UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA

JOAMIR ROBERTO DE SOUZA

MATEMÁTICA DISCRETA: TÓPICOS PARA O ENSINO MÉDIO

Londrina
2013

JOAMIR ROBERTO DE SOUZA

MATEMÁTICA DISCRETA:

TÓPICOS PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação de mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientadora: Profª Drª. Lourdes Maria Werle de Almeida.

Londrina
2013

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

S729m Souza, Joamir Roberto de.
Matemática discreta: tópicos para o ensino médio / Joamir Roberto de Souza. – Londrina, 2013.
111 f. : il.

Orientador: Lourdes Maria Werle de Almeida.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2013.
Inclui bibliografia.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Grupos discretos (Matemática) – Teses. 3. Matemática – Processamento de dados – Teses. 4. Matemática (Ensino médio) – Teses. I. Almeida, Lourdes Maria Werle de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Sociedade Brasileira de Matemática. IV. Título.

CDU 51:37.02

JOAMIR ROBERTO DE SOUZA

MATEMÁTICA DISCRETA: TÓPICOS PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação de mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Profª orientadora Drª Lourdes Maria Werle de Almeida
UEL – Londrina – PR

Profª Drª Eliane Maria de Oliveira Araman
UTFPR – Cornélio Procópio – PR

Profª Drª Neuza Termanon
UEL – Londrina – PR

Londrina, 16 de abril de 2013.

Dedico este trabalho àqueles que,
apesar de tudo,
acreditam na Educação.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha orientadora, que, desde o início, conduziu com maestria todas as questões que surgiram no desenvolvimento deste trabalho.

À minha amada esposa e filho, que, não somente durante a produção deste trabalho, mas também por todo o curso, souberam administrar minha ausência em muitos momentos e motivaram-me à concluí-lo.

Por fim, e principalmente, agradeço à Deus, que esteve presente a cada segundo, me mostrando os caminhos e ajudando-me a enfrentar os desafios.

Deus criou os números inteiros.
Todo o resto é trabalho do homem.

Leopold Kronecker (1823–1891)

SOUZA, Joamir Roberto de. **Matemática discreta**: tópicos para o ensino médio. 2013. 111f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta para a abordagem de conceitos relacionados à Matemática Discreta no Ensino Médio. Após uma breve discussão sobre a importância desse campo da Matemática e tratar alguns de seus conceitos habitualmente contemplados no Ensino Médio, são propostos problemas curiosos cuja resolução usa estes conceitos. Além disso, são sugeridos encaminhamentos para o professor na introdução desses problemas nas aulas de Matemática.

Palavras-chave: Matemática discreta.

SOUZA, Joamir Roberto de. Discrete mathematics: topics for high school. 2013. 111f. Dissertation (Professional Masters in Mathematics in National Network) - State University of Londrina, Londrina 2013.

ABSTRACT

This paper presents a proposal for to approach concepts related to Discrete Mathematics in High School. After a brief discussion about the importance of this field of Mathematics and after treating some of its concepts typically covered in High School, we propose some curious problems whose resolution uses these concepts. In addition, we suggest some referrals to the teacher while introducing these problems in Mathematics classes.

Keywords: Discrete mathematics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Contar e registrar quantidades nem sempre foram atividades simples para a humanidade. A perda da característica nômade, o surgimento da agricultura e da criação de animais, fizeram com que nossos antepassados começassem a exercitar as ações de contar e registrar. A partir desse momento surgiu também a preocupação com o registro de quantidades, como o de número de membros da família, de animais do rebanho e os processos de compra e venda, mediados por instrumentos capazes de, de alguma maneira, medir quantidades.

De acordo com Domingues (1991), evidências arqueológicas indicam que há cerca de $30\,000$ anos, para quantificar uma coleção, o homem fazia uso de associações de elementos um a um. Assim, por exemplo, ao levar os animais para pastar, separava-se, em um monte, uma pedrinha para cada animal. Ao final do dia, retirava-se uma pedrinha para cada animal recolhido, avaliando-se assim a falta de algum deles.

Atualmente, na vida escolar, junto com as formas geométricas, um dos primeiros conceitos com que a criança tem contato é o das ideias de numeração. Nos anos iniciais do Ensino Fundamental, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), espera-se que o aluno desenvolva algumas habilidades, como, por exemplo:

- *Reconhecimento de números no contexto diário.*
- *Utilização de diferentes estratégias para quantificar elementos de uma coleção: contagem, pareamento, estimativa e correspondência de agrupamentos.*
- *Utilização de diferentes estratégias para identificar números em situações que envolvem contagens e medidas.*
- *Contagem em escalas ascendentes e descendentes de um em um, de dois em dois, de cinco em cinco, de dez em dez, etc., a partir de qualquer número dado.*
- *Identificação de regularidades na série numérica para nomear, ler e escrever números menos frequentes.*
- *Organização em agrupamentos para facilitar a contagem e a comparação entre grandes coleções.*

- *Leitura, escrita, comparação e ordenação de notações numéricas pela compreensão das características do sistema de numeração decimal (base, valor posicional).*

O conceito de número é uma das ideias fundamentais da Matemática. De acordo com Lima (2006, p. 25),

> Número é o resultado da comparação entre uma grandeza e uma unidade. Se a grandeza é discreta, essa comparação chama-se contagem e o resultado é um número inteiro; se a grandeza é contínua, a comparação chama-se uma medição e o resultado é um número real.

Ainda que a origem dos números esteja mais fortemente ligada à contagem, tratando portanto grandezas de natureza discreta, o desenvolvimento da Matemática se deu muito mais com variáveis contínuas. Segundo Jurkiewicz (2004), os resultados da *matemática do contínuo* têm oferecido respostas, em grande medida, aceitáveis e confiáveis para as questões internas à própria Matemática e também em muitas aplicações em outras áreas até o início do século XX.

Assim, os currículos escolares passaram a ser organizados de modo que grande parte da Matemática fosse sendo tratada na escola em uma sequência que se inicia com os números inteiros e racionais, e chega à ideia de números reais como grandeza contínua.

No entanto, a partir da segunda metade do século XX, com o advento do computador, a necessidade de conhecer e saber lidar com matemáticas de natureza discreta se tornou eminente.

De acordo com Lipschutz e Lipson (2004, p. 5), a Matemática Discreta:

> [..] vem assumindo importância crescente à medida que a era do computador avança. O computador é, basicamente, uma estrutura finita, e muitas de suas propriedades podem ser entendidas dentro do arcabouço formado por sistemas matemáticos finitos.

Essa grande aplicabilidade de conceitos da Matemática Discreta em questões da computação é um fator que evidencia a necessidade de um trabalho mais cuidadoso com a Matemática Discreta na Educação Básica, considerando que, segundo Santaló (1996, p. 11):

> A missão dos educadores é preparar as novas gerações para o mundo em que terão que viver. Isto quer dizer proporcionar-lhes o ensino necessário para que adquiram as destrezas e habilidades que vão necessitar para seu desempenho, com comodidade e eficiência, no seio da sociedade que enfrentarão ao concluir sua escolaridade.

De modo geral, na Educação Básica, especialmente no Ensino Médio, alguns conceitos da conhecida Matemática Discreta estão incorporados à estrutura curricular, como é o caso da análise combinatória, da probabilidade e das sequências, em geral restrito ao estudo de progressões aritméticas e geométricas. Outros tantos, todavia, ainda têm uma presença muito tímida nos currículos da Educação Básica, como é o caso do Princípio da indução finita, da teoria de grafos, das equações de diferenças finitas e das ideias fundamentais da lógica matemática.

Nas últimas décadas, avaliações de larga escala, como é o caso, por exemplo, do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem), têm incluído grande número de questões tratando de conceitos da Matemática Discreta.

O Enem, aplicado desde 1998, passa, desde então, por um processo contínuo de mudança, tanto em seus objetivos quanto no modelo de suas provas. Criado com a finalidade de avaliar o desempenho individual dos alunos concluintes do Ensino Médio e de definir políticas públicas educacionais, atualmente o Enem recebe maior notoriedade por possibilitar o ingresso ao Ensino Superior, sobretudo em instituições públicas. A principal mudança ocorreu em 2009 quando, associado ao Enem, estabeleceu-se o Sistema de Seleção Unificada (Sisu), que possibilita às instituições federais de Ensino Superior utilizar o resultado obtido no Enem como critério de seleção de candidatos a vagas de cursos de graduação. Com relação ao modelo das provas, também a partir de 2009, o Enem passou a ser organizado de maneira a contemplar a elaboração de uma redação e a aplicação de quatro provas objetivas, com 45 questões cada, sendo elas: *Linguagens, códigos e suas tecnologias*; *Matemática e suas tecnologias*; *Ciências da natureza e suas tecnologias*; e *Ciências humanas e suas tecnologias*.

Percebe-se, de acordo com a distribuição das provas, a importância da Matemática no cenário do Enem, uma vez que é a única disciplina do currículo básico a ter uma prova exclusiva e, dessa maneira, corresponder a um quarto das questões objetivas.

Mas qual a relação entre o estudo da Matemática Discreta no Ensino Básico e o Enem? A resposta para essa questão surge quando se analisa as questões da prova de *Matemática e suas tecnologias*. Em 2011, nove questões dessa prova correspondiam a conceitos da Matemática Discreta, enquanto em 2012 existiram 10 questões relacionadas a seus conceitos, conforme mostramos no Quadro 1.

Quadro 1 – Questões do Enem da prova de Matemática e suas tecnologias relacionadas a conceitos da Matemática Discreta – 2011 e 2012.

Ano	***Questão***	***Conceito***
2011	140	Médias
	143	Números naturais
	149	Recorrência
	156	Probabilidade
	171	Médias
	173	Probabilidade
	174	Análise combinatória
	175	Médias
	178	Recorrência
2012	139	Probabilidade
	140	Matemática financeira
	144	Análise combinatória
	146	Probabilidade
	150	Sequência
	157	Sequência
	169	Médias
	174	Médias
	177	Análise combinatória
	178	Probabilidade

Essa presença da Matemática Discreta no Enem está em consonância com que estabelecem as *Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio* (2012), que colocam como objetivos de ensino neste nível de escolaridade:

- *a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;*

- *a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores.*

Levando-se em consideração que professores do Ensino Médio devem estar preparados para um trabalho que dê conta da busca por atingir esses objetivos, uma possibilidade para contribuir para esta formação é o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), que, de acordo com sua apresentação:

> [...] visa atender professores de Matemática em exercício no ensino básico, especialmente na escola pública, que busquem aprimoramento em sua formação profissional, com ênfase no domínio aprofundado de conteúdo matemático relevante para sua atuação docente. O Programa opera em ampla escala, com o objetivo de, a médio prazo, ter impacto substantivo na formação matemática do professor em todo o território nacional.

A *Matemática Discreta* é uma disciplina obrigatória do PROFMAT e trata de conceitos, como números naturais, números cardinais, princípio de indução finita, progressões aritméticas e geométricas, recorrências, matemática financeira, análise combinatória, introdução à teoria de probabilidades, entre outros.

Por outro lado, em consonância com o artigo 28 do PROFMAT, o Trabalho de Conclusão de Curso deve versar sobre temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática do Ensino Básico e que tenham impacto na prática didática em sala de aula.

Assim, neste trabalho, temos como objetivo estruturar um conjunto de problemas não usuais cuja resolução por alunos do Ensino Médio viabiliza ou requer o uso de conceitos da Matemática Discreta.

A estrutura do texto do trabalho de conclusão do curso compreende a introdução, dois capítulos, as considerações finais e as referências bibliográficas usadas.

No capítulo 1 apresentamos conceitos da Matemática Discreta que serão usados na resolução dos problemas.

No capítulo 2 são discutidos alguns problemas curiosos relacionados à Matemática Discreta. Esses problemas constituem-se como uma alternativa às atividades tradicionalmente abordadas no Ensino Médio, uma vez que se caracterizam como problemas curiosos que estimulam o pensamento investigativo, a abstração e o desenvolvimento de estratégias próprias em cada um deles. A parte final de cada problema apresenta uma sugestão de aplicação em sala de aula. Nela, há ideias de ordem de desenvolvimento, questões complementares, entre outras.

2 MATEMÁTICA DISCRETA

A evolução do conceito de contagem, desde seu nascimento até a maneira pela qual a conhecemos atualmente foi demasiadamente lenta. As etapas dessa evolução, ao olhar da História da Matemática, é de difícil delimitação. Domingues (1991) exemplifica esse fato questionando *o que teria vindo primeiro: o uso de símbolos gráficos ou o uso de arranjos de sons para designar um número?*

A organização dos números baseada em conceitos da teoria de conjuntos, como habitualmente estudamos em nosso tempo, é relativamente recente, datando do final do século XIX. Mas, o objetivo deste trabalho não é fazer um estudo histórico da evolução do conceito de número, mas tratar do seu uso como variável de natureza discreta.

2.1 – ALGUNS CONCEITOS DA MATEMÁTICA DISCRETA

Considerando a importância de conceitos que tratam da natureza discreta dos números naturais, neste capítulo abordaremos alguns conceitos da Matemática Discreta que podem ser tratados em diferentes momentos da Educação Básica, especialmente no Ensino Médio.

Como citamos no início da introdução deste trabalho, o conceito de número nem sempre foi organizado como o conhecemos atualmente. No que se refere ao conjunto dos números naturais, muito de sua formalização deve-se ao matemático italiano Giuseppe Peano (1858–1932).

Para essa formalização, Peano utilizou-se da ideia de sucessor. Algumas propriedades, denominadas axiomas de Peano, apresentam o conceito de de sucessor e a construção do conjunto dos números naturais. Lima (2006, p. 30), enuncia os axiomas de Peano da seguinte maneira:

a) Todo número natural tem um único sucessor

b) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes

c) Existe um único número natural, chamado um e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro

d) Seja X um subconjunto de números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$ *). Se* $1 \in X$ *e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então* $X = \mathbb{N}$

Os axiomas de Peano estabelecem que os números naturais são números ordinais. O primeiro elemento é aquele que não é sucessor de nenhum outro, ou seja, o número 1. O segundo elemento é o sucessor de 1, ou seja, o número 2, e assim sucessivamente. Portanto, o conjunto dos números naturais pode ser representado por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...\}$.

Podem ser definidas no conjunto dos números naturais duas operações básicas: a adição e a multiplicação. A adição associa a cada par de números (m, n) sua soma $m + n$. A multiplicação associa a cada par (m, n) seu produto $m \cdot n$. Essas operações são definidas pelas seguintes igualdades:

- $m + 1 = s(m)$;
- $m + s(n) = s(m + n)$, ou seja, $m + (n + 1) = (m + n) + 1$;
- $m \cdot 1 = m$;
- $m \cdot (n + 1) = m \cdot n + m$.

2.2 – Princípio da Indução Finita

No tópico anterior, quando nos dedicávamos a compreender a conceituação dada por Peano ao conjunto dos números naturais, enunciamos os chamados axiomas de Peano. O axioma *d* diz: *seja* X *um subconjunto de números naturais (isto é,* $X \subset \mathbb{N}$ *). Se* $1 \in X$ *e se, além disso, o sucessor de todo elemento de* X *ainda pertence a* X*, então* $X = \mathbb{N}$ *.*

Essa propriedade é conhecida como *axioma da indução* e permite que seja estabelecido o Princípio da indução finita, um método para demonstrações de teoremas ou propriedades válidas para números naturais.

2.2.1 – Princípio da Indução Finita

O enunciado e a demonstração a seguir, do Princípio da indução fitina, tem como base a proposta de Lima (2006, p. 32):

Princípio da indução finita

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural *n*. Suponha que:

i) $P(1)$ é válida;

ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de $P(n)$ implica a validez de $P(n+1)$.

Então $P(n)$ é válida qualquer que seja o número natural *n*.

Demonstração

Seja *X* o subconjunto dos elementos *n* de $\mathbb{N}$ para os quais $P(n)$ é verdadeira. Assim, por i) temos que $1 \in X$ e, por ii), que $n \in X \Rightarrow (n+1) \in X$. Portanto, pelo axioma *d*, concluímos que $X = \mathbb{N}$.

De maneira geral, denominamos como base de indução a verificação da validade de $P(1)$ e a verificação da validade de $P(n+1)$, considerando $P(n)$ verdadeira, por indução.

Observe um exemplo de uma propriedade demonstrada com o Princípio da indução finita.

Propriedade

A soma dos *n* primeiros números naturais é dada por $\frac{n(n+1)}{2}$.

Demonstração

i) Temos que para $n = 1$ a propriedade é válida, uma vez que: $\frac{1(1+1)}{2} = 1$;

ii) Considerando a propriedade válida para *n*: $1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$, temos:

$$1+2+3+...+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Portanto, $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Há ainda outra versão do Princípio da indução finita, cujo enunciado é dado da seguinte maneira:

Princípio da indução finita (2ª forma)

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural *n*. Suponha que:

i) $P(a)$ é válida;

ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de $P(a)$, $P(a+1)$, $P(a+2)$, ..., $P(n)$ implica a validez de $P(n+1)$.

Então $P(n)$ é válida qualquer que seja o número natural $n \geq a$.

De acordo com o texto da unidade 2 da disciplina de *Matemática Discreta* do PROFMAT (p. 5)

> É preciso ter clareza que a Indução Matemática é diferente da indução empírica das ciências naturais, em que é comum, após um certo número de experimentos, necessariamente finito, enunciar leis gerais que governam o fenômeno em estudo. Essas leis são tidas como verdades, até prova em contrário. Na matemática, não há lugar para afirmações verdadeiras até prova em contrário. A Prova por Indução Matemática trata de estabelecer que determinada sentença aberta sobre os naturais é sempre verdadeira.

2.2.2 – Números Primos e Números Compostos

No que se refere aos números naturais, dois importantes conceitos a serem considerados são os divisores e os múltiplos dos números naturais.

A definição desses conceitos, baseada em Hefez (2011, p. 30), a partir de divisibilidade, é dada da maneira que segue:

Definição

Sejam dois números naturais *a* e *b*, com $a \neq 0$; dizemos que *a* divide *b*, representado por a|b, se existir um número natural *c*, tal que $b = a \cdot c$. Dizemos que *a* é divisor de *b* e que *b* é múltiplo de *a*.

Um conceito associado à ideia de múltiplos e divisores é o de número primo e número composto.

Definição

Um número natural maior do que 1 e que é divisível somente por 1 e por si próprio é denominado *número primo*. Quando um número natural não é primo, então ele é denominado *número composto*.

Esses conceitos são necessários para definir o Teorema Fundamental da Aritmética. Contudo, antes de apresentarmos seu enunciado e demonstração, é necessário enunciar um corolário, dado por Hefez (2011, p. 82) da maneira que segue.

Corolário

Se $p, p_1, ..., p_n$ são números primos e, se $p \mid p_1 \cdots p_n$, então $p = p_i$ para algum $i = 1, ..., n$.

Agora, também de acordo com Hefez (2011, p. 82), podemos enunciar e demonstrar o Teorema Fundamental da Aritmética.

Teorema Fundamental da Aritmética

Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.

Demonstração

Utilizaremos a 2ª forma do Princípio da indução finita. Para $n = 2$ o resultado é verificado, visto que 2 é primo.

Supondo o resultado válido para todo número natural menor do que *n*, vamos provar que também é válido para *n*. No caso de *n* ser primo, nada temos de demonstrar. Vamos supor, então, *n* composto. Logo, existem naturais n_1 e n_2 tais que $n = n_1 \cdot n_2$, com $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$. Pela hipótese de indução, temos que existem número primos $p_1, ..., p_r$ e $q_1, ..., q_s$ tais que $n_1 = p_1 \cdots p_r$ e $n_2 = q_1 \cdots q_s$. Portanto, $n = p_1 \cdots p_r \cdot q_1 \cdots q_s$.

Provaremos agora a unicidade da escrita. Para isso, suponhamos que $n = p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$, onde p_i e q_i são números primos. Como $p_1 \mid q_1 \cdots q_s$, pelo corolário acima, temos que $p_1 = q_j$ para algum *j*, que, após o reordenamento de $q_1, ..., q_s$, podemos supor que seja q_1. Portanto, $p_2 \cdots p_r = q_2 \cdots q_s$.

Como $p_2 \cdots p_r < n$, a hipótese de indução acarreta que $r = s$ e os p_i e q_j são iguais aos pares.

À escrita de um número composto como o produto de primos damos o nome de decomposição em fatores primos. O número 4200, por exemplo, é decomposto em fatores primos do seguinte modo: $4200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$.

Podemos apresentar também essa decomposição agrupando os fatores primos iguais por meio de potências:

$$4200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

2.3 – Sequências de Números Reais

2.3.1 – Definição de Sequência de Números Reais

Denominamos sequência infinita de número reais toda função f de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$. Em uma sequência infinita, cada $i \in \mathbb{N}$ está associado um $a_j \in \mathbb{R}$, de maneira que: $f = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), ..., (i, a_i), ...\}$.

De maneira simplificada, uma sequência pode ser indicada por $f = (a_1, a_2, a_3, ..., a_i, ...)$.

Duas notações usuais para indicar uma sequência infinita *f* qualquer são: $(a_n) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $f = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Dada uma sequência qualquer $(a_n) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, podemos classificá-la em crescente, quando, para qualquer a_n, tem-se $a_n < a_{n+1}$; e decrescente, quando, para qualquer a_n, tem-se $a_n > a_{n+1}$.

Em uma sequência $(a_n) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, quando existir um número real *M*, tal que $a_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, então dizemos que a sequência é limitada superiormente. De maneira semelhante, em uma sequência $(a_n) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, quando existir um número real *m*, tal que $a_n \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, então dizemos que a sequência é limitada inferiormente. Quando uma sequência é limitada superiormente e inferiormente, então dizemos que a sequência é limitada.

2.3.2 – Lei de Formação de uma Sequência de Números Reais

De maneira geral, estudamos em Matemática as sequências numéricas cujos termos obedecem a determinada regra, chamada lei de formação. Podemos destacar três maneiras de estabelecer a lei de formação de uma sequência: pela fórmula de recorrência; pelo termo geral; e pela propriedade dos termos.

a) Fórmula de recorrência

Na lei de formação expressa pela fórmula de recorrência, são dadas duas regras: uma que define o primeiro termo e outra para se determinar cada termo a_n a partir do(s) antecedente(s).

Por exemplo, a sequência $(4, 7, 10, 13, 16, ...)$ pode ser definida pela recorrência em que $a_1 = 4$ e $a_n = a_{n-1} + 3$, em que os termos são calculados da seguinte maneira:

- $n = 1 \rightarrow a_1 = 4$
- $n = 2 \rightarrow a_2 = a_1 + 3 = 4 + 3 = 7$
- $n = 3 \rightarrow a_3 = a_2 + 3 = 7 + 3 = 10$
- $n = 4 \rightarrow a_4 = a_3 + 3 = 10 + 3 = 13$
- $n = 5 \rightarrow a_5 = a_4 + 3 = 13 + 3 = 16$

Ao longo da história, algumas sequências, devido as suas características particulares, receberam grande atenção. Uma delas é a chamada sequência de Fibonacci. Ela recebe esse nome por ter sido elaborada pelo matemático italiano Leonardo Fibonacci (1175–1250), também conhecido como Leonardo de Pisa. Essa sequência pode ser definida por recorrência da seguinte maneira: $a_1 = a_2 = 1$ e $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

Essa sequência representa o número de casais de coelhos que, a partir de um único casal, reproduzem um novo casal todo mês, a partir de seu segundo mês de vida, conforme indicado no Quadro 2.

Quadro 2 – Número de coelhos – sequência de Fibonacci.

Tempo (em meses)	***Casais de coelhos com 2 meses ou mais***	***Casais de coelhos com 1 mês***	***Casais de coelhos recém-nascidos***	***Total de casais de coelhos***
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	1	0	1	2
4	1	1	1	3
5	2	1	2	5
6	3	2	3	8
7	5	3	5	13
8	8	5	8	21
...	...	...	...	...

b) Termo geral

A lei de formação dada pelo termo geral consiste em expressar cada termo em função de sua posição na sequência, ou seja, expressar a_n em função de *n*.

Por exemplo, na sequência definida pelo termo geral $a_n = 3n - 5$, com $n \in \mathbb{N}$, temos $(-2, 1, 4, 7, 10, ...)$, pois:

- $n = 1 \rightarrow a_1 = 3 \cdot 1 - 5 = -2$
- $n = 2 \rightarrow a_2 = 3 \cdot 2 - 5 = 1$
- $n = 3 \rightarrow a_3 = 3 \cdot 3 - 5 = 4$
- $n = 4 \rightarrow a_4 = 3 \cdot 4 - 5 = 7$
- $n = 5 \rightarrow a_1 = 3 \cdot 5 - 5 = 10$

c) Propriedade dos termos

A lei de formação pode ser dada quando da exposição de uma dada propriedade que os termos da sequência devem ter. A sequência definida pela propriedade “números quadrado perfeitos dispostos em ordem crescente”, por exemplo, é dada por $(1, 4, 9, 16, 25, ...)$.

Quando uma sequência é definida pelo termo geral, a obtenção de qualquer termo dessa sequência, a partir de sua posição, é imediata, bastando apenas substituir o valor de *n* na expressão do termo geral. Contudo, isso não ocorre em uma sequência definida por recorrência, pois, para determinar o termo de posição *n*, é necessário obter todos os termos anteriores a ele. Nesse caso, faz-se necessário resolver a recorrência, ou seja, obter uma expressão para o termo geral que dependa apenas de *n*. A sequência definida pela recorrência $a_1 = 4$ e $a_{n+1} = a_n + 3$, pode ser expressa pelo termo geral $a_n = 3n + 1$. Contudo, a obtenção desse termo geral por meio da observação não garante sua validade. Uma maneira de provar essa conjectura é por meio do Princípio da indução finita.

Propriedade

A sequência definida pela recorrência $a_1 = 4$ e $a_{n+1} = a_n + 3$ pode ser expressa pelo termo geral $a_n = 3n + 1$, ou seja, $(a_n) = (3n + 1)_{n \in \mathbb{N}}$.

Demonstração

A base de indução, nesse caso, dá-se para $n = 1$:

$$a_1 = 3 \cdot 1 + 1 = 4$$

Considerando que para *n*, $a_n = 3n + 1$, então:

$$a_n = a_{n-1} + 3$$
$$a_{n+1} = a_n + 3$$
$$a_{n+1} = (3n + 1) + 3$$
$$a_{n+1} = 3(n + 1) + 1$$

Portanto, pelo Princípio da indução finita, podemos garantir que a sequência definida pela recorrência $a_1 = 4$ e $a_n = a_{n-1} + 3$ pode ser expressa pelo termo geral $a_{n+1} = a_n + 3$.

No Ensino Médio, habitualmente, dois tipos particulares de sequência são tratados com maior destaque: progressão aritmética e progressão geométrica.

2.3.3 –Progressão Aritmética

Definição

Denominamos progressão aritmética a sequência $(a_n) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definida pela recorrência $a_1 = a$, com $a \in \mathbb{R}$, e $a_{n+1} = a_n + r$, com $r \in \mathbb{R}$.

Podemos dizer que uma progressão aritmética é toda sequência em que, a partir do 2º termo, a diferença entre um termo e seu antecessor é constante. Essa diferença é denominada razão da progressão aritmética.

Sendo $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n, ...)$ uma progressão aritmética de razão *r*, então:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = a_5 - a_4 = ... = a_n - a_{n-1} = ... = r$$

Uma progressão aritmética é crescente quando $r > 0$, decrescente quando $r < 0$ e constante quando $r = 0$.

A partir de sua definição por recorrência, podemos obter a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética. Para isso, consideremos da recorrência:

- $a_2 = a_1 + r$
- $a_3 = a_2 + r$
- $a_4 = a_3 + r$
- $a_5 = a_4 + r$

...

- $a_n = a_{n-1} + r$

Adicionando-se, termo a termo, essas $n - 1$ parcelas, temos:

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ... + a_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1} + (n-1)r$$

$$\underbrace{(a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ... + a_{n-1})}_{\mathrm{I}} + a_n = a_1 + \underbrace{(a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1})}_{\mathrm{II}} + (n-1)r$$

Cancelando **I** e **II**, segue que $a_n = a_1 + (n-1)r$.

Fórmula do termo geral de uma progressão aritmética

Em uma progressão aritmética, em que o primeiro termo é a_1 e *r* é a razão, temos que o n-ésimo termo é dado por $a_n = a_1 + (n-1)r$.

Demonstração

Utilizando o Princípio da indução finita, temos que a propriedade é válida para $n = 1$, pois:

$$a_1 = a_1 + (1-1)r$$

Considerando válida a propriedade para n, ou seja, $a_n = a_1 + (n-1)r$, temos:

$$a_{n+1} = a_n + r = \left[a_1 + (n-1)r\right] + r = a_1 + \left[(n+1) - 1\right]r$$

Portanto, $a_n = a_1 + (n-1)r$ é válido para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Com a fórmula do termo geral, podemos determinar um termo qualquer de uma progressão aritmética conhecendo o primeiro termo e a razão. Por exemplo, na progressão aritmética em que $a_1 = 8$ e $r = 21$, o vigésimo termo é dado por: $a_{20} = 8 + (20-1) \cdot 21 = 8 + 19 \cdot 21 = 8 + 399 = 407$

Em uma progressão aritmética, a soma dos *n* primeiros termos pode ser calculada por meio de uma fórmula. A dedução desta fórmula é simples e pode até ser trabalhada com alunos do Ensino Médio desde o 1º ano. Observe:

Da fórmula do termo geral de uma progressão aritmética, temos:

- $a_1 = a_1$
- $a_2 = a_1 + r$
- $a_3 = a_1 + 2r$

...

- $a_n = a_1 + (n-1)r$

Adicionando-se, termo a termo, essas *n* parcelas, temos:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = n \cdot a_1 + \left[1 + 2 + ... + (n-1)\right]r$$

Como a $1 + 2 + 3 + ... + (n-1) = \dfrac{(n-1)n}{2}$ (demonstrado em 1.2.1), segue que:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = n \cdot a_1 + \frac{(n-1)n}{2} \cdot r$$

Tomando $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$, temos:

$$S_n = n \cdot a_1 + \frac{(n-1)n}{2} \cdot r = \frac{2na_1 + (n-1)nr}{2} = \frac{n\left[a_1 + a_1 + (n-1)r\right]}{2} = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

Essa dedução garante a validade da fórmula até um certo *n*. Para garantir a validade para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos realizar uma demonstração pelo princípio da indução finita.

Soma dos *n* primeiros termos de uma progressão aritmética

Em uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n, ...)$, temos que a soma dos *n* primeiros termos é dada por $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$.

Demonstração

A base de indução é dada por:

$$S_1 = \frac{1(a_1 + a_1)}{2} = \frac{2a_1}{2} = a_1$$

Considerando como hipótese de indução que $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$ seja a soma dos *n* primeiros termos de uma progressão aritmética, segue que a soma dos $n + 1$ primeiros termos é dada por:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} + a_{n+1} = \frac{n \cdot a_1 + n \cdot a_n + 2a_{n+1}}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{n \cdot a_1 + n \cdot \left[a_1 + (n-1)r\right] + 2(a_1 + n \cdot r)}{2} = \frac{2(n+1) \cdot a_1 + n \cdot (n+2-1)r}{2}$$

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)(2a_1 + n \cdot r)}{2} = \frac{(n+1)(a_1 + a_{n+1})}{2}$$

Observe, por exemplo, como podemos calcular a soma dos 30 primeiros termos da progressão aritmética em que $a_1 = 1$ e $r = 7$.

Obtemos o termo a_{30} utilizando a fórmula do termo geral:

$$a_{30} = 1 + (30 - 1) \cdot 7 = 1 + 29 \cdot 7 = 204$$

Utilizamos a fórmula da soma dos *n* primeiros termos da progressão aritmética:

$$S_{30} = \frac{30 \cdot (1 + 204)}{2} = \frac{30 \cdot 205}{2} = 3075$$

Portanto, a soma dos 30 primeiros termos da sequência é 3075.

2.3.4 – Progressão Geométrica

Definição

Denominamos progressão geométrica a sequência $(a_n) = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definida pela recorrência $a_1 = a$, com $a \in \mathbb{R}$, e $a_{n+1} = a_n \cdot q$, com $q \in \mathbb{R}$.

Podemos dizer que uma progressão geométrica é toda sequência em que, a partir do 2º termo, o quociente entre um termo e seu antecessor é constante. Esse quociente é denominado razão da progressão geométrica.

Sendo $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n, ...)$ uma progressão geométrica de razão *q*, então: $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_5}{a_4} = ... = \frac{a_n}{a_{n-1}} = ... = q$

Classificamos uma progressão geométrica em crescente quando $a_1 > 0$ e $q > 1$ ou $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$, decrescente quando $a_1 < 0$ e $q > 1$ ou $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$, constante quando $q = 1$ e alternante quando $q < 0$.

A partir de sua definição, podemos obter a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica. Para isso, consideremos da recorrência:

- $a_2 = a_1 \cdot q$
- $a_3 = a_2 \cdot q$
- $a_4 = a_3 \cdot q$
- $a_5 = a_4 \cdot q$

...

- $a_n = a_{n-1} \cdot q$

Multiplicando-se, termo a termo, esses $n-1$ fatores, temos:

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot q^{n-1}$$

$$\underbrace{\left(a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}\right)}_{\mathrm{I}} \cdot a_n = a_1 \cdot \underbrace{\left(a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}\right)}_{\mathrm{II}} \cdot q^{n-1}$$

Cancelando I e II, segue que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Fórmula do termo geral de uma progressão geométrica

Em uma progressão geométrica, em que o primeiro termo é a_1 e *q* é a razão, temos que o n-ésimo termo é dado por $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Demonstração

Utilizando o Princípio da indução finita, temos que a propriedade é válida para $n = 1$, pois:

$$a_1 = a_1 \cdot q^{1-1}$$

Considerando válida a propriedade para *n*, ou seja, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, temos:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q = \left(a_1 \cdot q^{n-1}\right) \cdot q = a_1 \cdot q^{(n+1)-1}$$

Portanto, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ é válido para todo $n \in \mathbb{N}^*$.

Com a fórmula do termo geral, podemos determinar um termo qualquer de uma progressão geométrica conhecendo o primeiro termo e a razão.

Por exemplo, na progressão geométrica em que o primeiro termo é $a_1 = 7$ e a razão é $q = -2$, o décimo termo é dado por:

$$a_{10} = a_1 \cdot q^{10-1} = 7 \cdot (-2)^9 = 7 \cdot (-512) = -3584$$

Assim como a progressão aritmética, a progressão geométrica também pode ter a soma dos *n* primeiros termos calculada por meio de uma fórmula.

Para obtermos essa fórmula, escrevemos a soma dos *n* primeiros termos da seguinte maneira:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + a_n \text{ (I)}$$

Multiplicando ambos os membros dessa expressão pela razão *q*, temos:

$$q \cdot S_n = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ... + a_n) \cdot q$$

$$q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + a_3 \cdot q + a_4 \cdot q + a_5 \cdot q + ... + a_n \cdot q$$

$$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ... + a_n + a_n \cdot q \text{ (II)}$$

Subtraindo (II) de (I) membro a membro, temos:

$$\begin{array}{r} S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ... + a_n \\ q \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + ... + a_n + a_n \cdot q \\ \hline S_n - q \cdot S_n = a_1 - a_n \cdot q \end{array}$$

Isolando S_n e substituindo $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ nesse resultado, segue que:

$$S_n - q \cdot S_n = a_1 - a_n \cdot q$$

$$S_n(1-q) = a_1 - a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q = a_1 - a_1 \cdot q^n = a_1(1-q^n)$$

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

Portanto, a soma dos *n* primeiros termos de uma progressão geométrica, com $q \neq 1$, é dada por $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$.

Soma dos *n* primeiros termos de uma progressão geométrica

Em uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n, ...)$, temos que a soma dos *n* primeiros termos é dada por $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, com $q \neq 1$.

Demonstração

Nesse caso, a base de indução é imediata:

$$S_1 = \frac{a_1(1-q^1)}{1-q} = a_1$$

Considerando como hipótese de indução que $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ seja a soma dos *n* primeiros termos de uma progressão geométrica, segue que a soma dos $n+1$ primeiros termos é dada por:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = \frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q} + a_{n+1} = \frac{a_1 - a_1 \cdot q^n}{1-q} + a_1 \cdot q^n$$

$$S_{n+1} = \frac{a_1 - a_1 \cdot q^n + a_1 \cdot q^n - a_1 \cdot q^{n+1}}{1-q} = \frac{a_1 - a_1 \cdot q^{n+1}}{1-q}$$

$$S_{n+1} = \frac{a_1\left(1-q^{n+1}\right)}{1-q}$$

Assim, pelo Princípio da indução finita, garantimos que a soma dos *n* primeiros termos é dada por $S_n = \frac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$, com $q \neq 1$. Para o caso de $q = 1$, ou seja, uma progressão geométrica constante, essa soma é dada por $S_n = n \cdot a_1$.

Há ainda o caso das progressões geométricas convergentes, ou seja, aquelas dadas por $\left(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ..., a_n, ...\right)$ em que $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$ para algum *L* real. Quando uma progressão geométrica é convergente, podemos calcular o limite da soma de seus termos por $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$. Contudo, vistos os objetivos que seguem deste trabalho, optamos por não detalharmos mais este assunto.

2.4 – ANÁLISE COMBINATÓRIA

De acordo com Hazzan (1977), *a análise combinatória visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos, agrupamentos formados sob certas condições*.

O parágrafo acima pode induzir a um pensamento de que seja desnecessário o estudo da análise combinatória, uma vez que contar elementos de um conjunto é uma das ideias matemáticas mais antigas. Contudo, na medida em que se estudam conjuntos com muitos elementos, regidos por propriedades complexas, isto torna necessário o uso de técnicas específicas, como os estudados em análise combinatória.

2.4.1 – Princípio Fundamental da Contagem

Antes de demonstramos o princípio fundamental da contagem, cabe tratamos de um teorema auxiliar.

Teorema

Dados os conjuntos $A=\{a_1, a_2, a_3, ..., a_m\}$, com $n(A)=m$ e $B=\{b_1, b_2, b_3, ..., b_n\}$, então podemos formar $m \cdot n$ pares ordenados (a_i, b_j), em que $a_i \in A$ e $b_j \in B$.

Demonstração

Fixando a primeira ordenada do par e variando a segunda ordenada, obtemos *m* linhas com *n* pares ordenados cada:

$$\begin{cases}(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), ..., (a_1, b_n)\\ (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), ..., (a_2, b_n)\\ (a_3, b_1), (a_3, b_2), (a_3, b_3), ..., (a_3, b_n)\\ ...\\ (a_m, b_1), (a_m, b_2), (a_m, b_3), ..., (a_m, b_n)\end{cases}$$

Assim, o número de pares ordenados é dado por $\underbrace{n+n+n+...+n}_{\text{m parcelas}}=m \cdot n$.

Agora, podemos enunciar e demonstrar o princípio fundamental da contagem.

Princípio fundamental da contagem

Sejam *r* conjuntos:

$$\begin{aligned}A&=\{a_1, a_2, a_3, ..., a_{n_1}\} \to n(A)=n_1\\ B&=\{b_1, b_2, b_3, ..., b_{n_2}\} \to n(B)=n_2\\ C&=\{c_1, c_2, c_3, ..., c_{n_3}\} \to n(C)=n_3\\ &\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\ Z&=\{z_1, z_2, z_3, ..., z_{n_r}\} \to n(Z)=n_r\end{aligned}$$

O número de sequências de *r* elementos do tipo $(a_i, b_j, c_k, ..., z_p)$, em que $a_i \in A$, $b_j \in B$, $c_k \in C$, ..., $z_p \in Z$ é dado por $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot ... \cdot n_r$.

Demonstração

Utilizaremos o princípio da indução finita nesta demonstração.

Temos que para $r = 2$ é verificada a validade com base no teorema anterior.

Supomos a validade para $(r-1)$ e demonstraremos ser válida também para r.

Para $(r-1)$ consideremos a sequência de $(r-1)$ elementos $(a_i, b_j, c_k, ..., w_q)$. Pela hipótese de indução, existem $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot ... \cdot n_{r-1}$ sequências e n_r elementos pertencentes a *Z*.

Cada sequência $(a_i, b_j, c_k, ..., w_q, z_p)$ corresponde a uma sequência $(a_i, b_j, c_k, ..., w_q)$ e um elemento $z_p \in Z$.

Portanto, pelo teorema anterior, o número de sequências $(a_i, b_j, c_k, ..., w_q, z_p)$ é:

$$(n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot ... \cdot n_{r-1}) \cdot n_r = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot ... \cdot n_{r-1} \cdot n_r$$

Por exemplo, se uma pessoa tem sete diferentes camisas e quatro diferentes calças, o número de combinações possíveis de essa pessoa vestir uma camisa e uma calça é dado pelo produto $7 \cdot 4 = 28$. O uso do Quadro 3 pode facilitar a compreensão da aplicação do princípio fundamental da contagem nesse problema.

Quadro 3 – Possibilidade de escolha de camisa e calça.

		Camisa						
		1	2	3	4	5	6	7
Calça	1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	(1, 7)
	2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)	(2, 7)
	3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)	(3, 7)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)	(4, 7)

No quadro, cada coluna corresponde a uma das sete distintas camisas, e cada linha, a uma das quatro distintas calças. Se considerarmos cada par ordenado como uma combinação diferente de camisa e calça, o total de combinações corresponde à quantidade total de pares ordenados, que, por sua vez, é dado pelo produto do número de colunas e de linhas.

Há outra importante versão do princípio fundamental da contagem, enunciado conforme segue.

Princípio fundamental da contagem (segunda versão)

Seja um conjunto *A* com *n* elementos, $n \geq 2$. Então, o número de sequências com *r* pares ordenados de elementos distintos de *A* $(1 \leq r \leq n)$ é dado pelo seguinte produto de *r* fatores: $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot [n-(r-1)]$.

Não demonstraremos aqui essa versão do princípio fundamental da contagem, habitualmente realizada pelo Princípio da indução finita de maneira semelhante a demonstração da versão anterior. Contudo, cabe destacar a importância dessa versão no estudo que segue.

O princípio fundamental da contagem consiste em um método simples de se resolver problemas elementares da análise combinatória. Contudo, para resolver alguns problemas mais complexos, sua aplicação pode ser demasiadamente trabalhosa. Assim, cabe estudar outras maneiras de se formar agrupamentos, que facilitam a resolução desses problemas, como o arranjo, a permutação e a combinação. Neste trabalho, optamos por tratar os casos de arranjo, permutação e combinação simples, ou seja, aqueles em que não há repetição de elementos.

Antes de prosseguirmos, faz-se necessário definir o que é um fatorial, recurso utilizado nas fórmulas do arranjo, da permutação e da combinação.

Definição

O fatorial de um número natural *n* (representado por n!) é dada por $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, se $n \geq 2$; $1! = 1$; e $0! = 1$.

2.4.2 – Arranjo Simples

Definição

Seja $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ um conjunto com *n* elementos. Denominamos arranjo simples de *n* elementos tomados *p* a *p*, com $1 \le p \le n$, qualquer sequência de *p* elementos formados com *p* distintos elementos de *A*.

Fórmula do arranjo simples

Seja $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ e $A_{n,p}$ o número arranjos de *n* elementos tomados *p* a *p*. Assim, temos que $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Demonstração

Arranjar *n* elementos, tomados *p* a *p*, corresponde a distribuir *n* objetos em *p* lugares. Assim, pelo princípio fundamental da contagem (segunda versão), temos que:

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot [n-(p-1)]$$

Multiplicando o resultado obtido por $\frac{(n-p)!}{(n-p)!}$, temos:

$$A_{n,p} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot ... \cdot [n-(p-1)] \cdot \frac{(n-p)!}{(n-p)!}$$

$$A_{n,p} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot ... \cdot [n-(p-1)] \cdot (n-p)!}{(n-p)!}$$

Observando que $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot ... \cdot [n-(p-1)] \cdot (n-p)! = n!$, segue que:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Para exemplificar, considere a situação em que se deseja formar uma senha de cinco algarismos, todos distintos. Cada senha que pode ser formada corresponde a uma sequência de cinco elementos. Assim, a quantidade de senhas distintas possíveis de serem formadas corresponde ao total de arranjos de 10 elementos (os dez algarismos disponíveis), tomados cinco a cinco (os cinco algarismos da senha), ou seja:

$$A_{10,5} = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10!}{5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 30\,240 .$$

Portanto, é possível formar $30\,240$ senhas.

2.4.3 – Permutação Simples

Definição

Seja $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ um conjunto com *n* elementos. Denominamos permutação simples dos *n* elementos todo arranjo em que $n = p$.

Fórmula da permutação simples

Seja $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ e P_n o número permutações dos *n* elementos de *A*. Assim, temos que $P_n = n!$.

Demonstração

Como $P_n = A_{n,n}$, segue que:

$$P_n = A_{n,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Para exemplificar, considere a situação em que seis pessoas desejam formar uma fila. Cada ordem possível dessa fila é uma permutação de seis elementos (quantidade de pessoas). Assim, a quantidade de filas possíveis é dada por:

$$P_6 = 6! = 720.$$

Portanto, é possível formar 720 filas distintas pela ordem.

2.4.4 – Combinação Simples

Definição

Seja $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ um conjunto com *n* elementos. Denominamos combinação simples de *n* elementos tomados *p* a *p*, com $1 \le p \le n$, qualquer subconjunto de *p* elementos formados com *p* elementos de *A*.

Antes de tratarmos da fórmula para o cálculo do número de combinações simples, cabe destacar que os elementos de uma combinação, que corresponde a um subconjunto, diferem-se apenas pela sua natureza, e não pela ordem de sua disposição. Isso permite perceber uma diferenciação entre combinação simples e arranjo simples, que corresponde a uma sequência, onde a ordem dos termos importa.

Fórmula da combinação simples

Seja $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$ e $C_{n,p}$ o número combinações de *n* elementos tomados *p* a *p*. Assim, temos que $C_{n,p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Demonstração

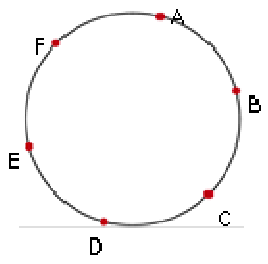
Temos que a combinação simples de *n* elementos tomados *p* a *p* diferem-se do arranjo simples de *n* elementos tomados *p* a *p* pela permutação dos *p* elementos. Assim, temos que:

$$\frac{A_{n,p}}{p!} = C_{n,p} \Rightarrow C_{n,p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} \Rightarrow C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Como exemplo, considere uma circunferência com seis pontos indicados: *A*, *B*, *C*, *D*, *E* e *F*, conforme a

1. Quantos são os segmentos de reta que podem ser formados com extremidades em dois desses pontos?

Figura 1 – Circunferência com seis pontos destacados.



É possível perceber que se trata de um caso de combinação simples de seis elementos (pontos na circunferência) tomados dois a dois (extremidades do segmento de reta), uma vez que os pontos são distintos e $\overline{AB}$ e $\overline{BA}$ correspondem ao mesmo segmento de reta. Assim, a quantidade de segmentos que podem ser formados é dada por:

$$C_{6,2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2!4!} = \frac{30}{2} = 15$$

Portanto, é possível formar 15 segmentos de retas.

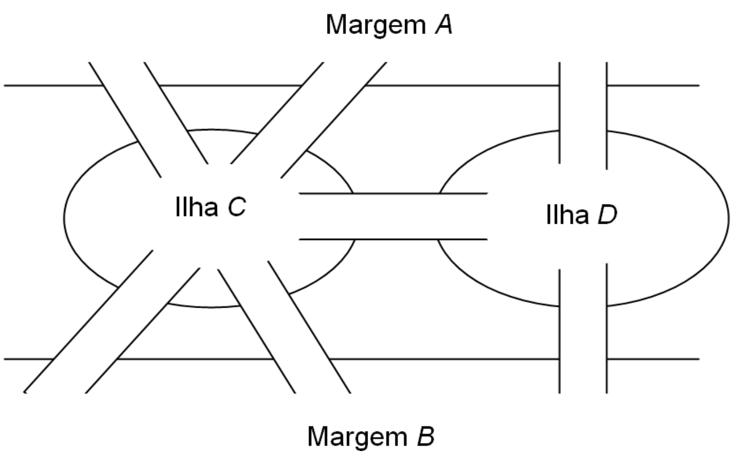
2.5 – Grafos

A Teoria de grafos é um dos conceitos da Matemática Discreta cujas aplicações estão diretamente ligadas a Ciências da Computação. De maneira geral, a Teoria de grafos não se faz presente nos currículos de Matemática da Educação Básica. Contudo, no estudo dos grafos há ideias que podem ser tratadas em cursos do Ensino Médio. Como a Teoria de grafos apresenta um amplo conjunto de elementos a serem estudados, neste trabalho apresentaremos alguns conceitos iniciais dessa teoria, como definições e a representação gráfica de um grafo.

Para adentrar a teoria, cabe enunciar aquele que, de acordo com Lima (1989), possivelmente seja o primeiro problema prático abordado por meio de grafos: as pontes de Königsberg.

Na cidade de Königsberg, que ficava na antiga Prússia (atualmente é a cidade de Kaliningrado, na Alemanha), tinha-se um rio com duas ilhas e algumas pontes ligando as margens do rio às ilhas e uma ilha à outra. A Figura 2 representa essa situação, sendo *A* e *B* as margens do rio, e *C* e *D* as ilhas.

Figura 2 – Representação não modelada do problema das sete pontes Königsberg.

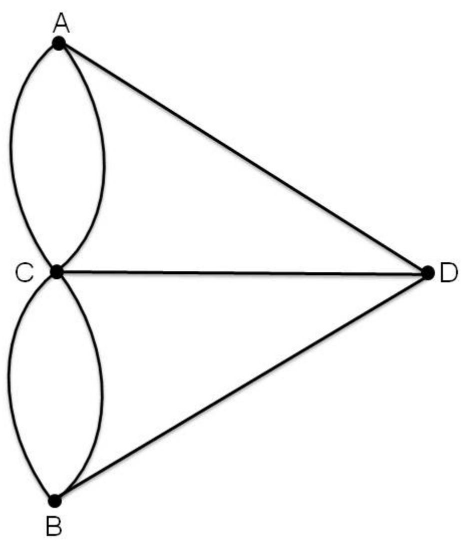


As sete pontes tinham as seguintes funções: duas ligavam a margem *A* à ilha *C*, duas ligavam a margem *B* à ilha *C*, uma ligava a margem *A* à ilha *D*, uma ligava a margem *B* à ilha *D*, e uma ligava as duas ilhas.

O problema consistia em, partindo de alguma das margens ou das ilhas, obter um trajeto em que uma pessoa percorra todas as pontes, sem que passe por alguma delas por mais de uma vez.

Em 1735, o matemático suíço Leonhard Euler (1707–1783), representou esse problema por um esquema, que hoje denominamos grafo. Nele, Euler representou cada ilha e cada margem por um ponto, denominados de vértices. Cada ponte ele representou por uma linha, denominada aresta, conforme a Figura 3.

Figura 3 – Representação modelada do problema das sete pontes Königsberg.



Nessa representação, o problema pode ser traduzido da seguinte maneira: obter um percurso que, partindo de um dos vértices, percorra todo o grafo passando uma única vez por cada aresta.

Euler classificou cada vértice de acordo com a quantidade de arestas que incidem nele, chamando essa classificação de ordem do vértice. No grafo da Figura 3, os vértices *A*, *B* e *D* têm ordem 3 e o vértice *C*, ordem 5.

Antes de concluirmos esse problema, cabe definir formalmente o que é um grafo. A definição a seguir é baseada em Jurkiewicz (2013).

Definição

Considere um conjunto finito não vazio $V(G)$ e uma família $A(G)$ de pares não ordenados de elementos de $V(G)$. Denominamos por vértice cada elemento de $V(G)$ e por aresta, cada elemento de $A(G)$. Um grafo (finito) *G* é composto pelos pares ordenados $(V(G), A(G))$.

Quando os pares ordenados de $A(G)$ são distintos e, cada par ordenado tem elementos também distintos, dizemos que o grafo é simples.

Uma importante relação entre o número de vértice e aresta de um grafo é dada pelo teorema a seguir.

Teorema

Dado um grafo simples *G*, a soma dos graus dos vértices desse grafo é igual ao dobro do número de arestas.

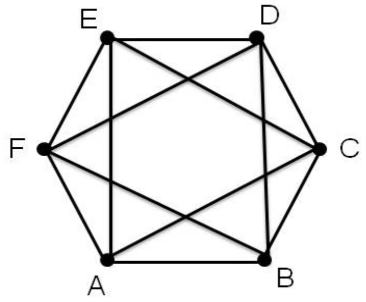
Demonstração

Para quantificarmos o grau de um vértice, determinamos o número de aresta que nele incidem. Por outro lado, cada aresta tem dois vértices distintos como extremidade. Sendo assim, uma mesma aresta é quantificada duas vezes na obtenção dos graus dos vértices. Portanto, a soma dos graus dos vértices é o dobro do número de arestas.

Ilustrando o Teorema acima, note que no grafo representado na Figura 4 há seis vértices (*A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*), todos de grau 4, e doze arestas

$\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AE}, \overline{AF}, \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{BF}, \overline{CE}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{DF}, \overline{EF}\right)$. Assim, a soma dos graus dos vértices é 24, valor também correspondente ao dobro do número de arestas.

Figura 4 – Grafo ilustrativo do teorema.

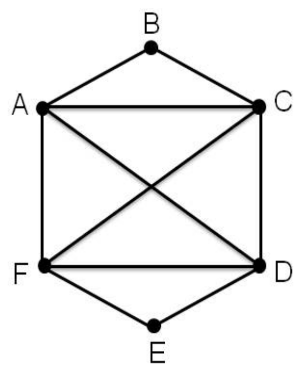


Outros termos importantes no estudo de grafos são:

- *passeio*, que é uma sequência de arestas;
- *trilha*, que é um passeio em que todas as arestas são distintas;
- *trilha fechada*, que é uma trilha em que um dos vértices da primeira aresta também o é da última aresta;
- *caminho*, que é uma trilha em que todos os vértices são distintos;
- *ciclo*, que é um caminho que também é uma trilha fechada.

Quando um caminho não percorre a mesma aresta mais de uma vez, dizemos que ele é unicursal. Se um grafo *G* possui um caminho unicursal, ele é dito grafo unicursal. Na Figura 5, o grafo é unicursal, sendo A-B-C-D-E-F-A-D-F-C-A um caminho unicursal.

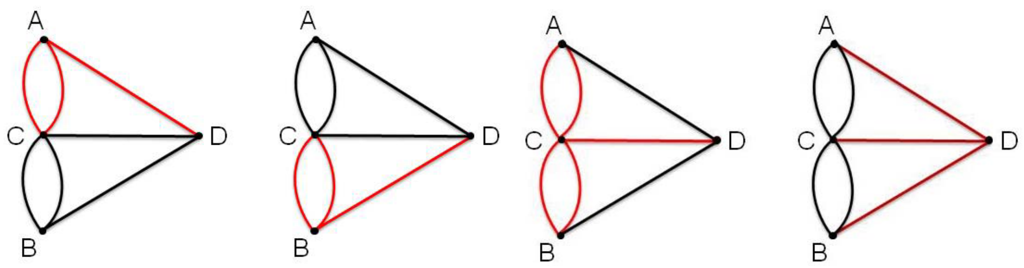
Figura 5 –Grafo unicursal.



Ao analisarmos um caminho unicursal, podemos perceber que, com exceção dos vértices de início e de fim, aos demais vértices incidirão uma quantidade par de aresta, uma vez nesse caminho a aresta de chegada a um vértice deve ser diferente da aresta de saída. Se os vértices de início e de final forem coincidentes, então todos os vértices terão ordem par. Caso sejam distintos, estes vértices terão ordem ímpar e os demais, ordem par.

Em relação à abordagem dada por Euler ao problema das sete pontes de Königsberg, temos, colocadas as definições, que verificar se o grafo é unicursal e, em caso positivo, obter o caminho unicursal. Na Figura 6, estão destacados em vermelho as arestas de cada vértice.

Figura 6 – Arestas destacadas de um grafo.



3 arestas de *A*. 3 arestas de *B*. 5 arestas de *C*. 3 arestas de *D*

Essa análise permite concluir que o problema das sete pontes de Königsberg não possui solução, uma vez que a ordem de cada vértice é ímpar, de maneira que o grafo não pode ser unicursal.

No capítulo 2, estudaremos um problema passível de ser abordado no Ensino Médio cuja resolução é bem conduzida por meio de grafos.

2.6 – PROBABILIDADE

De modo geral, o ensino de probabilidade na Educação Básica vem medido por contextualizações em que os conceitos são tratados por meio de problemas. A utilização desse campo matemático como instrumento de análise investigativa constitui-se uma abordagem adequada à busca pela compreensão de fenômenos definidos ao acaso.

Antes de definirmos probabilidade, é necessário estudarmos alguns conceitos relacionados: experimento aleatório, espaço amostral e evento.

Quando lançamos uma moeda honesta, não é possível prever se o resultado da face voltada para cima será cara ou coroa. Casos como esse, em que não é possível prever o resultado de um evento, são chamados experimentos aleatórios. Mesmo repetindo várias vezes o lançamento dessa moeda, sob as mesmas condições, não poderemos prever o resultado do próximo lançamento.

Ainda sobre o lançamento da moeda honesta, é possível que seja obtida cara ou coroa. A esse conjunto de possíveis resultados damos nome de espaço amostral, geralmente representado por Ω. No caso do lançamento da moeda, $\Omega = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$. Quando todos os elementos de um espaço amostral têm a mesma chance de serem sorteados, dizemos que Ω é um espaço amostral equiprovável.

Chamamos de evento ou acontecimento todos os subconjuntos do espaço amostral de um experimento aleatório. Cada um dos elementos do espaço amostral é denominado evento elementar.

A partir desses conceitos, podemos definir probabilidade.

Definição

Considerando um evento *A* de um espaço amostral Ω finito e equiprovável, a razão entre a quantidade de elementos de *A* $[n(A)]$ e a quantidade de elementos de Ω $[n(\Omega)]$ é a probabilidade $P(A)$ de o evento *A* ocorrer, ou seja, $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$.

De outra maneira, podemos dizer que a probabilidade corresponde à razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis. É importante notar que, para um evento *A* qualquer, temos $0 \leq P(A) \leq 1$, pois:

$$\varnothing \subset A \subset \Omega \Rightarrow n(\varnothing) \leq n(A) \leq n(\Omega) \Rightarrow \frac{n(\varnothing)}{n(\Omega)} \leq \frac{n(A)}{n(\Omega)} \leq \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)} \Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$$

Para exemplificar, considere o lançamento de um dado comum honesto. Nesse caso, temos que não é possível prever com certeza o resultado desse lançamento, sendo que a chance de se obter cada face é a mesma, ou seja, esse lançamento consiste em um experimento aleatório, e $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ é um espaço amostral equiprovável. Considere agora o evento *A* da obtenção de um número múltiplo de 3 nesse lançamento. Assim, temos $A = \{3, 6\}$.

Portanto, a probabilidade de se obter um número múltiplo de 3 no lançamento do dado é: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Em alguns problemas, para otimizar os cálculos, é mais interessante o cálculo de a probabilidade de um evento *A* não ocorrer, ou seja, obter a probabilidade do complementar de A, indicado por $\overline{A}$. É importante observar que:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

2.6.1 – Probabilidade Condicional

Considere uma urna com dez bolas numeradas de 1 a 10, que se diferem apenas pela numeração. Com essa urna, deseja-se sortear uma dessas bolas. Assim, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Considere também os eventos $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$.

Conforme visto no tópico anterior, a probabilidade de ocorrência de B é dada por:

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{3}{10}$$

Agora, considere a situação em que, antes de conhecer o número sorteado, já se sabe que o evento *A* ocorreu. Essa última informação modifica a maneira com que se analisa a probabilidade da ocorrência de *B*, uma vez que se sabe que o número sorteado é ímpar. Portanto, *B* terá ocorrido apenas no caso de o número 3 ter sido o sorteado, tendo *A* como espaço amostral. Calculando essa probabilidade, tem-se:

$$\frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{1}{5}$$

Esse tipo de probabilidade é denominado probabilidade condicional.

Definição

Sejam *A* e *B* eventos não vazios de um espaço amostral Ω. Denominamos de probabilidade condicional de *B* em relação a *A*, e indicamos por $P(B|A)$, a probabilidade de ocorrer o evento *B*, já tendo ocorrido o evento *A*.

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

Pode-se escrever $P(B|A)$ em função de $P(A \cap B)$ e de $P(A)$, dividindo o numerador e o denominador da expressão por $n(\Omega)$.

$$P(B|A) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(A)}{n(\Omega)}} \Rightarrow P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

3 PROBLEMAS NÃO USUAIS E MATEMÁTICA DISCRETA

Problemas curiosos podem ser um excelente ponto de partida para promover a motivação dos alunos nas atividades matemáticas. Contudo, é importante observar que o desafio inerente ao problema deve estar relacionado à dificuldade de se estabelecer uma estratégia de resolução, ou seja, definir um plano, identificar os conceitos matemáticos necessários etc. O desafio não deve ser identificado em dificuldades operatórias, como cálculos extensos.

Sobre resolver problemas, Polya (1995, p. V) afirma que:

> Um professor de Matemática tem, assim, uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe os desenvolvimentos intelectuais dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios para alcançar este objetivo.

A seguir, são propostos problemas cuja resolução apoia-se em conceitos da Matemática Discreta. Esses problemas constituem-se uma alternativa àqueles predominantes nos livros didáticos de Matemática, uma vez que buscam aguçar a curiosidade do leitor a compreender os conceitos matemáticos que os sustentam, possibilitando-se assim o trabalho com diferentes objetivos: desde a introdução de novos conceitos até o aprofundamento no estudo destes.

3.1 – Problema 1: Matemática na Lenda do Xadrez

O xadrez é um dos jogos de tabuleiro mais conhecidos e praticados mundialmente. São cada vez mais comuns exemplos de escolas que desenvolvem projetos relacionados à prática do xadrez a fim de potencializar competências matemáticas em seus alunos.

Figura 7 – Tabuleiro de xadrez.

São inúmeras as lendas que tratam a história da criação do xadrez. A versão apresentada no Quadro 4, é um resumo baseado no livro *O homem que calculava* (1938), de Julio César de Mello e Souza, mais conhecido pelo heterônimo Malba Tahan. O texto na integra, conforme aparece em *O homem que calculava*, consta do anexo A.

]

Quadro 4 – Resumo da lenda do xadrez.

Um poderoso rei, da província indiana Taligana, havia perdido seu único filho em uma batalha. Desde então, o rei sofria de forte tristeza, não zelando como se deve por seu reino e negócios. Certo dia, um jovem brâmane chamado Lahur Sessa apresentou ao rajá um jogo de tabuleiro com 64 casas, metade brancas e a outra metade, pretas. Esse jogo, que posteriormente deu origem ao xadrez como o conhecemos atualmente, possuía peças que representavam a cavalaria, a infantaria, carros de combate, o vizir mais importante e o próprio rei.

Ao inteirar-se das regras e dar início à pratica do jogo, o rei teria ficado tão satisfeito que curou-se da tristeza e voltou a governar com vontade e disposição. De acordo com essa lenda, dada tamanha satisfação, o rei ofereceu ao brâmane o que ele desejasse como recompensa. Após resistir, com alguma insistência do rajá, Sessa então pediu que lhe fossem dados grãos de trigo. A quantidade de grãos seria definida da seguinte maneira: na 1ª casa do tabuleiro deveria ser colocado um único grão, na 2ª casa dois grãos, na 3ª casa quatro grãos, na 4ª casa oito grãos e assim sucessivamente, dobrando a quantidade de grãos para a casa seguinte.

Após julgar humilde a pedida do brâmane, o rei ordenou aos seus súditos que lhe fossem imediatamente entregues os grãos de trigo, assim como havia solicitado.

Antes de finalizar essa lenda, vale determinar a quantidade de grãos de trigos prometidos pelo rei Iadava à Lahur Sessa.

Uma abordagem inicial, a fim de compreender melhor a situação, pode ser realizada por meio da construção de um quadro, indicando a casa e a quantidade correspondente de grãos de trigo a serem depositados nela, conforme mostra o Quadro 5.

Quadro 5 – Quantidade de grãos de trigo em algumas casas do tabuleiro de xadrez.

Casa	*Quantidade de grãos*
1ª	1
2ª	$2 \cdot 1 = 2$
3ª	$2 \cdot 2 = 4$
4ª	$2 \cdot 4 = 8$
5ª	$2 \cdot 8 = 16$
6ª	$2 \cdot 16 = 32$
7ª	$2 \cdot 32 = 64$
...	...

É razoável conjecturar que a sequência das quantidades de grãos a serem colocadas no tabuleiro corresponde a uma progressão geométrica, conforme mostra o Quadro 6.

Quadro 6 – Progressão geométrica da quantidade de grãos de trigo nas casas do tabuleiro de xadrez.

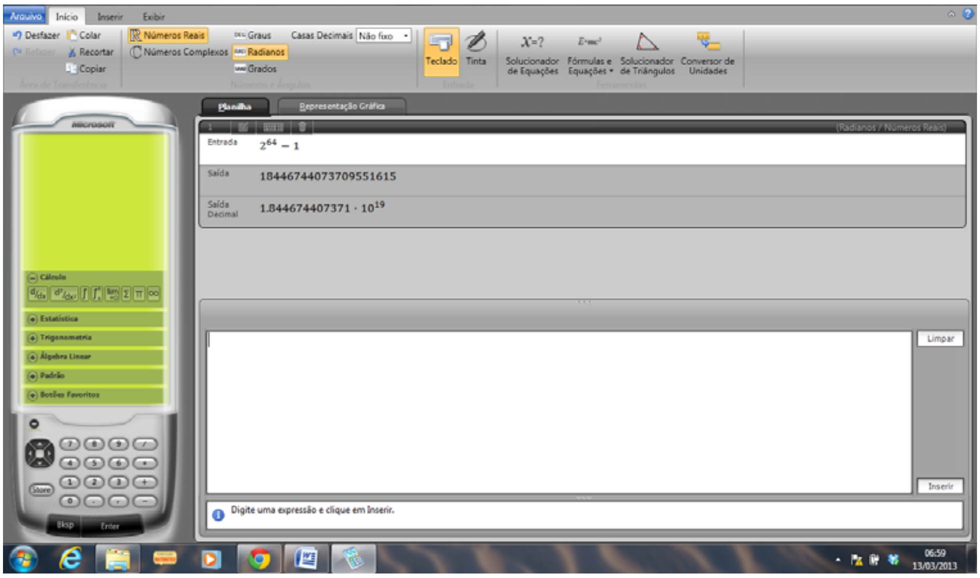
Casa	*Quantidade de grãos*
1ª	$1 = 2^0$
2ª	$2 = 2 \cdot 2^0 = 2^1$
3ª	$4 = 2 \cdot 2^1 = 2^2$
4ª	$8 = 2 \cdot 2^2 = 2^3$
5ª	$16 = 2 \cdot 2^3 = 2^4$
6ª	$32 = 2 \cdot 2^4 = 2^5$
7ª	$64 = 2 \cdot 2^5 = 2^6$
...	...
64ª	$2 \cdot 2^{62} = 2^{63}$

Para calcularmos a quantidade total de grãos, temos de obter a soma dos 64 termos da progressão geométrica em que o primeiro termo é $a_1 = 1$ e a razão é $q = 2$, ou seja, a soma dos termos da sequência $(1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, ..., 2^{63})$.

Usando a fórmula da soma dos *n* primeiros termos da progressão geométrica, temos: $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} \Rightarrow S_{64} = \dfrac{1(1-2^{64})}{1-2} = 2^{64} - 1$

O cálculo de $2^{64} - 1$ não é possível de ser realizado em calculadoras mais usuais, mesmo as científicas. Para calculá-lo, pode-se fazer uso de um programa de computador apropriado, como o *Microsoft Mathematics*, por exemplo. A Figura 8 é uma janela desse programa indicando o valor do cálculo realizado.

Figura 8 – Cálculo de $2^{64}-1$ no *Microsoft Mathematics*.



Portanto, a soma corresponde a 18 446 744 073 709 551 615 grãos de trigo.

De volta à lenda, após os assistentes do rei fazerem os cálculos e obterem o montante acima, concluíram que eram necessárias as safras de trigo de séculos de toda a Índia para que a dívida pudesse ser paga ao brâmane. Diante de tal fato, coube ao rei valorizar a inteligência do brâmane oferecendo a ele o cargo de vizir mais importante da província. Sessa, após aceitar o convite, deu como perdoada a dívida do rajá.

3.1.1 – Para a Sala de Aula

Uma sugestão de trabalho com esse problema é usá-lo para tratar de progressão geométrica. Para realizar essa proposta, primeiramente pode ser apresentada aos estudantes a versão da lenda sobre a origem do xadrez, omitindo inicialmente as questões matemáticas relacionadas à quantidade de grãos de trigo. Posteriormente, pode ser trabalhada a sequência definida pela quantidade de grãos em cada casa, a fim de introduzir a ideia de progressão geométrica e formalizá-la por definição. Algumas questões podem ser levantadas a fim de que os estudantes percebam como essa sequência cresce rapidamente, por exemplo: quantos grãos de trigo devem ser colocados na 4ª casa? E na 10ª casa? E na 15ª casa?

Para responder a essas questões, pode ser trabalhada a obtenção do termo geral de uma progressão geométrica dada pela fórmula $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

- Quantidade de grãos na 4ª casa: $a_4 = 1 \cdot 2^{4-1} = 8$
- Quantidade de grãos na 10ª casa: $a_{10} = 1 \cdot 2^{10-1} = 512$
- Quantidade de grãos na 15ª casa: $a_{15} = 1 \cdot 2^{15-1} = 16384$

Por fim, ao tratar do montante de grãos de trigo, pode-se iniciar o trabalho com a soma dos *n* primeiros termos de uma progressão geométrica. É importante que os alunos, inicialmente, estimem a quantidade total de grãos de trigo.

Este problema é também uma boa oportunidade de programas de computador nas aulas de Matemática. Neste caso, o cálculo pode ser realizado com o uso do programa gratuito *Microsoft Mathematics*.

Um complemento para o problema consiste em analisar a grandeza da quantidade de grãos de trigo, que corresponde a cerca de $1{,}84 \cdot 10^{19}$ unidades. Considerando, por exemplo, que cada grão de trigo tenha cerca de 0,045 gramas (massa obtida a partir de amostragem), ou seja, $4{,}5 \cdot 10^{-8}$ toneladas, temos que a quantidade de grãos de trigo correspondem a aproximadamente 828 bilhões de toneladas, pois:

$$\left(1{,}84 \cdot 10^{19}\right) \cdot \left(4{,}5 \cdot 10^{-8}\right) = 8{,}28 \cdot 10^{11}$$

De acordo com a Organização das Nações Unidas para a Alimentação e a Agricultura (FAO), disponível em <http://www.fao.org.br>, foram produzidos mundialmente em 2012 cerca de 660 milhões de toneladas de trigo $\left(6{,}6 \cdot 10^{8} \text{ toneladas}\right)$. Portanto, a quantidade de grãos de trigo que Sessa deveria receber do rei corresponde a cerca de 1 255 vezes a produção mundial de trigo do ano de 2012, uma vez que:

$$\frac{8{,}28 \cdot 10^{11}}{6{,}6 \cdot 10^{8}} \approx 1{,}255 \cdot 10^{3}$$

3.2 – Problema 2: Posso Adivinhar sua Idade?

Os problemas de adivinhação estão entre os mais interessantes do ponto de vista de curiosidade do estudante. Pensar em um número, executar alguns cálculos mentalmente e ter o número pensado descoberto pelo interlocutor soa como mágica. Contudo, mais interessante se torna o problema quando os fundamentos matemáticos que estão por traz da “mágica” são analisados criteriosamente, desvendando os detalhes envolvidos.

Muitos desses problemas são fundamentados na Matemática Discreta e possibilitam que estudantes da Educação Básica tenham acesso a diversos saberes desse campo matemático.

A proposta a seguir é de um problema de adivinhação que envolve cartas com tabelas de números naturais. Esse problema pode ser encontrado em diversos sites da internet, com diferentes variações. Contudo, muito raramente são dadas as devidas e corretas explicações sobre seu fundamento.

Na análise estrutural desse problema de adivinhação, podem ser tratados conceitos de decomposição de números naturais, potenciação, escrita de números na base 2 e Princípio da indução finita.

Problema

Veja em quais das cartas apresentadas na Figura 9 aparece o número correspondente a sua idade (considerando uma pessoa com idade inferior a 32 anos). Diga quais são essas cartas e eu direi a você qual é a sua idade.

Figura 9 – Cartas com os números de 1 a 31.

A		*B*		*C*		*D*		*E*	
1	17	2	28	4	20	8	24	16	24
3	19	3	29	5	21	9	25	17	25
5	21	6	2	6	2	10	26	18	26
7	23	7	23	7	23	11	27	19	27
9	25	10	26	12	28	12	28	20	28
11	27	11	27	13	29	13	29	21	29
13	29	14	30	14	30	14	30	22	30
15	31	15	31	15	31	15	31	23	31

Inicialmente, é importante observar que nas cartas aparecem os números naturais de 1 a 31. Além disso, um mesmo número pode aparecer em mais de uma carta.

Na brincadeira, por exemplo, se as cartas em que aparece o número com a idade da pessoa forem *A*, *C* e *E*, então a idade é 21 anos.

Essa resposta foi obtida a partir da soma do primeiro (e menor) número contido em cada uma das cartas indicadas pela pessoa. Nesse caso, por exemplo, na carta *A* corresponde o número 1, na carta *C*, o número 4 e, na carta *E* o número 16.

$$\underbrace{1}_{\text{carta A}} + \underbrace{4}_{\text{carta C}} + \underbrace{16}_{\text{carta E}} = \underbrace{21}_{\text{idade da pessoa}}$$

Observe na Figura 10, que o número 21 aparece apenas nas cartas *A*, *C* e *E*.

Figura 10 – Cartas com os números de 1 a 31, com o número 21 destacado.

A		*B*		*C*		*D*		*E*	
1	17	2	28	4	20	8	24	16	24
3	19	3	29	5	21	9	25	17	25
5	21	6	22	6	22	10	26	18	26
7	23	7	23	7	23	11	27	19	27
9	25	10	26	12	28	12	28	20	28
11	27	11	27	13	29	13	29	21	29
13	29	14	30	14	30	14	30	22	30
15	31	15	31	15	31	15	31	23	31

Para compreender a organização dos números nas cartas e o motivo pelo qual soma-se o primeiro número de cada carta indicada, obtendo o correspondente à idade da pessoa, tem-se que analisar a seguinte afirmação:

Todo número natural pode ser decomposto, de maneira única, na forma $a_0 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2^1 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 + ... + a_n \cdot 2^n$, sendo $a_i = 0$ ou $a_i = 1$.

Por exemplo, o número 21 pode ser escrito da seguinte maneira:

$$21 = 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 = 1 + 0 + 4 + 0 + 16$$

De fato, vejamos a demonstração da afirmação anterior, com base em uma generalizada para qualquer base, feita por Domingues (1991, p. 34).

Propriedade

Seja *n* um número natural. Então, *n* pode ser escrito, de maneira única, na forma: $n = a_0 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2^1 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 + ... + a_m \cdot 2^m$, com $a_i \in \{0, 1\}$.

Demonstração

I) Inicialmente iremos demonstrar a existência da escrita apresentada por meio do Princípio da indução finita (segundo princípio) sobre *n*.

Para $n = 1$, basta tomar $a_0 = 1$ e $a_i = 0$ para $i > 0$:

$1 = 1 \cdot 2^0$

Para $n \geq 2$, vamos, por hipótese, admitir possível a escrita para todo número natural *b*, com $1 \leq b < n$, e mostrar a validade também para *n*.

Assim, temos $b = a'_0 \cdot 2^0 + a'_1 \cdot 2^1 + a'_2 \cdot 2^2 + a'_3 \cdot 2^3 + ... + a'_m \cdot 2^m$, com $a'_i \in \{0, 1\}$.

Utilizando a divisão de *n* por 2, podemos escrever n da seguinte maneira: $n = 2 \cdot b + r$, com $r \in \{0, 1\}$.

Assim, segue que:

$n = 2 \cdot \left(a'_0 \cdot 2^0 + a'_1 \cdot 2^1 + a'_2 \cdot 2^2 + a'_3 \cdot 2^3 + ... + a'_m \cdot 2^m\right) + r \Rightarrow$

$\Rightarrow n = a'_0 \cdot 2^1 + a'_1 \cdot 2^2 + a'_2 \cdot 2^3 + a'_3 \cdot 2^4 + ... + a'_m \cdot 2^{m+1} + r$

Como $r \in \{0, 1\}$, temos:

$r = 0 \Rightarrow n = a'_0 \cdot 2^1 + a'_1 \cdot 2^2 + a'_2 \cdot 2^3 + a'_3 \cdot 2^4 + ... + a'_m \cdot 2^{m+1}$

$r = 1 \Rightarrow n = 1 \cdot 2^0 + a'_0 \cdot 2^1 + a'_1 \cdot 2^2 + a'_2 \cdot 2^3 + a'_3 \cdot 2^4 + ... + a'_m \cdot 2^{m+1}$

Portanto, $n = a_0 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2^1 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 + ... + a_m \cdot 2^m$, com $a_i \in \{0, 1\}$, para todo número natural *n*.

II) Para demonstrar a unicidade, temos que é trivial o caso $n = 1$, uma vez que a única representação é $n = 1 = 1 \cdot 2^0$.

No caso de $n \geq 2$, suponhamos que a unicidade é válida para todo número natural *b*, com $1 \leq b < n$.

Agora, suponhamos duas escritas para *n*, com $a_i \in \{0, 1\}$ e $a'_i \in \{0, 1\}$:

$n = a_0 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2^1 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 + ... + a_m \cdot 2^m$

$n = a'_0 \cdot 2^0 + a'_1 \cdot 2^1 + a'_2 \cdot 2^2 + a'_3 \cdot 2^3 + ... + a'_m \cdot 2^m$

Segue que:

$n = 2\left(a_1 + a_2 \cdot 2^1 + a_3 \cdot 2^2 + ... + a_m \cdot 2^{m-1}\right) + a_0 \cdot 2^0$

$n = 2\left(a'_1 \cdot 2^0 + a'_2 \cdot 2^1 + a'_3 \cdot 2^2 + ... + a'_m \cdot 2^{m-1}\right) + a'_0 \cdot 2^0$

Como $2 > a_0 \cdot 2^0$ e $2 > a'_0 \cdot 2^0$, o algoritmo de Euclides garante que

$a_0 = a'_0$ (I) e $a_1 + a_2 \cdot 2^1 + a_3 \cdot 2^2 + ... + a_m \cdot 2^{m-1} = a'_1 \cdot 2^0 + a'_2 \cdot 2^1 + a'_3 \cdot 2^2 + ... + a'_m \cdot 2^{m-1} = b$ (II).

Da hipótese de indução em (II), visto que $b < n$, temos que $b < n$, $a_1 = a'_1$, $a_2 = a'_2$, $a_3 = a'_3$, ..., $a_m = a'_m$.

Portanto, a representação é única para qualquer número natural *n*.

Se a idade de uma pessoa é menor que 32 anos, essa idade corresponde a um número natural entre 1 e 31. Assim, de acordo com a demonstração apresentada, esse número natural pode ser escrito na forma $a_0 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2^1 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 + a_4 \cdot 2^4$, visto que $2^5 = 32 > 31$.

Em cada carta, o primeiro número corresponde a $2^0 = 1$ (carta *A*), $2^1 = 2$ (carta *B*), $2^2 = 4$ (carta *C*), $2^3 = 8$ (carta *D*) ou $2^4 = 16$ (carta *E*).

Os números que constam da carta *A* são aqueles em que $a_0 = 1$, os da carta *B*, em que $a_1 = 1$ e assim sucessivamente. O número 21, por exemplo, consta das cartas *A*, *C* e *E*, pois $a_0 = a_2 = a_4 = 1$, mas não consta das cartas *B* e *D*, pois $a_1 = a_3 = 0$.

Como a escrita de um número natural na forma $a_0 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2^1 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 + ... + a_n \cdot 2^n$ é única, está garantido que a combinação de cartas de que um número consta também é única. Assim, com a informação das cartas em que certo número está, basta adicionar o menor número de cada carta para obtê-lo.

3.2.1 – Como Construir as Cartas

Podemos expandir a quantidade de números e de cartas nessa brincadeira de adivinhação, uma vez que, conforme a demonstração apresentada, qualquer número natural pode ser decomposto de maneira única na forma $a_0 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2^1 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 + ... + a_n \cdot 2^n$.

Note que a carta seguinte, que denominaremos *F*, terá como primeiro (e menor) elemento o número 32, pois nesse caso $a_5 = 1$ e $a_5 \cdot 2^5 = 1 \cdot 32 = 32$.

Por consequência, o maior número que poderemos distribuir entre essas seis cartas é 63, obtido no caso em que $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 1$:

$1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 = 63$

Podemos decompor números na forma $a_0 \cdot 2^0 + a_1 \cdot 2^1 + a_2 \cdot 2^2 + a_3 \cdot 2^3 + ... + a_n \cdot 2^n$ por meio do mesmo processo de transposição de um número da base decimal para a binária. Nesse processo, dividimos inicialmente o número por 2 (divisão d_0), obtendo um quociente q_0 inteiro e um resto r_0, igual a 0 ou 1. Se $r_0 = 0$, teremos que na decomposição $a_0 = 0$; caso $r_0 = 1$, teremos $a_0 = 1$. Na divisão seguinte (d_1), dividimos q_0 por 2 e obtemos o quociente inteiro q_1 e o resto r_1. De maneira semelhante, se $r_1 = 0$, teremos $a_1 = 0$; caso $r_1 = 1$, teremos $a_1 = 1$. Esse processo deve seguir até que se obtenha um quociente $q_n = 0$.

Para exemplificar o processo descrito acima, podemos decompor o número 53, uma vez que, na adição da carta *F* à adivinha, temos de decompor os números de 32 a 63.

Para a decomposição do número 53, fazemos:

- d_0:

$$53 : 2 = 2 \cdot \underbrace{26}_{q_0} + \underbrace{1}_{r_0}$$

Assim, teremos na decomposição $a_0 = 1$, pois $r_0 = 1$.

- d_1

$$26 : 2 = 2 \cdot \underbrace{13}_{q_1} + \underbrace{0}_{r_1}$$

Assim, teremos na decomposição $a_1 = 0$, pois $r_1 = 0$.

- d_2

$$13 : 2 = 2 \cdot \underbrace{6}_{q_2} + \underbrace{1}_{r_2}$$

Assim, teremos na decomposição $a_2 = 1$, pois $r_2 = 1$.

- d_3

$$6:2=2\cdot\underbrace{3}_{q_3}+\underbrace{0}_{r_3}$$

Assim, teremos na decomposição $a_3=1$, pois $r_3=0$.

- d_4

$$3:2=2\cdot\underbrace{1}_{q_4}+\underbrace{1}_{r_4}$$

Assim, teremos na decomposição $a_4=1$, pois $r_4=1$.

- d_5

$$1:2=2\cdot\underbrace{0}_{q_5}+\underbrace{1}_{r_5}$$

Portanto, podemos decompor o número 53 da seguinte maneira:

$$1\cdot 2^0+0\cdot 2^1+1\cdot 2^2+0\cdot 2^3+1\cdot 2^4+1\cdot 2^5=1+0+4+0+16+32=53$$

Assim, o número 53 deverá constar das cartas *A*, *C*, *E* e *F*, pois $a_0=a_2=a_4=a_5=1$, mas não deverá constar das cartas *B* e *D*, pois $a_1=a_3=0$.

É importante destacar que a composição dos algarismos na escrita binária é dada por $a_5a_4a_3a_2a_1a_0$, ou seja, 110101.

Decompondo da maneira apresentada todos os números naturais de 32 a 63, obtemos as cartas indicadas na Figura 11.

Figura 11 – Cartas com os números de 1 a 63.

1	17	35	51
3	19	37	53
5	21	39	55
7	23	41	57
9	25	43	59
11	27	45	61
13	29	47	63
15	31	49	33

B			
2	28	34	50
3	29	35	51
6	2	38	54
7	23	39	55
10	26	42	58
11	27	43	59
14	30	46	62
15	31	47	63

C			
4	20	36	52
5	21	37	53
6	2	38	54
7	23	39	55
12	28	44	60
13	29	45	61
14	30	46	62
15	31	47	63

D			
8	24	40	56
9	25	41	57
10	26	42	58
11	27	43	59
12	28	44	60
13	29	45	61
14	30	46	62
15	31	47	63

E			
16	24	48	56
17	25	49	57
18	26	50	58
19	27	51	59
20	28	52	60
21	29	53	61
22	30	54	62
23	31	55	63

F			
32	40	48	56
33	41	49	57
34	42	50	58
35	43	51	59
36	44	52	60
37	45	53	61
38	46	54	62
39	47	55	63

É bem provável que, ao inserir mais uma carta com o menor elemento 64 e o maior elemento igual a 127, seja possível propor a adivinha a quase todas as pessoas do planeta. Ficariam de fora apenas aquelas com 128 anos de idade ou mais.

3.2.2 – Para a Sala de Aula

Os conceitos matemáticos que subsidiam esse problema constituem-se em sua maior parte de elementos da Matemática Discreta, como a classificação de um número natural em par ou ímpar e a escrita de um número natural em base diferente da decimal. O caráter lúdico da adivinha corresponde a um ponto motivador do estudo desses conceitos em sala de aula.

Inicialmente, pode-se propor a adivinha a alguns alunos. Como, em turmas de ensino regular, as idades dos alunos são muito próximas ou de conhecimento do professor, é interessante pedir que o aluno escolha qualquer número natural de 1 a 31 e indique as cartas de que consta o número escolhido.

Em seguida, é importante propor uma discussão com os alunos a fim de que eles observem regularidades na distribuição dos números nas cartas. A condução da discussão pode ser enriquecida com questões provocadoras, como:

Todos os números ímpares constam da carta **A**. Por quê?

Há alguma carta com todos os números pares?

Ao observar o primeiro número de cada carta, é possível perceber algum padrão?

Após essa discussão e o registro de todas as características observadas pelos alunos, pode-se apresentar o critério que define a distribuição dos números nas cartas.

Algumas observações acerca da demonstração da unicidade da decomposição podem ser discutidas com os alunos a fim de que se familiarizem com os processos lógicos envolvidos. Além disso, é a demonstração que garantirá o mecanismo da adivinha. É importante observar que o princípio da indução finita, pelo qual é realizada a demonstração, foi abordado no capítulo 1 deste trabalho.

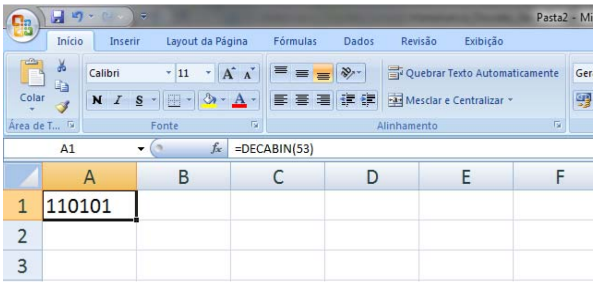
Antes de apresentar o dispositivo de que se obtém a forma decomposta, é interessante que os alunos realizem tentativas próprias. Outra sugestão é propor que eles realizem uma pesquisa sobre numeração binária e sobre transformação da base decimal para a binária.

A fim de avaliar o trabalho, pode-se organizar os alunos em grupos e solicitar que incluam cartas na adivinha inicial. Para isso, eles devem realizar todo o processo apresentado.

Para deixar o trabalho mais dinâmico em sala de aula, pode-se utilizar programas de computador, como as planilhas eletrônicas, com o objetivo de realizar conversões de números na base decimal para a base binária.

No *Microsoft Excel*, por exemplo, a fórmula “=DECABIN(x)” converte o número *x* na base decimal para a base binária. A Figura 12, por exemplo, apresenta o número 53 convertido para a base binária.

Figura 12 – Conversão do número 53 da base decimal para a base binária utilizando *Microsoft Excel*.



3.3 – Problema 3: Tem Alguém Comemorando Aniversário?

Problema

A um grupo com 25 pessoas pede-se que digam o dia do ano em que cada uma faz aniversário. É mais provável que pelo menos duas dessas pessoas façam aniversário em um mesmo dia do ano ou é mais provável que isso não ocorra?

Foi com base em situações como essa, isto é, tomar partido em uma situação que envolve o acaso, que a probabilidade mais se desenvolveu ao longo da história.

No problema citado, um estudante menos cuidadoso com as matemáticas envolvidas nesse tipo de situação faria a seguinte análise: um ano, com exceção daqueles bissextos, tem 365 dias. Para que tenhamos certeza de que pelo menos dois façam aniversário em um mesmo dia, temos de ter 366 pessoas. Como trata-se de um grupo com apenas 25 pessoas, aparentemente a chance de que haja coincidência de aniversários é pequena.

Pois bem, nesse caso a probabilidade maior é que ocorra coincidência. Há cerca de 57% de chance de que pelo menos duas pessoas sejam aniversariantes em um mesmo dia.

Para se compreender melhor esse problema, denotemos por *A* o evento em que há ocorrência de pelo menos duas pessoas fazerem aniversário em um mesmo dia. Assim, temos que a probabilidade de *A* corresponde à soma de duas, três, quatro, ..., 25 pessoas fazerem aniversário em um mesmo dia.

Por comodidade nos cálculos, convém calcularmos a probabilidade do complementar de *A* (A^C), que consiste nos casos em que cada uma das 25 pessoas faça aniversário em dias diferentes.

Sendo assim, para a ocorrência de A^C, temos:

- 1ª pessoa pode fazer aniversário em qualquer um dos 365 dias do ano:

$$P_1 = \frac{365}{365}$$

- 2ª pessoa pode fazer aniversário em qualquer um dos 364 dias em que a 1ª pessoa não faz aniversário:

$$P_2 = \frac{364}{365}$$

- 3ª pessoa pode fazer aniversário em qualquer um dos 363 dias em que a 1ª e a 2ª pessoa não fazem aniversário:

$$P_3 = \frac{363}{365}$$

...

- 25ª pessoa pode fazer aniversário em qualquer um dos 341 dias em que as demais 24 pessoas não fazem aniversário:

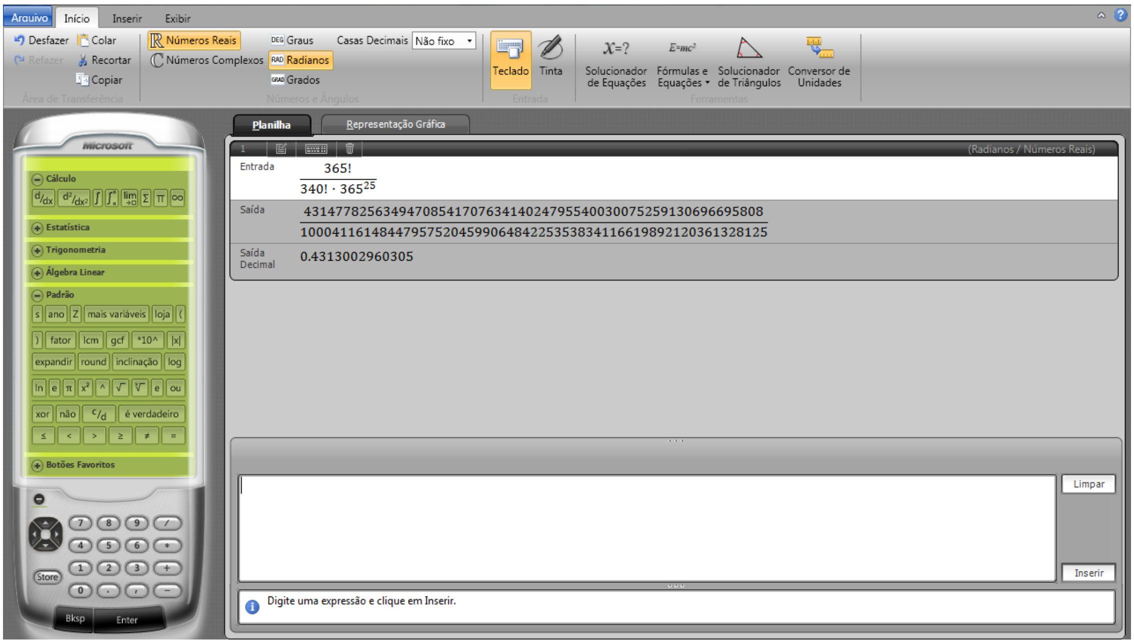
$$P_{25} = \frac{341}{365}$$

Como, para a ocorrência de A^C, todos esses eventos devem ser simultâneos, temos:

$$P\left(A^C\right) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{341}{365} = \frac{\frac{365!}{340!}}{365^{25}} = \frac{365!}{340! \cdot 365^{25}}$$

Este também é um cálculo em que se faz necessário o uso de programas de computador, como o *Microsoft Mathematic*, por exemplo, conforme mostra a Figura 13.

Figura 13 – Cálculo de $\frac{365!}{340! \cdot 365^{25}}$ no *Microsoft Mathematics*.



Logo, $P\left(A^C\right) \cong 0,43 = 43\%$.

Assim, segue que:

$$P(A) = 1 - P\left(A^C\right) \cong 1 - 0,43 = 0,57 = 57\%$$

Podemos expandir essa análise para um grupo de *n* pessoas, com $1 < n < 366$.

Para isso, seguindo o raciocínio do exemplo anterior, temos:

- 1ª pessoa pode fazer aniversário em qualquer um dos 365 dias do ano:

$$P_1 = \frac{365}{365}$$

- 2ª pessoa pode fazer aniversário em qualquer um dos 364 dias em que a 1ª pessoa não faz aniversário:

$$P_2 = \frac{364}{365}$$

- 3ª pessoa pode fazer aniversário em qualquer um dos 363 dias em que a 1ª e a 2ª pessoa não fazem aniversário:

$$P_3 = \frac{363}{365}$$

...

- 25ª pessoa pode fazer aniversário em qualquer um dos 341 dias em que as demais 24 pessoas não fazem aniversário:

$$P_{25} = \frac{341}{365}$$

...

- n-ézima pessoa pode fazer aniversário em qualquer um dos $\left[365-(n-1)\right]$ dias em que as demais $(n-1)$ pessoas não fazem aniversário:

$$P_n = \frac{\left[365-(n-1)\right]}{365}$$

Calculando a probabilidade de ocorrer A^C, temos:

$$P\left(A^C\right) = \frac{365}{365}\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\ldots\cdot\frac{341}{365}\cdot\ldots\cdot\frac{\left[365-(n-1)\right]}{365} = \frac{\dfrac{365!}{\left[365-(n-1)-1\right]!}}{365^n} = \frac{365!}{(365-n)!\cdot 365^n}$$

Dessa maneira, segue que:

$$P(A) = 1 - \frac{365!}{(365-n)!\cdot 365^n}$$

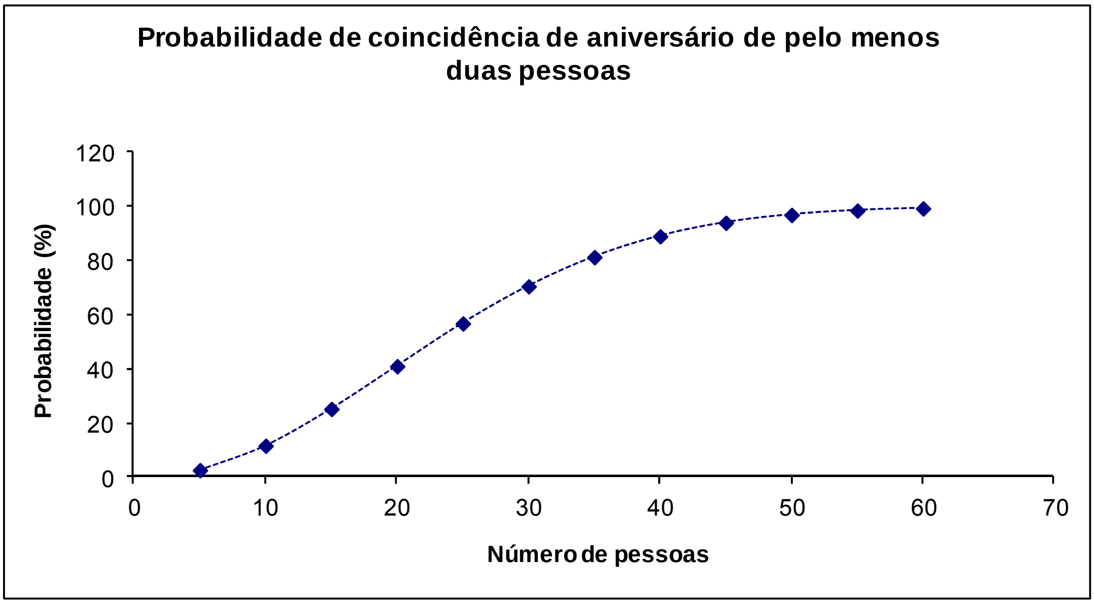
No Quadro 7, estão as probabilidades de pelo menos uma coincidência de aniversário para grupos com diferentes quantidades de pessoas.

Quadro 7 – Probabilidade de coincidência de aniversário de pelo menos duas pessoas.

Número de pessoas	***Probabilidade (%)***
5	2,7
10	11,7
15	25,3
20	41,1
25	56,9
30	70,6
35	81,4
40	89,1
45	94,1
50	97
55	98,6
60	99,4

A partir desse quadro, podemos construir um gráfico para representar a probabilidade de coincidência de aniversário de pelo menos duas pessoas. Nesse caso, podemos utilizar uma planilha eletrônica, como o *Microsoft Excel*, conforme mostra a Figura 14.

Figura 14 – Probabilidade de coincidência de aniversário.



3.3.1 – Para a Sala de Aula

O assunto tratado nesse problema pode ser utilizado em sala de aula a fim de instigar os alunos em cálculos probabilísticos. A contraintuição provocada pelo confrontamento entre o “palpite” sobre a chance de se ter coincidência de aniversariantes em um grupo de pessoas e o resultado probabilístico pode ser um fator motivador para a realização da atividade.

Uma sugestão é, após um estudo inicial de probabilidade, em que são realizadas as definições e os cálculos mais elementares, propor a resolução desse problema pelos alunos. Primeiramente, pode-se pesquisar em sala de aula se há alguma coincidência de aniversário. Em turmas com 30 ou mais alunos, essa probabilidade é de pelo menos 70%, como visto anteriormente. Em seguida, é possível apresentar o problema de maneira gradativa, ou seja, de grupos menores para grupos maiores de pessoas. Um cuidado que se deve ter é o de que os alunos compreendam que o cálculo da probabilidade complementar é mais vantajoso.

Deduzir uma expressão geral é importante para que eles possam perceber que, à medida que aumentamos o número de pessoas no grupo, a probabilidade de coincidência de aniversário aumenta em um ritmo menor.

Por fim, vale propor aos alunos que pesquisem coincidências de aniversário em grupos conhecidos, como em outras turmas da escola. Isso é importante para que comparem a probabilidade calculada e o fato observado em experimentos, ou seja, mesmo que a probabilidade calculada indique que a chance de coincidência de aniversário seja maior do que 50%, isso não garante que, na prática, tal coincidência irá ocorrer.

3.4 – Problema 4: a Torre de Hanói

Com diferentes objetivos, ora na introdução ou fixação de conceitos, ora como momento lúdico com intenção de desenvolvimento do raciocínio e de estratégias, as atividades com jogos podem trazer momentos prazerosos às aulas de Matemática.

A Torre de Hanói é composta de três varetas e alguns discos de tamanhos distintos. Os discos devem ser colocados em uma das varetas, de maneira que um disco nunca fique sobre outro de menor diâmetro. O objetivo é transferir os discos de uma vareta para outra, sendo que só é permitido o deslocamento de um disco por vez, e considerando a regra de que um disco nunca pode ficar sobre outro de menor diâmetro.

Figura 15 – Torre de Hanói com nove discos.

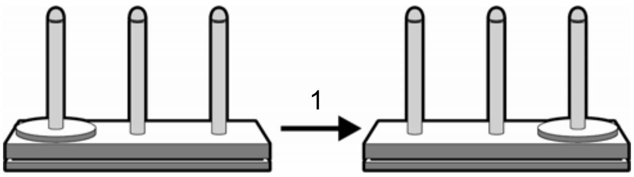
Esse jogo origina-se de uma lenda indiana em que o deus Brahma dispôs 64 discos sobre um dos pinos da Torre de Hanói, os quais deveriam ser transferidos para outro pino, seguindo as regras já estabelecidas. Para essa tarefa, foram incumbidos sacerdotes de um templo que deveriam fazer os movimentos dia e noite. Ao fim dessa tarefa, segundo Brahma, o mundo se acabaria.

De acordo com Machado (2006), a Torre de Hanói pode ser utilizada desde a Educação Infantil até o Ensino Médio, em um nível crescente de complexidade. Na Educação Infantil, por exemplo, pode-se tratar da questão dos tamanhos dos discos e da classificação quanto às cores, visto que comumente estes são apresentados em diferentes conjuntos de discos coloridos. No Ensino Médio, podem ser explorados conceitos, como recorrência, potenciação e Princípio da indução finita.

Uma interessante abordagem à Torre de Hanói foi dada por Watanabe (1986). Com base nessa abordagem, será estudado o número mínimo de movimentos necessários para se completar a transferência de discos na Torre de Hanói. Veja alguns exemplos:

- 1 disco

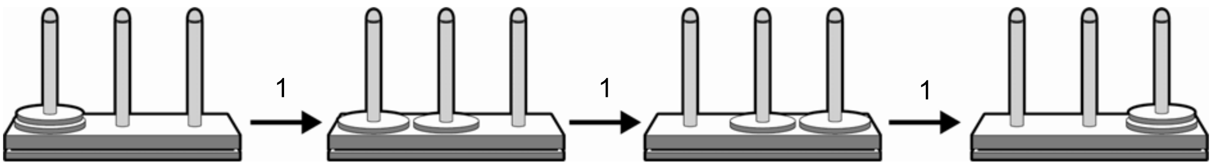
Figura 16 – Transferência de um disco na Torre de Hanói.



1 movimento: $d_1 = 1$

- 2 discos

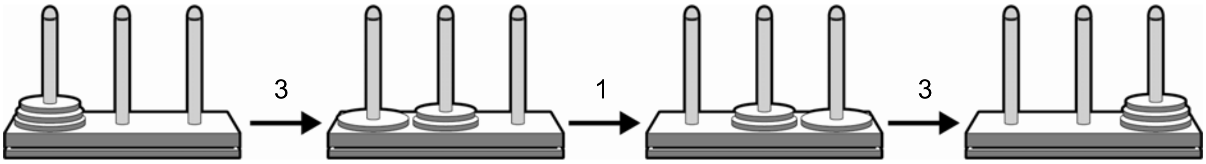
Figura 17 – Transferência de dois discos na Torre de Hanói.



3 movimentos: $d_2 = 3$

- 3 discos

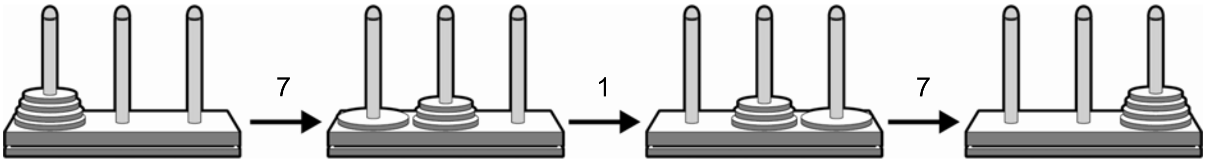
Figura 18 – Transferência de três discos na Torre de Hanói.



7 movimentos: $d_3 = 7$

- 4 discos

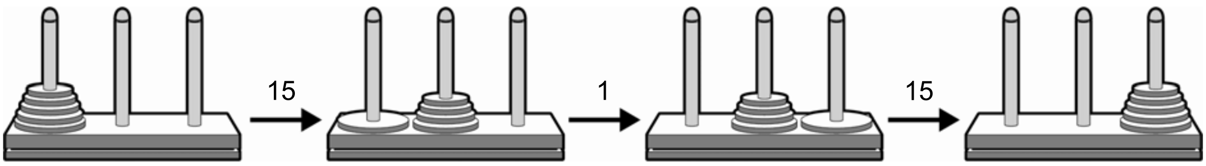
Figura 19 – Transferência de quatro discos na Torre de Hanói.



15 movimentos: $d_4 = 15$

- 5 discos

Figura 20 – Transferência de cinco discos na Torre de Hanói.



31 movimentos: $d_5 = 31$

É possível perceber que o número de movimentos para uma quantidade *n* de discos corresponde ao dobro de movimentos de $n-1$ acrescido de um movimento, já que inicialmente são transferidos $n-1$ discos para uma vareta, depois é transferido o maior disco para a outra vareta e, por fim, novamente são transferidos $n-1$ discos, agora, sobre o maior disco.

Dessa maneira, sendo d_n a quantidade de movimentos necessário para transferir *n* discos, temos a fórmula de recorrência $d_n = 2d_{n-1} + 1$ da quantidade mínima de transferência de discos para a conclusão da Torre de Hanói com *n* discos. Nessa recorrência, $d_0 = 0$, uma vez que corresponde à transferência de zero discos na Torre de Hanói.

Um trabalho interessante é obter uma fórmula que dependa apenas de *n*, ou seja, em que não haja a necessidade de se obter o termo anterior. Considerando, na expressão $d_n = 2d_{n-1} + 1$ os valores $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, podemos escrever:

- $n = 1 \to d_1 = 1$
- $n = 2 \to d_2 = 2 \cdot 1 + 1 = 2 + 1$
- $n = 3 \to d_3 = 2 \cdot (2 + 1) + 1 = 2^2 + 2 + 1$
- $n = 4 \to d_4 = 2 \cdot (2^2 + 2 + 1) + 1 = 2^3 + 2^2 + 2 + 1$
- $n = 5 \to d_5 = 2 \cdot (2^3 + 2^2 + 2 + 1) + 1 = 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 + 1$

É possível notar que, para *n* discos, a quantidade de movimentos corresponde à soma dos termos de uma progressão geométrica com *n* termos, em que o primeiro termo é $a_1 = 1$ e a razão é $q = 2$. Portanto, podemos calcular a quantidade mínima de movimentos para *n* discos da seguinte maneira:

$$d_n = S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1(1-2^n)}{1-2} \Rightarrow d_n = 2^n - 1$$

É importante observar que essa fórmula foi obtida a partir de observações de regularidade, o que não garante sua validade para uma quantidade *n* qualquer de discos. Uma maneira interessante de garantir essa validade da relação $d_n = 2^n - 1$ é pelo Princípio da indução finita, também tratada por Watanabe (1986).

Propriedade

No jogo Torre de Hanói, a quantidade mínima de movimentos necessários com *n* discos é dada por $d_n = 2^n - 1$.

Demonstração

Nesse caso, a base de indução é direta, pois, para um disco, basta movimentá-lo em uma única etapa a um dos outros pinos e, calculando pela fórmula com $n = 1$, temos:

$$d_1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

A hipótese de indução supõe que com *n* discos são necessários, no mínimo, $d_n = 2^n - 1$ movimentos.

Agora, considerando $n+1$ discos em certo pino, temos que são necessários $2^n - 1$ movimentos para deslocar os *n* discos superiores a outro pino, conforme hipótese de indução. Na sequência, é necessário um movimento para levar o disco restante (maior dos $n+1$ discos) ao pino ainda vazio. Por fim, são necessários mais $2^n - 1$ movimentos para descolar os *n* primeiros discos movimentados e colocá-los sobre o disco maior. Dessa maneira, para movimentar $n+1$ discos é necessária a seguinte quantidade de movimentos:

$$\left(2^n - 1\right) + 1 + \left(2^n - 1\right) = 2^n + 2^n - 1 = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1 = d_{n+1}$$

Logo, podemos garantir, pelo Princípio da indução finita, que a quantidade mínima de movimentos necessários em uma Torre de Hanói com *n* discos é dada por $d_n = 2^n - 1$.

Com a fórmula $d_n = 2^n - 1$ é possível observar que a quantidade mínima de movimentos para completar a transferência de 10 discos é $2^{10} - 1$, ou seja, 1023 movimentos. Com 20 discos, a quantidade de movimentos já passa de 1 milhão. São necessários, no mínimo, mais de 1 bilhão de movimentos para deslocar 30 discos.

Com relação à lenda indiana sobre a origem da Torre de Hanói, temos que a quantidade mínima de movimentos é dada por $2^{64} - 1$. Vamos considerar que os monges demorem 1 segundo para fazer cada movimento. Um ano tem cerca de 31536000 segundos. Esse valor é menor que $2^{25} = 33554432$, ou seja, $31536000 < 2^{25}$.

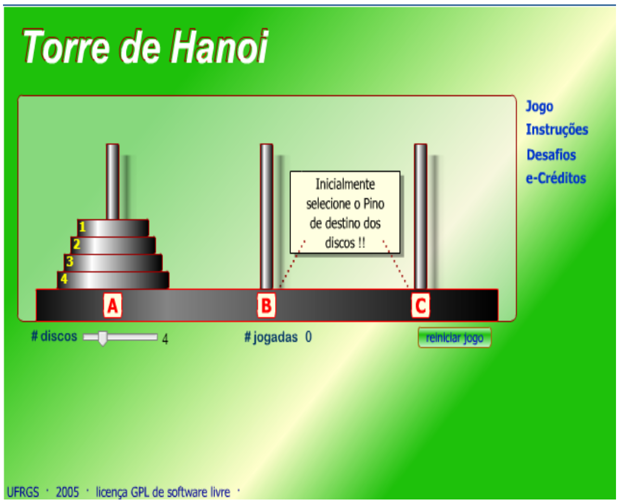
Temos que $\frac{2^{64}}{2^{25}} = 2^{39}$. Assim, o mundo deverá acabar 2^{39} anos após a criação da Torre de Hanói. Aprofundando-se um pouco mais nos cálculos, temos que $2^{30} = 1073741824$, isto é, 2^{30} é mais do que 1 bilhão de anos. Temos que $\frac{2^{39}}{2^{30}} = 2^9 = 512$.

Portanto, de acordo com a lenda, o mundo deverá acabar quando alcançar 512 bilhões de anos de existência. Como estudiosos calculam que o planeta tenha cerca de 4,5 bilhões de anos de idade, ainda nos restam mais de 507,5 bilhões de anos de existência.

3.4.1 – Para a Sala de Aula

A Torre de Hanói constitui um instrumento que possibilita um trabalho diversificado e com diferentes objetivos pedagógicos em sala de aula. Ao trabalhá-la no Ensino Médio, pode-se iniciar com a realização normal do jogo. Nessa etapa, uma abordagem interessante é apresentar as regras e permitir que os estudantes joguem sem uma análise de estratégias preliminar. A fim de não desmotivá-los, é importante propor inicialmente o jogo com apenas três discos e, aos poucos, solicitar que mais discos sejam adicionados. Em geral, a Torre de Hanói é encontrada para compra junto a um conjunto de nove discos. Contudo, há diversas versões eletrônicas disponíveis em *sites* da internet, como o disponibilizado no *Blog da Psicologia da Educação* da Universidade Federal do Rio Grande do Sul em http://www.ufrgs.br/psicoeduc/hanoi (Figura 21).

Figura 21 –Torre de Hanói eletrônica.



Em um segundo momento, apresentar a lenda da criação do jogo pode enriquecer o trabalho. Em seguida, junto aos estudantes, é possível propor um trabalho matemático, como o apresentado nesse problema. Nessa etapa, é valoroso realizar detalhadamente o trabalho com a matemática discreta envolvida, sobretudo a recorrência e a demonstração pelo Princípio da indução finita. Uma sugestão é um trabalho em grupos de três ou quatro estudantes, em que cada grupo deve, inicialmente, obter, de forma experimental, o método que permite realizar o jogo no menor número de movimentos possíveis. Em seguida, cada grupo deve apresentar suas conclusões, fomentando um debate sobre o tema.

Ao final, com os estudantes, podem ser realizadas as formalizações necessárias, conforme as demonstrações e cálculos aqui presentes.

3.5 – Problema 5: Vamos Abrir e Fechar Armários?

Um interessante problema em que, em geral, os alunos costumam empregar esforços para sua resolução é o chamado *Problema dos armários*.

Observe o enunciado de uma versão desse problema.

Problema

Considere uma escola com *n* armários, todos fechados, e *n* estudantes. Certa atividade consiste em um primeiro estudante mudar a situação de todos os armários, ou seja, abrir cada um. Em seguida, um segundo estudante muda novamente a situação dos armários alternadamente: um armário sim e o seguinte não, a partir do armário de número 2 até o armário de número *n*, ou seja, ele fecha um armário, mas o seguinte não. Depois, um terceiro estudante altera a situação dos armários (abre se estiver fechado, e fecha se estiver aberto) a cada três armários, a partir daquele de número 3. De maneira semelhante, um quarto estudante altera a situação dos armários a cada quatro armários, começando pelo de número 4. Supondo que esse processo continue até que o n-ésimo estudante manipule os armários, quais armários ficarão abertos?

3.5.1 – Primeira Abordagem

Primeiramente, pode-se observar o que ocorre com os armários iniciais quando por eles passam os estudantes. Nos quadros a seguir, as células em destaque correspondem à situação (A: aberto; F: fechado) dos armários modificados pelo respectivo estudante.

- 1º estudante: Nessa etapa, todos os armários são abertos. Como o 2º estudante iniciará as mudanças a partir do armário 2, temos que a situação (aberto) do armário 1 não será alterada, conforme o Quadro 8.

Quadro 8 – Situação dos armários modificados pelo estudante 1.

	Armário																								
Est.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A

- 2º estudante: Nessa etapa, os armários de numeração par são fechados. Como o 3.º estudante iniciará as mudanças a partir do armário 3, temos que a situação (fechado) do armário 2 não será alterada, conforme o Quadro 9.

Quadro 9 – Situação dos armários modificados pelo estudante 2.

	Armário																								
Est.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
2	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A

- 3º estudante: Nessa etapa, a situação dos armários múltiplos de 3 é alterada. Como o 4º estudante iniciará as mudanças a partir do armário 4, temos que a situação (fechado) do armário 3 não será alterada, conforme o Quadro 10.

Quadro 10 – Situação dos armários modificados pelo estudante 3.

	Armário																								
Est.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
2	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A
3	A	F	F	F	A	A	A	F	F	F	A	A	A	F	F	F	A	A	A	F	F	F	A	A	A

- 4º estudante: Nessa etapa, a situação dos armários múltiplos de 4 é alterada. Como o 5º estudante iniciará as mudanças a partir do armário 5, temos que a situação (aberto) do armário 4 não será alterada, conforme o Quadro 11.

Quadro 11 – Situação dos armários modificados pelo estudante 4.

	Armário																								
Est.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
2	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A
3	A	F	F	F	A	A	A	F	F	F	A	A	A	F	F	F	A	A	A	F	F	F	A	A	A
4	A	F	F	A	A	A	A	A	F	F	A	F	A	F	F	A	A	A	A	A	F	F	A	F	A

- 5º estudante: Nessa etapa, a situação dos armários múltiplos de 5 é alterada. Como o 6º estudante iniciará as mudanças a partir do armário 6, temos que a situação (fechado) do armário 5 não será alterada, conforme o Quadro 12.

Quadro 12 – Situação dos armários modificados pelo estudante 5.

	Armário																								
Est.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
2	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A
3	A	F	F	F	A	A	A	F	F	F	A	A	A	F	F	F	A	A	A	F	F	F	A	A	A
4	A	F	F	A	A	A	A	A	F	F	A	F	A	F	F	A	A	A	A	A	F	F	A	F	A
5	A	F	F	A	F	A	A	A	F	A	A	F	A	F	A	A	A	A	A	F	F	F	A	F	F

Mantendo essa análise, após a passagem do 25º estudante, temos:

Quadro 13 – Situação dos armários modificados pelo estudante 25.

	Armário																								
Est.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
2	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A
3	A	F	F	F	A	A	A	F	F	F	A	A	A	F	F	F	A	A	A	F	F	F	A	A	A
4	A	F	F	A	A	A	A	A	F	F	A	F	A	F	F	A	A	A	A	A	F	F	A	F	A
5	A	F	F	A	F	A	A	A	F	A	A	F	A	F	A	A	A	A	A	F	F	F	A	F	F
6	A	F	F	A	F	F	A	A	F	A	A	A	A	F	A	A	A	F	A	F	F	F	A	A	F
7	A	F	F	A	F	F	F	A	F	A	A	A	A	A	A	A	A	F	A	F	A	F	A	A	F
8	A	F	F	A	F	F	F	F	F	A	A	A	A	A	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	F
9	A	F	F	A	F	F	F	F	A	A	A	A	A	A	A	F	A	A	A	F	A	F	A	F	F
10	A	F	F	A	F	F	F	F	A	F	A	A	A	A	A	F	A	A	A	A	A	F	A	F	F
11	A	F	F	A	F	F	F	F	A	F	F	A	A	A	A	F	A	A	A	A	A	A	A	F	F
12	A	F	F	A	F	F	F	F	A	F	F	F	A	A	A	F	A	A	A	A	A	A	A	A	F
13	A	F	F	A	F	F	F	F	A	F	F	F	F	A	A	F	A	A	A	A	A	A	A	A	F
14	A	F	F	A	F	F	F	F	A	F	F	F	F	F	A	F	A	A	A	A	A	A	A	A	F
15	A	F	F	A	F	F	F	F	A	F	F	F	F	F	F	F	A	A	A	A	A	A	A	A	F
16	A	F	F	A	F	F	F	F	A	F	F	F	F	F	F	A	A	A	A	A	A	A	A	A	F
17	A	F	F	A	F	F	F	F	A	F	F	F	F	F	F	A	F	A	A	A	A	A	A	A	F
18	A	F	F	A	F	F	F	F	A	F	F	F	F	F	F	A	F	F	A	A	A	A	A	A	F
19	A	F	F	A	F	F	F	F	A	F	F	F	F	F	F	A	F	F	F	A	A	A	A	A	F
20	A	F	F	A	F	F	F	F	A	F	F	F	F	F	F	A	F	F	F	F	A	A	A	A	F
21	A	F	F	A	F	F	F	F	A	F	F	F	F	F	F	A	F	F	F	F	F	A	A	A	F
22	A	F	F	A	F	F	F	F	A	F	F	F	F	F	F	A	F	F	F	F	F	F	A	A	F
23	A	F	F	A	F	F	F	F	A	F	F	F	F	F	F	A	F	F	F	F	F	F	F	A	F
24	A	F	F	A	F	F	F	F	A	F	F	F	F	F	F	A	F	F	F	F	F	F	F	F	F
25	A	F	F	A	F	F	F	F	A	F	F	F	F	F	F	A	F	F	F	F	F	F	F	F	A

É importante observar que a situação dos armários até o de número 25 não mais será alterada. Dessa forma, sabemos que, até tal armário, ficarão abertos apenas os de número 1, 4, 9, 16 e 25.

Esse resultado indica, experimentalmente, que os armários com números quadrados perfeitos, e apenas eles, serão os que ficarão abertos após a passagem do n-ésimo estudante.

A verificação formal desse resultado consiste em uma atividade interessante: uma análise do problema a partir de conceitos da Matemática Discreta consiste em observar que ficarão abertos, após a passagem do n-ésimo estudante, os armários cuja situação (aberto ou fechado) for alterada uma quantidade ímpar de vezes, já que inicialmente todos os armários encontravam-se fechados. Com relação aos estudantes, temos que o 1º altera a situação dos armários múltiplos de 1, o 2º, a dos múltiplos de 2, o 3º a dos múltiplos de 3 e assim sucessivamente. Portanto, ficarão abertos, ao final, apenas os armários cujo número tenha uma quantidade ímpar de divisores.

3.5.2 – Segunda Abordagem

Quais números naturais (maiores que zero) possuem uma quantidade ímpar de divisores?

A princípio, de acordo com o resultado observado no experimento, podemos supor que os números quadrados perfeitos são os únicos que possuem uma quantidade ímpar de divisores. Portanto, temos de demonstrar que apenas os números quadrados perfeitos possuem uma quantidade ímpar de divisores. A demonstração a seguir tem como base Almeida (2011) e Domingues (1991).

Propriedade

A quantidade d_n de divisores de um número natural é ímpar se, e somente se, o número é um quadrado perfeito.

Demonstração

Para realizarmos essa demonstração, consideraremos inicialmente um resultado conhecido: todo número natural n pode ser decomposto de maneira única em fatores primos, ou seja, $n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot p_3^{m_3} \cdot \ldots \cdot p_t^{m_t}$, com cada p_i sendo um primo distinto e $m_i \in \mathbb{N}$.

Os divisores de n que apresentam apenas fatores que são potências de p_1 são $\{p_1^0, p_1^1, p_1^2, p_1^3, \ldots, p_1^{m_1}\}$, ou seja, correspondem a $(m_1 + 1)$ divisores. A mesma análise pode ser realizada com os demais primos divisores de n.

Pelo princípio multiplicativo (princípio fundamental da contagem), temos que a quantidade de divisores de n corresponde a:

$$d_n = (m_1 + 1) \cdot (m_2 + 1) \cdot (m_3 + 1) \cdot \ldots \cdot (m_t + 1).$$

Agora, para demonstrar que, se o número de divisores de n for ímpar, n é um quadrado perfeito, tomamos d_n ímpar e supomos por absurdo que n não seja um quadrado perfeito.

Sabemos que, se n é um quadrado perfeito, em $n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot p_3^{m_3} \cdot \ldots \cdot p_t^{m_t}$, temos que cada m_i é par. Como estamos considerando n não quadrado perfeito, então existe pelo menos um m_i ímpar. Sem perda de generalidade, tomemos m_1 esse expoente ímpar, ou seja, $m_1 = 2k + 1$, com $k \in \mathbb{N}$.

Assim, temos:

$$d_n = (2k + 1 + 1) \cdot (m_2 + 1) \cdot (m_3 + 1) \cdot \ldots \cdot (m_t + 1) = 2 \cdot (k + 1) \cdot (m_2 + 1) \cdot (m_3 + 1) \cdot \ldots \cdot (m_t + 1)$$

Note que d_n é par, o que é um absurdo, já que, por hipótese, d_n é ímpar. Portanto, temos que n é um quadrado perfeito.

Agora, vamos demonstrar que, se n é um quadrado perfeito, a quantidade de divisores d_n de n é ímpar.

Sabemos que, se n é um quadrado perfeito, em $n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot p_3^{m_3} \cdot \ldots \cdot p_t^{m_t}$, todos os expoentes de p_i são números pares. Dessa forma, podemos escrever n da seguinte maneira: $n = p_1^{2k_1} \cdot p_2^{2k_2} \cdot p_3^{2k_3} \cdot \ldots \cdot p_t^{2k_t}$. Logo, a quantidade de divisores de n é dada por:

$$d_n = (2k_1 + 1) \cdot (2k_2 + 1) \cdot (2k_3 + 1) \cdot \ldots \cdot (2k_t + 1)$$

Note que cada fator acima corresponde a um número ímpar. Como o produto de números ímpares também é um número ímpar, temos que d_n é ímpar, ou seja, a quantidade de divisores de n é ímpar.

Portanto, a quantidade d_n de divisores de um número natural é ímpar se, e somente se, o número é um quadrado perfeito.

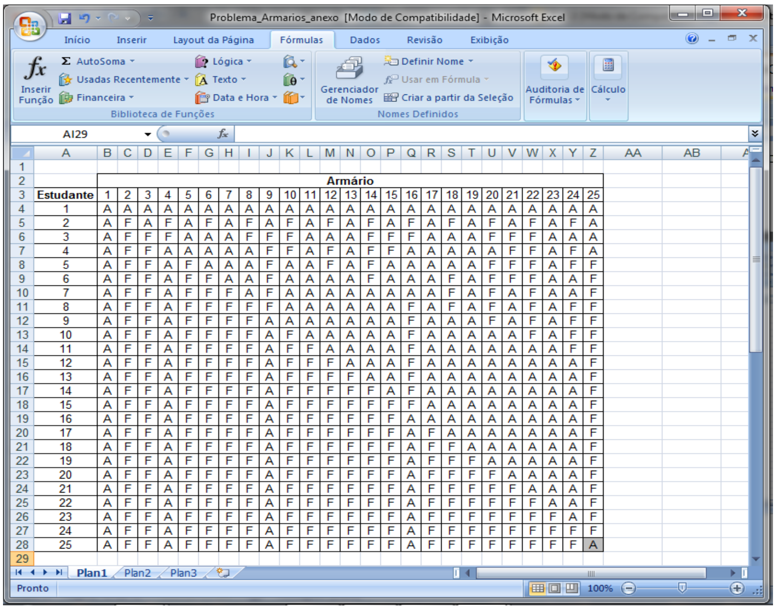
Voltando ao problema dos armários, temos que o resultado obtido garante que, após a passagem do n-ésimo estudante, apenas os armários cujo número corresponde a um quadrado perfeito ficarão abertos.

3.5.3 – Para a Sala de Aula

O trabalho com esse problema em sala de aula pode ser realizado a fim de que os alunos compreendam melhor o conceito de divisor, assunto que, em geral, é tratado apenas no Ensino Fundamental e de maneira superficial.

No desenvolvimento do problema, é possível que os alunos façam a análise para uma quantidade finita de armários e estudantes, como a apresentada anteriormente. Para auxiliar nessa tarefa, pode-se utilizar planilhas eletrônicas, como o *Microsoft Excel*, em que deve ser preenchida, em cada etapa, a situação dos armários após a passagem de cada estudante, conforme a Figura 22.

Figura 22 – Análise da situação dos armários utilizando *Microsoft Excel*.



	Armário																								
Estudante	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
2	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	A
3	A	F	F	F	A	A	A	F	F	F	A	A	A	F	F	F	A	A	A	F	F	F	A	A	A
4	A	F	F	A	A	A	A	A	F	F	A	F	A	F	F	A	A	A	A	A	F	F	A	F	A
5	A	F	F	A	F	A	A	A	F	A	A	F	A	F	A	A	A	A	A	F	F	F	A	F	F
6	A	F	F	A	F	F	A	A	F	A	A	A	A	F	A	A	A	F	A	F	F	F	A	A	F
7	A	F	F	A	F	F	F	A	F	A	A	A	A	A	A	A	A	F	A	F	A	F	A	A	F
8	A	F	F	A	F	F	F	F	F	A	A	A	A	A	A	F	A	F	A	F	A	F	A	F	F
9	A	F	F	A	F	F	F	F	A	A	A	A	A	A	A	F	A	A	A	F	A	F	A	F	F
10	A	F	F	A	F	F	F	F	A	F	A	A	A	A	A	F	A	A	A	A	A	F	A	F	F
11	A	F	F	A	F	F	F	F	A	F	F	A	A	A	A	F	A	A	A	A	A	A	A	F	F
12	A	F	F	A	F	F	F	F	A	F	F	F	A	A	A	F	A	A	A	A	A	A	A	A	F
13	A	F	F	A	F	F	F	F	A	F	F	F	F	A	A	F	A	A	A	A	A	A	A	A	F
14	A	F	F	A	F	F	F	F	A	F	F	F	F	F	A	F	A	A	A	A	A	A	A	A	F
15	A	F	F	A	F	F	F	F	A	F	F	F	F	F	F	F	A	A	A	A	A	A	A	A	F
16	A	F	F	A	F	F	F	F	A	F	F	F	F	F	F	A	A	A	A	A	A	A	A	A	F
17	A	F	F	A	F	F	F	F	A	F	F	F	F	F	F	A	F	A	A	A	A	A	A	A	F
18	A	F	F	A	F	F	F	F	A	F	F	F	F	F	F	A	F	F	A	A	A	A	A	A	F
19	A	F	F	A	F	F	F	F	A	F	F	F	F	F	F	A	F	F	F	A	A	A	A	A	F
20	A	F	F	A	F	F	F	F	A	F	F	F	F	F	F	A	F	F	F	F	A	A	A	A	F
21	A	F	F	A	F	F	F	F	A	F	F	F	F	F	F	A	F	F	F	F	F	A	A	A	F
22	A	F	F	A	F	F	F	F	A	F	F	F	F	F	F	A	F	F	F	F	F	F	A	A	F
23	A	F	F	A	F	F	F	F	A	F	F	F	F	F	F	A	F	F	F	F	F	F	F	A	F
24	A	F	F	A	F	F	F	F	A	F	F	F	F	F	F	A	F	F	F	F	F	F	F	F	F
25	A	F	F	A	F	F	F	F	A	F	F	F	F	F	F	A	F	F	F	F	F	F	F	F	A

Isso permite que os alunos percebam a relação entre o problema e a quantidade de divisores de um número natural, uma vez que nesse processo eles, em relação ao oitavo estudante, por exemplo, irá alterar os armários de número 8, 16, 24, 32, 40, ...

Após os alunos perceberem que apenas os armários cujo número é um quadrado perfeito ficarão abertos, é importante discutir a relação entre o problema dos armários e a quantidade de divisores de um número. A percepção dessa relação deve surgir da discussão com os alunos.

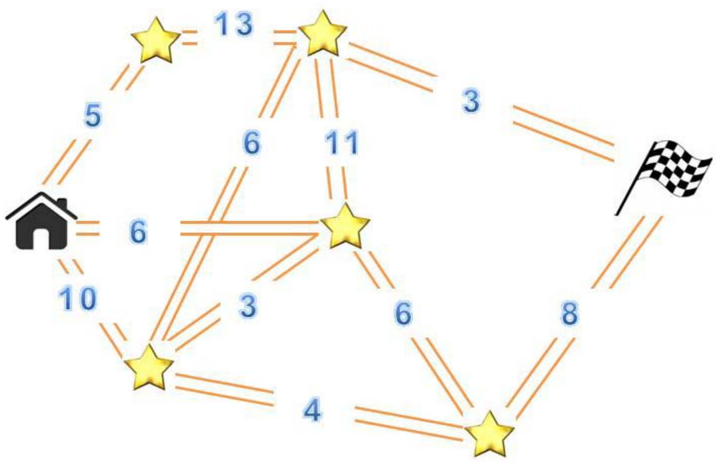
Nesse momento, é importante que os alunos calculem a quantidade de divisores de alguns números naturais. Uma possibilidade é os alunos utilizarem o princípio multiplicativo para esse cálculo, após terem quantificado os divisores dos primeiros naturais, descrevendo um a um.

A partir do momento em que os alunos perceberem que os armários que ficarão abertos são aqueles cujos números são quadrados perfeitos, é importante discutir a necessidade da realização de uma demonstração formal para essa suposição. Tal demonstração pode ser realizada pelo professor com o auxílio dos alunos, a fim de que compreendam cada etapa.

3.6 – Problema 6: Qual o Melhor Caminho?

Em certo jogo, o participante deve percorrer um labirinto por vias que lhe exigem a perda de diferentes pontuações. O objetivo desse jogo é partir do ponto inicial e chegar ao ponto final perdendo a menor quantidade possível de pontos. A Figura 23 representa esse jogo.

Figura 23 – Representação do problema do melhor caminho.

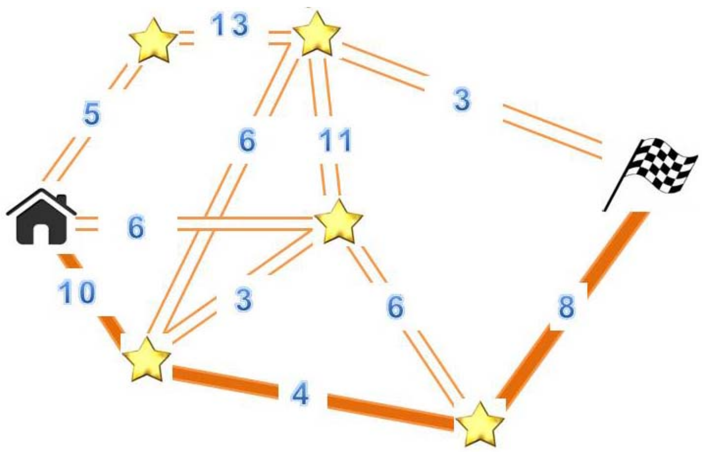


Nessa figura, as estrelas são pontos de ligação entre vias, a casa é o ponto inicial e a bandeira, o ponto final. Os números indicados em cada via correspondem à pontuação que se perde ao passar por ela. A pontuação correspondente a cada via não tem relação com seu comprimento, tratando-se apenas do “peso” de um obstáculo.

Para se compreender melhor o problema, façamos uma tentativa qualquer, ilustrada no caminho destacado na Figura 24.

Note que, nesse caminho, o percurso envolve três vias cujas pontuações perdidas são 10, 4 e 8, ou seja, a perda de um total de 22 pontos no trajeto entre o ponto inicial e o ponto final.

Figura 24 – Tentativa de resolução do problema do melhor caminho.

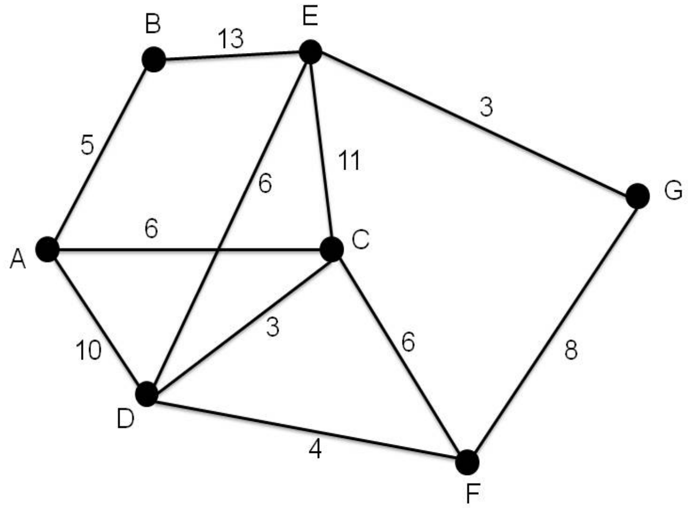


A questão é: há outro percurso em que se percam menos pontos?

Esse problema, elaborado com base em uma proposição feita por Jurkiewicz (2004, p. 28), reflete de maneira simples uma das aplicações da Teoria de Grafos, que consiste em minimizações. No problema, a ideia é minimizar a pontuação perdida, ou seja, obter um caminho ótimo.

Inicialmente, modelamos o jogo por meio de um grafo, conforme a Figura 25.

Figura 25 – Grafo modelo do problema do melhor caminho.



Nessa representação, os vértices correspondem ao ponto inicial (*A*), ao ponto final (*G*), e aos pontos de ligação entre vias (*B*, *C*, *D*, *E*, *F*). As arestas são as vias. Note que, nesse grafo, cada aresta apresenta um valor. Quando isso ocorre, dizemos que o grafo é valorado.

Uma maneira de resolver esse problema por grafo é utilizando o chamado algoritmo de Dijkstra. Esse algoritmo é nomeado em homenagem ao holandês Edsger Wybe Dijkstra (1930–2002), que o desenvolveu em meados do século passado.

Diferente de cálculos mais comuns na Matemática, quando se obtém o resultado diretamente, um algoritmo como o de Dijkstra faz uso de uma sequência de procedimentos, a fim de chegar a solução. Essa sequência de procedimentos pode ser programada em um computador, o que possibilita a resolução de situações mais complexas que a apresentada.

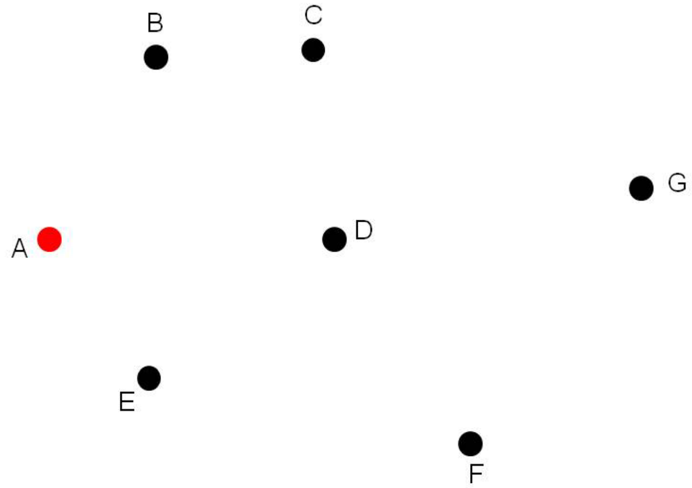
Voltemos então ao problema do jogo.

Nessa resolução, analisaremos os caminhos a partir de *A*, buscando chegar à *G*. Para isso, em cada etapa dessa análise, construiremos um esquema e um quadro. No esquema, ilustraremos os caminhos já estudados e, no quadro, acompanharemos a pontuação correspondente a cada um desses caminhos.

Iniciemos então por verificar que, obviamente, o menor caminho de *A* até *A* é zero, uma vez que aresta alguma foi percorrida. Dessa maneira, apresentamos um esquema (Figura 26) com os vértices sem ligações, destacando

A, de maneira a identificar que os caminhos até ele já foram analisados. Nesse caso, dizemos que *A* está fechado.

Figura 26 – Etapa 1 da resolução do problema do melhor caminho.



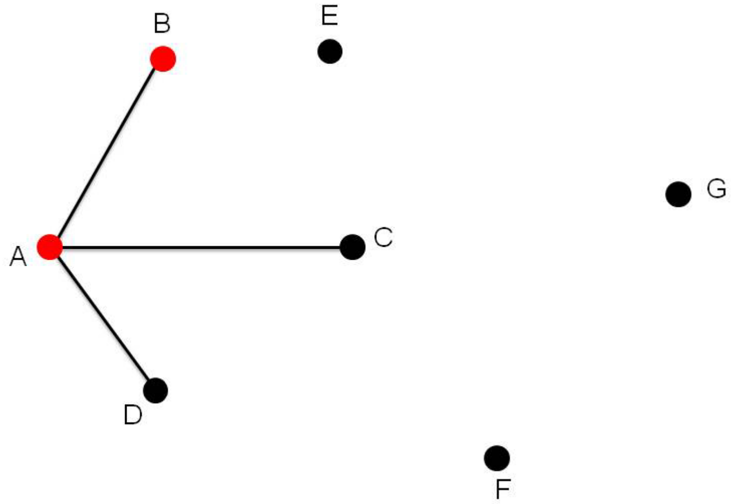
A fim de organizar essa informação, utilizamos o Quadro 14. Nele, em cada etapa, assinalaremos o vértice fechado, a pontuação mínima até a correspondente etapa do processo e a origem imediata cuja ligação gerou tal pontuação.

Quadro 14 – Etapa 1 da resolução do problema do melhor caminho.

Fechado	***Destino***	***Pontuação***	***Origem***
X	A	0	A
	B		
	C		
	D		
	E		
	F		
	G		

Na próxima etapa, analisamos as ligações imediatas de *A*, ou seja, A-B, A-C e A-D, cuja pontuação da via corresponde, respectivamente, a 5, 6 e 10. Podemos perceber que não há outro caminho de *A* até *B* com menos de 5 pontos (basta obervar os demais caminhos diretos à *A*). Assim, destacamos *B* no esquema (Figura 27) e fazemos essas ligações.

Figura 27 – Etapa 2 da resolução do problema do melhor caminho.



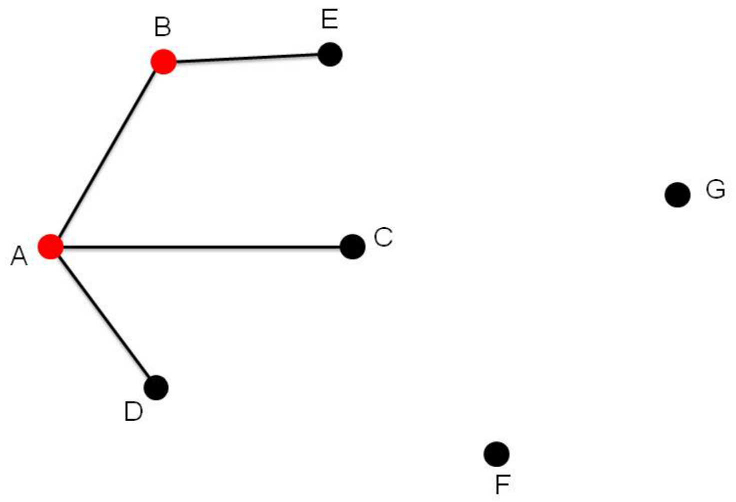
Preenchemos no Quadro 15 as pontuações analisadas, ou seja, das ligações A-B, A-C e A-D, e fechamos o vértice *B*.

Quadro 15 – Etapa 2 da resolução do problema do melhor caminho.

Fechado	***Destino***	***Pontuação***	***Origem***
X	A	0	A
X	B	5	A
	C	6	A
	D	10	A
	E		
	F		
	G		

Agora, analisaremos os caminhos imediatos a *B* ainda não fechados. Nesse caso, o único caminho é até *E*, cuja pontuação é 13. Assim o caminho de *A* até *E*, passando por *B*, tem pontuação 18 $(5+13)$, que, até essa etapa, é a menor pontuação obtida para esse destino.

Figura 28 – Etapa 3 da resolução do problema do melhor caminho.



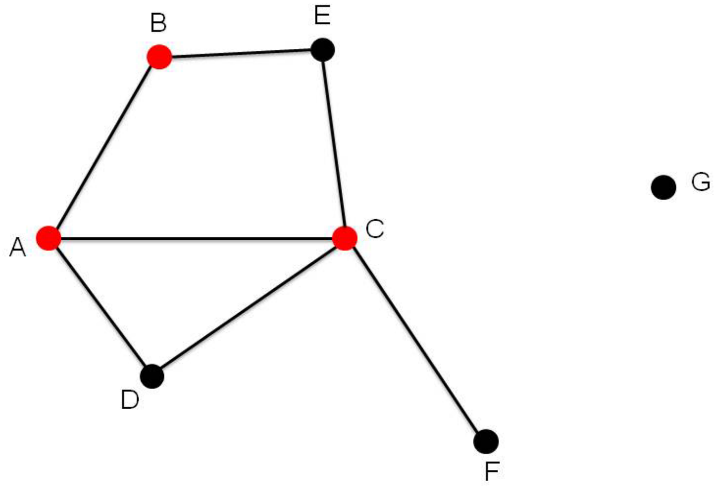
Assim, atualizamos as informações no Quadro 16.

Quadro 16 – Etapa 3 da resolução do problema do melhor caminho.

Fechado	***Destino***	***Pontuação***	***Origem***
X	A	0	A
X	B	5	A
	C	6	A
	D	10	A
	E	18	B
	F		
	G		

Passamos então a analisar os caminhos a partir de *C*, uma vez que a pontuação até esse vértice não pode ser melhorada. Assim, traçamos as ligações diretas à *C* para vértices ainda não fechados e destacamos *C* no esquema, fecheando-o.

Figura 29 – Etapa 4 da resolução do problema do melhor caminho.



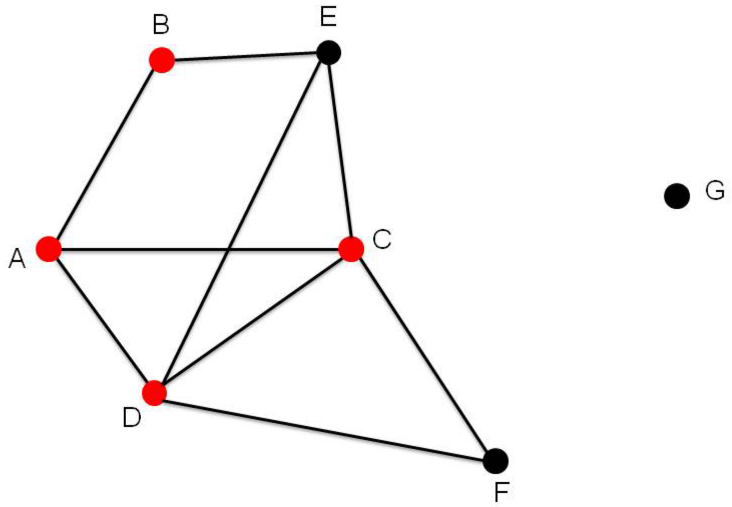
As pontuações das ligações C-D, C-E e C-F são, respectivamente, 3, 11 e 6. Assim, as pontuações partindo de *A*, passando por *C* e chegando à *D*, *E* e *F* são, respectivamente, 9 $(6+3)$, 17 $(6+11)$ e 12 $(6+6)$. Note que, até então, a menor potunação que tínhamos até *D* era 10. Assim, obtemos um caminho menor até esse vértice. Em relação ao ponto *E*, o melhor caminho correspondia a 18 pontos, ou seja, também devemos atualizar no quadro a informação para 17 pontos. Também temos de incluir a primeira pontuação obtida até *F*, conforme o Quadro 17.

Quadro 17 – Etapa 4 da resolução do problema do melhor caminho.

Fechado	***Destino***	***Pontuação***	***Origem***
X	A	0	A
X	B	5	A
X	C	6	A
	D	9	C
	E	17	C
	F	12	C
	G		

Agora, temos de fechar o vértice *D*, uma vez que este apresenta a menor pontuação em aberto. Assim, fazemos as ligações imediatas à D ainda em aberto, ou seja, D-F e D-E.

Figura 30 – Etapa 5 da resolução do problema do melhor caminho.



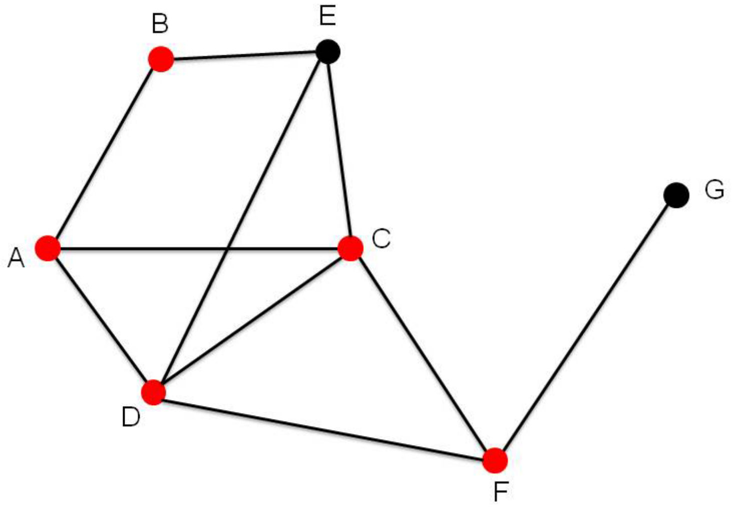
A ligação D-F gera um caminho de 13 pontos $(9+4)$. Como a menor pontuação até *F* era 12, temos de mantê-la, descartando a pontuação D-F. Já a ligação D-E gera um caminho de 15 pontos $(9+6)$, menor que os 17 pontos que tínhamos até então. Atualizamos essas informações no Quadro 18.

Quadro 18 – Etapa 5 da resolução do problema do melhor caminho.

Fechado	***Destino***	***Pontuação***	***Origem***
X	A	0	A
X	B	5	A
X	C	6	A
X	D	9	C
	E	15	D
	F	12	C
	G		

Como de *F* somente podemos fazer ligações em aberto com *G*, temos de fechar *F* e fazer tal ligação, conforme a Figura 31.

Figura 31 – Etapa 6 da resolução do problema do melhor caminho.



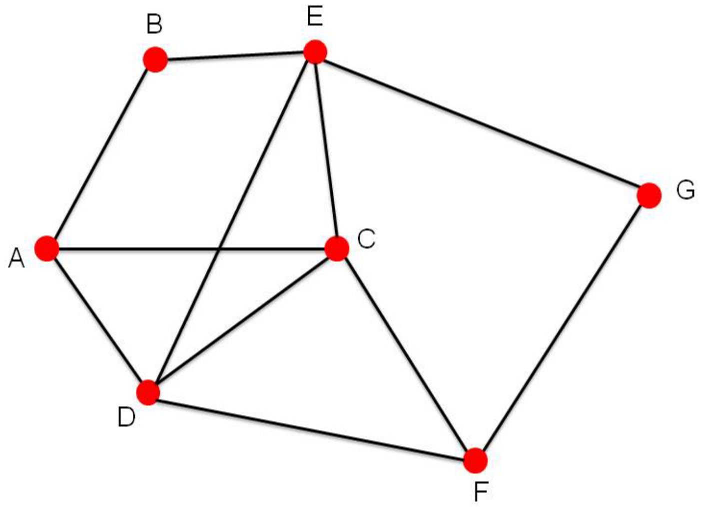
Essa ligação de *F* até *G* gera um caminho de 20 pontos $(12+8)$. Até esta etapa, esse é o melhor caminho até *G*, uma vez que foi o único que obtivemos até então. Atualizamos essa informação no Quadro 19.

Quadro 19 – Etapa 6 da resolução do problema do melhor caminho.

Fechado	***Destino***	***Pontuação***	***Origem***
X	A	0	A
X	B	5	A
X	C	6	A
X	D	9	C
	E	15	D
X	F	12	C
	G	20	F

Por fim, fechamos os pontos *E* e *G*, e fazemos a última ligação em aberto, conforme a Figura 32.

Figura 32 – Etapa 7 da resolução do problema do melhor caminho.



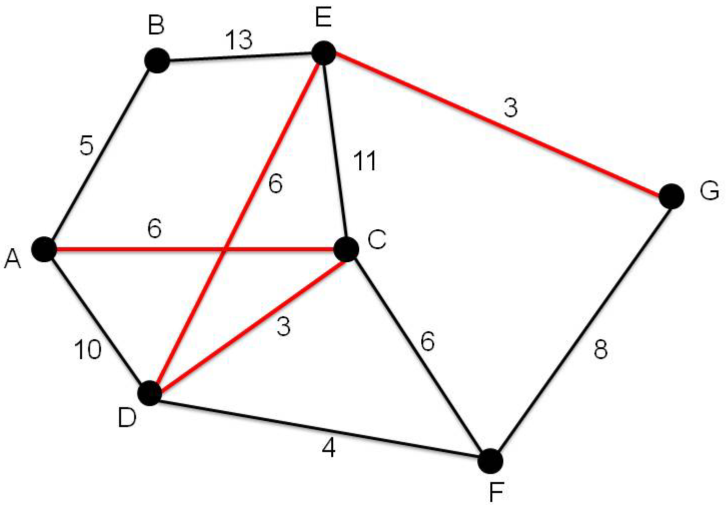
A ligação de E-G gera um caminho de 18 pontos $(15+3)$, menor que o caminho de 20 pontos que tínhamos até então. Assim, atualizamos essa pontuação no Quadro 20.

Quadro 20 – Etapa 7 da resolução do problema do melhor caminho.

Fechado	***Destino***	***Pontuação***	***Origem***
X	A	0	A
X	B	5	A
X	C	6	A
X	D	9	C
X	E	15	D
X	F	12	C
X	G	18	E

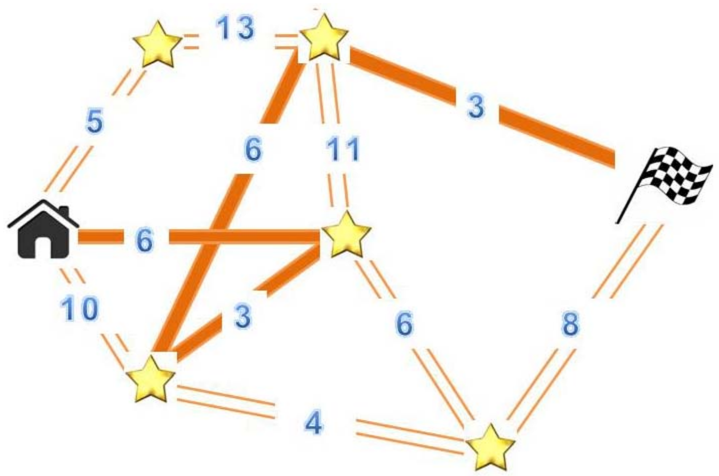
Observando o Quadro 19, com todos os vértices fechados, podemos notar que o melhor caminho de *A* até *G* no grafo, ou seja, o de menor pontuação, é aquele que corresponde à 18 pontos. Para listar a ordem dos vértices que definem esse caminho ótimo, temos de analisar o quadro em um processo regressivo, de maneira a observar, a partir do destino *G* qual a origem correspondente. Nesse caso, o caminho ótimo é indicado por A-C-D-E-G, conforme destacado no grafo a seguir da Figura 33.

Figura 33 – Representação no grafo da solução do problema do melhor caminho.



De volta a situação do jogo, o caminho em destaque na Figura 34 é aquele em que se perde menos pontos, nesse caso, 18.

Figura 34 – Representação da solução do problema do melhor caminho.



3.6.1 – Para a Sala de Aula

Este problema pode ser trabalhado em sala de aula a fim de apresentar uma aplicabilidade da Teoria de Grafos, assunto que, em geral, não é tratado no Ensino Básico. Vale ressaltar que o objetivo principal é o de apresentar o método do algoritmo, mesmo que, para esse problema especificamente, este não seja o método mais rápido de resolução. Contudo, é importante que os alunos percebam que, na prática, problemas com essa característica são mais amplos e, por esse motivo, são resolvidos com o uso de computadores, tornando-se assim um método eficiente.

Uma sugestão, é que, inicialmente, não se refira ao termo grafo no desenvolvimento desse problema. Ao final, nesse caso, seria realizada a referida formalização e a apresentação de alguns conceitos dessa teoria, como os que constam no capítulo 1.

Após a introdução do problema, uma sugestão é que os alunos realizem tentativas para resolvê-lo. Nessas tentativas, surgirão diferentes respostas. Nesse momento, cabe destacar que, para garantir que uma dessas respostas seja a solução, tem-se que analisar todos os possíveis caminhos. Assim, pode-se sugerir aos alunos tentem, de alguma maneira, organizar os procedimentos utilizados por eles, como o uso de tabela ou esquema.

Em seguida, pode-se propor a resolução do problema em conjunto com a turma a partir dos procedimentos aqui apresentados. Em cada etapa, é importante que sejam discutidos qual vértice deve ser fechado e quais as pontuações foram obtidas nas ligações.

Ao final, na análise do resultado, algumas observações podem promover uma melhor compreensão do problema pelos alunos. Uma delas é perceber que o melhor caminho, ou seja, o de menor pontuação, não corresponde ao que se passa pela menor quantidade de vias. Na tentativa inicial proposta no problema, quando se obteve 22 pontos, foram utilizadas apenas três vias, enquanto na solução ótima obteve-se 18 pontos utilizando-se quatro vias.

Essa observação permite apresentar aos alunos algumas aplicações da Teoria de grafos em situações práticas. Nelas, os pesos admitidos às arestas têm diferentes significados. Enquanto, em um estudo de logística, pode corresponder ao custo de transporte entre cidades, em uma análise para se estabelecer locais de construção de grupamentos de bombeiros, o peso pode ser o tempo de deslocamento.

Após a formalização do conceito de grafo, é possível propor aos alunos situações semelhantes à apresentada. Para isso, pode-se optar por construir um outro jogo com as mesmas vias, mas com pontuações diferentes; ou até mesmo mudar a estrutura do jogo, trocando-a por uma de outro grafo.

É importante notar que, mesmo este sendo um problema relativamente simples, pode-se perceber uma aplicação de grafos. Contudo, vale ressaltar que, na prática, quando o objetivo é minimizar situações mais complexas (grafos com mais vértices e mais arestas, por exemplo) não é nada prático o estudo desse problema sem o uso do computador. Por ser um algoritmo, esse método é adequadamente programável em linguagem computacional.

3.7 – Problema 7: Mais Pombos do que Casas

Diferente de cada outro tópico deste capítulo, quando é abordado e discutido um único problema, a proposta deste é tratar de uma importante ferramenta matemática, raramente presente no currículo de Ensino Básico.

Para isso, inicialmente, consideremos o problema abaixo.

Problema

De uma sala de aula, deseja formar aleatoriamente um grupo de alunos de maneira que seja certo que pelo menos dois desses alunos façam aniversário em um mesmo mês. Quantos alunos, no mínimo, devem formar esse grupo?

Para resolver esse problema, podemos analisar da seguinte maneira: como o ano é composto por 12 meses, a escolha de 12 alunos não garante que ocorra de dois deles aniversariarem em um mesmo mês, visto que pode cada aluno fazer aniversário em um diferente mês. Na Figura 35, as células correspondem aos meses do ano e o “X” a um dos 12 alunos.

Figura 35 – Representação dos meses do ano e dos 12 alunos.

Janeiro X	Fevereiro X	Março X	Abril X	Maio X	Junho X
Julho X	Agosto X	Setembro X	Outubro X	Novembro X	Dezembro X

Ao escolhermos o 13º aluno, este deverá ser representado em uma das 12 células da figura. Porém, cada uma delas já está ocupada por um aluno. Assim, necessariamente, ele deverá ser representado em uma célula junto com outro aluno. Desse modo, com no mínimo 13 alunos no grupo, podemos garantir a ocorrência de dois deles comemorarem o aniversário em um mesmo mês.

Esse simples problema faz uso das ideias de um importante instrumento matemático chamado Princípio das gavetas de Dirichlet, ou ainda, Princípio da casa dos pombos.

Esse princípio foi utilizado pelo matemático alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) ao abordar problemas da Teoria dos Números.

O enunciado e a demonstração que seguem é baseada em Oliveira (2010, p. 143).

Princípio das casas dos pombos

Se distribuirmos $n+1$ pombos em n casas, então alguma dessas casas conterá dois ou mais pombos.

Demonstração

Supondo por absurdo que cada casa não contém mais do que um único pombo, então, contando os pombos dessas casas, não haverá ao todo mais do que n pombos. Porém, isso contradiz a hipótese de que há $n+1$ pombos.

Ao analisar o problema proposto a partir do princípio da casa dos pombos, podemos associar cada aluno a um pombo e cada mês do ano a uma casa. Assim, temos 12 casas e, para garantir que em pelo menos uma dessas casas haja mais de um pombo, temos de ter $12+1$ pombos.

Como Dirichlet fez uso desse princípio para estudos da Teoria dos Números, cabe analisarmos um problema desse campo.

Problema

Mostre que em um conjunto qualquer com cinco números inteiros, a diferença de dois deles é divisível por 4.

Identificaremos inicialmente o que representar pelos pombos e pelas casas.

Temos que a divisão de um número inteiro por 4 pode apresentar resto igual a 0, 1, 2 ou 3. Assim, qualquer número inteiro pode ser escrito na forma

$4n + r$, com $n \in \mathbb{Z}$ e $r \in \{0, 1, 2, 3\}$. Ao calcularmos a diferença entre dois números inteiros cuja divisão por 4 tem restos iguais, temos que essa diferença é divisível por 4, pois:

$$4n_1 + r - (4n_2 + r) = 4(n_1 - n_2)$$

Assim, basta tomarmos os cinco números como sendo os pombos e os quatro possíveis restos na divisão por 4 como as casas. Desse modo, haverá pelo menos dois números que terão restos iguais na divisão por 4, cuja diferença necessariamente é divisível por 4.

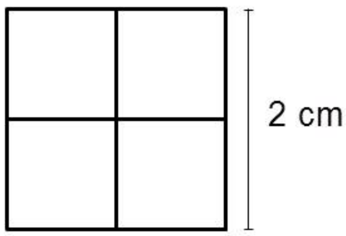
Consideremos agora um problema de natureza geométrica que pode ser abordado por meio do princípio da casa dos pombos.

Problema

Considere um quadrado de lado medindo 2 cm e sobre sua superfície a distribuição de cinco pontos distintos quaisquer. Mostre que a distância entre pelo menos dois desses pontos é menor ou igual do que $\sqrt{2}$ cm.

Consideremos inicialmente a divisão desse quadrado em quatro quadrados de lado medindo 1 cm, conforme a Figura 36.

Figura 36 – Quadrado.



Utilizando o Teorema de Pitágoras, temos que a medida da diagonal dos quadrados menores é igual a $\sqrt{2}$ cm, pois:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d = \sqrt{2}$$

Associamos os pombos aos cinco pontos e as casas, aos quatro quadrados menores. Assim, pelo princípio da casa dos pombos, pelo menos dois pontos serão distribuídos sobre um mesmo quadrado menor. Como a diagonal corresponde à maior distância entre dois pontos quaisquer de um quadrado, temos que pelo menos dois dos cinco pontos distarão no máximo $\sqrt{2}$ cm um do outro.

Uma versão mais geral do Princípio da casa dos pombos, baseada em Morgado (2006, p. 83), é dada da seguinte maneira.

Princípio das casas dos pombos (versão geral)

Se *m* pombos são colocados em *n* casas, então pelo menos uma casa deverá conter $\left[\dfrac{m-1}{n}\right]+1$ pombos.

Observação: a notação $\left[\dfrac{m-1}{n}\right]$ corresponde ao maior inteiro menor ou igual do que $\dfrac{m-1}{n}$. Por exemplo, $\left[\dfrac{20-1}{5}\right]=\left[\dfrac{19}{5}\right]=[3,8]=3$.

Demonstração

Supondo por absurdo que em cada casa tenha no máximo $\left[\dfrac{m-1}{n}\right]$ pombos. Assim, a quantidade máxima de pombos nas *n* casas será dada por $n\cdot\left[\dfrac{m-1}{n}\right]$. Como $\left[\dfrac{m-1}{n}\right]\le\dfrac{m-1}{n}$, segue que:

$$\left[\frac{m-1}{n}\right]\le\frac{m-1}{n}\Rightarrow n\cdot\left[\frac{m-1}{n}\right]\le n\cdot\frac{m-1}{n}=m-1$$

Porém, isso contradiz a hipótese de que há *m* pombos.

Para ilustrar essa versão mais geral do Princípio da casa dos pombos, consideremos uma variação do problema inicial desse tópico.

Problema

De uma sala de aula, deseja formar aleatoriamente um grupo de 30 alunos. Pelo menos quantos desses alunos fazem aniversário em um mesmo mês?

Assim como na versão original, os alunos serão representados pelos pombos e os meses do ano pelas casas. Utilizando a versão mais geral do Princípio da casa dos pombos, temos $m=30$ e $n=12$:

$$\left[\frac{30-1}{12}\right]+1=\left[\frac{29}{12}\right]+1=2+1=3$$

Portanto, no grupo de 30 alunos pelo menos 3 fazem aniversário em um mesmo mês.

Há ainda outra versão do Princípio da casa dos pombos.

Princípio das casas dos pombos (outra versão)

Considere *n* casas e um número inteiro *p*. Na casa 1 são colocados c_1 pombos; na casa 2, c_2 pombos; na casa 3, c_3 pombos; na casa 4, c_4 pombos; e assim sucessivamente até que na casa *n* sejam colocados c_n pombos.

Se $\frac{c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \ldots + c_n}{n} > p$, então, em uma das casas conterá pelo menos $p + 1$ pombos.

Demonstração

Supondo por absurdo que cada casa haja no máximo *p* pombos, ou seja, $c_i \leq p$, para $i = 1, 2, 3, 4, \ldots, n$, temos:

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \ldots + c_n \leq n \cdot p \Rightarrow \frac{c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \ldots + c_n}{n} \leq p$$

Porém, isso contradiz a hipótese de que $\frac{c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \ldots + c_n}{n} > p$

Uma interpretação para essa versão é que, se a média aritmética de um conjunto de números for maior do que um número inteiro *p*, então pelo menos um dos números desse conjunto é maior do que *p*.

Para ilustrar essa versão, consideremos o problema a seguir:

Problema

Oito amigos possuem a soma das idades igual a 377 anos. Mostre que em pelo menos um grupo formando por três desses amigos a soma das idades será maior do que 141 anos.

Inicialmente, temos de obter a quantidade de grupos diferentes que podem ser formados. Para isso, combinamos os oito amigos em trios:

$$C_{8,3} = \frac{8!}{3!(8-3)!} = 56$$

Assim, é possível formar 56 grupos diferentes com três dos oito amigos. Para obter a quantidade de trios em que cada amigo aparece, temos de combinar os demais sete amigos em duplas, uma vez que uma das três vagas do grupo já está reservada:

$$C_{7,\,2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = 21$$

Assim, cada amigo constará em 21 diferentes grupos. Nomeando de g_i a soma das idades em cada grupo, com $i = 1, 2, 3, 4, ..., 56$, temos:

$$g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + ... + g_{56} = 21 \cdot 377 = 7917$$

A média das idades de cada possível grupo é dada por:

$$\frac{g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + ... + g_{56}}{56} = \frac{7917}{56} = 141{,}375 > 141$$

Portanto, de acordo com a versão vista anteriormente do Princípio da casa dos pombos, podemos garantir que, em pelo menos um grupo, a soma das idades será maior do que 141 anos.

3.7.1 – Para a Sala de Aula

Como já mencionado, o Princípio da casa dos pombos é uma importante ferramenta para se resolver certos tipos de problemas matemáticos. De acordo com Morgado (2006, p. 81), esse princípio busca *determinar a existência ou não de conjuntos satisfazendo a certas propriedades*. No último problema apresentado, a *propriedade* era a soma das idades do trio de amigos ser maior do que 141 anos.

As ideias que permeiam o Princípio da casa dos pombos são relativamente simples, o que possibilita sua aplicação no Ensino Médio. As demonstrações das diferentes variações desse princípio podem ser desenvolvidas com os alunos.

Uma sugestão de trabalho em sala de aula é propor a resolução de alguns problemas sem a apresentação da teoria do Princípio da casa dos pombos. Assim, os alunos podem buscar alternativas para a resolução, como o processo de tentativas e erro, por exemplo. Em seguida, pode-se enunciar o princípio e suas diferentes variações.

Os problemas apresentados nesse tópico que envolve o mês de aniversário de alunos de uma turma possibilitam um experimento em sala de aula. No caso do primeiro problema, por exemplo, pode-se selecionar aleatoriamente qualquer grupo de 13 alunos e constatar que sempre haverá pelo menos dois que fazem aniversário em um mesmo mês.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os problemas apresentados neste trabalho são apenas um estímulo ao uso desse importante recurso – a Resolução de Problemas – visto que eles constituem uma pequena amostra das possibilidades de abordagem da Matemática Discreta. Cabe destacar que este trabalho apresenta uma proposta de ensino. Por isso, faz-se necessário, à medida que se desenvolva a aplicação, refletir acerca dos resultados obtidos, permitindo assim a melhora nas conduções sugeridas.

Como visto, cada problema apresentado é finalizado com sugestões de aplicação em sala de aula. Contudo, vale ressaltar que são apenas sugestões gerais e que o mais importante é respeitar as características de cada grupo de estudantes. Para aqueles que possuem uma formação básica deficitária, os problemas podem ser trabalhados de maneira que os conceitos envolvidos sejam mais detalhados, preocupando-se não apenas com o resgate do que já foi aprendido, mas também com as lacunas não preenchidas na caminhada escolar. Por outro lado, grupos mais avançados podem ser estimulados a realizarem pesquisas complementares, a participarem das demonstrações mais ativamente etc.

Uma importante ferramenta que pode estar presente no trabalho com os problemas são os programas de computador. Em alguns casos, essa ferramenta possibilita a verificação de resultados, a observação de regularidades, entre outros. No caso do problema *Posso adivinhar sua idade?*, por exemplo, os estudantes podem fazer conversões da base decimal para a base binária utilizando uma planilha eletrônica.

Outro aspecto a ser ressaltado é a possibilidade de tratar conceitos da Matemática Discreta não usuais em currículos do Ensino Básico, como algumas ideias da Teoria de grafos e o Princípio da casa dos pombos.

REFERÊNCIAS

BERGAMINI, David. **As matemáticas**. Rio de Janeiro: J. Olympio, 1969.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

______. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Básica. **Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2012.

DOMINGUES, Hygino H. **Fundamentos da aritmética**. São Paulo: Atual, 1991.

HEFEZ, Abramo. **Elementos de Aritmética**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

LIMA, Elon L.; CARVALHO, Paulo C.; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto C. **A matemática do ensino médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 1.

LIMA, Elon L.. **Alguns problemas clássicos sobre grafos**. Revista do Professor de Matemática. São Paulo: SBM, n. 12. 1989.

JURKIEWISCZ, Samuel. **Grafos – Uma introdução**. Disponível em: <http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/novos_conteudos/modulo_I/pdfs/Grafos_samuel.pdf>. Acessado em: 15 mar. 2013.

LIPSCHUTZ, Seymour; LIPSON, Marc L. **Matemática Discreta**. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2004.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e educação**: alegorias, tecnologias e temas afins. 5. ed. São Paulo: Cortez, 2006. (Questões da Nossa Época, v. 2).

Mestrado Profissional em Rede em Matemática. Disponível em: <http://www.profmat-sbm.org.br>. Acesso em: 11 mar. 2013.

MORGADO, Augusto C. O.; CARVALHO, João B. P.; CARVALHO, Paulo C. P.; FERNANDEZ, Pedro. **Análise combinatória e probabilidade**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

OLIVEIRA, Krerley I. M.; FERNÁNDEZ, Adán J. C. **Iniciação à Matemática**: um curso com problemas e soluções. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Tradução e adaptação Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

SANTALÓ, Luis A. Matemática para não matemáticos. In: PARRA, Cecilia; SAIZ, Irma (Org.). **Didática da matemática**: reflexões psicopedagógicas. Tradução Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: Artmed, 1996.

TAHAN, Malba. **O homem que calculava**. 40. ed. Rio de Janeiro: Record, 1995.

WATANABE, Renate. **Vale para 1, para 2, para 3,... vale sempre?** Revista do Professor de Matemática. São Paulo: SBM, n. 9. 1986. p. 34-7.

ANEXO

ANEXO A

O homem que calculava (1938), Capítulo XVI (A lenda do xadrez).

[...]

Difícil será descobrir, dada a incerteza dos documentos antigos, a época precisa em que viveu e reinou na Índia um príncipe chamado Iadava, senhor da província da Tiligana. Seria, porém, injusto ocultar que o nome desse monarca vem sendo apontado por vários historiadores hindus como um dos soberanos mais ricos e generosos de seu tempo.

A guerra, com o cortejo fatal de suas calamidades, muito amargou a existência do rei Iadava, transmutando-lhe o ócio e o gozo da realeza nas mais inquietantes atribulações. Adstrito ao dever, que lhe impunha a coroa, de zelar pela tranqüilidade de seus súditos, viu-se o nosso bom e generoso monarca forçado a empunhar a espada para repelir, à frente de pequeno exército, um ataque insólito e brutal do aventureiro Varangul, que se dizia príncipe de Caliã.

O choque violento das forças juncou de mortos os campos de Dacsina e tingiu de sangue as águas sagradas do rio Sandhu. O rei Iadava possuía - pelo que nos revela a crítica dos historiadores - invulgar talento para a arte militar; sereno em face da invasão iminente, elaborou um plano de batalha, e tão hábil e feliz foi em executá-lo, que logrou vencer e aniquilar por completo os pérfidos perturbadores da paz do seu reino.

O triunfo sobre os fanáticos de Varangul custou-lhe, infelizmente, pesados sacrifícios; muitos jovens quichatrias pagaram com a vida a segurança de um trono para prestígio de uma dinastia; e entre os mortos, com o peito varado por uma flecha, lá ficou no campo de combate o príncipe Adjamir, filho do rei Iadava, que patrioticamente se sacrificou, no mais aceso da refrega, para salvar a posição que deu aos seus a vitória final.

Terminada a cruenta campanha e assegurada a nova linha de suas fronteiras, regressou o rei ao suntuoso palácio de Andra, baixando, porém, formal proibição de que se realizassem as ruidosas manifestações com que os hindus soíam festejar os grandes feitos guerreiros. Encerrado em seus aposentos, só aparecia para atender aos ministros e sábios brâmanes quando algum grave problema nacional o chamava a decidir, como chefe de Estado, no interesse e para felicidade de seus súditos.

Com o andar dos dias, longe de se apagarem as lembranças da penosa campanha, mais se agravaram a angústia e a tristeza que, desde então, oprimiam o coração do rei. De que lhe poderiam servir, na verdade, os ricos palácios, os elefantes de guerra, os tesouros imensos, se já não mais vivia a seu lado aquele que fora sempre a razão de ser de sua existência? Que valor poderiam ter, aos olhos de um pai inconsolável, as riquezas materiais que não apagam nunca a saudade do filho estremecido?

As peripécias da batalha em que pereceu o príncipe Adjamir não lhe saíam do pensamento. O infeliz monarca passava longas horas traçando, sobre uma grande caixa de areia, as diversas manobras executadas pelas tropas durante o assalto. Com um sulco indicava a marcha da infantaria; ao lado, paralelo ao primeiro, outro traço mostrava o avanço dos elefantes de guerra; um pouco mais abaixo, representada por pequenos círculos dispostos em simetria, perfilava a destemida cavalaria chefiada por um velho radj que se dizia sob a proteção de Techandra, a deusa da Lua. Ainda por meio de gráficos esboçava o rei a posição das colunas inimigas, desvantajosamente colocadas, graças à sua estratégia, no campo em que se feriu a batalha decisiva.

Uma vez completado o quadro dos combatentes, com as minudências que pudera evocar, o rei tudo apagava, para recomeçar novamente, como se sentisse íntimo gozo em reviver os momentos passados na angústia e na ansiedade.

À hora matinal em que chegavam ao palácio os velhos brâmanes para a leitura dos Vedas, já o rei era visto a riscar na areia os planos de uma batalha que se reproduzia interminavelmente.

- Infeliz monarca! - murmuravam os sacerdotes penalizados. - Procede como um sudra a quem Deus privou da luz da razão. Só Dhanoutara, poderosa e clemente, poderá salvá-lo!

E os brâmanes erguiam preces, queimavam raízes aromáticas, implorando à eterna zeladora dos enfermos que amparasse o soberano de Taligana.

Um dia, afinal, foi o rei informado de que um moço brâmane - pobre e modesto - solicitava uma audiência que vinha pleiteando havia já algum tempo.

Como estivesse, no momento, com boa disposição de ânimo, mandou o rei que trouxessem o desconhecido à sua presença. Conduzido à grande sala do trono, foi o brâmane interpelado, conforme as exigências da praxe, por um dos vizires do rei.

- Quem és, de onde vens e que desejas daquele que, pela vontade de Vichnu, é rei e senhor de Taligana?

- Meu nome - respondeu o jovem brâmane - é Lahur Sessa e venho da aldeia de Namir, que trinta dias de marcha separam desta bela cidade. Ao recanto em que eu vivia chegou a notícia de que o nosso bondoso rei arrastava os dias em meio de profunda tristeza, amargurado pela ausência de um filho que a guerra viera roubar-lhe. Grande mal será para o país, pensei, se o nosso dedicado soberano se enclausurar, como um brâmane cego, dentro de sua própria dor. Deliberei, pois, inventar um jogo que pudesse distraí-lo e abrir em seu coração as portas de novas alegrias. É esse o desvalioso presente que desejo neste momento oferecer ao nosso rei Iadava.

Como todos os grandes príncipes citados nesta ou naquela página da história, tinha o soberano hindu o grave defeito de ser excessivamente curioso. Quando o informaram da prenda de que o moço brâmane era portador, não pôde conter o desejo de vê-la e apreciá-la sem mais demora.

O que Sessa trazia ao rei Iadava consistia num grande tabuleiro quadrado, dividido em sessenta e quatro quadradinhos, ou casas, iguais; sobre esse tabuleiro colocavam-se, não arbitrariamente, duas coleções de peças que se distinguiam, uma da outra, pelas cores branca e preta, repetindo, porém, simetricamente, os engenhosos formatos e subordinados a curiosas regras que lhes permitiam movimentar-se por vários modos.

Sessa explicou pacientemente ao rei, aos vizires e cortesãos que rodeavam o monarca em que consistia o jogo, ensinando-lhes as regras essenciais:

- Cada um dos partidos dispõe de oito peças pequeninas - os peões. Representam a infantaria, que ameaça avançar sobre o inimigo para desbaratá-lo. Secundando a ação dos peões vêm os elefantes de guerra, representados por peças maiores e mais poderosas; a cavalaria, indispensável no combate, aparece, igualmente, no jogo, simbolizada por duas peças que podem saltar, como dois corcéis, sobre as outras; e, para intensificar o ataque, incluem-se - para representar os guerreiros cheios de nobreza e prestígio - os dois vizires do rei.

Outra peça, dotada de amplos movimentos, mais eficiente e poderosa do que as demais, representará o espírito de nacionalidade do povo e será chamada a rainha. Completa a coleção uma peça que isolada pouco vale, mas se torna muito forte quando amparada pelas outras. É o rei.

O rei Iadava, interessado pelas regras do jogo, não se cansava de interrogar o inventor:

- E por que é a rainha mais forte e mais poderosa que o próprio rei?

- É mais poderosa - argumentou Sessa - porque a rainha representa, nesse jogo, o patriotismo do povo. A maior força do trono reside, principalmente, na exaltação de seus súditos. Como poderia o rei resistir ao ataque dos adversários, se não contasse com o espírito de abnegação e sacrifício daqueles que o cercam e zelam pela integridade da pátria?

Dentro de poucas horas o monarca, que aprendera com rapidez todas as regras do jogo, já conseguia derrotar os seus dignos vizires em partidas que se desenrolavam impecáveis sobre o tabuleiro.

Sessa, de quando em quando, intervinha, respeitoso, para esclarecer uma dúvida ou sugerir novo plano de ataque ou de defesa.

Em dado momento, o rei fez notar, com grande surpresa, que a posição das peças, pelas combinações resultantes dos diversos lances, parecia reproduzir exatamente a batalha de Dacsina.

- Reparai - ponderou o inteligente brâmane - que para conseguirdes a vitória, indispensável se torna, de vossa parte, o sacrifício deste vizir!

E indicou precisamente a peça que o rei Iadava, no desenrolar da partida - por vários motivos -, grande empenho pusera em defender e conservar.

O judicioso Sessa demonstrava, desse modo, que o sacrifício de um príncipe é, por vezes, imposto como uma fatalidade, para que dele resultem a paz e a liberdade de um povo.

Ao ouvir tais palavras, o rei Iadava, sem ocultar o entusiasmo que lhe dominava o espírito, assim falou:

- Não creio que o engenho humano possa produzir maravilha comparável a este jogo interessante e instrutivo! Movendo essas tão simples peças, aprendi que um rei nada vale sem o auxílio e a dedicação constante de seus súditos. E que, às vezes, o sacrifício de um simples peão vale mais, para a vitória, do que a perda de uma poderosa peça.

E, dirigindo-se ao jovem brâmane, disse-lhe:

- Quero recompensar-te, meu amigo, por este maravilhoso presente, que de tanto me serviu para alívio de velhas angústias. Dize-me, pois, o que desejas, para que eu possa, mais uma vez, demonstrar o quanto sou grato àqueles que se mostram dignos de recompensa.

As palavras com que o rei traduziu o generoso oferecimento deixaram Sessa imperturbável. Sua fisionomia serena não traía a menor agitação, a mais insignificante mostra de alegria ou surpresa. Os vizires olhavam-no atônitos, e entreolhavam-se pasmados diante da apatia de uma cobiça a que se dava o direito da mais livre expansão.

- Rei poderoso! - redargüiu o jovem com doçura e altivez. - Não desejo, pelo presente que hoje vos trouxe, outra recompensa além da satisfação de ter proporcionado ao senhor de Taligana um passatempo agradável, que lhe vem aligeirar as horas dantes alongadas por acabrunhante melancolia. Já estou, portanto, sobejamente aquinhoado e outra qualquer paga seria excessiva.

Sorriu, desdenhosamente, o bom soberano ao ouvir aquela resposta, que refletia um desinteresse tão raro entre os ambiciosos hindus. E, não crendo na sinceridade das palavras de Sessa, insistiu:

- Causa-me assombro tanto desdém e desamor aos bens materiais, ó jovem! A modéstia, quando excessiva, é como o vento que apaga o archote, cegando o viandante nas trevas de uma noite interminável. Para que possa o homem vencer os múltiplos obstáculos que se lhe deparam na vida, precisa ter o espírito preso às raízes de uma ambição que o impulsione a um ideal qualquer. Exijo, portanto, que escolhas, sem mais demora, uma recompensa digna de tua valiosa oferta. Queres uma bolsa cheia de ouro? Desejas uma arca repleta de jóias? Já pensaste em possuir um palácio? Almejas a administração de uma província? Aguardo a tua resposta, por isso que à minha promessa está ligada a minha palavra!

- Recusar o vosso oferecimento depois de vossas últimas palavras - acudiu Sessa - seria menos descortesia do que desobediência ao rei. Vou, pois, aceitar, pelo jogo que inventei, uma recompensa que corresponde à vossa generosidade; não desejo, contudo, nem ouro, nem terras ou palácios. Peço o meu pagamento em grãos de trigo.

- Grãos de trigo? - estranhou o rei, sem ocultar o espanto que lhe causava semelhante proposta. - Como poderei pagar-te com tão insignificante moeda?

- Nada mais simples - elucidou Sessa. - Dar-me-eis um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro; dois pela segunda, quatro pela terceira, oito pela quarta, e, assim dobrando sucessivamente, até a sexagésima quarta e última casa do tabuleiro. Peço-vos, ó rei, de acordo com a vossa magnânima oferta, que autorizeis o pagamento em grãos de trigo, e assim como indiquei!

Não só o rei como os vizires e venerandos brâmanes presentes riram-se, estrepitosamente, ao ouvir a estranha solicitação do jovem. A desambição que ditara aquele pedido era, na verdade, de causar assombro a quem menos apego tivesse aos lucros materiais da vida. O moço brâmane, que bem poderia obter do rei um palácio ou uma província, contentava-se com grãos de trigo!

- Insensato! - clamou o rei. - Onde foste aprender tão grande desamor à fortuna? A recompensa que me pedes é ridícula. Bem sabes que há, num punhado de trigo, número incontável de grãos. Devemos compreender, portanto, que com duas ou três medidas de trigo eu te pagarei folgadamente, consoante o teu pedido, pelas 64 casas do tabuleiro. É certo, pois, que pretendes uma recompensa que mal chegará para distrair, durante alguns dias, a fome do último pária do meu reino. Enfim, visto que minha palavra foi dada, vou expedir ordens para que o pagamento se faça imediatamente, conforme teu desejo.

Mandou o rei chamar os algebristas mais hábeis da corte e ordenou-lhes calculassem a porção de trigo que Sessa pretendia.

Os sábios calculistas, ao cabo de algumas horas de acurados estudos, voltaram ao salão para submeter ao rei o resultado completo de seus cálculos.

Perguntou-lhes o rei, interrompendo a partida que então jogava:

- Com quantos grãos de trigo poderei, afinal, desobrigar-me da promessa que fiz ao jovem Sessa?

- Rei magnânimo! - declarou o mais sábio dos matemáticos. - Calculamos o número de grãos de trigo que constituirá o pagamento pedido por Sessa, e obtivemos um número cuja grandeza é inconcebível para a imaginação humana. Avaliamos, em seguida, com o maior rigor, a quantas ceiras corresponderia esse número total de grãos, e chegamos à seguinte conclusão: a porção de trigo que deve ser dada a Lahur Sessa equivale a uma montanha que, tendo por base a cidade de Taligana, seria cem vezes mais alta do que o Himalaia! A índia inteira, semeados todos os seus campos, taladas todas as suas cidades, não produziria em 2 000 séculos a quantidade de trigo que, pela vossa promessa, cabe, em pleno direito, ao jovem Sessa!

Como descrever aqui a surpresa e o assombro que essas palavras causaram ao rei Iadava e a seus dignos vizires?

O soberano hindu via-se, pela primeira vez, diante da impossibilidade de cumprir a palavra dada.

Lahur Sessa - rezam as crônicas do tempo -, como bom súdito, não quis deixar aflito o seu soberano. Depois de declarar publicamente que abriria mão do pedido que fizera, dirigiu-se respeitosamente ao monarca e assim falou:

- Meditai, ó rei, sobre a grande verdade que os brâmanes prudentes tantas vezes repetem: os homens mais avisados iludem-se, não só diante da aparência enganadora dos números, mas também com a falsa modéstia dos ambiciosos. Infeliz daquele que toma sobre os ombros o compromisso de uma dívida cuja grandeza não pode avaliar com a tábua de cálculo de sua própria argúcia. Mais avisado é o que muito pondera e pouco promete!

E, após ligeira pausa, acrescentou:

- Menos aprendemos com a ciência vã dos brâmanes do que com a experiência direta da vida e das suas lições de todo dia, a toda hora desdenhadas! O homem que mais vive mais sujeito está às inquietações morais, mesmo que não as queira. Achar-se-á ora triste, ora alegre; hoje fervoroso, amanhã, tíbio; já ativo, já preguiçoso; a compostura alternará com a leviandade. Só o verdadeiro sábio, instruído nas regras espirituais, se eleva acima dessas vicissitudes, paira por sobre todas essas alternativas!

Essas inesperadas e tão sábias palavras calaram fundo no espírito do rei. Esquecido da montanha de trigo que, sem querer, prometera ao jovem brâmane, nomeou-o seu primeiro-vizir.

E Lahur Sessa, distraindo o rei com engenhosas partidas de xadrez e orientando-o com sábios e prudentes conselhos, prestou os mais assinalados benefícios ao povo e ao país, para maior segurança do trono e maior glória de sua pátria.