Universidade Estadual de Londrina

TALLYS YURI DE ALMEIDA KANNO

ANÁLISE COMBINATÓRIA:

UMA PROPOSTA DE ENSINO

Londrina
2022

TALLYS YURI DE ALMEIDA KANNO

ANÁLISE COMBINATÓRIA:
UMA PROPOSTA DE ENSINO

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática, por meio do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientadora: Profa. Dra. Pamela Emanueli Alves Ferreira

Londrina
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

K16a Kanno, Tallys Yuri de Almeida.

Análise Combinatória : Uma Proposta de Ensino / Tallys Yuri de Almeida Kanno. - Londrina, 2022.

53 f. : il.

Orientador: Pamela Emanueli Alves Ferreira.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2022.

Inclui bibliografia.

1. Análise Combinatória - Tese. 2. Trajetória Hipotética de Aprendizagem - Tese. 3. Ensino de Matemática - Tese. 4. Trabalho Colaborativo - Tese. I. Ferreira, Pamela Emanueli Alves . II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDU 51

TALLYS YURI DE ALMEIDA KANNO

ANÁLISE COMBINATÓRIA:

UMA PROPOSTA DE ENSINO

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática, por meio do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Profa. Dra. Pamela Emanueli Alves Ferreira
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Profa. Dra. Magna Natalia Marin Pires
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Profa. Dra. Andréia Büttner Ciani
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE – campus Cascavel

Londrina, 27 de abril de 2022.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer aos meus familiares que, de forma direta, sempre me incentivaram e apoiaram. Porém, agradeço em especial à minha mãe, **Roseane Cristina de Almeida Kanno**, que sempre me fortaleceu acreditando em minha capacidade e “pegando no meu pé” para que eu terminasse o mestrado.

Agradeço a todos os professores que me ajudaram muito nas disciplinas do mestrado, compartilhando conhecimentos e, principalmente, por me auxiliarem nos estudos gerais, inclusive para o Exame Nacional de Qualificação do PROFMAT.

Agradeço a todos os meus amigos que estiveram presentes e me fizeram vencer essa batalha, especialmente ao **Danilo Ordone Lopes,** que estudou e vivenciou todos os momentos do mestrado comigo e ao **Rodolfo Iglezia Palmieri,** que sempre me ajudou, de modo geral e, principalmente, com uma das partes mais complicadas para mim, a escrita.

Agradeço também às professoras **Magna** e **Andréia** pelas colaborações na banca de defesa do meu trabalho.

Agradeço de coração e imensamente a minha orientadora incrível, **Pamela Emanueli Alves Ferreira**, que me aceitou de braços abertos para orientar, por estar sempre presente me acompanhando, me cobrando muito e, principalmente, me incentivando por todo o mestrado.

KANNO, Tallys Yuri de Almeida. **Análise Combinatória:** uma proposta de ensino. 53 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2022.

RESUMO

Devido às práticas pedagógicas tradicionalistas utilizadas para o ensino de “Análise Combinatória” observa-se que, muitas vezes, ele acaba por se tornar um entrave de aprendizagem para os alunos, que o associam a um exercício de mera aplicação de fórmulas. Esta dissertação objetiva apresentar uma proposta para o ensino de Análise Combinatória por meio de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA), apoiada na utilização de tarefas na perspectiva investigativa, com a finalidade de que os alunos sejam os protagonistas da construção dos seus próprios conhecimentos e não receptáculos de um conhecimento expresso pelo docente. A elaboração da Trajetória Hipotética de Aprendizagem foi feita à luz das ideias do estudioso Martin Simon, por meio de cinco tarefas, com o objetivo de apresentar uma proposta de introdução e sistematização dos conteúdos: Princípio Fundamental da Contagem, Permutação, Arranjo e Combinação. Espera-se que este trabalho sirva de inspiração para que os professores reflitam sobre a importância de os estudantes serem ativos na construção dos conceitos matemáticos.

Palavras-chave: ensino de matemática; trajetória hipotética de aprendizagem; análise combinatória; investigação matemática.

KANNO, Tallys Yuri de Almeida. **Combinatorial Analysis:** a teaching proposal. 53 p. Dissertation (Professional Masters in Mathematics) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2022.

ABSTRACT

As a result of traditionalist pedagogical practices used to the teaching of “Combinatorial Analysis” we observe that, many times, it becomes a learning obstacle to students, that, associate it to an exercise of mere formula application. This essay aims to present a hypothetical learning trajectory (THA) for teaching “Combinatorial Analysis”, in conjunction with the utilization of assignments in a investigative perspective. So that students start being the protagonists of the construction of their own knowledge and not only receptacles of the lessons and subjects explained by their teachers. The elaboration of the “Hypothetical Learning Trajectory” was elaborated based on the ideas of Martin Simon, through three assignments with the main goal of presenting a proposal of introduction and systematization of the subjects: Fundamental Principle of Counting, Permutation, Arrangement and Combination. It's expected that this essay serves as an inspiration so that teachers think about the importance of students being active on building the knowledge on these mathematical concepts.

Key-words: teaching mathematics; hypothetical learning trajectories; combinatorial analysis; mathematical research.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Em nosso contexto atual escolar, ainda nos deparamos com muitas dificuldades para trabalharmos o Ensino de Matemática e, também, para lidar com os resultados de aferições nacionais, as quais buscam inferir a respeito da aprendizagem dos alunos. Muitas vezes, a falta de contextualização dos conteúdos e os encaminhamentos expositivos das aulas, frequentes nos ambientes escolares, podem contribuir com o desinteresse e desmotivação dos alunos.

Deparamo-nos, frequentemente, com um ensino de Matemática voltado para a memorização de fórmulas e para o ensino de algoritmos, para a repetição de instruções pré-definidas, as quais “devem” ser executadas mecanicamente, ou seja, os alunos acabam resolvendo exercícios sem a demonstração de como se aplicar e sem o significado do porquê aplicar/aprender, o que, na nossa opinião, impossibilita ao aluno um aprendizado efetivo. Em contraposição à esta ideia e de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), assumimos a perspectiva de que o ensino de Matemática

> desempenha papel decisivo, pois permite resolver problemas da vida cotidiana, tem muitas aplicações no mundo do trabalho e funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares. Do mesmo modo, interfere fortemente na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno (BRASIL, 1997, p. 15).

Ao não identificarem as contextualizações e aplicabilidades dos conteúdos em situações do nosso cotidiano, por exemplo, observamos que os alunos apenas decoram processos para ter a sua aprovação ao final do ano, atitude esta que compromete o objetivo final de aprender. Entretanto, sabemos o quão fundamental é aprender dando significado e compreender a matemática de uma forma contextualizada, desenvolvendo um raciocínio dedutivo e lógico, que será útil para a resolução dos mais diversos problemas que podem surgir ao longo da vida, afinal

> aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação (BRASIL, 2002, p. 111).

É fato que não existe apenas um caminho correto de ensino, por isso o docente deve conhecer sua turma e, assim, escolher qual a melhor forma de se fazer o encaminhamento das aulas. O docente também deve estar muito bem preparado para os desafios do ensino, pois é recomendável que saia da sua zona de conforto, deixando o roteiro padrão tradicional (uma breve explicação do conteúdo seguida por vários exercícios direcionados aos alunos, para serem resolvidos individualmente) de lado, afinal, na nossa opinião, esse roteiro é um dos maiores fatores que contribuem para o desinteresse dos alunos pela Matemática.

Diante da necessidade de algumas mudanças no ensino da Matemática, buscamos recursos para que os alunos tenham mais interesse e também melhorem o desenvolvimento na forma de pensar matematicamente. As metodologias escolhidas pelo professor, por exemplo, também interferem no aprendizado. O profissional deve estar apto e disposto a desenvolver outras técnicas metodológicas, para que desencadeie outros questionamentos e raciocínios lógicos em seus alunos.

Consideramos que a Matemática é a ciência do raciocínio lógico e abstrato, que se desenvolveu a partir de conceitos básicos, como a contagem, as medições e os cálculos, evoluindo para estudos sistemáticos. Ela consiste em buscar padrões, conjecturas e busca explicar seus resultados através de deduções, axiomas, teoremas, corolários, lemas, postulados, proposições e definições.

A investigação matemática é uma das alternativas do ensino da matemática que consiste em apresentar uma situação problema ao aluno, induzindo-o a fazer questionamentos, conjecturas, teses e validações. Essa estratégia metodológica possibilita a autonomia do aluno de encontrar formas e estratégias para resolver problemas, desenvolver fórmulas e/ou algoritmos a seus próprios métodos.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2019, p. 20) afirmam que a investigação matemática é dividida em quatro etapas: a primeira que o aluno começa a explorar o problema e formular questões para resolvê-lo; a segunda etapa é organizar os dados e formular conjecturas; a terceira etapa é testar as conjecturas e realizar os devidos ajustes e, por fim, temos a justificativa das conjecturas e avaliação dos resultados.

Para que os alunos tenham sucesso na aprendizagem de conceitos combinatórios, é importante que o professor tenha domínio do conteúdo, incentive o raciocínio lógico buscando desenvolver o raciocínio combinatório em vez de ensinar seus alunos de uma forma mecanizada. Assim, possibilitará que os alunos consigam analisar os pequenos detalhes dos problemas combinatórios, conforme afirma Morgado *et al.* (1991, p. 2),

> Por outro lado, se a aprendizagem destes conceitos se faz de maneira mecânica, limitando-se a empregá-los em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, cria-se a impressão de que a Análise Combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas.

A partir dessas considerações iniciais, este trabalho objetivou apresentar, por meio de fontes teóricas e tarefas selecionadas por nós, uma forma distinta da expositiva de ensinar, uma forma de agir do docente que possibilite o pensamento questionador do aluno de forma que ele não se torne um repetidor de fórmulas, mas um desenvolvedor delas.

Assumir uma atitude investigativa, em um espaço colaborativo de trabalho entre estudantes e professor é uma das premissas que tomamos para que o ensino de Análise Combinatória seja eficiente. Coll (1994) e Colaço (2004) são exemplos de autores que já realizaram uma análise ampla dos efeitos dos trabalhos realizados de forma colaborativa entre estudantes. Alguns dos pontos positivos sobre o trabalho colaborativo são:

- socialização, em geral, o estudante terá oportunidade de se comunicar/expressar mais, apoiar, orientar, corrigir;
- o desenvolvimento de habilidades, pois, enquanto discutem, acabam ensinando e aprendendo, tornar-se adaptável à condição de interação a fim de negociar papéis específicos em algum momento da atividade;
- desenvolver o colaborativismo ao invés do egocentrismo, uma vez que terá que respeitar/ouvir/discutir sobre opiniões/ideias que, às vezes, não serão iguais as suas;
- além do controle de impulsos agressivos. Assim melhorando o desenvolvimento escolar, intelectual e social.

Logo, para explorarmos nosso objetivo geral, dividimos esta dissertação em quatro capítulos:

1 - O primeiro capítulo denomina-se fundamentação teórica, a qual nos embasamos em estudiosos da Análise Combinatória, da Trajetória Hipotética de Aprendizagem, indicando alguns aspectos sobre a atitude de investigação e a importância do trabalho colaborativo.

2 - O segundo capítulo denomina-se procedimento metodológico, a qual mostrará as nossas intenções através do objetivo geral e dos objetivos específicos.

3 - Um terceiro capítulo denominado de proposta, apresentará as tarefas que

serão trabalhadas com os alunos, as possíveis resoluções dos problemas, as possíveis dúvidas e a formalização do conteúdo.

4 - Por fim, apresentaremos o último capítulo apresentando algumas considerações a respeito do trabalho proposto.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

No contexto escolar, tem se discutido sobre a Educação Matemática e sobre suas alternativas para tentar suprir as necessidades de aprendizagem dos alunos, pois o envolvimento deles dependerá das atividades e das metodologias dos professores, que, por sua vez, devem despertar a participação ativa dos estudantes na construção de uma aprendizagem reflexiva e crítica. Dessa forma, é importante que o educador esteja sempre procurando novas metodologias que considerem as dificuldades dos alunos em um processo de aprendizagem, como afirma Florentino, Melo e Morais (2018) ao abordarem que os educadores devem se atualizar constantemente às várias abordagens educacionais a fim de desenvolver, em seus alunos, vários fatores importantes tanto para aprendizagem conteudista como interacional, como melhorar a autoestima, a autoconfiança, o senso crítico, cooperativo e criativo, assim como o raciocínio lógico, a concentração e a melhor forma organizacional para efetivar positivamente as atividades propostas em sala.

Para tanto os professores devem deixar de lado as aulas expositivas, trazendo aos alunos atividades investigativas que façam referências ao cotidiano. Além disso, é essencial que substituam o “lugar” de dono do conhecimento pelo papel de mediador e questionador a fim de que desenvolvam ainda mais alunos com pensamentos autônomos.

Assim como toda ciência, a Matemática evolui, juntamente com os métodos de ensino, os livros didáticos, as tecnologias e os próprios alunos, pois há grande diferença nos modelos de alunos de épocas distintas. Nossa sociedade possui cada vez mais meios interativos, que vão além do quadro e do giz, elementos tecnológicos que devem ser utilizados a favor do desenvolvimento da autonomia dos alunos.

1.1 – ANÁLISE COMBINATÓRIA

A Análise Combinatória é considerada um tema complicado tanto pelo professor quanto pelo aluno, pelo fato do ensino se limitar muitas das vezes apenas por explicações de fórmulas, como ressalta Morgado *et al.* (1991). É comum os alunos pensarem que estudar Análise Combinatória se trata apenas de resolver problemas utilizando as fórmulas de permutações, arranjos e combinações. Afinal, como já dito anteriormente, a introdução deste conteúdo pode não estar sendo devidamente adequada. Por esse motivo, sabemos que, muitas vezes, tanto os alunos, na hora da resolução dos problemas, quanto os professores, na hora de lecionar, sentem uma dificuldade em lidar com o tema.

Além das dificuldades causadas pelo processo mecânico que geralmente é utilizado, de aplicação de exercícios e uso de formulário, a dificuldade também pode ser notada nos problemas de contagem por apresentarem informações que precisam ser analisadas minuciosamente, isso faz com que os professores sintam dificuldades em trabalhar com a parte interpretativa desses tipos de problemas, e consequentemente, essa dificuldade influencia no aprendizado dos alunos, uma vez que tão pouco são familiarizados com os tipos de problemas.

> Problemas combinatórios são usualmente considerados difíceis pela maioria dos alunos e professores de matemática. Talvez a principal dificuldade seja a da conexão correta entre o problema dado e a teoria matemática correspondente. É difícil determinar se o problema combinatório dado é um problema de arranjo, de permutação ou de combinação, ou então se é suficiente usar diretamente o princípio multiplicativo (HARIKI, 1996, p. 29).

De acordo com Nicholson (1818, p. 1), a análise combinatória é “o ramo da matemática que nos ensina a averiguar e expor todas as possíveis formas através das quais um dado número de objetos pode ser associado e misturado entre si”.

A análise combinatória é muito utilizada nos conteúdos de estatística e probabilidade, além de ter várias outras aplicações em outros campos de estudo (Química; Biologia…) e, de acordo com Roa e Navarro-Pelayo (2001), é considerada um dos conteúdos fundamentais para o desenvolvimento lógico geral do aluno. Ela objetiva o desenvolvimento do raciocínio combinatório e recursivo, podendo colaborar em vários sentidos, como: na abstração, na estimativa, na organização dos pensamentos e na elaboração de hipóteses.

Dentre vários conteúdos importantes na matemática que apresentam obstáculos no momento de sua abordagem, a Análise Combinatória é uma delas, que muitas das vezes é introduzida a partir de uma aplicação de exercícios e de um formulário. Com isso, os alunos acabam “brincando” de “chutar” as fórmulas em vez de buscarem esquemas ou estratégias para resolverem os problemas. Assim, acaba-se perdendo a oportunidade de desenvolver o raciocínio lógico, o pensamento dedutivo do aluno e, consequentemente, o total interesse na resolução do problema.

Muitas situações do nosso cotidiano, as quais devemos fazer uma tomada de decisão são trabalhadas na parte da Análise Combinatória. Ela também é um assunto importante na resolução de problemas e para o estudo da probabilidade. Por esses e outros motivos, ela deve ser tratada e trabalhada com muita cautela e importância, afinal ela também desenvolve outras habilidades matemáticas.

Segundo Roa e Navarro-Pelayo (2001, p. 255), temos que

> Os problemas combinatórios e as técnicas para sua resolução tiveram e têm profundas implicações no desenvolvimento de outras áreas da matemática como a probabilidade, teoria dos números, a teoria dos autônomos e inteligência artificial, investigação operativa, geometria e topologia combinatórias.

Para que os alunos cheguem ao entendimento do conteúdo, não basta seguir passos mecânicos para resolverem os problemas ou apenas fazerem a aplicação direta dos formulários sem o mínimo do entendimento do conteúdo de análise combinatória, isso seria o mesmo que estarmos desperdiçando uma experiência de estudo do conteúdo, por uma regra a se seguir para se resolver os problemas. O ensino dessa vertente só será satisfatório quando fizermos com que os alunos consigam entender os porquês de cada fórmula.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam, entre outros conteúdos, o papel importante do raciocínio combinatório na formação dos alunos do Ensino Médio ressaltando que

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidades no Ensino Médio [...] (BRASIL, 1998, p. 257).

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a Análise Combinatória é proposta como uma progressão ano a ano, a fim da "compreensão e utilização de novas ferramentas e também na complexidade das situações-problemas propostas, cuja resolução exige a execução de mais etapas ou noções de unidades temáticas" (BRASIL, 2017, p. 277).

Dessa forma, os problemas que envolvem contagem devem iniciar de situações em que o aluno consiga descrever todas as possibilidades, a fim resolvê-los posteriormente, por meio do princípio multiplicativo e aditivo, recorrendo as diferentes estratégias.

Os problemas combinatórios são divididos em três tipos de agrupamentos: *as permutações*, um caso particular dos arranjos, em que seus agrupamentos são formados por todos os elementos do conjunto e os agrupamentos que se diferem apenas pela ordem dos elementos; *os arranjos*, agrupamentos em que o número de elementos de cada grupo é menor que o total e um elemento é considerado uma única vez em cada grupo e os agrupamentos se diferem pela natureza ou pela ordem dos elementos; *as combinações*, agrupamentos em que o número de objetos de cada grupo pode ser menor ou igual ao total e os agrupamentos se diferem apenas pela natureza dos elementos (OLIVEIRA, 2015).

Segundo Navarro-Pelayo *et al.* (1996), os problemas combinatórios simples podem ser divididos, sistematicamente, em três tipos: particionamento, colocação e seleção.

Os *problemas de particionamento* se caracterizam pela divisão em grupos ou subgrupos, dentro das condições especificadas e de sua existência.

Exemplo 1: Em uma padaria estão sendo vendidos quatro tipos de salgados (esfirra, coxinha, risólis e quibe) e dois tipos de sobremesa (pudim e torta alemã). Supondo que João vá até esta padaria e possua dinheiro para comprar apenas um salgado e uma sobremesa, quantas são as combinações que João poderá comprar?

Particionaremos os grupos de salgados e sobremesas da seguinte forma: um primeiro subgrupo será para a combinação do que ele comprará e um segundo subgrupo para o que ele deixará de comprar.

Para facilitar, utilizaremos as iniciais dos salgados: E para esfirra, C para coxinha, R para risólis e Q para quibe para representá-los. De maneira similar, utilizaremos P e T para os doces pudim e torta alemã. O Quadro 1 traz as possíveis situações para os subgrupos do que pode ser comprado, trazendo o não comprado, simultaneamente.

Quadro 1: Subgrupos de comprados e não comprados

Comprado	Não comprado
E e P	C, R, Q e T
E e T	C, R, Q e P
C e P	E, R, Q e T
C e T	E, R, Q e P
R e P	E, C, Q e T
R e T	E, C, Q e P
Q e P	E, C, R e T
Q e T	E, C, R e P

Fonte: o autor.

Podemos observar que os grupos iniciais, o dos salgados e dos doces, foram particionados em outros dois subgrupos, o dos comprados e dos não comprados, com suas condições específicas.

Os *problemas de colocação* trazem situações nas quais n elementos, diferentes ou não, ocupam m lugares (NAVARRO-PELAYO *et al*, 1996). Para esse tipo de problema devemos considerar as suas peculiaridades, as quais influenciarão no resultado final. Exemplos de peculiaridades podem ser as características dos elementos, sendo esses iguais ou trazendo características que os diferenciam, a disposição dos elementos, se possuem alguma ordenação. O exemplo 2, a seguir, expressa uma situação na qual a ordem dos elementos é relevante para a resolução, sendo, inclusive possível se considerar posições vazias, ou seja, sem elementos.

Exemplo 2: João possui uma prateleira com cinco lugares onde ele poderá organizar seus dois troféus de campeonatos de futsal que ganhou em 2021 e 2022. De quantas formas diferentes João poderá organizar seus troféus em sua prateleira?

Neste problema identificamos a peculiaridade do fato de os troféus que serão posicionados serem distintos, o que resulta, com a troca de posição entre eles, em uma nova organização e também percebemos que há mais lugares do que troféus, ou seja, sobrará lugares vazios.

Agora para resolvermos o problema, vamos supor que João, primeiramente, posicionará o troféu de 2021. Dessa forma, em um primeiro momento, João possui 5 opções de lugares para escolher posicionar esse troféu. Após ter selecionado o local do primeiro troféu ele terá ainda 4 lugares para escolher posicionar o seu troféu de 2022. Assim, de qualquer forma que posicionarmos os troféus, perceberemos que sempre teremos 5 posições para colocar o primeiro troféu e 4 posições para o segundo.

No intuito de ilustraras possibilidades, vamos denotar por P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 as posições possíveis em que poderemos colocar os troféus, obtendo um par ordenado (P_i,P_j), sendo que a primeira coordenada é para o troféu de 2021 e a segunda para o de 2022.

(P_1, P_2)	(P_2, P_1)	(P_3, P_1)	(P_4, P_1)	(P_5, P_1)
(P_1, P_3)	(P_2, P_3)	(P_3, P_2)	(P_4, P_2)	(P_5, P_2)
(P_1, P_4)	(P_2, P_4)	(P_3, P_4)	(P_4, P_3)	(P_5, P_3)
(P_1, P_5)	(P_2, P_5)	(P_3, P_5)	(P_4, P_5)	(P_5, P_4)

Podemos concluir então que há 20 modos de organizar os troféus.

Os *problemas de seleção* estão relacionados à ideia de amostras nas quais podem configurar agrupamentos ordenados ou não, com repetição ou não de elementos (NAVARRO-PELAYO *et al*, 1996). A seguir trazemos um exemplo desse tipo de problema, sendo sem repetição e não ordenado.

Exemplo 3: Uma rede de escolas está inaugurando um de seus colégios em uma determinada cidade, mas para isso é necessário primeiramente montar uma comissão formada por três figuras: diretor, vice-diretor e coordenador geral. Supondo que 7 pessoas possam se candidatar às vagas, quantas comissões diferentes podemos ter?

Ao selecionarmos o diretor, por exemplo, teremos apenas 6 opções para vice-diretor, já que uma mesma pessoa não pode ter dois cargos. Assim temos 42 opções de combinações de diretor e vice-diretor. Seguindo a mesma ideia, para cada uma dessas 42 combinações teremos 5 opções para coordenador geral, logo teremos 240 ($7 \times 6 \times 5$) opções de comissões.

É importante que o aluno tenha o incentivo e o conhecimento das várias representações possíveis, como a enumeração, o diagrama de árvores, os esquemas de risquinhos (pictogramas) e, até mesmo, do formulário, desde que não as utilizem sem entendê-las. Cabendo ainda destacar que, para cada problema combinatório, não há somente uma única e infalível representação e, dessa forma os alunos também podem expor suas ideias de resolução, questionar caminhos e refletir sobre suas resoluções, sendo incentivados a validarem suas respostas (resultados).

Para Esteves (2001), é importante valorizar os diferentes tipos de representações. As representações facilitam a visualização do processo utilizado para chegar à formalização. Elas possibilitam a percepção de objetos abstratos que não são diretamente compreensíveis e observáveis.

Podemos iniciar com situações-problema de menor complexidade, para que os alunos possam iniciar a interpretação dos enunciados dos problemas e dos esquemas combinatórios. Assim poderão construir diversas representações, até que cheguem à estratégia que considerem ser a mais viável para a resolução dos problemas.

Os alunos, ao tentarem solucionar os problemas, deparam-se com alguns empecilhos, como: a interpretação de enunciados, o cálculo aritmético e principalmente a ordenação/separação dos agrupamentos, ou seja, saber escolher a forma mais adequada de organizar as informações é muito valioso, porque cada problema se distingue por suas características/critérios e natureza.

Para finalizar a abordagem sobre Análise Combinatória, ainda de acordo com Oliveira (2015), como alternativas para o seu ensino, levando em conta os principais empecilhos e dificuldades mencionados na seção anterior, podemos citar:

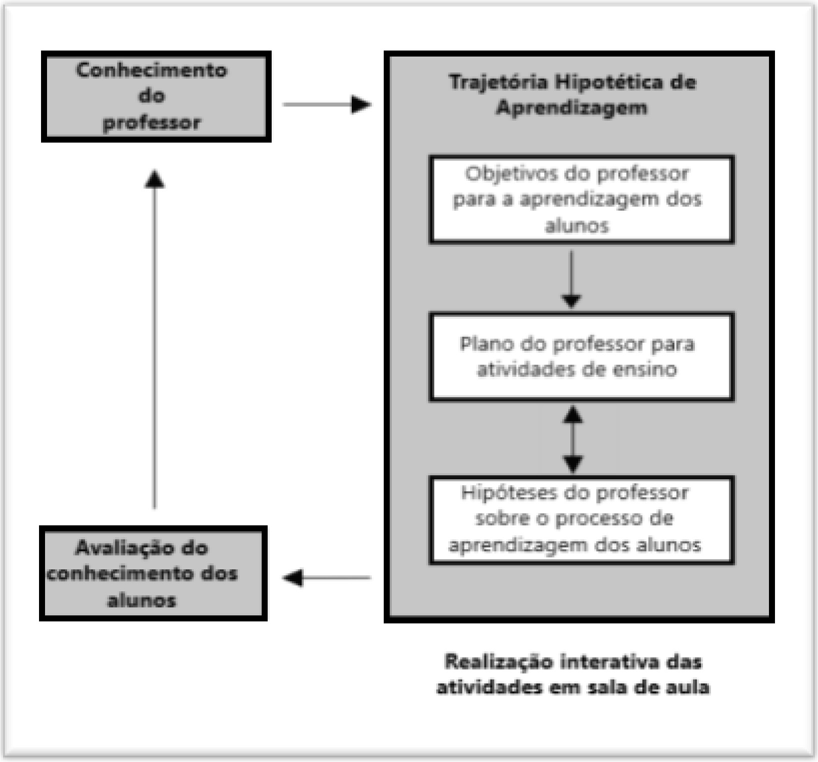
- tomar o problema como ponto de partida, único, como objeto de indagação desafiante.
- incentivar a investigação e a estruturação do pensamento.
- utilizar materiais manipulativos.
- valorizar as diferentes estratégias e formas de registro.
- valorizar um ambiente propício à aprendizagem.
- propor atividades que tragam questões envolvendo situações com as quais o aluno está familiarizado.

1.2 – TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM

Em nosso contexto atual de ensino de Matemática nas escolas de Ensino Médio, percebemos uma grande dificuldade na aprendizagem dos alunos, principalmente, quando se trata de alguns conteúdos matemáticos. Visto esta necessidade, docentes buscam a utilização de novos meios, os quais possam promover o aprendizado dos alunos.

De acordo com Simon (1995), o ciclo abreviado de aprendizagem da matemática (Figura 1) é um modelo de inter-relações cíclicas dos aspectos de conhecimento do professor, pensamentos e tomadas de atitudes. Este ciclo pode ser um suporte para que o professor organize seu planejamento didático, de modo a aproveitar as experiências de ensino e aprendizagem que vivencia junto de seus alunos.

Figura 1 – Ciclo de ensino de matemática abreviado (SIMON, 1995).



Fonte: traduzido e adaptado de Simon (1995, p. 136)

Um dos recursos para o ensino que pode ser explorado pelo professor é a Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA), pela qual o docente criará uma suposta (porquê poderá ser modificada durante o processo ou não) trajetória que proporcionará a aprendizagem matemática dos alunos. Nesse sentido, os alunos, deverão aproveitar a proposição das atividades, sendo livre a sua forma de pensar e resolver as atividades, de forma individual ou coletivamente. O docente terá um papel importantíssimo, o de mediador ou o de observador, o que dependerá de seus objetivos.

Segundo Simon (1995), uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) é composta por três componentes essenciais:

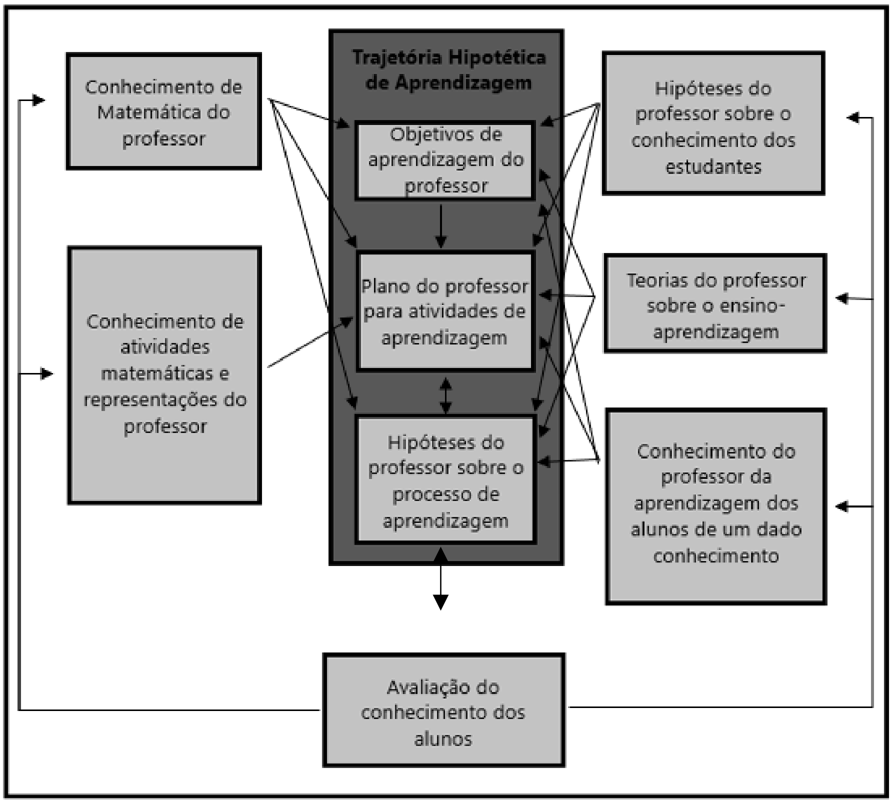
- os objetivos do professor com direções definidas para a aprendizagem de seus alunos;
- as atividades[1] de ensino;
- o procedimento hipotético de aprendizagem - uma suposição de como o pensamento e o entendimento dos alunos será colocado em ação no contexto de aprendizagem das atividades.

Observaremos no próximo esquema (Figura 2) da Trajetória Hipotética de

[1] Neste trabalho chamaremos de Tarefas.

Aprendizagem de Simon (1995) que, no momento da preparação de uma THA sobre algum conteúdo matemático, por mais que o docente possua um grande conhecimento e seja o mais rigoroso possível na criação de suas hipóteses e objetivos, a trajetória ainda tem a possibilidade de estar em uma constante modificação.

Figura 2 – Relação entre os vários domínios do conhecimento do professor, a trajetória hipotética de aprendizagem e as interações dos alunos (SIMON, 1995).



Fonte: traduzido e adaptado de Simon (1995, p. 137).

Na THA, podem surgir várias interações entre professor e o conhecimento hipotético do aluno durante a aplicação, podem aparecer vários resultados/caminhos inesperados e, com isso, além de estar suscetível a certas modificações em seu desenvolvimento podem surgir novos conhecimentos/hipóteses para uma próxima preparação de uma THA ou para sua reestruturação, uma melhor interpretação das dificuldades dos alunos e em suas tomadas de decisões, proporcionando, ao professor, novos pensamentos referentes às aplicações futuras.

O professor pode começar a elaborar suas hipóteses a partir de sua experiência, do conhecimento que ele tem sobre o conteúdo, da forma como ele pensa que os alunos aprendem. Pires (2009, p.154) diz que no que se refere

> ao conhecimento dos professores de Matemática, além das hipóteses sobre o conhecimento dos alunos, outros diferentes saberes profissionais intervêm,

> como, por exemplo: teorias de ensino sobre Matemática; representações matemáticas; materiais didáticos e atividades; e teorias sobre como alunos constroem conhecimentos sobre um dado assunto – saberes estes derivados da pesquisa em literatura e/ ou da própria experiência docente.

Nesse sentido, o planejamento pode lhe conferir um conhecimento mais dinâmico e integrador do assunto, tanto matemático, quanto do envolvimento dos alunos com as tarefas.

1.3 – A ATITUDE INVESTIGATIVA E O TRABALHO COLABORATIVO

Para que o ensino-aprendizagem da Matemática se torne mais dinâmico e mais interessante para os alunos, os professores devem adotar abordagens de ensino que proporcionem uma maior interação entre professores e alunos, ou até mesmo entre os próprios alunos. Dessa forma, as dúvidas e questionamentos, devem servir para contextualizar o entendimento e a compreensão dos conceitos matemáticos pelos alunos.

Os processos e as abordagens colaborativas integram uma abordagem educacional na qual os alunos são encorajados a trabalharem em conjunto na construção das aprendizagens e desenvolvimento do conhecimento. A aprendizagem colaborativa é baseada em um modelo orientado para o aluno e o grupo, promovendo a participação dinâmica nas atividades e na definição dos objetivos comuns do grupo (DIAS, 2001, p. 8).

Deixando um pouco de lado as aulas expositivas e as atividades mecânicas/repetitivas individuais, partindo de um ensino utilizando grupos colaborativos, o professor poderá ser um mediador, acompanhando as discussões e/ou até mesmo fazendo algumas intervenções, colaborando com a aprendizagem da qual os alunos serão os agentes principais responsáveis ou, até mesmo, os autores.

Logo, em relação às várias características metodológicas que devem ser alteradas, contemplando a perspectiva do trabalho colaborativo, para favorecer o aprendizado e uma mudança de atitude dos alunos, é esperado que o professor assuma, também, uma nova atitude.

> Embora, vez por outra, ainda desempenhe o papel do especialista que possui conhecimentos e/ou experiências a comunicar, no mais das vezes desempenhará o papel de orientador das atividades do aluno, de consultor, de facilitador da aprendizagem, de alguém que pode colaborar para dinamizar a aprendizagem do aluno, desempenhará o papel de quem trabalha em equipe, junto com o aluno, buscando os mesmos objetivos; numa palavra, desenvolverá o papel de mediação pedagógica (MASETTO, 2000, p. 142).

Além do trabalho do professor, ressaltado por Masetto (2000), há também as peculiaridades do trabalho dos alunos para que melhor desenvolvam suas habilidades.

Com resoluções/tarefas feitas coletivamente, o professor tem a chance de participar mais constantemente do processo de aprendizagem de seus estudantes, investigar, analisar como eles lidam e expressam determinados problemas, ou seja, como os interpretam, quais estratégias e procedimentos utilizam para resolvê-los.

As metodologias que são pautadas nas tendências atuais da Educação Matemática possibilitam que os alunos desenvolvam o senso crítico e o reflexivo, que reflitam sobre suas conclusões, que forneçam e que recebam *feedbacks* e, uma das características mais importantes, que aprendam a interagir com colegas e professores, explorando atitudes, valores pessoais e sociais.

A atitude investigativa pode ajudar a despertar o interesse dos alunos a criarem seus próprios métodos e teorias para estudar matemática. As aulas na perspectiva da investigação acabam fazendo que os alunos saiam do convencional e partam para uma abordagem diferente e construtiva do próprio saber.

Um cenário investigativo geralmente (existem outros tipos de investigações com outros objetivos) é composto por três etapas: a primeira é aquela na qual o professor tenta envolver os alunos; na segunda etapa, o professor analisa o processo e faz que os estudantes comecem a formular questionamentos, buscar explicações e elaborar conjecturas, ou seja, serem responsáveis pelo próprio processo de aprendizagem e, por fim, na última etapa, o professor recolhe as conclusões e as ideias que os fizeram chegar em tal resultado e discute-as.

> Investigar matematicamente envolve a participação do aluno num processo ativo, em que seu esforço na construção do conhecimento se faz imprescindível. Nessa dinâmica, o aluno não recebe o conhecimento pronto, ele mesmo vai sendo o autor do processo (MAGALHÃES; ROCHA; VARIZO, 2016, p. 3-4).

Segundo os autores supracitados, com essa forma de ensino de matemática o cenário acaba se tornando complexo para os alunos, e para tentar descomplicar um pouco esse cenário, é válido considerar um contrato didático com eles, para que se evitem, por exemplo, situações que não são relevantes para o andamento da aula como, por exemplo, o modo como o professor e os alunos se comportarão durante uma aula na perspectiva de investigação. O estabelecimento de um contrato didático pode levar à previsão de outros conflitos que podem ser evitados durante a execução das atividades.

Um dos papéis importantes do professor é primeiramente tornar essa nova experiência para os alunos um ambiente confortável e não um ambiente ameaçador. O professor deve estar muito bem familiarizado e preparado para as diversas situações que surgirão como, por exemplo, os questionamentos que ele lançará aos alunos e os feitos pelos alunos e a forma como poderão ser respondidos, tendo em vista que não poderá "direcioná-los", afinal, se o fizer, limitará os alunos em suas construções e fugirá do objetivo de tornar o aluno um investigador. Outra situação que o professor terá de lidar é com a tomada de decisão de pausar ou concluir a investigação. Nesse sentido é que acreditamos que a elaboração de uma THA pode facilitar o trabalho docente.

Outros aspectos importantes para o professor são apoiar seus alunos, saber fazer boas perguntas em momentos certos, observar o raciocínio e as dúvidas dos alunos individual e coletivamente. Além disso, ele pode proporcionar informações que sejam úteis na hora de recordar ou compreender conceitos matemáticos, formas de representações importantes e, até mesmo, ter a oportunidade de introduzir outros conceitos durante a investigação.

Os problemas são ditos “problemas” porque não sabemos resolvê-los antecipadamente, geralmente, possuem um caráter aberto e variam entre os níveis de dificuldades, dependendo do propósito da investigação. Para resolução deles, devemos primeiramente investigar modos para resolvê-los, já que alguns são considerados tão complexos, que, às vezes, não conseguimos chegar a uma conjectura e podemos deixar “pausado”, ou seja, podem servir de inspiração inicial e serem retomados em momento oportuno.

Os problemas de investigação propostos aos alunos deverão ser pensados/criados minuciosamente, de modo que façam os alunos refletir e desenvolver ideias e métodos, sem ser necessário dizer o que devem fazer.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2003, p. 9) sinalizam que em

> contextos de ensino e aprendizagem, investigar não significa necessariamente lidar com problemas muito sofisticados na fronteira do conhecimento. Significa, tão só, que formulamos questões que nos interessam, para as quais não temos resposta pronta, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso. Desse modo, investigar não representa obrigatoriamente trabalhar em problemas muito difíceis. Significa, pelo contrário, trabalhar com questões que nos interpelam e que se apresentam no início de modo confuso, mas que procuramos clarificar e estudar de modo organizado.

De acordo com Goldenberg (1999, p. 35-49) os problemas de investigação podem ter três tipos de objetivos: exploração, descoberta ou discussão. Os problemas de *exploração* normalmente são usados para uma primeira experiência, na qual o objetivo é fazer os alunos se familiarizem com a situação, não necessariamente buscarem uma resolução; a *descoberta* pode ser utilizada como uma primeira experiência, mas pode também ser a fase final de uma investigação, nessa já é possível que alguns alunos, pelo menos, consigam encontrar uma conjectura ou uma generalização para o seu problema; e a *discussão*, que pode ser utilizada, por exemplo: como um aprofundamento, uma revisão, entre outros.

2 ESTRATÉGIA METODOLÓGICA

Neste trabalho, apresentamos uma proposta de trabalho qualitativa, visto a natureza da nossa pesquisa e de nossas intenções. A fundamentação teórica foi baseada em três pilares: na Análise Combinatória, na Trajetória Hipotética de Aprendizagem e em aspectos da atitude investigativa e colaborativa de aprendizagem.

Apresentamos uma proposta, visando à aprendizagem dos alunos. Nessa perspectiva, os professores serão mediadores e os alunos serão os responsáveis pela construção do seu próprio conhecimento. A organização dessa proposta tem como fundamento os pressupostos teóricos das Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem (SIMON, 1995).

Objetivamos, de forma geral, apresentar uma proposta de ensino-aprendizagem que aborde uma introdução ao princípio fundamental da contagem, aos conceitos de permutação, arranjo e combinação. Como objetivos específicos, aspiramos que os alunos deduzam as fórmulas principais da Análise Combinatória, que geralmente servem de recurso para resolução de problemas dessa natureza.

2.1 – OBJETIVO GERAL

Apresentar uma proposta para o ensino de Análise Combinatória por meio de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem.

2.2 – OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Elaborar uma trajetória de trabalho que contemple desde a introdução aos conceitos pilares da Análise Combinatória.
- Apresentar uma proposta de Trajetória Hipotética de Aprendizagem para o ensino de Análise Combinatória utilizando tarefas que promovam a investigação e colaboração entre os estudantes e o professor.
- Fazer uma reflexão sobre a proposta apresentada.

Primeiramente, o professor deve ter como princípio pensar nos estudantes como os próprios responsáveis pela produção de seu conhecimento, propondo as tarefas e fazendo questionamentos para encaminhá-los e guiá-los em seus processos de aprendizagem. Ao terem tomado conhecimento das tarefas e dos conceitos envolvidos, professores e estudantes buscarão a formalização do conteúdo juntos, sempre valorizando os alunos trabalhando coletivamente, a fim de buscar uma aprendizagem produtiva.

2.3 – PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para cada tarefa apresentada na THA apresentaremos:

- Enunciado da tarefa.
- Objetivos específicos da tarefa.
- Procedimentos de organização da proposição da tarefa.
- Possíveis dificuldades encontradas.
- Possíveis resoluções para a tarefa.
- Uma proposta de discussão e sistematização do conteúdo.

Adotaremos o seguinte esquema para representar nossos diálogos hipotéticos:

A: aluno conversando

P: professor conversando

3 A PROPOSTA

Neste capítulo será apresentada uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem contendo cinco tarefas, sobre o conteúdo de Análise Combinatória, a fim de formalizar os conceitos do Princípio Fundamental da Contagem, Permutação, Arranjo e Combinação. Os problemas foram elaborados tentando trazer situações próximas da realidade dos alunos em busca uma maior motivação.

Como já visto, a THA é uma proposta didática pautada em hipóteses, a qual sugere um suposto "caminho" de aprendizagem, no qual se imagina as atitudes tomadas pelos professores e alunos, as possíveis dúvidas e resoluções que podem emergir durante o processo de resolução de problemas e de formalização do conteúdo.

TAREFA 01

A concretização profissional é o sonho de todo pai para seu filho, mas, para isso, muitos deles, desde crianças, são colocados em bons colégios e é necessário muito foco e estudo para se conseguir uma aprovação em um vestibular.

Assim, muitos jovens e seus familiares buscam formas de conseguirem a aprovação no vestibular e uma destas formas é buscarem universidades privadas, nas quais a concorrência é "menor" em comparação às universidades públicas. Mesmo sabendo disso, muitas vezes, ainda há um grande obstáculo, o custo do curso. Por ser uma universidade privada e um dos cursos mais concorridos atualmente, o custo é altíssimo e o resultado final do aluno é muito importante, pois, além da aprovação, ele terá a oportunidade de receber uma bolsa de estudo que o ajudará financeiramente.

O vestibular de verão de 2022 de Medicina da Universidade UNIVest, como exemplo, ofereceu apenas 36 vagas para o curso. Vamos supor que dos 36 ingressantes do curso sejam oferecidas apenas três bolsas, dadas aos melhores colocados no curso de Medicina desse vestibular e as bolsas sejam respectivamente de 100%, 80% e 50% de desconto na mensalidade. Quantas são as possibilidades de formação dos grupos de ingressantes que receberão estas bolsas?

<u>Objetivos específicos</u>

- Interpretar e identificar que a classificação dos ingressantes é importante no contexto do problema.
- Resolver o problema de variadas formas.
- Perceber os padrões quando se é alterado os valores de "n (conjunto dos ingressantes)" e "p (conjuntos formados de acordo com número de bolsas)".

- Formalizar o Princípio Fundamental da Contagem (PFC).

Procedimentos

- O problema será entregue por impresso para grupos de alunos (a formação dos grupos pode considerar um número médio de 3 estudantes por grupo).
- Será dado um tempo necessário para a leitura, interpretação, discussão entre os participantes dos grupos e para resolução do problema.
- Durante o processo de resolução será necessário que o professor primeiramente observe os grupos (dificuldades, métodos, discussões).
- O professor deverá orientar os processos de resolução dos alunos questionando-os sobre suas resoluções e dúvidas.
- Incentivar os alunos a buscarem outros esquemas para a resolução do problema (pódio, árvore de possibilidades etc).
- Incentivar os alunos a criarem problemas secundários utilizando números menores (mudando primeiramente apenas o valor de $\boldsymbol{n}$"conjunto dos ingressantes formado por n elementos", em seguida apenas o valor de $\boldsymbol{p}$ "conjunto formado de acordo com número (p) de bolsas").
- O professor deverá discutir e refletir algumas resoluções do problema no final, a fim de promover um aprofundamento e encaminhar uma sistematização dos conceitos envolvidos.

Possíveis dificuldades encontradas

- Pode ser que não consigam desenvolver meios de resolver o problema antes do incentivo de criarem problemas secundários utilizando números menores para "n" e "p".
- Não chegarem a uma conclusão quando se é alterado os valores de "n" e "p".

Algumas Possíveis Resoluções

Resolução 1

Vamos supor que A, B, C e D são os 4 ingressantes que concorrerão as 3 bolsas.

Vamos fazer todos os grupos possíveis e a ordem conforme aparecem é de acordo com a sua colocação.

Exemplo:

A, B e C → A (1º colocado), B (2º colocado) e C (3º colocado).

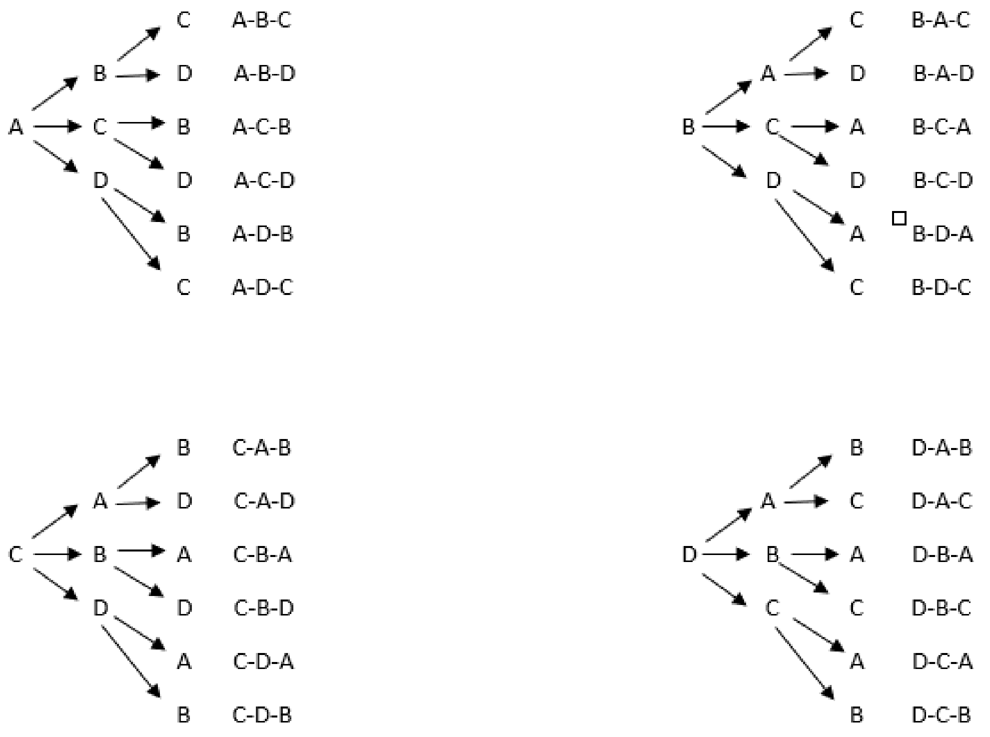
A, B e C	B, A e C	C, A e B	D, A e B
A, B e D	B, A e D	C, A e D	D, A e C
A, C e B	B, C e A	C, B e A	D, B e A
A, C e D	B, C e D	C, B e D	D, B e C
A, D e B	B, D e A	C, D e A	D, C e A
A, D e C	B, D e C	C, D e B	D, C e B

Total de 24 possibilidades

Resolução 2

Vamos supor que A, B, C e D são os 4 ingressantes que concorrerão as 3 bolsas.

Vamos montar um esquema ligando as letras.



Total de 24 possibilidades

Resolução 3

→ 4 x 3 x 2 = 24 possibilidades

<u>Uma possibilidade de discussão e de sistematização do conteúdo</u>

Supondo que as dúvidas comecem somente após a leitura do problema, que todos os alunos tenham entendido que dos 36 ingressantes no curso apenas os três melhores colocados receberiam as bolsas de descontos, de acordo com a sua colocação (1º colocado receberá a bolsa de 100%, 2º colocado receberá a bolsa de 80% e o terceiro colocado receberá a bolsa de 50%).

A: Ok! Professor, iremos tentar resolver o problema.

A: Professor, estamos tentando montar algum esquema alterando as pessoas entre elas, mas percebemos que irá dar muito trabalho, deve ter muitas possibilidades de receber as três bolsas.

A:Vamos ficar até amanhã aqui fazendo grupos de três pessoas, não estamos conseguindo pensar em outra forma mais simples de esquematizar.

P: Muito bem! É isso mesmo! Vocês já conseguiram pelo menos perceber que haverá várias formas de agrupar os possíveis ingressantes que receberão as três bolsas.

P: E sim! Daria muito trabalho se vocês continuassem combinando essas três pessoas por tentativas.

P: E ... se, em vez de pensarmos em 36 ingressantes, pensássemos em um número menor de pessoas? Por exemplo: quatro pessoas possíveis para agrupar de três em três.

A: Ah! Assim acho que conseguiríamos montar nosso esquema.

P: Muito bem! Tentem resolver esse problema com apenas quatro ingressantes e três bolsas para receberem.

A: Bom! Professor, conseguimos terminar o problema. O resultado é 24?

P: Isso mesmo! Muito bem! Qual foi a forma que resolveram?

A: Nós pegamos quatro letras e fizemos de conta que eram as iniciais dos nomes de pessoas, por exemplo: A de Ana, B de Bianca, C de Carlos e D de Denise, em seguida fomos embaralhando as posições entre elas.

P: Ótimo! Essa é uma das formas que vocês poderiam esquematizar.

P: Agora que vocês conseguiram resolver listando um por um e alternando as letras, tentem buscar resolver de outras formas.

A: Professor, não estamos conseguindo pensar em uma outra forma de resolver.

P:Ok! Como vocês já perceberam, existe uma ordem para receber as bolsas, então vamos supor que vocês precisam montar um lanche simples do Subway, lembrem-se de que também há uma ordem para montar seu lanche.

P: Não dê foco nos números, mas sim no esquema que vocês utilizarão para resolver parte do problema.

P: Qual é a dinâmica para você montar seu próprio lanche? Me explique.

P: Tentem montar algum esquema para me mostrar todas as possibilidades possíveis de se montar um lanche, sabendo que deve haver apenas um tamanho, um tipo pão e um tipo de recheio.

A: Ok! Professor, vamos tentar imaginar algo aqui.

A: Acho que conseguimos montar um esquema (árvore de possibilidades), professor.

A: As duas opções de tamanho, escolhemos o lanche de 15cm, em seguida percebemos que para esse mesmo lanche temos sete opções de pães e escolhendo um deles, por exemplo, de três queijos, ainda vamos ter treze opções de recheios para apenas a combinação de lanche de 15cm e de pão de três queijos.

P: Muito bem! E agora? Será que vocês conseguem resolver o mesmo problema com números menores dessa mesma forma?

P: Tente montar o esquema e verificar se chegamos no mesmo resultado.

A: Conseguimos, professor! E a resposta também bateu com o nosso anterior que fizemos um por um.

P: O que vocês conseguem perceber no esquema (árvores de possibilidades) que vocês montaram, observem por partes.

P: Quantos mini esquemas vocês subdividiram?

A: Foram 4 partes, só que em ordens diferentes das letras.

P: Muito bem! Vamos pegar essa primeira parte e dar uma olhada. Quantas ramificações secundárias tivemos?

A: Três partes.

P: Muito bem! E cada uma dessas secundárias tiveram quantas ramificações terciárias?

A: Duas partes.

P: Muito bem! O que vocês perceberam e podem afirmar sobre esse esquema?

P: Tentem me explicar o porquê isso acontece. Voltem para o contexto do problema. Por que para o primeiro temos 4, para os secundários 3 e por último 2.

A: Bom! Temos 4 possibilidades para o primeiro lugar, assim para o segundo só podemos ter 3 possibilidades e para a última, apenas duas.

P: Muito bem! E como podemos ter uma relação entre o resultado e esses valores?

A: Professor, percebemos que se multiplicarmos os valores também chegaremos no resultado.

P: Isso aí! Será que pode ser coincidência? Vamos testar para outros números? Tentem resolver o problema com 5 ingressantes e 3 bolsas.

A: Resolvemos pelo método da árvore de possibilidades e conseguimos perceber que o resultado é 60.

P: Então... se fizerem o mesmo será que chegarão em 60 também?

A: Sim, professor! Porque$5 \times 4 \times 3$ também é 60.

P: E se mudarmos a quantidade de bolsas? Em vez de 3 bolsas para os 4 ingressantes, for apenas 2 bolsas para 4 ingressantes?

A: Aí ficaria apenas 4×3.

P: Muito bem! Conseguiram perceber o que acontece quando mudamos um dos números e depois o outro separadamente?

A: Acho que sim, professor.

P: Então! Apenas tentem resolver o mesmo problema somente pensando nos valores, que agora serão 8 ingressantes para 5 bolsas. Não precisa calcular o resultado, apenas monte o esquema.

P: Muito bem! Será que conseguimos montar outros esquemas?

P: Podemos dizer que, dos 4 ingressantes, apenas 3 vão receber bolsas, certo? Podemos afirmar que isso é uma competição?

A: Sim, professor! Faz sentido ser uma competição, porque o melhor colocado receberá a melhor bolsa.

P: Onde normalmente os competidores recebem premiações? Pense em competições, como atletismo, corridas etc.

A: Bom! Normalmente é entregue algum troféu ou medalha no pódio.

P: Isso mesmo! Um pódio! Vocês conseguem fazer um esboço?

A: Sim! Aqui está.

P: Agora vamos voltar ao estudo das possibilidades. Vamos supor que o degrau mais alto é para bolsa de 100%, o médio para bolsa de 80% e o mais baixo para a bolsa de 50%. Quantas pessoas podem ganhar a bolsa de 100%?

A: Quatro pessoas.

P: Muito bem! Vamos supor que já saibamos quem ganhou a bolsa de 100%. Quantas pessoas ainda podem ganhar a bolsa de 80%?

A: Três pessoas, porque uma delas já ganhou e não poderá ganhar duas bolsas.

P: Isso aí! E o mesmo ocorre com a bolsa de 50%, certo?

A: Isso mesmo.

P: Então... podemos colocar quatro possibilidades no degrau maior, 3 possibilidades no degrau médio e 2 no degrau mais baixo?

A: Podemos, sim! E novamente aparece os números 4,3 e 2. Bem parecido com o nosso esquema anterior, só que não precisamos listar todas as letras no esquema.

P: Isso mesmo! Bem mais prático, não é?

A: É sim! É só colocar o número de ingressantes em ordem decrescente e ver a quantidade de bolsas a serem distribuídas.

P: Muito bem! Agora vocês já perceberam o padrão nesse último esquema.

P: Agora vocês conseguem resolver também o problema original. Como ficaria o nosso esquema para resolver o problema?

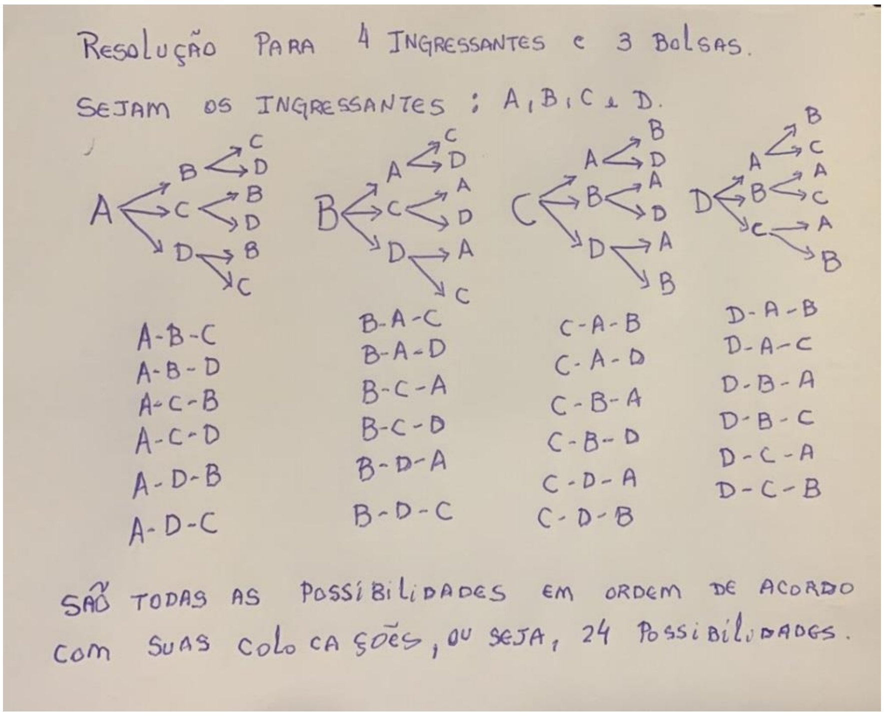
A: Então... para resolver o problema basta fazermos o seguinte cálculo: $36 \times 35 \times 34$.

P: Muito bem!

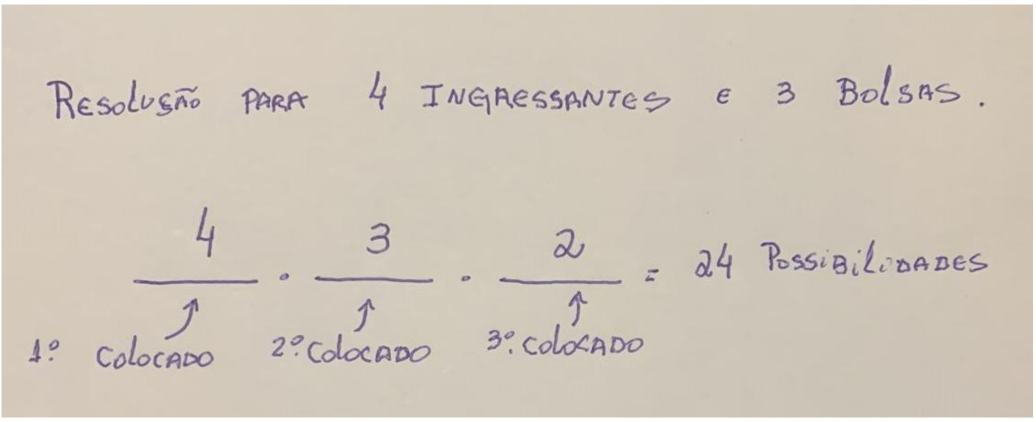
P:E, com isso, chamaremos esse processo de Princípio Fundamental da Contagem ou também de Princípio Multiplicativo da Contagem.

P: Vou fazer apenas duas pequenas observações para concluirmos essa etapa.

P: A primeira é: aquele esquema em que tivemos várias ramificações, que vocês estudaram por grupos separados até chegarem no resultado, nós o chamamos de árvore de possibilidade, pois, como podem perceber, se parece muito com as ramificações de galhos de árvores.



P: E a segunda observação é: quando vocês fizeram um esboço do pódio, não necessariamente precisam desenhar o esboço dele, vocês podem simplesmente representar por risquinhos uns ao lado dos outros, por exemplo: o 1º risquinho significa o primeiro colocado, o 2º risquinho à direita (meio) significa o segundo colocado e o último para o último colocado.



<u>**Sistematização objetivada**</u>

Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo da Contagem

"*quando um evento é composto por n etapas sucessivas e independentes, de tal modo que as possibilidades da primeira etapa é x e as possibilidades da segunda etapa é y, resulta no número total de possibilidades de o evento ocorrer, dado pelo produto (x). (y)*".

''*nosso evento é composto por 3 etapas sucessivas e independentes (que são as colocações* *dos ingressantes)*'', *de tal modo que:*

- *as possibilidades da primeira etapa (ingressante com melhor desempenho) é 36*
- *as possibilidades da segunda etapa (ingressante com segundo melhor desempenho) é 35*
- *e as possibilidades da terceira e última etapa (ingressante com o terceiro melhor desempenho) é 34*

No caso específico do nosso problema x representa a quantidade de bolsas oferecidas e y representa a quantidade de ingressantes que vão concorrer às bolsas. Portanto, a solução para desse problema é dado por: $36\times 35 \times 34$.

TAREFA 02

Vamos supor que, em um determinado ano, a UNIVest decida dar bolsas a todos que consigam ingressar no curso de Medicina, porém a porcentagem de desconto da bolsa recebida pelos ingressantes (36) será de forma decrescente à colocação e decaindo 2% por cada colocação (100%, 98%, 96%, ..., 30%). Nesse caso, quantas composições distintas podem ser feitas de acordo com as possíveis colocações dos candidatos?

Objetivos específicos

- Interpretar e identificar que a classificação dos ingressantes é importante no contexto do problema.
- Perceber que nesse problema agora a quantidade de bolsas é igual à quantidade de ingressantes no curso.
- Utilizar os conhecimentos e esquemas formalizados anteriormente.
- Perceber o padrão quando se altera igualmente o valor de "n (número de elementos do conjunto dos ingressantes)" e "p (número de subconjuntos formados de acordo com número de bolsas)".
- Formalizar a ideia e o conceito de Permutação.

Encaminhamentos

- O problema será entregue por impresso para grupos de alunos.
- Será dado um tempo necessário para a leitura, interpretação, discussão entre os participantes dos grupos e para resolução do problema.
- Durante o processo de resolução será necessário que o professor observe e incentive os grupos (dificuldades, métodos, discussões).
- O professor deverá orientar os processos de resolução dos alunos questionando-os sobre suas resoluções e dúvidas.
- Incentivar os alunos a utilizarem esquemas para a resolução do problema (pódio, árvore de possibilidades etc).
- Incentivar os alunos a criarem problemas secundários utilizando números menores, mudando igualmente os valores de "n (conjunto dos ingressantes)" e de "p (conjuntos formados de acordo com número de bolsas)".
- O professor deverá discutir e refletir algumas resoluções do problema no final, a fim de promover um aprofundamento.

<u>Possíveis Resoluções</u>

Resolução 1

Vamos supor que A, B, C e D são os 4 ingressantes que concorrerão as 4 bolsas.

Vamos fazer todos os grupos possíveis e a ordem conforme aparecem é de acordo com a sua colocação.

Exemplo:

A, B, C e D → A (1º colocado), B (2º colocado), C (3º colocado) e D (4º colocado).

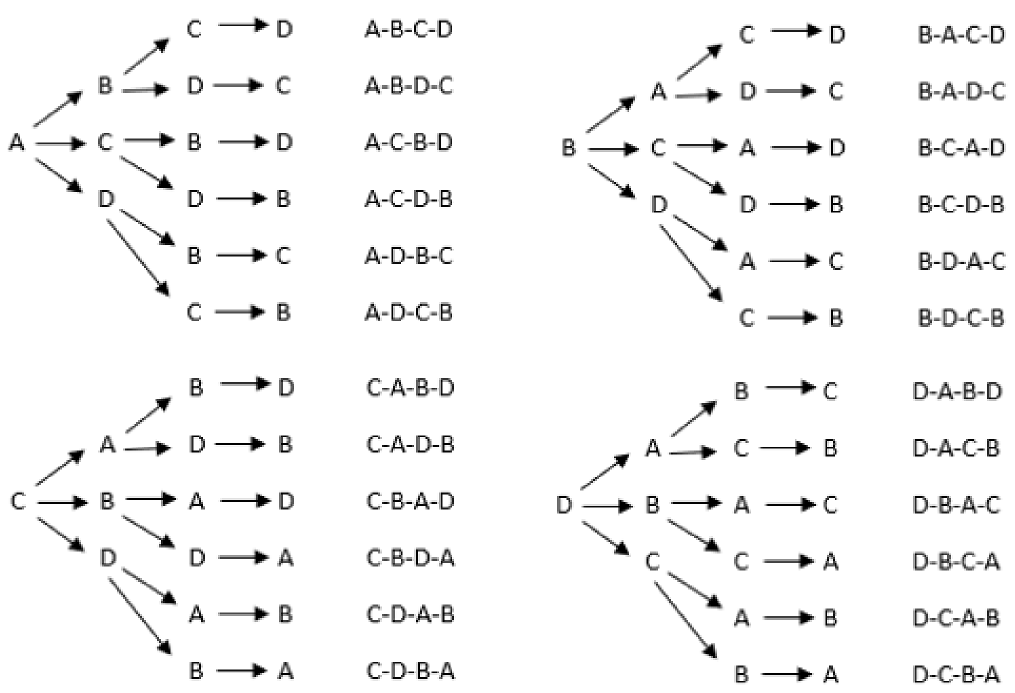
A, B, C e D	B, A, C e D	C, A, B e D	D, A, B e C
A, B, D e C	B, A, D e C	C, A, D e B	D, A, C e B
A, C, B e D	B, C, A e D	C, B, A e D	D, B, A e C
A, C, D e B	B, C, D e A	C, B, D e A	D, B, C e A
A, D, B e C	B, D, C e A	C, D, A e B	D, C, A e B
A, D, C e B	B, D, A e C	C, D, B e A	D, C, B e A

Total de 24 possibilidades

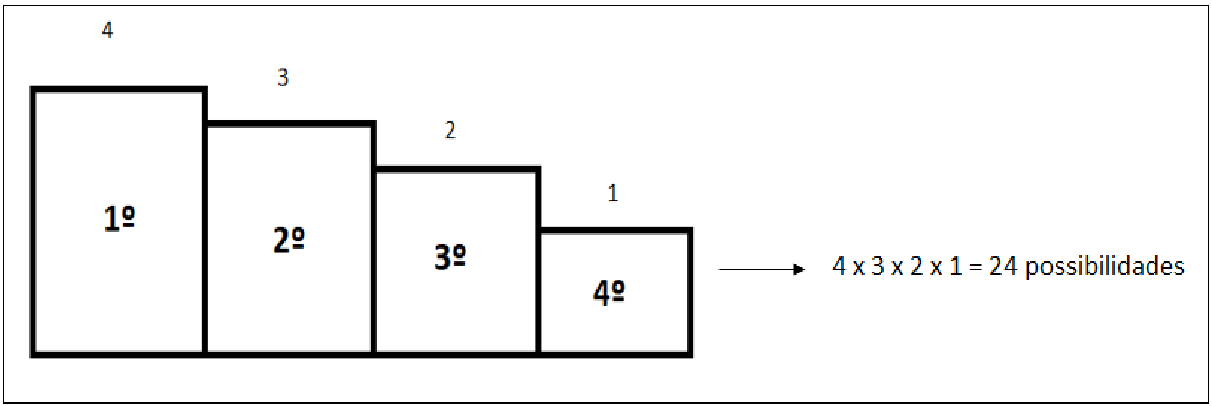
Resolução 2

Vamos supor que A, B, C e D são os 4 ingressantes que concorrerão as 4 bolsas.

Vamos montar um esquema ligando as letras.



Resolução 3



Uma proposta de discussão e sistematização do conteúdo

P: Agora que vocês já fizeram a leitura e discutiram um pouco, tentem resolver o problema.

A: Ok! Professor.

A: Professor, novamente está muito complicado resolver o problema, vamos ter muitas possibilidades. Nós podemos fazer o mesmo que o problema passado, usar números menores primeiro?

P: Claro! Podem sim.

A: Professor, tentamos também usar os mesmos esquemas e também funcionou para resolver o problema.

P: Isso mesmo! Também dá para se usar os mesmos métodos que vocês utilizaram e "criamos" juntos para resolver o problema anterior.

P: Vocês conseguiram perceber algo em comum e algo diferente deste problema para o outro?

A: Talvez, professor! Antes nós estávamos trabalhando com dois números diferentes (a quantidade de bolsas e a quantidade de ingressantes).

P: Muito bem! Perceberam que, nesse problema, o número de bolsas e ingressantes são iguais. E o que vocês conseguem perceber de semelhante em ambos problemas? Investiguem.

A: Que no problema anterior e nesse problema, em ambos importa a ordem da classificação?

P: Isso mesmo! Em ambos importam a ordem/classificação dos ingressantes.

P: O que fizeram para resolver o problema?

A: Diminuímos os números, em vez de 36, usamos 4.

P: E qual foi o resultado?

A: 24.

P: Muito bem! E o que mais? Quais esquemas utilizaram?

A: Conseguimos fazer por árvore de possibilidades, pelo pictograma e também pelo PFC.

P: Muito bem! E o que perceberam quando utilizaram os métodos? Quero dizer... em relação aos números para se chegar no resultado. Qual foi o cálculo?

A: Usando o Princípio Fundamental da Contagem, fizemos $4 \times 3 \times 2 \times 1$, por exemplo, professor.

P: Isso mesmo! E, se, por acaso, em vez de utilizar o número 4 para resolver, vocês estivessem escolhidos 5, como ficaria?

A: Ficaria $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ e o resultado seria 120.

P: Isso mesmo! Conseguem perceber algo nisso?

A: Conseguimos, sim! Que o número que escolhermos, ele vai multiplicando todos os seus antecessores.

P: Isso mesmo! Muito bem! No problema anterior, vocês fizeram uma multiplicação parecida, certo?

A: Sim, professor.

P: Mas o que diferencia um do outro em relação aos cálculos?

A: Nesse problema, ele multiplica todos os antecessores, enquanto, no outro problema, não chegava até o número 1 no desenvolvimento do fatorial.

P: Muito bem!

P: Antes de formalizarmos o próximo passo, vou fazer uma pequena observação novamente. Essa multiplicação sucessiva a qual vocês estão fazendo que termina sempre até o 1, também podemos reescrever colocando um ponto de exclamação no seu final.

P: Vou mostrar um exemplo, em vez de escrevermos $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$, podemos escrever apenas na forma de 5!.

A: Ah! Entendemos, professor. Então, caso queiramos substituir $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$, podemos reescrever na forma de 7!?

P: Isso mesmo!

P: Além disso, esse ponto de exclamação é chamado de fatorial. Então lemos o número e em seguida fatorial, por exemplo: 5!, lê-se “cinco fatorial”.

P: Dado um número natural n $(n > 1)$, define-se n fatorial ou fatorial de n (indicado por $n!$), como sendo o produto dos n números naturais consecutivos, escritos desde n até 1.

P: E quando temos os mesmos valores de “n” e “p”, que nesse caso são a quantidade de ingressantes e bolsas para fazer os agrupamentos, podemos chamar de uma Permutação Simples.

<u>Sistematização</u>

Permutação Simples

"Dado um conjunto de n elementos, chama-se ***permutação simples*** *dos n elementos quaisquer sequência (agrupamento ordenado) desses n elementos, diferindo apenas pela ordem dos elementos. Para determinar o número de permutações em um grupo com n elementos, basta calcular o fatorial desse n."*

$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}} = \boldsymbol{n}!$$

"*nosso evento é composto por 36 etapas sucessivas e independentes (que são as colocações dos ingressantes), de tal modo que:*

- *as possibilidades da primeira etapa (ingressante com melhor desempenho) é 36*
- *as possibilidades da segunda etapa (ingressante com segundo melhor desempenho) é 35*
- *as possibilidades da terceira etapa (ingressante com o terceiro melhor desempenho) é 34*
- *as possibilidades da quarta etapa (ingressante com o quarto melhor desempenho) é 33*

e assim sucessivamente até as possibilidades da trigésima sexta etapa (ingressante com o pior desempenho) que é 1.

No caso específico do nosso problema n representa a quantidade de bolsas oferecidas e também representa a quantidade de ingressantes que vão concorrer às bolsas, já que temos a mesma quantidade de bolsas e ingressantes. Portanto, a solução para desse problema é dado por: $36 \times 35 \times 34 \times \ldots \times 1 = 36!$

TAREFA 03 – UMA SEGUNDA ABORDAGEM PARA O PROBLEMA 1

O vestibular de verão de 2022 de Medicina da Universidade UNIVest como exemplo, ofereceu apenas 36 vagas para o curso. Vamos supor que dos 36 ingressantes do curso serão oferecidas apenas 3 bolsas, dadas aos melhores colocados no curso de Medicina desse vestibular e as bolsas são respectivamente de 100%, 80% e 50%, de quantas formas diferentes será possível organizar as bolsas aos ingressantes do curso?

TAREFA 04 – UMA SEGUNDA ABORDAGEM PARA O PROBLEMA 2

Vamos supor que, em um determinado ano, a UNIVest decida dar bolsas a todos que consigam ingressar no curso de Medicina, porém a porcentagem de desconto da bolsa recebida pelos ingressantes (36) será de forma decrescente à colocação e decaindo 2% por cada colocação (100%, 98%, 96%, ... ,30%). Nesse caso, de quantas formas (ordens) distintas os candidatos podem receber as bolsas?

Objetivos específicos

- Reanalisar as resoluções dos problemas 1 e 2, fazendo uma conexão entre eles.
- Formalizar a ideia de Arranjo Simples ou Permutação.

Encaminhamentos

- O professor deverá voltar em algumas discussões das resoluções, encaminhamentos, das tarefas 1 e 2, a fim de promover um aprofundamento que colabore para a formalização do conceito de Arranjo.
- O professor deverá orientar os alunos a observarem a relação dos valores de "n" (quantidade de ingressantes), "p" (quantidade de bolsas) e $(n - p)$.
- O professor deverá orientar os alunos a generalizar a fórmula de Arranjo.

Possíveis dificuldades que podem ser encontradas

- Pode ser que não consigam desenvolver meios de resolver o problema antes do incentivo de criarem problemas secundários utilizando números menores para "n" e "p".
- Não chegarem a uma conclusão quando se é alterado os valores de "n" e "p".

Uma proposta de discussão e sistematização do conteúdo.

P: Bom! Pessoal, iremos voltar um pouco em nosso primeiro problema e fazermos um aprofundamento, porque temos mais uma parte muito importante para ser formalizada.

P: Preciso que vocês estejam com as resoluções em mãos dos dois problemas anteriores.

P: Todos vocês já perceberam uma semelhança, mas também alguma diferença entre o PFC e as permutações, certo? Quais são?

A: Sim, professor! A semelhança é a forma que conseguimos resolver os problemas usando os "mesmos" métodos e a diferença são os números (n e p). No primeiro problema, os números são diferentes, são 36 bolsas para apenas 3 ingressantes, já no segundo problema, a quantidade de bolsas e ingressantes são as mesmas, são 36 bolsas para os 36 ingressantes.

P: Muito bem! Isso mesmo! Podemos dizer que, no primeiro problema, faremos uma multiplicação decrescente apenas do 36 até o 34 $(36 \times 35 \times 34)$, enquanto, no segundo problema, vocês perceberam que há uma multiplicação de todos os seus antecessores, ou seja, do 36 até o número 1 $(36 \times 35 \times 34 \times ... \times 1)$.

A: Isso mesmo, professor!

P: Agora vamos observar os valores do enunciado do primeiro problema e a multiplicação que nos leva ao resultado.

P: O que vocês fizeram para chegar ao resultado? Relevem a troca por números menores.

A: Bom! Professor, tínhamos 36 ingressante para apenas 3 bolsas, então fizemos por um esquema de pódio. Em primeiro lugar (no topo), tínhamos 36 pessoas possíveis para receber a bolsa de 100%, para a colocação de segundo lugar (à direita) agora temos apenas 35 possíveis pessoas para receber a bolsa e, por fim, no terceiro lugar, temos apenas 34 possíveis pessoas para receber a bolsa.

P: Muito bem! Isso mesmo!

P: E o que aconteceu quando resolveram o problema dois?

A: Em vez de pararmos no 34 na multiplicação, multiplicamos todos os antecessores até o 1.

P: Muito bem! Então, basicamente, qual é a diferença de um problema para o outro, observando apenas para essas multiplicações?

A: A diferença é que, no problema um, não temos a multiplicação $(33 \times 32 \times 31 \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1)$.

P: Muito bem! Isso mesmo! E ambos os problemas são muito idênticos, tirando essa observação, certo?

A: Isso mesmo!

P: O que poderíamos fazer para a multiplicação do segundo problema se tornar a multiplicação do primeiro problema?

P: Quero dizer, será que poderíamos fazer algo para "cancelar" esses valores $(33 \times 32 \times 31 \times ... \times 3 \times 2 \times 1)$ que é diferente de um problema para o outro? (Aqui o professor pode dar um tempo a mais para os alunos refletirem e rascunharem algumas possibilidades antes de continuar a discussão).

A: Bom! Professor, eles estão em uma multiplicação, então, para cancelar, teríamos que fazer uma operação inversa, ou seja, dividir pelos mesmos números $(33 \times 32 \times 31 \times \ldots \times\ 3 \times 2 \times 1)$.

P: Isso mesmo! Muito bem! Então, quer dizer que, para transformarmos $(36 \times 35 \times 34 \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1)$ em $(36 \times 35 \times 34)$, basta dividir $(36 \times 35 \times 34 \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1)$ por $(33 \times 32 \times 31 \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1)$?

A: Isso mesmo!

P: Também já formalizamos anteriormente a noção de fatorial certo?

A: Sim! Que é a multiplicação dos antecessores até o 1.

P: Isso mesmo! Então, como poderíamos reescrever isso que vocês acabaram de me falar?

A: Ficaria 36!/33! não é, professor?

P: Isso mesmo! Muito bem!

P: Bom! Estamos quase lá. Gostaria que vocês percebessem agora uma relação entre esses dois números com os dois números do enunciado. Observem um pouco e vejam se conseguem encontrar alguma semelhança. (Novamente o professor pode deixar que os alunos reflitam e tentem elaborar algum resultado).

A: Acho que percebemos, professor! O 36 tem, no próprio exercício, que é a quantidade de ingressantes, já o 33 não tem no enunciado, mas, se fizermos a quantidade de ingressantes menos a quantidade de pessoas que vão receber bolsa, dará outro valor.

P: Isso mesmo! Era isso que queria que vocês concluíssem. Então é só pegar o valor 36! e dividir por (36-3)! e chegamos ao resultado.

P: Será que isso vale para os outros problemas que reduzimos os números? Testem a relação.

A: Funciona sim, professor! Para 4 ingressantes e 2 bolsas, ficará 4!/(4-2)! E, para os outros, todos valem também.

P: Então, vamos formalizar juntos agora.

P: Vamos supor que chamaremos de “n” o número de ingressantes (o maior dos valores) e o número de bolsas chamaremos de “p” (o menor dos valores). Como poderíamos montar uma fórmula?

A: Então ficaria $\frac{n!}{(n-p)!}$.

P: Isso mesmo! E essa fórmula é a do chamado Arranjo.

<u>Conteúdo que se pretende sistematizar</u>

Arranjo Simples

"São agrupamentos em que se considera a ordem dos elementos, isto é, qualquer mudança na ordem dos elementos altera o agrupamento".

"Dado um conjunto de n elementos distintos, chama-se ***arranjo simples*** *dos n elementos, tomados de p a p, (n ≥ p) a qualquer sequência ordenada de p elementos distintos escolhidos entre os n existentes".*

$$\boldsymbol{A_{n,p}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{p})!}$$

No caso específico do nosso problema n representa a quantidade de bolsas oferecidas e p representa a quantidade de ingressantes que vão concorrer às bolsas. Portanto, a solução para desse problema é dado por:

$$A_{36,3} = \frac{36!}{(36-3)!} \rightarrow A_{36,3} = \frac{36!}{33!} \rightarrow A_{36,3} = 36 \times 35 \times 34 = 42840$$

TAREFA05

Vamos supor que a UNIVest decida oferecer três bolsas de 100%, aleatoriamente, para os ingressantes (36) do curso de Medicina. Se assim o fizer, quantos são os grupos, de três ingressantes distintos, que podem ser formados?

Objetivos específicos

- Interpretar e identificar que a classificação dos ingressantes não é importante no contexto do problema.
- Perceber que nesse problema a quantidade de bolsas é diferente da quantidade de ingressantes no curso.
- Utilizar os conhecimentos e esquemas formalizados anteriormente.
- Perceber o padrão quando se altera os valores de "n (número de elementos do conjunto dos ingressantes)" e "p (número de subconjuntos formados de acordo com número de bolsas)", separadamente.
- Perceber a relação entre a fórmula do Arranjo e da Combinação.
- Formalizar a Combinação.

Procedimentos

- O problema será entregue por impresso para os grupos de alunos.
- Será dado um tempo necessário para a leitura, interpretação, discussão entre os participantes dos grupos e para resolução do problema.
- Durante o processo de resolução será necessário que o professor observe e incentive os grupos (dificuldades, métodos, discussões).
- O professor deverá orientar os processos de resolução dos alunos questionando-os sobre suas resoluções e dúvidas.
- Incentivar os alunos a utilizarem os diversos esquemas para a resolução do problema;
- Incentivar os alunos a criarem problemas secundários utilizando números menores, mudando separadamente os valores de "n (conjunto dos ingressantes)" e de "p (conjuntos formados de acordo com número de bolsas)".
- Durante a resolução será necessário que o professor consiga fazer com que os alunos percebam a relação da fórmula de arranjo e o resultado do problema para se chegar na conclusão da divisão por p!.

- O professor deverá discutir e refletir algumas resoluções do problema no final, a fim de promover um aprofundamento.

Possíveis dificuldades

- Caso o aluno não perceba que a classificação, ordenação, dos ingressantes não é importante neste contexto podem, possivelmente resolver o problema como um Arranjo.

Uma proposta de discussão e sistematização do conteúdo

P: Agora leiam o problema e tentem resolver, pessoal.

A: Já lemos, professor. Vamos fazer igual fizemos nos problemas anteriores, iremos tentar resolver o problema primeiro com um número menor.

P: Muito bem!

A: Em vez de 36, iremos utilizar 4.

A: Professor, estávamos resolvendo o problema e percebemos que a ordem dos ingressantes não importará, dessa vez, certo?

P: Isso mesmo! Porque as bolsas serão sorteadas aleatoriamente entre os ingressantes.

A: Então, por exemplo, o grupo Ana, João e Carlos será o mesmo que Carlos, Ana e João, certo?

P: Isso mesmo! Muito bem!

P: Qual foi o total de grupos que vocês conseguiram formar? E como vocês pensaram para resolver isso?

A: Bom! Primeiramente tentamos listar todos os grupos. E encontramos o resultado 4.

P: Muito bem! Pedirei para vocês fazerem um passo extra que será muito importante.

P: Tentem listar todos os grupos, mesmo repetindo as pessoas em ordem diferentes.

A: Mas aí seria o mesmo que o problema de arranjos, não seria, professor?

P: Isso mesmo! Vocês teriam 24 grupos de acordo com o resultado que vocês já tinham feito, certo?

A: Isso mesmo!

P: Agora gostaria que, em um canto de uma folha, todos vocês escrevessem o resultado de todos os fatoriais de 1 até 5, por favor.

A: Ok! Professor!

P: Agora que vocês escreveram, gostaria que vocês comparassem o problema de arranjo que vocês utilizaram $n = 4$ e $p = 3$ e o problema de agora. Vejam se conseguem perceber algo.

A: Bom! No problema de arranjo, o resultado deu 24 e importava a ordem, nesse o resultado deu 4 e não importa a ordem dos ingressante.

P: Muito bem! Agora que vocês já sabem a fórmula do arranjo, tentem resolver o problema para quando $n = 5$ e $p = 3$ e também resolver esse mesmo problema com esses valores.

A: Ok! Professor!

A: No problema de arranjo, ficaria $\frac{5!}{(5-3)!} = 60$ e, para esse problema, listamos todos e chegamos em 10 grupos.

P: Agora percebam a relação dos resultados. Usando $n = 4$ e $p = 3$, vocês encontraram 24 e 4, já com $n = 5$ e $p = 3$, vocês encontraram 60 e 10. Conseguem perceber algum padrão? (O professor pode pedir para que os alunos construam um quadro, explicitando esses e outros resultados para que os alunos percebam a relação).

A: Acho que sim, professor. 24 dividido por 4 resulta em 6 e 60 dividido por 10 também resulta em 6.

P: Muito bem! O que vocês conseguiram perceber no resultado, então, do problema de arranjo e desse problema?

A: Percebemos que basta pegar o resultado do problema de arranjo e dividir por 6.

P: Isso mesmo! E, se agora, em vez de mudarmos o número de ingressantes, mudarmos o resultado das bolsas? Vamos tentar mudar o problema para três ingressantes e duas bolsas e em seguida quatro ingressantes e duas bolsas, nas duas situações.

A: Ok! Professor! Vamos tentar resolver.

A: Usando a ideia de arranjo com $n = 3$ e $p = 2$, encontramos 6 como resultado e, para esse nosso problema, com os mesmos números, encontramos três como resposta.

A: Já usando $n = 4$ e $p = 2$ na ideia de arranjo, encontramos 12 como resultado e, para esse problema, com os mesmos números, encontramos 6.

P: Muito bem! E o que vocês conseguem perceber de relação entre os resultados?

A: É o mesmo que nos anteriores, só que agora, em vez de dividir por 6, os resultados estão sendo divididos por 2.

P: Muito bem! Agora vamos dar uma observada. Por que, no primeiro, dividimos por 6 e, no segundo, por 2? De onde será que esses números surgiram?

P: Tentem observar os números de “n” e “p” de cada situação e perceber de onde surgiram o 6 e o 2 dessas divisões.

A: Poderíamos falar que é o valor de “p”, mas só daria certo no caso em que usamos o $p = 2$, no primeiro exemplo deu 6 e o “p” é igual a 3.

P: Isso mesmo! Não é apenas dividir pelo valor de “p”. Continuem pensando mais um pouco dessa forma.

A: Professor, 2! = 2 e 3! = 6. Será essa a relação? Teremos que dividir por p!?

P: Vamos testar? Utilizem outros números que não usamos e que sejam pequenos para vocês poderem verificar.

A: Vamos usar $n = 5$ e $p = 4$ e verificar listando os grupos também para verificar os resultados.

A: Para a fórmula do arranjo, vai ficar $\frac{5!}{(5-4)!} = 120$ e, listando todos os grupos, percebemos que o resultado deu 5 grupos diferentes. Então, nossa relação deu certo, porque 120 dividido por 4! é igual a 5.

P: Isso mesmo! Muito bem!

P: Esses problemas, para os quais não importa a ordem, são chamados de Combinações.

P: E também podemos concluir, então, que a fórmula da Combinação será dada pela fórmula do Arranjo dividido por p!, certo?

A: Isso mesmo, professor.

P: Porque, pensem bem, nas situações de Arranjo importa a ordem. Assim, quando vocês listaram todos os grupos, mesmo com as mesmas pessoas, apenas trocando as posições, vocês tiveram que excluir as repetições para resolver esse último problema e o total de repetições formam um outro grupo que o resultado é dado por p!.

<u>Conteúdo que se pretende sistematizar</u>

Combinação

“São agrupamentos em que não se considera a ordem dos elementos, isto é, mudanças na ordem dos elementos não alteram o agrupamento.”

Dado um conjunto A com n elementos distintos, chama-se combinação dos n elementos de A, tomados p a p, (n p), qualquer subconjunto de A formado por p elementos.

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

No caso específico do nosso problema n representa a quantidade de bolsas oferecidas e p representa a quantidade de ingressantes que vão concorrer às bolsas. Portanto, a solução para desse problema é dado por:

$$C_{36,3} = \frac{36!}{(36-3)!\,3!} \rightarrow C_{36,3} = \frac{36!}{33!\,3!} \rightarrow C_{36,3} = \frac{36 \times 35 \times 34}{3 \times 2 \times 1} \rightarrow C_{36,3} = 7140$$

4 CONSIDERAÇÕES SOBRE A PROPOSTA

Neste trabalho, apresentamos uma proposta de ensino para o conteúdo de Análise Combinatória utilizando a Trajetória Hipotética de Aprendizagem a fim de possibilitar uma aprendizagem do conteúdo partindo da utilização da matemática para práticas rotineiras, mas não de forma tradicional, e sim de forma interativa entre professor e alunos, uma vez que há necessidade de desenvolver a autonomia de resolução e pensamento lógico nos discentes. Para tanto propusemos a realização de tarefas coletivas para que haja percepção da boa funcionalidade de resoluções de problemáticas diárias matemáticas em grupos, além, claro, de possibilitar que várias estratégias sejam possíveis.

A opção da utilização de tarefas na perspectiva investigativa ocorreu para que também haja uma maior interação entre os próprios alunos, resultando em mais discussões e em mais ideias para analisar. Com isso, aos poucos, os alunos estabelecerão etapas para facilitar as resoluções e se tornarão cada vez mais independentes em relação à própria aprendizagem.

Objetivamos, com isso, oportunizar que os alunos criem suas próprias estratégias de resolução, isto é, sejam protagonistas e criadores dos próprios conhecimentos e desenvolvedores do raciocínio combinatório/lógico de forma significativa e ampliada, sem se pautarem apenas em conceitos “concretos” utilizados normalmente e frequentemente pelo ensino tradicionalista, como os formulários.

Devido ao objetivo deste trabalho, concluímos também que há necessidade de mudança não apenas do método de ensino, mas, principalmente, da familiaridade dos próprios professores para com o conteúdo e também para com as estratégias metodológicas que visam a autonomia dos alunos a qual só é possível se os docentes assumirem uma atitude de mediadores do conhecimento.

Visamos ainda sugerir que há necessidade de oportunizar aos professores a verificação das dificuldades dos seus alunos, para que façam modificações futuras em sua Trajetória Hipotética de Aprendizagem, “aprimorando-a” a cada nova situação de acordo com cada novo contexto, cada nova turma, cada nova dúvida ou entrave que os alunos apresentarem.

As propostas possibilitaram perceber que a mudança de atitude assumida pelo professor é desafiadora, uma vez que a maioria se vê como transferidor de conhecimento e não mediador dele. Há ainda a dificuldade de preparação da aula, uma vez que necessitará de tempo, leitura, atualização por parte do responsável pela aula, tópicos de difícil desenvolvimento para a maioria dos professores que se encontram, muitas vezes, paradoxalmente, em zonas desconfortáveis mas, de certa forma, confortáveis.

Em concordância com os teóricos citados neste trabalho, ressaltamos que as estratégias metodológicas da Educação Matemática são mais eficientes que as tradicionais, pois, além de superar a monotonia do ensino em sala de aula e o desinteresse dos alunos, incentiva-os a, cada vez mais, superarem suas dúvidas relacionadas a problemas rotineiros e, sem dúvida, as aulas que variam na metodologia, tornam a aplicação e o ambiente mais interessantes aos estudantes e incentiva-os a sempre buscarem mais conhecimento e a saírem da zona de conforto de decorar, ler, resolver e conferir o resultado.

Porém, apesar das metodologias alternativas, como a investigação matemática, serem mais interessantes, funcionais e atraentes, há várias problemáticas a serem resolvidas: o tempo de preparação de aulas é muito maior do que o fornecido de horas atividades pelas escolas; a aplicação é mais demorada, o que custaria mais aulas, fator agravante em uma grade fixa de ensino que possui aulas limitadas e insuficientes; o conteúdo programático a ser cumprido semanalmente, mensalmente, bimestralmente, trimestralmente... também é "uma enorme pedra no meio do caminho", como diria Carlos Drummond de Andrade, pois faz que os docentes sejam forçados a ensinar teorias e práticas dentro de tempos já insuficientes e, caso não cumpram prazos, os professores podem ser afetados profissionalmente, assim como os alunos em relação a concursos, como os vestibulares e avaliações rotineiras.

A nossa proposta mereceria ser aplicada para que pudéssemos avaliá-la com maior qualidade, porém, para o momento, o que destacamos é a necessidade de repensar não apenas a aplicação de novas metodologias, mas também repensar os livros didáticos, a grade escolar obrigatória, a necessidade de propor projetos interdisciplinares, pois esses são possibilidades para unir a prática matemática com a realidade de cada aluno em disciplinas e contextos distintos.

REFERÊNCIAS

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular:** Educação Infantil e Ensino Fundamental. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017.

BRASIL. **PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS**: matemática. Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf> acesso em 01de out. de 2021.

BRASIL. **PCN+ ensino médio orientações educacionais complementares aos parâmetros curriculares nacionais**: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEF, 2002. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf> acesso em 01 de out. de 2021.

COLAÇO, Veriana de Fátima Rodrigues. **Processos interacionais e a construção de conhecimento e subjetividade de crianças.** Psicologia: Reflexão e Crítica, v. 17, n. 3, 2004, p. 333-340. Disponível em <https://www.scielo.br/j/prc/a/HvMjjLP9WSmN5htzxv45FgF/?format=pdf&lang=pt> acesso em 25 de dez. de 2021.

COLL, César. **Aprendizagem escolar e construção do conhecimento.** Porto Alegre, Artmed, 1994. 159 p. Disponível em < http://professoraltairdopsol.blogspot.com/2009/12/coll-cesar-aprendizagem-escolar-e.html> acesso em 25 de dez. de 2021.

FLORENTINO, Girleane Rodrigues; MELO, Lidiane Alves de Lima; MORAIS, Fernanda Barbosa. **A utilização da investigação matemáticas como abordagem metodológica em sala de aula.** Anais EPBEM, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco, 2018. Disponível em <https://www.editorarealize.com.br/editora/anais/epbem/2018/TRABALHO_EV121_MD1_SA3_ID255_17082018185346.pdf> acesso em 07 de ago. de 2021.

GOLDENBERG, E. . Quatro funções da investigação matemática na aula de matemática. In ABRANTES, J. P; PONTE, H. FONSECA, & BRUNHEIRA (Orgs.). **Investigações matemática na aula e no currículo.** Lisboa: Projeto Matemática para todos. Associação dos Professores de Matemática, p. 35-49, 1999.

HARIKI, Seiji. **Conectar Problemas:** uma nova estratégia de resolução de problemas combinatórios. São Paulo, Instituto de Matemática e Estatística, 1996. Disponível em < https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/526/520> acesso em 11 de nov. de 2021.

MAGALHÃES, Ana Paula de A. S.; ROCHA, Luciana Parente; VARIZO, Zaíra da Cunha Melo; **A investigação matemática como estratégia de ensino e aprendizagem da matemática.** São Paulo, 2016. Disponível em <http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/4873_3348_ID.pdf> acesso em 15 de out. de 2021.

MASETTO, Marcos T; BEHRENS, Marilda Aparecida; MORAN, José Manuel. **Novas tecnologias e mediações pedagógicas.** Campinas, São Paulo: Papirus, 2000. Disponível em < https://aedmoodle.ufpa.br/pluginfile.php/239184/mod_resource/content/1/Texto%203%20MASETTO.pdf> acesso em 04 de jul. de 2021.

MORGADO, Augusto César de Oliveira; CARVALHO, João Bosco Pitombeira; CARVALHO, Paulo Cesar Pinto; FERNANDEZ, Pedro. **Análise combinatória e probabilidade.** Rio de Janeiro, 1991. Disponível em < https://portaldaobmep.impa.br/uploads/msg/5fpwf84eez8c0.pdf> acesso em 15 de dez. de 2021.

NAVARRO-PELAYO, V; BATANER, C.; GODINO, J. D. **Razonamiento combinatorio en alumnos de secundária.** Educación Matemática, v.8, n.1, 1996. Disponível em < https://www.researchgate.net/publication/275097960_Razonamiento_combinatorio_en_alumnos_de_Secundaria> acesso em 08 de jan. 2022.

NICHOLSON, Peter. **Essays on the combinatorial analysis:** shewing its application to some of the most useful and interesting problems of algebra**.** London, 1818. Disponível em < https://books.google.com.br/books?id=PFdLAAAAMAAJ&printsec=frontcover&hl=pt-BR#v=onepage&q&f=false> acesso em 08 de jul. de 2021.

OLIVEIRA, Carlos Alberto Lopes dos Santos. **Análise combinatória**: raciocínio recursivo e processos sistemáticos de enumeração. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Campos dos Goytacazes, 2015. Disponível em:<https://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/16092015Carlos-Alberto-Lopes-dos-Santos-de-Oliveira.pdf> . Acesso em: 05 de abril de 2022.

PIRES, Célia Maria Carolino. **Perspectivas construtivistas e organizações curriculares:** um encontro com as formulações de Martin Simon. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 11, n. 1, p. 145-166, 2009.

PONTE, João Pedro; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte, 2019. Disponível em < https://issuu.com/grupoautentica/docs/capa_6ea5935ca0ceb0> acesso em 10de out. de 2021.

ROA, Rafael; NAVARRO-PELAYO, Virginia. **Razonamiento combinatorio e implicaciones para la enseñanza de la probabilidad.** Sant Feliu, Institut Balear D'Estadística, 2001. Disponível em < https://ibestat.caib.es/ibfiles/content/files/publicaciones/jornades_europees.pdf> acesso em 03 de jan. de 2022.

SIMON, Martin A. **Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective.** Journal for Research in Mathematics Education, vol. 26, n. 2, pp. 114-145, 1995.