UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

FÁBIO LUIZ GARCIA

# OLIMPÍADAS MATEMÁTICAS:
UM CAMINHO PARA O FUTURO

Londrina
2017

FÁBIO LUIZ GARCIA

# OLIMPÍADAS MATEMÁTICAS:

## UM CAMINHO PARA O FUTURO

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientadora: Profa.Dra. Neuza Teramon.

Londrina
2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Garcia , Fábio Luiz .

Olímpiadas Matemáticas: Um caminho para o futuro / Fábio Luiz Garcia . - Londrina, 2017.

86 f.

Orientador: Neuza Teramon.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2017.

Inclui bibliografia.

1. Olímpiadas - Tese. 2. Educação - Tese. 3. Matemática - Tese. 4. Futuro - Tese. I. Teramon, Neuza . II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

FÁBIO LUIZ GARCIA

# OLIMPÍADAS MATEMÁTICAS:

## UM CAMINHO PARA O FUTURO

Dissertação de mestrado apresentada ao Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

**BANCA EXAMINADORA**

________________________________________

Profª. Drª. Neuza Teramon
Universidade Estadual de Londrina - UEL

________________________________________

Prof. Dr. Marcelo Escudeiro Hernandes
Universidade Estadual de Maringá - UEM

________________________________________

Prof. Dr. Ricardo Cezar Ferreira
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 01 de setembro de 2017.

# DEDICATÓRIA

Dedico a Deus, pois, sem Ele, eu não teria forças nessa longa jornada.

Dedico a meus professores e aos meus amigos que me apoiaram na conclusão da dissertação.

## AGRADECIMENTOS

A todas pessoas que participaram da minha vida, a meu pai, a minha mãe, aos meus colegas de classe, a minha noiva Carol e aos meus alunos, além de Deus que me guiou nessa jornada.

Quero agradecer, principalmente, a minha orientadora, Professora Neuza Teramon que, com seus conhecimentos e conselhos, fez com que meu sonho de ter um curso de mestrado fosse realizado, me incentivando a concluir mais essa etapa.

“Abracem essa oportunidade com o coração e coloquem seus sonhos em cada exercício, cada prova que fizerem.

Façam valer a pena, pois nenhum obstáculo é maior, nem pode ser, que a sua vontade de vencer”.

GARCIA, Fábio Luiz. **Olimpíadas matemáticas: um caminho para o futuro.** 2017. 86 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

## RESUMO

As Olimpíadas de Matemática são disputadas desde 1894. Com o passar do tempo, competições parecidas se espalharam pelo mundo. Após a Segunda Guerra Mundial, muitos países incentivaram tais campeonatos, o que ajudou na divulgação dessa área do conhecimento. A primeira IMO foi realizada em 1959 na Romênia, com sete países participantes. Esta competição se expandiu gradualmente para mais de 100 países de cinco continentes. Este trabalho tem o objetivo de mostrar o funcionamento da olimpíada de matemática e como ela pode ser utilizada como fonte de estímulo para o ensino e a aprendizagem da matemática. Primeiramente, trataremos da história das olimpíadas mundiais. Em seguida, fazemos um levantamento das principais competições de matemática pelo mundo e abordamos a trajetória das olimpíadas no Brasil. Nesta dissertação destacamos as questões da OBM, nível 3, separando-as por áreas e fazendo um levantamento dos conteúdos mais abordados nas provas do período de 2012 a 2016. Apresentamos ao professor de matemática, principalmente de escolas públicas, um material para que ele possa organizar grupos de estudos para a preparação dos alunos para essa competição, com o objetivo de contribuir para que a matemática seja mais democratizada na sociedade.

**Palavras-chave:** Matemática. Olímpiada. Competição. Educação.

GARCIA, Fábio Luiz. **Mathematical Olympiad: a way to the future.** 2017. 86 p. Dissertation (Professional Master's Degree in Mathematics) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.


## ABSTRACT

The Mathematics Olympiads have been taken place since 1894. Over time, similar competitions have spread throughout the world. After World War II, many countries encouraged such championships, which helped to spread this area of knowledge. The first IMO was held in 1959 in Romania, with seven participating countries. This competition has gradually expanded to more than 100 countries on five continents. This paper aims to show the functioning of the mathematics Olympiad and how it can be used as a stimulus for the teaching and learning of mathematics. First, we will deal with the history of the world Olympics. Then, we survey the main math competitions around the world and discuss the history of the Olympics in Brazil. In this dissertation, we highlight the OBM questions, level 3, separating them by areas and making a survey of the contents most covered in the tests of the period from 2012 to 2016. We present to the teacher of mathematics, mainly in public schools, a material so that he can organize study groups to prepare students for this competition, with the aim of contributing to make mathematics more democratized in society.



**Keywords:** Mathematics. Olympiad. Competition. Education.

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

## LISTA DE TABELAS

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|---|---|
| OBM | Olimpíada Brasileira de Matemática |
| IMO | International Mathematical Olympiad |
| CES | Comissão de seleção |
| IMPA | Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada |
| SBM | Sociedade Brasileira de Matemática |
| MEC | Ministério da Educação |
| CAPES | Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior |
| CNPq | Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico |
| Secis | Secretaria de Ciência e Tecnologia para Inclusão Social |
| INCT-Mat | Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Matemática |
| FNDE | Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação |
| ABC | Academia Brasileira de Ciências |
| OBMEP | Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas |
| POTI | Pólos Olímpicos de Treinamento Intensivo |
| OIM | Olimpíada Ibero-americana de Matemática |
| IMC | Competição Internacional de Matemática para Estudantes Universitários |
| OIMU | Olimpíada Ibero-americana de Matemática Universitária |
| RMM | Romanian Master in Mathematics |
| APMO | Asian Pacific Mathematics Olympiad |

## SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

Ao longo dos anos, como professor de matemática em várias escolas privadas, percebi, ao trabalhar muito com geometria e álgebra, a dificuldade dos alunos com esses conteúdos. A grande maioria apresenta uma barreira para a aprendizagem da matemática em geral. Surgiu daí o interesse em estudar o assunto. Eu queria investigar por que essa barreira que impede o aluno de ter familiaridade com matemática é tão difícil de ser superada. Resolvi aprofundar meus estudos nesse tema, principalmente no que diz respeito às olimpíadas de matemática no Brasil e no mundo.

A matemática é uma área com uma característica marcante: seu aprendizado é sequencial, ou seja, o currículo de matemática se baseia em conhecimentos apreendidos em anos anteriores. Se um aluno não possui o conhecimento que é o pré-requisito necessário para a continuidade dos estudos, então este aluno terá dificuldades para entender os conteúdos subsequentes, levando o professor de matemática a ter que remediar ou ministrar a matéria que o aluno não entendeu anteriormente para que ocorra o aprendizado satisfatório. Além disso, a matemática exige disciplina, concentração e dedicação, qualidades que nem sempre uma criança possui, mas essas habilidades devem ser trabalhadas para serem adquiridas.

Muitas vezes, pode ser difícil para os alunos ver a conexão entre suas vidas e geometria, trigonometria e, até mesmo, álgebra básica. Quando os estudantes não percebem a importância da matemática em suas vidas, o professor deve falar de como esse conhecimento é essencial, explicar por que eles têm que aprender um tópico, isso afeta sua motivação e pode até causar sua retenção em determinado ano.

Ao contrário das disciplinas em que os alunos têm que escrever ensaios ou criar relatórios detalhados, a matemática, muitas vezes, é reduzida à resolução de problemas. Alguns estudantes passaram a acreditar, ao longo do tempo, que "não são bons em matemática". Esse tipo de atitude pode resultar em alunos que nem tentam aprender certos tópicos. Lutar contra essa questão relacionada à autoestima pode ser realmente difícil.

No ensino da matemática, não são empregadas uma grande variedade de técnicas. O professor tem sua parcela de culpa por não procurar novas metodologias para ensinar matemática, ou seja, existe a acomodação do docente e uma série ampla de problemas como um número reduzido de aulas da matéria por semana, principalmente no ensino público; além da remuneração baixa, que faz o professor trabalhar em várias escolas, entre outros fatores. Para resolver esse problema, os professores podem trabalhar em pequenos grupos, para certos tópicos, e criar projetos auxiliares, inclusive projetos multimídia, que tratam da matemática, em vez de apenas usar o modelo aula de instrução direta, seguida de um período de resolução de problemas. Muitas vezes, o aluno é desencorajado a aprender a matéria devido à técnica adotada pelo docente que ministra as aulas. Cabe ao educador procurar novas formas de tornar o conteúdo mais interessante e acessível a seus estudantes.

Quando um aluno perde uma aula de matemática sobre os principais pontos de determinado assunto, pode ser difícil para ele se recuperar. Por exemplo, se um estudante está ausente, quando um novo tópico está sendo discutido e explicado, o professor será confrontado com a questão de ajudar esse aluno a aprender o conteúdo por conta própria.

Os professores de matemática, mais do que os docentes em outras áreas curriculares, precisam acompanhar a evolução diária dos exercícios resolvidos por seus alunos. Se o estudante receber uma devolutiva algumas semanas após a conclusão daquela matéria, tem resultados praticamente ineficazes. Somente ao verificar quais erros eles cometeram e trabalhando para os corrigir, os alunos serão capazes de usar essa informação efetivamente para progredir na matemática. Essa postura é válida para o professor também, pois se ele acompanha, sistematicamente, as dificuldades e os progressos de seus alunos, terá condições de planejar melhor suas aulas e suas demais ações.

Os docentes de matemática, geralmente, têm mais demandas em seus horários antes e depois das aulas, de estudantes que estão pedindo ajuda extra. Isso requer uma maior dedicação de sua parte, de muitas maneiras, para ajudar esses alunos a entender e dominar os tópicos que estão sendo aprendidos.

Os profissionais de matemática, muitas vezes, têm aulas com alunos de diferentes níveis de habilidade dentro da mesma sala de aula. Isso pode resultar em lacunas no conhecimento de pré-requisitos. Os professores devem decidir como atender às necessidades individuais dos alunos em seu trabalho da melhor maneira.

O currículo de matemática geralmente requer prática diária e revisão para o domínio deste. Portanto, as tarefas diárias são essenciais para aprender e fixar a matéria. Os alunos que não fazem a lição de casa ou que copiam de outros alunos, muitas vezes, não conseguem fazer as provas, entregando-as em branco, o que pode dar a impressão de que o trabalho do professor foi infrutífero.

Outras considerações poderiam ser feitas em relação às características que envolvem o processo do ensino e aprendizagem da matemática. Muitos pesquisadores se dedicaram e se dedicam a esse tema. Os pontos destacados acima são constatações de minha experiência como professor dessa disciplina.

Desta forma, neste trabalho queremos analisar uma estratégia que possa envolver professores e estudantes com a matemática de uma maneira desafiadora. Este trabalho tem o objetivo de mostrar o funcionamento das olimpíadas de matemática e como ela pode servir como estímulo para a aprendizagem da matemática, auxiliando na resolução das dificuldades citadas.

Podemos usar as competições matemáticas como uma metodologia para melhorar a aprendizagem da matemática; pois, por um lado, as competições estimulam o professor, considerando que, para resolver os problemas olímpicos, o professor precisa conhecer e dominar ainda mais a teoria matemática, seus métodos e aplicações. Um bom conhecimento por parte do professor permite que ele possa abordar o mesmo conteúdo de maneiras diversas para alunos que apresentam níveis de conhecimento e de aprendizagem diferentes.

Quando os professores têm a tarefa de preparar seus alunos para as olimpíadas, os docentes precisam estudar mais, melhorando a própria formação. Na ocasião das competições e também em suas premiações, os professores podem compartilhar experiências com outros professores, dividindo modelos de estudo e trocando conhecimentos. Essas circunstâncias trazem resultados positivos, tanto para as escolas, quanto para os alunos, que se beneficiam com professores mais instigados e capacitados.

Por outro lado, os alunos experimentam problemas desafiadores que provocam sua curiosidade, eles procuram estudar mais para conseguir resolver os problemas, ampliando seu conhecimento para além do conteúdo programático de suas escolas. Verifica-se aumento de capacidade crítica e de autonomia, desenvolvimento de habilidades lógicas e da criatividade, há melhoras na capacidade de estudo individual e em grupos, trabalhando assim a sociabilidade.

Além disso, as olimpíadas são capazes de atingir a atenção e interesse, não apenas dos alunos que possuem mais afinidade com a matemática, mas também consegue estimular e apoiar os que apresentam desempenhos inferiores.

Por meio das preparações para as olimpíadas, consegue-se promover a integração entre alunos com diferentes níveis de conhecimento, estimulando trabalhos colaborativos. Assim, a preparação para competições cria um ambiente matematicamente rico, onde os alunos têm oportunidade de transformar sua visão e a forma de encarar a disciplina, pois os problemas olímpicos possibilitam aplicar os conteúdos matemáticos de forma diferenciada. Outro ganho para os alunos é a melhora de sua habilidade de leitura e interpretação de textos, ampliando seu domínio da língua portuguesa e capacidade de compreensão de dados.

As olimpíadas permitem aos professores e alunos a possibilidade de aquisição de novos saberes e consolidação dos conhecimentos que já possuíam. Além disso, o convívio entre eles, durante as aulas de preparação para as competições, estimula o fortalecimento de vínculos.

As olimpíadas educacionais são ferramentas eficazes de motivação para os estudos, considerando que temos competições científicas em várias áreas: língua portuguesa, química, física, história, biologia, astronomia e, inclusive, competições interdisciplinares. Em consequência, essa diversidade de competições auxilia os alunos a descobrirem suas aptidões e fazer escolhas acertadas para seus futuros profissionais.

Há de se considerar que muitas pessoas não aprovam as olimpíadas educacionais, argumentando que essas competições são extremamente seletivas e competitivas, que as provas estão em um nível de conhecimento e aprofundamento muito além do que é visto nas escolas, que os problemas apresentados nas olimpíadas são destinados a um grupo pequeno de alunos que têm aptidão e talento para a matemática e que tais problemas atraem a atenção somente desses pouquíssimos alunos.

Assim um trabalho a ser desenvolvido consiste em iniciar os alunos com problemas mais simples e tratá-los como "desafios" ou "curiosidades", incutindo o gosto por problemas no estudante. Isso estimularia a criatividade e o raciocínio lógico. Começando com problemas mais simples, pode-se diminuir o sentimento de frustração por não conseguir resolvê-los. Resolver problemas nos encoraja e, à medida que os problemas são solucionados, nos tornamos mais seguros e confiantes. Isso é um estímulo para se procurar novos problemas.

É necessário formar uma cultura de interesse pela matemática, de forma gradativa, mas contínua. É preciso conscientizar professores e alunos que resolver problemas é o objetivo principal da matemática, para se compreender que essa ciência é base para o desenvolvimento científico e tecnológico e que ela também nos conduz a uma percepção maior como cidadãos responsáveis.

As olimpíadas matemáticas representam um caminho para escolas, professores e alunos. É um instrumento de motivação para o estudo de matemática e organização das atividades para esse fim. É um caminho para o futuro dos alunos, pois desenvolve suas potencialidades, não apenas para a Matemática, mas também para as outras ciências e para a formação de sua cidadania, pois o conhecimento matemático traz um entendimento sobre impostos, orçamentos públicos e finanças. Destacamos ainda que as olimpíadas matemáticas revelam talentos que poderão trabalhar com a pesquisa matemática, enriquecendo-a ainda mais.

As olimpíadas de matemática têm produzido trabalhos que discorrem sobre o assunto. Bragança (2013) elaborou um roteiro de como organizar uma olimpíada matemática em uma escola, constituindo um material de suporte, intitulado pelo próprio autor como "A cartilha da olimpíada de matemática", aos interessados em organizar uma competição como esta. O trabalho de Victor (2013) trata dos problemas olímpicos e dos desafios inerentes para a resolução dos mesmos, traçando estratégias para a resolução destes problemas. O autor tem a preocupação de resolver os problemas usando somente matemática do ensino básico.

Por meio deste trabalho, queremos proporcionar um material de consulta, contendo problemas desafiadores para os professores de matemática que desejam fazer a diferença nessa área do conhecimento, atuando como verdadeiros transformadores educacionais através desta nossa contribuição.

Este trabalho não tem o objetivo de ser um estudo de caso, cuja análise tenha um fim em si mesma, mas sim uma fonte que atuará como um pontapé inicial, uma semente que pode ser plantada no solo árido da educação brasileira, gerando frutos, mesmo com grandes adversidades. Somente com perseverança e esperança, conseguiremos alterar nossa realidade, e essa mudança começa por nós professores, com pequenas atitudes como esta dissertação que preza uma linguagem acessível e foca na praticidade em vez da teoria.

Os professores da rede pública, em geral, conhecem a estrutura da OBMEP e das questões aplicadas nesta olimpíada. O público da OBM, majoritariamente, são as escolas particulares. Agora, exatamente neste ano de 2017, ocorreu a unificação entre as duas competições, então gostaríamos que o professor da escola pública também conhecesse e analisasse as questões da OBM que foram aplicadas nas cinco últimas competições.

Primeiramente, faremos um histórico das olimpíadas internacionais de matemática. Depois faremos um levantamento das principais competições de matemática pelo mundo. No capítulo seguinte, abordaremos a trajetória das olimpíadas no Brasil. Logo após, apresentaremos os problemas olímpicos do nível 3 da OBM e analisamos quais foram as teorias mais cobradas entre os anos de 2012 e 2016 nesta competição. Nas considerações finais, reforçaremos a importância das olimpíadas como uma ferramenta para o professor, principalmente de escolas públicas, e indicaremos como incentivar o surgimento de grupos de estudos direcionados à preparação dos alunos para esse tipo de competição.

## 2 HISTÓRICO DAS OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE MATEMÁTICA

Desde 1894, segundo o site da Olimpíada Brasileira de Matemática - OBM, ver www.obm.org.br, as Olimpíadas de Matemática são disputadas, sendo a primeira edição realizada na Hungria. Com o passar do tempo, competições parecidas se espalharam pela Europa Oriental. Após a Segunda Guerra Mundial, muitos países incentivaram tais campeonatos, o que ajudou na divulgação dessa área do conhecimento.

Segundo o site da International Mathematical Olympiad - IMO, ver www.imo-official.org, a Olimpíada Internacional de Matemática é o Campeonato Mundial de Matemática para estudantes do Ensino Médio. Ela é realizada anualmente em um país diferente. A primeira IMO foi realizada, em 1959, na Romênia, com sete países participantes. Ele se expandiu gradualmente para mais de 100 países dos cinco continentes.

O Conselho Consultivo da IMO assegura que a competição ocorra todos os anos e que cada país anfitrião respeite os regulamentos e as tradições da IMO. O único ano em que a IMO não foi realizada, desde 1959, foi 1980 devido a sanções políticas resultantes da invasão soviética ao Afeganistão. Muitos outros eventos internacionais, como os Jogos Olímpicos, foram boicotados. No entanto, foram realizadas várias IMO de substituição menores, como a Olimpíada Áustria-Polônia (que ocorreu anualmente de qualquer maneira, tendo sido estabelecida dois anos antes) e as Olimpíadas de substituição em Mersch, em Luxemburgo; e Mariehamn, na Finlândia. A olimpíada de Mersch contou com a presença da Bélgica, Grã-Bretanha, Holanda e Iugoslávia. Além disso, a França enviou uma equipe de quatro observadores. A olimpíada de Mariehamn contou com a presença da Grã-Bretanha, da Hungria e da Suécia.

Atualmente, cerca de 90 a 100 países enviam, anualmente, suas equipes compostas de até seis competidores. Os participantes devem ter menos de 20 anos. Além disso, não podem estar cursando nenhuma faculdade.

A prova da IMO apresenta seis problemas matemáticos, cada um valendo sete pontos. O exame é feito em dois dias consecutivos. Os participantes têm quatro horas e meia para solucionar três problemas em cada dia. As questões são escolhidas entre todas as áreas da matemática do Ensino Médio. Elas podem abordar geometria, teoria dos números, álgebra e análise combinatória. Os problemas selecionados não exigem um conhecimento de matemática avançada para a resolução, mas é essencial que os competidores tenham uma inteligência considerável e muitas habilidades com a matemática.

Todas as nações que participam da IMO, menos o país que será a sede naquele ano, podem enviar sugestões de problemas para o Comitê de Seleção de Problemas. Essa comissão é responsável pela confecção de uma lista dos problemas selecionados, dentre todos aqueles que foram sugeridos ao comitê.

Os chefes das equipes chegam à IMO alguns dias antes do início da competição. Eles formam um júri, que tem o objetivo de tomar as decisões ligadas à competição e selecionar os seis problemas que estarão presentes na prova. Como os chefes das equipes já ficam cientes dos problemas do exame com antecedência, eles ficam separados dos participantes até o fim do segundo dia da competição.

A IMO tem alguns símbolos que a representam. A bandeira oficial foi apresentada na IMO de 1995, que ocorreu no Canadá, juntamente com o logotipo da IMO. A bandeira é branca com o logotipo IMO no centro. É uma tradição que a bandeira da IMO seja entregue ao próximo país anfitrião no final da cerimônia de encerramento, no país em que a competição se realizou.

Também há um hino da IMO, escrito por Lidia Roisman, que foi apresentado na IMO de 1997, que teve como sede a Argentina. Em 2009, o hino recebeu uma adaptação, com o acréscimo de trechos em inglês, francês e alemão, conforme apresentado abaixo.

**Hino da IMO**

Volaremos por el cielo
recorreremos caminos
esto no tendra fronteras
sumando nuestros destinos.

Unidos en un anhelo
venimos de todas partes
a compartir la alegria
de juntar ciencia con arte.

Yo hablo e intervengo
callando muy mal me orientes
y muchos puntos obteigo
y el golden mic yo me llevo.

Sumamos, multiplicamos
y llegamos a un total
infinito es nuestro sueno
sin medida, de verdad.

Volveremos a encontrarnos
resolviendo los problemas
razonar es nuestro estilo
la amistad nuestro sistema!

Speaking and motion making
being silent is not my style
many points accumulating
just to win the golden mike.

Je parle, je fais des motions
sans parler, je me sens mal.
J’accumule beaucoup de points
pour gagner le golden mic

Ich spreche und ich vermitte
mir gefällt ganz nicht die Ruhe.
ich erlange viele punkten
und den golden Mic mitbringe

**Hino da IMO (traduzido)**

Nós voaremos através do céu
vamos cruzar caminhos
não haverá fronteiras
somando os nossos destinos.

Unidos em um anseio
Nós viremos de toda parte
para compartilhar a alegria
de unir a ciência com a arte.

Eu falo e intervenho
não me calo, ajude-me
e muitos pontos obterei
e a medalha de ouro eu ganharei.

Adicionamos, multiplicamos
e chegamos a um total
infinito é o nosso sonho
imensurável, realmente.

Voltaremos a nos encontrar
resolvendo os problemas
raciocinar é o nosso estilo
a amizade, nosso sistema!

Falar e fazer movimentos
Sendo silencioso não é meu estilo
eu acumulo muitos pontos
só para ganhar a medalha de ouro.

Falando e fazendo movimentos
Ser silencioso não é meu estilo

eu acumulo muitos pontos
só para ganhar a medalha de ouro.

Falando e fazendo movimentos
Ser silencioso não é meu estilo
eu acumulo muitos pontos
só para ganhar a medalha de ouro.

**Figura 01** – logo oficial da IMO

Fonte: IMO

As pontuações dos participantes definem a sua classificação. O número de competidores que recebem a premiação pode chegar à metade dos estudantes inscritos, mas sem ultrapassar essa proporção. As medalhas de ouro, prata e bronze são entregues para os vencedores na proporção aproximada de 1:2:3, respectivamente.

Os competidores que não conseguirem uma medalha, porém atingirem sete pontos em uma questão, receberão uma menção honrosa. Ocasionalmente, prêmios especiais são atribuídos a soluções de grande originalidade ou com excelentes generalizações de um problema.

Desde 1959, diversos países receberam a IMO. Na relação seguinte, temos uma lista na seguinte ordem: cidade(s), país, ano, data de início da competição, data de término da realização, número de países participantes e quantidade de competidores.

**Tabela 1** - olimpíadas Internacionais de Matemática

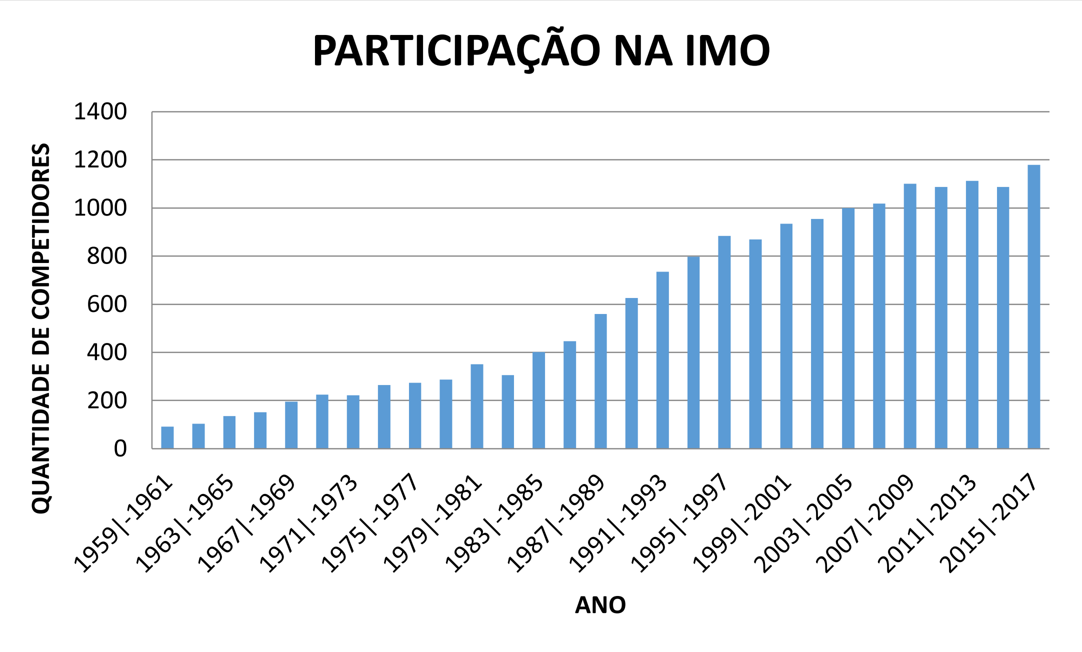
| edição | cidade | País | Ano | data de início | data de término | número de países partici-pantes | quantidade de compe-tidores |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Brașov e Bucareste | Romênia | 1959 | 23\07 | 31\07 | 07 | 52 |
| 2 | Sinaia | Romênia | 1960 | 18\07 | 25\07 | 05 | 39 |
| 3 | Veszprém | Hungria | 1961 | 06\07 | 16\07 | 06 | 48 |
| 4 | České Budějovice | Checos-Lováquia | 1962 | 07\07 | 15\07 | 07 | 56 |
| 5 | Varsóvia e Wrocław | Polônia | 1963 | 05\07 | 13\07 | 08 | 64 |
| 6 | Moscou | URRS | 1964 | 30\06 | 10\07 | 09 | 72 |
| 7 | Berlim Oriental | Alema-nha Oriental | 1965 | 03\07 | 13\07 | 10 | 80 |
| 8 | Sófia | Bulgária | 1966 | 03\07 | 13\07 | 09 | 72 |
| 9 | Cetinje | Iugoslá-via | 1967 | 02\07 | 13\07 | 13 | 99 |
| 10 | Moscou | URSS | 1968 | 05\07 | 18\07 | 12 | 96 |
| 11 | Bucareste | Romênia | 1969 | 05\07 | 20\07 | 14 | 112 |
| 12 | Keszthely | Hungria | 1970 | 08\07 | 22\07 | 14 | 112 |
| 13 | Žilina | Checos-lováquia | 1971 | 10\07 | 21\07 | 15 | 115 |
| 14 | Toruń | Polônia | 1972 | 05\07 | 17\07 | 14 | 107 |
| 15 | Moscou | URRS | 1973 | 05\07 | 16\07 | 16 | 125 |
| 16 | Erfurt e | Alema- | 1974 | 04\07 | 17\07 | 18 | 140 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Berlim Oriental | nha Oriental | | | | | |
| 17 | Burgas e Sófia | Bulgária | 1975 | 03\07 | 16\07 | 17 | 135 |
| 18 | Lienz | Áustria | 1976 | 07\07 | 21\07 | 18 | 139 |
| 19 | Belgrado | Iugoslá-via | 1977 | 01\07 | 13\07 | 21 | 155 |
| 20 | Bucareste | Romênia | 1978 | 03\07 | 10\07 | 17 | 132 |
| 21 | Londres | Reino Unido | 1979 | 30\06 | 09\07 | 23 | 166 |
| 22 | Washington, D.C. | Estados Unidos | 1981 | 08\07 | 20\07 | 27 | 185 |
| 23 | Budapeste | Hungria | 1982 | 05\07 | 14\07 | 30 | 119 |
| 24 | Paris | França | 1983 | 01\07 | 12\07 | 32 | 186 |
| 25 | Praga | Checos-lováquia | 1984 | 29\06 | 10\07 | 34 | 192 |
| 26 | Joutsa | Finlândia | 1985 | 29\06 | 11\07 | 38 | 209 |
| 27 | Varsóvia | Polônia | 1986 | 04\07 | 15\07 | 37 | 210 |
| 28 | Havana | Cuba | 1987 | 05\07 | 16\07 | 42 | 237 |
| 29 | Sydney e Canberra | Austrália | 1988 | 09\07 | 21\07 | 49 | 268 |
| 30 | Brunswick | Alema-nha Ocidental | 1989 | 13\07 | 24\07 | 50 | 291 |
| 31 | Pequim | China | 1990 | 08\07 | 19\07 | 54 | 308 |
| 32 | Sigtuna | Suécia | 1991 | 12\07 | 23\07 | 56 | 318 |
| 33 | Moscou | Rússia | 1992 | 10\07 | 21\07 | 56 | 322 |
| 34 | Istambul | Turquia | 1993 | 13\07 | 24\07 | 73 | 413 |
| 35 | Hong Kong | Hong Kong | 1994 | 08\07 | 20\07 | 69 | 385 |
| 36 | Toronto | Canadá | 1995 | 13\07 | 25\07 | 73 | 412 |
| 37 | Mumbai | Índia | 1996 | 05\07 | 17\07 | 75 | 424 |
| 38 | Mar del Plata | Argentina | 1997 | 18\07 | 31\07 | 82 | 460 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 39 | Taipei | Taiwan | 1998 | 10\07 | 21\07 | 76 | 419 |
| 40 | Bucareste | Romênia | 1999 | 10\07 | 22\07 | 81 | 450 |
| 41 | Daejeon | Coreia do Sul | 2000 | 13\07 | 25\07 | 82 | 461 |
| 42 | Washington, D.C. | Estados Unidos | 2001 | 01\07 | 14\07 | 83 | 473 |
| 43 | Glasgow | Reino Unido | 2002 | 19\07 | 30\07 | 84 | 479 |
| 44 | Tóquio | Japão | 2003 | 07\07 | 19\07 | 82 | 457 |
| 45 | Atenas | Grécia | 2004 | 06\07 | 18\07 | 85 | 486 |
| 46 | Mérida | México | 2005 | 08\07 | 19\07 | 91 | 513 |
| 47 | Liubliana | Eslovênia | 2006 | 06\07 | 18\07 | 90 | 498 |
| 48 | Hanoi | Vietnã | 2007 | 19\07 | 31\07 | 93 | 520 |
| 49 | Madri | Espanha | 2008 | 10\08 | 22\08 | 97 | 535 |
| 50 | Bremen | Alema-nha | 2009 | 10\07 | 22\07 | 104 | 565 |
| 51 | Astana | Caza-quistão | 2010 | 02\07 | 14\07 | 97 | 523 |
| 52 | Amsterdã | Países Baixos | 2011 | 12\07 | 24\07 | 101 | 564 |
| 53 | Mar del Plata | Argentina | 2012 | 04\07 | 16\07 | 100 | 548 |
| 54 | Santa Marta | Colômbia | 2013 | 18\07 | 28\07 | 97 | 527 |
| 55 | Cidade do Cabo | África do Sul | 2014 | 03\07 | 13\07 | 101 | 560 |
| 56 | Chiang Mai | Tailândia | 2015 | 04\07 | 16\07 | 104 | 577 |
| 57 | Hong Kong | China | 2016 | 06\07 | 16\07 | 109 | 602 |

**Fonte:** IMO

**Gráfico 1 -** Evolução do número de participantes na IMO




**Fonte:** o próprio autor

Com o intuito de facilitar a visualização, no gráfico acima, vemos a crescente evolução do número de competidores da IMO, no decorrer dos anos. Nos primeiros anos, a quantidade de participantes era de algumas centenas e na última década ultrapassa o número de 5000 participantes

O Brasil participou da IMO, pela primeira vez, em 1979. O país sempre conseguiu bons resultados, cada vez melhores, mais expressivos. Em 2010, devido ao destaque dos brasileiros, o país foi convidado para participar da *Romanian Master in Mathematics*. Somente as vinte melhores nações do campeonato anterior podem concorrer nessa competição.

Até o ano de 2017, o Brasil acumulava 09 medalhas de ouro, 43 de prata, 73 de bronze e 32 menções honrosas. O país participou 38 vezes com um total de 225 competidores, sendo a maioria deles do sexo masculino, segundo consta no site da IMO.

Não é uma unanimidade a maneira como os participantes são escolhidos pelo mundo. O método de seleção para a IMO muda de um país para outro. A Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) é o sistema que o Brasil adota para escolher os competidores que representarão o país na edição internacional.

Todos os alunos que ganharam medalhas de ouro, prata, bronze e menções honrosas na OBM do ano anterior ao da próxima edição da IMO podem participar desse processo de seleção. Além deles, estudantes que tenham conseguido uma medalha de ouro, prata ou bronze em alguma outra edição da OBM também podem pedir a inclusão de sua candidatura no processo de seleção para a IMO, Olimpíada Ibero-americana, Olimpíada do Cone Sul e Olimpíada de Matemática da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa.

A comissão de olimpíadas decide se aceitará o pedido desses estudantes ou negará essa candidatura. No Brasil, esse processo de seleção é conduzido de acordo com as seguintes etapas:

1) A comissão responsável pela seleção das equipes (CES) que representarão o Brasil nos campeonatos no exterior deve elaborar *rankings* com a classificação e respectiva pontuação dos estudantes participantes do processo em cada um dos seguintes eventos: resultados na OBM, provas de seleção e listas de treinamento.

2) Após a elaboração desse *ranking*, essas informações são mandadas pela CES juntamente com uma sugestão de equipe para avaliação da Comissão de Olimpíadas, a qual pode aceitá-la ou fazer sugestões de mudanças que julgar mais adequadas. Se a CES e a Comissão de Olimpíadas não entrarem em concordância, a Comissão de Olimpíadas tem a autoridade para dar a decisão final.

3) A CES e a Comissão de Olimpíadas também têm a possibilidade de considerar, caso julguem relevantes, os resultados dos alunos em olimpíadas anteriores ou em exames de seleção e listas de preparação para outras competições semelhantes.

É importante ressaltar que não há revisões de notas em exames de seleção e listas de treinamento.

## 3 COMPETIÇÕES DE MATEMÁTICA PELO MUNDO

Os campeonatos de matemática ou olimpíadas matemáticas são eventos competitivos em que os participantes realizam exames dessa área do conhecimento. Esses testes podem exigir respostas múltiplas ou numéricas, uma solução ou uma prova escrita detalhada. Essa lista tem o objetivo de fornecer informações de modelos que podem ser adotados por professores brasileiros, para que a matemática seja mais democratizada na sociedade. Por meio dessa lista, verificamos que as competições matemáticas constituem uma prática disseminada pelo mundo e desenvolvida em vários níveis de escolaridade.

As principais competições internacionais de matemática são:

1 - A + Click Math Challenge, competição *online* internacional, realizada por meio do site https://www.aplusclick.org.

2 - Desafio Arquimediano - sazonal (quatro vezes por ano), com duração de 04 meses, para crianças de 13 a 18 anos (indivíduos ou grupos), os participantes pesquisam um problema famoso, de longa data e não resolvido em matemática. O site é http://euclidlab.org/programs/archimedean-challenge/.

3 – Competição da Associação de Modelagem Computacional e Matemática (AoCMM), estudantes de qualquer país com menos de 20 anos podem competir em equipes de até quatro indivíduos. A equipe terá 14 dias para pesquisar dois problemas do mundo real e apresentará sua solução sob a forma de um documento de pesquisa. As melhores equipes são premiadas com bolsas de estudo. A edição de 2016 ocorreu entre 04 e 18 de outubro. O site é http://aocmm.org/.

4 - Concursos de Caribou, concursos *online* em todo o mundo, realizados em inglês e francês, ocorrem seis vezes ao longo do ano letivo para cada um dos anos escolares: 3/4, 5/6, 7/8, 9/10 e 11/12, sendo adequados para todos os alunos, não apenas para aqueles que são fortes em matemática. Algumas perguntas são interativas. Os resultados estão disponíveis na noite do dia do concurso. Resoluções em vídeo, para perguntas selecionadas, estão disponíveis pela internet. Todas as

provas anteriores podem ser obtidas e treinadas *online* gratuitamente no site https://www.cariboutests.com/.

5 – Campeonato Internacional de Jogos Matemáticos e Lógica, para todas as idades, principalmente para países que falam francês, mas a participação não é limitada pelo idioma. O site é http://ffjm.cijm.org.

6 - Olimpíada Matemática Feminina da China (CGMO), é realizada anualmente em diferentes cidades da China para equipes de meninas que representam regiões chinesas e vários outros países também.

7 – Copa Matemática Europeia, competição de Ensino Médio organizada pela Croácia. O site é http://emc.mnm.hr/.

8 - Grande Sentinela, torneio internacional de matemática com os maiores prêmios. Os vencedores recebem até 175 mil dólares. O site é http://grandsentinel.com.

9 - Concurso Interdisciplinar de Modelagem (ICM), concurso de equipes para estudantes de Ensino Médio e graduação universitária desenvolverem suas habilidades. O site é http://www.comap.com/undergraduate/contests/icm/.

10 - Desafio de Modelagem Matemática Internacional, voltado para todos os níveis educacionais. O site é www.immchallenge.org.

11 - Olimpíada Matemática Internacional (IMO), a olimpíada internacional mais antiga, ocorrendo anualmente desde 1959.

12 - Concurso Internacional de Matemática para Estudantes Universitários (IMC), competição internacional para estudantes de graduação com até 23 anos de idade. O site é http://www.imc-math.org.uk/.

13 - Concurso Internacional de Matemática, para alunos do ensino Fundamental e Médio. O site é http://www.imc-official.org.

14 - Concurso Internacional de Matemática, realizado para popularizar o conhecimento dessa área no mundo. O site é http://www.imcunion.org/.

15 - Olimpíada Científica Internacional de Matemática para estudantes universitários de graduação (ISOM), competição realizada anualmente no Irã. O site é http://olympiad.sanjesh.org/en/index.asp.

16 – Fundação de Professores de Matemática de Escolas Internacionais (ISMTF), concurso anual para estudantes do Ensino Médio que frequentam uma escola internacional. Realizado todos os anos em uma escola diferente. O site é http://www.ismtf.org/.

17 - Concurso Internacional de Matemática de Singapura (ISMC), voltado para ser uma grande experiência de aprendizado para os estudantes. O site é http://www.ismc.sg/.

18 - Torneio Internacional de Jovens Matemáticos (ITYM), realizado para estudantes do Ensino Médio do mundo todo. O site é http://www.itym.org/.

19 - Concurso Matemático em Modelagem (MCM) - concurso de equipes para alunos de graduação universitária resolverem problemas reais do mundo. O site é http://www.comap.com/undergraduate/contests/mcm/.

20 - Canguru matemático, competição mundial para promover a matemática entre jovens. O site é http://www.aksf.org.

21 - Exercícios de Matemática para Crianças - Competição infantil mundial diária. O site é http://www.math-exercises-for-kids.com/competition/math-world-cup.php.

22 – Desafio de Modelagem Matemática Global Mathorcup (MGMMC) - concurso oriental de equipes para alunos de graduação universitária. O site é http://www.mathor.com/.

23 - Copa do Mundo de Cálculo Mental, um concurso para as melhores calculadoras mentais.

24 - Competição de Modelagem de Otimização para estudantes universitários (MOPTA), realizada anualmente. O site é http://mopta.ie.lehigh.edu.

25 - Evento "Matemática *Online*" do festival técnico anual Shaastra, Instituto Indiano de Tecnologia de Madras (IITM), Chennai, Índia. Apresenta três sites: http://www.shaastra.org/2009/events/online_events/online_math, http://www.shaastra.org/2010/main/events/online_events/online_math http://www.shaastra.org/2011/Main/events/OnlineMathChamp/.

26 - Olimpíada Matemática Internacional da Internet para estudantes, organizada pela Universidade Ariel Centro de Samaria. Também tem mais de um site: http://www.i-olymp.net/ e http://www.ariel.ac.il/cs/projects/dom/itpm/.

27 - NCUMC (Competição Matemática das Universidades dos Países do Norte), organizada em São Petersburgo, na Rússia, com várias modalidades. O site é: http://mathdep.ifmo.ru/ncumc/.

28 – Projeto Aberto Internacional, competições online para estudantes. O site é http://e-competition.eu.

29 - Olimpíada de Matemática Aberta da Universidade da Bielorrússia e Rússia, campeonato para estudantes de instituições de alto nível. O site é http://mathopen.bru.by/.

30 - Matemática Perene, competição *online* de quatro meses para vários anos escolares, realizada duas vezes por ano, entre novembro e fevereiro e janeiro e abril. Alunos podem competir individualmente ou em equipes. O site também oferece torneios virtuais o*nline* para que os alunos participem através da *webcam* e Torneios o*nsite* em colégios, escolas e outras instituições de ensino. O site é http://perennialmath.com/tournaments.

31 - Concurso Mundial de Matemática Primária (PMWC).

32 - Cometa Roxo! Encontro de Matemática, concurso anual de equipes *online* para Ensino Médio e Fundamental. O site é http://purplecomet.org/.

33 – Liga de Matemática de Rocket City (RCML), uma competição de matemática dirigida por estudantes da Escola de Ensino Médio Virgil I. Grissom, com níveis que variam do Explorer (Pré-Álgebra) ao Discovery (Abrangente). O site é http://www.rocketcitymath.org.

34 - Mestre Romeno de Matemática e Ciências, é uma olimpíada para as seleções dos 20 principais países da última IMO. O nível da competição é semelhante ao da IMO. O site é http://www.rmm.lbi.ro/.

35 - Olimpíada de Matemática de Singapura e Escolas Asiáticas (SASMO), uma competição mundial de Singapura combinada com as Olimpíadas de Matemática, Puzzles e Jogos de Matemática para vários níveis. O site é http://mathsolympiads.org.

36 - Desafio Internacional da Olimpíada de Matemática de Singapura (SIMOC), uma competição de matemática e quebra-cabeças mundial aberta apenas para vencedores do SASMO. O site é http://simoc.sg/.

37 - Olimpíada de Matemática do Sudeste da Europa para Estudantes Universitários (SEEMOUS), para alunos de primeiro e segundo anos, competição para a região dos Balcãs; mas a participação é internacional. O site é http://www.massee-org.eu/index.php/mathematical/seemous.

38 – Competição Internacional de Matemática Vojtěch Jarník (VJIMC) - concurso internacional para estudantes de graduação. A competição é realizada na Universidade de Ostrava todos os anos em março ou abril. O site é http://vjimc.osu.cz/.

39 - Dia Mundial das Matemáticas (WMD), visa unir o mundo em números, aberto a todas as crianças em idade escolar em todo o mundo. O site é http://www.worldmathsday.com.

# 4 OLIMPÍADAS MATEMÁTICAS NO BRASIL

## 4.1. A Olimpíada brasileira de matemática

A Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) teve sua primeira edição em 1979. Ela é uma competição voltada para os alunos brasileiros de escolas e universidades das redes pública e privada que cursam a partir do 6º ano do Ensino Fundamental até estudantes universitários em nível de graduação.

A finalidade da olimpíada é incentivar e melhorar o ensino de Matemática em nosso país, já que ela estimula estudantes e docentes a desenvolver suas habilidades matemáticas por meio das etapas da OBM. Os professores podem contar com essa competição para aumentar o interesse dos seus alunos em uma matéria vista com muita dificuldade no Brasil. Segundo o IBGE, apenas 10% dos concluintes do Ensino Médio dominam as quatro operações matemáticas básicas.

Num país em que apenas um em cada 10 jovens sabem somar, subtrair, multiplicar e dividir, a descoberta de talentos matemáticos excepcionais torna-se fundamental para mudar essas estatísticas. Competições como a OBM servem para colocar esses futuros cidadãos em contato com matemáticos profissionais e instituições de pesquisa dos mais altos níveis. Essa é uma das maneiras de se propiciar condições favoráveis para o desenvolvimento de uma carreira de pesquisa, formando profissionais melhores a cada ano que passa.

A OBM é um evento realizado conjuntamente pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) e pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Também recebe suporte do Ministério da Educação (MEC) por meio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes), do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq/MCTI), da Secretaria de Ciência e Tecnologia para Inclusão Social (Secis), do Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Matemática (INCT-Mat), do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) e da Academia Brasileira de Ciências (ABC).

A partir de 2017, a edição da OBM passa a ser realizada juntamente com a OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas). O intuito é aproveitar melhor o uso de recursos financeiros e humanos, além de otimizar o trabalho de divulgação e fomento da matemática brasileira. A OBMEP era direcionada somente para os estudantes das escolas públicas. Agora, passa a aceitar a participação de alunos de instituições de ensino particulares. Essas alterações ocorrem por ocasião do Biênio da Matemática no Brasil 2017-2018, que foi instituído pela lei federal 13.358/16.

**Figura 02** – logo oficial da OBM

**Fonte:** OBM

Segundo Goes (2017), a OBMEP tem o objetivo de incentivar o estudo da matemática em todas as regiões brasileiras, mudando a vida de muitos jovens e suas trajetórias. A competição tem auxiliado a mudança no ensino e a aprendizagem da matéria desde 2005. Alves (2010) realizou um estudo sobre os impactos da OBMEP em alunos do terceiro ano do ensino médio e o autor constatou que a falta de maiores informações sobre a competição é uma barreira para os alunos. Ainda sobre a OBMEP, Assunção (2011) organizou um trabalho de avaliação sobre a influência da OBMEP nas escolas públicas e no desempenho de alunos na Prova Brasil, além de fazer recomendações para o aprimoramento desta política pública.

A cada ano, até 2016, a OBM acontecia em quatro níveis, conforme a escolaridade do estudante:

Nível 01 - para discentes que cursam os 6º e 7º anos do Ensino Fundamental na época em que ocorre a primeira fase da OBM.

Nível 02 - para estudantes matriculados nos 8º e 9º anos do Ensino Fundamental quando realizada a primeira fase da OBM ou que já concluíram essa etapa educacional no período decorrido de menos de um ano antes e que não tenham entrado no Ensino Médio até a época da realização da primeira fase da OBM.

Nível 03 - para alunos em qualquer ano do Ensino Médio, regulamente matriculados, quando a realização da primeira fase da OBM acontecer ou que tenham completado esse nível educacional menos de um ano antes, ou ainda que não entraram em ensino de nível superior até a data de ocorrência da primeira fase da OBM.

Nível Universitário - para estudantes que ainda não tenham completado o nível superior, sendo geralmente alunos universitários em nível de graduação. Os participantes podem estar em qualquer curso e qualquer período do ensino.

Para os três primeiros níveis, a OBM acontece dividida em três fases. A primeira ocorre no primeiro semestre; enquanto que a segunda e a terceira são realizadas no segundo semestre.

Já no Nível Universitário, a OBM tem duas fases, que ocorrem no segundo semestre. A data e a hora são as mesmas em que se realizam a segunda e terceira fases nos níveis 2 e 3. A SBM é responsável por determinar as datas anualmente por meio de sua Comissão de Olimpíadas.

Na primeira fase, é realizada uma prova de múltipla escolha nas escolas cadastradas. Esse exame contém entre 20 e 25 questões. A duração da prova é de, no máximo, três horas.

Na segunda fase, a prova é dividida em duas partes: A e B, cada uma feita um dia diferente. Essa etapa também ocorre nas escolas cadastradas. A duração total do exame é de 04 horas e 30 minutos, no máximo.

Já a terceira fase é diferenciada. O nível 01 consiste de uma prova discursiva, contendo cinco problemas, com duração de 04 horas e 30 minutos. Para os níveis 02 e 03, são feitas duas provas discursivas, que acontecem em dois dias consecutivos. A cada dia, são três problemas para resolução. A duração também é de 04 horas e 30 minutos em quaisquer dos dias.

Essas informações estão resumidas na tabela abaixo:

**Tabela 2** - provas da OBM

| Fase | 1º | 2º | 3º |
|---|---|---|---|
| Quantidade de questões | 20 a 25 | 40 a 50 | 5 a 6 |
| Tipo de prova | múltipla escolha | múltipla escolha | discursiva |
| Tempo | 3 horas | 4,5 horas | 4,5 horas a cada dia |

**Fonte:** o próprio autor

Na OBM, o nível universitário, assim como os demais, é composto de uma prova discursiva, mas já na primeira fase. Ela é feita nas universidades cadastradas. O exame apresenta seis problemas, que devem ser resolvidos num intervalo máximo de 04 horas e 30 minutos. Sua aplicação ocorre no mesmo dia e hora da Segunda Fase dos níveis 1, 2 e 3.

Já a segunda fase do nível universitário acontece com duas provas discursivas em dois dias consecutivos. Elas contém três problemas em cada dia. São realizadas em 04 horas e 30 minutos por dia, no máximo. Além disso, são aplicadas no mesmo dia e hora da terceira fase dos níveis 2 e 3.

O coordenador regional é quem define os locais dos exames. As provas da primeira e segunda fases acontecem em escolas anteriormente cadastradas; enquanto as provas da terceira fase ocorrem nas sedes estaduais, previamente escolhidas em várias cidades do Brasil.

A pontuação final dos estudantes participantes das três fases será determinada por bancas previamente escolhidas. Um ponto é atribuído a cada questão da primeira fase; 10 pontos valem cada problema da segunda fase (quatro para algumas); 50 pontos é o valor de cada problema na terceira fase da competição. A aprovação para a terceira fase leva em conta os pontos somados nas duas primeiras fases.

No nível universitário, a pontuação total dos estudantes que fizeram as duas fases é determinada pelas bancas. Elas dão 10 pontos a cada questão da primeira fase; já para cada problema da segunda fase atribuem 50 pontos. A promoção ocorre para a segunda fase somando-se os pontos acumulados na primeira fase.

Os prêmios oferecidos aos estudantes alunos com obtenção das mais altas pontuações finais são denominados de Medalhas de Ouro, Medalhas de Prata e Medalhas de Bronze. As quantias de medalhas oferecidas seguem a proporção aproximada de 1:2:3. A banca pode ainda oferecer, a seu critério, menções honrosas.

## 4.2. Um brasileiro ganha o mundo pelos números

Artur Ávila Cordeiro de Melo sempre buscou mais conhecimento que sua escola lhe oferecia, em especial no campo da matemática. Ele pedia livros extras a seus pais. Queria se aprofundar nas ciências exatas. Começou a participar de olimpíadas de várias áreas do conhecimento. Ganhou sua primeira medalha de matemática aos 13 anos. Quando estava com 35, foi agraciado com o 'Nobel' das exatas: a Medalha Fields. Tornou-se um profissional reconhecido.

O ensino da matemática é um dos principais problemas nas escolas brasileiras. A OBM pode ser uma contribuição na solução desse obstáculo. Competições científicas internacionais podem garantir o futuro de muitos jovens, estabelecendo carreiras sólidas. Ávila publicou um estudo importante em 2003 sobre sistemas dinâmicos. Na época, ele tinha só 23 anos.

Com 16 anos, Ávila recebeu a medalha de ouro na Olimpíada Internacional de Matemática no Canadá. O matemático venceu 411 competidores de 72 países. No IMPA, fez mestrado e doutorado. O destaque de Ávila trouxe a IMO para o Brasil em 2017. Outros brasileiros também se destacaram pelos números e tiveram o caminho aberto pelas olimpíadas, como Davi Máximo. Ele é professor de matemática na Universidade Stanford, nos Estados Unidos. Nicolau Saldanha cursou o mestrado nos EUA, doutorado na França e é professor e pesquisador da PUC-Rio. Gerson

Tavares Câmara de Souza, de origem humilde, é engenheiro de automação e coordenador de projetos de sistemas elétricos industriais. Guilherme Souza é contratado da Microsoft nos Estados Unidos.

### 4.3. Semana Olímpica: época de treino

A Semana Olímpica ocorreu pela primeira vez em 1998. Ela é dedicada à reunião dos ganhadores da Olimpíada Brasileira de Matemática. O evento serve para um treinamento concentrado. Um time de professores de vários locais do Brasil ajudam no processo. O objetivo é começar a escolha das equipes que representarão o país nas diferentes competições internacionais de Matemática.

O evento acontece todos os anos, mas sempre em cidades variadas do país. No decorrer da semana dedicada à matemática, os estudantes assistem aulas avançadas dessa ciência exata. Uma equipe de professores escolhidos por todos os cantos do Brasil é quem ministra essas aulas. Ocorrem também palestras sobre outras olimpíadas para os alunos, como a Olimpíada de Matemática do Cone Sul, a Olimpíada Ibero-americana de Matemática (OIM), a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) e a Competição Internacional de Matemática para Estudantes Universitários (IMC). Todas elas servem de estímulo para os estudantes participarem do processo seletivo internacional.

A primeira reunião anual da Comissão de Olimpíadas da SBM também acontece na Semana Olímpica. Ela avalia a última edição das Olimpíadas de Matemática e planeja a próxima Olimpíada Brasileira de Matemática.

### 4.4. Revista Eureka!: a publicação para quem gosta de números

A Revista Eureka! é uma publicação distribuída gratuitamente para as instituições que participam da competição. Ela também pode ser consultada livremente pela internet. Sua periocidade é semestral. A revista tem como objetivo primordial aumentar o acesso dos discentes e docentes a um material teórico de alta qualidade. Seu conteúdo é direcionado especialmente a competições de matemática, visto que existe uma grande escassez de publicações dessa área do conhecimento em língua portuguesa.

A finalidade da Eureka! é oferecer material para treinamento de alto nível e qualidade, a fim de que mestres e estudantes brasileiros estejam aptos a se preparar para a OBM e outras olimpíadas de matemática. A publicação também mantém a comunidade olímpica informada sobre as várias olimpíadas internacionais de que o país participa.

A revista publica enunciados de provas internacionais e resultados conseguidos pelas equipes brasileiras, além de artigos de matemática olímpica, seção de problemas propostos, soluções de problemas publicados em números anteriores e colaborações enviadas por leitores. Além da versão impressa, a publicação é acessível pelo site da Olimpíada Brasileira de Matemática, em que constam todas as edições publicadas até a data da consulta, gratuitamente.

## 4.5. Olimpíadas Internacionais e a OBM

A Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) coordena a participação do Brasil em algumas olimpíadas internacionais:

Olimpíada Internacional de Matemática (IMO)
Olimpíada Ibero-americana de Matemática (OIM)
Olimpíada de Matemática do Cone Sul
Olimpíada de Matemática de Maio
Olimpíada Ibero-americana de Matemática Universitária (OIMU)
International Mathematical Competition for University Students (IMC)
Romanian Master in Mathematics (RMM)
Competência Ibero-americana Interuniversitária de Matemáticas
Asian Pacific Mathematics Olympiad (APMO)
Olimpíada de Matemática da Comunidade dos Países de Língua Portuguesa
Canguru de Matemática Brasil
Olimpíadas Regionais

A Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), por meio do Programa Nacional de Olimpíadas de Matemática, ajuda na realização de competições regionais e estaduais dessa área do conhecimento. Há algumas muito tradicionais como a paulista e a fluminense.

Em 2012, foi criado o Programa Pólos Olímpicos de Treinamento Intensivo (POTI). Ele foi idealizado pela organização da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) com a ajuda da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). O programa é ofertado ao longo do ano, sendo formado por módulos de quatro aulas presenciais uma vez por semana. Ele aborda os conteúdos de álgebra, combinatória, geometria plana e teoria dos números. As aulas são abertas para todos os alunos regularmente matriculados nas redes pública e particular, desde o oitavo ano do Ensino Fundamental até o último ano do Ensino Médio.

Ao mesmo tempo, o programa oferece aulas em vídeo, gravadas no Instituto Nacional da Matemática Pura e Aplicada (IMPA) por uma equipe de professores renomados e muito experientes em treinamento para competições nacionais e internacionais. Também disponibiliza materiais teóricos com todo o currículo básico da matemática olímpica abordado em detalhes.

Os pólos se localizam em: Rio de Janeiro, São Paulo, Campinas, São Bernardo do Campo, São José dos Campos, Salvador, Fortaleza, Maceió, João Pessoa, Porto Alegre, Campo Grande, Maringá, Ponta Grossa e Lajeado. Essas cidades têm aulas presenciais disponíveis.

Para que os professores possam formar grupos de estudos visando à preparação de alunos para participarem de olimpíadas matemáticas, seria interessante consultar o site http://www.poti.impa.br onde o leitor irá encontrar material teórico, vídeos aulas e lista de exercícios muitas delas resolvidas para preparação para olimpíadas. Abaixo listamos uma referência de livros que podem auxiliar nesses estudos. A bibliografia indicada pode fornecer um ponto de apoio aos docentes. Ademais, o objetivo deste trabalho é ser uma espécie de guia para o profissional que pretende trabalhar e desenvolver a matemática com seus alunos, usando as olimpíadas como principal estímulo.

Além da revista Eureka!, que já foi indicada neste capítulo, as seguintes publicações também são importantes, pois a teoria e a prática caminham juntas, já que são duas faces de uma mesma moeda. Só conseguimos resolver problemas se tivermos o conhecimento teórico necessário para tanto. É preciso pensar corretamente, de acordo com as normas estabelecidas pelo pensamento e lógica matemática, é necessário saber os conceitos e suas consequências que estão articulados entre si para, assim, ampliar o seu conhecimento matemático.

O conhecimento teórico é fundamental para a resolução de problemas e esse aspecto se mostra ainda mais forte quando se trata de questões de olimpíadas. O saber teórico permite pontos de vista diferentes e consequente tomada de decisão para a melhor solução. Sem a teoria, podemos agir de forma errada e andar em círculos, sem chegar a ponto algum. Conhecer a teoria, portanto, nos ajuda a agir de forma mais sensata e objetiva. As seguintes obras são excelentes ferramentas nesse sentido:

Colecão Olimpíadas Brasileiras de Matemática: 1ª a 8ª Problemas e Resoluções
Élio Mega, Renate Watanabe
Sociedade Brasileira de Matemática- SBM

Colecão Olimpíadas Brasileiras de Matemática: 9ª a 16ª Problemas e Resoluções
Carlos Gustavo Moreira, Edmilson Motta, Eduardo Tengan, Luiz Amâncio, Nicolau Saldanha e Paulo Rodrigues
Sociedade Brasileira de Matemática- SBM

Colecão Olimpíadas Brasileiras de Matemática: 17ª a 24ª Problemas e Resoluções
Carlos Gustavo Tamm de Araujo Morreira, Carlos Yuzo Shine, Edmilson Luis Rodrigues Motta, Eduardo Tengan , Nicolau Corcao Saldanha
Sociedade Brasileira de Matemática- SBM

Colecão Olimpíadas Brasileiras de Matemática: Iniciação à Matemática, um curso com Problemas e soluções
Krerley Irraciel Martins Oliveira, Adán José Carcho Fernández
Sociedade Brasileira de Matemática- SBM

Colecão Olimpíadas Brasileiras de Matemática: Olimpíadas Cearenses de Matemática , Nível Médio 1981 - 2005
Emanuel Carneiro, Onofre Campos, Max Paiva
Sociedade Brasileira de Matemática- SBM

Colecão Olimpíadas Brasileiras de Matemática : 21 Aulas de Matemática Olímpica
Carlos Yuzo Shine
Sociedade Brasileira de Matemática- SBM

Análise Combinatória e Probabilidades
Augusto César de Oliveira Morgado, João Bosco Pitombeira, Paulo Cesar Pinto Carvalho e Pedro Fernandez.
Sociedade Brasileira de Matemática- SBM

A Matemática do Ensino Médio – Volumes I, II e III
Elon Lages de Lima, Paulo Cesar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César de Oliveira Morgado
Sociedade Brasileira de Matemática- SBM

Meu professor de Matemática e outras histórias
Elon Lages de Lima
Sociedade Brasileira de Matemática- SBM

Análise real
Elon Lages de Lima
Sociedade Brasileira de Matemática- SBM

Construções Geométricas
Eduardo Wagner, José Paulo Carneiro
Sociedade Brasileira de Matemática- SBM

Isometrias
Elon Lages de Lima
Sociedade Brasileira de Matemática- SBM

Elementos de Geometria
Frère Ignace Chaput
F. Briguiet & Cia., Editores. RJ

Introdução À Teoria dos Números
José Plínio de Oliveira Santos
IMPA

Primos de Mersenne( e outros primos muito grandes)
Carlos Gustavo Tamm de Araujo Moreira, Nicolau Corcao Saldanha
IMPA

Teoria dos Nùmeros – um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro
Fabio Brochero Martinez, Carlos Gustavo Tamm de Araujo Moreira, Nicolau Corcao Saldanha, Eduardo Tengan
Projeto Euclides, IMPA

Tópicos de Matemática Elementar – 1º ao 6º
Antônio Caminha Munis Neto
SBM

International Mathematical Olympiads, 1978 – 1985 and forty supplementary
Murray Seymour Klamkin
MAA

Winning Solutions
Edward Lozanky, Cecil Rousseau
Springer

Problem- Solving Strategies
Arthur Engel
Springer

Leningrad Mathematical Olympiads 1987 – 1991
Fomin Dmitry
MathPro Press.

Thirty Years Brasilian Math Olympiads
Organizer: Carlos Yuzo Shine
Associação AOBM

Revista do Professor de Matemática
Revista do Professor de Matemática - RPM
Sociedade Brasileira de matemátiuca - SBM

## 5. PROBLEMAS OLÍMPICOS

Neste capítulo, apresentamos problemas olímpicos do nível 3, aplicados na OBM de 2012 a 2016. Este material está disponível em www.obm.org.br. A natureza desses problemas exige dos alunos criatividade, raciocínio e conhecimentos além de seus conteúdos escolares, exigindo assim preparação específica. Os livros didáticos, em geral, seguem uma fórmula padrão, até mesmo por questões de mercado. Seus exercícios, em geral, seguem uma mesma regra, onde é exigido pouco raciocínio. Esse nível foi escolhido para análise porque, como professor, eu sempre atuei no Ensino Médio, assim tenho mais familiaridade com os conteúdos deste nível de ensino.

Observamos que os exercícios estão distribuídos de forma a abranger os conteúdos de matemática do ensino médio. Estes conteúdos estão em conformidade com o prescrito nos documentos oficiais como os Parâmetros curriculares nacionais (BRASIL,1998), as Diretrizes Curriculares da Educação Básica (PARANÁ, 2008) e o Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias(SÃO PAULO, 2012). Citamos os documentos oficiais dos estados do Paraná e São Paulo pois este trabalho foi desenvolvido em uma universidade estadual paranaense e o autor deste trabalho atua em escolas paulistas.

A tabela abaixo mostra que a maioria dos tópicos foi contemplada. Vemos também que os problemas têm diferentes perspectivas, variando de problemas ligados a situações práticas a problemas mais abstratos. Além disso, os problemas apresentados variam em seus níveis de dificuldade.

Entre 2012 e 2016, alguns assuntos foram mais cobrados do que outros na OBM. O quadro abaixo mostra a frequência das teorias mais solicitadas:

**Tabela 3** - conteúdos das provas da OBM

| Assuntos | 2012 | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ângulos | x | x | x | x | x | 5 |
| Áreas | x |  | x | x | x | 4 |
| Aritmética | x | x | x | x | x | 5 |
| Binômio |  | x |  |  |  | 1 |
| Combinatória | x | x | x | x | x | 5 |
| Conjuntos numéricos | x | x |  | x | x | 4 |
| Circunferência |  | x | x | x | x | 4 |
| Divisibilidade | x | x | x |  |  | 3 |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Divisores | | x | x | x | x | 4 |
| Equações | x | x | x | x | x | 5 |
| Fatoração | x | x | x | x | | 4 |
| Fatorial | x | x | x | x | x | 5 |
| Função | x | x | | | x | 3 |
| Geometria Analítica | | | | x | x | 2 |
| Geometria Espacial | | x | x | | x | 3 |
| Inequações (Desigualdade) | x | x | x | | x | 4 |
| Lei dos Senos | | | x | | | 1 |
| Lógica | x | x | x | x | x | 5 |
| Matemática Discreta | x | | | x | x | 3 |
| Matrizes | x | | | | | 1 |
| Máximo Divisor Comum | x | x | | | | 2 |
| Mínimo Múltiplo Comum | x | | | | | 1 |
| Módulo | | | x | x | | 2 |
| Múltiplos | | x | x | x | x | 4 |
| Polígonos | | x | | x | x | 3 |
| Polinômios | | x | x | x | | 3 |
| Porcentagem | | x | | | | 1 |
| Potenciação | | x | | x | | 2 |
| Probabilidade | x | x | x | | x | 4 |
| Proporção | | | x | x | | 2 |
| Quadriláteros Notáveis | x | x | x | x | x | 5 |
| Raciocínio Lógico | x | | x | x | x | 4 |
| Razão | | | x | x | | 2 |
| Razão de semelhança | x | | x | | x | 3 |
| Sequências e Séries | x | | x | x | x | 4 |
| Semelhança de Triângulos | | x | | x | x | 3 |
| Sistemas | x | | | | | 1 |
| Triângulos (Teoremas) | x | x | x | x | x | 5 |
| Trigonometria | x | x | | | x | 3 |

**Fonte:** o próprio autor

Em todos os anos, ângulos, aritmética, combinatória, lógica, equações, fatorial, quadriláteros notáveis e resultados relacionados a triângulos foram cobrados na competição; mostrando uma predileção da OBM por esses assuntos.

Apenas em um ano, não foram pedidos áreas de regiões geométricas, conjuntos numéricos, circunferência, raciocínio lógico, divisores, fatoração, inequações (desigualdades), múltiplos, probabilidade, sequências e séries.

Já lei dos senos, matrizes, mínimo múltiplo comum, binômio de Newton, porcentagem e sistemas foram os assuntos menos cobrados, o que indica que esses aspectos não gozam de tanto interesse como os outros.

Em 60 por cento das provas, foram requisitados os conhecimentos dos estudantes em geometria espacial, matemática discreta, divisibilidade, função, polígonos, polinômios, trigonometria, razão de semelhança e semelhança de triângulos.

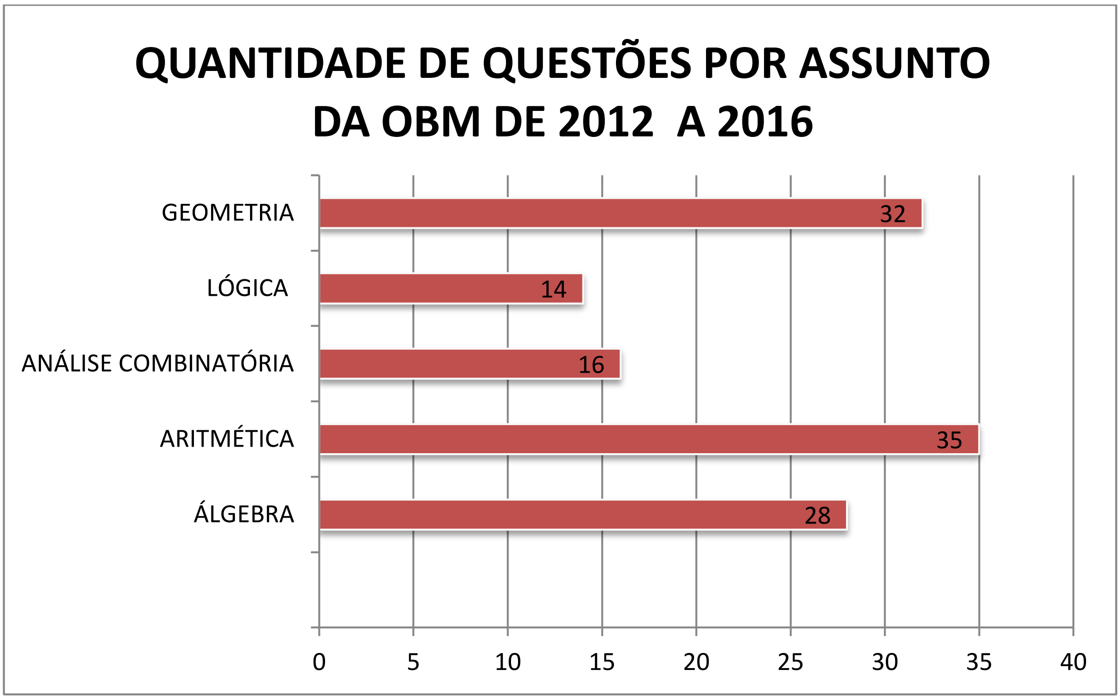
Os demais assuntos, geometria analítica, máximo divisor comum, módulo, potenciação, proporção e razão aparecem 40 por cento das vezes.

Considerando que um dos objetivos das olimpíadas de matemática é encontrar jovens com talento excepcional, que possam representar o Brasil em competições matemáticas, as questões olímpicas tratam, em menor número, de tópicos muito específicos. Ao verificarmos as resoluções das questões de 2012 a 2016, contatamos que foram necessários conteúdos como aritmética modular, diagrama de Ferrers, fórmula de Polignac, técnicas de demonstração como redução ao absurdo e alguns resultados de geometria como o teorema de Morley e teorema de Ptolomeu, ilustrando assim que tais competições realmente exigem uma preparação própria.

O site oficial da OBM apresenta indicações de livros teóricos, revistas, *links* e livros de problemas para os competidores. Nossa análise de quanto cada assunto é cobrado permite o conhecimento dos conteúdos com mais chances de aparecer novamente nas próximas edições.

Conhecer os exames anteriores é essencial para se preparar para a competição. Com o objetivo de auxiliar o professor que vai formar grupos de estudos, as questões das provas da OBM foram, reunidas nas seguintes áreas: lógica, aritmética, álgebra, geometria e análise combinatória. O critério para essa seleção foi a teoria usada para solucionar os problemas. Assim, em uma primeira leitura, muitos problemas parecem ser de uma área, mas foram usadas ferramentas de outras áreas para solucioná-los. Podemos citar, por exemplo, a questão 4 de 2016. Uma leitura rápida nos conduz à geometria espacial; porém, para sua resolução, usa-se o princípio da casa dos pombos, que é um resultado de análise combinatória. Cabe salientar que essa divisão é um tanto quanto maleável e foi realizada segundo a nossa visão da matemática. Esta flexibilidade é um fato natural, considerando que essa é uma característica dessa ciência: as relações e dependências entre os seus diferentes conteúdos. Após essa divisão, os dados foram tabulados e observamos que geometria, aritmética e álgebra predominam na competição.

**Gráfico 2** - questões da OBM




**Fonte:** o próprio autor.

A seguir, apresentamos as questões de 2012 a 2016 apresentadas separadamente por área. As questões foram rotuladas com o ano da prova e o seu número na prova original, para facilitar a consulta aos gabaritos, considerando que suas resoluções podem ser encontradas no *site* da OBM.

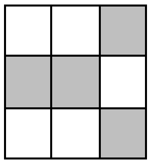
## Aritmética

(PROVA 2014- QUESTÃO 1)- Para descobrir a quantidade de divisores positivos de um número inteiro positivo $n$, basta tomar sua fatoração em primos e calcular o produto dos expoentes dos primos adicionados de $1$. Por exemplo, $2800 = 2^4 \cdot 5^2 \cdot 7$ possui $(4+1)(2+1)(1+1) = 30$ divisores positivos. Qual é o menor inteiro positivo com $2014$ divisores positivos?

A) $2^2 3^{19} 5^{53}$ B) $2^{53} 3^{19} 5^2$ C) $2^{52} 3^{18} 5$ D) $2^{38} 3^{53}$ E) $2^{37} 3^{52}$

(PROVA 2015- QUESTÃO 1)- Violeta quer numerar de 1 a 9 quadrados do tabuleiro ao lado, de modo que a soma de dois números em quadrados vizinhos ( quadrados com lados comuns) seja um número ímpar. Além disso, ela quer a soma dos números escritos nos quadrados cinza seja a maior soma possível. Qual é a soma dos números escritos nos quadrados brancos?

**Figura 03** – numerando de 1 a 9



**Fonte:** OBM.

A) 15 B) 16 C) 22 D) 29 E) 30

(PROVA 2012- QUESTÃO 2)- Na expressão $\frac{MxAxTxExM}{AxTxIxCxA}$, letras diferentes representam dígitos diferentes e letras iguais representam dígitos iguais. Qual é o maior valor possível desta expressão?

A) 38 B) 96 C) 108 D) 576 E) 648

(PROVA 2013- QUESTÃO 2)- Se Joana comprar hoje um computador cujo preço é 2000 reais, ela conseguirá um desconto de 5%. Se ela deixar para amanhã, irá conseguir o mesmo desconto de 5%, mas o preço do computador irá aumentar 5%. Se ela esperar, o que acontecerá?

A) Nada, pois pagará a mesma quantia.

B) Ela perderá 100 reais.

C) Ela ganhará 105 reais.

D) Ela perderá 95 reais.

E) Ela perderá 105 reais.

(PROVA 2013- QUESTÃO 3)- O Aluno *D* (usaremos este codinome para proteger a identidade do aluno) não prestou atenção na aula e não aprendeu como verificar, sem realizar a divisão, se um número é múltiplo de 7 ou não. Por isso, *D* decidiu usar a regra do 3, ou seja, ele vai somar os dígitos e verificar se o resultado é um múltiplo de 7. Para quantos números inteiros positivos menores que 100 esse método incorreto indicará que um número é múltiplo de 7, sendo o número realmente múltiplo de 7?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

(PROVA 2013- QUESTÃO 4)- Entre os números naturais de 1 até *n*, pelo menos 11 são divisíveis por 5 e no máximo 9 são divisíveis por 6. No máximo, quantos desses números são divisíveis por 7?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

(PROVA 2012- QUESTÃO 5)- Em 2012 estamos realizando a edição 34 da OBM, e mdc(2012, 34) = 2. Supondo que a OBM sempre será realizada todo ano, qual é o maior valor possível para o mdc do ano e da edição da OBM realizada no ano?

A) 12 B) 28 C) 38 D) 1978 E) 2012

(PROVA 2013- QUESTÃO 5)- Joana preenche completamente um quadriculado retangular escrevendo os números de 1 a 2013, sendo um número para cada quadrado. Ela começa no canto superior esquerdo e preenche a primeira coluna, depois preenche a segunda coluna, de cima para baixo e continua, da mesma forma, preenchendo a terceira coluna, a quarta, etc., até chegar à última coluna e terminar no canto inferior direito. Se o número 50 está na segunda coluna e o número 100 na quarta coluna, em qual coluna estará escrito o número 1000?

A) 23 B) 31 C) 33 D) 39 E) 61

(PROVA 2014- QUESTÃO 5)- Assinale a alternativa que apresenta o maior dos cinco números.

A) $2014^5$ B) $3015^4$ C) $4016^3$ D) $5017^2$ E) $6018^1$

(PROVA 2015- QUESTÃO 5)- Dizemos que dois anos *coincidem* se têm a mesma quantidade de dias e os dias da semana de todos os seus dias coincidem. O ano de 2015 coincide com 2009; qual é o próximo ano que coincide com 2015? Lembre-se de que os anos múltiplos de 4 no século XXI (com exceção de 2100) são bissextos e têm 366 dias; os demais anos têm 365 dias.

A) 2021 B) 2022 C) 2023 D) 2025 E) 2026

(PROVA 2012- QUESTÃO 6)- Os algarismos não nulos *A*, *B* e *C* formam os números *ABC*, *BCA* e *CAB* tais que *ABC* + *BCA* + *CAB* = *AAA* × 10. Quantos números *ABC* desse tipo existem?

A) 6 B) 8 C) 9 D) 15 E) nenhum

(PROVA 2014- QUESTÃO 7)- O número de 5 dígitos $\overline{xy26z}$, em que cada uma das letras representa um dígito, é divisível por 8, 9 e 11. Qual o valor de $x$?

A) 3 B) 5 C) 1 D) 4 E) 9

(PROVA 2013- QUESTÃO 8)- O triângulo aritmético de Fibonacci é formado pelos números ímpares inteiros positivos a partir do 1 dispostos em linhas com ordem crescente em cada linha e pulando para a linha seguinte. A linha *n* possui exatamente *n* números. Veja as quatro primeiras linhas.

Linha 1: 1

Linha 2: 3 5

Linha 3: 7 9 11

Linha 4: 13 15 17 19

...

Em qual linha aparecerá o 2013?

A) 45 B) 46 C) 62 D) 63 E) 64

(PROVA 2014- QUESTÃO 8)- A sequência de Fibonacci é definida recursivamente por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ para $n \in \mathbb{Z}$ e $F_1 = F_2 = 1$. Então

$$\left(1 - \frac{F_2^2}{F_3^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{F_3^2}{F_4^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{F_4^2}{F_5^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{F_{2013}^2}{F_{2014}^2}\right)$$

é igual a:

A) $\frac{F_{2016}}{F_{2013}^2}$

B) $\frac{F_{2014}}{F_{2013}}$

C) $\frac{F_{2015}^2}{F_{2013}^2}$

D) $\frac{F_{2015}}{2}$

E) $\frac{F_{2015}}{2F_{2013}F_{2014}}$

(PROVA 2015- QUESTÃO 9)- Existem quantos números inteiros positivos $n$ tais que ao dividir $2032$ por $n$ temos resto $17$?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

(PROVA 2014- QUESTÃO 10)- Em Portugal, o dia 4 de outubro de 1582 foi o último dia do calendário *juliano*, que foi substituído pelo calendário adotado atualmente, o calendário *gregoriano*. O dia seguinte foi definido como 15 de outubro de 1582, ou seja, não houve os dias 5 a 14 de outubro de 1582. A única diferença entre os calendários é que, no calendário juliano, todos os anos múltiplos de 4 eram bissextos; no calendário gregoriano, os anos que são múltiplos de 100, mas não de 400, não são bissextos. Assim, 1900 seria um ano bissexto no calendário juliano , mas não no calendário gregoriano. Que dia seria hoje, 3 de junho de 2014, se não tivéssemos mudado de calendário?

A) 20 de maio de 2014

B) 21 de maio de 2014

C) 22 de maio de 2014

D) 16 de junho de 2014

E) 17 de junho de 2014

(PROVA 2012- QUESTÃO 13)- Anos bissextos têm um dia a mais, 29 de fevereiro, que os demais anos e ocorrem a cada 4 anos. Esmeralda nasceu no dia 29 de fevereiro, em um domingo. Sabendo que 29 de fevereiro de 2012 caiu em uma quarta-feira, em qual ano Esmeralda pode ter nascido?

A) 1972 B) 1976 C) 1980 D) 1984 E) 1988

(PROVA 2015- QUESTÃO 13)- Inicialmente, na tela de um computador, estão escritos os números 1 e 2. A cada segundo, esses dois números são trocados pela soma de seus quadrados e pelo dobro de seu produto. Depois de aproximadamente quanto tempo um desses dois números vai ser maior do que a quantidade de átomos no planeta Terra, que é cerca de $10^{50}$?

A) Sete segundos

B) Sete horas

C) Sete dias

D) Sete meses

E) Sete anos

(PROVA 2016- QUESTÃO 14)- Na igualdade $\frac{D\times O\times Z\times E}{D\times O\times I\times S} = S\times E\times I\times S$, letras iguais representam algarismos iguais e letras diferentes representam algarismos diferentes. Se os algarismos são todos diferentes de zero, quantos valores diferentes o produto $S\times E\times I\times S$ pode ter?

A) 12 B) 18 C) 22 D) 28 E) 36

(PROVA 2013- QUESTÃO 17)- Num circo, a atração principal é a *Corrida de Pulgas*. Duas pulgas, $P_1$ e $P_2$, perfeitamente treinadas, saltam ao longo de uma linha reta, com velocidades constantes, partindo de um mesmo ponto e no mesmo instante. Cada salto da pulga $P_1$ tem alcance $m$ centímetros e cada salto da pulga $P_2$ tem alcance $n$ centímetros, com $m<n$, ambos inteiros. Porém a pulga $P_1$ é mais rápida que a pulga $P_2$, de modo que, independente da velocidade de $P_2$, $P_1$ sempre pode alcançá-la após alguns saltos. Supondo que, após a largada, as pulgas estarão juntas, pela primeira vez, ao final de 1 metro, determine o número de pares ($m$, $n$) possíveis.

A) 12 B) 24 C) 36 D) 48 E) 100

(PROVA 2014- QUESTÃO 18)- Quantos pares ordenados $(a,b)$ de inteiros positivos existem tais que $\frac{2014}{a^2+b^2}$ é inteiro?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

(PROVA 2015- QUESTÃO 18)- A função *piso*, $\lfloor x\rfloor$, indica o maior inteiro menor ou igual a $x$. Por exemplo, $\lfloor 3{,}45\rfloor = 3$ e $\lfloor 41\rfloor = 41$. Considere a função $f$, definida nos inteiros não negativos, tal que $f(0) = 0$ e $f(n) = f\left(\left\lfloor \frac{n}{10}\right\rfloor\right) + n - 10\left\lfloor \frac{n}{10}\right\rfloor$. Quantos algarismos tem o menor inteiro positivo $m$ tal que $f(m) = 2015$?

A) 201 B) 202 C) 222 D) 223 E) 224

(PROVA 2012- QUESTÃO 19)- Quantos elementos tem o maior subconjunto de {1,2,3,…,25} que não contém dois números distintos cujo produto é um quadrado perfeito?

A) 15 B) 16 C) 17 D) 18 E) 19

(PROVA 2013- QUESTÃO 19)- Qual dos seguintes números é o mais próximo da quantidade de algarismos de $3^{400}$?

A) 100 B) 150 C) 200 D) 240 E) 300

(PROVA 2014- QUESTÃO 19)- Uma sequência $x_n$ tem como primeiros termos $x_0 = x_1 = 2$e os demais termos definidos por $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n$. Qual é o dígito das unidades de $x_0 - x_1 + x_2 - x_3 + \cdots - x_{2013} + x_{2014}$?

A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

(PROVA 2016- QUESTÃO 19)- O conjunto $X$ está contido em $\{1,2,3, \ldots ,2016\}$ e tem a seguinte propriedade: para todos $x, y \in X$ com $x < y$, $y + 1$ é múltiplo de $x$. Qual é a quantidade máxima de elementos que $X$ pode ter?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

(PROVA 2012- QUESTÃO 20)- O número *e*, uma das constantes mais importantes da Matemática, pode ser definido por $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$ em que 0! = 1 e *n*! = 1·2·3·…·*n* para *n*>0.

Então o número $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} = \frac{1^2}{0!} + \frac{2^2}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{4^2}{3!} + \cdots$ é igual a

A) 2*e* B) 4*e* C) 5*e* D) $e^2$ E) $(e + 1)^2$

(PROVA 2015- QUESTÃO 20)- Existem quantos múltiplos de 99 com quatro dígitos distintos? Lembre-se de que números com quatro algarismos não podem começar com zero à esquerda; em particular, 0123 = 123 tem três algarismos.

A) 18 B) 27 C) 45 D) 72 E) 90

(PROVA 2016- QUESTÃO 20)- Juca gosta de brincar com um número e a soma dos seus dígitos. Ele decidiu chamar um número inteiro $s$ de *sagaz* se existe algum número $n$ tal que $s$ é a diferença entre $n$ e a soma dos dígitos de $n$. Por exemplo, 18 é sagaz, pois ele é igual a $28 - (2 + 8)$. Existem quantos números sagazes maiores que 1 e menores que 1000?

A) 0 B) 100 C) 111 D) 250 E) 998

(PROVA 2012- QUESTÃO 21)- Qual é a maior potência de 2 que divide $2011^{2012} - 1$?

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 32

(PROVA 2016- QUESTÃO 21)- Pedroso tem pilhas com 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 11 pedras (sim, ele não tem uma pilha com 10 pedras). Ele pode juntar duas pilhas de pedras. Quantas vezes, no mínimo, ele deve fazer essa operação para ter pilhas com as mesmas quantidades de pedras?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 6 E) 8

(PROVA 2014- QUESTÃO 22)- Duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, $a, b, c, d$ inteiros positivos, são *íntimas* quando $ad - bc = \pm 1$. Por exemplo, $\frac{1}{2}$ é íntima de $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ pois $1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 1$ e $1 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = -1$. Duas frações íntimas de $\frac{2014}{51}$ têm denominador menor do que $51$. Sendo $\frac{x}{y}$ e $\frac{z}{w}$ essas frações, quanto vale $y \cdot w$?

A) $58$ B) $68$ C) $78$ D) $88$ E) $98$

(PROVA 2013- QUESTÃO 23)- Se $x$ e $y$ são inteiros positivos tais que $x(x + 2 + 4 + 6 + \cdots + 4024) = 2013^y$, qual é o valor de $y$?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

(PROVA 2012- QUESTÃO 25)- Esmeralda desenhou uma tabela com 100 linhas e 100 colunas e escreveu, na linha *i* e coluna *j* da tabela, mdc(*i*, *j*) se *i*<*j* e mmc(*i*, *j*) se *i* ≥ *j*. Por exemplo, na linha 4, coluna 6 ela escreveu mdc(4,6) = 2 e na linha 15, coluna 10 ela escreveu mmc(15,10) = 30. Qual é o produto de todos os $100^2$ números da tabela?

A) $100!^{99}$

B) $100!^{100}$

C) $100!^{101}$

D) mmc(1,2,3,…,100)$^{100}$

E) mdc(1,2,3,…,100)$^{100}$

(PROVA 2015- QUESTÃO 25)- Sabendo que

$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$, então $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{1^2 2^2}+\frac{1}{2^2 3^2}+\frac{1}{3^2 4^2}+\cdots$

é igual a:

A) $\frac{\pi^2}{6}-1$ B) $\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{\pi^2}{6}-1\right)$ C) $\frac{\pi^2}{3}-3$ D) $\frac{\pi^2}{3}+1$ E) $\frac{\pi^4}{9}-2$

**Álgebra**

(PROVA 2016- QUESTÃO 2)- Numa maratona com 2016 participantes, o número de corredores que chegaram antes de Josias foi igual a um quarto do número de corredores que chegaram depois de Josias. Em que lugar chegou Josias?

A) 404º B) 405º C) 407º D) 1007º E) 1008º

(PROVA 2013- QUESTÃO 6)- Sejam $a,b$ reais positivos tais que $\frac{a+2b}{b}=\frac{a+b}{a}$. O valor de $\frac{(a+b)^2}{ab}$ é:

A) 4 B) $3+\sqrt{3}$ C) $2+2\sqrt{2}$ D) $2+\sqrt{5}$ E) 5

(PROVA 2016- QUESTÃO 6)- Janaína escreveu uma lista de 10 números inteiros positivos no quadro-negro e obteve todas as somas possíveis de dois desses números, verificando que todas eram diferentes. O número de somas pares que ela obteve era igual a quatro vezes o número de somas ímpares. Qual é a maior quantidade de números pares que poderia haver na lista de Janaína?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

(PROVA 2015- QUESTÃO 7)- Esmeralda e Jade saíram da secretaria da OBM e foram para o Jardim Botânico. As duas saíram ao mesmo tempo, Esmeralda de bicicleta e Jade caminhando. A velocidade de Esmeralda é o quádruplo da velocidade de Jade, e as duas velocidades são constantes. Esmeralda chegou ao Jardim Botânico, esperou 5 minutos e depois voltou pelo mesmo caminho, encontrando Jade indo, bem na metade do caminho. Quanto tempo demora a caminhada de Jade da secretaria até o Jardim Botânico?

A) 30 min B) 35 min C) 40 min D) 45 min E) 50 min

(PROVA 2016- QUESTÃO 7)- Qual das equações abaixo resolve o problema a seguir?

“Uma quantidade x de amigos resolveu fazer uma viagem juntos, dividindo igualmente suas despesas, no total de 6000 reais. Entretanto, na última hora, três dos amigos desistiram e cada um dos que foram viajar teve que arcar com uma despesa extra de 100 reais. Quantos amigos eram?”

A) $x^2 - 12x = 0$ B) $x^2 - 3x - 180 = 0$ C) $x^2 = 144$ D) $x^2 - 5x + 6 = 0$ E) $x^2 - 100x + 6000 = 0$

(PROVA 2012- QUESTÃO 8)- Se $x^2 = 2x + 4$, então $(x + 1)^{-1}$ é igual a :

A) $x + 2$

B) $x - 3$

C) $x - 1$

D) $2x + 5$

E) $3x + 5$

(PROVA 2015- QUESTÃO 8)- Um número é dito *impadrático* quando é raiz de uma equação quadrática com coeficientes inteiros ímpares. Por exemplo, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é impadrático, pois é raiz da equação $x^2 - x - 1 = 0$. Qual dos números a seguir é impadrático?

A) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

B) $\frac{1+\sqrt{5}}{5}$

C) $\frac{1+\sqrt{6}}{2}$

D) $\frac{1-\sqrt{7}}{4}$

E) $\frac{1-\sqrt{13}}{6}$

(PROVA 2012- QUESTÃO 10)- As massas de todos os pares possíveis formados com 5 estudantes são 90 kg, 92 kg, 93 kg, 94 kg, 95 kg, 96 kg, 97 kg, 98 kg, 100 kg e 101 kg. Qual é a massa do estudante de massa intermediária?

A) 52 kg B) 51 kg C) 49 kg D) 48 kg E) 46 kg

(PROVA 2013- QUESTÃO 10)- Determine $x + y$, onde $x$ e $y$ são reais, sabendo que $x^3 + y^3 = 9$ e $xy^2 + x^2y = 6$.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

(PROVA 2012- QUESTÃO 11)- Seja $N = \{0,1,2,\ldots\}$ e considere a função $f$: $N \to N$ tal que $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(2) = 0$ e, para todo natural $n \geq 1$, satisfaz as seguintes condições:

i) $f(3n) = 3\cdot f(n) + 1$;

ii) $f(3n + 1) = 3\cdot f(n) + 2$;

iii) $f(3n + 2) = 3\cdot f(n)$;

Então $f(2012)$ é igual a:

A) 101 B) 102 C) 103 D) 104 E) 105

(PROVA 2014- QUESTÃO 12)- As raízes da equação $x^2 - ax + b = 0$ são diferentes de zero e são os quadrados das raízes da equação $x^2 - bx + a = 0$. As raízes das equações não são necessariamente reais, mas $a$ e $b$ são reais. Então o valor de $a$ é:

A) $-\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt[3]{2}$ E) $\sqrt[3]{3}$

(PROVA 2016- QUESTÃO 12)- Dado um real $x$, sua parte inteira $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a $x$ e sua parte fracionária é dada por $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Quantas soluções tem a equação $\lfloor x \rfloor - 2016\{x\} = 38$?

A) 11 B) 36 C) 1008 D) 2016 E) 2017

(PROVA 2013- QUESTÃO 14)- Seja $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Considere uma função $f: S \to S$ definida pela tabela a seguir

**Tabela 04** – função bijetora

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 8 | 3 | 5 | 7 | 2 | 9 | 6 | 1 | 4 |

**Fonte:** OBM.

Qual é o menor valor inteiro positivo de $n$ para o qual $\underbrace{f(f(\ldots(f}_{n\text{ vezes}}(x))) = x$ para todo $x \in S$?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 12 E) 24

(PROVA 2014- QUESTÃO 14)- Um *quadrado mágico multiplicativo* é um quadrado $n \times n$ com números inteiros positivos distintos cujos produtos de números na mesma linha, coluna ou diagonal são iguais. Por exemplo, temos o seguinte quadrado mágico multiplicativo:

**Tabela 05** – quadrado mágico

| | | |
|---|---|---|
| 128 | 1 | 32 |
| 4 | 16 | 64 |
| 8 | 256 | 2 |

**Fonte:** OBM.

Qual é o menor valor possível do número no centro de um quadrado mágico multiplicativo $3 \times 3$?

A) $1$ B) $2$ C) $4$ D) $6$ E) $8$

(PROVA 2014- QUESTÃO 15)- A soma das raízes da equação $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{2+x} + \frac{3}{3+x} = 1$ é:

A) $0$ B) $6$ C) $14$ D) $11$ E) $9$

(PROVA 2012- QUESTÃO 16)- A soma de dois inteiros positivos é 2012. A diferença entre o maior e o menor valores possíveis do produto dos dois números é

A) $1006^2$

B) $1005^2$

C) $1005 \cdot 1007$

D) 1005·1006

E) 1006·1007

(PROVA 2016- QUESTÃO 17)- A quantidade de triplas ordenadas $(a, b, c)$ de reais tais que

$$a = \frac{b}{c} + \frac{c}{b}, \qquad b = \frac{c}{a} + \frac{a}{c}, \qquad c = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

é:

A) 0 B) 1 C) 3 D) 4 E) 5

(PROVA 2012- QUESTÃO 18)- Numa festa de criança, o palhaço *Macaxeira* irá distribuir 21 balas para 5 crianças que participam de uma brincadeira. Macaxeira quer fazer a distribuição satisfazendo às seguintes condições:

1) Cada criança deve receber pelo menos uma bala;

2) Cada criança recebe um número diferente de balas;

3) O número de balas é feito em ordem decrescente, de acordo com sua altura (a menor criança recebe mais balas e a maior recebe menos balas).

Supondo que todas as crianças têm alturas diferentes, de quantos modos ele pode fazer essa distribuição?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

(PROVA 2016- QUESTÃO 18)- O ano de 2016 é sabadoso, pois há cinco meses com cinco sábados. Qual será o próximo ano sabadoso?

A) 2017

B) 2019

C) 2020

D) 2021

E) 2022

(PROVA 2013- QUESTÃO 20)- Para quantos inteiros positivos $k$ menores que 2013, existem inteiros $a$, $b$ e $c$, não necessariamente distintos, satisfazendo

$a^2 + b + c = b^2 + c + a = c^2 + a + b = k$ ?

A) 43 B) 44 C) 87 D) 88 E) 89

(PROVA 2014- QUESTÃO 20)- Qual é o número de soluções inteiras $(x, y, z)$ do sistema

$$\begin{cases} x^2 - 6y = 2z - 15 \\ y^2 - 6z = 2x - 15 \\ z^2 - 6x = 2y - 15 \end{cases}?$$

A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) infinito

(PROVA 2015- QUESTÃO 21)- O polinômio não constante $P(x)$ tem coeficientes inteiros e é tal que $P(0) = 2015$. No máximo quantas raízes inteiras distintas tem $P(x)$?

A) $3$ B) $4$ C) $5$ D) $6$ E) $8$

(PROVA 2012- QUESTÃO 23)- Para Mariazinha, existem somente quatro números que ela considera *atraentes* : 1, 3, 13 e 31. Um outro número será *quase atraente* somente se puder ser expresso como soma de pelo menos um de cada um dos quatro números atraentes. Por exemplo, 1 + 3 + 3 + 3 + 13 + 31 = 54 é quase atraente. No mínimo, quantos números atraentes devem ser somados para mostrar que 2012 é um número quase atraente?

A) 68 B) 70 C) 71 D) 99 E) 2011

(PROVA 2016- QUESTÃO 23)- Uma função $f$ dos inteiros positivos nos inteiros positivos é tal que se $m$ é múltiplo de $n$ e $m > n$ então $f(m) > f(n)$. O menor valor possível de $f(2016)$ é

A) 2 B) 8 C) 9 D) 12 E) 2016

(PROVA 2012- QUESTÃO 24)- Quantas soluções reais têm o sistema

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{1}{z^2} \\ y + z = \dfrac{1}{x^2} \\ z + x = \dfrac{1}{y^2} \end{cases}?$$

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) infinitas

(PROVA 2013- QUESTÃO 24)- Um polinômio $p(x)$ é par quando $p(-x) = p(x)$, para todo $x$ real. Qual é o número máximo de soluções reais da equação $p(x) = k$, sendo $p$ um polinômio par não constante com coeficientes não negativos e $k$ um real fixado?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) $n$, em que $n$ é o grau de $p(x)$

(PROVA 2015- QUESTÃO 24)- Os inteiros positivos $x$ e $y$ são tais que $\frac{1}{2015} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$. Qual é o menor valor possível para $x + y$?

A) 2015 B) 2016 C) 3264 D) 4836 E) 9672

(PROVA 2016- QUESTÃO 24)- A soma de $2016$ números inteiros positivos é maior ou igual ao produto dos mesmos $2016$ números inteiros positivos. Pelo menos quantos desses números são iguais a $1$?

A) 2004 B) 2005 C) 2006 D) 2007 E) 2008

**<u>Análise Combinatória</u>**

(PROVA 2012- QUESTÃO 3)- Em uma pesquisa de rua, cada entrevistado respondeu a quatro perguntas, podendo sua resposta ser *sim* ou *não*, para cada uma das perguntas. Qual o número mínimo de entrevistados para garantirmos que duas pessoas responderam igualmente a todas as perguntas?

A) 16 B) 17 C) 9 D) 5 E) 33

(PROVA 2014- QUESTÃO 6)- Cada uma de $2014$ bolas é pintada de azul, verde ou amarelo e é colocada aleatoriamente em uma de três urnas, uma azul, outra verde e a terceira amarela. Qual é a probabilidade de que cada urna contenha exatamente as bolas com a sua respectiva cor?

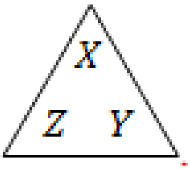
A) $\frac{1}{3^{2014}}$ B) $\frac{1}{3^{2013}}$ C) $\frac{1}{9^{2014}}$ D) $\frac{1}{3^{4017}}$ E) $\frac{1}{9^{2013}}$

(PROVA 2013- QUESTÃO 9)- Dizemos que duas retas ou segmentos de retas são *reversas* quando não existe um plano que contém ambas as retas ou segmentos de retas. De quantas maneiras podemos escolher três arestas de um cubo de modo que quaisquer duas dessas arestas são reversas?

A) 6 B) 8 C) 12 D) 24 E) 36

(PROVA 2014- QUESTÃO 11)- O jogo de triminó simplificado é composto por peça na forma de triângulos em que cada um dos vértices possui um número de 0 a 5. Sabe-se que para qualquer peça do triminó simplificado quando se coloca menor dos números no vértice superior os números estão em ordem crescente no sentido horário, ou seja, a peça faz parte do triminó simplificado quando $X \leq Y \leq Z$.

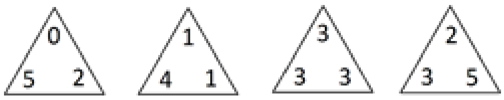
**Figura 04** - triminó




**Fonte:** OBM.

Por exemplo, das quatro peças a seguir, três primeiras peças fazem parte do jogo, mas a quarta não.

**Figura 05** – triminó numerado




**Fonte:** OBM.

Existem quantas peças em um jogo de triminó simplificado?

A) 216 B) 125 C) 120 D) 56 E) 30

(PROVA 2016- QUESTÃO 13)- De quantas maneiras podemos escolher $n$ casas de um tabuleiro $n \times n$, $n > 3$, sem escolher duas casas na mesma linha ou na mesma coluna, sabendo que os quatro cantos do tabuleiro não podem ser escolhidos?

A) $(n-2)(n-3)(n-2)!$

B) $(n-4)(n-1)!$

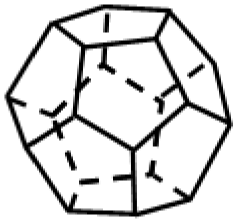
C) $(n^2-5n+2)(n-2)!$

D) $(n-2)(n-1)!$

E) $(n-2)(n-2)!$

(PROVA 2015- QUESTÃO 14)- Duas retas ou segmentos de retas no espaço são *reversas* quando não existe um plano que contém ambas. Um dodecaedro regular é um poliedro com doze faces pentagonais, todas regulares.

**Figura 06** - dodecaedro



**Fonte:** OBM.

Qual é a maior quantidade de elementos de um conjunto $S$ de arestas de um dodecaedro regular tal que quaisquer dois de seus elementos são reversos?

A) $3$ B) $6$ C) $9$ D) $12$ E) $15$

(PROVA 2012- QUESTÃO 15)- Um painel luminoso é formado por 10 círculos grandes. Dentro de cada círculo há quatro lâmpadas: uma amarela, uma verde, uma vermelha e uma azul. De quantos modos podemos acender o painel de modo que pelo menos uma lâmpada de cada cor fique acesa? Cada círculo pode ter de zero a quatro lâmpadas acesas, ou seja, é permitido duas lâmpadas acesas no mesmo círculo.

A) $(2^{10} – 1)^4$

B) $(2^4 – 1)^{10}$

C) $2^{10} – 1$

D) $2^4 – 1$

E) $2^{10} – 2^4$

(PROVA 2013- QUESTÃO 15)- Uma *potência perfeita* é um número inteiro da forma $a^b$, $a$ e $b$ inteiros, $b > 1$. Seja $f(n)$ a maior potência perfeita que não excede $n$. Por exemplo, $f(7) = 4$, $f(8) = 8$ e $f(99) = 81$. Sorteando ao acaso um número inteiro $k$ com $1 \leq k \leq 100$, qual a probabilidade de $f(k)$ ser um quadrado perfeito?

A) 64% B) 72% C) 81% D) 90% E) 96%

(PROVA 2016- QUESTÃO 15)- Humberto joga um dado honesto e obtém $x_1$ pontos; Doisberto joga dois dados honestos e tira a média aritmética $x_2$ dos resultados; Tresberto joga três dados honestos e tira a média aritmética $x_3$ dos resultados. Todos os dados têm faces numeradas de 1 a 6. Sendo $p_1$, $p_2$ e $p_3$ as probabilidades de obter $x_1 \geq 5$, $x_2 \geq 5$ e $x_3 \geq 5$, respectivamente, então

A) $p_1 < p_2 < p_3$

B) $p_1 < p_3 < p_2$

C) $p_2 < p_1 < p_3$

D) $p_2 < p_3 < p_1$

E) $p_3 < p_2 < p_1$

(PROVA 2015- QUESTÃO 16)- Para $n$ inteiro positivo, o *fatorial* de $n$ é $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. Não existe $n$ para o qual $n!$ termina em $2015$ zeros, mas existe $n$ para o qual $n!$ termina em $2016$ zeros. O menor valor de $n$ para o qual isso ocorre é:

A) 8064 B) 8065 C) 8070 D) 8075 E) 8080

(PROVA 2012- QUESTÃO 17)- O triângulo *ABC* tem lados *AB* = 6, *AC* = 8 e *BC* = 10. Escolhe-se um ponto *X* ao acaso no interior do triângulo *ABC*. Sejam $p_A$, $p_B$ e $p_C$ as probabilidades de que o vértice do triângulo *ABC* mais próximo de *X* seja *A*, *B* e *C*, respectivamente. Então

A) $p_A > p_B = p_C$

B) $p_A > p_B > p_C$

C) $p_A > p_C > p_B$

D) $p_A < p_B < p_C$

E) $p_A = p_B = p_C$

(PROVA 2014- QUESTÃO 17)- Bitonho está jogando em seu celular o *Super Paciência*, cujo objetivo é preencher um tabuleiro $2 \times 2014$ com zeros e uns de modo que dois números vizinhos iguais em uma mesma linha impedem que se preencha também com números iguais as casas correspondentes da outra linha. Por exemplo, no desenho abaixo, os valores de $A$ e $B$ não podem ser iguais.

**Tabela 06** – super paciência

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | ... | 1 | 1 | ... |
| 1 | 1 | 0 | ... | $A$ | $B$ | ... |

**Fonte:** OBM.

De quantas maneiras Bitonho pode preencher um tabuleiro de Super Paciência?

A) $3^{2014}$ B) $4 \cdot 3^{2013}$ C) $4^{2014}$ D) $2 \cdot 3^{2014}$ E) $3 \cdot 4^{2014}$

(PROVA 2013- QUESTÃO 18)- De quantos modos podemos distribuir 10 bolas brancas e 8 bolas vermelhas em cinco caixas iguais, de modo que em cada caixa haja pelo menos uma bola e que em cada caixa haja um número diferente de bolas brancas?

A) 330 B) 348 C) 512 D) 676 E) 900

(PROVA 2015- QUESTÃO 19)- Sejam $A$ e $B$ dois conjuntos disjuntos tais que $n(A) = 5$ e $n(B) = 7$, em que $n(X)$ é a quantidade de elementos do conjunto $X$. Quantos subconjuntos não-vazios $C$ de $A \cup B$ são tais que $n(A \cap C) = n(B \cap C)$?

A) 790 B) 791 C) 792 D) 793 E) 794

(PROVA 2013- QUESTÃO 22)- Quantos números de quatro algarismos distintos não têm 1 nas unidades, nem 2 nas dezenas, nem 3 nas centenas e nem 4 nos milhares?

A) Menos de 1000

B) Mais de 1000 e menos de 2000

C) Mais de 2000 e menos de 3000

D) Mais de 3000 e menos de 4000

E) Mais de 4000

(PROVA 2014- QUESTÃO 25)- Para calcular a probabilidade de uma moeda de raio $r$ cair totalmente dentro de um ladrilho formado com ladrilhos quadrados de lado $\ell$, calculamos a probabilidade de seu centro cair dentro de um quadrado menor com lado $\ell - 2r$ (tiramos uma “borda” de tamanho $r$ dos lados do quadrado). Essa probabilidade é igual a $\left(\frac{\ell-2r}{\ell}\right)^2$.

Na Esmeralândia, as moedas são retangulares. Qual é a probabilidade de uma moeda de lados $3$ e $4$ cair totalmente de um ladrilho formado por retângulos de lados $10$ e $20$?

A) Menos de $0{,}375$

B) Exatamente $0{,}375$

C) Mais de $0{,}375$ e menos de $0{,}595$

D) Exatamente $0{,}595$

E) Mais de $0{,}595$

**Lógica**

(PROVA 2012- QUESTÃO 1)- Quantas vogais têm a resposta correta desse problema? Não conte a letra A ou E das alternativas A e E.

A) Seis B) Cinco C) Quatro D) Três E) Duas

(PROVA 2013- QUESTÃO 1)- Os algarismos desse ano, 2013 são 0, 1, 2 e 3, obviamente não nessa ordem. Daqui a quantos anos ocorrerá o próximo ano cujos algarismos serão 0, 1, 2 e 3 novamente?

A) 2 B) 9 C) 18 D) 90 E) 1800

(PROVA 2016- QUESTÃO 1)- Lena quer completar as casas do tabuleiro 3 X 3 ao lado, usando as mesmas letras já escritas, de modo que casas vizinhas (casas com o lado comum) não tenham a mesma letra. Que letra poderá ser escrita na casa cinzenta?

A) somente O

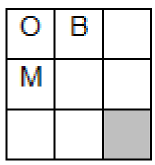
B) somente B

C) somente M

D) somente O ou M

E) qualquer uma

**Figura 07** – letras O, B e M




**Fonte:** OBM.

(PROVA 2014- QUESTÃO 2)- Roraima Jonas, um arqueólogo aventureiro, ao fugir de uma caverna se depara com quatro portas, numeradas de 1 até 4, e quatro mensagens. As mensagens dizem:

Mensagem 1: *“As portas* 1 *e* 2 *são seguras.”*

Mensagem 2: *“Exatamente duas entre as portas* 1, 2 *e* 3 *são seguras.”*

Mensagem 3: *“A porta* 1 *é segura.”*

Mensagem 4: *“A porta* 3 *é segura.”*

Roraima Jones é um estudioso e, por isso, sabe que exatamente uma das mensagens é mentira e exatamente uma das portas não é segura (ativaria uma armadilha). Qual porta Roraima Jonas pode garantir que é segura?

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) não há porta que Roraima pode garantir que é segura.

(PROVA 2015- QUESTÃO 2)- Fabiana tem 55 cubos de mesmo tamanho, sendo 10 deles vermelhos, 15 azuis e 30 verdes. Ela quer construir uma torre empilhando esses cubos de modo que dois cubos vizinhos tenham cores diferentes. No máximo, quantos cubinhos ela poderá empilhar?

A) 39 B) 51 C) 52 D) 54 E) 55

(PROVA 2014- QUESTÃO 3)- Quantas alternativas contêm uma palavra com mais letras que a palavra na alternativa correta?

A) Duas B) Três C) Quatro D) Cinco E) Seis

(PROVA 2015- QUESTÃO 4)- Qual é a soma dos quadrados das quantidades de vogais e consoantes da resposta correta? Não conte as letras A, B, C, D, E das alternativas.

A) Vinte e seis

B) Setenta e três

C) Oitenta e cinco

D) Noventa e sete

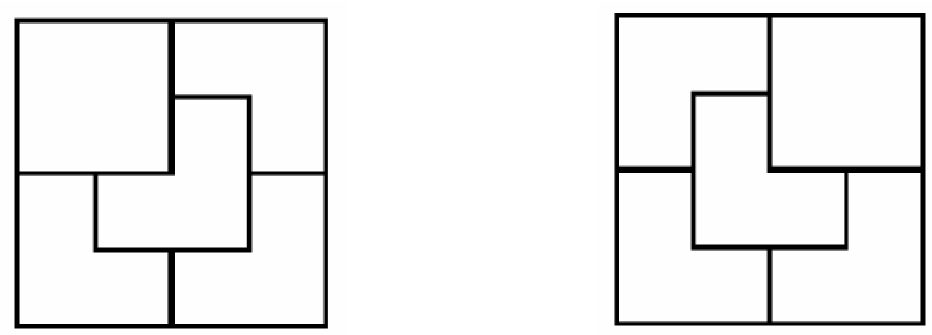
E) Cento e dezesseis

(PROVA 2016- QUESTÃO 5)- Num país imaginário vivem somente duas espécies de pessoas: os honestos, que sempre dizem a verdade e os mentirosos, que só dizem mentira. Numa fila de 2016 pessoas da ilha, o primeiro da fila diz que todos atrás dele são mentirosos e todas as demais pessoas da fila dizem que a pessoa imediatamente à sua frente é mentirosa. Quantas pessoas mentirosas estão nessa fila?

A) nenhuma B) 1007 C) 1008 D) 2015 E) todas

(PROVA 2012- QUESTÃO 7)- De quantas maneiras podemos cobrir um tabuleiro 4 × 4 com um quadrado de lado 2 e quatro peças idênticas no formato de L que ocupam três casinhas do tabuleiro? O tabuleiro não pode ser rotacionado, ou seja, as duas possibilidades a seguir devem ser consideradas distintas:

**Figura 08** – tabuleiro 4 x 4



**Fonte:** OBM.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

(PROVA 2014- QUESTÃO 9)- Em uma calculadora muito simples não é possível apertar dois dígitos sem apertar algumas das operações $+$, $-$, $\times$ ou $\div$ entre as apertadas dos dígitos. Ao apertar o dígito a calculadora faz a operação imediatamente. A calculadora começa com o 0 no visor e a primeira apertada tem que ser uma operação. Ou seja, primeiro se aperta uma operação, depois um dígito, depois uma operação, e assim por diante. Por exemplo, um jeito para aparecer 29 no visor é apertar $\boxed{+}$ e depois $\boxed{7}$, fazendo aparecer $0 + 7 = 7$ no visor; em seguida, apertar $\boxed{\times}$ e $\boxed{5}$, passando a ter $7 \times 5 = 35$ no visor, e concluir apertando $\boxed{-}$ e $\boxed{6}$ tendo como resultado $35 - 6 = 29$. Assim, é possível obter 29 com 6 apertadas de botão. Pedro quer que apareça o número 100 no visor. Qual o número mínimo de apertadas, contando operações e dígitos, que Pedro tem que fazer na calculadora?

A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

(PROVA 2016- QUESTÃO 9)- Um colar é constituído por dois tipos de pérolas: as brancas e as pretas. Ele está aberto e disposto em uma mesa formando uma linha de pérolas consecutivas. Duas sequências de três pérolas consecutivas são equivalentes se elas possuem exatamente as mesmas pérolas dispostas na mesma ordem ou em ordem inversa. Por exemplo, se P e B indicam as cores das pérolas pretas e brancas, respectivamente, a sequência PBBP contém duas sequências de três pérolas equivalentes: as primeiras três, com a combinação PBB; e as últimas três, com a combinação BBP. Qual a quantidade mínima de pérolas que o colar deve possuir para termos certeza de que existem duas sequências equivalentes independentemente de como elas estejam distribuídas?

A) 6

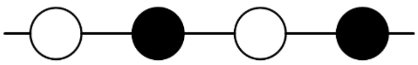
B) 7

C) 8

D) 9

E) 10

**Figura 09** – pérolas brancas e pretas



**Fonte:** OBM.

(PROVA 2015- QUESTÃO 10)- Jonas gosta de observar os relógios digitais espalhados por sua cidade que informam a hora e a data. Por coincidência ele viu que hoje é dia $12/06$ e naquele momento marcava $12:06$, ou seja, data e hora são formados com os mesmos números! Ele ficou encucado com a coincidência e chamou o momento (data e hora) de *encucado*. Ele pensou que também seria interessante se a hora fosse formada com os mesmos números mas na ordem trocada, por exemplo, no dia $21/06$ às $06:21$, então chamou esse momento de *encucado reverso.* Considerando que $2015$ não é um ano bissexto, desde $01/01/2015$ às $00:00$ até $31/12/2015$ às $23:59$ quantos momentos são encucados ou encucados reversos?

A) 365

B) 455

C) 465

D) 629

E) 699

(PROVA 2015- QUESTÃO 15)- Um conjunto finito $A$ de números reais é *parfeito* quando tem pelo menos dois elementos e $\{ab \mid a, b \in A \text{ e } a \neq b\} = A$, ou seja, o conjunto obtido multiplicando-se todos os pares de números distintos de $A$ é o próprio $A$. Por exemplo, $\left\{1,2,\frac{1}{2}\right\}$ é parfeito pois $\left\{1 \cdot 2, 1 \cdot \frac{1}{2}, 2 \cdot \frac{1}{2}\right\} = \left\{2, \frac{1}{2}, 1\right\}$, mas $\{1,2,3\} \neq \{1 \cdot 2, 1 \cdot 3, 2 \cdot 3\}$ não é parfeito. Quantos elementos pode ter um conjunto parfeito?

A) Somente 3 ou 4

B) Qualquer quantidade congruente a 3 ou 4 módulo 4

C) Qualquer quantidade ímpar

D) Qualquer quantidade prima ímpar

E) Qualquer quantidade maior do que 2

(PROVA 2014- QUESTÃO 23)- Um caminhão tanque estava cheio de água, mas começou a vazar. Suponha que o consumo de combustível do caminhão seja diretamente proporcional ao peso que carrega e que a vazão da água e a velodidade do caminhão sejam constantes. Após percorrer $200$ km, o caminhão estava com metade da capacidade de água e gastou meio tanque de combustível. Se estivesse vazio, o caminhão gastaria, se percorresse a mesma distância nas mesmas condições, um sexto de tanque. Que fração do tanque ele gastaria se não houvesse o vazamento? Despreze a influência do peso do tanque no consumo de gasolina.

A) $\frac{11}{18}$

B) $\frac{5}{9}$

C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{3}{4}$

E) $\frac{4}{5}$

**Geometria**

(PROVA 2015- QUESTÃO 3)- NA figura, os quadrados ABGH e CDEF têm lados de medidas 4cm e 6cm, respectivamente. O ponto P pertence à reta contendo os pontos B, C, G, e F, sendo C o ponto médio do lado BG. A semirreta AP divide a figura formada pelos dois quadrados em duas regiões, uma branca e uma cinza. Para que essas duas regiões tenham áreas iguais, qual deve ser o valor de x = CP?

A) $\frac{2}{5}$

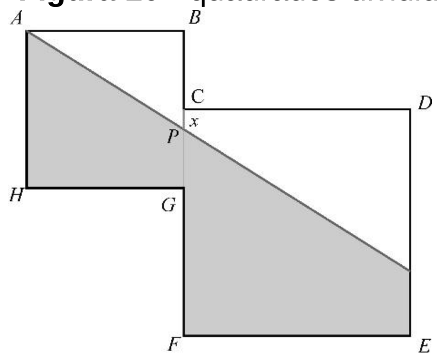
B) $\frac{18}{25}$

C)1

D) $\frac{26}{25}$

E) $\frac{3}{2}$

**Figura 10 -** quadrados divididos




**Fonte:** OBM.

(PROVA 2016- QUESTÃO 3)- A área de um quadrado é um número inteiro de metros quadrados e é igual à área de um retângulo de lados inteiros cujo perímetro é 58 metros. Qual é a medida do lado do quadrado em metros?

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

(PROVA 2012- QUESTÃO 4)- Os lados *AB* e *DC* do paralelogramo *ABCD* foram divididos em 4 segmentos iguais. Os lados *AD* e *BC* foram divididos em 3 segmentos iguais. Os pontos de divisão foram conectados como indica a figura abaixo. Se a área de *ABCD* é 84, determine a área sombreada.

**Figura 11** – paralelogramo dividido

A)1

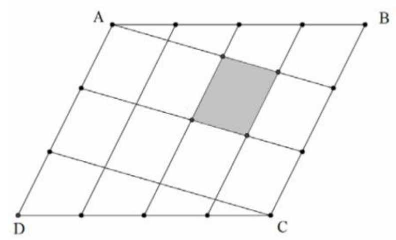
B) 3

C) 4

D) 7

E)12

.




**Fonte:** OBM.

(PROVA 2014- QUESTÃO 4)- Considere um quadrado $ABCD$ de lado 1. Externamente ao quadrado, são formados os triângulos equiláteros $ABE$, $BCF$, $CDG$ e $DAH$. Qual a área do quadrilátero $EFGH$?

A) 2 B) $2\sqrt{3}$ C) $2+\sqrt{3}$ D) 3 E) $6$

(PROVA 2016- QUESTÃO 4)- Considere uma pirâmide $P$ cuja base é um polígono regular de 2016 lados. Apesar de sua base ser um polígono regular, a pirâmide $P$ não é regular, pois a projeção do seu vértice sobre o plano da base não coincide com o centro da base. No mínimo quantas faces laterais não congruentes duas a duas $P$ tem?

A) 672 B) 1008 C) 1009 D) 1010 E) 2016

(PROVA 2015- QUESTÃO 6)- Um triângulo tem lados inteiros distintos, o maior deles medindo $2015$. Quais são as medidas dos dois outros lados se a área do triângulo é a menor possível?

A) $2$ e $2014$

B) $3$ e $2013$

C) $1006$ e $1010$

D) $1007$ e $1009$

E)$1008$ e $1009$

(PROVA 2013- QUESTÃO 7)- Seja *ABC* um triângulo retângulo em *A*. Seja $D$ o ponto médio de *AC*. Sabendo que $BD=3DC$ e que $AC=2$, a hipotenusa do triângulo é:

A) $\sqrt{7}$

B) $2\sqrt{2}$

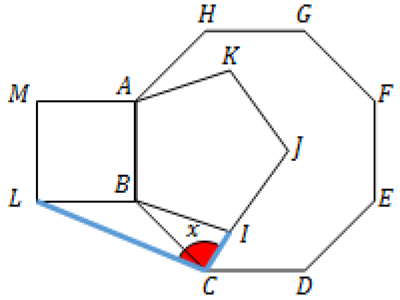
C) 3

D) $\sqrt{10}$

E) $2\sqrt{3}$

(PROVA 2016- QUESTÃO 8)- Na figura a seguir sabe-se que $ABCDEFGH$ é um octógono regular, $ABIJK$ é um pentágono regular e $ABLM$ é um quadrado. Determine a medida em graus do ângulo $\angle LCI$ representado na figura pela letra $x$.

**Figura 12** - polígonos regulares




**Fonte:** OBM.

A) $81°$ B) $90°$ C) $92°$ D) $99°$ E) $102°$

(PROVA 2012- QUESTÃO 9)- Seja *ABCD* um quadrilátero convexo tal que *AB* = *BC* = *CD* = 1 e $m(A\hat{B}D) = m(A\hat{C}B)$ . Sabendo que as medidas, em graus, dos ângulos $A\hat{B}D$ e $A\hat{C}D$ são inteiras, determine quantos quadriláteros *ABCD* podem ser construídos satisfazendo as condições acima.

A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

Texto para os problemas 10 e 11.

Em uma circunferência de raio 1 estão inscritos um hexágono regular $ABCDEF$ e um quadrado $AXDY$. O segmento $BF$ intersecta os lados $AX$ e $AY$ do quadrado nos pontos $R$ e $S$, respectivamente. A reta $BD$ intersecta as retas $AX$ e $AY$ em $T$ e $U$, respectivamente.

(PROVA 2016- QUESTÃO 10)- A distância $RS$ é

A) $1$ B) $\sqrt{3}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(PROVA 2016- QUESTÃO 11)- A distância $TU$ é

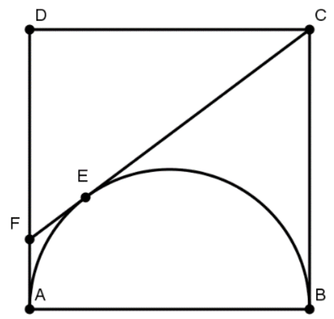
A) $3$ B) $\sqrt{10}$ C) $2\sqrt{3}$ D) $2 + \sqrt{3}$ E) $4$

(PROVA 2013- QUESTÃO 11)- Considere cinco pontos no plano. Qual é a quantidade máxima de triângulos equiláteros com vértices em três desses cinco pontos?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

(PROVA 2015- QUESTÃO 11)- No desenho abaixo, o segmento *CF* é tangente ao semicírculo de diâmetro *AB*. Se *ABCD* é um quadrado de lado 4, determine o comprimento de *CF*.

**Figura 13** - tangente a um semicírculo

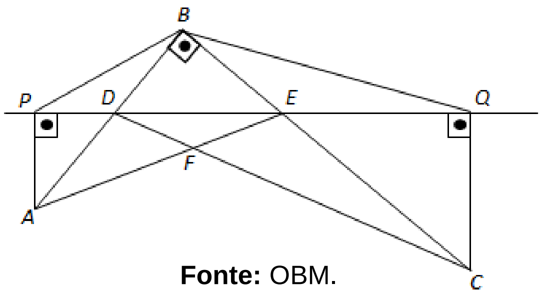



**Fonte:** OBM.

A) 9/2 B) 5 C) 11/2 D) 23/4 E) 6

(PROVA 2012- QUESTÃO 12)- Na figura a seguir, o ângulo $A\hat{B}C$ é reto; a reta *r* corta os segmentos *AB* e *BC* em *D* e *E*, respectivamente; as retas *CD* e *AE* se cortam em *F*; *P* e *Q* são as projeções ortogonais de *A* e *C* sobre a reta *r*, respectivamente.

**Figura 14** - ângulos




**Fonte:** OBM.

Sendo o ângulo entre as retas *CD* e *AE* igual a $m(A\hat{F}D) = 40^\circ$, a medida de $P\hat{B}Q$, em graus, é

A) 110

B) 120

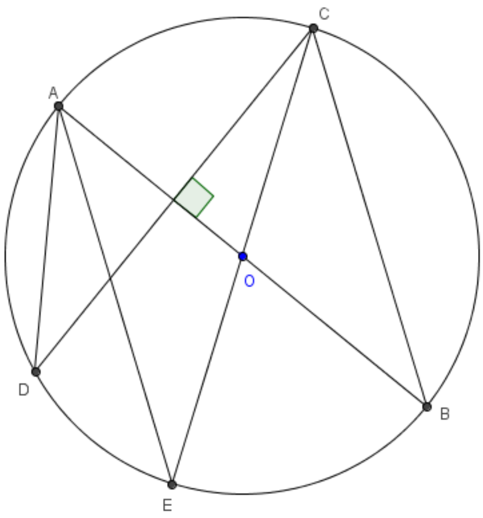
C) 130

D) 140

E) 160

(PROVA 2013- QUESTÃO 12)- Na figura abaixo o ponto *O* é o centro da circunferência que passa pelos pontos *A*, *B*, *C*, *D* e *E*. Sabendo que o diâmetro *AB* e a corda *CD* são perpendiculares e que $\angle BCE = 35^{\circ}$ o valor em graus do ângulo $\angle DAE$ é:

**Figura 15** - ângulos inscritos




**Fonte:** OBM.

A) 35º B) 10º C) 20º D) 30º E) 55º

(PROVA 2015- QUESTÃO 12)- No triângulo $ABC$, $AB = 2$, $BC = \sqrt{2}$. Seja *M* o ponto médio do lado *AB*. Se $m(B\hat{A}C) = \alpha$ e $m(B\hat{M}C) = \beta$ e $m(M\hat{B}C) = \gamma$, então:

A) $\alpha + \beta = \gamma$

B) $\alpha + \beta = 2\gamma$

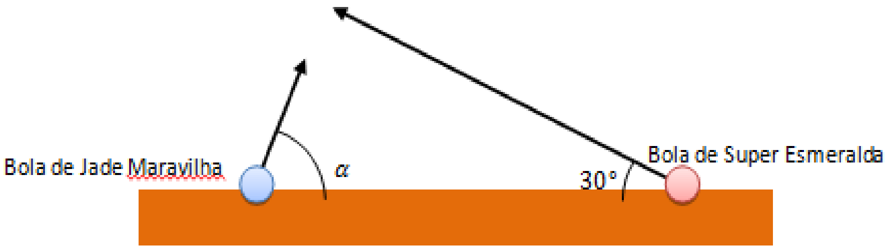
C) $\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}$

D) $\alpha + \beta = 90^{\circ}$

E) $\alpha + \beta = 45^{\circ}$

(PROVA 2013- QUESTÃO 13)- Super Esmeralda e Jade Maravilha estão jogando bilhar. Super Esmeralda dá uma tacada em uma bola com velocidade de $60$ km/h, com um ângulo de $30°$ com uma das tabelas. Jade Maravilha deve acertar a bola de Super Esmeralda com outra bola. As duas bolas partem da tabela da mesa simultaneamente, e estão a uma distância de 50 cm. Jade Maravilha pode escolher qualquer ângulo para dar a sua tacada.

**Figura 16** - tacadas e bolas




**Fonte:** OBM.

Qual é a velocidade mínima com que Jade Maravilha pode dar sua tacada?

A) $15$ km/h

B) $30$ km/h

C) $30\sqrt{2}$ km/h

D) $30\sqrt{3}$ km/h

E) $60$ km/h

(PROVA 2014- QUESTÃO 13)- Considere a figura ao lado, onde os pontos *A* até *I* estão sobre uma circunferência, sabe-se que os triângulos ABC e GHI são isósceles, que AB , CD , FG e HI são segmentos paralelos. Qual a medida do ângulo x em graus?

**Figura 17** - segmentos paralelos na circunferência

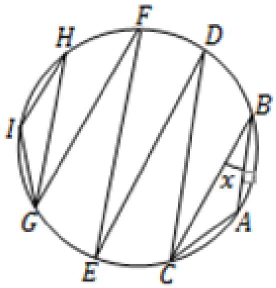
A) $15°$

B) $20°$

C) $30°$

D) $40°$

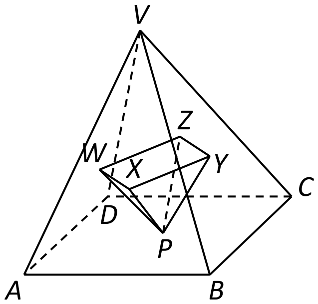
E) $45°$




**Fonte:** OBM.

(PROVA 2012- QUESTÃO 14)- Considere uma pirâmide *VABCD* de base quadrada. Seja *P* o centro da base *ABCD* e *X*, *Y*, *Z* e *W* pontos sobre as faces laterais tais que *PXYWZ* é uma pirâmide semelhante a *VABCD*, com as diagonais da base *XZ* e *YW* paralelos a *BC* e *CD*, respectivamente.

**Figura 18** – pirâmide de base quadrada




**Fonte:** OBM.

A razão de semelhança entre as duas pirâmides é

A) $1:\left(\sqrt{2}+1\right)$

B) 1:3

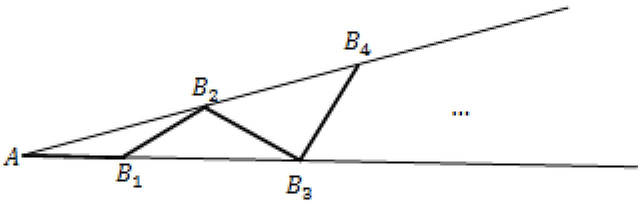
C) 1:2

D) $1:\sqrt{2}$

E) $1:\left(2\sqrt{2}+3\right)$

(PROVA 2013- QUESTÃO 16)- Na figura a seguir, $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \cdots = B_{n-1}B_n$. Os pontos $B_1, B_3, B_5, \ldots$ pertencem a uma reta e os pontos $B_2, B_4, B_6, \ldots$ pertencem a outra reta. Todos os pontos $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$ são distintos.

**Figura 19** - ângulos com vértices em retas




**Fonte:** OBM.

Sabendo que o ângulo $B_1\hat{A}B_2$ mede $1°$, qual é o maior valor possível de $n$?

A) 6

B) 7

C) 10

D) 90

E) $n$ pode ser arbitrariamente grande

(PROVA 2014- QUESTÃO 16)- No triângulo $ABC$, $AC = 5$ e $AB = 6$. Seja $P$ um ponto sobre a bissetriz interna do ângulo $B\hat{A}C$. Se a área de $APB$ é $\frac{3}{2}$, a área de $APC$ é:

A) $\frac{5}{4}$ B) $\frac{9}{5}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ E) $\frac{4}{5}$

(PROVA 2016- QUESTÃO 16)- Em um jogo de videogame, um personagem, o OBMario, se desloca em uma tela de medidas $3$ e $4$; quando ele chega no limite da tela, ele reaparece no lado oposto (se sai pela esquerda, volta à direita, à mesma altura, e vice-versa; se sai por cima, volta por baixo, à mesma distância do lado esquerdo da tela, e vice-versa). Chamamos o menor trajeto de OBMario entre dois pontos de *distância de videogame*. Qual é a maior distância de videogame possível entre dois pontos da tela?

A) 2 B) 2,5 C) 3 D) 4 E) 5

(PROVA 2015- QUESTÃO 17)- Em cada ponto do plano cartesiano com ambas as coordenadas inteiras, construímos círculos de raio $r$. O menor valor de $r$ para o qual qualquer circunferência de raio $1$ (com centro de coordenadas reais quaisquer) corte algum dos círculos de raio $r$ é:

A) $\frac{\sqrt{5}}{2} - 1$

B) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$

C) $\sqrt{2} - 1$

D) $\frac{1}{2}$

E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(PROVA 2013- QUESTÃO 21)- No trapézio $ABCD$, com $AB$ paralelo a $CD$, o ângulo $B\hat{A}D$ mede $82°$ e o ângulo $A\hat{B}C$ mede $74°$. Suponha que exista um ponto $P$ sobre o lado $CD$ tal que $AD + DP = PC + CB = AB$. Quanto mede o ângulo $A\hat{P}B$?

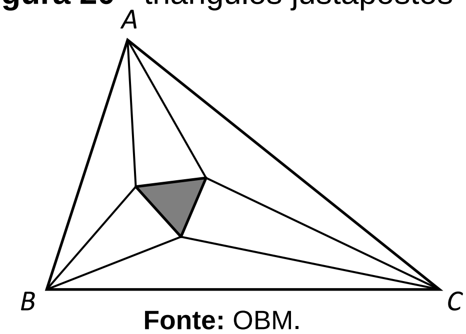
A) 76º B) 77º C) 78º D) 79º E) 80º

(PROVA 2014- QUESTÃO 21)- Uma esfera de raio $1$ tem como equador a base de um cone e passa pelos pontos médios de suas geratrizes. Qual é a altura do cone?

A) $1$ B) $\sqrt{1,5}$ C) $\sqrt{2}$ D) $\sqrt{3}$ E) $2$

(PROVA 2012- QUESTÃO 22)- O *teorema de Morley* diz que, ao traçarmos as retas que dividem cada ângulo interno de um triângulo *ABC* em três ângulos iguais, obtemos um triângulo equilátero chamado *triângulo de Morley de ABC*, como o que está destacado na figura a seguir:

**Figura 20** - triângulos justapostos




**Fonte:** OBM.

Qual é a medida do lado do triângulo de Morley de um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem 2?

A) $2\sqrt{2} - \sqrt{6}$

B) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

C) $\sqrt{6} - 2$

D) $2 - \sqrt{3}$

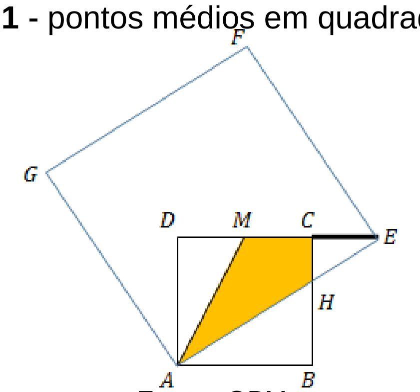
E) $2\sqrt{3} - \sqrt{6}$

(PROVA 2015- QUESTÃO 22) - Dados cinco pontos no plano, sem três deles colineares, no mínimo quantos dos ângulos determinados por três desses cinco pontos são obtusos (ou seja, medem mais do que $90°$)?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

(PROVA 2016- QUESTÃO 22)- Na figura abaixo, $AEFG$ e $ABCD$ são quadrados e o ponto $E$ está na reta $CD$. Além disso, $M$ é o ponto médio do segmento $CD$ e $C$ é o ponto médio do segmento $ME$. Sabendo que o quadrado $ABCD$ possui lado $6$, determine a razão entre as áreas do quadrilátero $CHAM$ e do quadrado $AEFG$. [

**Figura 21** - pontos médios em quadrados




**Fonte:** OBM.

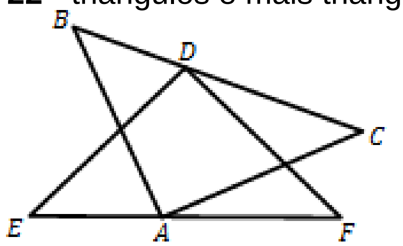
A) $\frac{5}{39}$ B) $\frac{5}{27}$ C) $\frac{3}{8}$ D) $\frac{3}{13}$ E) $\frac{2}{13}$

(PROVA 2015- QUESTÃO 23)- No triângulo $ABC$, $AB = 40$, $AC = 42$ e $BC = 58$. As bissetrizes internas de $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ cortam novamente a circunferência circunscrita de $ABC$ em $K$, $L$ e $M$, respectivamente. As retas tangentes à circunferência circunscrita de $ABC$ que passam por $K$, $L$ e $M$ determinam um triângulo cujo menor lado é:

A) $\frac{290}{3}$ B) $58$ C) $145$ D) $\frac{145}{2}$ E) $\frac{2900}{17}$

(PROVA 2014- QUESTÃO 24)- Na figura, $ABC$ e $DEF$ são triângulos retângulos isósceles com hipotenusas $BC$ e $EF$ medindo $15$, $D$ está sobre a reta $BC$ e $A$ está sobre a reta $EF$. O ângulo agudo entre as retas $BC$ e $EF$ é $30°$.

**Figura 22** - triângulos e mais triângulos




**Fonte:** OBM.

O segmento $AD$ mede:

A) $\frac{15\sqrt{2}}{2}$

B) $\frac{15(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$

C) $\frac{15\sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{15\sqrt{6}}{2}$

E) $15$

(PROVA 2013- QUESTÃO 25)- Oito dos vértices de um dodecaedro regular de aresta 1 são vértices de um cubo. Qual é o volume desse cubo?

A) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ D) $1+\sqrt{5}$ E) $2+\sqrt{5}$

(PROVA 2016- QUESTÃO 25)- No quadrilátero convexo $ABCD$, $m(B\hat{A}D) = m(B\hat{C}D) = 60°$ e $BC \perp BD$. A razão entre a distância de $C$ ao circuncentro de $ABD$ e a medida do segmento de reta $CD$ é

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $1$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A importância deste trabalho está em servir como ferramenta para os professores, especialmente da rede pública. O objetivo é facilitar a organização de grupos de estudos com a finalidade de preparar os estudantes para a olimpíada de matemática. Meu interesse partiu do desejo de compilar um material de apoio para fornecer um panorama para quem quer competir e/ou ajudar competidores nessa disputa. As escolas precisam entender e utilizar de forma mais proveitosa as possibilidades que as olimpíadas vem demonstrando ao longo dos anos.

A OBMEP se estabeleceu como a maior competição de matemática do Brasil. Muitos estudiosos têm reconhecido esse incentivo como essencial na aprendizagem de uma matéria vista como um vilão pela maioria das pessoas. Os alunos, muitas vezes, temem problemas de matemática, sentindo-se intimidados. Isso atrapalha a aplicação do que aprenderam até mesmo nos problemas mais simples. O medo acaba reforçando a ideia de que os problemas são assustadores e difíceis.

Algumas estratégias devem ser adotadas para ajudar os estudantes a superar sua ansiedade e motivá-los a explorar problemas de matemática, em vez de temê-los. Um método de trabalho seria implantar um programa de resolução de problemas no qual os estudantes resolvam apenas um problema por dia, criando uma rotina que deixará o aluno mais próximo da matéria. Em vez de aplicar quatro ou cinco problemas por vez, um único problema pode ser discutido para se chegar a uma solução.

As sessões de resolução de problemas devem ser curtas no início, não mais de 10 a 15 minutos por dia. À medida que os alunos começam a aproveitar essas sessões, ocasionalmente se incluem problemas mais longos que requerem mais persistência e dedicação. O professor deve referir-se aos problemas de matemática usando termos como "desafios", "mistérios" ou "curiosidades". Apresentá-los como desafios divertidos ao invés de problemas de matemática temidos podem estimular muitos estudantes.

Estratégias alternativas de aprendizagem cooperativa adicionam um elemento de diversão e estimulam o pensamento em grupo. No entanto, mesmo quando se permite que os alunos trabalhem uns com os outros, dê tempo para que leiam e pensem sobre o problema de forma independente antes de discutir isso com um parceiro ou equipe.

Ocasionalmente, combine a resolução de problemas com uma atividade de movimento de classe para energizar seus alunos e estimular o pensamento criativo. Peça aos alunos que resolvam problemas de matemática na lousa. Isso facilitará a eliminação de erros e permite ao docente ver seu trabalho ao caminhar pela sala, monitorando a aprendizagem e prestando assistência a quem necessita.

Depois que o primeiro aluno mostrar como resolver o problema, pergunte ao grupo: "De quantas outras maneiras podemos resolver esse problema?" Observe todas as diferentes estratégias e valorize a apresentação de boas soluções. Essa atitude motiva os estudantes a prestar atenção durante a discussão, incentiva a criatividade e a socialização do conhecimento entre os alunos. Eles rapidamente percebem que, se quiserem ser chamados para compartilhar sua estratégia, eles terão que criar novos métodos para resolver problemas.

Cabe ao professor estimular o potencial individual e o potencial do grupo, promovendo o espírito de equipe. A maioria dos estudantes apresenta ansiedade e nervosismo em testes de matemática. É normal. De fato, estudos mostram que se deve estar um pouco ansioso antes e durante os testes, porque isso ajuda o aluno a melhorar. Um pouco de ansiedade é uma coisa boa. O problema é quando a ansiedade fica tão alta que impede um bom desempenho.

Um competidor preparado e que não veja a matemática como um obstáculo, mas sim como um meio para evoluir e garantir um bom futuro pode ser a solução para os problemas que a vida apresenta, sejam eles com números ou sem. Professores e alunos devem ter em mente que mais importante que as premiações em competições, o que tem realmente valor é a dedicação aos estudos, perceber que seus esforços os levaram a outro patamar de conhecimento e capacidade criativa.

## REFERÊNCIAS

ALVES, Washington José Santos. **O impacto da olimpíada de matemática em alunos da escola pública,** Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2010, 91 p.

ASSUNÇÃO, Fernando Cosme Rizzo. **Avaliação do impacto da Olimpiada Brasileira de Matematica nas escolas publicas – OBMEP 2010.** Brasilia: Centro de Gestao em Estudos Estrategicos, 2011, 100 p.

BRAGANÇA, Bruno**. Olimpíada de matemática para a matemática avançar,** Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Viçosa, 2013, 106 p.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC / SEF, 1998.

NETO, Antônio Caminha Munis. **Tópicos de Matemática Elementar – 1º ao 6º**. Editora SBM, 2016, 237 p.

MORGADO, Augusto César de Oliveira. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. Editora SBM, 2016, 326 p.

DMITRY, Fomin. **Leningrad Mathematical Olympiads 1987 – 1991**. Editora MathPro Press, 1994, 197 p.

ENGEL, Arthur. **Problem-Solving Strategies**. Editora Springer, 1998, 403 p.

CHAPUT, Frère Ignace. **Elementos da Geometria**. F. Briguiet & Cia., Editores. Rio de Janeiro, 1960, 584 p.

GOES, Cicero Rufino de. **Desenvolvendo e aplicando a matemática: um projeto para produzir vencedores na OBMEP e elevar os indicadores sociais do município de Branquinha-AL**, Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Alagoas, 2017, 79 p.

KLAMKIN, Murray Seymour. **International Mathematical Olympiads, 1978 – 1985 and forty supplementary**. Editora MMA, 1986, 154 p.

LIMA, Elon. Lages. **Análise Real**. Editora IMPA, 2016, 198 p.

__________. **Meu professor de Matemática e outras histórias**. Editora SBM, 2012, 206 p.

__________. **Isometrias**. Editora SBM, 2007, 94 p.

LIMA, Elon. Lages. et al. **A Matemática do Ensino Médio – Volumes I, II e III**. Editora SBM, 2016.

LOZANKY, Edward e ROUSSEAU, Cecil. **Winning Solutions**. Editora Springer, 1986, 260 p.

MARTINEZ, Fabio Brochero. et al. **Teoria dos números – um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro**. Editora IMPA, 2015, 450 p.

MEGA, Élio. e WATANABE, Renate. **Olimpíadas Brasileiras de Matemática - 1ª a 8ª**. Editora SBM, 2010, 245 p.

MOREIRA, Carlos Gustavo. e SALDANHA, Nicolau. **Primos de Mersenne (e outros primos muito grandes).** Editora IMPA, 1999, 79 p.

MOREIRA, Carlos Gustavo. et al. **Olimpíadas Brasileiras de Matemática - 9ª a 16ª**. Editora SBM, 2009, 172 p.

MOREIRA, Carlos Gustavo. et al. **Olimpíadas Brasileiras de Matemática - 17ª a 24ª**. Editora SBM, 2009.

SANTOS, José. Plínio de Oliveira. **Introdução à Teoria dos Números**. Editora IMPA, 2015, 196 p.

OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins e FERNÁNDEZ, Adán José Corcho. **Iniciação à Matemática, um curso com Problemas e soluções**. Editora SBM, 2012, 283 p.

PAIVA, Max. et al. **Olimpíadas Cearenses de Matemática , Nível Médio 1981 – 2005**. Editora SBM, 2014, 330 p.

PARANÁ, Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática. Paraná, PR: Secretaria de Estado da Educação do Paraná, 2008.

SÃO PAULO. Secretaria de Educação. Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias / Secretaria de Educação; coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado. – 1. Ed. Atual. – São Paulo/; SE, 2012, 72 p.

SHINE, Carlos Yuzo. **21 Aulas de Matemática Olímpica**. Editora SBM, 2009, 280 p.

__________. **Thirty Years of Brasilian Math Olympiads.** (organizer) Associação AOBM, 2009, v.1, 150p.

VICTOR, Carlos Alberto da Silva**. Olimpíada de Matemática: que preciosidades matemáticas envolvem os problemas desta competição e qual o seu impacto para o professor de matemática sem experiência em olimpíadas e a sua importância para o estudante?**, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, 2013, 95 p.

WAGNER, Eduardo. e CARNEIRO, José Paulo. **Construções Geométricas**. Editora SBM, 2007, 110 p.