Universidade Estadual de Londrina

JEFERSON TAKEO PADOAN SEKI

MODELAGEM MATEMÁTICA, COMPREENSÃO E LINGUAGEM:

INTERLOCUÇÕES FUNDAMENTADAS NA FILOSOFIA DE WITTGENSTEIN

Londrina
2019

JEFERSON TAKEO PADOAN SEKI

MODELAGEM MATEMÁTICA, COMPREENSÃO E LINGUAGEM:

INTERLOCUÇÕES FUNDAMENTADAS NA FILOSOFIA DE WITTGENSTEIN

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida.

Londrina
2019

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Seki, Jeferson Takeo Padoan.
MODELAGEM MATEMÁTICA, COMPREENSÃO E LINGUAGEM : INTERLOCUÇÕES FUNDAMENTADAS NA FILOSOFIA DE WITTGENSTEIN / Jeferson Takeo Padoan Seki. - Londrina, 2019.
150 f.

Orientador: Lourdes Maria Werle de Almeida.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2019.
Inclui bibliografia.

1. Modelagem Matemática - Tese. 2. Compreensão - Tese. 3. Matemática Financeira - Tese. 4. Wittgenstein - Tese. I. Almeida, Lourdes Maria Werle de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

JEFERSON TAKEO PADOAN SEKI

MODELAGEM MATEMÁTICA, COMPREENSÃO E LINGUAGEM:
INTERLOCUÇÕES FUNDAMENTADAS NA FILOSOFIA DE WITTGENSTEIN

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Profª. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Profª. Dra. Bárbara Nivalda Palharini Alvim Sousa
Universidade Estadual do Norte do Paraná - UENP

Profª. Dra. Regina Célia Guapo Pasquini
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 25 de Fevereiro de 2019.

Aos meus pais, por todo amor, dedicação e carinho ao longo de minha formação.

A todos que em mim acreditaram e me fizeram acreditar que era possível.

AGRADECIMENTOS

À minha família, que sempre esteve ao meu lado nos momentos de alegria, dificuldade e tristeza, me apoiando em minhas decisões e escolhas nessa jornada. Aos meus avós, tios e primos, que me acompanharam nas etapas da minha vida até aqui. A minha vô Maria, que a sua maneira simples e humilde de viver é a mulher mais forte que conheço. Aos meus pais, que me ensinaram e ainda me ensinam o verdadeiro sentido do amor, vocês são meus exemplos de vida. A minha irmã, que você continue sendo essa pessoa inteligente, autêntica e corra atrás dos seus sonhos.

Ao amigos que a vida, pesquisa e graduação me trouxeram, pelos conselhos, companheirismo, atenção, críticas e confiança nos momentos felizes e díficeis ao longo dessa jornada. Sem vocês a realização desse sonho não seria possível. Em especial, agradeço ao Ariel e Bianca, amigos que compartilham do mesmo sonho. Ariel, por todos os momentos que convivemos desde a graduação, que você possa acreditar em si mesmo e fazer acontecer o que projetou para sua vida. Bianca, irmã de orientação, por todas as frustações, alegrias, conversas e momentos de trabalho que compartilhamos no decorrer destes dois anos de mestrado, obrigado por fazer parte da minha vida.

À minha orientadora Lourdes Maria Werle de Almeida, pela oportunidade de aprendizagem que me ofereceu, pela paciência, correções, ensinamentos e pela confiança em mim depositada. Suas palavras me inspiram e me fazem acreditar na Educação Matemática e a buscar ser um professor melhor.

Aos amigos do GRUPEMMAT, pelo apoio, conversas e discussões. Neste grupo, conheci pessoas que para mim são exemplos de profissionais e de seres humanos. Com vocês, aprendi coisas que vou levar para o resto da minha vida. Ariel, Ademir, Adriana, Ana Paula, Bárbara, Bianca, Camila, Cíntia, Dirceu, Élida, Daiany, Emerson, Gustavo, Henrique, Karina, Letícia, Tânia Camila, Thiago e Lourdes, vocês foram fundamentais para a realização dessa pesquisa.

As professoras Bárbara Nivalda Palharini e Regina Célia Guapo Pasquini pelas críticas e sugestões, que contribuíram para o aprimoramento deste trabalho.

À professora Cíntia Silva, por aceitar que eu realizasse parcialmente a coleta de dados da pesquisa em sua turma. Agradeço pelas sugestões e participação nesse processo.

Aos professores da minha graduação, que se tornaram companheiros de trabalho na UENP. Alguns de vocês são mais que meus ex-professores e colegas de trabalho. Em especial, não posso deixar de agradecer ao Rudolph dos Santos Gomes Pereira, por acreditar em mim quando nem eu acreditava, em você vejo um exemplo de ser humano, professor e profissional, sou eternamente grato por tudo que fez por mim. À professora Bárbara Nivalda Palharini, que sempre se dispôs a contribuir para o desenvolvimento de pesquisas e de ideias, me ouvindo em momentos de dúvidas e frustações e me criticando quando preciso, em você eu vejo uma pessoa, professora e profissional desafiadora, autêntica e responsável, obrigado por me fazer acreditar na Educação Matemática e em meus alunos.

Aos alunos, participantes dessa pesquisa, pela dedicação, pela disposição e por todos os momentos de aprendizagem. Vocês me incentivam a buscar ser cada dia mais um profissional melhor.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Queremos compreender algo que já está aberto diante de nossos olhos. Porque, em um certo sentido, é isto que parecemos não compreender.

Ludwig Wittgenstein

SEKI, Jeferson Takeo Padoan. **Modelagem matemática, compreensão e linguagem:** interlocuções fundamentadas na filosofia de Wittgenstein. 2019. 150 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.

RESUMO

Interlocuções entre Modelagem Matemática, compreensão e linguagem é o tema desta pesquisa. A articulação foi abordada a partir da questão geral de pesquisa: *como se dá a compreensão em atividades de modelagem matemática em uma disciplina de Matemática Financeira de um curso de Licenciatura em Matemática?*, com base na perspectiva filosófica de Ludwig Wittgenstein e na Modelagem Matemática na Educação Matemática. Os dados foram coletados mediante registros escritos, gravações em aúdio e vídeo, notas de campo, questionário e entrevista durante a pesquisa empírica desenvolvida em uma disciplina de Matemática Financeira. A análise dos dados foi realizada seguindo encaminhamentos e pressupostos da análise de conteúdo. Organizamos nossa pesquisa de acordo com o formato multipaper em três artigos com focos específicos, mas que visam detalhar a questão geral de pesquisa. No primeiro artigo, de natureza teórica, *investigamos a constituição de compreensão na filosofia da linguagem de Wittgenstein, especificamente na obra Investigações Filosóficas, e suas repercussões no Ensino.* Os resultados desse artigo delineam características da perspectiva wittgensteiniana de compreensão e sua manifestação em atividades de ensino. No segundo artigo, buscamos *investigar a compreensão dos alunos em atividades de modelagem matemática desenvolvidas em uma disciplina de Matemática Financeira de um curso de Licenciatura em Matemática*. Os resultados da análise dos dados neste artigo indicam três categorias emergentes: compreensão da situação-problema, compreensão de conceitos da Matemática Financeira e da Matemática e compreensão do fazer modelagem matemática. No terceiro artigo, *investigamos como os alunos compreendem conceitos de Matemática Financeira em diferentes tipos de atividades de modelagem matemática*. A partir da análise dos dados neste artigo, três categorias foram enunciadas: compreensão de conceitos da Matemática Financeira na modelagem descritiva, compreensão de conceitos da Matemática Financeira na modelagem prescritiva e modelagem matemática como possibilidade de integrar a Educação Financeira no ensino de Matemática Financeira. As interlocuções entre os resultados obtidos e a fundamentação teórica da pesquisa indicam que a compreensão dos alunos em atividades de modelagem matemática se dá no seguir regras de uso de expressões linguísticas da situação-problema e de conceitos da Matemática Financeira e da Matemática na dedução e análise dos modelos matemáticos; explicar procedimentos e conceitos envolvidos do desenvolvimento das atividades; dominar técnicas da Matemática Financeira e da Matemática e do fazer modelagem matemática, conforme as circunstâncias e as caracterizações das atividades de modelagem matemática; estabelecer inter-relações entre proposições características da situação-problema e proposições da Matemática Financeira, com objetivo de descrever ou prescrever os fenômenos sob investigação.

Palavras-chave: Educação Matemática. Modelagem Matemática. Matemática financeira. Compreensão. Linguagem. *Wittgenstein*.

SEKI, Jeferson Takeo Padoan. **Mathematical modelling, understanding e language:** interlocutions based on Wittgenstein's philosophy. 2019. 150 p. Dissertation (Masters in Teaching Science and Mathematics Education) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2019.

ABSTRACT

Interlocutions between Mathematical Modelling, understanding and language is the theme of this research. The articulation was approached from the general question of research: *how does the understanding in mathematical modelling activities in a Financial Mathematics subject of a Mathematics Degree course?*, based on the philosophical perspective of Ludwig Wittgenstein and Mathematical Modelling in Mathematics Education. The data were collected through written records, audio and video recordings, field notes, questionnaire and interview during the empirical research developed in a Financial Mathematics subject. The analysis of the data was performed following the guidelines and assumptions of the content analysis. We organized our research, according to the multipaper format, in three articles, with specific focuses. In the first paper, of a theoretical nature, we *investigate the constitution of the understanding in Wittgenstein's philosophy of language, more specifically in Philosophical Investigations, and its repercussions in Teaching*. The results of this paper outline characteristics of the Wittgensteinian perspective of understanding and its manifestation in teaching activities. In the second paper, we aim to investigate *students' understanding of mathematical modelling activities developed in a subject of a Mathematics Degree course*. The results of the analysis of the data in this paper indicate three emerging categories: understanding the problem situation, understanding of the concepts of Financial Mathematics and Mathematics and understanding of know how to make mathematical modelling. In the third paper, *we investigate how students understanding concepts of Financial Mathematics in different configurations of mathematical modelling activities.* From the analysis of the data in this article, three categories were stated: understanding of Financial Mathematics concepts in descriptive modelling and understanding of Financial Mathematics concepts in prescriptive modelling and mathematical modelling as a possibility to integrate Financial Education in the teaching of Financial Mathematics.The interlocutions between the results obtained and the theoretical basis of the research indicate that the students' understanding of mathematical modelling activities occurs in the following rules of use of linguistic expressions of the problem situation and concepts of Financial Mathematics and Mathematics in the deduction and analysis mathematical models; explain procedures and concepts involved in the development of activities; mastering techniques of the Mathematics and Financial Mathematics and mathematical modelling, according to the circumstances and characterizations of mathematical modelling activities; to establish interrelationships between propositions characteristic of the problem situation and propositions of Financial Mathematics, with the purpose of describing or prescribing the phenomena under investigation.

Keywords: Mathematics Educacion. Mathematical modelling. Financial Mathematics. Understanding. Language. Wittgenstein.

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

1.1 INTRODUÇÃO DO TEMA E JUSTIFICATIVA

A Educação Matemática se apresenta como uma área de pesquisa de contínua reflexão a respeito dos processos de ensino e aprendizagem de Matemática e de uma diversidade de articulações entre teoria e prática. As teorizações no âmbito da Educação Matemática constituem um amálgama de conceitualizações de diferentes áreas do conhecimento como Matemática, Filosofia, Sociologia, Psicologia, Antropologia, Língua Materna, História da Matemática, Epistemologia, entre outros (BURAK; KLÜBER, 2007). Dentre os temas amplamente discutidos na Educação Matemática, situa-se a Modelagem Matemática[1], a compreensão e a linguagem. Nessa pesquisa, esses três temas constituem o foco de nossa investigação, tendo em vista nosso interesse em ver possíveis interlocuções entre eles, fundamentadas em uma perspectiva filosófica estruturada a partir da filosofia de Ludwig Wittgenstein[2] (1889 – 1951).

Enquanto área de pesquisa da Educação Matemática, a Modelagem Matemática tem se constituído mediante pesquisas, eventos, formação de grupos de pesquisa e práticas de sala de aula há pelo menos três décadas (ARAÚJO, 2010; BIEMBENGUT, 2009; SILVEIRA, 2007; SRIRAMAN; KAISER; BLOMHØJ, 2006).

Nesse cenário, pesquisas em modelagem matemática têm abordado discussões filosóficas, com propósitos relacionados à caracterização de elementos da modelagem matemática ou de entendimentos de modelagem matemática (KLÜBER, 2012; VELEDA; ALMEIDA, 2010); à aprendizagem matemática e à atividade matemática, por meio da modelagem matemática (PALHARINI, 2017; SOUZA; BARBOSA, 2012); ao fazer modelagem matemática (ALMEIDA, 2014; TORTOLA, 2016; SOUZA, 2018) e aos pressupostos filosóficos da modelagem matemática (ARAÚJO, 2007; LEVY; SANTO, 2006).

Dentre os aspectos explorados pelas pesquisas em modelagem matemática, destacamos a compreensão em atividades de modelagem matemática. Brown e Edwards (2011) e Brown

[1] No decorrer do texto utilizamos o termo ‘modelagem matemática’ com iniciais minúsculas para se referir a atividades de modelagem matemática como alternativa pedagógica e ‘Modelagem Matemática’ com inicias maiúsculas para se referir a área de pesquisa no âmbito da Educação Matemática.
[2] Filósofo austríaco, naturalizado britânico. Suas obras tiveram diversas contribuições para a lógica, filosofia da linguagem, filosofia da matemática. Foi também um dos principais filósofos do movimento que ficou conhecido como virada linguística.

(2017) consideram que a compreensão envolve processos de pensamentos relacionados ao conhecimento do assunto, que inclui processos estratégicos e conhecimento do conteúdo. Costa (2015) delibera sobre a compreensão em atividades de modelagem matemática com base na teoria semiótica de Raymond Duval, cuja compreensão em Matemática é interpretada como a capacidade do aluno em mudar de um registro de representação semiótica para outro, e de reconhecer o mesmo objeto matemático em diferentes registros.

Nos discursos educacionais e na filosofia tradicional, a compreensão é geralmente entendida como uma experiência, estado ou processo mental, inacessíveis para o outro (ROTH, 2015; SPANIOL, 1989). Nesse contexto, considerações do filósofo Ludwig Wittgenstein fornecem uma perspectiva filosófica para discutir o tema, sem recorrer a pensamentos behavioristas e mentalistas. De acordo com Spaniol (1989), Wittgenstein, com base em sua perspectiva de linguagem, examina o emprego de expressões frequentemente associadas a processos mentais por teorias psicológicas e por usos na linguagem cotidiana, "certas palavras ou expressões, assim como são usadas na linguagem ordinária parecem referir-se a um ato ou processo mental ou interior" (SPANIOL, 1989, p. 15), tais como, compreensão, significação, imaginação, atenção, dor.

Na perspectiva de Wittgenstein, a compreensão pode ser concebida como "uma capacidade que se manifesta no seu uso – numa demonstração pública do assunto" (VILELA, 2013, p. 31), em oposição a um processo mental do sujeito que compreende. "Compreender algo [...] é dominar técnicas de uso da linguagem. Técnica aqui no sentido de um "saber-fazer", do domínio do uso de regras." (SILVA; SILVEIRA, 2014, p. 25). Nas palavras de Wittgenstein (2014, §150), "é evidente a gramática da palavra "saber" goza de estreito parentesco com a gramática das palavras "poder", "ser capaz". Mas também com a gramática da palavra "compreender". ("Dominar" uma técnica.)". Nesse sentido, investigar a compreensão dos alunos em atividades de modelagem matemática implica olhar os usos que os estudantes fazem em tal desenvolvimento.

Articulações entre os usos da linguagem, da matemática e de seus procedimentos e a modelagem matemática, sob uma perspectiva wittgensteiniana, têm sido consideradas por pesquisas na comunidade de Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática (MERLI, 2012; PALHARINI, 2017; SOUZA, 2018; TORTOLA, 2012, 2016) realizadas no Grupo de Pesquisa sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática (GRUPEMMAT), liderado pela orientadora dessa dissertação.

Merli (2012) investiga possíveis aproximações e divergências entre o uso da matemática clássica e da matemática fuzzy, consideradas como linguagens diferentes, no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Palharini (2017) faz uma análise do uso da linguagem e de procedimentos matemáticos em atividades de modelagem matemática desenvolvidas em um curso de Licenciatura em Matemática. Souza (2018) investiga o seguir regras em atividades de modelagem matemática em uma disciplina de Modelagem Matemática em um curso de Licenciatura em Matemática. Tortola (2012) discute os usos da linguagem em atividades de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, e em 2016, o mesmo autor, aborda as configurações de atividades de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental e, em sua pesquisa, o termo *configurações* é usado com o propósito de identificar características específicas apresentadas por essas atividades.

Estes estudos indicam possibilidades de investigação, sob uma perspectiva wittgensteiniana, acerca de práticas de modelagem matemática em diferentes contextos educacionais. Olhar para práticas de modelagem matemática, isto é, "para o que aluno e professor fazem, e como eles o fazem durante o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática [...] nos leva ao uso que fazemos da linguagem, da matemática, em tal desenvolvimento" (ALMEIDA, 2014, p. 99, tradução nossa) e, consequentemente, à compreensão dos alunos, uma vez que consideramos ser por meio de práticas linguísticas públicas e institucionais que nos fazemos compreender e compreendemos nosso interlocutor (MORENO, 2000).

Ressaltando a relevância de investigar os usos da linguagem em atividades de modelagem matemática, Tortola (2012, p. 61) argumenta que a modelagem matemática pode "contribuir para o desenvolvimento da habilidade de transitar entre linguagem natural do fenômeno e linguagem matemática, estabelecendo conexões entre Matemática e suas aplicações na realidade" e, dessa maneira, pode constituir uma leitura de fenômenos não matemáticos (ALMEIDA; PALHARINI; TORTOLA, 2015, p. 3), ou, em outras palavras, pode fornecer um *modo ver* (WITTGENSTEIN, 2014) situações empíricas, com base em um sistema matemático.

Este *modo de ver* pode variar de acordo com os usos da linguagem e o contexto educacional. Segundo Almeida, Palharini e Tortola (2015, p. 3), "cada atividade de modelagem matemática traz consigo conceitos, linguagens, problemáticas e interesses daqueles que a desenvolvem". Nesse sentido, a configuração da atividade de modelagem matemática vai depender de características específicas do contexto educacional em que a atividade for desenvolvida.

Em consonância, Almeida, Tortola e Merli (2012, p. 236) argumentam que o uso de diferentes linguagens em atividades de modelagem matemática "pode ocorrer em qualquer nível de escolaridade [...]. Não é a sofisticação da matemática que irá à tona uma nova linguagem, mas sim, as formas de vida e o contexto em que as atividades de modelagem matemática são desenvolvidas".

Com base nos argumentos apresentados, podemos ponderar que no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática diferentes linguagens podem ser usadas pelos alunos, estabelecendo um diálogo entre a Matemática e conhecimentos de situações reais, que a princípio não são matemáticas. Olhar para os usos dessas linguagens pode fornecer indícios sobre a compreensão dos alunos em atividades de modelagem matemática, na medida em que, para Wittgenstein (2014), a compreensão se dá e pode ser analisada por meio dos usos que fazemos da linguagem.

Nessa pesquisa investimos em uma possibilidade de diálogo entre a filosofia de Wittgenstein e a Modelagem Matemática na Educação Matemática, a saber, a compreensão, mediante aos usos da linguagem, em atividades de modelagem matemática no contexto de uma disciplina de Matemática Financeira de um curso de Licenciatura em Matemática.

Considerando o contexto da pesquisa, suscitamos reflexões sobre a compreensão no ensino de Matemática Financeira, mediado pela modelagem matemática. A Matemática Financeira é uma área que estuda a variação do valor do dinheiro no tempo (PUCCINI, 2007). Seu uso na sociedade permeia diferentes profissões, relativas as áreas de Administração, Ciências Econômicas, Ciências Contábeis e se faz presente nas situações financeiras e comerciais dos cidadãos.

Na literatura, pesquisas indicam a importância da Matemática Financeira para a vida das pessoas e para o exercício da cidadania. Hermínio (2008, p. 12), ressalta que por meio da Matemática Financeira, pode-se "fazer com que os nossos alunos aprendam a ser melhores na exigência de seus direitos, a entender melhor o que se passa nas relações comerciais existentes no meio social em que estão inseridos". Já Marasini (2001, p. 11) argumenta que é "grande a importância que essa parte da matemática tem na vida das pessoas, as quais estão permanentemente cercadas pelos problemas de sobrevivência financeira, necessitando de clareza e autonomia para tomar decisões". Nesse sentido, um dos desafios do ensino de Matemática Financeira, consiste em fazer uma abordagem voltada para a formação de cidadãos, capazes de tomar decisões "rápidas e simplificadas, tanto na execução, quanto na transmissão dos acertos destas decisões para outras diferentes situações" (CUNHA; LAUDARES, p. 663).

Uma possibilidade de fazer tal abordagem, segundo Campos, Teixeira e Coutinho (2015) é integrando a Educação Financeira no ensino de Matemática Financeira. A Educação Financeira, conforme a Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Económico (OECD, 2005), pode ser entendida como:

> [...] o processo mediante o qual consumidores/investidores melhoram a sua compreensão em relação aos conceitos e produtos financeiros, de maneira que, com informação, instrução e/ou orientação objetiva, possam desenvolver confiança e as competências necessárias para se tornarem mais conscientes das oportunidades e riscos financeiros e, então, poderem fazer escolhas bem informadas, saber onde procurar ajuda e adotar outras ações efetivas que melhorem o seu bem-estar financeiro (OECD, 2005, p. 26).

A Educação Financeira, nesse sentido, tem um propósito formativo, tendo em vista que visa o desenvolvimento de capacidades dos alunos para tomar decisões fundamentadas em argumentos matemáticos da Matemática Financeira ao realizar operações financeiras e comerciais, aprimorando a administração das finanças pessoais e evitando fraudes e o consumismo imediato e incontrolado (SAVOIA; SAITO; SANTANA, 2007; VILLA; SILVA; DARROZ, 2018).

Segundo Campos, Hess e Sena (2018), uma maneira de integrar a Educação Financeira no Ensino de Matemática Financeira é por meio da modelagem matemática, considerando que a modelagem matemática possibilita trabalhar com situações econômico-financeiras do cotidiano dos estudantes e o uso da Matemática Financeira, para resolvê-los. Assim, a modelagem matemática pode propiciar o desenvolvimento da capacidade dos alunos de resolver problemas reais (GALBRAITH, 2012), e o desenvolvimento do conhecimento crítico para tomar decisões baseadas em argumentos matemáticos (BARBOSA, 2003; ALMEIDA; SILVA, 2004), propósitos importantes da Educação Financeira.

Visando abordar esses aspectos relacionados ao uso da modelagem matemática no ensino de Matemática Financeira e relações entre compreensão e linguagem na perspectiva da filosofia de Wittgenstein, as interlocuções entre Modelagem Matemática, compreensão e linguagem configuram-se, por um lado, em uma investida voltada para a Modelagem Matemática como área de pesquisa da Educação Matemática e, por outro lado, em possibilidades para refletir sobre o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática no contexto da disciplina de Matemática Financeira e seus desdobramentos para a compreensão dos alunos.

1.2 Objetivos de pesquisa

Inspirados em Wittgenstein, nossa atitude de pesquisa considera sua sugestão de *não pensar, mas olhar* (WITTGENSTEIN, 2014, §66) para possíveis interlocuções entre Modelagem Matemática, compreensão e linguagem no contexto de uma disciplina de Matemática Financeira em um curso de Licenciatura em Matemática. Constitui-se, portanto, no decorrer da pesquisa, um modo de *ver* a compreensão em atividades de modelagem matemática sob uma perspectiva wittgensteiniana da linguagem.

Ajustamos nossa lente teórica com base na Modelagem Matemática na Educação Matemática e na filosofia de Wittgenstein, principalmente, em relação à sua obra Investigações Filosóficas (1953), e delineamos nossa pesquisa visando *investigar como se dá a compreensão em atividades de modelagem matemática desenvolvidas em uma disciplina de Matemática Financeira de um curso de Licenciatura em Matemática.*

Neste contexto, nossa investigação vai sendo constituída ao longo da reflexão objetivos específicos que visam discutir elementos relativos à compreensão em atividades de modelagem matemática que remetem à conteúdos da Modelagem Matemática, os quais são detalhados sob a forma de três artigos científicos, cada um trazendo discussões de elementos específicos.

Primeiramente, nos propomos a *investigar a constituição da 'compreensão' na filosofia da linguagem de Wittgenstein, mais especificamente na obra Investigações Filosóficas, e suas repercussões no Ensino*. Neste artigo fazemos uma discussão teórica e filosófica, buscando caracterizações da compreensão na perspectiva de Ludwig Wittgenstein a partir de suas considerações na obra *Investigações Filosóficas* e procuramos evidenciar possíveis repercussões na área de Ensino.

No segundo artigo, a investigação se dirige à *compreensão dos alunos em atividades de modelagem matemática desenvolvidas em uma disciplina de Matemática Financeira.* Com esta finalidade, desenvolvemos atividades de modelagem matemática com alunos de uma disciplina de Matemática Financeira, com o objetivo voltado para o ensino e aprendizagem de conceitos dessa disciplina. Considerando a compreensão na perspectiva de Wittgenstein, nossas argumentações vêm pautadas na finalidade de investigar 'o quê' e 'como' os alunos compreendem no desenvolvimento dessas atividades e como aspectos da modelagem matemática atuam nesse desenvolvimento.

Por fim, o terceiro artigo se dirige à *investigação de como os alunos compreendem conceitos da Matemática Financeira em diferentes tipos de modelagem matemática.* Para discutir fazer essa investigação também delineamos um estudo empírico a respeito da compreensão de conceitos da Matemática Financeira em atividades de modelagem matemática. Considerando a Matemática Financeira como uma linguagem matemática, buscamos interlocuções entre linguagem e compreensão, com base na filosofia de Wittgenstein, em duas atividades de modelagem matemática, caracterizadas como modelagem descritiva e modelagem prescritiva, com base na discussão feita por Niss (2015) sobre os diferentes tipos de modelagem matemática.

Com esta configuração do relatório de pesquisa, nossa investigação inicia com uma discussão teórica no primeiro artigo e análises empíricas no segundo e terceiro artigos. Os focos dos artigos foram formulados de modo a possibilitar *ver* diferentes *aspectos*, como sugere Wittgenstein (2014), que em conexão nos permitem apresentar reflexões sobre a compreensão dos alunos em atividades de modelagem matemática.

1.3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Contexto e Participantes da Pesquisa

A pesquisa empírica foi desenvolvida com nove alunos de uma disciplina de Matemática Financeira de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública do norte do Paraná, no ano de 2018. Esta disciplina é ofertada em caráter anual para o 4º ano do curso com carga horária de 72 horas/aula distribuídas em 2 horas/aula semanais. A ementa[3] da disciplina aborda os conceitos de juros e descontos simples, juros e descontos compostos, taxas, taxas equivalentes, inflação, equivalência de capitais diferidos, rendas ordinárias, antecipadas e deferidas, sistema de amortização de empréstimos, engenharia econômica, análise de investimentos e previsões financeiras.

No primeiro semestre de 2018, a disciplina foi ministrada por uma professora/regente e o pesquisador, autor desse relatório de pesquisa, coletou dados e participou ativamente no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática. No segundo semestre de 2019, o pesquisador atuou mutuamente como professor responsável pela disciplina e como pesquisador responsável pela coleta de dados e o desenvolvimento com os alunos das atividades de modelagem matemática. Dessa forma, optamos por denominar de professor/pesquisador (PP) o pesquisador e professor responsável pela disciplina no segundo semestre de 2018 e professora/regente (PR) a professora responsável pela disciplina no primeiro semestre de 2018.

No desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, os alunos foram organizados em grupos, em duas configurações. As atividades desenvolvidas pelos alunos, em sua primeira configuração dos grupos, foram analisadas no segundo artigo dessa dissertação, sendo Grupo 1 (G1): A2, A4, A5, A6 e Grupo 2 (G2): A1, A3, A7, A8, A9. Na segunda configuração dos grupos, os alunos desenvolveram as atividades analisadas no terceiro artigo da dissertação, sendo Grupo 1 (G1): A2, A4, A7, A8, A9 e Grupo 2 (G2) : A1, A3, A5, A5.

[3] Disponível em: < https://uenp.edu.br/matematica-ementas>. Acesso em: 11/11/2018.

Com a finalidade de conhecermos os participantes de pesquisa aplicamos inicialmente um questionário (Apêndice A). Neste questionário, perguntamos aspectos associados ao perfil, o entendimento sobre Matemática Financeira e sobre Modelagem Matemática e se eles já tinham familiaridade com atividades de modelagem matemática. No Quadro 1 evidenciamos algumas respostas fornecidas pelos estudantes.

Quadro 1 - Familiaridade dos alunos com a modelagem matemática e a Matemática Financeira

Você já desenvolveu atividades de modelagem matemática? Em que contextos e como foi a experiência?
"Sim. Algumas foram satisfatórias, até legais, já outras senti dificuldade extrema e com pouco auxílio". (A1)
"Sim, em diversas disciplinas durante o curso, algumas experiências foram boas, outras, entretanto não". (A2)
"Sim, modelagem matemática é um modelo que encontramos para resolver problemas (situações) matemáticas". (A3)
"Sim, nos anos anteriores, em determinadas matérias, particularmente não sou seguidora dessa tendência". (A4)
"Sim, venda de bolo de pote e foi ótimo". (A5)
"Estamos desenvolvendo duas atividades, como parte da matéria do ano letivo, as coletas de dados fazem com que nos envolvemos com a atividade, muito interessante". (A6)
"É familiar. Tenho como entendimento que a modelagem é relacionada à problemas com referência à realidade". (A7)
"Sim, em algumas disciplinas. As experiências foram algumas legais e outras não devido à dificuldade pela modelagem matemática, dificulta muito as aulas. As atividades são muito extensas e alguns professores cobram na prova e fica <u>impossível</u> de resolver, por ser atividades muito complexas e por levar bastante tempo para resolver. Acho importante desenvolver atividades envolvendo as diferentes tendências metodológicas, mas da forma com que as atividades de modelagem são trabalhadas em diversas disciplinas na universidade acaba desestimulando os alunos nas aulas, e até mesmo para desenvolverem atividades deste tipo quando forem professores". (A8, grifos do aluno)
"Sim, em atividades de CDI, EDO. Ao trabalharmos com por exemplo resfriamento, datação de fósseis. Em alguns casos encontrei bastante dificuldades na realização destas atividades, porém creio que foi por conta do conteúdo que eu não me dava bem. (A9)
O que você entende por Matemática Financeira? Você considera importante estudar conceitos desta disciplina? Se sim, por quê?
"Uma disciplina voltada para estudar conceitos de finanças ligada com situações cotidianas". (A1)
"Matemática financeira é uma série de conceitos matemáticos aplicados à análise de dados financeiros em geral. Sim, pois trata-se de questões ligadas a dinheiro, empréstimos e na economia". (A2)
"Matemática financeira é o estudo do giro de capital, de juros, porcentagem, etc. É o cálculo que fazemos para saber lucro, se teremos lucro ou não. Sim, pois é através dela que poderemos saber calcular a nossa renda (o capital)". (A3)
"A parte da matemática que estuda as finanças (dinheiro/capital) tanto de entrada quanto de saída; além de taxa de juros". (A4)
"Matemática financeira envolve a Educação Financeira e a capitalização, sim é uma grande questão estudar financeira". (A5)
"Sim, pois trata de uma pauta constante no dia-a-dia, sempre estamos usando produtos envolvendo taxa de juros, compras variadas, empréstimos, alta de combustíveis, inflação dos produtos da cesta básica". (A6)
"Matemática financeira tem a finalidade de estudar as diversas formas de evolução do valor do dinheiro no tempo. Considero sim, que através dos conceitos podemos investir no nosso dinheiro". (A7)
"Matemática relacionada as finanças (investimentos, empréstimos, etc.). Sim, pois é uma relação da matemática da sala de aula com situações do dia-a-dia, o que torna bastante motivador". (A8)
"A matemática que estuda o mercado financeiro, capitalização, juros. Sim, pois é uma das disciplinas com mais aplicações no cotidiano. (A9)
Que temáticas, envolvendo situações reais, você gostaria de estudar durante a disciplina?
"Economia de finanças". (A1)
"Temas relacionando a bolsa de valores e uma aplicação em empresa afim de melhorar os lucros". (A2)
"Situações que envolvam rendimentos de poupança". (A3)
"Achei interessante o assunto de renda mensal". (A4)
"Investimento, bolsa de valores e financiamento de carro". (A5)
"Investimento". (A7)
"Investimento". (A8)
"Temáticas voltadas a investimentos e aplicações do mercado financeiro". (A9)

Fonte: registros escritos dos estudantes.

A maioria dos participantes relataram ter desenvolvido atividades de modelagem matemática em outras disciplinas do curso e os discursos revelam dificuldades e tensões a respeito das experiências vivenciadas com a modelagem matemática. Além disso, três participantes da pesquisa relataram que estavam cursando a disciplina de Modelagem Matemática ofertada no curso no momento da pesquisa e um aluno relatou já ter cursado essa disciplina em outro momento. Por um lado, o fato de os alunos já terem desenvolvido atividades de modelagem matemática forneceu mais '*liberdade*' para o professor/pesquisador propor atividades mais abertas, com poucas informações e que necessitam de maior inteiração dos alunos com o tema. Por outro lado, as dificuldades e as tensões evidenciadas nos discursos dos estudantes se tornaram um desafio para a pesquisa.

Essas informações do contexto de pesquisa são importantes para investigar a compreensão dos alunos em atividades de modelagem matemática, na medida em que na perspectiva de Wittgenstein (2014), os critérios que dispomos para dizer que alguém compreendeu algo são circunstanciais. No caso da compreensão em atividades de modelagem matemática, as circunstâncias estão associadas à informações do contexto da pesquisa.

Coleta de dados

No decorrer do período de coleta de dados foram desenvolvidas cinco atividades de modelagem matemática, três com temas propostos pelo professor/pesquisador e duas com temas escolhidos pelos alunos (Quadro 2). Considerando que os participantes já possuíam certa familiaridade com a modelagem matemática, as atividades propostas pelo professor/pesquisador foram apresentadas aos alunos com poucas informações a respeito do tema, sendo necessário buscar informações além dos dados informados pelo professor.

Quadro 2 - Atividades de modelagem matemática desenvolvidas

Atividade	Tema escolhido por	Período
Seguro de veículos	Professor-pesquisador	1º semestre de 2018
Micro cervejaria Artesanal	Alunos do Grupo 1	1º semestre de 2018
Financiamento de veículos	Alunos do Grupo 2	1º semestre de 2018
Orçamento Familiar ou pessoal	Professor-pesquisador	2º semestre de 2018
Política de preços da Petrobrás	Professor-pesquisador	2º semestre de 2018

Fonte: os autores.

Para investigar a compreensão em atividades de modelagem matemática, na perspectiva de Wittgenstein (2014), é importante olhar para os usos da linguagem, as explicações, os gestos e as reações dos alunos. Assim, os instrumentos de coleta de dados foram escolhidos com a intenção de formar um acervo de informações relevantes para responder à questão de pesquisa:

- registros escritos produzidos pelos alunos durante as atividades: solicitamos aos alunos um relatório escrito para cada atividade desenvolvida e foram coletados qualquer produção escrita feita pelos alunos durante o desenvolvimento das atividades;
- gravações de áudio e de vídeo: durante o desenvolvimento das atividades, posicionamos uma câmera de vídeo na sala de aula, com o propósito de ‘capturar’ os gestos e reações dos alunos, e um gravador de áudio para cada grupo;
- aplicação de um questionário: aplicado no início das aulas para conhecer os participantes de pesquisa e identificar a familiaridades desses participantes com a modelagem matemática e a Matemática Financeira;
- realização de uma entrevista: entrevistamos individualmente os alunos após o desenvolvimento das atividades, utilizando um gravador de áudio e caderno de anotações. A entrevista (roteiro Apêndice B) foi orientada por questões semiestruturadas formuladas de acordo com necessidade de novos dados.

Em nossa pesquisa, a coleta e análise dos dados foram realizadas em uma abordagem qualitativa, com base na filosofia de Wittgenstein e na Modelagem Matemática na Educação Matemática. Apresentamos detalhes da natureza da pesquisa na próxima seção.

Natureza da pesquisa

Diante dos objetivos da pesquisa indicados na seção 1.2, optamos por uma abordagem metodológica de natureza qualitativa. Segundo Garnica (1997), essa abordagem pode ser caracterizada como:

> [...] uma trajetória circular em torno do que se deseja compreender, não se preocupando única e/ou aprioristicamente com princípios, leis e generalizações, mas voltando o olhar à qualidade, aos elementos que sejam significativos para o observador-investigador (GARNICA, 1997, p. 111).

Em uma investigação qualitativa, o olhar do pesquisador constitui uma característica fundamental, preocupando-se com o processo e não somente com o produto. Nesse sentido, o pesquisador “atribui significados, seleciona o que do mundo quer conhecer, interage com o conhecido e dispõe a comunica-lo. Também não haverá ‘conclusões’, mas uma ‘construção de resultados’, posto que compreensões, não sendo encarceráveis, nunca serão definitivas” (GARNICA, 1997, p. 11).

Para investigar qualitativamente os dados, o pesquisador pode se apoiar em perspectivas teóricas e filosóficas que forneçam um modo de ver os dados (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

Nessa pesquisa, considerando a não neutralidade da pesquisa qualitativa, nos fundamentamos na filosofia de Wittgenstein para investigar a compreensão dos alunos em atividades de modelagem matemática.

A estruturação da 'lente' teórica da pesquisa envolveu um estudo de natureza teórica, apresentada no primeiro artigo, na qual fazemos uma incursão na obra *Investigações Filosóficas* (1953) de Wittgenstein e apresentamos possíveis repercussões no Ensino. Em geral, uma pesquisa teórica tem por finalidade aprofundar conhecimentos e discussões, considerando que "o conhecimento teórico adequado acarreta rigor conceitual, análise acurada, desempenho lógico, argumentação diversificada, capacidade explicativa" (DEMO, 1994, p. 36).

A partir da perspectiva filosófica a respeito da compreensão delineada no primeiro artigo, realizamos análises empíricas, apresentadas no segundo e terceiro artigo. Para tanto, analisamos dados empíricos das atividades de modelagem matemática desenvolvidas na disciplina de Matemática Financeira de um curso de Licenciatura em Matemática. No primeiro artigo, analisamos dados provenientes das atividades Micro Cervejaria Artesanal e Financiamento de Veículos e, no segundo artigo, as atividades Orçamento Familiar ou Pessoal e Política de Preços da Petrobrás.

A natureza das análises empíricas assume características da pesquisa qualitativa, com base em Bogdan e Biklen (1994), pois a fonte direta dos dados é o contexto da disciplina de Matemática Financeira de um curso de Licenciatura em Matemática no ano de 2018; a investigação a respeito da compreensão dos alunos no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática é descritiva; o interesse do pesquisador é pelo processo, isto é, buscamos refletir sobre o *como* e não se preocupando com os resultados ou produtos; as análises dos dados foram feitas de forma indutiva, não com o propósito de confirmar ou refutar hipóteses formuladas *a priori*; o significado tem importância vital, e são fornecidos pelos usos da linguagem, pelas ações e explicações dos alunos no contexto em que as atividades de modelagem matemática foram investigadas tendo por base as asserções de Wittgenstein (2014).

Para analisar os dados empíricos, optamos pelos encaminhamentos e pressupostos da análise de conteúdo, segundo Bardin (2011).

Metodologia de análise dos dados

Segundo Bardin (2011, p. 49), a análise de conteúdo constitui um "conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter por procedimentos sistemáticos e objetivos do conteúdo das mensagens indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas dessas mensagens)”.

Ao encontro da caracterização de Bardin (2011), Moraes (1999) considera que:

> A análise de conteúdo constitui uma metodologia de pesquisa usada para descrever e interpretar o conteúdo de toda classe de documentos e textos. Essa análise, conduzindo a descrições sistemáticas, qualitativas ou quantitativas, ajuda a reinterpretar as mensagens e a atingir uma compreensão de seus significados num nível que vai além de uma leitura comum (MORAES, 1999, p. 8).

Trata-se, nesse sentido, de uma metodologia de análise de dados, que fornece técnicas e instrumentos para descrever e interpretar dados de forma sistemática, conduzindo o pesquisador a diferentes percepções dos dados em relação aos objetivos e características do contexto de pesquisa. Na análise de conteúdo em uma abordagem qualitativa, quando os objetivos dizem respeito ao *como*, “o pesquisador estará voltado à forma como a comunicação se processa, seus códigos, seu estilo, a estrutura da linguagem e outras características do meio pelo qual a mensagem é transmitida” (MORAES, 1999, p. 8). Este é o caso dos objetivos dessa pesquisa apresentados na seção 1.2, pois buscam detalhar *como* se dá a compreensão dos alunos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Bardin (2011) propõe três fases cronológicas da análise de conteúdo: *pré-análise*; *exploração do material*; *tratamento dos resultados obtidos e interpretação*.

A *pré-análise* tem por objetivo sistematizar as ideias iniciais, selecionar dados e organizar a análise. Nessa fase, descrevemos o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, por meio de transcrições de áudio e vídeo e dos registros escritos dos alunos, constituindo o *corpus* de dados analisados. A partir da constituição do *corpus*, fizemos uma leitura flutuante dos dados, com a finalidade de organizar a análise e sistematizar as primeiras ideias sobre os dados.

A *exploração do material* consiste na codificação e unitarização dos dados. Nessa fase, os materiais constituintes do *corpus* são fragmentados em unidades, que podem ser unidades de registro ou unidades de contexto.

Segundo Bardin (2011, 134), a unidade de registro “corresponde ao segmento de conteúdo a considerar como unidade de base, visando a categorização e a contagem frequencial”. Moraes (1999, p. 12) denomina a unidade de registro como unidade de análise e argumenta que essa unidade pode ser “palavras, frases, temas, ou mesmo os documentos em sua forma integral”. Em outras palavras, a unidade de análise é “o elemento unitário de conteúdo a ser submetido posteriormente à classificação” (MORAES, 1999, p. 12).

A unidade de contexto, por sua vez, é mais ampla que a unidade de registro e serve, de acordo com Bardin (2011, p. 137), "de unidade de compreensão para codificar a unidade de registro e corresponde ao segmento da mensagem, cujas dimensões [...] são ótimas para que se possa compreender a significação exata da unidade de registro [...] Isto pode, por exemplo, ser a frase para a palavra e o parágrafo para o tema". Conforme Moraes (1999, p. 13), a unidade de contexto serve de referência para a unidade de análise (unidade de registo), "fixando limites contextuais para interpretá-la".

Nessa pesquisa, as unidades de análise são os segmentos de conteúdos presentes nos registros escritos dos alunos, nos diálogos envolvidos no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática e nas respostas dos alunos ao questionário e à entrevista, que indicam as ações dos alunos no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, tais como os usos da linguagem e as explicações, que podem configurar possíveis indícios da compreensão dos alunos nessas atividades. Já as unidades de contexto referem-se aos contextos de uso da linguagem em que as ações dos alunos (fragmentadas em unidades de análise) foram realizadas no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática.

A unitarização está envolvida na codificação, que corresponde, segundo Bardin (2011, p. 133), a "uma transformação – efetuada segundo regras precisas – dados brutos do texto, transformação esta que, por recorte, agregação e enumeração permite atingir uma representação do conteúdo ou de sua expressão; suscetível de esclarecer o analista acerca das características do texto, que podem servir de índices". Os códigos atribuídos para as unidades de análise nessa pesquisa são apresentados nas seções de procedimentos metodológicos dos artigos 2 e 3.

Definidas as unidades de análise, estas foram agrupadas em categorias. Esse processo, denominado de categorização, consiste, para Moraes (1999, p. 13), em um "procedimento de agrupar dados considerando a parte comum existente entre eles. Classifica-se por semelhança ou analogia, segundo critérios previamente estabelecidos ou definidos no processo".

Em nossa pesquisa, as categorias emergiram durante o desenvolvimento da análise, com base em critérios de compreensão, na perspectiva de Wittgenstein (2014), que foram sendo delineados conforme as circunstâncias em que o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática se deu. Esse processo de categorização, envolveu também inferências do pesquisador realizadas na "presença de índice (tema, palavra, personagem etc.!), e não na frequência de sua aparição, em cada comunicação individual" (BARDIN, 2011, p. 146).

Por fim, no *tratamento dos resultados obtidos e interpretação*, o pesquisador pode recorrer a quadros de resultados, diagramas, digramas, figuras e modelos, para sistematizar os principais resultados obtidos na análise. Esses resultados podem ser discutidos e articulados pelo pesquisador, de modo a propor inferências e interpretações em relação aos objetivos da pesquisa. Nessa pesquisa, os resultados obtidos nas análises dos dados foram apresentados individualmente nas seções finais de cada artigo e, posteriormente, discutidos e articulados nas considerações finais dessa dissertação. A estruturação metodológica dessa pesquisa foi feita de modo a possibilitar a organização da dissertação no formato *multipaper*, detalhado na próxima seção.

Organização da dissertação em formato *multipaper*

Ao estruturar esse relatório de pesquisa, optamos por organizá-lo em um conjunto de artigos que mesmo com suas características individuais, dialogam e possibilitam "lançar luz" sobre o objeto de pesquisa. Este estilo de apresentação é denominado por Boote e Beile (2005) e Duke e Beck (1999) como formato alternativo *multipaper*.

Mutti, Klüber (2018) ao analisarem a consideração do formato *multipaper* nos programas de pós-graduação *stricto sensu* no Brasil, destacam um movimento de abertura e de aceite desse formato em programas de pós-graduação nas áreas de Educação, Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP), Universidade Estadual de Londrina (UEL), Universidade Federal da Bahia (UFBA), Universidade Estadual de Maringá (UEM), entre outros.

Garnica (2011), na posição de orientador da tese de Souza (2011), em uma seção de apresentação, tece considerações a respeito do formato *multipaper*.

> [...] nome pomposo dado aos escritos compostos por textos que guardam, entre si, certa independência, mas configuram algo que se pretende coeso, com cada um dos textos auxiliando na formação de um "objeto". Assim, os textos dialogam, e muitas vezes revisitam momentos e temas já visitados: algo como que uma independência que complementa e, complementando, talvez organize informações de modo a permitir, sempre, reconfigurações e, é claro, ressignificações (GARNICA, 2011, p. 8).

Cada artigo que compõe a dissertação neste formato, precisa contemplar elementos característicos de um artigo apto para ser publicado, com consistência teórica, rigor científico, e resultados originais. Embora os focos dos artigos sejam distintos, estes não podem ser dissociados dos propósitos gerais da pesquisa, é importante que, em conjunto, permitam responder o mesmo problema ao final da dissertação (DUKE; BECK, 1999).

Diversos estudos (BADLEY, 2009, BOOTE; BEILE, 2005, DUKE; BECK, 1999, PALTRIDGE, 2002) discutem as possibilidades de trabalho com múltiplos artigos e apresentam argumentos favoráveis para o seu uso. Segundo Duke e Beck (1999), este formato alternativo oferece a oportunidade de os pesquisadores desenvolverem habilidades e capacidade necessárias para a escrita acadêmica voltada para a produção de artigos, isto é, fornece um viés formativo, na medida em que prepara os pesquisadores para as exigências e funções no mundo acadêmico, como a produção, publicação, discussão e avaliação de artigos científicos.

Outro argumento favorável de Duke e Beck (1999) é que este formado permite aos pesquisadores analisar diferentes aspectos em seus dados, com base em diferentes propósitos e dados distintos. Esta flexibilidade permite ao pesquisador *ver* diferentes aspectos sobre o objeto de pesquisa, que se conectam entre si em relação a um mesmo tema e problema de pesquisa.

Optamos por organizar o relatório de pesquisa, de acordo com o formato *multipaper*, em três capítulos: um capítulo introdutório, um capítulo de artigos, um capítulo de discussão e reflexão a respeitos dos resultados obtidos nos artigos.

No Capítulo 1 – *Introdução*, apresentamos o tema e discutimos a relevância de investigar atividades de modelagem matemática na disciplina de Matemática Financeira em um curso de Licenciatura em Matemática, bem como justificativas para olhar para a compreensão nestas atividades à luz da perspectiva wittgensteiniana, em particular, da obra *Investigações Filosóficas*; o problema de pesquisa que origina os objetivos específicos de cada artigo; e a abordagem metodológica da pesquisa.

No Capítulo 2 – *Os artigos da dissertação*, apresentamos, os três artigos que compõem a dissertação.

O primeiro artigo, "*A compreensão em Wittgenstein: contribuições teóricas e repercussões no ensino*", faz uma discussão teórica, buscando caracterizações da compreensão para Wittgenstein (2014) e pretende evidenciar possíveis repercussões dessa perspectiva filosófica sobre compreensão no Ensino de Ciências e Matemática.

O segundo artigo, *"A compreensão dos alunos em atividades de modelagem matemática: uma perspectiva wittgensteiniana"*, tem como objetivo investigar a compreensão de alunos em atividades de modelagem matemática desenvolvidas em uma disciplina de Matemática Financeira, considerando os diferentes aspectos envolvidos no desenvolvimento de atividades de modelagem, tais como, os objetivos, as ações dos alunos, os interesses e as problemáticas.

No terceiro artigo, "*O ensino de Matemática Financeira mediado pela modelagem matemática: interlocuções entre linguagem e compreensão na perspectiva de Wittgenstein"*, investigamos como os alunos compreendem conceitos da Matemática Financeira em atividades de modelagem matemática, considerando diferentes tipos de modelagem matemática abordados na literatura. Para tanto, nos fundamentamos em um quadro teórico composto pela Modelagem

Matemática, Modelagem Matemática no Ensino de Matemática Financeira e interlocuções entre linguagem e compreensão em Matemática na filosofia de Wittgenstein.

Por fim, nas *Considerações Finais*, fazemos uma discussão em relação aos resultados obtidos em cada artigo e os objetivos de pesquisa, ressaltando interlocuções entre Modelagem Matemática, compreensão e linguagem, tendo como óculos a filosofia de Wittgenstein, a Modelagem Matemática e o ensino de Matemática Financeira. Sinalizamos contribuições da dissertação para a Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática, bem como as limitações da pesquisa e perspectivas futuras.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, A. G. O. Modelagem Matemática no contexto da Matemática e cidadania. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, EPEM, 7, 2004, São Paulo. **Anais**... São Paulo: Faculdade de Educação, 2004.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; TORTOLA, E.; MERLI, R. F. Modelagem matemática – com o que estamos lidando: modelos diferentes ou linguagens diferentes? **Acta Scientiae**, Canoas, v. 14, n. 2, p. 215-239, ago. 2012.

ALMEIDA, L. M. W. The “practice” of mathematical modeling under a wittgensteinian perspective. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, SBEM, v. 4, n. 2, p. 98-113, 2014.

ALMEIDA, L. M. W.; PALHARINI, B. N..; TORTOLA, E. Desdobramentos para a modelagem matemática decorrentes da formulação de hipóteses. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2015, Pirenópolis. **Anais**... Pirenópolis: SBEM, 2015.

ARAÚJO. J. L. Relação entre matemática e realidade em algumas perspectivas de modelagem matemática na educação matemática. In: BARBOSA, J. C., CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. de L. (Org.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais.** Recife: SBEM, 2007. p. 17-32.

ARAÚJO. J. L. Brazilian research on modelling in mathematics education. **ZDM**, v. 42, n. 2-4, p. 337-348, 2010.

BADLEY, G. Academic writing: contested knowledge in the making?. **Quality Assurance in Education**, v. 17, n. 2, p. 104-117, 2009.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática e Perspectiva Sócio-crítica. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, SIPEM, 2, 2003, Santos. **Anais**... Santos: SBEM, 2003.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. 3. ed. Lisboa: Edições 70, 2011.

BIEMBENGUT, M. S. 30 anos de modelagem matemática na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **Alexandria**, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 7-32, jul. 2009.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação Matemática**: uma introdução à teoria e aos métodos. Lisboa: Porto Editora, 1994.

BOOTE, D. N.; BEILE, P. Scholars Before Researchers: on the centrality of the dissertation literature review in research preparation. **Educational Researcher**, v. 34, n. 6, p. 3-15, sep. 2005.

BROWN, J. Context and Understanding: The Case of Linear Models. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; KAISER, G. (Eds.). **Mathematical Modellling and Applications**: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education. Cham, Switzerland: Springer, 2017. p. 211-221.

BROWN, J.; EDWARDS, I. Modelling Tasks: Insight into Mathematical Understanding In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; FERRI, R. B. (Eds.). **Mathematical Modellling and Applications**: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education. Cham, Switzerland: Springer, 2017. p. 187-197.

BURAK, D.; KLÜBER, T. E. Educação Matemática: contribuições para a compreensão da sua natureza. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 10, n. 2, p. 93-106, dez. 2007

CAMPOS, C. R.; TEIXEIRA, J.; COUTINHO, C. Q. S. Reflexões sobre a educação financeira e suas interfaces com a educação matemática e a educação crítica. **Educação Matemática Pesquisa (EMP)**, São Paulo, v. 17, n. 3, p. 556-577, 2015.

CAMPOS, C. R.; HESS, A.; SENA, R. M. Teaching financial mathematics through a critical approach in a university environment. In: JURDAK, M.; VITHAL, R. (Eds.). **Sociopolitical Dimensions of Mathematics Education:** from the margin to mainstream. Cham, Switzerland: Springer, 2018. p. 113-133.

COSTA, L. M. **A Compreensão em Atividades de Modelagem Matemática**: Uma Análise à Luz dos Registros de Representação Semiótica. 2016. 145 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

CUNHA, C. L. da; LAUDARES, J. B. Resolução de Problemas na Matemática Financeira para Tratamento de Questões da Educação Financeira no Ensino Médio. **Bolema:** Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 31, n. 58, p. 659-678, 2017.

DEMO, P. **Pesquisa e construção do conhecimento: metodologia científica no caminho de Habermas**. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro, 1994.

DUKE, N. K.; BECK, S. W. Education should consider alternative forms for the dissertation. **Educational Researcher**, Washington, v. 28, n. 3, p. 31-36, 1999.

GARNICA, A. V. M. Algumas notas sobre pesquisa qualitativa e fenomenologia. **Interface** – Comunicação, Saúde, Educação, Botucatu, v. 1, n. 1, p. 109-122, 1997.

GARNICA, A. V. M. Apresentação. In: SOUZA, L. A. de. **Trilhas na construção de versões históricas sobre um Grupo Escolar**. 2011. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - UNESP de Rio Claro: São Paulo, 2011.

GALBRAITH, P. Models of modelling: genres, purposes or perspectives. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, Blumenau, v. 1, n. 5, p. 3-16, 2012.

HERMINIO, P. H. **Matemática Financeira – um enfoque da resolução de problemas como metodologia de ensino e aprendizagem.** 2008. 244 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2008.

KLÜBER, Tiago Emanuel. **UMA METACOMPREENSÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.** 2012. 396 f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

LEVY, L. F.; SANTO, A. O. E. Filosofia e Modelagem Matemática. **Unión**: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, n. 8, p. 11-21, dez. 2006.

MARASINI, S. M. **A matemática financeira na escola e no trabalho**: uma abordagem histórico-cultural. 2001. 112 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Passo Fundo, Passo Fundo, 2001.

MERLI, R. F. **Modelos clássico e fuzzy na educação matemática**: um olhar sobre o uso da linguagem. 2012. 154 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

MORAES, R. Análise de Conteúdo. **Educação**, Porto Alegre, v. 22, n. 37, p. 7-32, 1999.

MUTTI, G. de S. L.; KLÜBER, T. E. Formato multipaper nos programas de pós-graduação stricto sensu brasileiros das áreas de educação e ensino: um panorama. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA E ESTUDOS QUALITATIVOS, SIPEQ, 5, 2018, Foz do Iguaçu. **Anais**... Foz do Iguaçu: SEPQ; UNIOESTE, 2018.

NISS, M. Prescriptive Modelling – Challenges and Opportunities. In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice:** cultural, social and cognitive influences. New York: Springer, p. 67-80. 2015.

OECD, **Improving Financial Literacy: Analysis of Issues and Policies**. Paris: Secretary General of the OECD, 2005.

PALHARINI, B. N. **A Matemática em atividades de modelagem matemática**: uma perspectiva wittgensteiniana. 2017. 316 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

PALTRIDGE, B. Thesis and dissertation writing: an examination of published advice and actual practice. **English for Specific Purposes**, v. 21, n. 2, p. 125-143. 2002.

PUCCINI, E. C. **Matemática financeira.** Projeto universidade aberta. 2007.

ROTH, W. Heeding Wittgenstein on “Understanding” and “Meaning”: A Pragmatist and Concrete Human Psychological Approach in/for Education. **Outlines - Critical Practice Studies**, v. 16, n. 1, p. 26-52, 2015.

SAVOIA, J. R. F.; SAITO, A. T.; SANTANA, Flávia de Angelis. Paradigmas da educação financeira no Brasil. **Rap**, Rio de Janeiro, v. 6, n. 41, p. 1121-1141, nov. 2007.

SILVA, P. V; SILVEIRA, M. R. A. O ver-como wittgensteiniano e suas implicações para a aprendizagem a Matemática: um ensaio. **BoEM** (Boletim online de Educação Matemática), Joinville, v. 2, n. 3, p.17-34, dez. 2014.

SILVEIRA, E. **Modelagem Matemática em Educação no Brasil:** entendendo o universo de teses e dissertações. 2007. 197 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2007.

SOUZA, L. A. de. **Trilhas na construção de versões históricas sobre um grupo escolar.** 2011. 420 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2011.

SOUZA, E. G.; BARBOSA, J. C. Contribuições teóricas sobre a aprendizagem matemática na modelagem matemática. **Zetetiké**, Campinas, v. 22, n. 41, p. 31-58, jul. 2014.

SOUZA, H. C. T. **Um olhar sobre o *fazer* Modelagem Matemática à luz da filosofia de Wittgenstein**. 2018. 208 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

SPANIOL, W. **Filosofia e método no segundo Wittgenstein.** São Paulo: Loyola, 1989.

SRIRAMAN, B.; KAISER, G.; BLOMHØJ, M. A brief survey of the state of mathematical modeling around the world. **ZDM**, v. 38, n. 3, p. 212-213, 2006.

TORTOLA, E. **Os usos da linguagem em atividades de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.** 2012. 168f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

TORTOLA, E. **Configurações de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.** 2016. 304f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

VELEDA, G. G; ALMEIDA, L.M. W de. A caracterização da realidade em trabalhos de modelagem matemática. In.: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, ENEM, 10, 2010, Salvador. **Anais**... Salvador: SBEM, 2010.

VILLA, L.; SILVA, J. T. da; DARROZ, L. M. Educação Financeira no Ensino Médio: uma Proposta Fundamentada na Teoria da Aprendizagem Significativa. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 20, n. 1, p. 56-74, jan. 2018.

VILELA, D. S. **Usos e jogos de linguagem na matemática:** diálogo entre Filosofia e Educação Matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2013.

WITTGENSTEIN, L. **Investigações Filosóficas.** 9. ed. Petrópolis: Vozes, 2014.

CAPÍTULO 2 – ARTIGOS DA DISSERTAÇÃO

2.1 ARTIGO 1

A *COMPREENSÃO* EM WITTGENSTEIN: CONTRIBUIÇÕES TEÓRICAS E REPERCUSSÕES NO ENSINO

Resumo

Neste artigo apresentamos reflexões sobre a constituição da *compreensão* na filosofia de Wittgenstein. Inicialmente, fazemos uma incursão no *Investigações Filosóficas* com a finalidade de buscar caracterizações para a compreensão em Wittgenstein. Em seguida, trazemos ao texto repercussões dessa perspectiva filosófica de compreensão no Ensino. Destacamos que seguir regras convencionadas socialmente em demonstrações públicas de uso da linguagem é o indicativo de compreensão e é na articulação entre a compreensão e sua manifestação, que podemos investigar (como pesquisador) ou avaliar (como professor) a compreensão dos alunos.

Palavras-Chave: Compreensão, Filosofia da Linguagem, Ensino.

THE UNDERSTANDING ON WITTGENSTEIN: THEORETICAL CONTRIBUTIONS AND REPERCUSSIONS IN TEACHING

Abstract

In this paper, we present reflections on it the constitution of understanding in Wittgenstein's philosophy. Firstly, we make a foray into Philosophical Investigations to seek characterizations for understanding in Wittgenstein. Next, we bring to the text repercussions of this philosophical perspective to understanding in Teaching. We emphasize that follow conventional rules socially in public demonstrations of language use it is an indicative of understanding and it is in the articulation between understanding and its manifestation that we may investigate (as a researcher) or evaluate (as a teacher) the students' understanding.

Keywords: Understanding, Philosophy of Language, Teaching.

Introdução

Discussões sobre compreensão podem ser percebidas em diferentes movimentos filosóficos. No empirismo, a compreensão refere-se a um processo de associação, em que "compreender as palavras do outro foi considerado como uma questão de associar as mesmas ideias que o outro associou às palavras que proferiu, e apreender o julgamento que ele expressou por sua elocução (ou seja, tal e tal ideia é afirmada ou negada de outra)" (BAKER; HACKER, 2005, p. 358). Na filosofia contemporânea, a compreensão vem sendo percebida como uma atividade de interpretação das palavras ouvidas e o significado de uma sentença é derivado das palavras interpretadas e de seu modo de combinação (BAKER; HACKER, 2005). Segundo Baker e Hacker (2005), essa maneira de pensar a compreensão dominou as reflexões do século XX, de modo que caracterizações de compreensão remetem a reflexões filosóficas em torno da relação entre linguagem, pensamento e mundo. Particularmente, neste artigo, dirigimos nossa atenção a alguns elementos da filosofia de Ludwig Wittgenstein para discutir o uso do termo *compreensão*.

A filosofia é concebida e exercida por Wittgenstein como uma atividade terapêutica, com o propósito de colocar no divã conceituações e concepções dogmáticas. O ato de filosofar para Wittgenstein, constitui uma atividade que, de ideias confusas ou não esclarecidas, reconduz a um outro caminho para esclarecer essas ideias. Nesse sentido, Gebauer (2013) pondera que a busca da possibilidade de uma ordem no mundo e no pensamento define a atividade filosófica de Wittgenstein.

A partir de 1924 até sua morte em 1951, Wittgenstein em seu ato de filosofar manifesta uma contínua reflexão sobre a relação entre o falante, que age com seu uso linguístico em uma comunidade que tem outros falantes, e consigo mesmo. Ideias confusas são sob esta perspectiva confusões de natureza linguística e podem ser dissolvidas por meio de um exame do funcionamento da linguagem, em contraposição à formulação de teorias novas. Sobre seu entendimento acerca da filosofia, Wittgenstein argumenta que:

> Certo era que nossas reflexões não podiam ser reflexões científicas. A experiência de "que se pode pensar isto ou aquilo em oposição ao nosso preconceito" – não importa o que isto significa – não nos podia interessar. (A concepção pneumática do pensar.) E não nos é permitido levantar qualquer teoria. Não é permitido haver nada hipotético em nossas reflexões. Toda *explicação* tem que sair e em seu lugar entrar apenas descrição. E esta descrição recebe sua luz, isto é, seu objetivo, dos problemas filosóficos. Estes, sem dúvida, não são empíricos, mas são resolvidos por um exame do funcionamento de nossa linguagem, ou seja, de modo que este seja reconhecido: em *oposição* a uma tendência de compreendê-lo mal. Estes problemas não são solucionados pelo ensino de uma nova experiência, mas pela combinação do que há muito já se conhece. A filosofia é uma luta contra o enfeitiçamento de nosso intelecto pelos meios de nossa linguagem (WITTGENSTEIN, 2014, §109, *itálicos do autor*).

O propósito da terapia filosófica a que se dedica Wittgenstein associa-se então a uma possível modificação de ideias dogmáticas que nos aprisionam em concepções essencialistas e metafísicas do pensamento e da linguagem. Wittgenstein (2014), remete a uma metáfora que bem esclarece como podemos nos deparar com outras possibilidades, afirmando que o objetivo da filosofia pode ser comparado ao ato de mostrar à mosca a saída do apanha-moscas[4]. O resultado da terapia filosófica deve possibilitar, segundo Moreno (2004, p. 275), "que se mude a maneira habitual de interpretar os nossos conceitos, e se amplie assim a nossa disposição para pensar outras formas de sentido e, principalmente, para considerar outras formas como sendo legítimas possibilidades de organizar a experiência".

Em consonância com o seu propósito e método filosófico, na sua obra *Investigações Filosóficas*[5] (1953), Wittgenstein submete diferentes temas a terapias específicas, na forma de exemplos, reconduzindo os seus empregos metafísicos para seus empregos cotidianos. Um destes temas é a *compreensão*[6], que surge a partir do seu interesse terapêutico em esclarecer confusões originadas de pensamentos dogmáticos.

Nos discursos educacionais, conforme sugere Roth (2015), o termo *compreensão* é frequentemente usado para se referir a coisas imateriais (metafísicas), como, por exemplo, estruturas mentais, inacessíveis para pesquisadores, professores e estudantes. Aparentemente, estes discursos estão associados à concepção de compreensão como um estado mental oculto ao sujeito que compreende, situado em um mundo transcendental, em uma linguagem privada. Tal ideia se assenta em modelos introspectivos e privados para explicar conceitos psicológicos. Na perspectiva filosófica de Wittgenstein, esses discursos metafísicos são colocados em "xeque", alvos de uma guinada nas reflexões, da introspecção e linguagem privada para a objetividade e linguagem pública. A objetividade de Wittgenstein situa o estudo da compreensão associado a práticas públicas de usos da linguagem.

Neste texto, inicialmente trazemos elementos da filosofia wittgensteiniana que são indicativos de como se constitui a compreensão na filosofia da linguagem de Wittgenstein, particularmente, na sua obra *Investigações Filosóficas*. Na sequência, dirigimos nossa atenção a repercussões desta perspectiva filosófica sobre compreensão no Ensino.

---

[4] "Alude-se aqui a um utensílio para apanhar moscas, que basicamente, consiste num vidro com abertura na parte interior, por onde a mosca entra" (SPANIOL, 1989, p. 91).

[5] A forma de apresentação do livro *Investigações Filosóficas* (1953) não segue uma estrutura linear, convencional de textos filosóficos. As reflexões do filósofo são apresentadas na forma de aforismos, "breves parágrafos, às vezes, em séries mais longas sobre o mesmo objeto, às vezes, em mudanças rápidas, saltando de uma região a outra" (WITTGENSTEIN, 2014, p. 11).

[6] Em sua obra Investigações Filosóficas, os termos "compreensão", "compreender", "entender", "entende", "compreende", "entendo", "compreendo" são citados por Wittgenstein nos aforismos 1, 6, 22, 28, 30, 31, 33, 52, 54, 60, 72, 79, 81, 87, 89, 92, 102, 109, 122, 125, 138, 139, 143, 146, 150-156, 181, 182, 185, 194, 196, 199, 207, 209, 242, 243, 251, 256, 257, 269, 288, 308, 315, 319, 321, 332, 334, 345, 348, 364, 396, 398, 416, 423, 431, 433, 451, 480, 481, 491, 505, 513-517, 525-527, 531-533, 540, 541, 560, 568, 572, 577, 609, 636, 652, 653, 660 da primeira parte e nas páginas 234, 235, 238, 241, 244, 246, 256, 264, 266, 270, 275, 278 da segunda parte. Neste artigo, utilizamos o verbo compreender como sinônimo do verbo entender.

A compreensão em Wittgenstein: uma incursão no Investigações Filosóficas

Na sua obra *Investigações Filosóficas*, Wittgenstein apresenta seus pensamentos em um estilo dialógico com interlocutores 'imaginários' assentado na terapia e auto-terapia filosófica e endereçando objeções à sua obra de juventude *Tractatus Logico-Philosophicus* (1921) e a sistemas filosóficos como os de Santo Agostinho, Gottlob Frege, William James, George Edward Moore, Bertrand Russel, entre outros (MORENO, 2004). É com base nesse movimento analítico que discutimos a constituição do uso do termo *compreensão* na obra *Investigações Filosóficas.*

Duas questões parecem ser o ponto de partida para colocar em movimento o pensamento sobre *compreensão*: O que é compreensão? Como sabemos que alguém compreendeu algo? Para Machado (2007, p. 275), pode-se ponderar que há uma confusão conceitual que separa a compreensão de sua manifestação, "separando questões epistemológicas (sobre a manifestação da compreensão, sobre o modo como ela *aparece*) de questões metafísicas (sobre a compreensão em si mesma, sobre o que ela é)". Ao dissociar a compreensão de práticas públicas de linguagem (manifestação da compreensão), tendemos a conceber a compreensão como um processo mental (incorpóreo) ou fisiológico (corpóreo). Esta concepção é a origem do problema que Wittgenstein procura dissolver, fazendo uma análise gramatical do uso ordinário do termo compreender e mostrando diferenças gramaticais entre a compreensão e estados mentais.

No prefácio do livro *Investigações Filosóficas*, Wittgenstein pondera que seus pensamentos só poderiam ser entendidos tendo seus pensamentos do *Tractatus Logico-Philosophicus* (1921) como pano de fundo. No *Tractatus*, a compreensão de uma proposição implica em analisá-la em unidades mínimas de sentido, uma vez que o sentido de uma proposição (complexa) é derivado do sentido das proposições elementares que a constituem, de acordo com uma estrutura lógica que estabelece a correspondência das proposições elementares com os fatos do mundo. No *Investigações Filosóficas*, essa concepção é modificada, não sendo mais necessária uma análise exaustiva da proposição para compreendê-la, mas é por meio de nossas ações, dos usos que fazemos dessa proposição em práticas linguísticas que a compreendemos. Por exemplo, a frase *minha vassoura está no canto* não é necessariamente uma asserção sobre a posição do *cabo* e da *escova*; se perguntássemos a alguém que proferiu essa frase o que ele tinha em mente, certamente ele diria que "não pensou especialmente no cabo ou especialmente na escova. E esta seria a resposta *correta*, pois ela não queria falar especialmente nem do cabo nem da escova" (WITTGENSTEIN, 2014, § 60, *itálicos do autor*). Segue que, a compreensão da frase *minha vassoura está no canto* independe de uma análise das partes da vassoura, mas depende da atividade envolvida, do contexto e das circunstâncias em que a frase está inserida, isto é, do jogo de linguagem a que a frase pertence.

Com a introdução dos jogos de linguagem, Wittgenstein abandona a busca pela forma geral da proposição pretendida no *Tractatus* e enfatiza o caráter dinâmico e multifacetado da linguagem, em oposição a ideia de significados fixos e únicos. Para o filósofo, o significado de uma palavra está no seu uso em um jogo de linguagem imerso em diferentes atividades, nas quais seguimos regras que orientam o seu uso em um determinado contexto. Ao conjunto de regras de uso de uma palavra, Wittgenstein denomina de gramática, que segundo o autor "diz que espécie de objeto uma coisa é" (WITTGENSTEIN, 2014, § 373) e estabelece os limites de sentido de aplicação de uma palavra. Assim, ao refletirmos sobre a gramática de compreensão, faz se necessário modificar a questão *o que é compreensão?* para *como usamos o termo compreensão ou compreender em diferentes jogos de linguagem?*, tendo como norte a ideia de que o significado de compreensão está no uso que fazemos desse termo e ao olhar para o seu uso, podemos vislumbrar as regras que formam a gramática de compreensão, em detrimento de uma busca de um significado comum e fixo para tudo que chamamos de compreensão.

Essa ideia também é aplicada por Wittgenstein para dissolver a concepção (referencial) de linguagem de Santo Agostinho, cujo significado de uma palavra é determinado pelo objeto que ela designa, que tem como pressuposto que a explicação do significado de uma palavra consiste em elaborar um modelo comum a tudo que queremos significar com essa palavra. Consideremos o exemplo de Wittgenstein sobre as cores, "se alguém me explica o nome das cores apontando para o padrão e dizendo: "Esta cor chama-se 'azul', esta 'verde'...", então este caso pode ser comparado, em muitos aspectos, a ele colocar-me nas mãos uma tabela, na qual as palavras estão sob os padrões de cores" (WITTGENSTEIN, 2014, § 73). Para o autor, o interlocutor está inclinado a dizer que "ter compreendido uma explicação significa possuir um espírito de um conceito que foi explicado, e isto é um padrão ou imagem" (WITTGENSTEIN, 2014, § 73). Essa concepção do interlocutor aproxima-se da ideia de compreensão como processo mental, em que o padrão ou a imagem são condições para empregar futuramente um conceito de forma correta. Contudo, Wittgenstein questiona: "Que forma tem que ter o padrão da cor verde? Deve ser quadrado? Ou seria ele então o padrão para quadrados verdes?" (WITTGENSTEIN, 2014, § 73). Para Wittgenstein, a compreensão do conceito da cor verde pode ser demonstrada por meio da explicação de diferentes espécies de uso da palavra *verde*, não sendo necessário recorrer a uma imagem mental ou a um padrão fixo para compreender o conceito de verde. Nesse contexto, a compreensão de uma palavra ou de um conceito está diretamente relacionada com o jogo de linguagem em que empregamos esta palavra e, nesse sentido, a compreensão da explicação *isto chama-se verde* pressupõe que o indivíduo saiba que se trata de uma explicação dentro do jogo de linguagem das cores.

Chamando atenção para a multiplicidade de usos da palavra *compreender*, Wittgenstein delibera sobre a compreensão, por meio de vários exemplos de uso dessa palavra. Um destes exemplos é a compreensão de um tema musical que se dá sob determinadas circunstâncias. Wittgenstein pondera que a compreensão de um tema musical está vinculada a uma prática musical específica, a um conjunto de instrumentos linguísticos característicos de uma cultura, tais como, gestos, entonações, ritmo, intensidade, instrumentos musicais, costumes, hábitos, entre outros. Um músico profissional talvez reaja a uma peça musical de Chopin, por exemplo, de uma maneira diferente de uma pessoa que apenas goste de assistir peças musicais nos seus momentos de lazer, ou seja, dependendo das circunstâncias e do contexto linguístico, a compreensão de um tema musical pode assumir características diferentes. Em sua obra *Fichas*, Wittgenstein (1981, § 159, *itálicos do autor*) faz um questionamento na posição de interlocutor: "falas de *compreensão* da música. Compreendê-la, certamente, *enquanto* a ouves. Deveríamos dizer que é uma vivência que acompanha a audição?", para o qual a resposta de Wittgenstein é que "é errado chamar compreensão a um processo que acompanha o ato de ouvir. (Claro que a sua manifestação, o tocar expressivo, não pode também chamar-se um acompanhamento do ato de ouvir.)" (WITTGENSTEIN, 1981, §163). Esse posicionamento nos permite inferir que se a compreensão é uma vivência, a natureza dessa vivência é diferente da vivência dos estados mentais, como afirma o filósofo, "o substrato dessa vivência é o domínio de uma técnica [...]. Somente de uma pessoa que é capaz disto e daquilo, que aprendeu e domina isto e aquilo, tem sentido dizer que ela vivenciou isto" (WITTGENSTEIN, 2014, p. 272). Assim, a compreensão de um tema musical pode ser manifestada pela explicação, verbalmente ou não, que o ouvinte é capaz de dar, a qual em conjunto com seu uso pressupõe o domínio de técnicas linguísticas de um jogo de linguagem da música de determinada cultura.

Nos parágrafos 143 a 147 do livro *Investigações Filosóficas*, Wittgenstein faz uma analogia entre compreender uma sequência numérica e ser capaz de continuar essa sequência. A sequência a que Wittgenstein se refere é $\{0, 1, 2, 3, ...\}$ no sistema de numeração decimal, que pode ser considerada segundo a lei de formação $a_n = n$. Inicialmente, Wittgenstein apresenta um jogo de linguagem, em que por ordem de um professor, os alunos devem escrever essa sequência de acordo com a lei de formação. "Como é que alguém aprende a entender este sistema?" (WITTGENSTEIN, 2014, § 143). Primeiramente, o professor escreve uma parte da sequência e os alunos são solicitados a copiar, talvez o professor comece a conduzir sua mão a copiar a sequência de 0 a 9; mas, depois a "possibilidade de entendimento" vai depender de que o aluno continue a escrever a sequência por si mesmo (WITTGENSTEIN, 2014, § 143). Para Wittgenstein, a compreensão da sequência $\{0, 1, 2, 3, ...\}$ se manifesta na reação do aprendiz a um treinamento[7] e pode haver uma reação normal e uma reação anormal do aprendiz. Frequentemente, a expectativa do professor é que as reações normais do aprendiz sejam as reações corretas e o critério de correção é determinado por convenções em uma determinada forma de vida. Dizer que o aprendiz compreendeu algo está conectado com a maneira como ele reage ao treinamento, se ele age normalmente de acordo com o esperado e não de um modo diferente, e isto se dá no seguir regras em práticas públicas de linguagem. "Seguir uma regra, fazer uma comunicação, dar uma ordem, jogar uma partida de xadrez, são *hábitos* (usos, instituições) (WITTGENSTEIN, 2014, § 199, *itálicos do autor*).

Mas como sabemos que o aluno compreendeu a sequência $\{0, 1, 2, 3, ...\}$? No parágrafo 145, Wittgenstein considera o caso em que o aluno escreve a sequência de 0 a 9 no sistema decimal com sucesso, isto é, segundo o autor, se o aluno é capaz de continuar a sequência "com *frequência* e não, se acertar uma em cem tentativas" (WITTGENSTEIN, 2014, § 145, *itálicos do autor*). Supondo que o aluno continua a sequência de acordo com a regra e que o professor continua conduzindo o aluno na sequência, primeiramente chamando a atenção para as unidades e em seguida para as dezenas, o fato de o aluno continuar a sequência frequentemente, não uma única vez, pode ser considerado como uma forma de manifestação de sua compreensão, é por meio disto que podemos julgar se ele compreendeu ou não a sequência, de acordo com a explicação do professor. Nas palavras de Wittgenstein (2014, § 288), "é no uso da palavra que se vai mostrar, como habitualmente acontece, como foi que ele entendeu a explicação", deste modo é no uso da regra que orienta a continuação da sequência que vai se mostrar como ele compreendeu a sequência. Entretanto, até que ponto o aluno tem que continuar a sequência corretamente, como nós o fazemos, para podermos afirmar que ele compreendeu a sequência? "Compreendeu ele o sistema se continua a sequência até o centésimo lugar?" (WITTGENSTEIN, 2014, § 146). O interlocutor responde: "possuir (ou mesmo entender) o sistema não pode consistir no fato de se continuar a sequência até *este* ou até *aquele* número; *isto* é apenas aplicação da compreensão. A compreensão mesma é um estado *do qual* emerge o

[7] Sobre treinamento, Wittgenstein (1981, § 419) pondera que "toda explicação tem seu fundamento no treino". Esse treinamento não é um treinamento na perspectiva behaviorista de Skinner, que se baseia em um modelo de estímulo-resposta, mas se assemelha a uma aprendizagem de regras de caráter público, segundo Tortola (2016), a uma formação.

correto emprego" (WITTGENSTEIN, 2014, § 146, *itálicos do autor*). Ao fazer essa afirmação, o interlocutor separa compreensão (estado) e manifestação da compreensão (correto emprego). Desse ponto de vista, a compreensão é um estado mental em que uma fórmula vem à mente do sujeito e continuar a sequência de acordo com a fórmula algébrica é a manifestação da compreensão.

Nessa concepção da compreensão como um estado mental é como se ao compreender a sequência $\{0, 1, 2, 3, ...\}$, tem-se em mente a fórmula algébrica $a_n = n$ e suas aplicações fossem tomadas de um golpe só. Segundo McGinn (1984, p. 8), nesta ideia, "o uso do signo, que é espalhado ao longo do tempo, supõe-se magicamente contido no meu presente entendimento por força de um ato mental especial [...] – um ato mental no qual meu futuro uso é antecipado de alguma forma". Wittgenstein (2014) se opõe a esse entendimento e pondera que a compreensão não consiste em acionar um mecanismo mental que estabelece *a priori* uma relação causal entre uma ordem a ser seguida e os futuros empregos desta ordem, pois é irrelevante a existência de um mecanismo mental para a compreensão. Essa relação causal tem como pressuposto a concepção de compreensão como um processo mental oculto, no qual apenas o sujeito que compreende tem condições de dizer se compreendeu ou não o signo. Para Wittgenstein, a relação entre a compreensão e o signo é uma relação interna a uma linguagem pública e não uma relação causal situada em uma linguagem privada. Em consonância com esse entendimento, Kenny (1979, p. 137) afirma que "a relação entre os signos e a compreensão é uma relação interna, e as diferenças no modo de operar com os signos são diferenças na compreensão própria". Nesse sentido, a relação entre a compreensão e a manifestação da compreensão se estabelece nos usos que fazemos da linguagem.

Wittgenstein (2014) procura dissolver a concepção de compreensão como um processo mental oculto, em que dizer que uma pessoa compreende a sequência $\{0, 1, 2, 3, ...\}$ significa dizer que lhe ocorre na mente a fórmula algébrica $a_n = n$.

> Alto lá! – se "agora compreendo o sistema", não diz a mesma coisa que "ocorre-me a fórmula..." (ou "profiro a fórmula", "anoto-a" etc.) – segue-se daí que emprego a frase "agora compreendo", ou "agora sou capaz de continuar", como descrição de um processo que existe atrás ou ao lado do processo de articulação da fórmula? [...] Se algo tem que estar "atrás da articulação da fórmula", trata-se então de *certas circunstâncias* que me justificam dizer que sou capaz de continuar, - caso a fórmula me ocorra. [...] Tente uma vez não pensar na compreensão como "processo psíquico"! – É que *este* é o modo de falar que o confunde. Mas pergunta-se: em que caso, em que circunstâncias, dizemos "agora sei continuar"? quero dizer, quando a fórmula me ocorreu. – [...] No sentido em que há para a compreensão processos característicos (também processos psíquicos), a compreensão não é um processo psíquico (WITTGENSTEIN, 2014, § 154, *itálicos do autor*).

Tendemos a crer que a compreensão é um estado mental, devido a certas analogias entre a gramática da palavra *compreender* e a gramática de estados mentais (dor, sentimento, depressão, entre outros), ao usar a expressão *agora compreendo* de forma análoga a expressão *eu sinto dor*. Entretanto, segundo Wittgenstein (2014), há diferenças gramaticais entre a compreensão e estados mentais. Estados mentais são temporais e possuem intensidade, podemos falar de dor forte, de dor fraca, de dores continuas, de dores interrompidas, bem como podem ser empregados em fenômenos experenciais, enquanto a compreensão, por sua vez, não pode ser descrita em termos mentais e não é gramaticalmente correto falar de compreensão em correspondência a experiências e de uma interrupção de compreensão. De acordo Glock (1998, p. 94), “a compreensão linguística não é um ato: não é algo que façamos, voluntária ou involuntariamente. Tampouco é um evento ou um processo, uma vez que não é algo que acontece ou se passa”, mas também não é uma disposição, pois o uso da o uso da proposição *compreendo* ou *agora sei continuar*, segundo Machado (2007, p. 274), não se “baseia na observação (introspecção) do estado do nosso aparelho mental”. Na perspectiva de Wittgenstein, embora certos eventos psicológicos possam acompanhar a compreensão, esses acompanhamentos não podem constituir os critérios de compreensão, pois uma pluralidade de experiências, sentimentos podem ocorrer ao compreender algo, tais eventos psicológicos variam de caso para caso, assim como uma pessoa que ouve uma música pode ter sentimentos diferentes em ocasiões parecidas (KENNY, 1979). Portanto, o que nos resta como critérios para dizer que alguém compreendeu algo são suas ações em práticas públicas de linguagem (manifestação da compreensão).

Tendo em vista que compreender uma sequência $\{0, 1, 2, 3, ...\}$ não consiste em ter em mente uma fórmula algébrica, compreender uma palavra não consiste em ter em mente uma imagem mental do objeto que a palavra designa. A posição de Wittgenstein é que uma imagem mental, em si, não determina o significado da palavra, mas que “o significado de uma palavra é o seu uso na linguagem” (WITTGENSTEIN, 2014, §43). Assim, não é necessário que algum item particular, imagem ou representação, venha a nossa mente para compreendermos algo, pois a compreensão de uma palavra não depende de uma imagem mental, mas do uso dessa palavra em práticas públicas de linguagem. Por outro lado, também não é suficiente que imagens mentais venham a nossa mente para compreendermos algo, pois, para Wittgenstein, ao compreender uma palavra, diferentes imagens podem vir na mente do sujeito que compreende: “quem vê, por exemplo, o desenho de um cubo como figura plana, constituída de um quadrado de dois losangos, talvez cumprirá a ordem “Traga-me tal coisa!” diferentemente de quem vê a imagem espacialmente”. (WITTGENSTEIN, 2014, § 74). Isto se dá, pois nessa perspectiva sugere-se que podemos ver de diferentes modos uma imagem, podemos *ver* a imagem de um *cubo* como figura plana, mas também como uma imagem espacial, apesar das imagens sugerirem certos empregos. De maneira semelhante, no exemplo da sequência, Wittgenstein (2014, § 147) afirma que “podemos simplesmente imaginar mais de uma aplicação da expressão algébrica; e cada aplicação pode de fato ser formulada de novo algebricamente, mas isso não nos leva adiante, é claro”.

As dificuldades da concepção de compreensão do interlocutor de Wittgenstein residem na tentativa de formular condições necessárias e suficientes para o uso de *compreender* como um determinante absoluto, um estado mental independente do contexto linguístico, das circunstâncias e, consequentemente, de sua manifestação. Ao não encontrar tais condições, o interlocutor está inclinado a considerar a compreensão como um processo oculto, inacessível para o outro (MACHADO, 2007). A posição de Wittgenstein é que não é necessário recorrer a estados mentais para falar de compreensão, pois a constituição da regra para o uso de *compreender* se dá de forma entrelaçada com a sua manifestação (usos da linguagem) em certas circunstâncias. Nesse contexto, as frases *agora sou capaz de continuar* e *agora me ocorreu a fórmula* (tenho em mente a fórmula), em geral não têm o mesmo sentido, segundo o filósofo, “dizemos também ‘agora sei continuar, quero dizer, eu sei a fórmula’, como dizemos ‘eu posso andar, isto é, eu tenho tempo’; mas também: ‘Eu posso andar, isto é já estou bastante forte’” [...] (WITTGENSTEIN, 2014, § 183). Disto, podemos ponderar que dizer que alguém compreendeu algo é similar à atribuição de uma capacidade, no sentido de ser capaz de fazer certas coisas em uma atividade linguística. Sistematizando, é possível inferir, com base nas asserções wittgensteinianas que a frase *agora eu compreendo* goza de estreito parentesco com as frases *agora sei continuar, sei a fórmula e agora sou capaz de continuar, sou capaz de dar uma explicação (verbal ou não) sobre um tema musical, sou capaz de empregar o conceito de verde para diferentes coisas.* De acordo com Wittgenstein (2014):

> É evidente que a gramática da palavra “saber” goza de estreito parentesco com a gramática das palavras “poder”, “ser capaz”. Mas também com a gramática da palavra “compreender”. (“Dominar” uma técnica.) (WITTGENSTEIN, 2014, § 150).

Baker e Hacker (2005, p. 53) comentam que compreender uma palavra “não é um estado mental, evento ou processo, mas a capacidade de usá-la de certas maneiras para certos propósitos, assim como saber jogar xadrez é saber mover as peças de acordo com as regras do jogo de xadrez em busca do objetivo de ganhar. Em ambos, uma técnica é dominada”. Compreender uma sentença, mesmo uma sentença de uma só palavra, pressupõe dominar pelo menos uma técnica de uso dessa sentença em um jogo de linguagem. Dominar uma técnica é ser capaz de fazer um movimento em um jogo de linguagem, isto é, saber usar uma sentença de acordo com as regras do jogo de linguagem, convencionadas em uma forma de vida. Compreender a ordem *escreva a sequência dos {0, 1, 2, 3,...}* pressupõe dominar pelo menos uma técnica da aritmética, no sentido de ser capaz de continuar a sequência. Executar a ordem, continuar a sequência é análogo a seguir uma regra, "treina-se para isto e reage-se à ordem de uma maneira determinada" (WITTGENSTEIN, 2014, § 206).

Um exemplo próximo da atividade de continuar uma sequência é a atividade de ler (WITTGENSTEIN, 2014, §§ 156-178), em que o autor busca mostrar a multiplicidade das circunstâncias em torno dos critérios que utilizamos para dizer que alguém compreendeu algo ou que alguém é capaz de ler, traçando um paralelo entre as questões *como sabemos que alguém compreendeu algo?* e *como sabemos que alguém é capaz de ler?*

Wittgenstein (2014) inicia sua reflexão indicando a caracterização do que é ler, segundo o autor, "não incluo em 'ler' a compreensão do sentido do que se lê; mas ler é aqui é a atividade de transformar o que está escrito e impresso em som, de escrever um ditado, copiar algo impresso, de tocar lendo a partitura e coisas do gênero" (WITTGENSTEIN, 2014, § 156). Podemos sintetizar as reflexões de Wittgenstein sobre o que acontece quando alguém lê, por exemplo um jornal, em quatro itens: (i) o leitor lê uma frase e a pronuncia; (ii) o leitor lê uma frase silenciosamente e não a pronuncia; (iii) o leitor lê sem prestar atenção ao que lê; (iv) supomos que este leitor seja um leitor treinado, compare-o com um principiante.

No primeiro e no segundo caso, Wittgenstein (2014, § 156) nos diz que o leitor "leu uma frase quando, enquanto lê, nem fala alto nem fala para si mesmo, mas, em seguida, está em condições de reproduzir a frase literalmente ou de maneira aproximada". Há, no entanto, a possibilidade de o leitor ler a frase sem prestar atenção ao que lê e neste caso, o critério utilizado nas primeira e segunda situações para aferir sobre a atividade de leitura do leitor não se aplicam, pois o leitor não será capaz de reproduzir a frase mais tarde se não prestou atenção no que leu.

No quarto caso, o leitor treinado já domina a técnica de leitura e o principiante, por sua vez, nas palavras de Wittgenstein (2014, § 156) "lê as palavras, soletrando-as, penosamente. – Algumas palavras, no entanto, ele as advinha pelo contexto; ou talvez já saiba o texto parcialmente de cor. O professor diz então que ele não lê as palavras realmente (e, em certos casos, que ele faz de conta que as lê)". Se considerarmos o modo de ler do principiante como um modo legítimo de ler, segundo Wittgenstein, estaremos inclinados a supor que ler é uma atividade mental consciente. Seguindo essa tese, "dizemos acerca do aluno também: "somente ele sabe, naturalmente, se lê realmente, ou se simplesmente diz as palavras de cor"

(WITTGENSTEIN, 2014, § 156) e estamos inclinados a supor que ler é um estado mental oculto, independe do que o aluno diz ou faz. Mas, se assim fosse, então, faz sentido falar de uma primeira palavra que ele realmente leu ou de pontuar no tempo um momento em que ele compreendeu. No entanto, se considerarmos a sugestão de Wittgenstein (2014, § 157), da atividade de ler como uma máquina de leitura, isto é, "reagir aos signos gráficos desta e daquela maneira" (é importante destacar que a máquina de leitura não alude aqui um mecanismo mental ou fisiológico), "a mudança, assim que o aluno começou a ler, foi uma *mudança* de seu comportamento; e não tem sentido falar aqui de uma primeira palavra num novo estado". É com base na mudança do comportamento do aluno que podemos julgar se o aluno é capaz de ler e de lhe atribuir compreensão, como pondera Gebauer (2013), a compreensão está diretamente ligada ao comportamento com ele que reage; ela se caracteriza pela capacidade receptiva do sentido prático. Nesse contexto, Machado (2007) destaca que não se trata apenas de uma mudança de comportamento, mas também de uma diferença nas circunstâncias em que ocorre esse comportamento. De acordo com as circunstâncias, é possível alguém acreditar que sabe ler, mas não ser capaz de, efetivamente, ler, assim como há a possibilidade de alguém acreditar que compreendeu algo e estar enganado. Em diferentes casos, temos diferentes critérios de compreensão.

A concepção de compreensão de que compreender uma sequência é ter em mente a fórmula algébrica como determinante absoluto da apresentação dos termos da sequência, independe do contexto e das circunstâncias, bem como a concepção de compreensão como um estado mental oculto, presente nas frases *só eu sei sobre minha compreensão, só eu sei se sou capaz de continuar a sequência corretamente*, *só eu sei se leio ou não*, reside na insistência em desconectar a compreensão de sua manifestação, buscando fundamentos últimos para compreensão baseados em modelos introspectivos e na noção de regra como uma entidade abstrata situada em um mundo transcendental, tal como os filósofos platônicos advogam. Em contraposição, a investigação filosófica que Wittgenstein faz a respeito do tema *compreensão* desmitifica esta concepção, uma vez que dizer *agora sei continuar, a sequência é determinada pela fórmula*, significa apenas dizer que continuar uma sequência, assim como ler, é uma atividade guiada por regras, de caráter público e não privado, cuja capacidade em segui-las pode ser entendida como compreensão. O mesmo movimento analítico se aplica para o caso da atribuição e auto-atribuição de compreensão, em que nos valemos de critérios públicos circunstanciais para dizer que *alguém compreendeu algo* ou para dizer *eu compreendi*.

Tendo em vista que a manifestação da compreensão está intimamente relacionada com uma atividade linguística, e, nesse sentido, depende das circunstâncias e do contexto em que a atividade é realizada, Wittgenstein (2014) delibera sobre a compreensão mostrando seus diferentes usos, que estão aparentados em maior e menor grau, com base em *semelhanças de família*, como, por exemplo, compreender uma frase linguística, compreender um poema, compreender um tema musical, compreender um teorema matemático, entre outros (WITTGENSTEIN, § 527). Nesses diferentes usos, a compreensão pressupõe o domínio de pelo menos uma técnica, por exemplo, compreender uma frase linguística pressupõe o domínio da técnica de leitura, técnicas sintáticas e semânticas; compreender um tema musical pressupõe o domínio de técnicas de ritmo, de intensidade; compreender um teorema matemático pressupõe o domínio de técnicas da linguagem matemática, como o domínio do simbolismo empregado no teorema. Contudo, há também certas dessemelhanças:

> Falamos da compreensão de uma frase no sentido de que ela pode ser substituída por uma outra que diz o mesmo que ela; mas também no sentido de que ela não pode ser substituída por nenhuma outra. (Tampouco como um tema musical por outro.) [...] Num caso está o pensamento da frase, o que é comum a diversas frases; noutro, algo que somente essas palavras, nessas posições, exprimem. (Entender um poema.) [...] Deste modo, “entender” tem aqui dois significados diferentes? – Prefiro dizer que estes modos de uso de “entender” compõem o seu significado, meu conceito de entender. [...] Pois quero aplicar “entender” para tudo (WITTGENSTEIN, 2014, §§ 531-532).

Nesse sentido, a compreensão se constitui nos seus diferentes usos em uma variedade de jogos de linguagem. Ao buscar semelhanças entre esses usos, podemos ponderar que a compreensão se dá no interior de um jogo de linguagem e se manifesta de acordo com as circunstâncias e o contexto linguístico, podendo ser: “no modo como usamos a palavra, no modo como reagimos quando outros a utilizam, e no modo como a explicamos quando somos solicitados a fazê-lo” (GLOCK, 1998, p. 92).

Por fim, sem a intenção de querer concluir essa discussão sobre a compreensão em Wittgenstein, as deliberações sobre compreensão em torno das questões, não separadas por Wittgenstein: *O que é compreensão?* e *Como sabemos que alguém compreendeu algo?* nos levam a substituir a primeira questão por *Como usamos a palavra compreensão ou compreender em diferentes jogos de linguagem?* e, desta forma, pode constituir um outro modo de ver a compreensão constituído com base nas seguintes reflexões analíticas: i) a gramática da compreensão é diferente da gramática dos estados mentais; ii) os usos do termo *compreensão* ou *compreender* indicam que a compreensão é similar a uma capacidade, uma habilidade que se manifesta em práticas públicas de linguagem.

Repercussões no Ensino de Ciências e Matemática

As contribuições da filosofia de Wittgenstein transcendem o campo da lógica, da filosofia da linguagem e da filosofia da Matemática e são consideradas como perspectiva filosófica no Ensino, particularmente, no Ensino de Ciências (ESPINET; *et al.*, 2012; GÓIS; GIORDAN, 2009; HSU; ROTH, 2012; ROCHA, 2015; WICKMAN; ÖSTMAN, 2002) e no Ensino de Matemática (ALMEIDA, 2014; GOTTSCHALK, 2010, 2018; PALHARINI, 2017; TORTOLA, 2016; VILELA, 2013; entre outros).

No livro *Fichas*, Wittgenstein (1981, p. 412) argumenta “estou a fazer psicologia infantil? – Estou a fazer uma ligação entre o conceito de ensino e o conceito de significado”. A ideia que o significado de uma palavra está no seu uso traz implicações para o ensino da linguagem e, consequentemente, para a compreensão linguística. As articulações entre o ensino e o significado evidenciam os jogos de linguagem nos diferentes usos da palavra *compreender*. Desta forma, apresentamos algumas relações entre a compreensão na perspectiva de Wittgenstein e os jogos de linguagem no Ensino de Ciências e no Ensino de Matemática.

Góis e Giordan (2009), discutem o processo de significação de palavras e símbolos no Ensino de Ciências à luz da perspectiva de Wittgenstein, e apresentam como exemplo o uso da palavra *orgânico* em diversas áreas do conhecimento, “na Química (compostos de carbono), Biologia (organismos), Agroecologia (sem agrotóxicos) e Direito (níveis organizacionais como municípios e estados). O significado da palavra ‘orgânico’ depende de qual jogo de linguagem está sendo utilizado no momento” (GÓIS; GIORDAN, 2009, p. 3). A compreensão do significado da palavra *orgânico* depende dos usos que fazemos dessa palavra nos mais variados jogos de linguagem. No âmbito do ensino de Ciências, segundo os autores, “quando o estudante se depara com um novo uso da palavra ‘orgânico’, no caso dentro da química, ele tentará associar o novo uso com um dos que já lhe são conhecidos, por se tratar da mesma palavra” (GÓIS; GIORDAN, 2009, p. 4). Nesse caso, para os autores, é papel do professor deixar claro nas atividades da sala de aula, “quais são as regras de uso da palavra ‘orgânico’ no jogo de linguagem da química” (GÓIS; GIORDAN, 2009, p. 4).

Wickman e Östman (2002) discutem a mudança de discurso em uma atividade no ensino de Biologia, com base na filosofia de Wittgenstein. A atividade consistiu no estudo da morfologia de insetos e fez parte de um curso de invertebrados, seu objetivo foi classificar cinco insetos diferentes em quatros ordens diferentes e seu desenvolvimento envolveu a construção de relações entre as morfologias dos insetos por meio de semelhanças e diferenças. Nesse exemplo, o desenvolvimento da atividade está intimamente relacionado com a compreensão da morfologia de insetos e com a prática específica da atividade de estabelecer relações entre as diferentes morfologias de insetos, delineando um jogo de linguagem específico da atividade, cuja compreensão envolve um processo de observação empírica, que pode ser entendida como uma técnica característica dessa prática. A compreensão nesse caso é similar a ideia de *ver um aspecto* de Wittgenstein (2014) e se manifesta nos discursos dos estudantes sobre o estabelecimento de relações entre esses aspectos, guiado por uma regra da atividade: classificar os insetos por semelhanças e diferenças. Nesse tipo de atividade científica, as proposições enunciadas, como pondera Araújo (2012, p. 23), "têm por trás uma imagem do mundo, a ciência vem calcada em uma visão de mundo apoiada pela experiência; isso não significa que a experiência por si só seja fonte de verdade ou critério de demarcação científica e sim que nessa área ela tem um emprego adequado, ou seja, ela funciona".

Rocha (2015) investiga a compreensão na Física inspirado na filosofia wittgensteiniana e no contexto da mecânica newtoniana. A autora argumenta que a Física possui várias visões de mundo, que envolve, por exemplo, "a necessidade da simplificação das teorias, do uso da matemática e da filosofia, que permeiam todas as suas grandes áreas e são essenciais para a formação de uma racionalidade" (ROCHA, 2015, p. 68). Essa ideia tem desdobramentos para o Ensino de Física e para a compreensão dos conceitos dessa disciplina:

> se quisermos que haja a compreensão do jogo de linguagem da mecânica clássica ou do eletromagnetismo, por exemplo, devemos inserir o indivíduos nesses jogos"; "para que os estudantes possam agir em um jogo de linguagem [...] coloca-los dentro de uma situação que os faça pensar fisicamente já é, de modo aproximativo, inseri-los na forma de vida da física"; "o ensino de física deve dar extrema importância para o ensino de suas diferentes visões de mundo" (ROCHA, 2015, p. 68).

O ensino de Física é um exemplo de jogo de linguagem que compartilha proposições gramaticais[8] e proposições empíricas[9] e, para Rocha (2014, p. 69), faz parte desse jogo "conhecer a realidade diretamente pela experiência", mas também proposições gramaticais, como proposições da mecânica clássica ou do eletromagnetismo e proposições matemáticas articuladas no jogo de linguagem. A compreensão nesse caso envolve o uso de proposições gramaticais, como regras de descrição para a experiência, mas também, uma visão de mundo

[8]As proposições gramaticais têm função normativa, são regras convencionadas no interior de formas de vida, elas não são passíveis de verificação empírica, mas nos fornecem, conforme Rocha (2014, p. 69), "nos permitem dar sentido às empíricas, bem como estabelecer como as palavras devem ser usadas", por exemplo, a proposição "toda vara tem um comprimento" (WITTGENSTEIN, 2014, § 251), trata-se de uma proposição gramatical, pois não faz sentido dizer o contrário.

[9]As proposições empíricas são descritivas, podem ser falseadas pela experimentação empírica, por exemplo, a proposição "esta mesa tem o mesmo comprimento que a mesa acolá" (WITTGENSTEIN, 2014, § 251) é uma proposição empírica, uma vez que é passível de uma verificação empírica.

da ciência ancorada na experiência como método científico. O uso de um tipo ou outro de proposição vai depender da situação em jogo e das circunstâncias em que esse uso é feito.

Na Educação Matemática, considerar a perspectiva de Wittgenstein para discutir a compreensão e, particularmente a linguagem matemática, implica refletir sobre a linguagem e seus usos, uma vez que, é por meio da linguagem que explicamos, descrevemos e inferimos e nos manifestamos.

Por exemplo, Gottschalk (2018) ao refletir sobre a natureza dos enunciados matemáticos, supõe uma situação em que o professor desenha dois pontos na lousa e pede a um aluno que trace uma reta passando por eles. Nessa situação, a autora enfatiza que "podemos imaginar facilmente que o aluno imediatamente comece a desenhar várias delas passando pelos dois pontos colocados pelo professor. Uma vermelha, outra azul, outra amarela e assim por diante. Todas superpostas" (GOTTSCHALK, 2018, p. 144). Somos tentados a crer que o aluno não compreendeu a ordem ou a compreendeu incorretamente, no entanto vejamos em que circunstâncias dizemos isso: o aluno, no caso, como pondera Gottschalk (2018), está começando a aprender geometria e possivelmente o professor ainda não tenha apresentado o teorema da geometria euclidiana *por dois pontos quaisquer, deve passar uma única reta*. Para Gottschalk (2018), podemos dizer que o aluno não compreendeu a ordem do professor, pois está seguindo uma regra diferente da apresentada pelo professor. Nesse contexto, inferimos que o aluno compreendeu ou não com base em sua reação e, nesse caso, com base em uma reação anormal, não esperada pelo professor, que pode, por sua vez, intervir e enunciar o teorema *por dois pontos quaisquer, deve passar uma única reta*, mostrando ao aluno o uso correto do teorema. Dizemos que o aluno compreendeu o enunciado do teorema, se o aluno é capaz de traçar uma única reta por dois pontos nesta e em outras situações, frequentemente e não uma única vez, isto é, se o aluno é capaz de seguir a regra matemática explicitada pelo professor em diferentes situações, reagindo normalmente de acordo com a expectativa do professor. Ao fazê-lo, o aluno emprega técnicas e procedimentos matemáticos (como desenhar a reta e o ponto), em certas circunstâncias (se o aluno compreende o conceito de reta e de ponto, se o aluno compreende a palavra *traçar*), imersos em um jogo de linguagem, que nesta situação, é o da Geometria Euclidiana, no qual o emprego correto da regra é convencionado na forma de vida dos matemáticos, não sendo necessário recorrer a qualquer fundamento extralinguístico ou mental para inferir se o aluno compreendeu ou não o enunciado.

Partindo desse entendimento, no ensino de Matemática, a compreensão em Matemática pode ser interpretada como uma capacidade de emprego correto de regras matemáticas, convencionadas na forma de vida dos matemáticos, em uma multiplicidade de usos, seja no interior da linguagem matemática ou como condição de sentido para situações empíricas. Nessa linha, Gottschalk (2010, p. 79) pondera que falar de compreensão em conexão com atividades linguísticas, pressupõe uma capacidade de aplicar regras em "diferentes circunstâncias, no interior de determinados jogos de linguagem". Em relação à Matemática, a compreensão de suas proposições difere da compreensão em ciências empíricas[10], como no caso da química, biologia e física, uma vez que as proposições matemáticas independem de qualquer descrição da experiência, mas, de acordo com a autora, tais proposições tem "função normativa. Elas próprias não tem sentido, são apenas *condições de sentido*" (GOTTSCHALK, 2010, p. 79, *itálicos da autora*). É na aplicação de regras em uma determinada *forma de vida* ou em um jogo de linguagem que a Matemática adquire sentido e pode ser compreendida. Assim, a compreensão em Matemática constitui um modo de *ver* o mundo, que se manifesta no seguir regras da Matemática em pelo menos um jogo de linguagem.

Nesse sentido, Silveira (2014, p. 71) sugere que no ensino de Matemática "o professor deve refletir atentamente sobre os problemas de ordem linguística quando ensina matemática, já que ele não estabelece um jogo de linguagem, mas introduz o aluno a um jogo já estabelecido". Na perspectiva do aluno, a autora indica que a linguagem matemática é um conjunto de símbolos codificados que precisam ser traduzidos pelo professor para a linguagem natural, "com o objetivo de esclarecer o texto matemático" (SILVEIRA, 2014, p. 60). O símbolo matemático $\int f(x)dx$, por exemplo, pode ser traduzido para linguagem natural como *integral indefinida da função* f *de uma variável em relação a variável* x e nesse processo de tradução, há uma interpretação do professor em relação ao símbolo e da regra matemática que rege seu uso, bem como uma interpretação do aluno relativa à interpretação do professor. Palharini (2017, p. 272) argumenta que uma das preocupações da reflexão sobre os usos da linguagem matemática no ensino de Matemática está na "tradução entre linguagens que o aluno deve fazer a fim de interpretar e compreender os textos, as regras e os conceitos matemáticos". Quando o professor interpreta a regra matemática corretamente, sem deturpar os sentidos da regra na linguagem matemática, ele fornece aos alunos elementos para a compreensão do conceito que está sendo ensinado.

[10] Ao discorrer sobre as ciências empíricas, Gottschalk (2010, p. 77) enfatiza que "faz parte do jogo de linguagem das ciências empíricas recorrer ao empírico como critério de legitimação de suas proposições, o que não ocorre com os princípios da matemática. A lei da gravidade tem uma pretensão explicativa e descritiva e, à medida que suas implicações remetem a fatos empíricos que são verificados, estes confirmam a lei e, assim, conferem-lhe sentido. Já no caso de axiomas e demais proposições da matemática, não se recorre à experiência para confirmá-los".

Oliveira (2010), ao investigar a produção de sentidos de alunos em atividades investigativas nas aulas de matemática destaca uma preocupação com a pluralidade de sentidos que os alunos podem atribuir às coisas, na comunicação com o professor. Segundo a autora, a linguagem matemática "possui, de maneira muito perceptível [...] usos linguísticos peculiares e organização simbólica própria, evidenciando as questões acerca das especificidades da sintaxe, da semântica e a da pragmática da linguagem matemática" (OLIVEIRA, 2010, p. 51), enquanto a linguagem natural, por sua vez, é polissêmica e pode ter diferentes significados de acordo com o jogo de linguagem em que as expressões estão sendo empregadas (SILVEIRA, 2014). Como a compreensão de um conceito matemático se manifesta no seu emprego correto, a regra matemática subjacente a este conceito deve ser seguida ao interpretar textos matemáticos e não pode ter um sentido diferente do convencionado na forma de vida dos matemáticos. É com base na ação do aluno em atividades linguísticas, que podemos saber se o aluno compreendeu a regra e esta avaliação depende das circunstâncias e do contexto linguístico na atividade realizada. A forma como a compreensão dos alunos se manifesta pode ser no modo como os alunos usam o conceito, na reação a um treinamento e na explicação de seu significado (GLOCK, 1998). Nesse contexto, enfatizamos ser necessário que os professores ouçam e vejam as ações de seus alunos para saber o que eles não compreendem.

Uma vez que a compreensão se associa a um seguir regras adequadamente, o desenvolvimento da capacidade de seguir regras vem ancorado em uma fonte de informação, de esclarecimento que, na sala de aula tem como referência maior o professor. Esse entendimento de compreensão, entretanto, também se torna evidenciado na autonomia do aluno, no sentido de ser capaz de empregar os conceitos em diferentes jogos de linguagem. Nesse sentido, o desenvolvimento de atividades de ensino que fomentem os usos de conceitos da linguagem matemática, biológica, química e física em diferentes jogos de linguagem podem contribuir para a compreensão desses conceitos em que diferentes visões de mundo podem ser compartilhadas (ALMEIDA, 2014; ESPINET; et al, 2012; PALHARINI, 2017; TORTOLA, 2016) . Em outras palavras, a compreensão no Ensino de Ciências e no Ensino de Matemática fornece aos alunos um *modo de ver* situações do mundo que os cerca, ancorado em uma variedade de instrumentos linguísticos característicos de uma forma de vida. Nas Ciências Naturais, por exemplo, esse *modo de ver* pode se basear em certas experiências, que cumprem determinada finalidade. Já na Matemática, esse *modo de ver* envolve, por exemplo, o uso de proposições matemáticas, que são condições de sentido para proposições empíricas.

Nesse sentido, entendemos ser importante, em práticas pedagógicas, a criação de um ambiente em que diferentes *modos de ver* podem ser postos em diálogo, de modo a possibilitar aos alunos diferentes *modos de ver* e uma mudança nos seus modos de agir. Para Silveira (2014, p. 63), “a sala de aula não pode ser guiada apenas pela voz do professor. É importante que os alunos expressem como entendem o que o professor explicou”. A partir da explicação do aluno, o professor pode usar estratégias para corrigir possíveis equívocos ou para introduzir novas técnicas para que os alunos passem a compreender e a agir corretamente de acordo com a regra convencionada na forma de vida da comunidade matemática. No âmbito do Ensino de Ciências, tendo em vista que a linguagem é um modo de ação, isto implica em dar voz aos alunos, permitindo-lhes usar a linguagem para construir sistemas pessoais e compartilhados para interpretar fenômenos naturais (HSU; ROTH, 2012).

Segundo Wittgenstein (1989, § 175), a compreensão pressupõe “uma familiaridade com inferências, com confirmações, com respostas”. No contexto da sala de aula, esses aspectos são intermediados por um intercâmbio linguístico entre o aluno, o professor e conceitos, procedimentos e técnicas da disciplina em estudo. Desta forma, a sala de aula pode ser interpretada como um jogo de linguagem e jogar esse jogo envolve um conjunto de ações, por meio dos mais variados instrumentos linguísticos.

Na perspectiva de Wittgenstein, a compreensão se dá e pode ser avaliada em práticas públicas de linguagem. No Ensino de Ciências e na Educação Matemática, esta perspectiva coloca os usos da linguagem no centro dos debates e das argumentações relativas às práticas de ensino, considerando que é por meio de ações concretas do aluno em práticas públicas de linguagem, em certas circunstâncias, que podemos inferir sobre a compreensão dos alunos. Esses aspectos indicam a importância de valorizar na Educação Matemática e no Ensino de Ciências, interações entre o professor, o aluno e a linguagem e é na articulação entre a compreensão e sua manifestação, que podemos investigar (como pesquisador) ou avaliar (como professor) a compreensão dos alunos.

Nesse artigo, refletimos sobre a constituição da compreensão na filosofia de Wittgenstein e suas repercussões no Ensino. Em síntese, ponderamos que a compreensão se constitui nos usos que fazemos dessa palavra em diferentes contextos linguísticos, que fornecem características da compreensão, que em conjunto, nos permitem traçar um paralelo entre a gramática de *compreender e* a gramática de *ser capaz de* fazer certas coisas, com determinados propósitos, em pelo menos um jogo de linguagem. Ao refletirmos sobre as repercussões no Ensino dessa perspectiva de compreensão, destacamos as influências dos jogos de linguagem do Ensino de Ciências e do Ensino de Matemática na compreensão dos alunos, contribuindo para um modo de pensar o Ensino, baseado em considerações linguísticas sobre as Ciências naturais e a Matemática; o papel do professor no ensino de conceitos, procedimentos e regras; e o uso de atividades de ensino no ambiente de sala de aula.

Referências

ALMEIDA, L. M. W. The ‘Practice’ of Mathematical Modeling Under a Wittgensteinian Perspective. **International Journal for Research in Mathematics Education**, SBEM, v. 4, n. 2, p. 98-113, 2014.

ARAÚJO, I. L. Wittgenstein, o Conhecimento na Relação entre Linguagem e Realidade. Em: VALLE, B.; MARTÍNES, H. L.; PERRUZO JÚNIOR, L. (Org.). **Ludwig Wittgenstein**: Perspectivas. 1 ed. Curitiba: Editora CRV, 2012. p. 11-29.

BAKER, G. P.; HACKER, P. M. S. **Wittgenstein: Understanding and meaning: Volume 1 of an analytical commentary on the philosophical investigations, part I: Essays**. Oxford: Blackwell Publishing, 2005.

ESPINET, M.; IZQUIERDO, M.; BONIL, J.; ROBLES, S. L. R. The role of languagem in modeling be natural world: perspectives in Science Education, In: FRASER, B. J.; TOBIN, K. G.; MCROBBIE, C. J. (Eds.). **Second International Handbook of Science Education**, London: Springer, 2012. p. 1385-1405.

GLOCK, Hans-Johann. **Dicionário Wittgenstein.** Tradução, Helena Martins; revisão técnica, Luiz Carlos Pereira. - Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1998.

GEBAUER, G. **O pensamento antropológico de Wittgenstein**. São Paulo: Edições Loyola, 2013.

GÓIS, J.; GIORDAN, M. Wittgenstein e os processos de significação no Ensino de Ciências. Em: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS, 7., 2009, Florianópolis. **Anais**... Florianópolis: UFSC, 2009.

GOTTSCHALK, C. M. C. O papel do método no ensino: da maiêutica socrática à terapia wittgensteiniana. ETD: **Educação Temática Digital**, Campinas, v. 12, n. 1, p. 64-81, 2010.

GOTTSCHALK, C. M. C. A atividade matemática escolar como introdução de paradigmas na linguagem. **Educação, Ciência e Cultura**, Canoas, v. 23, n. 1, p.113-124, 2018.

HSU, P. L; ROTH, W. M. Understanding beliefs, identy, conceptions and motivations from a discursive psychology perspective. In: FRASER, B. J.; TOBIN, K. G.; MCROBBIE, C. J. (Eds.). **Second International Handbook of Science Education**, London: Springer, 2012. p. 1435-1451.

KENNY, A. **Wittgenstein.** Tradução de: Alfredo deãno. - Madrid: Revista de Occidente, 1979.

MACHADO, A. N. **Lógica e forma de vida:** Wittgenstein e a natureza da necessidade lógica e da filosofia. Porto Alegre: Unisinos, 2007.

MORENO, A. R. Uma concepção de Atividade Filosófica. **Cad. Hist. Fil. Ci**, Campinas, v. 14, n. 3, p. 275-302, 2004.

MCGINN, C. **Wittgenstein on meaning.** England: Blackwell, 1984.

OLIVEIRA, M. de S. **Interpretação e comunicação em ambientes de aprendizagem gerados pelo processo de modelagem matemática**. 2010. 126 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Pará, Belém, 2010.

PALHARINI, B. N. **A Matemática em atividades de modelagem matemática**: uma perspectiva wittgensteiniana. 2017. 316 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

ROCHA, M. N. **A necessidade do pensamento filosófico para a compreensão da Física: um estudo inspirado em Wittgenstein no contexto da mecânica newtoniana**. 2015. 156 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

ROTH, W. Heeding Wittgenstein on "Understanding" and "Meaning": A Pragmatist and Concrete Human Psychological Approach in/for Education. **Outlines - Critical Practice Studies**, v. 16, n. 1, p. 26-52, 2015.

SILVEIRA, M. R. A. Tradução de textos matemáticos para a linguagem natural em situações de ensino e aprendizagem. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v.16, n.1, p. 47-73, 2014.

SPANIOL, W. **Filosofia e Método no segundo Wittgenstein**. São Paulo: Loyola, 1989.

TORTOLA, E. **Configurações de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2016. 304f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

VILELA, D. S. **Usos e jogos de linguagem na matemática:** diálogo entre Filosofia e Educação Matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2013.

WICKMAN, P. O.; ÖSTMAN, L. Learning as a discurse change: a sociocultural mechanism. **Science Education**, v. 88, n. 5, p. 601-623, 2002.

WITTGENSTEIN, L. **Fichas (Zettel)**. Lisboa. Edições 70, 1989.

WITTGENSTEIN, L. **Investigações Filosóficas.** 9. ed. Petrópolis: Vozes, 2014.

2.2 ARTIGO 2

A COMPREENSÃO DOS ALUNOS EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA: UMA PERSPECTIVA WITTGENSTEINIANA

Resumo

Nesse artigo investigamos, sob uma perspectiva wittgensteiniana, a compreensão dos alunos em atividades de modelagem matemática desenvolvidas em uma disciplina de Matemática Financeira de um curso de Licenciatura em Matemática. Com base na análise de conteúdo, analisamos duas atividades de modelagem matemática desenvolvidas por nove alunos que deram origem a três categorias que detalham a compreensão dos estudantes em atividades de modelagem matemática: compreensão da situação-problema, compreensão de conceitos da Matemática Financeira e da Matemática; compreensão do fazer modelagem matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática, Modelagem matemática, compreensão, Wittgenstein.

THE STUDENTS' UNDERSTANDING IN MATHEMATICAL MODELLING ACTIVITIES: A WITTGENSTEINIAN PERSPECTIVE

Abstract

In this paper we investigate, from a Wittgensteinian perspective, students' understanding of mathematical modelling activities developed in a Mathematical Financial subject of a Mathematics Degree course. Based on the content analysis, we analyzed two mathematical modeling activities developed by nine students from that three categories that detail students' understanding in mathematical modeling activities: the understanding of the problem situation, the understanding of the concepts of Financial Mathematics and Mathematics; the understanding of know how to make mathematical modelling.

Keywords: Mathematics Education, Mathematical Modelling, understanding, Wittgenstein.

Introdução

A introdução nas práticas pedagógicas de atividades que fomentem o uso da matemática para resolver problemas da sociedade, do cotidiano e de diferentes áreas do conhecimento tem sido um discurso recorrente. Uma possibilidade de fazer tal abordagem é por meio da modelagem matemática, tendo em vista o entendimento de que "classicamente, o propósito da modelagem matemática é capturar, representar, entender, ou analisar fenômenos extra-matemáticos [...] como meio para responder questões práticas, intelectuais ou científicas" (NISS, 2015, p. 67).

Considerando que no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática linguagens, problemáticas, interesses, objetivos e ações entram em jogo, as discussões sobre modelagem matemática têm explorado diferentes aspectos, tais como, caracterizações e perspectivas de modelagem matemática (BLUM, 2015; KAISER; SIRARAMAN, 2006; POLLAK, 2012), uso da linguagem e seus desdobramentos para o *fazer* modelagem matemática e o uso da matemática em atividades de modelagem matemática (ALMEIDA, 2014a, 2018; ALMEIDA; PALHARINI; TORTOLA, 2015; SOUZA, 2018; TORTOLA, 2016) a compreensão em atividades de modelagem matemática (BROWN; EDWARDS, 2011; BROWN, 2017; COSTA, 2016), entre outros.

No que tange à compreensão em atividades de modelagem matemática, Brown e Edwards (2011) e Brown (2017) consideram, sob uma perspectiva cognitivista, que ela envolve processos de pensamento relacionados ao conhecimento da temática envolvida na situação-problema, das estratégias a serem tomadas no desenvolvimento da atividade e do conteúdo matemático que emerge da atividade.

Costa (2016) investiga a compreensão de alunos acerca da Matemática e do problema em atividades de modelagem matemática à luz da teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval. Nessa perspectiva, a compreensão em Matemática é entendida como a capacidade do aluno em mudar de um registro de representação semiótica para outro, e de reconhecer o mesmo objeto matemático em diferentes registros.

Esses estudos indicam possibilidades de investigação acerca da compreensão dos alunos em atividades de modelagem matemática, sob diferentes bases teóricas e filosóficas. Neste artigo, nos fundamentamos nas reflexões do filósofo Ludwig Wittgenstein considerando sua perspectiva filosófica a respeito da compreensão. Olhar para a compreensão, sob essa perspectiva, implica considerar as ações dos alunos em uma prática linguística. Diante disso, temos como objetivo *investigar a compreensão dos alunos em atividades de modelagem matemática desenvolvidas em uma disciplina de Matemática Financeira de um curso de Licenciatura em Matemática.* Para tanto, abordamos inicialmente a perspectiva wittgensteiniana acerca de compreensão e aspectos teóricos sobre Modelagem Matemática.

A compreensão na filosofia de Wittgenstein

Ludwig Joseph Johann Wittgenstein (1889-1951) foi um filósofo austríaco e dentre os temas foco de sua filosofia, está a discussão da confusão conceitual que se estabelece na concepção de compreensão como uma experiência, processo ou estado mental

(WITTGENSTEIN, 2014, p. 86, § 149, §§ 152-154). Machado (2007, p. 275) argumenta que a confusão surge ao separar a compreensão de sua manifestação, na busca de condições necessárias e suficientes para a compreensão como um determinante absoluto, um estado mental oculto independente do contexto linguístico. Wittgenstein se propõe a dissolver essa concepção, mostrando, por meio de exemplos variados, diversos usos da palavra *compreensão*, associados entre si por parentescos, *semelhanças de família*, que em conjunto nos permitem ter uma *visão panorâmica* a respeito do tema. Seguindo esse movimento analítico de Wittgenstein, alguns exemplos podem permitir detalhar características da compreensão, bem como de sua manifestação.

Consideramos o exemplo dado por Gottschalk (2018b) em que em uma atividade matemática em sala de aula o professor apresenta a seguinte sequência de números para seus alunos: 1, 4, 9, 16.... e pede para que eles continuem a sequência. Como sabemos se os alunos compreenderam a ordem do professor? Um critério que podemos utilizar é se os alunos continuam a sequência corretamente, se reagem normalmente a explicação do professor; outro critério é se ocorre a aplicação da fórmula algébrica $y = x^2$ de acordo com o convencionado matematicamente. Isso não quer dizer que os alunos tenham em mente a fórmula algébrica $y = x^2$, como se ela determinasse todas as passagens da sequência, mas que seguiram uma regra. Para Moreno (2000, p. 67), uma regra fornece uma orientação sobre como continuar a sequência, assim como as placas de trânsito fornecem indicativos de direção e não de um trajeto único e fixo. Para este autor, “é assim, de fato, que nos comunicamos: fazemo-nos compreender e compreendemos nosso interlocutor” (MORENO, 2000, p. 67). Os critérios de compreensão da sequência não são fixos, mas dependem das circunstâncias (quando os alunos aprenderam álgebra, se os alunos já usaram a fórmula anteriormente) e do contexto em que a atividade é realizada (WITTGENSTEIN, 2014, § 179). Em circunstâncias diferentes a compreensão pode seguir critérios diferentes (MACHADO, 2007).

Os critérios que utilizamos para dizer que alguém compreendeu algo podem ser aplicados a práticas linguísticas específicas, de acordo com diferentes instrumentos linguísticos. Para mostrar o caráter dinâmico da linguagem relacionado à compreensão, Wittgenstein (1981, §§ 159-165) recorre ao exemplo da compreensão de um tema musical. Compreender um tema musical vincula-se a um conjunto de instrumentos linguísticos característicos de uma cultura, tais como, gestos, entonações, ritmos, intensidades, instrumentos musicais, costumes, hábitos, entre outros. Um critério que podemos recorrer para aferir sobre a compreensão do ouvinte é a explicação que ele é capaz de dar, verbalmente ou não (gesticulando, dançando, entre outros).

De acordo com Fatturi (2012, p. 55), “as explicações de significado são demonstrações de compreensão de significado, e ao mesmo tempo de regras de uso”, e podemos dizer que essa explicação encontra seu fundamento na cultura, no caso da música na forma que o ouvinte é educado musicalmente. É nesse sentido que Wittgenstein (1981, § 163) afirma que “compreender uma frase musical é também compreender uma linguagem”.

Neste contexto, a compreensão de uma ordem, um tema musical, um teorema matemático, entre outras coisas, depende das práticas de usos da linguagem. Essas práticas de uso configuram o que Wittgenstein denomina de *jogos de linguagem*, evidenciando como a linguagem está conectada com a ação de diversos modos (ARAÚJO, 2012). Esta conexão nos fornece, em certas circunstâncias, os critérios de atribuição de compreensão.

Para Wittgenstein (2014, § 199) compreender uma frase significa, também, compreender uma linguagem (ou um jogo de linguagem), e compreender uma linguagem significa dominar pelo menos uma técnica de emprego da frase. Assim, a gramática de *compreender algo* é similar à gramática de *ser capaz de* fazer algo em determinadas situações. Segundo Wittgenstein (2014, § 150), “é evidente que a gramática da palavra “saber” goza de estreito parentesco com a gramática das palavras “poder”, “ser capaz”. Mas também com a gramática da palavra “compreender”. (“Dominar” uma técnica.)”.

No caso, por exemplo, de uma palavra, sua compreensão está associada a “capacidade de usá-la de certas maneiras para certos propósitos, assim como saber jogar xadrez é saber mover as peças de acordo com as regras do jogo de xadrez em busca do objetivo de ganhar. Em ambos, uma técnica é dominada” (BAKER; HACKER, 2005, p. 53).

Assim, na perspectiva de Wittgenstein, a compreensão está intimamente conectada com a capacidade de agir de determinados modos no interior de um jogo de linguagem e ela se manifesta de acordo com as circunstâncias e o contexto linguístico, podendo ser: “no modo como usamos a palavra, no modo como reagimos quando outros a utilizam e no modo como a explicamos quando somos solicitados a fazê-lo” (GLOCK, 1998, p. 92).

Na Educação Matemática, interlocuções entre a filosofia de Wittgenstein e a Modelagem Matemática têm fornecido elementos para pensar a modelagem matemática como uma maneira de organizar situações empíricas, por meio da matemática escolar (SOUZA; BARBOSA, 2014), como um jogo de linguagem (ALMEIDA, 2014b; SOUZA, 2018 TORTOLA, 2016), em que a ideia de *uso* é colocada no centro dos debates, a respeito do uso da linguagem, da matemática e seus procedimentos e da própria modelagem matemática (ALMEIDA, 2014a; ALMEIDA; PALHARINI; TORTOLA, 2015; SOUZA, 2018). Dessa maneira, nossa investigação se move no sentido de ampliar essas interlocuções para o contexto da compreensão de alunos em atividades de modelagem matemática, considerando como critérios de compreensão as ações dos alunos envolvidas nos usos da linguagem no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Modelagem Matemática na Educação Matemática

Ao considerar as atividades de modelagem matemática como jogos de linguagens, Almeida (2014b, p. 253) indica que "a busca por entendimento sobre o que é modelagem matemática depende de como cada um olha (ou é convidado a olhar) para esses jogos". O olhar que dirigimos à modelagem está pautado em seu entendimento como uma alternativa pedagógica, que faz uma abordagem por meio da matemática de uma situação-problema não essencialmente matemática (ALMEIDA, 2010); e ancorado na ideia de que uma atividade de modelagem matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (situação-problema), uma situação final (resposta para o problema identificado na situação inicial) e um conjunto de procedimentos, conceitos e ações que intermediam essa passagem, tais como, a escolha de um tema, coleta de dados, formulação de um problema, identificação de variáveis, formulação de hipóteses, elaboração de um modelo matemático[11], interpretação dos resultados, validação do modelo matemático e comunicação dos resultados (ALMEIDA, 2010).

A caracterização de modelagem matemática assumida se aproxima das argumentações de Pollak (2012) de que, nas atividades, inicialmente os alunos precisam decidir quais aspectos da situação-problema são mais importantes e mantê-los. Em seguida, há a matematização, em que os alunos traduzem aspectos da situação-problema em termos matemáticos, levando a elaboração de um modelo matemático. Por fim, os alunos precisam traduzir os resultados matemáticos para o contexto da situação-problema, obtendo uma resposta para o problema inicial.

Nesse contexto, o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática envolve transições entre a linguagem natural da situação inicial e a linguagem matemática, estabelecendo um diálogo entre a matemática e nosso conhecimento da realidade (ALMEIDA, 2018; TORTOLA, 2016), bem como pode constituir, sob uma perspectiva wittgensteiniana, um modo de ver as situações com base em um sistema matemático (TORTOLA; ALMEIDA, 2018; SOUZA; BARBOSA, 2014).

---

[11]Um modelo matemático pode ser entendido como um sistema conceitual expresso por meio de uma linguagem matemática que tem como finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

Na literatura, pesquisas têm indicado que o uso da modelagem matemática em diferentes contextos educacionais pode ser feito de acordo com diferentes objetivos ou perspectivas (KAISER; SRIRAMAN, 2006, BLUM, 2015). Galbraith (2012) incorpora as diferentes perspectivas em dois gêneros ou abordagens, modelagem como *veículo* e como *conteúdo*.

Como veículo, tendo as necessidades curriculares como norte para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, a matemática deve ser incorporada em algum contexto para auxiliar e eliciar o desenvolvimento do conteúdo matemático (GALBRAITH; STILLMAN; BROWN, 2010). Nesse ponto de vista, “algumas partes de um processo de modelagem, ou aspectos relacionados à modelagem, são usados para aprimorar a aprendizagem de conceitos matemáticos ou processos que fazem parte da matemática curricular” (GALBRAITH, 2012, p. 13). Já a modelagem matemática como conteúdo, "se propõe a capacitar os alunos a usar seus conhecimentos matemáticos para resolver problemas reais e dar continuidade ao desenvolvimento dessa capacidade ao longo do tempo" (GALBRAITH, 2012, p. 13), o foco nesse caso é o aprender fazer modelagem matemática e o usar a matemática, técnicas e procedimentos da modelagem matemática para resolver problemas não matemáticos.

Seja como conteúdo ou seja como veículo, o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em contextos educacionais envolve, dentre outras coisas, a investigação de uma situação real, por meio da matemática, em que, “a matemática utilizada não pode ter sido previamente escolhida ou definida; em vez disso, a matemática necessária emerge do problema e suas especificidades” (ALMEIDA, 2018, p. 19), diferentes resoluções e soluções podem surgir e, nesse sentido, “percepções diferentes de uma situação do mundo confuso e critérios diferentes para o que constitui uma solução aceitável podem surgir em quase todas as situações” (ALMEIDA, 2018, p. 19).

Na literatura, pesquisas indicam que em atividades de modelagem matemática os alunos podem compartilhar e comunicar diferentes percepções da situação inicial, procedimentos e conceitos matemáticos na busca de uma solução para o problema, contribuindo para o desenvolvimento de habilidades de comunicação e tomada de decisões e para modificações nas estratégias de resolução e na compreensão de conceitos matemáticos usados na atividade (FERRUZZI; ALMEIDA, 2015; SCHUKAJLOW; KRUG, 2012).

Consideramos que as ações dos alunos, os usos da linguagem matemática e da linguagem natural, as explicações e a interatividade promovida pelo trabalho cooperativo em atividades de modelagem matemática viabilizam a investigação da compreensão dos alunos nessas atividades à luz da perspectiva de Wittgenstein (2014), tendo em vista que, ser capaz de fazer um movimento no jogo de linguagem da modelagem matemática, sob determinadas circunstâncias pode constituir elementos para atribuir compreensão aos alunos. Este fazer não segue necessariamente um quadro fixo e único de referência, mas depende dos objetivos, interesses, problemáticas, usos da linguagem mobilizados pelos alunos e professores em uma forma de vida (ALMEIDA, 2014a; ALMEIDA; PALHARINI; TORTOLA, 2015; SOUZA, 2018).

Procedimentos metodológicos

Para investigar a compreensão de alunos em atividades de modelagem matemática, desenvolvemos uma pesquisa empírica com nove alunos de uma disciplina de Matemática Financeira de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública do norte do Paraná, no ano de 2018. Foram desenvolvidas cinco atividades de modelagem das quais duas foram escolhidas para serem analisadas nesse artigo.

O objetivo do professor com as atividades de modelagem matemática foi viabilizar o ensino e a aprendizagem de conceitos da disciplina de Matemática Financeira. As duas atividades a que nos referimos neste artigo tiveram os temas *Micro Cervejaria Artesanal* e *Financiamento de Veículos*, sendo estes temas escolhidos pelos próprios alunos. Os alunos foram organizados em dois grupos, sendo: Grupo 1 (G1) – A2, A4, A5, A6 e Grupo 2 (G2) – A1, A3, A7, A8, A9.

Para subsidiar nossas argumentações, consideramos os registros escritos produzidos pelos alunos, gravações de áudio e vídeo, aplicação de um questionário e realização de uma entrevista. A análise das informações coletadas seguiu os encaminhamentos da análise de conteúdo de acordo com Bardin (2011).

A análise de conteúdo, segundo Bardin (2011, p. 15), é “um conjunto de instrumentos metodológicos [...] que se aplicam a ‘discursos’ [...] extremamente diversificados”. Nessa pesquisa, a partir dos dados coletados descrevemos o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática e, em seguida, fragmentamos esses dados em *unidades de análise* (unidades de registro), que foram agrupadas de acordo com suas semelhanças em *categorias emergentes*. Esse processo analítico foi se constituindo a partir de inferências do pesquisador, com base no referencial teórico e filosófico adotado.

As *unidades de análise* correspondem, segundo Bardin (2011), aos segmentos de conteúdos considerados unidades de base, que podem ser de naturezas e dimensões diversas, como palavras, frases, temas, documentos, entre outros. Nesse artigo, as unidades de análise[12] dizem respeito aos conteúdos presentes nos diálogos, registros escritos e trechos da entrevista associados ao desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, que podem fornecer indicativos sobre as ações e os usos da linguagem realizados pelos alunos no desenvolvimento das atividades de modelagem, considerando que a compreensão, na perspectiva wittgensteiniana, se manifesta nos modos de agir dos alunos em atividades linguísticas. No que tange à *categorização*, os critérios que utilizamos para agrupar as unidades de análise em categorizas não foram tomados previamente, mas emergiram no decorrer da análise. Esta abordagem se deu a partir da perspectiva filosófica adotada, na qual os critérios de compreensão (para dizer que alguém compreendeu algo) não são fixos, mas dependem das circunstâncias e do contexto linguístico, em que a atividade está envolvida.

Atividade 1: Micro Cervejaria Artesanal

O tema "Micro Cervejaria Artesanal" escolhido pelo grupo G1, teve a influência de um dos participantes do grupo, que manifestou seu desejo em estudar a fabricação e comercialização de cerveja artesanal. A partir de conhecimentos sobre a fabricação de cerveja, microempresas e custos relativos à fabricação e comercialização da cerveja o grupo decidiu investigar: como estruturar a criação de uma Micro Cervejaria Artesanal visando obter lucro a partir de 6 meses de funcionamento? As informações coletadas pelos alunos para a investigação constam no Quadro 3.

[12] Para evidenciar as unidades de análise no decorrer da análise nesse artigo, grifamos os segmentos de conteúdo presentes nos diálogos, nas respostas dos alunos ao questionário e a entrevista e atribuímos um código, indicando a atividade, o instrumento de coleta de dados (sendo D para os diálogos, E para trechos da entrevista e Q para respostas ao questionário) e a unidade de análise, dessa forma o código AT1.D1.U1 diz respeito ao diálogo 1 da atividade 1 (Micro Cervejaria Artesanal), que constituiu a unidade de análise 1. Já os registros escritos dos alunos foram apresentados na forma de quadros, seguindo um código que identifica a atividade, o registro escrito e a unidade de análise, por exemplo, AT2.R2.U2 indica a ao registro escrito 2 da atividade 2 (Financiamento de Veículos), que deu origem a unidade de análise 2.

Quadro 3 - Situação-problema da atividade Micro Cervejaria Artesanal

Para a fabricação de cervejas artesanais, alguns pontos importantes devem ser considerados: a legislação que irá reger a empresa, a localização tanto de fabricação quanto de venda, os equipamentos utilizados, a matéria prima, o processo de fabricação e análise de viabilidade.
Localização: A princípio venderemos a cerveja apenas em nosso estabelecimento, atuando como um *brew pub*, ou seja, o estabelecimento que fabrica e comercializa sua própria cerveja.
O aluguel do estabelecimento para venda, será de R$ 800,00 mais os gastos com água e luz.
Equipamentos: um kit cervejeiro completo para a produção de 40 litros, no valor de R$ 1.875,00.
Matéria-prima: um *kit de* fabricação da cerveja artesanal *witbier*, no valor de R$ 220,00.
Processo de Fabricação: 1. Moagem; 2. Mistura; 3. Filtragem; 4. Filtragem, Fervura do mosto e Separação do *trub*; 5. Resfriamento; 6. Fermentação; 7. Maturação, Armazenamento e Envase/Embarrilamento; 8. Distribuição.
Análise de viabilidade: capacidade máxima da produção - oitenta litros por mês.
Investimento Inicial: os investimentos iniciais consistem nos equipamentos necessários para a produção de 80 litros por mês, a reforma do cômodo em que à cerveja será fabricada e o aluguel do estabelecimento, se viável.
Custos: para a elaboração desta análise foi utilizado um tipo de cerveja, onde os custos obtidos foram a partir da análise de dissertações e sites, assim como pesquisa em campo. A cerveja previamente escolhida para iniciar a produção foi do tipo *Witbier*; o custo total de insumos é de R$ 0,98 para a produção de 355ml. O custo da garrafa é R$ 2,10 sendo compradas em grande volume, o rótulo será R$ 0,45, por unidade. Os gastos com energia elétrica e gás foram estimados R$ 0,30 por garrafa de cerveja produzida.
Planejamento de vendas: para este estudo, foi considerado um planejamento de vendas baseado em 100% da capacidade total de vendas, ou seja, 225 garrafas de 355ml. O preço de venda da unidade *long neck* de 355ml, foi feito com base nos preços de cervejas já comercializadas, R$ 7,50. (AT1.R1.U2)

Problema: como estruturar a criação de uma Micro Cervejaria Artesanal visando obter lucro a partir de 6 meses de funcionamento? (AT1.R2.U3)

Fonte: relatório escrito do grupo G1.

As hipóteses, variáveis e construção do modelo matemático foram realizados pelos alunos conforme indica o Quadro 4.

Quadro 4 - Desenvolvimento da atividade Micro Cervejaria Artesanal

Problema: como estruturar a criação de uma Micro Cervejaria Artesanal visando obter lucro a partir de 6 meses de funcionamento?

Dados coletados

	Insumos	Garrafa + Rótulo	Eletricidade e Gás	Total
Witbier	R$ 0,98	R$ 2,55	R$ 0,30	R$ 3,83

- O aluguel do estabelecimento para venda, será de R$ 800,00 mais os gastos com água e luz.
- O preço de venda da unidade de *long neck* de 355ml foi estipulado com base na análise de trabalhos já feitos e nos preços das cervejas já encontradas no mercado. Estipulamos o preço de R$ 7,50.
- Custos de produção: 861,75.
- Investimento inicial: R$ 1875,00 em equipamentos e R$ 3000,00 em capital de giro. Somados, o investimento inicial total foi de R$ 4875,00.

Hipóteses (AT1.R3.U4)

- A quantidade de cerveja fabricada é de oitenta litros por mês, sendo esta a capacidade máxima da produção devido aos equipamentos escolhidos.
- Consideramos um planejamento de vendas baseado em 100% da capacidade total de vendas, ou seja, 225 garrafas de 355ml.
- Toda a produção da cerveja será realizada em um cômodo em específico na própria casa de um dos autores. A princípio venderemos a cerveja apenas em nosso estabelecimento, atuando como um *brew pub*, ou seja, o estabelecimento que fabrica e comercializa sua própria cerveja.

Variáveis (AT1.R3.U4)

$C = custo\ de\ produção;\ E = Entrada;\ A = aluguel;$
$S_0 = saldo\ acumulado\ inicial;$
$S_n = saldo\ acumulado\ no\ mês\ n; n = meses.$

Modelo matemático

Período	0	1	2	3	4	5	6
Entradas							
Vendas	0	1687,50	1687,50	1687,50	1687,50	1687,50	1687,50
Saídas							
Investimento inicial	4.875,00						
Aluguel	0	800,00	800,00	800,00	800,00	800,00	800,00
Custos de Produção	861,75	861,75	861,75	861,75	861,75	861,75	861,75
Total de Entradas	0	1687,50	1687,50	1687,50	1687,50	1687,50	1687,50
Total de Saídas	5736,75	1661,75	1661,75	1661,75	1661,75	1661,75	1661,75
Saldo Acumulado	-5736,75	-5711,00	-5685,25	-5659,50	-5633.75	-5608,00	-5582,25

Com base na análise de um fluxo de caixa das despesas e das receitas e sendo o saldo o dinheiro disponível no caixa da empresa, isto é, a diferença entre a as despesas e as receitas, o saldo acumulado em relação ao saldo do mês anterior pode ser calculado por meio da seguinte equação:

$$S_n = S_0 + nE - n(C + A)\ Tal\ que\ n \in \mathbb{N}$$

Resposta para o problema (AT1.R4.U8)

Considerando as hipóteses iniciais não é viável a criação do empreendimento em seis meses. No entanto, se reduzirmos o preço do aluguel ou aumentarmos a produção de cerveja, o tempo de obtenção de lucro reduz.

Interpretação dos resultados e validação (AT1.R4.U8)

Analisando o intervalo de tempo necessário para obter lucro (quando o saldo acumulado for positivo) para as hipóteses iniciais, duplicando a produção e reduzindo o aluguel é possível perceber uma redução no tempo de obtenção de lucro de 223 meses para 10 meses e 7 meses, respectivamente.

	Meses em que o saldo (S) é:			
	S<0	Próximo a zero esquerda	Próximo a zero direita	S>0
Hipóteses iniciais	[1 ; 222]	-20,25	5,50	[223 ; ∞]
Variação da produção	[1 ; 9]	-255	476,50	[10 ; ∞]
Variação do aluguel	[1 ; 6]	-606,20	1517,2	[7 ; ∞]

Fonte: relatório escrito do grupo G1

A resposta fundamental dos alunos é que constataram que apenas a redução do aluguel e o aumento da produção poderiam tornar o projeto viável e possibilitar a obtenção de lucro a partir de 6 meses de funcionamento.

Atividade 2: Financiamento de Veículos

A atividade Financiamento de Veículos foi desenvolvida pelos alunos do grupo G2 e surgiu a partir do interesse dos alunos do grupo em relação à compra de um carro bem como o fato de o assunto *financiamento* ser tópico das aulas de Matemática Financeira. Para o desenvolvimento da atividade, os alunos fizeram uma entrevista com interessados na compra de um carro, pesquisas na internet e a opção pelo financiamento com parcelas fixas mensais. Os Quadros 5 e 6 detalham o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática realizado pelos alunos.

Quadro 5 - Situação-problema da atividade Financiamento de Veículos

Financiamento e consórcio: Diferenças e classificações

Financiamento: É um contrato entre o cliente e a instituição financeira no qual o cliente recebe uma quantia que deverá ser devolvida ao banco em prazo determinado, acrescida de juros (BCB[13], 2018).

Leasing: É um contrato denominado na legislação brasileira como “arrendamento mercantil”. As partes desse contrato são denominadas “arrendador” (banco ou sociedade de arrendamento mercantil) e “arrendatário” (cliente). Nas operações de leasing, o bem é arrendado ao arrendatário, e pode ser adquirido ou não por ele ao final do contrato. Nas operações de financiamento, o bem é sempre adquirido pela pessoa que contratou o financiamento (BCB, 2018).

Crédito Direto ao Consumidor (CDC) - É o financiamento para a aquisição de bens de consumo duráveis (eletrodomésticos, eletrônicos, móveis e utensílios, veículos, entre outros). Ele é concedido por uma instituição financeira em parceria com a loja ou empresa que está vendendo o bem (BCB, 2018)

Consórcio - Consórcio é a modalidade de compra baseada na união de pessoas - físicas ou jurídicas - em grupos, com a finalidade de formar poupança para a aquisição de bens móveis, imóveis ou serviços. Nesse sistema, o valor do bem ou serviço é diluído em um prazo predeterminado, e todos os integrantes do grupo contribuem ao longo desse período. Mensalmente (ou conforme estipulado em contrato), a administradora os contempla, por sorteio ou lance, com o crédito no valor do bem ou do serviço contratado, até que todos sejam atendidos (ABAC[14], 2018).

Diferenças**:** Nas operações de financiamento, como o CDC, o bem é entregue ao usuário no ato da compra, já no consórcio o usuário precisa ser contemplado por sorteio ou um lance. (AT2.R5.U1)

Problematização: Uma família é composta por três membros, sendo a mãe farmacêutica, o pai bioquímico e um filho de nove anos de idade. A família deseja comprar um veículo zero km. A renda mensal desta família é de R$ 8.000,00. Com base na tabela de gastos (Tabela 1) e na renda, a família está disposta a comprometer, no máximo, R$ 2.130,00 com parcela para aquisição de um carro zero km.

Pergunta-se: Qual o modelo de carro adequado a esta família? Considerando o valor da prestação e um parcelamento que pode variar entre 12 e 60 meses, qual carro essa família pode comprar?

Tabela 1- Gastos mensais do casal

Descrição dos Gastos Mensais	Valor/Tempo
Financiamento Apartamento	R$ 2.000,00 – 60 Meses
Plano de Saúde	R$ 600,00 – Mensal
Mercado	R$ 800,00 Média Mensal
Internet e Telefone	R$ 150,00 –Mensal
Condomínio	R$ 650,00 – Mensal
Lazer	R$ 700,00– Média Mensal
Total	R$ 4.900,00

Fonte: Os Autores

(AT2.R6.U3)

Fonte: relatório escrito do grupo G2

[13] Banco Central do Brasil. Disponível em: <https://www.bcb.gov.br>. Acesso em: 25 de ago. 2018.
[14] Associação Brasileira de Administradora de Consórcios. Disponível em: < http://abac.org.br/o-consorcio/o-que-e-consorcio>. Acesso em: 25 de ago. 2018.

Quadro 6 - desenvolvimento da atividade Financiamento de Veículos

Problema: Uma família é composta por três membros, sendo a mãe farmacêutica, o pai bioquímico e um filho de nove anos de idade. A família deseja comprar um veículo zero km. A renda mensal desta família é de R$ 8.000,00. Com base na tabela de gastos (Tabela 1) e na renda, a família está disposta a comprometer, no máximo, R$ 2.130,00 com parcela para aquisição de um carro zero km. Qual é o modelo de carro adequado a esta família? Considerando o valor da prestação e um parcelamento que pode variar entre 12 a 60 meses, qual carro esta família pode comprar?

Dados coletados

Tabela 1- Gastos mensais do casal

Descrição dos Gastos Mensais	Valor/Tempo
Financiamento Apartamento	R$ 2.000,00 – 60 Meses
Plano de Saúde	R$ 600,00 – Mensal
Mercado	R$ 800,00 Média Mensal
Internet e Telefone	R$ 150,00 –Mensal
Condomínio	R$ 650,00 – Mensal
Lazer	R$ 700,00– Média Mensal
Total	R$ 4.900,00

Tabela 2 – Juros cobrados pelas principais agencias financiadoras do mercado.

Instituição	Taxa de juros ao mês (%)	Instituição	Taxa de juros ao mês (%)
Bradesco	**1,47%**	Chevrolet	**1,13%**
Santander	**1,72%**	Volkswagen	**1,28%**
Itaú	**1,73%**	Toyota	**1,38%**
Banco do Brasil	**1,75%**	Honda	**1,67%**
Caixa Econômica Federal	**2,00%**		

Fonte: Konkero (2018)

Hipóteses (AT2.R7.U4)

- A tabela de gastos não irá variar ao longo dos anos durante o período de financiamento;
- Este casal não levará em consideração a marca do carro, mar sim a menor taxa de juros do mercado;
- Todas estas instituições financeiras adotam o prazo de financiamento de 12 a 60 meses.

Variáveis (AT2.R7.U4)

$i = taxa\ de\ juros; n = tempo\ (meses);$
$CF = coeficiente\ de\ financiamento;$
$VP = valor\ do\ financiamento;;$
$PMT = valor\ mensal\ do\ financiamento;$
$RC = renda\ do\ casal; GM = gastos\ mensais$

Modelo matemático

$$PMF = RC - GM$$

$$PMT = VP.\left(\frac{i}{1-\frac{1}{(1+i)^n}}\right) \text{ Em que CF=}\frac{i}{1-\frac{1}{(1+i)^n}}$$

Resolução matemática

Para $n = 12$

$$CF = \frac{0{,}0113}{1-\frac{1}{(1+0{,}0113)^{12}}}$$

$$VP = \frac{2130}{0{,}089} = 12777{,}57$$

Para $n = 60$

$$CF = \frac{0{,}0113}{1-\frac{1}{(1+0{,}0113)^{12}}}$$

$$VP = \frac{2130}{0{,}023} = 92447{,}71$$

Resposta para o problema (AT2.R8.U8)

Portanto, essa família poderá comprar um veículo cujo valor varia de R$23.777,57 à R$92.447,71. Dentre os modelos da instituição financiadora, essa família pode escolher um dos seguintes: OnixJoy 1.0, linha Prisma 1.4, linha Spin, Cobalt 1.8.

Validação (AT2.R8.U8)

Simulação para 60 meses				
Valor do veículo	Tempo (meses)	Taxa de juros	Prestação	Total pago
92.447,21	60	1,13 a.m	2.130,07	127.803,98

Simulação para 12 meses				
Valor do veículo	Tempo (meses)	Taxa de juros	Prestação	Total pago
23.777,57	12	1,13 a.m	2130,00	25.560,00

Fonte: relatório escrito do grupo G2.

Os alunos concluíram que nos prazos de 12 e 60 meses, levando em consideração as finanças da família interessada na compra de um carro, o preço do carro a ser comprado pode variar de R$ 23.777,57 a R$92.447,71 na instituição financeira com menor taxa de juros do mercado.

Análise das atividades: sobre a compreensão dos alunos

Investigar a compreensão de alunos em atividades de modelagem matemática, na perspectiva de Wittgenstein (2014), implica olhar para os usos que os estudantes fazem da linguagem, para os modos de agir, pra suas explicações e o emprego de técnicas e uso de regras em atividades de modelagem matemática.

Após escolherem um tema para investigar, os alunos dos dois grupos se engajaram em uma discussão a respeito das características e especificidades da situação-problema. Nessa discussão, podemos evidenciar diferentes ações dos alunos que desencadearam a formulação de um problema. Na atividade 1, o diálogo ilustra a inteiração dos alunos com a situação-problema:

PP - Vocês estão pensando na fabricação de cerveja ou em um bar?
A2 - Depende... então, poderíamos chegar até um bar que tem uma nova moda agora que é o BrewPub, um bar que fabrica sua própria cerveja (AT1.D1.U1).
A6 - Mas sabe qual é o problema do artesanal? É que como eles fabricam em pouca quantidade, tem outra variável, eles dependem do tempo... Eles precisam de um tempo para poder vender.
A2 - É por isso tem que a questão do preço (AT1.D2.U2).
PP - A validade né? É isso que você está falando?
A5 – É a maturação.
PP - Vocês podem olhar o que precisa para abrir uma cervejaria, se vocês vão contratar funcionários, se só vocês vão fabricar a cerveja e comercializar, o que precisa, qual é o preço de cada coisa... tem que pensar na quantidade também, no tempo, tudo isso está envolvido.
A2 - A gente precisa saber o ml, para saber o quanto a gente vai comprar, porque a gente precisa saber o gasto para basear o preço de venda, para a gente conseguir apenas se manter [...] (AT1.D3.U2).
A2 - O nosso problema é que vamos precisar estudar esse preparo, para sabermos o quanto vamos gastar de gás, porque vamos usar muito a questão do fogo, vocês podem ver (apontando para o slide) que temos que a água em uma temperatura de 108º aproximadamente por 2 horas... então vamos ter que fazer uma média em relação ao tanto que vamos ter que gastar de gás e a energia (AT1.D4.U2).

De acordo com o diálogo, o grupo G1 delineia metas de investigação, como as informações a serem coletadas, o processo de fabricação de cerveja, os custos envolvidos na produção e comercialização e a definição do tipo de empreendimento a ser feito.

Já na atividade 2, a discussão inicial em torno da situação-problema é indicada no diálogo:

PP – O que vocês precisam pensar nesse momento, é pesquisar como funciona o financiamento, qual é a taxa de juros que vão considerar, o preço do carro, se vocês vão fazer algum investimento na poupança ou no tesouro direto.
A9 - Definir quanto a pessoa tem para pagar também, se o valor da parcela... quanto ela pode pagar por mês. [...] Os gastos dessa família. [...] (AT2.D5.U2).
PP - Vocês colocaram que tinham dois tipos de financiamento o Crédito Direto do Consumidor (CDC) ou o Leasing, qual é a diferença entre os dois?
A9 - O leasing é aquele que o carro é da pessoa já no início do financiamento e por isso a taxa de juros é maior (AT2.D6.U1).
PP - E o CDC?
A9 – O carro é do banco e só no final quando você paga tudo, o carro é seu (AT2.D7.U1).

Neste diálogo, as ações dos alunos do grupo G2 estão associadas ao financiamento de carros e as possibilidades de aquisição, como orçamento financeiro do financiador, o valor da parcela, a taxa de juros e o tipo de financiamento possível.

Em ambas as atividades, o contato inicial dos alunos com a situação-problema revela uma inteiração mediada por ações mediadas pelo interesse dos alunos, como já indicam Almeida, Silva e Vertuan (2012). Nesse sentido, em cada uma das atividades de modelagem matemática os alunos engajaram-se em jogos de linguagem específicos (da cervejaria artesanal e do financiamento de um carro). Essa inferência vai ao encontro da assertiva de Almeida, Palharini e Tortola (2015, p. 3) de que “cada atividade traz consigo conceitos, linguagens, problemáticas e interesses daqueles que a desenvolvem”.

É por meio das ações dos alunos nos jogos de linguagem da situação-problema que podemos atribuir compreensão aos alunos. Assim como compreender uma frase significa compreender um jogo de linguagem (WITTGENSTEIN, 2014, § 199), compreender uma situação-problema significa compreender um jogo de linguagem. Os critérios de compreensão da situação-problema nas atividades de modelagem matemática estão associados a capacidade dos alunos de agir de determinados modos nos jogos de linguagem da situação-problema, como ponderam Baker e Hacker (2005) a respeito da relação entre os jogos de linguagem e a compreensão linguística.

Ser capaz de simplificar e estruturar uma situação-problema (U2), delineando pressupostos e metas de investigação e ser capaz de explicar o significado de termos específicos, como BrewPub, CDC e *leasing* (U1) dos jogos de linguagem da situação-problema são ações que evidenciam a compreensão da situação-problema nas duas atividades de modelagem matemática. Esses critérios são circunstanciais, dependem das especificidades do jogo de linguagem em que os alunos estão jogando, como destacado por Machado (2007) sobre os critérios de compreensão.

No que tange à simplificação e estruturação da situação-problema, esta ação pode ser interpretada como um agir em um jogo de linguagem de acordo com uma regra, que pode ser evidenciada nas orientações do professor (PP), sinalizada nos diálogos apresentados, como, em: "*O que vocês precisam pensar nesse momento, é pesquisar como funciona o financiamento, qual é a taxa de juros que vão considerar, o preço do carro, se vocês vão fazer algum investimento na poupança ou no tesouro direto (PP.AT2).* O agir de acordo com essa regra nos fornece um critério de compreensão da situação-problema, tendo em vista que, segundo Gottschalk (2010, p. 79), a compreensão pressupõe a capacidade de aplicar regras em "diferentes circunstâncias, no interior de determinados jogos de linguagem", neste caso os jogos de linguagem de financiamento de veículos e de abertura de uma cervejaria artesanal.

Nas atividades de modelagem matemática, a explicação dos significados de termos como "*BrewPub*", "CDC", "Leasing" foi feita oralmente, comparando e exemplificando os seus usos em inteirações com o professor e outros alunos. A explicação do significado de termos específicos da situação-problema configura-se como outro critério para aferir sobre a compreensão da situação-problema, considerando que para Wittgenstein (2014, § 560), "o significado da palavra é aquilo que a explicação do significado explica". Esse critério vai ao encontro das argumentações de Fatturi (2012, p. 11) ao afirmar que "quando compreendemos uma palavra, nossas explicações sobre como usá-las são provas de nossa habilidade e compreensão quanto ao uso desta mesma palavra". Esse aspecto emergente na análise das atividades evidencia uma relação interna entre a explicação, significado e compreensão nos jogos de linguagem da situação-problema. Na literatura, Baker e Hacker (2005, p. 383) destacam que essa relação interna é uma característica geral da compreensão linguística.

Um desdobramento da compreensão da situação-problema diz respeito à formulação de problemas (U3; ver AT1.R2.U3 e AT2.R6.U.3 – Quadro 3 e Quadro 5). Na perspectiva de Wittgenstein, compreender algo é capaz de fazer certas coisas para certos propósitos (BAKER; HACKER, 2005), neste caso, a partir do interesse pessoal dos alunos em conhecer algo para o qual não tinham uma resposta *a priori* , ou seja, à viabilidade de empreender uma cervejaria artesanal e no modelo de carro a ser financiado segundo um orçamento financeiro. A ação de formular um problema é um dos aspectos que diferenciam a modelagem matemática de outras atividades investigativas, pois, como afirma Pollak (2012, p. 5), "o coração da modelagem matemática é a formulação de problemas antes da resolução de problemas".

Nesse sentido, argumentamos que na compreensão da situação-problema nas duas atividades de modelagem matemática, a modelagem matemática atuou como conteúdo, uma vez que os alunos ainda não tinham conceitos e procedimentos matemáticos definidos antecipadamente. Esses aspectos caracterizam a atuação da modelagem como conteúdo, segundo Galbraith (2012), cuja formulação de um problema sem a prescrição de conceitos matemáticos pode fornecer aos alunos à proposição de uma ou mais soluções para situações-problema originadas em fenômenos sociais ou naturais.

Por meio da formulação de hipóteses e do estabelecimento de relações matemáticas, os alunos fazem uma transição da linguagem da situação-problema para uma linguagem matemática, elaborando um modelo matemático e, nessa transição, os alunos passam a jogar em outros jogos de linguagem, os da Matemática e da Matemática Financeira, considerando os aspectos mais importantes da situação-problema mantidos pelos alunos, como pondera Pollak (2012), e a intencionalidade dos alunos (ALMEIDA, 2018).

Na atividade 1, os alunos usaram o conceito de fluxo de caixa com o objetivo de organizar os dados da situação-problema e desenvolveram um modelo matemático com base no fluxo de caixa. Para construir o modelo matemático, os alunos inicialmente consideraram a equação de diferenças $S_n = S_{n-1} + E - (C - A)$, sendo S_n o saldo acumulado no mês n, E a entrada no fluxo de caixa, C o custo envolvido na produção da cerveja e A o aluguel do local de fabricação e produção da cerveja. Em seguida, utilizando a técnica de recursividade, resolveram essa equação e obtiveram o modelo matemático que constitui uma relação matemática discreta entre o saldo acumulado da empresa no mês n e saldo acumulado da empresa no mês 0, conforme mostra o Quadro 7.

Quadro 7 - Resolução Matemática da atividade Micro Cervejaria Artesanal

Fluxo de caixa: (AT1.R9.U6)

Período	0	1	2	3	4	5	6
Entradas							
Vendas	0	1.687,50	1.687,50	1.687,50	1.687,50	1.687,50	1.687,50
Saídas							
Investimento inicial	4.875,00						
Aluguel	0	800,00	800,00	800,00	800,00	800,00	800,00
Custos de Produção	861,75	861,75	861,75	861,75	861,75	861,75	861,75
Total de Entradas	0	1.687,50	1.687,50	1.687,50	1.687,50	1.687,50	1.687,50
Total de Saídas	5.736,75	1.661,75	1.661,75	1.661,75	1.661,75	1.661,75	1.661,75
Saldo Acumulado	-5.736,75	-5.711,00	-5.685,25	-5.659,50	-5.633.75	-5.608,00	-5.582,25

Modelo matemático:

$S_1 = S_0 + E - (C + A)$ (i)

$S_2 = S_1 + E - (C + A)$ (ii)

$Subistituindo\ (i)\ em\ (ii)$ (AT1.R10.U6)

$S_2 = S_0 + 2E - 2(C + A)$

$De\ modo\ análogo, temos$:

$S_3 = S_0 + 3E - 3(C + A)$

$Generalizando\ temos\ que$:

$S_n = S_0 + nE - n(C + A), tal\ que\ n \in \mathbb{N}$ (AT1.R10.U5)

Fonte: registros escritos dos alunos.

Mesmo usando conceitos já estudados anteriormente, a construção de fluxo de caixa e o uso das técnicas de recursividade (Quadro 7), o uso do conceito de fluxo de caixa na atividade configura um novo uso não visto até então, pois o mesmo pode ser entendido como um meio para analisar a viabilidade de um empreendimento em um tempo específico, algo até então desconhecido. Ao considerar este novo uso do conceito de fluxo de caixa os alunos ampliam a compreensão deste conceito, o que denota o domínio de uma nova técnica, um novo modo de emprego do conceito, característica de compreensão já ressaltada por Gottschalk (2018a, p. 122), ao afirmar que "compreender uma ordem, prosseguir uma sequência numérica, entre outras atividades, é também ser capaz de dominar técnicas".

O uso correto dos conceitos fluxo de caixa, equações de diferenças e da técnica de recursividade indicado no Quadro 7, é visto como um critério para inferir sobre a compreensão de conceitos da Matemática Financeira e da Matemática, visto que usar corretamente um conceito destes é seguir uma regra convencionada na forma de vida dos matemáticos. Trata-se, nesse sentido, de concordâncias, como argumenta Wittgenstein (2014, § 224) "a palavra "concordância" e a palavra "regra" são *parentes*, são primas" e em outra passagem nas Investigações Filosóficas em que diz: "ao entendimento pela linguagem pertence não só uma concordância nas definições, mas também [...] uma concordância nos juízos" (WITTGENSTEIN, 2014, § 242). A compreensão de conceitos de Matemática Financeira e de Matemática se manifesta também nas explicações que os alunos são capazes de dar sobre o uso desses conceitos, tendo em vista que, como pondera Glock (1998), ser capaz de dar uma explicação de expressão é um critério para atribuir compreensão a alguém. As explicações dadas pelos alunos indicam a compreensão dos alunos sobre os conceitos de fluxo de caixa e equações de diferenças de primeira ordem, bem como o uso da técnica de recursividade, como indica o diálogo:

> *A2 - Pensei no seguinte: eu tenho no mês 0 eu tenho meu saldo acumulado que esse aqui né. Então, eu tenho que meu saldo acumulado mais meu aluguel mais número de garrafas produzidas vezes o preço da garrafa. [...] No primeiro mês, eu vou ter um saldo acumulado em relação a outro mês e assim por diante (AT1.D8.U7).*
> *PP - Ah tá, então você tem o saldo acumulado no mês zero né. O saldo acumulado no mês um vai ser igual o saldo acumulado no mês zero mais entrada menos saída no mês 1. É isso?*
> *A2 - Essa é a ideia. [...]*
> *A2 - Então, olha, o meu saldo acumulado no mês n vai ser igual meu mês vezes a entrada menos a saída menos o aluguel menos a S_{n-1} (AT1.D9.U7).*
> *PP - O que é o S_{n-1}?*
> *A2 - É o saldo acumulado no mês anterior.*
> *PP - Agora você pode escrever em relação ao saldo acumulado no mês 0. [...]*
> *A2 - Eu cheguei que meu Sn é igual a S0 mais n vezes E menos n vezes C mais A (lendo a expressão algébrica $S_n = S_0 + n.E - n.(C + A)$) (AT1.D10.U5).*

A partir das ações dos alunos envolvidas na construção do modelo matemático na atividade 1 evidenciadas no Quadro 7 e no diálogo dos alunos, inferimos que a compreensão de conceitos da Matemática Financeira e da Matemática nessa atividade se manifesta no ser capaz de dominar técnicas, empregar corretamente os conceitos de fluxo de caixa e equações de diferenças de primeira ordem de acordo com regras matemáticas convencionadas na forma de vida dos matemáticos, bem como de explicar os conceitos e os procedimentos matemáticos na obtenção do modelo matemático.

Na atividade 2, considerando a problemática investigada, os alunos, por meio de orientações do professor, deduziram o modelo matemático $VP = \frac{PMT}{CF}$, em que VP é o valor do veículo a ser financiado, PMT a parcela do financiamento e $CF = \frac{i}{1-\frac{1}{(1+i)^n}}$ o coeficiente de financiamento, conforme mostra o Quadro 8.

Quadro 8 - Dedução do modelo matemático da atividade Financiamento de Veículos

Valor mensal que o casal poderá pagar no financiamento. $PMT = RC - GM$ Dedução do coeficiente de financiamento (AT2.R11.U6) $VP = \frac{PMT_1}{(1+i)^1} + \frac{PMT_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{PMT_n}{(1+i)^n}$ Como $PMT_1 = PMT_2 = PMT_n = PMT$ $VP = PMT\left(\frac{1}{1+\mathrm{i}} + \frac{1}{(1+\mathrm{i})^2} + \cdots + \frac{1}{(1+\mathrm{i})^n}\right)$ O que resulta numa some de uma PG finita, logo: $s = a_1\frac{(q^n-1)}{q-1}$ Assim, $VP = PMT.\left(\frac{(1+i)^n-1}{i.(1+i)^n}\right)$ (AT2.R12.U6)	Isolando *PMT*: $PMT = VP.[\frac{i.(1+i)^n}{(1+i)^n-1}]$ Dividindo por $(1+i)^n$ obtemos: $PMT = VP.\frac{i}{1-\frac{1}{(1+i)^n}}$ Reescrevendo, temos que: $VP = \frac{PMT}{CF}$ O qual $CF = \frac{i}{1-\frac{1}{(1+i)^n}}$ (AT2.R13.U5)

Fonte: registro escrito dos alunos do grupo G2

No Quadro 8 é possível identificar também os conceitos de valor presente, valor presente de fluxo um de caixa, capitalização no regime de juros compostos, progressão geométrica finita e soma de uma progressão geométrica finita. Ao usar esses conceitos, os alunos seguem regras matemáticas e explicam como foi feito esse uso, como indica o diálogo:

> *PP – Qual é o valor presente e o valor futuro na situação-problema de vocês?*
> *A8 – O valor futuro não é o com juros, por quanto sai o carro no final do financiamento (AT2.D11.U7).*
> *PP –E o valor presente?*
> *A8 – O valor presente é o valor do carro sem juros (AT2.D12.U7).*
> *PP –E qual é a relação entre o valor presente e o valor futuro do carro? Qual é o regime de capitalização aqui?*
> *A9 e A7 – Juros compostos.*
> *PP – Então como fica a relação entre o valor presente (VP) e o valor futuro (VF)?*
> *A7 – Ah é o montante né? Em relação ao capital.*
> *PP –E como podemos escrever isso?*
> *A7 – Assim: $VF = VP.(1+i)^n$ (AT2.D13.U7).*
> *[...] PP – Vejam, o financiamento é um fluxo de caixa certo? Então para calcular o valor presente de um fluxo de caixa temos que calcular a soma dos valores presentes de cada parcela, assim: $VP = \frac{PMT_1}{(1+i)^1} + \frac{PMT_2}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{PMT_n}{(1+i)^n}$, como as parcelas são iguais podemos escrever assim: $VP = PMT\left(\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n}\right)$, agora vocês precisam continuar, a partir daqui vocês conseguem obter o modelo matemático de vocês.*

Nesse diálogo, os alunos expressam verbalmente e escrevendo uma fórmula algébrica o uso dos conceitos valor presente, valor futuro e a capitalização no regime a juros compostos. Em seguida, o professor introduz um novo conceito, valor presente de um fluxo de caixa, e pede para os alunos continuarem a dedução do modelo matemático. Esse caso é similar ao exemplo de Wittgenstein (2014, § 143) sobre a atividade de continuar uma sequência de números, de acordo com uma fórmula algébrica, pois da mesma forma que continuar uma sequência de números (por exemplo, a sequência 1, 4, 9, 16, ...) não consiste em ter em mente (ocorrer-me) a formula algébrica $y = x^2$, deduzir o modelo matemático ($PMT = VP.\frac{i}{1-\frac{1}{(1+i)^n}}$) não consiste em ter em mente a fórmula $VP = PMT\left(\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n}\right)$ ou qualquer outra imagem mental, mas se dá no seguir regras matemáticas, que orientam a dedução do modelo matemático, tal como uma placa de orientação mostra a direção de como prosseguir, como já indicado por Moreno (2000).

Em síntese, a compreensão de conceitos da Matemática Financeira e da Matemática nas atividades de modelagem matemática se dá no ser capaz de deduzir um modelo matemático (U5), usar técnicas matemáticas e conceitos matemáticos e da Matemática Financeira de acordo com as regras convencionadas no interior da forma de vida dos matemáticos (U6), bem como ser capaz de explicar os conceitos e os procedimentos utilizados na dedução do modelo matemático (U7).

Essas ações constituem nossos critérios para inferir sobre a compreensão de conceitos da Matemática Financeira e da Matemática nas atividades de modelagem matemática. Esses critérios são circunstâncias. Nas atividades de modelagem matemática analisadas, o fato da disciplina em que essas atividades de modelagem matemática foram realizadas ser de Matemática Financeira constitui uma circunstância em que compreensão de conceitos da Matemática Financeira e da Matemática está envolvida. Outra circunstância é o entendimento de Matemática Financeira explicitado pelos alunos no questionário aplicado, como uma área da Matemática estreitamente relacionada com práticas financeiras da sociedade e do cotidiano, como ilustrado na resposta de um dos estudantes: "*Matemática financeira é uma série de conceitos matemáticos aplicados à análise de dados financeiros em geral. Sim, pois trata-se de questões ligadas a dinheiro, empréstimos e na economia" (A2).* Essas duas circunstâncias constituem para os alunos perspectivas de uso de conceitos e regras da Matemática Financeira e da Matemática em diferentes jogos de linguagem, para além dos internos à Matemática, no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática.

Em termos de modelagem matemática, entendemos que na dedução dos modelos matemáticos nas duas atividades de modelagem matemática, a modelagem matemática atuou como veículo, uma vez que oportunizou o uso de conceitos da Matemática Financeira presentes na ementa curricular da disciplina e a introdução de novos conceitos dessa disciplina. Nesse procedimento, o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática cumpre necessidades curriculares da disciplina em que as atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas, atendendo o requisito da modelagem como veículo, segundo Galbraith, Stillman e Brow (2010), de que a matemática deve ser incorporada em algum contexto com a finalidade de auxiliar e eliciar o desenvolvimento de conteúdos matemáticos previstos em um programa curricular.

Nas duas atividades de modelagem matemática, olhar para ações dos alunos envolvidas no uso da matemática e seus procedimentos na obtenção de um modelo matemático sugere uma compreensão com características diferentes da compreensão da situação-problema. Neste contexto, retomamos as palavras de Almeida (2014b) que afirma que "no que se refere ao olhar sobre a matemática, sobre os modelos matemáticos e os procedimentos (matemáticos) de construção e interpretação ou uso desses modelos, as semelhanças de família parecem ter uma caracterização diferente. As regras que regem estes jogos são outras". Enquanto os enunciados empregados nos jogos de linguagem da situação-problema seguem regras descritivas, descrevem uma parte de um fenômeno, nos jogos de linguagem da matemática, o uso de conceitos da Matemática Financeira e da Matemática seguem regras de caráter normativo. Para Gottschalk (2010), as regras de caráter normativo são condições de sentido para proposições empíricas. Essa argumentação converge com a ponderação de Wittgenstein (2014, § 532) de que “entender” tem aqui dois significados diferentes? – prefiro dizer que estes modos de uso de “entender” compõem o seu significado, meu conceito de entender”. É na conexão entre a compreensão da situação-problema e da compreensão de conceitos da Matemática Financeira e da Matemática que podemos constituir uma *visão panorâmica* a respeito da compreensão dos alunos nas atividades de modelagem matemática.

Essa conexão se mostra na relação entre o modelo matemático e a situação-problema. Alguns autores argumentam que nessa relação as regras matemáticas envolvidas na dedução do modelo matemático fornecem aos alunos um *modo de ver* a situação-problema (TORTOLA; ALMEIDA, 2018) e a depender dos conceitos matemáticos usados, esse *modo de ver* se modifica (SOUZA; BARBOSA, 2014). Esse *modo de ver* configura-se um modo de compreender a situação-problema, por meio de regras matemáticas e técnicas convencionadas no interior da forma de vida dos matemáticos. Os diálogos a seguir apresentam elementos que são indícios de compreensão da situação-problema a partir do uso de conceitos e procedimentos matemáticos.

> *(Atividade Cervejaria artesanal)*
> *PR - Então depois vocês consideraram que não vale a pena alugar mesmo?*
> *A4 - <u>Nós até podemos considerar o aluguel, mas que não seja nesse lugar (AT1.E1.U8).</u>*
> *A5 - Tem que ser em um lugar mais acessível e mais barato. [...]*
> *A6 - <u>Outra implicação no tempo (para obter lucro), é que colocamos como valor inicial sete e cinquenta por garrafa, mas conforme a gente fosse conhecendo, poderíamos aumentar o preço de venda por garrafa (AT1.E2.U8).</u>*
> *A2 - Sim, eu já cheguei encontrar estabelecimentos que vendem quinhentos ml por vinte e dois reais.*
>
> *(Atividade Financiamento de Veículos)*
> *PP - Que critérios foram essenciais para desenvolver o modelo matemático?*
> *A9 - <u>Este modelo é válido para parcelas fixas, caso ao contrário não é válido, por isso assumimos como hipótese que os gastos da família vão permanecer constante</u>. <u>O que vai mudar também são as parcelas, conforme o valor das parcelas for maior, do poder de compra dela seria maior, se for menor também, mesma coisa (AT2.E3.U8).</u>*

Esses diálogos indicam a interpretação dos resultados matemáticos no contexto da situação-problema das atividades de modelagem matemática (U8). A análise da resposta matemática produzida por meio do modelo matemático e a validação deste modelo, segundo Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 16), “visa, para além da capacidade de construir e aplicar modelos, ao desenvolvimento, nos alunos, da capacidade de avaliar esse processo de construção de modelos e os diferentes contextos de suas aplicações”. De acordo com Pollak (2012, p. 8), na validação dos modelos matemáticos os alunos precisam refletir sobre a pergunta “são os resultados práticos, as respostas razoáveis, as consequências aceitáveis? Se assim o for, ótimo! Se não, tome um outro olhar para as escolhas feitas inicialmente, e tente de novo”. Nesse sentido, a constituição de um *modo de ver* a situação-problema, por meio do uso da construção e análise de um modelo matemático perpassa as capacidades envolvidas na compreensão da situação-problema, na compreensão de conceitos da Matemática Financeira e da Matemática e nos leva a capacidades inerentes ao fazer modelagem matemática.

Sob uma perspectiva wittgensteiniana, Souza (2018) interpreta o fazer modelagem matemática como a capacidade dos alunos de seguir regras no jogo de linguagem da modelagem matemática. Tais regras não são fixas, mas orientam os alunos no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática e o fazer modelagem matemática segundo essas regras vai ao encontro dos procedimentos propostos por Almeida, Silva e Vertuan (2012).

Nesse contexto, uma vez que a gramática da palavra “compreender” goza de estreito parentesco com a gramática das palavras “poder”, “ser capaz de” (WITTGENTEIN, 2014), com o ser capaz de agir de acordo as regras utilizadas nas duas atividades de modelagem matemática analisadas, inferimos com base nas ações dos alunos evidenciadas nos diálogos e nos registros escritos (ver AT1.R3.U4, AT1.R4.U8, AT2.R7.U4, AT2.R8.U8 - Quadro 4 e Quadro 6) que os modos de agir dos alunos no desenvolvimento das atividades atendem os requisitos do fazer modelagem matemática apresentados e, nesse sentido, evidenciam a compreensão do fazer modelagem matemática. Essa compreensão se manifesta também na comunicação dos resultados obtidos que foram apresentados ao longo desse artigo.

Discussão e resultados

Nesse artigo, investigamos *a compreensão dos alunos em atividades de modelagem matemática desenvolvidas em uma disciplina de Matemática Financeira de um curso de Licenciatura em Matemática.* Analisamos duas atividades de modelagem matemática com base na perspectiva de Wittgenstein (2014) sobre compreensão. Nossa análise evidencia a emergência de três categorias com relação a compreensão dos alunos nas atividades de modelagem matemática: compreensão da situação-problema; compreensão de conceitos da Matemática Financeira e da Matemática; compreensão do fazer modelagem matemática. A emergência dessas categorias diz respeito aos modos de agir, ao ser capaz de fazer certas coisas, em determinadas circunstâncias, nos jogos de linguagem envolvidos no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, consideradas como as unidades de análise nesta investigação (Quadro 9).

Quadro 9 - Categorias emergentes

Categorias	**unidades de análise**	**Códigos**
Compreensão da situação-problema	Ser capaz de explicar o uso de termos específicos do jogo de linguagem da situação-problema (U1).	AT2.R5.U1; AT1.D1.U1; AT2.D6.U1; AT2.D7.U1
	Ser capaz de simplificar e estruturar a situação-problema (U2).	AT1.R1.U2;AT1.D2.U2; AT1.D4.U2; AT2.D5.U2;
	Ser capaz de formular um problema a partir de uma situação inicial (U3).	AT1.R2.U3; AT2.R6.U3
Compreensão de conceitos da Matemática Financeira e da Matemática	Ser capaz de deduzir um modelo matemático (U5).	AT1.R10.U5; AT1.D10.U5; AT2.R13.U5;
	Ser capaz de usar técnicas matemáticas e conceitos matemáticos e da Matemática Financeira de acordo com as regras socialmente convencionadas (U6).	AT1.R9.U6; AT1.R10.U6; AT2.R11.U6; AT2.R12.U6
	Ser capaz de explicar os conceitos e os procedimentos utilizados na dedução do modelo matemático (U7).	AT1.D8.U7; AT1.D9.U7; AT2.D11.U7; AT2.D12.U7; AT2.D13.U7
Compreensão do fazer modelagem matemática	Ser capaz de escolher, estruturar e simplificar uma situação-problema real (U1), formular um problema (U3).	AT2.R5.U1; AT1.D1.U1; AT2.D6.U1; AT2.D7.U1; AT1.R2.U3; AT2.R6.U3
	Ser capaz de formular hipóteses e simplificações (U4) e deduzir um modelo matemático (U5).	AT1.R3.U4; AT2.R7.U4; AT1.R10.U5; AT1.D10.U5; AT2.R13.U5
	Ser capaz de responder o problema, interpretar os resultados matemáticos com base na matemática e na situação inicial (U8).	AT1.R4.U8; AT2.R8.U8; AT1.E1.U8; AT1.E2.U8; AT2.E3.U8

Fonte: os autores

Por um lado, a análise da compreensão dos alunos nas atividades de modelagem matemática indica que a *compreensão da situação-problema* e a *compreensão de conceitos da Matemática Financeira e da Matemática* constituem dois usos diferentes da palavra *compreender*. Na perspectiva de Wittgenstein, usamos a palavra *compreender* para uma família de casos, em diferentes jogos de linguagem (WITTGENSTEIN, 2014, § 531). Enquanto os enunciados dos jogos de linguagem da situação-problema têm caráter descritivo, descrevem algo de fenômenos sociais ou naturais, os enunciados nos jogos de linguagem da Matemática têm caráter normativo. Essa ponderação parece convergir com a interpretação de Gottschalk (2018a) sobre a atividade matemática escolar de que "no caso dos jogos de linguagem da matemática, seus enunciados são empregados com força normativa, *deve ser assim*".

Por outro lado, os diferentes modos de uso da palavra *compreender* nos fornecem uma *visão panorâmica* a respeito da compreensão, que permitem em conjunto ver conexões (WITTGENSTEIN, 2014, § 122) entre a compreensão da situação-problema e a compreensão de conceitos da Matemática Financeira e da Matemática. Esta conexão nos permite ver a modelagem matemática como um jogo de linguagem, que dialoga com jogos de linguagem da situação-problema e jogos de linguagem da Matemática Financeira e da Matemática, evidenciando a *compreensão do fazer modelagem matemática*, que vai ao encontro do entendimento de Tortola e Almeida (2018) de que a modelagem matemática constitui um *modo* *de ver* as situações a partir de um ‘óculos’ matemático e, portanto, se manifesta no conjunto de ações, procedimentos e explicações envolvidos no fazer modelagem matemática.

A interlocução entre as três categorias enunciadas corrobora com a argumentação de Pollak (1979, p. 240) de que “a construção de modelos requer uma compreensão da situação fora da matemática e do processo de matematização, bem como da própria matemática. Você não pode esperar matematizar uma situação sem compreendê-la”. Assim, ainda que considerando a modelagem matemática como um jogo de linguagem, os diferentes modos de expressão linguística envolvidos nesse jogo levam à diferentes modos de compreensão. Essa assertiva ancora-se na perspectiva de Wittgenstein (2014) sobre a linguagem como “um tipo de ação, de comportamento, que leva a uma diversidade enorme de conceitos, atitudes, modos de compreensão; há maleabilidade para a ação, para o pensamento, para a formulação de juízos” (ARAÚJO, 2012, p. 18).

Podemos concluir também com base na análise das atividades de modelagem matemática, que a modelagem matemática atuou ora como conteúdo, ora como veículo. Aspectos da modelagem como conteúdo emergem na compreensão da situação-problema e na compreensão do fazer modelagem matemática, inerentes a capacidade dos alunos de formular e resolver problemas reais, por meio da matemática (GALBRAITH, 2012). Já em relação à modelagem como veículo, aspectos dessa abordagem podem ser observadas na compreensão de conceitos da Matemática Financeira e da Matemática. Esse resultado indica o uso da modelagem matemática para a compreensão de conceitos da Matemática e para o desenvolvimento de habilidades dos alunos para resolver problemas reais.

Além disso, indicamos que a interatividade e o trabalho colaborativo dos alunos, tal como defendido por Ferruzzi e Almeida (2015) e Schujaklow e Krug (2012), como características do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática contribuiu para as compreensões dos alunos enunciadas nesse artigo, tendo em vista que essas compreensões se manifestam nos diálogos entre os alunos e o professor, na comunicação dos resultados e nos acordos entre os estudantes em relação aos usos da linguagem da situação-problema e da linguagem matemática.

Com base nessas reflexões a respeitos da compreensão dos estudantes em atividades de modelagem matemática em uma disciplina de Matemática Financeira, sinalizamos que a compreensão da situação-problema, de conceitos da Matemática Financeira e da Matemática e do fazer modelagem matemática podem contribuir para a Educação Financeira dos alunos, no sentido de possibilitar o desenvolvimento de habilidades para ler situações financeiro-econômicas do contexto dos indivíduos consumidores (KISTEMANN JR.; LINS, 2015), fornecer aos alunos a constituição de diferentes lentes sobre situações econômico-financeiras (MUNIZ, 2016) e contribuir para desenvolvimento da capacidade dos alunos de agir em uma sociedade de consumidores, de modo a tomar decisões conscientes fundamentadas na capacidade dos alunos de resolver problemas genuínos dessa sociedade (OECD, 2015, p. 26).

Referências

ALMEIDA, L. M. W. Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. **Zetetiké**, Campinas, v. 18, n. temático, p. 387-414, 2010.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA; L. M. W.; The ‘Practice’ of Mathematical Modeling Under a Wittgensteinian Perspective. **International Journal for Research in Mathematics Education**, SBEM, v. 4, n.2, p. 98-113, 2014a.

ALMEIDA; L. M. W. Jogos de linguagem em atividades de modelagem matemática. **VIDYA**, Santa Maria, v. 34, n. 1, p. 241-256, jun. 2014b.

ALMEIDA; L. M. W. Considerations on the use of mathematics in modeling activities. **ZDM**, v. 50, n. 1-2, p. 19-30, apr. 2018.

ALMEIDA, L. M. W.; PALHARINI, B. N.; TORTOLA, E. Desdobramentos para a modelagem matemática decorrentes da formulação de hipóteses. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2015, Pirenópolis. **Anais**... Pirenópolis: SBEM, 2015.

ARAÚJO, I. L. WITTGENSTEIN: o “conhecimento” na relação entre linguagem e realidade. In: VALLE, B.; MARTÍNEZ, H. L.; PERUZZO JÚNIOR, L. (Org.). **Ludwig Wittgenstein:** perspectivas. Curitiba: CRV, 2012. p. 11-30.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. 3 ed. Lisboa: Edições 70, 2011.

BAKER, G. P.; HACKER, P. M. S. **Wittgenstein: Understanding and meaning: Volume 1 of an analytical commentary on the philosophical investigations, part I: Essays**. Oxford: Blackwell Publishing, 2005.

BLUM, W. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In: CHO, S. J. (Ed). **The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education**: Intellectual and Attitudinal Changes. New York: Springer, 2015. p. 73-96.

BROWN, J. Context and Understanding: The Case of Linear Models. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; KAISER, G. (Eds). **Mathematical Modellling and Applications**: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education. Cham, Switzerland: Springer, 2017. p. 211-221.

BROWN, J.; EDWARDS, I. Modelling Tasks: Insight into Mathematical Understanding In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; FERRI, R. B. (Eds). **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling**. Cham, Switzerland: Springer, 2014. p. 187-197.

COSTA, L. M. A. **Compreensão em Atividades de Modelagem Matemática**: Uma Análise à Luz dos Registros de Representação Semiótica. 2016. 145 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

FATTURI, A. Conceito de "jogos de linguagem" nas Investigações Filosóficas. In: VALLE, B.; MARTÍNEZ, H. L.; PERUZZO JÚNIOR, L. (Eds.). **Ludwig Wittgenstein:** perspectivas. Curitiba: CRV, 2012. p. 31-60.

FERRUZZI, E. C.; ALMEIDA, L. M. W. de. Diálogos em modelagem matemática. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 21, n. 2, p. 377-394, jun. 2015.

GALBRAITH, P. L. Models of Modelling: genres, purposes or perspectives. In: **Journal of Mathematical Modelling and Applications**, Blumenau, v. 1, n. 5, p. 3-16, 2012.

GALBRAITH, P. L.; STILLMAN, G. A.; BROWN, J. Turning Ideas into Modeling Problems. In: LESH, R.; *et al*. (Eds.). **Modeling Students' Mathematical Modeling Competenceis**. Cham, Switzerland: Springer, 2010. p. 133-144.

GLOCK, Hans-Johann. **Dicionário Wittgenstein.** Tradução, Helena Martins; revisão técnica, Luiz Carlos Pereira. - Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1998.

GOTTSCHALK, C. M. C. O papel do método no ensino: da maiêutica socrática à terapia wittgensteiniana. ETD: **Educação Temática Digital**, Campinas, v. 12, n. 1, p. 64-81, 2010.

GOTTSCHALK, C. M. C. A atividade matemática escolar como introdução de paradigmas na linguagem. **REEC** - Revista de Educação, Ciência e Cultura, Canoas, v.23, n. 1, p. 112-124, mar. 2018a.

GOTTSCHALK, C. M. C. Fundamentos Epistemológicos da Educação de uma Perspectiva Wittgensteiniana. In: AZIZE, R. L. (Ed). **Wittgenstein nas Américas**: Legado e Convergências. Bahia: Edufba, 2018b. p. 53-71.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modeling in mathematics education. **ZDM**, v. 38, n. 3, p. 302-310, 2006.

KISTEMANN Jr., M. A.; LINS, R. C. Enquanto isso na Sociedade de Consumo Líquido-Moderna: a produção de significados e a tomada de decisão de indivíduos-consumidores. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 28, n. 50, p. 1303-1326, dez. 2014.

MACHADO, A. N. **Lógica e forma de vida**: Wittgenstein e a natureza da necessidade lógica e da filosofia. Porto Alegre: Unisinos, 2007.

MORENO, A. R. **Wittgenstein:** os labirintos da linguagem. São Paulo: Ed. Moderna, 2000.

MUNIZ, I. J. Educação Financeira e a sala de aula de Matemática: conexões entre a pesquisa acadêmica e a prática docente. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais**... São Paulo: UNICSUL, 2016.

NISS, M. Prescriptive Modelling – Challenges and Opportunities. In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.) **Mathematical Modelling in Education Research and Practice:** cultural, social and cognitive influences. New York: Springer, p. 67-80, 2015.

OECD. **Improving Financial Literacy:** Analysis of Issues and Policies. Paris: Secretary General of the OECD, 2005.

POLLAK, H. O. The interaction between Mathematics and other school subjects. **New Trends in Mathematics Teaching**, Volume IV, Paris: UNESKO, 1979.

POLLAK, H. O. Introduction: what is mathematical modeling? In: GOULD, H.; MURRAY, D. R.; SANFRATELLO, A. (Eds.). Mathematical Modeling Handbook. Bedford: Comap, 2012. p. 8-11.

SOUZA, E. G.; BARBOSA, J. C. Contribuições teóricas sobre a aprendizagem matemática na modelagem matemática. **Zetetiké**, Campinas, v. 22, n. 41, p. 31-58, jul. 2014.

SOUZA, H. C. T. **Um olhar sobre o *fazer* Modelagem Matemática à luz da filosofia de Wittgenstein**. 2018. 208 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, UEL, Londrina, 2018.

SCHUKAJLOW, S.; KRUG, A. Treating Multiple Solutions in the Classroom and their Influence on Students' Achievements and the Affect –Theoretical Background and Design of the Quasi-empirical Study. In: **12th International Congress on Mathematical Education**, COEX, Seoul Korea, 2012. p. abcde-fghij.

TORTOLA, E. **Configurações de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.** 2016. 304f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

TORTOLA, E.; ALMEIDA, L. M. W. de. A Formação Matemática de Alunos do Primeiro Ano do Ensino Fundamental em Atividades de Modelagem Matemática: uma Perspectiva Wittgensteiniana. **Perspectivas da Educação Matemática**, Mato Grosso do Sul, v. 11, n. 25, p. 142-162, jun. 2018.

WITTGENSTEIN, L. **Fichas (Zettel)**: Lisboa. Edições 70, 1981.

WITTGENSTEIN, L. **Investigações Filosóficas**. 9 ed. Petrópolis: Vozes, 2014.

2.3 ARTIGO 3

O ENSINO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA MEDIADO PELA MODELAGEM MATEMÁTICA: INTERLOCUÇÕES ENTRE LINGUAGEM E COMPREENSÃO NA PERSPECTIVA DE WITTGENSTEIN

Resumo

Nesse artigo temos como objetivo investigar como os alunos compreendem conceitos da Matemática Financeira em atividades de modelagem matemática desenvolvidas em uma disciplina de Matemática Financeira em um curso de Licenciatura em Matemática. A modelagem matemática é caracterizada nesse artigo sob dois pontos de vista, modelagem descritiva e modelagem prescritiva, e é discutida em relação aos seus desdobramentos para o ensino de Matemática Financeira. Considerando a Matemática Financeira como uma linguagem matemática, buscamos interlocuções entre compreensão e linguagem com base na filosofia de Ludwig Wittgenstein em duas atividades desenvolvidas por nove alunos da disciplina. A análise segue encaminhamentos da análise de conteúdo e indica três categorias emergentes: compreensão de conceitos da Matemática Financeira na modelagem descritiva, compreensão de conceitos da Matemática Financeira na modelagem prescritiva e modelagem matemática como possibilidade de integrar a Educação Financeira no ensino de Matemática Financeira. As discussões sobre os resultados sugerem que a compreensão de conceitos da Matemática Financeira nas atividades de modelagem matemática se dá no seguir regras de uso de conceitos da Matemática Financeira e nas explicações fornecidas pelos alunos acerca desses conceitos.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Compreensão. Linguagem. Matemática Financeira. Filosofía de Wittgenstein.

TEACHING OF FINANCIAL MATHEMATICS MEDIATED BY MATHEMATICAL MODELLING: INTERLOCUTIONS BETWEEN LANGUAGE AND UNDERSTANDING FROM WITTGENSTEIN'S PERSPECTIVE

Abstract

In this paper we aim to investigate how students understand concepts of Financial Mathematics in mathematical modelling activities developed in a Mathematics Financial subject of a Mathematics Degree course. The mathematical modelling is characterized in this paper from two points of view, descriptive modeling and prescriptive modelling, and is discussed in relation to its developments for the teaching of Financial Mathematics. Considering Financial Mathematics as a mathematical language, we search for interlocutions between understanding and language based on the philosophy of Ludwig Wittgenstein in two activities developed by nine students of the subject. The analysis follows referrals from the content analysis and indicates three emerging categories: understanding Financial Mathematics concepts in descriptive modelling, understanding of Financial Mathematics concepts in prescriptive modelling and mathematical modelling as a possibility to integrate Financial Education in the teaching of Financial Mathematics. The discussions about the results suggest that the understanding of concepts of Financial Mathematics in the activities of mathematical modeling is given in the following rules of use of concepts of Financial Mathematics and in the explanations provided by students about these concepts.

Keywords: Mathematical Modelling. Understanding. Language. Financial Mathematics. Philosophy of Wittgenstein.

Introdução

Discussões relativas ao ensino de Matemática Financeira em diferentes níveis de escolaridade abordam a importância de inserir em práticas pedagógicas o uso de conceitos dessa disciplina em práticas econômicas e financeiras da sociedade contemporânea, visando contribuir para o modo como os estudantes lidam com o dinheiro e agem nessas práticas (CAMPOS; HESS; SENA, 2018; HOFMANN; MORO, 2013; MUNIZ, 2016; OECD, 2005).

O ensino de Matemática Financeira mediado pela modelagem matemática configura-se como uma possibilidade para abordar situações-problema originadas de situações econômico-financeiras, por meio de conceitos dessa disciplina (GUIMARÃES; LAMBERTY, 2013; SILVA, 2014).

Nesse contexto, pesquisas sugerem que o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática na sala de aula viabilize aos alunos uma diversidade de usos da linguagem, procedimentos, conceitos e ações na investigação de uma situação-problema, cujas soluções e procedimentos não são previamente conhecidos (ALMEIDA, 2014, 2018, PALHARINI, 2017; TORTOLA, 2016). A linguagem, nesse sentido, pode ser entendida como um conjunto aberto de atividades, que leva "a uma diversidade enorme de conceitos, atitudes, modos de compreensão" (ARAÚJO, 2012, p. 18). É pela interlocução entre linguagem e compreensão em atividades de modelagem no contexto de uma disciplina de Matemática Financeira em um curso de Licenciatura em Matemática que nossa pesquisa se orienta.

Para abordar essa discussão, nos fundamentamos na filosofia de Ludwig Wittgenstein, especialmente nos seus escritos tardios, em que o filósofo delibera acerca da compreensão e sua manifestação a partir da multiplicidade de seus usos em diferentes contextos linguísticos e diferentes circunstâncias.

Diante disso, nesse artigo temos como objetivo investigar como os alunos compreendem conceitos da Matemática Financeira em diferentes tipos de atividades de modelagem matemática em uma disciplina de Matemática Financeira de um curso de Licenciatura em Matemática.

Inicialmente, apresentamos o quadro teórico da pesquisa, constituído pela Modelagem Matemática, Modelagem Matemática no ensino de Matemática Financeira e linguagem e compreensão em Matemática na perspectiva wittgensteiniana. Com base nesse quadro teórico, analisamos duas atividades de modelagem matemática desenvolvidas em uma disciplina de Matemática Financeira de um curso de Licenciatura em Matemática. Para análise dos dados, utilizamos os pressupostos metodológicos da análise de conteúdo (BARDIN, 2011), em uma abordagem qualitativa. Por fim, fazemos uma discussão a respeito dos resultados da pesquisa e explicitamos algumas contribuições da pesquisa para a Educação Matemática.

Modelagem Matemática

A modelagem matemática envolve a investigação, por meio da matemática, de uma situação-problema real, que a princípio não é matemática (ALMEIDA, 2018; BLUM; NISS, 1991; POLLAK, 2012, 2015). Todavia, não há na literatura um único caminho para fazer essa investigação, o como investigar uma situação-problema pode assumir diferentes configurações conforme a abordagem teórica e os propósitos da modelagem matemática (GEIGER; FREJD, 2015; KAISER; SIRARAMAN, 2006).

Niss (2015) propõe dois tipos de modelagem matemática, a *modelagem descritiva* e a *modelagem prescritiva*. Na *modelagem descritiva*, o objetivo é "capturar, representar, entender, ou analisar fenômenos extra-matemáticos existentes, situações ou domínios, geralmente como meio de responder questões práticas, intelectuais ou científicas" (NISS, 2015, p. 67). Na *modelagem prescritiva*, o foco é projetar, prescrever ou estruturar certos aspectos de situações de um domínio não matemático, "o objetivo final é preparar o caminho para tomar medidas com base em decisões que resultem certo tipo de considerações matemáticas" (NISS, 2015, p. 69). A modelagem prescritiva, portanto, visa "transformar o mundo ao invés de apenas compreender o mundo" (NISS, 2015, p. 69) e essa abordagem pode ser feita em dois tipos, Tipo 1 e Tipo II. No Tipo I, "o foco está em inventar noções, descritores ou medidas". O Tipo II, "se baseia em requisitos ou desejos de natureza pré-matemática específicos e claramente formulados" (NISS, 2015, p. 77). Essas caracterizações, segundo o autor, remetem a classificações já abordadas na literatura por Blum e Niss (1991) e Davis e Hersh (2005).

Em Blum e Niss (1991), os autores fazem uma distinção entre dois tipos de modelos matemáticos em relação ao fenômeno de investigação, modelos normativos (prescritivos) e modelos descritivos. Nos modelos normativos a matemática é utilizada para "estabelecer normas envolvendo juízos de valores" (BLUM; NISS, 1991) e esses modelos são usados normalmente em fenômenos econômicos, envolvendo juros ou impostos, por exemplo. Nos modelos descritivos, "a matemática serve principalmente para descrever e explicar a respectiva situação" (BLUM; NISS, 1991, p. 39), que está associada a fenômenos físicos, como movimentos planetários ou decaimento radioativo, por exemplo. Para Niss (2015), um mesmo modelo ao mesmo tempo pode ter fins prescritivos e descritivos. Nesse sentido, a caracterização do autor não se restringe a classificação do modelo, mas envolve a modelagem matemática como um todo, considerando os diferentes procedimentos envolvidos no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática

Davis e Hersh (2006) contribuem para essa discussão, caracterizando três funções da Matemática Aplicada: descrever, predizer e prescrever. A função descritiva, centra-se sobre um aspecto específico suficientemente limitado de um fenômeno e busca “resumir e substituir esse aspecto por uma equivalente descrição matemática” (DAVIS; HERSH, 2005, p. 116). A função preditiva está relacionada com a função descritiva, no sentido de que “descrições no simbolismo abstrato da matemática condensam uma grande quantidade de informações” (DAVIS; HERSH, 2005, p. 118). A previsão na Matemática decorre da ação de prever, quando essa ação “é realizada por meio da utilização de modelos matemáticos e computação” (DAVIS; HERSH, 2005, p. 119). Por fim, a função prescritiva “quer dizer aquelas situações em que a matemática conduz a ação humana ou automaticamente a algum tipo de ação tecnológica” (DAVIS; HERSH, 2005, p. 120).

A classificação de Niss (2015) dos tipos de modelagem matemática se aproxima da distinção feita por Davis e Hersh (2006) e suas diferenças, segundo o autor, se tornam mais evidentes quando consideramos as fases e os procedimentos do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática.

Consideramos que uma atividade de modelagem matemática tem início em uma situação inicial (situação-problema) e termina em uma situação final (resposta para o problema identificado na situação inicial). Essa passagem da situação inicial para a situação final envolve um conjunto de fases, tais como, a inteiração (simplificação, idealização, coleta de dados e formulação de um problema); matematização (transição da linguagem natural para linguagem matemática, formulação de hipóteses e variáveis); resolução (obtenção de um modelo matemático, uso de conceitos, teoremas, procedimentos e técnicas matemáticas); interpretação dos resultados e validação (análise do modelo à luz da situação inicial, confrontação dos resultados obtidos com a situação inicial) (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

De acordo com Niss (2015), a inteiração com a situação inicial pode ser semelhante na modelagem descritiva e na modelagem prescritiva. A matematização pode, mas não precisa ser diferente, “uma vez que na modelagem prescritiva pode não haver qualquer indício que seja a respeito de como chegar a um modelo sensato cumprindo com o objetivo da modelagem” (NISS, 2015, p. 76). Já a validação e a interpretação dos resultados são “muito diferentes, [...] são em grande parte ausentes na modelagem prescritiva [...] em vez disso, uma meta-validação torna-se crucial” (NISS, 2015, p. 76).

Nesse contexto, uma aspecto-chave que diferencia a modelagem descritiva e a modelagem prescritiva reside na fase interpretação dos resultados e validação. Segundo Souza, Oliveira e Almeida (2016), considerando que o objetivo da modelagem prescritiva é prescrever ações na situação modelada, não faz sentido uma validação no sentido de comparar o modelo matemático com a situação inicial, mas a situação modelada pode ser criticada e analisada, constituindo uma meta-validação.

A meta-validação pode ser feita com relação a pelo menos dois dos três pontos: analisar as consequências do resultados para as questões abordadas na situação inicial; comparar e contrastar o modelo matemático obtido com modelos já usados para estudar o fenômeno; discutir o impacto dos requisitos ou desejos envolvidos na prescrição obtida pela atividade de modelagem matemática (NISS, 2015).

Seja na modelagem descritiva ou na modelagem prescritiva, o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática no contexto educacional envolve uma inter-relação entre a matemática e a realidade. Segundo Pollak (2015), nessa inter-relação não há soberania nem da matemática e nem da situação, mas a harmonia entre ambas é essencial para avaliar os resultados obtidos na modelagem matemática. De fato, como pondera Almeida (2018), nas atividades de modelagem matemática os alunos colocam em jogo conhecimentos tanto em relação ao fenômeno sob investigação, quanto à matemática e seus procedimentos.

Nesse contexto, o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática oportuniza aos alunos, para além de mobilizar conhecimentos relativos a situações reais, trabalhar com conceitos da Matemática já estudados e aprender novos conceitos (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012), possibilitando o uso da linguagem matemática e seus procedimentos para investigar situações originadas nos mais variados fenômenos sociais, econômicos, biológicos entre outros (PALHARINI, 2017; TORTOLA, 2016).

Segundo Blum e Niss (1991), a modelagem matemática pode viabilizar aos alunos à compreensão de conceitos da Matemática e de situações do mundo real, bem como pode motivar e mostrar aos alunos a relevância dos estudos matemáticos nas mais variadas esferas sociais. Dessa forma, o foco de nossa investigação é a compreensão de conceitos da Matemática Financeira em duas atividades de modelagem matemática desenvolvidas em uma disciplina de Matemática Financeira. Detalhamos alguns aspectos do uso da modelagem matemática no ensino da Matemática Financeira na próxima seção.

Modelagem matemática no ensino de Matemática Financeira

A Matemática Financeira é o campo da Matemática que estuda "o comportamento do dinheiro no tempo […] busca quantificar as transações que ocorrem no universo financeiro levando em conta a variável tempo, ou seja, o valor monetário no tempo" (SANTOS, 2005, p. 157). Trata-se, nesse sentido, de uma linguagem, expressa por meio de símbolos, proposições, axiomas, regras e técnicas específicas da linguagem matemática. Como ponderam Rosetti Júnior e Schimiguel (2009, p. 11), "a evolução da matemática fez surgir aplicações específicas, com linguagens e símbolos próprios, como foi o caso da Matemática Comercial e Financeira".

A relevância do ensino de Matemática Financeira permeia o uso dos conceitos dessa disciplina em práticas econômico-financeiras do cotidiano e dos ambientes profissionais. Segundo Hermínio (2008, p. 12), a Matemática Financeira pode contribuir para "formação de alunos críticos e capazes de reconhecer as relações comerciais existentes em nosso dia-a-dia, já que se faz sempre necessário aprender a lidar com o dinheiro em suas diferentes formas". Nesse sentido, Hofmann e Moro (2012, p. 47) ponderam que "compreender, em alguma medida, os fundamentos econômicos, sociais, legais e mesmo linguísticos subjacentes às práticas econômicas cotidianas é condição para a interação e para a socialização econômica da população". Constitui-se um desafio para o ensino da Matemática Financeira, portanto, a formação de alunos capazes de compreender e agir em situações econômico-financeiras.

O desenvolvimento de atividades modelagem matemática constitui uma alternativa para abordar esses aspectos relativos ao ensino de Matemática Financeira, uma vez que fornece "uma leitura, ou mesmo uma interpretação, de situações não matemáticas com base na matemática" (ALMEIDA, 2018, p. 29) e dessa forma estabelece um diálogo entre a Matemática Financeira e situações-problema econômico-financeiras da sociedade e do cotidiano dos alunos.

Outro desafio do ensino de Matemática Financeira diz respeito a integração da Educação Financeira na formação dos estudantes (CAMPOS; TEIXEIRA; COUTINHO, 2015, CUNHA; LAUDARES, 2017). Nesse contexto, Campos, Hess e Sena (2018) propõem que a modelagem matemática no ensino da Matemática Financeira pode contribuir para essa integração, relacionando conceitos da Matemática Financeira com aspectos da Educação Financeira. Complementando essa ideia, Campos, Teixeira e Coutinho (2015, p. 564), argumentam que o ensino de tópicos da Matemática Financeira em si não basta "para cumprir o papel de formar cidadãos e promover a Educação Financeira se ele não for contextualizado em situações reais ou realísticas, próximas ao cotidiano do educando".

De acordo com Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OECD, 2005), a Educação Financeira pode ser entendida como:

> [...] o processo mediante o qual consumidores/investidores melhoram a sua compreensão em relação aos conceitos e produtos financeiros, de maneira que, com informação, instrução e/ou orientação objetiva, possam desenvolver confiança e as competências necessárias para se tornarem mais conscientes das oportunidades e riscos financeiros e, então, poderem fazer escolhas bem informadas, saber onde procurar ajuda e adotar outras ações efetivas que melhorem o seu bem-estar financeiro (OECD, 2005, p. 26).

Diante disso, Muniz (2016, p. 4), propõe que a integração da Educação Financeira no Ensino de Matemática Financeira precisa contemplar a leitura de situações financeiras que contemplem diferentes aspectos, incluindo os de natureza matemática, para que pensem, avaliem e tomem suas próprias decisões; conexões entre questões econômicas e financeiras presentes na sociedade e as questões de ensino; articulação entre a Educação Financeira e a Matemática de forma dual, em que a Educação Financeira pode se beneficiar da matemática para "entender, analisar e tomar decisões em situações financeiras, e que também permita explorar situações financeiras para aprender matemática"; e oportunizar aos alunos "múltiplas leituras sobre as situações financeiras", por meio de "aspectos financeiros, matemáticos, comportamentais, culturais, biológicos, políticos e ecológicos".

Esses aspectos podem ser mobilizados no ensino de Matemática Financeira mediado pela modelagem matemática, uma vez que no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática os alunos podem refletir e compartilhar diferentes resoluções e modos de ver a situação-problema estudada, tanto em termos do uso da matemática, quanto em relação a aspectos relevantes da situação-problema (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012; SCHUKAJLOW; KRUG, 2012); e insere os estudantes em um ambiente, cujas tomadas de decisão são necessárias em uma via de mão dupla, na qual, por um lado, "uma tomada de decisão social, muitas vezes depende de considerações econômicas, o que cria uma consciência de matemática e modelagem" (FREJD, 2015, p. 355) e, por outro lado, as situações econômico-financeiras podem ser usadas para o ensino e aprendizagem da Matemática Financeira.

Diante disso, desenvolvemos duas atividades de modelagem matemática com alunos de uma disciplina de Matemática Financeira em um curso de Licenciatura em Matemática, com objetivo de articular o ensino de Matemática Financeira e aspectos da Educação Financeira. Nesse contexto, tendo em vista que a Matemática Financeira pode ser entendida como uma linguagem matemática, nossas reflexões acerca da compreensão de conceitos de Matemática Financeira nas atividades de modelagem matemática, vêm ancoradas na perspectiva do filósofo Ludwig Wittgenstein a respeito da compreensão, linguagem e suas interlocuções.

Linguagem e compreensão em Matemática na filosofia de Wittgenstein

A filosofia de Wittgenstein abrange diferentes períodos que caracterizam mudanças em suas reflexões acerca das relações entre linguagem, pensamento e mundo. No final da década de 1930 e durante a década de 1940, a concepção de linguagem de Wittgenstein, como um conjunto abrangente de atividades sociais, cujos significados dos conceitos se constituem nos seus usos em determinadas situações, tem repercussões nas investigações do filósofo sobre *Matemática*, *proposição*, compreensão, entre outros. Nessa perspectiva de linguagem, os conceitos, incluindo o da compreensão, passam a ser vistos como imprecisos e por vezes variados, uma vez que não se constituem em um quadro fixo e limitado de referência, mas nos seus usos na linguagem.

> "'Compreender uma proposição matemática'- é um conceito muito vago. [...] E na medida em que o que posso fazer com a proposição é o critério de sua compreensão, nessa mesma medida, não está claro, em princípio, se eu a entendo e até que ponto" (WITTGENSTEIN, 1987, V, § 46).

Dessa forma, a atividade filosófica de Wittgenstein não busca um significado último e fixo para o conceito de compreensão, como fazem as concepções mentalistas e behavioristas, mas é por meio da descrição gramatical dos usos do termo *'compreensão'* em práticas públicas e institucionais, que podemos detalhar características da compreensão e sua manifestação. É por meio dessa descrição que se constituem os critérios que podemos utilizar para dizer que alguém compreendeu algo.

Segundo McGinn (1984), compreender uma proposição matemática, ou qualquer outro conteúdo, não é uma asserção acerca de um estado mental do sujeito que compreende. Estados mentais (por exemplo, dor, sentimento, depressão, excitação) são fenômenos experenciais e temporais, dizemos, por exemplo, sinto dor forte, dor fraca, de dores contínuas, de dores interrompidas. Já a compreensão é atemporal, não é um estado ou um processo, como algo que acontece ou se passa. Assim, não faz sentido dizer, gramaticalmente, *compreendo uma proposição matemática em um determinado instante*, como um *insight*, ou *compreendo a proposição até este ponto*. O critério de compreensão nesse caso são as ações, que não se baseiam, conforme Machado (2007, p. 276), "na observação (introspecção) do estado do nosso aparelho mental".

Os critérios que usamos para atribuir compreensão a alguém são circunscritos em práticas específicas de uso da linguagem, em *jogos de linguagem* como denomina Wittgenstein. Dentre os jogos de linguagem que podemos exemplificar, destacamos os da Matemática.

Segundo Izmirli (2013, p. 9), “a Matemática tem muitas convenções que são, em essência, acordos sociais sobre definições, pressupostos e regras, isto é, o conhecimento matemático é um fenômeno social que inclui linguagem, negociação, diálogo e aceitação em grupo”.

As reflexões de Wittgenstein sobre a Matemática remetem a uma distinção entre dois tipos de proposições, empíricas e gramaticas. As proposições empíricas são descritivas, podem ser falseadas pela experimentação empírica, por exemplo, a proposição “esta mesa tem o mesmo comprimento que a mesa acolá” (WITTGENSTEIN, 2014, § 251) é uma proposição empírica, uma vez que é passível de uma verificação empírica. Já as proposições gramaticais têm função normativa, são regras convencionadas no interior de formas de vida, elas nos fornecem, segundo Gottschalk (2004, p. 313), “que faz sentido dizer ou o que não faz sentido dizer” (GOTTSCHALK, 2004, p. 313), por exemplo, a proposição “toda vara tem um comprimento” (WITTGENSTEIN, 2014, § 251), trata-se de uma proposição gramatical, pois não faz sentido dizer o contrário.

Nesse contexto, as proposições matemáticas exercem o papel de proposições gramaticais. Gottschalk (2004, p. 325) pondera que “a matemática não é descritiva, não se refere a nenhum tipo de realidade, apenas nos dá as condições necessárias para a compreensão do sentido de certos enunciados em determinados contextos” (GOTTSCHALK, 2004, p. 325). Por exemplo, “a proposição “2+2=4" permite-nos compreender que dois casais vão precisar de quatro bilhetes para assistir a uma peça de teatro” (GOTTSCHALK, 2004, p. 320). Assim, a compreensão em Matemática está interligada com a capacidade de seguir regras convencionadas em uma forma de vida. Conforme Silveira (2008, p. 5), ao seguirmos uma regra matemática, “mostramos que compreendemos e intuímos seu sentido, pois o contexto em que está inserido o problema matemático define qual regra devemos aplicar” e esse seguir regras pressupõe o domínio de pelo menos uma técnica de uso dessas regras.

Por exemplo, a compreensão do conceito de juros compostos no contexto da Matemática Financeira implica que o aluno domine pelo menos uma técnica (de potenciação, de razão geométrica em uma capitalização discreta a juros compostos, entre outros) para empregar corretamente esse conceito ao calcular a remuneração de uma aplicação financeira ou ao resolver um problema proposto pelo professor. Para dizer que o aluno compreendeu esse conceito, utilizamos critérios envolvidos na atividade linguística realizada, como o uso correto desse conceito em diferentes jogos de linguagem, as explicações dadas pelo aluno, o modo como ele reagem quando o professor explica ou dá uma ordem em uma atividade matemática. Enfim, seguindo Machado (2007), o que nos vai fornecer as condições para usar um determinado critério são as circunstâncias em que a atividade de uso deste conceito é realizada.

Baker e Hacker (2005) destacam que a compreensão de conceitos da Matemática está intimamente relacionada com a capacidade de fazer certas coisas, com certos própositos, no interior de um jogo de linguagem. Conforme Gottschalk (2008, p. 92), "compreender não é um processo mental, mas ser capaz de seguir uma regra, ou seja, é dominar uma técnica". Essa ideia é explicitada por Wittgenstein (2014) em:

> É evidente que a gramática da palavra "saber" goza de estreito parentesco com a gramática das palavras "poder", "ser capaz". Mas também com a gramática da palavra "compreender". ("Dominar" uma técnica.) (WITTGENSTEIN, 2014, § 150).
>
> Compreender uma frase significa compreender uma língua. Compreender uma língua significa dominar uma técnica (WITTGENSTEIN, 2014, § 199).

É nesse sentido que, dadas as diferenças entre a natureza dos enunciados matemáticos e de outros enunciados descritivos, a compreensão em Matemática está aparentada com outros modos de compreensão, como a compreensão de uma frase, de um tema musical, de um problema, pois, compreender algo "é compreender uma linguagem, ou melhor, um jogo de linguagem; é fazer parte de uma cultura com todas as suas convenções. Convenções que são ensinadas e aprendidas" (GOTTSCHALK, 2012, p. 55-56).

Portanto, a compreensão se dá no interior de um jogo de linguagem e se manifesta de acordo com as circunstâncias e o contexto linguístico, podendo ser: "no modo como usamos a palavra, no modo como reagimos quando outros a utilizam, e no modo como a explicamos quando somos solicitados a fazê-lo" (GLOCK, 1998, p. 92). Sendo assim, é por meio das ações dos estudantes em um jogo de linguagem, que podemos saber se eles compreenderam algo.

Em atividades de modelagem matemática, a compreensão de conceitos da Matemática ou da Matemática Financeira articula-se com os usos desses conceitos, bem como de suas regras, técnicas e proposições matemáticas. É na interlocução entre compreensão e linguagem que emergem os critérios para aferir sobre a compreensão de conceitos de Matemática Financeira nas atividades de modelagem matemática, visto que segundo Almeida (2014), nessas atividades os alunos jogam em diferentes jogos de linguagem, que dependem dos propósitos, interesses e as formas de vida envolvidos na prática de modelagem matemática.

Aspectos Metodológicos

Contexto de pesquisa e coleta de dados

Haja vista nosso objetivo de investigar como os alunos compreendem conceitos de Matemática Financeira em diferentes configurações de atividades de modelagem, analisamos duas atividades de modelagem matemática desenvolvidas por 9 alunos de uma disciplina de Matemática Financeira de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública do norte do Paraná, no ano de 2018.

Esta disciplina é ofertada em caráter anual para o 4º ano do curso com carga horária de 72 horas distribuídas em 2 horas/aula semanais e aborda, em sua ementa, os conceitos de juros e descontos simples, juros e descontos compostos, taxas, taxas equivalentes, inflação, equivalência de capitais diferidos, rendas ordinárias, antecipadas e deferidas, sistema de amortização de empréstimos, engenharia econômica, análise de investimentos e previsões financeiras.

Para o desenvolvimento das atividades, Orçamento familiar ou pessoal e Política de preços da Petrobrás, os alunos foram organizados em dois grupos, um contendo 5 alunos e o segundo 4 alunos, sendo Grupo 1 (G1) – A2, A4, A7, A8, A9; Grupo 2 (G2) – A1, A3, A4, A5, A6.

Coletamos dados provenientes dos registros escritos pelos alunos, gravações de áudio e vídeo, aplicação de um questionário e realização de uma entrevista. A análise das informações coletadas segue encaminhamentos da análise de conteúdo (BARDIN, 2011).

Metodologia de análise de dados

Segundo Bardin (2011), a análise de conteúdo pode ser entendida como:

> Um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas dessas mensagens) (BARDIN, 2011, p. 49).

Conforme as orientações metodológicas de Bardin (2011), na etapa denomina *pré-análise*, organizamos os dados, fazendo uma leitura flutuante e constituindo o corpus da pesquisa, que se refere aos registros escritos dos estudantes e aos diálogos transcritos em relação ao questionário inicial, a entrevista e ao desenvolvimento das atividades de modelagem matemática.

A partir da constituição do *corpus*, na etapa *exploração do material*, fragmentamos os dados em unidades de análise que, segundo Moraes (1999, p. 5), "é o elemento unitário de conteúdo a ser submetido posteriormente à classificação". Nesta pesquisa, as unidades de análise são os elementos de conteúdo presentes nos dados que podem fornecer indícios da compreensão dos alunos de conceitos da Matemática no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, isto é, dizem respeito as ações, explicações e usos da linguagem nessas atividades.

Um movimento paralelo a unitarização dos dados é a codificação. Nessa pesquisa, atribuímos códigos, indicando a atividade (AT1 para atividade 1 – Orçamento Familiar ou Pessoal; AT2 para a atividade 2 – Política de Preços da Petrobrás), o grupo de alunos (G1 para o grupo 1, G2 para o grupo 2), o instrumento de coleta de dados (sendo D para os diálogos, E para as respostas dos alunos na entrevista; Q para respostas dos alunos no questionário) e a unidade de análise seguido de um número (U.1, U.2, U.3,...,U55). Assim, o código AT1.G1.D.U1 diz respeito a unidade de análise 1 definida a partir de diálogos dos alunos do grupo G1 na Atividade 1.

Considerando a perspectiva de compreensão adotada nessa pesquisa, agrupamos por semelhança as unidades de análise em categorias. Esse processo de análise foi se constituindo conforme as inferências do pesquisador, a partir dos dados e com base no quadro teórico.

Por fim, na terceira etapa *inferência e interpretação* fazemos uma discussão em relação ao quadro teórico, interpretando e comunicando os resultados obtidos.

Atividade 1: Orçamento Familiar ou Pessoal

Na atividade Orçamento Familiar ou Pessoal o tema foi proposto pelo professor e diz respeito à organização de elementos das finanças pessoais dos alunos, tais como receitas, despesas e investimento e como esses aspectos impactam a vida financeira dos indivíduos. Os alunos, dispostos em grupos, coletaram dados acerca do orçamento financeiro de um dos participantes do grupo, apresentados em uma planilha eletrônica, conforme indica o Quadro 10.

Quadro 10 - dados de um dos alunos do grupo G1

Orçamento Familiar ou Pessoal					
A4	**nov/17**	**dez/17**	**jan/18**	**fev/18**	**mar/18**
Renda					
Salário	966,91	966,91	966,91	966,91	1059,08
Outras rendas	-	981,24	-	356,00	-
Total	966,91	1948,15	966,91	1322,91	1059,08
Consumo					
Supermercado	209,59	240,42	274,30	253,85	308,19
Cartão de débito	49,91	5,00	-	25,00	98,59
Plano Vivo	39,98	75,98	76,70	39,99	45,00
Celular Novo	-	-	90,00	90,00	90,00
Netflix	27,90	27,90	27,90	27,90	27,90
Alimentação	120,00	100,00	50,00	100,00	100,00
Computador	240,00	240,00	240,00	240,00	240,00
Manutenção da Conta	12,40	12,40	12,40	12,40	12,40
Compras/ lojas	84,72	-	50,00	68,92	137,00
Combustivel / Carro	160,00	230,00	80,00	60,00	-
Dentista	-	1000,00	-	-	100,00
Total Consumo	944,50	1931,70	901,30	918,06	1159,08
Sobras	22,41	16,45	65,61	404,85	-100,00

Fonte: registros escritos dos estudantes.

Na inteiração com a situação-problema delineada, os alunos discutiram relações entre a renda, o consumo e as opções de investimento em renda fixa, como a poupança e o Tesouro Direto e formularam um problema a ser estudado:

> G1: *Considerando que o tempo total de contribuição na previdência para uma professora da Educação Básica se aposentar é de 25 anos, qual é o montante obtido em um investimento no Tesouro Direto em um tempo equivalente, se fosse investido mensalmente a diferença entre o salário e consumo?*
>
> *G2: Qual será o montante obtido em um investimento em um título pré-fixado do Tesouro Direto com o prazo de vencimento de 5 anos e 2 meses, se investido mensalmente R$ 200,00?*

No grupo G1, o problema formulado pelos alunos considerou como base o orçamento pessoal da aluna A4, professora dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Já no grupo G2, os alunos estipularam um valor fixo a ser investido mensalmente a partir do consumo e da renda mensal do aluno A3.

O propósito subjacente aos problemas formulados pelos alunos é prever o montante em um investimento no Tesouro Direto para um determinado período, considerando como base os seus orçamentos pessoais. Esse objetivo se alinha com a modelagem descritiva (NISS, 2015), na medida que, como ponderam Davis e Hersh (2005), ao realizar previsões, o modelador precisa recorrer a descrições e relações no simbolismo da Matemática, que condensam uma grande quantidade de informações.

O estabelecimento de relações entre as informações da situação-problema e a Matemática envolve a matematização. Nessa atividade, a matematização envolveu a formulação das seguintes hipóteses e variáveis (Quadro 11), estabelecendo relações entre consumo, renda e investimento.

G1: i) o consumo é proporcional a renda; ii) o salário será atualizado de acordo com a inflação medida pelo IPCA; iii) considerar o índice de inflação IPCA, como a média dos últimos anos; iv) o saldo mensal do orçamento sempre será positivo; v) o capital investido mensalmente será a diferença entre a renda e consumo do mês.

G2: (i) o valor investido mensalmente será fixo; (ii) não será resgatado o valor investido antes do vencimento do título; (iii) o tempo de investimento ocorrerá em meses. (AT1.G2.2)

Quadro 11 - variáveis da atividade 1

Grupo G1	**Grupo G2**
S_n: salário no mês n; S_0: salário inicial; β: constante de proporcionalidade do consumo/despesas em relação ao salário; C_n: consumo no mês n; M_n: montante no mês n; t:tempo (em meses); $\propto$: taxa de inflação segundo o IPCA; i: taxa de juros do investimento ao mês;	Rp_n: montante do investimento no mês n; i: taxa de Juros do investimento equivalente em meses; n: tempo em meses; Rb: Cobrança do Imposto de Renda; Bt: Custódia do próprio Tesouro Direto;

Fonte: registros escritos dos estudantes.

A formulação de hipóteses e a seleção de variáveis nessa atividade foram realizadas com o objetivo de estabelecer relações entre informações da situação-problema (investimento, renda e consumo) e descrever essas informações por meio de um simbolismo matemático. Essas ações dos alunos podem ser identificadas como características da modelagem descritiva, na qual, de acordo com Davis e Hersh (2005), há uma descrição e uma substituição de um aspecto limitado do fenômeno investigado por uma descrição matemática equivalente.

Para resolver o problema, ambos os grupos desenvolveram um modelo matemático a partir de equações de diferenças de 1ª ordem. A resposta matemática para o problema envolveu o uso do GeoGebra e do software Excel, no caso do Grupo G1, e no caso do grupo G2, a substituição de dados no modelo matemático. Apresentamos o modelo matemático e a resolução no Quadro 12.

Quadro 12 - Resolução Matemática da atividade Orçamento Familiar

Grupo G1

Dedução do modelo matemático $M_n = M_0.(1+i)^n + S_0.(1-\beta).\left[\dfrac{(1+\alpha)^1 * (1+i)^n - (1+\alpha)^{n+1}}{(i-\alpha)}\right]$

1° equação

$M_n = M_{n-1} + M_{n-1}.i + (S_n - C_n)$

2° equação

$C_n = \beta.S_n$, sendo $0 < \beta < 1$

3° equação

$S_n = S_{n-1}.(1+\alpha)$

$S_n = S_0.(1+\alpha)$

Relacionando as três equações

$M_n = M_{n-1} + M_{n-1}.i + S_0.(1+\alpha)(1-\beta)$

Por recursividade temos

Resposta Matemática

Sendo $M_0 = R\$\ 149{,}80$, $i = 0{,}6976\%\ a.m$, $S_0 = R\$\ 1070{,}00$, $\alpha = 0{,}49\%$, $\beta = 0{,}86$, $n = 300$ meses, substituindo no modelo matemático e calculando o montante por meio do Excel, temos:

$M_n = 149{,}8.(1+0{,}0069)^n + 1070.(1-0{,}86).\left[\dfrac{(1+0{,}0069)^n.(1+0{,}0049)^1 - (1+0{,}0049)^{300+1}}{(0{,}0069-0{,}0049)}\right]$

Tempo (meses)	Montante no mês n
1	R$ 301,38
2	R$ 454,77
3	R$ 609,96
4	R$ 766,99
5	R$ 925,87
...	...
300	R$ 271.578,58

Segue que

$M_{300} = R\$\ 271{,}578{,}58$

Grupo G2

Dedução do modelo

Rendimento do Título

$Rp0 = 200{,}00$

$Rp1 = 200{,}00 * (1+i) + 200{,}00$

$Rp2 = 200{,}00 * [(1+i)^2 + (1+i) + 1]$

.
.
.

$Rpn = 200{,}00 * \dfrac{1-(1+i)^n}{i}$

Imposto de renda

$Rb = 200{,}00 * \dfrac{-1+(1+i)^n}{i} * 0{,}15$

Custódia do Tesouro

$Bt = 200{,}00 * \dfrac{-1+(1+i)^n}{i} * 0{,}0030$

Montante no mês n

$Rpn = 200{,}00 * \dfrac{-1+(1+i)^n}{i} - Rb - Bt$

Reposta matemática

$Rp62 = 200{,}00 * \dfrac{1-(1+0{,}00008923725)^{62}}{0{,}00008923725} - 1.860{,}05 - 37{,}20$

$Rp62 = 10.503{,}08$

Fonte: registros escritos dos estudantes

A resolução matemática dos alunos nessa atividade na elaboração do modelo matemático teve como finalidade o estabelecimento de relações entre as variáveis delineadas na matematização para descrever o comportamento de um aspecto do fenômeno (o rendimento no Tesouro Direto) investigado, possibilitando aos alunos realizarem previsões. Podemos ponderar que essa finalidade fornece elementos para caracterizar os modelos deduzidos pelos alunos como descritivo e preditivo em uma mesma atividade, o que corrobora com a assertiva de Niss (2015), sobre a possibilidade de um modelo matemático possuir diferentes funções em uma mesma atividade de modelagem matemática.

Na interpretação dos resultados e validação do modelo matemático, os alunos do grupo G1 fizeram uma análise do modelo matemático em relação à matemática e a situação inicial. A validação do grupo G2, foi feita por meio de uma simulação no site do Tesouro Direto, comparando os resultados obtidos por meio do modelo matemático com dados da situação inicial. Apresentamos essa fase no Quadro 13:

Quadro 13 - Interpretação dos resultados e validação na atividade Orçamento Familiar

<table>
<tr><th>Grupo G1</th><th>Grupo G2</th></tr>
<tr>
<td>O modelo matemático é válido para $n \in \mathbb{N}$, pois trata-se de uma equação discreta.
A taxa de inflação (α) precisa ser menor que a taxa de juros do investimento (i), pois caso $\alpha < i$, o montante no mês n (M_n) é negativo durante o tempo, o que não pode acontecer pois estamos tratando de investimento e não possível realizar um investimento “negativo”. Considerando que de acordo com a folha de pagamento de A4, o salário da aposentadoria obtido pela previdência é de $R\$\,1.179{,}12$ e o montante obtido no investimento no Tesouro Direto no tempo equivalente de contribuição da previdência de 25 anos é de R$ 271.578,58, ponderamos que o esse investimento constitui uma alternativa a previdência, uma vez que, proporcionalmente, o montante obtido equivale ao salário da aposentadoria durante 19 anos.</td>
<td>
<table>
<tr><th>Investimento</th><th>Valor bruto de resgate (R$)</th><th>Rentabilidade bruta (a.a)</th><th>Custos (R$)</th><th>Valor do imposto de renda (R$)</th><th>Valor líquido de resgate (R$)</th><th>Rentabilida de líquida (a.a)</th></tr>
<tr><td>Título</td><td>20.429,88</td><td>9,92%</td><td>251,19</td><td>829,87</td><td>19.299,41</td><td>8,09%</td></tr>
<tr><td>Poupança</td><td>17.841,85</td><td>5,56%</td><td>0,00</td><td>0,00</td><td>17.841,85</td><td>5,56%</td></tr>
</table>
O orçamento de nosso indivíduo que é de uma mulher com o salário, de 1.200 reais, é uma boa recomendação para este tipo de investimento tanto ao prazo de 5 anos em que trabalhamos, como também a longo prazo cerca de 11 a 15 anos, como apresenta no site do Tesouro Nacional.
</td>
</tr>
</table>

Fonte: registros escritos dos alunos

Considerando que os modelo matemáticos elaborados pelos alunos têm como propósito descrever um aspecto específico do fenômeno, a validação desses modelos por meio de uma comparação entre os resultados matemáticos obtidos com dados da situação-problema reforça a caracterização da atividade 1 como modelagem descritiva na perspectiva de Niss (2015).

A partir do desenvolvimento da atividade, os alunos do grupo G1 consideraram que em 25 anos de investimento o montante obtido será de R$ 271.578,58, que equivale a 19 anos da soma do salário da aposentadoria. Os alunos do grupo G2 obtiveram que no prazo de 62 meses, o montante do investimento será de R$ 10.503,08.

Consideramos que o encaminhamento da atividade 1 indica características da modelagem descritiva, com o propósito inicial de compreender um aspecto específico do Orçamento Familiar e, posteriormente, realizar previsões. Essa caracterização pode ser mais evidente seguindo a sugestão de Niss (2015), de olhar para as fases da modelagem matemática. Deste modo, apresentamos no Quadro 14 a caracterização da atividade 1 como modelagem descritiva segundo as fases da modelagem matemática propostas por Almeida, Silva e Vertuan (2012).

Quadro 14 - Caracterização da atividade 1 como modelagem descritiva

Fases	Características da modelagem descritiva
Inteiração	Coleta de dados e formulação de um problema com o objetivo de realizar previsões a partir de descrições do comportamento ao longo do tempo de um aspecto específico fenômeno.

Matematização	Estabelecimento de variáveis e hipóteses, descrevendo e substituindo informações da situação-problema por meio de uma descrição matemática equivalente.
Resolução	Estabelecimento de relações entre as variáveis, elaborando um modelo matemático, com o propósito de descrever o comportamento ao longo do tempo de um aspecto específico do fenômeno.
Interpretação dos resultados e validação	Comparação do modelo matemático obtido com dados reais do fenômeno.

Fonte: os autores

A caracterização da atividade 1 como modelagem descritiva apresentada no Quadro 14 se aproxima de descrições tradicionais do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, em que o seu processo, segundo Souza, Oliveira e Almeida (2016, p. 550), é geralmente apresentado por meio de fases da modelagem matemática propostas na literatura, com o objetivo de "compreender e descrever o fenômeno na forma em que ele se apresenta".

Atividade 2: Política de Preços da Petrobrás

Na atividade Política de Preços da Petrobrás, o tema surgiu a partir das greves dos caminhoneiros que ocorreu no primeiro semestre de 2018, em que uma das pautas era mudar a política de preços da Petrobrás. A situação inicial proposta pelo professor envolveu a formação do preço da gasolina no Brasil desde a Petrobrás até o consumidor final.

Inicialmente, na inteiração com a situação-problema o professor apresentou aos alunos informações obtidas pelo site da Petrobrás e pela Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis (ANP), como a composição do preço da gasolina e da política de preços de combustíveis da Petrobrás vigente e um relatório da composição do preço da gasolina a partir de fevereiro de 2018. A composição do preço da gasolina nas bombas, inclui a participação do custo da distribuição e revenda (13%), custo do etanol anidro (11%) que é misturado na gasolina vendida pela Petrobrás, ICMS (29%); tributação de impostos, como CIDE, PIS/PASEP e COFINS (15%), e a participação dos lucros e custos da Petrobrás (32%)

Segundo o site da Petrobrás[15], os preços dos combustíveis vendidos pela empresa são reajustados de acordo com os preços do barril de petróleo internacional e a taxa cambial, com objetivo de buscar uma paridade com o preço internacional. Esta política de preços tem fornecido uma alta no preço da gasolina para o consumidor e uma instabilidade na variação do preço gasolina do decorrer do tempo.

[15] Petrobrás. Composição e estrutura de formação dos preços. Disponível: <http://www.anp.gov.br/precos-e-defesa-da-concorrencia/precos/composicao-e-estruturas-de-formacao-dos-precos>. Acesso em: 10 de abr. 2018.

A partir dessas informações, o professor propôs o seguinte problema: *que alternativa à esta atual política de preços poderia ser dada, de modo a diminuir a instabilidade do preço do combustível ao consumidor?*

Este problema tem por finalidade estruturar certos aspectos da política de preços da gasolina, de modo a preparar o caminho para tomar medidas baseadas em decisões que buscam prescrever a situação-problema. Nesse sentido, o desenvolvimento da atividade 2 a partir do problema proposto pode-se configurar como uma atividade de modelagem prescritiva, segundo Niss (2015), uma vez que busca prescrever a situação-problema estudada com base em certos requisitos de natureza não matemática. Tais requisitos foram formulados com base nas intenções e decisões dos alunos de como deve ser formado o preço da gasolina na Petrobrás e não como de fato acontece. Como ilustrado a seguir:

> *G1: (i) Fixação da taxa de ICMS; (ii) Redução dos impostos e cobrança incidindo somente ao final (sobre o preço final da gasolina); (iii) Reajuste do preço da gasolina com relação ao dólar a cada 30 dias; (iv) Aumento do preço de exportação (reajuste segundo os 50 (cinquenta) maiores preços de exportação no mundo).*
>
> *G2:(i) União de todos os impostos sobre a gasolina nas bombas e sua diminuição de sua porcentagem para cerca de 13% a 18%; (ii) trabalhar no consumo de combustível nacionalmente, para que use na relações das bombas de postos; (iii) reajuste do preço da gasolina de acordo com a variação do preço do barril de petróleo internacional a cada 30 dias.*

Niss (2015) argumenta que a inteiração e a matematização na modelagem prescritiva tende a ser mais rudimentar que na modelagem descritiva, dependendo do contexto da situação inicial. No caso da atividade 2, os alunos consideraram um modelo matemático usado na formação do preço da gasolina nas bombas e fizeram alterações conforme os requisitos formulados por eles. O modelo matemático considerado é fornecido pelo site da ANP e pode ser observado na Quadro 15.

Quadro 15 - modelo matemático usado na formação de preços da gasolina segundo a ANP

PR=CRf+MRf	(PR)	Preço de realização da refinaria (PR);	(1)
	(CRf)	Preço do derivado custo de refino (CRf), incluído o custo do petróleo (1) e gastos operacionais e administrativos para gerar o derivado;	
	(MRf)	Margem relativa à atividade de refino (MRf).	
PF=PR+UP+IM	(PF)	Faturamento da refinaria às empresas distribuidoras (PF), ou seja, o preço efetivamente pago pelas distribuidoras às refinarias pelos derivados	(2)
	(UP),	Parcelas relativas à Federação Única dos Petroleiros (UP);	
	(IM)	Uma vez que se agregava ao preço de realização os impostos, contribuições sociais e royalties (IM). (ICMS, PIS, COFINS, Previdência Social, IOF e Royalties)	
PD =PF+MD+CD+IM	(PD)	Resultando no preço de faturamento da distribuidora (PD);	(3)
	(MD)	Margem de retorno com a atividade (MD);	
	(CD)	Distribuição dos derivados para os postos de abastecimento (valores capazes de cobrir seus gastos operacionais e administrativos com frete incluído) - CD;	
	(IM)	Impostos (IM) (ICMS, PIS, COFINS, IOF).	
PV=PD+MR+CR+IM	(PV),	O preço de venda ao consumidor (PV);	(4)
	(CR),	Preço da distribuidora dos custos da revenda (CR);	
	(IM)	Impostos (IM) (ICMS, PIS, COFINS, Previdência Social, IVVC);	
	(MR)	Margens da revenda (MR).	

Fonte: Agência Nacional do Petróleo (2018)

A partir deste modelo, o grupo G1 considerou que os impostos somados seriam reduzidos em ½ e em 1/3 e que a diferença entre o preço da gasolina anterior e o preço atual seria somado no preço de venda da gasolina para o mercado externo. Para tornar mais estável a variação o preço da gasolina nas bombas, o grupo G1 estendeu o período de reajuste da gasolina segundo a taxa cambial do dólar para trinta dias.

O Grupo G2 também unificou os impostos e fez uma redução de 16% dos impostos atuais. Outro requisito desse grupo, foi que o preço de venda da gasolina pela Petrobrás será calculado de maneira inversamente proporcional ao consumo da gasolina. O terceiro aspecto envolvido no modelo matemático obtido foi o reajuste a cada trinta dias de acordo com a variação do preço do barril de petróleo.

Apresentamos os modelos matemáticos obtidos pelos grupos nessa atividade no Quadro 16.

Quadro 16 - dedução do modelo matemático na atividade Política de Preços da Petrobrás

Grupo G1	**Grupo G2**
Redução dos impostos à um terço: $PV = PD + LP + TD + PT + \frac{IM}{3}$ Redução dos impostos pela metade: $PV = PD + LP + TD + PT + \frac{IM}{2}$ Reajuste do preço da gasolina vendida pela Petrobrás de acordo com a variação do dólar cada 30 dias $PD_n = PD_0 \cdot \prod_{i=1}^{n}(1 + \theta_i)$ Modelo matemático $PV = PD_0 \cdot \prod_{i=1}^{n}(1 + \theta_i) + LP + TD + PT + \frac{IM}{2}$ $PV = PD_0 \cdot \prod_{i=1}^{n}(1 + \theta_i) + LP + TD + PT + \frac{IM}{3}$	Considerando o modelo atual: $Pf = Pa + Pe + Iu + Mc + Mr$ Para fazer o reajuste do preço da gasolina vendida pela Petrobrás em relação ao consumo $Pa_n = \frac{\beta}{c_n}$ Para fazer o reajuste do preço da gasolina vendida pela Petrobrás em relação a variação do preço do barril de petróleo $Pa_n = Pa_0 \prod_{i=1}^{n}(1 + \theta i)$ $Pf = Pa_0 \prod_{i=1}^{n}(1 + \alpha_i) + Pe + Iu + Mc + Mr$ Considerando a redução dos impostos em 16% temos: $Pf = Pa_0 \prod_{i=1}^{n}(1 + \alpha_i) + Pe + 0{,}84.\mathrm{Iu} + Mc + Mr$

Fonte: registros escritos dos alunos

As variáveis usadas pelos alunos do Grupo G1 foram: PV: Preço de venda ao consumidor; PD: Preço da gasolina sem impostos (Produção); IM: Impostos (Federais e Estaduais); LP: Lucro do Posto; TD: Transporte e distribuição; PT: Lucro dono da petroleira; n: tempo em meses; θ_i: variação do dólar do mês n_1 para o mês n.

As variáveis definidas pelo grupo G2 foram: Pf: Preço Final do Preço do Combustível; Pa: Preço do Produto da Gasolina; Pe: Preço do Etanol; Iu: Taxa de Imposto (IPPC); Mc: Margem de Custo; Mr: Margem de Revenda; If: impostos federais; Ie: impostos estaduais; α_i: variação do preço do barril de petróleo internacional do mês $n - 1$ para o mês n.

Diferente da atividade 1, caracterizada como modelagem descritiva, na atividade 2, a resolução matemática dos alunos envolveu a análise de um modelo matemático já usado pela ANP para descrever a formação do preço da gasolina, que desencadeou, por meio de requisitos ou desejos formulados pelos alunos, a elaboração de um modelo matemático com a finalidade de prescrever a Política de Preços da Petrobrás, isto é, transformar a situação-problema inicial e indicar como o preço da gasolina *deve* ser formado. Essa finalidade dos alunos na elaboração do modelo matemático pode ser entendida como uma característica da modelagem prescritiva, pois, como pondera Niss (2015), a modelagem prescritiva visa transformar e não apenas compreender ou descrever o mundo.

Os modelos matemáticos envolvidos no desenvolvimento da atividade 2 podem ser entendidos como dois tipos de modelo matemático, conforme a caracterização de Blum e Niss (1991). O modelo matemático proposto pela ANP (Quadro 15) e analisado pelos alunos tem como função descrever e explicar a formação de preços da gasolina, trata-se de um modelo descritivo. Já os modelos matemáticos elaborados pelos alunos (Quadro 16) têm como finalidade estabelecer normas envolvendo juízos de valores ou requisitos para formação de preços da gasolina, trata-se, nesse sentido, de modelos normativos (prescritivos).

A partir dos modelos matemáticos obtidos, os alunos fizeram uma meta-validação, analisando as consequências dos resultados para as questões abordadas na situação inicial e comparando os modelos matemáticos obtidos com o modelo matemático já usado na formação de preços da gasolina. Seguindo Niss (2015), a meta-validação realizada pelos alunos constitui uma aspecto-chave na caracterização da atividade 2 como modelagem prescritiva, considerando que os resultados obtidos com a prescrição da situação-problema conduzem a um outro modo de formação do preço da gasolina, diferente de como acontece. Assim, não faz sentido um contraste dos dados da situação-problema com os resultados obtidos pelo modelo matemático, de modo a validar o modelo matemático, mas uma meta-análise, que conduz a uma análise crítica da situação modelada. Apresentamos essa fase no Quadro 17:

Quadro 17 - meta-validação da atividade Política de Preços da Petrobrás

Grupo G1

Comparando os resultados do modelo matemático obtido com os resultados do modelo matemático usado atualmente, temos:

Fabricação ao consumidor	Valor pago atualmente		Pagamento de 1/2 dos Impostos		Pagamento de 1/3 dos	
	R$	%	R$	%	R$	%
Sem imposto (produção)	R$1,78	27%	R$1,78	27%	R$1,78	27%
Imposto Federal	R$1,17	28%	R$0,59	14%	R$0,39	9%
Imposto Estadual	R$0,67	16%	R$0,33	8%	R$0,22	5%
Lucro posto	R$0,42	10%	R$0,42	10%	R$0,42	10%
Distribuidora	R$0,17	4%	R$0,17	4%	R$0,17	4%
Transporte	R$0,08	2%	R$0,08	2%	R$0,08	2%
Total	R$ 4,29	87%	R$3,37	65%	R$3,06	58%
Dono da petroleira	R$0,57	13%	R$0,57	14%	R$0,57	14%
Valor a pagar	R$4,86		R$3,94		R$3,63	

Portanto, caso seja aceita tais reduções, o valor final pago pelo consumidor nas bombas seria de R$ 3,28 com a redução da metade dos impostos, e R$ 2,97 reduzindo estes impostos a um terço do que é cobrado atualmente.

Ressaltamos ainda, que esta porcentagem de impostos que será descontado do preço pago pelo consumidor, seria acrescido no preço da gasolina a ser exportada, logo não haveria um impacto na arrecadação do governo. E que mesmo com este aumento no valor da gasolina a ser exportada, ocuparíamos uma posição satisfatória no Ranking mundial de preços, o que também não afetaria a nossa quantidade de gasolina exportada, pois ainda faríamos uma boa concorrência.

No tocante a estabilidade do preço, a qual mencionamos que iria decorrer do tempo de reajuste da gasolina tipo "A" a cada 30 dias julgamos não satisfatório, uma vez que de acordo com os dados que coletamos em relação ao preço do dólar, a comparação com o preço obtido com o modelo e o da Petrobrás no mês de setembro mostra que o preço vendido pela Petrobrás é maior que o obtido no modelo.

Grupo G2

Considerando o preço da gasolina atual segundo o modelo matemático da ANP e comparando com os resultados do modelo, podemos perceber o preço da gasolina tende a se

Setembro	Brasil	
Ref.: 23/09/2018 a 29/09/2018	Valor (R$/litro)	Participação
Preço Produtor de Gasolina A Comum[1]	1,62	34,6%
Preço do Etanol Anidro [2]	0,51	10,8%
Tributos Federais [3]	0,69	14,6%
Tributos Estaduais [4]	1,26	26,8%
Margem Bruta de Distribuição [5] + Custos Transporte	0,19	4,1%
Margem Bruta de Revenda [5]	0,43	9,1%
Preço ao Consumidor de Gasolina C Comum	4,70	-

FONTE: ANP (2018)

MÊS DE SETEMBRO

Arrecadação da empresa	1,66	53,37%
Preço do Etanol	0,49	15,75%
IPPC	0,31	9,96%
Distribuição e Custos	0,07	2,25%
Margem de Revenda	0,58	18,64%
Valor Final	3,11	100%

tornar mais estável e mais barato.

No entanto, o reajuste a cada 30 dias é insuficiente para que o preço vendido pela Petrobrás no mercado interno seja satisfatório, pois a venda da gasolina no Brasil tende a diminuir nos próximos meses (ANP). O requisito de que o consumo é inversamente proporcional ao preço de venda da gasolina A, faz com o preço da gasolina vendido pela Petrobrás aumente.

Fonte: registros escritos dos alunos

A partir do desenvolvimento da atividade, os alunos consideraram que o uso dos modelos matemáticos obtidos para a formação de preços da gasolina pode resultar em uma redução no preço da gasolina e uma maior estabilidade na variação dos preços no decorrer do tempo.

Entendemos que o desenvolvimento da atividade 2 pode ser caracterizado, na perspectiva de Niss (2015), como modelagem prescritiva do tipo II, pois se baseia em requisitos ou desejos específicos e claros de natureza pré-matemática. Essa caracterização não se restringe ao tipo de modelo matemático elaborado pelos alunos, mas permeia o desenvolvimento da atividade como um todo, em relação as suas fases. Nesse sentido, apresentamos no Quadro 18 uma caracterização da atividade 2 conforme características específicas da modelagem prescritiva.

Quadro 18 - caracterização da atividade 2 como modelagem prescritiva

Fases	Características da modelagem prescritiva
Inteiração	Familiarização com aspectos característicos da situação-problema e análise de um modelo matemático já usado para descrever o fenômeno sob investigação.
Matematiização	Formulação de requisitos ou desejos baseados em juízos de valores dos alunos, com o objetivo de transformar ou prescrever aspectos específicos do fenômeno.
Resolução	Elaboração de um modelo matemático, com a finalidade de estabelecer normas que conduzem ações na situação-problema estudada, a partir da análise e transformação de um modelo matemático descritivo.
Meta-validação	Comparação do modelo matemático obtido com um modelo já usado para descrever o fenômeno; discussão dos impactos dos requisitos ou desejos envolvidos na prescrição obtida pela atividade de modelagem matemática para o fenômeno.

Fonte: os autores

O Quadro 18 evidencia características da modelagem prescritiva que emergiram no desenvolvimento da atividade 2. A formulação de requisitos e a meta-validação constituem dois aspectos-chave que distinguem a atividade 2 da atividade 1, caracterizada como modelagem descritiva. Niss (2015) argumenta que na matematização, a formulação de requisitos pode não indicar qual o encaminhamento matemático a ser usado na atividade, mas conduz à tomada de decisões com base em certas considerações matemáticas. Quanto a meta-validação na modelagem prescritiva, Niss (2015, p. 78) pondera que:

> a modelagem prescritiva é onipresente e altamente importante, com impacto científico, prático e social significativo. Isso implica que a meta-validação de modelos resultantes da modelagem prescritiva é de importância crucial.

Na seção 3.3 descrevemos o desenvolvimento da atividade 1 e da atividade 2 e caracterizamos essas atividades conforme a modelagem descritiva e a modelagem prescritiva, respectivamente. Na próxima seção, apresentamos a análise dos dados e os resultados da pesquisa em relação à compreensão dos alunos de conceitos da Matemática Financeira nas duas atividades de modelagem matemática a que nos referimos nesse artigo.

Análise dos dados e resultados da pesquisa

Nesse artigo, nosso foco de análise está nos usos de conceitos, procedimentos e artefatos da Matemática Financeira e seus desdobramentos para a compreensão de conceitos da Matemática Financeira nas atividades de modelagem matemática descritas. Esses usos, segundo Almeida (2018), se manifestam também nos diálogos entre a Matemática e aspectos da situação-problema, em que diferentes percepções dos alunos em relação a situação-problema podem levar a diferentes usos da Matemática no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática.

Na atividade 1, com a finalidade de descrever o rendimento de um título público do Tesouro Direto em relação ao tempo, os alunos estabeleceram relações entre informações da situação-problema, familiarizando-se com a situação-problema e formulando hipóteses, como indica os excertos a seguir:

> AT1.G1.R.U.1 - O consumo é proporcional a renda.
>
> AT1.G1.R.U.5 - O capital investido mensalmente será a diferença entre a renda e consumo do mês.
>
> AT1.G1.D.U.33 - Olha, eu projetei minha renda para o ano que vem, nós podemos pensar em relação a porcentagens.
>
> AT1.G2.D.U.38 - No site do Tesouro Direto, você pode investir mensalmente um determinado valor, no mínimo de R$ 100,00. Ai pensei em estipular um valor fixo de R$ 200,00 para investir de acordo com a renda e os gastos mensais da A3.

Além de estabelecer relações entre informações e variáveis identificadas na situação-problema, as hipóteses também foram elaboradas com a intenção de *desencadear o uso de conceitos da Matemática Financeira na elaboração do modelo matemático,* como indicado nos excertos:

> AT1.G2.R.U.8 - O tempo de investimento ocorrerá em meses
>
> AT1.G1.D.U.36 - Vamos considerar o índice de inflação do IPCA para fazer o reajuste do salário.

A hipótese AT1.G2.R.U.8 indica que o período de capitalização do investimento é mensal e a hipótese AT1.G1.D.U.36 indica a taxa a ser considerada para o reajuste monetário do salário. Essas hipóteses podem ser caracterizadas, sob a perspectiva de Wittgenstein (2014), como proposições empíricas acerca da situação-problema, isto é, são proposições descritivas acerca do fenômeno sob investigação.

O uso dessas proposições empíricas envolve a compreensão de aspectos da situação-problema, tais como receita, despesas e o tipo de investimento a ser feito, mas também a compreensão de conceitos da Matemática Financeira, como montante, capital, inflação e taxa de juros para delinear variáveis, utilizando símbolos específicos da Matemática Financeira. Essas considerações evidenciam a relevância da matematização no desenvolvimento da atividade, conforme já salientado por Pollak (2015), e corrobora com as argumentações de Almeida (2018), de que a transição da linguagem da situação-problema para a linguagem matemática é mediada por conhecimentos matemáticos e extra matemáticos. Ao fazer essa transição entre a linguagem da situação-problema para a linguagem matemática, os alunos *estabeleceram relações entre informações da situação-problema e conceitos da Matemática Financeira*, como ilustra o excerto a seguir:

> AT1.G2.D.39 - eu compro um título em uma taxa de juros pré-fixada e no vencimento do título eu resgato o valor que investi mais a remuneração a juros compostos.

Por meio da matematização, os alunos fazem uma transição dos dados de receitas, despesas e investimento e suas relações, presentes em um jogo de linguagem da situação-problema, para agir no jogo de linguagem da Matemática Financeira. Desse ponto de vista, a matematização estabelece articulações entre esses jogos, que desempenham uma função importante na compreensão de conceitos da Matemática Financeira e podem ser consideradas como uma preparação para o uso de regras e procedimentos da Matemática Financeira na elaboração do modelo matemático e, consequentemente, para a compreensão de conceitos dessa disciplina. Conforme argumenta Wittgenstein (2014, §§ 31-33), compreender a proposição “este é o rei” no jogo de xadrez, é somente uma compreensão a respeito do uso dessa figura, se o lugar já estiver preparado, isto é, se o aprendiz já ‘souber o que é uma figura de jogo’. Nesse sentido, Gottschalk (2018, p. 122) pondera que “compreender algo, pressupõe, essencialmente, o domínio de técnicas e determinadas habilidades”. Assim, a compreensão de conceitos da Matemática Financeira aborda a capacidade dos alunos de estabelecerem relações entre informações da situação-problema e conceitos da Matemática Financeira, como indica o Quadro 19.

Quadro 19 - articulações entre informações da situação-problema e conceitos da Matemática Financeira na dedução do modelo

Considerando o rendimento do título do Tesouro Direto escolhido é no regime de capitalização discreta a juros compostos, em uma taxa de juros ao mês pré-fixada (i) e que será investido mensalmente a diferença entre o salário (S_n) e o consumo (C_n) no mês n, temos que o montante no mês n do investimento é dado pela seguinte equação de diferenças de primeira ordem:

$$M_n = M_{n-1} + M_{n-1}.i + (S_n - C_n)$$

Tendo em vista o objetivo de manter o orçamento superavitário, o consumo mensal é tomado como diretamente proporcional ao salário mensal. Assim:

$$C_n = \beta.S_n$$

Sendo $0 < \beta < 1$.

(AT1.G1.R.U.9)

Considerando o reajuste monetário do salário de acordo com a inflação medida pelo IPCA, sendo α a média mensal do índice de inflação nos últimos anos, temos:

$$S_n = S_{n-1}.(1 + \alpha)$$

Relacionando as três equações e resolvendo, temos o seguinte modelo matemático: $$M_n = M_0.(1+i)^n + S_0.(1-\beta).\left[\frac{(1+\alpha)^1 * (1+i)^n - (1+\alpha)^{n+1}}{(i-\alpha)}\right]$$ (AT1.G1.R.U.10)
Com base na análise do orçamento pessoal da aluna A3, consideramos um investimento mensal fixo de R$ 200,00 em um prazo de 62 meses. Para estimar o rendimento, consideramos o regime de capitalização de juros sobre juros, ou seja, o rendimento no mês n (Rpn), incide sobre o rendimento do mês anterior em uma taxa de juros ao mês (i). Desta forma, temos: $Rpn = Rp_{n-1}.(1+i) + 200$ $Rp_0 = 200$ $Rp1 = 200.(1+i) + 200$. , , $$Rpn = 200.\frac{-1+(1+i)^n}{i}$$ (AT1.G2.R.U13) Imposto de renda (Rb): 15% sobre o rendimento final do título: $$Rb = 200.\frac{-1+(1+i)^n}{i}.0{,}15$$ Custódia do Tesouro (Bt): 0,3% sobre o rendimento final do título: $$Rb = 200.\frac{-1+(1+i)^n}{i}.0{,}003$$ Logo, $$Rpn = 200.\frac{-1+(1+i)^n}{i} - Rb - Bt$$ (AT1.G2.D.U.14) Percebe-se que a taxa de juros nominal do título é de 11,25 a.a, precisamos calcular a taxa efetiva ao mês para capitalizar o título, por meio das taxas equivalentes: $$(1+0{,}1125)^1 = (1+i)^{12}$$ $$im = 0{,}008923725\ \%\ a.m$$ (AT1.G2.U.15)

Fonte: registro escrito dos alunos

Na dedução do modelos matemáticos, conforme o Quadro 19, os alunos seguem regras da Matemática Financeira, tais como regime de capitalização discreta a juros compostos (AT1.G1.R.U.9), taxa de juros nominal, efetiva e equivalente (AT1.G2.R.U.13) e inflação (AT1.G1.R.U.10). Na perspectiva de Wittgenstein, essas regras podem ser entendidas como proposições gramaticais, regras de descrição para aspectos específicos da situação-problema. É a partir do uso dessas proposições que os alunos possuem condições para descrever o comportamento do rendimento de um investimento no Tesouro Direto ao longo do tempo, *elaborando um modelo matemático que permite a compreensão de um aspecto específico do fenômeno estudado* (AT1.G1.R.U.10).

As relações estabelecidas pelos alunos na atividade 1 entre as informações da situação-problema e o uso de conceitos da Matemática Financeira, por meio da formulação de hipóteses, podem ser entendidas como inter-relações entre proposições empíricas e proposições gramaticais para a dedução do modelo matemático. Por um lado, as proposições empíricas se baseiam em descrições dos alunos sobre o modo em que o fenômeno se apresenta. Por outro lado, as proposições gramaticais têm o papel de regras da Matemática Financeira e normatizam o uso de conceitos da Matemática Financeira na elaboração de um modelo matemático. Ao estabelecerem relações entre as proposições empíricas e as proposições gramaticais, os alunos seguem regras de descrição do fenômeno, manifestando a compreensão de conceitos da

Matemática Financeira. De fato, segundo Silveira (2008), ao seguir uma regra em um jogo de linguagem mostramos que compreendemos o seu uso nesse jogo.

Por exemplo, no uso de equações de diferenças de primeira ordem ($M_n = M_{n-1} + M_{n-1}.i$; $Rpn = Rp_{n-1}.(1+i)$) para descrever relações entre variáveis identificadas a partir das hipóteses formulados, os alunos agem de acordo com regras associadas ao uso do conceito de juros compostos, em que a taxa de juros é sempre aplicada no montante final de cada mês, bem como ao conceito de reajuste monetário, na qual há uma correção de valores com base em índices da inflação ($S_n = S_{n-1}.(1+\alpha)$) e de taxas equivalentes, em que duas taxas aplicadas ao mesmo capital durante o mesmo período de tempo, produzem o mesmo montante final em períodos de capitalização diferentes ($(1+0{,}1125)^1 = (1+i)^{12}$).

O seguir regras da Matemática Financeira na dedução do modelo matemático, implica *o uso de técnicas matemáticas*. Isto se mostra, por exemplo, na resolução das equações de diferenças de primeira ordem, em que o uso da técnicas de recursividade e da soma de uma progressão geométrica foram necessárias (AT1.G1.R.U.11). Na perspectiva de Wittgensein (2014), a compreensão pressupõe o domínio de técnicas, que, como comenta Gottschalk (2004), fazem parte de convenções em uma determinada cultura e, nesse sentido, não são descobertas pelos alunos, mas aprendidas mediante ao seu uso.

As explicações dos estudantes sobre o desenvolvimento da atividade 1 também indicam um modo de expressão linguística das regras e das técnicas da Matemática Financeira usadas na elaboração do modelo matemático. Na atividade 1, as explicações do uso de conceitos e procedimentos da Matemática Financeira na resolução matemática são ilustradas nos seguintes trechos dos diálogos dos alunos:

> AT1.G1.D.U.39 - Então, no mês zero nós vamos <u>ter a diferença entre o salário menos a despesa.</u> No mês um, <u>o montante vamos ter o montante do mês zero mais o juros e o que saldo desse mês</u>, que é o salário menos a despesa, que vai ser o capital investido no mês um. No mês dois e no mês três segue essa lógica, <u>fazendo por recorrência</u>.
>
> AT1.G2.D.U.42 - <u>Nós consideramos que a capitalização do título escolhido é a juros compostos e que o juros é aplicado no montante do mês anterior.</u> Investindo duzentos reais por mês e calculando o montante sempre em relação ao mês anterior, <u>nós fazemos por recorrência</u> e encontramos o modelo.

A partir dos excertos apresentados, inferimos que as explicações dos estudantes sobre a resolução matemática na atividade revelam como os estudantes compreendem conceitos da Matemática Financeira, uma vez que evidenciam o uso de regras e técnicas da Matemática Financeira. Ao encontro dessa ideia, Baker e Hacker (2005) ponderam que a explicação e o uso de um conceito são critérios de compreensão deste conceito em um determinado jogo de linguagem. Nesse sentido, Glock (1998) argumenta que o conceito de compreensão pode ser considerado como um correlato do conceito de explicação.

No desenvolvimento das fases inteiração, matematização e resolução na atividade 1, as ações dos alunos indicam um movimento de proposições empíricas para proposições gramaticais, constituindo alguns dos critérios de compreensão de conceitos da Matemática Financeira nessa atividade. Contudo, de acordo com a literatura, no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, faz-se necessário um movimento de volta, interpretando os resultados obtidos à luz da situação inicial e validando o modelo matemático (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012; BLUM; NISS, 1991; POLLAK, 2015; entre outros), como ilustrado nos excertos:

> AT1.G1.R.U.17, A taxa de inflação (α) precisa ser menor que a taxa de juros do investimento (i), pois caso α<i, o montante no mês n (M_n) é negativo durante o tempo, o que não pode acontecer pois estamos tratando de investimento e não possível realizar um investimento "negativo".
>
> AT1.G1.R.U.18. ponderamos que o esse investimento constitui uma alternativa a previdência, uma vez que, proporcionalmente, o montante obtido equivale ao salário da aposentadoria durante 19 anos.

A interpretação dos resultados e a validação do modelo matemático pode ser interpretado, em uma perspectiva wittgensteiniana, como um movimento de proposições gramaticais para proposições empíricas que requer a capacidade dos alunos de avaliar os resultados tanto em relação à matemática, quanto ao contexto da situação inicial. Nesse fase da modelagem matemática, as ações dos alunos (AT1.G1.R.U17; AT1.G1.R.U18) podem ser entendidas como a *interpretação do modelo matemático com base em regras matemáticas e no contexto da situação inicial, contrastando os resultados obtidos na atividade 1 com dados reais da situação-problema.*

No caso da atividade 1, caracterizada como modelagem descritiva, a interpretação do modelo matemático indica que os alunos são capazes de seguir regras da Matemática Financeira e explicar como os seus usos conduzem a uma resposta para a situação-problema, fornecendo um *modo de ver* o fenômeno. Tais regras, no papel de proposições gramaticais, segundo Palharini (2017), normatizam os procedimentos usados na atividade de modelagem matemática, servindo como regras de descrição para o fenômeno estudado. Na modelagem descritiva, as inter-relações estabelecidas pelos alunos entre as proposições gramaticais e as proposições empíricas podem ser entendidas como uma característica do modo que os alunos compreendem conceitos da Matemática Financeira, uma vez que o uso destes conceitos na atividade de modelagem matemática está sujeito a proposições gramaticais e mostram o *agir dos de acordo com regras* da Matemática Financeira nesta atividade.

Os dois movimentos de inter-relações entre proposições empíricas e proposições gramaticas no desenvolvimento da atividade 1 indicam, quando vistos em conjunto, a compreensão de um aspecto específico do fenômeno, intermediadas pela compreensão de conceitos da Matemática Financeira e desencadeada pelo objetivo dos alunos de descrever o comportamento do rendimento de um título público, a partir de relações entre receitas, despesas e investimento de um orçamento financeira, que é uma finalidade da modelagem descritiva segundo Niss (2015) e Souza, Oliveira e Almeida (2016).

Em síntese, *a compreensão de conceitos da Matemática Financeira na modelagem descritiva* pode ser descrita mediante a capacidade dos alunos de realizar as seguintes ações: *formulação de hipóteses que desencadeiam o uso de conceitos da Matemática Financeira no modelo matemático*; *estabelecimento de relações entre informações da situação-problema e conceitos da Matemática Financeira*; *uso de técnicas matemáticas para elaboração do modelo matemático*; *elaboração de um modelo matemático que permite compreender/descrever o comportamento específico do fenômeno em relação ao tempo*; *Interpretação do modelo matemático com base em regras matemáticas e no contexto da situação inicial, contrastando os resultados obtidos na atividade com dados reais da situação inicial*; *explicação do uso de conceitos e procedimentos da Matemática Financeira na resolução matemática da atividade.*

Na atividade 2, o desenvolvimento da atividade assume características relacionadas à modelagem prescritiva, conforme Niss (2015), considerando que os alunos estruturaram uma alternativa para a política de preços da gasolina da Petrobrás vigente, de modo a tornar mais estável a variação do preço da gasolina ao consumidor. Essa abordagem foi feita com base em requisitos de natureza pré-matemática, descritos na seção 3.3.2, formulados a partir de um conjunto de estudos acerca da formação do preço da gasolina no Brasil e de considerações econômicas e financeiras sobre possíveis alternativas à política de preços vigente.

Diferente da atividade 1, na inteiração com a situação-problema da atividade 2, entre os dados coletados pelos alunos situa-se um modelo matemático (Quadro 15) usado para descrever a formação de preços da gasolina no Brasil, desde o preço da gasolina A, vendida pela Petrobrás, até a gasolina C, disponível ao consumidor e misturada com etanol anidro. A análise deste modelo matemático foi um fator decisivo para a formulação de requisitos na atividade 2, como indica o seguinte excerto:

> AT2.G1.D.U.44 - estamos analisando o modelo matemático usado e a gente está pagando imposto sobre imposto. Olha isso, a gente paga ICMS nessas três coisas, no preço da gasolina da refinaria, da distribuidora e do vendido nas bombas.

Percebemos a partir das ações dos alunos na inteiração com a situação-problema da atividade 2, que os alunos fizeram uma *análise de um modelo matemático usado para descrever o fenômeno, com o propósito de compreendê-lo e posteriormente realizar alterações*. Essa característica identificada no desenvolvimento da atividade 2 tem repercussões para o modo que os alunos compreendem conceitos da Matemática Financeira nessa atividade, considerando que o jogo de linguagem da situação-problema envolve elementos já matematizados por instituições designadas para organizar e relatar a formação de preços da gasolina no Brasil.

Para compreender o modelo matemático e a formação do preço da gasolina, os alunos usaram conceitos da Matemática Financeira e da Economia, como tributação, taxa cambial e reajustes monetários a uma taxa variável. O uso desses conceitos indica a compreensão dos alunos de conceitos da Matemática Financeira, pois, segundo Wittgenstein (2014), é no uso em um jogo de linguagem que vai se mostrar como alguém entendeu um enunciado, que na atividade 2, trata-se de um enunciado matemático.

A análise do modelo matemático descritivo em conjunto com outras informações da situação-problema, como o período de reajuste do preço da gasolina e opiniões de economistas, fornecem aos alunos um arcabouço de considerações, conceitos e proposições gramaticais de um jogo de linguagem da Política de Preços da Petrobrás vigente para formar juízos de valores sobre esse fenômeno. Esses juízos de valores se traduzem na *formulação de requisitos a partir da análise de um modelo descritivo do fenômeno, com o propósito de organizar/prescrever o fenômeno*, como indica os excertos a seguir:

> AT2.G1.D.U.46 - <u>Nossa ideia é aumentar o preço da gasolina exportada e diminuir no preço vendido interno</u>. Para a estabilidade do preço da gasolina no Brasil, <u>temos que aumentar o período de tempo de reajuste para a cada 15 ou 30 dia</u>s.
>
> AT2.G1.D.48 - <u>O que nós podemos fazer é considerar o consumo e diminuir os impostos</u>.

Para Niss (2015), a modelagem prescritiva visa preparar o caminho para tomar decisões com base em certas considerações matemáticas. Na atividade 2, esse caminho tem início na formulação de requisitos, que desencadeiam o uso de conceitos e regras da Matemática Financeira na dedução de um modelo matemático, para organizar a situação inicial de outras formas. Nesse sentido, na perspectiva wittgensteiniana, os requisitos formulados pelos alunos não são proposições empíricas, pois não descrevem aspectos do fenômeno investigado, mas visam transformar o fenômeno, na função de normas, proposições gramaticais, que fornecem condições para organizar aspectos relacionados à situação-problema, prescrevendo e não descrevendo o fenômeno. A formulação de requisitos é uma ação dos alunos realizada na fase matematização, que segundo Palharini (2017), nessa fase, as proposições usadas pelos alunos podem atuar ora como proposições empíricas, ora como proposições gramaticais no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

Nesse ínterim, ponderamos que os alunos fazem uma transição de um jogo de linguagem da situação inicial, constituído por proposições gramaticais, conceitos e proposições empíricas, para um outro jogo de linguagem, o da situação prescritiva, no qual outras proposições gramaticais são usadas pelos alunos fundadas no conjunto de requisitos formulados pelos alunos e regras e procedimentos da Matemática e da Matemática Financeira. Nesse contexto, a compreensão de conceitos da Matemática Financeira na atividade 2 se manifesta no seguir regras no jogo de linguagem da situação prescrita. De acordo com Wittgenstein (1987, VII, § 52), "seguir uma *regra* é um jogo de linguagem determinado. [...] Quando dizemos que ele compreendeu a descrição? Fazemos tal e tal coisa; se ele responde, então, de tal e tal modo, é que entendeu o jogo (WITTGENSTEIN, 1987, VII, §52). As ações dos alunos nessa transição do jogo de linguagem da situação inicial para o jogo de linguagem da situação prescrita podem ser entendidas como o *estabelecimento de relações entre os requisitos formulados e conceitos da Matemática Financeira*, conforme ilustrado no Quadro 20.

Quadro 20 - estabelecimento de relações entre os requisitos formulados e conceitos da Matemática Financeira na atividade 2

Jogo de linguagem da situação inicial

Modelo matemático usado para descrever a formação de preços da gasolina.

PR=CRf+MRf	(PR) (CRf) (MRf)	Preço de realização da refinaria (PR); Preço do derivado custo de refino (CRf), incluído o custo do petróleo (1) e gastos operacionais e administrativos para gerar o derivado; Margem relativa à atividade de refino (MRf).	(1)
PF=PR+UP+IM	(PF) (UP), (IM)	Faturamento da refinaria às empresas distribuidoras (PF), ou seja, o preço efetivamente pago pelas distribuidoras às refinarias pelos derivados Parcelas relativas à Federação Única dos Petroleiros (UP); Uma vez que se agregava ao preço de realização os impostos, contribuições sociais e royalties (IM). (ICMS, PIS, COFINS, Previdência Social, IOF e Royalties)	(2)
PD =PF+MD+CD+IM	(PD) (MD) (CD) (IM)	Resultando no preço de faturamento da distribuidora (PD); Margem de retorno com a atividade (MD); Distribuição dos derivados para os postos de abastecimento (valores capazes de cobrir seus gastos operacionais e administrativos com frete incluído) - CD; Impostos (IM) (ICMS, PIS, COFINS, IOF).	(3)
PV=PD+MR+CR+IM	(PV), (CR), (IM) (MR)	O preço de venda ao consumidor (PV); Preço da distribuidora dos custos da revenda (CR); Impostos (IM) (ICMS, PIS, COFINS, Previdência Social, IVVC); Margens da revenda (MR).	(4)

Jogo de linguagem da situação prescrita

Requisitos formulados pelos alunos

G1: Fixação da taxa de ICMS; Redução dos impostos e cobrança incidindo somente ao final (sobre o preço final da gasolina); Reajuste do preço da gasolina com relação ao dólar a cada 30 dias; Aumento do preço de exportação (reajuste segundo os 50 (cinquenta) maiores preços de exportação no mundo).

G2:União de todos os impostos sobre a gasolina nas bombas e sua diminuição de sua porcentagem para cerca de 13% a 18%; trabalhar no consumo de combustível nacionalmente, para que use na relações das bombas de postos; reajuste do preço da gasolina de acordo com a variação do preço do barril de petróleo internacional a cada 30 dias. *AT2.G2.R.U.23*

Modelo Matemático (grupo G1)

$$PV_n = PD_0.\prod_{i=1}^{n}(1+\theta_i) + LP + TD + PT + \frac{IM}{2}$$

$$PV_n = PD_0.\prod_{i=1}^{n}(1+\theta_i) + LP + TD + PT + \frac{IM}{3}$$

Modelo Matemático (grupo G2)

$$Pf = Pa_0\prod_{i=1}^{n}(1+\alpha_i) + Pe + Iu + Mc + Mr$$

$$Pf = Pa_0\prod_{i=1}^{n}(1+\alpha_i) + Pe + 0{,}84.\mathrm{Iu} + Mc + Mr$$

Sendo: $\mathrm{Pa_n} = \frac{\beta}{c_n}$ *AT2.G2.R.U.24*

Regras da Matemática Financeira

Taxa cambial do dólar (θ_{i}): variação mensal do preço do dólar em reais.

Reajuste monetário: procura corrigir valores monetários "depreciados" por irregularidades na eficiência do sistema de preços relativos dos bens e serviços.

Considerando a taxa cambial do dólar (θ_{i}) e a variação mensal do preço do barril de petróleo (α_i) como índices, o reajuste do preço da gasolina A no mês 0, data focal escolhida pelos alunos, (PD_0 e Pa_0) é dado pelo produtório:

$$Pa_0\prod_{i=1}^{n}(1+\beta_i)\ e\ PD_0.\prod_{i=1}^{n}(1+\theta_i)$$

Fonte: registros escritos dos alunos

No Quadro 20, as ações dos alunos no jogo de linguagem da situação prescrita são conduzidas a partir dos requisitos formulados, no papel de proposições gramaticais, e nas relações entre esses requisitos e de regras da Matemática Financeira na elaboração do modelo matemático. Essas relações parecem evidenciar uma característica essencial da modelagem prescritiva, na qual segundo Souza, Oliveira e Almeida (2016), a modelagem prescritiva aponta como deve acontecer, isto é, na atividade 2 indica como a política de preços deve ser organizada. Essa característica também pode ser identificada no uso das regras da Matemática Financeira, cujos enunciados, como pondera Gottschalk (2018, p. 124), “são empregados com força normativa, deve ser assim”.

Diante disso, ponderamos que a compreensão de conceitos da Matemática Financeira na atividade 2 se manifesta no uso correto destes conceitos no desenvolvimento dessa atividade, de acordo com as definições destes conceitos na disciplina, com o propósito de orientar as ações dos alunos no jogo de linguagem da situação prescrita. A função da Matemática nesse tipo de atividade se aproxima da argumentação de Davis e Hersh (2005), que ponderam que a Matemática na prescrição de fenômenos conduz a ação humana nesse processo a algum tipo de ação tecnológica.

O uso normativo da Matemática Financeira na atividade 2 implica em considerar a natureza convencional de suas regras, conceitos e procedimentos e, nesse sentido, a compreensão de conceitos da Matemática Financeira nesta atividade envolve, acordos, diálogos e aceitação em grupo, convergindo com a afirmação de Izmirli (2013, p. 9), de que “o conhecimento matemático é um fenômeno social que inclui linguagem, negociação, diálogo e aceitação em grupo”. De fato, a compreensão e o uso, de conceitos da Matemática Financeira na dedução do modelo matemático parece se evidenciar na capacidade dos alunos de tomar decisões em conjunto, realizando alterações a partir dos requisitos formulados no modelo matemático vigente na formação de preços da gasolina com o objetivo de prescrever como agir no jogo de linguagem da situação prescrita. Parafraseando Wittgenstein (2014, § 199), a compreensão de um conceito da Matemática Financeira significa compreender uma linguagem, e compreender uma linguagem pressupõe uma familiaridade com pressupostos, inferências e técnicas advindas de acordos sociais.

Um desdobramento do estabelecimento de relações entre os requisitos e conceitos da Matemática Financeira é a meta-validação do modelo matemático realizada no jogo de linguagem da situação prescritiva. Nessa fase, os alunos fazem uma *análise dos impactos da prescrição do fenômeno para a situação inicial com base no uso de regras da Matemática financeira e compararam o modelo matemático obtido com modelos já usados para descrever o fenômeno*, conforme indicado nos excertos a seguir:

> AT2.G1.D.U.27 <u>- Se a gente aumentar o período de reajuste do preço da gasolina vendida pela Petrobrás em relação ao dólar para 30 dias, há uma estabilidade na variação do preço da gasolina vendido ao consumidor por um período maior de tempo</u>. Mas, temos que considerar também que <u>com a redução dos impostos é preciso aumentar a diferença no preço de exportação para não prejudicar a empresa e ajudar o consumidor.</u>

> AT2.G2.D.U.30 – Reduzindo os 16 % dos impostos e fazendo o reajuste do preço da gasolina A de acordo com o consumo da gasolina no país e na variação do preço do barril de petróleo, <u>atendemos o objetivo de reduzir o preço da gasolina nas bombas e incentivamos o consumo da gasolina no Brasil</u>.

> AT2.G1.R.U,31 - Considerando o preço da gasolina atual segundo o modelo matemático da ANP e comparando com os resultados do modelo, podemos perceber o preço da gasolina tende a se tornar mais estável e mais barato.

Ao analisar os impactos da prescrição do fenômeno para a situação inicial, os alunos indicam outros modos de agir na situação inicial, ancorados nas regras da Matemática Financeira e nos requisitos formulados pelos alunos, como proposições gramaticais. Ao seguir essas regras na meta-validação, os alunos manifestam como compreendem conceitos da Matemática Financeira na atividade 2, uma vez que são capazes de organizar o fenômeno, com base em considerações matemáticas advindas do uso de regras da Matemática Financeira. O jogo de linguagem da situação prescrita, nesse caso, indica qual regra os alunos devem aplicar. Nas palavras de Silveira (2008, p. 5), em atividades escolares, o contexto do problema matemático define qual regra devemos aplicar.

Em relação à comparação do modelo matemático obtido com modelos já usados para descrever o fenômeno, esta se diferencia da validação do modelo matemático, na medida em que, na meta-validação os resultados obtidos não convergem para os dados coletados sobre o fenômeno, mas indicam diferenças nos modos de agir no jogo de linguagem da situação inicial e no jogo de linguagem na situação prescrita. Ao considerar outros modos de agir de acordo uma regra, os alunos passam a ver de outra maneira o fenômeno com base em sua compreensão de conceitos da Matemática Financeira. Assim, compreender conceitos da Matemática Financeira, por meio da meta-validação na atividade 2, consiste em comparar o modo usual de empregar os conceitos no jogo de linguagem da situação inicial com outro modo específico do jogo de linguagem da situação prescrita. Como pondera Gottschalk (2008), compreender algo é ser capaz de agir de acordo com uma regra.

Em síntese, *a compreensão de conceitos da Matemática Financeira na modelagem prescritiva* emerge na capacidade dos alunos de: *formular requisitos a partir da análise de um modelo descritivo do fenômeno, com o propósito de organizar/prescrever o fenômeno*; *analisar um modelo matemático usado para descrever o fenômeno, com o propósito de compreendê-lo e posteriormente realizar alterações*; *estabelecer relações entre os requisitos formulados e conceitos da Matemática Financeira*; e *analisar os impactos da prescrição do fenômeno para a situação inicial com base no uso de regras da Matemática financeira e comparar o modelo matemático obtido com modelos já usados para descrever o fenômeno.*

Em uma análise da atividade 1 e da atividade 2 em conjunto, identificamos ações dos alunos que indicam a *modelagem matemática como possibilidade para integrar a Educação Financeira no ensino de Matemática Financeira.* Dentre as ações observadas, indicamos a *leitura da situações econômico-financeiras e tomada de decisões de ordem econômica ou financeira*, como indicam os excertos a seguir:

> AT1.G1.D.U.35 - Então, ela pode investir 11% por mês a diferença entre a renda e o consumo, considerando a renda sempre maior que o consumo.

> AT2.G2.D.U.47 – Eu estava vendo e uma medida que os economistas sugerem é reajustar o preço de gasolina de acordo com o consumo. Então, a gente pode fazer assim, quanto maior o consumo menor o preço da gasolina. Pesquisando na internet eu vi que quanto maior é o potencial de produção de gasolina do país em relação a quantidade de petróleo.

Na atividade 1, a leitura da situação-problema levou aos alunos a decidirem manter um orçamento superavitário, com renda sempre maior que as despesas, com base na sugestão do Banco Central do Brasil (2017) para a Educação Financeira de organizar o orçamento, de modo a propiciar investimentos com metas claras e objetivas. Na atividade 2, a leitura de informações da situação-problema, baseada em opiniões de economistas, foi um fator decisivo para a formulação de requisitos.

Desta forma, consideramos que o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática atendeu a demanda da Educação Financeira de, segundo Kistemann Jr e Lins (2015), desenvolver a capacidade dos alunos de ler situações econômico-financeira do contexto de indivíduos consumidores, contemplando o princípio proposto por Muniz (2016) de relacionar nessa leitura diferentes aspectos para que pensem, avaliem e tomem suas próprias decisões.

A partir da análise das respostas dos alunos ao questionário inicial, identificamos outro elemento que pode contribuir para a Educação Financeira dos alunos, a saber, *a compreensão da Matemática Financeira ligada ao seu uso em práticas econômico-financeiras do cotidiano e da sociedade,* como mostra os excertos a seguir:

> A6.Q.U.53- Sim, pois trata de uma pauta constante no dia-dia, sempre estamos usando produtos envolvendo taxa de juros, compras variadas, empréstimos, alta de combustíveis, inflação dos produtos da cesta básica.

> A7.Q.U.54 - Sim, pois trata de uma pauta constante no dia-dia, sempre estamos usando produtos envolvendo taxa de juros, compras variadas, empréstimos, alta de combustíveis, inflação dos produtos da cesta básica".

É possível perceber nos excertos, uma conexão entre a Matemática Financeira e pautas da Educação Financeira, como investimento, empréstimos e diversos produtos financeiros. O desenvolvimento das atividades de modelagem matemática a partir desse entendimento de Matemática Financeira dos alunos atende o princípio da dualidade de Muniz (2016) para a integração da Educação Financeira no Ensino de Matemática Financeira, em que, por um lado, a Educação Financeira pode se beneficiar da Matemática Financeira para compreender e analisar situações econômico-financeiras e, por outro lado, a Matemática Financeira pode se beneficiar da Educação Financeira para explorar situações econômico-financeira para compreender conceitos da Matemática Financeira.

O desenvolvimento das atividades de modelagem matemática no ensino de Matemática Financeira pode promover a Educação Financeira, considerando a demanda destacada por Campos, Teixeira e Coutinho (2015), de contextualizar o ensino de Matemática Financeira em situações reais ou realísticas, próximas ao cotidiano do educando, bem como corrobora para a compreensão, conforme Hofmann e Moro (2012), dos diferentes aspectos de práticas econômicas cotidianas subjacentes à socialização econômica da população.

No que tange as respostas dos alunos na entrevista, consideramos que o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática contribuiu para a *compreensão de situações econômico-financeiras e tomada de decisões nessas situações na modelagem descritiva* e para a *compreensão de situações econômico-financeiras e organização de ações que podem ser realizadas para estruturar aspectos dessas situações com base em certos requisitos na modelagem prescritiva*, como ilustrado a seguir:

> PP – Que impactos o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática teve para sua vida financeira?
>
> AT1.A2.E.55 - Repensar a questão do investimento. Ver que tem vários investimentos como Tesouro Direto e poupança. A refletir sobre esses investimentos, qual é o melhor, que vai depender se é a curto prazo, se você vai optar por um investimento mais arriscado.
>
> AT1.A2.E.56 - A questão do imposto, como é composto o preço que pagamos na Gasolina e sobre algumas medidas que podem ser tomadas para reduzir o preço da gasolina que nós compramos.

Na modelagem descritiva, percebemos que a compreensão da situação-problema repercutiu no modo que os alunos pensam sobre o investimento, avaliando a viabilidade de investir em diferentes opções de investimento, com base na compreensão de conceitos da Matemática Financeira. Por outro lado, a modelagem prescritiva teve impacto em relação as decisões que poderiam ser tomadas pelo governo para a redução do preço da gasolina.

Em ambas as atividades, a integração da Educação Financeira no ensino de Matemática Financeira por meio das atividades de modelagem matemática, emerge na tomada de decisões dos alunos a partir de múltiplas lentes das situações econômico-financeira, atendendo a necessidade de abordar, segundo Muniz (2016), múltiplas lentes sobre as situações econômico-financeiras, por meio de aspectos econômicos, pessoais, sociais e matemáticos.

Desta forma, o uso da *modelagem matemática como possibilidade para integrar a Educação Financeira no ensino de Matemática Financeira* emerge como uma alternativa para a formação de alunos capazes de compreender e agir em situações econômico-financeiras, contemplando: a *leitura da situações econômico-financeiras e tomada de decisões de ordem* *econômica ou financeira*; *compreensão da Matemática Financeira ligada ao seu uso em práticas econômico-financeiras do cotidiano e da sociedade*; *compreensão de situações econômico-financeiras para tomada de decisões nessas situações na modelagem descritiva*; *compreensão de situações econômico-financeiras e organização de ações que podem ser realizadas para estruturar aspectos dessas situações com base em certos requisitos na modelagem prescritiva*.

Levando em consideração que os critérios que utilizamos para atribuir compreensão aos alunos são circunstanciais, como afirmado por Machado (2007), e essas circunstâncias estão relacionadas ao jogo de linguagem e o contexto educacional dos alunos, entendemos que na atividade 1 e na atividade 2, caracterizadas segundo a modelagem descritiva e prescritiva, respectivamente, dispomos de critérios diferentes para inferir sobre a compressão de conceitos da Matemática Financeira nessas atividades. No entanto, nossa análise mostra que nas duas atividades, a compreensão dos alunos está vinculada com as capacidades dos alunos de fazer certas coisas nos jogos de linguagem no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática. Segundo Baker e Hacker (2005, p. 263), "a gramática da palavra 'compreender' e 'ser capaz de' corre por trechos paralelos".

Diante disso, as unidades de análise identificadas no decorrer da análise dos dados dizem respeito as capacidades dos alunos de agir de determinados modos nos jogos de linguagem emergentes do desenvolvimento das atividades de modelagem matemática. Essas unidades foram agrupadas em três categorias emergentes: *Compreensão de conceitos da Matemática Financeira na modelagem descritiva; Compreensão de conceitos da Matemática Financeira na modelagem prescritiva**;** modelagem matemática como possibilidade para integrar a Educação Financeira no ensino de Matemática*. Apresentamos uma síntese dessas categorias no Quadro 21.

Quadro 21 - síntese das categorias e unidades de análise

Categorias	Unidades de análise
Compreensão de conceitos da Matemática Financeira na modelagem descritiva	Capacidade de formular hipóteses que desencadeiam o uso de conceitos da Matemática Financeira no modelo matemático.
	Capacidade de estabelecer relações entre informações da situação-problema e conceitos da Matemática Financeira.
	Capacidade de usar técnicas matemáticas para elaboração do modelo matemático.
	Capacidade de elaborar um modelo matemático que permite compreender/descrever um o comportamento específico do fenômeno em relação ao tempo.
	Capacidade de interpretar o modelo matemático com base em regras matemáticas e ao contexto da situação inicial, contrastando os resultados obtidos na atividade com dados reais da situação inicial.
	Capacidade de explicar o uso de conceitos e procedimentos da Matemática Financeira na resolução matemática da atividade.
	Capacidade de formular requisitos a partir da análise de um modelo descritivo do fenômeno, com o propósito de organizar/prescrever o fenômeno.

Compreensão de conceitos da Matemática Financeira na modelagem prescritiva	Capacidade de analisar um modelo matemático usado para descrever o fenômeno, com o propósito de compreendê-lo e posteriormente realizar alterações
	Capacidade de estabelecer relações entre os requisitos formulados e conceitos da Matemática Financeira
	Capacidade de analisar impactos da prescrição do fenômeno para a situação inicial com base no uso de Regras da Matemática financeira e comparar o modelo matemático obtido com modelos já usados para descrever o fenômeno.
Modelagem matemática como possibilidade de integrar a Educação Financeira no ensino de Matemática Financeira	Leitura da situações econômico-financeiras e tomada de decisões de ordem econômica ou financeira.
	Compreensão da Matemática Financeira ligada ao seu uso em práticas econômico-financeiras do cotidiano e da sociedade.
	Compreensão de situações econômico-financeiras e tomada de decisões nessas situações na modelagem descritiva.
	Compreensão de situações econômico-financeiras e organização de ações que podem ser realizadas para estruturar aspectos dessas situações com base em certos requisitos na modelagem prescritiva.

Fonte: os autores

As interlocuções entre linguagem e compreensão nas atividades de modelagem matemática se estabelecem nas articulações entre as informações da situação-problema e o encaminhamento matemático subjacente a dedução e análise do modelo matemático, que são mediadas pelo uso de proposições empíricas e proposições gramaticais da Matemática Financeira. Trata-se, nesse sentido, de v*er conexões* entre aspectos situações econômico-financeiras e regras e conceitos da Matemática Financeira. Conforme Wittgenstein (2014, § 122), *ver conexões* entre os diversos usos da linguagem constitui possibilidades de compreensão.

Na modelagem descritiva, a compreensão de conceitos da Matemática Financeira se dá nas capacidades dos alunos envolvidas na transição entre o jogo de linguagem da situação-problema e no jogo de linguagem da Matemática Financeira, bem como em ações específicas na dedução, validação e interpretação do modelo matemático. Já na modelagem prescritiva, a compreensão de conceitos da Matemática Financeira se diferencia da modelagem descritiva, principalmente, em ações envolvidas na meta-validação do modelo matemático obtido, em que há uma análise dos impactos sociais, econômicos da prescrição obtida e no contraste e comparação entre o modelo matemático obtido e o modelo já usado para descrever o fenômeno da situação-problema. Nesse sentido, os resultados obtidos parecem confirmar a argumentação de Niss (2015), de que o aspecto-chave que diferencia a modelagem descritiva da modelagem prescritiva reside na interpretação e validação do modelo matemático.

Considerações finais

Neste artigo, objetivamos investigar como os alunos compreendem conceitos da Matemática Financeira em atividades de modelagem matemática. Para tanto, nos fundamentados na filosofia de Wittgenstein para refletir sobre as interlocuções entre linguagem e compreensão, mais especificamente, sobre a Matemática Financeira, como linguagem matemática e a compreensão de conceitos dessa linguagem.

A partir de nossa análise, consideramos que a compreensão de conceitos da Matemática Financeira se manifesta no uso desses conceitos nas atividades de modelagem matemática, sob determinadas circunstâncias fornecidas pela configuração da atividade e do contexto educacional dos estudantes. Está aparentada, assim, no "ser capaz de" agir de determinados modos nas atividades de modelagem matemática. Essa perspectiva evidencia a assertiva de Silva e Silveira (2014, p. 25), de que "compreender algo [...] é dominar técnicas de uso da linguagem. Técnica aqui no sentido de um "saber-fazer", do domínio do uso de regras".

Nesse contexto, refletir sobre as articulações entre linguagem e compreensão nas atividades de modelagem matemática conduz a um olhar para os usos de conceitos da Matemática Financeira nas atividades de modelagem matemática. Identificamos dois usos de conceitos da Matemática Financeira. Por um lado, na modelagem descritiva as proposições da Matemática Financeira fornecem um *modo de ver* a situação-problema, elas balizam a compreensão da situação-problema. Por outro lado, o uso das proposições da Matemática Financeira fornece condições para organizar aspectos relacionados à situação-problema. Esses dois usos se complementam, na medida que, na perspectiva de Wittgenstein, as proposições matemáticas têm função normativa, são proposições gramaticais, orientam o uso de conceitos da Matemática nos jogos de linguagem jogados pelos alunos no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática,

Ainda que a compreensão de conceitos da Matemática Financeira envolve critérios diferentes na modelagem descritiva e prescritiva, devido as suas caracterizações, dois aspectos se aproximam ao olhar para as duas categorias referentes à compreensão de conceitos da Matemática Financeira na modelagem descritiva e na modelagem prescritiva: a capacidade dos alunos de seguir regras da Matemática Financeira na dedução e na análise de modelos matemáticos e a capacidade dos alunos de explicar os conceitos e os procedimentos usados na dedução do modelo matemático. Assim, evidencia-se a interpretação de Baker e Hacker (2009, p. 382), de que "entender uma palavra, frase ou sentença considerada como um tipo é, inter alia, ser capaz de explicar o que a expressão significa e ser capaz de usar a expressão em um jogo de linguagem".

As explicações fornecidas pelos alunos podem ser identificadas nos diálogos entre os alunos e entre os alunos e o professor. Nesse sentido, a análise da compreensão dos alunos nas atividades de modelagem matemática evidencia a importância da comunicação e das interações entre os alunos e o professor no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. Esse aspecto está associado ao trabalho colaborativo em atividades de modelagem matemático, como discutido por Schukajlow e Krug (2012). Na perspectiva de Wittgenstein (1981, § 175), está comunicação se torna condição para compreensão, pois a "compreensão pressupõe uma familiaridade com inferências, com confirmação, com respostas".

Dentre os desdobramentos de nossa pesquisa para a Educação Matemática, destacamos que o uso da modelagem matemática no ensino de Matemática Financeira fornece uma possibilidade para integrar a Educação Financeira, haja vista que o uso de modelos matemáticos em situações econômico-financeiras, mediado pela compreensão de conceitos da Matemática Financeira, fornecem aos alunos uma possibilidade de ler e compreender aspectos envolvidos em transações financeiras e transformar os seus modos de agir nessas situações com base na tomada de decisões a partir da compreensão de conceitos da Matemática Financeira. Portanto, a modelagem matemática pode ser considerada, tal como ponderam Campos, Hess e Sena (2018) e Campos, Teixeira e Coutinho (2015), como uma possibilidade para integrar a Educação Financeira no ensino de Matemática Financeira.

A partir das reflexões realizadas sobre linguagem e compreensão nas atividades de modelagem matemática, consideramos que a modelagem matemática, enquanto alternativa pedagógica, viabiliza a compreensão de conceitos da Matemática Financeira, na medida que envolve os alunos em uma ambiente de ensino e aprendizagem, em que jogam com regras e conceitos da Matemática Financeira, com o objetivo de compreender ou estruturar situações econômico-financeiras do cotidiano e da sociedade contemporânea.

Referências

ALMEIDA, L. M. W. Jogos de linguagem em atividades de modelagem matemática. **VIDYA**, Santa Maria, v. 34, n. 1, p. 241-256, jun. 2014.

ALMEIDA, L. M. W. Considerations on the use of mathematics in modeling activities. **ZDM**, v. 50, n. 1-2, p. 19-30, apr. 2018.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ARAÚJO, I. L. WITTGENSTEIN: o "conhecimento" na relação entre linguagem e realidade. In: VALLE, B.; MARTÍNEZ, H. L.; PERUZZO JÚNIOR, L. (Eds.). **Ludwig Wittgenstein:** perspectivas. Curitiba: CRV, 2012. p. 11-30.

Banco Central do Brasil. **Orçamento Pessoal ou Familiar**. Disponível em: <https://cidadaniafinanceira.bcb.gov.br/orcamento-pessoal-ou-familiar:>. Acesso em: 9 de junho, 2017.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. 3 ed. Lisboa: Edições 70, 2011.

BAKER, G. P.; HACKER, P. M. S. **Wittgenstein: Understanding and meaning: Volume 1 of an analytical commentary on the philosophical investigations, part I: Essays**. Oxford: Blackwell Publishing, 2005.

BLUM, W.; NISS, M. Applied mathematical problem solving, modeling, applications, and links to other subjects: state, trends and issues in mathematics instruction. **Educational Studies in Matematics**, Dordrecht, v. 22, n. 1, p. 37-68, 1991.

CAMPOS, C. R.; HESS, A.; SENA, R. M. Teaching financial mathematics through a critical approach in a university environment. In: JURDAK, M.; VITHAL, R. (Eds.). **Sociopolitical Dimensions of Mathematics Education:** from the margin to mainstream. Cham, Switzerland: Springer, 2018. p. 113-133.

CAMPOS, C. R.; TEIXEIRA, J.; COUTINHO, C. Q. S. Reflexões sobre a educação financeira e suas interfaces com a educação matemática e a educação crítica. **Educação Matemática Pesquisa (EMP),** São Paulo, v. 17, n. 3, p. 556-577, 2015.

CUNHA, C. L. da; LAUDARES, J. B. Resolução de Problemas na Matemática Financeira para Tratamento de Questões da Educação Financeira no Ensino Médio. **Bolema:** Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 31, n. 58, p.659-678, 2017.

DAVIS, P. J., HERSH, R. The Descriptive, Predictive, and Prescriptive Functions of Applied Mathematics. In: **Descartes' Dream: The World According to Mathematics**. New York: Dover Publications, 2005. p. 115-121.

FREJD, P. Mathematical Modellers’ Opinions on Mathematical Modelling in Upper Secondary Education. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.). **Mathematical Modelling in Education Research and Pratice**: Cultural, Social and Cognitive Influences. Cham, Switzerland: Springer, 2015, p. 327-337.

GEIGER V.; FREJD, P. A Reflection on Mathematical Modelling and Applications as a Field of Research: Theoretical Orientation and Diversity. In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Cham, Switzerland: Springer, 2015. p. 161-171.

GOTTSCHALK, C. M. C. A Natureza do Conhecimento Matemático sob a Perspectiva de Wittgenstein: algumas implicações educacionais. **Caderno de História e Filosofia da Ciência**. Campinas, São Paulo, v. 14, n. 2, p. 305-334, dez. 2004.

GOTTSCHALK, C. M. A transmissão e produção do conhecimento matemático sob uma perspectiva wittgensteiniana. **Cadernos Cedes**, Campinas, v. 28, n. 74, p.75-96, abr. 2008.

GOTTSCHALK, C. M. C.. O conceito de compreensão – a mudança de perspectiva de Wittgenstein após uma experiência docente. **International Studies on Law and Education**, v. 12, p. 49-56, 2012.

GOTTSCHALK, C. M. C. A atividade matemática escolar como introdução de paradigmas na linguagem. **REEC** - Revista de Educação, Ciência e Cultura, Canoas, v. 23, n. 1, p. 112-124, mar. 2018.

GEBAUER, G. **O pensamento antropológico de Wittgenstein**. São Paulo: Edições Loyola, 2013.

GLOCK, Hans-Johann. **Dicionário Wittgenstein.** Tradução, Helena Martins; revisão técnica, Luiz Carlos Pereira. - Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1998

GUIMARÃES, C. Z.; LAMBERTY, D. R. MODELAGEM MATEMÁTICA NA APLICAÇÃO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DE MATEMÁTICA, 6., 2013, Canoas. **Anais**... Canoas: ULBRA, 2013.

HERMÍNIO, P. H. **Matemática Financeira**: um enfoque da resolução de problemas como metodologia de ensino e aprendizagem. 2008. 244 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) –Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2008.

HOFMANN, R. M.; MORO, M. L. F., Educação matemática e educação financeira: perspectivas para a ENEF. **Zetetiké**, Campinas, v. 20, n. 38, p. 37-54, 2013.

IZMIRLI, I. M. Wittgenstein as a social constructivist. **Philosophy of Mathematics Education Journal**, n. 27, p. 1-12, apr. 2013.

KAISER, G.; B. SRIRAMAN. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **ZDM**, v. 38, n. 3, p. 302-310, 2006.

KISTEMANN Jr., M. A.; LINS, R. C. Enquanto isso na Sociedade de Consumo Líquido-Moderna: a produção de significados e a tomada de decisão de indivíduos-consumidores. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática. Rio Claro, v. 28, n. 50, p. 1303-1326, dez. 2014.

MACHADO, A. N. **Lógica e forma de vida**: Wittgenstein e a natureza da necessidade lógica e da filosofia. Porto Alegre: Unisinos, 2007. 42 p.

MCGINN, C. **Wittgenstein on meaning.** England: Blackwell, 1984. 201 p.

MORAES, R. Análise de Conteúdo. **Educação**, Porto Alegre, v. 22, n. 37, p. 7-32, 1999.

NISS, M. Prescriptive Modelling – Challenges and Opportunities. In: STILLMA, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.). **Mathematical modelling in education research and practice**: Cultural, social and cognitive influences. New York: Springer, p. 67-79. 2015.

OECD, **Improving Financial Literacy: Analysis of Issues and Policies**. Paris: Secretary General of the OECD, 2005.

POLLAK, H. O. Introduction: what is mathematical modeling? In: GOULD, H.; MURRAY, D. R.; SANFRATELLO, A. (Eds.). **Mathematical Modeling Handbook**. Bedford: Comap, p. 8-11. 2012. P. 8-11.

POLLAK, H. O. The Place of Mathematical Modelling in the System of Mathematics Education: Perspective and Prospect. In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: cultural, social and cognitive influences. New York: Springer, p. 265-276, 2015.

PALHARINI, B. N. **A Matemática em atividades de modelagem matemática**: uma perspectiva wittgensteiniana. 2017. 316p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, UEL, Londrina, 2017.

ROSETTI JR, H.; SCHIMIGUEL, J. Estudo de modelos de Matemática Financeira em bibliografia básica. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Anais**… Recife: UFPE. 2011.

SANTOS, G. L. da C. **Educação Financeira:** a matemática financeira sob uma nova perspectiva. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência) – Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2005.

SCHUKAJLOW, S.; KRUG, A. Treating Multiple Solutions in the Classroom and their Influence on Students' Achievements and the Affect –Theoretical Background and Design of the Quasi-empirical Study. In: **12th International Congress on Mathematical Education**, COEX, Seoul Korea, pp. abcde-fghij. 2012.

SILVA, R. Ensino de Matemática Financeira: construção de modelos matemáticos do custo de vida como facilitadores no Ensino de Matemática. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 18., 2014, Recife. **Anais...** Recife: UFPE, 2014.

SILVEIRA, M. R. A. Aplicação e interpretação de regras matemáticas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 10, n. 1, p. 93-113, 2008.

SILVA, P. V; SILVEIRA, M. R. A. O ver-como wittgensteiniano e suas implicações para a aprendizagem a Matemática: um ensaio. **BoEM**, Joinville, v. 2, n. 3, p.17-34, dez. 2014.

SOUZA, H. C. T., OLIVEIRA, C. F., ALMEIDA, L. M. W. Uma proposta de modelagem prescritiva. In: ALMEIDA, L. M.; BORSSOI, A. H.; TORTOLA, E.; SILVA, K. A. P. (Eds.), **Modelagem Matemática em debate**: diálogos, reflexões e desafios. EPMEM 7; Londrina: UEL, UTFPR, p. 548-562, 2016.

TORTOLA, E. **Configurações de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.** 2016. 304 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

WITTGENSTEIN, L. **Observaciones sobre los fundamentos de la matemática**. Madrid: Alianza Editorial, 1987.

WITTGENSTEIN, L. **Fichas (Zettel)**. Lisboa: Edições 70, 1981.

WITTGENSTEIN, L. **Investigações Filosóficas**. 9. ed. Petrópolis: Vozes, 2014.

CAPÍTULO 3 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nessa pesquisa buscamos investigar a questão *como se dá a compreensão em atividades de modelagem matemática desenvolvidas em uma disciplina de Matemática Financeira?* Para tanto, nossa investigação abordou a realização de uma discussão teórica que detalha características da perspectiva filosófica de Ludwig Wittgenstein acerca da compreensão e sua manifestação, e investigações empíricas, nas quais analisamos quatro atividades de modelagem matemática desenvolvidas por nove alunos de uma disciplina de Matemática Financeira de um curso de Licenciatura em Matemática.

A partir da questão geral da pesquisa, estruturamos a pesquisa em objetivos específicos que orientaram a produção dos três artigos que compõem essa dissertação, levando em consideração nossa opção pelo formato *multipaper* para organizá-la (BOOTE; BEILE, 2005; DUKE; BECK, 1999). Nesse capítulo, fazemos uma síntese dos resultados específicos obtidos em cada artigo, trazendo ao texto elementos-chave que nos permitem responder à questão central dessa pesquisa, a partir de interlocuções entre Modelagem Matemática, compreensão e linguagem.

Objetivo 1: *investigar a constituição da 'compreensão' na filosofia da linguagem de Wittgenstein, mais especificamente na obra Investigações Filosóficas, e suas repercussões no Ensino*.

A discussão realizada no artigo 1, em uma incursão na obra *Investigações Filosóficas* (1953) de Wittgenstein, indica que a compreensão se constitui nos seus diferentes usos, semelhantes entre si, em uma variedade de jogos de linguagem, em contraposição à busca de um significado último e fixo para o conceito de compreensão, tal como fazem concepções mentalistas e behavioristas. Nesse sentido, com base na literatura (GEBAUER, 2013; CLOCK, KENNY, 1979; MACHADO, 2007; MCGINN, 1984), ponderamos que os critérios que podemos utilizar para dizer que alguém compreendeu algo dizem respeito as suas ações em um determinado jogo de linguagem, podendo ser no seguir regras convencionadas, no domínio de técnicas, nas suas reações e explicações. Esses critérios dependem de circunstâncias e do contexto linguístico em que as ações são realizadas, não sendo, portanto, fixos.

Dentre os desdobramentos da perspectiva filosófica de Wittgenstein acerca da compreensão, ressaltamos algumas repercussões no Ensino de Ciências e de Matemática, ancorados em pesquisas que buscam articulações entre a filosofia de Wittgenstein e o Ensino de Ciências (ESPINET; et. al, 2012; GÓIS; GIORDAN, 2009; HSU; ROTH, 2012; ROCHA, 2015; WICHMAN; ÖSTMAN, 2002), e o Ensino de Matemática (ALMEIDA, 2014; GOTTSCHALK, 2010, 2018; PALHARINI, 2017; SILVEIRA, 2014; TORTOLA, 2016; VILELA, 2013; entre outros). Destacamos, em síntese, as seguintes repercussões no Ensino de Ciências e de Matemática:

- No Ensino de Ciências, considerando a natureza dos jogos de linguagem das ciências naturais, a compreensão envolve técnicas de observação empírica características de práticas linguísticas de atividades realizadas no ensino de conceitos da Biologia, Química, entre outros. Tais atividades são guiadas por regras, que fornecem uma visão de mundo apoiada pela experiência.
- No ensino de Matemática, a compreensão em Matemática pode ser interpretada como uma capacidade de emprego correto de regras matemáticas, convencionadas na forma de vida dos matemáticos, em uma multiplicidade de usos, seja no interior da linguagem matemática ou como condição de sentido para situações empíricas
- As caracterizações da compreensão no Ensino de Ciências e no Ensino de Matemática articulam-se com os jogos de linguagem envolvidos nas práticas de ensino dessas disciplinas. Nesse sentido, é por meio das ações dos alunos em atividades linguísticas em determinas circunstâncias, que podemos avaliar a compreensão dos alunos. É importante, portanto, inserir no Ensino de Ciências e no Ensino de Matemática atividades de ensino que fomentem o uso de conceitos da linguagem matemática, biológica, química e física em diferentes jogos de linguagem, em que diferentes visões de mundo podem ser compartilhadas.

Objetivo 2: *Investigar compreensão dos alunos em atividades de modelagem matemática desenvolvidas em uma disciplina de Matemática Financeira.*

No artigo 2, com base na perspectiva wittgensteiniana de compreensão e aspectos da Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática, modelagem como conteúdo e modelagem como veículo (GALBRAITH, 2012), investigamos a compreensão dos alunos em duas atividades de modelagem matemática: Cervejaria Artesanal e Financiamento de Veículos. Os resultados dessa investigação indicam que a compreensão dos alunos depende dos jogos de linguagem jogados por eles durante o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, tais como os jogos de linguagem da situação-problema, da Matemática e da Matemática Financeira e da própria modelagem matemática. A partir das ações dos alunos nesses jogos de linguagem, detalhamos três categorias emergentes sobre a compreensão dos alunos em atividades de modelagem matemática: compreensão da situação-problema;

compreensão de conceitos da Matemática e da Matemática Financeira; e compreensão do fazer modelagem matemática. Os conteúdos dessas categorias dizem respeito a capacidade dos alunos de agir de determinados modos em diferentes jogos de linguagem. Assim, ponderamos que diferentes usos da linguagem levam a diferentes modos de compreensão.

Objetivo 3: *investigar como os alunos compreendem conceitos da Matemática Financeira em diferentes tipos de modelagem matemática.*

Esse objetivo foi o foco do artigo 3 e centra-se, especificamente, na compreensão de conceitos da Matemática Financeira nas atividades Orçamento Familiar ou Pessoal e Política de Preços da Petrobrás, caraterizadas, com base em Niss (2015), como modelagem descritiva e modelagem prescritiva, respectivamente. Tendo como embasamento teórico um quadro formado pela Modelagem Matemática na Educação Matemática, Modelagem Matemática no Ensino de Matemática Financeira e interlocuções entre compreensão e linguagem em Matemática na perspectiva de Wittgenstein, a investigação indica que a compreensão de conceitos da Matemática Financeira na modelagem descritiva e na modelagem prescritiva está vinculada ao modo que os estudantes usam proposições empíricas e proposições gramaticais, bem como no modo em que eles estabelecem inter-relações entre essas proposições com o objetivo de descrever ou prescrever o fenômeno estudado. Em paralelo, a análise das ações dos alunos no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática sugere uma possibilidade de integrar a Educação Financeira no ensino de Matemática Financeira, por meio dos usos da linguagem. Em síntese, os resultados indicam a emergência de quatro categorias sobre a compreensão dos alunos de conceitos de Matemática Financeira nas atividades de modelagem matemática e suas relações com Educação Financeira: compreensão de conceitos da Matemática Financeira na modelagem descritiva; compreensão de conceitos da Matemática Financeira na modelagem prescritiva; e modelagem matemática como possibilidade de integrar a Educação Financeira no ensino de Matemática Financeira.

Os três artigos, interdependentes, delineados pelos objetivos específicos, exploram aspectos específicos a respeito da questão geral da pesquisa. Com base na síntese dos resultados obtidos nestes artigos, observamos que os elementos-chave, que nos possibilita responder como se dá a compreensão dos alunos em atividades de modelagem matemática em uma disciplina de Matemática Financeira?, se constituem na elucidação de interlocuções entre Modelagem Matemática, compreensão e linguagem no ensino de Matemática Financeira, mediado pela modelagem matemática.

Nessa direção, apresentamos na próxima seção algumas possíveis interlocuções entre Modelagem Matemática, compreensão e linguagem e ao final, elaboramos uma resposta para a questão geral da pesquisa.

3.1. INTERLOCUÇÕES ENTRE MODELAGEM MATEMÁTICA, COMPREENSÃO E LINGUAGEM

Nossas reflexões sobre as interlocuções entre Modelagem Matemática, compreensão e linguagem vêm ancoradas nos resultados da pesquisa em relação à Modelagem Matemática, enquanto área de pesquisa da Educação Matemática, bem como ao desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em uma disciplina de Matemática Financeira.

Considerando a linguagem, na perspectiva wittgensteiniana, como atividade social, na qual os significados dos conceitos se dá nos seus usos e, nesse sentido, como argumenta Vilela e Mendes (2011, p. 8), a linguagem pode ser vista “em termos de atividade, como constitutiva das coisas, e não como meramente “descritiva” delas”, a compreensão pode ser caracterizada a partir dos seus usos em diferentes jogos de linguagem. Dessa forma, linguagem e compreensão são vistos em conjunto, constituindo uma *visão panorâmica* acerca da compreensão e sua manifestação. Essa interlocução pode ser interpretada como uma linha de pesquisa da Educação Matemática, constituindo elementos teóricos para a investigação e a análise de dados (GOTTSCHALK, 2010, 2018; KNIJNIK, 2012; MIGUEL, 2015; SILVA; SILVEIRA, 2014; SILVEIRA, 2014; VILELA, 2013).

Na Modelagem Matemática na Educação Matemática, essa interlocução entre linguagem e compreensão se insere como perspectiva filosófica para investigar práticas de modelagem matemática, considerando a assertiva de Bicudo e Klüber (2011, p. 906), de que nas pesquisas em modelagem matemática ainda “requer compreensão das concepções assumidas e das práticas educacionais desenvolvidas, solicitando um olhar filosófico sobre as pesquisas que são realizadas nessa abordagem de produção matemática e do ensino dessa ciência”. Em particular nessa pesquisa, amplia as discussões com base na filosofia de Wittgenstein sobre a linguagem e seus desdobramentos para as pesquisas em modelagem matemática (MERLI, 2012; OLIVEIRA, 2010; PALHARINI, 2017; SOUZA, 2012; SOUZA, 2018; TORTOLA, 2012, 2016). De fato, ao considerar os diferentes usos do termo *compreender*, os pressupostos adotados nessa pesquisa não consistem em uma concepção de compreensão que almeja buscar um significado último e fixo para o conceito de compreensão, mas configuram uma perspectiva de compreensão que se caracteriza mediante as circuntâncias e o contexto da pesquisa, corroborando com as argumentações de Machado (2007) sobre as características dos critérios de compreensão.

Refletindo sobre os resultados do artigo 1, podemos indentificar uma interlocução entre linguagem e compreensão na filosofia de Wittgenstein, que considera os usos da linguagem no centro do movimento analítico sobre a caracterização da compreensão. Uma vez que esses usos são heterôgenos e multifacetados como argumenta Wittgenstein (2014), olhar para a compreensão dos estudantes no Ensino de Ciências e no Ensino de Matemática, implica em considerar uma variedade de fatores que condicionam o uso dos conceitos destas disciplinas, que em síntese, emergem de interações entre o professor, os alunos e específicidades da linguagem Matemática e das Ciências.

Nesse contexto, ponderamos que ao buscar investigar como se dá a compreensão dos alunos em atividades de modelagem matemática com base na filosofia de Wittgenstein, torna-se necessário abordar compreensão e linguagem em conjunto, considerando as especificidades do contexto de pesquisa, as características das atividades de modelagem matemática e as ações dos alunos nessas atividades para constituir os critérios de compreensão.

Ancorados nessa perspectiva discutida no artigo 1 e agregando aspectos teóricos da Modelagem Matemática para investigar a compreensão dos alunos em atividades de modelagem matemática, em uma abordagem ampla no artigo 2, e com foco específico na compreensão de conceitos de Matemática Financeira no artigo 3, podemos elucidar algumas interlocuções entre modelagem matemática, compreensão e linguagem que emergem das categorias elaboradas.

Na análise das atividades Micro Cervejaria Artesanal e Financiamento de Veículos, inter-relações entre a Matemática e a situação-problema são evidenciadas nos usos da linguagem da situação-problema, da linguagem matemática e da própria modelagem matemática, que podem ser caracterizados, conforme Almeida (2014), como diferentes jogos de linguagem. É a partir do modo como os alunos agem nesses jogos de linguagem, no sentido de *ser capaz de* fazer certas coisas, que evidenciamos como os alunos compreendem a situação-problema, conceitos da Matemática Financeira e o fazer modelagem matemática.

Na *compreensão da situação-problema*, as ações dos alunos foram realizadas no sentido de se inteirarem acerca do fenômeno de investigação, com o objetivo de estruturar e delimitar a situação-problema e compreender o significado de termos específicos usados no jogo de linguagem da situação-problema. Em relação à modelagem matemática, esta compreensão se se dá nas ações dos alunos na fase inteiração, proposta por Almeida, Silva e Vertuan (2012). Em uma perspectiva wittgensteinana, trata-se de compreender um jogo de linguagem, com características, proposições e usos da linguagem específicos. A situação-problema pode ser comparada, nesse sentido, a um enunciado de um jogo de linguagem e, desta forma, como argumenta Wittgenstein (2014), compreender um enunciado implica compreender o jogo de linguagem, a que pertence esse enunciado. A linguagem, ou melhor, os jogos de linguagem, na inteiração com a situação-problema atuam não somente como meio de manifestação da compreensão dos alunos, mas fornecem as técnicas, as regras de uso de termos específicos e as circunstâncias do contexto da situação-problema, em que emergem a sua compreensão.

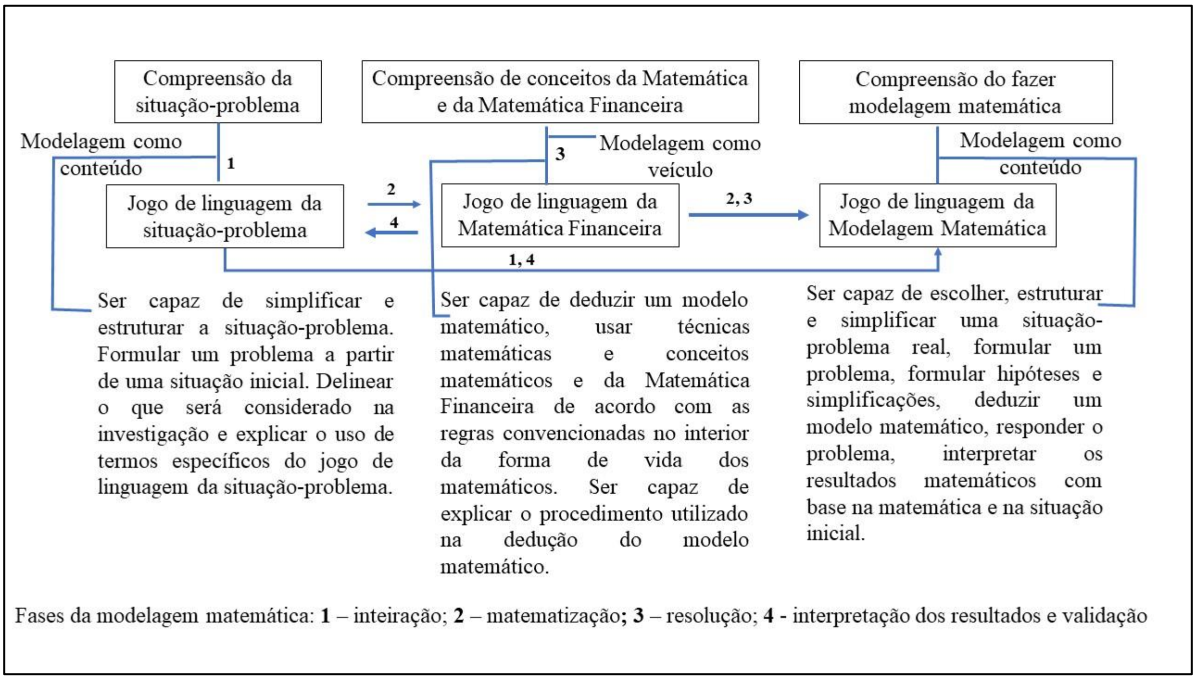
Na *compreensão de conceitos da Matemática Financeira e da Matemática*, há uma transição do jogo de linguagem da situação-problema para o jogo de linguagem da Matemática Financeira e da Matemática, mediada por ações dos alunos na fase matematização, como a formulação de hipóteses e variáveis, com base em percpeções dos alunos da situação-problema, que podem levar, segundo Almeida (2018), a diferentes usos da Matemática no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. No jogo de linguagem da Matemática Financeira e da Matemática, os alunos usam regras, conceitos, procedimentos e técnicas de natureza convencional e com força normativa, como pondera Gottschalk (2018a), para elaborar um modelo matemático e fornecer uma resposta matemática para o problema. A compreensão de conceitos da Matemática Financeira se dá na capacidade dos alunos de fazer esses usos da linguagem matemática e se manifesta também nas explicações que os estudantes são capazes de dar durante o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática ou após, quando questionados pelo professor. No que tange aos aspectos da modelagem matemática, ponderamos que as ações dos alunos na compreensão de conceitos da Matemática Financeira e da Matemática emergem nas fases matematização, resolução, interpretação dos resultados e validação, no sentido de Almeida, Silva e Vertuan (2012).

A *compreensão do fazer modelagem matemática* pode ser considerada como uma categoria mista, que relaciona a compreensão da situação-problema e a compreensão de conceitos da Matemática Financeira e da Matemática. O fazer modelagem matemática está associado ao entendimento da modelagem matemática como jogo de linguagem (ALMEIDA, 2014b; PALHARINI, 2017, SOUZA, 2018, TORTOLA, 2016) e emerge no seguir regras desse jogo que orientam os alunos no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática. A caracterização dessa compreensão está intrisicamente vinculada ao cartáter aberto e dinâmico das atividades de modelagem matemática, em que os alunos podem estabelecer diferentes interlocuções entre o jogos de linguagem da situação-problema e os jogo de linguagem da Matemática Financeira e da Matemática, fornecendo, como evidenciam Souza (2012) e Tortola e Almeida (2018), uma maneira de organizar e de ver situações não essencialmente matemáticas, por meio do uso de conceitos, procedimentos e artefatos da Matemática, no nosso caso, da Matemática Financeira.

As capacidades dos alunos que caracterizam a compreensão da situação-problema, de conceitos da Matemática Financeira e do fazer modelagem matemática indicam a possibilidade de usar a modelagem matemática para o desenvolvimento de capacidades dos alunos de aprender fazer modelagem matemática e compreender conceitos da disciplina de Matemática Financeira. Nesse contexto, as interlcuções entre modelagem matemática, compreensão e linguagem na análise das atividades Micro Cervejaria Artesanal e Financiamento de Veículos, apontam que em uma mesma atividade de modelagem matemática, articula-se aspectos da modelagem como conteúdo e modelagem como veículo, como também sugere Galbraith (2012, p. 5), "ao resolver problemas genuínos a necessidade de conteúdo matemático novo pode surgir, enquanto contextos do mundo real podem fornecer veículos legítimos para introdução de conteúdos matemáticos desejados".

Em síntese, concluímos que as interlocuções entre modelagem matemática, compreensão e linguagem nas três categorias enunciadas no segundo artigo indicam a modelagem matemática como um jogo de linguagem, que articula outros jogos de linguagem de naturezas distintas, que levam a diferentes modos de compreensão e compreensões. Apresentamos essas interlocuções no Quadro 22.

Quadro 22 - Interlocuções entre modelagem matemática, compreensão e linguagem nas atividades Micro Cervejaria Artesanal e Financiamento de Veículos



Fonte: os autores

Na análise das atividades Orçamento Familiar ou Pessoal e Política de Preços da

Petrobrás, a compreensão de conceitos da Matemática Financeira nas atividades de modelagem matemática se dá em inter-relações entre proposições empíricas, essencialmente descritivas e se baseiam na descrição de fenômenos, e proposições gramaticais, de caráter normativo, que são condições de sentido para as proposições empíricas. As regras da Matemática Financeira podem ser interpretadas como proposições gramaticais, uma vez que a Matemática Financeira pode ser considerada, conforme Rosetti Júnior e Schimiguel (2009), como uma linguagem matemática.

Na *compreensão de conceitos da Matemática Financeira na modelagem descritiva*, tendo como norte a caracterização da atividade Orçamento Familiar ou Pessoal como descritiva, à luz da perspectiva de Niss (2015), constatamos dois movimentos de inter-relações entre proposições empíricas e regras da Matemática Financeira que nos fornecem elementos para analisar a compreensão de conceitos da Matemática Financeira nessa atividade. O primeiro movimento consistem em ir de proposições empíricas para proposições gramaticais e se dá na capacidade dos alunos de formular hipóteses que desencadeiam o uso de conceitos da Matemática Financeira e de estabelecer relações entre as informações da situação-problema e conceitos da Matemática Financeira. O segundo movimento envolve a capacidade dos alunos de elaborar um modelo matemático e interpretá-lo com base em regras da Matemática Financeira e da Matemática, fazendo um movimento inverso do primeiro, indo de proposições gramaticais para proposições empíricas. Esses dois movimentos podem ser percebidos nos registros dos alunos e em suas explicações presentes nos diálogos envolvidos no desenvolvimento da atividade Orçamento Familiar ou Pessoal.

Nesse contexto, ponderamos que na modelagem descritiva, o uso de proposições da Matemática Financeira e sua compreensão fornecem um *modo de ver* a situação-problema, balizam a compreensão e a descrição de aspectos da situação-problema. Esse *modo de ver* emerge nas inter-relações entre o uso de proposições empíricas dos jogos de linguagem da situação-problema e de conceitos, regras e técnicas dos jogos de linguagem da Matemática Financeira. Assim, o uso da modelagem matemática pode ser considerado como uma possibilidade para fornecer aos alunos um *modo ver* situações do mundo que os cerca, corraborando com uma das repercussões da perspectiva wittgensteiniana de compreensão discutidas no artigo 1, de que o desenvolvimento de atividades em que diferentes *visões de mundo* podem ser compartilhadas contribui para a compreensão de conceitos da disciplina de esutdo (ALMEIDA, 2014; ESPINET; et al., 2012; PALHARINI, 2017; TORTOLA, 2016).

Na *compreensão de conceitos da Matemática Financeira na modelagem prescritiva*, com base na caracterização da atividade Política de Preços da Petrobrás como modelagem prescritiva, seguindo a perspectiva de Niss (2015), ponderamos que as inter-relações entre proposições empíricas e proposições gramaticais se dá nas relações entre o jogo de linguagem da situação inicial e o jogo de linguagem da situação prescrita. A compreensão de conceitos da Matemática Financeira nesse tipo de atividade emerge nas ações dos alunos em estabelecer relações entre esses dois jogos, com o objetivo de prescrever a situação inicial. Em particular, na capacidades dos alunos de formular requisitios a partir da análise de um modelo descritivo do fenômeno, de estabelecer relações entre os requisitos formulados e conceitos da Matemática Financeira, de analisar impactos da prescrição do fenômeno para a situação inicial com base no uso de regras da Matemática Financeira e comparar o modelo matemático obtido com modelos já usados para descrever o fenômeno.

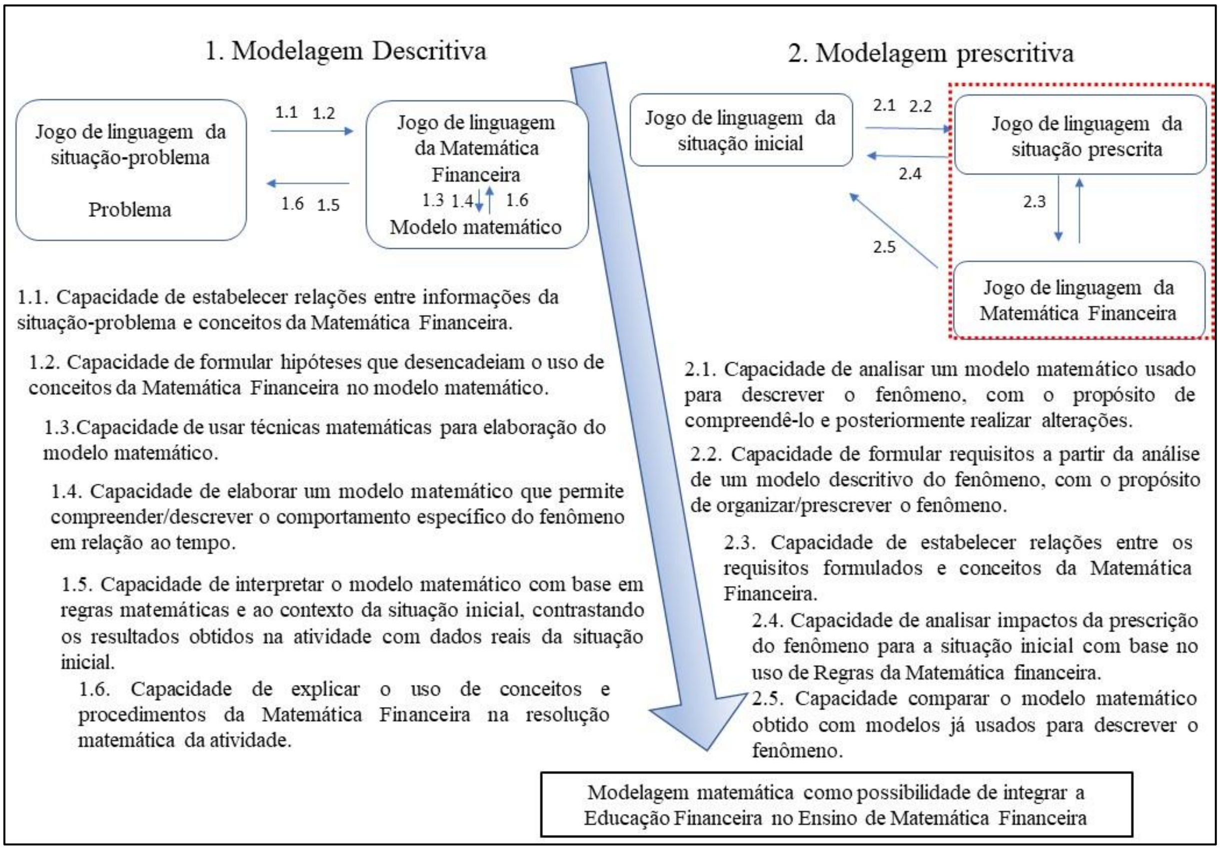
As proposições gramaticais estão incorporadas nesse tipo de atividade no conjunto de requisitos formulados pelos alunos e no papel de regras da Matemática, conduzindo a organização da situação inicial, com base em normas na forma de requisitos e regras da Matemática Financeira. Desta forma, a modelagem matemática pode ser interpretada no sentido de Souza (2012), como uma maneira de *organizar* situações empíricas, com base em um sistema matemático escolar.

A categoria *modelagem matemática como possibilidade de integrar a Educação Financeira no ensino de Matemática Financeira* pode ser considerada como uma categoria transversal as outras duas categorias do artigo 2 e se caracteriza a partir de um olhar para a compreensão de conceitos da Matemática Financeira nas atividades Orçamento Familiar ou Pessoal e Política de Preços da Petrobrás de um ponto de vista da Educação Financeira. As ações dos alunos agrupadas nessa categoria dizem respeito a leitura das situações econômico-financeiras e tomada de decisões de ordem econômica ou financeira, compreensão da Matemática Financeira ligada ao seu uso em práticas econômico-financeiras do cotidiano e da sociedade, compreensão de situações econômico-financeiras na modelagem descritiva, compreensão de situações econômico-financeiras e organização de ações que podem ser realizadas para estruturar aspectos dessas situações com base em certos requisitos na modelagem prescritiva. Tais ações remetem a principíos para integrar a Educação Financeira no ensino de Matemática Financeira na literatura (CAMPOS; HESS; SENA, 2016; CAMPOS; TEIXEIRA; COUTINHO, 2015; KISTEMANN JR; LINS, 2015; MUNIS, 2016), que sugerem a necessidade de formar alunos com a capacidade ler situações econômico-financeiras e tomar decisões, com base em argumentos estruturados a partir do uso de conceitos da Matemática Financeira.

Em uma perspectiva wittgensteiniana, vale retomar a analogia entre a atividade de *ler* e *compreender* realizada por Wittgenstein (2014, §§ 156-178), em que o filosófo argumenta que ambos envolvem o seguir regras e os critérios que podemos dizer que alguém leu ou compreendeu algo vai depender das ações dos alunos no decorrer da atividade linguística realizada. No âmbito da modelagem matemática no ensino de Matemática Financeira, a leitura de situações econômico-financeira se baseia no uso de regras da Matemática Financeira e, nesse sentido, no modo em que os alunos compreendem conceitos da Matemática Financeira no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, que pode variar de acordo com as circunstâncias e o propósitos em que as atividades são realizadas, seja com fins descritivos, seja com fins prescritivos.

Em síntese, as interlocuções entre modelagem matemática, compreensão e linguagem nas três categorias enunciadas no terceiro artigo sugerem que a depender das inter-relações entre proposições empíricas e proposições gramaticais estabelecidas pelos alunos no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, o tipo de modelagem matemática e a leitura das situações econômico-financeira nessas atividades, diferentes modos de compreensão de conceitos da Matemática financeira emergem e, consequentemente, diferentes critérios de compreensão. Apresentamos uma síntese dessas interlocuções no Quadro 23.

Quadro 23 - Interlocuções entre modelagem matemática, linguagem e compreensão nas atividades Orçamento Pessoal e Familiar e Política de Preços da Petrobrás



Fonte: os autores

As interlocuções entre modelagem matemática, compreensão e linguagem enunciadas nessa seção se assemelham em relação a três aspectos: a compreensão nas atividades de matemática se dá na capacidade dos alunos de seguir regras em diferentes jogos de linguagem; as explicações do uso de conceitos, procedimentos e proposições no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática constitui um critério para investigar a compreensão dos alunos; a modelagem matemática viabiliza a compreensão de conceitos da Matemática Financeira a partir de seus usos nas atividades de modelagem matemática.

A relação entre compreensão, seguir regras e explicação parecem evidenciar uma característica geral da compreensão linguística na perspectiva de Wittgenstein. Essa ideia é defendida por Baker e Hacker (2005) ao afirmarem que "se alguém entende uma explicação do significado, apreende a regra para o uso de uma palavra, ele é capaz de seguir a regra em suas aplicações da palavra".

Nesse sentido, sinalizamos que a modelagem matemática pode ser vista como uma atividade essencialmente linguística, na qual as inter-relações entre jogos de linguagem originados de situações reais e jogos de linguagem da Matemática fornecem os critérios para aferir sobre a compreensão dos alunos. Esses critérios, sob determinadas circunstâncias, são similares aos critérios que usamos para atribuir determinadas capacidades a alguém.

De fato, nossa pesquisa sinalizou que a compreensão em atividades de modelagem matemática emerge na capacidade dos alunos de agir de determinados modos nos jogos de linguagem envolvidos no desenvolvimento dessas atividades, de acordo com certos propósitos. Esses modos de agir estão circunscritos em convenções de uma comunidade, de modo que compreender algo em atividades de modelagem matemática depende da forma de vida dos estudantes, pois os usos da linguagem nessas atividades podem ter diferentes características de acordo com o contexto educacional, como pondera Tortola (2012, 2016).

As interlocuções entre modelagem matemática, compreensão e linguagem fundamentadas na filosofia de Wittgenstein abordadas nessa pesquisa constituem um olhar que se dirige à compreensão dos alunos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em uma disciplina de Matemática Financeira de um curso de Licenciatura em Matemática. A compreensão pode ser entendida como uma capacidade que se manifesta em práticas públicas de linguagem e se dá no interior de um jogo de linguagem. O caráter dinâmico das atividades de modelagem matemática possibilita aferir sobre compreensões, e não uma única compreensão, nos diferentes jogos de linguagem que emergiram no desenvolvimento de atividades de modelagem, relativos à situação-problema, à Matemática Financeira e à Matemática e as caracterizações de modelagem matemática.

Retomando a questão geral da pesquisa: *investigar como se dá a compreensão dos alunos em atividades de modelagem matemática desenvolvidas em uma disciplina de Matemática Financeira em um curso de Licenciatura em Matemática*? Podemos fornecer uma possível resposta com base nas interlocuções entre modelagem matemática, compreensão e linguagem a partir dos resultados obtidos para os objetivos específicos nos três artigos.

Entendemos que as categorias obtidas das análises da compreensão dos alunos em atividades de modelagem matemática no segundo e no terceiro artigo, com base na perspectiva wittgensteiniana de compreensão, indicam, por um lado, *que* compreensões emergem no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em uma disciplina de Matemática Financeira em um curso de Licenciatura em Matemática. Por outro lado, as ações dos alunos incorporadas nessas categorias, constituem o *como se dá* a compreensão dos alunos em atividades de modelagem matemática nesse contexto educacional. Dito isso, consideramos que a compreensão dos alunos nessas atividades se dá na capacidade de:

- seguir regras de uso de expressões linguísticas da situação-problema e de conceitos da Matemática Financeira e da Matemática na dedução e análise dos modelos matemáticos.
- explicar os procedimentos e os conceitos envolvidos no desenvolvimento da atividade.
- dominar técnicas da Matemática Financeira e da Matemática e do fazer modelagem matemática, conforme as circunstâncias e as caracterizações das atividades de modelagem matemática.
- estabelecer inter-relações entre proposições características da situação-problema e proposições da Matemática Financeira, com objetivo de descrever ou prescrever o fenômeno sob investigação.

É importante destacar que na perspectiva filosófica de compreensão adotada, nossas inferências sobre a compreensão dos alunos nas atividades de modelagem matemática não se constituem em critérios fixos e únicos de compreensão, mas são vistos e delineados em conjunto com as circunstâncias e o contexto educacional em que as atividades foram desenvolvidas.

3.3. ALGUMAS REFLEXÕES FINAIS

Com base na perspectiva wittgensteiniana de compreensão e linguagem, a compreensão no Ensino de Ciências e no Ensino de Matemática fornece aos alunos um *modo de ver* situações do mundo que os cerca. Esse *modo de ver* se diversifica nas especificidades da linguagem natural, da linguagem científica e da linguagem matemática. No âmbito das práticas pedagógicas, nossas reflexões indicam a importância de introduzir atividades de ensino, que fomentem o diálogo entre esses diferentes *modos de ver*.

A modelagem matemática constitui uma alternativa pedagógica para a introdução dessas atividades, fomentando o diálogo entre a Matemática e situações reais originadas de fenômenos das mais variadas esferas sociais e científicas. Os resultados da pesquisa realizada sinalizam que o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática envolve inter-relações entre compreensões dos alunos imersos nos jogos de linguagem da situação-problema, da Matemática Financeira e da Matemática e da própria modelagem matemática. Esse entendimento vai ao encontro de pesquisas que versam sobre contribuições da filosofia de Wittgenstein para a Educação Matemática, indicando a importância de valorizar as interações entre o professor, os alunos e diferentes usos da linguagem.

Tais interações no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática se revelam nas discussões entre os alunos e entre os alunos e o professor. No papel de orientador, cabe ao professor explicitar as regras a serem seguidas pelos alunos, uma vez que a compreensão se associa a um seguir regras adequadamente, mas também é preciso incentivar a autonomia dos alunos no sentido de eles serem capazes de empregar os conceitos em diferentes jogos de linguagem. Considerando que para Wittgenstein (2014) seguir regras é também uma prática, um hábito, um costume, habituar os alunos a desenvolver atividades de modelagem matemática de forma autônoma constitui um objetivo pedagógico importante do uso da modelagem matemática na Educação Matemática.

Os aspectos teóricos sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática, principalmente, em relação as perspectivas, gêneros, abordagens e caracterizações da modelagem matemática e suas interlocuções nas análises das atividades de modelagem matemática, revelam que o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, sob diferentes perspectivas, contribuem para uma diversidade de usos da linguagem com diferentes finalidades e, dessa forma, para a ampliação da compreensão dos alunos. As interlocuções entre a modelagem como conteúdo, modelagem como veículo, modelagem prescritiva e modelagem descritiva e a compreensão dos alunos destacam diferentes usos do termo *compreender*, aparentados entre si, no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática.

As conexões entre a compreensão e os jogos de linguagem no contexto das atividades de modelagem matemática, destacam que a compreensão emergem nas capacidades dos alunos de seguir regras de uso de expressões linguísticas da situação-problema e de conceitos da Matemática Financeira e da Matemática na dedução e análise dos modelos matemáticos; de explicar os procedimentos e os conceitos envolvidos no desenvolvimento da atividade; e de dominar técnicas da Matemática Financeira e da Matemática do fazer modelagem matemática, conforme as circunstâncias e caracterizações das atividades.

A discussão das atividades a partir das análises empíricas realizadas nessa dissertação, possibilita delinear contribuições para o uso da modelagem matemática no ensino de Matemática Financeira, em particular, na disciplina de Matemática Financeira em cursos de Licenciatura em Matemática. A modelagem matemática fornece aos alunos um *modo de ver*, compreender, estruturar e prescrever situações econômico-financeira, por meio de regras de usos de conceitos da Matemática Financeira. Nesse contexto, as atividades de modelagem matemática analisadas nesse artigo constituem um material, no qual professores e alunos podem fazer uso para introduzir a modelagem matemática nessa disciplina.

O uso da modelagem matemática no ensino de Matemática Financeira pode contribuir para a integração da Educação Financeira no ensino de Matemática Financeira e para interações entre a Educação Matemática e a Educação Financeira. Quanto ao primeiro aspecto, os resultados da pesquisa corroboram com discussões da literatura, no que diz respeito a formação de alunos capazes de compreender e agir em situações econômico-financeira, com base em conhecimentos da Matemática Financeira (CAMPOS; TEIXEIRA; COUTINHO, 2015; CAMPOS, HESS; SENA, 2018). Em relação ao segundo aspecto, as interações entre Educação Matemática e a Educação Financeira remetem ao estabelecimento de relações entre conceitos da Matemática e da Matemática Financeira, tendo como pressuposto a argumentação de Hofmann e Moro (2012, p. 47) de que "compreender, em alguma medida, os fundamentos econômicos, sociais, legais e mesmo linguísticos subjacentes às práticas econômicas cotidianas é condição para a interação e para a socialização econômica da população".

Nessa pesquisa, tivemos a intenção de fornecer um *modo de ver* a compreensão dos alunos em atividades de modelagem matemática, sem recorrer a concepção de compreensão como um processo mental. Ao refletir sobre os resultados, um exercício importante é trazer as limitações e as perspectivas futuras da pesquisa. Como limitação, ressaltamos que as diferentes configurações das organizações dos grupos no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, impossibilitou uma análise contínua acerca da compreensão dos alunos nas atividades de modelagem matemática. Dentre as possibilidades de investigações futuras, ressaltamos:

- A investigação de conceitos psicológicos, para além da compreensão, em atividades de modelagem matemática, com base na filosofia de Wittgenstein.

- Investigação das interlocuções entre modelagem matemática, compreensão e linguagem em outros contextos educacionais, com foco nas influências das formas de vida na compreensão de alunos em atividades de modelagem matemática.
- Investigação da natureza das habilidades envolvidas na Educação Financeira, em uma perspectiva wittgensteiniana.

Os resultados dessa pesquisa podem contribuir para a Modelagem Matemática na Educação Matemática, enquanto área de pesquisa, sobre a investigação da compreensão a partir de uma perspectiva filosófica de linguagem. Problematizar os desdobramentos dos usos da linguagem para a compreensão dos alunos em relação aos jogos de linguagem que podem emergir em atividades de modelagem matemática evidenciou a compreensão como uma capacidade de agir de determinados modos nesses jogos de linguagem, sob determinadas circunstâncias.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, A. G. O. Modelagem Matemática no contexto da Matemática e cidadania. In: ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2004, São Paulo. **Anais**... São Paulo: Faculdade de Educação, 2004.

ALMEIDA, L. M. W. Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. **Zetetiké**, Campinas, v. 18, n. temático, p. 387-414, 2010.

ALMEIDA, L. M. W. The "practice" of mathematical modeling under a wittgensteinian perspective. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, SBEM, v. 4, n. 2, p. 98-113, 2014a.

ALMEIDA; L. M. W. Jogos de linguagem em atividades de modelagem matemática. **VIDYA**, Santa Maria, v. 34, n. 1, p. 241-256, jun. 2014b.

ALMEIDA; L. M. W. Considerations on the use of mathematics in modeling activities. **ZDM**, v. 50, n. 1-2, p. 19-30, apr. 2018.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; TORTOLA, E.; MERLI, R. F. Modelagem matemática – com o que estamos lidando: modelos diferentes ou linguagens diferentes? **Acta Scientiae**, Canoas, v. 14, n. 2, p. 215-239, ago. 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; PALHARINI, B. N..; TORTOLA, E. Desdobramentos para a modelagem matemática decorrentes da formulação de hipóteses. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2015, Pirenópolis. **Anais**... Pirenópolis: SBEM, 2015.

ARAÚJO. J. L. Relação entre matemática e realidade em algumas perspectivas de modelagem matemática na educação matemática. In: BARBOSA, J. C., CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. de L. (Org.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais.** Recife: SBEM, 2007. p. 17-32.

ARAÚJO. J. L. Brazilian research on modelling in mathematics education. **ZDM.** v. 42, p. 337-348, 2010.

ARAÚJO, I. L. Wittgenstein, o Conhecimento na Relação entre Linguagem e Realidade. Em: VALLE, B.; MARTÍNES, H. L.; PERRUZO JÚNIOR, L. (Org.). **Ludwig Wittgenstein**: Perspectivas. 1 ed. Curitiba: Editora CRV, 2012. p. 11-29.

BADLEY, G. Academic writing: contested knowledge in the making?. **Quality Assurance in Education**, v. 17, n. 2, p. 104-117, 2009.

BAKER, G. P.; HACKER, P. M. S. **Wittgenstein: Understanding and meaning: Volume 1 of an analytical commentary on the philosophical investigations, part I: Essays**. Oxford: Blackwell Publishing, 2005.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática e Perspectiva Sócio-crítica. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, SIPEM, 2, 2003, Santos. **Anais**... Santos: SBEM, 2003.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. 3. ed. Lisboa: Edições 70, 2011.

Banco Central do Brasil. **Orçamento Pessoal ou Familiar**. Disponível em: <https://cidadaniafinanceira.bcb.gov.br/orcamento-pessoal-ou-familiar:>. Acesso em: 9 de junho, 2017.

BICUDO, M. A. V.; KLÜBER, T. E. Pesquisa em modelagem matemática no Brasil: a caminho de uma metacompreensão. **Cadernos de pesquisa**, São Paulo, v. 41, n. 144, p. 904-927, dez. 2011.

BIEMBENGUT, M. S. 30 anos de modelagem matemática na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **Alexandria**, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 7-32, jul. 2009.

BLUM, W. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In: CHO, S. J. (Ed). **The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education**: Intellectual and Attitudinal Changes. New York: Springer, 2015. p. 73-96.

BLUM, W.; NISS, M. Applied mathematical problem solving, modeling, applications, and links to other subjects: state, trends and issues in mathematics instruction. **Educational Studies in Matematics**, Dordrecht, v. 22, n. 1, p. 37-68, 1991.

DAVIS, P. J., HERSH, R. The Descriptive, Predictive, and Prescriptive Functions of Applied Mathematics. In: **Descartes' Dream: The World According to Mathematics**. New York: Dover Publications, 2005. p. 115-121.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação Matemática**: uma introdução à teoria e aos métodos. Lisboa: Porto Editora, 1994.

BOOTE, D. N.; BEILE, P. Scholars Before Researchers: on the centrality of the dissertation literature review in research preparation. **Educational Researcher**, v. 34, n. 6, p. 3-15, sep. 2005.

BROWN, J. Context and Understanding: The Case of Linear Models. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; KAISER, G. (Eds.). **Mathematical Modellling and Applications**: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education. Cham, Switzerland: Springer, 2017. p. 211-221.

BROWN, J.; EDWARDS, I. Modelling Tasks: Insight into Mathematical Understanding In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; FERRI, R. B. (Eds.). **Mathematical Modellling and Applications**: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education. Cham, Switzerland: Springer, 2017. p. 187-197.

BURAK, D.; KLÜBER, T. E. Educação Matemática: contribuições para a compreensão da sua natureza. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 10, n. 2, p. 93-106, dez. 2007

CAMPOS, C. R.; HESS, A.; SENA, R. M. Teaching financial mathematics through a critical approach in a university environment. In: JURDAK, M.; VITHAL, R. (Eds.). **Sociopolitical Dimensions of Mathematics Education:** from the margin to mainstream. Cham, Switzerland: Springer, 2018. p. 113-133.

CAMPOS, C. R.; TEIXEIRA, J.; COUTINHO, C. Q. S. Reflexões sobre a educação financeira e suas interfaces com a educação matemática e a educação crítica. **Educação Matemática Pesquisa (EMP)**, São Paulo, v. 17, n. 3, p. 556-577, 2015.

COSTA, L. M. **A Compreensão em Atividades de Modelagem Matemática**: Uma Análise à Luz dos Registros de Representação Semiótica. 2016. 145 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

CUNHA, C. L. da; LAUDARES, J. B. Resolução de Problemas na Matemática Financeira para Tratamento de Questões da Educação Financeira no Ensino Médio. **Bolema:** Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 31, n. 58, p. 659-678, 2017.

DAVIS, P. J., HERSH, R. The Descriptive, Predictive, and Prescriptive Functions of Applied Mathematics. In: **Descartes' Dream: The World According to Mathematics**. New York: Dover Publications, 2005. p. 115-121.

DEMO, P. **Pesquisa e construção do conhecimento: metodologia científica no caminho de Habermas**. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro, 1994.

DUKE, N. K.; BECK, S. W. Education should consider alternative forms for the dissertation. **Educational Researcher**, Washington, v. 28, n. 3, p. 31-36, 1999.

ESPINET, M.; IZQUIERDO, M.; BONIL, J.; ROBLES, S. L. R. The role of languagem in modeling be natural world: perspectives in Science Education, In: FRASER, B. J.; TOBIN, K. G.; MCROBBIE, C. J. (Eds.). **Second International Handbook of Science Education**, London: Springer, 2012. p. 1385-1405.

FATTURI, A. Conceito de "jogos de linguagem" nas Investigações Filosóficas. In: VALLE, B.; MARTÍNEZ, H. L.; PERUZZO JÚNIOR, L. (Eds.). **Ludwig Wittgenstein:** perspectivas. Curitiba: CRV, 2012. p. 31-60.

FERRUZZI, E. C.; ALMEIDA, L. M. W. de. Diálogos em modelagem matemática. **Ciência & Educação**, Bauru, v. 21, n. 2, p. 377-394, jun. 2015.

FREJD, P. Mathematical Modellers' Opinions on Mathematical Modelling in Upper Secondary Education. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.). **Mathematical Modelling in Education Research and Pratice**: Cultural, Social and Cognitive Influences. Cham, Switzerland: Springer, 2015, p. 327-337.

GALBRAITH, P. L.; STILLMAN, G. A.; BROWN, J. Turning Ideas into Modeling Problems. In: LESH, R.; *et al*. (Eds.). **Modeling Students' Mathematical Modeling Competenceis**. Cham, Switzerland: Springer, 2010. p. 133-144.

GARNICA, A. V. M. Algumas notas sobre pesquisa qualitativa e fenomenologia. **Interface** – Comunicação, Saúde, Educação, Botucatu, v. 1, n. 1, p. 109-122, 1997.

GARNICA, A. V. M. Apresentação. In: SOUZA, L. A. de. **Trilhas na construção de versões históricas sobre um Grupo Escolar**. 2011. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - UNESP de Rio Claro: São Paulo, 2011.

GALBRAITH, P. Models of modelling: genres, purposes or perspectives. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, Blumenau, v. 1, n. 5, p. 3-16, 2012.

GEIGER V.; FREJD, P. A Reflection on Mathematical Modelling and Applications as a Field of Research: Theoretical Orientation and Diversity. In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling. Cham, Switzerland: Springer, 2015. p. 161-171.

GEBAUER, G. **O pensamento antropológico de Wittgenstein**. São Paulo: Edições Loyola, 2013.

GLOCK, Hans-Johann. **Dicionário Wittgenstein.** Tradução, Helena Martins; revisão técnica, Luiz Carlos Pereira. - Rio de Janeiro: Jorge Zahar Ed., 1998.

GÓIS, J.; GIORDAN, M. Wittgenstein e os processos de significação no Ensino de Ciências. Em: ENCONTRO NACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS, 7., 2009, Florianópolis. **Anais**... Florianópolis: UFSC, 2009.

GOTTSCHALK, C. M. C. A Natureza do Conhecimento Matemático sob a Perspectiva de Wittgenstein: algumas implicações educacionais. **Caderno de História e Filosofia da Ciência**. Campinas, São Paulo, v. 14, n. 2, p. 305-334, dez. 2004.

GOTTSCHALK, C. M. A transmissão e produção do conhecimento matemático sob uma perspectiva wittgensteiniana. **Cadernos Cedes**, Campinas, v. 28, n. 74, p.75-96, abr. 2008.

GOTTSCHALK, C. M. C. O conceito de compreensão – a mudança de perspectiva de Wittgenstein após uma experiência docente. In: **Reunião Anual da ANPEd**, 32, Caxambu. **Anais**... Caxambu: ANPEd, 2009.

GOTTSCHALK, C. M. C. O papel do método no ensino: da maiêutica socrática à terapia wittgensteiniana. ETD: **Educação Temática Digital**, v. 12, n. 1, p. 64-81, 2010.

GOTTSCHALK, C. M. C. A atividade matemática escolar como introdução de paradigmas na linguagem**. REEC** – Revista de Educação, Ciência e Cultura, Canoas, v. 23, n. 1, p.113-124, 2018a.

GOTTSCHALK, C. M. C. Fundamentos Epistemológicos da Educação de uma Perspectiva Wittgensteiniana. In: AZIZE, R. L. (Ed). **Wittgenstein nas Américas**: Legado e Convergências. Bahia: Edufba, 2018b. p. 53-71.

GUIMARÃES, C. Z.; LAMBERTY, D. R. MODELAGEM MATEMÁTICA NA APLICAÇÃO DE MATEMÁTICA FINANCEIRA. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE ENSINO DE MATEMÁTICA, 6., 2013, Canoas. **Anais**... Canoas: ULBRA, 2013.

HERMÍNIO, P. H. **Matemática Financeira**: um enfoque da resolução de problemas como metodologia de ensino e aprendizagem. 2008. 244 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2008.

HOFMANN, R. M.; MORO, M. L. F., Educação matemática e educação financeira: perspectivas para a ENEF. **Zetetiké**, Campinas, v. 20, n. 38, p. 37-54, 2013.

HSU, P. L; ROTH, W. M. Understanding beliefs, identy, conceptions and motivations from a discursive psychology perspective. In: FRASER, B. J.; TOBIN, K. G.; MCROBBIE, C. J. (Eds.). **Second International Handbook of Science Education**, London: Springer, 2012. p. 1435-1451.

IZMIRLI, I. M. Wittgenstein as a social constructivist. **Philosophy of Mathematics Education Journal**, n. 27, p. 1-12, apr. 2013.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modeling in mathematics education. **ZDM**, v. 38, n. 3, p. 302-310, 2006.

KENNY, A. **Wittgenstein.** Tradução de: Alfredo deãno. - Madrid: Revista de Occidente, 1979.

KISTEMANN Jr., M. A.; LINS, R. C. Enquanto isso na Sociedade de Consumo Líquido-Moderna: a produção de significados e a tomada de decisão de indivíduos-consumidores. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 28, n. 50, p. 1303-1326, dez. 2014.

KNIJNIK, G. Differentially positioned language games: enthnomathematics from a philosophical perspective. **Education studies in mathematics**, v. 80, p. 87-100, 2012.

KLÜBER, Tiago Emanuel. **UMA METACOMPREENSÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA.** 2012. 396 f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

LEVY, L. F.; SANTO, A. O. E. Filosofia e Modelagem Matemática. **Unión**: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, n. 8, p. 11-21, dez. 2006.

MACHADO, A. N. **Lógica e forma de vida:** Wittgenstein e a natureza da necessidade lógica e da filosofia. Porto Alegre: Unisinos, 2007.

MARASINI, S. M. **A matemática financeira na escola e no trabalho**: uma abordagem histórico-cultural. 2001. 112 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Passo Fundo, Passo Fundo, 2001.

MCGINN, C. **Wittgenstein on meaning.** England: Blackwell, 1984.

MERLI, R. F. **Modelos clássico e fuzzy na educação matemática**: um olhar sobre o uso da linguagem. 2012. 154 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

MIGUEL, A. A Terapia Gramatical-Desconstrucionista como Atitude de Pesquisa (Historiográfica) em Educação (Matemática). **Perspectivas da Educação Matemática**. UFMS, vol. 8, n.18, p. 607-647, 2015.

MORAES, R. Análise de Conteúdo. **Educação**, Porto Alegre, v. 22, n. 37, p. 7-32, 1999.

MORENO, A. R. **Wittgenstein:** os labirintos da linguagem. São Paulo: Ed. Moderna, 2000.

MORENO, A. R. Descrição fenomenológica e descrição gramatical – ideias para uma pragmática filosófica. **Revista olhar**. Ano 4, n. 7, p. 93-139, dez. 2003.

MORENO, A. R. Uma concepção de Atividade Filosófica. **Cad. Hist. Fil. Ci**, Campinas, v. 14, n. 3, p. 275-302, 2004.

MUNIZ, I. J. Educação Financeira e a sala de aula de Matemática: conexões entre a pesquisa acadêmica e a prática docente. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais**... São Paulo: UNICSUL, 2016.

MUTTI, G. de S. L.; KLÜBER, T. E. Formato multipaper nos programas de pós-graduação stricto sensu brasileiros das áreas de educação e ensino: um panorama. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA E ESTUDOS QUALITATIVOS, SIPEQ, 5, 2018, Foz do Iguaçu. **Anais**... Foz do Iguaçu: SEPQ; UNIOESTE, 2018.

NISS, M. Prescriptive Modelling – Challenges and Opportunities. In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.) **Mathematical Modelling in Education Research and Practice:** cultural, social and cognitive influences. New York: Springer, p. 67-80. 2015.

OECD, **Improving Financial Literacy:** Analysis of Issues and Policies. Paris: Secretary General of the OECD, 2005.

OLIVEIRA, M. de S. **Interpretação e comunicação em ambientes de aprendizagem gerados pelo processo de modelagem matemática**. 2010. 126 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Pará, Belém, 2010.

PALHARINI, B. N. **A Matemática em atividades de modelagem matemática**: uma perspectiva wittgensteiniana. 2017. 316 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

PALTRIDGE, B. Thesis and dissertation writing: an examination of published advice and actual practice. **English for Specific Purposes**, v. 21, n. 2, p. 125-143, 2002.

POLLAK, H. O. The interaction between Mathematics and other school subjects**, New Trends in Mathematics Teaching**, Volume IV, Paris: UNESKO, 1979.

POLLAK, H. O. Introduction: what is mathematical modeling? In: GOULD, H.; MURRAY, D. R.; SANFRATELLO, A. (Eds.). **Mathematical Modeling Handbook**. Bedford: Comap, 2012. p. 8-11.

POLLAK, H. O. The Place of Mathematical Modelling in the System of Mathematics Education: Perspective and Prospect. In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.) **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: cultural, social and cognitive influences. New York: Springer, p. 265-276, 2015.

PUCCINI, E. C. **Matemática financeira.** Projeto universidade aberta. 2007.

ROCHA, M. N. **A necessidade do pensamento filosófico para a compreensão da Física: um estudo inspirado em Wittgenstein no contexto da mecânica newtoniana**. 2015. 156 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

ROSETTI JR, H.; SCHIMIGUEL, J. Estudo de modelos de Matemática Financeira em bibliografia básica. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Anais**… Recife: UFPE. 2011.

ROTH, W. Heeding Wittgenstein on “Understanding” and “Meaning”: A Pragmatist and Concrete Human Psychological Approach in/for Education. **Outlines - Critical Practice Studies**, v. 16, n. 1, p. 26-52, 2015.

SAVOIA, J. R. F.; SAITO, A. T.; SANTANA, Flávia de Angelis. Paradigmas da educação financeira no Brasil. **Rap**, Rio de Janeiro, v. 6, n. 41, p. 1121-1141, nov. 2007.

SANTOS G. L. da c. **Educação Financeira:** a matemática financeira sob uma nova perspectiva. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência) – Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2005.

SILVA, R. Ensino de Matemática Financeira: construção de modelos matemáticos do custo de vida como facilitadores no Ensino de Matemática. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 18., 2014, Recife. **Anais...** Recife: UFPE, 2014.

SILVA, P. V; SILVEIRA, M. R. A. O ver-como wittgensteiniano e suas implicações para a aprendizagem a Matemática: um ensaio. **BoEM**, Joinville, v. 2, n. 3, p.17-34, dez. 2014.

SILVEIRA, E. **Modelagem Matemática em Educação no Brasil:** entendendo o universo de teses e dissertações. 2007. 197 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2007.

SILVEIRA, M. R. A. Aplicação e interpretação de regras matemáticas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 10, n. 1, p. 93-113, 2008.

SILVEIRA, M. R. A. Tradução de textos matemáticos para a linguagem natural em situações de ensino e aprendizagem. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 16, n. 1, p. 47-73, 2014.

SOUZA, L. A. de. **Trilhas na construção de versões históricas sobre um grupo escolar.** 2011. 420 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2011.

SOUZA, E. G. **A aprendizagem matemática na modelagem matemática**. 2012. 145 f. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) - Universidade Federal da Bahia, Universidade Estadual de Feira de Santana, Salvador, 2012.

SOUZA, E. G.; BARBOSA, J. C. Contribuições teóricas sobre a aprendizagem matemática na modelagem matemática. **Zetetiké**, Campinas, v. 22, n. 41, p. 31-58, jul. 2014.

SOUZA, H. C. T., OLIVEIRA, C. F., ALMEIDA, L. M. W. Uma proposta de modelagem prescritiva. In: ALMEIDA, L. M.; BORSSOI, A. H.; TORTOLA, E.; SILVA, K. A. P. (Eds.), **Modelagem Matemática em debate**: diálogos, reflexões e desafios. EPMEM 7; Londrina: UEL, UTFPR, p. 548-562, 2016.

SOUZA, H. C. T. **Um olhar sobre o *fazer* Modelagem Matemática à luz da filosofia de Wittgenstein**. 2018. 208 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

SCHUKAJLOW, S.; KRUG, A. Treating Multiple Solutions in the Classroom and their Influence on Students' Achievements and the Affect –Theoretical Background and Design of the Quasi-empirical Study. In: **12th International Congress on Mathematical Education**, COEX, Seoul Korea, 2012. p. abcde-fghij.

SPANIOL, W. **Filosofia e método no segundo Wittgenstein.** São Paulo: Loyola, 1989.

SRIRAMAN, B.; KAISER, G.; BLOMHØJ, M. A brief survey of the state of mathematical modeling around the world. **ZDM**, v. 38, n. 3, p. 212-213, 2006.

TORTOLA, E. **Os usos da linguagem em atividades de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.** 2012. 168f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

TORTOLA, E. **Configurações de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.** 2016. 304 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

TORTOLA, E.; ALMEIDA, L. M. W. de. A Formação Matemática de Alunos do Primeiro Ano do Ensino Fundamental em Atividades de Modelagem Matemática: uma Perspectiva Wittgensteiniana. **Perspectivas da Educação Matemática**, Mato Grosso do Sul, v. 11, n. 25, p.142-162, jun. 2018.

VELEDA, G. G; ALMEIDA, L.M. W de. A caracterização da realidade em trabalhos de modelagem matemática. In.: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, ENEM, 10, 2010, Salvador. **Anais**... Salvador: SBEM, 2010.

VILLA, L.; SILVA, J. T. da; DARROZ, L. M. Educação Financeira no Ensino Médio: uma Proposta Fundamentada na Teoria da Aprendizagem Significativa. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 20, n. 1, p. 56-74, jan. 2018.

VILELA, D. S. **Usos e jogos de linguagem na matemática:** diálogo entre Filosofia e Educação Matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2013.

VILELA, D. S.; MENDES, J. R. A linguagem como eixo da pesquisa em educação matemática: contribuições da filosofia e dos estudos do discurso. **Zetetiké**, Unicamp, v. 19, n. 36, p. 7-25, dez. 2011.

WICKMAN, P. O.; ÖSTMAN, L. Learning as a discurse change: a sociocultural mechanism. **Science Education**, v. 88, n. 5, p. 601-623, 2002.

WITTGENSTEIN, L. **Observaciones sobre los fundamentos de la matemática**. Madrid: Alianza Editorial, 1987.

WITTGENSTEIN, L. **Fichas (Zettel)**. Lisboa. Edições 70, 1989.

WITTGENSTEIN, L. **Investigações Filosóficas.** 9. ed. Petrópolis: Vozes, 2014.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO DO PERFIL DO ACADÊMICO

PERFIL DO ACADÊMICO

1. Nome: ____ 2. Idade:____
3. Ano que iniciou o curso:_________.
4. Você já cursou outro(s) curso(s) de graduação, se sim qual(is)?
5. Atualmente, além de estudar, você também (se desenvolver outras atividades regulares informe no campo "Outro").
( ) Faz estágio
( ) Trabalha
( ) Participa de projetos na universidade, como: iniciação científica, projeto de ensino, etc.
( ) Outro:
Escreva detalhes sobre a(s) atividade(s) que exerce:
6. O que você entende por Matemática Financeira? Você considera importante estudar conceitos desta disciplina? Se sim, por quê?
7. Está cursando esta disciplina pela:
( ) Primeira vez ( ) Segunda vez ( ) Terceira vez ( ) Outro: Caso não seja a primeira vez, quais foram as dificuldades encontradas quando cursou? Que aspectos da disciplina, em relação ao conteúdo, você considera importante?
8. Para você o termo "modelagem matemática" é familiar? Qual é o seu entendimento sobre o mesmo?
9. Você já desenvolveu atividades de modelagem matemática? Em que contextos e como foi a experiência?
10. Que temáticas, envolvendo situações reais, você gostaria de estudar durante a disciplina?

Espaço destinado a comentários ou questionamentos oportunos, que você queira fazer.

APÊNDICE B – QUESTÕES DA ENTREVISTA

Questões para entrevista sobre as atividades de modelagem matemática desenvolvidas em sala de aula

Sobre a modelagem matemática

1) Você já desenvolveu atividades de modelagem matemática antes da disciplina de Matemática Financeira? Se sim, em quais disciplinas?
2) Você cursa ou já cursou a disciplina de Modelagem Matemática no curso de Licenciatura em Matemática?
3) Já participou em algum minicurso ou palestra que versa sobre modelagem matemática na Educação Matemática?
4) O que entende por modelagem matemática?

Algumas perguntas pessoais

5) Você já cursou a disciplina de Matemática Financeira ou algum curso semelhante antes desta disciplina? Por exemplo, curso sobre finanças, Educação Financeira, algum minicurso, palestra.
6) Como aluno do curso de Licenciatura em Matemática, você cursou ou cursa alguma disciplina no regime de dependência, se sim, quais disciplinas?
7) Você trabalha, trabalhou? Em qual profissão? Em sua atividade profissional você lida/lidou com a Matemática Financeira?

Sobre as atividades de modelagem matemática desenvolvidas

Atividades: Micro Cervejaria Artesanal e Financiamento de veículos

8) Identifique suas ações no desenvolvimento das atividades.
9) Por que vocês escolheram esse tema? Algum interesse pessoal ou o fato da disciplina ser de Matemática Financeira.
10) Como ocorreu o processo da escolha do tema?
11) O problema escolhido em grupo para estudar foi relevante? Por quê?
12) O que foi importante você entender para formular o problema? Obs: tanto os dados matemáticos quanto os dados qualitativos da situação-problema.
13) Que conceitos de Matemática Financeira e da Matemática foram usados nas atividades?
14) Esses conceitos foram aprendidos antes, no decorrer ou depois do desenvolvimento da atividade?
15) Explique com suas palavras o que significa cada um desses conceitos? Valor presente, valor futuro, fluxo de caixa, investimento, capitalização a regime de juros compostos, valor presente de fluxo de caixa, financiamento a parcelas fixas, taxa de juros, tabela price.
16) O que foi importante você entender para deduzir o modelo matemático? Houve alguma pesquisa? Alguma intervenção do professor?
17) Que técnicas, procedimentos foram importantes para deduzir o modelo matemático?
18) Você ficou satisfeito com a validade da solução encontrada? Se não, o que pode ser feito para tornar a solução válida?

19) O que significou para você essa atividade?

Atividade: Orçamento Familiar

20) Que aspectos, dados e informações foram importantes para formular o problema?
21) O que foi importante você entender na situação-problema antes da resolução?
22) Identifique suas ações no desenvolvimento da atividade “orçamento familiar”.
23) Que características dos dados coletados e da situação-problema foram essenciais para a dedução do modelo matemático? Por exemplo, o tipo do título foi importante? O regime de capitalização de juros?
24) O que você entende por orçamento financeiro?
25) O que você entende por investimento?
26) Como você foi estabelecendo relações entre o orçamento pessoal e o rendimento no investimento financeiro?
27) Que conceitos de Matemática Financeira e da Matemática foram usados nas atividades?
28) Esses conceitos foram aprendidos antes, no decorrer ou depois do desenvolvimento da atividade?
29) O que foi importante você entender para deduzir o modelo matemático? Houve alguma pesquisa? Alguma intervenção do professor?
30) Descreva com suas palavras as características principais do modelo obtido no desenvolvimento desta atividade.
31) Que técnicas, procedimentos, conceitos foram importantes para deduzir o modelo matemático?
32) O que você entende por renda? Que podemos classificar os tipos de rendas?
33) O que você entende por equações de diferenças? Que características da situação-problema você levou em conta para formular sua equação? Como você encontrou a solução da equação de diferenças tomadas (que técnicas matemáticas você utilizou)?
34) Explique o que você entende por inflação? Como ela é medida? IPCA (Índices de preços do consumido amplo)?
35) O que você entende por capitalização a regime de juros compostos? Qual é a diferença para capitalização a regime de juros simples?
36) Como você validou a solução obtida? Fez algum tipo de análise? Contrastou os dados reais com os dados obtidos pelo modelo matemático?
37) Que impactos/repercussões a atividade teve para sua vida financeira (finanças pessoais)? É importante economizar, investir?

Atividade Política de preços da Petrobrás

38) Identifique suas ações no desenvolvimento da atividade “política de preços de Petrobrás”.
39) Você considera importante o problema proposto sobre a “política de preços da Petrobrás”?
40) O que foi importante você entender na situação-problema antes da resolução?
41) Que características dos dados coletados e da situação-problema foram essenciais para a dedução do modelo matemático?
42) O que você entende por política de preços? Qual é a política de preços da Petrobrás vigente?

43) Como é formado o preço da gasolina nas bombas?
44) Quais foram os requisitos (desejos) formulados para a política de preços proposta por vocês? Que implicações esses requisitos têm para o mercado interno, para a Petrobrás e par ao mercado internacional?
45) Que conceitos de Matemática Financeira e da Matemática foram usados nas atividades?
46) Esses conceitos foram aprendidos antes, no decorrer ou depois do desenvolvimento da atividade?
47) O que foi importante você entender para deduzir o modelo matemático? Houve alguma pesquisa? Alguma intervenção do professor?
48) Descreva com suas palavras as características principais do modelo obtido no desenvolvimento desta atividade.
49) Que diferenças o modelo matemático de vocês tem para o modelo matemático vigente?
50) Que técnicas, procedimentos, conceitos foram importantes para deduzir o modelo matemático?
51) O que você entende por reajuste monetário?
52) O que você entende por taxa cambial?
53) Como você validou a solução obtida? Fez algum tipo de análise? Contrastou os dados reais com os dados obtidos pelo modelo matemático?
54) Que implicações/contribuições essa atividade tem para você? Mudou sua visão sobre o preço da gasolina nas bombas? E para sociedade?

ANEXO A – MODELO DE AUTORIZAÇÃO PARA COLETA DE DADOS

Cornélio Procópio, março de 2018.

TERMO DE AUTORIZAÇÃO

Tendo em vista o desenvolvimento de parte da pesquisa de mestrado, cujo objetivo é investigar como se dá a compreensão dos alunos em atividades de modelagem matemática em uma disciplina de Matemática Financeira de um curso de Licenciatura em Matemática, sob responsabilidade de Jeferson Takeo Padoan Seki, aluno do curso de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina e professor colaborador do colegiado de Matemática da Universidade Estadual do Norte do Paraná, *campus* de Cornélio Procópio, declaro que consinto que o mesmo utilize meus registros escritos e os registros de minhas discussões na realização das atividades desenvolvidas durante as aulas de Matemática Financeira, podendo utilizá-los parcial ou integralmente, sem restrições de prazos e citações, desde a presente data, podendo divulga-las em publicações, congressos e eventos da área, com a condição de que meu nome não seja citado em hipótese alguma, garantindo o anonimato. Igualmente abdico dos direitos meus e de meus descendentes. Declaro, ainda, que foi devidamente informado(a) e esclarecido(a) quanto à investigação que será desenvolvida.

Nome	CPF	Assinatura