UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA

FERNANDO DORTA

OS PARADOXOS E AS AULAS DE MATEMÁTICA:

ALGUMAS REFLEXÕES E SUGESTÕES

Londrina
2013

FERNANDO DORTA

OS PARADOXOS E AS AULAS DE MATEMÁTICA:
ALGUMAS REFLEXÕES E SUGESTÕES

Dissertação de mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida

Londrina
2013

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

D719p Dorta, Fernando.
Os paradoxos e as aulas de matemática : algumas reflexões e sugestões / Fernando Dorta. – Londrina, 2013.
146 f. : il.

Orientador: Lourdes Maria Werle de Almeida.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2013.
Inclui bibliografia.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Paradoxos – Formação de conceitos – Teses. 3. Matemática – Paradoxos – Teses. 4. Pesquisa educacional – Matemática – Teses. I. Almeida, Lourdes Maria Werle de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Sociedade Brasileira de Matemática. IV. Título.

CDU 51:37.02

FERNANDO DORTA

OS PARADOXOS E AS AULAS DE MATEMÁTICA: ALGUMAS REFLEXÕES E SUGESTÕES

Dissertação de mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

____
Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida
UEL – Londrina – PR

____
Prof. Dr. Rodolfo Eduardo Vertuan
UTFPR – Londrina – PR

____
Profa. Dra. Luci Harue Fatore
UEL – Londrina – PR

Londrina, 06 de Agosto de 2013.

Dedico este trabalho a Deus, à minha esposa, aos meus pais, aos meus irmãos e à minha orientadora.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela saúde e coragem nessa caminhada;

À professora Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida por suas excelentes aulas e pela dedicação, clareza, disposição e profissionalismo nas orientações, que tornaram possível a realização deste trabalho;

Aos membros da Banca Examinadora, Profa. Dra. Luci Harue Fatore e Prof. Dr. Rodolfo Eduardo Vertuam, pelas contribuições valiosas;

À minha querida esposa Roseni pela paciência, incentivo, apoio e compreensão;

À minha família, em especial aos meus pais Maurício e Beth e aos meus irmãos Marcelo e Cláudia pelo incentivo, confiança, apoio, compreensão e pelo amor incondicional;

Aos professores e coordenadores do PROFMAT/UEL, pela dedicação e amizade;

À turma do PROFMAT/UEL-2011 pela amizade e pelos momentos de alegria; em especial à Keyla, ao Fábio e ao Ednilson, que no início eram meus companheiros de seminário e de viagem e hoje são grandes amigos;

À Leda que me acolheu com muita hospitalidade durante as disciplinas de verão e a todos os amigos que estiveram conosco;

Ao Ivan que soube representar a turma PROFMAT/UEL-2011 com dedicação, competência, honestidade e transparência;

Aos monitores, em especial ao Adriano que atendeu com presteza e dedicação sempre que nossa turma precisou;

Aos amigos pelo apoio e por entender a ausência em muitos momentos;

A todos os meus alunos, em especial aos que participaram da Experiência de Ensino;

À CAPES pelo apoio financeiro;

Por fim, a todos que de algum modo tornaram este trabalho possível.

“[...] talvez o maior de todos os paradoxos é haver paradoxos na Matemática.”

Edward Kasner e James Newman

DORTA, Fernando. **Os Paradoxos e as Aulas de Matemática: algumas Reflexões e Sugestões**. Ano: 2013. 146 f. Dissertação de Mestrado apresentado ao Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção de título de mestre em Matemática, Londrina, 2013.

RESUMO

Este trabalho constitui uma proposta para o uso de paradoxos nas aulas de Matemática. Considerando a natureza das atividades associadas a este uso, indicamos a Investigação Matemática na Sala de Aula como sugestão de procedimento metodológico para aplicação dos paradoxos nas aulas de Matemática. No texto abordamos os paradoxos, suas possíveis classificações e sua associação com alguns conceitos matemáticos. A descrição de uma experiência de ensino tratando do “Paradoxo de Carroll” dá indicativos de como esta metodologia viabiliza o ensino de Matemática associada a paradoxos. Como complementação da proposta, fazemos indicativos do uso do “Paradoxo de Mello”, do “Paradoxo $2 = 1$ ” e dos “Paradoxos de Partilha”, sinalizando como estas atividades podem subsidiar o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Palavras-chave: Paradoxos. Investigação. Matemática. Ensino.

DORTA, Fernando. **The Paradoxes and the Math Classes: some Reflexions and Suggestions**. Ano: 2013. 146 p. Dissertação de Mestrado apresentado ao Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção de título de mestre em Matemática, Londrina, 2013.

ABSTRACT

This work consists in a proposal for the use of paradoxes in Math classes. Considering the nature of the activities associated to this use, we indicate the Mathematical Investigation in the Classroom as a suggestion of methodological proceeding for the application of the paradoxes in Math classes. In the text we approach the paradoxes, their possible rating and their association with some mathematical concepts. The description of a teaching experience about “Carroll Paradox” indicates how this methodology enables the Math teaching associated to paradoxes. As a complementation of the proposal, we make use of “Mello Paradox”, “2=1 Paradox” and “Sharing Paradox” showing how these activities can help the Math teaching and learning.

Key-words: Paradoxes. Investigation. Mathematics. Teaching.

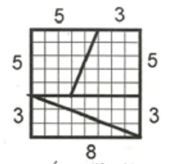
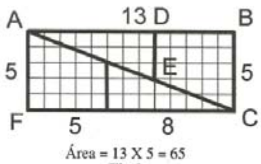
ÍNDICE DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Como professor de Matemática dos Ensinos Fundamental e Médio, tenho buscado outras atividades além daquelas sugeridas tradicionalmente nos livros didáticos, para o desenvolvimento das minhas aulas. Tive a oportunidade de conhecer um gênero em especial que despertou minha atenção - as atividades que estão relacionadas a paradoxos[1] matemáticos.

Um dos primeiros contatos que tive com este assunto, foi em um artigo escrito por Maria Dolores Ceccato Mendes (1998), intitulado “Fibonacci e a explicação de um Paradoxo”. No referido artigo, a autora propõe uma atividade cujo tema central é um paradoxo geométrico, por meio do qual é possível explorar conteúdos matemáticos tais como áreas de figuras planas, semelhança de triângulos, trigonometria e sequências numéricas. O artigo será analisado e apresentado com maior riqueza de detalhes no capítulo 3. Aqui, resumidamente, informo que a autora apresenta o paradoxo geométrico da seguinte forma:

> Mostramos aqui um aparente paradoxo, que ilustrará a discussão.
> Um quadrado de lado 8 será dissecado conforme a ilustração:
>
> 
>
>
> Área = 8^2 = 64
> Fig.1
>
> Em seguida, as partes obtidas serão montadas de modo a formar um retângulo:
>
> 
>
>
> Área = 13 X 5 = 65
> Fig.2
>
> Observa-se a diferença de uma unidade entre as áreas das figuras, apesar de uma ter sido composta pelas partes da outra.
> Importante observar nesse fato é que se nada foi acrescentado e nada foi retirado, há algum engano que nossa visão está sendo incapaz de captar. Está aí um exemplo que nossos sentidos físicos muitas vezes falham, assim como nossa intuição. Daí a necessidade de uma argumentação lógica – uma dedução. (MENDES, 1998, p.15)

[1] No Capítulo 2 são apresentadas definições para os paradoxos.

Mendes (1998, p.15), justifica que existe um movimento mundial mostrando a preocupação de se adequar o ensino da Matemática ao interesse do aluno e este fato aponta muitas vezes para a necessidade da utilização de materiais didáticos alternativos.

Assim, se a finalidade é que o aluno estude áreas de polígonos, provavelmente o interesse e a curiosidade do aluno serão mais aguçados ao trabalhar o paradoxo geométrico proposto por Mendes se comparado a pedir que o aluno simplesmente calcule a área de uma determinada figura plana. E não estamos querendo ingenuamente dizer que é apenas com este tipo de material alternativo que o aluno será estimulado a estudar áreas ou qualquer outro assunto da Matemática. Entendemos que materiais como o paradoxo proposto por Mendes, são teoricamente desafiadores para os alunos e têm potencial para explorar diversos assuntos no campo da Matemática, mas ainda são pouco utilizados nas aulas. Ainda de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais é ressaltado que o aluno deve ver a Matemática:

> [...] como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas (BRASIL, 1997, p.15).

Em novembro de 2001, também me chamou a atenção um artigo publicado no Jornal Folha de São Paulo, denominado "Ganhe $100\ m^2$ com um paradoxo", de autoria de José Luiz Pastore Mello. Trata-se de um "Paradoxo Geométrico", segundo o qual um lote de formato triangular é dividido em quatro lotes, sendo três triangulares e um retangular. A surpresa é que a soma das quatro áreas dos lotes que compõem o terreno maior, é $100\ m^2$ menor que a área do terreno maior, quando se calcula as referidas áreas separadamente.

Mais um material que julgamos ter potencial para ser trabalhado na sala de aula. No capítulo 4, analisamos este paradoxo e acreditamos que para investigar este tipo de problema são necessários: reflexão, questionamento, argumentação lógica e capacidade de análise crítica por parte do estudante. O processo de desenvolver habilidades como estas, vai ao encontro de um dos objetivos dos Parâmetros Curriculares Nacionais. Segundo o qual os alunos devem ser capazes de

> [..] questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação (BRASIL, 1997).

Pouco tempo depois, para ser mais preciso, em 2003, tive a oportunidade de propor a alunos do Ensino Médio que tentassem resolver a seguinte questão:

> Por hipótese, considere que
> $a = b$
> Multiplique ambos os membros por a
> $a^2 = ab$
> Subtraia de ambos os membros b^2
> $a^2 - b^2 = ab - b^2$
> Fatore os termos de ambos os membros
> $(a + b).(a - b) = b(a - b)$
> Simplifique os fatores comuns
> $a + b = b$
> Use a hipótese que $a - b$
> $2b = b$
> Simplifique a equação e obtenha
> $2 = 1$
>
> A explicação para isto é:
>
> a) a álgebra moderna aplicada a teoria dos conjuntos prevê tal resultado.
> b) a hipótese não pode ser feita, pois como $2 = 1$, a deveria ser $b + 1$.
> c) na simplificação dos fatores comuns ocorreu divisão por zero, gerando o absurdo.
> d) na fatoração, faltou o termo igual $a - 2ab$ no membro esquerdo.
> e) na fatoração, faltou o termo igual $a + 2ab$ no membro esquerdo.

Trata-se de uma das questões do vestibular da Universidade Estadual Paulista (UNESP), de 2003, na qual é abordada uma “demonstração” que parte de uma hipótese plausível, desenvolve-se de maneira aparentemente coerente do ponto de vista da Matemática, mas chega a uma conclusão absurda. “Demonstração” similar pode ser encontrada nos apêndices do livro “O Último Teorema de Fermat” (SINGH, 1998, p299), com título “Perdendo-se no absurdo”.

É importante salientar o espanto dos alunos quando se deparam com a referida “demonstração”. De início, os mais desavisados não questionaram a conclusão absurda. Aparentemente aceitaram que deveria existir alguma “álgebra moderna que aplicada a teoria dos conjuntos prevê tal resultado”. Saída apresentada no primeiro item da questão mencionada, para justificar o absurdo.

Alguns ainda pareciam estupefatos e disseram que aquela demonstração só poderia ser explicada por meio de magia ou de bruxaria. No entanto, quando entenderam que devia haver um erro, acabaram se empenhando no levantamento de hipóteses e fazendo a verificação das mesmas, com o objetivo de solucionar a situação, ou então, queriam provar para si mesmos que não existem as bruxas, ou mágicos que fazem dois números naturais distintos serem iguais.

A reação dos alunos ocasionada pela natureza desafiadora de questões que partem de premissas aparentemente verdadeiras, desenvolvem-se por etapas aparentemente lógicas e chegam a conclusões absurdas, me incentivou a continuar pensando na viabilidade de se explorar mais esse tipo de situação nas aulas de Matemática.

Apesar de crermos que alguns paradoxos matemáticos tenham potencial para ser explorados na sala de aula, não acreditamos que basta o professor apresentar paradoxos, com características descritas no parágrafo anterior, para que automaticamente o aluno se sinta motivado a estudar toda a Matemática que se encontra naquele contexto.

1.1 A Escolha de um Procedimento Metodológico para o Uso de Paradoxos nas Aulas de Matemática

Durante a realização de uma aula de Matemática ainda é comum que conceitos sejam apresentados seguidos de exemplos de aplicação, finalizando com uma série de exercícios que geralmente seguem padrões de resolução. Ou seja, a idéia central, ainda é que, conceitos devem ser "ensinados" pelos professores e "aprendidos" pelos alunos e que a melhor forma disso acontecer é valorizar a memorização, a aplicação de técnicas, regras e algoritmos.

Podemos inferir que essa metodologia ainda está presente na sala de aula brasileira ao analisarmos as Orientações Educacionais Complementares (da área de Ciências da Natureza Matemática e suas Tecnologias) aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Os elaboradores deste documento destacam que os professores não deveriam "[...] insistir em programas extensos, com conteúdos sem significado e fragmentados, transmitindo-os de uma única maneira a alunos que apenas ouvem e repetem [...]" (BRASIL, 2002, p.113).

Diante deste quadro o referido documento dá à resolução de problemas o status de "peça central para o ensino de Matemática" (BRASIL, 2002, p.112). Aponta ainda que os desafios enfrentados nessa forma de trabalho podem ajudar o aluno no desenvolvimento das competências gerais[2] que se espera que ele venha a ter. Procura justificar explicitando que essas competências não se desenvolvem

> [...] quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas Matemáticas, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas (BRASIL, 2002, p.112).

Essas idéias vão ao encontro com as de Lins e Gimenez (1997), que se posicionam contrários as práticas de reduzir as aulas de Matemática ao simples ato de resolver exercícios. Nesse caso seria valorizado o cálculo pelo cálculo, sem a preocupação com a produção de significados[3].

Dante (1998) defende que "[...] o ponto de partida das atividades Matemáticas não é a definição, mas o problema; que o problema não é um exercício no qual o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou uma determinada técnica operatória [...]" (DANTE, 1998, apud ONUCHIC,1999).

Os autores portugueses João Pedro da Ponte, Joana Brocardo e Hélia Oliveira (2005) recorrem ao George Pólya (1977) para diferenciar os problemas dos exercícios. Assim, definem o problema como uma questão para a qual o aluno não consegue visualizar um método para resolver de forma imediata, enquanto o exercício é uma questão que pode ser resolvida com a simples aplicação de um algoritmo previamente conhecido.

Porém os problemas e os exercícios têm algo em comum:

> Em ambos os casos, o seu enunciado indica claramente o que é dado e o que é pedido. Não há margens para ambigüidades. A solução é sabida de antemão, pelo professor, e a resposta do aluno ou está certa ou está errada (PONTE, BROCARDO; OLIVEIRA, 2005, p. 23).

---

[2] Informar e informar-se, comunicar-se, expressar-se, argumentar logicamente, aceitar ou rejeitar argumentos, manifestar preferências, apontar contradições, fazer uso adequado de diferentes nomenclaturas, códigos e meios de comunicação são competências gerais e recursos de todas as disciplinas e, por isso, devem se desenvolver no aprendizado de cada uma delas (BRASIL, 2002, p.113).

[3]. Significado é a relação entre uma crença-afirmação e uma justificativa para ela (LINS, 1993, p.86).

Os referidos autores portugueses nos apresentam outra opção de trabalho para realizar com os alunos: as Investigações Matemáticas na Sala de Aula. Advogam que, diferente da metodologia da Resolução de Problemas, nas investigações as questões são abertas, não estão bem definidas no início da atividade e além de papel do professor, cabe também a quem investiga definir inclusive o que vai estudar.

De acordo com João Pedro da Ponte, Hélia Oliveira, Lina Brunheira e José Manuel Varandas (1999, p.1) “tanto o matemático profissional como o jovem aluno podem exercer a sua curiosidade colocando questões a si próprios sobre as propriedades dos objectos matemáticos”.

Desta forma

> [...] o aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação dos resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor (PONTE, BROCARDO; OLIVEIRA, 2005, p. 23).

Lins e Gimenez (1997) ressaltam a importância de se realizar atividades nas quais o aluno é chamado a agir como um matemático. Fazem questão de explicitar que:

> Esse tipo de trabalho fomenta uma idéia de atividade Matemática mais próxima do que ela é em si mesma: um exercício de busca constante, com conjecturas, refutações, reflexões, generalizações etc, em que o operatório (cálculos) desempenha somente um papel predominantemente instrumental (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 53).

Certamente é desejável que estudantes dos Ensinos Fundamental e Médio possam experimentar agir como um matemático. Mas como proceder para que as práticas de investigação desenvolvidas por matemáticos possam ser trazidas para a sala de aula?

Vamos tentar responder a essas perguntas apresentando uma síntese da Investigação Matemática na Sala de Aula.

1.1.1 Investigação Matemática na Sala de Aula

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2005) a investigação utilizada por matemáticos pode ser também utilizada na sala de aula, sem, no entanto, requerer a abordagem de problemas muito sofisticados. Assim, dada uma Tarefa de Investigação, espera-se que os alunos levantem questões que sejam do interesse deles, para as quais não têm respostas prontas e que busquem as respostas por meio de conjecturas, verificação das conjecturas, possíveis refutações, prováveis refinamentos de conjecturas, generalizações e demonstrações.

Segundo os autores portugueses é possível planejar o início de uma atividade de investigação, mas é impossível prever como essa atividade vai acabar. Os rumos distintos que os alunos podem tomar, as possíveis reações às intervenções feitas pelo professor, as divergências que podem surgir nas tomadas de decisão, os possíveis avanços, as possíveis descobertas, são elementos imprevisíveis na aula de investigação (PONTE, BROCARDO; OLIVEIRA, 2005).

Ponte, Brocardo e Oliveira (2005) destacam três fases presentes na aula de investigação:

> (i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito, (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma, e (iii) discussão dos trabalhos, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado (PONTE, BROCARDO; OLIVEIRA, 2005, p. 25).

A primeira fase é descrita como “o arranque” e apesar de relativamente curta é de extrema importância para o desenvolvimento da aula. O professor deve explicar aos alunos o que se espera deles na investigação, principalmente quando esta tarefa ainda é nova para classe. Assim é de suma importância que o aluno entenda o que significa investigar. Para que isso ocorra o indivíduo deve compreender a natureza de uma Tarefa de Investigação, que é bem diferente das atividades praticadas nas aulas tradicionais, nas quais conceitos são apresentados, seguidos de exemplos de aplicação, finalizando com uma série de exercícios que geralmente seguem padrões de resolução.

Também deve ficar claro para os alunos que “podem contar com o apoio do professor, mas que a atividade depende, essencialmente, da sua própria iniciativa” (PONTE, BROCARDO; OLIVEIRA, 2005, p. 28).

Durante o desenvolvimento da tarefa (segunda fase) o professor deve tentar compreender como o trabalho dos alunos está se desenvolvendo, qual é o rumo que está tomando, prestar o devido apoio, entretanto deve ser cauteloso para não condicionar a exploração da atividade. Durante esta fase os alunos podem explorar a situação, levantar as questões, formular, testar e justificar suas conjecturas.

A discussão é a fase final da investigação. Durante este momento, cada grupo, com a ajuda do professor apresenta aos demais o desenvolvimento e os resultados mais expressivos. É também nesta fase que os grupos questionam-se mutuamente e por meio destas discussões as conjecturas e as justificativas podem ser refinadas. Recomenda-se também que os alunos façam um relatório, descrevendo de forma detalhada o trabalho que realizaram.

1.1.2 Nossa Escolha Metodológica e os Nossos Objetivos

Uma breve incursão sobre Investigação Matemática e Resolução de Problemas como procedimentos Metodológicos nos coloca frente a uma dúvida: qual escolha parece ser mais adequada para a introdução de atividades associadas a alguns paradoxos nas aulas de Matemática?

Na Resolução de Problemas o professor é responsável pela criação de um ambiente matemático motivador, não adianta “[...] apresentar o problema, sentar-se e esperar que uma magia aconteça” (VAN DE WALLE, J.A., 2001, apud ONUCHIC; ALLEVATO, 2005, p.221). Na Investigação Matemática na Sala de Aula, o professor também precisa estar atento para garantir que os alunos evoluam na realização da investigação. Cabe também ao professor fazer perguntas que estimulem o aluno a olhar em outras direções e refletir sobre o que estão fazendo (PONTE, BROCARDO; OLIVEIRA, 2005). Assim, nas duas metodologias o professor participa ativamente do processo.

Na metodologia de Resolução de Problemas acredita-se que os alunos são capazes de fazer Matemática e que agindo dessa maneira a Matemática faz sentido para o aluno (ONUCHIC; ALLEVATO, 2005). De acordo com os autores portugueses que defendem da Investigação Matemática na Sala de Aula, o aluno é chamado a agir como matemático. Portanto, constata-se mais uma característica comum aos dois procedimentos.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2005) afirmam que

> Uma investigação Matemática desenvolve-se em torno de um ou mais problemas. Pode mesmo dizer-se que o primeiro grande passo de qualquer investigação é identificar claramente o problema a resolver. Por isso, não é de admirar que, em Matemática, existe uma relação estreita entre problemas e investigações (PONTE, BROCARDO; OLIVEIRA, 2005, p. 16).

Certamente muitos professores de Matemática já puderam presenciar durante o processo de resolução de problemas ou até mesmo de exercícios, alunos se interessarem por explorar outros contextos, além dos que estavam previstos no enunciado, levantando hipóteses e tentando refletir sobre questões alternativas. Em muitos casos, mesmo que o aluno não consiga chegar à solução esperada, o processo não perde seu valor, pelas descobertas imprevistas que pode proporcionar. Este tipo comportamento está mais próximo do que se espera do aluno nas atividades de investigação Matemática.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais

> O fato de o aluno ser estimulado a questionar sua própria resposta, a questionar o problema, a transformar um dado problema numa fonte de novos problemas, a formular problemas a partir de determinadas informações, a analisar problemas abertos – que admitem diferentes respostas em função de certas condições – , evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletida que constrói conhecimentos (BRASIL, 1997, p42).

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2005), quando se estuda um problema o objetivo é, naturalmente, resolvê-lo. Entretanto na tentativa de resolver o problema pode-se fazer descobertas, que em alguns casos, são mais importantes que a solução do problema original.

Ian Stewart (1995, apud PONTE, BROCARDO; OLIVEIRA, 2005), também faz questão de frisar que considera essencial a investigação de problemas abertos. Segundo Stewart (1995) "Um bom problema é aquele cuja solução, em vez de simplesmente conduzir a um beco sem saída, abre horizontes inteiramente novos [...]" (apud PONTE, BROCARDO; OLIVEIRA, 2005, p. 16).

De acordo com Ponte, Fonseca e Brunheira (1999),

> Uma investigação é uma viagem até ao desconhecido. A idéia pode ser ilustrada pela metáfora geográfica de Susan Pirie: "o importante é explorar um aspecto da Matemática em todas as direcções. O objectivo é a viagem e não o destino" (1987, p. 2). Assim, na resolução de problemas tal como é entendida inicialmente, o objectivo é encontrar um caminho para atingir um ponto não imediatamente acessível. É um processo convergente. Numa investigação Matemática, o objectivo é explorar todos os caminhos que surgem como interessantes a partir de uma dada situação. É um processo divergente. Sabe-se qual é o ponto de partida mas não se sabe qual será o ponto de chegada (PONTE, FONSECA & BRUNHEIRA, 1999, p.3).

Os autores elucidam a principal diferença entre os dois procedimentos metodológicos. A Resolução de Problemas é um processo convergente, deve-se responder a pergunta feita no enunciado. Já a Investigação Matemática é um processo divergente, o professor sabe como a atividade começa, mas não sabe quais são as questões que os alunos se interessarão em estudar, portanto não sabe como a atividade termina. Nas atividades de investigação, o professor não pode ser muito específico em relação aos caminhos que o aluno deve seguir, para não condicionar a investigação. Desta forma é comum que a mesma Tarefa de Investigação seja explorada em diferentes níveis de escolaridade.

Para justificar o procedimento metodológico a ser adotado na experiência de ensino, devemos relatar que um dos objetivos desta dissertação é discutir a viabilidade de se trabalhar paradoxos nas aulas de Matemática. Desta forma, torna-se importante tentar responder a duas questões que norteiam este trabalho: i) Qual é a viabilidade de se utilizar paradoxos nas aulas de Matemática? ii) Quais paradoxos utilizar?

As questões norteadoras parecem demasiadamente simples, mas pensamos que para responder as duas questões precisamos responder a várias outras, dentre as quais citamos: O aluno se interessará em explorar paradoxos matemáticos? Que Matemática pode ser explorada em cada um dos paradoxos? Ao investigar questões dessa natureza os alunos levantam hipóteses? Percebem e contestam possíveis falácias nos paradoxos investigados? Fazem reflexões e generalizações? Validam suas argumentações?

Assim, com a finalidade de buscar respostas para essas questões, consideramos conveniente utilizar a Investigação Matemática na Sala de Aula como procedimento metodológico para realização de uma Experiência de Ensino neste trabalho.

Isso se explica pelo fato que adotando esta metodologia os alunos ficam mais livres para tomar decisões. Após tentar responder as perguntas iniciais da Tarefa de Investigação podem decidir o que vão investigar. Desta forma fica mais fácil também para o professor-pesquisador perceber: 1) se os alunos estão se interessando por aquele tipo de atividade; 2) se estão explorando algum conteúdo matemático - quais conteúdos? e 3) como o processo está ocorrendo? Isto é: se os alunos são capazes de levantar hipóteses; se são capazes de perceber e contestar possíveis falácias nos paradoxos investigados; se são capazes de fazer reflexões, generalizações e até mesmo se são capazes de demonstrar.

1.1.3 Estrutura do Trabalho

Neste trabalho são apresentados e analisados mais detalhadamente quatro paradoxos matemáticos. Para facilitar a identificação de cada um deles vamos usar a seguinte nomenclatura: “Paradoxo de Carroll”, “Paradoxo de Mello”, “Paradoxo $2 = 1$ ” e “Paradoxos de Partilha”.

No entanto, além da apresentação e da análise, julgamos importante exibir uma Experiência de Ensino, para que não se crie expectativas utópicas sobre a possibilidade de se explorar um paradoxo nas aulas de Matemática.

Neste contexto, além de apresentar e analisar o “Paradoxo de Carroll”, aplicamos uma Experiência de Ensino em que os participantes exploram o paradoxo por meio de Investigação Matemática.

Considerando o “Paradoxo de Mello”, apresentamos a forma como foi encontrado na literatura, propusemos modificações para se adaptar a metodologia da Investigação Matemática e simulamos sua aplicação.

Já, no caso do “Paradoxo $2 = 1$ ” e dos “Paradoxos de Partilha”, não indicamos metodologias para se aplicar nas aulas, apenas fazemos a apresentação e uma breve análise.

Assim, no presente capítulo, discorremos sobre um possível procedimento metodológico para se explorar paradoxos nas aulas de Matemática. No capítulo 2, promovemos uma reflexão sobre os paradoxos e sobre as possíveis classificações desse tema. No capítulo 3, apresentamos, analisamos e aplicamos uma Experiência de Ensino com o “Paradoxo de Carroll”. No capítulo 4, exibimos, propomos algumas adaptações e simulamos uma aplicação com o “Paradoxo de Mello”. Finalmente, no capítulo 5, fazemos a apresentação e uma breve análise do “Paradoxo $2 = 1$ ” e de “Paradoxos de Partilha”.

2 PARADOXOS

O nosso interesse nesse capítulo não é fazer um estudo aprofundado sobre este tema, discutindo do ponto de vista da Filosofia, da Lógica e da Matemática a existência dos paradoxos. O nosso intuito é comentar algumas definições para o termo paradoxo e discorrer sobre possíveis classes de paradoxos, apresentando e comentando alguns deles, visando subsidiar as nossas discussões sobre o uso de paradoxos nas aulas de Matemática.

Ainda no primeiro encontro de orientação, ao apresentar a proposta de desenvolver uma dissertação cujo tema principal era verificar a viabilidade de se trabalhar paradoxos matemáticos na sala de aula, a Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida me fez refletir ao fazer questionamentos importantes - As atividades que norteariam esta dissertação eram realmente baseadas em paradoxos? O que é um paradoxo? Qual é a definição de paradoxo nos dicionários de língua portuguesa? E nos livros de lógica? E nos livros de filosofia? Essas definições são iguais? São ao menos parecidas? Estas perguntas nos impulsionam para uma pesquisa mais intensa nos dicionários, em livros de lógica, de filosofia, de filosofia da Matemática e de filosofia da lógica sobre paradoxos, a fim de entender melhor a análise de alguns matemáticos, lógicos e filósofos sobre os paradoxos.

2.1 SOBRE PARADOXOS EM MATEMÁTICA

Segundo Edward Kasner e James Newman (1968, p. 189), "talvez o maior de todos os paradoxos é haver paradoxos na Matemática". Com esta frase, os autores apontam para o fato de que é bastante comum encontrar inconsistências nas ciências empíricas, as quais constantemente sofrem modificações revolucionárias, mas não se espera que seja assim na Matemática.

Nas ciências empíricas é comum ocorrer contradições, como por exemplo - alguns cientistas publicam artigos defendendo que o consumo de leite é vital ao ser humano por agregar vários tipos de nutrientes que são essenciais à nossa sobrevivência. Outros cientistas destacam que seus estudos apontam para o fato que o ser humano adulto não deveria consumir leite sob hipótese alguma, pois o uso cotidiano dessa bebida aumenta o colesterol, causa alergia e agrava os sintomas da artrite, artrose, rinite e bronquite.

Já para a Matemática, não se espera estes tipos de contradições,

> [...] como a Matemática constrói sobre o antigo, mas geralmente não o abandona, como é a mais conservadora das ciências, como seus teoremas são deduzidos de postulados pelos métodos da Lógica, apesar de sofrer modificações revolucionárias, não imaginamos que é uma matéria capaz de engendrar paradoxos (KASNER; NEWMAN, 1968, p. 189).

Mais adiante discutiremos alguns paradoxos matemáticos, porém de início nos ocuparemos em definir o termo paradoxo.

Para o senso comum, paradoxo tem sinônimo de contradição ou de contrário à opinião comum. Mais especificamente, nos dicionários de Língua Portuguesa aparece o referido termo, com definição próxima ou idêntica a que segue:

> PARADOXO s.m. (Do gr. Paradoxon, de para, contra + doxa, opinião.) 1. Contradição, pelo menos aparente. – 2. Opinião contrária a opinião comum. – Contradição a que chega, em certos casos, o arrazoamento abstrato. – 4. Contra-senso (LAROUSSE, 1999, p. 689).

No entanto, restaram ainda algumas dúvidas, dentre as quais saber se as definições dadas nos dicionários de Língua Portuguesa são próximas das definições dadas pelos autores de livros de Lógica, de Matemática ou de Filosofia.

No livro Compêndios de Matemática e Lógica Matemática, o autor Carlos Magno Corrêa Dias (1999), utiliza a seguinte definição:

> Paradoxo é um argumento que produz uma conclusão surpreendente, à qual é contrária à nossa intuição. Os paradoxos podem ser classificados em Paradoxos Verídicos (aqueles que apresentam conclusões verdadeiras) e em Paradoxos Falsídicos (aqueles que apresentam conclusões falsas) (DIAS, 1999, p. 53).

Assim, a definição dada por Dias (1999) não está tão distante das definições dos dicionários, mas tem algo diferente, mais específico. O autor classifica os paradoxos em Paradoxos Verídicos e Paradoxos Falsídicos e coloca em outro grupo as Antinomias[4], que para Dias não são paradoxos.

Já para Sainsbury (2009), classifica os paradoxos em níveis ou graus de dificuldade, de 1 a 10. Assim, é atribuído a cada paradoxo um determinado grau, dependendo do quão bem a aparência camufla a realidade. Então, recebem grau 1 os superficiais, e os mais difíceis de serem tratados, são os de grau 10.

[4] As Antinomias serão abordadas na página 30.

Sainsbury (2009) explicita que o “Paradoxo do Barbeiro” é um exemplo dos paradoxos de grau 1.

Apresentamos a versão de Cardoso (2010) para o Paradoxo do Barbeiro, acompanhada da análise do mesmo autor:

> [...] suponha uma vila que possui um barbeiro que barbeia todos aqueles que não barbeiam a si mesmos. Este barbeiro barbeia a si mesmo? Se sim, então ele é barbeado pelo barbeiro que só barbeia aqueles que não barbeiam a si mesmos, logo, não barbeia a si mesmo. Mas se não, então ele deve ser barbeado pelo barbeiro que barbeia quem não barbeia a si mesmo, ele mesmo, logo, sim, ele barbeia a si mesmo. Ele barbeia a si mesmo se, e somente se, ele não barbeia a si mesmo. O argumento é uma prova *ad absurdum* de que não deve haver um barbeiro ou uma vila que satisfaçam tal condição (CARDOSO, 2010, p. 9).

Sainsbury (2009) também faz questão de explicitar que para ele o “Paradoxo do Mentiroso”, pertence ao nível 10.

Vamos expor um fragmento de uma das versões deste paradoxo, que pode ser encontrado no livro “Um Panacum de Paradoxos”:

> Platão e Aristóteles estavam andando no bosque da Academia, onde encontravam Eudoxo, em profundo pensamento. No momento em que o encontraram, Platão mal havia acabado de dizer, “O que eu estou dizendo agora é falso”. Despertado pelo ruído dos dois interlocutores, Eudoxo perguntou, “Que é que há, Platão?”
> “Estou apenas ensinando a Aristóteles aqui os primeiros passos na lógica. Diga-me uma coisa: Se um homem diz que está mentindo – e não diz nada mais –, o que ele diz é verdadeiro ou falso?”
> “Vamos ver”, replicou Eudoxo. “Por um lado, se o homem está, de fato, mentindo, o que ele diz é falso. Daí, é falso que ele está mentindo e, portanto, ele está dizendo a verdade. Assim, se ele está mentindo, ele não está mentindo. Por outro lado, se o homem não está mentindo, o que ele diz é verdadeiro. Daí, ele está, de verdade, mentindo e, assim, está dizendo uma falsidade. Desta forma, se ele não está mentindo, ele está mentindo. Em todos os dois casos temos uma contradição. Penso que o que ele diz é nem verdadeiro nem falso e, sim, sem sentido. [...] (ERICKSON; FOSSA, 2006, p.5).

O “Paradoxo do Mentiroso” caracteriza-se por apresentar uma contradição entre duas leis, mas que se analisadas separadamente aparentam ser igualmente coerentes. Com intenção de exaltar o grau de dificuldade de se estudar este paradoxo, Sainsbury (2009) satiriza informando que esse paradoxo atormentou muitos lógicos da antiguidade e causou a morte prematura de pelo menos um deles - Filetas de Cos.

Outra variante bastante conhecida do Paradoxo do Mentiroso é a do Paradoxo de Epimênides, que pode ser encontrado no livro “Filosofia das Lógicas”. Segundo a autora, Susan Haack, o paradoxo “[...] diz respeito a um cretense chamado Epimênides, que teria supostamente dito que todos os cretenses são sempre mentirosos” (HAACK, 2002, p.186).

Ainda segundo a autora, “alguns paradoxos são contraintuitivos, mas o Paradoxo do Mentiroso conduz, através de raciocínio aparentemente válido, a uma contradição” (HAACK, 2002, p.185).

Já o autor do livro “Filosofia da Matemática”, Stephen F. Barker (1976), não fala de níveis de complexidade dos paradoxos, mas divide os paradoxos em três classes, entretanto não usa nomenclatura específica para estas classes.

Segundo o autor “Na linguagem ordinária, o termo paradoxo pode ser utilizado para fazer referência a situações que parecem impossíveis ou mesmo autocontraditórias, mas que, não obstante, são verdadeiras” (BARKER, 1976, p.110). Barker (1976), aponta que pertencem a esta classe os paradoxos relacionados a teoria de Cantor, segundo a qual, por exemplo, existem tantos números naturais quanto quadrados perfeitos.

“Em outro sentido, dizemos que há um paradoxo quando um argumento que parece perfeitamente legítimo nos leva a uma conclusão absurdamente falsa” (BARKER, 1976, p.111). Entre esses paradoxos estão os paradoxos de Zenão, que partem de premissas aparentemente plausíveis e chegam à conclusão absurda que nada neste mundo chega a mover-se.

Ainda, de acordo com o autor há uma terceira classe de paradoxos: “é quando se está na situação de mostrar, por meio de raciocínio perfeitamente lícito, na aparência que algo deve ser verdadeiro e falso ao mesmo tempo - paradoxos dessa terceira espécie recebem às vezes o nome de antinomias” (BARKER,1976, p.111). Exemplos desse tipo de paradoxo é o Paradoxo de Epimênides ou o Paradoxo do Mentiroso.

Neste sentido, as idéias de Barker (1976) vão ao encontro com as de Quine (1976), segundo o qual os paradoxos são agrupados em três classes: a dos Paradoxos Falsídicos, a dos Paradoxos Verídicos e a classe das Antinomias. No entanto, Barker não dá nome às três classes de paradoxos por ele definidas.

Portanto podemos considerar que, quando a pesquisa é feita em livros de Lógica, de Filosofia, de Filosofia da Matemática ou Filosofia da Lógica, as definições de paradoxo são mais específicas dentro de cada área, mas não são divergentes das que aparecem nos dicionários. Entretanto nos livros de Lógica, de Filosofia, de Filosofia da Matemática ou Filosofia da Lógica os autores subdividem e classificam os paradoxos, no entanto não há um consenso nas subdivisões e nas classificações.

A fim de deixar mais clara a classificação adotada por Quine[5] (1976), que é a que assumimos como fundamentação neste trabalho, vamos descrever e exemplificar cada uma das três classes definidas por ele.

2.1.1 Antinomias

Vamos iniciar escrevendo sobre a classe de paradoxos denominada Antinomia. Para Quine (1976), as antinomias são paradoxos que resultam de uma contradição entre duas proposições, em que cada uma delas é racionalmente defensável. Nos dicionários encontramos:

> ANTINOMIA s.f. (Do gr. Anti, contra + nomos, lei.) 1. Contradição entre duas proposições de significações opostas; mais especialmente, entre duas ideias gerais (ou abstrações) tiradas da realidade. (...) 3. Contradição que surge no interior de uma teoria ou no decurso de um raciocínio (LAROUSSE, 1999, p. 68).

Analisando as definições de Antinomia e Paradoxo, é notável que ambas tratem de contradições, mas a Antinomia, segundo Dias "é um argumento constituído de uma contradição interna, a qual é independente das nossas convicções" (1999, p. 54), enquanto nos paradoxos o argumento produz uma conclusão surpreendente, que contraria nossa intuição.

Haack (2002) simplifica inferindo que as Antinomias levam a uma contradição e outros paradoxos são contraintuitivos.

De acordo com Cardoso (2010) o Paradoxo do Mentiroso, que explicitamos neste capítulo é uma Antinomia.

Outro exemplo de Antinomia, segundo Dias (2003) é o Paradoxo de Russell, também conhecido como "Paradoxo do Conjunto de Todos os Conjuntos". A seguir, apresentamos uma reflexão sobre este paradoxo:

---

[5] Quine (1976) e Barker (1976) adotam a mesma classificação para os paradoxos. Barker (1976) divide os paradoxos em três classes, entretanto não usa nomenclatura específica para estas classes. Com isso, julgamos conveniente utilizar a nomenclatura adotada por Quine (1976).

> Seja ω o conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si mesmos. O que se pode dizer de ω? Pertence ele a si mesmo ou não? Se ω pertencer ao conjunto dos conjuntos que não são elementos de si mesmos, ele não é elemento de si mesmo, mas segue daí que ele pertence ao conjunto ω e, portanto, que ele é elemento de si mesmo – uma contradição. A suposição oposta conduz, igualmente, a uma contradição. Cada resposta implica o seu contrário, isto é, o conjunto ω é elemento de si mesmo se, e somente se, não for elemento de si mesmo (SCIENTIFIC AMERICAN BRASIL, 2007, n.8, p. 23).

No livro “Problemas e Exercícios de Lógica Matemática”, Dias (2003) usa argumentação lógico-matemática para mostrar que o Paradoxo de Russell é uma Antinomia, conforme explicitamos a seguir:

> O Paradoxo de Russell, por sua vez, está associado à admissão de um conjunto C que seja o conjunto de todos os conjuntos que não contém a si mesmo como membro; ou seja, em se admitir que C seja definido por $C = \{X \mid X \notin X\}$. E nessas condições pergunta-se, então, C pertence ou não pertence a si mesmo?
> De imediato, evidenciam-se dois casos passíveis; quais sejam:
> i) “C pertence a C ?”; ou
> ii) “C não pertence a C ?”
> Observe, então, que no caso (i), se C pertence a C, então pela definição de C, C não pertence a si mesmo. E, entretanto, no caso (ii), se C não pertence a C, então, também pela definição de C, C pertence a si mesmo. Observe, assim, que ambos os casos tomados conduzem a uma contradição.
> Logo, no contexto desse estudo, o Paradoxo de Russell evidencia uma Antinomia.
> Salienta-se, porém, que pelas considerações apresentadas, pode-se concluir que o conjunto C pertence ao conjunto C se, e somente se, o conjunto C não pertence ao conjunto C; o que, notadamente, corresponde a enunciar uma contradição (DIAS, 2003, p.340).

É importante frisar que o Paradoxo de Russell não é apenas um jogo que chega a uma contradição lógica, mas um paradoxo que entrou para a história da Matemática. As repercussões causadas por esta Antinomia foram responsáveis por iniciar uma crise nos fundamentos na Matemática. A contradição gerada pelo referido paradoxo, colocou em cheque a teoria dos conjuntos infinitos de George Cantor (SCIENTIFIC AMERICAN BRASIL, 2007, n.8).

Segundo D’Ottaviano e Feitosa (2003), com o “Paradoxo do Conjunto de Todos os Conjuntos”, Russell procurou provar que havia uma inconsistência na demonstração de Cantor, ou seja, que não se pode afirmar que existe um cardinal maior que todos os outros.

Também queria mostrar que havia uma falha no sistema de Frege. “Como esse paradoxo pode ser obtido a partir dos axiomas lógicos por ele mesmo introduzidos, Frege acreditou que os fundamentos de sua construção da aritmética estivessem destruídos” (D’OTTAVIANO; FEITOSA, p.7, 2003).

Pode-se notar esse fato na reação de Frege, ao receber um paradoxo enviado por Russell:

> Não há nada mais calamitoso para um homem de ciência do que ver ruir fundamentos de seu trabalho, quando pensa ter acabado sua obra. Foi o que me aconteceu ao receber uma carta do senhor Bertrand Russell, no momento em que meu livro ia ser impresso (SCIENTIFIC AMERICAN BRASIL, n. 8, p. 26).

De acordo com D’Ottaviano e Feitosa (2003), em 1909, no IV Congresso Internacional de Matemática, “Poincaré conclamou a comunidade Matemática para que fosse encontrada uma solução para a crise dos paradoxos [...]” (D’OTTAVIANO; FEITOSA, p. 9, 2003).

Apresentamos aqui, um relato histórico, mostrando algumas produções na tentativa de solucionar, a crise gerada pelos paradoxos:

> Russell e Whitehead, com a publicação dos Principia Mathematica em 1910, 1912 e 1913 (Whitehead & Russell 1973), inauguram um novo período na história da lógica, solucionando o problema das antinomias semânticas e sintáticas (D’Ottaviano 1990). Introduzem a teoria ramificada de tipos, um sistema que incorpora o esquema de notação lógica de Peano (1894-1908) e estabelece uma hierarquia de tipos e coleções.
>
> A teoria dos conjuntos, nascente no começo do século XX, teve suporte para resistir à crise dos paradoxos. Dois sistemas de teoria de conjuntos evoluíram dos trabalhos de Zermelo (1908), Fraenkel (1922), Skolem (1923), von Neumann (1925-1929), Bernays (1937-1954) e Gödel (1940): a Teoria de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel (Teoria ZF) e a Teoria de Conjuntos von Neumann-Bernays-Gödel (Teoria GBN). O Sistema NF de Quine e a Teoria Tarski-Morse-Kelley surgiram posteriormente.
>
> As teorias de conjuntos (Halmos 1970, Di Prisco 1997 e Hrbacek & Jech 1978) apresentam solução parcial para o problema dos paradoxos, eliminando os paradoxos sintáticos da Matemática, e constituem sistemas potentes para a fundamentação da Matemática (D’OTTAVIANO; FEITOSA, 2003, p.9).

Segundo, Erickson e Fossa (2006) quando as Antinomias estão inseridas em uma teoria Matemática, então existe uma inconsistência. Logo, há algo errado com a formulação da teoria, assim faz-se necessário uma reformulação.

Historicamente, as Antinomias não representaram apenas passatempos, atividades recreativas ou jogos, com os quais lógicos, filósofos e matemáticos brincavam. O Paradoxo de Russell é apenas um exemplo, mas não foram poucos os casos, em que esses paradoxos deixaram alguns estudiosos desconcertados.

2.1.2 Paradoxos Verídicos

Em outra classe de paradoxos, estão os Paradoxos Verídicos, que podem ser utilizados para fazer referência a situações que parecem impossíveis, mas apresentam conclusões verdadeiras.

Segundo Dias (2003), um exemplo dessa classe de paradoxos, é conhecido como Hotel de Hilbert.

Este paradoxo pode ser descrito da seguinte forma: Considere um Hotel infinito, cujos quartos são enumerados pelos naturais $1,2,3,...$ e está lotado, ou seja, há um hóspede em cada quarto. Então, chega um novo cliente para hospedar-se no hotel, mas o gerente não vê problema. Apenas pede ao novo hóspede que vá ao quarto de número 1. “Pedirei ao hóspede do quarto 1 que vá para o quarto 2; o do quarto 2 para o quarto 3, e assim por diante”. Então o gerente comunica a todos os hóspedes simultaneamente e solicita que o cliente do quarto n passe para o quarto $n+1$. Assim, o novo hóspede pode ser recebido e acomodado no quarto de número 1.

No outro dia chega um ônibus (infinito), cheio de novos clientes querendo passar a noite no Hotel. O gerente novamente resolve o problema, pedindo que o hóspede de cada quarto vá para o quarto, cujo número é o dobro do quarto que está no momento. Assim, todos os clientes se acomodam nos quartos de números pares. Informa ao motorista que o passageiro da poltrona 1 deve ir para o quarto 1, o da poltrona número 2 para o quarto número 3, e assim sucessivamente de forma que os passageiros que estão nas poltronas de número n vão para o quarto de número $2n-1$.

Pouco tempo depois, chega um grupo mais numeroso, consistindo em uma infinidade de ônibus, cada qual trazendo a bordo infinitos passageiros. O gerente resolve o problema novamente. Então, solicita que todos os hóspedes troquem de quarto. Cada hóspede deve se dirigir ao quarto cujo número seja o resultado de 2 elevado ao número do quarto em que está agora. Então o hóspede do quarto 1 que vai para o quarto $2^1 = 2$. O hóspede de número 2 vai para o quarto de número $2^2 = 4$, e assim sucessivamente, de forma que o hóspede que estiver no quarto de número α vai para o quarto de número 2^α.

Os passageiros do primeiro ônibus devem se dirigir ao quarto cujo número seja o resultado de 3 elevado ao número de seu assento no ônibus. Então o passageiro do primeiro ônibus que estiver no banco de número 1, vai para o quarto de número 3, quem estiver na poltrona 2, vai para o quarto de número 9, quem estiver na poltrona 3, vai para o quarto de número 27, e assim sucessivamente, de forma que o passageiro que estiver sentado na poltrona de número β vai para o quarto de número 3^β . Já os passageiros do segundo ônibus serão acomodados nos quartos cujos números sejam o resultado de cinco elevado ao número de seu assento no banco do ônibus, de forma que o passageiro que estiver sentado na poltrona de número γ vai para o quarto de número 5^γ, com $\gamma \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Os passageiros do terceiro ônibus devem ir ao quarto cujos números sejam o resultado de sete elevado ao número de seu assento no banco do ônibus, de forma que o passageiro que estiver sentado na poltrona de número δ vai para o quarto de número 7^δ, com $\delta \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Já para os próximos ônibus, basta acomodar seus passageiros no Hotel de Hilbert, seguindo a mesma linha de raciocínio, ou seja, um número primo para cada ônibus, utilizando os próximos números primos da sequência como base das potências e os números das poltronas, a partir do 1, como expoente de cada potência.

Seguindo essa linha de raciocínio, é possível afirmar que dois hóspedes distintos nunca ocuparão o mesmo quarto. Vamos explicar este fato.

Considere um hóspede que já estava no hotel antes da “última infinidade” de ônibus chegar e um passageiro do primeiro ônibus. O número do quarto do hóspede pode ser representado por 2^α e o número do quarto do referido passageiro por 3^β, com α e β inteiros e positivos. Se supusermos que esses dois indivíduos devem ocupar o mesmo quarto, teremos que $2^{\alpha}=3^{\beta}$, que é uma contradição. Pelo Teorema Fundamental da Aritmética - “todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único como um produto de números primos” (HEFEZ, 2011, p.83). Como α e β são inteiros positivos e 2 e 3 são primos, necessariamente $2^{\alpha}\neq 3^{\beta}$, para todo α e β pertencentes ao conjunto dos inteiros positivos. Se tomarmos dois hóspedes de dois ônibus distintos que ocuparão os quartos de números p^{x} e q^{y}, com p e q primos distintos e $x,y\in\{1,\ 2,\ 3,...\}$, a demonstração ocorre de modo análogo ao caso anterior e sem perda de generalidade. Portanto, certamente dois hóspedes distintos nunca ocuparão o mesmo quarto.

Voltando a análise filosófica, é fácil concluir que neste paradoxo não se chega a uma conclusão contraditória, mas contraintuitiva. É possível notar que o Hotel de Hilbert é um Paradoxo Verídico, pois não existe contradição no enunciado e nem na conclusão do problema. Apenas são ressaltadas algumas “propriedades surpreendentes” dos conjuntos infinitos, que permeiam as teorias de George Cantor. Dentre elas destacamos para a compreensão do Paradoxo do Hotel de Hilbert, que “subconjuntos infinitos de conjuntos enumeráveis são enumeráveis” (GONÇALVES; GONÇALVES, 2012).

Edward Kasner e James Newman (1968) dão um belo exemplo de que estudar conjuntos infinitos pode ser algo contraintuitivo.

Declaram que

> [...] a classe dos homens e dos matemáticos são, ambas, finitas, qualquer pessoa, verificando que alguns homens não são matemáticos, concluiria corretamente, que a classe dos homens é maior que as duas (KASNER; NEWMAN, 1968, p. 52).

Raciocinando intuitivamente e de forma análoga ao texto anterior, provavelmente, aqueles que não tiveram oportunidade de estudar mais a fundo os conjuntos infinitos, podem concluir que o número de naturais (pares e ímpares) é maior que o número de naturais pares. Contudo, essa conclusão é falsa.

Kasner e Newman (1968) alertam que aquilo que é óbvio para o finito, pode não ser para o infinito, afinal “[...] nossa extensa experiência com o finito é enganadora (KASNER; NEWMAN, 1968, p. 52)”.

O conjunto dos naturais é infinito. Assim, é possível fazer uma correspondência biunívoca entre os números naturais e o conjunto dos números naturais pares. No exemplo a seguir cada elemento localizado imediatamente abaixo de um número natural, é igual dobro desse número.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & \ldots \end{array}$$

Contudo, já que é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os números naturais pares e os naturais, é perfeitamente plausível "contar" os números naturais pares, tal como se conta os elementos de um conjunto finito. Portanto, pode-se inferir que o conjunto dos números naturais pares tem o mesmo número de elementos que o conjunto dos números naturais, ou então que esses conjuntos têm a mesma cardinalidade (KASNER; NEWMAN, 1968) - propriedade como esta costuma ser surpreendente e contraintuitiva.

Assim, chegamos ao paradoxo fundamental de todo conjunto infinito. Desta forma, destacamos a seguinte característica: "[...] uma classe infinita tem a propriedade singular de que o todo não é maior do que algumas de suas partes." (KASNER; NEWMAN, 1968, p. 52).

A fim de descrever um Paradoxo Verídico, mais próximo da realidade dos alunos do Ensino Médio, vamos recorrer ao livro "Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções" dos autores Krerley Irraciel Martins Oliveira e Adán José Corcho Fernández, publicado em 2010.

Ainda no primeiro capítulo, os autores propõem a seguinte questão: "Qual é a chance de que pelo menos duas pessoas num ônibus de 44 passageiros façam aniversário no mesmo dia do ano?" (OLIVEIRA; FERNANDEZ, 2010, p. 6).

Segundo Oliveira e Fernandez "o leitor deve ter cuidado ao responder à pergunta acima, pois podemos nos enganar muito facilmente" (OLIVEIRA; FERNANDEZ, 2010, p. 6).

Os referidos matemáticos fazem a advertência porque sabem, provavelmente por conhecer resultados de métodos empíricos, que para muitos a situação é contraintuitiva. Com isso, inferem que algumas pessoas podem pensar da seguinte forma:

> [...] o ano tem 365 dias e, como estou escolhendo um grupo de 44 (número muito pequeno com respeito a 365 dias) pessoas ao acaso, é claro que podemos responder à pergunta com a seguinte afirmação:
> **Resposta intuitiva:** A chance de que num grupo de 44 pessoas pelo menos duas delas façam aniversário no mesmo dia do ano é pequena (OLIVEIRA; FERNANDEZ, 2010, p. 6).

Oliveira e Fernandez (2010) informam que apesar de não parecer, a probabilidade de que pelo menos duas pessoas do ônibus façam aniversário no mesmo dia do ano, é aproximadamente igual a 93%.

Assim, temos um Paradoxo Verídico, que tomaremos a liberdade de chamar de “Paradoxo do Aniversário”.

No entanto, pode surgir uma dúvida: mas como chegar a este valor?

Uma solução possível é começar calculando a probabilidade das 44 pessoas aniversariarem em dias diferentes.

Tomando A como o evento que representa os casos em que pelo menos duas das 44 pessoas fazem aniversário no mesmo dia, então A^C, que é o evento complementar de A, representa os casos em que as 44 pessoas fazem aniversário em dias diferentes.

O número de elementos do evento A^C é dado por:

$$n(A^C) = 365.364.363 \ldots (366 - 44) = 365.364.363 \ldots 322 = \frac{365!}{321!}$$

O número de elementos do espaço amostral Ω, é dado por:

$$n(\Omega) = 365^{44}$$

Assim, a probabilidade de ocorrer o evento A^C é igual a:

$$P(A^C) = \frac{n(A^C)}{n(\Omega)} = \frac{\frac{365!}{321!}}{365^{44}} = \frac{365!}{321!(365^{44})}$$

Como $P(A) + P(A^C) = 1$, ou seja, a probabilidade de ocorrer o evento A, mais a probabilidade de ocorrer o evento $\bar{A}$ é igual a 100%, então:

$$P(A) = 1 - \frac{365!}{321!(365^{44})} \cong 0{,}93$$

Portanto,

$$P(A) \cong 93\%$$

Tomando um grupo de k pessoas, com $2 \leq k \leq 365$, em um ano que não seja bissexto, a probabilidade $P(A)$ de pelo menos duas pessoas aniversariarem no mesmo dia pode ser calculada da seguinte forma:

$$P(A) = 1 - \frac{365.364.363 \ldots (366 - k)}{365^k}$$

Portanto, $P(A) = 1 - \dfrac{365!}{(365 - k)!\,(365^k)}$

Já vimos que Paradoxos Verídicos representam situações que parecem impossíveis, mas que, não obstante, são verdadeiras. Segundo Quine (1976), um Paradoxo Verídico deixa de ser paradoxo para aquele que o decifra.

Assim, voltando a questão proposta por Oliveira e Fernandez (2010), certamente a situação representa um paradoxo para aqueles que respondem intuitivamente, que a probabilidade de pelo menos duas das 44 pessoas fazer aniversário no mesmo dia, é pequena[6]. Agora, para aqueles que conseguem explicar, de forma coerente, que a referida probabilidade está próxima de 93%, então a referida situação não é paradoxal.

2.1.3 Paradoxos Falsídicos

Em se tratando de definição, os Paradoxos Falsídicos, assim como os Paradoxos Verídicos, são contraintuitivos, mas a natureza dessas classes de paradoxos é diferente.

Sabemos que são verídicos os paradoxos que fazem "referência a situações que parecem impossíveis ou mesmo autocontraditórias, mas que, não obstante, são verdadeiras" (BARKER, 1976, p. 110). Quine (1976), descreve os Paradoxos Falsídicos como aqueles em que a conclusão é sempre falsa e o erro se encontra em alguma premissa ou alguma inferência.

Dois exemplos de Paradoxos Falsídicos, que se enquadram na definição dada por Quine (1976) são: a suposta prova que $2 = 1$, que já comentamos uma de suas versões no primeiro capítulo deste trabalho e o Paradoxo de Zenão.

O Paradoxo de Zenão pode ser enunciado da seguinte forma: O herói grego Aquiles e uma tartaruga resolveram apostar uma corrida. Como a tartaruga é mais lenta, iniciou a corrida com uma certa vantagem. Assim, a tartaruga saiu da linha de largada e Aquiles partiu a uma determinada distância atrás da

---

[6] Conforme sugerem Oliveira e Fernandez (2010, p.6).

referida linha. Segundo Zenão, Aquiles nunca alcançará a tartaruga, pois quando ele chegar à posição (I), que é posição inicial da tartaruga, esta estará mais à frente, numa outra posição, que representaremos por (II). E novamente, quando Aquiles chegar na posição (II), a tartaruga estará novamente à frente, pois estará em uma posição (III), e assim sucessivamente. Logo, de acordo com Zenão, Aquiles nunca alcançará a tartaruga – o que é um absurdo.

Os Paradoxos Falsídicos também são denominados Sofismas por alguns autores, dentre os quais estão Torres (2012), Souza (2001) e Acker (1932). O segundo autor citado, faz uso do termo Argumentação Sofística. No livro “Introdução à Filosofia da Lógica” (1932), Acker define Argumentação Sofística como aquela que “é em geral enganadora, falha em si, mas legítima na aparência” (ACKER, 1932, p. 302).

Ainda, segundo o dicionário de Língua Portuguesa,

> SOFISMA s.m. (do gr. e lat. sophisma.) 1. Argumento que, partindo de premissas verdadeiras, ou julgadas como tais, chega a uma conclusão absurda, mas difícil de ser refutada. – 2. P. ext. Raciocínio vicioso, cuja base repousa num hábil jogo de palavras; é um argumento sedutor, aparentemente correto, mas na realidade falso, destinado a induzir o interlocutor a erro. – 3. Bras. Pop. Enganar, lograr com sofismas (LAROUSSE, 1999, p.836).

De forma geral o termo Sofisma é uma nomenclatura mais popular, encontrada nos dicionários de Língua Portuguesa, em alguns livros de Filosofia e em alguns livros de jogos matemáticos, já o termo Paradoxo Falsídico é mais específico de livros de Lógica, mas também pode ser encontrado em livros de Filosofia.

Dentre os Sofismas ou Paradoxos Falsídicos mais conhecidos estão os Paradoxos de Zenão, o Problema da Partilha dos Camelos - que se encontra no livro “O Homem que Calculava” (SOUZA, 1983) e as supostas provas de que 2 é igual a 1.

2.2 Classes de Paradoxos para as Aulas de Matemática

A fim de apresentar um resumo das classes de paradoxos para justificar a escolha que iremos abordar em nosso trabalho, recorremos a Quine (1976). Segundo o autor:

> Um paradoxo verídico traz uma surpresa, mas a surpresa rapidamente se dissipa à medida em que analisamos a demonstração. Um paradoxo falsídico traz uma surpresa, mas que é vista como um alarme falso quando resolvemos a falácia implícita. Uma antinomia, no entanto, traz uma surpresa que pode ser interpretada por nada menos do que um repudio de parte de nossas concepções (QUINE, 1976, p.9, tradução nossa) [7].

Pelos relatos apresentados neste trabalho, é possível perceber que as Antinomias são paradoxos que carregam consigo autocontradições, que trouxeram e continuam trazendo preocupações até mesmo para os matemáticos, lógicos e filósofos.

Desta forma, abordar os paradoxos pertencentes a esta classe com alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio pode ser inconveniente - uma vez que, de modo geral, os alunos destes níveis escolares podem não ter embasamento lógico suficiente para analisar as Antinomias.

Conforme relatamos no primeiro capítulo, a reação dos alunos ocasionada pela natureza desafiadora de questões que partem de premissas aparentemente verdadeiras, desenvolvem-se por etapas aparentemente lógicas e chegam a conclusões absurdas, me incentivou a continuar pensando na viabilidade desse tipo de situação para as aulas de Matemática. À luz da classificação formulada por Quine (1976), podemos inferir que os paradoxos que possuem esta característica pertencem à classe dos Falsídicos.

Compõem a terceira classe, os paradoxos que fazem referência a situações que parecem impossíveis ou mesmo autocontraditórias, mas que, não obstante, são verdadeiras. Segundo, a classificação adotada por Quine, esses paradoxos são os Verídicos.

Os Paradoxos Verídicos e os Falsídicos têm algo em comum, são contraintuitivos.

O termo contraintuitivo pode ser definido como aquilo que contraria a intuição. Mas qual é o significado de intuição? Qual é o significado de intuitivo?

No dicionário de Língua Portuguesa o termo intuitivo significa “(Do lat. med. Intuitivus.) 1. Relativo a, obtido por intuição. - 2. Dotado de intuição. – 3. Que age por intuição” (LAROUSSE, 1999, p.537).

---

[7] A veridical paradox packs a surprise, but de surprise quickly dissipates itself as we ponder the proof. A falsidical paradox packs a surprise, but it is seen as a false alarm when we solve the underlying fallacy. An antinomy, however, packs a surprise that can be accommodated by nothing less than a repudiation of part of our conceptual heritage.

Já para o termo intuição, encontramos a definição:

> (Do lat. tard. Intuitio.) 1. Conhecimento claro, direto, imediato da verdade sem o auxílio do raciocínio. – 2. Sentimento irracional, não verificável, de que um evento vai se produzir, de que alguma coisa existe (LAROUSSE, 1999, p.537).

Assim, por meio do conhecimento intuitivo, julgamos idéias ou situações com base em formulações relativamente simples, resultantes de experiências de vida.

Usamos a intuição em diversas situações no cotidiano - mesmo sem conhecer as leis da Física, uma criança não atira uma pedra para cima na vertical e fica esperando a pedra cair; as pessoas atravessam a rua sem calcular precisamente a que velocidade os carros estão trafegando na via e na maioria das vezes não são atropeladas.

Mas a intuição não está isenta de falhas. Historicamente podemos citar Aristóteles, que usou a intuição para formular uma teoria sobre a queda livre de corpos. Segundo, Aristóteles “[...] a velocidade de um corpo em queda livre é proporcional à massa do seu corpo” (SCIENTIFIC AMERICAN BRASIL, 2007, n.6, p. 45).

No entanto, aproximadamente dois mil anos depois, por meio de argumentos científicos, Galileu contrapôs a teoria aristotélica.

> Eliminando o efeito da resistência do ar – por exemplo, quando uma pena e uma pesada moeda de ouro são largadas da mesma altura e ao mesmo tempo no interior de um reservatório em que previamente se fez vazio – corpos diferentes caem à mesma velocidade e atingem o fundo do reservatório ao mesmo tempo (HOLTON, RUTHERFORD; WATSON, 1978, p.48)

A teoria de Galileu foi confirmada por métodos experimentais alguns anos após a sua morte.

Talvez pelo fato da teoria da queda livre dos corpos elaborada por Galileu representar um conhecimento contraintuitivo, para muitos só ganhou credibilidade após a invenção da bomba de vácuo, que permitiu desconsiderar a resistência do ar e comprovar empiricamente a teoria.

Normalmente, aquilo que é contrário à intuição é intrigante, desafiador e exige uma explicação bem elaborada e que geralmente foge ao senso comum.

Não é por acaso que experimentos contraintuitivos são amplamente utilizados pelos professores de Física nas feiras de ciências. Um exemplo típico de experimento contraintuitivo é o “duplo cone”, que ao rolar espontaneamente para a parte mais elevada de uma rampa, parece contrariar o princípio do equilíbrio mecânico.

Professores que trabalham com experimentos contraintuitivos relatam que:

> Em recentes cursos para aperfeiçoamento de professores de Física [...] e em exposições interativas para estudantes e para o público em geral [...], introduzimos diversos experimentos, cuja característica é a de desafiar o senso comum das pessoas. Nessas ocasiões, constatamos que o público é atraído pelo comportamento paradoxal desses experimentos e, querendo entendê-lo, dedica-lhes mais atenção (AXT, BONADIMAN; SILVA, 2000, p. 27).

Parece ser unanimidade que as pessoas se sentem atraídas por situações contraintuitivas. Pode-se perceber isso nos shows, quando a platéia fica intrigada e tenta entender como o mágico fez desaparecer determinado objeto; ou nas feiras de ciências, quando se busca explicar como é possível o duplo cone “subir espontaneamente uma rampa”, quando o normal seria descer.

A reação do aluno ao se deparar com alguns paradoxos matemáticos não é diferente. Muitos ficam fascinados e se sentem desafiados a elucidar determinadas situações. Afinal, intuitivamente o herói Aquiles deveria alcançar a tartaruga, 2 deve ser diferente de 1 e não igual a 1, a probabilidade de que pelo menos duas pessoas de um ônibus com 44 pessoas façam aniversário no mesmo dia do ano, parece ser pequena e não aproximadamente igual a 93%.

Acreditamos que diante de alguns paradoxos os alunos podem se sentir desafiados a elucidar aquelas situações, mesmo que para isso precisem usar argumentos que fujam ao senso comum. Esperamos que com o propósito de entender esses paradoxos o aluno sinta a necessidade de utilizar argumentos matemáticos.

Sendo assim, decidimos analisar a viabilidade de se trabalhar nas aulas de Matemática os paradoxos de natureza contraintuitiva, ou seja, os Falsídicos e os Verídicos.

3 “PARADOXO DE CARROLL”

Neste capítulo descrevemos e analisamos a forma como um paradoxo geométrico, também conhecido como “64=65”, é apresentado na literatura.

Mais especificamente fazemos uma apreciação deste paradoxo no livro “Matemática Divertida e Curiosa” (SOUZA, 2001), na apostila dos alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental das escolas públicas do Estado de São Paulo (SEE/SP - Caderno do Aluno, 2009) e no artigo “Fibonacci e a explicação de um paradoxo” (MENDES, 1998). Também fazemos sugestões de investigação e apresentamos uma experiência de ensino com este paradoxo.

Neste trabalho nos referimos ao paradoxo “64 = 65” como “Paradoxo de Carroll”, em homenagem à Lewis Carroll[8], que segundo Santos, Neto e Silva (2007), foi o criador do mesmo. Lewis Carroll foi professor de Matemática e autor das célebres obras Alice no País das Maravilhas, Alice do Outro lado do Espelho e Symbolic Logic.

3.1 ABORDAGEM DO “PARADOXO DE CARROLL” NO LIVRO “MATEMÁTICA DIVERTIDA E CURIOSA”.

O “Paradoxo de Carroll” pode ser encontrado no livro “Matemática Divertida e Curiosa” (SOUZA, 2001), cuja primeira edição é de 1934. Na referida obra, o autor Júlio César de Mello e Souza, sob o pseudônimo de Malba Tahan escreve textos aos quais classifica como passatempos matemáticos. Dentre as curiosidades destacamos uma, cujo título escolhido por Souza (2001) foi “Paradoxo Geométrico: $64 = 65$”.

Malba Tahan (2001) apresenta o paradoxo da seguinte forma:

> Tomemos um quadrado de 64 casas e façamos a decomposição desse quadrado, como indica a figura, em trapézios retângulos e em triângulos.
> Reunindo esses trapézios e triângulos como vemos na figura II, vamos obter um retângulo de 13 por base e 5 de altura, isto é, um retângulo de 65 casas.
> Ora, como o retângulo das 65 casas foi formado pelas partes em que decompusemos o quadrado, o número de casas do retângulo deve ser precisamente igual ao número de casas do quadrado.
> Logo, temos: 64 = 65
> Igualdade que exprime um absurdo.

[8] O matemático Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898) adotou o pseudônimo de Lewis Carroll.

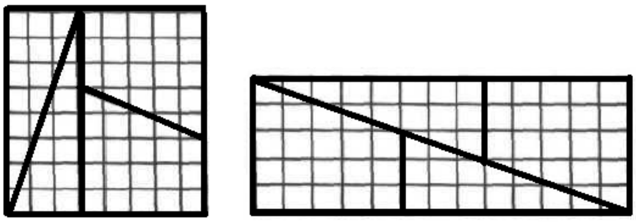


Fig. I Fig. II

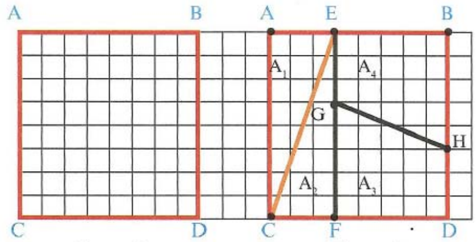
> A sutileza desse sofisma consiste no seguinte: as partes em que o quadrado foi decomposto não formam precisamente um retângulo. Pela posição em que deviam ficar os dois segmentos, que formam a suposta *diagonal* do retângulo, não são colineares. Há uma pequena diferença de ângulo, e entre os dois traços devia ficar um intervalo vazio equivalente precisamente a uma casa. (SOUZA, p.61, 2001)

A abordagem que o autor faz do "quebra-cabeça", revela a explanação de um paradoxo com a finalidade de apresentar uma curiosidade Matemática, mas sem a pretensão de integrá-lo a uma atividade para ser explorada por estudantes. De acordo com Júlio César de Mello e Souza o livro é composto exclusivamente por recreações e curiosidades relativas à Matemática Elementar e foram abolidas por completo as questões que exigissem cálculos numéricos trabalhosos e demonstrações algébricas. Desta forma, o autor apenas comenta que as áreas das figuras (I) e (II) deveriam ser iguais, pois o quadrado e o retângulo são compostos pelos mesmos polígonos. Destaca que o fato da área do quadrado, da figura (I), ser igual a 64 unidades quadradas e a do retângulo, da figura (II), ser igual a 65 unidades quadradas é um absurdo; e consequentemente afirma que o paradoxo é um Sofisma. Entretanto, o autor não usa argumentos matemáticos convincentes para mostrar a falácia.

Malba Tahan conjecturou que "pela posição em que deviam ficar os dois segmentos, que formam a suposta *diagonal* do retângulo, não são colineares." (SOUZA, 2001, p. 61), afirmou também que "há uma pequena diferença de ângulo, e entre os dois traços devia ficar um intervalo vazio equivalente precisamente a uma casa" (SOUZA, 2001, p.61). No entanto, não testou sua hipóteses, nem mesmo se preocupou em utilizar conteúdos da Matemática Elementar como semelhança de triângulos ou trigonometria no triângulo retângulo, para verificar a veracidade da sua conjectura. Provavelmente Malba Tahan tenha deixado a demonstração, a cargo dos leitores mais interessados.

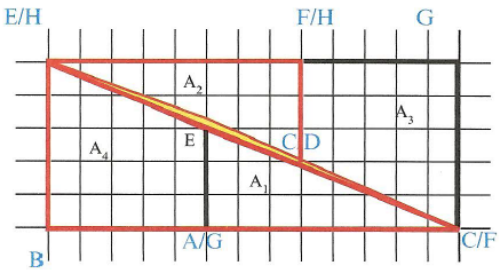
3.2 Abordagem do "Paradoxo de Carroll" nas Apostilas dos Alunos da Rede Pública do Estado de São Paulo

O "Paradoxo de Carroll" também consta nas apostilas de Matemática dos alunos da rede pública que frequentam o oitavo ano do Ensino Fundamental do Estado de São Paulo, com o título: "O limite da demonstração por figuração" (Caderno do Aluno, 2009, p. 39). Diferente da finalidade de Malba Tahan (2001), os autores do material apresentam o "Paradoxo de Carroll" por meio de uma atividade a ser explorada por alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental. A atividade é apresentada da seguinte forma:

> Para esta atividade você precisará de papel quadriculado e tesoura.
> Inicialmente, vamos construir um quadrado de 64 casas no papel quadriculado (Figura 1). Depois, vamos decompor o quadrado em 4 figuras: dois triângulos retângulos (ACE e CEF) e dois trapézios retângulos (BEGH e DFGH), conforme a figura 2.
>
> 
>
>
> Vamos recortar as peças e tentar montar um retângulo.
> Você conseguiu? Agora, conte a quantidade de quadradinhos que compõem este retângulo. A qual número você chegou? Ele corresponde a quantidade de quadradinhos iniciais? O que será que aconteceu? (Caderno do aluno, 2009, p. 39).

Diante da sugestão inicial dos autores, cria-se a expectativa que o aluno desenhe a Figura 2 em um papel quadriculado e recorte, de forma a obter dois trapézios e dois triângulos. Então, espera-se que ele tente montar um retângulo, parecido com o da próxima figura.

Figura 1 – Retângulo gerado pelas partes do quadrado



Fonte: Caderno do Professor, 2009, p.51

É importante frisar que no Caderno do Professor (2009, p.51) os autores descrevem suas expectativas, refletindo sobre os possíveis caminhos que o aluno pode seguir para mostrar que com os polígonos que compõe o quadrado, não é possível montar o retângulo. Analisando o Caderno do Professor, podemos inferir que, com esta atividade os autores acreditam que o aluno consiga perceber que a área do retângulo é igual a 65 unidades quadradas, enquanto a área do quadrado é igual a 64 unidades quadradas, mas como o retângulo foi obtido a partir de polígonos que compunham o quadrado, chega-se ao absurdo: $64 = 65$. Almejam também, que o aluno consiga justificar que o triângulo de área A_1 e o triângulo BCE não são semelhantes. Consequentemente, "a diagonal do retângulo" não é formada por segmentos colineares. Logo, com os polígonos obtidos da decomposição do quadrado não é possível montar com precisão o retângulo sugerido (Caderno do Professor, 2009).

O intuito dos autores é propiciar ao aluno, desde o Ensino Fundamental, a oportunidade de valer-se de uma demonstração, mesmo que simples, para verificar a veracidade de suas possíveis conjecturas.

3.3 Abordagem do "Paradoxo de Carroll" no Artigo "Fibonacci e a Explicação de um Paradoxo"

O "Paradoxo de Carroll" também é apresentado em um artigo intitulado "Fibonacci e a explicação de um paradoxo" (MENDES, 1988).

A autora apresenta o paradoxo da seguinte forma:

> Mostramos aqui um aparente paradoxo, que ilustrará a discussão. Um quadrado de lado 8 será dissecado conforme a ilustração:

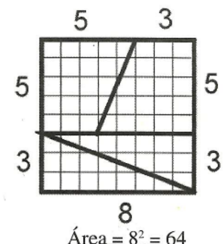
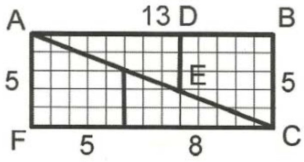


Fig.1

> Em seguida, as partes obtidas serão montadas de modo a formar um retângulo:



Área = 13 X 5 = 65
Fig.2

> Observa-se a diferença de uma unidade entre as áreas das figuras, apesar de uma ter sido composta pelas partes da outra.
> Importante observar nesse fato é que se nada foi acrescentado e nada foi retirado, há algum engano que nossa visão está sendo incapaz de captar. Está aí um exemplo que nossos sentidos físicos muitas vezes falham, assim como nossa intuição. Daí a necessidade de uma argumentação lógica – uma dedução (MENDES, 1998, p.15).

Nesta primeira parte do texto, é possível perceber que para Mendes o artigo versa sobre “um aparente paradoxo” (1998, p. 15). Assim, há indícios de que a autora acredita que Paradoxos Falsídicos ou Sofismas não devem ser classificados como paradoxos. No entanto, é importante destacar que o posicionamento da autora em relação à classificação dos paradoxos não interfere na importância das reflexões propostas no artigo.

Depois de apresentar o paradoxo, Mendes afirma que não é difícil mostrar que a figura 2 não pode ser composta pelas partes da figura 1. Basta mostrar que a inclinação da reta que passa pelos vértices A e C é diferente da inclinação da reta que passa pelos vértices A e E.

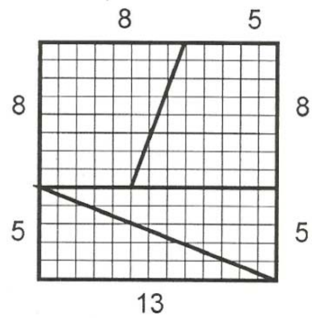
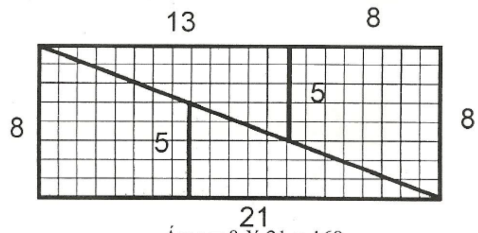
Esta demonstração pode ser feita da seguinte forma:

Considerando o triângulo ABC da figura 2, da última citação, temos que $\tan\ (B\hat{A}C) = \frac{5}{13}$. Por outro lado, considerando o triângulo ADE, da mesma figura, temos que $\tan\ (D\hat{A}E) = \frac{3}{8}$. Como $\frac{5}{13} \neq \frac{3}{8}$, então a reta que passa pelos pontos A e C tem inclinação diferente da reta que passa pelos pontos A e E. Logo, a linha que une os pontos A e C não é um segmento de reta.

Analisando de sob um ponto de vista menos formal, ao tentar montar o retângulo da figura 2, com os quatro polígonos que formavam o quadrado da figura 1, os encaixes não serão perfeitos. Para ser mais preciso, mostramos que não é possível compor o retângulo da figura 2 com os polígonos da figura 1.

Refletindo sobre primeira parte do artigo, poderíamos antecipadamente pensar que a atividade encontrada no Caderno do Aluno do oitavo ano, é bastante parecida com a proposta de Mendes; mas neste artigo, a autora mostra que o paradoxo apresentado pode ser explorado bem mais a fundo.

Mendes (1998) exibe mais duas figuras acompanhadas de um comentário que pode surpreender o leitor:

> Vamos tomar agora um quadrado de lado 13 e dissecá-lo:
>
> 
>
>
> Área = $13^2 = 169$
>
> Fig.3
>
> Agora vamos construir o "retângulo" conforme mostrado abaixo:
>
> 
>
>
> Área = 8 X 21 = 168
>
> Fig.4
>
> Neste caso "sumiu" uma unidade! De modo análogo ao anteriormente utilizado, podemos localizar a unidade que foi "retirada". (MENDES, 1998, ps.15 e 16)

A primeira delas, denominada figura 3, é um quadrado, composto por dois trapézios retângulos e por dois triângulos retângulos, mas cujas medidas dos lados são diferentes do quadrado da figura 1 (da citação). A outra figura, denominada figura 4, é um retângulo, supostamente composto pelos polígonos que formavam o quadrado. Agora a surpresa não é a unidade quadrada de diferença. Desta vez, o intrigante é que a área do retângulo é uma unidade quadrada menor que a área do quadrado. É importante lembrar que no caso anterior, do quadrado para o retângulo aumentava e não diminuía uma unidade quadrada na superfície da segunda figura.

Após o último comentário exposto na citação, Mendes informa que os lados dos quadrados não foram escolhidos ao acaso, são números pertencentes a sequência de Fibonacci. Em seguida apresenta a referida sequência: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., e afirma que com os termos da sequência “é possível montar quebra-cabeças cujos quadrados tenham lados medindo 3, 5, 8, etc.” (MENDES, 1998, p.16).

Cada um dos quadrados cujos lados são elementos da sequência de Fibonacci, poderia ser decomposto em dois triângulos retângulos e dois trapézios retângulos, com a finalidade de montar um retângulo com os polígonos que compõem o quadrado. Assim, para cada par de figuras associadas, ou seja, para cada retângulo que é supostamente formado a partir dos polígonos que compõem o quadrado, existe um Paradoxo Falsídico relacionado.

A autora também sugere que é possível explorar a relação entre a sequência de Fibonancci e a razão áurea com significado importante nesse tipo de atividade. A fim de mostrar tal relação, sugere que seja considerada a seguinte sequência $(1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,...)$, na qual cada três termos consecutivos representam lados dos polígonos que compõem cada quadrado que dá origem a um paradoxo. Como é possível formar infinitos quadrados, também existem “infinitos paradoxos geométricos”.

Considerando a referida sequência e tomando $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, tem-se que a razão $r_n = a_n / a_{n-1}$, se aproxima mais e mais do valor $\Phi \cong 1{,}61803398$. O número Φ é conhecido como número de ouro.

A fim de refletir sobre a situação, vamos analisar alguns casos:

$r_5 \quad = \quad \dfrac{a_6}{a_5} = \dfrac{13}{8} = 1{,}625$ (se aproxima de Φ por excesso);

$r_6 \quad = \quad \dfrac{a_7}{a_8} = \dfrac{21}{13} = 1{,}615384615$ (se aproxima de Φ por falta);

$r_7 \quad = \quad \dfrac{a_9}{a_8} = \dfrac{34}{21} = 1{,}619047619$ (se aproxima de Φ por excesso);

$r_8 \quad = \quad \dfrac{a_9}{a_8} = \dfrac{55}{34} = 1{,}617647059$ (se aproxima de Φ por falta);

$r_8 \quad = \quad \dfrac{a_{10}}{a_9} = \dfrac{89}{55} = 1{,}618181818$ (se aproxima de Φ por excesso).

Analisando essa pequena amostra de razões do tipo $r_{n-1} = a_n / a_{n-1}$, obtidas a partir dos termos da sequência de Fibonacci , podemos inferir que essas razões oscilam em torno de Φ, por falta ou por excesso, dependendo da posição que a_n ocupa na sequência. Segundo Mendes (1988), esta é explicação para o fato de às vezes sobrar e às vezes faltar uma unidade nos retângulos formados a partir dos polígonos que constituem os quadrados.

Poderíamos ainda ser mais precisos para explicar a oscilação de uma unidade quadrada de área, ora para mais, ora para menos. Com essa finalidade vamos voltar ao quadrado de área 64 unidades quadradas, portanto de lado 8 unidades. Com as partes desse quadrado é supostamente originado o retângulo de lados 13 unidades e 5 unidades, portanto de área igual a 65 unidades quadradas. Assim, é possível escrever a seguinte igualdade: $8^2 - 5.13 = -1$.

Considere agora o quadrado de área 169 unidades quadradas, portanto de lado 13 unidades. Com as partes desse, é supostamente originado o retângulo de 21 por 8, portanto de área igual a 168 unidades quadradas. Desta forma, pode-se escrever a seguinte igualdade: $13^2 - 8.21 = 1$.

Em cada um dos casos estudados, existe uma relação entre três números consecutivos da sequência de Fibonacci. Definindo a referida sequência da forma:

$a_1 = 1,\quad a_2 = 1,\quad a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8, a_7 = 13,\quad a_8 = 21, a_9 = 34,\quad \ldots, a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, com $n \in N$ e $n \geq 2$, tem-se que:

1) A igualdade $8^2 - 5.13 = -1$, pode ser escrita da forma $a_6{}^2 - a_5.a_7 = -1$;

2) A igualdade $13^2 - 8.21 = 1$, pode ser escrita da forma $a_7{}^2 - a_6.a_8 = 1$.

Considerando as regularidades encontradas nos itens (1) e (2) e a sequência infinita de quadrados e retângulos, é razoável levantar a seguinte hipótese:

$$a_6{}^2 - a_5.a_7 = -1$$
$$a_7{}^2 - a_6.a_8 = 1$$
$$a_8{}^2 - a_7.a_9 = -1$$
$$a_9{}^2 - a_8.a_{10} = 1$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_n^2 - a_{n-1}.a_{n+1} = (-1)^{n+1}$$

De forma geral, pode-se realizar a construção de cada quadrado, com três termos consecutivos da sequência $(b_n) = (1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$, com $n \in N$ e $n \geq 2$. Também já vimos, que cada retângulo é supostamente formado a partir dos polígonos que compõem o quadrado. À luz dessas conjecturas, apresentamos as figuras:

Figura 2 – Quadrado bn

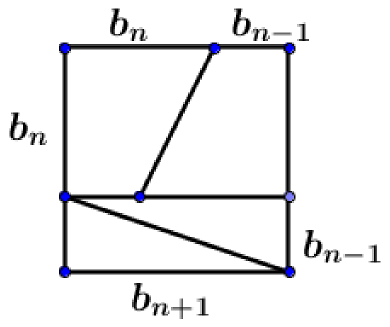
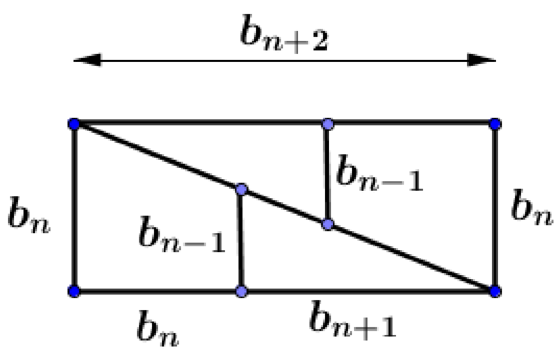


Figura 3 – Retângulo bn



As medidas dos lados de cada quadrado e de cada retângulo também são representados por termos dessa sequência. Assim, as citações que faremos a respeito das medidas dos lados dos quadrados e dos retângulos, utilizaremos a sequência $(a_n) = (2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$, com $n \in N$ e $n \geq 2$. Desta forma, cada quadrado terá área igual a a_n^2, e este será "desmontado" para supostamente formar um retângulo de área $a_{n-1}.a_{n+1}$.

A fim de tornar mais clara a situação, apresentamos as figuras:

Figura 4 – Quadrado an

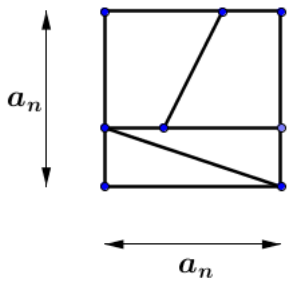
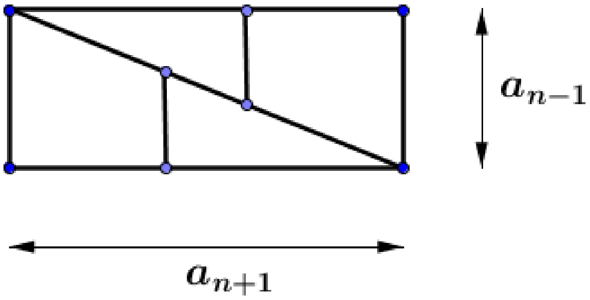


Figura 5 – Retângulo an



Neste caso específico, a cada três termos consecutivos, o termo médio, representa a medida do lado do quadrado e os dois extremos representam as medidas dos lados do retângulo.

Assim, o erro de uma unidade para mais ou uma unidade para menos, dependendo da posição do termo na sequência, pode ser explicado através da igualdade $a_n{}^2 - a_{n-1} . a_{n+1} = (-1)^{n+1}$, que é conhecida por "Cassini's Identity"[9] (TERRY, 2012). Apesar de chegar em uma fórmula pensando na relação entre as áreas de quadrados e retângulos para uma situação específica, a igualdade $a_n{}^2 - a_{n-1} . a_{n+1} = (-1)^{n+1}$ vale para quaisquer três termos consecutivos da sequência:

$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8, a_7 = 13, \quad a_8 = 21, a_9 = 34, \quad \ldots, a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$,

com $n \in N$ e $n \geq 2$.

Mendes (1998) destaca, que existe uma sequência onde tudo dá certo, ou seja, que ao decompor o quadrado em dois triângulos retângulos e dois

[9] Identidade de Cassini

trapézios retângulos é possível compor um retângulo com essas “peças”. Pode-se determinar os termos da sequência que elimina o “Paradoxo de Carroll”, usando conteúdos que normalmente o estudante só tem contato no Ensino Superior.

Assim, considerando a sequência $(a_n) = (1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...)$ e tomando $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, com $n \in N$ e $n \geq 3$, tem-se que a razão $r_{n-1} = a_n / a_{n-1}$, que se aproxima mais e mais do valor $\Phi \cong 1{,}61803398$, a medida em que aumenta o valor de n.

De outra maneira, podemos dizer que a sequência $\left(\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, ..., \frac{a_n}{a_{n-1}}\right)$ converge para o número real L, em que a_{n-1} e a_n são termos consecutivos da sequência de Fibonacci; ou ainda que L é o limite da razão $\frac{a_n}{a_{n-1}}$, com n tendendo ao infinito, ou seja, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = L$.

Provaremos que $L = \Phi$.

Considerando os termos da sequência $(a_n) = (1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...$, segue que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, com $n \in N$ e $n \geq 3$. Dividindo os dois membros da igualdade por a_{n-1}, tem-se: $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}} + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$. Como $a_n \neq 0$ e $\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} = \frac{1}{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}$, segue que: $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 + \frac{1}{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}$ $(*)$.

Considerando n tendendo ao infinito, pode-se afirmar que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = L$. Fazendo $n \to \infty$ e substituindo L em $(*)$ chega-se a equação $L = 1 + \frac{1}{L}$. Organizando a equação, tem-se: $L^2 = L + 1$.

Subtraindo $L+1$ dos dois membros da igualdade, chega-se a equação $L^2 - L - 1 = 0$. Assim, é possível resolver a equação da seguinte forma:

$$\Delta = (-1)^2 - 4.1.(-1) = 1 + 4 = 5$$

Substituindo o valor do discriminante na fórmula clássica $L = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$, segue que : $L = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2.1}$. Mas L é determinado a partir da divisão de dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci, mais precisamente $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}=L$. Como todos os termos da referida sequência são positivos, L é necessariamente positivo.

Portanto, $L=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi$.

Estes cálculos foram feitos com a finalidade de investigar uma forma de eliminar a possibilidade de haver o "Paradoxo de Carroll", conforme abordamos em 3.4. Afinal, "há uma série onde tudo dá certo" (MENDES, 1998, p. 17). Mendes (1998) refere-se a uma sequência,

> em que a razão entre qualquer de seus termos pelo termo precedente é constante, isto é:
> $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}=\Phi$
> constante para qualquer valor de n.
> A série abaixo, em que se usa essa razão, é chamada Série Áurea:
> $1, \Phi, \Phi^2, \Phi^3, \Phi^4, \ldots$ (MENDES, 1998, p17).

Assim, pensando no "quebra-cabeça" de Carroll, se for construído um quadrado com lado igual à soma de dois números consecutivos quaisquer da sequência $(1, \Phi, \Phi^2, \Phi^3, \Phi^4, \ldots)$, resulta um retângulo de área igual ao quadrado que lhe deu origem (MENDES, 1998) - o que exploramos em 3.4.

Conforme vimos, existe a possibilidade de explorar com o "Paradoxo de Carroll" diversos conteúdos da Matemática dentre os quais destacamos a semelhança de triângulos, trigonometria no triângulo retângulo, áreas de polígonos, sequências numéricas e até mesmo conteúdos vistos no ensino superior, como limite. Entretanto, mais do que explorar diversos conteúdos matemáticos importa destacar que o estudante tem a oportunidade de levantar hipóteses, discutir, refletir, utilizar argumentos lógicos, realizar demonstrações e refutações. Com isso, tem a oportunidade de se deparar com o prazer da descoberta e de agir como um matemático.

3.4 Além das Sugestões do Artigo de Mendes: Explorando mais Conteúdos Matemáticos com o "Paradoxo de Carroll"

Conforme relatamos, o"Paradoxo de Carroll" pode ser apenas uma curiosidade ou um passatempo como foi proposto por Malba Tahan ou pode ser transformado em uma atividade com potencial para explorar muitos conteúdos matemáticos, como foi proposto por Mendes. Entretanto, neste item, vamos sugerir que outros conteúdos, além dos que já foram citados, poderiam ser explorados com o "Paradoxo de Carroll". Dentre os quais estão as equações do segundo grau, produtos notáveis, fatoração, operações com números irracionais e até mesmo indução finita.

Com o auxílio das figuras 2 e 3 abaixo, é possível construir um quebra cabeça, conforme proposto anteriormente, no qual às áreas do quadrado e do retângulo são exatamente iguais, mas desta vez sem fazer uso de conteúdos do Ensino Superior.

Figura 6 – Quadrado 1

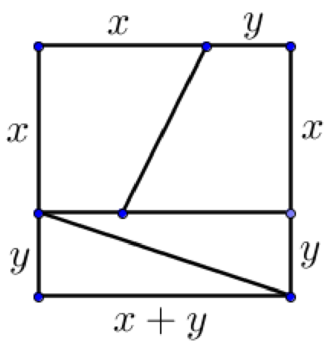
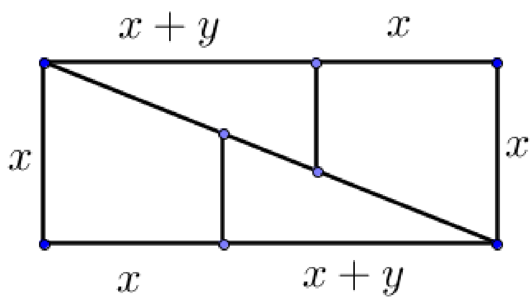


Figura 7 – Retângulo 1



Tomando a área do quadrado da figura 6, como A_Q e a área do retângulo da figura 7, como A_R, tem-se que: $A_Q = (x+y)^2$ e $A_R = x.(2x+y)$.

Se as áreas do quadrado e do retângulo devem ser iguais, então é necessário que $(x+y)^2 = x.(2x+y)$.

Desenvolvendo os dois membros, é possível chegar a igualdade : $x^2 + 2xy + y^2 = 2x^2 + xy.$

Subtraindo $2x^2 + xy$ de ambos os membros da igualdade, chega-se a equação: $-x^2 + xy + y^2 = 0$.

Multiplicado os dois membros da igualdade por -1 e valendo-se da propriedade comutativa para a multiplicação de reais tem-se que: $x^2 - yx - y^2 = 0$.

Considerando x como a incógnita, é possível resolver a equação da seguinte forma:

$$\Delta \;=\; (-y)^2 - 4.1.(-y)^2 \;=\; y^2 + 4y^2 \;=\; 5y^2$$

Substituido o valor do discriminante na fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$, e tomando x como incógnita, segue que :

$$x = \frac{y \pm \sqrt{5y^2}}{2.1} \;=\; \frac{y \pm y\sqrt{5}}{2} \;=\; \frac{y.\left(1 \pm \sqrt{5}\right)}{2} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

No entanto, nas figuras 2 e 3, x e y representam medidas. Assim a razão x/y não pode assumir valor negativo. Logo, $\dfrac{x}{y} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, ou seja, $\dfrac{x}{y} \;=\; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \;=\; \Phi$.

Analisando ainda as referidas figuras, é fácil notar que o quadrado e o retângulo são construídos com as medidas x e y. Mais precisamente com os termos da sequência $(y,\; x,\; x+y,\; 2x+y)$,em que o primeiro termo é igual a y, o segundo igual a x, o terceiro igual a $x+y$, ou seja, igual a soma dos dois primeiros termos e o quarto termo igual a soma do segundo com o terceiro.

Tomando $y=1$ na igualdade $\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$, e considerando os elementos da sequência $(y, \; x, \; x+y, \; 2x+y)$, consequentemente $x=\Phi$, $x+y=\Phi+1$ e $2x+y=2\Phi+1$.

Com essas medidas chegamos as seguintes figuras:

Figura 8 – Quadrado Φ

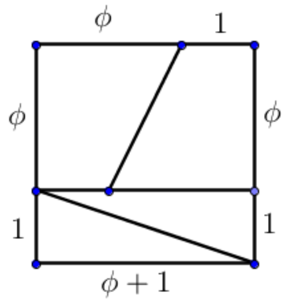
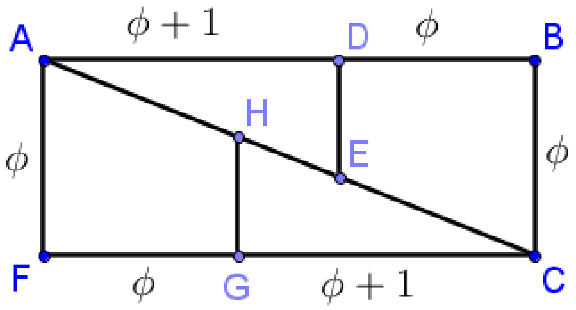


Figura 9 – Retângulo Φ



Pode-se ainda, verificar neste caso, se os segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{AC}$, pertencem a mesma reta.

Considerando o triângulo ABC da figura 9, tem-se que:

$$\tan\;(B\hat{A}C) = \frac{\Phi}{2\Phi+1} = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{2.\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)+1} = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}+4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Por outro lado, considerando o triângulo ADE, da mesma figura, chega-se a:

$$\tan\;(D\hat{A}E) = \frac{1}{\Phi+1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}+1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}+3}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}+3} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

.

Desta forma, é possível afirmar que $\tan\ (B\hat{A}C) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \tan\ (D\hat{A}E)$.

Logo, os pontos A, C e E, são colineares. Assim, o ponto E pertence a diagonal $\overline{AC}$, do retângulo da figura 9. Consequentemente, com as partes da figura 8 é possível formar a figura 9.

Ainda, existe a possibilidade de um aprofundamento com números irracionais, se aluno tiver a curiosidade de conferir se realmente a área do retângulo é igual a área do quadrado. Assim, tomando a área do quadrado da figura 8, como A_Q e a área do retângulo da figura 9, como A_R, tem-se: $A_Q = (\Phi+1)^2$ e $A_R = \Phi.(2\Phi+1)$.

Aparentemente essas áreas não são iguais, pois $A_Q = (\Phi+1)^2 = \Phi^2 + 2\Phi + 1$ e $A_R = \Phi.(2\Phi+1) = 2\Phi^2 + \Phi$, mas $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, então fazendo as devidas substituições e desenvolvendo as duas expressões separadamente, tem-se que:

$$A_Q = \Phi^2 + 2\Phi + 1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 2.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 1 = \frac{\sqrt{5}+3}{2} + \frac{2+2\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3\sqrt{5}+7}{2}$$

$$A_R = 2\Phi^2 + \Phi = 2.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 2.\left(\frac{\sqrt{5}+3}{2}\right) + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{5}+7}{2}$$

Desta forma, é possível afirmar que a área do quadrado é igual a área do retângulo, pois $A_Q = \frac{3\sqrt{5}+7}{2} = A_R$. Logo, com os polígonos que constituem o quadrado da figura 8 é possível formar o retângulo da figura 9. Novamente chega-se a conclusão que é perfeitamente possível esquivar-se do “Paradoxo de Carroll” se o quadrado da figura 6 for construído com as medidas $y = 1, x = \Phi$, $x + y = \Phi + 1$.

Refletindo sobre a situação, seria natural desconfiar se o quadrado de medidas $y = 1$, $x = \Phi$, $x + y = \Phi + 1$ é o único que escapa do Paradoxo de Carroll.

Voltando as figuras 6 e 7 é fácil notar que elas foram construídas com os termos da sequência $(y,\ x,\ x+y,\ 2x+y)$,em que o primeiro termo é igual a y, o segundo igual a x, o terceiro igual a $x+y$, ou seja, igual a soma dos dois primeiros termos e o quarto termo igual a soma do segundo com o terceiro.

Mantendo essa regularidade, pode-se construir o próximo par de figuras, que serão compostas pelos valores x, $x+y$, $2x+y$ e $3x+2y$ conforme a próxima ilustração:

Figura 10 – Quadrado 3

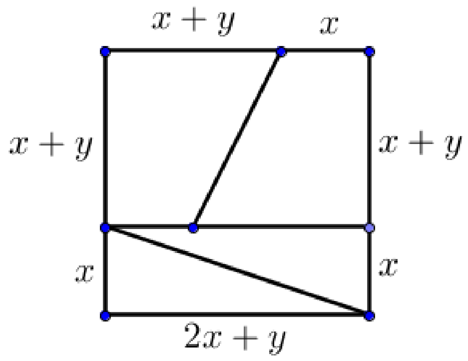
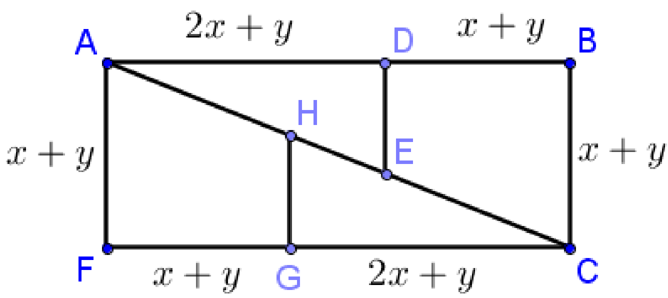


Figura 11 – Retângulo 3



Pode-se novamente verificar neste caso se os segmentos $\overline{AE}$ e $\overline{AC}$, pertencem a mesma reta. Basta tomar $y = 1$ e $x = \Phi$, assim pode-se afirma que $x + y = \Phi + 1$, $2x + y = 2\Phi + 1$ e $3x + 2y = 3\Phi + 2$.

Considerando o triângulo ABC da figura 11, tem-se que:

$$\tan\ (B\hat{A}C) = \frac{\Phi+1}{3\Phi+2} = \frac{\frac{\sqrt{5}+3}{2}}{3.\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)+2} = \frac{\frac{\sqrt{5}+3}{2}}{\frac{3\sqrt{5}+7}{2}} = \frac{\sqrt{5}+3}{3\sqrt{5}+7} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Por outro lado, considerando o triângulo ADE, da mesma figura, tem-se que: $\tan\ (D\hat{A}E) = \frac{\Phi}{2\Phi+1} = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{2.\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)+1} = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}+4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Desta forma, é possível afirmar que $\tan\ (B\hat{A}C) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \tan\ (D\hat{A}E)$. Logo, os pontos A, C e E, são colineares. Assim, o ponto E pertence a diagonal AC, do retângulo da figura 11. Consequentemente, com as partes da figura 6 é possível formar a figura 11.

Pode-se novamente conferir se realmente a área do retângulo é igual a área do quadrado. Assim, tomando a área do quadrado da figura 6, como A_Q e a área do retângulo da figura 11, como A_R, tem-se: $A_Q = (2\Phi + 1)^2$ e $A_R = (\Phi + 1).(3\Phi + 2)$.

Aparentemente essas áreas não são iguais, pois $A_Q = (2\Phi + 1)^2 = 4\Phi^2 + 4\Phi + 1$ e $A_R = (\Phi + 1).(3\Phi + 2) = 3\Phi^2 + 5\Phi + 2$, mas sabe-se que $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, então fazendo as devidas substituições e desenvolvendo as duas expressões separadamente, tem-se que:

$$A_Q = 4\Phi^2 + 4\Phi + 1 = (2\Phi + 1)^2 = \left[2.\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)+1\right]^2 = \left(\sqrt{5}+2\right)^2 = 4\sqrt{5}+9$$

$$A_R = 3\Phi^2 + 5\Phi + 2 = 3.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 5.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + 2 = \frac{16\sqrt{5}+36}{4} = 4\sqrt{5}+9$$

Desta forma, é possível afirmar que a área do quadrado é igual a área do retângulo, pois $A_Q = 4\sqrt{5} + 9 = A_R$. Logo, com as partes que constituem o quadrado da figura 10 é possível formar o retângulo da figura 11. Novamente chega-se a conclusão que é perfeitamente possível esquivar-se do “Paradoxo de Carroll” se considerarmos as medidas $y = 1$, $x = \Phi$, $x + y = \Phi + 1$, $2x + y = 2\Phi + 1$ para construir o quadrado da figura 6.

Conservando a regularidade, podemos escrever uma sequência infinita de números com os quais pode-se construir infinitos quebra-cabeças, onde desmonta-se cada um dos quadrados e forma-se um novo retângulo. A referida sequência pode ser escrita da seguinte forma:

$$\left(y,\ \ x,\ \ x+y,\ \ 2x+y,\ \ 3x+2y,\ \ 5x+3y,\ \ 8x+5y,\ \ 13x+8y, \ldots \right)$$

Tomando $y = 1$, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$, tem-se que: $x + y = \Phi + 1$, $2x + y = 2\Phi + 1$, $3x + 2y = 3\Phi + 2$, $5x + 3y = 5\Phi + 3$, $8x + 5y = 8\Phi + 5$, $13x + 8y = 13\Phi + 8$ e assim sucessivamente.

Portanto, a sequência que “dribla” o “Paradoxo de Carroll”, pode ser escrita da seguinte forma: $(b_n) = (1, \Phi, \Phi + 1, 2\Phi + 1, 3\Phi + 2, 5\Phi + 3, 8\Phi + 5, 13\Phi + 8, \ldots)$. É importante destacar que nessa sequência cada termo, a partir do terceiro é a soma de seus dois antecessores. Assim, pode-se generalizá-la da seguinte forma:

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2} \text{ , com } b_1 = 1, b_2 = \Phi, n \in \mathbb{N} \text{ e } n \geq 3.$$

3.5 Experiência de Ensino com o "Paradoxo de Carroll"

Até o momento refletimos sobre quais conteúdos matemáticos poderiam ser explorados com esse paradoxo geométrico e quais seriam as possíveis vantagens de se trabalhar o mesmo. Entretanto, se parássemos por aqui restariam muitas dúvidas, dentre as quais destacamos: O "Paradoxo de Carroll" realmente pode ser trabalhado na sala de aula, ou esse tipo de assunto é exclusividade de livros de Jogos de Matemática, de Raciocínio Lógico ou de Passatempos e Curiosidades? Os alunos produzem alguma Matemática com paradoxo? Quais conteúdos matemáticos realmente podem ser explorados pelos alunos? Qual é a reação dos alunos ao se deparar com o "Paradoxo de Carroll"?

A fim de respoder a pelo menos alguns desses questionamentos vamos apresentar uma atividade que foi desenvolvida com alunos do segundo ano do Ensino Médio.

Mendes (1998) propõe uma atividade cujo tema central é um paradoxo geométrico e sugere que ele possibilita explorar conteúdos matemáticos como áreas de figuras planas, semelhança de triângulos, trigonometria e sequências numéricas.

Na atividade que aqui apresentamos e que foi desenvolvida com um grupo de alunos do Ensino Médio, os procedimentos seguiram características de uma Tarefa de Investigação.

3.5.1 Adaptações do Procedimento Metodológico para o Desenvolvimento da Experiência de Ensino

Três alunos participaram da atividade e os dados que apresentamos foram obtidos por relatórios, entrevista e filmagem.

A administração da escola recomenda que atividades que não constam do material bibliográfico usado para as aulas, sejam desenvolvidas fora do horário regular das aulas. Assim, a participação foi facultativa e exigia que o aluno fosse à escola em um contra turno. Desta forma, apenas três alunos mostraram interesse em participar.

3.5.2 Os Alunos que Participaram da Experiência de Ensino

A experiência de ensino foi realizada com três alunos do segundo ano do Ensino Médio de uma escola particular da cidade de Assis, Estado de São Paulo. Na ocasião, eu era professor de uma das duas frentes da disciplina de Matemática desta classe.

Os alunos de pseudônimos André (16 anos), Beto (16 anos) e Caio (16 anos) estavam no final da referida série e foram voluntários para participar da tarefa.

A opção pelo segundo ano do Ensino Médio deve-se à suposta familiaridade com alguns conteúdos, o que tornaria mais viável o desenvolvimento da Tarefa de Investigação.

3.5.3 Explorando o “Paradoxo de Carroll” por Meio de uma Tarefa de Investigação

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2005), antes de iniciar investigação os alunos devem entender a natureza desse tipo de tarefa, que se afasta bastante das atividades habituais da sala de aula.

Na nova tarefa que iriam desenvolver não tinham que responder a uma pergunta bem delimitada, apresentada de forma clara por enunciado. Agora eles assumiriam a responsabilidade de levantar questões, conjecturar, de verificar e justificar as conjecturas, procedimentos relativos à Tarefa de Investigação.

Depois dessas explicações feitas de forma oral, ainda apresentei o texto que se encontra a seguir, com a finalidade de tornar mais claro para os participantes, qual é o papel deles na Tarefa de Investigação.

Considerando que os alunos não tinham nenhuma familiaridade com tarefas investigativas, inicialmente foi lido e discutido o texto de Ponte, Brocardo e Oliveira (2005), visando a identificação de ações que os alunos poderiam desenvolver durante a atividade.

> Investigar é procurar conhecer o que não se sabe. [...] Assim para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre os objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades. [...]
> Uma investigação Matemática desenvolve-se usualmente em torno de um ou mais problemas. Pode mesmo dizer-se que o primeiro grande passo de qualquer investigação é identificar claramente o problema a resolver. Por isso, não é de admirar que, em Matemática, existe uma relação estreita entre problemas e investigações. [...]
> Quando trabalhamos em um problema, o nosso objetivo é, naturalmente resolvê-lo. No entanto, para além de resolver o problema proposto, podemos fazer outras descobertas que, em alguns casos, se revelam tão ou mais importantes que a solução do problema original. Outras vezes, não se conseguindo resolver o problema, o trabalho não deixa de valer a pena pelas descobertas imprevistas que proporciona. Como diz o matemático inglês Andrew Wiles, 'é bom trabalhar em qualquer problema contanto que ele dê origem a Matemática interessante durante o caminho, mesmo se não o resolvermos no final'. [...]
> A distinção entre exercício e problema foi formulada por Pólya e tem-se mostrado muito útil para analisar os diferentes tipos de tarefa Matemática. Um problema é uma questão para a qual o aluno não dispõe de um método que permita a sua resolução imediata, enquanto que um exercício é uma questão que pode ser resolvida usando um método já conhecido. [...]
> Os exercícios e os problemas têm uma coisa em comum. Em ambos os casos, o seu enunciado indica claramente o que é dado e o que é pedido. Não há margens para ambigüidades. A solução é sabida de antemão, pelo professor e a resposta do aluno ou está certa ou está errada. Numa investigação as coisas são um pouco diferentes. Trata-se de situações mais abertas – a questão não está muito bem definida no início, cabendo a quem investiga um papel fundamental na sua definição. Em uma vez que os pontos de partida podem não ser exatamente os mesmos, os pontos de chegada podem ser também diferentes. [...]
> Podemos dizer que uma investigação Matemática envolve quatro momentos principais. O primeiro abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente o último, diz respeito à argumentação, à demonstração e avaliação do trabalho realizado. [...]
> Os alunos devem saber que podem contar com o apoio do professor, mas que a atividade depende, essencialmente, da sua própria iniciativa [...] (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2005).

A atividade que descrevemos é uma adaptação do artigo "Fibonacci e a explicação de um paradoxo" escrito por Mendes (1998) e o encaminhamento dado aos procedimentos dos alunos seguem os critérios de uma Tarefa de Investigação.

3.5.4 A Tarefa de Investigação com os Alunos:

Num primeiro momento apresentamos aos alunos a seguinte situação:

*Mostramos aqui as figuras da **sequência 1** e as suas correspondentes na **sequência 2**. Cada quadrado é dissecado conforme as ilustrações e as partes obtidas serão rearranjadas de modo a formar retângulos.*

Figura 12 – Sequência de Quadrados

Sequência 1:

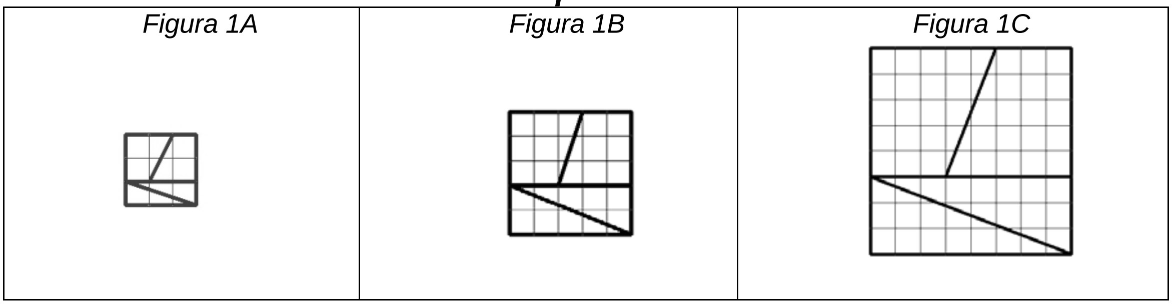
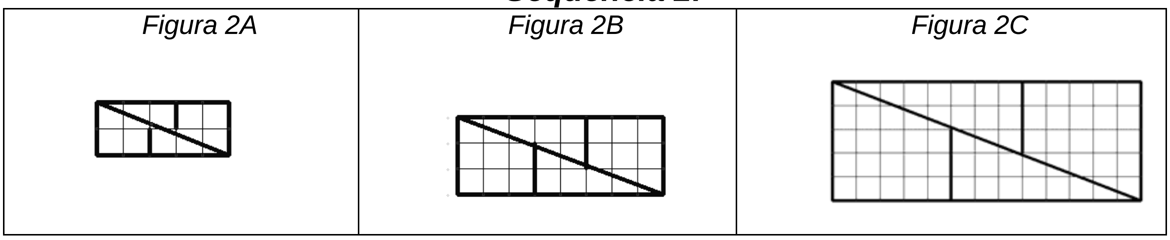


Figura 13 – Sequência de Retângulos

Sequência 2:



Nessa situação, várias questões podem ser analisadas. Por exemplo:

1. Observando os quadrados da **sequência 1** e os retângulos correspondentes da **sequência 2**, que conjecturas vocês podem fazer em relação as áreas dessas figuras? Procurem verificar a validade dessas conjecturas.
2. Tentem desenhar em uma folha de papel quadriculado as próximas figuras das sequências. Qual regularidade observada possibilitou que vocês dessem continuidade às seqüências de figuras?

Analisem estas questões e as demais que provavelmente aparecerão durante a investigação.

Durante a leitura da tarefa a primeira dúvida levantada e esclarecida pelo próprio grupo foi entender quais eram as figuras correspondentes. Em seguida, André que está acostumado com a resolução de problemas tenta um primeiro contato com o professor.

André: *Responde na folha?*

Professor: *As suas anotações podem ser feitas na folha.*

Com esta resposta tive a intenção de salientar que ele não estava resolvendo um problema, mas realizando uma investigação. É importante lembrar que durante a introdução da tarefa foram explicitadas para os alunos as diferenças entre resolver exercícios, resolver problemas e a participar de uma Tarefa de Investigação.

Depois de um período de reflexão André fez a primeira conjectura.

André: *Em todos eles aumentou uma unidade quadrada.*

O aluno estava se referindo que a área de cada retângulo era maior em uma unidade quadrada se comparada com a área de cada quadrado correspondente.

Professor: *Você fez uma conjectura, verifiquem se ela é verdadeira.*

Beto: *Não é real o que André falou.*

Professor: *Por que não é real?*

Então Beto apontou um par de figuras e explicou que o retângulo tinha uma unidade de área a menos que o quadrado correspondente. André percebeu que Beto estava certo e formulou outra conjectura, com a qual o grupo concordou depois de fazer as verificações apresentadas a seguir:

André: *Sempre altera em uma unidade de área. Considerando o primeiro par de "figuras correspondentes", o retângulo tem uma unidade de área a mais que o quadrado, no segundo, uma unidade de área a menos, no terceiro, uma a mais e assim sucessivamente.*

Os alunos resolveram fazer algumas anotações, mas antes Beto insistiu com uma pergunta.

Beto: *Tem que dar uma resposta professor?*

Professor: *Vocês podem fazer as anotações nas folhas que vocês receberam.*

Caio pela primeira vez se manifesta e reforça a pergunta de Beto.

Caio: *Você já fez?*

Caio estava querendo saber se o professor já havia investigado aquela tarefa, como se perguntasse a um professor se ele já resolveu o problema proposto para saber se a resolução é possível ou até se existe uma resposta.

Nesse momento o professor explicou a eles que de certa forma já havia investigado aquela tarefa, mas que eles poderiam se interessar por aspectos muito diferentes dos quais o professor interessou.

Caio que estava a um algum tempo calado e pensando na situação manifestou-se fazendo uma conjectura.

Caio: *A razão entre eles é sempre igual.*

Beto: *A é? É igual?*

Então Caio começa a explicar o que havia pensado para o grupo.

Caio: *Três dividido por dois, cinco dividido por três, oito dividido por cinco, treze dividido por oito, então o valor aproximado do quociente dessas divisões é 1,6.*

Professor: *O Caio fez uma conjectura, tentem descobrir quais são as próximas figuras da sequência. Esta é uma estratégia importante para que vocês possam verificar se esta "regularidade" acontece quando se considera os lados de uma figura qualquer das sequências.*

Este foi um momento especial na investigação, Caio levantou uma questão que não foi sugerida na tarefa. O aluno acabara de explorar uma possível relação entre os lados de todas as figuras. Desta maneira não estava considerando apenas as medidas dos lados dos quadrados e dos retângulos, mas também as medidas dos lados dos triângulos e dos trapézios que "formam" os quadrados.

O valor 1,6 encontrado por Caio é próximo de $\Phi = (\sqrt{5}+1)/2 \cong 1{,}618$ e conhecido como número de ouro. Se considerarmos a sequência $(1, \Phi, \Phi^2, \Phi^3, \Phi^4, ..., \Phi^n, ...)$, e construirmos um quadrado com lado igual a soma de dois números consecutivos quaisquer dessa sequência, o retângulo resultante da montagem das peças, terá área exatamente igual à do quadrado que lhe deu origem.

No entanto, Caio não chegou a essa conclusão, interrompeu sua exploração depois de uma discussão iniciada por André que continuava refletindo sobre a diferença entre as áreas dos quadrados e dos retângulos correspondentes.

André: *É como se fosse um paradoxo.*

Beto e Caio ficaram interessados na fala de André.

Beto: *É como se fosse o quê?*

André: *Um paradoxo.*

Professor: *Por quê?*

André: *Tem um quadrado, desmontando ele e montando um retângulo as áreas deveriam ser iguais, mas isso não acontece.*

Como Beto e Caio ainda estavam confusos, André utilizou-se do primeiro par de figuras “correspondentes” para exemplificar o que havia falado.

> ***André:*** *Tinha um quadrado de área nove, ele foi desmontado e com as partes montou-se um retângulo, mas o retângulo ficou com área dez.*

Ao perguntar para André o que o levou a afirmar que aquela situação era um paradoxo, ele lembrou o professor de que eu havia proposto a questão[10] do vestibular da UNESP para a classe deles, há aproximadamente um ano. Naquele momento, André estabeleceu uma relação entre o um paradoxo algébrico que eles tiveram a oportunidade de conhecer, e um paradoxo geométrico com o qual eles acabavam de entrar em contato.

Pela primeira vez o grupo deixava explícito que não poderia haver a diferença entre as áreas dos quadrados e a área de cada retângulo “correspondente”. Antes da afirmação de André os alunos pareciam estar tratando de forma natural o fato de faltar ou sobrar uma unidade de área entre as figuras.

Em seguida, Caio afirma ter descoberto uma regularidade entre os lados das figuras. Então, André e Beto dizem que também haviam descoberto alguma coisa e começam a descrever as suas idéias.

Caio inicia, André e Beto ajudam com a fala: $3+5=8$, $5+8=13$.

Estavam conjecturando que a soma das medidas dos lados de dois quadrados consecutivos da sequência resulta na medida do lado do próximo quadrado. Então, o professor pediu ao grupo que tentasse desenhar no papel quadriculado as próximas figuras das sequências e Caio, antes de realizar a experiência proposta, fez questão de afirmar que o lado do quarto quadrado da sequência 1 mede 21 unidades.

André experimentou desenhar o quadrado de lado oito. Recortou em dois trapézios e dois triângulos e “montou” com essas peças o retângulo “correspondente”. Mesmo sabendo que existia a diferença de uma unidade de área entre as duas figuras, depois de analisar seu experimento, insistiu em dizer que na prática as áreas eram iguais.

---

[10] Questão do vestibular de inverno, prova objetiva da Unesp de 2003, citada na introdução desse trabalho.

Beto ficou desconfiado e ajudou André a montar novamente o retângulo para constatarem juntos que na prática a diferença de área também existia.

Em uma discussão André e Caio chegaram a conjecturar que quanto maior o lado do quadrado fica mais difícil de visualizar a diferença entre as superfícies do quadrado e do retângulo “correspondente” durante a montagem.

Apesar dos alunos não terem conseguido justificar a conjectura, mais uma vez eles chegavam próximos do conceito de número de ouro. Assim, considerando a Sequência de Fibonacci, onde um termo é a soma dos dois precedentes, a razão de termos sucessivos se aproxima mais e mais do valor de $\Phi \cong 1{,}618$.

Depois de duas horas e quarenta minutos de pesquisa, desenvolvendo uma atividade, o professor percebeu que os alunos demonstravam sinal de cansaço. Então, o professor pediu que tentassem relatar por escrito todas as explorações que já haviam feito, já que esta ação poderia ajudá-los a refletir sobre as questões, as conjecturas, as justificativas, as generalizações e as conclusões que chegaram ou as que ainda gostariam de repensar.

O professor tentou conscientizá-los que o relatório auxiliaria também na organização da investigação, até para eles visualizarem melhor o que já haviam explorado e decidir se ainda gostariam de investigar mais algum assunto. O professor explicou que o relatório poderia ser individual ou único para os três.

Os participantes preferiram fazer individualmente os relatórios.

Caio relatou de forma mais detalhada as regularidades relacionadas aos lados das figuras, assunto que tinha dedicado tempo maior.

3.5.4.1 Análise das anotações do Caio

Anotações do Caio

O primeiro quadrado tem lado 3, o segundo tem lado 5, o terceiro tem lado 8, o quarto tem lado 13. O que pode ser verificado é que o lado do quadrado será a soma do lado do quadrado anterior mais a soma do lado do quadrado anterior ao anterior.

$$L_{Q1} + L_{Q2} = L_{Q3}$$

$L_{Q2} + L_{Q3} = L_{Q4}$

$L_{Q3} + L_{Q4} = L_{Q5}$

. . .

. . .

. . .

$L_{Qn-1} + L_{Qn-2} = L_{Qn}$

E ainda pode ser observado que, a área do 1º quadrado possui uma unidade a menos em relação ao primeiro retângulo. O segundo quadrado possui uma unidade a mais de área que o segundo retângulo. Com isso vemos que as áreas se alteram em uma unidade entre quadrados e retângulos. Uma vez o quadrado possui a área maior, na próxima o retângulo possuirá a área maior em uma unidade (Fonte: Relatório do aluno).

Caio descobriu uma relação importante entre os lados dos quadrados, fato que possibilitou ao grupo saber quais eram as próximas figuras das sequências. Entretanto, teve dificuldades para encontrar um termo geral que representasse o que ele havia escrito, mas com a ajuda dos amigos, chegou a seguinte generalização: $L_{Qn-1} + L_{Qn-2} = L_{Qn}$.

Caio não esclareceu qual deveria ser o primeiro termo, o segundo termo, nem o significado de L_{Qn}, mas podemos dizer que ele chegou ao termo geral da sequência de Fibonacci. No entanto, não associou a fórmula que chegou ao nome sequência de Fibonacci.

Na segunda parte do relatório o aluno apenas descreveu a regularidade que o grupo já havia percebido – destacou que havia alternância de uma unidade de área quando se considera cada um dos termos da seqüência de quadrados e cada retângulo "correspondente" da outra sequência, mas não deixou claro no relatório que não deveria existir essa diferença.

3.5.4.2 Análise das anotações do André

André inicia o relatório dando ao paradoxo o seu nome - "Falso Paradoxo do André[11]". Apesar de parecer estranho, mesmo que tenha acontecido de

[11] O aluno utiliza o seu sobrenome verdadeiro para dar nome ao paradoxo.

forma despropositada, o aluno não está errado em usar o termo “falso paradoxo”, pois o paradoxo de áreas utilizado na Tarefa de Investigação pode ser classificado como falsídico. Segundo Quine são classificados como falsídicos os paradoxos cuja “conclusão é sempre falsa, e o erro se encontra em alguma premissa ou alguma inferência” (1976).

Depois de atribuir um nome para o paradoxo André fez a seguinte afirmação:

A seguir, uma análise aprofundada, que prova que esse paradoxo foi causado por um erro ou por uma precipitação do autor das figuras.

Mas para “provar” utiliza-se apenas do quadrado de lado 8 e do retângulo “correspondente”. Calcula a área de cada um e encontra a diferença de uma unidade quadrada, então conclui afirmando que está provado.

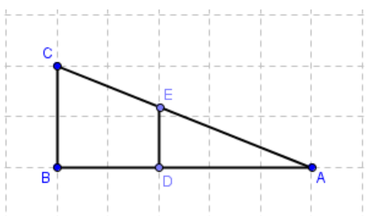
Considerando a argumentação utilizada por André, seria importante que em um próximo encontro discutir as demonstrações formais, as provas informais e outros tipos de argumentações.

3.5.4.3 Análise das anotações do Beto

Como Beto não sabia o que iria relatar, o professor sugeriu que relatasse uma justificativa para algo que o grupo percebeu durante a investigação – por que não é possível montar o retângulo com as “peças” de cada “quadrado correspondente”?

Beto desenha dois triângulos na folha de papel quadriculado a partir da figura 2A, depois experimenta fazer alguns testes, conforme podemos verificar adiante:

Figura 14 – Esboço da figura do Beto



Calculou a tangente do ângulo $\hat{A}$, considerando o triângulo ABC, e apresentou a seguinte estrutura: $\text{tg}\,\hat{A} = \frac{2}{5} = 0{,}4$.

Calculou a tangente do ângulo $\hat{A}$, considerando o triângulo ADE, e apresentou a seguinte estrutura: $\text{tg}\,\hat{A} = \frac{1}{3} = 0{,}333...$

Ao perceber que $\frac{2}{5} \neq \frac{1}{3}$ concluiu que os triângulos ABC e ADE não são semelhantes e consequentemente que com as “partes” do quadrado não daria para montar o retângulo. Porém antes de chegar ao termo “triângulos semelhantes”, disse que os triângulos não eram simétricos. Depois de uma discussão sobre os conceitos de simetria ele afirmou que os triângulos não eram congruentes. Surgiu uma nova discussão e só então eles chegaram à conclusão que deveriam ter usado o termo semelhantes.

Fez o mesmo para outros triângulos das figuras 2B e 2C, e ao realizar os testes concluiu que como as frações não são equivalentes, não era possível montar o retângulo com as peças do quadrado.

Desta forma, até chegar às suas conclusões Caio proporcionou ao grupo uma experiência bastante enriquecedora. Os alunos tiveram a oportunidade de rever vários conteúdos na tentativa de responder a questão levantada.

O professor percebeu também, principalmente no início da atividade, que como são iniciantes na investigação Matemática ficam angustiados em dar respostas a questões que não estão bem definidas ou que nem foram levantadas.

O professor tem que lembrar constantemente que eles não estão trabalhando com Resolução de Problemas, metodologia que faz parte do cotidiano deles. Em alguns momentos fica explícito que o aluno tem a sensação que seu trabalho está sendo em vão, porque nunca chega a uma resposta definitiva para a situação investigada, depois de uma “descoberta” sempre surgem outras.

Já ao resolver os problemas propostos pelo material didático adotado pelo colégio, o aluno tem uma certeza, chegou ou não a uma resposta. Num primeiro momento é difícil o aluno se conscientizar que até mesmo quando resolve um problema “podemos fazer outras descobertas que, em alguns casos, se revelam tão ou mais importantes que a solução do problema original” (PONTE, BROCARDO; OLIVEIRA, 2005, p. 17).

Assim, considerando a Tarefa de Investigação, é importante que os alunos saibam valorizar todos os momentos de uma investigação e reduzir a sua ansiedade pela procura de uma resposta que finde a atividade.

Desta forma, pensamos que a principal dificuldade que o professor encontra na realização da investigação Matemática é a persistência que deve ter em incentivar que o aluno reflita sobre a importância do seu papel na Tarefa de Investigação.

3.5.4.4 Análise da experiência de ensino

Considerando especificamente a Experiência de Ensino relatada neste capítulo, penso que foi importante conciliar a exploração do "Paradoxo de Carroll" com a metodologia da Investigação Matemática. Ao analisar a Tarefa de Investigação pude perceber que o "Paradoxo de Carroll" despertou o interesse dos alunos para a realização da atividade.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2005) advogam que

> Na fase de arranque da investigação, é fundamental garantir que os alunos se sintam motivados para a atividade a realizar. [...] Por outro lado, o professor deve dar uma atenção cuidadosa à própria tarefa, escolhendo questões ou situações iniciais que, potencialmente, constituam um verdadeiro desafio aos alunos (p. 47).

A investigação do "Paradoxo de Carroll" também permitiu que alguns conteúdos matemáticos fossem trabalhados, dentre os quais estão: áreas de figuras planas, trigonometria no triângulo retângulo, semelhança de triângulos e sequências numéricas. Mais do que ver ou rever conteúdos matemáticos os alunos tiveram a oportunidade de confrontar suas opiniões, de fazer conjecturas, de testá-las, de fazer refutações, de fazer novas conjecturas e de chegar a algumas conclusões, conforme podemos perceber no seguinte diálogo:

> [...] Depois de um período de reflexão André fez a primeira conjectura.
> ***André:*** *Em todos eles aumentou uma unidade quadrada.*
> O aluno estava se referindo que a área de cada retângulo era maior em uma unidade quadrada se comparada com a área de cada quadrado correspondente.
> ***Professor:*** *Você fez uma conjectura, verifiquem se ela é verdadeira.*
> ***Beto:*** *Não é real o que André falou.*

> ***Professor:*** *Por que não é real?*
> Então Beto apontou um par de figuras e explicou que o retângulo tinha uma unidade de área a menos que o quadrado correspondente. André percebeu que Beto estava certo e formulou uma outra conjectura, com a qual o grupo concordou depois de fazer as verificações apresentadas a seguir:
> ***André:*** *Sempre altera em uma unidade de área. Considerando o primeiro par de "figuras correspondentes", o retângulo tem uma unidade de área a mais que o quadrado, no segundo, uma unidade de área a menos, no terceiro, uma a mais e assim sucessivamente.[...] (Nossa Dissertação, p. 69).*

Juntos também conseguiram inferir que havia uma falácia na questão investigada e foram mais longe ainda, afirmaram e justificaram que a situação apresentada na Tarefa de Investigação se tratava de um paradoxo, conforme podemos constatar no seguinte trecho:

> ***André:*** *É como se fosse um paradoxo.*
> Beto e Caio ficaram interessados na fala de André.
> ***Beto:*** *É como se fosse o quê?*
> ***André:*** *Um paradoxo.*
> ***Professor:*** *Por quê?*
> ***André:*** *Tem um quadrado, desmontando ele e montando um retângulo as áreas deveriam ser iguais, mas isso não acontece.*
> Como Beto e Caio ainda estavam confusos, André utilizou-se do primeiro par de figuras "correspondentes" para exemplificar o que havia falado.
> ***André:*** *Tinha um quadrado de área nove, ele foi desmontado e com as partes montou-se um retângulo, mas o retângulo ficou com área dez.*
> Ao perguntar para André o que o levou a afirmar que aquela situação era um paradoxo, ele me lembrou que o professor havia proposto a questão do vestibular da UNESP para a classe deles, há aproximadamente um ano. Naquele momento, André estabeleceu uma relação entre o um paradoxo algébrico que eles tiveram a oportunidade de conhecer, e um paradoxo geométrico com o qual eles acabavam de entrar em contato.
> Pela primeira vez o grupo deixava explícito que não poderia haver a diferença entre as áreas dos quadrados e a área de cada retângulo "correspondente". Antes da afirmação de André os alunos pareciam estar tratando de forma natural o fato de faltar ou sobrar uma unidade de área entre as figuras (Nossa Dissertação, ps. 71 e 72).

Os participantes também se interessaram em analisar regularidades. Descobriram que com a soma dos lados de dois quadrados consecutivos da sequência 1, obtêm-se a medida do lado do próximo quadrado, conforme fica explicito no parágrafo:

> O primeiro quadrado tem lado 3, o segundo tem lado 5, o terceiro tem lado 8, o quarto tem lado 13. O que pode ser verificado é que o lado do quadrado será a soma do lado do quadrado anterior mais a soma do lado do quadrado anterior ao anterior (Nossa Dissertação, p. 73).

Associar o "Paradoxo de Carroll" com a Tarefa de Investigação, mostrou-se uma situação muito propícia, para que os alunos pudessem vislumbrar a atividade Matemática numa perspectiva diferente de como ela vem exposta nos livros didáticos - com aspecto harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições, como se existisse um saber matemático imutável, infalível e externo ao aluno (CARAÇA, XIII, 1984).

Assim, com base nos relatos anteriores e considerando especificamente esta experiência de ensino, podemos concluir que ter trabalhado o "Paradoxo de Carroll" associado a Tarefa de Investigação, contribuiu para que com o desenvolvimento da atividade os alunos tivessem oportunidade de agir como matemáticos, formulando e discutindo conjecturas, fazendo generalizações, refutando algumas inferências, e até de fazer algumas validações de resultados obtidos. Além disso conteúdos curriculares e extracurriculares emergiram da atividade e sua aprendizagem pode ter sido viabilizada.

4 O “PARADOXO DE MELLO”

O “Paradoxo de Mello” se tornou conhecido por meio de uma divulgação no artigo denominado “Ganhe $100\ m^2$ com um paradoxo”, publicado em 2001 no Jornal Folha de São Paulo, por José Luiz Pastore Mello.

Neste trabalho, apresentamos a descrição do paradoxo e fazemos sugestões de adaptação para seu uso na sala de aula por meio da Investigação Matemática. Também, indicamos alguns caminhos que os alunos poderiam trilhar, conjecturando possíveis buscas, reflexões, refutações, generalizações e provas.

4.1 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DO “PARADOXO DE MELLO”

No decorrer do texto usamos o sobrenome de José Luiz Pastore Mello para dar nome ao paradoxo do artigo “Ganhe $100\ m^2$ com um paradoxo”. Assim, tratamos o paradoxo como “Paradoxo de Mello”.

Mesmo com a exposição de um resumo do Paradoxo de Mello, feita na introdução deste trabalho, julgamos conveniente apresentar de forma fiel o artigo no qual o paradoxo se encontra. Faremos a apresentação do artigo em três etapas: num primeiro momento explicitamos a introdução do problema, em uma segunda etapa mostramos o paradoxo propriamente dito e para finalizar comentamos o desfecho que o autor sugere para a situação.

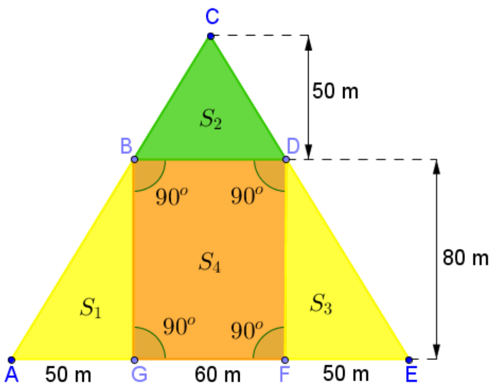
Aqui, apresentamos à introdução do artigo de Mello (2001)

> “Apesar de sabermos muito pouco sobre a vida de Euclides, matemático que viveu por volta do ano 300 a.C., frequentemente atribuímos a ele o título de ‘pai da geometria’ devido às suas importantes contribuições ao estudo desse ramo da Matemática, contidas na monumental obra "Os Elementos". Acredita-se que o livro de Euclides, escrito originalmente em 13 volumes, tenha sido a segunda obra mais editada na história do homem, perdendo apenas para o número de edições da Bíblia. Durante várias gerações, a obra foi usada como manual para o ensino de geometria devido ao rigor matemático com que tratava o assunto (MELLO, 2001, Folha de São Paulo)”.

Devemos lembrar que este artigo foi publicado em um jornal que provavelmente tem leitores com diferentes preferências, e não necessariamente apenas professores de Matemática, matemáticos ou aqueles que gostam de Matemática. Assim, pensamos que o autor introduziu o artigo com um pouco de História da Matemática para atrair a atenção também daqueles que têm preferência por outros assuntos. Contudo, Mello começou com um pouco de história, mas já preparando o leitor para o fato de que o assunto abordado tenderia para a geometria.

Agora, apresentamos o paradoxo, fielmente conforme aparece no artigo "Ganhe $100\ m^2$ com um paradoxo":

> "Pois bem, hoje evocamos a presença do 'pai da geometria' para que seu rigor matemático nos inspire no esclarecimento de um curioso paradoxo geométrico. O problema em questão refere-se a uma divisão de um terreno ABCDEFG em quatro lotes (ABG, BCD, EDF e GBDF), conforme indicam as medidas da figura abaixo.



> Segundo nossos conhecimentos geométricos sobre o cálculo da área de um triângulo (base vezes altura dividido por dois) e da área de um retângulo (lado vezes lado), sabemos que as áreas S_1, S_2, S_3 e S_4 de cada terreno serão respectivamente iguais a 2.000 m^2, 1.500 m^2, 2.000 m^2 e 4.800 m^2, perfazendo 10.300 m^2 de área total no terreno. Por outro lado, se quiséssemos calcular a área total do terreno, admitindo sua forma de um triângulo de base AE, medindo 160 m, e altura igual a 130 m, pela fórmula da área de um triângulo, concluiríamos que o terreno tem área total igual a 10.400 m^2 (ganhamos 100 m^2 em relação ao cálculo anterior!). Como explicaríamos esse paradoxo digno de causar calafrios até ao 'pai da geometria'? (MELLO, 2001, Folha de São Paulo).

Lembramos novamente que o artigo foi divulgado em um jornal destinado a diversos públicos e não só aos que gostam de Matemática. Assim, pensamos que o autor sentiu necessidade de elucidar alguns assuntos básicos de geometria plana.

Aos leitores que estão mais afastados dos assuntos básicos da Matemática, Mello (2001) promove uma "revisão" de cálculo de áreas de triângulos e retângulos.

No artigo, o autor aborda um paradoxo geométrico, segundo o qual um lote de formato triangular é dividido em quatro lotes, sendo três triangulares e um retangular. A surpresa é que a soma das quatro áreas dos lotes que compõem o terreno maior é $100\ m^2$ menor que a área do terreno maior, quando se calcula as referidas áreas separadamente.

Com intenção de ser um pouco mais claro, vamos representar a área do triângulo ACE (terreno maior), por A_{ACE} e as áreas dos demais terrenos por S_1, S_2, S_3 e S_4, conforme a figura do artigo. Objetivando calcular a área do terreno maior, pode-se proceder da seguinte forma: $A_{ACE} = \dfrac{160.(50+80)}{2} = 10\,400\ m^2$.

Por outro lado, calculando separadamente as áreas, pode-se obter: $S_1 = \dfrac{50.80}{2} = 2000\ m^2$, $S_2 = \dfrac{60.50}{2} = 1\,500\ m^2$, $S_3 = \dfrac{50.80}{2} = 2000\ m^2$ e $S_4 = 80.60 = 4\,800\ m^2$. Somando as áreas, tem-se que: $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 10\,300\ m^2$. Assim, chegamos a uma conclusão que é contraintuitiva, pois a área do triângulo ACE é igual a $10\,400 m^2$ e a soma das áreas $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ é igual a $10\,300\ m^2$. Entretanto esse fato é contraditório, pois se o triângulo ACE e os lotes ABG, BCD, EDF e GBDF representam a mesma superfície, então a igualdade $A_{ACE} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$, deveria ser verdadeira. Depois deste apontamento Mello (2001) satiriza, enfatizando que é possível ganhar $100\ m^2$ com esse paradoxo.

Agora, vamos mostrar a justificativa do autor para esclarecer a diferença de $100\ m^2$ entre as referidas áreas:

> "Note que os segmentos AG e BD são paralelos, mas os ângulos $B\hat{A}G$ e $C\widehat{B}D$ não são congruentes (suas tangentes são iguais a 8/5 e 5/3 respectivamente). Se esses ângulos não são congruentes, segue que os pontos A, B e C não estão alinhados e portanto ABCDE não é um triângulo, apesar de isso ser imperceptível visualmente. Decorre daí que o cálculo correto da área total do terreno deve ser feito pela soma da área de cada um dos quatro lotes. O ganho de 100 m^2 de um cálculo em relação a outro se deve à diferença entre a área do triângulo ACE (assumida equivocadamente como a área do terreno) e a área do polígono côncavo ABCDE (área do terreno) (MELLO, 2001, Folha de São Paulo)".

O autor utiliza uma argumentação simples e faz uso de Matemática elementar para mostrar que existe algo de errado que os nossos sentidos físicos muitas vezes são incapazes de detectar. Basicamente, Mello (2001) utiliza trigonometria no triângulo retângulo com a finalidade de mostrar que o terreno que parecia ser triangular, trata-se de um pentágono côncavo. Assim, considerando que a superfície do terreno maior tem formato triangular e não pentagonal, quando se calcula a área do triângulo ACE, obtém um erro de $100\ m^2$ de área.

Portanto, faz-se necessário uma argumentação lógica, mesmo que simples, para explicar o "Paradoxo de Mello".

4.1.1 Analisando a Viabilidade de usar o "Paradoxo de Mello" nas Aulas de Matemática

Alunos a partir do nono ano do Ensino Fundamental, teoricamente, conseguiriam justificar a falácia encontrada no artigo utilizando uma argumentação análoga a de Mello (2001), uma vez que um indivíduo que estuda no nono ano do Ensino Fundamental no Estado de São Paulo, de acordo com o Currículo de Matemática e suas Tecnologias (SEE/SP, 2010, p. 64), deve estudar razões trigonométricas no terceiro bimestre. Ainda, de acordo com o mesmo documento, deve desenvolver a habilidade de "compreender o significado das razões trigonométricas fundamentais (seno, cosseno e tangente) e saber utilizá-las para resolver problemas em diferentes contextos (SEE/SP, 2010, p. 64)".

Destacamos também que no mesmo documento é previsto que alunos do oitavo ano do Ensino Fundamental, devem estudar áreas de polígonos e com isso "desenvolver a habilidade de calcular áreas de polígonos de diferentes tipos, com destaque para os polígonos regulares (SEE/SP, 2010, p. 62)".

Contudo, se a intenção é trabalhar conteúdos como áreas de figuras planas, semelhança de triângulos ou trigonometria no triângulo retângulo, pensamos que o problema proposto por Mello pode ser uma atividade importante para que o papel do aluno não se restrinja à ação de resolver exercícios repetitivos destes assuntos.

Considerando o que foi exposto, julgamos que um professor de Matemática poderia apresentar uma atividade com características próximas da atividade proposta por Mello, a partir do nono ano do Ensino Fundamental. Acreditamos também que o artigo "Ganhe $100\ m^2$ com um paradoxo" já tem formato de um problema, e desta forma, já é uma opção para ser aplicado nas aulas de Matemática.

No entanto, o professor deve ser cauteloso, pois dependendo do momento e da forma como a atividade é apresentada, a mesma pode representar para o aluno um belo problema ou mais um exercício de repetição disfarçado de problema. Entendemos que este problema pode perder seu valor, se o professor der uma aula expositiva sobre razões trigonométricas, resolver com os alunos alguns exercícios e em seguida pedir que façam uso daquela teoria para explicar o “Paradoxo de Mello”.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais,

> [...] tradicionalmente, os problemas não têm desempenhado seu verdadeiro papel no ensino, pois, na melhor das hipóteses, são utilizados apenas como forma de aplicação de conhecimentos adquiridos anteriormente pelos alunos.
> A prática mais freqüente consiste em ensinar um conceito, procedimento ou técnica e depois apresentar um problema para avaliar se os alunos são capazes de empregar o que lhes foi ensinado. Para a grande maioria dos alunos, resolver um problema significa fazer cálculos com os números do enunciado ou aplicar algo que aprenderam nas aulas (BRASIL, 1997, p.40).

Garantidas as ressalvas, acreditamos que na tentativa de elucidar o paradoxo proposto por Mello (2001), o aluno não irá apenas aplicar conteúdos que já aprendeu, mas terá a oportunidade de refletir sobre teorias que possam ajudá-lo a entender a situação contraintuitiva. Afinal, “superfícies idênticas” não podem diferir em $100\ m^2$ de área!

Entretanto, se o desafio for proposto nas aulas de Matemática, acreditamos que grande parte dos alunos não chegará de forma direta a elucidação do “Paradoxo de Mello”. Provavelmente, muitos dos alunos tentarão recalcular as áreas S_1, S_2, S_3, S_4 e A_{ACE}. Se na sequência fizerem a soma $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ chegarão a $10\,300\ m^2$. Dando continuidade ao procedimento, se calcularem a área do triângulo ACE chegarão a $10\,400 m^2$. Desta forma, poderão constatar que “infelizmente” terão que investigar outros aspectos do problema, pois intuitivamente essas áreas deveriam ser iguais.

Também possivelmente, alguns alunos poderão concluir que $A_{ACE} \neq S_1 + S_2 + S_3 + S_4$. Outros poderão apontar a desigualdade $A_{ACE} > S_1 + S_2 + S_3 + S_4$, como algo legítimo diante dos cálculos que acabaram de fazer, mas conscientes de que uma área não poderia ser maior que a outra, uma vez que aparentemente o triângulo ACE e a região $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ representam a mesma superfície.

Assim, é necessário fazer outras conjecturas para descobrir o que está errado.

A partir deste ponto é desejável que o aluno desconfie que pontos que pareciam colineares podem não satisfazer esta condição. Uma possibilidade para fazer esta verificação é utilizar as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Mais precisamente, calcular a tangente dos referidos ângulos.

Deste modo o aluno pode fazer a verificação das hipóteses levantadas, da seguinte forma:

1) $\tan G\widehat{A}B = \frac{80}{50} = \frac{8}{5}$

2) $\tan D\widehat{B}C = \frac{50}{30} = \frac{5}{3}$

De (1) e (2), tem-se que $\tan G\widehat{A}B = \frac{8}{5}$ e $\tan D\widehat{B}C = \frac{5}{3}$. Logo, $\tan G\widehat{A}B \neq \tan D\widehat{B}C$. Portanto, pode-se concluir que os ângulos $G\widehat{A}B$ e $D\widehat{B}C$ não são congruentes. Assim, os pontos A, B e C não são colineares. Logo, o terreno maior não é um triângulo.

Pelas análises que fizemos neste capítulo, acreditamos que trabalhar o "Paradoxo de Mello" na sala de aula, pode ser importante para os participantes, uma vez que pelas nossas suposições, o aluno tem a oportunidade de: elaborar procedimentos de resolução (como realizar simulações, fazer tentativas e formular hipóteses) e validar seus procedimentos.

Até agora, indicamos alguns caminhos que os alunos poderiam trilhar ao tentar elucidar paradoxo proposto por Mello (2001). Mas será que o "Paradoxo de Mello" poderia ser investigado pelo procedimento metodológico das Investigações Matemáticas na Sala de Aula? Como ficaria a atividade na perspectiva da Investigação Matemática? Como elaborar uma Tarefa de Investigação que se adapte ao "Paradoxo de Mello"?

4.1.2 Como Tratar o "Paradoxo de Mello" por Meio de Tarefa de Investigação

Nesta unidade tentaremos responder a última questão levantada na unidade anterior. Assim, se o objetivo é elaborar uma Tarefa de Investigação que tenha potencial para ser explorada e que realmente represente um desafio para os alunos, uma opção é recorrer aos autores do livro Investigações Matemáticas na Sala de Aula.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2005, p.71), informam que "a geometria é particularmente propícia, desde os primeiros anos de escolaridade, a um ensino fortemente baseado na exploração de situações de natureza investigativa". Este fato nos favorece, uma vez que o Paradoxo de Mello tem natureza geométrica.

Outro aspecto positivo de se investigar "problemas geométricos" segundo os autores portugueses é a possibilidade de se elaborar tarefas de investigação adequadas para diferentes níveis de desenvolvimento e que requerem poucos pré-requisitos (PONTE, BROCARDO; OLIVEIRA, 2005).

No entanto, acreditamos que quanto mais opção de assuntos estiver à disposição do aluno, mais enriquecedora será a exploração da Tarefa de Investigação. Tocamos neste assunto, por julgar que outro conteúdo possível de se explorar com o "Paradoxo de Mello" é o reconhecimento de padrões numéricos. Com isso, acreditamos na possibilidade de criar uma Tarefa de Investigação que favoreça o estabelecimento de relações entre padrões numéricos e geométricos.

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2005),

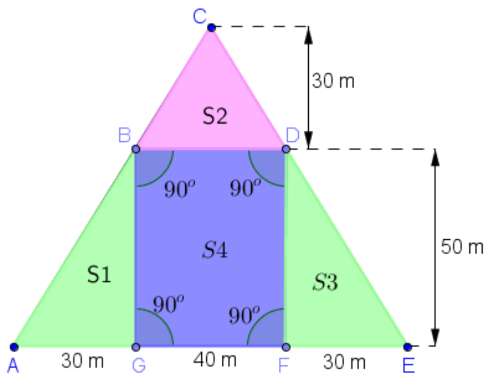
> Outra potencialidade das investigações numéricas é a de proporcionarem o estabelecimento de conexões Matemáticas. Muitas investigações numéricas promovem a compreensão de relações entre padrões numéricos e geométricos bem como a utilização de conceitos geométricos para simplificar a recolha de dados e facilitar a compreensão de determinadas relações numéricas (2005, p. 65).

4.1.3 A Tarefa de Investigação

Considerando que o "Paradoxo de Mello" pode ser abordado via Tarefa de Investigação, elaboramos o seguinte texto:

Raimundo, filho único de Nonato sempre se orgulhou em ajudar o pai a cuidar de uma humilde criação de caprinos. Seu Nonato costumava gabar-se de ter o único lote com formato de um triângulo isósceles da região (lote 1, figura 15). Vangloriava-se também da divisão do lote em quatro piquetes, sendo três triangulares e um retangular, representados por S_1, S_2, S_3 e S_4, conforme a figura15.

Figura 15 – Lote 1



Consta na escritura que o lote do Seu Nonato é formado por quatro piquetes com as seguintes características:

1) Os piquetes S1 e S3 são triângulos retângulos cujos catetos medem 30 m e 50 m;

2) O piquete S2 é um triângulo isósceles cuja base mede 40 m e altura 30 m;

3) O piquete S4 é um retângulo de dimensões 50 m por 40 m.

Com o lastimável falecimento do Seu Nonato, o filho herdou o lote, cuja planta está representada pela figura 15.

Raimundo deixou de criar cabras leiteiras e passou a trabalhar com caprinos de corte. Com isso, sua pequena empresa agropecuária começou a prosperar. Depois de algum tempo acumulou capital e resolveu investir em outro lote. No entanto, o homem saudosista, decidiu que só compraria uma propriedade se fosse maior que a primeira e se tivesse o mesmo padrão numérico e geométrico do lote 1. A intenção era preservar as características geométricas do lote que herdou do Seu Nonato.

Depois de estudar as regularidades encontradas na escritura e na planta do primeiro lote, comprou o segundo lote (lote 2, figura 12), cuja planta, está representada na figura 16. Seu negócio continuou prosperando, então Raimundo comprou o terceiro lote (lote 3, figura 17), maior que o segundo e com medidas que seguem as regularidades encontradas nos dois primeiros lotes.

Figura 16 – Lote 2

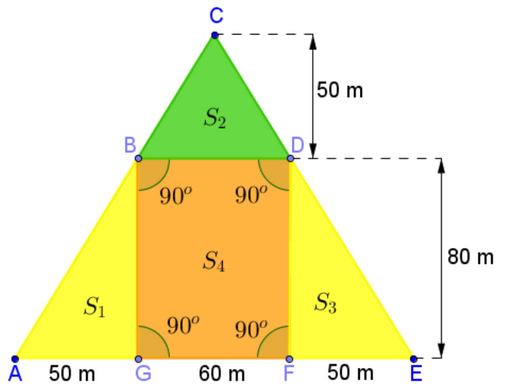
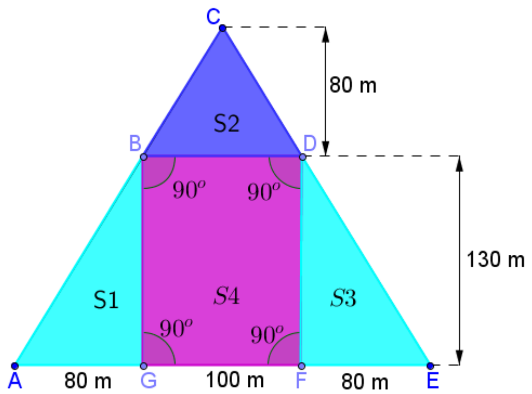


Figura 17 – Lote 3



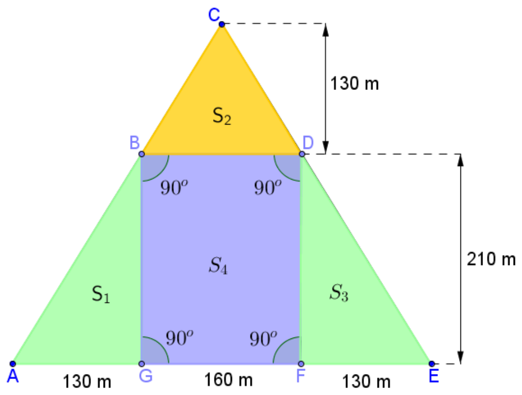
Pode-se dizer que Raimundo é um sujeito trabalhador, mas também de muita sorte. Outro dia, um de seus amigos perguntou quantos lotes ele já havia comprado. Como foi pego de surpresa, respondeu que possuía muitos lotes, mas que não se lembrava do número com exatidão.

Um belo dia, Seu Hilário, o administrador dos lotes, trouxe uma notícia intrigante para o Raimundo. Avisou que quando se calcula a área do triângulo isósceles ACE, chega-se a uma medida diferente de quando se calcula a área de cada piquete e depois efetua a soma.

Raimundo ficou perplexo, mas não sabia nem como começar a resolver este problema. Afinal, ele mesmo havia escolhido as dimensões dos lotes, mas nem pensou em somar a área de cada piquete para verificar se era igual à área do triângulo maior (ACE).

Apresentamos a seguir a planta do quarto lote. Assim tem-se uma sequência com as plantas dos quatro primeiros lotes do Raimundo.

Figura 18 – Lote 4



Nesta situação, várias questões podem ser analisadas. Por exemplo:

1. A diferença de áreas informada por Seu Hilário, realmente existe? Essa diferença ocorre em todos os lotes? Se a resposta for afirmativa, tente descobrir o motivo.

2. Tente esboçar os desenhos dos próximos lotes. Para isso é importante descobrir qual regularidade observada por Raimundo, possibilitou que ele estabelecesse o formato e as dimensões das plantas dos lotes 2, 3, 4,..., n.

Analisem estas questões e as demais que provavelmente aparecerão durante a investigação.

4.1.4 Encaminhamento para a Tarefa de Investigação

Acreditamos que a Tarefa de Investigação proposta neste capítulo tem as características de um bom problema. Segundo, Ian Stewart (1995) “Um bom problema é aquele cuja solução, em vez de simplesmente conduzir a um beco sem saída, abre horizontes inteiramente novos [...]” (apud PONTE, BROCARDO; OLIVEIRA, 2005, p. 16).

Sendo assim, vamos mostrar alguns caminhos que os alunos poderiam trilhar ao explorar a Tarefa de Investigação. Mas, antes disso, julgamos importante destacar que:

1) Os caminhos que iremos trilhar podem diferir do caminho escolhido pelos alunos de uma sala A; que também pode diferir dos problemas que interessam aos alunos das salas B, C, D,...;

2) Muitos conteúdos matemáticos podem ser explorados nessa tarefa, mas as razões trigonométricas no triângulo retângulo e o cálculo de área de polígonos são assuntos essenciais para o desenvolvimento dessa atividade.

Desde o sexto ano do Ensino Fundamental o aluno entra em contato com área de figuras planas, sendo que no oitavo ano é proposto que ele aprenda a “calcular áreas de polígonos de diferentes tipos [...]” (SEE/SP, 2010, p.62). Para o nono ano é proposto que os alunos compreendam o significado das razões trigonométricas fundamentais (seno, cosseno e tangente) e saibam utilizá-las para resolver problemas em diferentes contextos (SEE/SP, 2010, p.64).

Com isso, acreditamos que essa Tarefa de Investigação pode ser explorada no nono ano do Ensino Fundamental. No entanto, julgamos conveniente não restringir essa tarefa, uma vez que alunos que cursam o Ensino Médio têm condições de investigar outros assuntos além daqueles explorados pelos que frequentam o último ano do Ensino Fundamental.

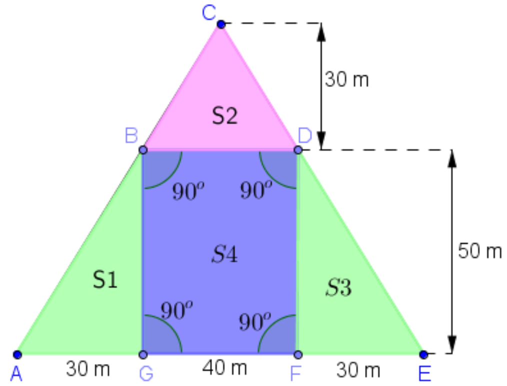
4.1.5 Possíveis Caminhos para a Investigação da Tarefa Proposta

Pensamos que um caminho possível para iniciar a investigação é tentar responder a primeira pergunta, ou seja, verificar se a diferença de área indicada por Seu Hilário realmente existe e a partir da resposta obtida, analisar se há mais alguma situação que pode ser explorada.

4.1.5.1 Verificando a veracidade da afirmação do seu Hilário para o primeiro lote.

Com o objetivo de facilitar a verificação da validade da afirmação do Seu Hilário, apresentamos aqui, a planta do primeiro lote:

Figura 19 – Lote 1



Considerando o lote 1, representamos a área do triângulo ACE por $(A_{ACE})_{L1}$, a soma das áreas dos piquetes por $(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)_{L1}$ e a área de cada piquete por S_1, S_2, S_3 e S_4, conforme está indicado na figura 19.

Provavelmente, muitos dos alunos tentarão calcular as áreas S_1, S_2, S_3, S_4 e $(A_{ACE})_{L1}$, começando pelo lote 1. Se em seguida fizerem a soma $(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)_{L1}$ chegarão a $4100\ m^2$. Dando continuidade ao procedimento, se calcularem a área do triângulo ACE chegarão a $4000\ m^2$. Desta forma, poderão constatar que "infelizmente" terão que investigar outros aspectos do problema, pois se o lote é triangular e foi dividido em quatro piquetes, então a área do triângulo e a soma das áreas dos piquetes deveriam ser iguais.

Também possivelmente, alguns alunos poderão concluir que:

$(A_{ACE})_{L1} \neq (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)_{L1}$.

Outros poderão apontar a desigualdade $(A_{ACE})_{L1} < (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)_{L1}$, como algo legítimo diante dos cálculos que acabaram de fazer, mas conscientes do seguinte fato: se estivermos considerando a mesma superfície, então área do triângulo ACE não pode ser menor que a soma das áreas dos piquetes.

Esperamos ainda que alguns alunos cheguem à conclusão de que por um lado a igualdade $(A_{ACE})_{L1} = (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)_{L1} - 100$ é autêntica, pois seus cálculos apontam para esse fato, mas por outro lado, essa igualdade é contraintuitiva, paradoxal. Afinal o aluno pode ser traído pelo aspecto visual da figura.

Assim, deve-se refletir sobre a necessidade de levantar outras hipóteses para desvendar o paradoxo.

A partir deste ponto é desejável que o aluno desconfie que a medida de algum ângulo possa estar incorreta e que se isso acontecer, pontos que pareciam colineares podem não satisfazer esta condição.

Mas como verificar se os ângulos $G\hat{A}B$ e $D\hat{B}C$ são congruentes, sem ao menos conhecer as medidas desses ângulos? Uma possibilidade é utilizar as razões trigonométricas no triângulo retângulo. Mais precisamente, calcular a tangente dos referidos ângulos.

Deste modo o aluno pode fazer a verificação das hipóteses levantadas, da seguinte forma:

1) $\tan G\hat{A}B = \frac{50}{30} = \frac{5}{3}$

2) $\tan D\hat{B}C = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$

De (1) e (2), tem-se que $\tan G\hat{A}B = \frac{5}{3}$ e $\tan D\hat{B}C = \frac{3}{2}$. Logo, $\tan G\hat{A}B \neq \tan D\hat{B}C$. Portanto, pode-se concluir que os ângulos $G\hat{A}B$ e $D\hat{B}C$ não são congruentes. Assim, os pontos A, B e C não são colineares. Desta forma, ACE não é um triângulo.

Portanto, o coitado do Seu Nonato, pai do Raimundo, faleceu sem saber que seu lote não era um triângulo isósceles, conforme ele esperava. Se é que existem lotes que são “triângulos isósceles perfeitos”, no mundo real, ou melhor, fora do mundo criado por Euclides.

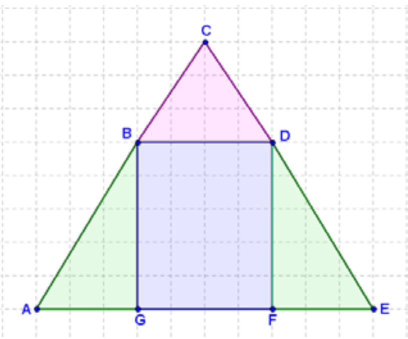
Pensamos também que alguns alunos podem levantar a seguinte questão: mas se o lote 1 não é um triângulo isósceles, qual é o formato desse lote? Não é difícil chegar à conclusão que se o ponto B não pertence ao segmento AC, então o ponto D, não pertence ao segmento CE. Assim, o lote 1 tem o formato pentagonal e não triangular. Portanto, seria correto afirmar que na planta, o lote 1 pode ser tratado como um pentágono ABCDE e não como um triângulo ACE.

Outro ponto a ser verificado é se esse pentágono é côncavo ou convexo[12].

Pensamos que para fazer essa verificação alguns alunos poderiam sentir necessidade de desenhar a planta do lote 1 em escala, com finalidade de visualizar o real formato do lote. Desta forma, uma possibilidade é utilizar uma folha quadriculada para desenhar a figura. Outra possibilidade é utilizar algum software de geometria dinâmica, como por exemplo, o Geogebra, que dispõe de malha quadriculada. Seja qual for a escolha, pode-se tomar cada unidade da malha como 10 metros e verificar como fica a figura.

Se a opção for o Geogebra, pode-se chegar ao desenho:

Figura 20 – Lote 1, malha quadriculada

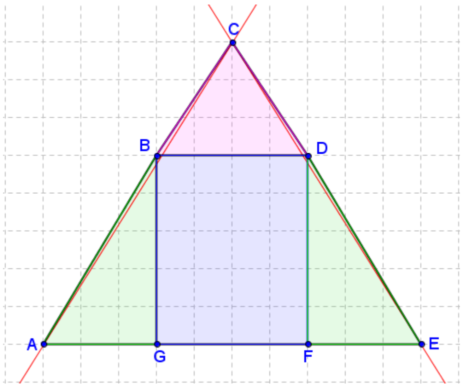


[12] “Um polígono simples é um *polígono convexo* se, e somente se, a reta determinada por dois vértices consecutivos quaisquer deixa todos os demais $(n-2)$ vértices num mesmo semiplano dos dois que ela determina. Se polígono não é um polígono convexo, diremos que ele é um *polígono côncavo”* (DOLCE, 2005, p. 134).

Parece que o desenho não foi muito útil, pois ACE continua parecendo um triângulo. Mas se o aluno traçar uma reta que passe pelos pontos A e C e outra que passe pelos pontos C e E, poderá visualizar que B não pertence ao segmento AC e D não pertence ao segmento CE.

Desta forma, há a possibilidade de se perceber que o lote não tem o formato do triângulo ACE como se pensava, mas do pentágono convexo ABCDE, conforme pode ser visualizado na próxima figura.

Figura 21 – Lote 1, malha quadriculada 2



Nesse momento, é papel do professor interferir com alguns questionamentos, tais como:

Mas como validar esta teoria? Como mostrar que o pentágono ABCDE é um pentágono convexo? Pode-se apoiar apenas nos desenhos para se fazer afirmações tão importantes? E se a régua estiver torta? E se a ponta do lápis não for fina o suficiente? E se os quadradinhos da malha quadriculada não forem quadrados perfeitos? E se houver erros milimétricos ao marcar os pontos? E se houver alguma falha no software utilizado?

O objetivo de se fazer estes questionamentos é levar o aluno a pensar na necessidade de uma argumentação Matemática convincente – da necessidade de uma demonstração. Mesmo que esta demonstração não seja no início tão formal ou sofisticada.

Considerando que o aluno esteja consciente da necessidade de se fazer uma argumentação que valide suas conjecturas, julgamos que possa fazê-lo de forma análoga ao que apresentamos a seguir:

Calculando as tangentes dos ângulos $G\hat{A}B$ e $D\hat{B}C$, tem-se que: $\tan G\hat{A}B = \frac{50}{30} = \frac{5}{3}$ e $\tan D\hat{B}C = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$. Assim, $\tan D\hat{B}C < \tan G\hat{A}B$. Como, $D\hat{B}C$ e $G\hat{A}B$ são ângulos agudos e $\tan D\hat{B}C < \tan G\hat{A}B$, então $D\hat{B}C < G\hat{A}B$.

Portanto, pode-se afirmar que o ponto B não pertence ao segmento AC e é exterior ao triângulo ACE. Procedendo de forma análoga, conclui-se que o ponto D também não pertence ao segmento CE e é exterior ao triângulo ACE. Logo, ABCDE é um **pentágono convexo.**

Contudo, se a atividade for aplicada nas salas de aula do segundo ou o terceiro ano do Ensino Médio e o aluno não tiver a iniciativa, o professor poderia tentar estimular a fazer reflexões além das justificativas sugeridas até então.

Pensamos que o aluno poderia ser instigado a investigar o quão diferente são as medidas dos ângulos $G\hat{A}B$ e $D\hat{B}C$.

A fim de elucidar esta situação pode-se inicialmente investigar qual é a diferença entre as tangentes dos dois ângulos. Agindo desta maneira, tem-se que:

$\tan G\hat{A}B - \tan D\hat{B}C = \frac{5}{3} - \frac{3}{2} = \frac{1}{6} = 0{,}1\bar{6}$, ou seja, constata-se que esta diferença é menor que dois décimos.

Mas qual é o significado desta conclusão?

Objetivando responder essa pergunta, julgamos que o aluno poderia pensar da seguinte forma:

Tomando, $\tan G\hat{A}B = \tan\alpha$ e $\tan D\hat{B}C = \tan\beta$, pela tangente da diferença de dois arcos, segue que:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha . \tan\beta} = \frac{\frac{1}{6}}{1 + \frac{\frac{5}{3.3}}{2}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{2}} = \frac{2}{42} = \frac{1}{21} \cong 0{,}04762$$

Consultando uma tabela trigonométrica ou uma calculadora científica, é possível concluir que $\tan(\alpha - \beta) \cong 0{,}0476 \Rightarrow (\alpha - \beta) \cong 2{,}7°$.

Este fato torna praticamente imperceptível aos nossos sentidos físicos detectar a diferença entre os ângulos $G\hat{A}B$ e $D\hat{B}C$, se a referência é a figura da planta do lote 1. Por esse motivo o lote pentagonal parecia triangular.

No entanto, por meio de análise e argumentações matemáticas chegamos à conclusão que o lote 1 é pentagonal e não triangular, e isso justifica a diferença de área apontada pelo Seu Hilário.

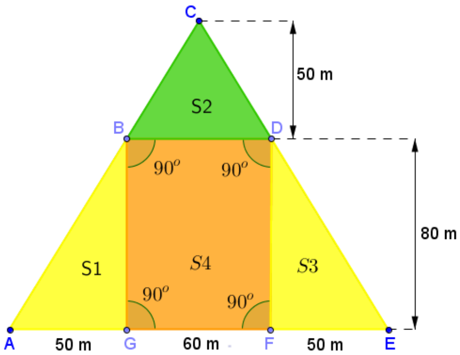
Vamos tentar elucidar esta situação: o lote 1 pode ser representado pelo pentágono ABCDE e não pelo triângulo ACE como pensava o Seu Nonato. Assim, a igualdade $(A_{ACE})_{L1} = (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)_{L1} - 100$, faz sentido; pois se subtrairmos $100\ m^2$ da área do lote 1 que pode ser representada pelo pentágono ABCDE ou pela soma das áreas dos piquetes chega-se a área do triângulo ACE. Portanto, considerando o lote 1, é natural que exista a diferença de áreas apontada pelo Seu Hilário.

4.1.5.2 Verificando a veracidade da afirmação do seu Hilário para os outros lotes

Vamos à outra verificação - será que a diferença de área também ocorre com o lote 2?

Para isso, apresentamos a planta do segundo lote:

Figura 22 – Lote 2



Raciocinando de forma análoga a situação anterior, chegamos aos valores:

$$(A_{ACE})_{L2} = \frac{160.(50+80)}{2} = 10\,400\ m^2$$

e $(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)_{L2} = 10\,300\ m^2$.

Em que $(A_{ACE})_{L2}$ representa a área do triângulo ACE, da planta do lote 2; e a expressão algébrica $(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)_{L2}$, representa a soma das áreas dos piquetes do lote 2.

Pensamos que não é mais um obstáculo para o aluno chegar à conclusão que existe uma diferença de $100\ m^2$, entre a soma das áreas dos piquetes e a área do triângulo ACE, se considerarmos o lote 2. Após ter descoberto o motivo da diferença de área no lote 1, e concluir que no lote 2 existe a mesma diferença de área, provavelmente o aluno suspeite que o lote 2 também não é triangular.

Entretanto, julgamos que não é simples perceber que no caso do lote 1 a soma das áreas dos piquetes é 100 metros quadrados maior que a área do triângulo ACE. Já no caso do lote 2, a soma das áreas dos piquetes é 100 metros quadrados menor que a área do triângulo ACE.

Representando por meio de equações, para o primeiro lote, tem-se que: $(A_{ACE})_{L1} = (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)_{L1} \quad 100$. Já, para o segundo lote, chega-se a equação $(A_{ACE})_{L2} = (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)_{L2} + 100$. Em que, o índice L1 refere-se ao lote 1 e L2 refere-se ao lote 2.

Mais uma vez os alunos podem verificar se os ângulos $G\hat{A}B$ e $D\hat{B}C$ são congruentes, por meio do seguinte procedimento:

1) $\tan G\hat{A}B = \frac{80}{50} = \frac{8}{5}$

2) $\tan D\hat{B}C = \frac{50}{30} = \frac{5}{3}$

De (1) e (2), tem-se que $\tan G\hat{A}B = \frac{8}{5}$ e $\tan D\hat{B}C = \frac{5}{3}$. Logo, $\tan G\hat{A}B \neq \tan D\hat{B}C$. Portanto, pode-se concluir que os ângulos $G\hat{A}B$ e $D\hat{B}C$ não são congruentes. Assim, os pontos A, B e C não são colineares. Logo, o lote 2 não tem o formato de um triângulo.

Novamente chega-se à conclusão que se o ponto B não pertence ao segmento AC, então o ponto D, não pertence ao segmento CE. Assim, o lote 2 também tem formato pentagonal.

Mas será que esse pentágono também é convexo? Vamos buscar a resposta para esta pergunta.

Calculando as tangentes dos ângulos $G\hat{A}B$ e $D\hat{B}C$, tem-se que: $\tan G\hat{A}B = \frac{80}{50} = \frac{8}{5}$ e $\tan D\hat{B}C = \frac{50}{30} = \frac{5}{3}$. Assim, $\tan G\hat{A}B < \tan D\hat{B}C$. Como, $D\hat{B}C$ e $G\hat{A}B$ são ângulos agudos e $\tan G\hat{A}B < \tan D\hat{B}C$, então $G\hat{A}B < D\hat{B}C$.

Portanto, pode-se afirmar que o ponto B não pertence ao segmento AC e está no **interior** do triângulo ACE. Procedendo de forma análoga, conclui-se que o ponto D também não pertence ao segmento CE e é **interior** ao triângulo ACE.

Logo, ABCDE é um pentágono **côncavo**.

Desta forma, a área do triângulo ACE é necessariamente diferente da área do Lote 2. Esse fato confirma a teoria formulada pelo Seu Hilário.

Novamente o aluno poderia investigar o quão diferente são as medidas dos ângulos $G\hat{A}B$ e $D\hat{B}C$.

A fim de elucidar esta situação pode-se inicialmente investigar qual é a diferença entre as tangentes dos dois ângulos. Agindo desta maneira, tem-se que:

$\tan D\hat{B}C - \tan G\hat{A}B = \frac{5}{3} - \frac{8}{5} = \frac{1}{15} = 0{,}0\overline{6}$, ou seja, constata-se que esta diferença é menor que sete centésimos.

Mas qual é o significado desta conclusão?

Com o objetivo de responder a essa pergunta, o aluno pode pensar da seguinte forma:

Tomando, $\tan D\hat{B}C = \tan\alpha$ e $\tan G\hat{A}B = \tan\beta$, pela tangente da diferença de dois arcos, segue que:

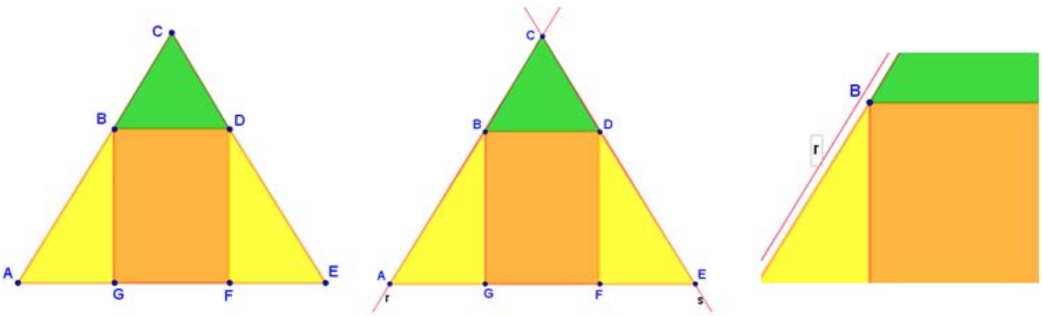
$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 - \tan\alpha.\tan\beta} = \frac{\frac{1}{15}}{1 - \frac{\frac{5}{3}.8}{5}} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{11}{3}} = \frac{3}{165} = \frac{1}{55} = 0{,}0\overline{18}$$

Consultando uma tabela trigonométrica ou uma calculadora científica, é possível concluir que $\tan(\alpha - \beta) = 0{,}0181818... \Rightarrow (\alpha - \beta) \cong 1°$.

Mais uma vez chega-se a conclusão que este ângulo é relativamente pequeno, e que este fato torna imperceptível aos nossos sentidos físicos detectar a diferença entre os ângulos $G\hat{A}B$ e $D\hat{B}C$, se a referência é a figura 22.

Como a figura é relativamente pequena, vamos recorrer aos desenhos produzidos por meio do software Geogebra, para visualizar que o polígono que parece ser um triângulo, é na verdade um pentágono côncavo.

Figura 23 – Sequência, Lote 2



Analisando a figura 23, pode-se notar que o desenho da esquerda representa a planta do lote 2, que aparenta ser um triângulo. No desenho central, traçamos a reta r que passa pelos pontos A e C e a reta s que passa pelos pontos E e C. Já o desenho da direita retrata a ampliação de um "corte" da figura central, no qual é possível visualizar que a reta r que passa pelos pontos A e C, não passa pelo ponto B.

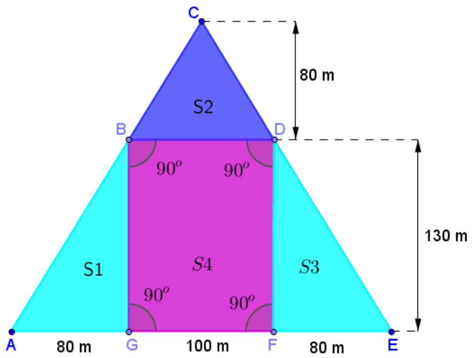
No entanto, é importante que o aluno perceba que pode se apoiar em argumentações matemáticas para chegar a conclusões mais precisas e confiáveis, sem necessariamente depender de desenhos.

Agora, vamos analisar o lote 3.

Será que o lote 3 também tem o formato de um pentágono?

Para facilitar a verificação, apresentamos a planta do lote 3.

Figura 24 – Lote 3



Raciocinando de forma análoga as situações anteriores, é fácil chegar aos valores:

$(A_{ACE})_{L3} = 27300\ m^2$ e $(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)_{L3} = 27\,400\ m^2$.

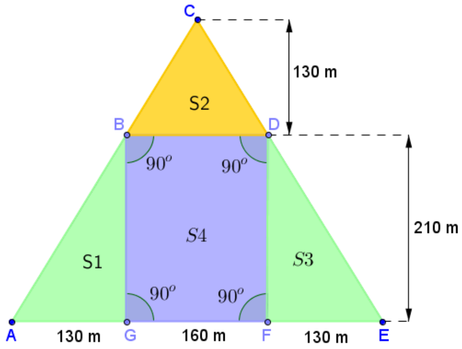
Assim, obtém-se a desigualdade $(A_{ACE})_{L3} < (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)_{L3}$, ou ainda chega-se a equação $(A_{ACE})_{L3} = (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)_{L3} - 100$.

Tomando como referência os estudos que fizemos a respeito dos lotes 1 e 2 e a equação $(A_{ACE})_{L3} = (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)_{L3} - 100$, podemos inferir que o lote 3 é um **pentágono convexo**. Desta forma, basta subtrair $100\ m^2$ da área do pentágono ABCDE, ou da soma das áreas dos quatro piquetes, que representam o lote 3, para obter o triângulo ACE da figura 24.

Será que o lote 4 também tem o formato de um pentágono? Vamos verificar.

A seguir, apresentamos a planta do lote 4.

Figura 25 – Lote 4



Raciocinando de forma análoga as situações anteriores, chega-se aos valores:

$(A_{ACE})_{L4} = 71\,400\ m^2$ e $(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)_{L4} = 71\,300\ m^2$.

Assim, obtém-se a desigualdade $(A_{ACE})_{L4} > (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)_{L4}$, ou ainda chega-se a equação $(A_{ACE})_{L4} = (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)_{L4} + 100$.

Tomando como referência os estudos feitos a respeito dos lotes 1, 2 e 3 e a equação $(A_{ACE})_{L4} = (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)_{L4} + 100$, pode-se inferir que o lote 4 é um **pentágono côncavo**. Desta forma, basta somar $100\ m^2$ da área do pentágono ABCDE, ou da soma das áreas dos quatro piquetes, que representam o lote 3, para obter o triângulo ACE da figura 25.

4.1.5.3 Algumas conjecturas

Há indícios, como vimos nos casos dos quatro primeiros lotes, que para todos os lotes do Raimundo existe uma diferença de $100\ m^2$ entre a área do triângulo ACE e a soma das áreas dos quatro piquetes.

Também é possível inferir que o lotes de numeração ímpar (L1, L3, L5,...) têm o formato de pentágonos convexos e os lotes de numeração par (L2, L4, L5,...) têm o formato de pentágonos côncavos. Assim, pode-se conjecturar que há uma alternância de $100\ m^2$ de área - para os lotes de numeração par, a área do triângulo ABC supera a soma das áreas dos quatro piquetes em $100\ m^2$ e para os lotes de numeração ímpar, a soma das áreas dos quatro piquetes, supera a área do triângulo ABC em $100\ m^2$.

Essa alternância de áreas pode ser expressa por meio das seguintes equações:

$$(A_{ACE})_{L1} = (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)_{L1} - 100$$

$$(A_{ACE})_{L2} = (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)_{L2} + 100$$

$$(A_{ACE})_{L3} = (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)_{L3} - 100$$

$$(A_{ACE})_{L4} = (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)_{L4} + 100$$

Acreditamos que o aluno possa perceber essa regularidade e generalizar esta situação por meio da seguinte equação:

$(A_{ACE})_{Ln} = (S_1 + S_2 + S_3 + S_4)_{Ln} + (-1)^n.100$, em que n representa o número do lote.

4.1.6 Possíveis Caminhos para se Descobrir Relações entre os Padrões Numéricos e Geométricos dos Lotes

Agora, vamos à segunda pergunta proposta na tarefa, ou seja: pensamos que o aluno poderia tentar esboçar os desenhos dos próximos lotes se descobrir quais regularidades observadas possibilita dar continuidade às figuras.

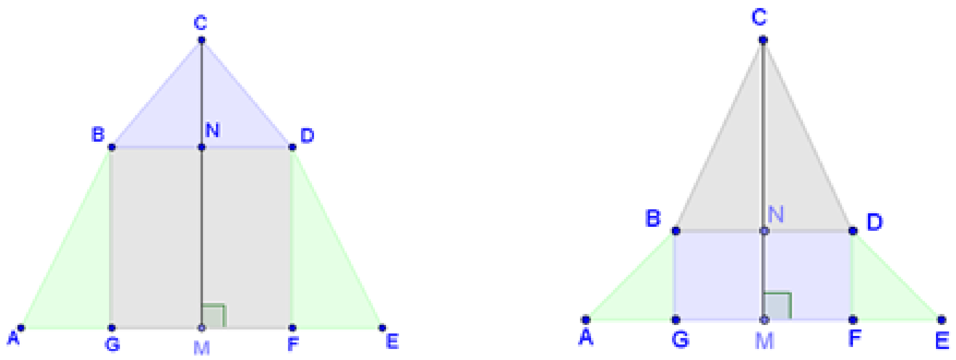
No entanto, para esboçar os desenhos dos próximos lotes é essencial que se entenda como foram desenhados os primeiros.

Os alunos conhecem a escritura e a planta do lote 1 e sabem que os demais lotes têm suas plantas desenhadas à luz das regularidades encontradas nas formas geométricas e medidas do primeiro lote. Conhecem também as plantas do segundo ao quarto lote. Analisando esses dados acreditamos que seja possível descobrir relações entre os padrões numéricos e geométricos dos lotes. Com isso, se for conveniente, pode-se desenhar um lote qualquer da sequência de lotes sugerida na Tarefa de Investigação.

Sabe-se que, apesar de não parecer, os lotes têm formato pentagonal. Destacamos também que o lotes de numeração ímpar (L1, L3, L5,...) têm o formato de pentágonos convexos e os lotes de numeração par (L2, L4, L6,...) têm o formato de pentágonos côncavos.

Assim, a fim de esclarecer as análises que faremos, apresentamos aqui, duas figuras fora de escala, mas que servirão para diferenciar os pentágonos convexos (formato dos lotes de numeração ímpar) dos pentágonos côncavos (formato dos lotes de numeração par).

Figura 26 – Polígono convexo e Polígono côncavo



Para iniciar o estudo destes polígonos, lembramos que segundo a escritura do primeiro lote:

i) Os triângulos AGB e EFD são retângulos $(A\hat{G}B = 90^\circ = E\hat{F}D)$.

Consequência: Como os catetos AG e BG são congruentes respectivamente aos catetos FE e DF, os triângulos AGB e EFD são congruentes (caso lado, ângulo, lado);

ii) O quadrilátero FGBD é um retângulo;

iii) O triângulo CBD é isósceles.

Considerando essas informações pode-se chegar a algumas conclusões:

Seja M o ponto médio do segmento GF, então $\overline{GM} \cong \overline{MF}$. Como, $\overline{GM} \cong \overline{MF}$, $\overline{AG} + \overline{GM} = \overline{AM}$, $\overline{MF} + \overline{FE} = \overline{ME}$ e $\overline{AG} \cong \overline{FE}$, então $\overline{AM} \cong \overline{ME}$. Logo, M é ponto médio de $\overline{AE}$.

Seja N o ponto médio do segmento $\overline{BD}$, então $\overline{BN} \cong \overline{ND}$.

Como BDC é um triângulo isósceles de base BD e N é ponto médio de BD, então NC é altura e eixo de simetria de BDC. Logo, $\overline{NC} \perp \overline{BD}$.

Considere o retângulo GFDB, em que GF e BD são lados opostos. Como M é ponto médio de GF e N é ponto médio de BD, então:

1) $\overline{MN} \parallel \overline{BG}$ e $\overline{MN} \parallel \overline{DF}$

2) $\overline{MN} \perp \overline{GF}$ e $\overline{MN} \perp \overline{BD}$

Logo, MN é eixo de simetria do retângulo GFDB.

Como, $\overline{MN} \perp \overline{BD}$ e $\overline{NC} \perp \overline{BD}$, então os pontos M, N e C são colineares.

Portanto, $\overline{MC}$ é altura e eixo de simetria do polígono ABCDE.

4.1.6.1 Algumas regularidades

Aqui apresentamos duas versões da planta do lote 1.

Figura 27 – Lote 1

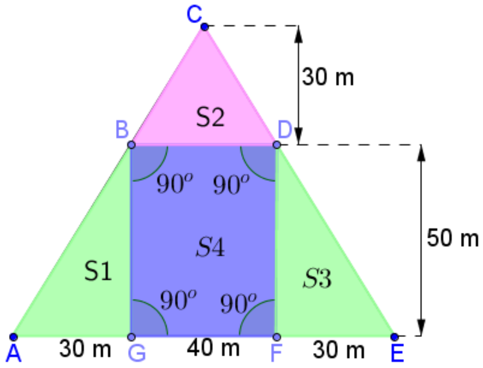
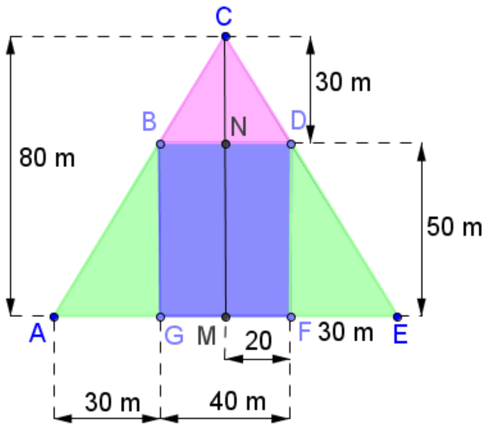


Figura 28 – Lote 1, configuração 2



É importante lembrar que apesar de não parecer, estamos analisando um pentágono convexo.

Observando a figura 28, é fácil perceber que:

$\overline{MF} = 20$, pois M é ponto médio do segmento GF.

$\overline{FE} = 30,$ $\quad \overline{MF} + \overline{FE} = \overline{ME} = 50,$ $\quad \overline{MN} = 50,$ $\quad \overline{NC} = 30,$ $\quad \overline{MN} + \overline{NC} = \overline{MC} = 80.$

Assim, somos levados a levantar a seguinte hipótese:

Dados $\overline{GF}$ e $\overline{FE}$, é possível obter os segmentos $\overline{MF}$, $\overline{MN}$, $\overline{NC}$, $\overline{MC}$ e $\overline{AG}$ da seguinte forma:

$\overline{AG} = \overline{FE}$

$\overline{MF} = \dfrac{\overline{GF}}{2}$, pois M é ponto médio de $\overline{GF}$;

$\overline{MF} + \overline{FE} = \overline{ME} = \overline{MN}$,

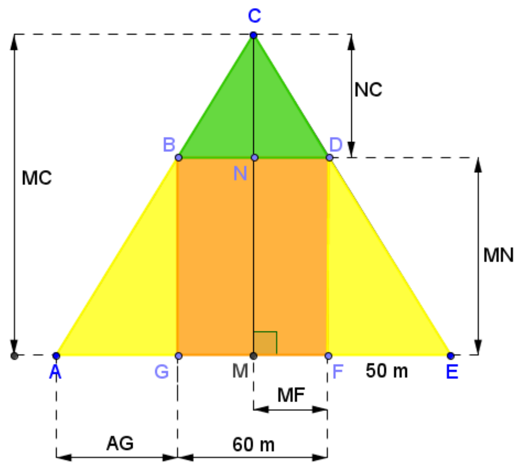
$\overline{NC} = \overline{FE}$

$\overline{MN} + \overline{NC} = \overline{MC}$

Vamos verificar se essa hipótese se confirma para o segundo lote.

Como conhecemos a escritura do lote 1, as plantas dos lotes 1 e 2 e sabemos que Raimundo comprou este lote, pensando nos padrões numéricos e geométricos do lote 1, somos levamos a pensar na seguinte figura:

Figura 29 – Lote 2, configuração 2



Pelas hipóteses levantadas com a observação do lote 1, tem-se que:

$\overline{AG} = \overline{FE} = 50\,m$

$\overline{MF} = \dfrac{\overline{GF}}{2} = \dfrac{60}{2} = 30\,m$

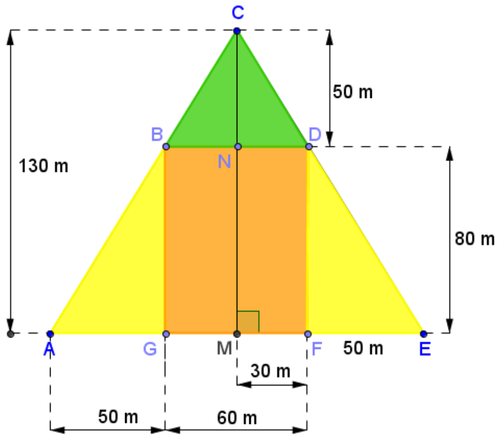
$\overline{MN} = \overline{ME} = \overline{MF} + \overline{FE} = 30 + 50 = 80\,m$

$\overline{NC} = \overline{FE} = 50\,m$

$\overline{MC} = \overline{MN} + \overline{NC} = 80 + 50 = 130m$

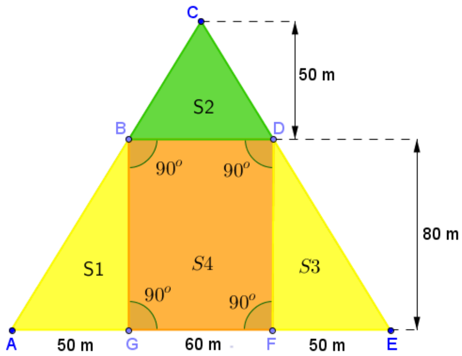
Considerando as medidas encontradas chega-se à seguinte figura:

Figura 30 – Lote 2, configuração 3



Agora é possível compará-la com a figura que representa a planta do lote 2.

Figura 31 – Lote 2

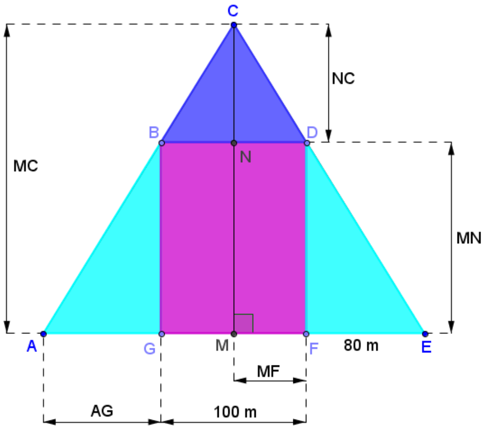


Para verificar a validade da hipótese, basta comparar as medidas encontradas na figura 30 com as medidas originais do lote 2, da figura 31. Como as medidas dos segmentos correspondentes são iguais, pode-se afirmar que para o lote 2 a hipótese levantada é válida.

Agora vamos verificar a validade da hipótese para o terceiro lote.

Como conhecemos a planta do lote 3 e sabemos que Raimundo comprou este lote, com base na escritura do lote 1 e nas regularidades dos lotes 1 e 2, somos levamos a pensar na seguinte figura:

Figura 32 – Lote 3, configuração 2



Pelas hipóteses levantadas com a observação do lote 1, tem-se que:

$\overline{AG} = \overline{FE} = 80\ m$

$MF = \dfrac{\overline{GF}}{2} = \dfrac{100}{2} = 50\ m$

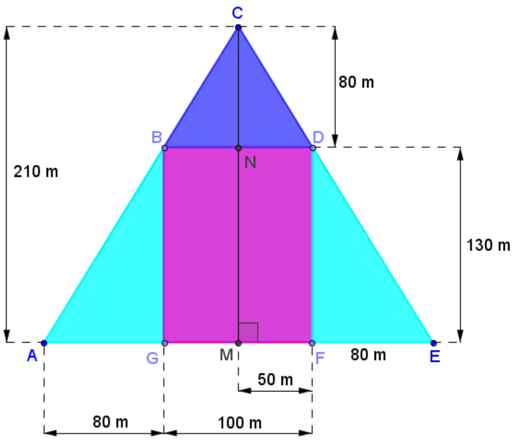
$\overline{MN} = \overline{ME} = \overline{MF} + \overline{FE} = 50 + 80 = 130\ m$

$\overline{NC} = \overline{FE} = 80\ m$

$\overline{MC} = \overline{MN} + \overline{NC} = 130 + 80 = 210\ m$

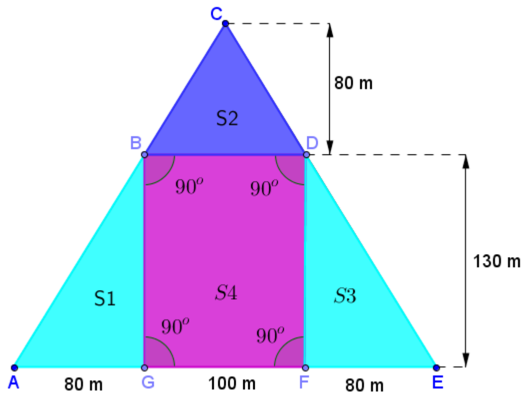
Considerando as medidas encontradas chega-se à seguinte figura:

Figura 33 – Lote 3, configuração 3



Agora é possível compará-la com a figura que representa a planta do lote 3.

Figura 34 – Lote 3

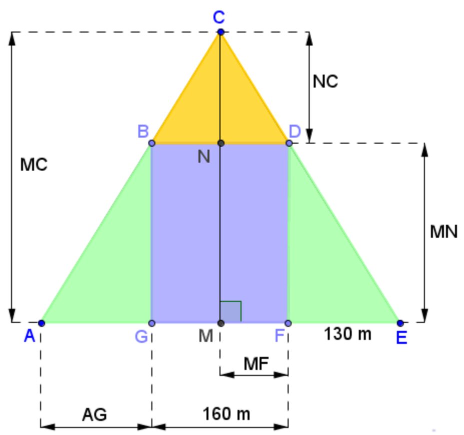


Novamente, para verificar a validade da hipótese, basta comparar as medidas encontradas na figura 33 com as medidas originais do lote 3, da figura 34. Como as medidas dos segmentos correspondentes são iguais, pode-se afirmar que para o lote 3 a hipótese levantada também é válida.

Agora vamos verificar a validade da hipótese para o quarto lote.

Como conhecemos a planta do lote 4 e sabemos que Raimundo adquiriu este lote, com a condição que ele tivesse as regularidades numéricas e geométricas dos lotes 1, 2, e 3, somos levamos a pensar na seguinte figura:

Figura 35 – Lote 4, configuração 2



Pelas hipóteses levantadas, tem-se que:

$$\overline{AG} = \overline{FE} = 130\ m$$

$$\overline{MF} = \frac{\overline{GF}}{2} = \frac{160}{2} = 80\ m$$

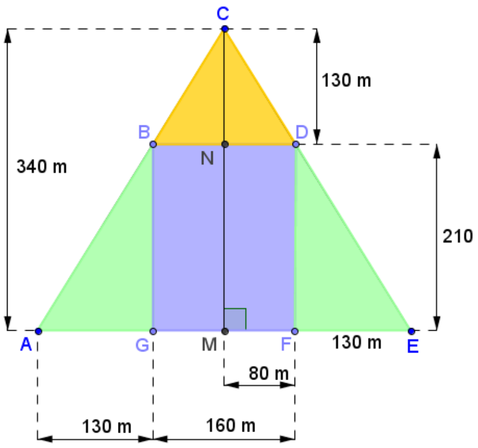
$$\overline{MN} = \overline{ME} = \overline{MF} + \overline{FE} = 80 + 130 = 210\ m$$

$$\overline{NC} = \overline{FE} = 130\ m$$

$$\overline{MC} = \overline{MN} + \overline{NC} = 210 + 130 = 340\ m$$

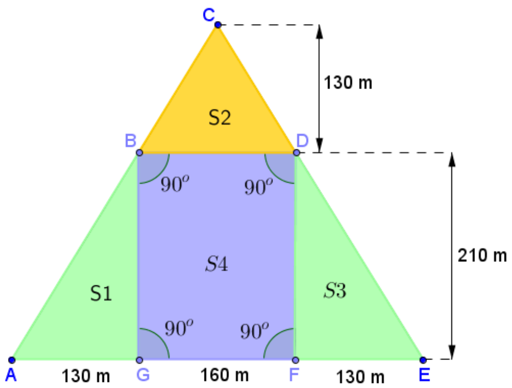
Considerando as medidas encontradas chega-se à seguinte figura:

Figura 36 – Lote 4, configuração 3



Agora é possível compará-la com a figura que representa a planta do lote 4.

Figura 37 – Lote 4

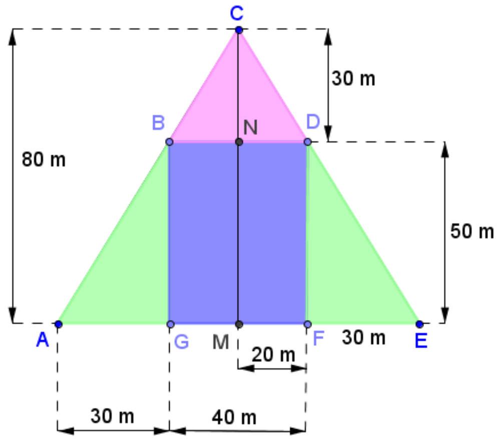


Novamente, para verificar a validade da hipótese, basta comparar as medidas encontradas na figura 36 com as medidas originais do lote 4, da figura 37. Como as medidas dos segmentos correspondentes são iguais, pode-se afirmar que para o lote 4 a hipótese levantada também é válida.

Mesmo descobrindo algumas regularidades importantes, ainda não é possível esboçar a planta do próximo lote, para isso é necessário conhecer ao menos duas medidas: $\overline{GF}$ e $\overline{FE}$ ou $\overline{MF}$ e $\overline{FE}$. Então, é imprescindível investir em novas investigações para poder avançar na tarefa.

Com o intuito de fazer novas descobertas, vamos observar novamente as medidas que estão explícitas na planta do lote 1, com o auxílio da figura abaixo.

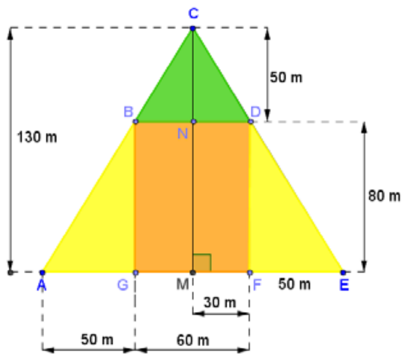
Figura 38 – Lote 1, configuração 2



Pode-se organizar as medidas $\overline{MF} = \overline{GM} = 20\ m$, $\overline{AG} = \overline{FE} = \overline{NC} = 30\ m$, $\overline{ME} = \overline{AM} = \overline{MN} = 50\ m$, $\overline{MC} = 80\ m$, em ordem crescente e chegar aos quatro primeiros termos de uma sequência $(20, 30, 50, 80, \ldots)$. É possível notar que o primeiro termo é igual a 20, o segundo termo é igual a 30 e $50 = 20 + 30$, $80 = 30 + 50$, ou seja, cada termo a partir do terceiro é obtido a partir da soma de dois precedentes.

Parece que algumas medidas do lote 2 são termos da sequência $(20, 30, 50, 80, \ldots)$. Vamos verificar, com o auxílio da próxima figura.

Figura 39 – Lote 2, configuração 3

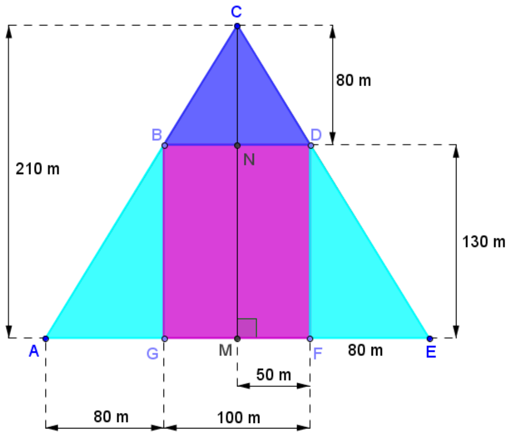


Observando as medidas $\overline{MF} = \overline{GM} = 30\ m$, $\overline{AG} = \overline{FE} = \overline{NC} = 50\ m$, $\overline{ME} = \overline{AM} = \overline{MN} = 80\ m$, $\overline{MC} = 130\ m$, é possível notar que $80 = 30 + 50$ e

$130 = 50 + 80$. Colocando essas medidas em ordem crescente, pode-se observar que elas representam quatro termos consecutivos da sequência $(20, 30, 50, 80, 130, ...)$ - do segundo ao quinto termo.

Parece que algumas medidas do lote 3 são termos da sequência $(20, 30, 50, 80, ...)$. Vamos verificar, com o auxílio da próxima figura.

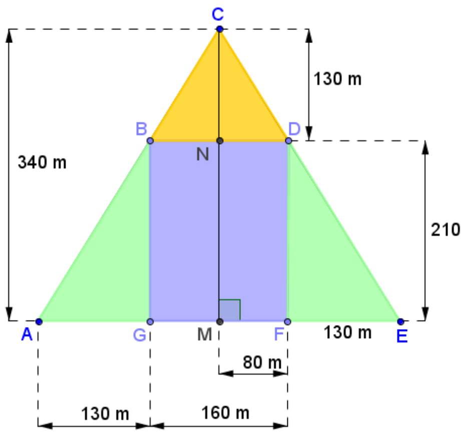
Figura 40 – Lote 3, configuração 3



Analisando as medidas $\overline{MF} = \overline{GM} = 50\,m$, $\overline{AG} = \overline{FE} = \overline{NC} = 80\,m$, $\overline{ME} = \overline{AM} = \overline{MN} = 130\,m$, $\overline{MC} = 210\,m$, é possível notar que $130 = 50 + 80$ e $210 = 80 + 130$. Colocando essas medidas em ordem crescente, pode-se observar que elas representam quatro termos consecutivos da sequência $(20, 30, 50, 80, 130, 210\, ...)$ - do terceiro ao sexto termo.

Parece que algumas medidas do lote 4 são termos da sequência $(20, 30, 50, 80, ...)$. Vamos verificar, com o auxílio da próxima figura.

Figura 41 – Lote 4, configuração 3



Analisando as medidas $\overline{MF} = \overline{GM} = 80\ m$, $\overline{AG} = \overline{FE} = \overline{NC} = 130\ m$, $\overline{ME} = \overline{AM} = \overline{MN} = 210\ m$, $\overline{MC} = 340\ m$, é possível notar que $210 = 80 + 130$ e $340 = 130 + 210$. Colocando essas medidas em ordem crescente, pode-se observar que elas representam quatro termos consecutivos da sequência $(20, 30, 50, 80, 130, 210, 340 \dots)$ - do quarto ao sétimo termo.

Nota-se que as medidas dos quatro lotes são termos da mesma sequência. Assim, com a sequência $(20, 30, 50, 80, 130, 210, 340, \dots)$, pode-se obter as medidas dos quatro primeiros lotes.

Vamos tentar determinar as medidas do quinto lote. Com essa finalidade, mostramos aqui alguns cálculos:

$50 = 20 + 30$

$80 = 30 + 50$

$130 = 50 + 80$

$210 = 80 + 130$

$340 = 130 + 210$

Com a intenção de preservar esta regularidade, somos levados a pensar que o próximo termo da sequência $(20, 30, 50, 80, 130, 210, 340, \dots)$ pode ser determinado pela soma dos dois precedentes. Com isso, o referido termo da sequência pode ser determinado pela soma $210 + 340 = 550.$

Assim, com os quatro primeiros termos da sequência $(20, 30, 50, 80, 130, 210, 340, \dots)$, ou seja, com os termos $20, 30, 50, 80$, é possível esboçar planta do lote 1; com os termos $30, 50, 80, 130$, é possível esboçar planta do lote 2; com os termos $50, 80, 130, 210$, é possível esboçar planta do lote 3; com os termos $80, 130, 210, 340$, é possível esboçar a planta do lote 4; e finalmente, com os termos $130, 210, 340, 550$, é possível esboçar a planta do lote 5.

Assim, para o lote 5, pode-se inferir que $\overline{MF} = 130\ m$ e $\overline{FE} = 210\ m$.

Já havíamos investigado que, dados $\overline{MF}$ e $\overline{FE}$, é possível esboçar a planta de um lote qualquer, da seguinte forma:

$\overline{MN} = \overline{ME} = \overline{MF} + \overline{FE}$

$\overline{NC} = \overline{FE}$

$\overline{MC} = \overline{MN} + \overline{NC}$

Assim, sobre o lote 5, sabe-se que: $\overline{MF} = 130\,m$ e $\overline{FE} = 210\,m$. Assim, é possível chegar as seguintes medidas:

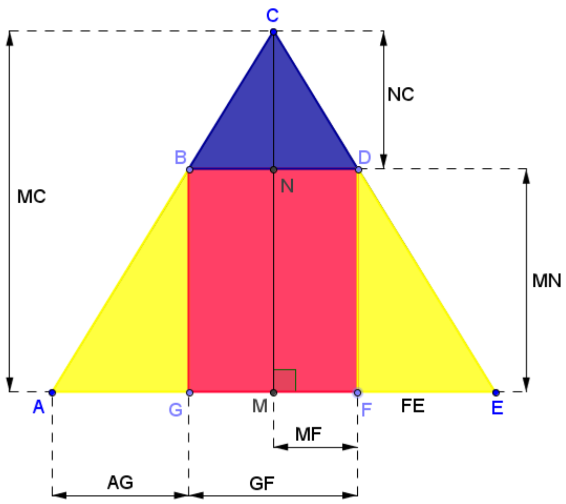
$$\overline{MN} = \overline{ME} = \overline{MF} + \overline{FE} = 130 + 210 = 340\,m$$

$$\overline{NC} = \overline{FE} = 210\,m$$

$$\overline{MC} = \overline{MN} + \overline{NC} = 340 + 210 = 550\,m$$

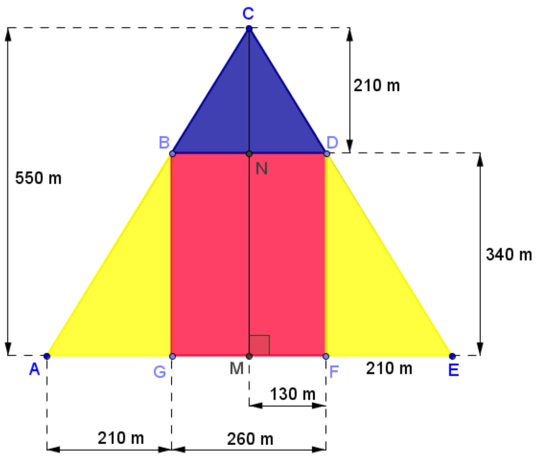
Sabe-se também que as plantas de todos os lotes têm padrão numérico e geométrico. Ao estudar as plantas dos lotes 1, 2, 3 e 4, chegamos a uma regularidade, que pode ser expressa pela seguinte figura:

Figura 42 – Lote 5, configuração 2



Considerando o padrão geométrico dos lotes, e as medidas encontradas por meio de observação de regularidades numéricas, chega-se a seguinte planta para o lote 5:

Figura 43 – Lote 5, configuração 3



Seguindo este padrão, é razoável inferir que, dados $\overline{MF}$ e $\overline{FE}$, é possível esboçar a planta de qualquer lote da sequência do Raimundo.

4.1.6.2 Em busca de novas regularidades

Analisando a relação entre os padrões numéricos e geométricos dos lotes do Raimundo, os alunos poderiam chegar a sequência $(20, 30, 50, 80, 130, 210, 340, 550, \ldots)$. Assim, poderiam inferir que dados os dois primeiros termos da sequência, cada termo pode ser determinado pela soma dos dois precedentes.

Com isso, tomando $(x_n) = (20, 30, 50, 80, 130, 210, 340, 550, \ldots)$, pode-se generalizar a sequência, da seguinte forma: $x_1 = 20$, $x_2 = 30$ e $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, com $n \in N$ e $n \geq 3$.

Os alunos também poderiam ter curiosidade de estudar o comportamento da sequência $((r)_n)$, em que $r_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$, e x_n representa os termos da sequência $((x)_n)$. Afinal, cada termo da sequência $((r)_n)$, é a tangente de um ângulo $G\hat{A}B$ ou $D\hat{B}C$ nas figuras que representam os lotes do Raimundo.

A fim de refletir sobre a situação, vamos analisar alguns casos:

$$r_1 = \frac{x_2}{x_1} = \frac{30}{20} = 1{,}5$$

$$r_2 = \frac{x_3}{x_2} = \frac{50}{30} = 1,\overline{6}$$

$$r_3 = \frac{x_4}{x_3} = \frac{80}{50} = 1{,}6$$

$$r_4 = \frac{x_5}{x_4} = \frac{130}{80} = 1{,}625$$

Mas qual o significado geométrico do termo r_n?

Acreditamos que o aluno poderia investigar e perceber as seguintes regularidades:

Para o lote 1, tem-se que: $\tan D\hat{B}C = \frac{30}{20} = 1{,}5 = r_1$ e $\tan G\hat{A}B = \frac{50}{30} = 1,\overline{6} = r_2$. Logo, $\tan D\hat{B}C < \tan G\hat{A}B \Rightarrow D\hat{B}C < G\hat{A}B$. Portanto, este lote tem a forma de um pentágono convexo.

Para o lote 2, tem-se que: $\tan D\widehat{B}C = \frac{50}{30} = 1,\overline{6} = r_2$ e $\tan G\widehat{A}B = \frac{80}{50} = 1,6 = r_3$. Logo, $\tan D\widehat{B}C > \tan G\widehat{A}B \Rightarrow D\widehat{B}C > G\widehat{A}B$. Portanto, este lote é um pentágono côncavo.

Para o lote 3, tem-se que: $\tan D\widehat{B}C = \frac{80}{50} = 1,6 = r_3$ e $\tan G\widehat{A}B = \frac{130}{80} = 1,625 = r_4$. Logo, $\tan D\widehat{B}C < \tan G\widehat{A}B \rightarrow D\widehat{B}C < G\widehat{A}B$. Portanto, este lote é um pentágono convexo.

Seguindo esta regularidade, chega-se a uma explicação possível para o fato de às vezes sobrar e às vezes faltar $100\ m^2$ de área.

Desta forma, o aluno pode fazer associações entre os padrões numéricos e geométricos. Pois segundo nossas suposições o estudante já poderia ter constatado que, para os lotes de numeração par, a área do triângulo ABC supera a soma das áreas dos quatro piquetes em $100\ m^2$. Já para os lotes de numeração ímpar, a soma das áreas dos quatro piquetes supera a área do triângulo ABC em $100\ m^2$.

Voltando à sequência (r_n), acreditamos que alguns alunos possam se interessar em representá-la da seguinte forma:

$$(r_n) = \left(\frac{30}{20}, \frac{50}{30}, \frac{80}{50}, \frac{130}{80}, \frac{210}{130}, \frac{340}{210}, \frac{550}{340}, \dots\right) = (1,5;\ 1,\overline{6};\ 1,6;\ 1,625;\ 1,615;\ 1,619;\ 1,617, \dots)$$

Com essa representação, fica mais fácil intuir que os termos dessa sequência oscilam em torno de $1,618033989 \cong \Phi$. Com isso, o aluno terá a possibilidade de perceber que essa sequência converge para um determinado número; e alguns, poderão reconhecer que este número é Φ .

Assim, considerando a sequência $(x_n) = (20, 30, 50, 80, 130, 210, 340, 550, \dots)$ e tomando: $x_1 = 20$, $x_2 = 30$ e $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, com $n \in N$ e $n \geq 3$, tem-se que a razão $r_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$, se aproxima mais e mais do valor $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cong 1,618033989$, a medida em que aumenta o valor de n.

Desta forma, pode-se inferir que a sequência (r_n) converge para Φ, conforme se avança na sequência (x_n).

Apresentamos aqui uma sequência de figuras que pode nos ajudar a entender que conforme se avança na sequência (x_n), mais os pentágonos se parecem com triângulos.

Figura 44 – Lote 1, retas r e s / Lote 1, reta r

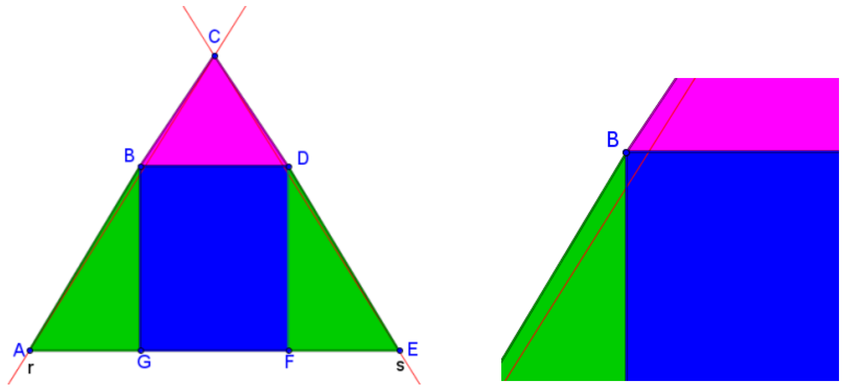


Figura 45 – Lote 2, retas r e s / Lote 2, reta r

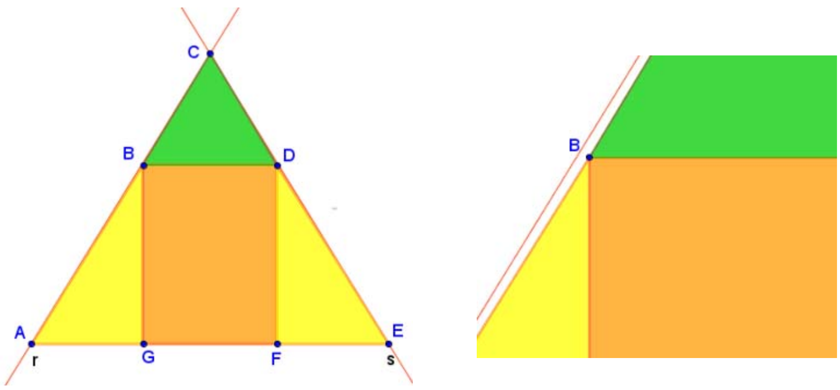
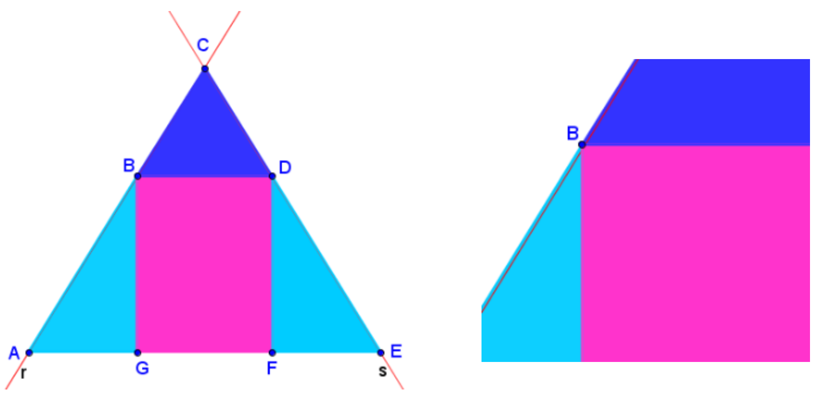


Figura 46 – Lote 3, retas r e s / Lote 3, reta r



Na figura 44, referente ao lote 1 (desenho da esquerda), não é difícil visualizar que: 1) a reta r passa pelos pontos A e C, mas não passa por B; 2) a reta s passa pelos pontos E e C, mas não passa pelo D. Logo, não é difícil visualizar que o lote 1 não é triangular.

O desenho da direita (figura 44) é uma ampliação de um “recorte” do desenho da esquerda, no qual fica nítido que a reta r que passa pelos pontos A e C, não passa pelo ponto B. Assim, se não houver falhas do software usado para plotar o desenho e nem do sujeito que manipulou o software, o lote 1 não tem formato triangular.

Na figura 45, referente ao lote 2 (desenho da esquerda), é bem difícil visualizar que: 1) a reta r passa pelos pontos A e C, mas não passa pelo pontos B; 2) a reta s que passa pelos pontos E e C, mas não passa pelo ponto D. Logo, é difícil visualizar que o lote 2 não tem formato triangular. O desenho da direita (figura 45) é uma ampliação de um “recorte” do desenho da esquerda, no qual fica explícito que a reta r que passa pelos pontos A e C, não passa pelo ponto B. Assim, se não houver nenhuma falha, o lote 2 também não tem formato triangular.

Na figura 46, referente ao lote 3 (desenho da esquerda), é quase impossível visualizar que a reta r que passa pelos pontos A e C e a reta s que passa pelos pontos E e C não passam pelos pontos B e D. Logo, é difícil suspeitar que o lote 3 não tem formato triangular. Já o desenho da direita (figura 46), retrata a ampliação de um “recorte” do desenho da esquerda, no qual é possível perceber que a reta r que passa pelos pontos A e C, não passa pelo ponto B. Assim, se não houver nenhuma falha, o lote 3 não tem formato triangular.

Assim, pensamos que o aluno poderia analisar a situação da seguinte forma:

Sabe-se que para desenhar as plantas dos lotes são usados como medidas os elementos da sequência $(x_n) = (20, 30, 50, 80, 130, 210, 340, 550, \dots)$. Também se pode intuir que com os quatro primeiros termos de (x_n), ou seja, com os termos $20, 30, 50, 80$, é possível esboçar a planta do lote 1; com os termos $30, 50, 80, 130$, é possível esboçar a planta do lote 2; com os termos $50, 80, 130, 210$, é possível esboçar a planta do lote 3; e assim, sucessivamente.

Geometricamente, quanto maior o lote do Raimundo, mais difícil é visualizar que aquela propriedade tem formato pentagonal e não triangular. Afinal, quanto maior o lote mais se avança na sequência (x_n) e mais os termos da sequência $((r)_n)$ se aproximam de

Φ . Percebe-se isso quando se calcula as tangentes dos ângulos $D\hat{B}C$ e $G\hat{A}B$ do desenho de cada lote e verifica-se que quanto maior é o lote, menor é a diferença entre esses ângulos.

Já vimos que cada termo da sequência $(r_n) = \left(\frac{30}{20}, \frac{50}{30}, \frac{80}{50}, \frac{130}{80}, \frac{210}{130}, \frac{340}{210}, \frac{550}{340}, \ldots\right)$, representa a tangente do ângulo $D\hat{B}C$ ou do ângulo $G\hat{A}B$. Também é possível intuir que aumentando o valor de n na sequência $(r_n) = (1{,}5;\ 1{,}\overline{6};\ 1{,}6;\ 1{,}625;\ 1{,}615;\ 1{,}619;\ldots)$, a diferença entre dois termos consecutivos diminui. Assim, parece que para um n muito grande, a sequência (r_n) converge para $\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \cong 1{,}6180339$.

Com isso, é possível conjecturar que conforme se avança na sequência (x_n), mais próximos de Φ estão os termos da sequência (r_n); e quanto mais os termos da sequência (r_n) se aproximam de Φ , mais os lotes de formato pentagonais se parecem com triângulos.

Desta forma, não é absurdo inferir que existem medidas próximas às medidas dos lotes do Raimundo com as quais é possível desenhar plantas de lotes que tenham formato triangular e não pentagonal, preservando assim a crença do Seu Nonato. Para que isso seja possível, basta utilizar como medidas os termos de uma sequência (y_n), em que a razão entre qualquer dos seus termos pelo precedente é a dada pelo número Φ, isto é: $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \Phi$ (conforme relatamos em 4.1.6.3).

Mas um aluno que conhece apenas conteúdos da Educação Básica pode chegar à medidas que tornem viável o desenho uma planta de formato triangular?

4.1.6.3 Uso de conteúdos da educação básica

Acreditamos que é possível para alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio chegar à medidas próximas às dos lotes do Raimundo, com as quais se pode desenhar plantas de lotes que tenham formato triangular. Estamos supondo que os alunos estão em uma etapa da investigação, na qual já constataram que os lotes são pentagonais, mas gostariam de saber com quais medidas (próximas às dos lotes do Raimundo) se pode desenhar lotes triangulares.

Pensamos que um caminho é começar com algumas regularidades citadas em 4.1.6.1.

Assim, apresentamos aqui as referidas regularidades, seguidas de uma figura que pode representar um lote qualquer do Raimundo:

Dados os segmentos $\overline{GF}$ e $\overline{FE}$, é possível obter $\overline{MF}, \overline{MN}$, $\overline{NC}$, $\overline{MC}$ e $\overline{AG}$ da seguinte forma:

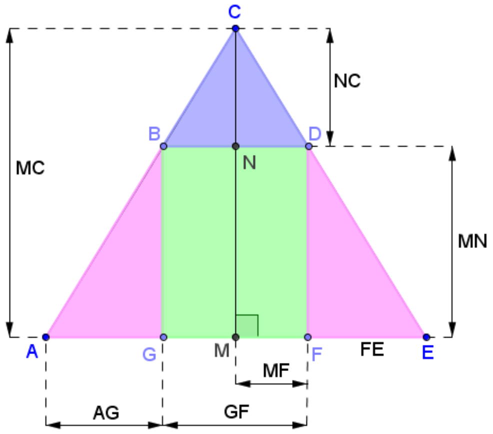
Sabe-se que: $\overline{AG} = \overline{FE}$

$\overline{MF} = \frac{\overline{GF}}{2}$, pois M é ponto médio de $\overline{GF}$;

$\overline{MF} + \overline{FE} = \overline{ME} = \overline{MN}$,

$\overline{NC} = \overline{FE}$ e $\overline{MN} + \overline{NC} = \overline{MC}$

Figura 47 – Lote qualquer



Agora, é possível tornar ainda mais genéricos estes padrões. Para que isso aconteça, vamos deixar todas as medidas do lote da figura 47, em função de a, de b ou de a e b.

Tomando, $\overline{MF} = a$ e $\overline{FE} = b$, temos que:

$\overline{MN} = \overline{ME} = \overline{MF} + \overline{FE} = a + b$

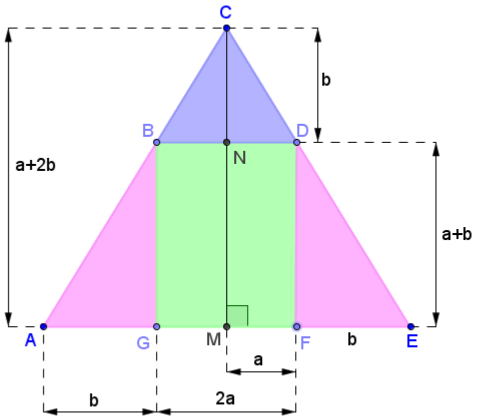
$\overline{NC} = \overline{FE} = b$

$\overline{MC} = \overline{MN} + \overline{NC} = (a + b) + b = a + 2b$

Desta forma, pode-se utilizar as medidas encontradas para esboçar a planta do lote, que terá suas medidas expressas em função de a, de b ou de a e b.

Apresentamos a seguir o referido lote:

Figura 48 – Lote ab



Com o auxilio da figura 48, o aluno pode verificar qual deve ser a razão $\frac{y_{n+1}}{y_n}$ entre dois números consecutivos quaisquer da sequência (y_n), se a intenção é desenhar um lote de formato triangular.

Assim, basta calcular a tangente dos ângulos $G\hat{A}B$ e $D\hat{B}C$ e determinar os valores de a e b que tornam a igualdade $\tan G\hat{A}B = \tan D\hat{B}C$ verdadeira. Pois se as tangentes dos ângulos $G\hat{A}B$ e $D\hat{B}C$ são iguais, então os ângulos $G\hat{A}B$ e $D\hat{B}C$ são congruentes; e se os ângulos $G\hat{A}B$ e $D\hat{B}C$ são congruentes, então os pontos A, B e C são colineares. Logo, o lote tem formato triangular.

Deste modo o aluno pode fazer a verificação das hipóteses levantadas, da seguinte forma:

1) $\tan G\hat{A}B = \frac{a+b}{b}$

2) $\tan D\hat{B}C = \frac{b}{a}$

Como é conveniente que a igualdade $\tan G\hat{A}B = \tan D\hat{B}C$ seja verdadeira, de (1) e (2), tem-se que: $\frac{a+b}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow a^2 + ab = b^2 \Rightarrow b^2 - ab - a^2 = 0.$

Tomando b como incógnita da equação $b^2 - ab - a^2 = 0$, segue que:

$\Delta = (-a)^2 - 4.1.(-a^2) = a^2 + 4a^2 = 5a^2$

Substituindo o discriminante na fórmula clássica para resolver equações polinomiais do segundo grau tem-se: $b = \frac{a \pm \sqrt{5a^2}}{2} = \frac{a \pm a\sqrt{5}}{2} = \frac{a(1 \pm \sqrt{5})}{2}$.

Como b é uma medida, então não pode ser negativa. Logo, $b = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$.

Dividindo os dois membros da igualdade por a, chega-se a: $\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Mas $\frac{b}{a} = \tan D\hat{B}C$ e $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$, assim, para que a igualdade $\tan G\hat{A}B = \tan D\hat{B}C$ seja verdadeira é necessário que a razão $\frac{b}{a}$ seja igual a Φ.

Assim, pode-se afirmar que se o objetivo é desenhar plantas de lotes com formato triangular, então a razão $\frac{y_{n+1}}{y_n}$ entre quaisquer de seus termos pelo termo precedente na sequência (y_n) é igual a Φ.

Entretanto, alguns alunos poderiam se interessar por responder a seguinte questão: quais poderiam ser as medidas do primeiro lote, se a intenção é desenhar uma planta com formato triangular?

Visando manter as medidas mais próximas das originais, uma possibilidade é utilizar a igualdade $\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$ e tomar $a = 20$, que é a medida original do segmento $\overline{MF}$. Assim, $b = 20\Phi$. Desta forma, tem-se que: $\overline{MF} = a = 20$ e $\overline{FE} = b = 20\Phi$.

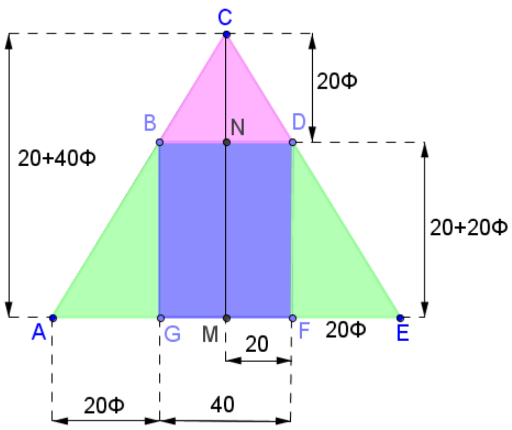
Logo, $\overline{MN} = \overline{ME} = \overline{MF} + \overline{FE} = a + b = 20 + 20\Phi$.

Sabemos que: $\overline{NC} = \overline{FE} = b$. Desta forma, $\overline{NC} = \overline{FE} = b = 20\Phi$.

Consequentemente: $\overline{MC} = \overline{MN} + \overline{NC} = (a+b) + b = a + 2b = 20 + 40\Phi$.

Utilizando as medidas obtidas, apresentamos aqui uma possível figura para que o lote 1 tenha o formato triangular:

Figura 49 – Lote Φ



Agora, o aluno pode fazer a verificação das hipóteses levantadas, da seguinte forma:

1) $\tan G\hat{A}B = \dfrac{20+20\Phi}{20\Phi}$

Mas $\Phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, então $\tan G\hat{A}B = \dfrac{20+20\Phi}{20\Phi} = \dfrac{1}{\Phi}+1 = \dfrac{2}{\sqrt{5}+1}+1 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi$

2) $\tan D\hat{B}C = \dfrac{20\Phi}{20} = \Phi$

De (1) e (2), tem-se que $\tan G\hat{A}B = \Phi$ e $\tan D\hat{B}C = \Phi$. Logo, $\tan G\hat{A}B = \tan D\hat{B}C$. Portanto, pode-se concluir que os ângulos $G\hat{A}B$ e $D\hat{B}C$ são congruentes. Assim, os pontos A, B e C são colineares. Desta forma, ACE é um triângulo.

Portanto, se o objetivo é obter uma sequência de lotes com formato triangular, basta considerar a sequência:

$$(y_n) = (20, 20\Phi, 20+20\Phi, 20+40\Phi, 40+60\Phi, 60+100\Phi, \ldots).$$

É possível caracterizá-la da seguinte forma: o primeiro termo é igual a 20, o segundo é igual a 20Φ, e cada termo, a partir do terceiro pode ser obtido por meio da soma de seus dois antecessores. Ou ainda, da seguinte forma: $y_1 = 20, y_2 = 20\Phi$ e $y_n = y_{n-1} + y_{n-2}$, para $n \in N$ e $n \geq 3$.

Contudo, essa sequência, também pode ser definida como uma progressão geométrica, cujo primeiro termo é igual a 20 e a razão é igual a Φ - pois chegamos a conclusão que se o lote tem formato triangular, então razão $\dfrac{y_{n+1}}{y_n}$ entre dois números consecutivos quaisquer da sequência $((y_n))$, é igual a Φ .

Sendo assim, o termo geral da sequência pode ser dado por $y_n = 20.\Phi^{n-1}$. Logo, pode-se representá-la da seguinte forma: $(y_n) = (20, 20\Phi, 20\Phi^2, 20\Phi^3, 20\Phi^4, \ldots)$.

Entretanto, se o aluno chegar a duas sequências aparentemente diferentes, talvez sinta necessidade de fazer algumas verificações; pois pode ser que desconfie da igualdade $(y_n) = (20, 20\Phi, 20+20\Phi, 20+40\Phi, \ldots) = (20, 20\Phi, 20\Phi^2, 20\Phi^3, \ldots)$.

Os dois primeiros termos certamente são iguais, pode-se desconfiar se $20+20\Phi$ é igual a $20\Phi^2$.

Contudo poderia inicialmente determinar o valor de Φ^2, uma vez que $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Assim, segue que: $\Phi^2 = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{1^2+2.1.\sqrt{5}+(\sqrt{5})^2}{4} = \dfrac{6+2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Logo, $20\Phi^2 = 20.\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = 10.(3+\sqrt{5}) = 30 + 10\sqrt{5}.$

Por outro lado, $20 + 20\Phi = 20 + 20.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 20 + 10.(1+\sqrt{5}) = 30 + 10\sqrt{5}.$

Como $20\Phi^2 = 30 + 10\sqrt{5}$ e $20 + 20\Phi = 30 + 10\sqrt{5}$.

Portanto, $20 + 20\Phi = 20\Phi^2$.

Procedendo de forma análoga, não é difícil de se chegar às igualdades:

$20 + 40\Phi = 20\Phi^3 = 40 + 20\sqrt{5}$,

$40 + 60\Phi = 20\Phi^4 = 70 + 30\sqrt{5}$

e assim sucessivamente.

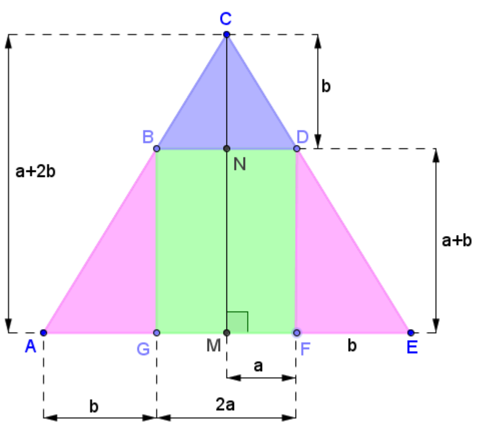
4.1.7 Outros Métodos para se Chegar a Lotes com Formato Triangular

Neste item apresentamos três métodos para chegar a lotes com formato triangular: por meio de igualdade de áreas, por meio de semelhança de triângulos e por meio de condição de alinhamento de três pontos (Geometria Analítica).

4.1.7.1 Por meio de igualdade de área

Apresentamos a figura que representa a planta de um lote qualquer, que tem suas medidas expressas em função de a, de b ou de a e b.

Figura 50 – Lote ab



Outra maneira de se determinar as medidas a e b para que o lote tenha o formato do triângulo ACE, é estabelecer uma igualdade entre soma das áreas dos quatro piquetes e a área do triângulo ACE.

Assim, segue que:

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{b(a+b)}{2} + \frac{2ab}{2} + \frac{b(a+b)}{2} + 2a(a+b) = 2a^2 + 4ab + b^2$$

$$A_{ACE} = \frac{(2a+2b).(a+2b)}{2} = \frac{2a^2+6ab+4b^2}{2} = a^2 + 3ab + 2b^2$$

Elucidamos que A_{ACE} representa a área do triângulo ACE, de um lote qualquer; e a expressão algébrica $S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ representa a soma das áreas dos piquetes do referido lote.

Contudo, para que o terreno tenha formato triangular, é necessário que a área do triângulo ACE seja igual à soma das áreas dos piquetes. Como isso, temos a igualdade:

$$a^2 + 3ab + 2b^2 = 2a^2 + 4ab + b^2 \Rightarrow b^2 - ab - a^2 = 0$$

Tomando b como incógnita da equação $b^2 - ab - a^2 = 0$, segue que:

$$\Delta = (-a)^2 - 4.1.(-a^2) = a^2 + 4a^2 = 5a^2$$

Substituindo o discriminante na fórmula clássica para resolver equações polinomiais do segundo grau tem-se: $b = \frac{a \pm \sqrt{5a^2}}{2} = \frac{a \pm a\sqrt{5}}{2} = \frac{a(1 \pm \sqrt{5})}{2}$.

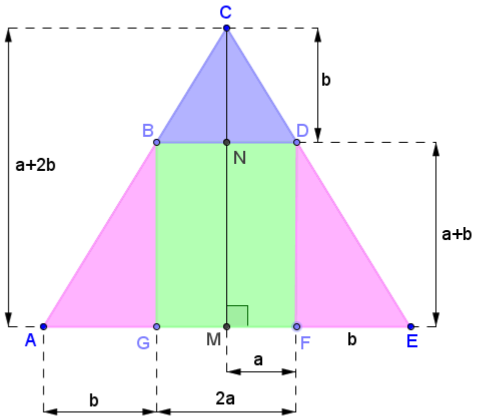
Como b é uma medida, então não pode ser negativa. Logo, $b = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$. Dividindo os dois membros da igualdade por a , chega-se a: $\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$.

Tomando $a = 20$, chega-se a sequência $(V_n) = (20, 20\Phi, 20 + 20\Phi, 20 + 40\Phi, \ldots)$, com a qual é possível desenhar lotes de formato triangular.

4.1.7.2 Por meio de semelhança de triângulos

Acreditamos que um caminho simples que os alunos poderiam trilhar para chegar a sequência (V_n) é por meio de semelhança de triângulos. Assim, apresentamos novamente a figura que representa a planta de um lote qualquer e que tem suas medidas expressas em função de a, de b ou de a e b.

Figura 51 – Lote ab



Para que o lote tenha formato triangular é necessário que os pontos C,D e E sejam colineares. Para que esses pontos sejam colineares, os ângulos $C\hat{D}N$ e $D\hat{E}F$ devem ser congruentes. Como GFDB é um retângulo, $D\hat{N}C$ e $E\hat{F}D$ são ângulos retos, portanto congruentes. Logo, $N\hat{C}D$ e $F\hat{D}E$ também são congruentes. Portanto, os triângulos FED e NDC são semelhantes.

Assim, tem-se que: $\frac{b}{a} = \frac{a+b}{b} \Rightarrow b^2 = a^2 + ab \Rightarrow b^2 - ab - a^2 = 0$

Resolvendo equação na incógnita b, chega-se a: $b = \frac{a(1 \pm \sqrt{5})}{2}$.

Como b é uma medida, então não pode ser negativa. Logo, $b = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$.

Dividindo os dois membros da igualdade por a, chega-se a: $\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$.

Tomando $a = 20$, chega-se a sequência $(v_n) = (20, 20\Phi, 20 + 20\Phi, 20 + 40\Phi, \ldots)$, com a qual é possível desenhar lotes de formato triangular.

4.1.7.3 Por meio de condição de alinhamento de três pontos – geometria analítica

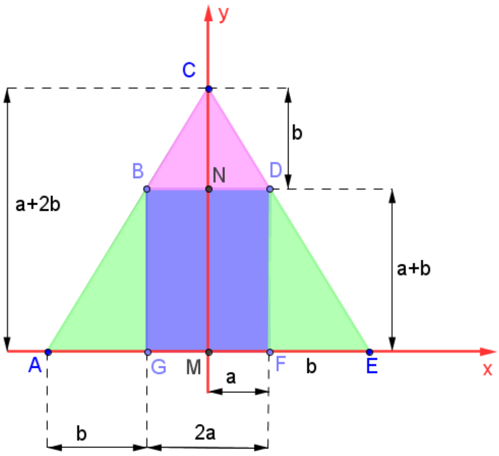
Pensamos que outro caminho que os alunos poderiam escolher para chegar a sequência (v_n) é por meio de condição de alinhamento de três pontos. Assim, se os pontos C, D e E pertencerem a mesma reta, então ACE tem formato triangular.

É importante destacar que se quiser garantir que os pontos A, B e C pertençam a uma mesma reta, o processo é análogo ao que faremos para os pontos C, D e E.

No entanto, para determinar estes pontos é necessário posicionar o desenho do lote no plano cartesiano. Uma opção sensata é fazer coincidir o ponto M com a intersecção dos eixos, uma vez que o ponto M pertence ao eixo de simetria do polígono e ao segmento AE, que pode ser considerado base do polígono.

Garantidas as condições que estabelecemos, pode-se construir a figura:

Figura 52 – Lote, plano cartesiano



Desta forma o ponto E tem abscissa $a+b$ e ordenada igual a zero, o ponto D tem coordenadas a para as abscissas e $a+b$ para as ordenadas e finalmente o ponto C tem abscissa nula e ordenada igual a $a+2b$. Resumindo, obtivemos os pontos $E(a+b,0)$, $D(a,a+b)$ e $C(0,a+2b)$, em que $a>0$ e $b>0$.

Agora, basta montar uma matriz de três linhas e três colunas com as coordenadas dos pontos E, D e C e garantir que o determinante seja nulo. Assim, os referidos pontos serão colineares.

Logo, tem-se que:

$$\begin{vmatrix} a+b & 0 & 1 \\ a & a+b & 1 \\ 0 & a+2b & 1 \end{vmatrix} = (a+b)^2 + a(a+2b) - (a+b).(a+2b) = b^2 - ab - a^2 = 0$$

Resolvendo equação polinomial do segundo grau, na incógnita b chega-se a: $b = \dfrac{a(1 \pm \sqrt{5})}{2}$.

Como b é positivo, então $b = \frac{a(1+\sqrt{5})}{2}$. Dividindo os dois membros da igualdade por a, chega-se a: $\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$.

Tomando $a = 20$, chega-se a sequência $(y_n) = (20, 20\Phi, 20+20\Phi, 20+40\Phi, \ldots)$, com a qual é possível desenhar lotes de formato triangular.

4.1.8 Algumas Considerações

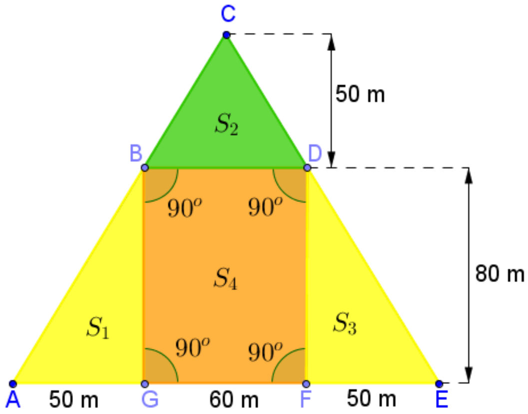
Acreditamos que na busca de responder as perguntas da Tarefa de Investigação, além dos assuntos que foram investigados, os alunos podem se interessar por muitos outros assuntos diferentes dos quais apresentamos neste trabalho. Também temos consciência que podem fazer argumentações utilizando métodos bem diferentes dos que propusemos.

No entanto, nossa intenção neste capítulo é sugerir uma Tarefa de Investigação com algumas possibilidades de se praticar Matemática explorando um paradoxo. Com isso, acreditamos que o aluno tem a oportunidade de agir como um matemático, fazendo conjecturas, realizando provas, refutações, levantando novas hipóteses, fazendo verificações, dentre muitas outras ações que julgamos importante para as aulas de Matemática.

Analisando o “Paradoxo de Mello” do ponto de vista filosófico, entendemos que este pode ser classificado como um Paradoxo Verídico, de acordo com a nomenclatura criada por Quine (1976). Um paradoxo é classificado como verídico, quando faz referência a situações que parecem impossíveis ou mesmo autocontraditórias, mas que, não obstante, são verdadeiras.

Para elucidar a classificação, apresentamos aqui a figura que representa um terreno que está dividido em quatro lotes.

Figura 53 – Lote do Artigo



Quando se calcula a área do triângulo ACE obtém-se uma medida de superfície diferente de quando se calcula a soma das áreas dos quatro lotes (S1, S2, S3 e S4). Mas esse fato torna-se absolutamente normal, quando provamos que o terreno tem o formato do pentágono ABCDE, apesar de parecer triangular. Isso explica a diferença de $100\ m^2$ de área do triângulo ACE para o terreno ABCDE. Assim, o problema que parecia contraditório, quando desvendado, deixa de ser um paradoxo para aquele que o analisou.

Afinal, segundo Quine (1976), um Paradoxo Verídico deixa de ser paradoxo para aquele que o decifra.

5 SUGESTÕES DE OUTROS PARADOXOS PARA SALA DE AULA

Neste capítulo apresentarmos e analisamos mais dois paradoxos que podem ser desenvolvidos na sala de aula: “Paradoxo 2=1” e “Paradoxos de Partilha”.

5.1 “Paradoxo 2=1”

No início deste trabalho, relatamos que tivemos a oportunidade de propor a alunos do Ensino Médio que tentassem resolver a seguinte questão:

> Por hipótese, considere
> $a = b$
> Multiplique ambos os membros por a
> $a^2 = ab$
> Subtraia de ambos os membros b^2
> $a^2 - b^2 = ab - b^2$
> Fatore os termos de ambos os membros
> $(a + b).(a - b) = b(a - b)$
> Simplifique os fatores comuns
> $a + b = b$
> Use a hipótese que $a = b$
> $2b = b$
> Simplifique a equação e obtenha
> $2 = 1$
>
> A explicação para isto é:
>
> a) a álgebra moderna aplicada a teoria dos conjuntos prevê tal resultado.
> b) a hipótese não pode ser feita, pois como $2 = 1$, a deveria ser $b + 1$.
> c) na simplificação dos fatores comuns ocorreu divisão por zero, gerando o absurdo.
> d) na fatoração, faltou o termo igual $a - 2ab$ no membro esquerdo.
> e) na fatoração, faltou o termo igual $a + 2ab$ no membro esquerdo.

Trata-se de uma das questões do vestibular da Universidade Estadual Paulista (UNESP), de 2003, na qual é abordada uma “demonstração” que parte de uma hipótese plausível, desenvolve-se de maneira aparentemente coerente do ponto de vista da Matemática, mas chega a uma conclusão absurda.

Assim, este paradoxo pode ser classificado como falsídico, pois segundo Quine (1976), os Paradoxos Falsídicos, são aqueles em que a conclusão é sempre falsa e o erro se encontra em alguma premissa ou em alguma inferência.

No caso desta questão, a explicação para a conclusão contraditória é que na simplificação dos fatores comuns ocorreu divisão por zero, gerando o absurdo. Mas não é tão simples para todo aluno perceber que houve uma divisão por zero.

Afinal, muitas vezes a implicação $(a+b).(a-b)=b.(a-b) \Rightarrow a+b=b,$ é interpretada como verdadeira; pois ao simplificar os fatores comuns na equação $(a+b).(a-b)=b.(a-b)$, o número zero não está explícito no denominador de cada membro da igualdade.

Acreditamos que essa interpretação equivocada ocorre porque os alunos fazem simplificações, sem refletir sobre o que estão fazendo. A experiência na sala de aula nos mostra, que ao apresentar igualdades do tipo $5.x=5.y\,(x\ ,y \in \mathbb{N}^*)$, em uma aula de Matemática, é comum o aluno exibir o seguinte procedimento:

$$\cancel{5}.x=\cancel{5}.y$$
$$x=y$$

Apesar da implicação $5x=5y \Rightarrow x=y$ ser legítima, se o professor pedir que os alunos justifiquem o cálculo, provavelmente muitos dirão que é só “cortar” o número 5, que é um fator comum aos dois membros da igualdade.

Muitas vezes o aluno apenas repete a fala ou a resolução de alguns professores. Também acreditamos que por pressa, ou por evitar detalhar por demais as resoluções, ou até mesmo na intenção de usar uma linguagem menos formal, alguns professores usam o termo “cortar”.

Mas será que todo aluno que cursa o Ensino Fundamental ou até mesmo o Ensino Médio, entende o que está por trás do termo “cortar”?

Provavelmente quando se pede para simplificar os fatores comuns na igualdade $(a+b).(a-b)=b(a-b)$, alguns indivíduos apenas “cortam” os fatores comuns aos dois membros e apresentam como resultado da simplificação, a equação: $a+b=b$. Com isso, acreditamos que para alguns alunos o termo “cortar” ganha o significado de se livrar de algumas coisas que estavam sobrando na equação, desta forma a igualdade fica menor e mais fácil de se trabalhar.

Assim, pensamos que muitos simplificam a equação $(a+b).(a-b)=b(a-b)$ e a equação $5.x=5.y$ de forma análoga.

Ou seja, se na equação $5.x=5.y$ é possível cortar os termos comuns; então, na equação $(a+b).(a-b)=b(a-b)$, pode-se aplicar a mesma técnica:

$$(a+b).\cancel{(a-b)}=b\cancel{(a-b)}$$
$$(a+b)=b$$

Estes cálculos mostram que o sujeito apenas se livra dos termos comuns e ignora a informação inicial que $a=b$. Com isso, estamos conjecturando que alguns alunos apenas descartam o termo $a-b$, sem pensar se era possível realizar aquela simplificação.

Acreditamos que se um aluno simplifica a igualdade $5.x=5.y$ e consegue justificar de forma coerente o procedimento utilizado, então fica mais difícil de ser iludido por falácias, como a do paradoxo apresentado na questão do vestibular da UNESP.

Assim, o aluno poderia explicar a simplificação da equação $5.x=5.y$ da seguinte forma: dividindo os dois membros da igualdade, $5.x=5.y$ por cinco, chega-se a $x=y$. Ao se deparar com a questão do vestibular da UNESP, provavelmente, este aluno tentaria simplificar a equação $(a+b).(a-b)=b(a-b)$, da seguinte forma:

Dividindo os dois membros da igualdade $(a+b).(a-b)=b(a-b)$ por $a-b$, tem-se que: $\frac{(a+b).(a-b)}{(a-b)}=\frac{b(a-b)}{(a-b)}$. Mas como $a=b$, então os denominadores representados pela expressão algébrica $a-b$ são iguais a zero, pois $a-b=b-b=0$. Com isso, poderia perceber que a explicação para a conclusão contraditória é que na simplificação dos fatores comuns ocorreu divisão por zero, gerando o absurdo.

"Demonstração" similar pode ser encontrada nos apêndices do livro "O Último Teorema de Fermat" (SINGH, 1998, p.299), com título "Perdendo-se no absurdo".

Neste livro, Simon Singh refere-se ao paradoxo da seguinte forma: "Eis uma demonstração clássica de como é fácil começar com uma declaração bem simples e depois de alguns passos aparentemente lógicos e direitos mostrar que $2 = 1$" (SINGH, 1998, p. 299).

Em seguida, apresenta os seguintes "passos":

> Primeiro vamos começar por uma declaração inócua
> $a = b$.
> Então multiplicamos ambos os lados por a , obtendo,
> $a^2 = ab$.
> Então somamos $a^2 - 2ab$ a ambos os lados:
> $a^2 + a^2 - 2ab = ab + a^2 - 2ab$.
> Isto pode ser simplificado para
> $[2(a]^2 - ab) = a^2 - ab$.
> Finalmente, dividimos ambos os lados por $a^2 - ab$ e obtemos
> $2 = 1$ (SINGH, 1998, p.299).

O autor comenta também que a declaração inicial é inofensiva, mas alerta que em algum ponto ocorreu um erro sutil, mas desastroso, pois os argumentos parecem perfeitamente legítimos, mas nos levam a uma conclusão absurdamente falsa. Afinal, 2 não é igual a 1.

Assim como na questão do vestibular da UNESP, o erro nesta "demonstração" também está em uma divisão por zero. A incoerência está no último passo da demonstração, uma vez que a implicação $[2(a]^2 - ab) = a^2 - ab \Rightarrow 2 = 1$ é falsa. Pode-se justificar o valor lógico atribuído, pois ao dividir ambos os lados da igualdade por $a^2 - ab$, está ocorrendo uma divisão por zero.

Para elucidar esta justificativa, vamos detalhar o último passo. Ao dividir os dois membros da igualdade $[2(a]^2 - ab) = a^2 - ab$ por $a^2 - ab$, estamos procedendo da seguinte forma: $\frac{[2(a]^2 - ab)}{a^2 - ab} = \frac{a^2 - ab}{a^2 - ab}$, mas como $a = b$, então pode-se afirmar que $a^2 - ab = a^2 - a^2 = 0$.

Portanto, os denominadores nos dois membros da equação $\frac{[2(a]^2 - ab)}{a^2 - ab} = \frac{a^2 - ab}{a^2 - ab}$, são iguais a zero. Com isso, para sair da igualdade $a = b$ e chegar na igualdade $2 = 1$, ocorreu uma divisão por zero, gerando o absurdo.

Simon Singh, alerta que "este erro sutil é o tipo de coisa que pegou muitos dos concorrentes ao Prêmio Wolfskehl[13]" (SINGH, 1998, p.300).

5.2 "PARADOXOS DE PARTILHA"

Neste item exibimos e comentamos "Paradoxos de Partilha". Tomamos a liberdade de denominar de "Paradoxo de Partilha" os paradoxos de divisão de herança.

Esses paradoxos são populares e ecoam até mesmo em ambientes não escolares. No Brasil, provavelmente o "Paradoxo de Partilha" mais conhecido pode ser encontrado no livro "O Homem que Calculava" (SOUZA, 1983).

Na referida obra, o autor Júlio César de Mello e Souza (1983) sob o pseudônimo de Malba Tahan, escreve um romance sobre as aventuras e habilidades Matemáticas do personagem persa Beremiz Samir, na Bagdá do século XIII.

No terceiro capítulo da referida obra, Malba Tahan (1983), narra como ocorreu a partilha de trinta e cinco camelos entre três irmãos árabes. Trata-se de um problema de herança que estava provocando briga entre três irmãos e foi "resolvido" pelo personagem Beremiz.

Apresentamos aqui, o problema e a solução dada por Beremiz:

> Poucas horas havia que viajávamos sem interrupção, quando nos ocorreu uma aventura digna de registro, na qual meu companheiro Beremiz, com grande talento, pôs em prática as suas habilidades de exímio algebrista.
> Encontramos perto de um antigo caravançará meio abandonado, três homens que discutiam acaloradamente ao pé de um lote de camelos.
> Por entre pragas e impropérios gritavam possessos, furiosos:
> - Não pode ser!
> - Isto é um roubo!
> - Não aceito!
> O inteligente Beremiz procurou informar-se do que se tratava.
> - Somos irmãos – esclareceu o mais velho – e recebemos como herança esses 35 camelos. Segundo a vontade expressa de meu pai, devo receber a metade, o meu irmão Hamed Namir uma terça parte, e, ao Harim, o mais moço, deve tocar apenas a nona parte. Não sabemos, porém, como dividir dessa forma 35 camelos, e, a cada partilha proposta segue-se a recusa dos outros dois, pois a

[13] Prêmio em dinheiro destinado à pessoa que conseguisse demonstrar o último teorema de Fermat.

metade de 35 é 17 e meio. Como fazer a partilha se a terça e a nona parte de 35 também não são exatas?
- É muito simples – atalhou o Homem que Calculava. – Encarrego-me de fazer com justiça essa divisão, se permitirem que eu junte aos 35 camelos da herança este belo animal que em boa hora aqui nos trouxe!
Neste ponto, procurei intervir na questão:
- Não posso consentir em semelhante loucura! Como poderíamos concluir a viajem se ficássemos sem o camelo?
- Não te preocupes com o resultado, ó Bagdali! – replicou-me em voz baixa Beremiz – Sei muito bem o que estou fazendo. Cede-me o teu camelo e verás no fim a que conclusão quero chegar.
Tal foi o tom de segurança com que ele falou, que não tive dúvida em entregar-lhe o meu belo jamal, que imediatamente foi reunido aos 35 ali presentes, para serem repartidos pelos três herdeiros.
- Vou, meus amigos – disse ele, dirigindo-se aos três irmãos -, fazer a divisão justa e exata dos camelos que são agora, como vêem em número de 36.
E, voltando-se para o mais velho dos irmãos, assim falou:
- Deverias receber meu amigo, a metade de 35, isto é, 17 e meio.
Receberás a metade de 36, portanto, 18. Nada tens a reclamar, pois é claro que saíste lucrando com esta divisão.
E, dirigindo-se ao segundo herdeiro, continuou:
- E tu, Hamed Namir, deverias receber um terço de 35, isto é 11 e pouco.
Vais receber um terço de 36, isto é 12. Não poderás protestar, pois tu também saíste com visível lucro na transação.
E disse por fim ao mais moço:
E tu jovem Harim Namir, segundo a vontade de teu pai, deverias receber uma nona parte de 35, isto é 3 e tanto. Vais receber uma nona parte de 36, isto é, o teu lucro foi igualmente notável. Só tens a agradecer-me pelo resultado!
E concluiu com a maior segurança e serenidade:
- Pela vantajosa divisão feita entre os irmãos Namir – partilha em que todos três saíram lucrando – couberam 18 camelos ao primeiro, 12 ao segundo e 4 ao terceiro, o que dá um resultado (18+12+4) de 34 camelos. Dos 36 camelos, sobram, portanto, dois.
Um pertence como sabem ao Bagdali, meu amigo e companheiro, outro toca por direito a mim, por ter resolvido a contento de todos o complicado problema da herança!
- Sois inteligente, ó Estrangeiro! – exclamou o mais velho dos três irmãos.
– Aceitamos a vossa partilha na certeza de que foi feita com justiça e equidade!
E o astucioso Beremiz – o Homem que Calculava – tomou logo posse de um dos mais belos “jamales” do grupo e disse-me, entregando-me pela rédea o animal que me pertencia:
- Poderás agora, meu amigo, continuar a viajem no teu camelo manso e seguro! Tenho outro, especialmente para mim!
E continuamos nossa jornada para Bagdá (SOUZA, 1983, ps.10,11 e 12).

Inicialmente, vamos analisar o paradoxo que permeia a história da divisão dos camelos. Afinal, há algo contra intuitivo - pois Beremiz propôs a divisão da herança de modo que cada um dos irmãos árabes ficou com uma parte maior do lhe cabia, segundo o que está arrolado no testamento, e ainda sobrou um camelo para ele (Beremiz).

Portanto, deve haver um erro sutil, que os irmãos árabes não conseguiram descobrir.

Pode-se refletir e constatar que realmente existe um erro no testamento, uma vez que ao somar as frações $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{9}$, tem-se como resultado $\frac{17}{18}$, ou seja, a soma das frações é menor que o inteiro. Neste caso, isto significa que $\frac{1}{18}$ do total dos camelos não foi destinado a nenhum dos irmãos. Como na herança são considerados 35 camelos, e $\frac{1}{18}$ de 35 camelos é igual a $1\frac{17}{18}$, então $1\frac{17}{18}$ de camelo foi excluído da herança.

No entanto, pode-se perceber mais problema com o testamento. Outro deslize é que 35 não é divisível por 2, também não é divisível por 3 e nem por 9.

Com isso, se fizessem a partilha, conforme as determinações estabelecidas no testamento, a divisão se daria da seguinte maneira:

O irmão mais velho receberia metade da herança, portanto ficaria com $17\frac{1}{2}$ camelos. Por sua vez, Hamed Namir, o irmão do meio, herdaria a terça parte, ou seja, 11 camelos e $\frac{2}{3}$ de camelo. Finalmente, ao Harim, o irmão mais novo, caberia a nona parte da herança, ou seja, ficaria com 3 camelos e $\frac{8}{9}$ de camelo.

No entanto, não seria muito útil dividir um camelo ao meio, ou herdar dois terços de um camelo, ou ainda montar em oito nonos de camelo e passear pelo deserto.

Contudo, o erro mais grave, conforme já analisamos foi utilizar três frações que quando somadas não totalizam o inteiro. Assim, efetuando a soma $17\frac{1}{2} + 11\frac{2}{3} + 3\frac{8}{9}$, obtém-se $33\frac{1}{18}$. Ao subtrair $33\frac{1}{18}$ dos 35 camelos da herança, chega-se a $1\frac{17}{18}$ de camelo, que é a sobra, ou ainda a quantidade de camelos que ficou fora do inventário.

Percebendo o erro no testamento, Beremiz simulou que estava doando mais um camelo para aumentar a cáfila[14] dos irmãos. Assim, o total de camelos passou a ser 36, que é divisível por 2, por 3 e por 9. Com esse procedimento, o jovem persa distribuiu $\frac{17}{18}$ entre os três herdeiros e ficou com a parte inteira da fração excedente $\left(\text{note que: } 33\frac{1}{18} + \frac{17}{18} - 34\right)$. Com isso, sobraram dois camelos, um para o Beremiz e outro que já pertencia ao Bagdali, seu companheiro de viajem.

Os irmãos ficaram satisfeitos, pois o mais velho saiu com 18 camelos, Hamed Namir, o irmão do meio, saiu com 12 camelos e Harim, o mais novo dos irmãos saiu com 4 camelos.

Apesar de cada irmão herdar mais camelos que o esperado, dos 35 camelos que compunham a cáfila do falecido pai, saíram com $34 (18 + 12 + 4)$ camelos. Algo que pode ajudar a elucidar isto, é que $\frac{17}{18}$ de 35 é um número racional (não inteiro) e $\frac{17}{18}$ de 36 é exatamente 34.

Retomando a análise filosófica, realmente há algo contraintuitivo - pois Beremiz propôs a divisão da herança de modo que cada um dos irmãos árabes ficou com uma parte maior do lhe cabia (segundo o que está arrolado na testamentária) e ainda sobrou um camelo para ele (Beremiz). Deste modo, “o milagre da multiplicação dos camelos” só aconteceu porque havia um erro no testamento que os irmãos árabes não conseguiram descobrir.

Pensamos que trazer situações como esta para sala de aula, vai além de proporcionar aos alunos estudar ou revisar operações com fração. O aluno sabe que existe algo contraintuitivo e com isso tem a oportunidade de usar seus conhecimentos para investigar e de descobrir o que está errado.

Acreditamos também que é uma situação que propicia debater assuntos que vão além da Matemática. Pode-se trabalhar interpretação de texto, gramática e principalmente discutir a questão ética que permeia a partilha dos

[14] Cáfila: coletivo de camelos.

camelos. Afinal, Beremiz se premiou com um camelo, mas não considerou necessário explicar aos irmãos árabes que estavam perdendo um dos seus animais porque havia um erro no testamento. O prêmio não foi oferecido a Beremiz pelos irmãos árabes.

Assim, seria um momento importante para se refletir sobre as seguintes questões: Beremiz foi justo? A atitude do Beremiz foi ética? Beremiz respeitou os valores morais e princípios ideais do comportamento humano?

De acordo com as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais:

> [...] aspectos biológicos, físicos, químicos e matemáticos, presentes nas questões tecnológicas, econômicas, ambientais ou **éticas** das relações interpessoais e do sistema produtivo e dos serviços, serão tratados como contexto em que se desenvolve o conhecimento científico, e não em separado, como apêndices ou aplicações de uma ciência básica (BRASIL, 2002, p.24, grifo nosso).

Outro "Paradoxo de Partilha" parecido com o do terceiro capítulo da obra de Malba Tahan (1983), também pode ser encontrado em artigos relacionados ao Direito. Segundo Leonel Severo Rocha (2011) a parábola dos camelos utilizada por Luhmann[15] (apud ROCHA, 2011) é bastante conhecida no meio jurídico.

> Nela, três irmãos receberam de herança do pai 11 camelos, mas não conseguem realizar a operação Matemática da divisão, devido ao fato de que o primeiro irmão tem direito a metade, o segundo a um quarto, e o terceiro a um sexto. Um terceiro observador propõe a solução do paradoxo a partir do empréstimo de um décimo segundo camelo (LUHMANN, apud TEUBNER, 2004 apud ROCHA, p. 211, 2011).

De acordo com o sociólogo Gunther Teubner (TEUBNER, 2004, apud ROCHA, 2011) a parábola dos camelos é utilizada como metáfora por Luhmann (apud ROCHA, 2011) para se discutir a importância dos paradoxos internos do Direito. Segundo Raffaele De Giorgi (2007) o terceiro observador da parábola de Luhmann (apud GIORGI, 2007) era na verdade um juiz.

O camelo foi emprestado para que a operação Matemática fosse possível; pois 11 não é divisível por 2, também não é divisível por 4 e nem por 6.

---

[15] Niklas Luhmann (1927-1998) foi um sociólogo alemão.

Após o empréstimo, os irmãos ficaram com 12 camelos. Assim, o primeiro irmão recebeu seis camelos, que é a metade do total; o segundo irmão ficou com três camelos, que é a quarta parte do total; e o terceiro irmão, saiu com dois camelos que é um sexto do total.

Efetuando a soma dos camelos que cada irmão recebeu, totalizam 11 camelos. Sobrou ainda um camelo, que para aqueles que não são da área judicial, teria um encaminhamento simples. Basta devolvê-lo ao juiz.

De acordo com Raffaele De Giorgi (2007) este é um paradoxo para o Direito. Pode-se verificar isto no texto:

> Originalmente, a divisão da herança era impossível, porque, para cumprir com a vontade do pai, os irmãos teriam que partir em dois um dos camelos. Um juiz lhes empresta um camelo. Com 12 camelos se poderia efetuar a divisão e cumprir a vontade testamentária. Realizada as operações, sobra um camelo. Então o juiz resgata o seu. Ou deixa-o. Este é o problema. Desde o problema se observa o paradoxo. Ou não se vê. O direito é constituído de modo paradoxal, pelo qual o camelo é necessário e não é necessário, diz Luhmann. [...] O camelo realiza uma operação simbólica; ele constitui o fazer possível a operação; nele, operação e resultado da operação, se confundem. [...] (GIORGI, P.32, 2007)

Voltando ao paradoxo sob o olhar da Matemática, este pode ser esclarecido de forma análoga a elucidação que apresentamos para o paradoxo proposto por Malba Tahan (1983).

Na parábola de Luhmann também há um erro na testamentária, uma vez que a soma das frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$ não totaliza o inteiro. Somando-se as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$, obtém-se $\frac{11}{12}$. Assim, sobram $\frac{1}{12}$ da herança que não foi destinada a nenhum dos filhos do falecido.

Se fosse possível dividir os camelos em pedaços, o primeiro irmão receberia metade de 11, portanto $5\frac{1}{2}$ camelos; o segundo irmão receberia a quarta parte, portanto $2\frac{3}{4}$ camelos; e o terceiro irmão receberia a sexta parte, portanto $1\frac{5}{6}$ camelo. Como a sobra é de $\frac{1}{12}$ da herança, então pode constatar que sobraram $\frac{1}{12}$ de 11 camelos, ou seja, a sobra foi de $\frac{11}{12}$ de um camelo.

Para que não fosse necessário “cortar” os camelos, o juiz emprestou um dos seus para os beneficiários. Com isso, a herança que é de $\frac{11}{12}$ do total de camelos pode ser representada por um número inteiro, pois $\frac{11}{12}$ de 12 camelos é igual a onze camelos; assim, ainda sobra um camelo – o do juiz (pelo menos para os leigos em Direito).

Também já havíamos mostrado que com o décimo segundo camelo, cada irmão ficou com um número inteiro de camelos.

Ainda encontramos outra versão do “Paradoxo de Partilha”, utilizada por Heinz von Foerster[16] (apud GIORGI, 2003). Segundo Giorgi (2003), para discutir o significado de realidade, Foerster (apud GIORGI, 2003) utilizou a seguinte história:

> Um sacerdote islâmico cavalgava sobre seu camelo no deserto e deparou com uma briga de três beduínos. Ele os cumprimentou e perguntou porque eles brigavam. Um dos beduínos respondeu: “Antes do nosso pai morrer, ele nos mandou dividir entre nós, os três filhos herdeiros, 17 camelos. O mais velho deveria ter a metade, o segundo um terço e o último a nona parte. É impossível dividir os 17 camelos deste modo”. O sacerdote refletiu, reuniu seu próprio camelo aos dos herdeiros e realizou a divisão com 18 camelos. O mais velho recebeu 9, o segundo, 6, e o terceiro, 2 camelos. A soma dos camelos repartidos totalizava somente 17. Dessa forma, o sacerdote retomou seu próprio camelo e continuou sua cavalgada (FOERSTER apud GIORGI, p.75, 2003).

Esta versão de “Paradoxo de Partilha” se parece com a de Malba Tahan (1983), uma vez que nos testamentos das duas histórias, o irmão mais velho fica com metade da herança, o do meio leva um terço e o mais novo recebe a nona parte. Mas de certa forma também se parece com a parábola de Luhmann (LUHMANN apud ROCHA, 2011), pois nas duas histórias, alguém se compadece, empresta um camelo para que a partilha seja possível e retoma o próprio animal no final da história.

Analisando essa situação, pode-se conjecturar que é possível utilizar alguns conhecimentos de aritmética, para produzir variantes dos “Paradoxos de Partilha”.

---

[16] Heinz von Foerster (1911-2002) foi um cientista austríaco-americano.

Desta forma, se a intenção é produzir variantes dos “Paradoxos de Partilha”, com um número y de camelos e que a divisão ocorra entre três irmãos; então é necessário que seja satisfeita a seguinte equação:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{n.(x-1)}{nx}$$

Em que:

- α, β , γ são inteiros, maiores que 1;
- $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ são as frações que representam a parte de cada irmão;
- n representa o número de camelos que sobram (da herança) após a partilha. Por exemplo: na história do Malba Tahan, após a partilha sobraram dois camelos, um do Bagdali e outro do Beremiz; assim, neste caso $n = 2$;
- nx é igual ao número de camelos que consta na herança, mais um.
- y é o número de camelos da herança e $y = nx - 1$;
- $n(x-1)$ representa o número de camelos da herança que realmente será dividido entre os irmãos. Por exemplo: na história do Malba Tahan, dos 35 camelos, foram divididos 34 camelos entre os três irmãos.
- x é o mínimo múltiplo comum de α, β , γ.
- Observação: se $n = 1$, então a fração $\frac{n.(x-1)}{nx}$ é irredutível.

Agora vamos estabelecer uma relação entre os dados do testamento citado na história de Foerster (apud GIORGI, 2003), e a equação $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{n(x-1)}{nx}$.

Sabemos que 17 camelos foram divididos entre três irmãos, de modo que o mais velho deveria receber metade da herança, o segundo um terço e o último a nona parte. Além disso, um sacerdote emprestou o próprio camelo para que a divisão pudesse ser realizada. No final da história cada irmão saiu com um número inteiro de camelos e o sacerdote retomou o seu camelo.

Como se conhece as partes que coube a cada irmão tem-se que $\alpha = 2$, $\beta = 3$ e $\gamma = 9$.

Partindo do primeiro membro da equação $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{n.(x-1)}{nx}$, chega-se a:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{9+6+2}{18}=\frac{17}{18}$$

Assim, $x=18$ e $n=1$.

É importante lembrar que nx é o número de camelos que consta na herança, mais o camelo do sacerdote. Assim, $y=nx-1=18-1=17$, ou seja, o número de camelos que consta na testamentária é igual a 17.

Neste caso, $nx-1=n.(x-1)=17$, pois $n=1$. Isto confirma, que na história de Foerster (apud GIORGI, 2003), após a partilha entre os irmãos, sobrou um camelo, que é o do sacerdote. Logo, foi dividido entre os irmãos o número exato de camelos que constava no testamento.

Assim, considerando o paradoxo presente na história de Foerster (apud GIORGI, 2003), verificamos que a equação foi satisfeita.

Já comentamos que o paradoxo que permeia a história de Foerster (apud GIORGI, 2003), se parece com a de Malba Tahan (1983). No entanto, no romance de Malba Tahan (1983), a herança é de 35 camelos.

Com isso, na história da partilha de Malba Tahan (1983), assim como na de Foerster (apud GIORGI, 2003), pode-se escrever $\alpha=2$, $\beta=3$ e $\gamma=9$.

Considerando que o número de camelos do testamento na história de Malba Tahan (1983) é igual a 35, basta tomar $n=2$ na equação na equação $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{n(x-1)}{nx}$; para que a partir do paradoxo da história de Foerster (apud GIORGI, 2003) obtenha-se o paradoxo proposto por Malba Tahan (1983).

Desta forma, é possível escrever a seguinte igualdade:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{9+6+2}{18}=\frac{17}{18}=\frac{2.17}{2.18}=\frac{34}{36}$$

Ou ainda, de forma mais enxuta a igualdade:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{34}{36}$$

Comparando a igualdade $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{34}{36}$, com a equação $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{n.(x-1)}{n.x}$, tem-se que:

- $x = 18$ e $n = 2$, ou seja, $nx = 36$. Assim, 36 é igual ao número de camelos que consta na herança, mais um. Logo, o número de camelos da testamentária é $y = nx - 1 = 35.$
- $n(x-1) = 34$, ou seja, 34 representa o número de camelos da herança que realmente será dividido entre os irmãos. Na história do Malba Tahan (1983), dos 35 camelos, foram divididos 34 camelos entre os três irmãos.

À luz das reflexões que fizemos até então, pode-se conjecturar que para $n = 1$, chega-se a um paradoxo, cuja herança é de 17 camelos e após a divisão (considerando $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 9$ e o acréscimo de um camelo), tem-se a sobra de 1 camelo.

Para $n = 2$, por meio de raciocínio análogo, chega-se a um paradoxo, cuja herança é de 35 camelos e após a divisão (considerando $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 9$ e o acréscimo de um camelo), tem-se a sobra de 2 camelos.

Generalizando, para $n = k \geq 1$ e $k \in \mathbb{N}$, chega-se à variantes do "Paradoxo de Partilha", cuja herança é de $y = 18k - 1$ camelos e após a divisão (considerando $\alpha = 2$, $\beta = 3$, $\gamma = 9$ e o acréscimo de um camelo), tem-se a sobra de k camelo(s).

De forma mais simples, a herança é de $y = 18k - 1$ camelos. Alguém "doa" um camelo para que a divisão seja possível, então o novo número de camelos é de $\overline{y} = (18k - 1) + 1 = 18k$. Assim, $\frac{\alpha}{\overline{y}}$, $\frac{\beta}{\overline{y}}$ e $\frac{\gamma}{\overline{y}}$, pois $2\ divide\ 18k,\ 3\ divide\ 18k$ e $9\ divide\ 18k.$

Efetuando a divisão, tem-se que:

O irmão mais velho recebe metade da herança, portanto fica com $9k$ camelos. Por sua vez, o irmão do meio, herda a terça parte, ou seja, $6k$ camelos. Finalmente, ao irmão mais novo, cabe a nona parte da herança, ou seja, fica com $2k$ camelos.

Somando os camelos que foram divididos entre os irmãos, chega-se a:

$$9k + 6k + 2k = 17k.$$

Como inicialmente havia $y = 18k - 1$ camelos, e alguém “doou” um camelo para que a divisão se tornasse possível, então nesse momento os irmãos ficaram com $\bar{y} = (18k - 1) + 1 = 18k$.

Desta forma, sobram $18k - 17k = k$ camelos.

No entanto, se na testamentária está previsto que o irmão mais velho fique com metade da herança, o do meio leve um terço e o mais novo receba a nona parte, pode-se obter outras variantes do paradoxo, além das versões utilizadas por Malba Tahan (1983) e por Foerster (apud GIORGI, 2003).

Considerando a equação:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{9+6+2}{18}=\frac{17}{18}=\frac{34}{36}=\frac{51}{54}=\frac{68}{72}=\cdots=\frac{n(x-1)}{nx}$$

Desta forma, $x = 18$.

É importante lembrar que nx é o número de camelos que consta na herança, mais o camelo do sacerdote. Com isso, $y = nx - 1 = 18n - 1$, ou seja, o número de camelos que consta na testamentária é igual a y .

Assim,

Se $n = 1$, então $y = 18.1 - 1 = 17$. Logo, tem-se uma herança com 17 camelos. Portanto, chega-se a um paradoxo igual ao encontrado na história de Foerster (apud GIORGI, 2003).

Se $n = 2$, então $y = 18.2 - 1 = 35$. Logo, tem-se uma herança com 35 camelos. Portanto, chega-se a um paradoxo igual ao encontrado na história de Malba Tahan (1983).

Se $n = 3$, então $y = 18.3 - 1 = 17$. Logo, tem-se uma herança com 53 camelos. Portanto, chega-se a um novo paradoxo.

Se $n = 4$, então $y = 18.4 - 1 = 71$. Logo, tem-se uma herança com 71 camelos. Portanto, chega-se a outro novo paradoxo.

Considerando as possíveis variações n , pode-se criar novas versões deste paradoxo.

Apesar de Malba Tahan (1983), não ter explicado o procedimento para obter novos paradoxos, o autor conjectura que com os números 17, 35, 53, 71, etc, seria possível elaborar problemas semelhantes ao que ele criou. Além disso, elucida porque escolheu 35 camelos para a testamentária e não outro número.

Apresentamos aqui, um fragmento dos apêndices do livro “O homem que calculava” (1983), no qual Malba Tahan (1983) presta alguns esclarecimentos sobre a história da partilha dos camelos:

> Em alguns autores encontramos um problema curioso, de origem folclórica, no qual o total de camelos é 17 e não 35. Esse problema dos 17 camelos pode ser lido em centenas de livros de recreações Matemáticas.
> Para o total de 17 camelos a divisão é feita por meio de um artifício idêntico (o acréscimo de um camelo à herança do xeique), mas a sobra é só do camelo que foi acrescentado. No caso do total de 35, como ocorreu no episódio com Beremiz, o desfecho é mais interessante, pois o calculista obtém um pequeno lucro com a sua habilidade.
> Se o total fosse de 53 camelos, a divisão da herança, feita do mesmo modo, aplicado o artifício, daria uma sobra de 3 camelos.
> Eis os números que poderiam servir: 17, 35, 53, 71, etc (SOUZA, 1983, p.182).

Agora, voltando ao “Paradoxo de Partilha” utilizado por Luhmann (apud ROCHA, 2011), é natural que surja a seguinte indagação - será que os números que permeiam o paradoxo da história de Luhmann (apud ROCHA, 2011), também satisfazem a igualdade $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{n(x-1)}{nx}$?

Com intenção de se verificar isto, vamos relembrar alguns fragmentos da história.

Na parábola contada por Luhmann (apud ROCHA, 2011), três irmãos receberam de herança 11 camelos. O primeiro irmão tinha direito a metade dos camelos, o segundo a um quarto e o terceiro a um sexto. Então, para resolver o problema da divisão da herança um juiz de direito empresta um de seus camelos. Com 12 camelos foi possível atender a divisão prevista na testamentária.

Partindo do primeiro membro da equação $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{n.(x-1)}{n.x}$, tem-se que:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{6+3+2}{12}=\frac{11}{12}$$

Considerando a igualdade:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{6+3+2}{12}=\frac{11}{12}=\frac{22}{24}=\frac{33}{36}=\frac{44}{48}=\cdots=\frac{n.(x-1)}{nx}$$

Tem-se que, $x=12$.

É importante lembrar que nx é o número de camelos que consta na herança, mais o camelo do juiz. Com isso, $y = nx - 1 = 12n - 1$, ou seja, o número de camelos que consta na testamentária é igual a y .

Assim,

Se $n = 1$, então $y = 12.1 - 1 = 11$. Logo, tem-se uma herança com 11 camelos. Portanto, chega-se a um paradoxo igual ao encontrado na história de Luhmann (apud ROCHA, 2011)

Se $n = 2$, então $y = 12.2 - 1 = 23$. Logo, tem-se uma herança com 23 camelos. Portanto, chega-se a um novo paradoxo.

Se $n = 3$, então $y = 12.3 - 1 = 35$. Logo, tem-se uma herança com 35 camelos. Portanto, chega-se a outro paradoxo.

Considerando as possíveis variações n , pode-se criar novas versões deste paradoxo.

Até agora, utilizamos os dados que permeiam as histórias de Heinz von Foerster (apud GIORGI, 2003), de Malba Tahan (1983) e de Luhmann (apud ROCHA, 2011) produzirmos variantes de "Paradoxos de Partilha". Mas também é possível produzir outras variantes dos "Paradoxos de Partilha".

Basta obter valores de $\alpha, \beta \; e \; \gamma$, que satisfaçam a equação $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{n.(x-1)}{nx}$, em que:

- α, β , γ são inteiros, maiores que 1;
- n é inteiro estritamente positivo;
- x é o mínimo múltiplo comum de α, β , γ;
- Se $n = 1$, então a fração $\frac{n.(x-1)}{nx}$ é irredutível.

Assim, se $\alpha = 2, \beta = 4 \; e \; \gamma = 5$, então temos dados para escrever outro paradoxo, conforme explicitamos a seguir:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{10 + 5 + 4}{20} = \frac{19}{20}$$

À luz da história de Foerster (apud GIORGI, 2003), pode-se escrever a seguinte história:

Um sacerdote islâmico cavalgava sobre seu camelo no deserto e deparou com uma briga de três beduínos. Ele os cumprimentou e perguntou porque eles brigavam. Um dos beduínos respondeu: "Antes do nosso pai morrer, ele nos mandou dividir entre nós, os três filhos herdeiros, 19 camelos. O mais velho deveria ter a metade, o segundo um quarto e o último um quinto. É impossível dividir os 19 camelos deste modo". O sacerdote refletiu, reuniu seu próprio camelo aos dos herdeiros e realizou a divisão com 20 camelos. O mais velho recebeu 10, o segundo, 5, e o terceiro, 4 camelos. A soma dos camelos repartidos totalizava somente 19. Dessa forma, o sacerdote retomou seu próprio camelo e continuou sua cavalgada.

Considerando a igualdade:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{10+5+4}{20}=\frac{19}{20}=\frac{38}{40}=\frac{57}{60}=\cdots=\frac{n.(x-1)}{nx}$$

Tem-se que, $x=20$ e $n=1$.

É importante lembrar que nx é o número de camelos que consta na herança, mais o camelo do juiz. Com isso, $y=nx-1=20n-1$, ou seja, o número de camelos que consta na testamentária é igual a y .

Assim,

Se $n=1$, então $y=20.1-1=19$. Logo, tem-se uma herança com 19 camelos. Portanto, chega-se a um paradoxo igual ao encontrado na história que acabamos de criar.

Se $n=2$, então $y=20.2-1=39$. Logo, tem-se uma herança com 39 camelos. Portanto, chega-se a um novo paradoxo.

Se $n=3$, então $y=20.3-1=59$. Logo, tem-se uma herança com 59 camelos. Portanto, chega-se a outro paradoxo.

Considerando as possíveis variações n , pode-se criar novas versões deste paradoxo. Também é possível escrever muitas outras histórias, basta encontrar outros valores para α, β e γ que satisfaçam a igualdade $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{n.(x-1)}{nx}$ e as condições já estabelecidas para as variáveis.

Acreditamos que poderíamos escrever muito mais sobre os "Paradoxos de Partilha", mas também julgamos que o pouco que escrevemos é uma boa amostra dos possíveis caminhos que os alunos poderiam trilhar ao investigar este tipo de problema.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Desde a introdução desta dissertação, elucidamos que um dos objetivos deste trabalho é discutir a viabilidade de se trabalhar paradoxos nas aulas de Matemática.

Assim, logo no primeiro capítulo, depois de uma análise, apontamos um possível procedimento metodológico para se explorar os paradoxos nas aulas de Matemática.

No segundo capítulo, promovemos uma reflexão sobre os paradoxos e analisamos suas possíveis classificações. No terceiro capítulo, descrevemos uma Experiência de Ensino em que, numa Tarefa de Investigação Matemática, foi explorado o "Paradoxo de Carroll". Nos demais capítulos, apresentamos e analisamos mais três paradoxos.

Realizamos essas ações com o propósito de responder às perguntas que nortearam este trabalho:

i) Qual é a viabilidade de se trabalhar paradoxos nas aulas de Matemática?

ii) Quais paradoxos utilizar?

Com a finalidade de responder a primeira pergunta, vamos retomar a experiência de ensino exposta no terceiro capítulo.

Ao analisar a experiência de ensino é possível perceber que o paradoxo desempenhou o papel de aguçar o interesse dos alunos. A natureza contraintuitiva de alguns paradoxos parece fascinar as pessoas.

Metaforizando, é como ir ao "show de mágica". Sabe-se que David Copperfield e Mister M são ilusionistas e mesmo assim seus espetáculos exercem certa atração sobre o ser humano. As pessoas assistem aos "shows de mágica" e tentam explicar a si mesmas como é possível fazer aquele avião ou aquele elefante desaparecer do palco diante da platéia. Afinal, isso é contraintuitivo.

Explicar essas ilusões parece tão intrigante quanto elucidar paradoxos como o de Carroll – segundo o qual, por meio de argumentos que parecem perfeitamente legítimos somos levados à conclusão absurdamente falsa que $64 = 65$. Isto também é contraintuitivo, e talvez por esse motivo o aluno se sinta motivado a tentar investigar o paradoxo.

Mas não basta que a atividade desperte o interesse do aluno, é necessário escolher questões que constituam um verdadeiro desafio àqueles que participam da Tarefa de Investigação. Afinal a investigação de um Paradoxo Falsídico não encerra quando se descobre o erro em alguma etapa que gerou o absurdo. É possível ir além.

Conforme sugerimos, por meio de investigação Matemática, existe a possibilidade de chegar a uma sequência cujos elementos podem ser usados para construir “quebra-cabeças” que driblam o “Paradoxo de Carroll”. E esse é apenas um de muitos caminhos que o aluno poderia escolher para investigar o referido paradoxo.

Considerando a experiência de ensino, pensamos que a Tarefa de Investigação formulada à luz do artigo de Mendes (1998) cumpriu o papel de ser desafiadora - além de aplicar vários conteúdos matemáticos os alunos tiveram oportunidade de confrontar suas opiniões, de formular conjecturas, de testá-las, de fazer refutações, de validar alguns resultados e de construir argumentos convincentes.

Também é importante destacar que para explorar a Tarefa de Investigação os alunos utilizaram conteúdos matemáticos como áreas de polígonos, semelhança de triângulos, trigonometria no triângulo retângulo e sequências numéricas. Mas também mostramos que outros assuntos matemáticos, além daqueles escolhidos pelos participantes, poderiam ser explorados com a Tarefa de Investigação, tais como equação do segundo grau, estabelecer relações entre a Sequência de Fibonacci e padrões geométricos e até mesmo explorar assuntos como limite e fazer demonstrações por meio do primeiro princípio da indução.

Assim, tomando como referência a experiência de ensino desenvolvida no capítulo 3, podemos conjecturar que é possível elaborar <u>bons problemas</u>[17] com alguns paradoxos matemáticos. Desta forma, se o professor conseguir estabelecer um ambiente favorável para a investigação Matemática, cria-se oportunidade de o aluno <u>agir como matemático</u>[18].

[17] Segundo Stewart (1995) “Um bom problema é aquele cuja solução, em vez de simplesmente conduzir a um beco sem saída, abre horizontes inteiramente novos [...]” (apud PONTE, BROCARDO & OLIVEIRA, 2005, p. 16).

[18] Formulando e discutindo conjecturas, fazendo generalizações, refutando algumas inferências, e validando os resultados obtidos por meio de demonstrações.

Portanto, levando em consideração as colocações que fizemos sobre a experiência de ensino, acreditamos que é viável trabalhar alguns paradoxos nas aulas de Matemática.

Porém, é conveniente lembrar que aplicamos a experiência de ensino a um número reduzido de alunos. Isso ocorreu porque a participação foi facultativa e exigia que o aluno fosse à escola em um contra turno. Desta forma, apenas três alunos mostraram interesse em participar.

Pode-se inferir que esses alunos não constituíram uma boa amostra daquela sala de aula, uma vez que os voluntários também eram aqueles que mais gostavam da disciplina e representavam aproximadamente 10% do total de alunos.

Desta forma, não podemos dizer ao certo quais seriam os resultados, se a classe toda tivesse participado da referida atividade. Por um lado, aumentando o número de grupos, é mais difícil para o professor entender os rumos que estão tomando as investigações; por outro, promover a apresentação dos resultados e o debate entre grupos enriqueceria a atividade.

Outro fator que deve ser levado em consideração é o tempo. Como realizamos a experiência de ensino em período adverso ao das aulas regulares, as atividades puderam se estender por mais de três aulas.

Assim, se existe a intenção de se aplicar a Tarefa de Investigação nas aulas de Matemática, julgamos pertinente planejar o tempo de duração desta atividade. Sugerimos que sejam reservadas, no mínimo quatro aulas, para que não se faça uma investigação superficial do paradoxo e ainda sobre tempo para se apresentar e discutir os processos e os resultados alcançados pelos grupos.

Julgamos que esta atividade de investigação, pode ser desenvolvida no nono ano do Ensino Fundamental. Nesta série, o aluno já conhece assuntos como semelhança de triângulos, sabe calcular área de polígonos e está em contato com assuntos como trigonometria no triângulo retângulo e equações do segundo grau.

No entanto, não é conveniente limitar a aplicação desta atividade ao nono ano. Tomando como referência a experiência de ensino que realizamos, julgamos que o paradoxo que permeia a Tarefa de Investigação deste trabalho, pode representar um desafio para os alunos de qualquer série do Ensino Médio.

Agora, vamos recorrer ao primeiro e segundo capítulos para responder à segunda pergunta orientadora.

Pelos relatos apresentados neste trabalho, é possível perceber que as Antinomias são paradoxos que carregam consigo autocontradições, que trouxeram e continuam trazendo preocupações até mesmo para os matemáticos, lógicos e filósofos.

Desta forma, abordar os paradoxos pertencentes a esta classe com alunos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio pode ser inconveniente - uma vez que, de modo geral, os alunos destes níveis escolares podem não ter embasamento lógico suficiente para analisar as Antinomias.

Conforme relatamos no primeiro capítulo, a reação dos alunos ocasionada pela natureza desafiadora de questões que partem de premissas aparentemente verdadeiras, desenvolvem-se por etapas aparentemente lógicas e chegam a conclusões absurdas, nos incentivou a continuar pensando na viabilidade desse tipo de situação para as aulas de Matemática. À luz da classificação formulada por Quine (1976), podemos inferir que os paradoxos que possuem esta característica pertencem à classe dos Falsídicos.

Pertencem à terceira classe, os paradoxos que fazem referência a situações que parecem impossíveis ou mesmo autocontraditórias, mas que, não obstante, são verdadeiras. Segundo, a classificação adotada por Quine, esses paradoxos são os Verídicos.

Os Paradoxos Verídicos e os Falsídicos têm algo em comum, são contraintuitivos. Portanto, entendemos que possuem as características de ser intrigantes e desafiadores. Sendo assim, acreditamos que é possível planejar e aplicar algumas atividades permeadas por paradoxos Falsídicos e Verídicos nas aulas de Matemática.

A fim de ser mais específico, o “Paradoxo de Carroll”, os “Paradoxos de Partilha”, o “Paradoxo $2 = 1$ ” são algumas sugestões de Paradoxos Falsídicos para se trabalhar nas aulas de Matemática. Em se tratando dos Paradoxos Verídicos, sugerimos a aplicação do “Paradoxo de Mello” e do “Paradoxo do Aniversário”. Acreditamos que os paradoxos sugeridos são intrigantes, desafiadores, acessíveis e bons problemas[19] para se investigar nas aulas de Matemática.

Estamos conscientes de que seria importante fazer uma experiência de ensino com cada um dos paradoxos analisados neste trabalho. Desta forma, poderíamos descrever com maiores detalhes o tempo necessário para cada atividade, a Matemática que

[19] Segundo Stewart (1995) “Um bom problema é aquele cuja solução, em vez de simplesmente conduzir a um beco sem saída, abre horizontes inteiramente novos [...]” (apud PONTE, BROCARDO & OLIVEIRA, 2005, p. 16).

os alunos de uma determinada série efetivamente utilizaram, as argumentações, as conjecturas, as refutações, os debates, as validações, alguns fracassos e as empreitadas bem sucedidas. Por outro lado, todas essas ações são específicas de cada série, de cada sala, de cada grupo e de cada aluno.

Contudo, pretendemos continuar estudando a viabilidade de se trabalhar paradoxos nas aulas de Matemática. Se possível promover experiências de ensino com aqueles que ainda não tivemos oportunidade e efetivamente levá-los para a sala de aula.

Mesmo conscientes de que o uso de paradoxos nas aulas de Matemática é um assunto que merece ser pesquisado mais intensamente, esperamos com este trabalho configurar uma proposta para que professores da Educação Básica possam explorar em suas aulas visando à aprendizagem dos alunos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACKER, L.V. **Introdução à Filosofia da Lógica**. São Paulo – SP: Livraria Acadêmica e Saraiva & CIA, 1932.

AXT, R., BONADIMAN, H. & SILVA, M.T.X. **Um Experimento Contraintuitivo**. Caderno Catarinense de Ensino de Física. v.17, n. 1: p. 17-32. Florianópolis – SC, 2000.

BARKER, S.F. **Filosofia da Matemática**. Trad. Leônidas Hegenberg. 2ª ed. Rio de Janeiro – RJ: Zahar Editores, 1976.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. **PCN+ Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais.** Brasília: MEC, SEMTEC, 2002.

CARAÇA, B.J. **Conceitos Fundamentais de Matemática**. Lisboa: Gradiva, 1998.

CARDOSO, G.A. **"Repercussões Contemporâneas do Paradoxo do Mentiroso: Tarski e Kripke"**. 2010. 110 f. Dissertação (Mestrado em Filosofia) - Departamento de Filosofia da Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte. 2010.

DIAS, C.M.C. **Compêndios de Matemática e de lógica Matemática: uma abordagem extemporânea**. 2ª ed. Curitiba: C.M. Corrêa Dias, 1999.

DIAS, C.M.C. **Problemas e Exercícios de lógica Matemática: uma abordagem extemporânea**. Curitiba: C.M. Corrêa Dias, 2003.

DOLCE, O & POMPEO, N. **Fundamentos de Matemática Elementar 9: geometria plana.** 8ª ed. São Paulo: Atual, 2005.

D'OTTAVIANO, I.M.L & FEITOSA, H. A. **Sobre a história da lógica, a lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas**. V Seminário Nacional de História da Matemática - Rio Claro: Unesp, 2003.

ERICKSON, G. W & FOSSA, J.A. **Um Panacum de Paradoxos**. Natal: UFRN, 2006.

GIORGI, R. **A memória do direito**. Belo Horizonte: Del Rey, 2003.

GIORGI, R. **Sobre o direito Kafka, Durrematt e a idéia do Luhmann sobre o camelo.** v.4. Belo Horizonte: Veredas do direito, 2007.

GONÇALVES, M.B. & GONÇALVES, D. **Elementos de Análise**. Florianópolis: UFSC, 2012.

HAACCK, S. **Filosofia das lógicas**. Trad. Cerzar A. Mortari, Luiz Henrique de A. Dutra. São Paulo: UNESP, 2002.

HEFEZ, A. **Elementos de Aritmética**. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

HOLTON, G., RUTHERFORD, F. J & WATSON, F. G. **Project Physics Course**. New York: Holt, Rinehart e Winston, 1970. Trad. **Projecto Física**, Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1978.

KASNER, E. & NEWMAN, J. **Matemática e Imaginação**. Trad. Jorge Fortes. Rio de Janeiro – RJ: Zahar Editores, 1968.

LAROUSSE. **Grande dicionário Larousse da Língua Portuguesa**. São Paulo – SP: Nova Cultural, 1999.

LINS, Romulo Campos. **Epistemologia, História e Educação Matemática: tornando mais sólidas as bases de pesquisa.** Revista da SBEM – SP Campinas, v.1, p. 75-91, set 1993.

LINS, R.C. & GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI.** Campinas – SP: Papirus, 1997.

MELLO, J. L. P. **Ganhe 100 m² com um paradoxo**. *Jornal Folha de São Paulo*, São Paulo, especial 6, 1 nov. 2001.

MENDES. M.D.C. **Fibonacci e a explicação de um paradoxo**. Revista de Educação Matemática da SBEM-SP. Ano 6, nº 4. Campinas: ICE – PUCCAMP, 1998.

OLIVEIRA, K. I. M & FERNANDEZ, A. J. C. **Iniciação à Matemática**: **Um Curso com Problemas e Soluções.** Rio de Janeiro: SBM, 2010.

ONUCHIC, L.R. **Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas**. In: Maria Aparecida Vigiani Bicudo (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas. Rio Claro: Editora Unesp, 1999.

ONUCHIC, L.R.& ALLEVATO, N. S. G. **Novas Reflexões Sobre o Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas**. In: Maria Aparecida Vigiani Bicudo, Marcelo de Carvalho Borba (Org.). Educação Matemática: Pesquisa em movimento. 2ª ed. São Paulo: Cortez, 2005.

PONTE, J.P., BOAVIDA, A., GRAÇA, M. & ABRANTES, P. **Didática da Matemática**. Capítulo: A Natureza da Matemática. Lisboa: 1997.

PONTE, J.P., FONSECA, H., & BRUNHEIRA, L.**As actividades de investigação, o professor e a aula de Matemática.** Lisboa: APM e Projecto MPT, 1999.

PONTE, J.P., OLIVEIRA, H, BRUNHEIRA, L & VARANDAS, J.M. **O trabalho do professor numa aula de investigação Matemática.** Lisboa: APM e Projecto MPT, 1999.

PONTE, J.P., BROCARDO, J. & OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. 1ª ed.Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

QUINE, W.V. **Ways of paradox and Other Essays**. Harvard University Press Cambridge, Massachusetts and London, England,1976.

ROCHA, L.S. **Teoria do Direito no Século XXI: da semiótica à autopoiese.** Projeto de Pesquisa: Direito Reflexivo e Policontexturalidade, seq. 62: CNPq, 2011.

SAINSBURY, R. M. **Paradoxes**. 3ª ed. Cambridge University Press, 2009.

SANTOS, C.P., NETO, J.P. & SILVA, J.N. **Sucessão de Fibonacci.** COLECÇÃO JOGOS COM HISTÓRIA**.** Lisboa: SPM (Sociedade Portuguesa de Matemática), 2007.

SCIENTIFIC AMERICAN BRASIL. **A Vanguarda Matemática e os Limites da Razão**. Gênios da Ciência. n. 8. São Paulo – SP: Ediouro, 2007.

SCIENTIFIC AMERICAN BRASIL. **Aristóteles: O Pai de Todas as Ciências**. n. 6. Gênios da Ciência. São Paulo – SP: Ediouro, 2007.

SEE/SP**. Caderno do Aluno: Matemática, Ensino Fundamental – 7ª série, volume 4**/ Secretaria da Educação São Paulo (Estado) Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; equipe, GRANJA, C.E.S.C; MELLO, J.L.P; MACHADO. N.J; MOISES, R.P; SPINELLI, W. – São Paulo: SEE, 2009.

SEE/SP. **Caderno do Professor: Matemática, Ensino Fundamental – 7ª série, volume 4**/ Secretaria da Educação São Paulo (Estado) Secretaria da Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; equipe, GRANJA, C.E.S.C; MELLO, J.L.P; MACHADO. N.J; MOISES, R.P; SPINELLI, W. – São Paulo: SEE, 2009.

SEE/SP**. Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e sua tecnologias** / Secretaria da Educação do Estado de São Paulo; coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado – São Paulo: SEE, 2010.

SINGH, S. O **Último Teorema de Fermat**. Trad. Jorge Luiz Calife. 7ª ed. Rio de Janeiro: Record, 1998.

SOUZA, J.C.M. **O homem que calculava**. 26 ª ed. Rio de Janeiro: Record, 1983.

SOUZA, J.C.M. **Matemática divertida e curiosa**. 15ª ed. Rio de Janeiro: Record, 2001.

TERRY, A. **Fibonacci sequence, cluster algebras and Integrable systems.** Mathematics Department at the University of Illinois at Urbana-Champaign: 2012.

TORRES, J.D.S. **Jogos de Matemática e de Raciocínio Lógico**. Trad. Guilherme Summa. Petrópolis, RJ: Vozes, 2012.