



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

JOSELITA MARTINS DOS SANTOS

ISOPERIMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Londrina
2014

JOSELITA MARTINS DOS SANTOS

ISOPERIMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação de mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Neuza Teramon

Londrina
2014

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da
Universidade Estadual de Londrina**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

S237i Santos, Joselita Martins dos.
Isoperimetria na educação básica / Joselita Martins dos Santos. – Londrina, 2014.
121 f. : il.

Orientador: Neuza Teramon.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual
de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática,
2014.

Inclui bibliografia.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Ensino auxiliado por computador –
Teses. 3. Geometria – Estudo e ensino – Teses. 4. Desigualdades isoperimétricas –
Teses. 5. Abordagem interdisciplinar do conhecimento – Teses. 6. Matemática –
Solução de problemas – Teses. I. Teramon, Neuza. II. Universidade Estadual de
Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática.
III. Sociedade Brasileira de Matemática. IV. Título.

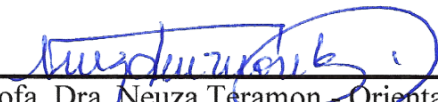
CDU 51:37.02

JOSELITA MARTINS DOS SANTOS


ISOPERIMETRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação de mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

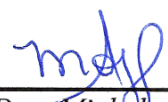
Banca Examinadora



Profa. Dra. Neuz Teramon - Orientadora
Universidade Estadual de Londrina



Profa. Dra. Claudete Matilde Webler Martins
Universidade Estadual de Maringá



Profa. Dra. Michele de Oliveira Alves
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 9 de dezembro de 2014.

Dedico este trabalho a todos que se alegram com nossas vitórias, em especial aos meus pais, José e Lourdes, pelo incentivo e dedicação.

AGRADECIMENTOS

A Deus que sempre esteve ao meu lado orientando meus caminhos e ajudando-me a enfrentar os desafios.

À minha família pela compreensão nos momentos de ausência, principalmente aos meus pais, José e Lourdes, e aos meus irmãos, pelo amor, incentivo, confiança, paciência e apoio incondicionais, por não medirem esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida. Essa vitória não é só minha, é nossa!

À Professora Orientadora Doutora Neuza Teramon pela amizade e tempo dedicado para a realização deste trabalho. Pelas contribuições, correções e orientações que, certamente, sem elas não teria sido possível a realização deste.

Às Professoras Doutoras Claudete Matilde Webler Martins e Michele de Oliveira Alves, pela disponibilidade em avaliar este trabalho como membros da banca examinadora.

À Universidade Estadual de Londrina e aos coordenadores e professores do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), turma 2012, por colaborarem com a minha formação profissional.

Aos amigos de mestrado, pelos momentos de partilha, trabalho e amizade, que me permitiram avançar ao longo deste percurso, em especial, às queridas Celinha, Rogéria e Sônia.

A todos da E.E. “Monsenhor José Trombi” e da E.E. “João Gobbo Sobrinho” pela compreensão e incentivo, em especial à professora Neusa Richter, por me convencer da minha capacidade até mesmo nos momentos em que eu duvidei.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBEM) pela coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela concessão da bolsa de estudo.

Enfim, agradeço a todos aqueles que contribuíram de alguma forma para que essa conquista fosse possível.

“Na maior parte das ciências uma geração põe abaixo o que outra construiu, e o que uma estabeleceu a outra desfaz. Somente na matemática é que cada geração constrói um novo andar sobre a antiga estrutura”.

Hermann Hankel

SANTOS, Joselita Martins dos. **Isoperimetria na Educação Básica**. 121 f. Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

RESUMO

O presente trabalho tem por finalidade apresentar uma proposta didática para o estudo dos problemas isoperimétricos, visando aprimorar o processo de ensino e aprendizagem de Geometria na Educação Básica. A motivação para sua elaboração surgiu da necessidade de desenvolver atividades de isoperimetria em tal nível de ensino. Inicialmente, apresenta-se o problema isoperimétrico clássico, conhecido pela Lenda de Dido e a busca de sua solução por diversos matemáticos através dos tempos. Na sequência, são propostas algumas atividades sobre isoperimetria que têm como ponto de partida a análise das figuras pelas observações e construções que permitem fazer conjecturas e identificar propriedades, levando o aluno a construir argumentos plausíveis, uma vez que a prática da argumentação é fundamental para a compreensão das demonstrações. As atividades propostas incluem o uso de materiais concretos, como palitos de fósforo, geoplano (material e virtual) e o software de geometria dinâmica GeoGebra. Em relação às demonstrações, sempre que possível são apresentadas mais de uma maneira de provar a solução, ficando a cargo do professor definir a mais adequada para o nível de aprendizagem de seus alunos.

Palavras-chave: Geometria. Isoperimetria. Geoplano. Geogebra. Palitos de fósforo.

SANTOS, Joselita Martins dos. **Isoperimetry in Basic Education**. 121 f. Dissertation submitted to the Professional Master in Mathematics in National Network – PROFMAT – State University of Londrina, Londrina, 2014.

ABSTRACT

This paper aims to present a didactic proposal for the study of isoperimetric problems, aiming to improve the teaching and learning of Geometry in Basic Education. The motivation for its development arose from the need to develop isoperimetry activities in this level of education. Initially, we present the isoperimetric classic problem, known by the Legend of Dido and the search for its solution by several mathematicians through the ages. Following are some proposed activities on isoperimetry that have as their starting point the analysis of the figures by the observations and constructs that allow to make conjectures and identify properties, leading the student to construct plausible arguments, since the practice of argumentation is essential for understanding of demonstration. The proposed activities include the use of concrete materials such as matchsticks, Geoplano (material and virtual) and the dynamic geometry software GeoGebra. Regarding the demonstrations whenever possible are presented in more than one way to prove the solution, leaving it to the teacher to define the most appropriate for the level of learning in their students.

Keywords: Geometry. Isoperimetry. Geoplano. GeoGebra. Matchsticks.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<i>Figura 1</i> – Regiões convexa e não convexa	23
<i>Figura 2</i> – Soma dos ângulos internos de um triângulo.....	24
<i>Figura 3</i> – Teorema do ângulo externo	24
<i>Figura 4</i> – Triângulo ABC e a semirreta \overrightarrow{BX}	25
<i>Figura 5</i> – A Desigualdade Triangular	26
<i>Figura 6</i> – Triângulos congruentes.....	27
<i>Figura 7</i> – Caso de congruência de triângulos – LAL.....	27
<i>Figura 8</i> – Caso de congruência de triângulos – ALA	28
<i>Figura 9</i> – Caso de congruência de triângulos – LLL	29
<i>Figura 10</i> – Quadrilátero ABCD	29
<i>Figura 11</i> – Teorema da base média	31
<i>Figura 12</i> – Teorema de Pitágoras	31
<i>Figura 13</i> – Possível demonstração dada por Pitágoras	32
<i>Figura 14</i> – Demonstração por decomposição de quadrados.....	33
<i>Figura 15</i> – Dedução da Fórmula de Herão	34
<i>Figura 16</i> – Triângulo ABC	38
<i>Figura 17</i> – Triângulo equilátero	40
<i>Figura 18</i> – Polígonos regulares decompostos em triângulos	41
<i>Figura 19</i> – Setor circular OAB	42
<i>Figura 20</i> – Elipse.....	43
<i>Figura 21</i> – Elementos da Elipse	43
<i>Figura 22</i> – Elipse de centro $C(x_0, y_0)$ e eixo maior paralelo ao eixo x	44
<i>Figura 23</i> – Elipse de centro $C(x_0, y_0)$ e eixo maior paralelo ao eixo y	45
<i>Figura 24</i> – Dido e seu povo cortando o couro de um boi	50
<i>Figura 25</i> – Problema de Dido	50
<i>Figura 26</i> – Enéias descreve a queda de Tróia a Dido	52
<i>Figura 27</i> – Morte de Dido, por Heinrich Friedrich Füger, 1792	52
<i>Figura 28</i> – Cidade de Paris, França (1530)	53
<i>Figura 29</i> – Cidade de Paris, França (2014)	53
<i>Figura 30</i> – Cidade Colônia, Alemanha (1807)	54
<i>Figura 31</i> – Cidade de Colônia, Alemanha (2014)	54
<i>Figura 32</i> – Mapa Medieval da cidade de Braga (1594)	55
<i>Figura 33</i> – Cidade de Braga, Portugal (2014)	55
<i>Figura 34</i> – Cidade de Palmanova, Itália (c.a.1600)	56
<i>Figura 35</i> – Cidade de Palmanova, Itália (2014).....	56
<i>Figura 36</i> – A figura de área máxima deve ser convexa	57
<i>Figura 37</i> – O segmento AB divide o perímetro da curva C em duas partes iguais	58
<i>Figura 38</i> – Proposição 2.3.1	59
<i>Figura 39</i> – Triângulo de área máxima, dados dois lados	59
<i>Figura 40</i> – Região dividida em três outras	60

<i>Figura 41</i> – Movimentação do ponto B, para $\widehat{APB} > 90^\circ$	60
<i>Figura 42</i> – Movimentação do ponto B, para $\widehat{APB} < 90^\circ$	61
<i>Figura 43</i> – Geoplano quadriculado	62
<i>Figura 44</i> – Alunos manipulando um geoplano.....	63
<i>Figura 45</i> – Figuras planas de perímetro igual a 12 u.c.....	64
<i>Figura 46</i> – Figura de perímetro 25,8 u.c. construída no geoplano virtual	65
<i>Figura 47</i> – Figuras de perímetro 12 u.c. construídas no geoplano virtual	66
<i>Figura 48</i> – Retângulos de perímetro 12 u.c. construídos no geoplano.....	66
<i>Figura 49</i> – Retângulos com perímetro de 20 u.c.....	67
<i>Figura 50</i> – Retângulos com perímetro de 14 u.c.....	68
<i>Figura 51</i> – Demonstração de Zenodoro.....	69
<i>Figura 52</i> – Retângulo de lados a e b	72
<i>Figura 53</i> – Ponto móvel C sobre o segmento AB.....	72
<i>Figura 54</i> – Círculos concêntricos e raios perpendiculares no GeoGebra	73
<i>Figura 55</i> – Retângulo no GeoGebra	73
<i>Figura 56</i> – Perímetro e área indefinidos para $\overline{AC} = 0$ e $\overline{CB} = 10$	74
<i>Figura 57</i> – Retângulo para $\overline{AC} = 1,23$ e $\overline{CB} = 8,77$	74
<i>Figura 58</i> – Retângulo para $\overline{AC} = 3$ e $\overline{CB} = 7$	75
<i>Figura 59</i> – Quadrado para $\overline{AC} = \overline{CB} = 5$	75
<i>Figura 60</i> – Retângulo para $\overline{AC} = 6,1$ e $\overline{CB} = 3,9$	76
<i>Figura 61</i> – Perímetro e área indefinidos para $\overline{AC} = 10$ e $\overline{CB} = 0$	76
<i>Figura 62</i> – Gráfico da função $A(x) = -x^2 + 10x$	78
<i>Figura 63</i> – Ponto móvel C sobre o segmento AB.....	81
<i>Figura 64</i> – Triângulo para $\overline{AC} = 1,76$ e $\overline{CB} = 8,24$	82
<i>Figura 65</i> – Triângulo para $\overline{AC} = 2,65$ e $\overline{CB} = 7,35$	82
<i>Figura 66</i> – Triângulo para $\overline{AC} = \overline{CB} = 5$	83
<i>Figura 67</i> – Triângulo para $\overline{AC} = 6,21$ e $\overline{CB} = 3,79$	83
<i>Figura 68</i> – Triângulo para $\overline{AC} = 1,76$ e $\overline{CB} = 8,24$	84
<i>Figura 69</i> – Triângulo para $\overline{AC} = 1,75$ e $\overline{CB} = 8,25$	85
<i>Figura 70</i> – Triângulo para $\overline{AC} = 1,54$ e $\overline{CB} = 8,46$	85
<i>Figura 71</i> – Triângulo para $\overline{AC} = 8,24$ e $\overline{CB} = 1,76$	86
<i>Figura 72</i> – Triângulo para $\overline{AC} = 8,25$ e $\overline{CB} = 1,75$	86
<i>Figura 73</i> – Triângulo para $\overline{AC} = 8,73$ e $\overline{CB} = 1,27$	87
<i>Figura 74</i> – O triângulo ABC tem área máxima	89
<i>Figura 75</i> – Triângulo ABC	90
<i>Figura 76</i> – Movimentação do ponto C sobre o segmento AB	91
<i>Figura 77</i> – Triângulo para $\overline{AC} = 8,86$ e $\overline{EG} = \overline{FG} = 4,57$	92
<i>Figura 78</i> – Triângulo para $\overline{AC} = 4,18$ e $\overline{EG} = \overline{FG} = 6,91$	93
<i>Figura 79</i> – Triângulo para $\overline{AC} = \overline{EG} = \overline{FG} = 6$	93
<i>Figura 80</i> – Triângulo para $\overline{AC} = 3,94$ e $\overline{EG} = \overline{FG} = 7,03$	94

Figura 81 – Triângulo para $\overline{AC} = 7$ e $\overline{EG} = \overline{FG} = 5,5$	94
Figura 82 – Triângulo para $\overline{AC} = 9$ e $\overline{EG} = \overline{FG} = 4,5$	95
Figura 83 – Triângulo para $\overline{AC} = 9,98$ e $\overline{EG} = \overline{FG} = 4,01$	96
Figura 84 – Triângulo isósceles de base AB	97
Figura 85 – Triângulo isósceles de base BC	97
Figura 86 – Construções com palitos de fósforo	100
Figura 87 – Polígonos na malha triangular e suas respectivas áreas	100
Figura 88 – Cruz de palitos	101
Figura 89 – Polígonos com 12 palitos	101
Figura 90 – Área do polígono $BCDEF$	102
Figura 91 – Área dos polígonos $ABCDEFGH$ e $IJKLMNOP$	102
Figura 92 – Construções com 12 palitos	103
Figura 93 – Triângulo equilátero de lado 1 u.c.	104
Figura 94 – Paralelogramo com palitos na malha quadriculada	104
Figura 95 – Sequência de paralelogramos construídos numa malha quadriculada.....	105
Figura 96 – Figuras não convexa e convexa com mesmo perímetro	105
Figura 97 – Triângulo equilátero de lado 4 u.c.	106
Figura 98 – Hexágono regular de lado 2 u.c.....	107
Figura 99 – Dodecágono regular de lado 1 u.c.	108
Figura 100 – Lados AB e BC consecutivos de um polígono	109
Figura 101 – $\overline{AB'} + \overline{B'C} = \overline{AB} + \overline{BC}$	110
Figura 102 – $A_1\hat{A}_jA_k = 90^\circ$	110
Figura 103 – Triângulos OAH e OHG	111
Figura 104 – Triângulos OAH e OHG e o arco KHJ	112
Figura 105 – Triângulos $A_iB_iC_i$ em polígonos regulares	113

LISTA DE TABELAS

<i>Tabela 1 – Área e perímetro das figuras.</i>	65
---	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

FNDE	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
MEC	Ministério da Educação
MCT	Ministério da Ciência e Tecnologia
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
SARESP	Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo
SED	Secretaria de Estado e Educação
UNICAMP	Universidade Estadual de Campinas

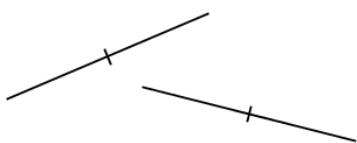
NOTAÇÕES A

P_1P_2	segmento de reta
$\overline{P_1P_2}$	comprimento do segmento de reta
$\overrightarrow{P_1P_2}$	semirreta com origem no ponto P_1 passando por P_2
$\overleftrightarrow{P_1P_2}$	reta passando pelos pontos P_1 e P_2
$P_1P_2 // P_3P_4$	segmentos de retas paralelos P_1P_2 e P_3P_4
$P_1P_2 \dots P_n$	polígono de n lados
$\angle P_1P_2P_3$	ângulo formado pelas semirretas $\overrightarrow{P_2P_1}$ e $\overrightarrow{P_2P_3}$
$\angle P_1$	ângulo interno de um polígono, ângulo inscrito
$P_1\widehat{P_2}P_3$	medida do ângulo formado pelas semirretas $\overrightarrow{P_2P_1}$ e $\overrightarrow{P_2P_3}$
$\widehat{P_1}$	medida do ângulo interno de um polígono, ângulo inscrito
$A(ABC)$	área do polígono de vértices A , B e C
$ABC \equiv DEF$	dois triângulos congruentes ABC e DEF
LAL	dois triângulos com dois lados correspondentes e o ângulo formado entre eles respectivamente congruentes
ALA	dois triângulos com dois ângulos correspondentes e um lado compreendido entre eles respectivamente congruentes
LLL	dois triângulos com três lados correspondentes congruentes

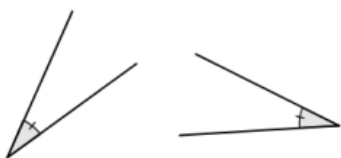
NOTAÇÕES B



ângulo reto



segmentos com mesma medida



ângulos com mesma medida

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	17
1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	23
1.1 REGIÃO CONVEXA E NÃO CONVEXA.....	23
1.2 A DESIGUALDADE TRIANGULAR.....	23
1.3 CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS.....	26
1.4 RELAÇÃO ENTRE ÁREA E PERÍMETRO DE UM TRIÂNGULO	31
1.5 ÁREAS DE ALGUMAS FIGURAS PLANAS	40
1.5.1 Área do triângulo equilátero.....	40
1.5.2 Área de polígonos regulares.....	40
1.5.3 Área do setor circular	42
1.6 A ELIPSE.....	42
1.7 DESIGUALDADE ENTRE AS MÉDIAS ARITMÉTICA E GEOMÉTRICA	45
2 O PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO.....	47
2.1 O PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO ATRAVÉS DA HISTÓRIA	47
2.2 A LENDA DE DIDO	49
2.3 A SOLUÇÃO DE STEINER PARA O PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO	57
3 ISOPERIMETRIA NO GEOPLANO	62
3.1 O GEOPLANO EM SALA DE AULA.....	62
3.2 GEOPLANO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ISOPERIMÉTRICOS	63
4 ISOPERIMETRIA NO GEOGEBRA	70
4.1 O GEOGEBRA EM SALA DE AULA	70
4.2 GEOGEBRA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ISOPERIMÉTRICOS.....	71
5 ISOPERIMETRIA COM PALITOS DE FÓSFORO.....	99
5.1 PALITOS DE FÓSFORO E A MALHA TRIANGULAR	99
5.2 PALITOS DE FÓSFORO E A MALHA QUADRICULADA	101
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	115

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	117
ANEXO.....	120

INTRODUÇÃO

A Matemática sempre esteve presente nas atividades cotidianas do ser humano e, portanto, o desenvolvimento das competências matemáticas é essencial à medida que ocorre uma intensificação das interações do homem com o mundo físico, social e cultural. Desde os primórdios da humanidade, a Matemática foi desenvolvida apoiada na resolução de problemas, sendo considerada por muitos “a arte de resolver problemas”. Assim, sobre a resolução de problemas, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) afirmam que “o estudo da Geometria é um campo fértil para trabalhar com situações problema e é um tema pelo qual os alunos costumam se interessar naturalmente” (BRASIL, 1998, p.51).

Segundo Deguire (1994),

É possível citar muitas razões para que se estude geometria nas séries elementares e médias. Uma delas é a oportunidade que a geometria oferece de ensinar a resolver problemas e ensinar para resolver problemas. Permitam-me esclarecer essas duas frases: “ensinar a resolver problemas” ultrapassa a mera resolução de problemas para incluir a reflexão sobre processos de resolução, objetivando coligir estratégias de resolução de problemas que poderão ser úteis posteriormente; “ensinar para resolver problemas” envolve o ensino do conteúdo de uma maneira significativa, de modo a que passe a ser utilizado em outros problemas e aprendizados. Uma maneira, pelo menos, de ensinar para resolver problemas consiste em desenvolver o conteúdo a partir de episódios de resolução de problemas. (DEGUIRE, 1994, p.73)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais reafirmam a importância dos conceitos geométricos no currículo da Matemática ao citar que, “por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive” (BRASIL, 1998, p. 51).

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio enfatizam que

O estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. Esse estudo apresenta dois aspectos – a geometria que leva à trigonometria e a geometria para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes (Brasil, 2006, p. 75).

Por muitos anos, o ensino de geometria foi deixado de lado pelos professores, como relata Pavanello (1989) em seu trabalho *O abandono do ensino de geometria*. Embora a Matemática seja imprescindível nas atividades cotidianas do ser humano, os resultados das avaliações externas (Saeb, Saesp, Prova Brasil, Pisa, etc.) não são animadores, principalmente no que diz respeito à geometria. Será que a geometria continua sendo deixada para segundo plano?

Procurando cumprir seu dever de garantir a todos uma base comum de conhecimentos e competências, a Secretaria da Educação do Estado de São Paulo propôs, em 2008, um currículo básico para a rede estadual de ensino nos níveis de Ensino Fundamental (Ciclo II) e Ensino Médio. Os conteúdos disciplinares de Matemática foram organizados em três blocos temáticos – Números, Geometria e Relações –, sendo ressaltada a articulação entre esses blocos, de forma a favorecer uma aproximação entre os variados assuntos e para que uma espécie de “interdisciplinaridade interna” da própria Matemática seja promovida. Segundo esse currículo, a Geometria deve ser tratada, ao longo de todos os anos, de forma espiralada, o que significa dizer que os grandes temas podem aparecer tanto nos anos do Ensino Fundamental quanto nas séries do Ensino Médio, sendo a diferença a escala do tratamento dado ao tema. Dessa forma, sendo o currículo como um mapa que representa o inesgotável território do conhecimento, cabe ao professor escolher a escala apropriada para o aprofundamento da abordagem dos conteúdos sugeridos na grade curricular.

Num primeiro momento a sugestão do tema “Problemas Isoperimétricos”, feita pela professora orientadora, causou-me certo desconforto, pois o termo isoperimétrico não me parecia familiar. Com o passar do tempo, foi possível notar que a expressão “problemas isoperimétricos” realmente não é usual na educação básica, pois, ao informar o tema escolhido a todos que me perguntavam, percebia certa “cara de espanto”, inclusive de professores de matemática e, logo após, vinham os questionamentos: “Por que um tema tão difícil?”, “Por que você não escolheu algo mais fácil?”, “Tem tanto conteúdo mais simples, por que você escolheu esse tão difícil?”. Realmente, o termo parece assustar, mas pesquisando sobre o tema, é notório que provavelmente muitos já se depararam com a resolução de algum problema envolvendo figuras com mesmo perímetro (isoperimétrico = mesmo perímetro). No sexto ano, por exemplo, quando estudamos áreas e perímetros, frequentemente encontramos questões nas quais se pede para encontrar retângulos com áreas diferentes e determinado perímetro, ou vice-versa. Já, no Ensino Médio, os problemas isoperimétricos estão relacionados aos problemas de otimização, quando estudamos as funções quadráticas. Na

prova da segunda série do Ensino Médio, da sexta edição da Avaliação da Aprendizagem em Processo para o primeiro semestre de 2014, promovida pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, encontramos uma questão referente a um problema isoperimétrico, cujo enunciado é o seguinte: “Existe uma infinidade de retângulos com perímetro 18 metros. Quais são a largura x e a altura y daquele que, dentre todos, tem a maior área? Justifique sua resposta”.

Tais vivências nos levam a concluir que a nomenclatura “problemas isoperimétricos” é pouco conhecida; no entanto, os exemplos citados mostram que esta classe de problemas tem sido abordada em sala de aula.

Sendo de grande importância no desenvolvimento das competências matemáticas, os problemas isoperimétricos, suas abordagens teóricas e as ferramentas matemáticas para resolvê-los aparecem em livros como o de Courant e Robbins (2000) e Major (2013), em artigos como o de Pereira e Possani (2004), além de diversos trabalhos de conclusão de curso. Nesses trabalhos, alguns autores focaram o assunto usando apenas Geometria Euclidiana, outros o abordaram utilizando o Cálculo Diferencial.

O livro de Zoltán Major (2013), *An Interesting Optimization Problem Family – Isoperimetric Problems*, é dirigido a estudantes do Ensino Médio e seus professores. Nele, encontramos uma breve descrição do problema isoperimétrico clássico, que despertou o interesse de muitos dos grandes matemáticos, como, por exemplo, Arquimedes, Euler, Descartes, Weierstrass e Steiner. Além de exemplos resolvidos, também são apresentados 237 problemas isoperimétricos nos espaços bidimensional e tridimensional com suas respectivas soluções. Como o objetivo principal do livro é melhorar as habilidades de resolução de problemas através do uso das desigualdades, sempre que possível foram utilizadas as desigualdades das médias nas soluções dos problemas.

Courant e Robbins (2000) apresentam, entre diversos problemas de máximos e mínimos, a demonstração de que, entre todos os triângulos, dado um lado c e a soma $a + b$ dos outros dois lados, o de área maior é o triângulo isósceles, para o qual $a = b$. Além disso, é apresentada uma das provas arquitetadas por Steiner de que “o círculo encerra a maior área entre todas as curvas fechadas com um comprimento dado” (COURANT; ROBBINS, 2000, p. 427).

O artigo de Pereira e Possani (2004) concentra-se no problema de Dido, mostrando sua prova. Ele nos alerta para sermos prudentes durante o processo de ensino e aprendizagem, considerando inicialmente problemas mais simples, como uma classe restrita de regiões.

Limberger (2011) apresentou abordagens do problema isoperimétrico para serem aplicadas no Ensino Médio ou Superior, incluindo aspectos históricos, deduções formais do problema fazendo uso de Geometria Euclidiana ou por meio do Cálculo Diferencial, contextualização em problemas de otimização por meio de recursos computacionais, além de uma descrição detalhada do material audiovisual produzido para o Ensino Médio. O material audiovisual citado faz parte da coleção M³ Matemática Multimídia, disponível em <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1126>, acesso em 14/04/2014, que contém recursos educacionais multimídia em formatos digitais desenvolvidos pela Unicamp com financiamento do FNDE, SED, MCT e MEC para o Ensino Médio de Matemática no Brasil.

O foco do trabalho de Silva (2013) foi apresentar soluções para os problemas usando matemática elementar, tais como Desigualdades Algébricas, Desigualdades Geométricas, Desigualdades e Identidades Trigonométricas, etc.

Rocha (2013), em sua dissertação de mestrado, apresenta alguns métodos algébricos para o Ensino Médio, destacando a otimização de funções quadráticas, funções discretas, algumas funções contínuas, além de aplicações da desigualdade das médias. Dentre os exemplos de problemas de otimização apresentados, alguns estão relacionados à isoperimetria, como por exemplo, mostrar que, entre todos os retângulos de mesmo perímetro, o quadrado é o de área máxima. Para provar que, de todos os triângulos de mesmo perímetro, o equilátero possui área maior, foi utilizada a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.

Em sua dissertação de mestrado, Brito (2013) relata uma experiência de ensino envolvendo problemas de otimização geométrica, discutindo alguns problemas isoperimétricos envolvendo a determinação de polígonos que englobam maior área, em determinadas condições.

Pasquali (2014) propôs um trabalho com os problemas clássicos de valores extremos utilizando basicamente métodos geométricos, para que os professores possam trabalhar em sala de aula sem que os alunos tenham o conhecimento do cálculo. Para o

problema de Dido, é apresentada a solução de Steiner, cuja demonstração é considerada incompleta, pois parte da hipótese de que a solução do problema existe.

Buscando eliminar a necessidade do Cálculo Diferencial na resolução de problemas de otimização a fim de torná-los acessíveis a alunos e professores da educação básica, Costa da Fonte (2013) propõe a utilização da desigualdade das médias.

Madeira (2005) inicia sua dissertação com o lendário problema de Dido. No primeiro capítulo, faz uma abordagem geométrica do problema isoperimétrico apresentando as noções de comprimento e área de um conjunto e, logo na sequência, a demonstração de Zenodoro do Teorema Isoperimétrico para polígonos e a demonstração de Steiner baseada em conceitos de convexidade e simetria para o Teorema Isoperimétrico. Na abordagem variacional do problema isoperimétrico, no segundo capítulo, deduz a equação de Euler-Lagrange para os problemas de Dido e isoperimétrico clássico. Através da Desigualdade de Wirtinger, é demonstrada a desigualdade isoperimétrica.

Como professores, devemos buscar alternativas que visem motivar o processo de ensino e aprendizagem, buscando desenvolver nos alunos, além das competências e habilidades relacionadas aos conteúdos matemáticos, o raciocínio lógico-dedutivo, a concentração, a organização e o senso cooperativo. Nosso desafio será desenvolver um trabalho que seja capaz de levar aos professores da educação básica conhecimentos sobre problemas isoperimétricos, propondo atividades que possam ser aplicadas em sala de aula nos diferentes níveis de ensino. Dessa forma optamos pelo uso da Geometria Euclidiana, tendo em vista que o estudo do Cálculo Diferencial não é priorizado nos currículos da Educação Básica.

Este trabalho está organizado como segue:

No capítulo 1, visando facilitar a leitura deste trabalho, apresentamos conceitos matemáticos que embasam teoricamente as atividades que serão apresentadas.

No capítulo 2, fazemos uma abordagem do problema isoperimétrico clássico, conhecido pela famosa “Lenda de Dido”, mencionando vários matemáticos que se dedicaram a solucioná-lo. Ainda neste capítulo, apresentamos a solução dada por Steiner para o problema isoperimétrico.

Nos capítulos 3, 4 e 5, propomos algumas atividades sobre isoperimetria que têm como ponto de partida a análise das figuras pelas observações e construções que

permitam fazer conjecturas e identificar propriedades, levando aluno a construir argumentos plausíveis, uma vez que a prática da argumentação é fundamental para a compreensão das demonstrações. Visando despertar interesse nos alunos, elaboramos atividades que incluem o uso de materiais concretos, como palitos de fósforo, geoplano (material e virtual) e do software de geometria dinâmica GeoGebra. Em relação às demonstrações, sempre que possível apresentamos mais de uma maneira de provar a solução, uma vez que ficará a cargo do professor definir a mais adequada para o nível de aprendizagem de seus alunos.

A proposta deste trabalho não será a de esgotar todas as possibilidades de problemas isoperimétricos, mas sim fornecer subsídios que ajudem os professores no desenvolvimento do tema na Educação Básica. Um excelente material que fornece 237 problemas isoperimétricos é o livro *An interesting optimization problem Family: Isoperimetric problems*, de Zoltán Major (2013).

As construções geométricas encontradas no trabalho foram produzidas pelo autor com o auxílio do software Geogebra.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

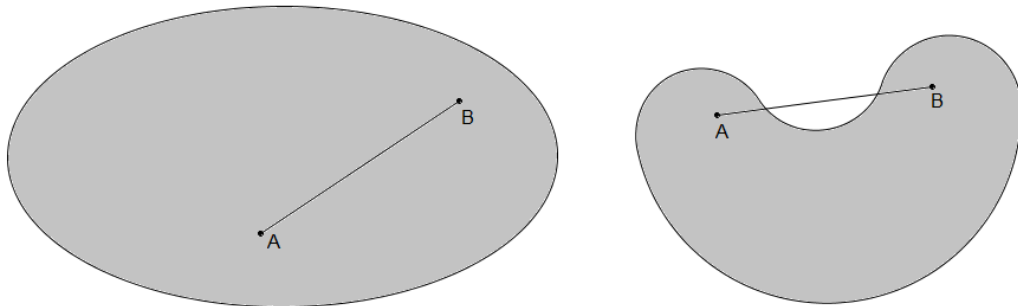
A fim de facilitar a leitura deste trabalho, neste capítulo apresentamos conceitos matemáticos que embasam teoricamente as atividades que serão apresentadas.

Por brevidade, vamos sempre nos referir à área da região limitada por uma curva fechada no plano simplesmente como a área da curva.

1.1 REGIÃO CONVEXA E NÃO CONVEXA

Definição 1.1.1 – Uma região R do plano é *convexa* quando, para todos os pontos $A, B \in R$, tivermos $AB \subset R$. Caso contrário, diremos que R é uma região *não convexa*.

Figura 1 – Regiões convexas e não convexas.



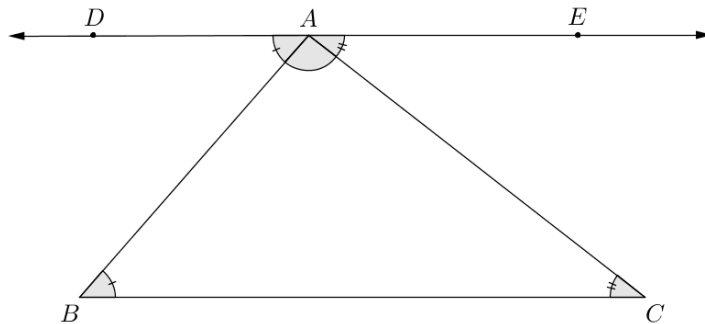
1.2 A DESIGUALDADE TRIANGULAR

Postulado 1.2.1 – Dados no plano uma reta r e um ponto $A \notin r$, existe uma única reta s , paralela a r e passando por A .

Proposição 1.2.1 (Soma dos ângulos internos de um triângulo) – Em qualquer triângulo, a soma dos três ângulos internos é igual a dois ângulos retos.

Demonstração: Seja ABC um triângulo qualquer e \overleftrightarrow{DE} a reta paralela a \overleftrightarrow{BC} que passa pelo ponto A (Figura 2).

Figura 2 – Soma dos ângulos internos de um triângulo.



Do paralelismo de \overleftrightarrow{DE} e \overleftrightarrow{BC} , considerando a transversal \overleftrightarrow{AB} , decorre que $\hat{B} = \hat{BAD}$ (ângulos alternos internos).

Do paralelismo de \overleftrightarrow{DE} e \overleftrightarrow{BC} , considerando a transversal \overleftrightarrow{AC} , decorre que $\hat{C} = \hat{CAE}$ (ângulos alternos internos).

Os três ângulos internos do triângulo são iguais aos três ângulos que têm o vértice comum em A e que formam um ângulo de 180° , ou dois ângulos retos.

Portanto,

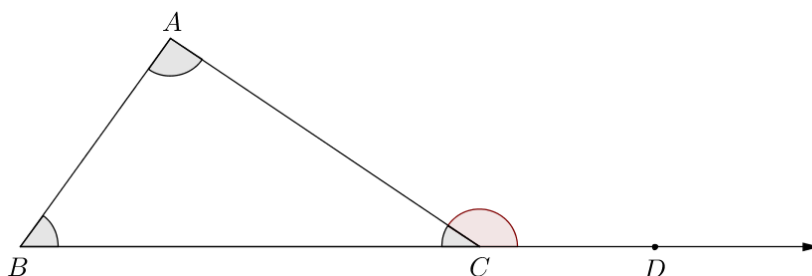
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A} + \hat{BAD} + \hat{CAE} = 180^\circ.$$



Corolário 1.2.1 (Teorema do ângulo externo) – Em todo triângulo, a medida de um ângulo externo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

Demonstração: Seja ABC um triângulo arbitrário e D um ponto sobre a semirreta \overleftrightarrow{BC} tal que $C \in BD$. Assim, o ângulo externo $\angle ACD$ é adjacente e suplementar ao ângulo $\angle C$, e os ângulos $\angle A$ e $\angle B$ não são adjacentes ao ângulo externo $\angle ACD$.

Figura 3 – Teorema do ângulo externo.



Assim temos,

$$A\hat{C}D + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow A\hat{C}D = 180^\circ - \hat{C}.$$

Pela Proposição 1.2.1, segue que

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ - \hat{C}.$$

Portanto,

$$A\hat{C}D = \hat{A} + \hat{B}.$$



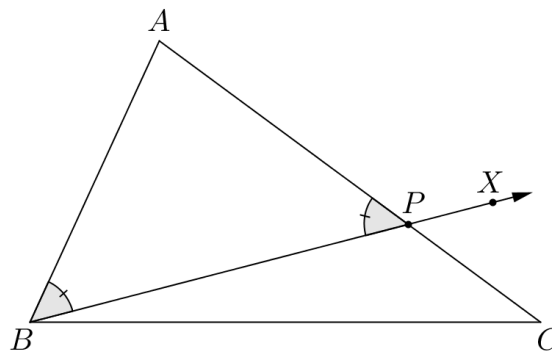
Proposição 1.2.2 – Se ABC é um triângulo tal que $\hat{B} > \hat{C}$, então $\overline{AC} > \overline{AB}$.

Demonstração: Como $\hat{B} > \hat{C}$, podemos traçar a semirreta \overrightarrow{BX} , intersectando o interior de ABC e tal que $C\hat{B}X = \frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{C})$ (Figura 4). Sendo P o ponto de intersecção de \overrightarrow{BX} com o lado AC , segue do teorema do ângulo externo que

$$A\hat{P}B = C\hat{B}P + B\hat{C}P = \frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{C}) + \hat{C} = \frac{1}{2}\hat{B} - \frac{1}{2}\hat{C} + \hat{C} = \frac{1}{2}\hat{B} + \frac{1}{2}\hat{C} = \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C}).$$

Por outro lado, como $A\hat{B}P = \hat{B} - \frac{1}{2}(\hat{B} - \hat{C}) = \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C})$, segue que o triângulo ABP é isósceles de base BP .

Figura 4 – Triângulo ABC e a semirreta \overrightarrow{BX} .



Portanto,

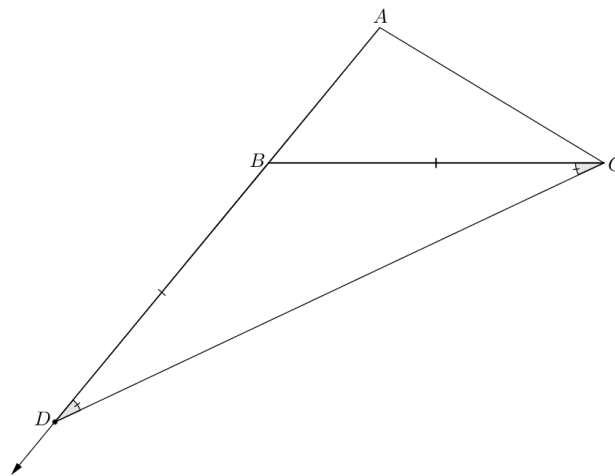
$$\overline{AB} = \overline{AP} < \overline{AC}.$$



Teorema 1.2.1 (Desigualdade Triangular) – Em todo triângulo, cada lado tem comprimento menor que a soma dos comprimentos dos outros dois lados.

Demonstração: Seja ABC um triângulo. Mostraremos que $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$, sendo a prova das demais desigualdades totalmente análoga. Seja D um ponto sobre a semirreta \overrightarrow{AB} tal que $B \in AD$ e $\overline{BD} = \overline{BC}$. Assim, o triângulo BCD é isósceles com base CD . (Figura 5). Isto implica que $\widehat{BCD} = \widehat{BDC}$.

Figura 5 – A Desigualdade Triangular.



Note que \overrightarrow{CB} divide o ângulo $A\hat{C}D$, pois \overrightarrow{AD} intersecta \overrightarrow{CB} em B . Assim,

$$A\hat{C}D = A\hat{C}B + B\hat{C}D > B\hat{C}D = B\hat{D}C.$$

Sendo $A\hat{C}D > B\hat{D}C$, pela Proposição 1.2.2, temos que $\overline{AD} > \overline{AC}$. Como $B \in AD$, então

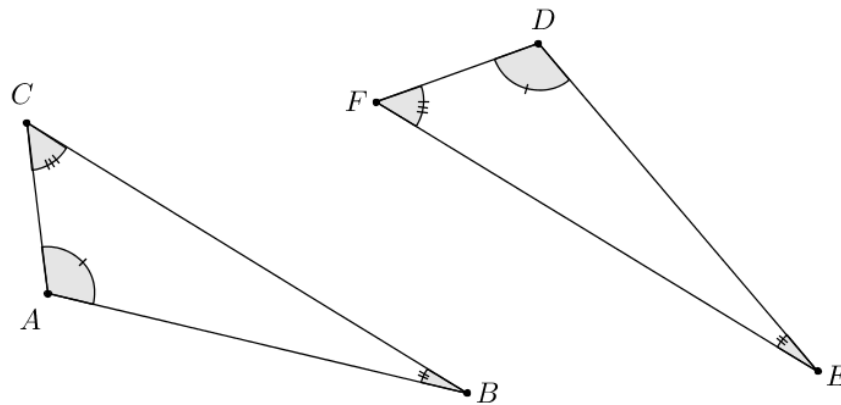
$$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AB} + \overline{BC}.$$

Logo, $\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$. ■

1.3 CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS

Definição 1.3.1 – Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.

Figura 6 – Triângulos congruentes.



A figura 6 mostra dois triângulos congruentes ABC e DEF com a correspondência dos vértices

$$A \leftrightarrow D; B \leftrightarrow E; C \leftrightarrow F.$$

Então, para tais triângulos, temos

$$\hat{A} = \hat{D}; \hat{B} = \hat{E}; \hat{C} = \hat{F}$$

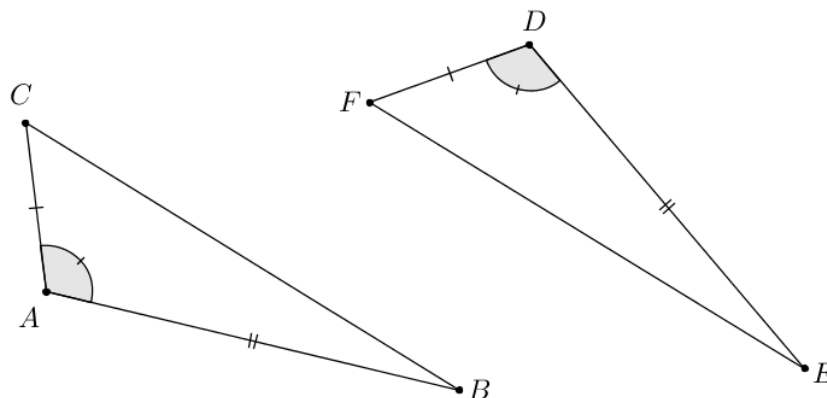
e

$$\overline{AB} = \overline{DE}; \overline{BC} = \overline{EF}; \overline{AC} = \overline{DF}.$$

Escrevemos $ABC \equiv DEF$ para denotar que os triângulos ABC e DEF são congruentes e que a congruência leva A em D , B em E e C em F .

Axioma 1.3.1 (primeiro caso de congruência de triângulos – *LAL*) – Dados dois triângulos ABC e DEF , se $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AC} = \overline{DF}$ e $\hat{A} = \hat{D}$, então $ABC \equiv DEF$.

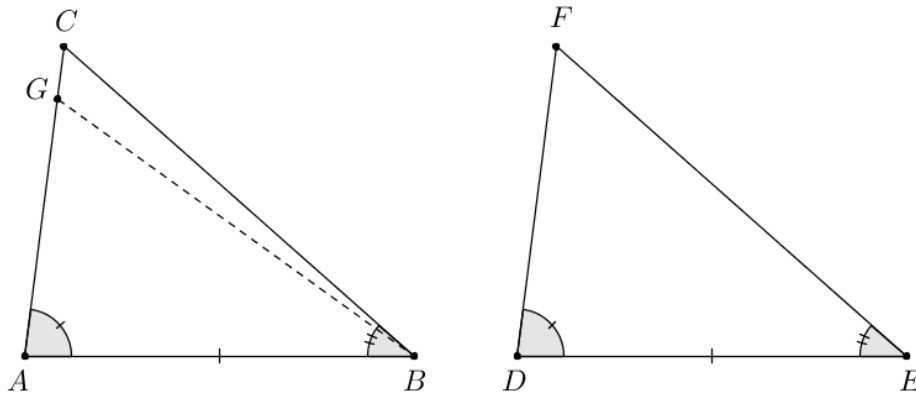
Figura 7 – Caso de congruência de triângulos – *LAL*.



Teorema 1.3.1 (segundo caso de congruência de triângulos – *ALA*) – Dados dois triângulos ABC e DEF , se $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{E}$, então $ABC \equiv DEF$.

Demonstração: Sejam ABC e DEF dois triângulos tais que $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{E}$. Considere G um ponto da semirreta \overrightarrow{AC} tal que $\overline{AG} = \overline{DF}$ (Figura 8).

Figura 8 – Caso de congruência de triângulos – *ALA*.



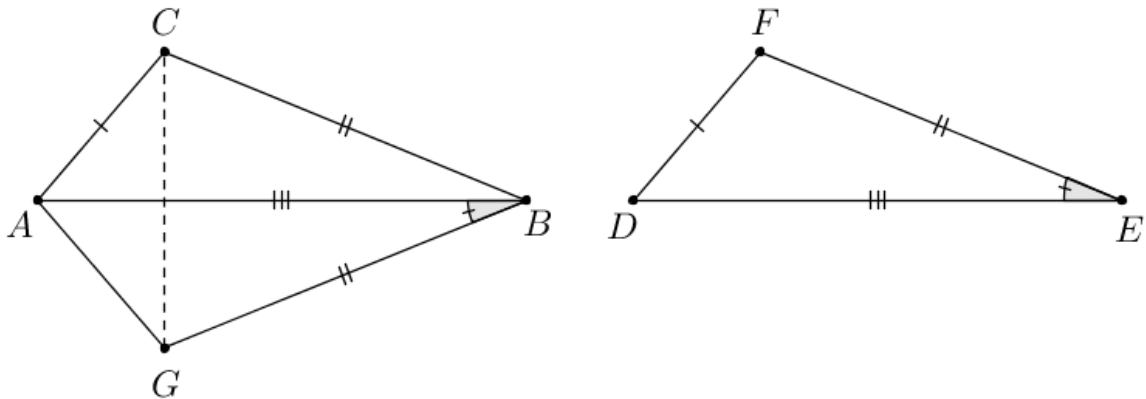
Comparando os triângulos ABG e DEF , temos que, pelo Axioma 1.3.1 (caso de congruência de triângulos – *LAL*), os triângulos ABG e DEF são congruentes, pois $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AG} = \overline{DF}$ e $\hat{A} = \hat{D}$. Consequentemente, temos $\hat{ABG} = \hat{E}$. Por outro lado, pela hipótese, $\hat{E} = \hat{ABC}$. Logo, $\hat{ABG} = \hat{ABC}$ e, dessa forma, as semirretas \overrightarrow{BG} e \overrightarrow{BC} coincidem. Então, o ponto G coincide com o ponto C e, portanto, coincidem os triângulos ABG e ABC . Assim, como $ABG \equiv DEF$, temos que $ABC \equiv DEF$. ■

Teorema 1.3.2 (terceiro caso de congruência de triângulos – *LLL*) – Dados dois triângulos ABC e DEF , se $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AC} = \overline{DF}$ e $\overline{BC} = \overline{EF}$, então $ABC \equiv DEF$.

Demonstração: Sejam ABC e DEF dois triângulos tais que $\overline{AB} = \overline{DE}$, $\overline{AC} = \overline{DF}$ e $\overline{BC} = \overline{EF}$. Mostraremos que $ABC \equiv DEF$.

Marcando um ponto G no semiplano oposto ao que contém o ponto C , tal que $\hat{ABG} = \hat{E}$ e $\overline{BG} = \overline{EF}$, obtemos o triângulo ABG (Figura 9).

Figura 9 – Caso de congruência de triângulos – LLL.



Como, por hipótese, $\overline{AB} = \overline{DE}$ e, por construção, $\overline{BG} = \overline{EF}$ e $\hat{A}BG = \hat{E}$, temos que, pelo Axioma 1.3.1 (caso de congruência de triângulos – LAL), os triângulos ABG e DEF são congruentes.

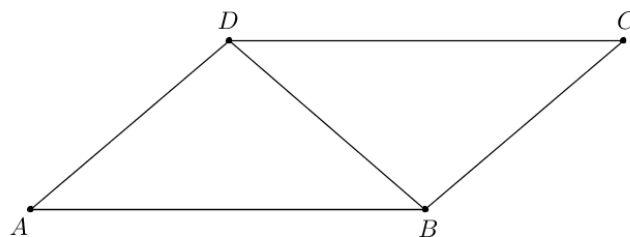
Agora, mostraremos que os triângulos ABC e DEF são congruentes.

Por construção, temos que $\overline{AG} = \overline{DF} = \overline{AC}$ e $\overline{BG} = \overline{EF} = \overline{BC}$; então, traçando o segmento CG , temos que os triângulos AGC e BGC são isósceles de base \overline{CG} . Logo, como $\hat{A}GC = \hat{A}CG$ e $\hat{C}GB = \hat{C}CB$, concluímos que $\hat{A}GB = \hat{A}CB$. Assim, pelo Axioma 1.3.1 (caso de congruência de triângulos – LAL), os triângulos ABG e ABC são congruentes. Portanto, como $ABG \equiv DEF$, temos que $ABC \equiv DEF$. ■

Proposição 1.3.1 – Se os lados opostos de um quadrilátero são congruentes, então o quadrilátero é um paralelogramo.

Demonstração: Seja $ABCD$ um quadrilátero com $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{BC} = \overline{AD}$. Provaremos que $ABCD$ é um paralelogramo, ou seja, que $AB \parallel CD$ e $BC \parallel AD$.

Figura 10 – Quadrilátero $ABCD$.



Seja BD uma diagonal do quadrilátero $ABCD$ (Figura 10). Nos triângulos ABD e CDB , temos que o segmento BD é lado comum aos dois triângulos e, por hipótese, $\overline{AB} = \overline{CD}$ e $\overline{BC} = \overline{AD}$. Logo, pelo Teorema 1.3.2 (caso de congruência de triângulos – *LLL*), os triângulos ABD e CDB são congruentes. Assim, $\widehat{CDB} = \widehat{ABD}$ e $\widehat{CBD} = \widehat{ADB}$. Dessa forma, a primeira igualdade garante que $AB \parallel CD$, e a segunda garante que $BC \parallel AD$. Portanto, $ABCD$ é um paralelogramo. ■

Proposição 1.3.2 – Se dois lados opostos de um quadrilátero são congruentes e paralelos, então o quadrilátero é um paralelogramo.

Demonstração: Seja $ABCD$ um quadrilátero com $AD \parallel BC$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$. Provaremos que $ABCD$ é um paralelogramo. Pela Proposição 1.3.1, temos que, se provarmos que $\overline{AB} = \overline{CD}$, então o quadrilátero será um paralelogramo.

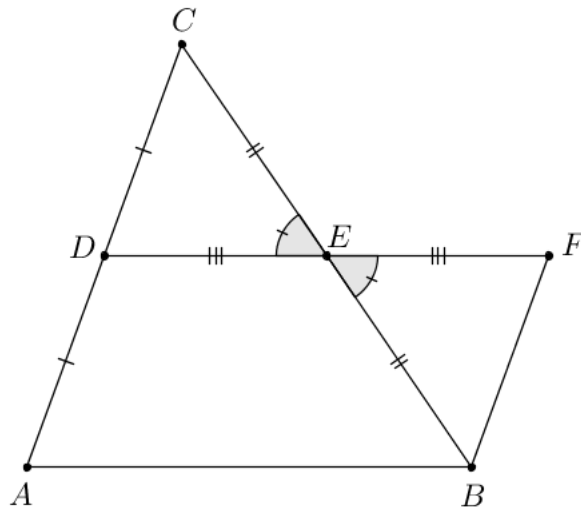
Considere a diagonal BD e os triângulos ABD e CDB (Figura 10). Como as retas paralelas \overrightarrow{AD} e \overrightarrow{BC} são cortadas pela reta transversal \overrightarrow{BD} , temos que os ângulos alternos internos possuem a mesma medida, ou seja, $\widehat{CBD} = \widehat{ADB}$. Logo, como $\overline{AD} = \overline{BC}$ e o segmento BD é lado comum aos dois triângulos, temos que, pelo Axioma 1.3.1 (caso de congruência de triângulos – *LAL*), os triângulos ABD e CDB são congruentes. Portanto, $\overline{AB} = \overline{CD}$. ■

Teorema 1.3.3 (Teorema da base média) – O segmento ligando os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem metade de seu comprimento.

Demonstração: Seja ABC um triângulo, D o ponto médio do segmento AC e E o ponto médio do segmento BC . Mostraremos que $DE \parallel AB$ e que $\overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{AB}$.

Marcando na semirreta \overrightarrow{DE} um ponto F tal que $E \in DF$ e $\overline{EF} = \overline{DE}$, obtemos o triângulo BFE (Figura 11).

Figura 11 – Teorema da base média.

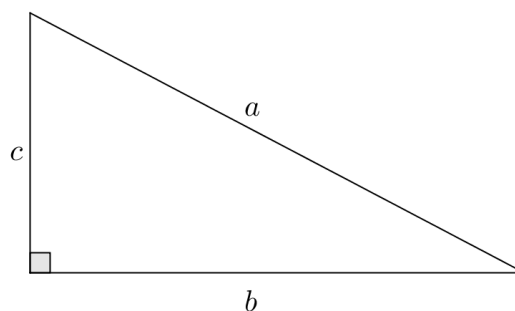


Como $\overline{BE} = \overline{EC}$ (E é o ponto médio do segmento BC) e $\widehat{CED} = \widehat{FEB}$ (ângulos opostos pelo vértice); então, pelo Axioma 1.3.1 (caso de congruência de triângulos – LAL), os triângulos CDE e BFE são congruentes. Consequentemente, $\widehat{FEB} = \widehat{CED}$ e $\overline{FB} = \overline{CD} = \overline{AD}$ (D é ponto médio do segmento AC). Logo, os segmentos FB e AD são paralelos e têm o mesmo comprimento. Pela Proposição 1.3.2, temos que o quadrilátero $ABFD$ é um paralelogramo. Portanto, $DF \parallel AB$ e $\overline{DF} = \overline{AB}$. Dessa forma, como E é o ponto médio do segmento DF , temos que $\overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{AB}$. ■

1.4 RELAÇÃO ENTRE ÁREA E PERÍMETRO DE UM TRIÂNGULO

Proposição 1.4.1 (Teorema de Pitágoras) – O quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos.

Figura 12 – Teorema de Pitágoras.

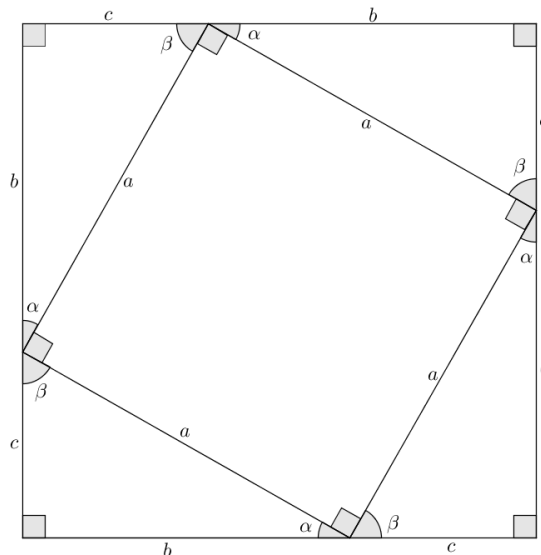


$$a^2 = b^2 + c^2$$

Segundo EVES (2011), a segunda edição do livro *The Pythagorean Proposition* escrito por Elisha Scott Loomis, é uma coleção de nada menos que 370 provas do Teorema de Pitágoras. Dentre as centenas de provas, optamos por apresentar apenas duas. A primeira utiliza o diagrama da prova Chinesa (Figura 13), que também pode ter sido usada, independentemente, por Pitágoras. A segunda é uma demonstração apresentada por EVES (2011) como sendo uma possível demonstração que Pitágoras poderia ter dado, já que provavelmente ele a tenha feito por decomposição.

Demonstração 1: Seja um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c . Construiremos um quadrado de lado $(b + c)$. Nele, conforme a Figura 13, construiremos quatro triângulos retângulos idênticos ao triângulo dado.

Figura 13 – Possível demonstração dada por Pitágoras (diagrama chinês).

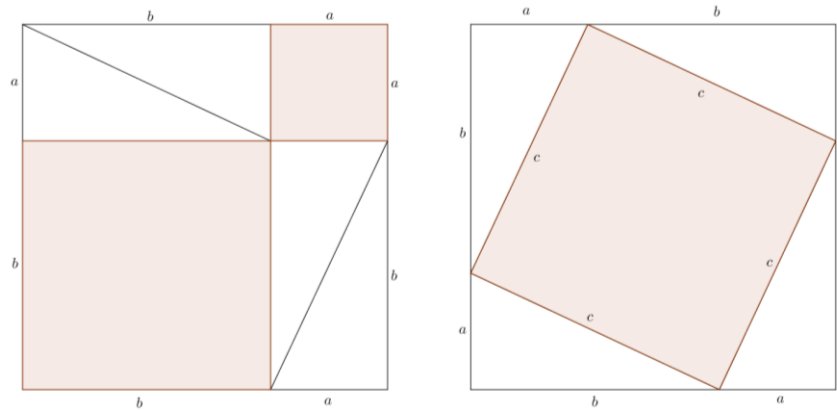


A figura interna é um quadrado, pois, pelo teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, temos $\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$. A área do quadrado maior é $(b + c)^2$ e a área do quadrado menor é a^2 . As áreas dos quatro triângulos totalizam $2bc$. Logo, $a^2 + 2bc = (b + c)^2$ e, portanto, $a^2 = b^2 + c^2$. ■

Demonstração 2: Denotemos por a , b os catetos e c a hipotenusa de um triângulo retângulo e consideremos os dois quadrados da Figura 14, cujos lados medem $a + b$. O primeiro quadrado está decomposto em seis partes, sendo dois quadrados sobre os catetos e quatro triângulos retângulos congruentes ao triângulo dado. O segundo quadrado está decomposto em cinco partes, sendo o quadrado sobre a hipotenusa e quatro triângulos

congruentes ao triângulo dado. Assim, subtraindo iguais de iguais, concluímos que o quadrado sobre a hipotenusa é igual à soma dos quadrados sobre os catetos.

Figura 14 – Demonstração por decomposição de quadrados.



Usando o fato de que a soma dos ângulos internos de um triângulo retângulo é igual a 180° , podemos provar que o polígono central da decomposição do segundo quadrado é um quadrado de lado c . ■

Segundo Garbi (2010), embora Herão de Alexandria tenha apresentado a dedução da famosa fórmula da área de um triângulo em função dos três lados, o comentarista árabe Al-Biruni (973 – 1048) reivindicou para Arquimedes a paternidade da célebre fórmula, mas nada foi comprovado ou refutado. Assim, continuamos atribuindo a Herão a descoberta dessa relação.

Apresentamos, na demonstração 1, a belíssima prova geométrica dada por Herão, em seu livro *A Métrica*, encontrada no livro de Garbi (2010). A demonstração 2 utiliza-se do Teorema de Pitágoras para estabelecer a relação entre a área e o perímetro de um triângulo, tornando mais simples a compreensão.

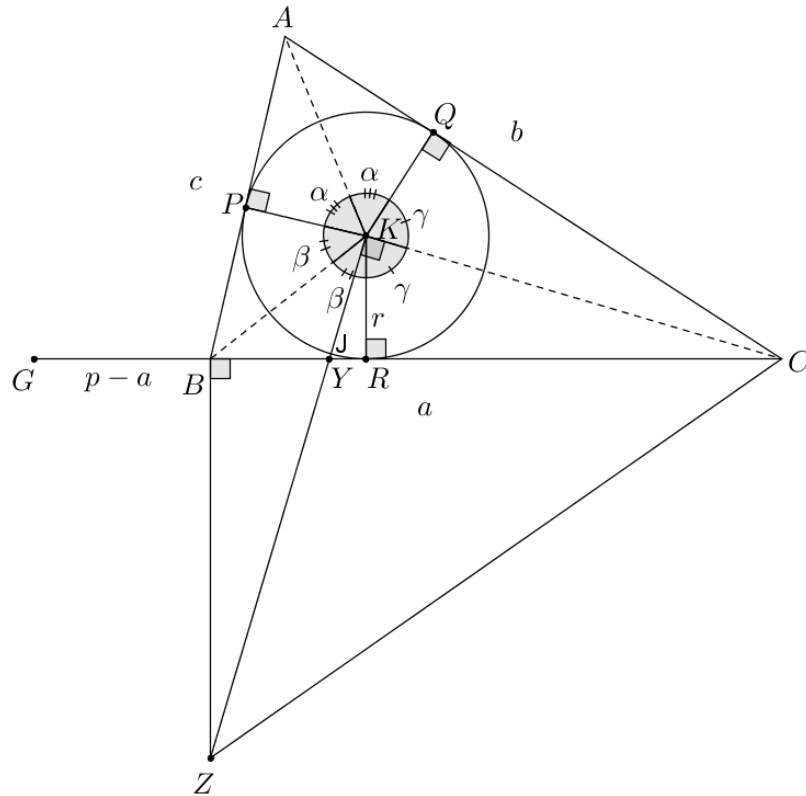
Proposição 1.4.2 (Fórmula de Herão) – Se um triângulo ABC tem lados medindo a , b e c com perímetro $2p$, então a área desse triângulo será dada por:

$$A(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ onde } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Demonstração 1: Consideremos o triângulo ABC e o círculo nele inscrito, cujo centro K é o ponto de intersecção das bissetrizes dos ângulos $\angle A$, $\angle B$ e $\angle C$. Seja P , Q e R os

pontos de tangência desse círculo com os lados AB , AC e BC , respectivamente (Figura 15). Então, $\overline{KP} = \overline{KR} = \overline{KQ} = r$ (raio do círculo inscrito).

Figura 15 – Dedução da Fórmula de Herão.



Assim, a área A do triângulo ABC é a soma das áreas dos triângulos AKB , BKC e AKC , ou seja,

$$A(ABC) = \frac{1}{2}r\overline{AB} + \frac{1}{2}r\overline{BC} + \frac{1}{2}r\overline{AC}$$

$$A(ABC) = \frac{1}{2}r(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}) = r \frac{a + b + c}{2}.$$

Dessa forma, tomando o perímetro $(a + b + c) = 2p$, temos que $A(ABC) = rp$, onde p é o semiperímetro. Como $APK \cong AQK$, $BPK \cong BRK$ e $CRK \cong CQK$, temos que $\overline{AP} = \overline{AQ}$, $\overline{BP} = \overline{BR}$ e $\overline{CQ} = \overline{CR}$.

Assim,

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AB} \quad (I)$$

$$\overline{AQ} + \overline{CQ} = \overline{AC} \quad (II)$$

$$\overline{BR} + \overline{CR} = \overline{BC}, \quad (\text{III})$$

Somando, membro a membro as igualdades (I), (II) e (III), temos

$$\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{AQ} + \overline{CQ} + \overline{BR} + \overline{CR} = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}$$

$$(\overline{AP} + \overline{AQ}) + (\overline{BP} + \overline{BR}) + (\overline{CQ} + \overline{CR}) = 2p$$

$$(\overline{AP} + \overline{AP}) + (\overline{BP} + \overline{BP}) + (\overline{CQ} + \overline{CQ}) = 2p$$

$$\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CQ} = p.$$

Logo, como

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AB} = c,$$

$$\overline{CQ} = p - (\overline{AP} + \overline{BP}) = p - c.$$

Analogamente,

$$\overline{BP} = p - (\overline{AP} + \overline{CQ}) = p - (\overline{AQ} + \overline{CQ}) = p - \overline{AC} = p - b$$

e

$$\overline{AP} = p - (\overline{BP} + \overline{CQ}) = p - (\overline{BR} + \overline{CR}) = p - \overline{BC} = p - a.$$

Portanto,

$$\overline{AP} = \overline{AQ} = (p - a)$$

$$\overline{BP} = \overline{BR} = (p - b)$$

$$\overline{CQ} = \overline{CR} = (p - c).$$

Seja G um ponto sobre a semirreta \overline{CB} , tal que $B \in CG$ e $\overline{BG} = \overline{AP} = p - a$. O segmento CG , então, tem comprimento

$$\overline{CG} = \overline{BG} + \overline{BR} + \overline{CR} = (p - a) + (p - b) + (p - c) = 3p - (a + b + c) = 3p - 2p = p.$$

Por construção (Figura 15), temos que

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360^\circ$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma).$$

Seja Z o ponto de intersecção entre a reta perpendicular à reta \overleftrightarrow{KC} passando pelo ponto K e a reta perpendicular à reta \overleftrightarrow{BC} passando pelo ponto B , e Y o ponto de intersecção de BC com KZ . O quadrilátero $BKCZ$ é inscritível, pois como $Z\hat{B}C = Z\hat{K}C = 90^\circ$, os pontos B e K estão sobre o lugar geométrico dos pontos de onde o segmento ZC é visto sob um ângulo reto e tal lugar é uma circunferência com diâmetro ZC . Assim, como seus ângulos opostos do quadrilátero $BKCZ$ somam 180° , temos que $\beta + \gamma + B\hat{Z}C = 180^\circ$, ou seja, $B\hat{Z}C = 180^\circ - (\beta + \gamma)$. Logo, $B\hat{Z}C = \alpha$.

Pela figura 15, podemos observar que os triângulos APK e CBZ são semelhantes, pois ambos são triângulos retângulos e têm um dos ângulos agudos de medida igual a α . Portanto, como $\overline{AP} = \overline{AQ} = \overline{BG} = (p - a)$ e $\overline{KP} = r$, temos que

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BZ}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{KP}} = \frac{\overline{BG}}{r}$$

ou

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BG}} = \frac{\overline{BZ}}{r}. \quad (IV)$$

Os triângulos BYZ e YKR também são semelhantes, pois ambos são triângulos retângulos e $B\hat{Y}Z = R\hat{Y}K$ (ângulos opostos pelo vértice). Portanto,

$$\frac{\overline{BZ}}{\overline{BY}} = \frac{\overline{KR}}{\overline{YR}} = \frac{r}{\overline{YR}}$$

ou

$$\frac{\overline{BZ}}{r} = \frac{\overline{BY}}{\overline{YR}}. \quad (V)$$

De (IV) e (V), temos que

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BG}} = \frac{\overline{BY}}{\overline{YR}}. \quad (VI)$$

Por construção, o triângulo KYC é retângulo. Logo, pelas relações métricas do triângulo retângulo, o quadrado da altura em relação à hipotenusa é igual ao produto das projeções dos catetos sobre eles, ou seja,

$$\overline{KR}^2 = \overline{YR} \cdot \overline{CR} = r^2. \quad (\text{VII})$$

Tomando a igualdade (VI) e somando 1 a ambos os membros, obtemos

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BG}} + 1 = \frac{\overline{BY}}{\overline{YR}} + 1$$

ou

$$\frac{(\overline{BC} + \overline{BG})}{\overline{BG}} = \frac{(\overline{BY} + \overline{YR})}{\overline{YR}}.$$

Assim, como $\overline{BC} + \overline{BG} = \overline{CG}$ e $\overline{BY} + \overline{YR} = \overline{BR}$, temos

$$\frac{\overline{CG}}{\overline{BG}} = \frac{\overline{BR}}{\overline{YR}}. \quad (\text{VIII})$$

Multiplicando, então, o lado esquerdo da igualdade (VIII) por $\frac{\overline{CG}}{\overline{CG}} = 1$ e o direito por $\frac{\overline{CR}}{\overline{CR}} = 1$, obtemos

$$\frac{\overline{CG} \cdot \overline{CG}}{\overline{BG} \cdot \overline{CG}} = \frac{\overline{BR} \cdot \overline{CR}}{\overline{YR} \cdot \overline{CR}}.$$

Por outro lado, como, por (VII), $\overline{YR} \cdot \overline{CR} = r^2$, temos

$$\frac{\overline{CG} \cdot \overline{CG}}{\overline{BG} \cdot \overline{CG}} = \frac{\overline{BR} \cdot \overline{CR}}{r^2}$$

ou

$$r^2 \cdot \overline{CG} \cdot \overline{CG} = \overline{CG} \cdot \overline{CR} \cdot \overline{BR} \cdot \overline{BG}.$$

Portanto, como, por construção, $\overline{CG} = p$, $\overline{CR} = (p - c)$, $\overline{BR} = (p - b)$ e $\overline{BG} = \overline{AP} = (p - a)$, temos

$$r^2 p^2 = p(p - a)(p - b)(p - c)$$

$$rp = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

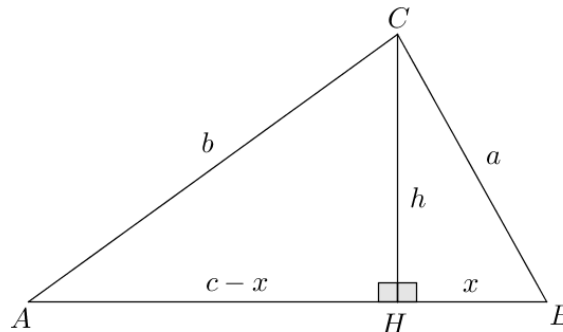
ou

$$A(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$



Demonstração 2: Considere um triângulo ABC de lados medindo a , b e c e altura h relativa ao lado de medida c (Figura 16).

Figura 16 – Triângulo ABC .



Sendo o ponto H o pé da perpendicular baixada do vértice C ao lado AB , temos que os triângulos AHC e BHC são retângulos. Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras nesses triângulos retângulos, temos

$$b^2 = (c-x)^2 + h^2 \quad (\text{I})$$

$$a^2 = x^2 + h^2 \quad (\text{II})$$

Subtraindo, membro a membro as igualdades (I) e (II), temos

$$b^2 - a^2 = (c-x)^2 - x^2 = c^2 - 2cx + x^2 - x^2 = c^2 - 2cx.$$

Assim,

$$x = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}.$$

Substituindo x em (II), obtemos

$$a^2 = \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} \right)^2 + h^2.$$

Logo,

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} \right)^2 = \frac{4a^2c^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}{4c^2}.$$

Portanto,

$$h = \frac{\sqrt{4a^2c^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}}{2c}.$$

Dessa forma, a área do triângulo ABC será dada por

$$\begin{aligned} A(ABC) &= \frac{ch}{2} = \frac{c}{2} \left(\frac{\sqrt{4a^2c^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}}{2c} \right) \\ &= \frac{\sqrt{(2ac)^2 - (c^2 + a^2 - b^2)^2}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{[2ac + (c^2 + a^2 - b^2)][2ac - (c^2 + a^2 - b^2)]}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{[(a^2 + 2ac + c^2) - b^2][-(a^2 - 2ac + c^2) + b^2]}}{4} \\ &= \sqrt{\frac{[(a + c)^2 - b^2][b^2 - (a - c)^2]}{16}} \\ &= \sqrt{\frac{[(a + c + b)(a + c - b)][(b + a - c)(b - a + c)]}{16}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$A(ABC) = \sqrt{\frac{(a + b + c)}{2} \cdot \frac{(a + b + c - 2b)}{2} \cdot \frac{(a + b + c - 2c)}{2} \cdot \frac{(a + b + c - 2a)}{2}}.$$

Sabemos que o triângulo possui semiperímetro $p = \frac{a+b+c}{2}$. Então, fazendo as devidas substituições, temos

$$A(ABC) = \sqrt{p(p - b)(p - c)(p - a)}.$$



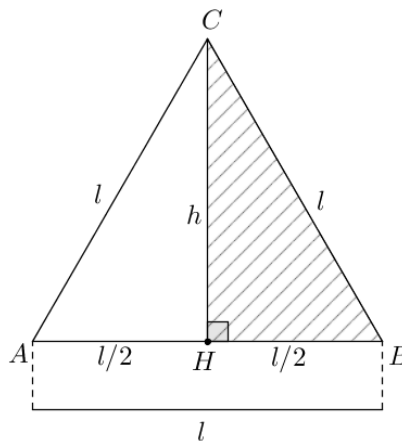
1.5 ÁREAS DE ALGUMAS FIGURAS PLANAS

1.5.1 Área do triângulo equilátero

Em um triângulo equilátero, todos os lados são congruentes e cada ângulo interno mede 60° .

Podemos obter a área de um triângulo equilátero utilizando a medida de seus lados (l) e de sua altura (h).

Figura 17 – Triângulo equilátero.



O triângulo CHB é retângulo em H . Assim, pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{3l^2}{4} \Rightarrow h = \frac{l\sqrt{3}}{2}.$$

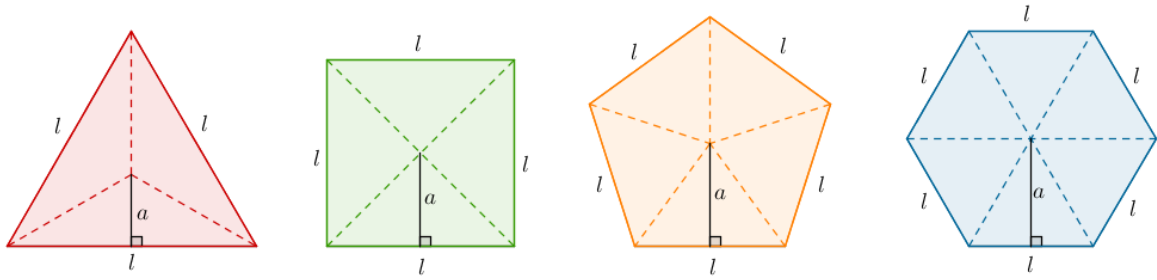
Logo, a área do triângulo equilátero é dada por

$$A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{l \cdot \frac{l\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}.$$

1.5.2 Área de polígonos regulares

Todo polígono regular pode ser decomposto em triângulos isósceles congruentes. Observe alguns exemplos de polígonos regulares e suas respectivas decomposições:

Figura 18 – Polígonos regulares decompostos em triângulos.



Definição 1.5.2.1 – Apótema de um polígono regular é o segmento com uma extremidade no centro do polígono e a outra no ponto médio de um lado.

Proposição 1.5.2.1 – A área de um polígono regular de n lados, é igual ao produto do comprimento do semiperímetro pelo comprimento do apótema.

Demonstração: Consideremos um polígono regular de n lados. Pela Figura 18, podemos notar que, se um polígono regular tem n lados, este pode ser decomposto em n triângulos isósceles congruentes, nos quais a base é o lado l do polígono e a altura é o apótema a do polígono. Para calcular a área A deste polígono regular de n lados, multiplicamos o número de lados pela área de cada triângulo.

Assim, a área de um polígono regular de n lados é dada por

$$A = n \cdot \frac{l \cdot a}{2}.$$

Podemos escrever essa expressão da seguinte maneira:

$$A = \frac{n \cdot l}{2} \cdot a.$$

Nessa expressão, $\frac{n \cdot l}{2}$ é o semiperímetro p de um polígono regular.

Logo,

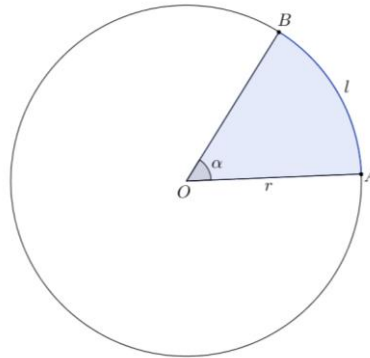
$$A = p \cdot a.$$



1.5.3 Área do setor circular

Um setor circular é uma parte de um círculo determinada por um ângulo central qualquer. A parte pintada no círculo (Figura 19) corresponde a um setor circular de um círculo de raio r determinado por um ângulo central α e um arco l .

Figura 19 – Setor circular OAB .



O setor circular é uma fração do círculo, e sua área A é diretamente proporcional à medida do ângulo central que o determina, isto é, se o ângulo aumenta, a área do setor circular aumenta na mesma proporção.

O comprimento l do arco também é proporcional ao ângulo central α . Então,

$$\frac{A(\text{setor } OAB)}{\pi r^2} = \frac{\alpha_{\text{graus}}}{360^\circ} = \frac{\alpha_{\text{rad}}}{2\pi} = \frac{l}{2\pi r}.$$

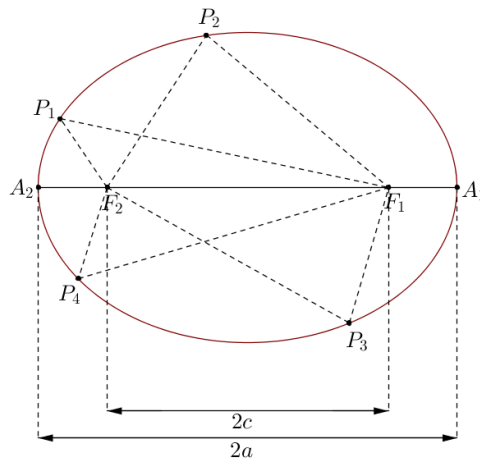
As razões acima poderão ser usadas conforme as informações conhecidas.

Assim, se o ângulo central tem medida α em graus, a área do setor OAB é

$$A(\text{setor } OAB) = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi r^2.$$

1.6 A ELIPSE

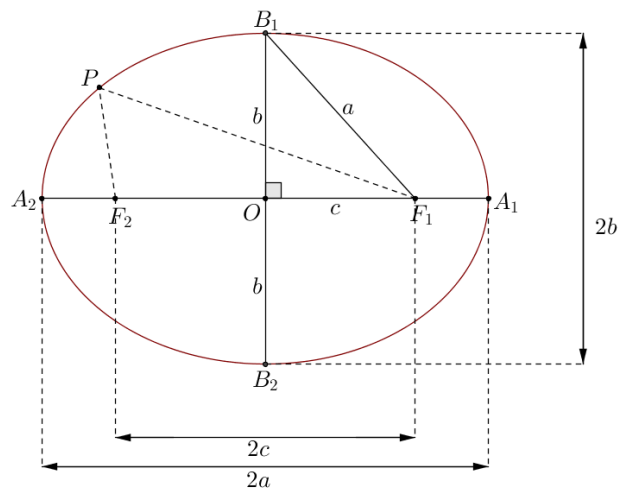
Sejam os pontos distintos F_1 e F_2 de um plano α , de modo que a distância entre eles seja igual a $2c$, com $c > 0$. Denominamos elipse o conjunto de pontos de α tal que, para cada ponto, a soma de suas distâncias aos pontos F_1 e F_2 seja uma constante $2a$ e maior do que $2c$, isto é, $2a > 2c$.

Figura 20 – Elipse.

Na Figura 20, temos:

$$\overline{P_1F_1} + \overline{P_1F_2} = \overline{P_2F_1} + \overline{P_2F_2} = \overline{P_3F_1} + \overline{P_3F_2} = \overline{P_4F_1} + \overline{P_4F_2} = 2a .$$

Em uma elipse, podemos destacar os seguintes elementos:

Figura 21 – Elementos da Elipse.

- Focos: são os pontos fixos F_1 e F_2 ;
- Distância focal: é a distância $2c = \overline{F_1F_2}$;
- Eixo maior: é o segmento A_1A_2 , tal que $\overline{A_1A_2} = 2a$;
- Eixo menor: é o segmento B_1B_2 , tal que $\overline{B_1B_2} = 2b$;
- Centro: é o ponto O , correspondente ao ponto médio de F_1F_2 , A_1A_2 e B_1B_2 ;
- Excentricidade: é o número $e = \frac{c}{a}$, em que $0 < e < 1$. Quanto mais próxima de 1 for a excentricidade, mais achatada é a elipse e quanto mais próxima de 0,

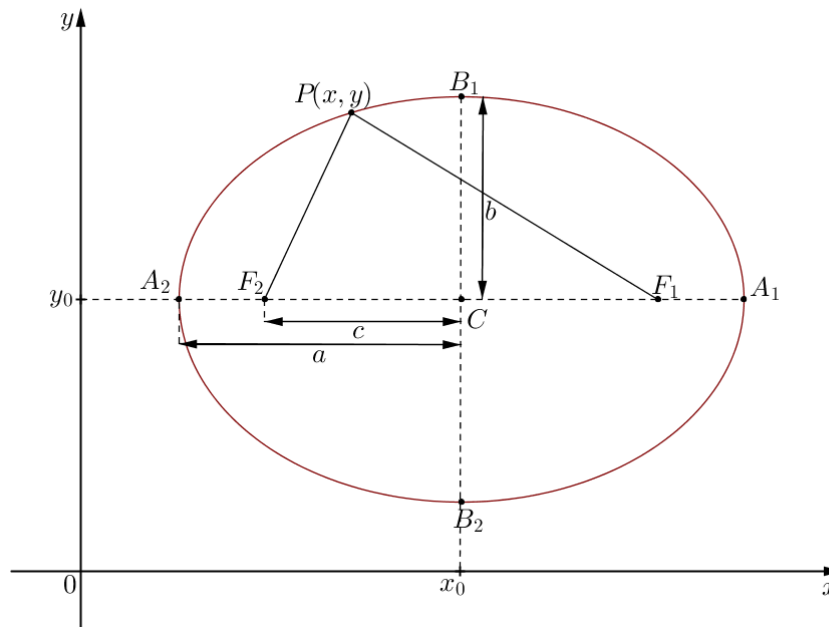
a elipse é mais arredondada. Caso a excentricidade fosse zero, teríamos $c = 0$ e, nesse caso, $a = b = r$ (raio da circunferência). Logo, a circunferência seria um caso particular de elipse.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo F_1B_1O , obtemos a seguinte relação:

$$a^2 = b^2 + c^2 .$$

Vamos determinar uma equação para a elipse (Figura 22) cujo eixo maior A_1A_2 é paralelo ao eixo x , centro $C(x_0, y_0)$ e focos $F_1(x_0 + c, y_0)$ e $F_2(x_0 - c, y_0)$.

Figura 22 – Elipse de centro $C(x_0, y_0)$ e eixo maior paralelo ao eixo x .



Consideremos um ponto $P(x, y)$ qualquer pertencente à elipse no plano cartesiano. Temos que:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a .$$

O que implica em

$$\sqrt{[x - (x_0 + c)]^2 + (y - y_0)^2} + \sqrt{[x - (x_0 - c)]^2 + (y - y_0)^2} = 2a .$$

Desenvolvendo essa igualdade e utilizando a relação $a^2 = b^2 + c^2$, obtemos a equação reduzida da elipse em questão.

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 .$$

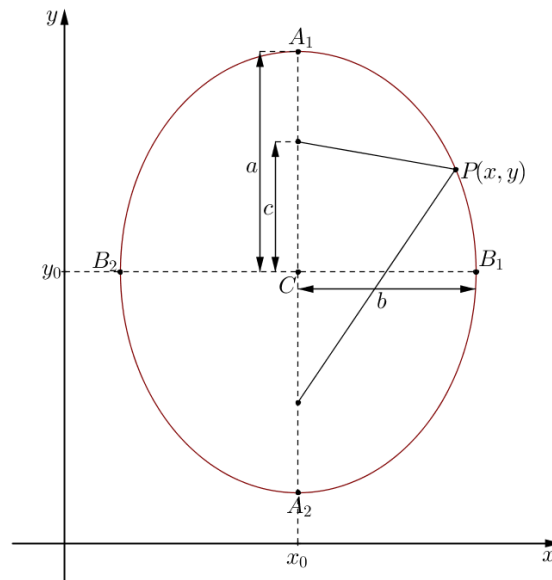
Caso o centro da elipse seja a origem $C(0,0)$ e os focos F_1 e F_2 pertençam ao eixo x , a equação será dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

De maneira semelhante, ao considerarmos em um plano cartesiano uma elipse (Figura 23) com o eixo maior A_1A_2 paralelo ao eixo y e centro $C(x_0, y_0)$, obtemos a equação reduzida:

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1.$$

Figura 23 – Elipse de centro $C(x_0, y_0)$ e eixo maior paralelo ao eixo y .



No caso em que o centro da elipse é a origem $C(0,0)$ e os focos F_1 e F_2 pertencem ao eixo y , a equação será dada por

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

1.7 DESIGUALDADE ENTRE AS MÉDIAS ARITMÉTICA E GEOMÉTRICA

Teorema 1.7.1 – Sejam n números positivos $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ e sejam m e g as médias aritmética e geométrica, respectivamente,

$$m = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad e \quad g = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \dots a_n}.$$

Então, $m \geq g$, com igualdade se, e somente se, $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Demonstração: Se $a_1 = a_2 = \dots = a_n$, está claro que $m = g$, então podemos assumir que nem todos os n números são iguais e provaremos que $m > g$.

Se a média aritmética desses n números é m e nem todos são iguais, haverá um menor que chamaremos de u e um maior que chamaremos de v . Necessariamente, temos $u < v$, pois nem todos os n números são iguais.

Mostraremos que $m < v$.

Suponhamos que $v \leq m$, então como $u < v$,

$$nm = a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq u + (n-1)v < v + (n-1)v \leq nm$$

e isto é uma contradição. Analogamente, vemos que $u < m$.

Agora, substituiremos os números u e v por outros números u' e v' de modo a não alterar a média aritmética. Para isso, $u' = m$ e $v' = u + v - m$. Assim, u' e v' são números positivos, pois $m > 0$ e $v - m > 0$ ($v > m$). Como, $u' - u = m - u > 0$ e $v' - v = v - m > 0$, temos que

$$\begin{aligned} 0 < (u' - u)(v' - v) &= u'v' + uv - u'v - uv' = u'v' - u(v' + u' - v) \\ &= u'v' - u(u + v - m + m - v) = u'v' - uv. \end{aligned}$$

Então, $uv < u'v'$. Logo, o produto dos n números depois de substituir u e v por u' e v' foi aumentado estritamente.

Assim, considerando que pelo menos um desses dois novos números é m . Após um número máximo de $n - 1$ passos neste estilo, todos os n números serão iguais a m e teremos aumentado (estritamente) o produto e, conseqüentemente, a média geométrica. Como ao final teremos $g = m$, pois todos os números serão iguais a m , inicialmente deve ser $g < m$.



2 O PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

Neste capítulo, apresentamos uma breve história sobre os problemas isoperimétricos e a busca pela solução do problema isoperimétrico clássico, conhecido pela famosa “Lenda de Dido”, por diversos matemáticos através dos tempos. Ainda neste capítulo, mostramos a solução dada por Steiner para o problema isoperimétrico.

2.1 O PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO ATRAVÉS DA HISTÓRIA

Já na antiguidade, os matemáticos demonstravam interesse pelos problemas isoperimétricos, que eram abordados no contexto geométrico. Entre eles, encontramos os matemáticos gregos Euclides (ca. 360 a.C – ca. 290 a.C), Zenodoro (ca. 200 a.C – ca.140 a.C) e Pappus (ca. 290 – ca. 350).

Segundo Struik (1997), o teorema que contém o primeiro problema de máximo que chegou até nós, está no livro VI de *Os Elementos* de Euclides (por volta do século III a.C.), com a prova de que, entre todos os retângulos de um dado perímetro, o que encerra maior área é o quadrado.

Zenodoro estudou a área de uma figura com perímetro fixo, verificando que dentre todos os polígonos com mesmo perímetro o polígono regular é o que apresenta área máxima. Imaginando o círculo como um polígono regular cujo número de lados cresce infinitamente, apesar de não apresentar uma prova, Zenodoro concluiu que o círculo determina maior área entre os polígonos regulares com o mesmo perímetro.

“Após cerca de 300 d.C., a matemática grega perdeu algo de sua criatividade. Nesse período, começa a haver uma ênfase em produzir edições e comentários de obras anteriores.” (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2010, p.22). Por volta do ano 320, Pappus de Alexandria, considerado o último dos grandes geômetras gregos, produziu uma verdadeira obra-prima intitulada *Coleção Matemática*, composta por 8 livros, a qual engloba toda a Geometria da época, incluindo “trabalho original, comentários sobre trabalho anterior e até resumos de trabalhos de outros matemáticos”. (BERLINGHOFF; GOUVÊA, 2010, p.22).

Segundo Boyer (2010), Pappus, no livro V da *Coleção Matemática*, dedica-se à isoperimetria no plano e no espaço, mostrando que, de dois polígonos regulares de mesmo perímetro, o que tem maior número de lados tem maior área. Baseando-se nisso, Pappus levanta a questão da esperteza das abelhas em relação à matemática, provando que os únicos polígonos regulares que tornam possível a pavimentação de um plano são triângulo, quadrado e hexágono e que dentre estes polígonos com perímetro fixo, o hexágono é o que maximiza a área. Dessa forma, como as abelhas constroem seus favos no formato de prismas hexagonais, ele concluiu que a opção foi feita para minimizar o volume da cera usada em sua construção. Neste livro, Pappus também demonstra que o círculo tem maior área que um polígono regular de igual perímetro. “Aqui Pappus parece estar seguindo de perto uma obra, *Sobre figuras isoperimétricas*, escrita quase meio milênio antes por Zenodoro (cerca de 180 a.C.), da qual alguns fragmentos foram preservados por comentaristas posteriores” (BOYER, 2010, p.127). Infelizmente, o livro de Zenodoro foi perdido, no entanto algumas partes sobreviveram nas obras de Pappus.

O matemático suíço Jakob Steiner (1796 – 1863) apresentou várias demonstrações criativas e puramente geométricas para o problema isoperimétrico. Tais demonstrações foram criticadas por alguns matemáticos, pois assim como Zenodoro, Steiner assume a existência da solução para o problema. Dirichlet (1805 - 1859) alertou Steiner para o fato da sua prova estar incompleta, uma vez que não estava garantida a existência de uma solução para o problema. Perron (1880 – 1975), por sua vez, ao criticar a demonstração apresentada por Steiner, em um artigo publicado em 1913, disse que, utilizando um argumento similar ao de Steiner, poderia provar que o número 1 é o maior dos números naturais, pois, assumindo a existência de um número natural que é o maior e tomando um número natural diferente de 1, podemos encontrar outro que é maior simplesmente elevando ao quadrado. Assim, considerando $a \in \mathbb{N}$ o maior número natural, como $x \leq x^2, \forall x \in \mathbb{N}$, a única hipótese é ter $a = a^2$, ou seja, $a = 1$. Portanto, o 1 é o maior número natural.

A primeira demonstração rigorosa e completa do problema isoperimétrico surgiu por volta de 1880 com K. Weierstrass (1815-1897). Trata-se de uma demonstração complexa, utilizando o cálculo de variações.

Após Weierstrass, outros matemáticos solucionaram o problema, entre eles o alemão Hurwitz (1859 – 1919) que, em 1902, deu uma prova puramente analítica baseada nas séries de Fourier, o matemático austro-húngaro Blaschke (1885 -1962) que apresentou outra

demonstração com geometria diferencial em 1930, o matemático alemão Erhard Schmidt (1876 – 1959) que, em 1939, também vinculou sua prova à geometria diferencial e o espanhol Santaló (1911 – 2001) que usou geometria integral. Segundo Zoltán (2013), embora cada vez mais provas e generalizações sejam criadas utilizando-se dos conceitos matemáticos mais elaborados como, por exemplo, o cálculo das variações, até hoje não há nenhuma prova elementar real da existência da solução para o problema isoperimétrico.

2.2 A LENDA DE DIDO

O problema isoperimétrico tem suas raízes na mitologia. Sua beleza matemática está relacionada à lenda da fundação da cidade de Cartago, em 814 a.C, pela rainha Dido. A lenda de Dido ficou conhecida através do épico Eneida, escrito pelo poeta romano Virgílio (70 a.C – 19 a.C).

Segundo a lenda, a princesa fenícia Elisa, também conhecida como Dido, e seu irmão Pigmalião eram filhos de Muto, o rei de Tiro. Após o falecimento do pai, ainda muito jovem, Pigmalião foi aclamado rei.

Sendo Pigmalião um homem ambicioso, tramou a morte do cunhado, Siqueu, para tomar-lhe suas riquezas. Assim que tomou conhecimento do assassinato de seu marido, horrorizada com o crime e temendo a própria morte, Dido decidiu fugir, levando consigo todo o tesouro do marido e vários nobres tírios descontentes com o governo de seu irmão.

Desembarcando no norte da África, região onde hoje é a Tunísia, ela negociou com o rei Jarbas a compra das terras, ficando acertado que ela só teria em terras o que conseguisse abranger usando a pele de um boi. Então, a princesa e seus seguidores decidiram cortar o couro em tiras muito finas e emendá-las formando uma longa corda. Assim, eles cercaram uma grande quantidade de terras ao longo da costa, onde surgiu em seguida a cidade de Cartago (inicialmente Birsa, que significa couro).

A rainha Dido deparou-se com o seguinte problema: Dado um fio com um determinado comprimento, qual é a maior porção de terra que se consegue delimitar?

Logo, o problema de Dido consiste em determinar a forma do contorno de tal maneira que a área limitada fosse máxima. Segundo a lenda, ela deduziu corretamente que,

entre todas as figuras de mesmo perímetro, o círculo encerra a maior área. Assim, como a região a ser delimitada ficava à margem do mar, eles decidiram demarcar o terreno no formato de semicírculo.

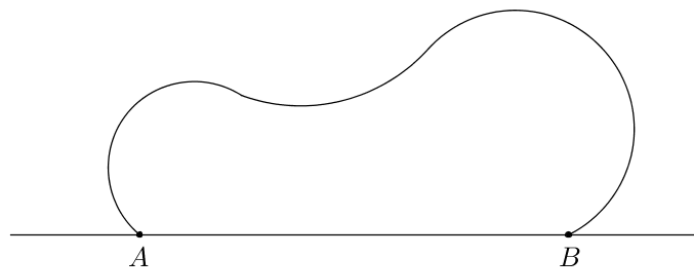
Figura 24 – Dido e seu povo cortando o couro de um boi.



Fonte: MADEIRA, 2005

Problema de Dido – Encontre a forma que tem a área máxima para um perímetro fixo, que é delimitada por uma linha reta e um arco curvilíneo cujas extremidades pertencem a essa linha.

Figura 25 – Problema de Dido.



Nas escavações arqueológicas observa-se a forma semicircular de Cartago original. Provavelmente, Dido resolveu esse problema isoperimétrico de maneira empírica, pois somente após alguns séculos surgiram demonstrações da solução desse problema.

Após Cartago tornar-se uma cidade poderosa com forte controle marítimo no Mediterrâneo, Jarbas propôs casamento à Dido. Sob a ameaça de destruir a cidade, caso

recusasse o pedido, a então rainha Dido pediu um prazo de três meses a fim de apaziguar a alma do marido falecido e, quando este prazo expirou, suicidou-se em uma pira fúnebre.

O épico Eneida, escrito pelo poeta romano Virgílio no século I a.C., faz referência ao problema isoperimétrico, através da história de Dido, embora não faça referência à forma como o terreno foi cercado. Abaixo, é reproduzido um trecho desse clássico, traduzido por Manuel Odorico Mendes, no século XIX, onde se evidencia tal problema.

*É longa a injúria, tem rodeios longos;
Mas traçarei seu curso em breve suma.
Siqueu, fenício em lavras opulento,
Foi da mísera esposa, e muito amado:
Com bom presságio o pai lha dera intacta.
Pigmalião, façanhoso entre os malvados,
Bárbaro irmão, do estado se empossara.
Interveio o furor: de fome de ouro
Cego, e à paixão fraterna sem respeito,
Pérfido, ímpio, a Siqueu nas aras mata;
O fato encobre, e a crédula esperança
Da amante aflita largo espaço ilude
Com mil simulações. Mas do inumado
Consorte, com esgares espantosos,
Pálida em sonhos lhe aparece a imagem:
Da casa o crime e trama desenleia;
A ara homicida, os retalhados peitos
Desnuda, e à pátria intima-lhe que fuja:
Prata imensa e ouro velho, soterrados,
Para o exílio descobre. Ela, inquieta,
Apressa a fuga, e atrai os descontentes
Que ou rancor ao tirano ou medo instiga;
Acaso prestes naus, manda assaltá-las;
Dos tesouros do avaro carregadas
Empegam-se: a mulher conduz a empresa!
Chegam d'alta Cartago onde o castelo
Verás medrando agora e ingentes muros:
Mercam solo (do feito o alcunham Birsa)
Quanto um coiro taurino abranja em tiras.*

Em sua obra, Virgílio, “sem se preocupar com a cronologia segundo a qual haveria pelo menos trezentos anos entre a tomada de Tróia e a fundação de Cartago” (TELMA, 2005, p. ii – iii), idealiza o romance entre o príncipe troiano Enéias e Dido. Na versão de Virgílio, após a derrota de Tróia, o herói, Enéias, foge rumo à Itália, mas devido a uma tempestade ancora em Cartago, que era governada pela rainha Dido. Passado um ano, quando Enéias é obrigado por Jarbas a continuar viagem, Dido, apaixonada por ele, não resistindo ao abandono, ergue uma enorme pira e suicida-se entre as chamas.

Figura 26 – *Enéias descreve a queda de Tróia a Dido*, Pierre-Narcisse Guérin (1774 – 1833), no Museu do Louvre.



Fonte: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/8/82/Pierre-Narcisse_Gu%C3%A9rin_-_Dido_and_Aeneas_-_WGA10972.jpg/220px-Pierre-Narcisse_Gu%C3%A9rin_-_Dido_and_Aeneas_-_WGA10972.jpg, acesso em 22/03/2014

Figura 27 – *Morte de Dido*, por Heinrich Friedrich Füger, 1792, Museu do Ermitage, São Petersburgo.



Fonte: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/d/dc/Heinrich_Friedrich_F%C3%BCger_006.jpg/800px-Heinrich_Friedrich_F%C3%BCger_006.jpg, acesso em 22/03/2014.

Não é por acaso que muitas cidades medievais tinham o formato circular ou semicircular. Como eram comuns muralhas de proteção ao redor das cidades e estes muros exigiam muito trabalho dos construtores e certa quantidade de material para sua construção, tendo conhecimento da solução deste problema isoperimétrico, a área cercada era maximizada com uma quantidade fixa de material.

Analisando as imagens via satélite pelo Google Earth, é possível notar que muitas cidades preservaram o formato de origem. Argumentando economicamente, esse formato concentrado visa à maior densidade demográfica e a racionalidade da ocupação do

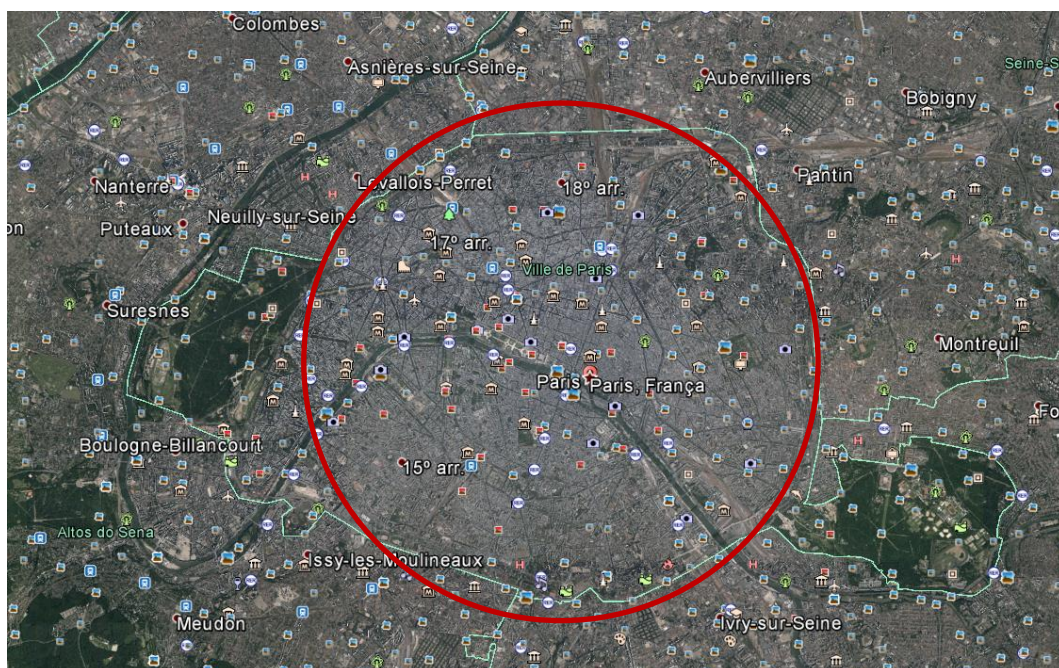
espaço, garantindo a racionalização dos investimentos públicos, principalmente no que se refere à otimização de infraestrutura (água, energia, esgoto, etc.). Dessa forma, quanto mais o formato de uma cidade se aproxima de um círculo, maior será a otimização do espaço. No entanto, algumas vezes este formato é impedido devido ao relevo da região.

Figura 28 – Cidade de Paris, França (1530).



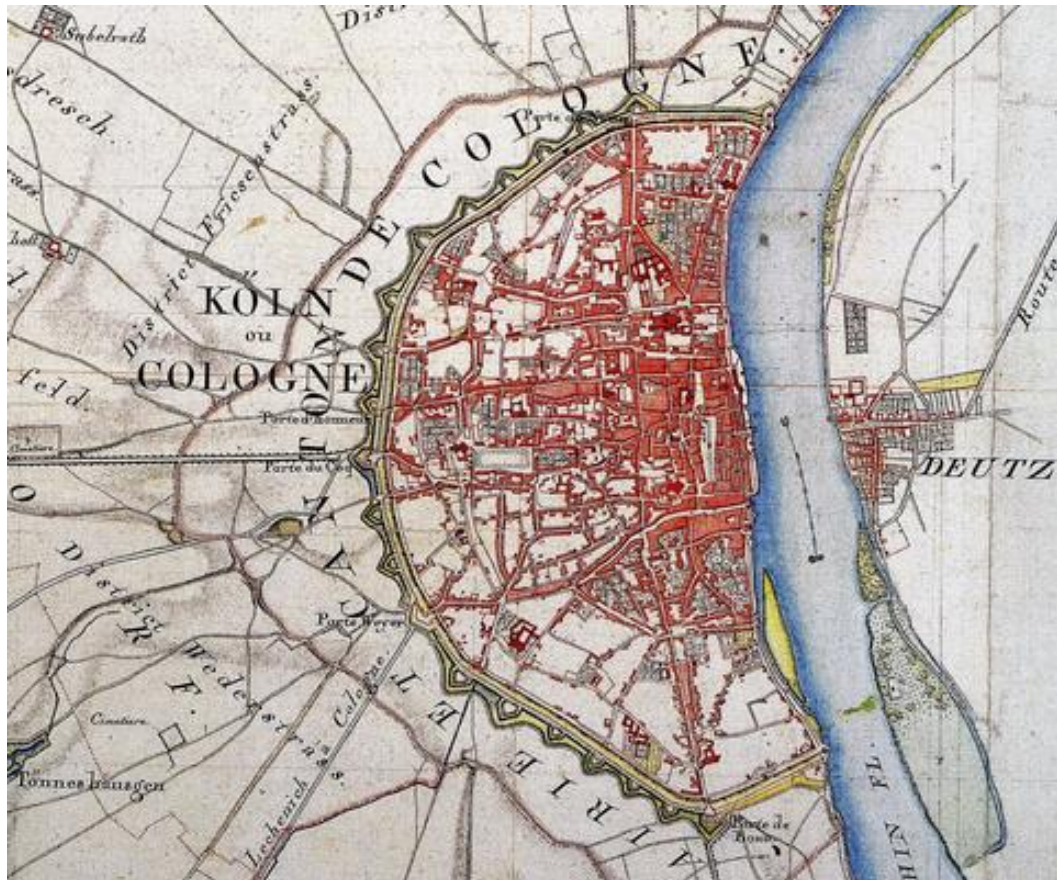
Fonte: http://3.bp.blogspot.com/-InR_XhmG00s/UIIQcCDy3I/AAAAAAAABbs/WWgNPnmpYI/s640/6a00d8341d17e553ef01156f3f9eda970c-800wi.jpg, acesso em 22/03/2014

Figura 29 – Cidade de Paris, França (2014).



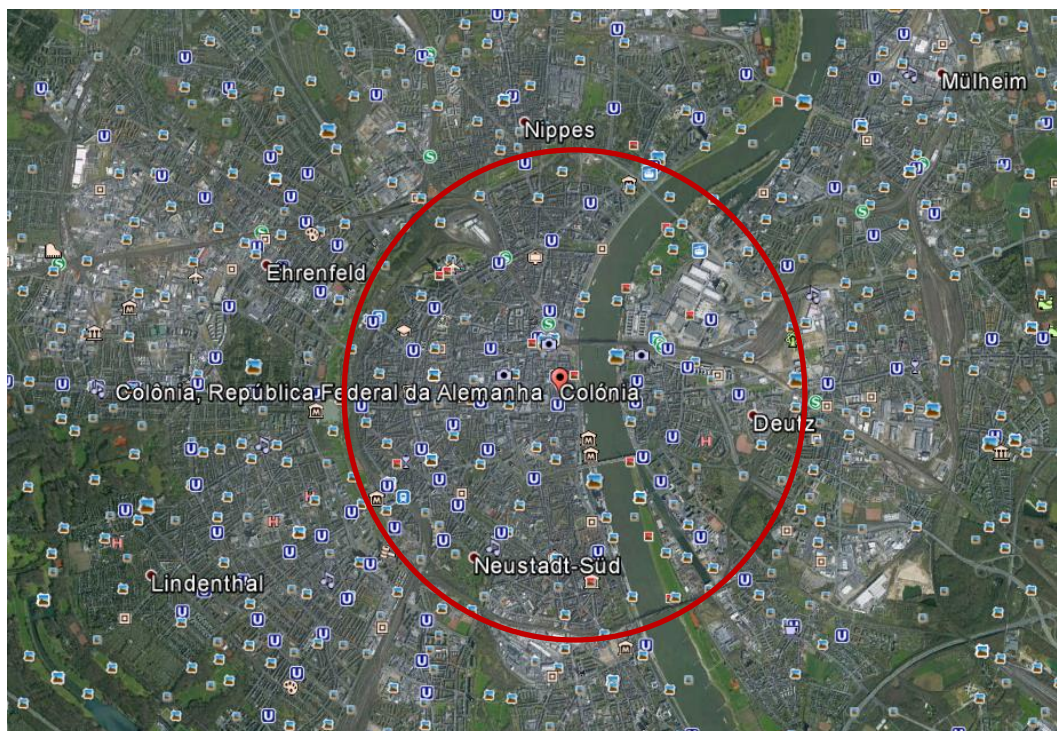
Fonte: Google Earth, acesso em 14/03/2014

Figura 30 – Cidade Colônia, Alemanha (1807).



Fonte: http://www.worldmapfinder.com/Map_Detail.php?MAP=110969&FN=cologne-1807-2.jpg&MW=2379&MH=2069&FS=2714&FT=jpg&WO=0&CE=3&CO=11&CI=688&IT=0&LC=9&PG=1&CS=utf-8&FU=http%3A%2F%2Ffilteraryecology.files.wordpress.com%2F2013%2F05%2Fcologne-1807-2.jpg&SU=http%3

Figura 31 – Cidade de Colônia, Alemanha (2014).



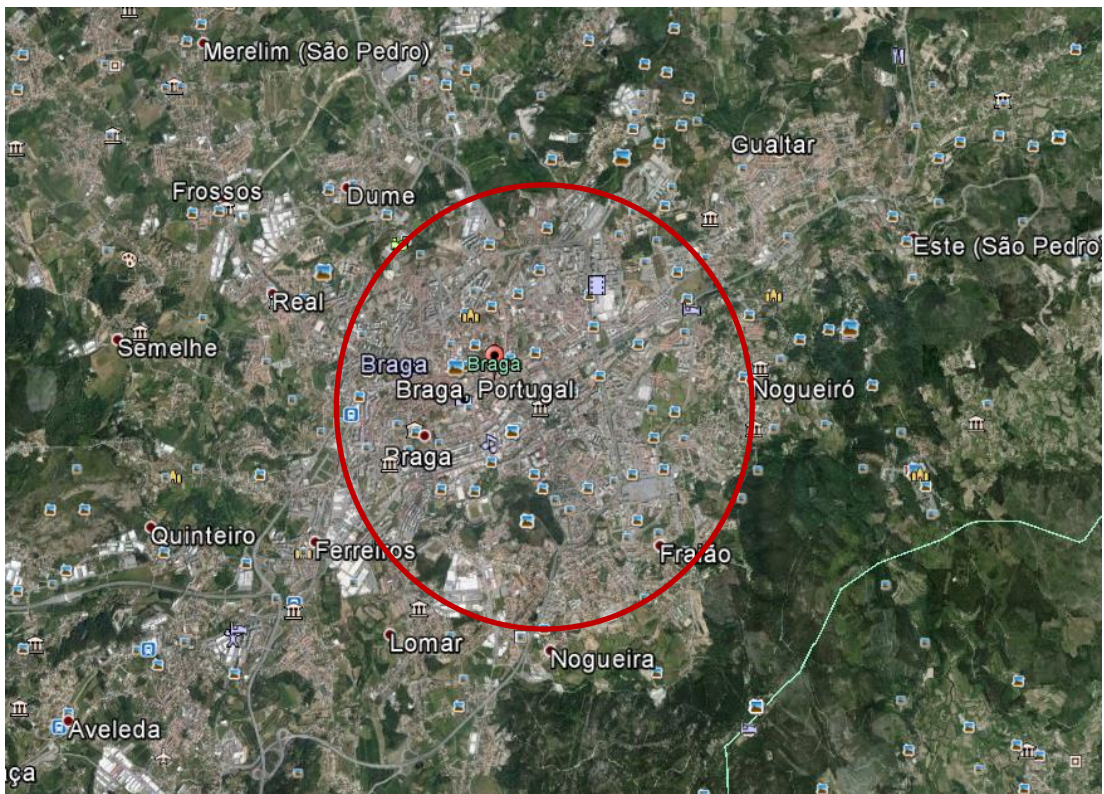
Fonte: Google Earth, acesso em 03/04/2014

Figura 32 – Mapa Medieval da cidade de Braga (1594).



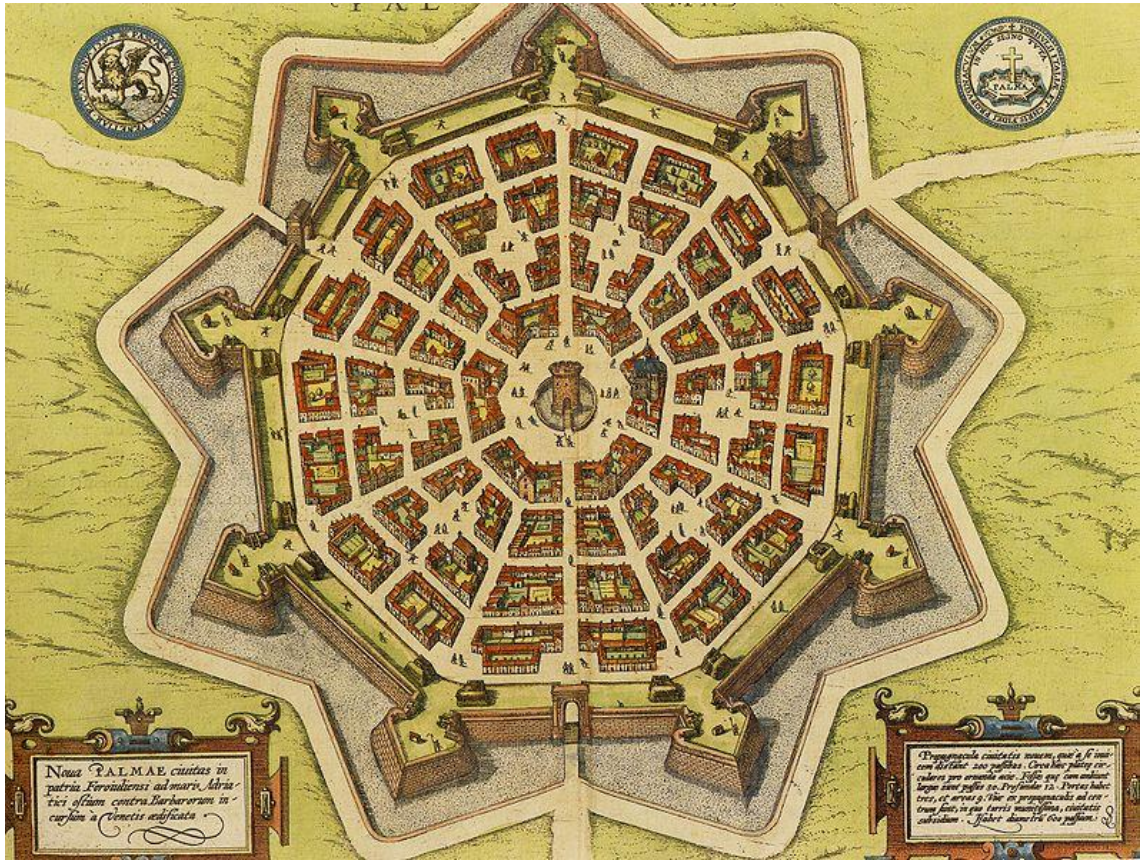
Fonte: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/02/Braga-mapa_medieval.jpg, acesso em 22/03/2014

Figura 33 – Cidade de Braga, Portugal (2014).



Fonte: Google Earth, acesso em 14/03/2014

Figura 34 – Cidade de Palmanova, Itália (c.a.1600).



Fonte: <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/a/a2/Palmanova1600.jpg/794px-Palmanova1600.jpg>, acesso em 12/04/2014

Figura 35 – Cidade de Palmanova, Itália (2014).



Fonte: Google Earth, acesso em 12/04/2014

2.3 A SOLUÇÃO DE STEINER PARA O PROBLEMA ISOPERIMÉTRICO

Jakob Steiner (1796 – 1863) arquitetou diferentes maneiras engenhosas para provar que o círculo encerra maior área entre todas as curvas fechadas com um comprimento dado. A seguir, apresentaremos uma das soluções realizadas por Steiner para o problema isoperimétrico.

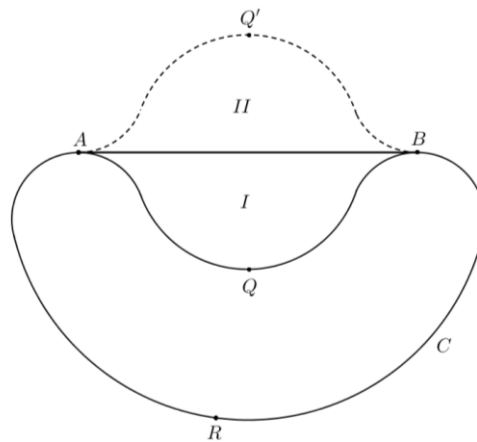
Problema isoperimétrico: Entre todas as curvas planas fechadas de um dado comprimento L , encontrar aquela que engloba a maior área.

A demonstração de Steiner parte da hipótese de que uma solução efetivamente existe, supondo que a curva C seja a procurada, com comprimento L e área máxima.

Vamos mostrar que C é uma curva convexa.

Suponhamos que a curva C não seja convexa, como na Figura 36, então um segmento AB poderia ser traçado em algum par de pontos A e B sobre C tal que o segmento AB esteja fora da região delimitada por C , com exceção dos pontos A e B . O arco $AQ'B$, que é a reflexão de AQB na reta AB , forma juntamente com o arco ARB , uma curva de comprimento L englobando maior área que a curva original, pois inclui as regiões I e II . Isto contradiz a suposição inicial de que C englobaria maior área para uma curva fechada de comprimento L . Portanto, a curva C procurada deve ser convexa.

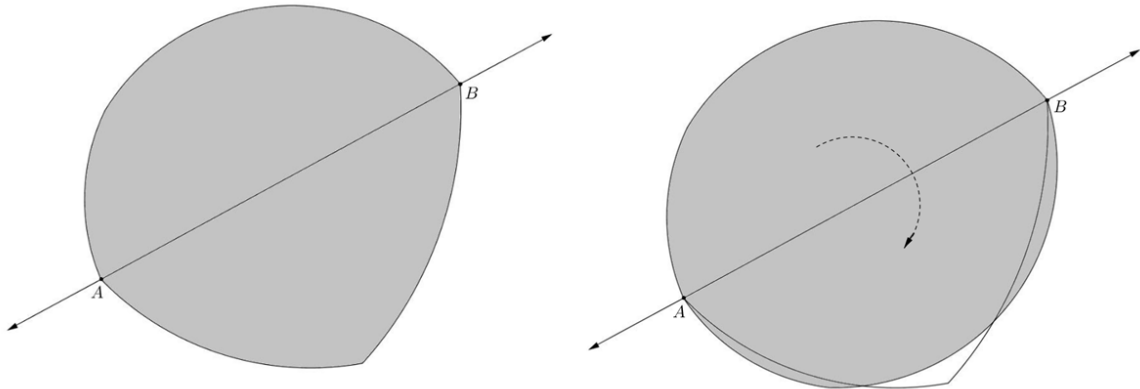
Figura 36 – A figura de área máxima deve ser convexa.



Fixando um ponto A sobre a curva C , podemos encontrar outro ponto B , também sobre a curva C , de modo que a reta \overline{AB} divide o perímetro em duas partes iguais.

Assim, esta reta também divide a área da superfície de C em duas partes iguais, uma vez que, caso contrário, seria suficiente tomar a figura formada pela parte com maior área e refleti-la em relação à reta \overleftrightarrow{AB} para formar uma figura com o mesmo perímetro que a original, mas com área maior (Figura 37).

Figura 37 – O segmento AB divide o perímetro da curva C em duas partes iguais.



Podemos supor que a figura é simétrica em relação à reta \overleftrightarrow{AB} ; se não fosse, uma vez que as duas metades têm mesma área e mesmo perímetro, bastaria tomar uma das metades e refleti-la em relação a esta reta.

Como as duas metades possuem a mesma área e o mesmo perímetro, consideraremos apenas a metade da solução. Assim, devemos encontrar o arco de comprimento $L/2$ tendo seus pontos extremos A, B sobre uma reta e encerrando uma área máxima entre ele e esta reta. Mostraremos que a solução para este novo problema é um semicírculo. Logo, a solução para o problema isoperimétrico será o círculo.

Antes de prosseguirmos com a demonstração, demonstraremos duas proposições.

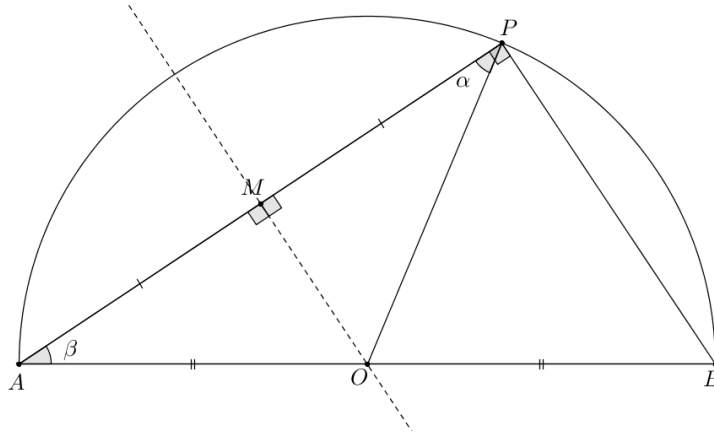
Proposição 2.3.1 – Considere a região formada por uma curva convexa C e pelo segmento AB . Se P é um ponto sobre C tal que $\widehat{APB} = 90^\circ$, então C é um semicírculo.

Demonstração: Sejam O o ponto médio do segmento AB e P um ponto qualquer sobre C . Devemos provar que $\overline{OP} = \overline{OA}$. Para isso, temos que mostrar que $\alpha = \beta$, sendo $\alpha = \widehat{APO}$ e $\beta = \widehat{OAP}$.

Traçando uma reta paralela ao segmento PB passando por O , essa reta cortará o segmento AP em M . Assim, pelo Teorema 1.3.3, temos que M é o ponto médio do segmento

AP (Figura 38). Dessa forma, os ângulos correspondentes $\angle AMO$ e $\angle APB$ são congruentes. Logo, $\widehat{AMO} = \widehat{PMO} = 90^\circ$. Portanto, pelo Axioma 1.3.1 (caso de congruência de triângulos - LAL), os triângulos AMO e PMO são congruentes. Então, $\alpha = \beta$.

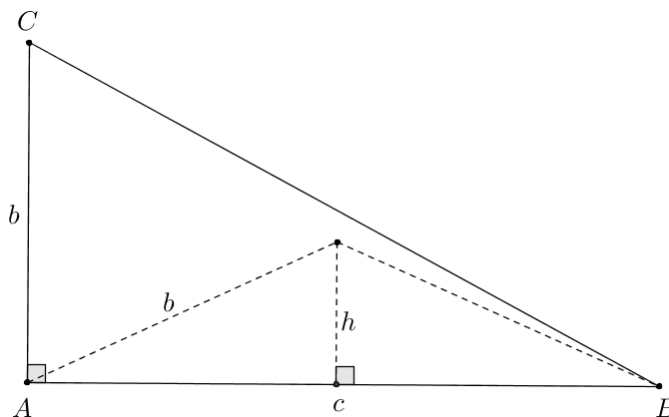
Figura 38 – Proposição 2.3.1.



Proposição 2.3.2 – Entre todos os triângulos com dois lados com medidas fixas, o de maior área é o triângulo que possui esses lados por catetos.

Demonstração: Seja ABC um triângulo qualquer tal que $\overline{AB} = c$ e $\overline{AC} = b$ (Figura 39). Se h é a medida da altura do triângulo na base AB , então a área do triângulo é dada por $A = \frac{1}{2}ch$. Assim, a área será máxima quando a medida da altura do triângulo for a maior possível e, isto ocorre quando a altura coincide com o segmento AC , ou seja, quando o triângulo é retângulo.

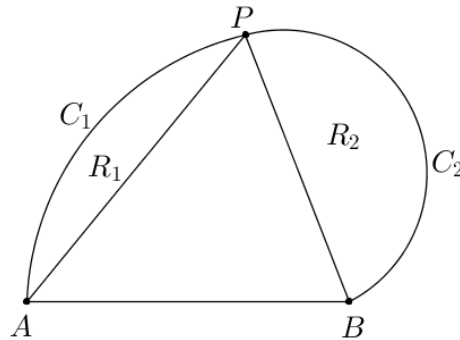
Figura 39 – Triângulo de área máxima, dados dois lados.



Voltemos à última etapa da demonstração do problema isoperimétrico.

Seja C' uma curva convexa que, entre as curvas convexas de comprimento $L/2$, delimita juntamente com o segmento AB a maior área. Provemos usando a Proposição 2.3.1 que C' é um semicírculo. Para isto, temos que provar que todo ângulo inscrito, assim como o ângulo $\angle APB$ (Figura 40), é um ângulo reto.

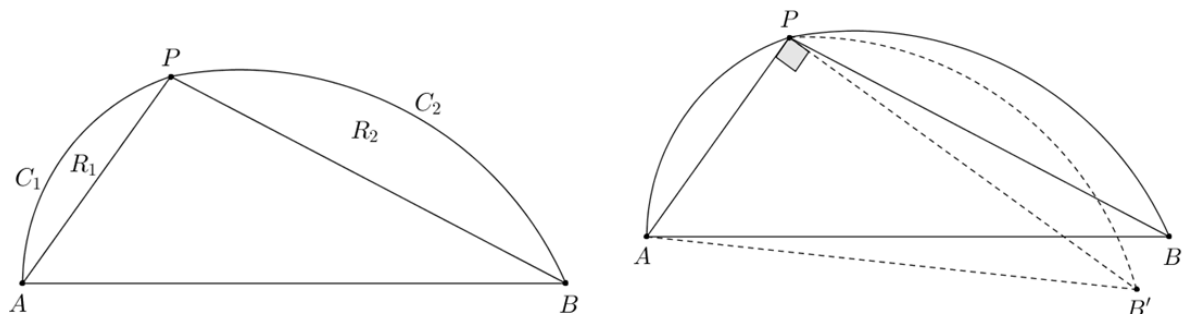
Figura 40 – Região dividida em três outras.



Suponhamos que o ângulo $\angle APB$ não seja reto. Então, podemos movimentar o ponto B de tal forma que as áreas R_1 e R_2 e o comprimento do arco APB ($C_1 \cup C_2$) não sejam alterados (Figuras 41 e 42). A variação da área encerrada pelo segmento AB e pela curva C' estará condicionada à modificação do triângulo APB . Assim, pela Proposição 2.3.2, a maior área será obtida quando o triângulo APB for retângulo.

Devemos observar que, se a medida do ângulo $\angle APB$ fosse maior que 90° , deslocaríamos o ponto B até obter $\widehat{APB} = 90^\circ$, aproximando-o do ponto A . Dessa forma, a área do triângulo seria máxima e a curva C' continuaria convexa (Figura 41).

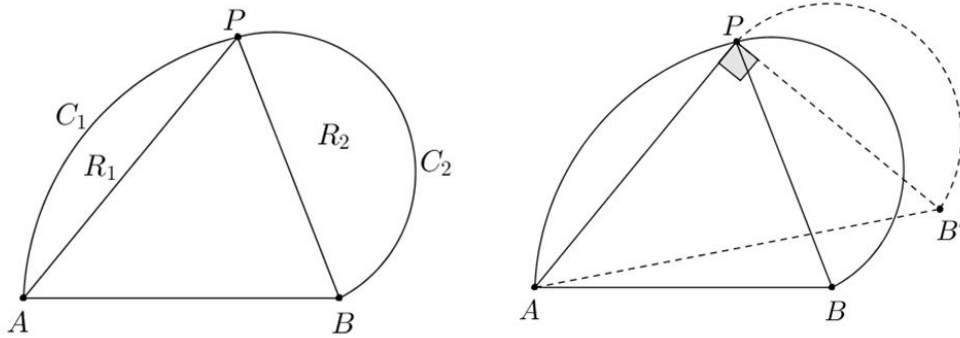
Figura 41 – Movimentação do ponto B , para $\widehat{APB} > 90^\circ$.



Entretanto, com a medida do ângulo $\angle APB$ menor que 90° , o ponto B se distanciaria de A , fazendo com que a curva C' deixasse de ser convexa (Figura 42). Então, teríamos que retomar o argumento para obtermos uma curva convexa de mesmo comprimento

e maior área. Esta contradição mostra que, para todo ponto P , o ângulo $\angle APB$ deve ser um ângulo reto.

Figura 42 – Movimentação do ponto B , para $\widehat{APB} < 90^\circ$.



Assim, concluímos que a curva APB é um semicírculo; então, a solução para o problema isoperimétrico é o círculo.



Observe que, como dissemos anteriormente, a solução de Steiner só é possível porque ele parte da hipótese de que existe uma solução para o problema e, em seguida, analisa a hipótese e extrai conclusões que permitam descrever e construir a solução.

Podemos expressar a propriedade isoperimétrica do círculo na forma de uma desigualdade. Se L é o comprimento do círculo e r seu raio, temos $L = 2\pi r$. Assim, seu raio é $r = L/2\pi$ e, conseqüentemente, sua área é $A = \pi(L/2\pi)^2 = L^2/4\pi$. Portanto, segue a desigualdade isoperimétrica entre a área A e o comprimento L de qualquer figura, sendo o sinal de igualdade válido apenas para o círculo,

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi}.$$

3 ISOPERIMETRIA NO GEOPLANO

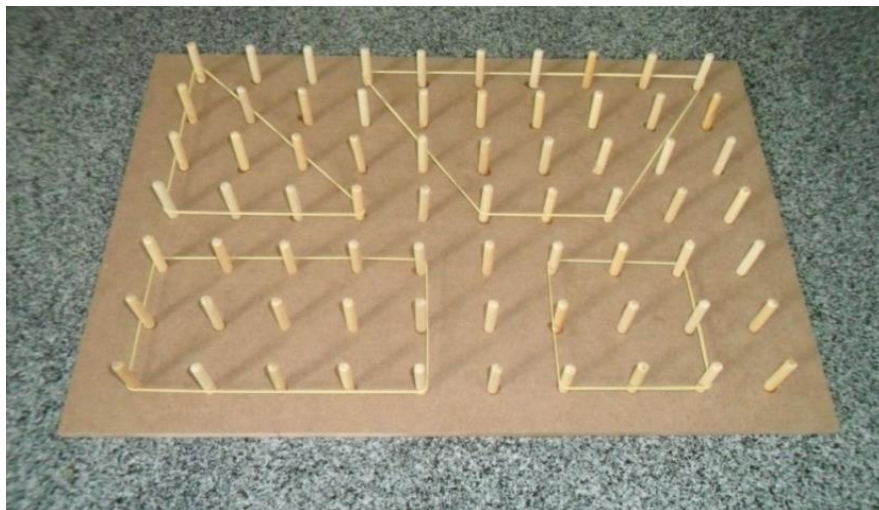
Neste capítulo, procuramos mostrar a importância do uso do geoplano em sala de aula. A seguir, propomos alguns problemas para serem solucionados com o auxílio deste recurso didático.

3.1 O GEOPLANO EM SALA DE AULA

Segundo Vieira (2010), a utilização de um novo recurso e de uma nova metodologia durante o processo de ensino e aprendizagem pode colaborar no desenvolvimento das habilidades matemáticas, auxiliando no exercício da criatividade e autonomia do aluno, aumentando sua capacidade de argumentação e dedução.

O geoplano é um material criado pelo matemático inglês Calleb Gattegno, do Institute of Education, London University em 1961. Constitui-se de uma base de madeira ou outro material, onde são fixados pregos ou pinos de forma a obter uma malha pontilhada. Elásticos de borracha ou barbantes são utilizados para construir as figuras no geoplano.

Figura 43 – Geoplano quadriculado.



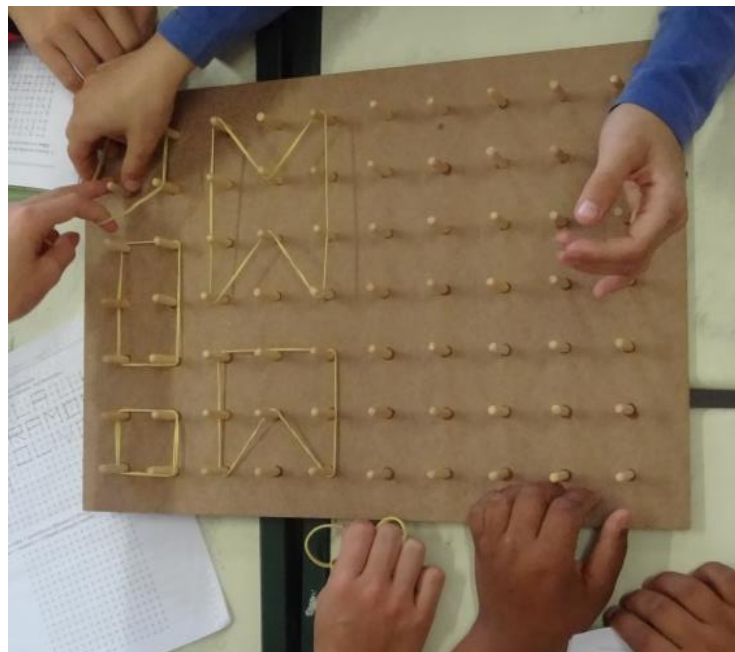
Fonte: o próprio autor

A atividade realizada com o auxílio do geoplano permite desenvolver os conceitos de área e perímetro, de forma concreta, contribuindo para uma maior compreensão e distinção dos mesmos.

Como afirma Deguire (1994),

Materiais de manipulação fornecem oportunidades para raciocinar com objetos e, portanto, para ensinar a resolver problemas e ensinar para resolver problemas. Um deles é o geoplano. Os resultados de atividades com o geoplano podem ser registrados em papel pontilhado, de preferência com os pontos dispostos de maneira a corresponder aos geoplanos que efetivamente estão sendo usados. Há várias atividades com o geoplano que podem proporcionar prazer e benefícios às crianças. Por exemplo, elas podem fazer figuras nas pranchas, dar nomes às figuras já feitas, contar para determinar as áreas e os perímetros das figuras e usar os pinos como sistemas de coordenadas ou rede. Cada uma delas pode ser uma excelente atividade de aprendizagem e também pode ser ampliada para fornecer desafios de resolução de problemas (DEGUIRE, 1994, p.77).

Figura 44 – Alunos manipulando um geoplano.



Fonte: o próprio autor

Atualmente, além do geoplano material, temos também o geoplano virtual, que utiliza as facilidades que o computador proporciona, tornando mais atual e atraente o processo de ensino e aprendizagem com o Geoplano.

3.2 GEOPLANO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ISOPERIMÉTRICOS

Problema 3.2.1 – Figuras planas com o mesmo perímetro possuem necessariamente a mesma área?

Solução: Para responder a este problema, vamos construir, no geoplano quadriculado, várias figuras com perímetro fixo, como por exemplo, perímetro igual a 12 unidades de comprimento.

Antes de iniciar a atividade, é preciso estabelecer duas unidades convenientes para medir comprimentos e áreas de figuras no Geoplano Quadriculado.

- A unidade de medida de comprimento (u.c.) corresponderá à medida do segmento de reta entre dois pinos adjacentes na horizontal ou vertical.
- A unidade de medida de área (u.a.) corresponderá à superfície quadrada delimitada por quatro pinos, sem que haja outro em seu interior.

Figura 45 – Figuras planas de perímetro igual a 12 u.c.

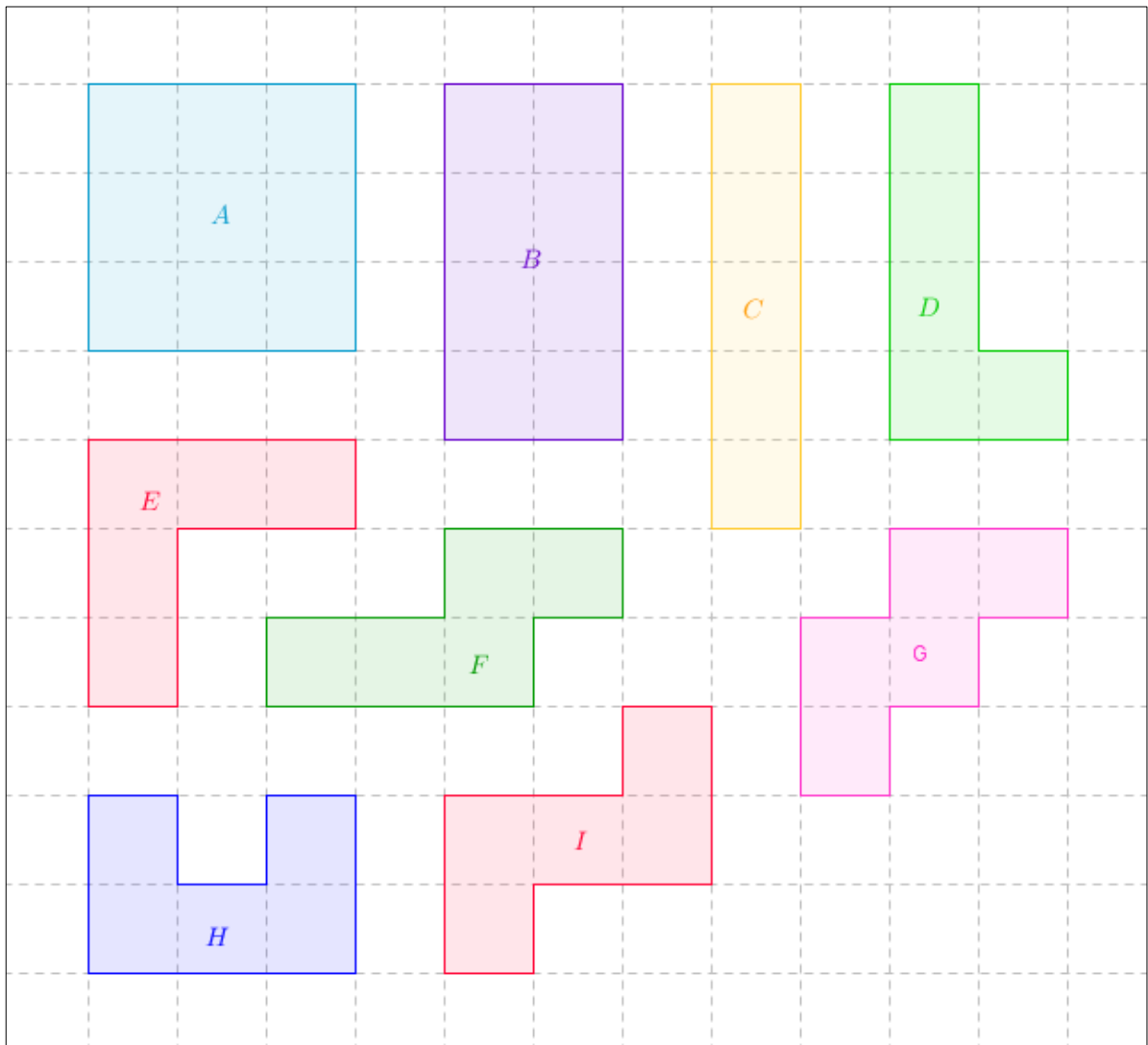


Tabela 1 – Área e perímetro das figuras.

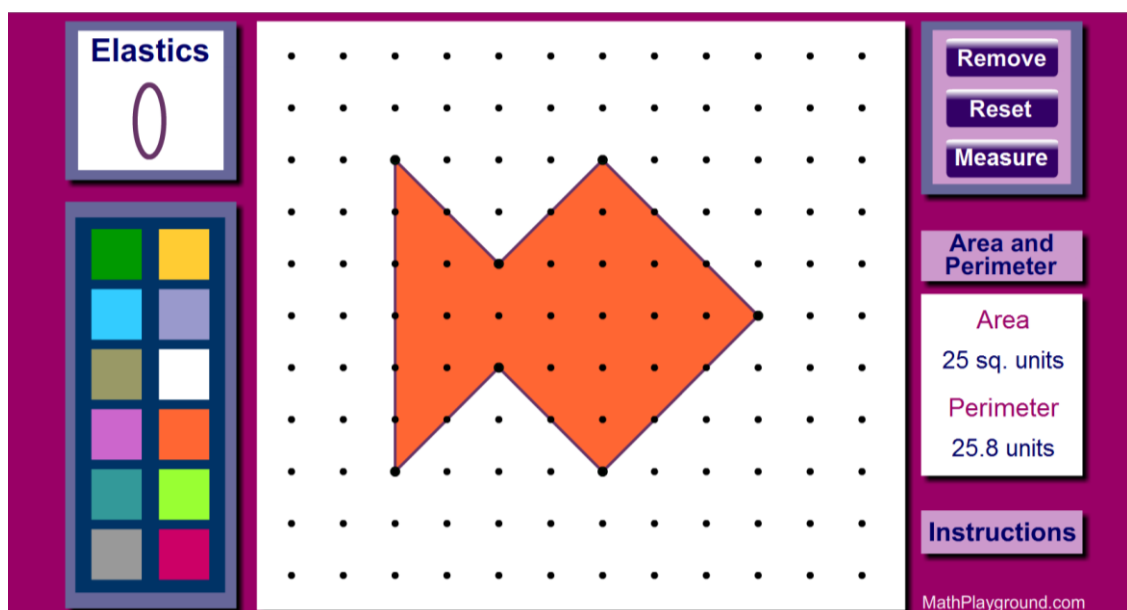
<i>Figura</i>	<i>Perímetro</i>	<i>Área</i>
<i>A</i>	12 u.c.	9 u.a.
<i>B</i>	12 u.c.	8 u.a.
<i>C</i>	12 u.c.	5 u.a.
<i>D</i>	12 u.c.	5 u.a.
<i>E</i>	12 u.c.	5 u.a.
<i>F</i>	12 u.c.	5 u.a.
<i>G</i>	12 u.c.	5 u.a.
<i>H</i>	12 u.c.	5 u.a.
<i>I</i>	12 u.c.	5 u.a.

Fonte: o próprio autor

Observando a tabela 1, verificamos que a figura *A* possui área igual a 9 unidades de medida de área, a *B* possui área igual a 8 unidades de medida de área e as figuras *C*, *D*, *E*, *G*, *H* e *I* possuem áreas iguais a 5 unidades de medida de área. Dessa forma, concluímos que, mesmo possuindo o mesmo perímetro, suas áreas não são necessariamente iguais e, entre as figuras construídas, o quadrado é a que determina maior área.

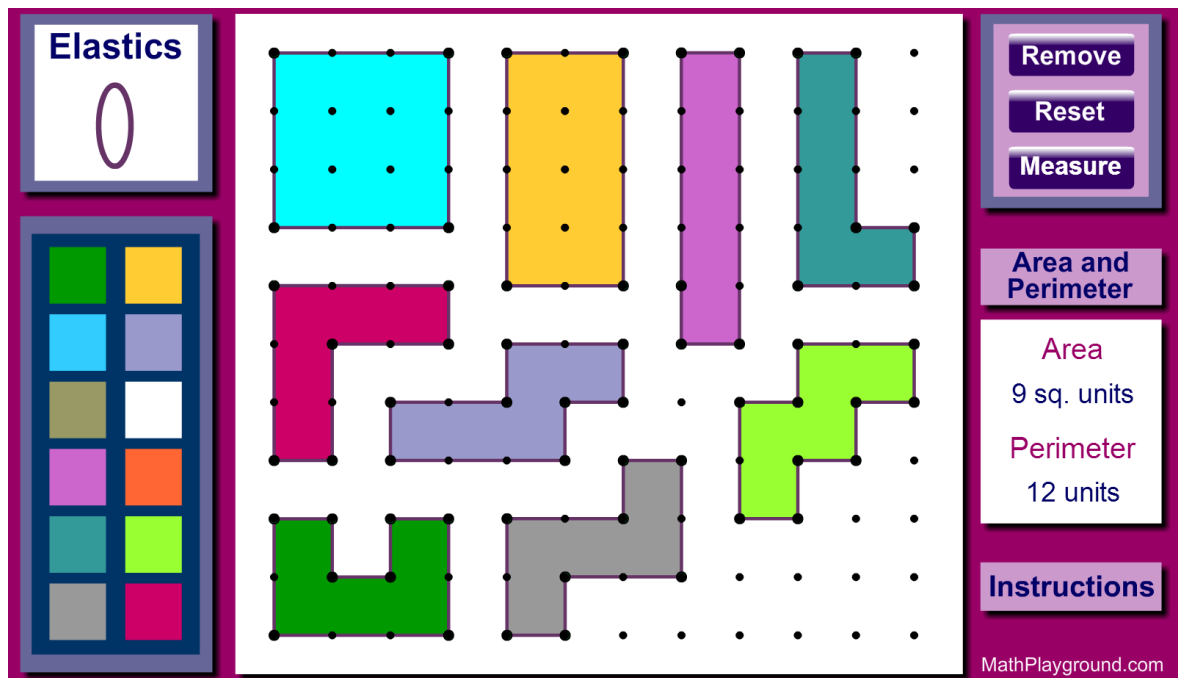
Outra opção interessante é realizar as construções em um geoplano virtual, como o que foi utilizado para a construção das Figuras 46 e 47, disponível em http://escolovar.org/mat_geometri_geoplano.mathplay.swf, acesso em 29/06/2014. No caso específico deste geoplano, o próprio software determina o perímetro e a área da figura selecionada.

Figura 46 – Figura de perímetro 25,8 u.c. construída no geoplano virtual.



Fonte: http://escolovar.org/mat_geometri_geoplano.mathplay.swf, acesso em 29/06/2014.

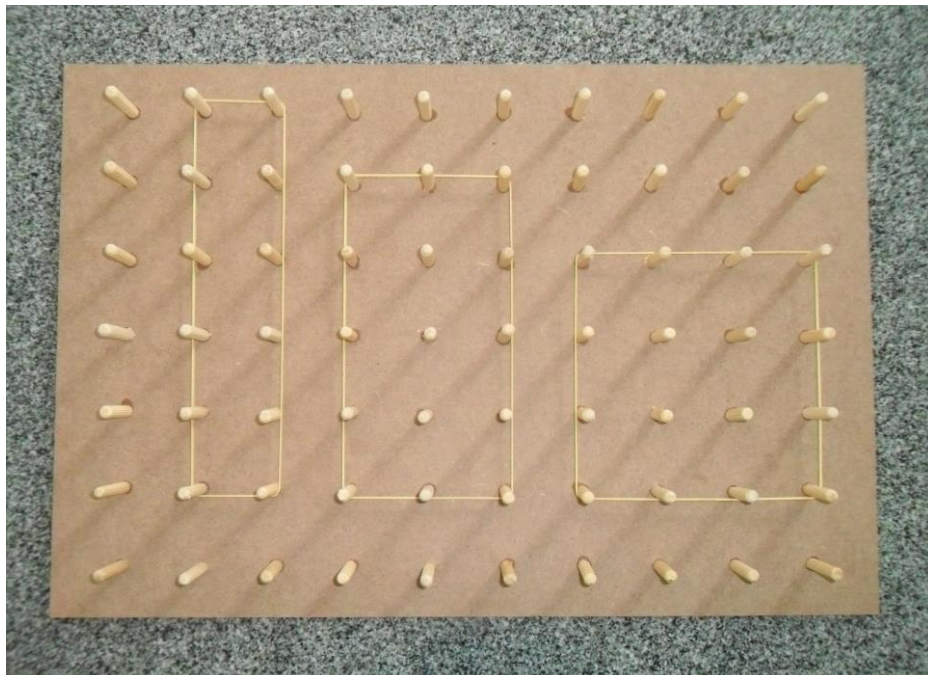
Figura 47 – Figuras de perímetro 12 u.c. construídas no geoplano virtual.



Fonte: http://escolovar.org/mat_geometri_geoplano.mathplay.swf, acesso em 29/06/2014.

Problema 3.2.2 – Entre todos os retângulos com perímetro igual a 12 u.c., possíveis de serem construídos no geoplano quadriculado, qual encerra maior área?

Figura 48 – Retângulos de perímetro 12 u.c. construídos no geoplano.



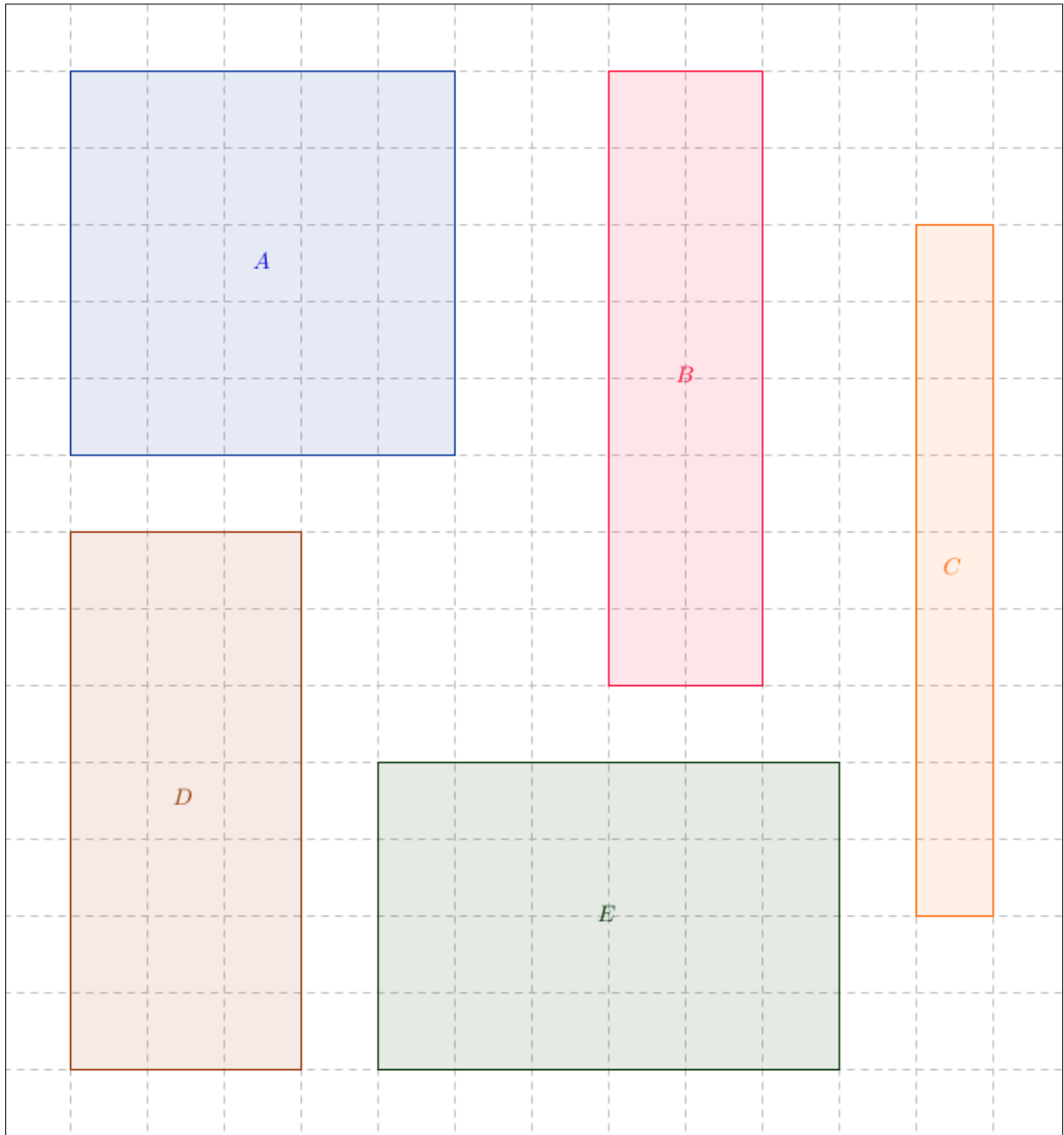
Fonte: o próprio autor

Solução: Das construções realizadas no Problema 3.2.1, é possível verificar que o quadrado é o que possui maior área.

Problema 3.2.3 – Entre todos os retângulos com perímetro igual a 20 u.a., possíveis de serem construídos no geoplano quadriculado, qual encerra maior área?

Solução: Observando as construções realizadas no geoplano (Figura 49), é possível concluir que o quadrado de lado 5 u.c. é o retângulo que possui maior área.

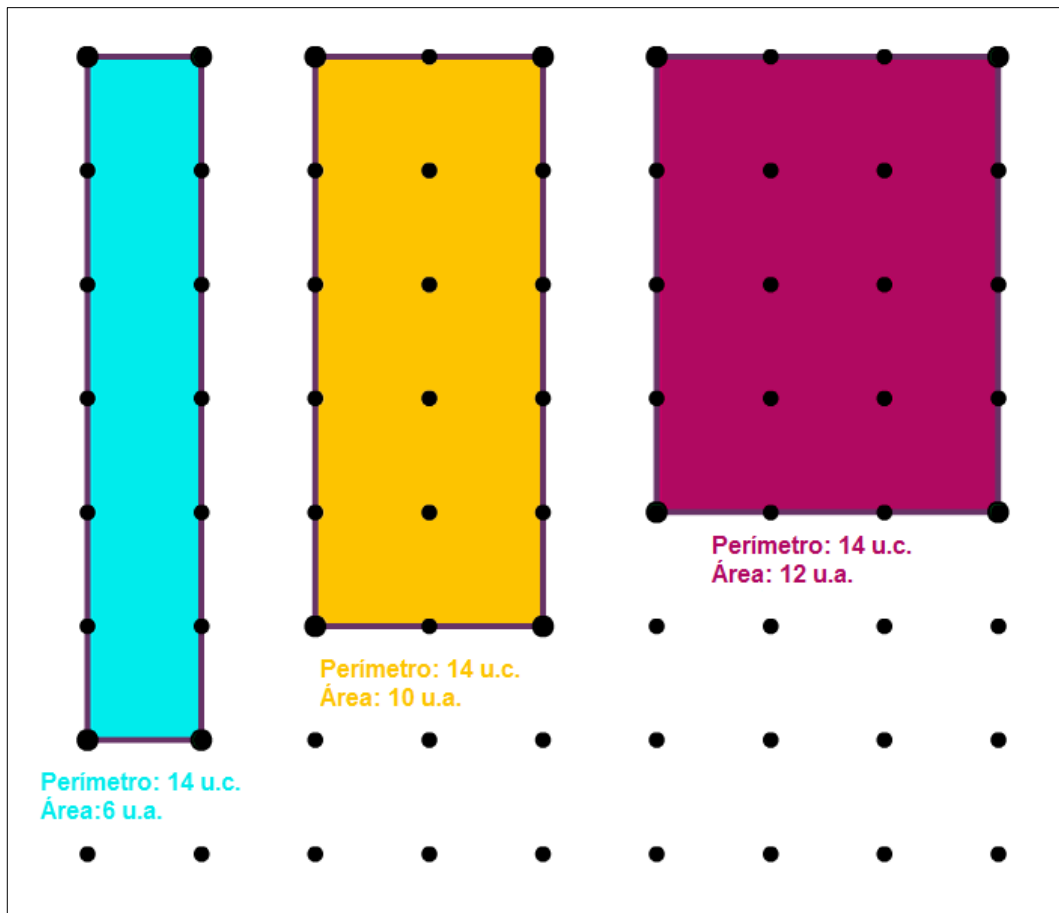
Figura 49 – Retângulos com perímetro de 20 u.c.



Problema 3.2.4 – Com a ajuda do geoplano, podemos concluir que, entre todos os retângulos de perímetro fixo, o que determina maior área é o quadrado?

Solução: Tomando como base apenas as construções de retângulos com mesmo perímetro no geoplano, não chegaríamos a esta conclusão. Por exemplo, se construíssemos retângulos com perímetro igual a 14 u.c. (Figura 50), concluiríamos que o de maior área é o que possui dimensões 3u.c. por 4 u.c., ou seja, não é um quadrado.

Figura 50 – Retângulos com perímetro de 14 u.c.



Fonte: o próprio autor

Após a construção de variados retângulos com mesmo perímetro, mesmo não sendo possível a construção de um quadrado, devido às limitações do geoplano, ressaltamos a importância de o aluno perceber que a área aumenta estritamente quando a diferença entre a medida do comprimento e da altura do retângulo diminui, de modo que, quando essa diferença é nula, temos o retângulo de área máxima, isto é, temos um quadrado.

Este trabalho possibilitará também o uso da malha quadriculada, facilitando a manipulação e o registro.

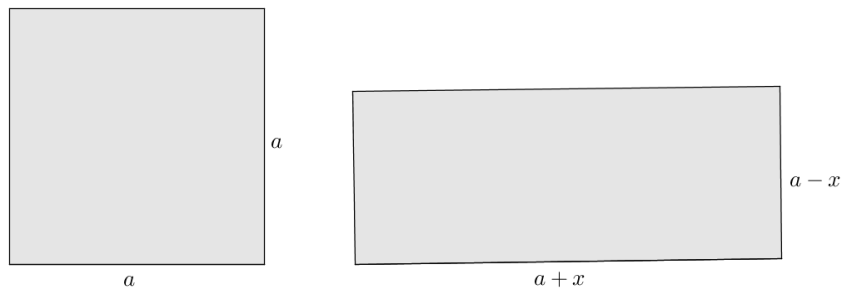
Problema 3.2.5 – Dentre todos os retângulos de mesmo perímetro, qual o de maior área?

Por se tratar de uma prova simples, sugerimos a solução de Zenodoro (ca. 200 a.C – ca.140 a.C), apresentada no livro de Garbi (2010, p.126).

Demonstração: Consideremos um quadrado de lado a , perímetro $4a$ e uma família de retângulos de perímetro também igual a $4a$. Para que não ocorra alteração do perímetro, os lados de tais retângulos medem $(a + x)$ e $(a - x)$, como mostra a Figura 51.

Fazendo variar x , tal que $0 \leq x < a$, são obtidas todas as alternativas possíveis.

Figura 51 – Demonstração de Zenodoro.



Assim, a área do quadrado é a^2 , enquanto as áreas dos retângulos são $(a - x)(a + x) = a^2 - x^2$, onde $0 \leq x < a$. Logo, exceto para $x = 0$, a área de qualquer dos retângulos é sempre menor do que a área do quadrado, cuja área a^2 é máxima.



4 ISOPERIMETRIA NO GEOGEBRA

Neste capítulo, apresentamos o software GeoGebra e sua funcionalidade em sala de aula para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Além disso, propomos problemas para serem levantadas conjecturas a partir da experimentação e criação de objetos geométricos com o auxílio deste software, para que, na sequência, sejam apresentadas suas devidas demonstrações.

4.1 O GEOGEBRA EM SALA DE AULA

O GeoGebra é um software gratuito de Matemática dinâmica e multiplataforma que reúne geometria, álgebra, tabelas, gráficos, probabilidade, estatística e cálculos simbólicos em um único ambiente. Criado por Markus Hohenwarter, o GeoGebra foi desenvolvido para ser um aliado no processo de ensino e aprendizagem da Matemática em todos os níveis de ensino.

O referido software pode propiciar oportunidades para o desenvolvimento do raciocínio e para a troca de ideias, envolvendo conceitos já conhecidos e explorando novos conceitos, exigindo que os alunos usem raciocínio dedutivo e analisem cada possibilidade apresentada. Através dessa exploração, os alunos podem adquirir mais maturidade geométrica, atingindo níveis mais altos de compreensão (VIEIRA, 2010, p. 60).

Segundo Zulatto (2002), o uso de softwares de Geometria Dinâmica possibilita realizar construções geométricas, feitas usualmente com régua e compasso, de maneira dinâmica e rápida. A utilização desse recurso leva o aluno a averiguar a veracidade de suas hipóteses ou a validade de propriedades enunciadas.

No que tange à exploração, o aluno pode formular suas próprias conjecturas e tentar verificar se elas são válidas. Ou seja, o próprio aluno irá realizar a verificação e validação da conjectura que formulou. Isso é possível devido aos recursos dos softwares, como arrastar, que possibilita a simulação de diferentes casos da figura, como se o aluno estivesse verificando “todos” os casos possíveis de uma mesma família de configuração (ZULATTO, 2002, p. 21).

Observando as medidas apresentadas pelo software após cada deformação, é possível comprovar conjecturas, mas é importante que, ao se utilizar softwares de geometria

dinâmica, o professor tenha em mente que há necessidade de estimular os alunos a demonstrar os resultados. Ou, ainda, nas palavras de Freitas,

[...] a apresentação de demonstrações gerais de resultados não invalida nem menospreza a atividade de descoberta, baseada em casos particulares, de regularidades que se vêm a revelar como sendo resultados gerais. Mesmo na investigação matemática este tipo de aproximação é muito frequentemente usado, como tentativa de descobrir o resultado que se procura. No entanto, ninguém deve ficar convencido da veracidade de uma afirmação matemática geral a partir de exames de casos particulares, por muito numerosos que eles sejam, pois essa análise nunca é equivalente a uma demonstração (FREITAS,2011, p. 5).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) destacam a importância da construção de argumentos plausíveis pelos alunos, uma vez que a prática da argumentação é fundamental para a compreensão das demonstrações. Dessa forma, os PCN (BRASIL,1998, p. 126) afirmam serem muito propícias as atividades de geometria a fim que o professor construa, através de experiências concretas, um caminho que leve os alunos a compreenderem o quanto a prova é importante e necessária para legitimar as hipóteses levantadas. Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, para isso é necessário

[...] colocar os alunos em um processo de aprendizagem que valorize o raciocínio matemático – nos aspectos de formular questões, perguntar-se sobre a existência de solução, estabelecer hipóteses e tirar conclusões, apresentar exemplos e contraexemplos, generalizar situações, abstrair regularidades, criar modelos, argumentar com fundamentação lógico-dedutiva. [...] (Brasil, 2006, p. 70).

4.2 GEOGEBRA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ISOPERIMÉTRICOS

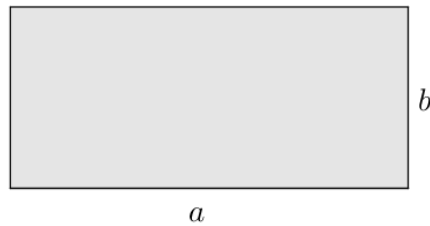
Problema 4.2.1 – Entre todos os retângulos de perímetro fixo, encontrar aquele que tem maior área.

Solução: Para a solução desse problema, devemos iniciar fazendo o seguinte questionamento:

Como construir vários retângulos com o mesmo perímetro usando o software GeoGebra?

Para construirmos retângulos de mesmo perímetro, é necessário primeiramente fixarmos o valor para o perímetro. Consideremos o retângulo de perímetro fixo p e lados de medidas a e b , então $p = 2.(a + b)$.

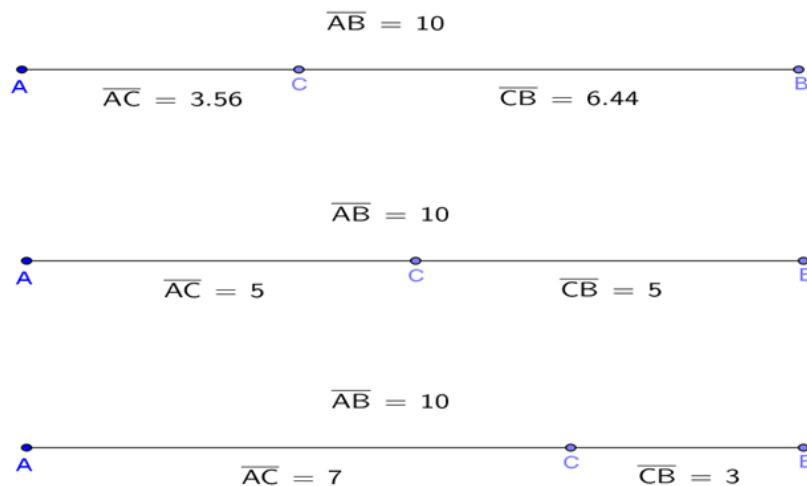
Figura 52 – Retângulo de lados a e b .



Fixar o perímetro significa mantermos fixa a soma dos lados de medidas a e b . Dessa forma, devemos utilizar a ferramenta “segmento com comprimento fixo” para construir um segmento AB e “novo ponto” para inserir um ponto C móvel sobre o segmento AB . Para determinarmos os segmentos AC e CB , devemos utilizar a ferramenta “segmento definido por dois pontos” e, em seguida, medir esses segmentos com a ajuda da ferramenta “distância, comprimento ou perímetro”. Assim, movimentando o ponto C sobre o segmento AB , obteremos diferentes medidas para os segmentos AC e CB .

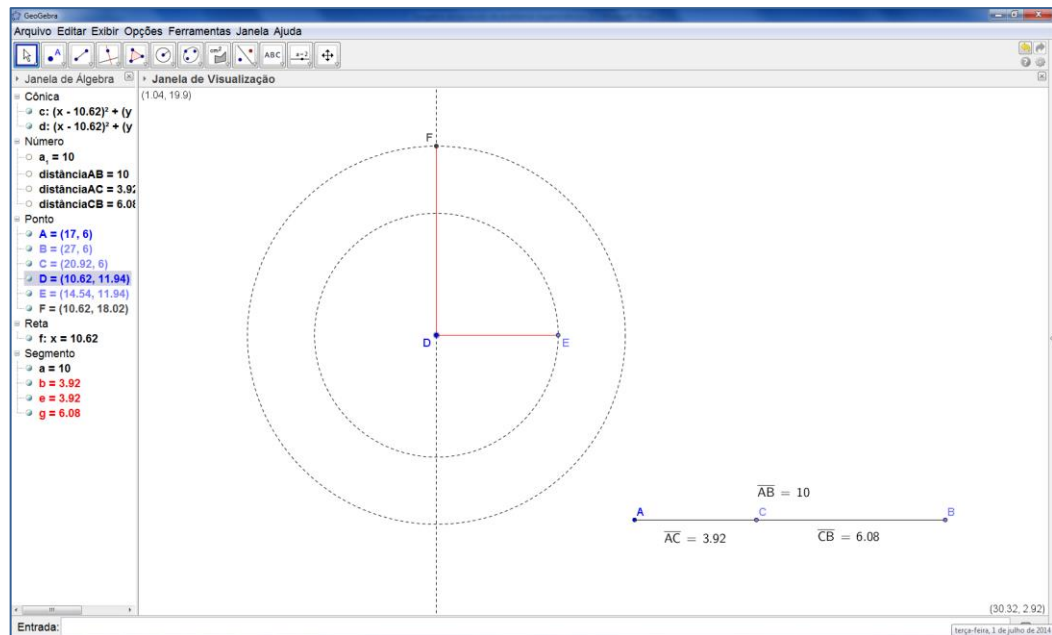
Com o intuito de facilitar o início deste processo de investigação, é interessante estabelecermos uma medida para o perímetro do retângulo como, por exemplo, 20 cm. Dessa forma, sendo o perímetro 20 cm, o segmento AB medirá 10 cm.

Figura 53 – Ponto móvel C sobre o segmento AB .



Definidos os segmentos AC e CB , construiremos dois círculos concêntricos, de raios de medidas iguais a \overline{AC} e \overline{CB} . Auxiliados pela ferramenta “segmento definido por dois pontos”, construiremos o raio de cada um dos círculos, de tal forma que fiquem perpendiculares. Para isso, usaremos a ferramenta “reta perpendicular”.

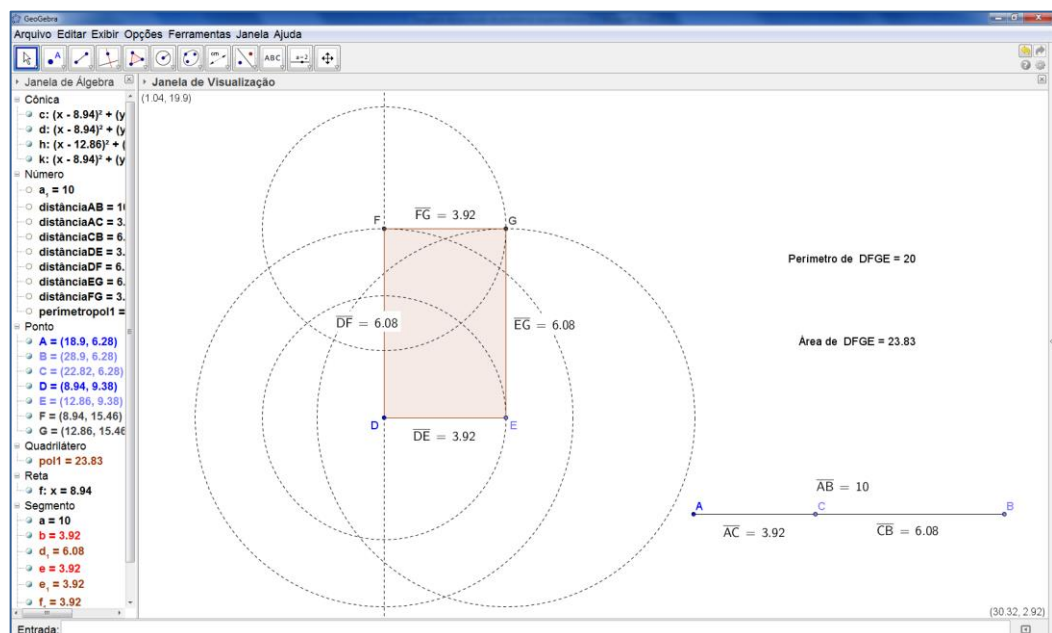
Figura 54 – Círculos concêntricos e raios perpendiculares no GeoGebra.



Fonte: o próprio autor

Para finalizarmos a construção do retângulo devemos, com a ferramenta “círculo dados centro e raio”, construir um círculo de centro no ponto F e raio de medida igual a \overline{AC} , e outro de centro no ponto E e raio de medida igual a \overline{CB} . O ponto de intersecção desses dois círculos será o quarto vértice do retângulo, que iremos destacar utilizando a ferramenta “polígono”. Ressaltamos que, na construção realizada, $\overline{AC} = \overline{DE} = \overline{FG}$ e $\overline{CB} = \overline{DF} = \overline{EG}$.

Figura 55 – Retângulo no GeoGebra.

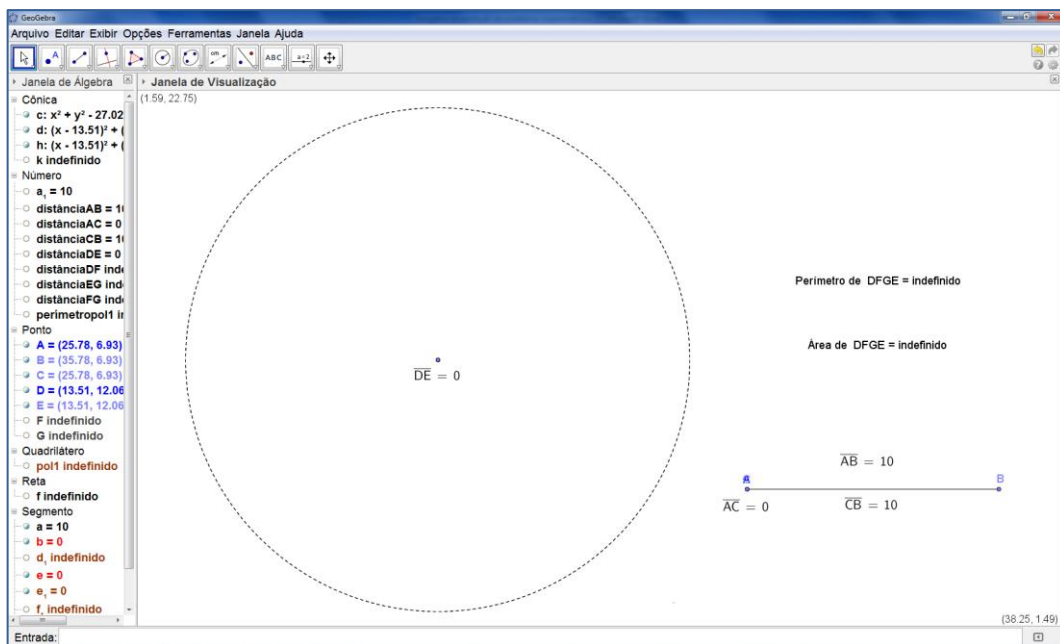


Fonte: o próprio autor

Para determinarmos o perímetro e a área do retângulo construído utilizamos as ferramentas “distância, comprimento ou perímetro” e “área”.

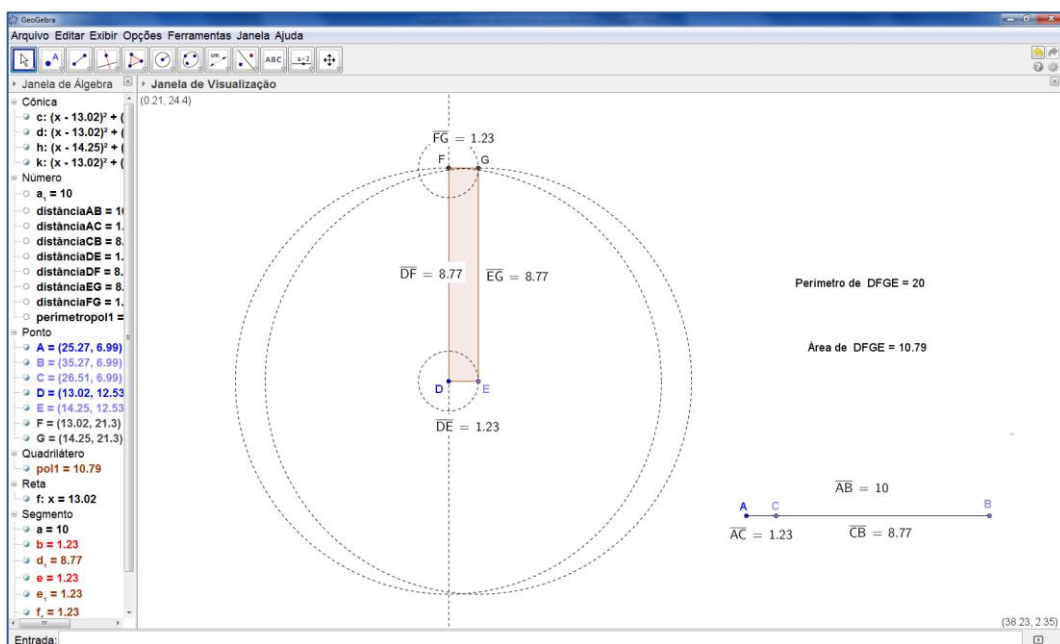
Como podemos observar pelas imagens abaixo, movimentando o ponto C pertencente ao segmento AB , podemos concluir que, dentre todos os retângulos de perímetro 20 cm, o quadrado de lado 5 cm é o que tem maior área.

Figura 56 – Perímetro e área indefinidos para $\overline{AC} = 0$ e $\overline{CB} = 10$.



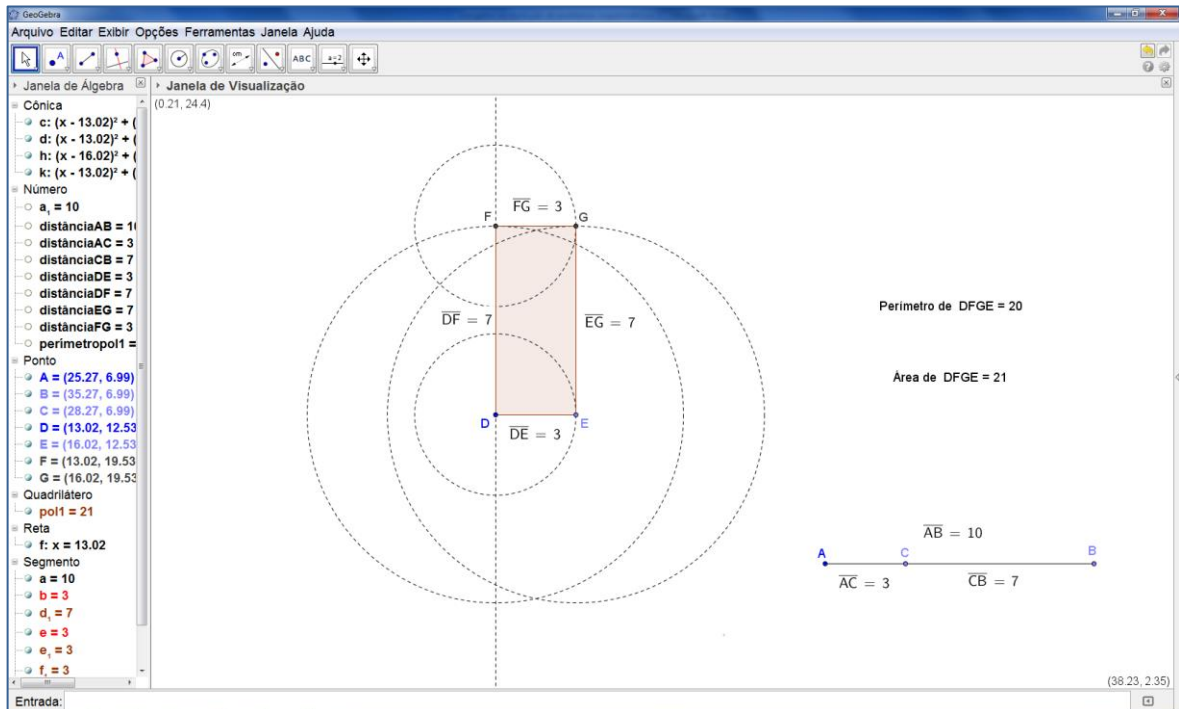
Fonte: o próprio autor

Figura 57 – Retângulo para $\overline{AC} = 1,23$ e $\overline{CB} = 8,77$.



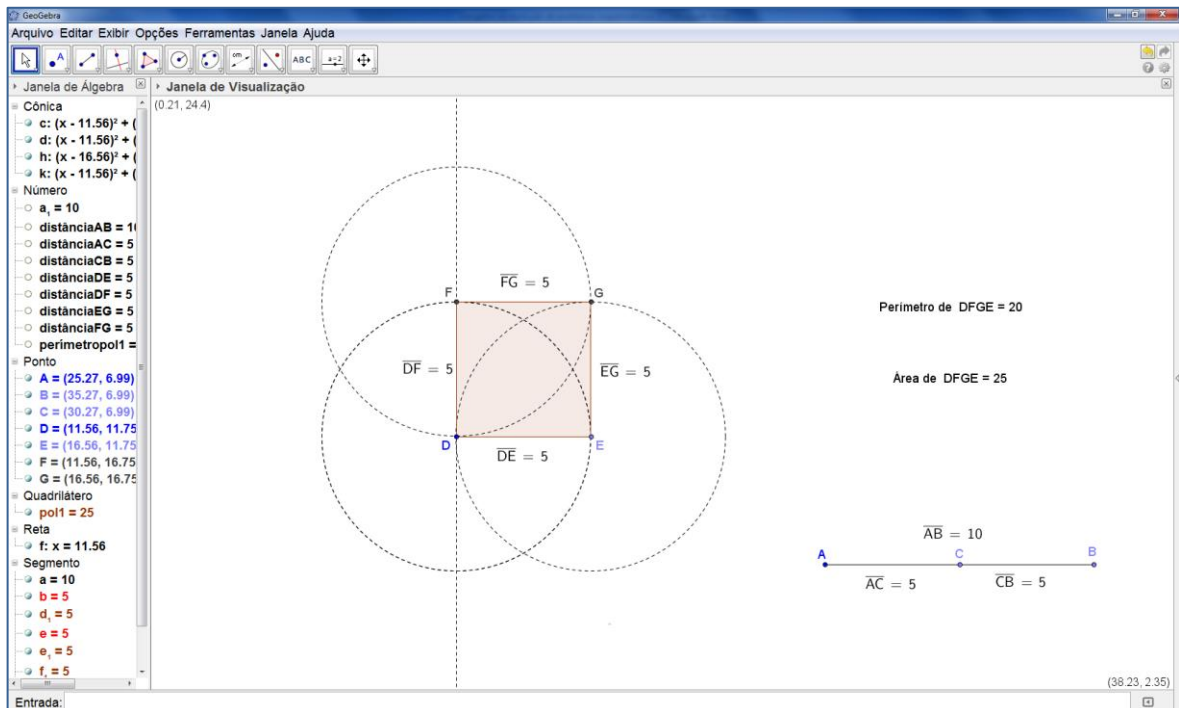
Fonte: o próprio autor

Figura 58 – Retângulo para $\overline{AC} = 3$ e $\overline{CB} = 7$.



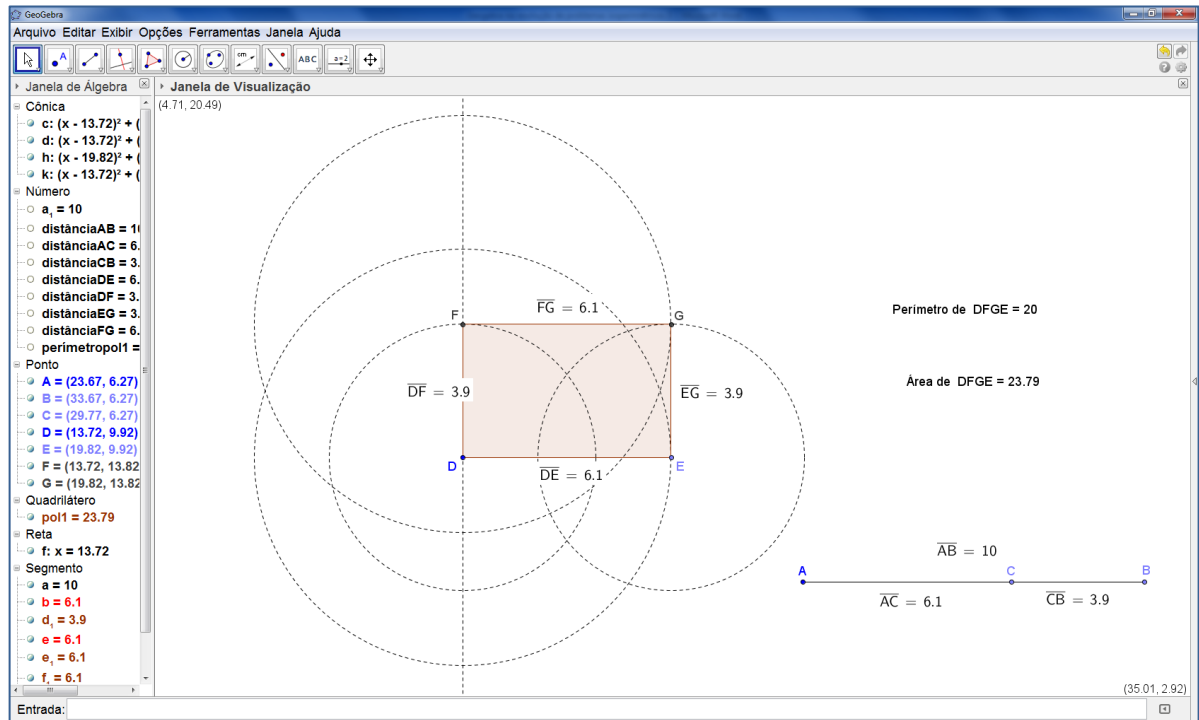
Fonte: o próprio autor

Figura 59 – Quadrado para $\overline{AC} = \overline{CB} = 5$.



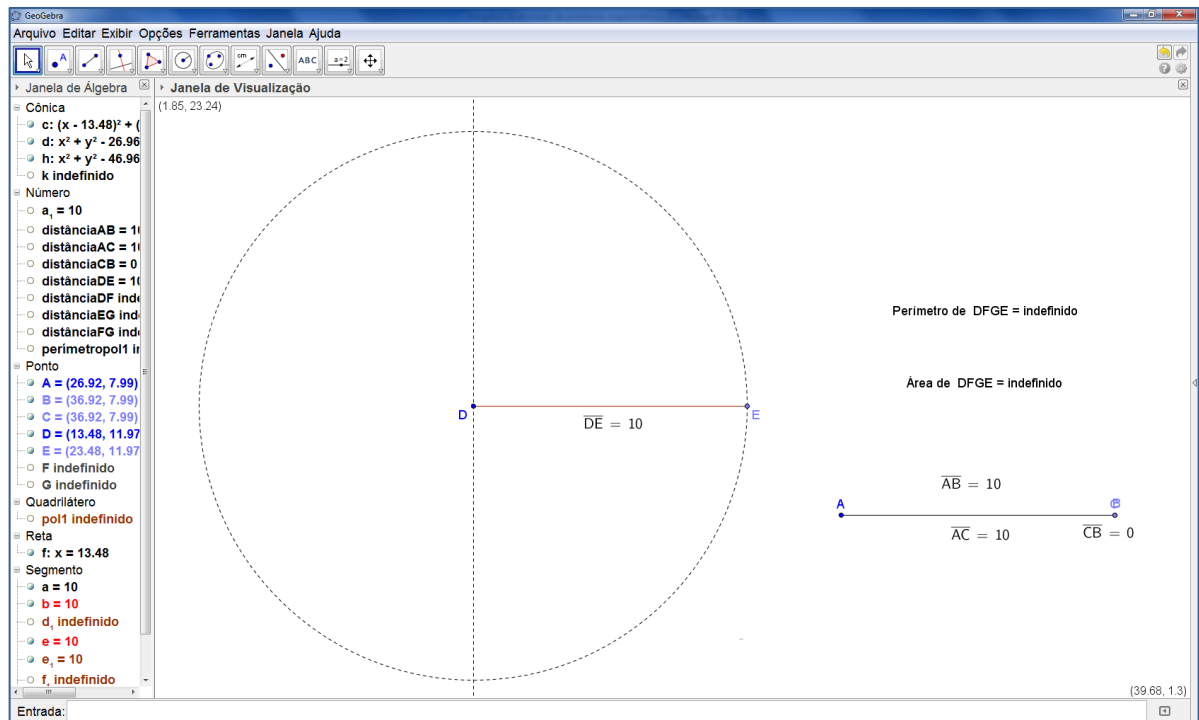
Fonte: o próprio autor

Figura 60 – Retângulo para $\overline{AC} = 6,1$ e $\overline{CB} = 3,9$.



Fonte: o próprio autor

Figura 61 – Perímetro e área indefinidos para $\overline{AC} = 10$ e $\overline{CB} = 0$.



Fonte: o próprio autor

Após esta etapa de investigação no GeoGebra, é fundamental que o aluno seja motivado a repetir a atividade para retângulos com outras medidas de perímetro, pois, segundo Vieira (2010, p. 59), “o ato de explorar de diferentes formas e experimentar várias possibilidades de manipulação de um objeto geométrico pode servir para validar determinadas conjecturas formuladas durante a investigação”. Através dessa investigação, é possível observar que, diferente do Geoplano, o GeoGebra não se limita a determinados perímetros para se concluir que o quadrado é o retângulo que delimita maior área, pois no GeoGebra podemos utilizar qualquer medida real para os lados dos polígonos.

Consideramos que esta atividade usando o GeoGebra é indicada para estudantes que tenham maior conhecimento e maturidade matemáticos. Assim, as argumentações que comprovam a afirmação de que entre os retângulos de perímetro fixo, o quadrado é que possui maior área, podem ser justificadas por meio de discussões mais elaboradas, quando comparadas à demonstração de Zenodoro apresentada no Problema 3.2.5. Logo, nos dedicaremos a este propósito nas provas abaixo.

Podemos recorrer ao estudo das funções quadráticas para apresentar a solução para este caso particular, em que o perímetro do retângulo mede 20 cm.

Sejam x e y as medidas dos lados do retângulo de perímetro 20 cm. Assim,

$$2x + 2y = 20 \Leftrightarrow x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x.$$

A área do retângulo será dada por

$$A = xy = x(10 - x) = -x^2 + 10x.$$

Considerando que a área A é dada por uma função quadrática e lembrando que o extremo de uma função quadrática é dada pela coordenada $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, segue que a área máxima será dada para a coordenada x do vértice. Logo,

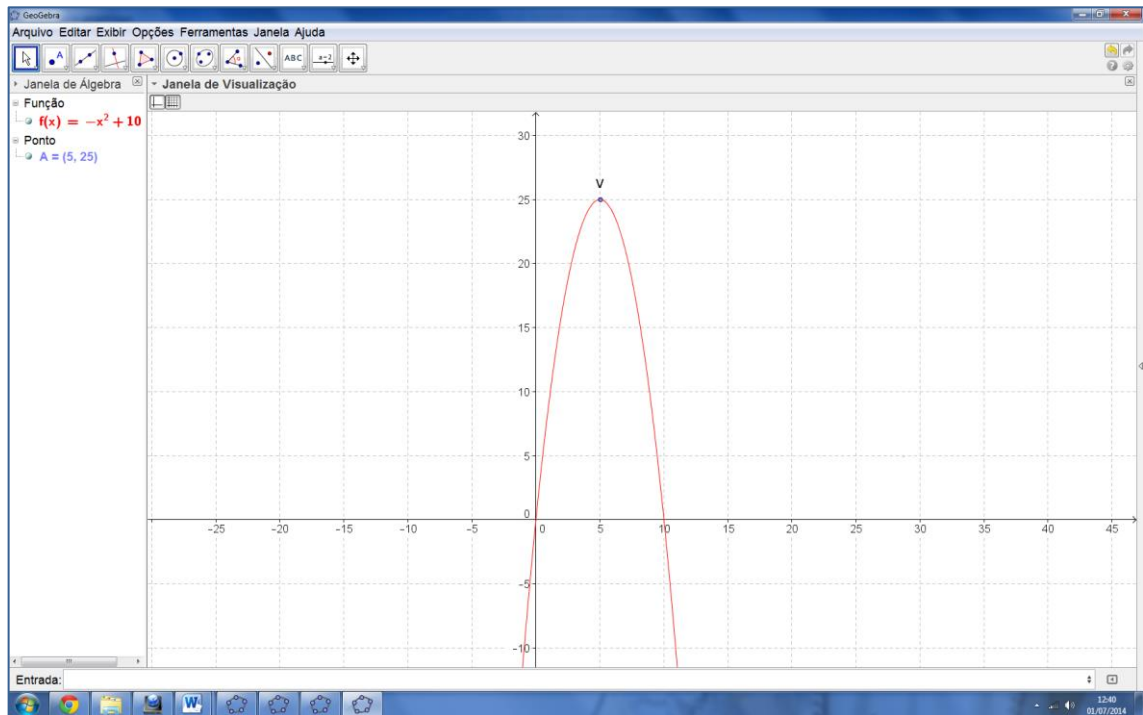
$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2 \cdot (-1)} = \frac{-10}{-2} = 5.$$

A construção do gráfico da função $A = -x^2 + 10x$ permite a visualização do vértice $V = (5; 25)$, que é o ponto onde a função atinge seu máximo (Figura 62).

Substituindo o valor de x na igualdade $y = 10 - x$, obtemos $y = 5$.

Portanto, o retângulo de área máxima será um quadrado de lado 5 cm.

Figura 62 – Gráfico da função $A(x) = -x^2 + 10x$.



Fonte: o próprio autor

Mostraremos agora que, entre todos os retângulos de mesmo perímetro, o quadrado é o que determina maior área. Apresentaremos quatro demonstrações, sendo que uma delas utiliza a argumentação das funções quadráticas. Também serão apresentadas demonstrações que usam desigualdades e o argumento de prova por contradição.

Demonstração 1: Sejam x e y as medidas dos lados do retângulo e p o seu semiperímetro. Assim, $x + y = p$.

A área do retângulo será dada por $A = xy$.

Da relação do semiperímetro, temos $y = p - x$. Então, segue que

$$A = x \cdot (p - x) = -x^2 + px,$$

onde p é uma constante.

Note que se trata de uma função quadrática em que o coeficiente do termo quadrático é negativo, portanto a área máxima será dada para a coordenada x do vértice.

Logo,

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-p}{2 \cdot (-1)} = \frac{p}{2}.$$

Dessa forma, o valor de x que define área máxima é $x = \frac{p}{2}$. Da relação do semiperímetro, $y = p - x$, temos $y = p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}$.

Portanto, temos $x = y$, mostrando que o retângulo de área máxima é um quadrado. ■

Demonstração 2: Sejam x e y os lados de um retângulo. O perímetro e a área são respectivamente $2(x + y)$ e xy .

Usando a desigualdade das médias aritmética e geométrica para os números positivos x e y e elevando ao quadrado ambos os lados da desigualdade, obtemos que

$$xy \leq \left(\frac{x + y}{2}\right)^2.$$

Assim, a área não pode ser maior do que $[(x + y)/2]^2$, e a igualdade ocorre se, e somente se, $x = y$. Portanto, entre todos os retângulos de mesmo perímetro, o quadrado é o que determina maior área. ■

Demonstração 3: Seja R um retângulo de dimensões x e y . Logo, o perímetro é dado por $P = 2x + 2y$, e a área da sua região é dada por $A_1 = xy$. O quadrado Q , de mesmo perímetro que R , tem lado medindo $(x + y)/2$, e sua área é dada por $A_2 = [(x + y)/2]^2$. Pretendemos mostrar que $A_2 \geq A_1$, o que equivale a mostrar que $A_2 - A_1$ é não negativo. Usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, temos que

$$\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy} \Leftrightarrow \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 \geq xy \Leftrightarrow \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 - xy \geq 0 \Leftrightarrow A_2 - A_1 \geq 0.$$

Da última desigualdade, concluímos que $A_2 \geq A_1$. Consequentemente, o quadrado é o retângulo de maior área fixada. ■

Demonstração 4: Prova por contradição.

Seja o quadrado com lados medindo x e o retângulo com lados medindo x e y , sendo $y > x$.

O quadrado tem área igual a x^2 e perímetro $4x$. O retângulo tem área igual a xy e perímetro $2x + 2y$.

Como, pela suposição, $y > x$, então segue que a área do retângulo é maior que a área do quadrado. Logo,

$$xy > x^2 .$$

Mas como os perímetros são iguais, temos $4x = 2x + 2y$, ou seja, $x = y$, o que seria uma contradição. Portanto, a área do retângulo não é maior que a do quadrado. ■

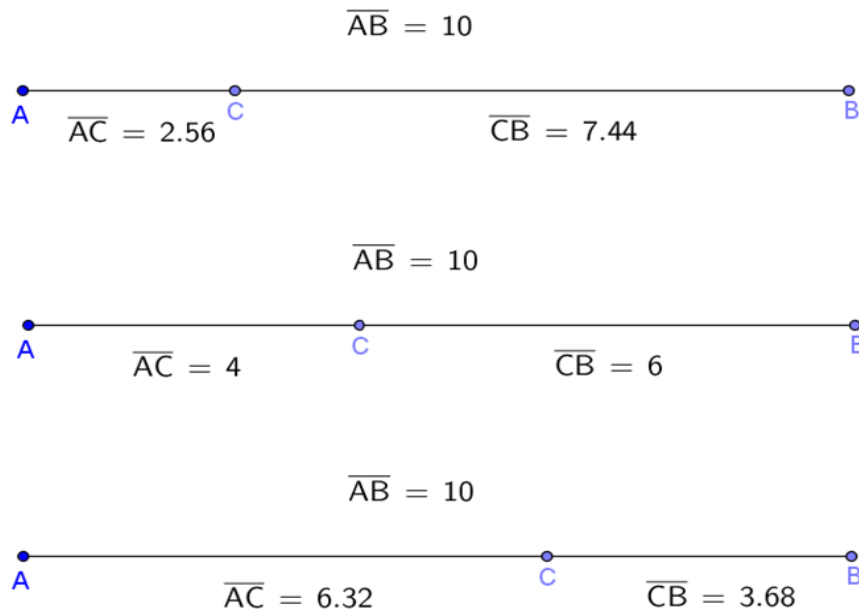
Problema 4.2.2 – Dentre todos os triângulos de base fixa e perímetro dado, qual é o de maior área?

Solução: Assim como no Problema 4.2.1, para a solução desse problema, devemos iniciar fazendo o seguinte questionamento:

Como construir, usando o software GeoGebra, vários triângulos sendo dados a medida da base e o valor do perímetro?

Para construirmos triângulos de mesmo perímetro, sendo dado a medida de um de seus lados, devemos primeiramente fixar a soma dos outros dois lados. Dessa forma, devemos utilizar a ferramenta “segmento com comprimento fixo” para construir um segmento AB e “novo ponto” para inserir um ponto C móvel sobre o segmento AB . Para determinarmos os segmentos AC e CB , devemos utilizar a ferramenta “segmento definido por dois pontos” e, em seguida, medir esses segmentos com a ajuda da ferramenta “distância, comprimento ou perímetro”. Assim, movimentando o ponto C sobre o segmento AB , obteremos diferentes medidas para os segmentos AC e CB .

Figura 63 – Ponto móvel C sobre o segmento AB .



Definidos os segmentos AC e CB , construiremos um segmento DE de medida fixa utilizando a ferramenta “segmento com comprimento fixo” e, com a ferramenta “círculo dados centro e raio”, construiremos um círculo de centro no ponto D e raio de medida igual a \overline{AC} , e outro de centro no ponto E e raio de medida igual a \overline{CB} . Com o ícone “novo ponto”, um ponto F será inserido na intersecção desses dois círculos. Assim, utilizando a ferramenta “polígono”, desenhamos o triângulo DEF .

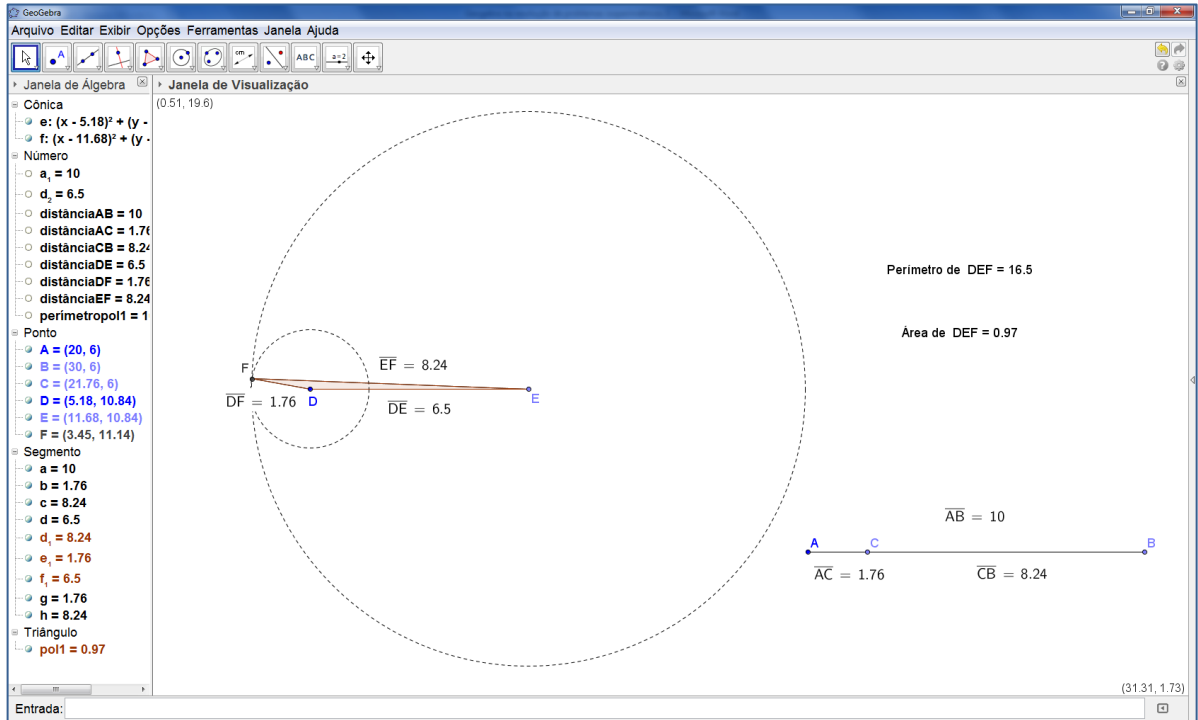
Neste momento, devemos deixar claro para o aluno que, na construção realizada, $\overline{AC} = \overline{DF}$ e $\overline{CB} = \overline{EF}$.

Para determinarmos o perímetro e a área do triângulo construído, utilizamos as ferramentas “distância, comprimento ou perímetro” e “área”.

Ressaltamos que, determinando as medidas do triângulo, como por exemplo perímetro igual a 16,5 cm e base igual a 6,5 cm, podemos facilitar as conclusões dos alunos.

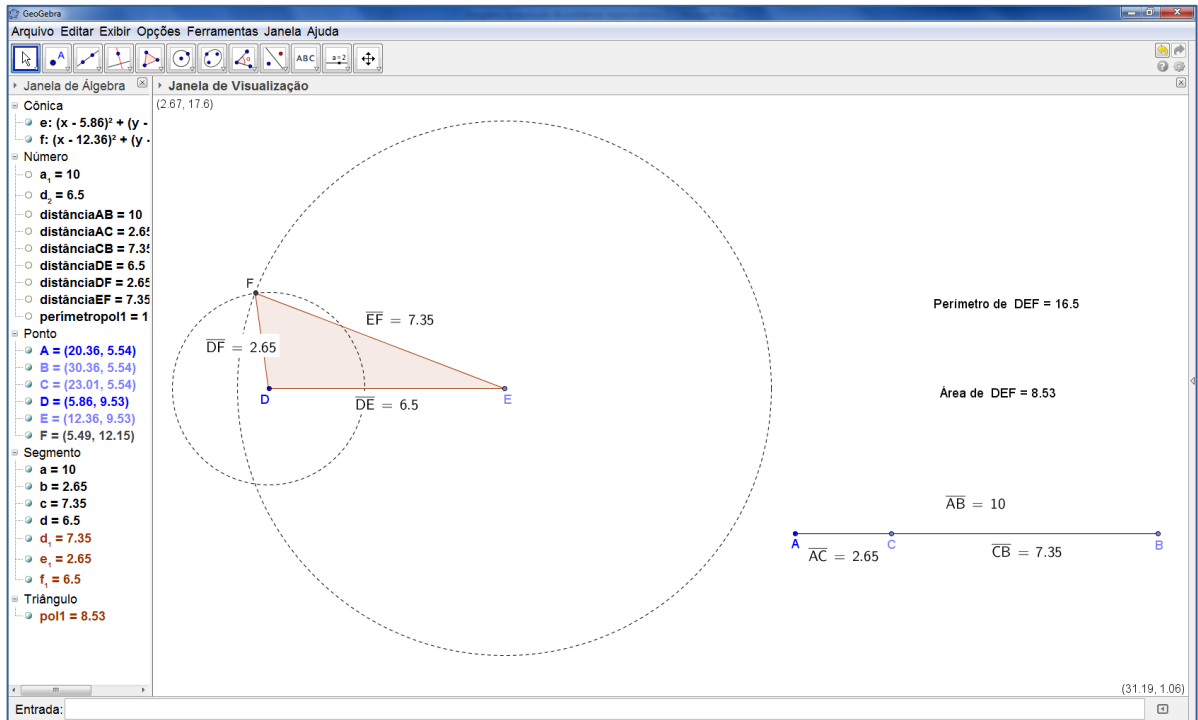
Pelas Figuras 64, 65, 66 e 67, podemos observar que, arrastando o ponto C do segmento AB , o triângulo DEF se modifica, mas seu perímetro se mantém. Assim, verificamos que o triângulo de área máxima é o isósceles.

Figura 64 – Triângulo para $\overline{AC} = 1,76$ e $\overline{CB} = 8,24$.



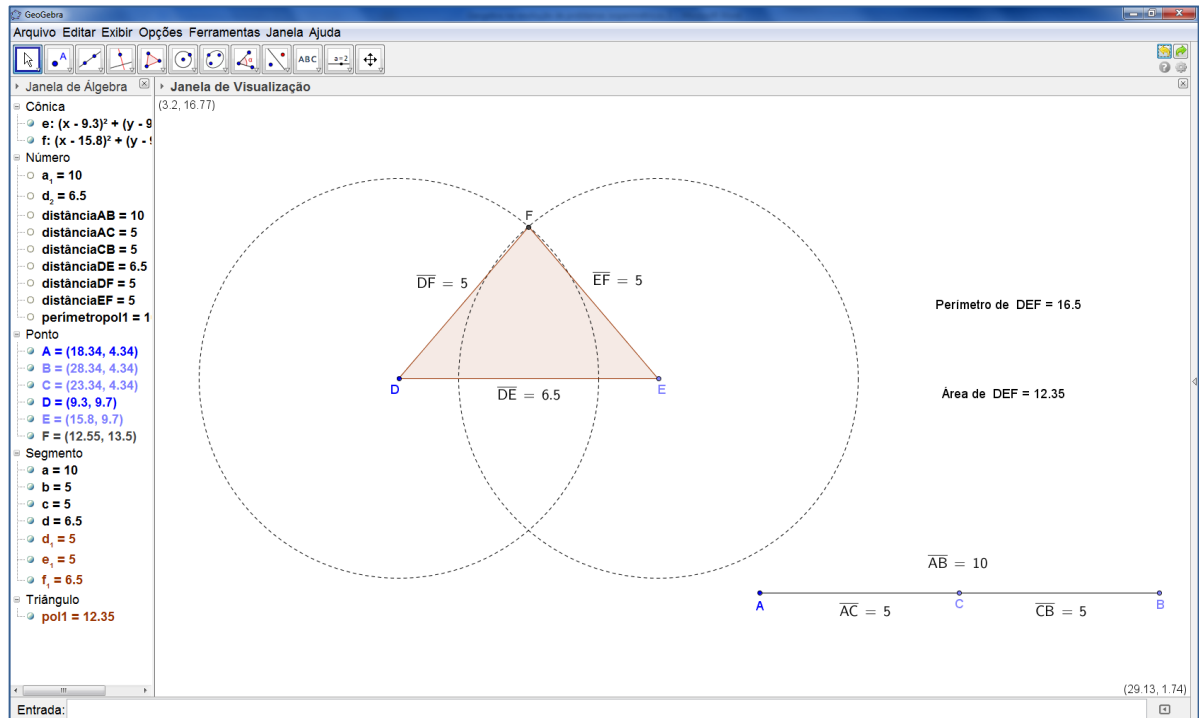
Fonte: o próprio autor

Figura 65 – Triângulo para $\overline{AC} = 2,65$ e $\overline{CB} = 7,35$.



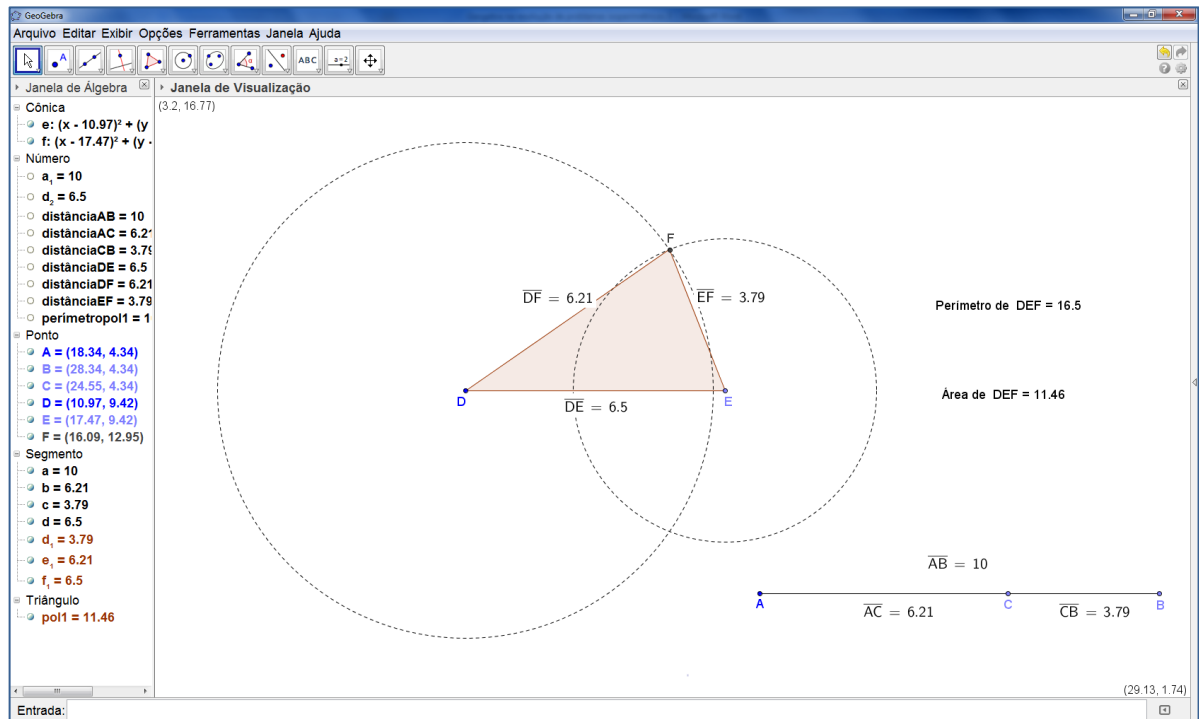
Fonte: o próprio autor

Figura 66 – Triângulo para $\overline{AC} = \overline{CB} = 5$.



Fonte: o próprio autor

Figura 67 – Triângulo para $\overline{AC} = 6,21$ e $\overline{CB} = 3,79$.



Fonte: o próprio autor

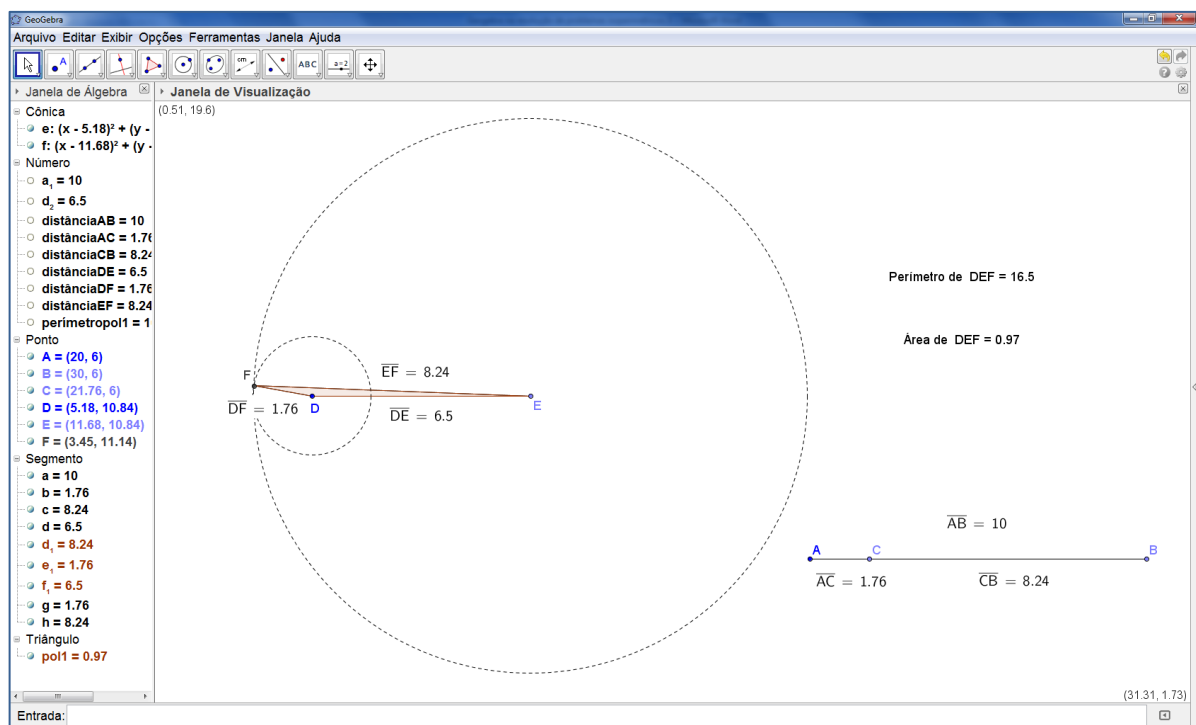
Além de explorar o problema isoperimétrico, esta construção de triângulos no GeoGebra permite investigar sob que condições é possível construir um triângulo. As atividades que seguem visam analisar a possibilidade de construir ou não um triângulo conhecendo-se as medidas de seus lados.

Analisando a construção feita no software GeoGebra, podemos responder as questões a seguir.

a) Existe triângulo para $\overline{DF} = 1,76$?

Solução: Sim. Basta observarmos a figura desenhada após arrastarmos o ponto C, tal que $\overline{AC} = 1,76$ (Figura 68).

Figura 68 – Triângulo para $\overline{AC} = 1,76$ e $\overline{CB} = 8,24$.

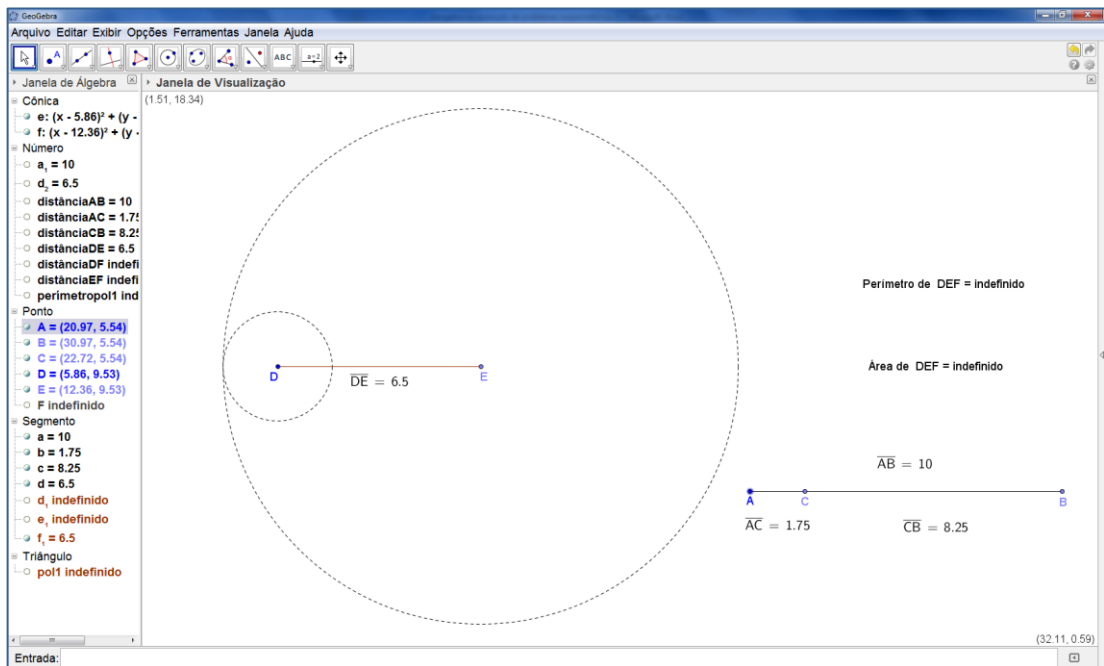


Fonte: o próprio autor

b) Existe triângulo para $\overline{DF} = 1,75$?

Solução: Não. Basta observarmos a figura desenhada após arrastarmos o ponto C, tal que $\overline{AC} = 1,75$ (Figura 69).

Figura 69 – Triângulo para $\overline{AC} = 1,75$ e $\overline{CB} = 8,25$.

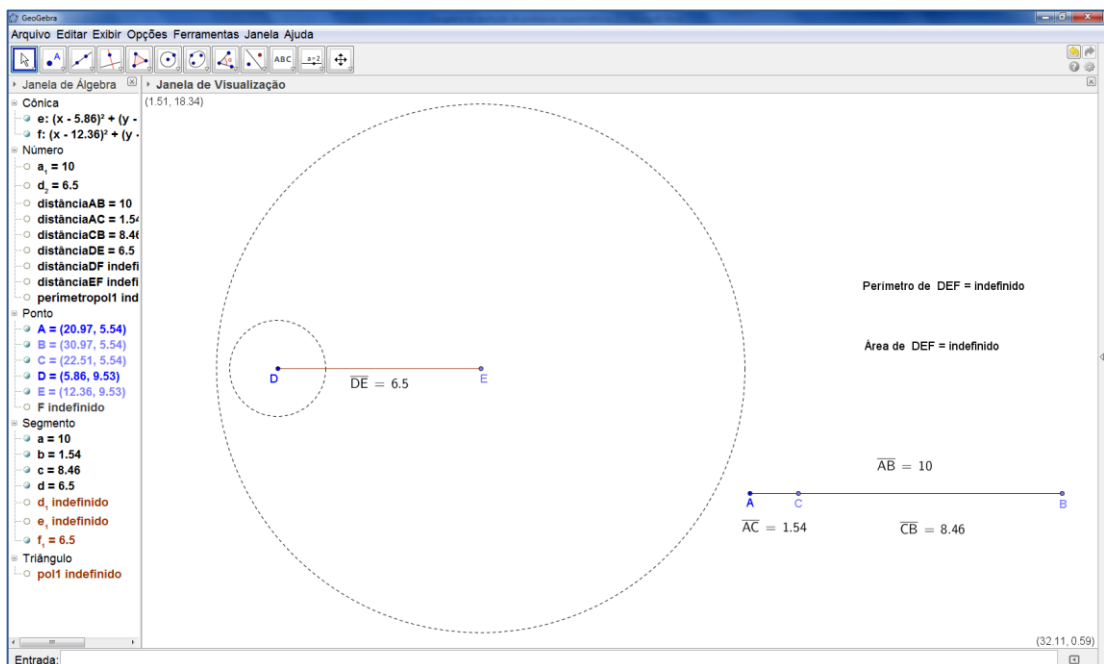


Fonte: o próprio autor

c) Existe triângulo para $0 < \overline{DF} < 1,75$?

Solução: Não. Basta observarmos a figura desenhada após arrastarmos o ponto C, tal que $0 < \overline{AC} < 1,75$ (Figura 70).

Figura 70 – Triângulo para $\overline{AC} = 1,54$ e $\overline{CB} = 8,46$.

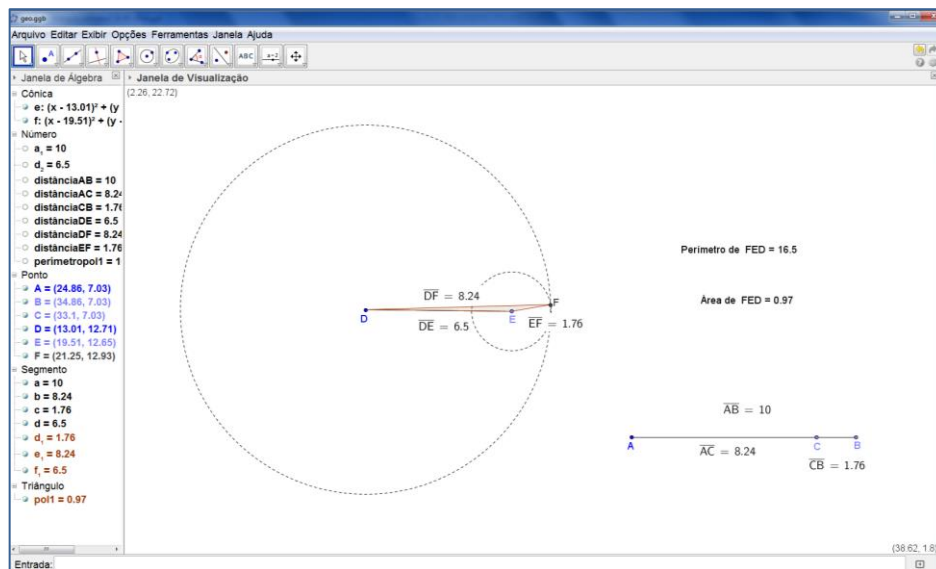


Fonte: o próprio autor

d) Existe triângulo para $\overline{DF} = 8,24$?

Solução: Sim. Basta observarmos a figura desenhada após arrastarmos o ponto C, tal que $\overline{AC} = 8,24$ (Figura 71).

Figura 71 – Triângulo para $\overline{AC} = 8,24$ e $\overline{CB} = 1,76$.

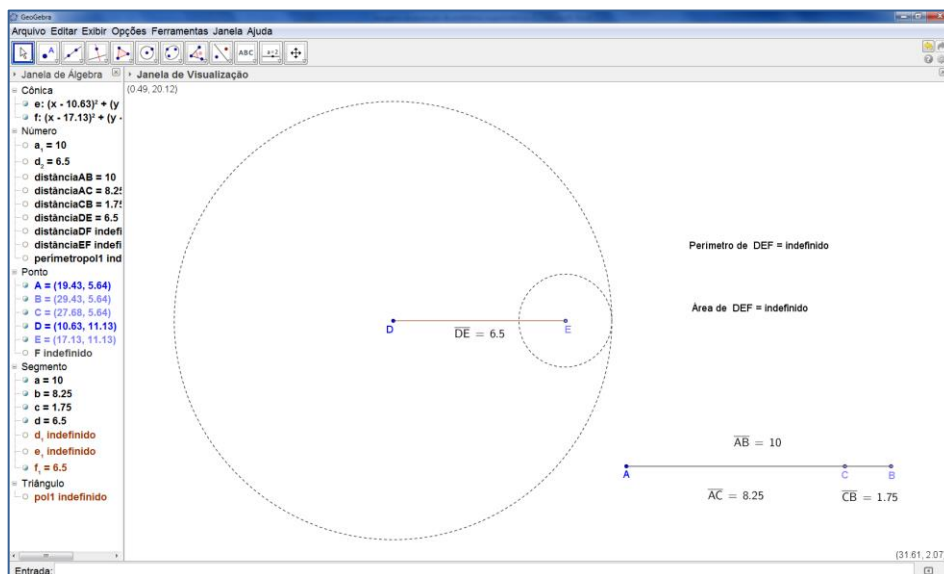


Fonte: o próprio autor

e) Existe triângulo para $\overline{DF} = 8,25$?

Solução: Não. Basta observarmos a figura desenhada após arrastarmos o ponto C, tal que $\overline{AC} = 8,25$ (Figura 72).

Figura 72 – Triângulo para $\overline{AC} = 8,25$ e $\overline{CB} = 1,75$.

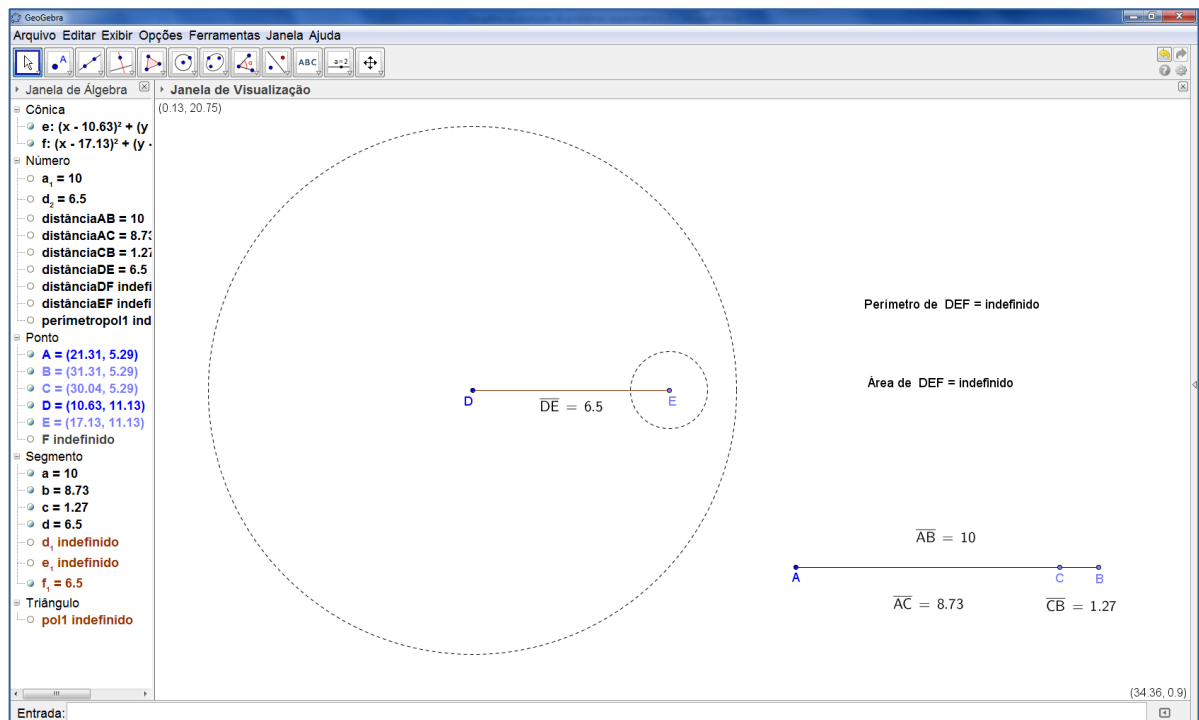


Fonte: o próprio autor

f) Existe triângulo para $8,25 < \overline{DF} < 10$?

Solução: Não. Basta observarmos a figura desenhada após arrastarmos o ponto C , tal que $8,25 < \overline{AC} < 10$ (Figura 73).

Figura 73 – Triângulo para $\overline{AC} = 8,73$ e $\overline{CB} = 1,27$.



Fonte: o próprio autor

g) Como você explicaria a existência ou não do triângulo nos itens anteriores?

Solução: Pela Desigualdade Triangular sabemos que, num triângulo, o comprimento de um dos lados é sempre inferior à soma dos comprimentos dos outros dois lados, ou seja, no triângulo DEF , $\overline{DE} < \overline{DF} + \overline{EF}$, $\overline{DF} < \overline{DE} + \overline{EF}$ e $\overline{EF} < \overline{DE} + \overline{DF}$.

Logo,

- nos itens (a) e (d) os triângulos estão definidos, pois

$$1,76 < 8,24 + 6,5$$

$$8,24 < 1,76 + 6,5$$

$$6,5 < 1,76 + 8,24$$

- nos itens (b) e (e) os triângulos não estão definidos, pois

$$8,25 = 1,75 + 6,5$$

- no item (c) os triângulos não estarão definidos, pois

$$\overline{EF} > \overline{DE} + \overline{DF}$$

- no item (f) os triângulos não estarão definidos, pois

$$\overline{DF} > \overline{DE} + \overline{EF}$$

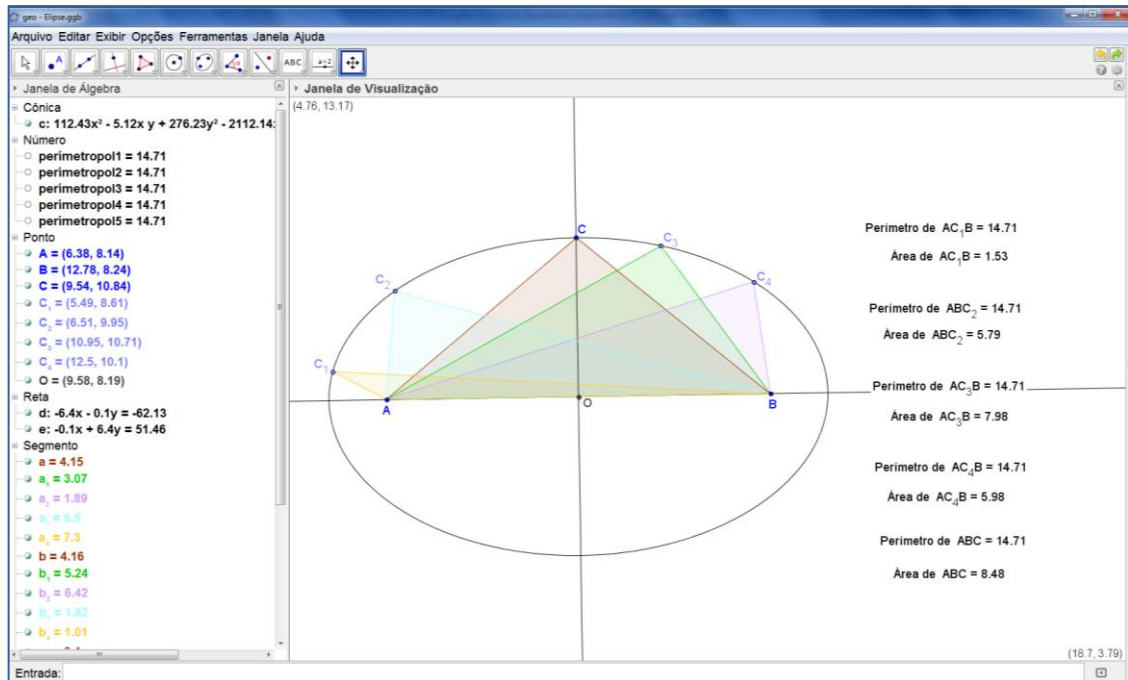
h) Arrastando o ponto C , podemos observar que o triângulo assume várias formas, mas seu perímetro não se altera. Qual deles é o triângulo que encerra maior área?

Solução: Entre todos os triângulos, onde é dado um lado e a soma dos outros dois lados, o triângulo isósceles é o de área máxima.

Como dissemos anteriormente, as construções no Geogebra estimulam a aprendizagem, mas não demonstram. Desse modo, caso o professor ache conveniente, sugerimos três demonstrações para esse problema. A primeira demonstração, baseada na solução dada por Pasquali (2004, p.40), parte do princípio de que a elipse é o lugar geométrico do terceiro vértice do triângulo formado pelos lados cuja soma é dada; a segunda, encontrada no livro de Major (2013, p.88), utiliza a desigualdade triangular e a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica; já, a terceira utiliza-se da fórmula de Herão para argumentar sobre o valor máximo de uma função quadrática.

Demonstração 1: Considere o triângulo ABC , de perímetro P e lado AB de medida fixa. O ponto C do triângulo estará a uma distância \overline{AC} do vértice A e a uma distância \overline{BC} do vértice B , tal que $P - \overline{AB} = \overline{AC} + \overline{BC}$, ou seja, $\overline{AC} + \overline{BC}$ é uma constante. Sabendo que a elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano tal que a soma de suas distâncias a dois pontos fixos, denominados focos, é constante, temos que o ponto C está sobre uma elipse com focos nos pontos A e B . Logo, o triângulo de área máxima é o de maior altura, que ocorre quando $\overline{AC} = \overline{BC}$ (Figura 74). Portanto, entre todos os triângulos onde é dado um lado e a soma dos outros dois lados, o triângulo isósceles é o de área máxima.

Figura 74 – O triângulo ABC tem área máxima.



Fonte: o próprio autor

Demonstração 2: Considere o triângulo ABC , de perímetro $P = a + b + c$ e semiperímetro $p = \frac{a+b+c}{2}$, cujo lado AB possui medida fixa c .

Segue, pela desigualdade triangular, que

$$b + c > a \text{ e } a + c > b .$$

Assim, $a + b + c > 2a$, ou seja, $p > a$ e $a + b + c > 2b$, isto é, $p > b$. Então, $p - a$ e $p - b$ são números positivos.

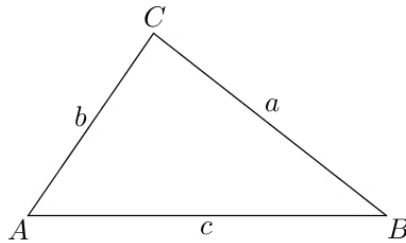
Aplicando a fórmula de Herão e a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica para os números positivos $p - a$ e $p - b$, obtemos

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p(p-c)}\sqrt{(p-a)(p-b)} \\ &\leq \sqrt{p(p-c)} \frac{(p-a) + (p-b)}{2} = \frac{c\sqrt{p(p-c)}}{2} \end{aligned}$$

em que a igualdade ocorre se, e somente se, $p - a = p - b$, isto é, quando $a = b$. Portanto, o triângulo isósceles é o que tem área máxima.

Demonstração 3: Considere o triângulo ABC de lados $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, com perímetro fixo $2p$ e base fixa c .

Figura 75 – Triângulo ABC.



Pela fórmula de Herão, a área A do triângulo é

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

onde $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Como as medidas p e c são fixas, temos que o produto $p(p-c)$ é uma constante. Assim, a área do triângulo será máxima quando o produto $(p-a)(p-b)$ for máximo. Note que $a+b = 2p-c$, isto é, $a = 2p-b-c$, então

$$\begin{aligned} (p-a)(p-b) &= (p-2p+b+c)(p-b) \\ &= (-p+b+c)(p-b) \\ &= -p^2 + 2bp - b^2 - cb + cp \\ &= -b^2 + (2p-c)b + cp - p^2. \end{aligned}$$

Logo, a expressão é uma função quadrática na variável b , $f(b) = -b^2 + (2p-c)b + cp - p^2$, e atingirá seu valor máximo quando

$$b = \frac{2p-c}{2}$$

ou seja, $b = a$.

Portanto, o triângulo ABC , de perímetro $2p$ e base fixa c , de maior área é isósceles.



Problema 4.2.3 – Dentre todos os triângulos com um dado perímetro, encontrar aquele com área máxima.

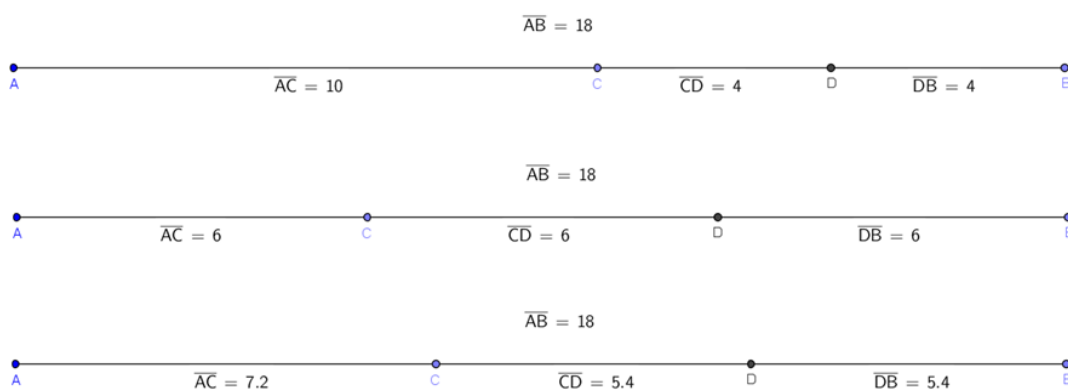
Solução: Pelo Problema 4.2.2 temos que, dentre todos os triângulos de base e perímetro fixos, o triângulo isósceles é o que encerra maior área. Agora, neste problema o perímetro continua fixo, mas a base pode variar.

A pergunta neste caso é: como construir no GeoGebra vários triângulos isósceles sendo dado o valor do perímetro?

Para construirmos triângulos isósceles de mesmo perímetro, devemos variar a medida da base e manter os outros dois lados com medidas iguais. Dessa forma, devemos utilizar a ferramenta “segmento com comprimento fixo” para construir um segmento AB e “novo ponto” para inserir um ponto móvel C sobre o segmento AB . O segmento AC assim determinado será a medida da base do triângulo a ser construído. O segmento CB deverá ser dividido ao meio para determinar os outros dois lados iguais. Assim, utilizando a ferramenta “ponto médio ou centro” para o segmento CB , obtemos o ponto D . Para determinarmos os segmentos AC , CD e DB , devemos utilizar o ícone “segmento definido por dois pontos” e, em seguida, medir esses segmentos com a ajuda da ferramenta “distância, comprimento ou perímetro”. Assim, movimentando o ponto C sobre o segmento AB , obteremos diferentes medidas para os segmentos AC , CD e DB , sendo que $\overline{CD} = \overline{DB}$.

Assim, como nos problemas anteriores, estabeleceremos uma medida para o perímetro, como por exemplo, 18 cm, para que o processo inicial de investigação se torne mais organizado. Dessa forma, o segmento AB , que representa a medida do perímetro do triângulo, medirá 18 cm.

Figura 76 – Movimentação do ponto C sobre o segmento AB .



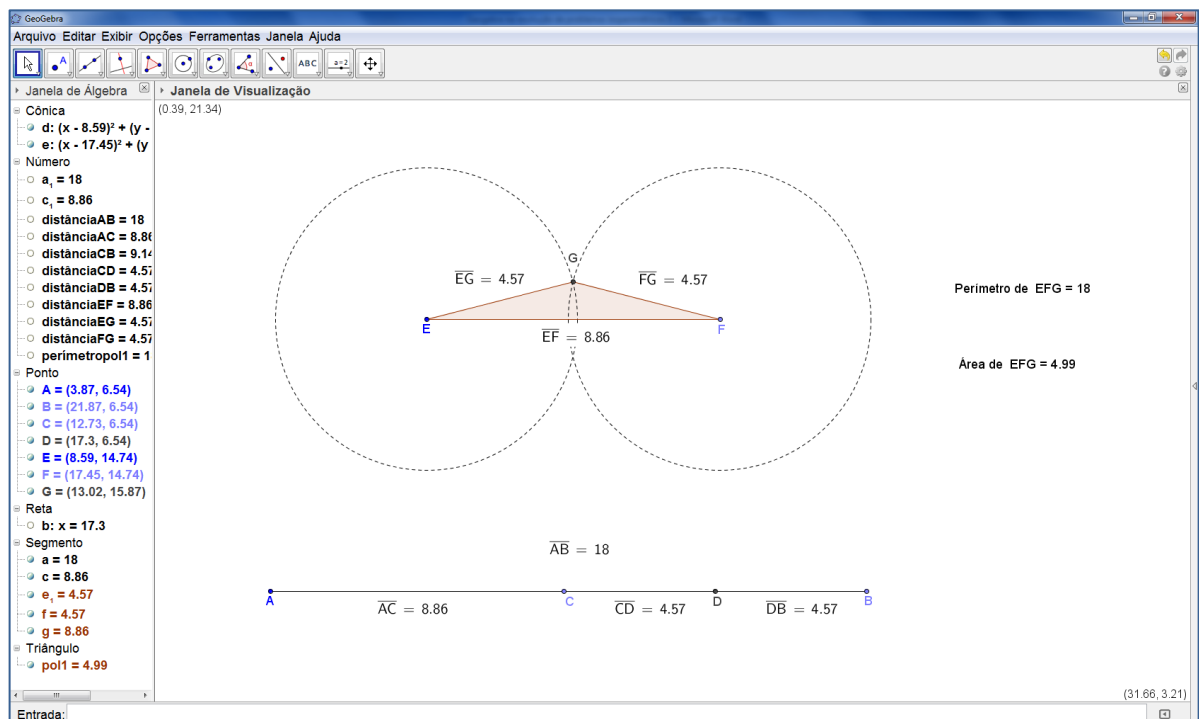
Fonte: o próprio autor

Definidos os segmentos AC , CD e DB , construiremos um segmento EF clicando em “segmento com comprimento fixo” tal que $\overline{EF} = \overline{AC}$ e, com a ferramenta “círculo dados centro e raio”, inserimos um círculo de centro no ponto E e raio de medida igual a \overline{CD} , e outro no ponto F e raio de medida igual a \overline{DB} . Com o ícone “novo ponto”, será inserido um ponto G na intersecção desses dois círculos. Assim, utilizando a ferramenta “polígono”, desenhamos o triângulo EFG . Neste momento, devemos esclarecer aos alunos que, na construção realizada, temos $\overline{AC} = \overline{EF}$, $\overline{CD} = \overline{EG}$ e $\overline{DB} = \overline{FG}$.

Para determinarmos o perímetro e a área do triângulo construído, utilizamos as ferramentas “distância, comprimento ou perímetro” e “área”. Destacamos a importância de se determinar as medidas dos lados do triângulo para facilitar as conclusões.

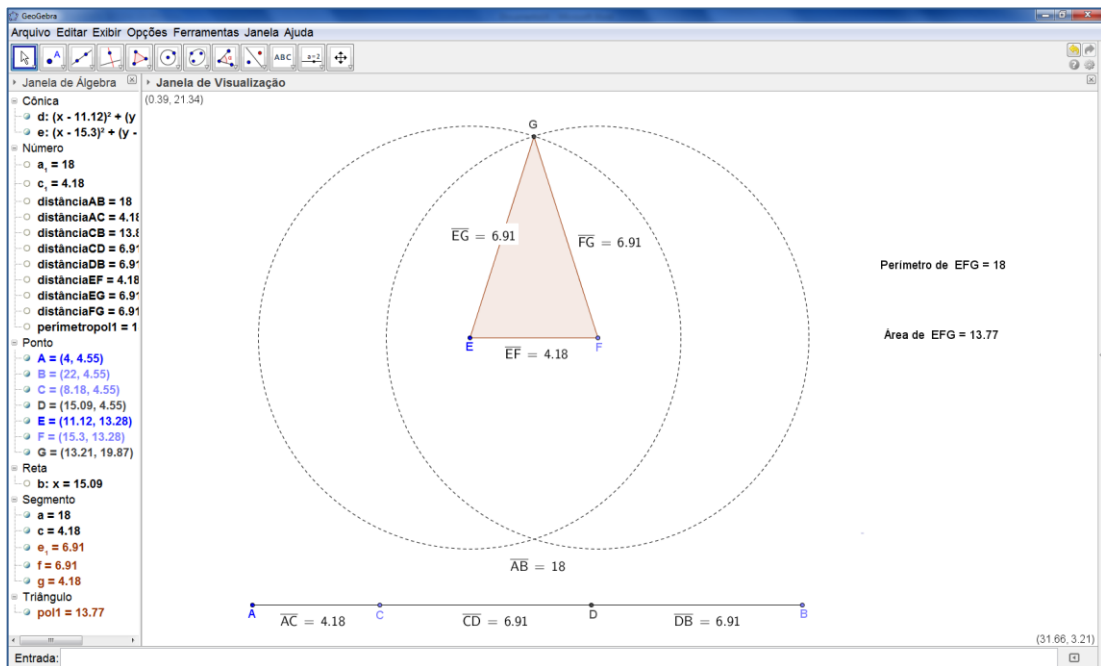
Através das imagens abaixo podemos notar que arrastando o ponto C do segmento AB , o triângulo EFG se modifica, mas seu perímetro se mantém e $\overline{EG} = \overline{FG}$. Assim, verificamos que o triângulo de área máxima é o equilátero.

Figura 77 – Triângulo para $\overline{AC} = 8,86$ e $\overline{EG} = \overline{FG} = 4,57$.



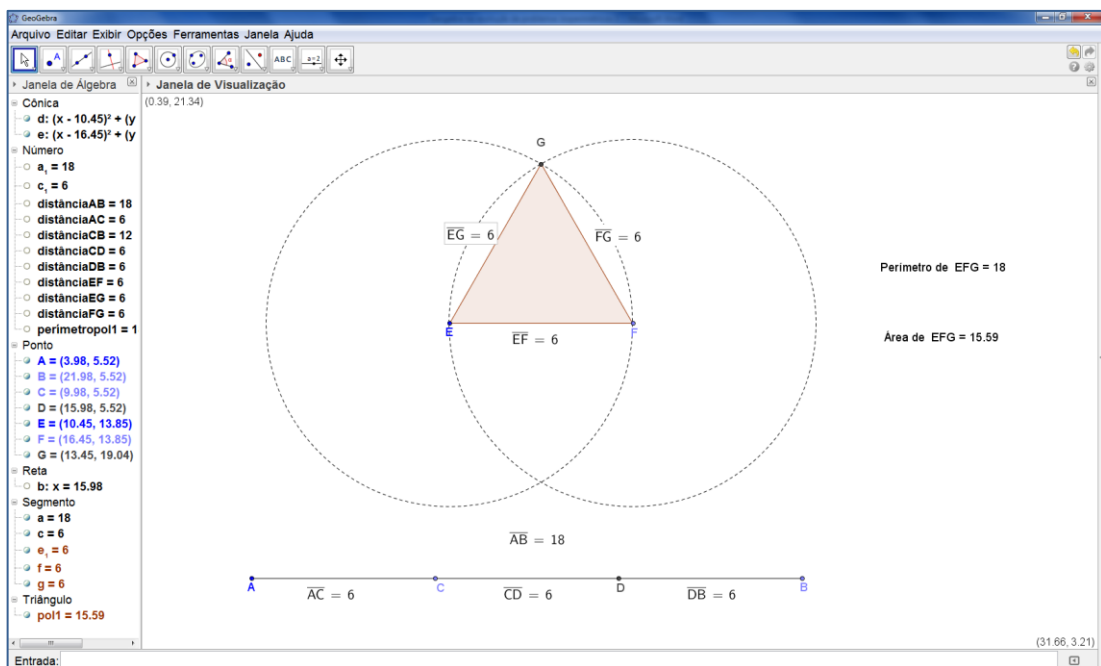
Fonte: o próprio autor

Figura 78 – Triângulo para $\overline{AC} = 4,18$ e $\overline{EG} = \overline{FG} = 6,91$.



Fonte: o próprio autor

Figura 79 – Triângulo para $\overline{AC} = \overline{EG} = \overline{FG} = 6$.



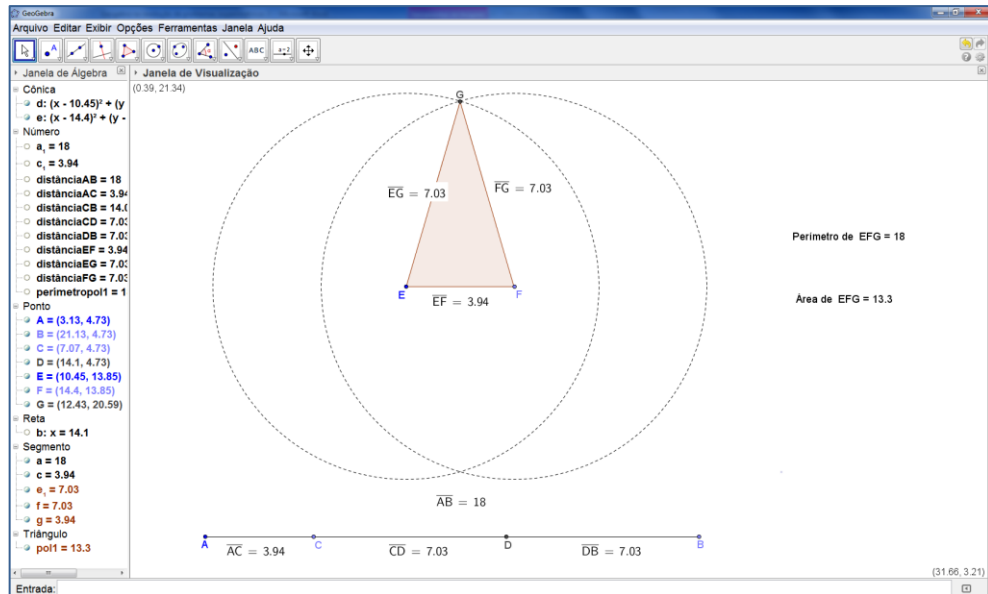
Fonte: o próprio autor

Após a construção no GeoGebra do triângulo isósceles de perímetro 18 cm, o professor poderá propor alguns questionamentos tais como:

a) Existe triângulo para $\overline{EF} = 3,94$? Caso exista, quanto mede a área deste triângulo?

Solução: Sim. Basta observarmos a figura desenhada após arrastarmos o ponto C , tal que $\overline{AC} = 3,94$ (Figura 80). Sua área mede $13,3 \text{ cm}^2$.

Figura 80 – Triângulo para $\overline{AC} = 3,94$ e $\overline{EG} = \overline{FG} = 7,03$.

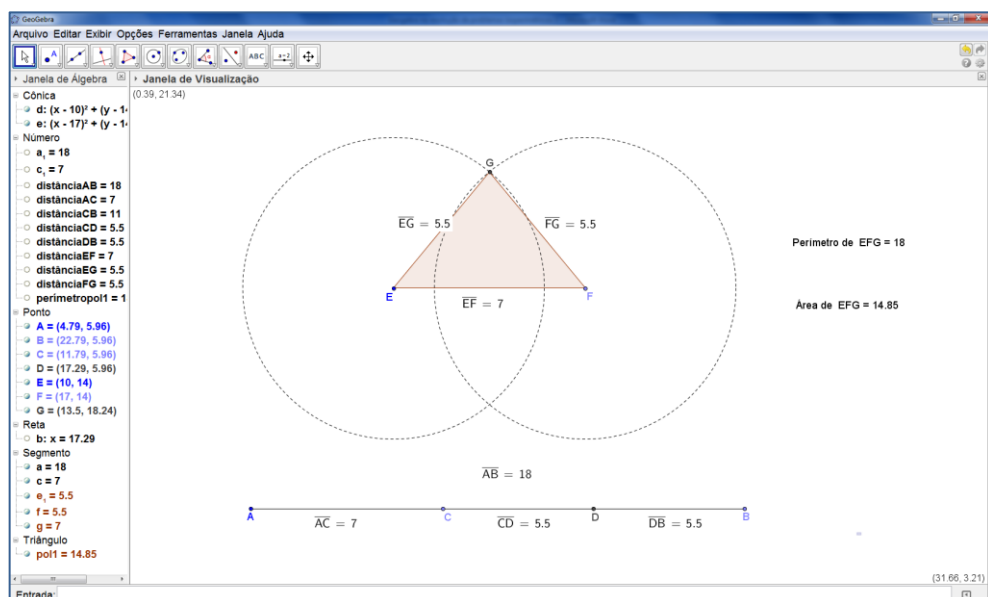


Fonte: o próprio autor

b) Existe triângulo para $\overline{EF} = 7$? Caso exista, quanto mede a área deste triângulo?

Solução: Sim. Basta observarmos a figura desenhada após arrastarmos o ponto C , tal que $\overline{AC} = 7$ (Figura 81). Sua área mede $14,85 \text{ cm}^2$.

Figura 81 – Triângulo para $\overline{AC} = 7$ e $\overline{EG} = \overline{FG} = 5,5$.

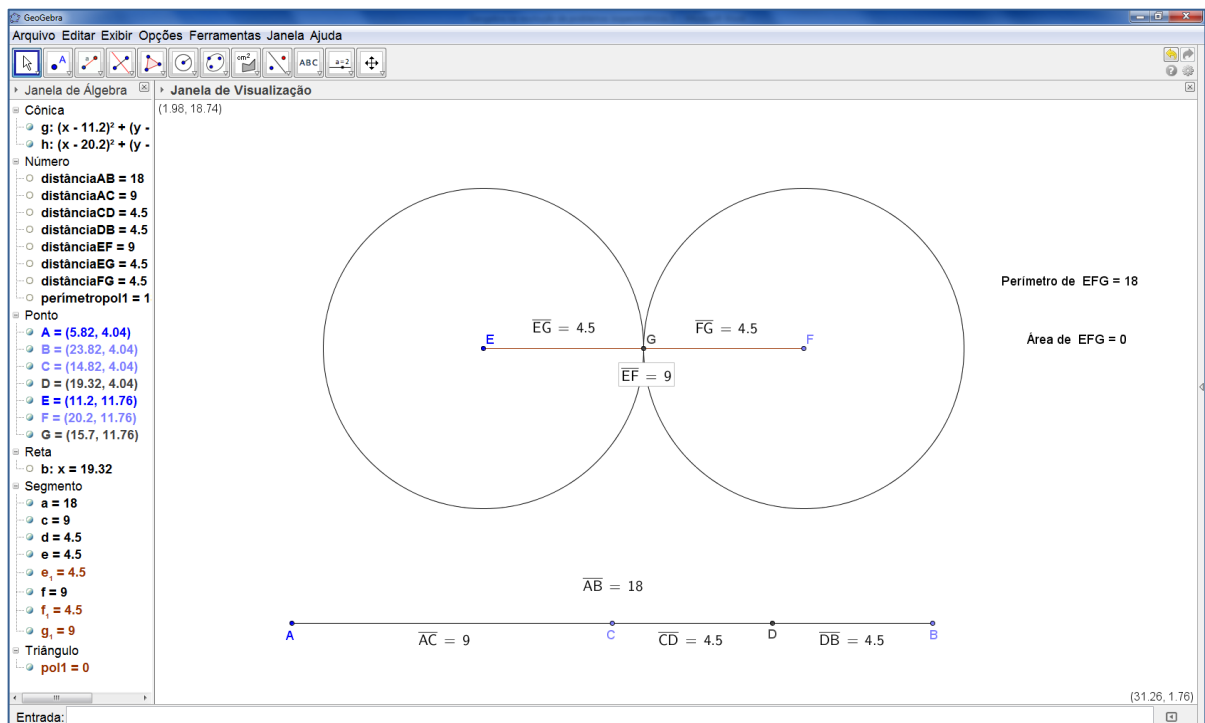


Fonte: o próprio autor

c) Existe triângulo para $\overline{EF} = 9$? Como você justificaria este fato?

Solução: Não. Basta observarmos a figura desenhada após arrastarmos o ponto C , tal que $\overline{AC} = 9$ (Figura 82). Analisando a imagem no GeoGebra, é possível perceber que $\overline{EG} + \overline{FG} = 9$ e, pela desigualdade triangular, sabemos que, num triângulo, o comprimento de um dos lados é sempre inferior à soma dos comprimentos dos outros dois lados, ou seja, no triângulo EFG devemos ter $\overline{AC} < \overline{EG} + \overline{FG}$, o que não ocorre neste caso em que temos $\overline{AC} = \overline{EG} + \overline{FG}$.

Figura 82 – Triângulo para $\overline{AC} = 9$ e $\overline{EG} = \overline{FG} = 4,5$.

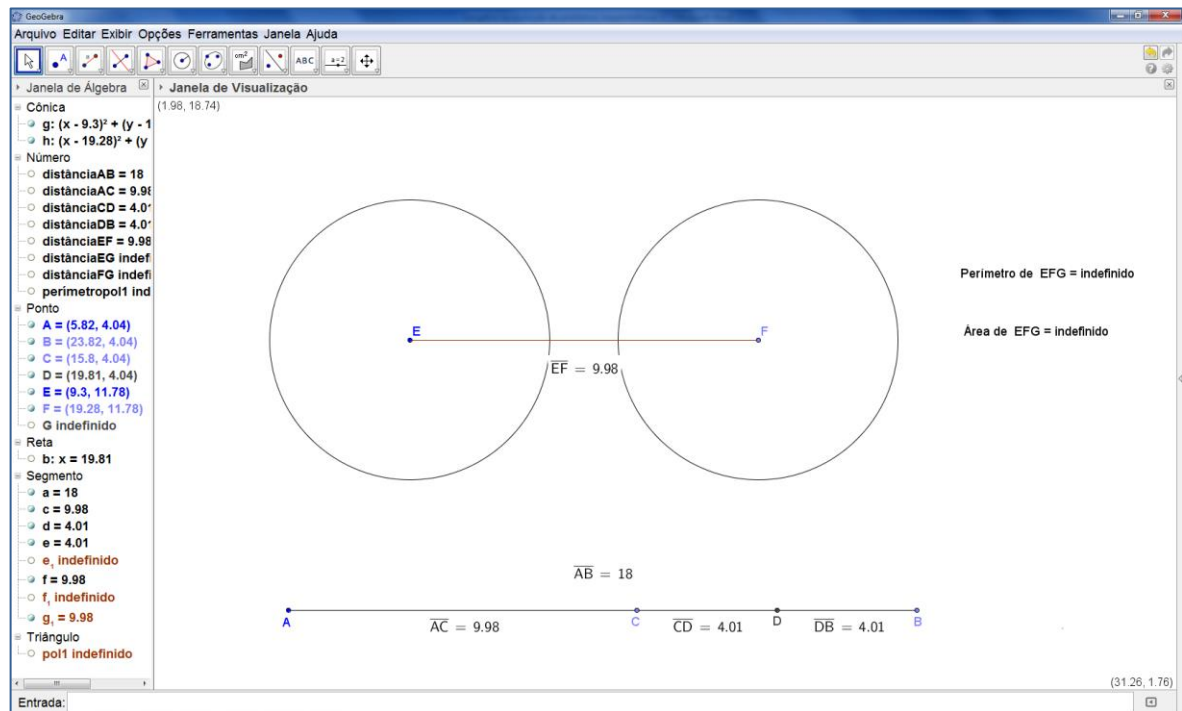


Fonte: o próprio autor

d) Existe triângulo para $\overline{EF} > 9$? Como você justificaria este fato?

Solução: Não. Basta observarmos a figura desenhada após arrastarmos o ponto C , tal que $\overline{AC} > 9$ (Figura 83). Em todos os casos, em que $9 \leq \overline{AC} \leq 18$, temos que $\overline{AC} \geq \overline{EG} + \overline{FG}$ e, como sabemos, pela desigualdade triangular, só existe triângulo EFG quando $\overline{AC} < \overline{EG} + \overline{FG}$.

Figura 83 – Triângulo para $\overline{AC} = 9,98$ e $\overline{EG} = \overline{FG} = 4,01$.



Fonte: o próprio autor

e) Arrastando o ponto C , podemos observar que o triângulo assume várias formas, mas seu perímetro não se altera. Qual deles é o triângulo que encerra maior área?

Solução: Entre todos os triângulos com um dado perímetro, o triângulo equilátero é o de área máxima.

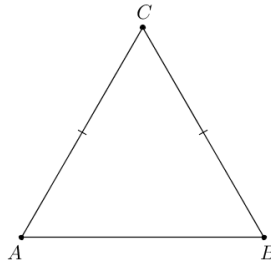
Novamente, destacamos a importância de realizar a atividade acima com outras medidas para o perímetro do triângulo, para que os alunos possam verificar suas hipóteses. Ressaltamos também a importância de propor demonstrações para tal problema. Fica a critério do professor determinar uma demonstração apropriada para a classe onde a atividade será aplicada.

Mostraremos que, entre todos os triângulos de mesmo perímetro, o equilátero é o que determina maior área. A demonstração 1 é uma prova simples apresentada por Pasquali (2004, p. 75), pois utiliza a solução encontrada no Problema 4.2.2. Já, a demonstração 2 é feita a partir do livro de Titu, Mushkarov e Stoyanov (2006, p. 21) e faz uso da Fórmula de Herão e da desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.

Demonstração 1: Admitamos que o triângulo ABC seja a solução para o problema. Como o perímetro é dado, fixando a medida do lado AB , a soma das medidas dos

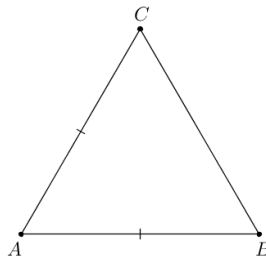
outros dois lados desse triângulo estará fixada. Segue do Problema 4.2.2 que o triângulo ABC de área máxima é isósceles. Então, $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Figura 84 – Triângulo isósceles de base AB .



Agora, se considerarmos como base fixa o lado BC , temos que a soma das medidas dos outros dois lados também será fixada. Assim, pelo Problema 4.2.2, o triângulo de área máxima continua sendo o isósceles. Logo, $\overline{AB} = \overline{AC}$.

Figura 85 – Triângulo isósceles de base BC .



Portanto, podemos concluir que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$, isto é, o triângulo ABC que encerra maior área é o equilátero.



Demonstração 2: Considerando um triângulo arbitrário com lados medindo a , b e c e perímetro $2p = a + b + c$. Pela Fórmula de Herão, a área A deste triângulo é dada por

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \quad (I)$$

Utilizando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, temos que

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \frac{(p-a) + (p-b) + (p-c)}{3} = \frac{3p - (a+b+c)}{3} = \frac{3p - 2p}{3}$$

Logo,

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} \leq \frac{p}{3}.$$

Elevando ao cubo ambos os membros da desigualdade, temos

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{p}{3}\right)^3. \quad (II)$$

Assim, relacionando (I) e (II), obtemos

$$A \leq \sqrt{p \left(\frac{p}{3}\right)^3} = \sqrt{\frac{p^4}{27}} = \frac{p^2}{3\sqrt{3}} = p^2 \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Observe que ocorre igualdade se, e somente se, $p-a = p-b = p-c$, isto é, quando $a = b = c$.

Assim, a área de qualquer triângulo com perímetro $2p$, que não excede $\frac{p^2\sqrt{3}}{9}$ e é igual a $\frac{p^2\sqrt{3}}{9}$, ocorre apenas quando o triângulo é equilátero.



5 ISOPERIMETRIA COM PALITOS DE FÓSFORO

Neste capítulo, serão utilizados palitos de fósforo durante o processo de investigação da solução de problemas isoperimétricos. “A manipulação dos palitos de fósforos com a intenção de formar figuras geométricas em quebra-cabeças requer o uso de lógica e estratégia para resolução, enquanto se trabalham conceitos geométricos”(Maciel; Maciel, 2010).

As atividades propostas neste capítulo foram baseadas no artigo *From Matchstick Puzzles to Isoperimetric Problems*, de Tuzson Zoltán (2013). Neste artigo, Zoltán propõe um trabalho com quebra-cabeça de palitos de fósforo, justificando ser uma forma simples, interessante e instrutiva para aprender noções básicas de isoperimetria, usando apenas matemática elementar para tornar a aprendizagem acessível a qualquer pessoa.

5.1 PALITOS DE FÓSFORO E A MALHA TRIANGULAR

Problema 5.1.1 – Tomando como unidade de comprimento a medida do comprimento do palito de fósforo e como unidade de área a medida da área do triângulo equilátero formado por três palitos, construa todas as figuras possíveis com perímetro igual a 6 unidades de comprimento, cujas áreas possam ser determinadas sem dificuldades.

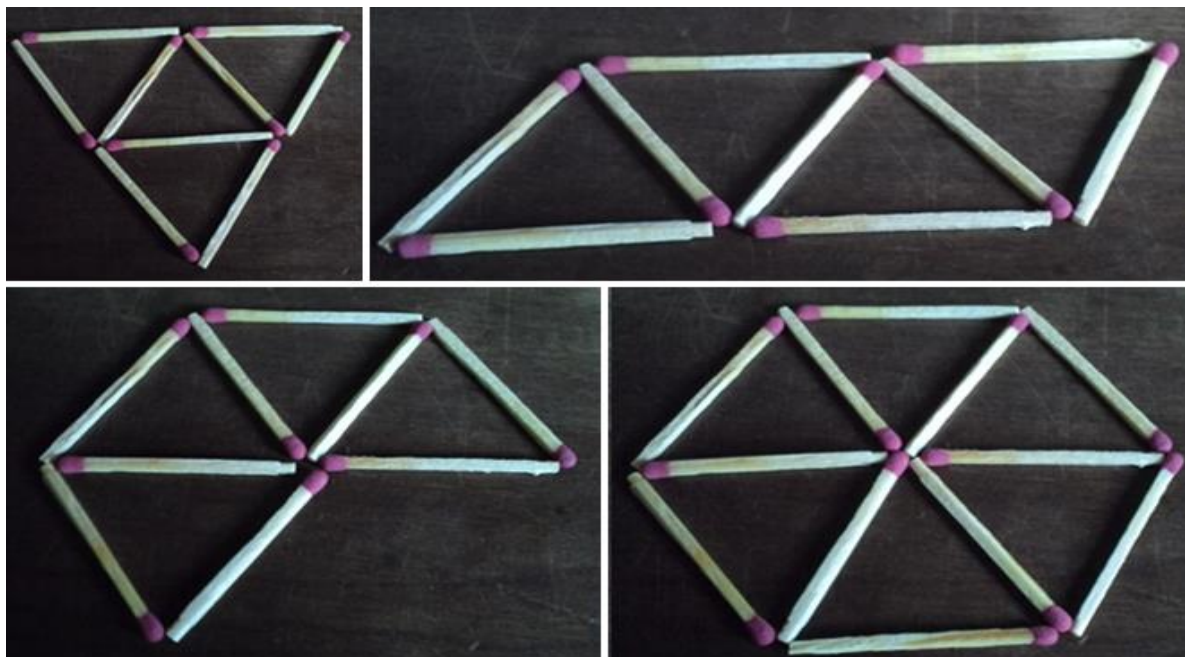
A seguir, tomando o lado do triângulo equilátero que forma a malha triangular como unidade de medida de comprimento do palito de fósforo e a área deste como unidade de medida de área do triângulo equilátero formado por três palitos, desenhe na malha triangular (ANEXO A) as figuras construídas com os palitos de fósforo, anotando suas respectivas áreas.

Agora, responda:

Figuras com mesmo perímetro têm sempre a mesma área?

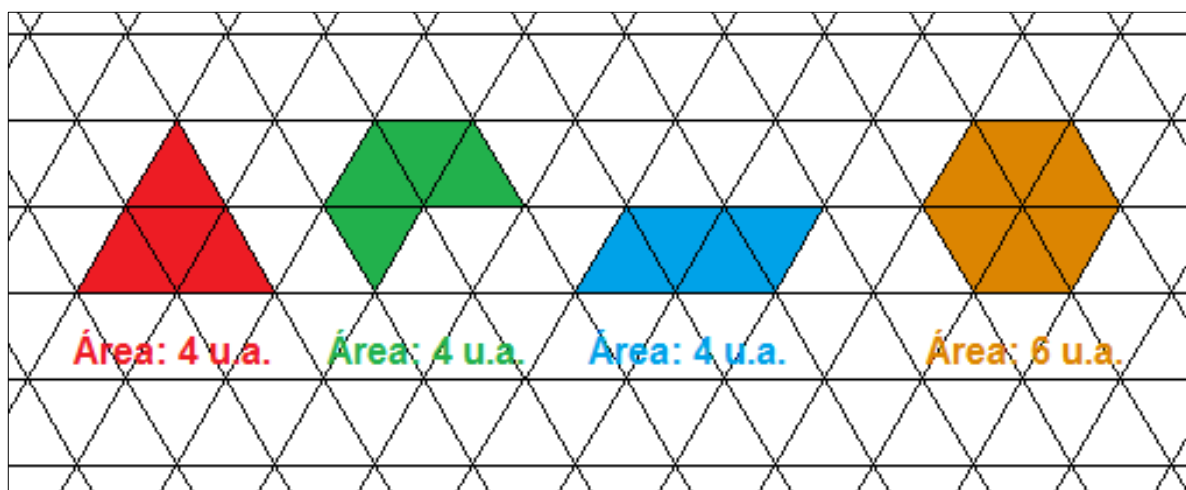
Solução: A seguir, estão as figuras que os alunos deverão construir para que sejam transferidas para a malha triangular. Observe que foram deixados os palitos do interior de cada polígono, a fim de facilitar o cálculo da área.

Figura 86 – Construções com palitos de fósforo.



Fonte: o próprio autor

Figura 87 – Polígonos na malha triangular e suas respectivas áreas.



Fonte: o próprio autor

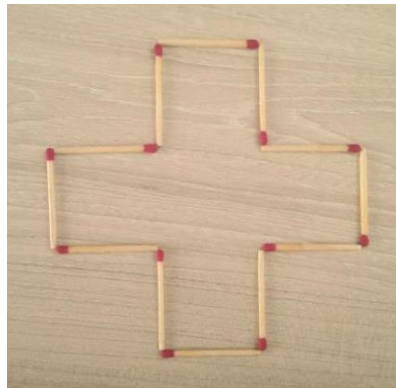
Podemos observar que, mesmo possuindo mesmo perímetro, as figuras não precisam necessariamente ter a mesma área (Figuras 86 e 87). Enquanto os três primeiros polígonos da Figura 87 possuem áreas iguais a 4 u.a., o quarto tem área igual a 6 u.a.

Recomendamos que o professor refaça esta atividade para outras medidas de perímetros. Nesta atividade, ficamos limitados a trabalhar com medidas inteiras.

5.2 PALITOS DE FÓSFORO E A MALHA QUADRICULADA

Problema 5.2.1 – A cruz da Figura 88 é composta por 12 palitos sem qualquer sobreposição. Considerando o comprimento do palito como uma unidade de medida de comprimento (u.c.) e o quadrado formado por quatro palitos como uma unidade de área (u.a.), temos que sua área é 5 u.a., e seu perímetro é de 12 u.c.

Figura 88 – Cruz de palitos.



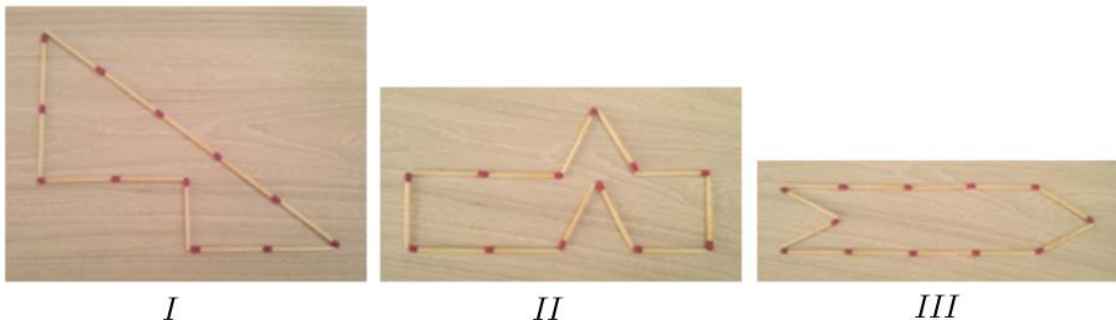
Fonte: o próprio autor

Agora, utilizando esses 12 palitos, vamos responder as seguintes questões:

- Com esses 12 palitos, é possível formar figuras cuja área seja de apenas quatro unidades de área?
- Quais seriam outras possíveis figuras construídas com 12 palitos?
- Qual seria a menor área obtida nas construções com 12 palitos? Qual seria a maior área obtida nas construções com 12 palitos?

Solução: Apresentamos, a seguir, três possíveis construções com os 12 palitos, de forma que a área fique inalterada, isto é, permaneça igual a 4 u.a.:

Figura 89 – Polígonos com 12 palitos.



I

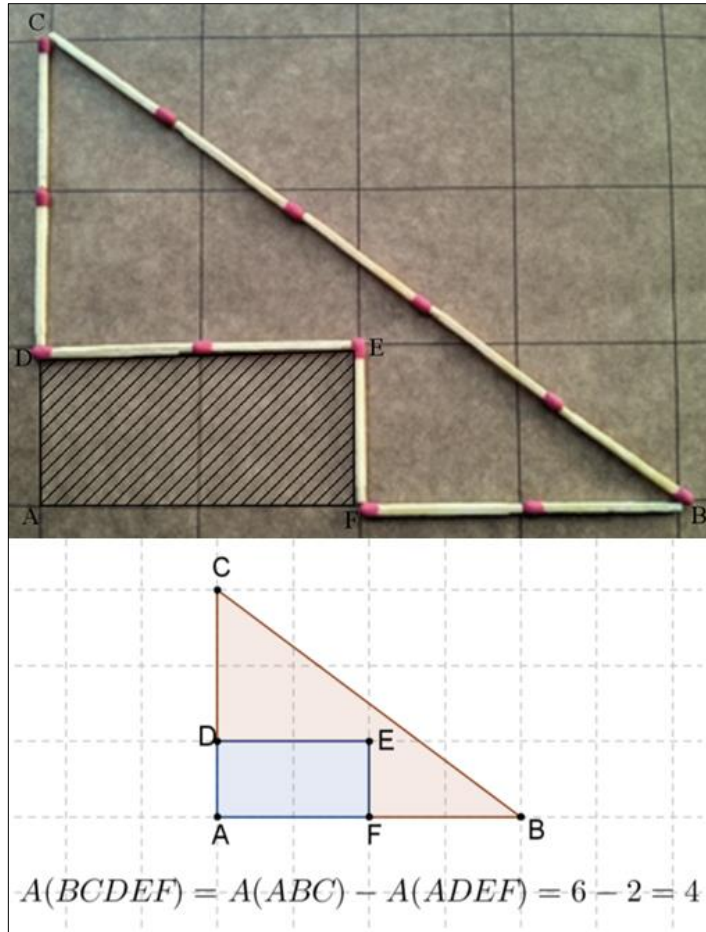
II

III

Fonte: o próprio autor

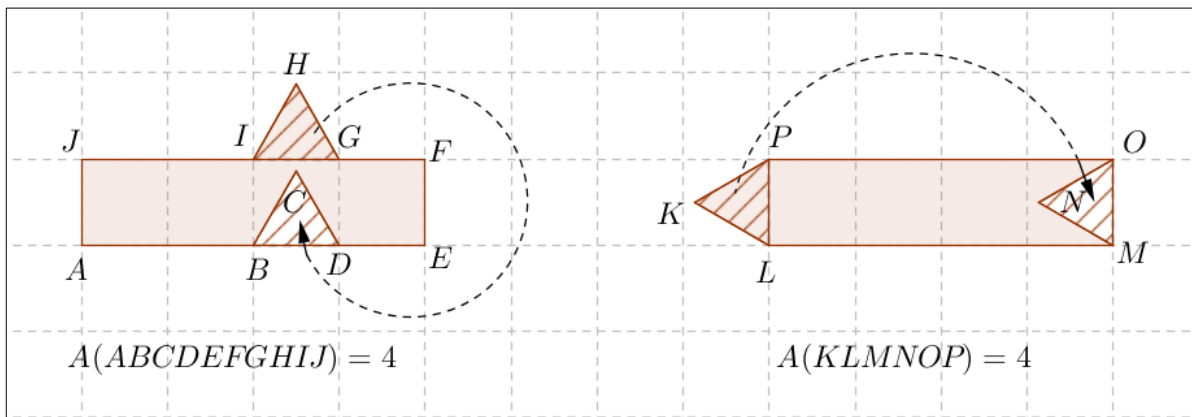
Pelas imagens da Figura 90 podemos concluir que, para determinarmos a área da primeira construção com palitos (Figura 89, construção I), temos que subtrair um retângulo de área igual a 2 u.a. do triângulo retângulo de catetos medindo 4 u.c. e 3 u.c., de área igual a 6 u.a. Já, a área das duas construções seguintes (Figura 89, construções II e III) pode ser calculada pela simples translação de parte do polígono, como mostra a Figura 91.

Figura 90 – Área do polígono BCDEF.



Fonte: o próprio autor

Figura 91 – Área dos polígonos ABCDEFGHIJ e KLMNOP.

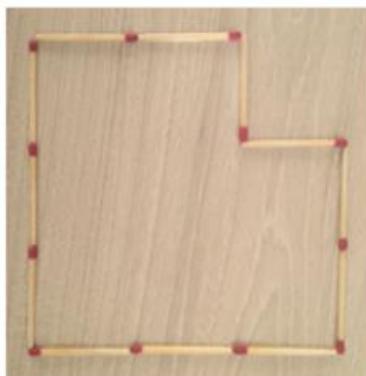


Logo abaixo, temos algumas formas que podem ser feitas com os 12 palitos, cujas áreas podemos medir sem dificuldades.

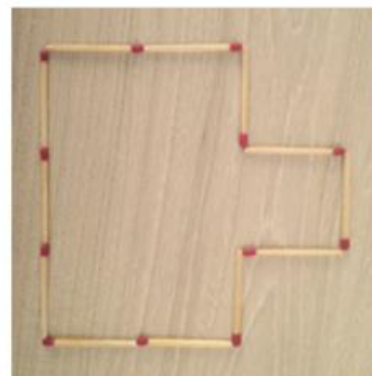
Figura 92 – Construções com 12 palitos.



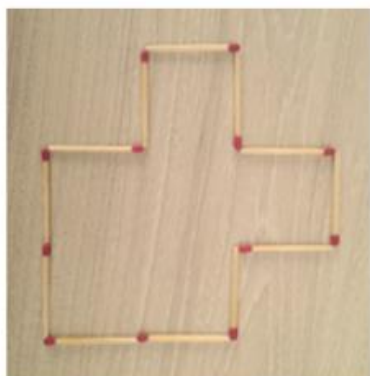
I



II



III



IV



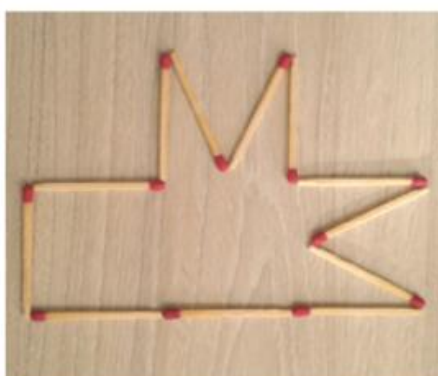
V



VI



VII



VIII

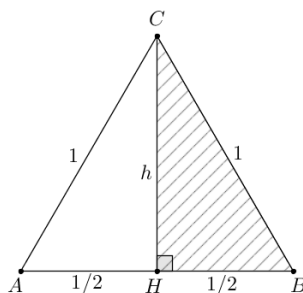


IX

Fonte: o próprio autor

Tomando um triângulo formado por 3 palitos, temos um triângulo equilátero cujo comprimento dos lados é de 1 u.c.

Figura 93 – Triângulo equilátero de lado 1 u.c.



Portanto, sua área é

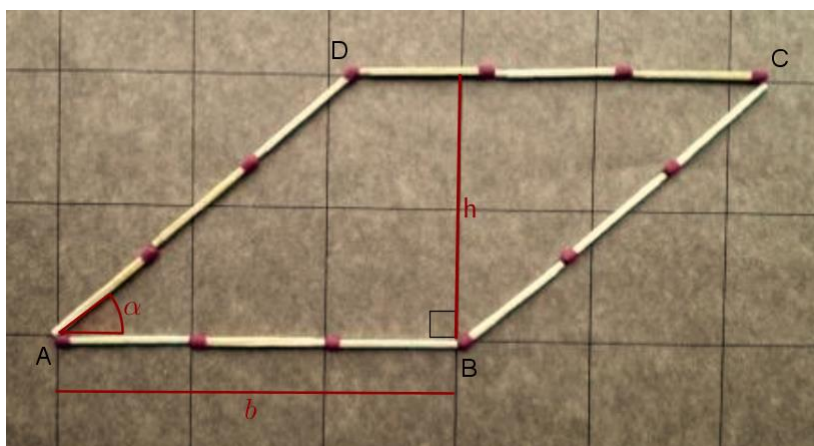
$$A = \frac{1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

As áreas dos polígonos das figuras I – IX são, na sequência: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 4, $4 - \frac{\sqrt{3}}{2}$, 3 unidades de área. A área e a forma das figuras obtidas podem variar de muitas outras maneiras.

Podemos observar, pelas construções feitas que, apesar de mantermos o perímetro das figuras (12 palitos), a área teve certa variação. Então, qual seria a menor área encerrada pelos 12 palitos?

Para respondermos a essa questão, devemos analisar o paralelogramo, pois sua área está relacionada à sua altura, ou seja, $A(ABCD) = b \cdot h$ (Figura 94).

Figura 94 – Paralelogramo com palitos na malha quadriculada.

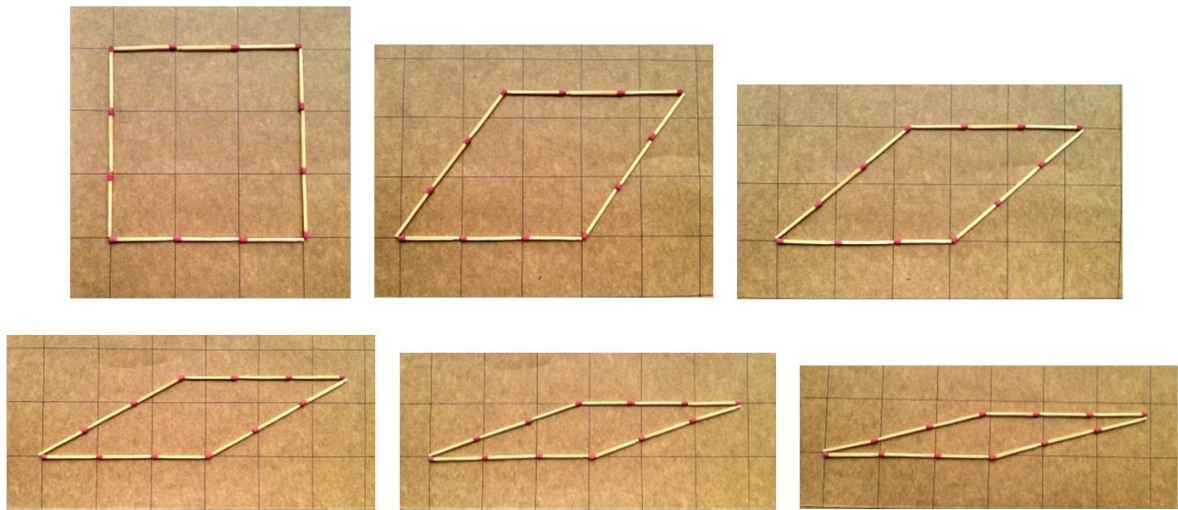


Fonte: o próprio autor

Observe que, variando o ângulo α (Figura 94), ocorre também variação da altura do paralelogramo. Dessa forma, pela Figura 95, podemos perceber que, quando

$\alpha = 90^\circ$, temos um quadrado cuja área é 9 u.a., ou seja, quando $\alpha = 90^\circ$, o paralelogramo atinge altura máxima. Por outro lado, quando o ângulo α se aproxima de zero, a altura do paralelogramo também se aproxima de zero e, conseqüentemente, sua área se aproximará de zero. Portanto, no caso desse paralelogramo, a área pode variar de 0 a 9 (excluindo o zero) sem que seu perímetro seja modificado.

Figura 95 – Sequência de paralelogramos construídos numa malha quadriculada.

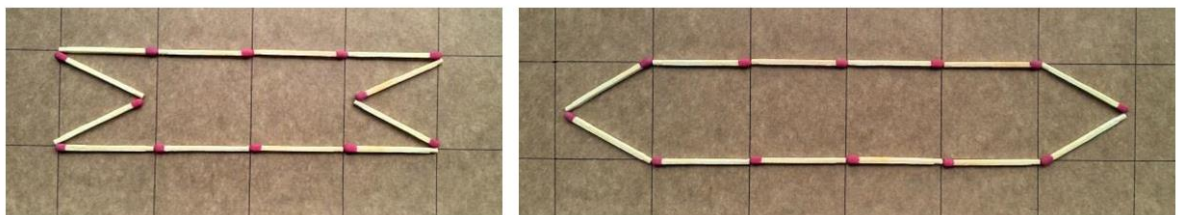


Fonte: o próprio autor

Em relação à questão sobre a maior área encerrada pelos 12 palitos, temos algumas considerações a fazer:

- Pelas construções feitas, podemos concluir que a figura que encerra a maior área será convexa, pois, se tomarmos qualquer uma das figuras não convexas e modificarmos a posição de alguns palitos, encontraremos uma figura convexa de área maior (Figura 96);

Figura 96 – Figuras não convexa e convexa com mesmo perímetro.



Fonte: o próprio autor

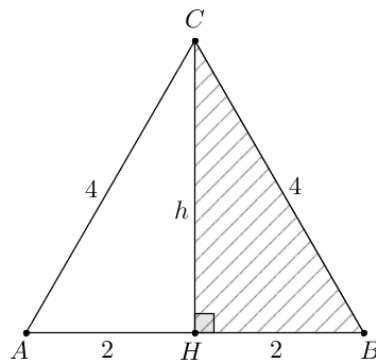
- Das figuras apresentadas até aqui, temos que o quadrado 3 x 3 encerra a maior área;

- Como o quadrado é um polígono regular, então deveríamos verificar se não há outro polígono regular que possa ser construído com os 12 palitos de forma a encerrar maior área.

Os polígonos regulares que podemos construir com os 12 palitos são: triângulo equilátero, quadrado, hexágono regular e dodecágono regular. Assim, vamos verificar cada um dos casos. Já sabemos que a área do quadrado é 9 u.a.

Vamos calcular a área do triângulo equilátero, cujos lados medem 4 u.c.

Figura 97 – Triângulo equilátero de lado 4 u.c.



Seja o triângulo equilátero ABC de lado 4 u.c. e altura h (Figura 97). Pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$4^2 = h^2 + (2)^2$$

Assim,

$$h = 2\sqrt{3} \text{ u. c.}$$

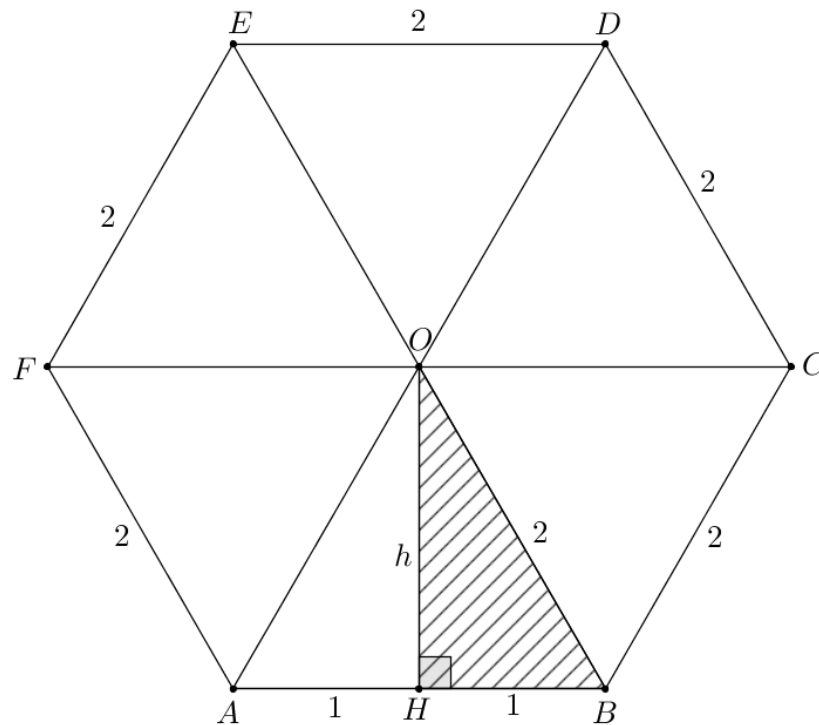
Logo, a área deste triângulo equilátero é

$$A(ABC) = \frac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3} \cong 6,93 \text{ u. a.}$$

Portanto, como $6,93 < 9$, temos que a área do triângulo equilátero é menor que a do quadrado.

Calcularemos, agora, a área do hexágono regular, cujos lados medem 2 u.c..

Figura 98 – Hexágono regular de lado 2 u.c.



Seja o hexágono regular $ABCDEF$ de lado 2 u.c. O hexágono regular pode ser dividido em 6 triângulos equiláteros, conforme mostra a Figura 98. Assim, tomando o triângulo equilátero ABO de lado 2 u.c. e altura h , temos

$$2^2 = h^2 + (1)^2 .$$

Assim,

$$h = \sqrt{3} \text{ u. c.}$$

Logo, a área deste triângulo equilátero é

$$A(ABO) = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cong 1,73 \text{ u. a.}$$

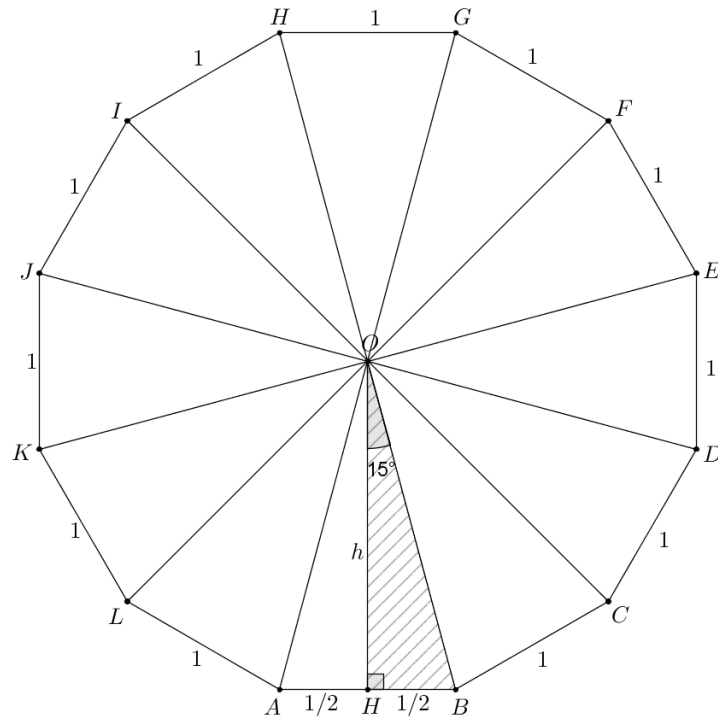
Então,

$$A(ABCDEF) = 6 \cdot \sqrt{3} \cong 10,39 \text{ u. a.}$$

Portanto, como $10,39 > 9$, temos que a área do hexágono regular é maior que a área do quadrado.

Enfim, vamos calcular a área do dodecágono regular de lado 1 u.c.

Figura 99 – Dodecágono regular de lado 1 u.c.



Seja o dodecágono regular $ABCDEFGHIJKL$ de lado 1 u.c. Pela Figura 99, podemos ver que ele pode ser dividido em 12 triângulos isósceles de base 1 u.c. e $\widehat{AOB} = 30^\circ$. Assim, tomando o triângulo isósceles ABO de base 1 u.c e altura h , temos

$$\operatorname{tg}15^\circ = \frac{1}{h}.$$

Logo,

$$h = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}15^\circ} = \frac{1}{2(2 - \sqrt{3})} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2}.$$

Então, a área do triângulo isósceles ABO é

$$A(ABO) = \frac{1 \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4} \text{ u. a.}$$

Portanto, a área do dodecágono em questão é

$$A(ABCDEFGHIJKL) = 12 \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{4} = 3(2 + \sqrt{3}) \cong 11,20 \text{ u. a.}$$

Dessa forma, podemos notar que a área do dodecágono regular superou a do hexágono regular.

Será que podemos obter outra figura formada pelos 12 palitos cuja área seja maior que a do dodecágono regular?

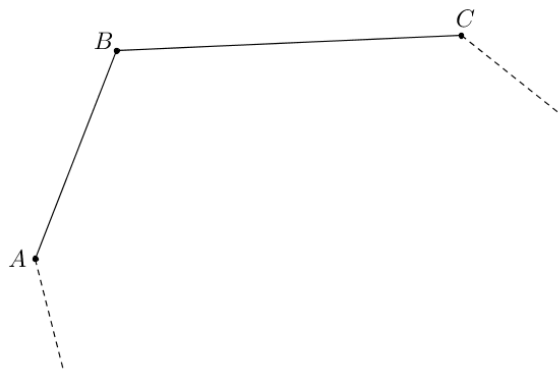
Mostraremos que o dodecágono regular é o polígono de área máxima que pode ser construído com os 12 palitos. Para isso, demonstraremos que, entre todos os polígonos com o mesmo número de lados e com o mesmo perímetro, o polígono regular é o que possui maior área e, logo a seguir, que, entre todos os polígonos regulares com o mesmo perímetro, o que tem maior área é o que possui maior número de lados.

Teorema 5.2.1 – Entre todos os polígonos com o mesmo número de lados e com o mesmo perímetro, o polígono regular é o que possui maior área.

Demonstração: Faremos esta demonstração em duas etapas. Em primeiro lugar, mostraremos que se o polígono tem área máxima, então ele deve ter todos os seus lados iguais, ou seja, é um polígono equilátero.

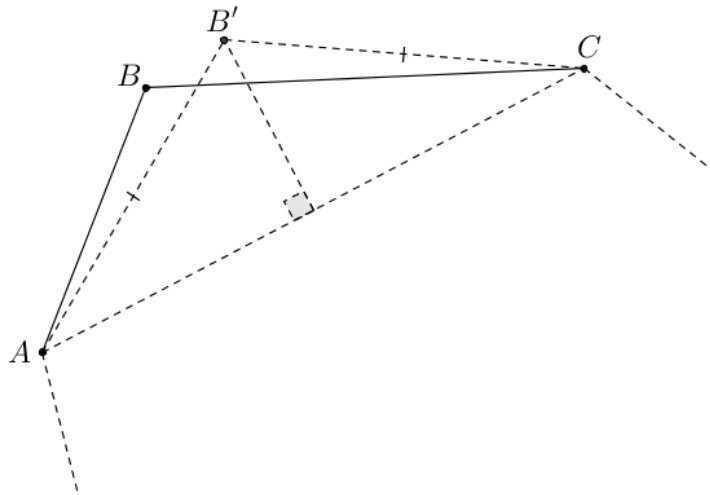
Suponhamos que o polígono solução não seja equilátero. Então, existem pelo menos dois lados consecutivos de comprimentos distintos, digamos $\overline{AB} \neq \overline{BC}$ (Figura 100).

Figura 100 – Lados AB e BC consecutivos de um polígono.



Substituindo o ponto B por um ponto B' , tal que $\overline{AB'} = \overline{B'C}$ com $\overline{AB'} + \overline{B'C} = \overline{AB} + \overline{BC}$, concluímos, pelo Problema 4.2.2, que a área do triângulo $AB'C$ será maior do que a área do triângulo ABC . Logo, obtemos um novo polígono com área maior do que o polígono original, contradizendo o fato de que ele seria a solução. Portanto, o polígono solução deve ser equilátero.

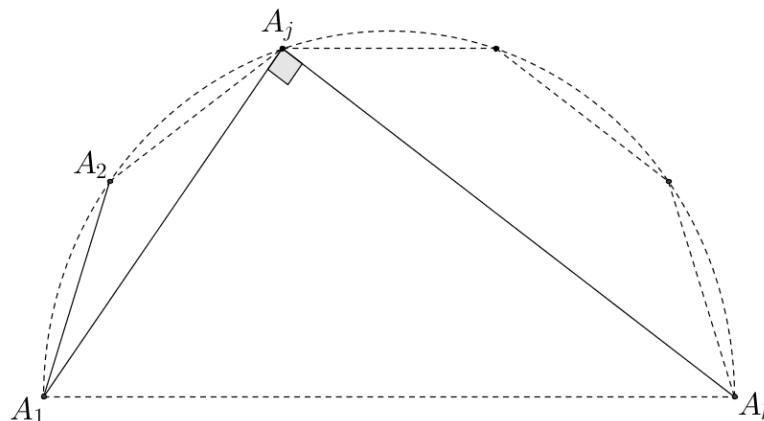
Figura 101 – $\overline{AB'} + \overline{B'C} = \overline{AB} + \overline{BC}$.



Em segundo lugar, provaremos que o polígono solução é equiângulo. Seja P_n o polígono de n lados que engloba a maior área dentre todos os polígonos de mesmo perímetro que P_n . Suponhamos que n seja par, ou seja, $n = 2k$. Assim, $A_1; A_2; \dots; A_{2k}$ são os vértices do polígono. Logo, a reta $\overleftrightarrow{A_1A_k}$ divide o polígono em duas partes de mesma área, pois, caso contrário, bastaria refletirmos a parte de área maior em relação à reta $\overleftrightarrow{A_1A_k}$. Analisaremos uma dessas partes.

Consideremos, então, qualquer vértice A_j entre A_1 e A_k . Logo, $\angle A_1\hat{A}_jA_k = 90^\circ$, pois, pela Proposição 2.3.2, essa é a condição para que o triângulo $A_1A_jA_k$ tenha área máxima, mantendo inalteradas as medidas dos segmentos A_1A_j e A_jA_k e as medidas dos lados entre A_1 e A_k . Assim, utilizando as Proposições 2.3.1 e 2.3.2, todos os vértices de cada uma das duas partes do polígono estão contidos num semicírculo.

Figura 102 – $\angle A_1\hat{A}_jA_k = 90^\circ$.



Fonte: o próprio autor

Logo, se $A_1\hat{A}_jA_k = 90^\circ$ para todo $1 < j < k$, teremos que o polígono P_n estará necessariamente inscrito numa circunferência. Como P_n é equilátero, então ele é regular. Portanto, se n é par, dentre todos os polígonos com o mesmo número de lados e com o mesmo perímetro, o polígono regular é o que possui área máxima.

Agora, suponhamos que n seja ímpar. Seja P o polígono, não equiângulo, de n lados com perímetro l , a solução para o problema e P_n o polígono regular de n lados e perímetro l .

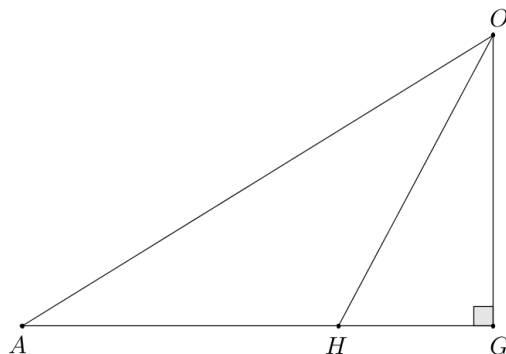
Construamos o polígono P_{2n} regular de $2n$ lados e perímetro $l' > l$, sobre o polígono P_n , tal que P_{2n} seja inscrito no mesmo círculo que circunscreve P_n . Assim, pela argumentação anterior, P_{2n} é o polígono de $2n$ lados e perímetro l' de área máxima.

Unindo dois vértices alternados de P_{2n} , obtemos uma diagonal que é igual aos lados de P_n e também de P . Caso a área de P_n seja menor ou igual à área de P , recortando os n triângulos formados por dois lados consecutivos de P_{2n} e pela diagonal de vértices alternados e, colando-os sobre os lados de P , obteríamos um polígono de $2n$ lados com perímetro l' mas não regular e com área maior ou igual à área de P_{2n} . Mas isto é uma contradição, pois P_{2n} é o único polígono de $2n$ lados e perímetro l' de área máxima. Portanto, dentre todos os polígonos com n lados e com o mesmo perímetro, o polígono regular é o que possui área máxima. ■

Lema 5.2.1 – Sejam \overrightarrow{OG} e \overrightarrow{AG} duas retas perpendiculares e \overrightarrow{OH} e \overrightarrow{OA} duas retas oblíquas (Figura 103). Então,

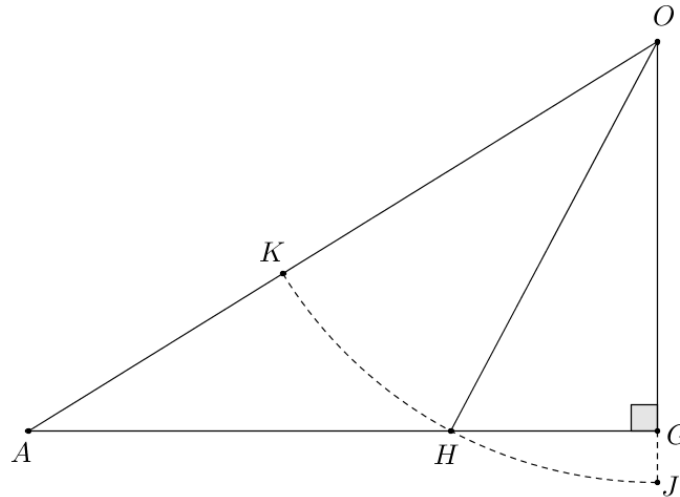
$$\frac{\overline{AG}}{\overline{HG}} > \frac{A\hat{O}G}{H\hat{O}G}.$$

Figura 103 – Triângulos OAH e OHG .



Demonstração: Vamos desenhar um arco KHJ de centro em O e raio \overline{OH} , conforme mostra a Figura 104.

Figura 104 – Triângulos OAH e OHG e o arco KHJ .



Note que

$$A(OAH) > A(\text{setor } OKH)$$

$$A(OHG) < A(\text{setor } OHJ).$$

Logo,

$$\frac{A(OAH)}{A(OHG)} > \frac{A(\text{setor } OKH)}{A(\text{setor } OHJ)}.$$

Substituindo e simplificando, temos

$$\frac{\frac{\overline{AH} \cdot \overline{OG}}{2}}{\frac{\overline{HG} \cdot \overline{OG}}{2}} > \frac{\frac{A\hat{O}H}{360^\circ} \cdot \pi \cdot \overline{OH}^2}{\frac{H\hat{O}G}{360^\circ} \cdot \pi \cdot \overline{OH}^2}$$

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{HG}} > \frac{A\hat{O}H}{H\hat{O}G}.$$

Somando 1 a ambos os membros da desigualdade, temos

$$\frac{\overline{AH}}{\overline{HG}} + \frac{\overline{HG}}{\overline{HG}} > \frac{A\hat{O}H}{H\hat{O}G} + \frac{H\hat{O}G}{H\hat{O}G},$$

$$\frac{\overline{AH} + \overline{HG}}{\overline{HG}} > \frac{A\hat{O}H + H\hat{O}G}{H\hat{O}G}.$$

Logo,

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{HG}} > \frac{A\hat{O}G}{H\hat{O}G}.$$

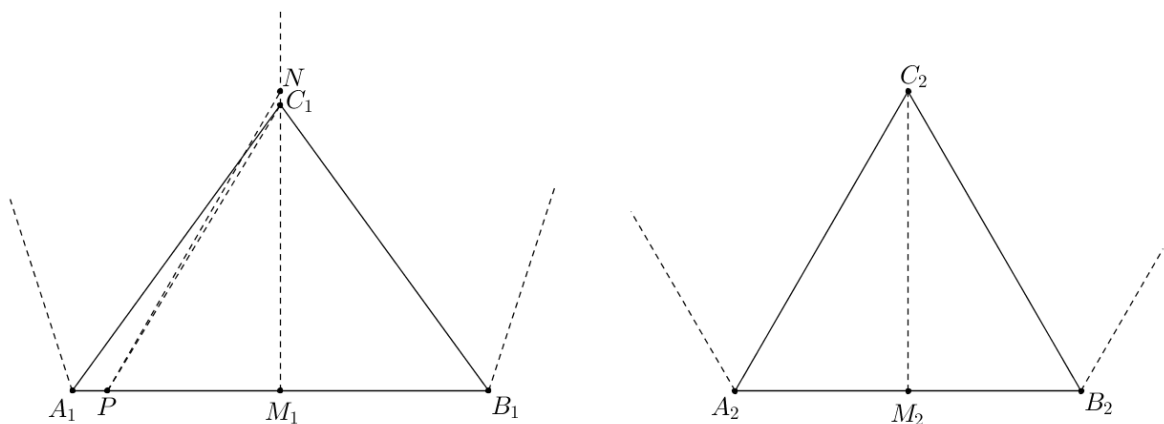


Teorema 5.2.2 – Entre todos os polígonos regulares com o mesmo perímetro, o que tem maior área é o que possui maior número de lados.

Demonstração: Consideremos dois polígonos regulares, P_1 e P_2 , cujo perímetro $2p$ é o mesmo e com diferentes números de lados, de modo que P_2 tem mais lados que P_1 . Vamos mostrar que P_2 encerra maior área.

Sejam M_1 e M_2 os pontos médios dos lados A_1B_1 e A_2B_2 dos polígonos P_1 e P_2 respectivamente, e C_1 e C_2 os centros de cada polígono, conforme mostra a Figura 105. Como $\overline{A_1B_1} > \overline{A_2B_2}$, segue que $\overline{A_1M_1} > \overline{A_2M_2}$ e podemos tomar sobre o segmento A_1M_1 um ponto P , tal que $\overline{PM_1} = \overline{A_2M_2}$.

Figura 105 – Triângulos $A_iB_iC_i$ em polígonos regulares.



Consideremos os triângulos $A_iB_iC_i$. Dado que os polígonos são regulares, a razão entre o lado A_iB_i e o perímetro $2p$ é igual a razão entre o ângulo $\angle A_iC_iB_i$ com 360° .

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{2p} = \frac{A_1\hat{C}_1B_1}{360^\circ} \quad e \quad \frac{\overline{A_2B_2}}{2p} = \frac{A_2\hat{C}_2B_2}{360^\circ}.$$

Dividindo, membro a membro, ambas as igualdades, temos

$$\frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{A_2 B_2}} = \frac{A_1 \hat{C}_1 B_1}{A_2 \hat{C}_2 B_2}.$$

Logo,

$$\frac{\overline{A_1 M_1}}{\overline{A_2 M_2}} = \frac{A_1 \hat{C}_1 M_1}{A_2 \hat{C}_2 M_2}.$$

Então, como $\overline{PM_1} = \overline{A_2 M_2}$, segue que

$$\frac{\overline{A_1 M_1}}{\overline{PM_1}} = \frac{A_1 \hat{C}_1 M_1}{A_2 \hat{C}_2 M_2}.$$

Considerando o Lema 5.2.1, temos que

$$\frac{\overline{A_1 M_1}}{\overline{PM_1}} > \frac{A_1 \hat{C}_1 M_1}{P \hat{C}_1 M_1}.$$

Assim,

$$\frac{A_1 \hat{C}_1 M_1}{A_2 \hat{C}_2 M_2} > \frac{A_1 \hat{C}_1 M_1}{P \hat{C}_1 M_1}.$$

Portanto,

$$A_2 \hat{C}_2 M_2 < P \hat{C}_1 M_1 \quad e \quad C_2 \hat{A}_2 M_2 > C_1 \hat{P} M_1.$$

Agora, se construirmos um ângulo igual a $C_2 \hat{A}_2 M_2$ com vértice P , sendo um lado PM_1 e o outro um segmento que parte de P e corta a semirreta $\overrightarrow{M_1 C_1}$ em um ponto N que está acima de C_1 (Figura 105), temos que $\overline{M_1 N} > \overline{M_1 C_1}$ e, conseqüentemente, $\overline{M_2 C_2} > \overline{M_1 C_1}$. Portanto a apótema do polígono P_1 é menor que a apótema do polígono P_2 .

Como as áreas dos polígonos P_1 e P_2 são, respectivamente,

$$p. \overline{M_1 C_1} \quad e \quad p. \overline{M_2 C_2},$$

deduzimos que a área de P_2 é maior que a área de P_1 .



CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho busca modificar o ambiente da sala de aula e potencializar a argumentação durante o processo de ensino e aprendizagem de geometria. Esperamos que o desenvolvimento das atividades sugeridas estimule a investigação e o questionamento, possibilitando aos alunos um despertar pela geometria, proporcionando situações propícias à formulação e verificação de conjecturas, assim como a demonstração.

Além de introduzir o estudo de propriedades geométricas, o trabalho envolvendo a lenda de Dido nos permite um projeto interdisciplinar junto aos professores de português, história, geografia e artes.

Alguns recursos didáticos foram apresentados ao longo deste trabalho e também foram incluídas diversas demonstrações que poderão ser utilizadas por professores e alunos de acordo com a familiaridade e o nível de conhecimento dos conceitos envolvidos em cada demonstração. Conhecendo as potencialidades dos materiais didáticos manipuláveis e dos recursos computacionais e, utilizando-os de forma a enriquecer o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, além de valorizarmos a construção do conhecimento de modo significativo, desenvolvemos algumas importantes características como experimentar, interpretar, visualizar, conjecturar, abstrair, generalizar e demonstrar. Não podemos nos esquecer de que o papel do professor não pode ser o de um simples transmissor de conhecimentos, mas o de um mediador durante esse processo, ou seja, deve desenvolver mecanismos que facilitem a aprendizagem. Além disso, cabe ao professor motivar e envolver os alunos, fazendo com que eles se tornem elementos ativos durante todo o processo de ensino e aprendizagem ao invés de meros espectadores.

Destacamos que, devido à falta de tempo, ficamos impossibilitados de aplicar as atividades sugeridas com os alunos, mas, assim que surgirem oportunidades poderemos aplicá-las, avaliá-las e analisar os resultados desta proposta de estudo para o problema isoperimétrico. Deixamos aqui uma sugestão para alguém que queira dar continuidade a esse trabalho.

Enfim, confiante de que o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) atingiu seu objetivo, disposto no artigo 1 de seu regimento, que é de “proporcionar formação matemática aprofundada, relevante e articulada com o exercício da

docência no Ensino Básico, visando fornecer ao egresso qualificação certificada para o exercício da profissão de professor de Matemática”, saliento que este Trabalho de Conclusão de Curso já vem contribuindo em minha prática docente, em sala de aula, e destaco os seguintes pontos: segurança para atuar com conceitos geométricos, senso crítico aguçado e maior conhecimento do GeoGebra.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUILERA, Néstor. **Investigación y Docencia**. Disponível em: <<http://www.oma.org.ar/invydoc/index.htm>>. Acesso em: 30 ago. 2014

ARGUEDAS, Vernor. **La reina Dido de Cartago y el primer problema isoperimétrico conocido**. Revista digital Matemática, Educación e Internet, vol. 13, nº 1, março – agosto 2013. Disponível em <http://www.tec-digital.itcr.ac.cr/revistamatematica/Secciones/Historia/RevistaDigital_Arguedas_V13_n2_2013/index.html> Acesso em: 01 mar. 2014.

BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: SBM – Sociedade Brasileira de Matemática. 1995.

BERLINGHOFF, William; P. GOUVÊA, Fernando Q. **A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas**. Tradução de Elza F. Gomide e Helena Castro. 2ª ed. São Paulo: Blucher, 2010. Tradução de: Math through the ages: a gentle history for teachers and others.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. 3ª ed. São Paulo: Blucher, 2010. Tradução de: A History of Mathematics.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: MEC/SEF, 2006. Disponível em <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>. Acesso em: 14 jun. 2014.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília. MEC / SEF, 1998.

BRITO, Dirceu dos Santos. **Problemas de otimização geométrica aplicados ao estudo de praças: uma experiência de ensino com atividades de modelagem matemática**. Dissertação de Mestrado (Mestrado Profissional de Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2013.

COSTA DA FONTE, André. **Médias, desigualdades e problemas de otimização**. Trabalho de conclusão (Mestrado Profissional) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife. 2013.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. **O que é Matemática?** Tradução de Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2000. Tradução de: What is Mathematics?

DANTE, Luiz R. **Matemática: Contexto e Aplicações**. São Paulo: Ática, 2010.

DEGUIRE, Linda J. **Geometria: um caminho para o ensino da resolução de problemas do jardim-de-infância à nona série**. In: LINDQUIST, Mary Montgomery; SHULTE, Alberto P. (Org). **Aprendendo e Ensinando Geometria**. Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994. p.73–85. Tradução de: Learning and Teaching Geometry.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 5ª ed. Campinas, SP: Editora Unicamp, 2011. Tradução de: An Introduction to the History of Mathematics.

FIGUEIREDO, Djairo G de. **Problemas de Máximo e mínimo na Geometria Euclidiana**. Revista Matemática Universitária, nº 9/10. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1989.

FREITAS, Pedro J. **A demonstração Matemática no Ensino Básico e Secundário**. 2011. Disponível em: <http://www.ptmat.fc.ul.pt/~pedro/pdfs/Dem_ProfMat.pdf>. Acesso em: 1 jul. 2014.

GARBI, Gilberto G. **A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**. 5ª ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

HERRERO PIÑEYRO, Pedro José. **La historia del problema isoperimétrico clásico con geometría elemental**. La Gaceta de La RSME. Vol. 15 (2012), Núm. 2, p. 335-354. Disponível em <[file:///C:/Users/Usuario/Downloads/historia152%20\(2\).pdf](file:///C:/Users/Usuario/Downloads/historia152%20(2).pdf)> Acesso em: 11 jul. 2014.

LIMBERGER, Roberto. **Abordagens do problema isoperimétrico**. Dissertação (Mestrado Profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas. 2011.

MACIEL, Anibal de Menezes; MACIEL, Eliane Maria de Menezes. **A geometria nos palitos de fósforos e canudos**. In: X Encontro Nacional de Educação Matemática: Educação Matemática, Cultura e Diversidade, 2010. Salvador. Anais... Salvador: Sociedade Brasileira de Matemática, 2010. Disponível em <http://www.lematec.net/CDS/ENEM10/artigos/RE/T12_RE2221.pdf>. Acesso em: 12 set. 2014.

MADEIRA, Telma Morais. **O problema isoperimétrico clássico**. Dissertação de Mestrado – Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade de Coimbra, Coimbra. 2005.

MAJOR, Zoltán. **An interesting optimization problem Family: Isoperimetric problems**. Sopron, 2013.

MOREIRA, Carlos Gustavo T. de A.; SALDANHA, Nicolau Corção. **A desigualdade Isoperimétrica**. Matemática Universitária, n.15, 13 – 19, 1993. Disponível em: <http://matematicauniversitaria.ime.usp.br/Conteudo/n15/n15_Artigo02.pdf>. Acesso em: 14 jan. 2014.

PASQUALI, Kely Cristina. **Máximos e Mínimos em Geometria Euclidiana Plana**. Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. 2004.

PAVANELLO, Regina Maria. **O Abandono do Ensino de Geometria: Uma visão Histórica**. Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual de Campinas, Campinas. 1989.

PEREIRA, Antônio Luiz; POSSANI, Cláudio. **Qual é o maior terreno que sua cerca pode delimitar?** Revista do Professor de Matemática n.54. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004.

RIBEIRO, Jackson. **Matemática: ciência, linguagem e tecnologia**. Vol.3. São Paulo: Scipione, 2010.

ROCHA, Alan Martins. **Problemas de otimização envolvendo a matemática do Ensino Médio**. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Goiás, Goiânia. 2013.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias / Secretaria da Educação**. Coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado. 1. ed. atual. São Paulo: Imprensa Oficial do Estado/SEE, 2012.

SILVA, Elion Souza da. **Problemas de Máximos e Mínimos e desigualdades Geométricas**. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza. 2013.

STRUIK, Dirk J. **História Concisa das Matemáticas**. Tradução de João Cosme Santos Guerreiro. 3ª ed. Lisboa: Gradiva, 1997. Tradução de: A Concise History of Mathematics.

TITU, Andreescu; MUSHKAROV, Oleg; STOYANOV, Luchezar. **Geometric Problems on Maxima and Minima**. Berlin: Birkhäuser Boston, 2006.

VIEIRA, Carmem Rosilene. **Reinventando a Geometria no Ensino Médio: uma abordagem envolvendo materiais concretos, softwares de geometria dinâmica e a teoria de Van Hiele**. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto. 2010.

VIRGÍLIO, P. **Eneida**. Tradução de Manuel Odorico Mendes. Disponível em <<http://www.ebooksbrasil.org/eLibris/eneida.html>>. Acesso em: 03 mar. 2014. Tradução de: La Eneida.

ZOLTÁN, Tuzson. **From Matchstick Puzzles to Isoperimetric Problems**. *Jornal Acadêmico: The Teaching of Mathematics*, 2013, vol.XVI, 1, p. 12–17. Disponível em <<http://elib.mi.sanu.ac.rs/files/journals/tm/30/tm1613.pdf>>. Acesso em: 18 fev. 2014

ZULATTO, Rúbia Barcelos Amaral. **Softwares de Geometria Dinâmica: suas características e perspectivas**. Dissertação de Mestrado – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. 2002.

ANEXO

ANEXO A**Malha triangular**