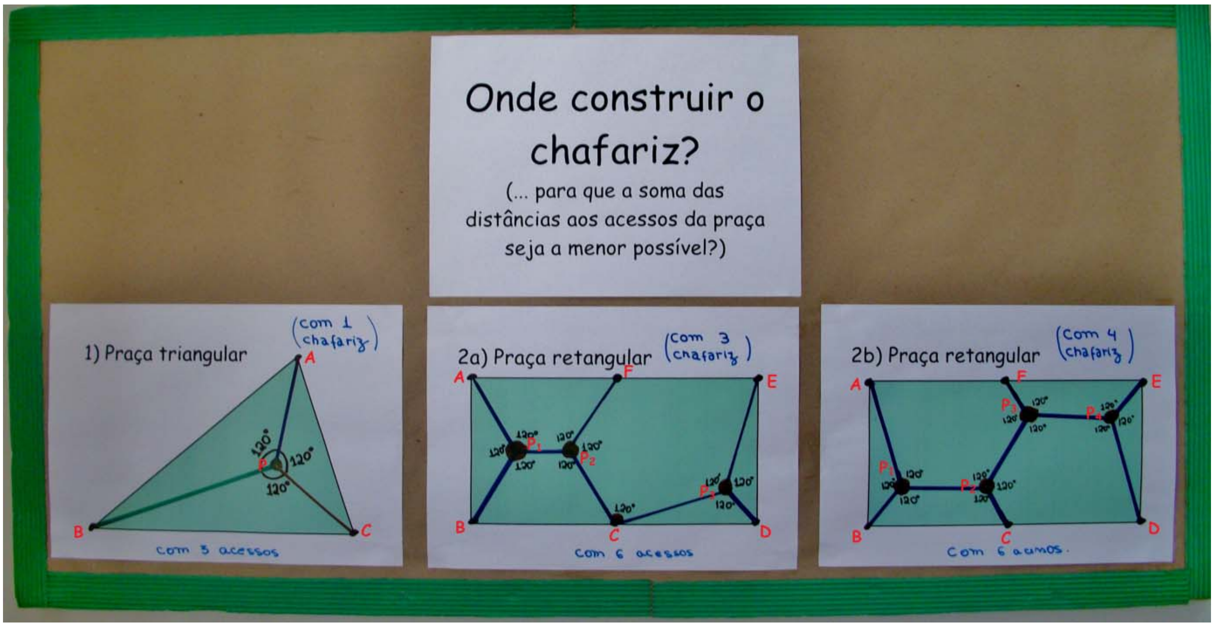
Em seguida, propusemos aos alunos que considerassem mais pontos de acesso na construção da rede de caminhos. O primeiro problema era obter uma rede de caminhos sobre uma praça retangular com 6 pontos de acessos e três pontos de conexões (três chafarizes). O segundo problema era obter, numa praça também retangular com 6 pontos de acesso, uma rede de caminhos mínimos com 4 conexões. Os dois problemas encontram-se ilustrados na figura 4.24, retirada do painel da apresentação do trabalho final.

Figura 4.24 Problema para construir redes de Steiner em praças com 6 acessos



Novamente as soluções apresentadas pelos alunos foram obtidas construindo experimentalmente os pontos de mínimo, utilizando as folhas plásticas com os desenhos de retas formando 120º.

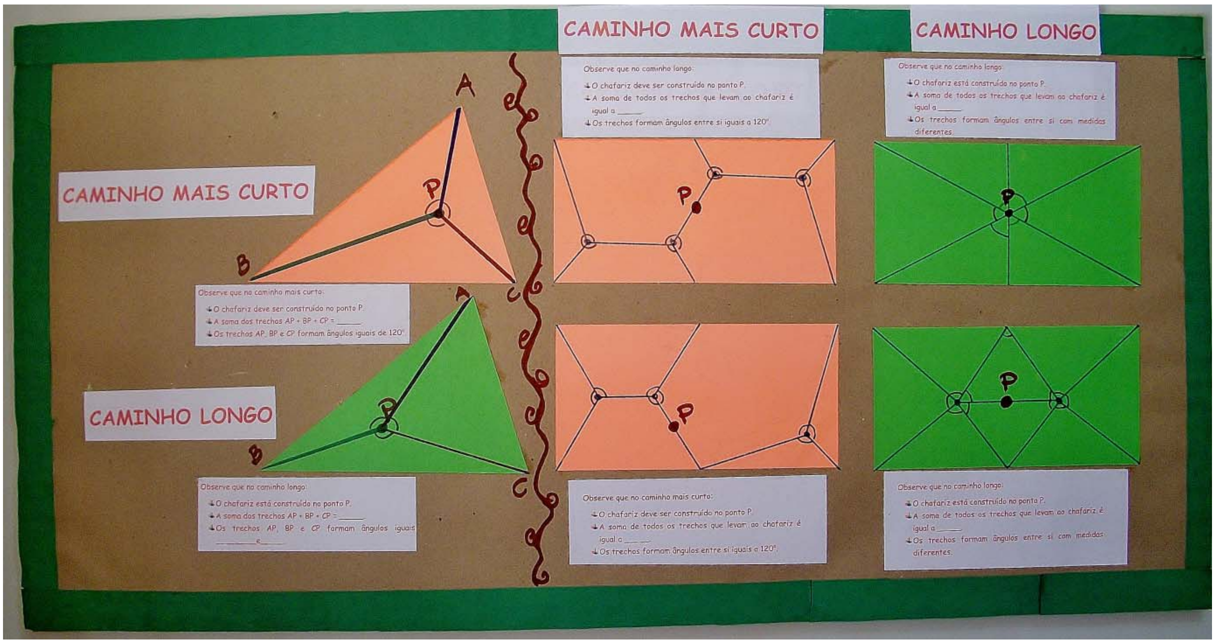
Figura 4.25 Soluções do Problema de Fermat-Steiner



No primeiro problema foram utilizadas 3 folhas plásticas, pois os alunos precisam encontram a rede de caminhos com três conexões. No segundo problema em que eram necessárias 4 conexões foram utilizadas 4 folhas plásticas. As soluções apresentadas pelos alunos encontram-se ilustradas na imagem do painel da figura 4.25.

No painel da figura 4.26, estão expostas as soluções dos alunos para os problemas de encontrar redes de caminhos mínimos. Solicitamos também aos alunos na resolução desses problemas que comparassem as redes de caminhos em que os ângulos de interconexões formassem 120º com outras em isso não ocorria. Comparando os comprimentos totais dessas redes de caminhos os alunos puderam verificar experimentalmente a propriedade de mínimo das redes de Steiner. A comparação que fizeram pode ser vista no painel seguinte.

Figura 4.26 Painel comparativo das soluções do problema de Fermat-Steiner



Nesse encontro, sistematizamos e retomamos as ideias até esse momento desenvolvidas. Perguntamos aos alunos se com o que aprenderam até aquele momento já tinham condições de resolver o primeiro problema do projeto:

- *Encontrar soluções para minimizar a rede de caminhos que interligam os diversos pontos da Praça Rocha Pombo.*

Os alunos responderam que ainda tinham algumas dúvidas, mas já poderiam elaborar um projeto de reforma da Praça Rocha Pombo, levando em conta a necessidade de construir caminhos de comprimentos menores interligando os diversos pontos da praça.

Relembramos então algumas soluções que eles já haviam conseguido, por exemplo, construir um caminho em circuito ligando os quatro lados da praça e construir pontos de conexões para que a rede de caminhos até o chafariz tenha também comprimento mínimo.

Com essa retomada, os alunos, de fato, perceberam que tinham instrumentos matemáticos importantes para começar a elaborar o projeto da praça. Só faltava agora aprender a resolver o problema de otimizar a área de canteiros. Mas isso foi feito no encontro seguinte.

5.8 Sétimo Encontro: Canteiros com área máxima e os problemas isoperimétricos

Neste encontro, iniciamos retomando com os alunos resultados obtidos até o momento e os objetivos iniciais do projeto de Modelagem. Relembramos os alunos que inicialmente definimos como objetivos os seguintes problemas:

- *Encontrar soluções para minimizar a rede de caminhos que interligam os diversos pontos da Praça Rocha Pombo e;*
- *Melhorar a relação entre áreas verdes e áreas de circulação de pessoas*.

Com relação ao primeiro objetivo, os alunos já haviam conseguido avançar muito, pois havíamos abordados vários problemas de otimização envolvendo caminhos mínimos. Faltava, portanto, abordar problemas envolvendo a otimização de áreas.

Inicialmente, solicitamos que tentassem reconhecer a forma geométrica desses canteiros. Desse modo, os alunos associaram cada canteiro a alguma figura geométrica conhecida. Ainda que com aproximações, os canteiros foram classificados em triangulares, quadriláteros e pentagonais. Questionamos se sabiam calcular a área e o perímetro dessas figuras. Como alguns alunos ficaram em dúvida e não sabiam nem o significado desses termos, então foi proposto aos alunos calcular a área e o perímetro dos canteiros da Praça Rocha Pombo.

Para isso, entregamos a cada aluno uma folha impressa com a imagem da Praça Rocha Pombo extraído do Google Earth e solicitamos que contornassem com caneta colorida os canteiros. Foram obtidos dez canteiros, como ilustra a figura a seguir.

Figura 4.27 Canteiros da Praça Rocha Pombo contornados

Os alunos, utilizando régua, mediram o contorno de cada canteiro e anotaram o perímetro de cada deles. Em seguida, quadriculando toda a imagem impressa em quadradinhos de 1cm^2, estimaram o valor a aproximado desses canteiros. Organizaram os valores numa tabela, com discutiram se haviam uma relação entre essas duas medidas.

As questões que foram colocadas para os alunos foram as seguintes: Se a área do canteiro aumentar, seu perímetro vai aumentar também? É possível obter canteiros com área maior sem alterar o perímetro?

Apenas analisando os valores obtidos não era possível para os alunos chegar a alguma conclusão. Propomos aos alunos então que fizessem um experimento com algum canteiro triangular. Assim, os alunos escolheram um canteiro triangular e fixando seu perímetro e o comprimento de um dos lados e variando a medida dos outros dois lados, concluíram experimentalmente que a área aumentava quando os dois lados variáveis tornavam-se iguais.

Figura 4.28 O triângulo isóesceles amarelo possui mesmo perímetro e área maior do que o triângulo em vermelho

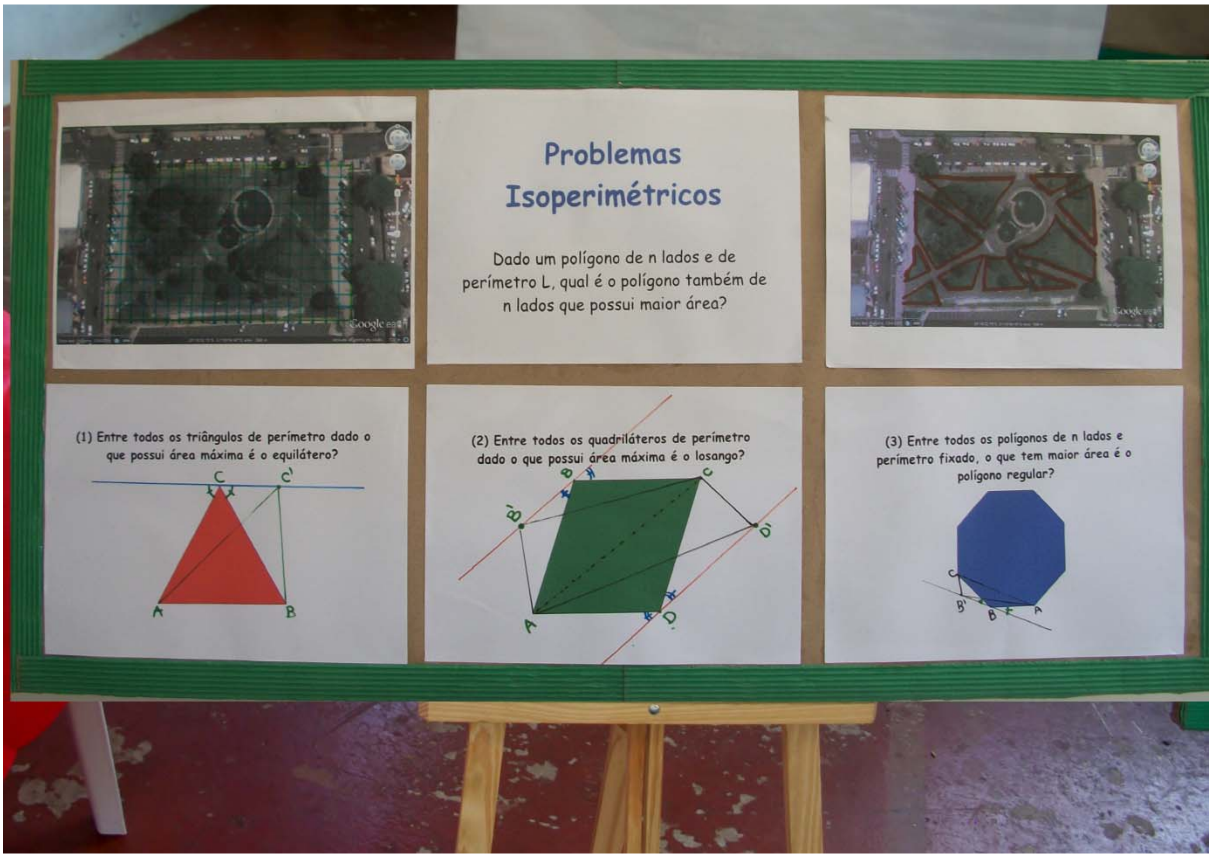
Em seguida, fixando o valor do seu perímetro do canteiro e variando as medidas dos lados, ou seja, mantendo o perímetro do canteiro constante e alterando a medida dos lados, perceberam que a maior área era quando o triângulo era equilátero.

Convidamos os alunos a explicar esse fato. Interagimos com os alunos, no sentido de levá-los a perceber a relação desse problema com o problema de Heron, pois para minimizar o perímetro devemos obter uma soma de dois lados menor possível. Os alunos concluíram que o triângulo equilátero é, dentre todos com perímetro fixado, o de maior área porque pelo Problema de Heron a soma dos lados, tomados de dois em dois é sempre a menor quando o ângulo é de 60º. Sistematizamos esse resultado junto com os alunos utilizando, basicamente, o argumento que se encontra no capítulo 2.

Solicitamos que os alunos escolhessem um canteiro com quatro lados. Sobre uma folha quadriculada, desenharam vários quadriláteros com o mesmo perímetro do canteiro escolhido. Perceberam que a área era maior quando os lados aproximavam da mesma medida. Novamente, interagindo com os alunos, encaminhamos a discussão para que concluíssem que o quadrado é, dentro todos os quadriláteros de perímetro fixo, o de maior área. O argumento que foi discutido com os alunos também é o mesmo apresentado no capítulo 2 deste trabalho.

Ao final deste encontro sistematizamos, ainda que de modo intuitivo, o argumento para justificar por que os quadriláteros regulares possuem a maior área entre todos os com o mesmo perímetro. A justificativa que fizemos na discussão com os alunos está apresentada no capítulo 2 dessa dissertação.

Figura 4.29 Problemas Isopermétricos de canteiros



Concluímos neste encontro o trabalho com a resolução dos problemas de otimização utilizando geometria plana. Convidamos os alunos a pensar num projeto para a Praça Rocha Pombo em que esses conhecimentos oriundos dos problemas estudados fossem utilizados. Desse modo, os alunos ficaram com a incumbência de utilizar toda a criatividade, mas também os problemas de otimização para obter uma Praça Rocha Pombo “melhor”.

5.9 Oitavo Encontro: Um Projeto e a Confecção da Maquete da Praça Rocha Pombo.

Neste encontro, iniciamos retomando os objetivos do projeto de Modelagem e os problemas de otimização estudados até aquele momento. Convidamos os alunos então a elaborar um desenho que servisse como projeto definitivo para a construção da maquete a ser apresenta no final.

Relembramos os alunos que, cada aluno faria seu desenho, porém apenas um seria escolhido para construir a maquete. Os critérios a serem adotados para a escolha do desenho era que no projeto fossem contemplados os problemas de otimização utilizados, ou seja, no projeto deveria aparecer:

- *Um caminho mínimo em circuito ligando os acessos dos quatro lados da praça;*
- *Uma rede de caminhos mínimos até o chafariz (rede de Steiner) e;*
- *Canteiros com áreas máximas, ou seja, algum canteiro regular ou, pelo menos, isósceles.*

Combinamos que o projeto para a maquete seria escolhido pelo professor com base nos critérios elencados acima. Os alunos passaram a trabalhar ativamente na elaboração dos desenhos. Várias ideias foram apresentadas pelos alunos: fazer canteiros circulares, fazer caminhos em arcos circulares que se entrecruzavam; eliminar os canteiros e construir quadras de esportes, enfim, vários tipos de sugestões que foram aos poucos sendo incorporadas nos desenhos juntamente com os critérios que estabelecemos.

Depois que todos os alunos entregaram seus projetos, passamos a discutir com os eles as ideias sugeridas para a reforma da praça. Assim, cada aluno podia defender seu projeto e todos poderiam apontar os problemas e vantagens no projeto apresentado.

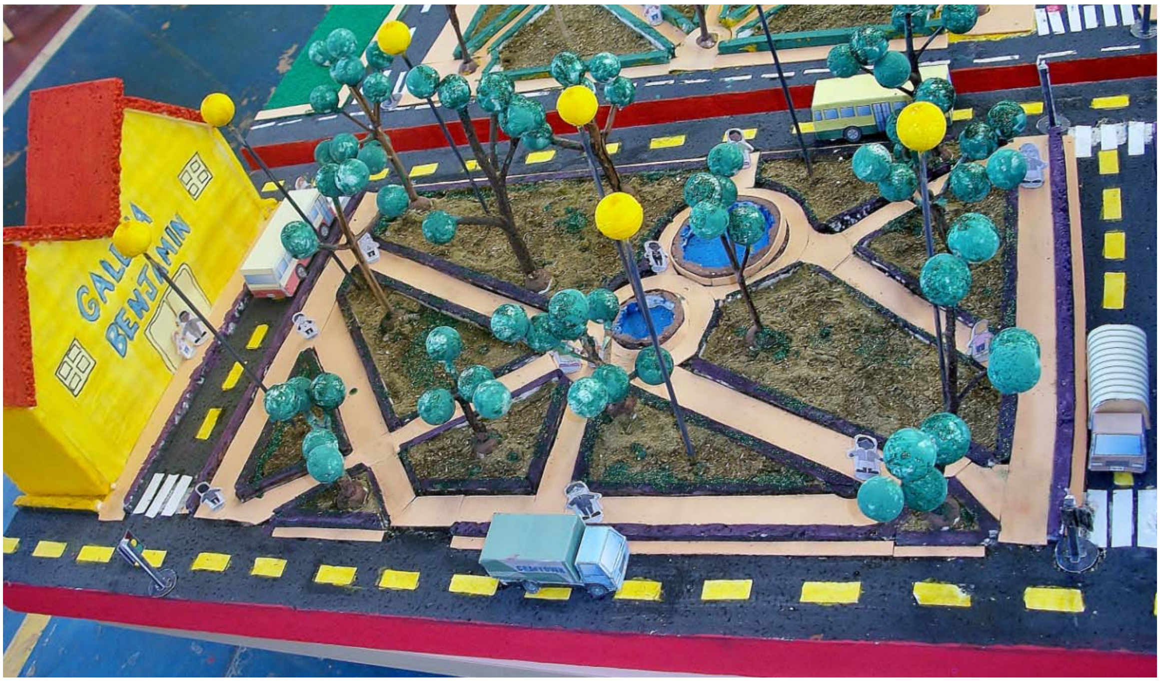
De fato, ao final da avaliação do projeto percebemos que todos deixavam de atender algum critério. Desse modo, passamos a argumentar que deveríamos juntar as ideias para compor um projeto que atendesse todos os critérios. Assim, o projeto que atendeu o primeiro critério, ou seja, tinha um caminho mínimo ligando os quatro lados da praça, o projeto que tinha uma rede de Steiner e o projeto que tinha canteiros com área máxima foi utilizado para compor um novo projeto que atendesse todos esses critérios. Assim obtivemos um projeto que foi do consenso de todos.

Figura 4.30 Maquete da praça projeto pelos alunos

A fotografia apresentada na imagem 4.30 mostra a maquete da praça feita a partir do projeto elaborado pelos alunos. Observe que os lados maiores da praça, (cima e embaixo na foto) possui caminhos formando ângulos iguais com esses lados. Esse detalhe atende o primeiro critério. Além disso, observe que existem dois pontos de conexão de uma rede de caminhos que formam ângulos de 120º. Portanto, este projeto apresenta uma rede de Steiner com dois pontos de conexão e, assim, atende ao segundo critério. Finalmente, perceba que vários dos canteiros são triângulos isósceles e alguns são “quase” regulares, portanto, atende o critério de área máxima para os canteiros.

Esta maquete foi confeccionada pelos alunos nas aulas que se seguiram. Como eles acharam essa parte do trabalho mais lúdica e divertida, pediram para fazer também uma maquete da Praça Rocha Pombo atual para que pudessem, na apresentação, fazer as devidas comparações entre comprimentos de caminhos e áreas dos canteiros.

Figura 4.31 Maquete da Praça Rocha Pombo atual



A fotografia mostrada na imagem 4.31 apresenta a maquete da Praça Rocha Pombo atual. Fica nítida nessa maquete a assimetria nos caminhos internos da praça. Também se observa assimetria na localização do espelho d´água e do chafariz. Procuramos deixar claro para os alunos que essas características não são “defeitos da praça”. Na verdade, representam critérios estéticos da linha moderna de fazer projetos de praças. Essa praça é um belo exemplo que procuramos mostrar para os alunos que os critérios adotados na prática não são apenas matemáticos. Para o bem ou para o mal, as pessoas que planejam as cidades se esquecem, às vezes, de consultar a “Rainha das Ciências”.

5.10 APRESENTAÇÃO FINAL DO TRABALHO DOS ALUNOS

Entre o oitavo encontro e a apresentação final dos trabalhos dos alunos, que aconteceu no dia 18 de dezembro de 2012, houveram algumas aulas que foram utilizadas para os alunos confeccionarem as maquetes e prepararem sua apresentação.

Como essa apresentação ocorreria junto com um evento de confraternização dos alunos internados, famílias desses alunos, professores e funcionários do CENSE, organizamos com os alunos a apresentação em painéis. Cada painel tinha imagens e resultados do que foi desenvolvido em cada encontro.

Assim, além das duas maquetes foram organizados nove painéis que serviriam para que os alunos apresentassem a toda comunidade presente no as atividades de Modelagem desenvolvidas ao longo dos oito encontros.

Figura 4.32 Organização dos painéis para apresentação do trabalho final dos alunos

A fotografia apresentada na imagem 4.32 mostra como foram dispostos os painéis para a apresentação dos trabalhos dos alunos. Os dois primeiros painéis, da direita para a esquerda, mostram aspectos gerais de praças e aspectos específicos da Praça Rocha Pombo. Os demais painéis exibem os problemas de otimização geométrica e suas soluções.

Figura 4.33 Demonstrações "sem palavras" construídas nos painéis

Um aspecto importante desses painéis é apresentar as “demonstrações” visuais dos problemas de otimização. Na fotografia mostrada na imagem 4.33 é possível observar essas “demonstrações” feitas pelo método de reflexão e rotação no caso da rede de Steiner. Outro aspecto importante é a comparação entre caminho mínimo (cor laranja) obtido resolvendo o problema de otimização geométrica e o chamado caminho longo (cor verde). Assim, em cada painel pode-se visualizar as propriedades ou condições geométricas da solução do problema, assim como também se pode quando essas propriedades não são atendidas.

Junto com a apresentação dos painéis seriam apresentadas as duas maquetes confeccionadas pelos alunos. Elas foram colocadas uma ao lado da outra em frente aos painéis, como mostra a figura 4.34 a seguir.

Figura 4.34 Organização das duas maquetes e eu, o professor dos alunos.

Assim, os alunos poderiam fazer as apresentações comprando os aspectos mais relevantes das duas praças. O objetivo não era citar os defeitos de uma e exaltar as qualidades da outra, mas apresentar as diferenças de critérios utilizados na elaboração de cada uma das praças.

Figura 4.35 Organização para facilitar a comparação entre as duas maquetes

Na apresentação, propriamente dita dos trabalhos, iniciamos com uma fala sobre os objetivos gerais do projeto de Modelagem e chamamos os alunos à frente para explicar o conteúdo de cada painel. Desse modo, os alunos foram organizados em pequenos grupos de modo que cada grupo apresentassem no máximo três painéis. Além disso, outro grupo de alunos ficou encarregado de fazer as apresentações das maquetes. Na fotografia 4.36 são mostrados alguns momentos do evento com a disposição das maquetes e painéis para a apresentação.

Figura 4.36 Apresentação do trabalho final dos alunos

Além dos próprios alunos, o evento contou com a participação das famílias dos alunos internados, funcionários do CENSE e professores. Além da apresentação dos trabalhos de Modelagem também ocorreram apresentações de música, dança, declamação de poema, manifestações religiosas e de agradecimentos aos professores por parte dos alunos.

Assim, a apresentação dos trabalhos de Modelagem ocorreu dentro de um espírito festivo e de congraçamento. A apresentação dos alunos, nosso trabalho e o esforço para tornar possível a realização das atividades de Modelagem em ambientes de restrição de liberdade foram elogiados pela direção e funcionários do CENSE, professores, familiares e alunos, mostrando mais uma vez que a Modelagem, mais do que circular em eventos acadêmicos e artigos de divulgação de pesquisa, deve urgentemente se incorporar às práticas de ensino em todas as escolas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No capítulo de introdução a este trabalho, discutimos algumas das nossas crenças a respeito da Matemática e do Ensino da Matemática. Também manifestamos o desejo de que o ensino de Geometria seja mais valorizado em nossas escolas. Apontamos por fim duas questões que nortearam todo o percurso deste trabalho. Essas duas questões são as seguintes:

- Como abordar, com alunos do Ensino Fundamental, aplicações da Geometria, utilizando problemas de otimização em atividades de Modelagem?
- Como desenvolver nos alunos a argumentação e o raciocínio dedutivo em Geometria, mediante a experimentação, análise e comunicação de problemas de otimização abordados com atividades de Modelagem?

Ao longo da experiência de ensino aqui relatada, tivemos a oportunidade de refletir sobre essas questões e, de certo modo, ampliá-las para um contexto mais amplo do que aquele em que este trabalho foi desenvolvido. Vamos, nestas "considerações finais", retomar essas questões procurando analisar os aspectos positivos e negativos, os avanços e as dificuldades observados da realização da experiência de ensino.

Com relação a primeira questão, por exemplo, quando perguntamos como abordar em sala de aula aplicações da Geometria, observamos que no início das atividades os alunos com os quais desenvolvemos essa experiência tinham uma ideia equivocada do trabalho a ser realizado. Em princípio achavam que iríamos inventar problemas sobre tema "praças" envolvendo cálculos, problemas com contas continhas para praticar exercícios.

Depois, quando apresentamos as imagens de praças para analisar semelhanças e diferenças e reconhecer formas geométricas nas praças, pensaram que o trabalho seria tipo trabalho de pesquisa, no qual os alunos procuram na internet textos sobre o assunto, seleciona os aspectos mais importantes, monta um texto dentro das normas (capa, introdução, referências, etc.) e entrega ao professor para ser avaliado.

Em seguida, quando iniciamos a discussão sobre a elaboração da maquete, os alunos pensaram que se tratava de um trabalho sem nada a ver com a Matemática. Afinal, onde aparece Matemática na confecção de uma maquete?

Mas, ao longo das atividades e, principalmente, quando tiveram seus projetos de praça avaliados, levando-se em conta somente critérios matemáticos, perceberam a relevância dos conteúdos de Geometria estudados naquele período. É nesse sentido que essa experiência de ensino representou para os alunos uma “aplicação autêntica” da Matemática, pois os alunos aprenderam que conceitos e resultados da Geometria podem, de fato, melhorar (otimizar) vários aspectos de uma praça pública.

Além disso, ao longo da realização das atividades, nem os alunos e nem o professor referia-se aos problemas de otimização abordados como sendo problemas da Matemática ou problemas da Geometria. Nas conversas que realizamos com os alunos cada problema era tratado como um problema relacionado a elaboração de um projeto de praça pública.

Outro aspecto observado que torna esse trabalho de Modelagem uma autêntica aplicação da Geometria é que, em todos os encontros, os alunos utilizavam sua própria experiência para discutir aspectos dos problemas abordados. Esses alunos manifestaram, por exemplo, que as praças públicas deveriam ter atrativos, tais como academia de ginástica, brinquedos para as crianças, pista de skate, acesso grátis a internet pelo Wi-Fi e contar com muitos eventos, como shows, teatros, etc para manter o interesse da população em conservar as praças. Chafariz, espelho d´água são coisas que, segundo os alunos, não atraem mais as pessoas.

Além disso, a experiência dos alunos foi fundamental para que compreendessem a natureza dos problemas abordados. Problemas de otimização geométrica em que se minimiza comprimentos ou maximiza áreas de figuras podem ser perfeitamente compreensíveis quando falamos em obter caminhos mais curtos ou canteiros que cabem mais plantas numa praça.

Além de ajudar na fase de compreensão dos problemas, a experiência dos alunos foi fundamental para perceberem que esses problemas não eram triviais, ou seja, não eram problemas de livros de Matemática que mostram a pergunta logo depois fórmula que dá a resposta.

Para obter e compreender a solução desses problemas, os alunos tiveram antes que levantar conjecturas, testar hipóteses, realizar experimentos, enfim, empregar seus próprios saberes para chegar no saber sistematizado da Geometria.

Outro aspecto positivo que observamos nessa experiência de ensino foi a utilização das imagens aéreas do Google Earth para abordar conteúdos de Geometria. Desde o início, quando restringimos a escolha de temas que pudessem ter dados coletados no Google Earth, já acreditávamos que teria grande efeito motivador.

De fato, os alunos conhecem e gostam desse tipo de tecnologia. Mesmo que não fosse permitido o acesso a internet, apenas a possibilidade de discutir como foram feitas e obtidas as imagens das praças já motivou o trabalho de Modelagem. Além da motivação, as imagens do Google Earth também tornaram mais plausíveis os problemas estudados, afinal, a imagem que tínhamos ali não era uma figura geométrica fora de contexto, mas sim a representação de um objeto real que o Google Earth permitia explorar e na qual nossa percepção reconhecia formas geométricas.

Na segunda questão que norteou este trabalho, a ênfase recai sobre a pergunta: como desenvolver a argumentação e o raciocínio dedutivo em Geometria? Não estamos, neste caso, pensando em demonstrações formais ou provas rigorosas como as que encontramos em livros-textos de Geometria.

Nosso questionamento é direcionado às relações que as atividades de Modelagem podem ter na criação de situações que promovam a análise, discussão e comunicação em que propriedades importantes da Geometria possam ser justificadas. Nosso intuito é evitar o “vício da fórmula pronta” e o “teorema tirado da cartola” que aparecem em alguns trabalhos de Modelagem.

Nesse sentido, temos observado que os alunos em geral e também os que participaram dessa experiência de ensino, não têm o hábito de questionar por que muitas afirmações em Matemática são apresentadas como verdadeiras. Nem sequer sentem curiosidade intelectual em compreender a origem de algumas fórmulas ou expressões que são comumente utilizadas nas aulas de Matemática. Embora esse problema não possa ser explicado em poucas palavras, acredito que os alunos em geral agem dessa maneira porque nas aulas de Matemática lhes ensinaram que a Matemática é assim.

Além disso, observamos que os alunos que participaram dessa experiência de ensino sabiam quase nada de Geometria. Tinham também muita dificuldade com o cálculo algébrico e menos dificuldade em operações com números inteiros. De Geometria, sabiam conhecer figuras simples como triângulos, retângulos, quadrados; tinham uma noção vaga do é ângulo e conhecia algumas fórmulas para o cálculo de áreas, mas não sabiam o que é área.

Num primeiro momento, o cuidado que tivemos com a aprendizagem dos alunos foi o de ampliar o uso dessas noções nas atividades de Modelagem. Ao mesmo procuramos criar nos alunos o hábito de explicar e justificar por que as soluções dos problemas de otimização eram válidas. Em cada problema solucionado, uma grande parte do tempo dos encontros era destinada a elaborar uma justificava plausível para essas soluções.

No segundo encontro, por exemplo, a princípio os alunos não entenderam por que tinham que explicar a propriedade da igualdade de ângulos no caminho mais curto. Argumentamos com os alunos que, na apresentação final, todos eles deveriam explicar para as pessoas que "não sabiam Matemática" como foram obtidas as soluções dos problemas.

Foi essa necessidade de explicar para as outras pessoas (que assistiriam a apresentação final dos trabalhos, ou seja, famílias, funcionários, professores e outros alunos) o que foi feito nas atividades de Modelagem é que tornou o trabalho com argumentação e raciocínio dedutivo possível ao longo dessa experiência de ensino.

De fato, acreditamos que para romper com a prática da "fórmula pronta" e o "teorema tirado da cartola" um caminho é promover situações em que os alunos são chamados a argumentar, a defender uma solução ou justificar um procedimento adotado.

Observamos também, ao longo deste trabalho, que os problemas de otimização geométrica utilizados nessa experiência de ensino são perfeitamente compreensíveis para os alunos da Educação Básica.

A compreensão das demonstrações desses teoremas explora amplamente os aspectos visuais, ou seja, poderiam perfeitamente se encaixar no caso das "demonstrações sem palavras".

Esse tipo de demonstração encontra-se bem exemplificada no livro "Proofs Without Words", de Roger B. Nelsen. Nele o autor apresenta variadas provas de fórmulas e resultados apenas mostrando uma figura e uma representação algébrica. Para compreender essas demonstrações, necessita-se de um instante de abstração olhando para a figura e a fórmula, relacionando ambas e fazendo a leitura correta.

Das observações que fizemos dos alunos, notamos que eles rapidamente assimilam essas “demonstrações visuais” baseadas no “método de reflexão” e incorporam suas ideias nas suas justificativas e argumentações.

Outra questão importante percebida nas justificativas e argumentações apresentadas pelos alunos a partir dessas “demonstrações visuais” é a necessidade de incorporar termos mais próximos do uso cotidiano.

Assim, observamos que nas “demonstrações visuais” utilizar termos como deslizar, refletir, girar, recortar, mover, colar, recolocar, alinhar, sobrepor, reagrupar, decompor, etc. é mais adequado para tornar essas demonstrações mais “dinâmicas”, no sentido de basearem na ideia de movimento e nas transformações geométricas.

De fato, na apresentação final dos trabalhos, quando os alunos explicaram e justificaram o conteúdo de cada um dos painéis, a presença desses termos foi marcante e bastante utilizado pelo alunos na argumentação e no raciocínio dedutivo em Geometria.

A explicação do problema de Heron e do problema de Schwarz utilizando o “método de reflexão” proporcionou aos alunos aprenderem a utilizar a noção de congruência de figuras planas, congruência de ângulos, propriedade de ângulos opostos pelo vértice, etc. Ainda que essas ideias não fossem explicitamente elaboradas na fala deles, percebia-se que os aspectos mais gerais dessas ideias estavam presentes em sua argumentação.

Do mesmo modo, explicar o problema de Fermat-Steiner utilizando a ideia de rotação e a propriedade dos triângulos isósceles (o triângulo isósceles e equiângulo é também equilátero) evidenciou que esses alunos aprenderam a utilizar a noção de ângulo como rotação, a noção de triângulos congruentes, e a noção de colinearidade para construir uma argumentação.

Finalmente, a abordagem dos problemas isoperimétricos, ainda que trabalhados mais superficialmente do que os outros problemas, foi importante para que os alunos percebessem a conexão entre os problemas de otimização em Geometria.

De fato, compreender que o triângulo equilátero e o quadrado possuem maior área entre os polígonos da sua classe com perímetro fixo e que isso está relacionado ao problema de Heron é, por si só, uma proeza para alunos matriculados no nível do Ensino Fundamental.

A presença de membros da família dos alunos, funcionários e outros professores na apresentação dos trabalhos dos alunos também foram decisivos para motivar e criar o desejo de comunicar a todos o que estavam aprendendo com Modelagem.

Naturalmente, dificuldades ocorreram. Além das que resultaram do cuidado com a segurança, ocorreram também cancelamento de aulas (quando o número de agentes não é suficiente, não pode haver aula), alunos participantes do projeto que foram retidos na chamada “contenção”. Chama “contenção” o isolamento a que ficam submetidos os alunos que se envolvem em briga, indisciplina ou outros casos graves. Nesse caso, os alunos deixaram de participar dos encontros e das atividades de Modelagem.

Além dos alunos que receberam medida socioeducativa de contenção, tivemos também, como já foi citado, três alunos desinternados e outros três matriculados nas aulas de Matemática, ou seja, entraram “no meio das atividades” e tiveram que ser acolhidos e adaptados aos trabalhos já desenvolvidos. Desse modo, esses alunos tiveram que retomar atividades já realizadas pelos demais alunos e, com isso, houve uma demora para encaminhar as atividades seguintes.

Outras dificuldades foram decorrentes da necessidade de rever e readequar algumas atividades de Modelagem ao longo do caminho. É natural e bastante necessário esse tipo de replanejamento. Mas, em razão das circunstâncias (o tempo de permanência com os alunos é longo) não é possível rever planejamento a todo o momento.

Embora, acreditamos que, nessa experiência, acertamos mais do que erramos, faltam ainda rever e reavaliar muita coisa. O tempo destinado a cada atividade, o encaminhamento com mais autonomia dos alunos, a exploração de outros aspectos de projeto de praça, tais como sustentabilidade, elementos como quadras de esportes, academia ao ar livre, entre outros problemas, são alguns aspectos que poderiam ser melhorados em outras atividades de modelagem com o tema “praças”.

Como esse é um trabalho destinado à leitura de professores e, sabemos que, pelo menos quatro professores lerão obrigatoriamente esta dissertação, temos a expectativa de que sejam apontados erros, acertos, sugestões de mudança, críticas e, se possível, seja reaplicado para que a Geometria possa ser resgatada na sala de aula.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W. ; SILVA, K.A. P. **Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de modelagem matemática**: um olhar sobre os modos de inferência. Ciência e Educação (UNESP. Impresso), v. 18, p. 623-642, 2012.

ALMEIDA, L. M. W., & BRITO, D. S. (2005).**Atividades de modelagem matemática**: que sentido os alunos podem lhe atribuir?. Ciência e Educação (UNESP), v. 11, p. 1-16.

ALMEIDA, L. M. W., & FERRUZZI, E. C. (2009). **Uma aproximação socioepistemológica para a Modelagem Matemática**. Alexandria, v. 2, p. 117-134.

ANDREESCU, T.; MUSHKAROV, O.; STOYANOV, L.; Geometric Problems **On Maxima And Minima.** 2006 pp. XII-264, brossura, ISBN 0-8176-3517-3 Birkhäuser Verlag, Boston

ÁVILA, Geraldo, **As várias faces da matemática**: Tópicos para Licenciatura e Leitura Geral, São Paulo, Editora Blucher, 2010.

ÁVILA, Geraldo, Euclides, Geometria e fundamentos, **Revista do Professor de Matemática**, n. 45/ USP, São Paulo, 2001.

ÁVILA, Geraldo, Reflexões sobre o ensino da geometria. **Revista do Professor de Matemática**, n. 71, SBM / USP, São Paulo, 2010.

BARBOSA, J. (2001). **Modelagem na educação matemática**: contribuições para o debate teórico. 24ª reunião anual da ANPED. Caxambu.

BARBOSA, J. (2003). **Modelagem matemática e a perspectiva sócio-crítica**. II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. São Paulo: SBEM.

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana** - SBM, 1995

BASSANEZI, Rodney C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática.** São Paulo: Contexto, 2002.

BLUM, W., NISS, M. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – state, trends and issues in mathematics instruction. **Educational Studies in Mathematics, Dordrecht**, v. 22, n. 1, p. 37-68, 1991.

BRASIL, MEC, INEP, **Matrizes Curriculares de Referência para o SAEB**. In: PESTANA, Maria Inês Gomes de Sá et al.. 2 ed. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais, 1999b.

BRASIL, MEC, SEB. **Orientações curriculares para o ensino médio. ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. Brasília: MEC, SEB, 2006.

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: ensino médio. Brasília: Ministério da Educação, 1999a.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCN+ Ensino Médio: **orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEMTEC, 2002.

BRASIL. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Catálogo do programa nacional do livro para o ensino médio** – Matemática (PNLEM). Brasília: MEC, 2005.

BRASIL. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Catálogo do programa nacional do livro para o ensino médio** – Matemática (PNLEM). Brasília: MEC, 2005.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Explorando o ensino da matemática**: artigos. Brasília: MEC, 2004. v.3.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática**. 5.ed. Lisboa: Gradiva, 2003.

COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

COXETER, Harold S. M. **Introduction to geometry**, John Wiley and Sons Inc., 1969.

CRESCENTI, E. P. **Os professores de matemática e a geometria**: opiniões sobre a área e seu ensino. 2005. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de São Carlos. São Paulo, 2005.

DAVIS, P.J. HERSH, R. **A experiência matemática**. Lisboa. Gradiva, 1995.

DREYFUS, T.; HADAS, N. Euclides deve permanecer – e até ser ensinado. In: LINDQUIST, M. M. **Aprendendo e ensinando geometria**. São Paulo: Atual, 1994.

EINSTEIN, Albert. Geometria e experiência (1921). **Sci. stud.,** v. 3, n. 4, p. 665-675, dez. 2005.

FARRELL, M. A. Geometria para professores da escola secundária. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. **Aprendendo e ensinando geometria**. São Paulo: Atual, 1994.

FIGUEIREDO, D.G. **Problemas de máximo e mínimo na geometria euclidiana em matemática universitária**. 1989. n. 9/10.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as na educational task**. Dordrecht: D. Reidel Publishing Co., 1973.

GARNICA, A. V. M. (1995). **Fascínio da técnica, declínio da crítica**: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de Matemática (Tese Doutorado em Educação Matemática, IGCE-UNESP, Rio Claro, Brasil).

INTERNATIONAL COMMISSION ON MATHEMATICS INSTRUCTION-ICMI. Perspectives on teaching of geometry for the 21 st century. **Education Studies in Mathematics,** v. 28, 1995.

LAKATOS, I. **Proofs and refutations:** The logic of mathematical discovery. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

LIMA, E. L. **Matemática e ensino**. Rio de Janeiro: SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA-SBM, 2001.

LIMA, Elon; CARVALHO, Paulo Cezar; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto. **A matemática do ensino médio**, volumes 1, 2, 3. Coleção do Professor de

LIMA, Paulo Figueiredo. **Desafios atuais da formação matemática no país**. RECIFE, SBEM, Julho de 2009.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? In: Educação Matemática em **Revista –SBEM**, 4, p. 3-13, 1995.

MACEDO, Silvio Soares e ROBBA, Fábio. **Praças brasileiras.** São Paulo: Edusp, 2002.

MANRIQUE, A. L. **Processo de formação de professores em geometria**: mudanças em concepções e práticas. 2003. Tese (Doutorado) - PUC-SP, São Paulo, 2003.

MARTIN C. Roberge and Linda C. Cooper, Map Scale, **Proportion, and Google Earth in Mathematics Teaching in Middle School,** v. 15, n. 8, April, 2010

MLODINOW, L. **A janela de Euclides**. São Paulo: Geração Editorial, 2004.

MOREIRA, C.G.T.A e Saldanha, N. C. **A desigualdade Isoperimétrica em Matemática Universitária**, n. 15, 1993.

NACARATO, A. M.; PASSOS, C. L. B. **A Geometria nas séries iniciais**. São Carlos, SP: EdUFSCar, 2003.

NIVEN, I. (1981). **Maxima and minima without calculus**. USA: Mathematical Association of America.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da Geometria no Brasil: Causas e consequências. **Revista Zetetiké**, Campinas, v.1, n. 1, p. 7 a 17, 1993.

PAVANELLO, R. M. **O abandono do ensino da Geometria**: uma visão histórica. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. Dissertação (Mestrado) - Campinas, 1989.

PEREZ, G. A realidade sobre o ensino de Geometria no 1º e 2º graus no Estado de São Paulo**. Educação Matemática em Revista** – Sociedade Brasileira de Educação Matemática, v.3, n. 4, 1995.

PINTO, Carvalho, P. et al (2003). **Mathematical optimization in graphics and vision Elsevier**. Ed. Morgan-Kaufmann, 2009.

ROGER, B. Nelsen; Proofs Without Words II - **Exercises in Visual Thinking**, The Mathematical Association of America, 2000

SCHENBERG, M. **Pensando a física**. São Paulo: Landy, 2001.

SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Boletim de Educação Matemática** - BOLEMA, Rio Claro, v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.

SKOVSMOSE, O. **Educação matemática:** Crítica: A Questão da Democracia. Campinas: Papirus, 2001.

TEIXEIRA, R. R. P.; PANTALÉO JR, M.; TAKEUCHI, M. Perfil dos alunos ingressantes no curso de Licenciatura em física do CEFET/SP. **Revista Sinergia,** v. 6, n. 1, 2005.

USISKIN, Z. Resolvendo os dilemas permanentes da Geometria escolar. In: LINDQUIST, M. M.; SHULTE, A. P. **Aprendendo e ensinando Geometria**. São Paulo: Atual, 1994.

VEBLEN, O. The modern approach to elementary Geometry. **Rice Institute Pamphlet**, v. 21, 1934.