



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

BEATRIZ SIGNORI LONARDONI

**DESIGUALDADES DE GRONWALL CLÁSSICAS E  
SINGULARES COM APLICAÇÕES EM EQUAÇÕES  
DIFERENCIAIS**

---

Londrina

2023

BEATRIZ SIGNORI LONARDONI

**DESIGUALDADES DE GRONWALL CLÁSSICAS E  
SINGULARES COM APLICAÇÕES EM EQUAÇÕES  
DIFERENCIAIS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Marcio A. Jorge da Silva

Co-orientador: Prof. Dr. André Vicente

Londrina

2023

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da  
Universidade Estadual de Londrina**

**Dados Internacionais de Catalogação -na-Publicação (CIP)**

B369d Lonardoni, Beatriz Signori.  
Desigualdades de Gronwall Clássicas e Singulares com Aplicações em Equações Diferenciais / Beatriz Signori Lonardoni. – Londrina, 2023.  
114 f.  
Orientador: Marcio Antonio Jorge da Silva.  
Co-orientador: André Vicente.  
Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2023.  
Inclui Bibliografia.  
1. Desigualdades de Gronwall - Tese. 2. Gronwall Clássico - Tese. 3. Gronwall Singular - Tese. 4. Equações Diferenciais - Tese. 5. Derivada Fracionária - Tese. I. Jorge da Silva, Marcio Antonio. II. Vicente, André. III. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. IV. Título.

CDU 51

BEATRIZ SIGNORI LONARDONI

**DESIGUALDADES DE GRONWALL CLÁSSICAS E  
SINGULARES COM APLICAÇÕES EM EQUAÇÕES  
DIFERENCIAIS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Marcio Antonio Jorge da Silva  
Universidade Estadual de Londrina

---

Prof. Dr. Rodrigo Nunes Monteiro  
Universidade Estadual de Londrina

---

Prof. Dr. Eduardo Henrique Gomes Tavares  
Universidade Federal do Pará

Londrina, 22 de junho de 2023.

*Dedico este trabalho aos meus amados pais,  
Cirlene e Laércio.*

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus e ao Arcanjo Rafael pela minha saúde e proteção diária.

Aos meus pais, Cirlene e Laércio, e a minha irmã Giulia, por me permitirem viver este sonho e me apoiarem incessantemente. Sem eles, nada teria sido concretizado.

Ao meu namorado, Douglas Henrique, que esteve comigo em todos os momentos e foi a minha calma e motivação nas horas mais difíceis. Obrigada pela compreensão nos dias de ausência e pelo apoio incondicional.

A minha querida avó Luiza, que é a minha companheira de vida, sempre me incentivando a nunca desistir dos meus sonhos.

Ao meu orientador, professor Marcio, que desde a graduação foi um incentivo na minha vida acadêmica, me orientando e ajudando sem medir esforços, ao qual sou eternamente grata pela dedicação, amizade e paciência.

Ao professor André, por prontamente ter aceitado ser o co-orientador deste trabalho, contribuindo com inúmeras sugestões.

Um agradecimento especial aos professores da banca, Arthur, Eduardo, Rodrigo e a professora Michele, pela disponibilidade, colaboração e contribuição para a melhoria deste trabalho.

Agradeço também aos meus colegas de mestrado, pela parceria em todas as aulas, e aos professores da graduação e do PGMAC, que contribuíram positivamente para a minha formação.

Por fim, agradeço à Universidade Estadual de Londrina, pela oportunidade de realizar este curso.

*"Nunca se preocupe com números. Ajude uma pessoa de cada vez, e sempre comece pela mais próxima de você."*

*(Madre Teresa de Calcutá)*

LONARDONI, Beatriz Signori. **Desigualdades de Gronwall Clássicas e Singulares com Aplicações em Equações Diferenciais**. 2023. 114. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2023.

## RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo central o estudo de Desigualdades de Gronwall, em versões clássicas e singulares, com respaldo em resultados já fundamentados na literatura, progredindo sequencialmente para suas generalizações e correspondências, para então aplicar a teoria desenvolvida no estudo de problemas de valor inicial, de ordem inteira e fracionária. Para tanto, se fez necessário um estudo detalhado acerca de funções especiais, como as funções Gama, Beta, e a função de Mittag-Leffler, à luz do Cálculo Fracionário, para compreender o sentido da derivada temporal considerada nas aplicações do Gronwall Singular.

**Palavras-chave:** Desigualdades de Gronwall. Gronwall Clássico. Gronwall Singular. Equações Diferenciais. Derivada Fracionária.

LONARDONI, Beatriz Signori. **Classical and Singular Gronwall Inequalities with Applications in Differential Equations**. 2023. 114. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2023.

### ABSTRACT

The main goal of the present work is the study of classical and singular versions of Gronwall Inequalities, supported by results already given in the literature, sequentially progressing to their generalizations and correspondence. Then we apply the theory developed in the study of initial value problems of integer and fractional order. To do so, a detailed study of special functions such as the Gamma, Beta and the Mittag-Leffler functions was necessary, in the light of Fractional Calculus, to understand the meaning of the time-derivative considered in the applications of the Singular Gronwall inequality.

**Keywords:** Gronwall Inequalities. Classical Gronwall. Singular Gronwall. Differential Equations. Fractional Derivative.

## LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIações

|                           |   |
|---------------------------|---|
| $I$                       | Subintervalo aberto de $\mathbb{R}$   |
| $[0, T)$                  | Subintervalo de $\mathbb{R}$ , com $T > 0$  |
| $\mathbb{R}_+$            | Conjunto dos números reais não negativos  |
| $\mathbb{R}_+^*$          | Conjunto dos números reais positivos  |
| $C(I)$                    | Espaço das funções contínuas $f : I \rightarrow \mathbb{R}$   |
| $C^n(I)$                  | Espaço das funções $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis até a ordem $n \in \mathbb{N}$                         |
| $\mu$                     | Medida de Lebesgue  |
| $[f]$                     | Classe de equivalência da função $f$  |
| $f \sim g$                | Relação de equivalência entre as funções $f, g \in \mathcal{L}^p(I)$  |
| q.s.                      | Propriedade valendo quase sempre  |
| q.t.p.                    | Propriedade valendo para quase todo ponto   |
| $\mathcal{L}^p(I)$        | Espaço das funções reais $p$ -integráveis, com $p \in (0, \infty)$  |
| $L^p(I)$                  | Conjunto das classes de equivalência de funções $p$ -integráveis, com $p \in (0, \infty)$                               |
| $L^\infty(I)$             | Espaço das funções reais mensuráveis limitadas  |
| $\ \cdot\ _{L^p(I)}$      | Norma em $L^p(I)$ dada por $\ f\ _{L^p(I)} = \left( \int_I  f(x) ^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ , com $p \in (0, \infty)$ |
| $\ \cdot\ _{L^\infty(I)}$ | Norma em $L^\infty(I)$ dada por $\ f\ _{L^\infty(I)} = \inf\{C > 0;  f(x)  \leq C \text{ q.s. em } I\}$                 |
| $L_{loc}^p(I)$            | Conjunto das funções mensuráveis $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $ f ^p$ é localmente integrável                |
| $\Gamma$                  | Função Gama   |
| $B$                       | Função Beta   |
| $E_\alpha$                | Função de Mittag-Leffler com um parâmetro $\alpha > 0$  |
| $E_{\alpha, \beta}$       | Função de Mittag-Leffler com dois parâmetros $\alpha, \beta > 0$  |
| $\lfloor \cdot \rfloor$   | Função Piso dada por $\lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z}; m \leq x\}$   |
| $\frac{d}{dt}$            | Derivada usual de primeira ordem  |
| $\frac{d^n}{dt^n}$        | Derivada usual de ordem $n \in \mathbb{N}$  |
| $D_t^\alpha$              | Derivada fracionária de Riemann-Liouville de ordem $\alpha \in (0, 1)$  |
| $d_t^\alpha$              | Derivada fracionária de Caputo de ordem $\alpha \in (0, 1)$   |
| $I_t^\alpha$              | Integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem $\alpha > 0$   |
| <b>GC</b>                 | Gronwall Clássico   |
| <b>GS</b>                 | Gronwall Singular   |
| <b>PVI</b>                | Problema de Valor Inicial   |
| <b>PVIF</b>               | Problema de Valor Inicial Fracionário   |

## SUMÁRIO

|   |            |
|---|------------|
| <b>LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIACÕES</b>                        | <b>11</b>  |
| <b>INTRODUÇÃO</b>   | <b>12</b>  |
| <b>1 PRELIMINARES</b>   | <b>18</b>  |
| 1.1 DESIGUALDADES NUMÉRICAS . . . . .                         | 18         |
| 1.2 ESPAÇOS $L^p$ E RESULTADOS DE CONVERGÊNCIA . . . . .      | 19         |
| <b>2 DESIGUALDADES DE GRONWALL</b>                            | <b>23</b>  |
| 2.1 DESIGUALDADES DE GRONWALL CLÁSSICAS . . . . .             | 23         |
| 2.2 FUNÇÕES ESPECIAIS . . . . .                               | 31         |
| 2.2.1 Funções Gama e Beta . . . . .                           | 31         |
| 2.2.2 Funções de Mittag-Leffler . . . . .                     | 43         |
| 2.3 DESIGUALDADES DE GRONWALL SINGULARES . . . . .            | 49         |
| 2.4 SÍNTESE DOS RESULTADOS . . . . .                          | 85         |
| <b>3 APLICAÇÕES EM PVI E VERSÕES DIFERENCIAIS DE GRONWALL</b> | <b>88</b>  |
| 3.1 APLICAÇÕES EM PVI . . . . .                               | 88         |
| 3.2 CONCEITOS DO CÁLCULO FRACIONÁRIO . . . . .                | 92         |
| 3.3 APLICAÇÕES EM PVIF . . . . .                              | 97         |
| 3.4 CORRESPONDÊNCIA ENTRE OS RESULTADOS . . . . .             | 101        |
| 3.5 DESIGUALDADES DIFERENCIAIS DE GRONWALL . . . . .          | 104        |
| <b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>                                   | <b>110</b> |
| <b>REFERÊNCIAS</b>  | <b>112</b> |

## INTRODUÇÃO

O Cálculo Diferencial, também conhecido como Cálculo Infinitesimal, foi um dos desenvolvimentos mais importantes na história da humanidade, sendo as Equações Diferenciais uma das áreas mais fecundas da Matemática, tanto por suas aplicações ao mundo físico, modelando fenômenos, como por sua contribuição à criação e ao desenvolvimento de várias técnicas e teorias centrais para o progresso científico e tecnológico.

Um desenvolvimento considerável dessa teoria se deu na última década do século XVII, quando matemáticos como Pierre de Fermat (1601 - 1665), Isaac Newton (1642 - 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) tiveram entendimento suficiente e notação para a derivada, embasados em estudos que remontam os séculos anteriores.

Na finalidade de determinar derivadas com ordens não necessariamente inteiras, desenvolveu-se o Cálculo Fracionário, ou cálculo de ordem não inteira, definido por derivadas e integrais que assumem ordens arbitrárias. Tal conceito é tão antigo quanto o cálculo de ordem inteira, entretanto, não foi difundido da mesma forma, tendo um desenvolvimento acentuado principalmente no final do século XIX e início do século XX, culminando em aplicações importantes nos estudos de Niels Henrik Abel (1802 - 1829), Joseph Liouville (1809 - 1882), Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866), Michele Caputo (1927), dentre outros.

Das inúmeras aplicações dessas equações, que circundam outras ciências além da Matemática, como Biologia, Engenharia, Estatística, Física e Química, podemos citar o estudo nas seguintes áreas: movimento de projéteis, satélites e ondas, decaimento radioativo e reações químicas, propagação do calor, modelos estatísticos, análises quânticas, cálculo do potencial elétrico e distribuição de cargas.

Ao longo dos anos, muitos conceitos foram sendo aprimorados, até chegar às notações e procedimentos utilizados atualmente. À medida que a teoria progrediu, percebeu-se que as soluções para essas equações, tanto na versão diferencial quanto integral, não eram tão simples de serem determinadas. Em certos casos, a obtenção da solução por métodos elementares fundamentados não era possível, mesmo sabendo que a solução existe e é única.

Essas questões impulsionaram à procura por técnicas de solução, para casos específicos de equações diferenciais e integrais que não eram contemplados pela teoria posta até o momento. É nesse sentido que surgem as Desigualdades de Gronwall, como ferramentas valiosas aplicáveis à análise de questões como boa colocação, regularidade e estabilidade de problemas, descritos por equações diferenciais ou integrais.

Estudos pioneiros nessa área constam nos trabalhos de T. H. Gronwall [14] e R. Bellman [2], cujas notáveis desigualdades atraíram e continuam a atrair atenção considerável na literatura, conforme pode-se ver, por exemplo, em Bihari [3], Dragomir [8], Pata [23], Savostianov [27] e Showalter [28].

Com o passar do tempo, os modelos se tornaram mais complexos, consequen-

temente, novas generalizações das Desigualdades de Gronwall foram surgindo. Cada qual tinha por motivação uma questão específica, acarretando no desenvolvimento de inúmeras versões após tantos anos de estudo, as quais muitas das vezes aparentavam (ou não) relações entre si.

É nesse cenário que se concentra o foco inicial desse trabalho, com o propósito de apresentar ao máximo um modo de evoluir na complexidade dessas desigualdades, tendo sequência na ilustração de aplicações destas em Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), com derivadas temporais de ordem inteira e fracionária, ou seja, aplicação dentro da própria Matemática para conseguir mostrar propriedades para as EDOs, que a princípio não figuram possuir relação explícita com as Desigualdades de Gronwall.

Para isso, duas versões dessas desigualdades foram exploradas: a clássica e a singular. A Desigualdade de Gronwall Clássica (DGC) estabelece uma relação entre uma função (em geral) não negativa e sua integral (ou derivada) em um dado intervalo. De modo similar, a Desigualdade de Gronwall Singular (DGS) é uma extensão da DGC, sendo utilizada em problemas envolvendo funções que podem se tornar infinitas ou indefinidas em um ponto específico, o que denominamos por "singularidade". Esta também estabelece relações entre uma função e sua integral (ou derivada), com possíveis singularidades adicionais de uma (ou mais) função não negativa em um intervalo.

Em resumo, ambas Desigualdades de Gronwall (clássica e singular) são extremamente úteis para provar a existência e unicidade de soluções para equações diferenciais e integrais, bem como para estimar suas soluções, sendo a segunda estendida à problemas com derivadas tempo-fracionárias. Inclusive, as intrínsecas relações entre as duas versões estão detalhadas no decorrer deste trabalho.

No Capítulo 1, apresentamos algumas definições e resultados preliminares para o desenvolvimento deste estudo, fundamentando-se em Brezis [4], Cavalheiro [6], Folland [10], Isnard [16] e Kreyszig [18]. Começamos com algumas desigualdades numéricas, como as célebres desigualdades de Cauchy-Schwarz e Hölder, seguido de resultados de convergência nos espaços  $L^p$ , como o Teorema da Convergência Dominada, o qual é de extrema importância nas limitações advindas dos resultados singulares.

No Capítulo 2 entramos de fato no conteúdo principal do trabalho: as Desigualdades de Gronwall. Iniciamos a primeira seção com o estudo das DGCs, cuja versão mais básica e motivadora da teoria subsequente é a seguinte:

$$x(t) \leq a(t) + \int_0^t b(s)x(s)ds. \quad (1)$$

Para efeito de simplificação, veremos que se uma função  $x(t)$  satisfaz a desigualdade (1), sob hipótese das funções  $a$  e  $b$  serem contínuas, com  $b$  não negativa, ela também irá satisfazer a desigualdade abaixo:

$$x(t) \leq a(t) + \int_0^t a(s)b(s)e^{\int_s^t b(u)du}ds. \quad (2)$$

A conclusão em (2), embora visível (ou não), cumpre o objetivo central deste trabalho: estimar a função  $x(t)$  dependendo apenas dos parâmetros dados na desigualdade (1), a saber, as funções  $a$  e  $b$ .

Ao longo desta seção, são apresentados resultados com sucessivas generalizações a partir do Gronwall Clássico em (1), englobando, por exemplo, casos não lineares com expoentes positivos, como o expresso na seguinte desigualdade:

$$x(t) \leq a(t) + k \int_0^t b(s)[x(s)]^m ds, \quad m > 0, \quad m \neq 1. \quad (3)$$

Supondo regularidades convenientes para as funções em (3) (ver Corolário 2.6 para mais detalhes), provamos a seguinte limitação para  $x(t)$ :

$$x(t) \leq \left\{ [a(t)]^{1-m} + k(1-m) \int_0^t b(s) ds \right\}^{\frac{1}{1-m}}, \quad (4)$$

a qual possui mesma natureza que a desigualdade em (2), no que diz respeito à dependência aos parâmetros iniciais.

As versões clássicas das Desigualdades de Gronwall podem ser encontradas em generalizações ainda mais abstratas do que as apresentadas acima, com aplicações em contextos cada vez mais complexos, como pode-se ver, por exemplo, na desigualdade

$$x(t) \leq a(t) + b(t) \int_0^t L(s, x(s)) ds. \quad (5)$$

A partir de (5) e hipóteses adicionais acerca das funções  $a$ ,  $b$ ,  $y$  e  $L$  (ver Teorema 2.7 para as devidas hipóteses), conseguimos ainda limitar a função  $x(t)$  mantendo os padrões de dependência anteriores:

$$x(t) \leq a(t) + b(t) \int_0^t L(u, a(u)) e^{\int_u^t y(s, a(s)) b(s) ds} du. \quad (6)$$

As desigualdades (2), (4) e (6) trazem a tona a essência deste trabalho: estimam a função incógnita através de funções que são conhecidas a priori. Entretanto, os resultados já listados (e todos os outros da referida seção) abrangem apenas o caso das funções que acompanham  $x(t)$  nos núcleos integrais em (1), (3) e (5) serem contínuas, sem singularidades. Resultados englobando as versões singulares motivarão as seções seguintes do Capítulo 2.

Antes de prosseguir com os resultados singulares, apresentamos um estudo aprofundado das funções Gama, Beta, e da função de Mittag-Leffler (ver Seção 2.2), cujas propriedades embasaram inúmeras demonstrações das DGSs. Abordamos ainda, de forma sucinta, alguns aspectos relativos a seus desenvolvimentos históricos.

Um destaque desta seção advém da limitação obtida para a função de Mittag-

Leffler com dois parâmetros, a qual é expressa na forma de uma série de potências, dada por

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Sob as devidas hipóteses, mostramos no Teorema 2.24 que vale a estimativa

$$|E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha)| \leq C_1 e^{C_2 t}, \quad \alpha \in (0, 1),$$

para constantes positivas  $C_1$  e  $C_2$  dependentes de  $\alpha$  e  $T > 0$ . Sua prova contou com argumentos e estimativas independentes da referência original, tendo êxito por meio de propriedades da função Gama e da função Piso, as quais foram essenciais para que o argumento da função pudesse ser expresso em termo dos índices inteiros da série, sendo fruto de um longo e intenso trabalho.

A partir dessa fundamentação, adentramos no estudo das DGSs, evidenciando as similaridades e relações destas com as versões clássicas, sendo notória a necessidade de um maior instrumental teórico ao lidar com problemas envolvendo núcleos singulares. Uma generalização, correspondente à versão clássica em (1), é dada na seguinte desigualdade:

$$x(t) \leq a(t) + b(t) \int_0^t (t-s)^{\gamma-1} x(s) ds, \quad \gamma > 0. \quad (7)$$

A singularidade do núcleo integral em (7) surge para  $\gamma \in (0, 1)$ , pois neste intervalo a função  $(t-s)^{\gamma-1}$  está indefinida no ponto  $s = t$ . Considerando (7), a estimativa obtida para  $x(t)$  é expressa em termos da função de Mittag-Leffler com um parâmetro:

$$x(t) \leq a(t) E_\gamma(b(t) \Gamma(\gamma) t^\gamma), \quad E_\gamma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\gamma k + 1)}. \quad (8)$$

Diferente do caso não linear apresentado em (3) para o Gronwall Clássico, seu correspondente singular, dado pela desigualdade

$$x(t) \leq a(t) + \int_0^t (t-s)^{\beta-1} b(s) x^m(s) ds, \quad m, \beta > 0, \quad m \neq 1, \quad (9)$$

recorreu a análise de duas situações:  $\beta > \frac{1}{2}$  e  $\beta \in (0, \frac{1}{2}]$ . Para tais intervalos, obtemos, respectivamente, as seguintes limitações:

$$\bullet x(t) \leq e^t \left\{ [\sqrt{2}a(t)]^{2(1-m)} + C_{\beta,m} \int_0^t e^{2(m-1)s} b^2(s) ds \right\}^{\frac{1}{2(1-m)}}; \quad (10)$$

$$\bullet x(t) \leq e^t \left\{ (2^{q-1}a^q(t))^{1-m} + K_{\beta,m} \int_0^t e^{(m-1)qs} b^q(s) ds \right\}^{\frac{1}{q(1-m)}}. \quad (11)$$

Assim como na seção do Gronwall Clássico, as desigualdades (8), (10) e (11) retratam o vigor das Desigualdades de Gronwall: estimar funções desconhecidas, sem ser necessário determinar sua expressão analítica. Além disso, tal como nos resultados clássicos, os singulares também progrediram para teoremas mais gerais e abstratos, até a obtenção da DGS com duas singulares, da forma

$$x(t) \leq a(t) + \int_0^t (t-s)^{\beta-1} s^{\gamma-1} b(s)x(s)ds, \quad \beta, \gamma > 0. \quad (12)$$

Com esta estimativa e as devidas suposições acerca das funções envolvidas, provamos limitações para  $x(t)$ , considerando dois intervalos para os expoentes das singularidades, com teses ainda mais abstratas do que as obtidas em (10) e (11). Isto será precisamente provado no Teorema 2.38.

Um outro caso da DGS, envolvendo a soma de integrais com termos singulares, é dado na desigualdade abaixo:

$$x(t) \leq a(t) + b(t) \int_0^t [(t-s)^{\beta-1} + (t-s)^{\gamma-1}]x(s)ds, \quad \gamma \geq \beta > 0. \quad (13)$$

A partir de (13), obtém-se a seguinte limitação para  $x(t)$  (novamente em termos da função de Mittag-Leffler, com entradas advindas das funções conhecidas à priori):

$$x(t) \leq a(t)E_\beta(Kb(t)\Gamma(\beta)t^\beta), \quad E_\beta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\beta k + 1)}. \quad (14)$$

Os resultados provenientes de (12) e (13) ilustram procedimentos para lidar com problemas envolvendo uma ou mais singularidades, fazendo uso de argumentos iterativos até recair em estimativas não singulares, para então aplicar resultados clássicos já sistematizados. Todas as hipóteses, conclusões e demonstrações precisas para os resultados supracitados (DGCs e DGSs) serão dadas no Capítulo 2.

A partir desses resultados, desenvolvemos no Capítulo 3 duas aplicações das Desigualdades de Gronwall: a primeira em um problema de valor inicial de ordem inteira (caso do Gronwall Clássico) e a segunda em um problema de valor inicial fracionário (caso do Gronwall Singular). Iniciamos considerando o PVI dado por

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f(t, x), & t > 0, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (15)$$

Mediante hipóteses apropriadas para  $f$  em (15), mostramos a dependência da solução com respeito aos dados iniciais (para as definições precisas dos conceitos relativos a solução do PVI, ver Seção 3.1). Para tal, sequenciamos as hipóteses acerca de sua limitação,

tendo como suposição inicial a seguinte condição para  $f$ :

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|, \quad L > 0. \quad (16)$$

Supondo a limitação em (16) e considerando  $x$  e  $y$  soluções do PVI (15), com dados iniciais  $x_0$  e  $y_0$ , respectivamente, provamos que

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0|e^{Lt}, \quad (17)$$

sendo (17) um meio para provar a unicidade de solução do PVI em questão.

Na sequência deste capítulo, estendemos os resultados de dependência para problemas do tipo fracionário, considerando o PVIF dado por

$$\begin{cases} d_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \quad t > 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (18)$$

onde  $d_t^\alpha$  designa a derivada fracionária segundo Caputo, que será introduzida na Seção 3.2.

Com a estimativa (16) e em termos das soluções do PVIF (18), provamos que

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0|E_\alpha(Lt^\alpha), \quad E_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (19)$$

sendo a desigualdade (19) uma ferramenta oportuna para provar a unicidade de solução para o problema (18) (para o estudo de conceitos relativos às soluções de equações diferenciais fracionárias, ver Seção 3.2).

Nas aplicações, em ambos os problemas (PVI e PVIF), avançamos em hipóteses mais gerais de limitação para a função  $f$ , da forma

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \phi(t)|x - y|^m, \quad m > 0. \quad (20)$$

Para finalizar o capítulo de aplicações, apresentamos algumas versões diferenciais das Desigualdades de Gronwall (ver Seção 3.5), a partir das quais analisamos o comportamento assintótico da solução de determinadas equações diferenciais. Consta ainda, no final dos Capítulos 2 e 3, uma síntese dos resultados neles abordados.

No estudo das Desigualdades de Gronwall, nos respaldamos nas referências [8, 15, 19, 21, 23, 25, 26, 27, 28, 31], e para a análise das propriedades relativas às funções especiais da Seção 2.2, assim como para a teoria explorada acerca do Cálculo Fracionário, nos baseamos em [1, 5, 7, 9, 12, 13, 17, 22, 24, 29]. Os resultados aqui apresentados elucidarão a importância das Desigualdades de Gronwall no desenvolvimento da Análise Matemática como um todo, sendo a utilização das mesmas uma via para concluir resultados úteis em uma variedade de problemas em Matemática e outros campos das ciências.

## 1 PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentaremos definições e resultados que serão necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Como o objetivo é apenas recordá-los, as demonstrações podem ser encontradas nas referências citadas.

### 1.1 DESIGUALDADES NUMÉRICAS

**Teorema 1.1** (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Seja  $H$  um espaço vetorial com produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e norma induzida. Então,*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in H.$$

*Demonstração.* Ver Kreyszig [18], Capítulo 1, Seção 1.2. □

**Proposição 1.2** (Desigualdade de Young). *Sejam  $a$  e  $b$  constantes não negativas e  $1 < p, q < \infty$  tais que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Então,*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

*Demonstração.* Ver Isnard [16], Proposição 12.11, página 219. □

**Observação 1.1.1.** *Os números  $p$  e  $q$  que satisfazem a igualdade*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

*são chamados de expoentes conjugados.*

**Teorema 1.3** (Desigualdade de Hölder). *Sejam  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  números reais não negativos, com  $n \in \mathbb{N}$ , e  $p, q > 1$  tais que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Então,*

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

*Demonstração.* Ver Kreyszig [18], Subseção 1.2-3, página 13. □

**Corolário 1.4.** *Sejam  $r > 0$ , com  $r \neq 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$ . Então,*

$$(a_1 + \dots + a_n)^r \leq n^{r-1} (a_1^r + \dots + a_n^r). \quad (1.1)$$

*Demonstração.* Consequência da Desigualdade de Hölder. □

## 1.2 ESPAÇOS $L^p$ E RESULTADOS DE CONVERGÊNCIA

Nesta seção,  $I$  denotará um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}$  e  $\mu$  a medida de Lebesgue. Para um estudo mais detalhado sobre esta medida e suas propriedades, assim como à respeito da construção da integral de Lebesgue, ver, por exemplo, Folland [10] e Isnard [16].

**Definição 1.2.1** (Espaços  $L^p$ ). *Sejam  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $1 \leq p < \infty$  e  $\mathcal{L}^p(I)$  o conjunto das funções mensuráveis  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $|f|^p$  é integrável (no sentido de Lebesgue) em  $I$ , ou seja,*

$$\mathcal{L}^p(I) = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é mensurável e } \int_I |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

*Diremos que duas funções  $f, g \in \mathcal{L}^p(I)$  são equivalentes, e denotamos por  $f \sim g$ , se  $f = g$  q.s.<sup>1</sup> em  $I$ . Indicaremos por  $L^p(I)$  o conjunto das classes de equivalência de funções  $p$ -integráveis:*

$$L^p(I) = \mathcal{L}^p(I) / \sim.$$

*Para  $p = \infty$ , definimos o espaço das funções reais mensuráveis limitadas pelo conjunto*

$$L^\infty(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é limitada q.s. em } I\}.$$

**Observação 1.2.1.** *Segue da Definição 1.2.1 que os elementos do conjunto  $L^p(I)$  são classes de equivalência de funções em  $\mathcal{L}^p(I)$ . Entretanto, a fim de simplificar a notação, escreveremos  $f \in L^p(I)$  no lugar de  $[f] \in L^p(I)$ .*

**Observação 1.2.2.** *Temos que:*

- (i)  $L^p(I)$  é um espaço vetorial para  $1 \leq p \leq \infty$ , com soma e produto por escalar usuais.
- (ii) Para  $1 \leq p < \infty$ ,  $L^p(I)$  é um espaço normado com a norma definida por

$$\|f\|_{L^p(I)} = \left( \int_I |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall f \in L^p(I).$$

- (iii) Para  $p = \infty$ ,  $L^\infty(I)$  é um espaço normado com a norma definida por

$$\|f\|_{L^\infty(I)} = \sup_{x \in I} \text{ess}|f(x)| := \inf \{C > 0; |f(x)| \leq C \text{ q.s. em } I\}, \quad \forall f \in L^\infty(I).$$

**Definição 1.2.2.** *Uma função mensurável  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é dita localmente integrável se, para todo subconjunto compacto  $K \subset \mathbb{R}$ ,*

$$\int_K f(x) dx < \infty.$$

*Indicaremos por  $L^p_{loc}(I)$ , para  $p \geq 1$ , o conjunto das funções mensuráveis  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $|f|^p$  é localmente integrável.*

<sup>1</sup>Dizemos que duas funções são iguais quase sempre se diferem apenas em um conjunto de medida nula.

**Teorema 1.5** (Teste Limite da Comparação). *Sejam  $f, g : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}_+$  (com  $b < \infty$  ou  $b = \infty$ ) funções localmente integráveis, com  $g(x) > 0$ , satisfazendo*

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = M \left( \text{ou } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = M, \text{ se } b = \infty \right).$$

(i) *Se  $0 < M < \infty$ , então  $\int_a^b f(x)dx$  e  $\int_a^b g(x)dx$  são ambas convergentes ou divergentes.*

(ii) *Se  $M = \infty$  e  $\int_a^b g(x)dx = \infty$ , então  $\int_a^b f(x)dx = \infty$ .*

(iii) *Se  $M = 0$  e  $\int_a^b g(x)dx$  é convergente, então  $\int_a^b f(x)dx$  é convergente.*

*Demonstração.* Ver Cavalheiro [6], Teorema 1.33, página 15. □

**Lema 1.6.** *Se  $p < 1$ , então a integral  $\int_0^1 \frac{1}{s^p} ds$  é convergente.*

*Demonstração.* Se  $p < 1$ , então

$$\int_0^1 \frac{1}{s^p} ds = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_t^1 \frac{1}{s^p} ds = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left. \frac{s^{1-p}}{1-p} \right|_t^1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{1-p} - \frac{t^{1-p}}{1-p} \right) \stackrel{1-p > 0}{=} \frac{1}{1-p}.$$

□

**Lema 1.7.** *Se  $p > -1$  ou  $q > -1$ , então a integral  $\int_0^1 s^p(1-s)^q ds$  é convergente.*

*Demonstração.* Dividiremos a prova nos casos a seguir.

(i)  $p > -1$ .

Como  $\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{s^p(1-s)^q}{s^p} = 1$  e  $\int_0^1 s^p ds$  converge para  $p > -1$  pelo Lema 1.6, segue do Teste Limite da Comparação (Teorema 1.5) que a integral  $\int_0^1 s^p(1-s)^q ds$  converge para todo  $q \in \mathbb{R}$ .

(ii)  $q > -1$ .

Como  $\lim_{s \rightarrow 1^-} \frac{s^p(1-s)^q}{(1-s)^q} = 1$  e a integral

$$\int_0^1 (1-s)^q ds = \int_1^0 u^q(-du) = \int_0^1 s^q ds$$

converge para  $q > -1$  pelo Lema 1.6, segue do novamente do Teorema 1.5 que a integral  $\int_0^1 s^p(1-s)^q ds$  converge para todo  $p \in \mathbb{R}$ .

Segue dos casos anteriores que a integral  $\int_0^1 s^p(1-s)^q ds$  converge se  $p > -1$  ou  $q > -1$ . □

**Definição 1.2.3.** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) é chamada absolutamente contínua se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que, para qualquer conjunto finito de intervalos disjuntos  $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n)$ , com  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\sum_{j=1}^n (\beta_j - \alpha_j) < \delta \implies \sum_{j=1}^n |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| < \varepsilon. \quad (1.2)$$

De maneira geral,  $f$  é dita ser absolutamente contínua em  $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$  se a condição em (1.2) for satisfeita sempre que os intervalos  $(\alpha_j, \beta_j)$  estão em  $[\alpha, \beta]$ , para  $j = 1, \dots, n$ .

**Teorema 1.8** (Teorema Fundamental do Cálculo para Integral de Lebesgue). *Sejam  $T > 0$  e  $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  (ou  $\mathbb{C}$ ) uma função. Então são equivalentes:*

- (i)  $f$  é absolutamente contínua em  $[0, T]$ ;
- (ii)  $f(t) - f(0) = \int_0^t g(s) ds$  para alguma função  $g \in L^1([0, T], \mathbb{R})$ ;
- (iii)  $f$  é diferenciável quase sempre em  $[0, T]$ ,  $f' \in L^1([0, T], \mathbb{R})$  e  $f(t) - f(0) = \int_0^t f'(s) ds$ .

*Demonstração.* Ver Folland [10], Teorema 3.35, página 106. □

**Proposição 1.9** (Desigualdade de Hölder). *Sejam  $I \subset \mathbb{R}$  aberto e  $p, q \in [1, \infty]$  expoentes conjugados. Se  $f \in L^p(I)$  e  $g \in L^q(I)$ , então  $fg \in L^1(I)$  e*

$$\|fg\|_{L^1(I)} \leq \|f\|_{L^p(I)} \|g\|_{L^q(I)}.$$

*Demonstração.* Ver Brezis [4], Teorema 4.6, página 92. □

**Teorema 1.10.** *Sejam  $f, g : I \rightarrow [0, +\infty]$  funções integráveis tais que  $f \leq g$  q.s. Então,*

$$\int_I f d\mu \leq \int_I g d\mu.$$

*Demonstração.* Ver Isnard [16], Proposição 5.19, página 67. □

**Teorema 1.11.** *Seja  $f : I \rightarrow [0, +\infty]$  uma função mensurável tal que*

$$\int_I f d\mu < +\infty.$$

*Então,  $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$ , onde*

$$\{f = +\infty\} = \{x \in \Omega \mid f(x) = +\infty\}.$$

*Demonstração.* Ver Isnard [16], Proposição 5.21, página 68. □

No estudo de problemas envolvendo equações diferenciais frequentemente nos deparamos com sequências de funções, as quais precisamos tomar o limite em espaços apropriados. Além disso, é natural o surgimento de sequências envolvendo integrais, sendo os espaços  $L^p$  ambientes naturais para trabalharmos. Neste contexto, o próximo teorema será uma ferramenta útil para a passagem do limite em estimativas integrais, que surgirão na demonstração de uma Desigualdade de Gronwall.

**Teorema 1.12** (Convergência Dominada). *Sejam  $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  funções mensuráveis, com  $n \in \mathbb{N}$ , tais que  $f_n \rightarrow f$  q.t.p.. Se existe uma função integrável  $g : I \rightarrow [0, +\infty]$  tal que  $|f_n| \leq g$  q.t.p., então as funções  $f_n$  e  $f$  são integráveis e*

$$\int_I f_n d\mu \rightarrow \int_I f d\mu.$$

*Demonstração.* Ver Isnard [16], Teorema 7.22, página 101. □

## 2 DESIGUALDADES DE GRONWALL

Neste capítulo, demonstraremos Desigualdades de Gronwall em duas versões: clássicas e singulares. No decorrer das seções, os resultados similares de cada um dos casos serão referenciados, contando com uma série de teoremas no domínio destas desigualdades, inclusive com generalizações não lineares. Estes desempenharão um papel muito importante nas aplicações do Capítulo 3, nas quais consideramos problemas de valor inicial com ordem inteira e fracionária. Como já comentado anteriormente, utilizaremos a sigla "GC" para designar o Gronwall Clássico e "GS" para o Gronwall Singular. No que segue, iremos considerar o intervalo  $[0, T) \subset \mathbb{R}$ , com  $T > 0$ .

### 2.1 DESIGUALDADES DE GRONWALL CLÁSSICAS

**Teorema 2.1 (GC1).** *Sejam  $x, a, b : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas, com  $b$  não negativa. Se*

$$x(t) \leq a(t) + \int_0^t b(s)x(s)ds, \quad t \in [0, T), \quad (2.1)$$

então

$$x(t) \leq a(t) + \int_0^t a(s)b(s)e^{\int_s^t b(u)du}ds, \quad t \in [0, T). \quad (2.2)$$

*Demonstração.* Consideremos a função  $y(t) := \int_0^t b(s)x(s)ds$  em  $[0, T)$ . Nestas condições,

$$y'(t) = b(t)x(t) \stackrel{(2.1)}{\leq} a(t)b(t) + b(t)y(t), \quad t \in [0, T). \quad (2.3)$$

Multiplicando (2.3) por  $e^{-\int_0^t b(s)ds} > 0$ , obtemos:

$$\frac{d}{dt} \left[ y(t)e^{-\int_0^t b(s)ds} \right] \leq a(t)b(t)e^{-\int_0^t b(s)ds}, \quad t \in [0, T). \quad (2.4)$$

Integrando (2.4) em  $[0, t]$  segue que

$$y(t) \leq \int_0^t a(u)b(u)e^{\int_u^t b(s)ds}du, \quad t \in [0, T).$$

Como  $x(t) \leq a(t) + y(t)$  por hipótese, segue a prova de (2.2).  $\square$

**Observação 2.1.1.** *Com base no Teorema 2.1 vemos que, no caso de funções constantes, ou seja, tendo por hipótese a desigualdade*

$$x(t) \leq a + b \int_0^t x(s)ds,$$

obtemos uma estimativa do tipo exponencial para  $x$ , dada por

$$x(t) \leq -a + ae^{bt} \leq ae^{bt}.$$

**Teorema 2.2 (GC2).** *Sejam  $x$  e  $b$  funções contínuas e  $a$  e  $y$  funções integráveis, ambas definidas em  $[0, T)$ , com  $b$  e  $y$  não negativas. Se*

$$x(t) \leq a(t) + y(t) \int_0^t b(s)x(s)ds, \quad t \in [0, T), \quad (2.5)$$

então

$$x(t) \leq a(t) + y(t) \int_0^t a(s)b(s)e^{\int_s^t b(r)y(r)dr} ds, \quad t \in [0, T). \quad (2.6)$$

*Demonstração.* Consideremos a função  $z : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$z(t) := \int_0^t b(s)x(s)ds.$$

Sendo  $b$  não negativa segue que

$$z'(s) \stackrel{(2.5)}{\leq} a(s)b(s) + b(s)y(s)z(s), \quad t \in [0, T). \quad (2.7)$$

Multiplicando (2.7) pelo fator integrante  $e^{\int_s^t b(r)y(r)dr} > 0$  e integrando em  $[0, t]$ , obtemos:

$$z(t) \leq \int_0^t a(s)b(s)e^{\int_s^t b(r)y(r)dr} ds. \quad (2.8)$$

Sendo  $y(t) \geq 0$  para  $t \in [0, T)$ , de (2.5) e (2.8) segue a prova de (2.6).  $\square$

**Observação 2.1.2.** *O Teorema 2.2 é uma generalização do Teorema 2.1. Versões modificadas desses resultados podem ser encontradas em Dragomir [8], com a inversão nos sinais das desigualdades.*

Os resultados clássicos de Gronwall vistos anteriormente são lineares com relação a função incógnita  $x(t)$ . No que segue, apresentaremos generalizações não lineares de tais desigualdades, por meio das quais será possível perceber o maior nível de complexidade nas demonstrações se comparadas ao caso inicial.

O próximo resultado é uma modificação do Teorema 21 de Dragomir [8].

**Teorema 2.3 (GC3).** *Seja  $x : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  uma função contínua satisfazendo a desigualdade*

$$x(t) \leq c + \int_0^t \left\{ a(s)x(s) + b(s)[x(s)]^m \right\} ds, \quad t \in [0, T), \quad (2.9)$$

onde  $a : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$  e  $b : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  são funções contínuas,  $m > 0$ , com  $m \neq 1$ , e  $c \in \mathbb{R}_+^*$ .

Então,

$$x(t) \leq \left\{ c^{1-m} e^{(1-m) \int_0^t a(r) dr} + (1-m) \int_0^t b(s) e^{(1-m) \int_s^t a(r) dr} ds \right\}^{\frac{1}{1-m}}, \quad t \in [0, T].$$

*Demonstração.* Consideremos  $m > 1$  e  $y(t)$  a função dada por

$$y(t) := c + \int_0^t \left\{ a(s)x(s) + b(s)[x(s)]^m \right\} ds, \quad t \in [0, T].$$

Nestas condições,  $y(0) = c$  e

$$y'(t) = a(t)x(t) + b(t)[x(t)]^m \stackrel{(2.9)}{\leq} a(t)y(t) + b(t)[y(t)]^m, \quad t \in [0, T],$$

e como  $m > 1$ , obtemos:

$$(m-1)y'(t) \leq (m-1)a(t)y(t) + (m-1)b(t)[y(t)]^m, \quad t \in [0, T]. \quad (2.10)$$

Se  $z(t) := -[y(t)]^{1-m}$ , então

$$\begin{aligned} z'(t) &= (m-1)[y(t)]^{-m}y'(t) \\ &\stackrel{(2.10)}{\leq} [y(t)]^{-m} \{ (m-1)a(t)y(t) + (m-1)b(t)[y(t)]^m \} \\ &= (m-1)a(t)[y(t)]^{1-m} + (m-1)b(t), \end{aligned}$$

implicando em

$$z'(t) + (m-1)a(t)z(t) \leq (m-1)b(t), \quad t \in [0, T]. \quad (2.11)$$

Multiplicando (2.11) pelo fator integrante  $e^{\int_0^t (m-1)a(r) dr} > 0$  segue que

$$\frac{d}{dt} \left( z(t) e^{\int_0^t (m-1)a(r) dr} \right) \leq (m-1)b(t) e^{(m-1) \int_0^t a(r) dr}, \quad t \in [0, T]. \quad (2.12)$$

Integrando (2.12) em  $[0, t]$ , encontramos

$$z(t) e^{\int_0^t (m-1)a(r) dr} - z(0) \leq (m-1) \int_0^t b(s) e^{(m-1) \int_0^s a(r) dr} ds, \quad t \in [0, T].$$

Substituindo  $z$  na desigualdade anterior segue que

$$[y(t)]^{1-m} \geq c^{1-m} e^{(1-m) \int_0^t a(r) dr} + (1-m) \int_0^t b(s) e^{(1-m) \int_s^t a(r) dr} ds, \quad t \in [0, T].$$

Sendo  $x(t) \leq y(t)$  e  $1 - m < 0$  por hipótese, obtemos:

$$[x(t)]^{1-m} \geq [y(t)]^{1-m} \geq c^{1-m} e^{(1-m) \int_0^t a(r) dr} + (1-m) \int_0^t b(s) e^{(1-m) \int_s^t a(r) dr} ds, \quad t \in [0, T],$$

o que implica em

$$x(t) \leq \left\{ c^{1-m} e^{(1-m) \int_0^t a(r) dr} + (1-m) \int_0^t b(s) e^{(1-m) \int_s^t a(r) dr} ds \right\}^{\frac{1}{1-m}}, \quad t \in [0, T].$$

Para  $m \in (0, 1)$  a prova é análoga, bastando adaptar os sinais das desigualdades.  $\square$

A demonstração do Teorema 2.3 elucida um procedimento geral para provar Desigualdades de Gronwall Clássicas, envolvendo combinações da função incógnita com diferentes potências reais positivas. No próximo resultado, cuja demonstração considerou os trabalhos de Bihari [3] e Dragomir [8], apresentaremos um procedimento geral envolvendo a composição de uma função contínua com  $x(t)$ , a qual pode ser particularizada para inúmeras aplicações de casos não lineares.

**Teorema 2.4 (GC4).** *Seja  $x : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$  uma função contínua que satisfaça a desigualdade*

$$x(t) \leq M + \int_0^t a(s) y(x(s)) ds, \quad t \in [0, T), \quad (2.13)$$

onde  $M \in \mathbb{R}_+$ ,  $a : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$  é contínua, e  $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  é contínua e não decrescente. Então

$$x(t) \leq Y^{-1} \left( Y(M) + \int_0^t a(s) ds \right), \quad t \in [0, T),$$

sendo  $Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$Y(u) := \int_0^u \frac{1}{y(s)} ds, \quad u \in \mathbb{R}_+.$$

*Demonstração.* Definindo  $z(t) := \int_0^t a(s) y(x(s)) ds$  em  $[0, T)$ , obtemos de (2.13) e pelo fato de  $y$  ser não decrescente que

$$z'(t) = a(t) y(x(t)) \leq a(t) y \left( M + \int_0^t a(s) y(x(s)) ds \right) = a(t) y(M + z(t)), \quad t \in [0, T). \quad (2.14)$$

Sendo  $y$  estritamente positiva, obtemos de (2.14) que

$$\frac{1}{y(M + z(t))} z'(t) \leq a(t), \quad t \in [0, T). \quad (2.15)$$

Integrando (2.15) em  $[0, t]$  e fazendo a mudança de variáveis  $s = M + z(u)$ , obtemos:

$$\int_M^{M+z(t)} \frac{1}{y(u)} du \leq \int_0^t a(u) du, \quad t \in [0, T),$$

ou equivalentemente,

$$-\int_0^M \frac{1}{y(u)} du + \int_0^{M+z(t)} \frac{1}{y(u)} du \leq \int_0^t a(u) du, \quad t \in [0, T). \quad (2.16)$$

Segue de (2.16) que

$$Y(M + z(t)) \leq Y(M) + \int_0^t a(u) du, \quad t \in [0, T). \quad (2.17)$$

Para que uma função seja inversível na imagem, basta que ela seja injetora, pois a sobrejetividade está garantida pela restrição do contradomínio. Sendo  $Y'(s) = \frac{1}{y(s)} > 0$  para todo  $s \in \mathbb{R}_+$ , segue que a mesma é crescente, conseqüentemente, injetora e inversível, com inversa também crescente. Desta forma, de (2.17) e da hipótese, para  $t \in [0, T)$  concluímos que

$$x(t) \leq M + z(t) \leq Y^{-1}\left(Y(M) + \int_0^t a(u) du\right).$$

□

O resultado a seguir apresenta uma generalização do Teorema 2.4, com argumentos semelhantes na demonstração, sendo uma versão modificada do Teorema 28 de Dragomir [8]. Tal resultado será de extrema importância na demonstração dos Teoremas 2.31 e 2.32, nos quais aparecem Desigualdades de Gronwall Singulares, mostrando a estreita relação entre as versões clássicas e singulares.

**Teorema 2.5 (GC5).** *Sejam  $k > 0$ ,  $a : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$  não decrescente de classe  $C^1(0, T)$ ,  $b, x : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$  funções contínuas e  $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  contínua e não decrescente, com  $y(0) = 0$  e  $y(t) > 0$  em  $(0, T)$ . Se*

$$x(t) \leq a(t) + k \int_0^t b(s)y(x(s))ds, \quad t \in [0, T), \quad (2.18)$$

então

$$x(t) \leq Y^{-1}\left(Y(a(t)) + k \int_0^t b(s)ds\right), \quad t \in [0, T_1],$$

onde  $Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por  $Y(u) := \int_{u_0}^u \frac{1}{y(s)} ds$ , com  $u_0 \in \mathbb{R}_+$ ,  $Y^{-1}$  é a inversa de  $Y$  e  $T_1 \in \mathbb{R}_+^*$  é tal que

$$\left(Y(a(t)) + k \int_0^t b(s)ds\right) \in \text{Dom}(Y^{-1}), \quad t \in [0, T_1].$$

*Demonstração.* Consideremos a função definida por

$$z(t) := a(t) + k \int_0^t b(s)y(x(s))ds, \quad t \in [0, T].$$

Nos pontos em que  $z(t) = 0$  a prova é imediata. Façamos a prova para os pontos  $t \in [0, T)$  tal que  $z(t) > 0$ . Nestas condições,  $y(z(t)) > 0$  pelo fato de  $y$  ser não decrescente, e como  $0 \leq y(x(t)) \leq y(z(t))$ , segue que

$$0 \leq y(x(t))[y(z(t))]^{-1} \leq 1. \quad (2.19)$$

Sendo  $z$  diferenciável temos que

$$\frac{z'(t)}{y(z(t))} \stackrel{(2.19)}{\leq} \frac{a'(t)}{y(z(t))} + kb(t). \quad (2.20)$$

Além disso, sendo  $a$  não decrescente ( $a'(t) \geq 0$ ) e  $z(t) \geq a(t)$ , obtemos de (2.20) que

$$\frac{d}{dt}Y(z(t)) = \frac{z'(t)}{y(z(t))} \leq \frac{a'(t)}{y(a(t))} + kb(t) = \frac{d}{dt}Y(a(t)) + kb(t), \quad (2.21)$$

e integrando (2.21) em  $[0, t]$  segue que

$$Y(z(t)) \leq Y(a(t)) + k \int_0^t b(s)ds. \quad (2.22)$$

Por fim, de (2.22) obtemos:

$$x(t) \leq z(t) \leq Y^{-1}\left(Y(a(t)) + k \int_0^t b(s)ds\right), \quad t \in [0, T_1],$$

sendo  $T_1 > 0$  tal que  $\left(Y(a(t)) + k \int_0^t b(s)ds\right) \in \text{Dom}(Y^{-1})$  para  $t \in [0, T_1]$ .  $\square$

Se  $y$  for a função identidade no Teorema 2.5, então recaímos nas hipóteses dos teoremas lineares das versões clássicas de Gronwall. No intuito de seguir o mesmo padrão nos resultados com singularidades da Seção 2.3, aplicaremos este teorema no caso particular em que  $y(s) := s^m$ , com  $m > 0$  e  $m \neq 1$ , obtendo o resultado a seguir.

**Corolário 2.6 (GC6).** *Sejam  $k, m > 0$ , com  $m \neq 1$ ,  $a : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$  não decrescente de classe  $C^1(0, T)$  e  $b, x : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$  funções contínuas. Se*

$$x(t) \leq a(t) + k \int_0^t b(s)[x(s)]^m ds, \quad t \in [0, T), \quad (2.23)$$

então

$$x(t) \leq \left\{ [a(t)]^{1-m} + k(1-m) \int_0^t b(s) ds \right\}^{\frac{1}{1-m}}, \quad t \in [0, T].$$

*Demonstração.* Consideremos a função  $y(s) := s^m$ , com  $m > 0$  e  $m \neq 1$ . Para

- $Y(u) := \int_{u_0}^u \frac{1}{y(s)} ds = \int_{u_0}^u \frac{1}{s^m} ds = \frac{u^{1-m}}{1-m} - \frac{u_0^{1-m}}{1-m}, \quad u_0 > 0;$
- $Y^{-1}(u) = \left\{ (1-m)u + u_0^{1-m} \right\}^{\frac{1}{1-m}}, \quad u_0 > 0;$
- $Dom(Y^{-1}) = \mathbb{R} - \{t_0\}, \quad t_0 := \frac{-u_0^{1-m}}{1-m},$

segue do Teorema 2.5 a seguinte desigualdade em  $[0, T]$ :

$$\begin{aligned} x(t) &\leq Y^{-1} \left( Y(a(t)) + k \int_0^t b(s) ds \right) = \left\{ (1-m)Y(a(t)) + (1-m)k \int_0^t b(s) ds + u_0^{1-m} \right\}^{\frac{1}{1-m}} \\ &= \left\{ [a(t)]^{1-m} + k(1-m) \int_0^t b(s) ds \right\}^{\frac{1}{1-m}}. \end{aligned}$$

□

Conforme vimos no Corolário 2.6, o qual consiste em uma aplicação do Teorema 2.5, uma vez tendo satisfeita as condições de regularidade para a função  $y$ , basta determinarmos  $Y(u) := \int_{u_0}^u \frac{1}{y(s)} ds$ , para  $u_0 \geq 0$ , e sua inversa,  $Y^{-1}$ , para então obter a estimativa da função  $x(t)$  satisfazendo inúmeras outras Desigualdades de Gronwall não lineares.

Levando em consideração que a essência de tal procedimento já foi explicitada com o Corolário 2.6, e que tais desigualdades serão ainda aplicadas tanto nas demonstrações das Desigualdades de Gronwall Singulares (Seção 2.3), quanto nas aplicações em um problema de valor inicial (Seção 3.1), não prosseguiremos com mais resultados para casos específicos da função  $y$ .

As versões clássicas das Desigualdades de Gronwall podem ser encontradas em generalizações ainda mais abstratas do que as apresentadas até o momento neste trabalho. A fim de elucidar tais casos, finalizaremos os resultados desta seção com o Teorema 2.7, considerando o Lema 74 de Dragomir [8].

**Teorema 2.7 (GC7).** *Sejam  $a, b : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $y, L : [0, T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  funções contínuas tais que*

$$0 \leq L(t, u) - L(t, v) \leq y(t, v)(u - v), \quad t \in [0, T], \quad u \geq v \geq 0. \quad (2.24)$$

*Se  $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  é uma função contínua satisfazendo a desigualdade*

$$x(t) \leq a(t) + b(t) \int_0^t L(s, x(s)) ds, \quad t \in [0, T], \quad (2.25)$$

então

$$x(t) \leq a(t) + b(t) \int_0^t L(u, a(u)) e^{\int_u^t y(s, a(s)) b(s) ds} du, \quad t \in [0, T].$$

*Demonstração.* Consideremos a função  $z : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  definida por  $z(t) := \int_0^t L(s, x(s)) ds$ . Nestas condições,  $z(0) = 0$  e  $z$  é diferenciável, com  $z'(t) = L(t, x(t))$ . De (2.24) segue que

$$L(t, v_1) \leq L(t, u_1) \quad e \quad L(t, u_2) \leq L(t, v_2) + y(t, v_2)(u_2 - v_2) \quad (2.26)$$

para quaisquer  $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}_+$  com  $u_1 \geq v_1$  e  $u_2 \geq v_2$ . Desta forma,

$$\begin{aligned} z'(t) &= L(t, \underbrace{x(t)}_{=v_1}) \stackrel{(2.26)}{\leq} L(t, \underbrace{a(t) + b(t)z(t)}_{=u_1=u_2}) \\ &\leq^{v_2=a(t)} L(t, a(t)) + y(t, a(t))(a(t) + b(t)z(t) - a(t)) \\ &= L(t, a(t)) + y(t, a(t))b(t)z(t), \end{aligned}$$

o que implica em

$$z'(t) - y(t, a(t))b(t)z(t) \leq L(t, a(t)), \quad t \in [0, T]. \quad (2.27)$$

Multiplicando (2.27) pelo fator integrante  $e^{-\int_0^t y(s, a(s)) b(s) ds}$  e integrando em  $[0, t]$ , obtemos:

$$z(t) \leq \int_0^t L(u, a(u)) e^{\int_u^t y(s, a(s)) b(s) ds} du, \quad t \in [0, T]. \quad (2.28)$$

Da hipótese (2.25) vale que

$$x(t) \leq a(t) + b(t)z(t), \quad t \in [0, T]. \quad (2.29)$$

Logo, por (2.28) e (2.29) concluímos a prova de (2.7).  $\square$

**Observação 2.1.3.** *Uma vez tendo satisfeita as hipóteses do Teorema 2.7, é possível obter inúmeras aplicações deste resultado, além de recair nas hipóteses dos teoremas já obtidos. Generalizações de natureza semelhante à da desigualdade (2.25) podem ser explanadas em Dragomir [8], no qual consta um compilado de trabalhos de diversos matemáticos.*

**Observação 2.1.4.** *Nesta seção abordamos apenas versões integrais das Desigualdades de Gronwall. Entretanto, na literatura elas também são encontradas na forma diferencial, em casos lineares ou não lineares, os quais podem ser explorados, por exemplo, nos trabalhos de Pata [23], Rivera [26] e Showalter [28]. Algumas destas desigualdades serão apresentadas na Seção 3.5, no que concerne as aplicações das Desigualdades de Gronwall no estudo assintótico da solução de equações diferenciais.*

## 2.2 FUNÇÕES ESPECIAIS

Nesta seção, definiremos algumas funções especiais e suas principais propriedades, a saber, as funções Gama e Beta e a função de Mittag-Leffler. Tais funções serão essenciais para o estudo das Desigualdades de Gronwall Singulares na Seção 2.3, e de suas aplicações no PVIF na Seção 3.3. Para um estudo mais detalhado dessas funções, assim como de suas relações com o Cálculo Fracionário, sugerimos os trabalhos de Goderfroy [12], Kilbas, Srivastava e Trujillo [17], Podlubny [24] e Torelli [29].

### 2.2.1 Funções Gama e Beta

Historicamente, a função Gama foi introduzida no século XVIII, motivada por problemas de interpolação para estender a noção de fatorial para números não naturais. Dentre os matemáticos envolvidos nesses estudos, destacamos Goldbach<sup>1</sup>, Bernoulli<sup>2</sup>, Euler<sup>3</sup> e, posteriormente, Weierstrass<sup>4</sup>.

Atualmente denotada por  $\Gamma$ , essa função possui várias representações, como as fórmulas de Euler através da integral imprópria, por meio de limite ou do produto infinito. Neste trabalho, usaremos com mais frequência a que é expressa pela integral imprópria, explorando, a seguir, algumas de suas propriedades que serão ferramentas necessárias ao desenvolvimento das aplicações propostas.

Assim como a função Gama para números naturais descreve fatoriais, a função Beta, comumente representada pelo símbolo  $B$ , está relacionada com a descrição de coeficientes binomiais, possuindo inúmeras aplicações nas teorias de probabilidade e estatística. Foi primeiramente estudada por Euler, Legendre<sup>5</sup> e Binet<sup>6</sup>, sendo ainda conhecida como integral de Euler de primeiro tipo.

Ressaltamos que as funções Gama e Beta podem ser estendidas para o conjunto dos números complexos. Entretanto, em vista do que será necessário para esse estudo, nos ateremos ao conjunto dos números reais, sendo possível explorar os casos complexos nas referências citadas no início desta seção.

**Definição 2.2.1.** *A função Gama é definida por*

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0. \quad (2.30)$$

**Lema 2.8.** *A integral em (2.30) converge para todos os valores  $x > 0$ .*

<sup>1</sup>Christian Goldbach (\*1690 - †1764)

<sup>2</sup>Daniel Bernoulli (\*1700 - †1782)

<sup>3</sup>Leonhard Paul Euler (\*1707 - †1783)

<sup>4</sup>Karl Wilhelm Theodor Weierstrass (\*1815 - †1897)

<sup>5</sup>Adrien-Marie Legendre (\*1752 - †1833)

<sup>6</sup>Jacques Philippe Marie Binet (\*1786 - †1856)

*Demonstração.* De fato, consideremos

$$\Gamma(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt. \quad (2.31)$$

Sabemos que a integral em (2.30) converge se, e somente se, as duas integrais do lado direito da igualdade em (2.31) convergem. No que segue, analisaremos cada uma destas integrais.

(i) A integral  $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$  converge para todo  $x > 0$ .

Com efeito, se  $x \in (0, 1)$  temos a seguinte integral imprópria:

$$\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt = \int_0^1 \frac{1}{e^t t^{1-x}} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}} dt, \quad 0 < 1 - x < 1. \quad (2.32)$$

Como a integral  $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}} dt$  converge pelo Lema 1.6, segue do teste da comparação para integrais que  $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$  converge para  $x \in (0, 1)$ . Para  $x = 1$  a convergência é imediata. Por outro lado, se  $x > 1$  então o integrando  $e^{-t} t^{x-1}$  é contínuo em  $[0, 1]$  e sua integral converge neste intervalo, o que conclui a prova de (i).

(ii) A integral  $\int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$  converge para todo  $x > 0$ .

Para  $t \geq 1$  e  $x \in (0, 1)$  segue que  $e^{-t} t^{x-1} \leq e^{-t}$ , consequentemente a integral converge pelo teste da comparação, pois

$$\int_1^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \leq \int_1^\infty e^{-t} dt = e^{-1}.$$

Para  $x = 1$  a convergência é imediata. Analisaremos agora o caso  $x > 1$ . Segue da regra de L'Hôpital que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(x+1)t^x}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(x+1)x t^{x-1}}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(x+1)x(x-1)t^{x-2}}{e^t}.$$

Continuando com este processo, para cada  $x > 1$  fixado, até encontrar um número natural  $n_x$  tal que  $n_x - x > 0$ , obtemos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{x+1}}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(x+1)x(x-1)(x-2)\cdots(x-n_x)}{e^t t^{n_x-x}} = 0, \quad x > 1.$$

Desta forma, para quaisquer  $\varepsilon > 0$  e  $x > 1$  existe  $t_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{t^{x+1}}{e^t} < \varepsilon$  para  $t > t_0$ . Em particular, para  $\varepsilon = 1$  temos que

$$t > t_0 \implies \frac{t^{x-1}}{e^t} = \frac{t^{x+1}}{e^t} \frac{1}{t^2} < \frac{1}{t^2}.$$

Definamos  $I_1(x) := \int_1^{t_0} e^{-t} t^{x-1} dt$  e  $I_2(x) := \int_{t_0}^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ . A integral  $I_1(x)$  converge, pois

seu integrando é contínuo no compacto  $[1, t_0]$ . Além disso, como

$$I_2(x) \leq \int_{t_0}^{\infty} t^{-2} dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{t_0}^N t^{-2} dt = \lim_{N \rightarrow \infty} (-N^{-1} + t_0^{-1}) = t_0^{-1},$$

pelo teste da comparação a integral

$$\int_1^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = I_1(x) + I_2(x)$$

converge para  $x > 1$ .

Por esses casos concluímos que a função Gama converge para todo  $x > 0$ .  $\square$

**Lema 2.9.** Se  $\Gamma$  é a função definida em (2.30), então  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .

*Demonstração.* Temos pela definição da função Gama que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt \stackrel{t=u^2}{=} 2 \int_0^{\infty} e^{-u^2} du.$$

Nestas condições,

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4 \left(\int_0^{\infty} e^{-u^2} du\right) \left(\int_0^{\infty} e^{-v^2} dv\right) = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} dudv.$$

Usando as coordenadas polares  $u = r \cos(\theta)$ ,  $v = r \sin(\theta)$ ,  $r \in [0, \infty)$  e  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , obtemos:

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r d\theta dr = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = \pi \implies \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

$\square$

**Proposição 2.10.** A função  $\Gamma$  definida em (2.30) satisfaz as seguintes propriedades:

- (i)  $\Gamma(n+1) = n!$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ ;
- (ii)  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ , para todo  $x > 0$ .

*Demonstração.* Para  $x > 0$  fixado, notemos inicialmente que

$$\int_0^{\infty} e^{-r} dr = 1 \stackrel{r=sx}{\implies} \int_0^{\infty} e^{-sx} ds = \frac{1}{x}. \quad (2.33)$$

Derivando a segunda igualdade de (2.33) (em  $x$ ) e utilizando a regra de Leibniz, obtemos:

$$\int_0^{\infty} -se^{-sx} ds = -\frac{1}{x^2} \implies \int_0^{\infty} se^{-sx} ds = \frac{1}{x^2}. \quad (2.34)$$

Fazendo novamente a derivação em relação a  $x$  em (2.34) segue que

$$\int_0^{\infty} -s^2 e^{-sx} ds = -\frac{2 \cdot 1}{x^3} \implies \int_0^{\infty} s^2 e^{-sx} ds = \frac{2 \cdot 1}{x^3}.$$

Repetindo esse processo por  $n$  vezes, com  $n \in \mathbb{N}$ , obtemos a relação

$$\int_0^{\infty} s^n e^{-sx} ds = \frac{n!}{x^{n+1}}, \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Em particular, para  $x = 1$  vale que

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-s} s^n ds = n! \iff \Gamma(n) = (n-1)! \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

o que prova o item (i). Usando integração por partes na função  $\Gamma(x+1)$  provamos o item (ii):

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = x \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = x\Gamma(x), \quad x > 0.$$

□

**Observação 2.2.1.** Segue do segundo item da Proposição 2.10 as seguintes equivalências para todo  $x > 1$ :

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) \iff \frac{1}{\Gamma(x-1)} = \frac{x-1}{\Gamma(x)}.$$

**Corolário 2.11.** A função Gama satisfaz as seguintes propriedades para  $n \in \mathbb{N}$ :

$$(i) \quad \Gamma(x+n) = \prod_{k=0}^{n-1} (x+k)\Gamma(x), \text{ para todo } x \geq 0;$$

$$(ii) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{\sqrt{\pi} (2n)!}{4^n n!}.$$

*Demonstração.* Usando  $n$  vezes o segundo item da Proposição 2.10 obtemos que

$$\begin{aligned} \Gamma(x+n) &= \Gamma(x + (n-1) + 1) \\ &= [x + (n-1)]\Gamma(x + (n-1)) \\ &\quad \vdots \\ &= [x + (n-1)][x + (n-2)] \cdots [x + (n-n)]\Gamma(x + (n-n)) \\ &= \prod_{k=0}^{n-1} (x+k)\Gamma(x), \end{aligned}$$

o que prova (i). Além disso, para  $n = 1$  segue do Lema 2.9 e da Proposição 2.10 que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Por indução demonstramos o item (ii):

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + (k+1)\right) = \left(\frac{1}{2} + k\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + k\right) = \frac{(2k+1)\sqrt{\pi}(2k)!}{2 \cdot 4^k k!} = \frac{\sqrt{\pi} [2(k+1)]!}{4^{k+1} (k+1)!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

□

A título de curiosidade, além da representação integral da Definição 2.2.1 para a função Gama, podemos defini-la, por exemplo, através de limite ou produtório, conforme descrito nas equações a seguir:

$$\bullet \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}, \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$\bullet \frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}, \quad x > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

onde  $\gamma$  é a constante de Euler dada pelo limite  $\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)\right)$ .

A prova dessas representações equivalentes a (2.30) seguem de teoremas de convergência, podendo ser exploradas nos trabalhos de Goderfroy [12], Kilbas, Srivastava e Trujillo [17] e Podlubny [24].

**Lema 2.12.** *A função Gama é contínua em  $(0, \infty)$ , não crescente em  $(0, 1)$  e não decrescente em  $(2, \infty)$ .*

*Demonstração.* De fato, dados  $T, \varepsilon > 0$ , para cada  $u \in (0, T)$  fixado, porém arbitrário, consideremos a função  $f_u : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f_u(x) := u^{x-1}$ . Como  $f_u$  é contínua, existe  $\delta > 0$  tal que

$$x, x_0 \in (0, \infty), |x - x_0| < \delta \implies |f_u(x) - f_u(x_0)| = |u^{x-1} - u^{x_0-1}| < \varepsilon, \quad \forall u \in (0, T).$$

Nestas condições,

$$\begin{aligned} |x - x_0| < \delta \implies |\Gamma(x) - \Gamma(x_0)| &= \left| \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-u} (u^{x-1} - u^{x_0-1}) du \right| \\ &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-u} |u^{x-1} - u^{x_0-1}| du \\ &< \varepsilon \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-u} du = \varepsilon, \end{aligned}$$

o que prova a continuidade de  $\Gamma$  em  $(0, \infty)$ . Além disso, por meio dos resultados de derivação

para integrais impróprias sabemos que

$$\begin{aligned} \bullet \Gamma'(x) &= \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{d}{dx}(t^{x-1}) dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \ln(t) t^{x-1} dt, \quad \forall x > 0; \\ \bullet \Gamma''(x) &= \int_0^{\infty} e^{-t} \ln(t) \frac{d}{dx} t^{x-1} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} [\ln(t)]^2 t^{x-1} dt \geq 0, \quad \forall x > 0. \end{aligned}$$

Desta forma, o gráfico da função Gama é contínuo e tem concavidade voltada para cima, e como  $\Gamma(1) = 1 = \Gamma(2)$ , segue que o ponto crítico, que é ponto de mínimo da função  $\Gamma : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , pertence ao intervalo  $(1, 2)$ . Logo, a função Gama não decresce para  $x > 2$  e é não crescente em  $(0, 1)$ .  $\square$

**Observação 2.2.2** (Extensão da Função Gama). *Na Definição 2.2.1 consideramos no domínio da função Gama apenas os números reais positivos. Entretanto, esta função pode ser estendida para os negativos não inteiros, o que é feito por meio da fórmula obtida na Proposição 2.10:*

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}, \quad \forall x > 0. \quad (2.35)$$

Notemos que o quociente do lado direito desta igualdade está bem definido para  $x \in (-1, 0)$ , pois neste intervalo  $x+1 > 0$ . Desta forma, conseguimos definir a função Gama a partir do quociente  $\frac{\Gamma(x+1)}{x}$  para  $x \in (-1, 0)$ .

Convém ressaltar que a Definição 2.2.1 não engloba este caso, pois a integral  $\int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$  diverge para  $x < 0$ , pois

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \geq \frac{1}{e} \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{e} \lim_{N \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \frac{N^x}{x} \right) = +\infty.$$

Depois de estendermos a função em  $(-1, 0)$  podemos analisar novamente o quociente  $\frac{\Gamma(x+1)}{x}$ , o qual também está definido para  $x \in (-2, -1)$ , tendo em vista que neste caso  $(x+1) \in (-1, 0)$  e já obtemos a extensão da função Gama neste intervalo.

Procedendo desta maneira conseguimos estender a função Gama para todo  $x \in \mathbb{R} - \{0, -1, -2, \dots\}$ , obtendo a seguinte função:

$$f : \mathbb{R} - \{0, -1, -2, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} \Gamma(x), & x > 0, \\ \frac{\Gamma(x+1)}{x}, & x < 0, \quad x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Tal função é de fato uma extensão de  $\Gamma$ , pois  $f|_{(0, \infty)} = \Gamma$ . Daqui em diante, quando considerarmos a função Gama aplicada em valores negativos e não inteiros, estaremos nos referindo

a sua extensão  $f(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ . Por exemplo,

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) \equiv f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2} + 1)}{-\frac{1}{2}} = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}.$$

Desta forma, similarmente ao item (ii) do Corolário 2.11, é possível calcularmos o valor da função Gama para qualquer ponto da forma  $(\frac{1}{2} - n)$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , valendo a seguinte expressão:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-2)^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1)} \sqrt{\pi} = \frac{(-2)^n 2^n (1 \cdot 2 \cdots n)}{(2n)!} \sqrt{\pi} = (-4)^n \frac{n!}{(2n)!} \sqrt{\pi}.$$

**Observação 2.2.3.** A função Gama não está definida no zero e nos inteiros negativos.

Com efeito, vemos que a integral em (2.30) diverge para  $x = 0$ , pois

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{0-1} dt \geq \frac{1}{e} \int_0^1 t^{-1} dt = \frac{1}{e} \lim_{N \rightarrow 0^+} (\ln(1) - \ln(N)) = +\infty.$$

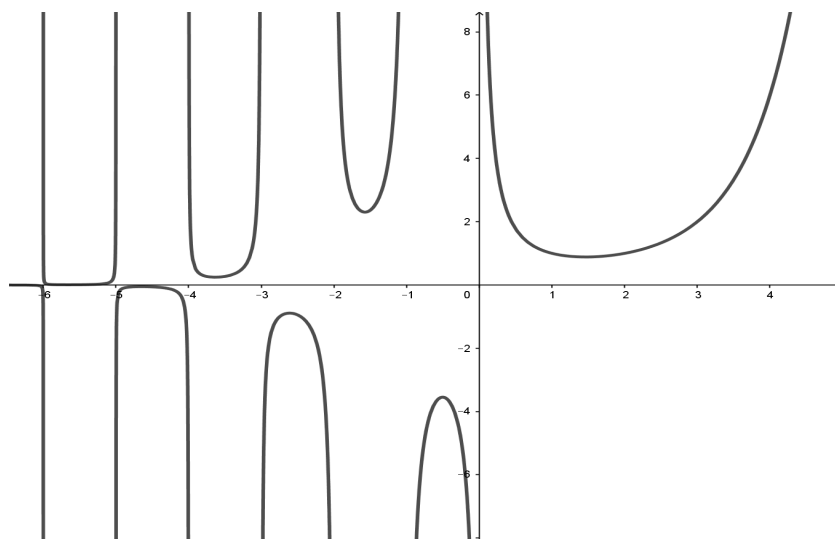
De maneira geral, vale que

$$\lim_{x \rightarrow x_n} |\Gamma(x)| = \infty, \quad \forall x_n \in \{0, -1, -2, \dots\}.$$

Desta forma, a função Gama (ou sua extensão) está definida para valores  $x \in \mathbb{R} - \{0, -1, -2, \dots\}$ . Tal definição pode ser feita em  $x \in \mathbb{C} - \{0, -1, -2, \dots\}$ , entretanto, não faremos tais considerações por fugirem do escopo deste estudo.

Para uma melhor visualização do comportamento da função Gama para valores reais de seu argumento, seu gráfico pode ser visto na Figura 2.1.

Figura 2.1: Esboço do gráfico da função  $\Gamma$ .



Fonte: A autora.

Com base na análise da Figura 2.1 podemos perceber um crescimento abrupto da função Gama para valores positivos  $x > 2$ , como era de se esperar, já que se trata de uma generalização do fatorial. Além disso, é visível sua continuidade neste intervalo e as condições de monotonicidade avaliadas no Lema 2.12, assim como a propriedade do limite divergente da função Gama nos inteiros negativos, conforme abordado na Observação 2.2.3.

Os próximos resultados fornecerão propriedades referentes a convexidade da composição  $\log \circ \Gamma$  e algumas limitações para a função Gama com entradas específicas, as quais serão fundamentais para a prova da convergência uniforme da série de funções advinda da demonstração do Gronwall Singular do Teorema 2.29.

**Lema 2.13.** *A função Gama é logaritmicamente convexa em  $\mathbb{R}_+^*$ , ou seja, a seguinte desigualdade é satisfeita para quaisquer  $x, y > 0$  e  $t \in [0, 1]$ :*

$$\log(\Gamma(tx + (1-t)y)) \leq t \log(\Gamma(x)) + (1-t) \log(\Gamma(y)).$$

*Demonstração.* Como a função Gama é positiva em  $\mathbb{R}_+^*$ , a composição  $\log \circ \Gamma$  está bem definida. Além disso, segue do Lema 2.12 as seguintes derivadas para  $x > 0$ :

$$\bullet \Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-t} \ln(t) t^{x-1} dt; \quad \bullet \Gamma''(x) = \int_0^\infty e^{-t} [\ln(t)]^2 t^{x-1} dt. \quad (2.36)$$

Sabemos também que uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , duas vezes derivável no intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$ , é convexa se, e somente se,  $f''(x) \geq 0$  para todo  $x \in I$  (ver [20], Capítulo 8, Teorema 11). Temos ainda que

$$(\log(\Gamma(x)))'' = \left( \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \right)' = \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'(x)\Gamma'(x)}{[\Gamma(x)]^2}, \quad \forall x > 0. \quad (2.37)$$

Para  $x > 0$ , considerando o produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle := \int_0^\infty f(t)g(t)t^{x-1}e^{-t} dt,$$

e usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz (Teorema 1.1) com  $f \equiv \ln$  e  $g \equiv 1$ , obtemos:

$$\left| \int_0^\infty \ln(t)t^{x-1}e^{-t} dt \right|^2 \leq \left( \int_0^\infty [\ln(t)]^2 t^{x-1} e^{-t} dt \right) \left( \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \right),$$

ou equivalentemente,

$$\Gamma''(x)\Gamma(x) - [\Gamma'(x)]^2 \geq 0.$$

Isso prova que  $(\log(\Gamma(x)))'' \geq 0$  para todo  $x > 0$ , o que demonstra a convexidade logarítmica

da função Gama<sup>7</sup>. □

**Lema 2.14** (Desigualdade de Gautschi). *Sejam  $x > 0$  e  $s \in [0, 1]$ . Então*

$$x^{1-s} \leq \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+s)} \leq (x+s)^{1-s}. \quad (2.38)$$

*Demonstração.* Para  $u, v > 0$  e  $t \in [0, 1]$ , segue do Lema 2.13 e das propriedades da função logarítmica que

$$\log(\Gamma(tu + (1-t)v)) \leq t \log(\Gamma(u)) + (1-t) \log(\Gamma(v)) = \log([\Gamma(u)]^t [\Gamma(v)]^{1-t}),$$

provando a desigualdade

$$\Gamma(tu + (1-t)v) \leq [\Gamma(u)]^t [\Gamma(v)]^{1-t}. \quad (2.39)$$

Considerando  $u = x$ ,  $v = x + 1$  e  $t = 1 - s$  em (2.39), com  $x > 0$  e  $s \in [0, 1]$ , obtemos:

$$\Gamma(x+s) \leq [\Gamma(x)]^{1-s} [\Gamma(x+1)]^s = \left[ \frac{\Gamma(x+1)}{x} \right]^{1-s} [\Gamma(x+1)]^s = x^{s-1} \Gamma(x+1). \quad (2.40)$$

Analogamente, segue de (2.39) com  $u = x + s$ ,  $v = x + s + 1$  e  $t = s$ , para  $x > 0$  e  $s \in [0, 1]$ , a desigualdade

$$\Gamma(x+1) \leq [\Gamma(x+s)]^s [(x+s)\Gamma(x+s)]^{1-s} = (x+s)^{1-s} \Gamma(x+s). \quad (2.41)$$

De (2.40) e (2.41) segue a prova de (2.38). □

**Lema 2.15.** *Para  $s \in (0, 1)$  vale o limite*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+s)} = 0. \quad (2.42)$$

*Demonstração.* Para  $x > 0$  e  $s \in (0, 1)$ , segue do Lema 2.14 que

$$x^{1-s} \leq \frac{x\Gamma(x)}{\Gamma(x+s)} \leq (x+s)^{1-s},$$

---

<sup>7</sup>O Teorema de Bohr-Mollerup, um dos resultados mais elegantes da teoria da função Gama, garante que tal função positiva é a única que satisfaz, simultaneamente, as seguintes propriedades em  $\mathbb{R}_+^*$ :  $f(x+1) = xf(x)$ ,  $f(1) = 1$  e  $\log \circ f$  é convexa. Este resultado é tão fundamental que alguns autores adotam suas condições como definição da função Gama, derivando suas demais propriedades a partir dele.

- Harald August Bohr (\*1887 - †1951).

- Johannes Peter Mollerup (\*1872 - †1937).

ou equivalentemente,

$$\frac{1}{x^s} \leq \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+s)} \leq \left( \frac{x+s}{x^{\frac{1}{1-s}}} \right)^{1-s} = \left( x^{-\frac{s}{1-s}} + \frac{s}{x^{\frac{1}{1-s}}} \right)^{1-s}. \quad (2.43)$$

De (2.43) e do Teorema do Confronto (ver [20], Capítulo 4, Teorema 8) segue a prova de (2.42).  $\square$

**Lema 2.16.** A série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C^k}{\Gamma(k\gamma)}$  converge absolutamente<sup>8</sup> para qualquer  $C \in \mathbb{R}$  e  $\gamma > 0$ .

*Demonstração.* Seja  $a_k := \frac{C^k}{\Gamma(k\gamma)}$ . Dividiremos a prova em dois casos:  $\gamma \geq 1$  e  $\gamma \in (0, 1)$ .

(i)  $\gamma \geq 1$ .

Com efeito, como  $2 \leq k+1 \leq k\gamma+1 \leq k\gamma+\gamma$ , sendo Gama uma função positiva e não decrescente em  $[2, \infty)$  obtemos que

$$k\gamma\Gamma(k\gamma) = \Gamma(k\gamma+1) \leq \Gamma(k\gamma+\gamma),$$

consequentemente,

$$\frac{\Gamma(k\gamma)}{\Gamma(k\gamma+\gamma)} \leq \frac{1}{k\gamma}. \quad (2.44)$$

Temos ainda que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|C|^{k+1}}{\Gamma((k+1)\gamma)} \frac{\Gamma(k\gamma)}{|C|^k} = |C| \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(k\gamma)}{\Gamma(k\gamma+\gamma)} \stackrel{(2.44)}{\leq} |C| \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k\gamma} = 0 < 1,$$

provando pelo Teste da Razão<sup>9</sup> que a série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C^k}{\Gamma(k\gamma)}$  converge absolutamente.

(ii)  $\gamma \in (0, 1)$ .

De fato, usando o Lema 2.15 provamos o limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = 0,$$

e novamente pelo Teste da Razão concluímos a convergência desejada para  $\gamma \in (0, 1)$ .  $\square$

<sup>8</sup>Ressaltamos que essa convergência é intuitiva, considerando que a função Gama generaliza o fatorial e que a série  $\sum_n \frac{x^n}{n!}$  é convergente na qualquer  $x$  real.

<sup>9</sup>Ver [20], Capítulo 4, Teorema 19.

A seguir, veremos a definição da função Beta e algumas de suas propriedades, além de relações desta com a função Gama.

**Definição 2.2.2.** *Sejam  $\xi, \eta > 0$ . A função Beta é definida por*

$$B(\xi, \eta) := \int_0^1 t^{\xi-1}(1-t)^{\eta-1} dt. \quad (2.45)$$

No que segue,  $\Gamma$  será usada para se referir a função Gama definida em (2.30) ou a sua extensão presente na Observação 2.2.2 (a depender do contexto), e  $B$  designará a função Beta definida em (2.45).

**Proposição 2.17.** *As funções Gama e Beta satisfazem a seguinte relação:*

$$B(\xi, \eta) = \frac{\Gamma(\xi)\Gamma(\eta)}{\Gamma(\xi + \eta)}, \quad \forall \xi, \eta > 0. \quad (2.46)$$

*Demonstração.* Sejam  $\xi, \eta > 0$ . Da definição da função Gama segue que

$$\begin{aligned} \Gamma(\xi)\Gamma(\eta) &= \left( \int_0^\infty e^{-u} u^{\xi-1} du \right) \left( \int_0^\infty e^{-v} v^{\eta-1} dv \right) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u+v)} u^{\xi-1} v^{\eta-1} dudv \\ &\stackrel{(*)}{=} 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} x^{2\xi-1} y^{2\eta-1} dx dy \\ &\stackrel{(**)}{=} 4 \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} (r \cos(\theta))^{2\xi-1} (r \sin(\theta))^{2\eta-1} r d\theta dr \\ &= 4 \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} r e^{-r^2} r^{2\eta+2\xi-2} (\cos(\theta))^{2\xi-1} (\sin(\theta))^{2\eta-1} d\theta dr \\ &= \underbrace{\left( 2 \int_0^\infty r e^{-r^2} r^{2\eta+2\xi-2} dr \right)}_{=: I_1} \underbrace{\left( 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^{2\xi-1} (\sin(\theta))^{2\eta-1} d\theta \right)}_{=: I_2}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

onde em (\*) fizemos a substituição  $u = x^2$ ,  $v = y^2$  e em (\*\*) utilizamos as coordenadas polares  $x = r \cos(\theta)$ ,  $y = r \sin(\theta)$ , com  $r \in [0, \infty)$  e  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ . Agora, fazendo  $t = r^2$  em  $I_1$  e  $s = [\sin(\theta)]^2$  em  $I_2$ , obtemos:

$$\bullet I_1 := \int_0^\infty e^{-t} t^{(\eta+\xi)-1} dt = \Gamma(\eta + \xi); \quad (2.48)$$

$$\bullet I_2 := 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^{2(\xi-1)} (\sin(\theta))^{2(\eta-1)} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta = \int_0^1 (1-s)^{\xi-1} s^{\eta-1} ds = B(\xi, \eta). \quad (2.49)$$

De (2.47), (2.48) e (2.49) segue a prova de (2.46).  $\square$

**Proposição 2.18.** *Sejam  $\xi, \eta > 0$ . A função Beta satisfaz as seguintes propriedades:*

$$(i) \quad B(\xi, \eta) = B(\eta, \xi);$$

$$(ii) \quad B(\xi, \eta) = B(\xi + 1, \eta) + B(\xi, \eta + 1);$$

$$(iii) \quad B(\xi, \eta) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^{2\xi-1} (\sin(\theta))^{2\eta-1} d\theta;$$

$$(iv) \quad B(\xi, \eta) = \int_0^\infty \frac{t^{\xi-1}}{(t+1)^{\xi+\eta}} dt.$$

*Demonstração.* Para provar (i) basta fazer a mudança de variável  $u = 1 - t$  na integral que define a função Beta. O segundo item é consequência das Proposições 2.10 e 2.17, pois

$$\begin{aligned} B(\xi + 1, \eta) + B(\xi, \eta + 1) &= \frac{\Gamma(\xi + 1)\Gamma(\eta)}{\Gamma(\xi + \eta + 1)} + \frac{\Gamma(\xi)\Gamma(\eta + 1)}{\Gamma(\xi + \eta + 1)} \\ &= \frac{\xi\Gamma(\xi)\Gamma(\eta)}{(\xi + \eta)\Gamma(\xi + \eta)} + \frac{\eta\Gamma(\xi)\Gamma(\eta)}{(\xi + \eta)\Gamma(\xi + \eta)} \\ &= B(\xi, \eta), \quad \forall \xi, \eta > 0. \end{aligned}$$

O item (iii) segue de (2.49). Notemos agora que

$$\begin{aligned} \Gamma(\xi)\Gamma(\eta) &= \int_0^\infty \left( \int_0^\infty e^{-(u+v)} u^{\xi-1} dv \right) v^{\eta-1} du \\ &\stackrel{(o)}{=} \int_0^\infty \left( \int_0^\infty e^{-(tv+v)} (tv)^{\xi-1} v dt \right) v^{\eta-1} dv \\ &= \int_0^\infty \left( \int_0^\infty e^{-(t+1)v} v^{\xi+\eta-1} dv \right) t^{\xi-1} dt \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_0^\infty \left( \int_0^\infty e^{-s} \frac{s^{\xi+\eta-1}}{(t+1)^{\xi+\eta-1}} \frac{1}{t+1} ds \right) t^{\xi-1} dt \\ &= \Gamma(\xi + \eta) \int_0^\infty \frac{t^{\xi-1}}{(t+1)^{\xi+\eta}} dt, \quad \forall \xi, \eta > 0, \end{aligned} \tag{2.50}$$

onde em (o) e (\*) consideramos as mudanças de variável  $t = \frac{u}{v}$  e  $s = (t+1)v$ , respectivamente. De (2.50) e da Proposição 2.17 segue a prova do item (iv).  $\square$

**Corolário 2.19.** *Se  $x \in (0, 1)$ , então*

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{t+1} dt. \tag{2.51}$$

*Demonstração.* Segue das Proposições 2.17 e 2.18 que

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = B(x, 1-x)\Gamma(x+1-x) = B(x, 1-x) = \int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{t+1} dt, \quad \forall x \in (0, 1).$$

$\square$

**Lema 2.20.** *Sejam  $a, b, \xi, \eta > 0$ , com  $a < b$ . Então*

$$\int_a^b (t-a)^{\xi-1} (b-t)^{\eta-1} dt = \frac{\Gamma(\xi)\Gamma(\eta)}{\Gamma(\xi+\eta)} (b-a)^{\xi+\eta-1} = B(\xi, \eta)(b-a)^{\xi+\eta-1}.$$

*Demonstração.* Fazendo a mudança de variável  $s = \frac{t-a}{b-a}$ , obtemos:

$$\int_a^b (t-a)^{\xi-1} (b-t)^{\eta-1} dt = (b-a)^{\xi+\eta-1} \int_0^1 s^{\xi-1} (1-s)^{\eta-1} ds = B(\xi, \eta)(b-a)^{\xi+\eta-1}.$$

□

## 2.2.2 Funções de Mittag-Leffler

Há um pouco mais de um século o matemático sueco Mittag-Leffler<sup>10</sup> introduziu uma função, hoje conhecida pelo nome de função de Mittag-Leffler, como sendo uma possível generalização da função exponencial [22].

Esta função, inicialmente dependente de um único parâmetro (comumente real ou complexo), foi generalizada há aproximadamente cinco décadas depois por Agarwal<sup>11</sup>, a partir da introdução de um outro parâmetro, ficando conhecida, posteriormente, como função de Mittag-Leffler com dois parâmetros [1].

Casos mais gerais foram introduzidos por outros matemáticos no decorrer do tempo, como pode-se ver no estudo sistemático da função de Mittag-Leffler presente nos trabalhos de Capelas de Oliveira [5], Gorenflo et al. [13] e Podlubny [24].

Da mesma forma que a função exponencial desempenha um papel de destaque no cálculo clássico de ordem inteira, as funções de Mittag-Leffler exercem um papel notório análogo no cálculo de ordem arbitrária. Deste modo, se faz necessário um bom entendimento desta função para se aventurar no cálculo fracionário.

A fim de estudarmos as Desigualdades de Gronwall Singulares da Seção 2.3, e entender suas aplicações no problema de valor inicial fracionário considerado na Seção 3.3, começaremos por analisar algumas especificidades e relações de recorrência da função de Mittag-Leffler, no caso particular com um e dois parâmetros.

Ressaltamos que tal função pode ser definida no conjunto dos números complexos, mas neste trabalho nos restringiremos ao caso real para a análise de algumas de suas propriedades. Além disso, assumiremos formalmente a convergência<sup>12</sup> desta série de potências para cada  $t \in \mathbb{R}$ , com respaldo nos resultados de convergência presentes nas referências citadas anteriormente, levando em consideração que uma exploração deste tópico foge do escopo deste estudo.

<sup>10</sup>Magnus Gösta Mittag-Leffler (\*1846 - †1927)

<sup>11</sup>Ravi P. Agarwal (\*1947)

<sup>12</sup>As funções de Mittag-Leffler são funções inteiras, ou seja, são analíticas em  $\mathbb{C}$ , de modo que tais funções podem ser expandidas em séries de potências com raios de convergência infinitos [13].

**Definição 2.2.3.** *Seja  $\alpha > 0$ . A função de Mittag-Leffler  $E_\alpha$  de um parâmetro é definida pela série de potências*

$$E_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.52)$$

É fácil ver que a função de Mittag-Leffler de um parâmetro generaliza a função exponencial, bastando considerar  $\alpha = 1$  e a expansão em série de Taylor desta função:

$$E_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Além disso, para  $\alpha > 0$  temos que

$$E_\alpha(0) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0^k}{\Gamma(k + 1)} = 1,$$

verificando de modo similar a propriedade da função exponencial com expoente nulo ( $e^0 = 1$ ).

**Definição 2.2.4.** *Sejam  $\alpha, \beta > 0$ . A função de Mittag-Leffler  $E_{\alpha, \beta}$  de dois parâmetros é definida pela série de potências*

$$E_{\alpha, \beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.53)$$

A função de Mittag-Leffler de dois parâmetros é uma generalização da função de Mittag-Leffler de um parâmetro, bastando tomar  $\beta = 1$ , pois

$$E_{\alpha, 1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_\alpha(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

O próximo resultado demonstra relações importantes entre a função de Mittag-Leffler de um e dois parâmetros.

**Lema 2.21.** *Sejam  $\alpha, \beta > 0$  e  $t \in \mathbb{R}^*$ . A função de Mittag-Leffler satisfaz as seguintes relações:*

- (i)  $E_{\alpha, \alpha+1}(t) = \frac{1}{t}[E_\alpha(t) - 1]$ ;
- (ii)  $E_{\alpha, \beta}(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + tE_{\alpha, \alpha+\beta}(t)$ ;
- (iii)  $\frac{d}{dt}E_{\alpha, \beta}(t) = t\frac{d}{dt}E_{\alpha, \alpha+\beta}(t) + E_{\alpha, \alpha+\beta}(t)$ ;
- (iv)  $E_{1, n}(t) = \frac{1}{t^{n-1}} \left( e^t - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^k}{k!} \right)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Seja  $t \in \mathbb{R}^*$ . Segue da definição da função de Mittag-Leffler que

$$E_{\alpha, \alpha+1}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha(k+1) + 1)} = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = \frac{1}{t}[E_\alpha(t) - 1],$$

o que prova (i). Analogamente,

$$E_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + (\alpha + \beta))} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} + t E_{\alpha,\alpha+\beta}(t),$$

provando (ii). Segue deste item a prova de (iii):

$$\frac{d}{dt} E_{\alpha,\beta}(t) = \frac{d}{dt} [t E_{\alpha,\alpha+\beta}(t)] = E_{\alpha,\alpha+\beta}(t) + t \frac{d}{dt} E_{\alpha,\alpha+\beta}(t).$$

Por fim, para  $n \in \mathbb{N}$  obtemos (iv):

$$\begin{aligned} E_{1,n}(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\underbrace{(k+n-1)+1}_{\in \mathbb{N}})} \\ &= \frac{1}{t^{n-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{k+n-1}}{(k+n-1)!} \\ &= \frac{1}{t^{n-1}} \left( e^t - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^k}{k!} \right). \end{aligned}$$

□

**Lema 2.22** (Fórmula de Duplicação). *Sejam  $\alpha > 0$  e  $t \in \mathbb{R}$ . Então vale a seguinte relação:*

$$E_{2\alpha}(t) = \frac{1}{2} [E_{\alpha}(\sqrt{t}) + E_{\alpha}(-\sqrt{t})]. \quad (2.54)$$

*Demonstração.* Para  $\alpha > 0$  e  $t \in \mathbb{R}$  temos que

$$E_{\alpha}(\sqrt{t}) + E_{\alpha}(-\sqrt{t}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^k] t^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\alpha k + 1)} = 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{\frac{2j}{2}}}{\Gamma(2\alpha j + 1)} = E_{2\alpha}(t).$$

□

**Observação 2.2.4.** *Aplicando a relação (2.54) em  $t^2$ , obtemos a seguinte equivalência:*

$$2E_{2\alpha}(t^2) = E_{\alpha}(|t|) + E_{\alpha}(-|t|) = E_{\alpha}(t) + E_{\alpha}(-t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

*Tais relações são análogas as fórmulas de duplicação de arcos na trigonometria. Além disso, casos particulares da função de Mittag-Leffler fornecem algumas identidades com as funções*

trigonométricas clássicas, como mostram os itens abaixo para  $t \in \mathbb{R}^*$ :

$$\begin{aligned}
 \bullet E_2(t^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} = \cosh(t); \\
 \bullet E_2(-t^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} = \cos(t); \\
 \bullet E_{2,2}(t^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{\Gamma((2k+1)+1)} = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{t} \sinh(t); \\
 \bullet E_{2,2}(-t^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{\Gamma((2k+1)+1)} = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{t} \sin(t).
 \end{aligned}$$

**Observação 2.2.5.** É sabido que uma série de potências converge uniformemente em todo intervalo compacto contido no seu intervalo de convergência. Além disso, uma função dada por série de potências, digamos  $f(t) = \sum a_n t^n$ , é derivável em cada ponto  $t$  de seu intervalo de convergência, e ainda, tem-se  $f'(t) = \sum n a_n t^{n-1}$ , e a série de potências da derivada também tem o mesmo raio de convergência (ver [20]).

**Proposição 2.23** (Derivada de ordem  $n$ ). A função de Mittag-Leffler satisfaz a seguinte relação:

$$\left( \frac{d}{dt} \right)^n E_n(t^n) = E_n(t^n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.55)$$

*Demonstração.* Com base na Observação 2.2.5, podemos calcular a derivada de ordem  $n$  da função de Mittag-Leffler da seguinte forma:

$$\left( \frac{d}{dt} \right)^n E_n(t^n) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{d}{dt} \right)^n \left( \frac{t^{nk}}{\Gamma(nk+1)} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(nk+1)} \frac{d^n(t^{nk})}{dt^n}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.56)$$

Além disso, provamos por indução que

$$\frac{d^n(t^{nk})}{dt^n} = (nk)(nk-1) \cdots (nk-(n-1)) t^{nk-n}. \quad (2.57)$$

Segue de (2.56) e (2.57) que

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{d}{dt} \right)^n E_n(t^n) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{nk-n}}{\Gamma(nk+1)} (nk)(nk-1) \cdots (nk-(n-1)) \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(t^{k-1})^n}{\Gamma(nk+1)} \frac{(nk)!}{(nk-n)!},
 \end{aligned}$$

e usando a Proposição 2.10 concluímos que

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n E_n(t^n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(t^{k-1})^n}{\Gamma(nk+1)} \frac{\Gamma(nk+1)}{\Gamma(nk-n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(t^n)^{k-1}}{\Gamma(n(k-1)+1)} = E_n(t^n).$$

□

O resultado seguinte é o triunfo da Seção 2.2 e será fundamental para a demonstração do Teorema 2.26, o qual envolveu uma das principais desigualdades de Gronwall deste trabalho, na versão singular. Sua prova contou com argumentos e estimativas independentes da referência original, a qual pode ser encontrada no Teorema 1.5 de Podlubny [24], tendo êxito por meio de propriedades da função Gama e da função Piso, as quais foram essenciais para que o argumento da função de Mittag-Leffler ficasse em termo dos índices inteiros da série.

**Teorema 2.24.** *Se  $\alpha \in (0, 1)$  e  $t \in (0, T)$ , com  $T > 0$ , então existem constantes  $C_1, C_2 > 0$  que dependem de  $\alpha$  e  $T$ , mas independem de  $t$ , tais que*

$$|E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha)| \leq C_1 e^{C_2 t},$$

onde  $E_{\alpha,\alpha}$  é a função de Mittag-Leffler definida em (2.53).

*Demonstração.* Segue da definição da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros que

$$|E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha)| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha(k+1))} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} + t^{-\alpha} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k)}. \quad (2.58)$$

A função Piso num ponto  $x \geq 0$  retorna o maior número inteiro que é menor ou igual a  $x$ , e é definida por  $\lfloor x \rfloor := \max\{m \in \mathbb{Z}; m \leq x\}$ . Definindo  $\beta_k := \lfloor \alpha k \rfloor$ , para  $k \in \mathbb{N}$ , e sabendo pelo Lema 2.12 que a função Gama é crescente em  $(2, \infty)$  segue que

$$k \geq \frac{2}{\alpha} \implies \alpha k \geq 2 \implies 2 \leq \beta_k \leq \alpha k \implies \Gamma(\beta_k) \leq \Gamma(\alpha k) \xrightarrow{\text{Prop. 2.10}} \frac{1}{\Gamma(\alpha k)} \leq \frac{1}{(\beta_k - 1)!}.$$

Retornando em (2.58) obtemos:

$$\begin{aligned} |E_{\alpha,\alpha}(t^\alpha)| &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} + t^{-\alpha} \underbrace{\sum_{k=2}^{\lfloor \frac{2}{\alpha} \rfloor} \frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k)}}_{< \infty} + t^{-\alpha} \sum_{k=\lfloor \frac{2}{\alpha} \rfloor + 1}^{\infty} \frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k)} \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} + t^{-\alpha} \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{2}{\alpha} \rfloor} \frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k)} + t^{-\alpha} \sum_{k=\lfloor \frac{2}{\alpha} \rfloor + 1}^{\infty} \frac{t^{\alpha k}}{(\beta_k - 1)!}, \quad t \in (0, T). \end{aligned} \quad (2.59)$$

Sejam  $h_\alpha := \frac{2}{\alpha} > 2$  e  $k \geq [h_\alpha] + 1 \geq 3$ . Para cada  $j \in \mathbb{N}$  e  $j[h_\alpha] \leq k < (j+1)[h_\alpha]$  temos

$$2j \frac{[h_\alpha]}{h_\alpha} = j[h_\alpha]\alpha \leq \alpha k < (j+1)[h_\alpha]\alpha = 2(j+1) \frac{[h_\alpha]}{h_\alpha}. \quad (2.60)$$

Além disso,  $[h_\alpha] \leq h_\alpha$  e podemos escrever  $h_\alpha := [h_\alpha] + \rho$ , com  $\rho \in [0, 1)$ , obtendo

$$\begin{aligned} [h_\alpha] = h_\alpha - \rho &\implies \frac{[h_\alpha]}{h_\alpha} = 1 - \frac{\rho}{h_\alpha} > 1 - \frac{1}{h_\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{2} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ &\stackrel{(2.60)}{\implies} j < \alpha k < 2(j+1) \\ &\implies j \leq \beta_k < 2j+2. \end{aligned}$$

Logo, para  $k$  no intervalo  $I_j := [j[h_\alpha], (j+1)[h_\alpha])$ , com  $j \in \mathbb{N}$ , provamos que  $\beta_k \geq j$ . Além disso, neste intervalo existem  $[h_\alpha]$  números inteiros, ou seja, em cada intervalo desta forma  $k$  assume  $[h_\alpha]$  valores. Desta forma, como  $[h_\alpha] + 1 < 2[h_\alpha]$ , pois  $[h_\alpha] \geq 2$ , se  $t \in (0, 1)$ , então

$$\begin{aligned} \sum_{k=[h_\alpha]+1}^{\infty} \frac{t^{\alpha k}}{(\beta_k - 1)!} &\leq \sum_{k=[h_\alpha]+1}^{\infty} \frac{t^{\beta_k}}{(\beta_k - 1)!} \\ &= \sum_{k=[h_\alpha]+1}^{2[h_\alpha]-1} \frac{t^{\beta_k}}{(\beta_k - 1)!} + \sum_{k=2[h_\alpha]}^{3[h_\alpha]-1} \frac{t^{\beta_k}}{(\beta_k - 1)!} + \sum_{k=3[h_\alpha]}^{4[h_\alpha]-1} \frac{t^{\beta_k}}{(\beta_k - 1)!} + \dots \\ &\leq \underbrace{\sum_{k=[h_\alpha]}^{2[h_\alpha]-1} \frac{t^{\beta_k}}{(\beta_k - 1)!}}_{k \in I_1} + \underbrace{\sum_{k=2[h_\alpha]}^{3[h_\alpha]-1} \frac{t^{\beta_k}}{(\beta_k - 1)!}}_{k \in I_2} + \underbrace{\sum_{k=3[h_\alpha]}^{4[h_\alpha]-1} \frac{t^{\beta_k}}{(\beta_k - 1)!}}_{k \in I_3} + \dots \\ &\leq \underbrace{[h_\alpha] \frac{t^1}{(1-1)!}}_{j=1} + \underbrace{[h_\alpha] \frac{t^2}{(2-1)!}}_{j=2} + \underbrace{[h_\alpha] \frac{t^3}{(3-1)!}}_{j=3} + \dots \\ &= [h_\alpha] t e^t, \quad t \in (0, 1). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Por outro lado, se  $t \geq 1$  e sabendo que  $\beta_k < 2j+2$  temos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=[h_\alpha]+1}^{\infty} \frac{t^{\alpha k}}{(\beta_k - 1)!} &\leq \underbrace{\sum_{k=[h_\alpha]}^{2[h_\alpha]-1} \frac{t^{\beta_k+1}}{(\beta_k - 1)!}}_{k \in I_1} + \underbrace{\sum_{k=2[h_\alpha]}^{3[h_\alpha]-1} \frac{t^{\beta_k+1}}{(\beta_k - 1)!}}_{k \in I_2} + \underbrace{\sum_{k=3[h_\alpha]}^{4[h_\alpha]-1} \frac{t^{\beta_k+1}}{(\beta_k - 1)!}}_{k \in I_3} + \dots \\ &\leq \underbrace{[h_\alpha] \frac{t^{2 \cdot 1+3}}{(1-1)!}}_{j=1} + \underbrace{[h_\alpha] \frac{t^{2 \cdot 2+3}}{(2-1)!}}_{j=2} + \underbrace{[h_\alpha] \frac{t^{2 \cdot 3+3}}{(3-1)!}}_{j=3} + \dots \\ &= [h_\alpha] t^5 e^{t^2}, \quad t \geq 1. \end{aligned} \quad (2.62)$$

E como  $t^5 < tT^4$  e  $1 \leq e^{t^2} \leq e^{tT}$ , tomando  $\gamma_1 := \max\{1, T^4\}$  e  $\gamma_2 := \{1, T\}$  segue que

$$\sum_{k=\lfloor h_\alpha \rfloor + 1}^{\infty} \frac{t^{\alpha k}}{(\beta_k - 1)!} \leq \lfloor h_\alpha \rfloor \gamma_1 t e^{\gamma_2 t}, \quad \forall t \in (0, T). \quad (2.63)$$

De (2.59) e (2.63) provamos as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} |E_{\alpha, \alpha}(t^\alpha)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{2}{\alpha} \rfloor} \frac{t^{\alpha(k-1)}}{\Gamma(\alpha k)} + t^{1-\alpha} \lfloor h_\alpha \rfloor \gamma_1 e^{\gamma_2 t} \\ &\leq \left[ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{2}{\alpha} \rfloor} \frac{T^{\alpha(k-1)}}{\Gamma(\alpha k)} \right] e^t + T^{1-\alpha} \lfloor h_\alpha \rfloor \gamma_1 e^{\gamma_2 t} \\ &\leq C_1 e^{C_2 t}, \quad t \in (0, T), \end{aligned} \quad (2.64)$$

com constantes positivas  $C_1 := \max\left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{2}{\alpha} \rfloor} \frac{T^{\alpha(k-1)}}{\Gamma(\alpha k)}, T^{1-\alpha} \lfloor h_\alpha \rfloor \gamma_1 \right\}$  e  $C_2 := \max\{1, \gamma_2\}$ , as quais dependem de  $\alpha$  e  $T$ , mas não de  $t \in (0, T)$ .  $\square$

### 2.3 DESIGUALDADES DE GRONWALL SINGULARES

Nesta seção, estabeleceremos Desigualdades de Gronwall Singulares, as quais serão de grande importância nas aplicações em equações diferenciais fracionárias<sup>13</sup>, conforme veremos na Seção 3.3. Os resultados aqui apresentados serão sequenciados com base nas generalizações das Desigualdades de Gronwall Clássicas da Seção 2.1. No desencadeamento deles, faremos analogias entre as versões clássicas e singulares, identificando os casos singulares cujas demonstrações recaíram na aplicação de desigualdades da Seção 2.1.

Assim sendo, a presente seção elucidará o forte vínculo do caso singular com o clássico, evidenciando ainda o significativo nível de dificuldade nas demonstrações das versões singulares, se comparada às não singulares. Além disso, ficará visível no desenrolar das demonstrações a primordialidade do estudo das Funções Especiais da Seção 2.2, tendo em vista que suas propriedades foram essenciais nos argumentos iterativos envolvendo integrais.

Em vista de apresentar o primeiro teorema da versão singular (Teorema 2.26), iniciaremos com uma observação e um resultado auxiliar que garantirão a boa definição e algumas propriedades a respeito da aplicação que será considerada em sua demonstração. Conforme já comentado na Subseção 2.2.2, a limitação para a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros  $\alpha \in (0, 1)$  (ver Teorema 2.24), será o argumento chave para a conclusão da estimativa desejada.

<sup>13</sup>Ressaltamos que essa aplicação natural se dá pelo fato das singularidades do núcleo integral dessas desigualdades estarem presentes na própria definição da derivada fracionária, conforme podemos ver, por exemplo, nas Definições 3.2.1 e 3.2.2 segundo Riemann-Liouville e Caputo, respectivamente.

**Observação 2.3.1.** Dados  $T, C_0 > 0$  e  $\alpha \in (0, 1)$ , a aplicação dada por

$$\begin{aligned} L : L^1(0, T) &\rightarrow L^1(0, T) \\ y &\longmapsto Ly : (0, T) \rightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto (Ly)(t) := C_0 \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s) ds \end{aligned} \quad (2.65)$$

está bem definida, ou seja,  $Ly \in L^1(0, T)$  para todo  $y \in L^1(0, T)$ . De fato, notemos que

$$\int_0^T |(Ly)(t)| dt = C_0 \int_0^T \left| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s) ds \right| dt \leq C_0 \int_0^T \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |y(s)| ds dt. \quad (2.66)$$

Utilizando mudança de variável na região da integral em (2.66), obtemos:

$$\int_0^T |(Ly)(t)| dt \leq C_0 \int_0^T |y(s)| \underbrace{\int_s^T (t-s)^{\alpha-1} dt}_{:=I(s,t)} ds. \quad (2.67)$$

Fazendo a mudança de variável  $u = \frac{t-s}{T-s}$  na integral  $I(s, t) := \int_s^T (t-s)^{\alpha-1} dt$ , obtemos a convergência

$$I(s, t) = (T-s)^\alpha \int_0^1 u^{\alpha-1} du = \frac{(T-s)^\alpha}{\alpha}.$$

Retornando em (2.67) segue que

$$\int_0^T |(Ly)(t)| dt \leq \frac{C_0}{\alpha} \int_0^T (T-s)^\alpha |y(s)| ds \leq \frac{C_0 T^\alpha}{\alpha} \int_0^T |y(s)| ds < \infty, \quad (2.68)$$

pois  $y \in L^1(0, T)$ .

**Lema 2.25.** Sejam  $y \in L^1(0, T)$  e  $L$  a aplicação dada em (2.65).

- (i)  $L$  é um operador linear;
- (ii)  $L$  é não decrescente, isto é, se  $y_1 \leq y_2$  em  $L^1(0, T)$ , então  $Ly_1 \leq Ly_2$  em  $L^1(0, T)$ ;
- (iii)  $(L^N y) \in L^1(0, T)$  para todo  $N \in \mathbb{N}$ ;

$$(iv) (L^N y)(t) = \frac{[C_0 \Gamma(\alpha)]^N}{\Gamma(\alpha N)} \int_0^t (t-s)^{\alpha N-1} y(s) ds, \text{ para todo } t \in (0, T) \text{ e } N \in \mathbb{N}.$$

*Demonstração.* As provas de (i) e (ii) são triviais, e a de (iii) segue por indução, com argumentos análogos aos descritos na Observação 2.3.1. Para  $N = 1$ , a igualdade em (iv) é imediata.

Suponhamos agora que vale (iv) para  $k \in \mathbb{N}$ . Nestas condições,

$$\begin{aligned}
(L^{k+1}y)(t) &= (L(L^k y))(t) = C_0 \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} (L^k y)(\xi) d\xi \\
&= C_0 \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} \left[ \frac{[C_0 \Gamma(\alpha)]^k}{\Gamma(\alpha k)} \int_0^\xi (\xi-s)^{\alpha k-1} y(s) ds \right] d\xi \\
&= C_0^{k+1} \frac{[\Gamma(\alpha)]^k}{\Gamma(\alpha k)} \int_0^t \int_0^\xi (t-\xi)^{\alpha-1} (\xi-s)^{\alpha k-1} y(s) ds d\xi. \quad (2.69)
\end{aligned}$$

Utilizando mudança de variável na região de integração em (2.69), obtemos:

$$(L^{k+1}y)(t) = C_0^{k+1} \frac{[\Gamma(\alpha)]^k}{\Gamma(\alpha k)} \int_0^t y(s) \underbrace{\int_s^t (t-\xi)^{\alpha-1} (\xi-s)^{\alpha k-1} d\xi}_{:=I(k,s,t)} ds, \quad t \in (0, T). \quad (2.70)$$

Fazendo a mudança de variável  $u = \frac{\xi-s}{t-s}$  em  $I(k, s, t)$  segue que

$$\begin{aligned}
I(k, s, t) &= \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} (t-s)^{\alpha-1} u^{\alpha k-1} (t-s)^{\alpha k-1} (t-s) du \\
&= (t-s)^{\alpha(k+1)-1} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\alpha k-1} du \\
&\stackrel{(2.45)}{=} (t-s)^{\alpha(k+1)-1} B(\alpha, \alpha k) \\
&\stackrel{(2.46)}{=} (t-s)^{\alpha(k+1)-1} \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\alpha k)}{\Gamma(\alpha(k+1))}, \quad t \in (0, T). \quad (2.71)
\end{aligned}$$

De (2.70) e (2.71) concluímos que

$$(L^{k+1}y)(t) = \frac{[C_0 \Gamma(\alpha)]^{k+1}}{\Gamma(\alpha(k+1))} \int_0^t (t-s)^{\alpha(k+1)-1} y(s) ds, \quad t \in (0, T), \quad k \in \mathbb{N}.$$

□

Com base nos resultados auxiliares anteriores, demonstraremos o Teorema 2.26. Sua prova foi motivada por Kubica, Ryszewska e Yamamoto (ver Lema A.2 de [19]), porém com argumentos independentes em determinadas estimativas.

**Teorema 2.26 (GS1).** *Sejam  $C_0 > 0$ ,  $\alpha \in (0, 1)$  e  $a \in L^1(0, T)$  uma função não negativa. Se  $x \in L^1(0, T)$  satisfaz*

$$0 \leq x(t) \leq a(t) + C_0 \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} x(s) ds, \quad t \in (0, T), \quad (2.72)$$

então existem constantes  $C_1, C_2 > 0$  que dependem de  $\alpha, T$  e  $C_0$ , mas independem de  $t > 0$ , tais que

$$x(t) \leq a(t) + C_1 e^{C_2 t} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} a(s) ds, \quad t \in (0, T). \quad (2.73)$$

*Demonstração.* Seja  $L$  a aplicação dada em (2.65). Segue da hipótese que

$$0 \leq x(t) \leq a(t) + (Lx)(t), \quad t \in (0, T), \quad (2.74)$$

ou seja,  $0 \leq x \leq a + Lx$  em  $(0, T)$ . Desta forma, usando a monotonicidade e a linearidade da aplicação  $L$  obtemos que as seguintes desigualdades em  $(0, T)$ :

$$Lx \leq L(a + Lx) = La + L^2x \xrightarrow{(2.74)} x \leq a + La + L^2x. \quad (2.75)$$

De (2.75) segue que

$$Lx \leq L(a + La + L^2x) = La + L^2a + L^3x \xrightarrow{(2.74)} x \leq a + La + L^2a + L^3x. \quad (2.76)$$

Prosseguindo de maneira análoga  $N$  vezes, com  $N \in \mathbb{N}$  fixado, obtemos:

$$x(t) \leq a(t) + \sum_{k=1}^N (L^k a)(t) + (L^{N+1}x)(t), \quad t \in (0, T). \quad (2.77)$$

Definindo  $\theta := [C_0 \Gamma(\alpha)]^{\frac{1}{\alpha}}$ , segue de (2.77) e do Lema 2.25 que, para  $t \in (0, T)$ ,

$$\begin{aligned} x(t) &\leq a(t) + \sum_{k=1}^N \left[ \frac{\theta^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k)} \underbrace{\int_0^t (t-s)^{\alpha k-1} a(s) ds}_{< \infty} \right] + \frac{\theta^{\alpha(N+1)}}{\Gamma(\alpha(N+1))} \int_0^t (t-s)^{\alpha(N+1)-1} x(s) ds \\ &= a(t) + \int_0^t \left[ \sum_{k=1}^N \frac{\theta^{\alpha k} (t-s)^{\alpha k-1} a(s)}{\Gamma(\alpha k)} \right] ds + \frac{\theta^{\alpha(N+1)}}{\Gamma(\alpha(N+1))} \int_0^t (t-s)^{\alpha(N+1)-1} x(s) ds. \end{aligned} \quad (2.78)$$

**Afirmção 1.**  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(\theta T)^{\alpha N}}{\Gamma(\alpha(N+1))} = 0$ .

Com efeito, notemos que

$$\begin{aligned} \frac{(\theta T)^{\alpha N}}{\Gamma(\alpha(N+1))} &= \left\{ \int_0^\infty [(\theta T)^{-1}]^{\alpha(N+1)-1-\alpha+1} e^{-u} u^{\alpha(N+1)-1} du \right\}^{-1} \\ &= \left\{ (\theta T)^{\alpha-1} \int_0^\infty e^{-u} \left( \frac{u}{\theta T} \right)^{\alpha(N+1)-1} du \right\}^{-1} \\ &= \left\{ (\theta T)^\alpha \int_0^\infty e^{-\theta T v} v^{\alpha(N+1)-1} dv \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Para  $v \geq 1$ , dado  $A > 0$  consideremos  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$N > N_0 \implies v^{\alpha(N+1)-1} > A\theta T e^{\theta T} \implies v^{\alpha(N+1)-1} e^{-\theta T v} > A\theta T e^{\theta T} e^{-\theta T v}. \quad (2.79)$$

Nestas condições, para  $N > N_0$  obtemos:

$$\int_0^\infty e^{-\theta T v} v^{\alpha(N+1)-1} dv \geq \int_1^\infty e^{-\theta T v} v^{\alpha(N+1)-1} dv \stackrel{(2.79)}{\geq} A\theta T e^{\theta T} \int_1^\infty e^{-\theta T v} dv = A,$$

consequentemente,  $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-\theta T v} v^{\alpha(N+1)-1} dv = \infty$ , o que prova a Afirmação 1.

**Afirmação 2.**  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\theta^{\alpha(N+1)}}{\Gamma(\alpha(N+1))} \int_0^t (t-s)^{\alpha(N+1)-1} x(s) ds = 0.$

De fato, consideremos  $N_1 \in \mathbb{N}$  tal que

$$(N_1 + 1)\alpha - 1 > 0 \iff N_1 + 1 > \frac{1}{\alpha} > 1 \iff N_1 > \frac{1}{\alpha} - 1 > 0.$$

Sendo assim, para cada  $N > N_1$  temos que

$$\left| \int_0^t (t-s)^{\alpha(N+1)-1} x(s) ds \right| \leq T^{\alpha(N+1)-1} \int_0^t |x(s)| ds \leq T^{\alpha(N+1)-1} \|x\|_{L^1(0,T)}.$$

Logo, para  $N > N_1$  obtemos:

$$\left| \frac{\theta^{\alpha(N+1)}}{\Gamma(\alpha(N+1))} \int_0^t (t-s)^{\alpha(N+1)-1} x(s) ds \right| \leq \underbrace{\theta^\alpha T^{\alpha-1} \|x\|_{L^1(0,T)}}_{< \infty} \frac{(\theta T)^{\alpha N}}{\Gamma(\alpha(N+1))}.$$

Com esta desigualdade e a Afirmação 1 provamos a Afirmação 2.

Sabendo que  $E_{\alpha,1}((\theta s)^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta s)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)}$  é a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros e que podemos derivar esta série termo a termo, obtemos as igualdades a seguir:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} E_{\alpha,1}((\theta s)^\alpha) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^{\alpha k} s^{\alpha k - 1}}{\Gamma(\alpha k)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta s)^{\alpha(k+1)} s^{-1}}{\Gamma(\alpha(k+1))} \\ &= s^{\alpha-1} \theta^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta s)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + \alpha)}. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Segue de (2.80) que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^{\alpha k} s^{\alpha k - 1}}{\Gamma(\alpha k)} = s^{\alpha-1} \theta^\alpha E_{\alpha,\alpha}((\theta s)^\alpha), \quad s \in (0, t), \quad t \in (0, T). \quad (2.81)$$

Desta forma, tomando o limite quando  $N \rightarrow \infty$  em (2.78), usando a Afirma-

ção 2 e o Teorema 2.24, com constantes  $C_1, C_2 > 0$  dependendo de  $\alpha$  e  $T$ , segue que

$$\begin{aligned}
 x(t) &\leq a(t) + \int_0^t \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\theta^{\alpha k} (t-s)^{\alpha k-1} a(s)}{\Gamma(\alpha k)} \right] ds \\
 &\stackrel{(2.81)}{=} a(t) + \theta^\alpha \int_0^t E_{\alpha, \alpha}((\theta(t-s))^\alpha) (t-s)^{\alpha-1} a(s) ds \\
 &\leq a(t) + \theta^\alpha \int_0^t C_1 e^{C_2 \theta t} \underbrace{e^{-C_2 \theta s}}_{\leq 1} (t-s)^{\alpha-1} a(s) ds \\
 &\leq a(t) + \theta^\alpha C_1 e^{C_2 \theta t} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} a(s) ds, \quad t \in (0, T),
 \end{aligned}$$

provando (2.73). □

Conforme vimos na demonstração do Teorema 2.26, propriedades de convergências envolvendo as funções Gama e de Mittag-Leffler foram recorrentes e indispensáveis. Apesar da tese não coincidir com a referência modelo (ver Lema A.2 de [19]), pelo fato das constantes  $C_1$  e  $C_2$  dependerem do extremo do intervalo do domínio das funções ( $T > 0$ ), o que inviabiliza a análise comportamental no limite ( $T \rightarrow \infty$ ), salientamos que sua prova foi autossuficiente, embasada apenas em resultados presentes neste trabalho, com todas as estimativas devidamente justificadas, valorizando a limitação obtida.

Além disso, o Teorema 2.26 é a versão singular correspondente ao Gronwall Clássico do Teorema 2.1, cuja prova contou apenas com simples argumentos advindos da resolução de equações diferenciais ordinárias, via método do fator integrante, enquanto que a prova do resultado anterior exigiu inúmeros conceitos que divergem do procedimento tradicional das demonstrações das versões clássicas.

No resultado a seguir visualizamos uma aplicação<sup>14</sup> do Teorema 2.26.

**Corolário 2.27 (GS2).** *Sejam  $k_0, k_1 \in [0, \infty)$ ,  $\alpha, \beta \in (0, 1)$  e  $x \in L^1(0, T)$  uma função não negativa satisfazendo*

$$x(t) \leq k_0 t^{-\alpha} + k_1 \int_0^t (t-s)^{-\beta} x(s) ds, \quad t \in (0, T). \quad (2.82)$$

*Então, existe uma constante positiva  $M := M(k_1, \beta, T)$  tal que*

$$x(t) \leq \frac{k_0 t^{-\alpha}}{1-\alpha} M(k_1, \beta, T), \quad t \in (0, T). \quad (2.83)$$

*Demonstração.* Considerando a função não negativa  $a(t) := k_0 t^{-\alpha}$  que pertence a  $L^1(0, T)$  e definindo  $\tilde{\alpha} := 1 - \beta \in (0, 1)$ , segue do Teorema 2.26 que existem constantes  $C_1, C_2 > 0$  que

<sup>14</sup>Esta aplicação baseou-se em um exercício proposto no livro do Henry (ver Seção 7.1 de [15]).

dependem de  $\beta, T$  e  $k_1$ , mas independem de  $t > 0$ , tais que

$$x(t) \leq k_0 t^{-\alpha} + k_0 C_1 e^{C_2 t} \int_0^t (t-s)^{-\beta} s^{-\alpha} ds, \quad t \in (0, T). \quad (2.84)$$

Vamos analisar a seguinte integral para  $t \in (0, T)$ :

$$\begin{aligned} I_{\alpha, \beta}(t) &= \int_0^t t^{-\beta} \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{-\beta} s^{-\alpha} ds \\ &= t^{1-\alpha-\beta} \int_0^1 (1-u)^{-\beta} u^{-\alpha} du \\ &\stackrel{(2.45)}{=} t^{1-\alpha-\beta} B(1-\beta, 1-\alpha) \\ &\stackrel{(2.46)}{=} t^{1-\alpha-\beta} \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha-\beta)}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

De (2.84) e (2.85) obtemos que

$$\begin{aligned} x(t) &\leq k_0 t^{-\alpha} \left\{ 1 + C_1 e^{C_2 t} t^{1-\beta} \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha-\beta)} \right\} \\ &\leq k_0 t^{-\alpha} e^{C_2 t} \left\{ 1 + C_1 T^{1-\beta} \frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-\alpha-\beta)} \right\}, \quad t \in (0, T). \end{aligned} \quad (2.86)$$

Além disso, são válidas as seguintes desigualdades:

- $\Gamma(2-\alpha-\beta) = \int_0^\infty e^{-u} u^{1-\alpha-\beta} du \geq \int_1^\infty e^{-u} \underbrace{u^{1-\alpha}}_{\geq 1} u^{-\beta} du \geq \int_1^\infty e^{-u} u^{-\beta} du > 0;$
- $\Gamma(1-\alpha) = \int_0^1 \underbrace{e^{-u}}_{\leq 1} u^{-\alpha} du + \int_1^\infty e^{-u} \underbrace{u^{-\alpha}}_{\leq 1} du \leq \int_0^1 u^{-\alpha} du + \int_1^\infty e^{-u} du = \frac{1}{1-\alpha} + e^{-1}.$

Dessa forma, definindo  $C_3 := \frac{C_1 T^{1-\beta} \Gamma(1-\beta)}{\int_1^\infty e^{-u} u^{-\beta} du} > 0$  segue que

$$\begin{aligned} x(t) &\leq k_0 t^{-\alpha} e^{C_2 t} \left\{ 1 + C_3 e^{-1} + C_3 \frac{1}{1-\alpha} \right\} \\ &\leq \frac{k_0 t^{-\alpha}}{1-\alpha} e^{C_2 T} \{1 + C_3 e^{-1} + C_3\}, \quad t \in (0, T). \end{aligned}$$

Considerando  $M(k_1, \beta, T) := e^{C_2 T} \{1 + C_3 e^{-1} + C_3\}$  concluímos a prova de (2.83).  $\square$

**Corolário 2.28.** *Se as hipóteses do Corolário 2.27 são satisfeitas, então existem constantes positivas  $M_1$  e  $M_2$ , que dependem de  $k_1, \beta$  e  $T$ , tais que*

$$x(t) \leq \frac{k_0 M_1}{1-\alpha} t^{-\alpha} e^{M_2 t}, \quad t \in (0, T). \quad (2.87)$$

*Demonstração.* Consequência imediata do Corolário 2.27.  $\square$

Veremos no resultado a seguir um caso mais geral do Gronwall Singular, baseado em argumentos iterativos, a fim de chegar nas hipóteses do Teorema da Convergência Dominada, do qual decorrerá a prova do teorema. Sua demonstração foi motivada pelo artigo de Ye, Gao e Ding (ver Teorema 1 de [31]), com justificativas próprias em determinadas estimativas.

**Teorema 2.29 (GS3).** *Sejam  $\gamma > 0$ ,  $a : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$  função localmente integrável,  $b : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$  função contínua não decrescente e limitada por uma constante  $M > 0$ . Se  $x : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$  é uma função localmente integrável que satisfaz a desigualdade*

$$x(t) \leq a(t) + b(t) \int_0^t (t-s)^{\gamma-1} x(s) ds, \quad t \in [0, T), \quad (2.88)$$

então

$$x(t) \leq a(t) + \int_0^t \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b(t)\Gamma(\gamma))^n}{\Gamma(n\gamma)} (t-s)^{n\gamma-1} a(s) \right] ds, \quad t \in [0, T), \quad (2.89)$$

onde  $\Gamma$  é a função Gama definida em (2.30).

*Demonstração.* Para qualquer função  $y$  localmente integrável em  $[0, T)$ , consideremos a função  $z$  definida por

$$z(y(t)) := b(t) \int_0^t (t-s)^{\gamma-1} y(s) ds, \quad t \geq 0.$$

Nestas condições, de (2.88) obtemos:

$$x(t) \leq a(t) + z(x(t)), \quad t \in [0, T). \quad (2.90)$$

**Afirmção 1.**  $z$  é não decrescente.

De fato, sejam  $y_1$  e  $y_2$  funções localmente integráveis em  $[0, T)$  tais que  $y_1(s) \leq y_2(s)$  para  $s \in [0, T)$ . Nestas condições,

$$z(y_1(t)) \leq z(y_2(t)), \quad t \in [0, T). \quad (2.91)$$

Logo,  $z$  é não decrescente.

Além disso, usando (2.90) e o fato de  $x$  e  $a$  serem localmente integráveis, vale a seguinte desigualdade:

$$z(x(t)) \leq z(a(t) + z(x(t))) \stackrel{z \text{ linear}}{=} z(a(t)) + z^2(x(t)), \quad t \in [0, T). \quad (2.92)$$

Desta forma, de (2.92) segue que

$$z^2(x(t)) \leq z\left(z(a(t)) + z^2(x(t))\right) = z^2(a(t)) + z^3(x(t)), \quad t \in [0, T). \quad (2.93)$$

Com base nas desigualdades anteriores, obtemos:

$$\begin{aligned}
x(t) &\stackrel{(2.90)}{\leq} a(t) + z(x(t)) \\
&\stackrel{(2.92)}{\leq} a(t) + z(a(t)) + z^2(x(t)) \\
&\stackrel{(2.93)}{\leq} a(t) + z(a(t)) + z^2(a(t)) + z^3(x(t)) \\
&= z^0(a(t)) + z^1(a(t)) + z^2(a(t)) + z^3(x(t)), \quad t \in [0, T]. \tag{2.94}
\end{aligned}$$

Prosseguindo com o processo anterior para a potência  $(n-1)$  em  $z^{n-1}(x(t))$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , segue de (2.94) que

$$\begin{aligned}
x(t) &\leq z^0(a(t)) + z^1(a(t)) + z^2(a(t)) + z^3(a(t)) + \dots + z^{n-1}(a(t)) + z^n(x(t)) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} z^k(a(t)) + z^n(x(t)), \quad t \in [0, T], \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.95}
\end{aligned}$$

**Afirmção 2.** Para todo  $t \in [0, T)$  e  $n \in \mathbb{N}$  vale a desigualdade

$$z^n(x(t)) \leq \int_0^t \frac{(b(s)\Gamma(\gamma))^n}{\Gamma(n\gamma)} (t-s)^{n\gamma-1} x(s) ds := I_n(t).$$

Com efeito, para  $n = 1$  temos que

$$I_1(t) = \int_0^t b(s)(t-s)^{\gamma-1} x(s) ds = b(t) \int_0^t (t-s)^{\gamma-1} x(s) ds = z(x(t)).$$

Suponhamos agora que a afirmação seja verdadeira para  $n = k$  e provaremos por indução que também vale para  $n = k + 1$ . De fato, notemos que

$$\begin{aligned}
z^{k+1}(x(t)) &\stackrel{H.I.}{\leq} z(I_k(t)) = b(t) \int_0^t (t-s)^{\gamma-1} I_k(s) ds \\
&\leq b(t) \int_0^t (t-s)^{\gamma-1} \left[ \int_0^s \frac{(b(\tau)\Gamma(\gamma))^k}{\Gamma(k\gamma)} (s-\tau)^{k\gamma-1} x(\tau) d\tau \right] ds. \tag{2.96}
\end{aligned}$$

Como  $b$  é não decrescente, para  $0 < s < t$  temos que  $b(s) \leq b(t)$ . Assim, segue de (2.96) que

$$z^{k+1}(x(t)) \leq [b(t)]^{k+1} \int_0^t (t-s)^{\gamma-1} \left[ \int_0^s \frac{(\Gamma(\gamma))^k}{\Gamma(k\gamma)} (s-\tau)^{k\gamma-1} x(\tau) d\tau \right] ds, \quad t \in [0, T]. \tag{2.97}$$

Fazendo mudança de variável em (2.97) prossegue que

$$z^{k+1}(x(t)) \leq [b(t)]^{k+1} \int_0^t \frac{(\Gamma(\gamma))^k}{\Gamma(k\gamma)} \left[ \int_\tau^t (t-s)^{\gamma-1} (s-\tau)^{k\gamma-1} ds \right] x(\tau) d\tau, \quad t \in [0, T]. \tag{2.98}$$

Pelo Lema 2.20 obtemos a seguinte igualdade:

$$\int_{\tau}^t (t-s)^{\gamma-1} (s-\tau)^{k\gamma-1} ds = (t-\tau)^{(k+1)\gamma-1} \frac{\Gamma(k\gamma)\Gamma(\gamma)}{\Gamma((k+1)\gamma)}, \quad t \in [0, T]. \quad (2.99)$$

De (2.98) e (2.99) segue que

$$\begin{aligned} z^{k+1}(x(t)) &\leq [b(t)]^{k+1} \int_0^t \frac{(\Gamma(\gamma))^k}{\Gamma(k\gamma)} \left[ (t-\tau)^{(k+1)\gamma-1} \frac{\Gamma(k\gamma)\Gamma(\gamma)}{\Gamma((k+1)\gamma)} \right] x(\tau) d\tau \\ &= \int_0^t \frac{[b(t)\Gamma(\gamma)]^{k+1}}{\Gamma((k+1)\gamma)} (t-\tau)^{(k+1)\gamma-1} x(\tau) d\tau \\ &= I_{k+1}(t), \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (2.100)$$

o que conclui a prova da Afirmação 2.

Além disso, sendo  $b$  uma função limitada por  $M$  vale que

$$z^n(x(t)) \leq \int_0^t \frac{(M\Gamma(\gamma))^n}{\Gamma(n\gamma)} (t-s)^{n\gamma-1} x(s) ds, \quad t \in [0, T]. \quad (2.101)$$

De (2.95) e (2.101) obtemos que

$$x(t) \leq \sum_{k=0}^{n-1} z^k(a(t)) + \int_0^t \frac{(M\Gamma(\gamma))^n}{\Gamma(n\gamma)} (t-s)^{n\gamma-1} x(s) ds, \quad t \in [0, T], \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.102)$$

**Afirmação 3.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Gamma(n\gamma) = \infty$ .

Seja  $A > 0$ . Para  $u \geq 1$  consideremos  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n > n_0 \implies u^{n\gamma-1} > Ae \implies e^{-u} t^{n\gamma-1} > e^{-u} Ae, \quad u \geq 1. \quad (2.103)$$

Assim, para  $n > n_0$  obtemos

$$\Gamma(n\gamma) = \int_0^\infty e^{-u} u^{n\gamma-1} du \stackrel{(2.103)}{>} \int_1^\infty Ae^{1-u} du = A,$$

o que prova a afirmação.

**Afirmação 4.** Para todo  $t \in [0, T]$  fixado, a sequência de funções definida por

$$f_n(s) := \frac{(M\Gamma(\gamma))^n}{\Gamma(n\gamma)} (t-s)^{n\gamma-1} x(s), \quad n \in \mathbb{N}, \quad s \in (0, t), \quad (2.104)$$

converge quase sempre para a função  $f \equiv 0$ .

De fato, vamos calcular o limite a seguir:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(s) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[M\Gamma(\gamma)]^{\frac{n\gamma-1+1}{\gamma}}}{\Gamma(n\gamma)} (t-s)^{n\gamma-1} x(s) \\ &= x(s) [M\Gamma(\gamma)]^{\frac{1}{\gamma}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\{[M\Gamma(\gamma)]^{\frac{1}{\gamma}} (t-s)\}^{n\gamma-1}}{\Gamma(n\gamma)}.\end{aligned}\quad (2.105)$$

Definamos  $I(s) := [M\Gamma(\gamma)]^{\frac{1}{\gamma}} (t-s)$ , com  $s \in (0, t)$ . Para os pontos  $s$  tais que  $0 \leq I(s) \leq 1$ , é imediato que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(s) = 0$  para quase todo  $s \in (0, t)$ , pois  $[M\Gamma(\gamma)]^{\frac{1}{\gamma}}$  é limitado e, como  $x$  é integrável em  $(0, t)$ , segue do Teorema 1.11 que  $x(s)$  é finito, exceto num conjunto de medida nula. Analisemos agora o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[I(s)]^{n\gamma-1}}{\Gamma(n\gamma)}$$

para os pontos  $s \in (0, t)$  tais que  $I(s) > 1$ . Por simplicidade, escreveremos apenas  $I$  no lugar de  $I(s)$ . Podemos reescrever o termo do limite anterior da seguinte forma:

$$\frac{I^{n\gamma-1}}{\Gamma(n\gamma)} = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-u} u^{n\gamma-1} I^{1-n\gamma} du} = \frac{1}{\int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{I}\right)^{n\gamma-1} du} = \frac{1}{\int_0^\infty I e^{-vI} v^{n\gamma-1} dv}.\quad (2.106)$$

Para  $v \geq 1$ , dado  $A > 0$  consideremos  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que

$$n > n_0 \implies v^{n\gamma-1} > Ae^I \implies v^{n\gamma-1} I e^{-vI} > Ae^I I e^{-vI}, \quad v \geq 1.\quad (2.107)$$

Dessa forma, para  $n > n_0$  obtemos que

$$\int_0^\infty I e^{-vI} v^{n\gamma-1} dv \stackrel{(2.107)}{>} \int_1^\infty Ae^I I e^{-vI} dv,$$

provando que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\int_0^\infty I e^{-vI} v^{n\gamma-1} dv} = 0.\quad (2.108)$$

De (2.106) e (2.108) segue que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I^{n\gamma-1}}{\Gamma(n\gamma)} = 0$ . Para  $I(s) > 1$ , usando a justificativa anterior para a limitação quase sempre de  $x(s)$ , obtemos o seguinte limite para quase todo  $s \in (0, t)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(s) = x(s) [M\Gamma(\gamma)]^{\frac{1}{\gamma}} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(I(s))^{n\gamma-1}}{\Gamma(n\gamma)} = 0.\quad (2.109)$$

Pelos casos analisados anteriormente provamos que a sequência de funções  $f_n$  converge quase sempre para a função identicamente nula em  $(0, t)$ .

**Afirmção 5.**  $\int_0^t \frac{(M\Gamma(\gamma))^n}{\Gamma(n\gamma)} (t-s)^{n\gamma-1} x(s) ds \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , para todo  $t \in [0, T)$ .

Com efeito, para cada  $s \in (0, t)$  demonstramos na Afirmção 4 que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(I(s))^{n\gamma-1}}{\Gamma(n\gamma)} = 0.$$

Desta forma, existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, para  $n > n_0$ , vale a desigualdade  $\frac{(I(s))^{n\gamma-1}}{\Gamma(n\gamma)} < [M\Gamma(\gamma)]^{-\frac{1}{\gamma}}$ , conseqüentemente,

$$|f_n(s)| = x(s)[M\Gamma(\gamma)]^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(I(s))^{n\gamma-1}}{\Gamma(n\gamma)} < x(s), \quad s \in (0, t). \quad (2.110)$$

Por outro lado, para  $n \in \{1, \dots, n_0\}$ , se  $M_1 := \max_{j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq n_0} \left\{ \frac{(I(s))^{j\gamma-1}}{\Gamma(j\gamma)} \right\}$ , então

$$|f_n(s)| = x(s)[M\Gamma(\gamma)]^{\frac{1}{\gamma}} \frac{(I(s))^{n\gamma-1}}{\Gamma(n\gamma)} \leq M_1 [M\Gamma(\gamma)]^{\frac{1}{\gamma}} x(s), \quad s \in (0, t).$$

Definindo  $M_2 := \max\{1, M_1 [M\Gamma(\gamma)]^{\frac{1}{\gamma}}\}$ , segue do exposto acima que

$$|f_n(s)| < M_2 x(s), \quad s \in (0, t), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2.111)$$

Sabendo que  $x|_{(0,t)}$  é integrável por hipótese, então a função  $g(s) := M_2 x(s)$  também é integrável em  $(0, t)$ . Desta forma, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada (Teorema 1.12) para concluirmos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t f_n(s) ds = \int_0^t \underbrace{f(s)}_{=0} ds = 0.$$

Como a prova da Afirmção 2 independe da função  $x(t)$  e  $a : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$  é localmente integrável por hipótese, vale que

$$z^k(a(t)) \leq \int_0^t \frac{(b(t)\Gamma(\gamma))^k}{\Gamma(k\gamma)} (t-s)^{k\gamma-1} a(s) ds, \quad t \in [0, T), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.112)$$

Assim, para todo  $t \in [0, T)$ , segue de (2.102) e (2.112) que

$$\begin{aligned} x(t) &\leq a(t) + \sum_{k=1}^{n-1} z^k(a(t)) + \int_0^t \frac{(M\Gamma(\gamma))^n}{\Gamma(n\gamma)} (t-s)^{n\gamma-1} x(s) ds \\ &= a(t) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^t \frac{(b(t)\Gamma(\gamma))^k}{\Gamma(k\gamma)} (t-s)^{k\gamma-1} a(s) ds + \int_0^t \frac{(M\Gamma(\gamma))^n}{\Gamma(n\gamma)} (t-s)^{n\gamma-1} x(s) ds. \end{aligned} \quad (2.113)$$

Tomando o limite em (2.113) quando  $n \rightarrow \infty$  e usando a Afirmação 5, obtemos:

$$\begin{aligned} x(t) &\leq a(t) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^t \frac{(b(t)\Gamma(\gamma))^k}{\Gamma(k\gamma)} (t-s)^{k\gamma-1} a(s) ds \\ &= a(t) + \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\int_0^t \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b(t)\Gamma(\gamma))^k}{\Gamma(k\gamma)} (t-s)^{k\gamma-1} a(s) ds}_{h_n(s)}, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2.114)$$

Resta provarmos que podemos inverter o limite com a integral em (2.114). Para isso, consideremos a função  $u_n(s) := a(s)h_n(s)$ , onde

$$h_n(s) := \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(b(t)\Gamma(\gamma))^k}{\Gamma(k\gamma)} (t-s)^{k\gamma-1}, \quad k \in \{1, 2, \dots, n-1\}, \quad s \in (0, t).$$

Como a condição  $k\gamma < 1$  é satisfeita para uma quantidade finita de  $k \in \mathbb{N}$ , é suficiente analisarmos a convergência para os índices da série verificando a condição  $k\gamma \geq 1$ . Sob essas hipóteses, obtemos a seguinte limitação:

$$\left| \frac{(b(t)\Gamma(\gamma))^k}{\Gamma(k\gamma)} (t-s)^{k\gamma-1} \right| \leq \frac{(M\Gamma(\gamma))^k}{\Gamma(k\gamma)} T^{k\gamma-1} = \frac{1}{T} \frac{C^k}{\Gamma(k\gamma)}, \quad C := M\Gamma(\gamma)T^\gamma. \quad (2.115)$$

Sabemos do Lema 2.16 que a série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C^k}{\Gamma(k\gamma)}$  converge absolutamente, e como  $T^{-1}$  é uma constante, de (2.115) e do Teste de Weierstrass<sup>15</sup> concluímos que a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(b(t)\Gamma(\gamma))^k}{\Gamma(k\gamma)} (t-s)^{k\gamma-1}$$

converge uniformemente, digamos para uma função contínua  $f$  (a qual também é integrável), ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(s) = f(s), \quad s \in (0, t). \quad (2.116)$$

Com isso, obtemos a convergência pontual

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} a(s)h_n(s) = a(s)f(s), \quad s \in (0, t). \quad (2.117)$$

Segue de (2.116) que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, para  $n > n_0$ ,  $|h_n(s) - f(s)| < 1$ . Sendo assim,

$$\begin{aligned} |u_n(s)| &\leq |a(s)h_n(s) - f(s)a(s)| + |f(s)a(s)| \\ &= (|h_n(s) - f(s)| + |f(s)|)|a(s)| \\ &\leq (1 + |f(s)|)|a(s)|, \quad n > n_0. \end{aligned}$$

<sup>15</sup>Ver [20], Capítulo 10, Teorema 2.

Deste modo,  $u_n$  é limitada por uma função integrável (pois para  $n \leq n_0$  se trata de uma soma finita), sendo também pontualmente convergente. Nestas condições, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada (Teorema 1.12) em (2.114) para inverter o limite com a integral nesta desigualdade, o que conclui a prova de (2.89). □

Conforme podemos ver nos resultados anteriores, as demonstrações dos Teoremas 2.26 e 2.29 possuem uma similaridade com relação aos procedimentos recorrentes nas provas, através de limites. No entanto, ao generalizarmos a constante  $C_0$  do primeiro teorema para uma função  $b(t)$  suficientemente regular no segundo, notamos que, para findar a demonstração, são requeridas outras ferramentas, como o oportuno Teorema da Convergência Dominada.

Ressaltamos ainda que o Gronwall Singular do Teorema 2.29 procede como o análogo ao Gronwall Clássico do Teorema 2.2, e novamente reafirmamos que a simples inserção da singularidade, a qual surge apenas ao considerarmos  $\gamma \in (0, 1)$  (caso contrário recaímos no Gronwall Clássico), complexifica consideravelmente a demonstração do teorema.

Visando simplificar a tese do Teorema 2.29, para tornar menos abstrata a limitação do Gronwall Singular, apresentaremos na sequência o Corolário 2.30 como aplicação do resultado referido anteriormente, envolvendo uma estimativa em termos da função de Mittag-Leffler.

**Corolário 2.30 (GS4).** *Sob as hipóteses do Teorema 2.29 e assumindo que  $a : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  é uma função não decrescente, então*

$$x(t) \leq a(t)E_\gamma(b(t)\Gamma(\gamma)t^\gamma), \quad t \in [0, T], \quad (2.118)$$

onde  $E_\gamma$  é a função de Mittag-Leffler definida em (2.52).

*Demonstração.* Sendo  $a$  não decrescente, para  $0 < s < t < T$  temos que  $a(s) \leq a(t)$  em  $[0, T]$ . Assim, segue do Teorema 2.29 que

$$\begin{aligned} x(t) &\leq a(t) + a(t) \int_0^t \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b(t)\Gamma(\gamma))^n}{\Gamma(n\gamma)} (t-s)^{n\gamma-1} \right] ds \\ &= a(t) \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b(t)\Gamma(\gamma))^n}{\Gamma(n\gamma)} \left[ \int_0^t (t-s)^{n\gamma-1} ds \right] \right\}, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Além disso, como  $\int_0^t (t-s)^{n\gamma-1} ds = \frac{1}{n\gamma} t^{n\gamma}$ , de (2.119) concluímos que

$$x(t) \leq a(t) \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b(t)\Gamma(\gamma)t^\gamma)^n}{n\gamma\Gamma(n\gamma)} \right\} \stackrel{Prop. 2.10}{=} a(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b(t)\Gamma(\gamma)t^\gamma)^n}{\Gamma(n\gamma + 1)}, \quad t \in [0, T].$$

□

Antes de prosseguir com mais resultados, definiremos uma classe de funções não lineares que serão necessárias para a demonstração dos próximos teoremas, ocasionado pela introdução de uma não linearidade no núcleo integral das desigualdades singulares, da forma  $y(x(t))$ , sob certas hipóteses de suavidade para a função  $y$ .

**Definição 2.3.1.** *Sejam  $q, T > 0$ . Dizemos que uma função  $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz a condição (q) se*

$$e^{-qt}[\omega(u)]^q \leq R(t)\omega(e^{-qt}u^q), \quad \forall u \in \mathbb{R}_+, t \in [0, T], \quad (2.120)$$

para alguma função contínua  $R : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

No que segue, veremos alguns exemplos de como podemos determinar a função  $R(t)$  da Definição 2.3.1, para casos particulares de funções não lineares.

**Exemplo 2.3.1.** *Seja  $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $x(u) := u^m$ , com  $m > 0$ . Então, para todo  $q > 1$  e  $u \geq 0$  temos que*

$$e^{-qt}[x(u)]^q = e^{-qt}u^{mq} = e^{(m-1)qt}(e^{-qt}u^q)^m = e^{(m-1)qt}x(e^{-qt}u^q), \quad t \geq 0.$$

Logo, a função  $x(t)$  satisfaz a condição (q) com  $R(t) := e^{(m-1)qt}$ .

**Exemplo 2.3.2.** *Seja  $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $y(u) := u + \alpha u^m$ , com  $\alpha \in (0, 1]$  e  $m \geq 1$ . Mostraremos que  $y$  satisfaz a condição (q) para  $q > 1$ . Para isso, faremos uso da seguinte desigualdade do Corolário 1.4:*

$$(a_1 + \dots + a_n)^r \leq n^{r-1}(a_1^r + \dots + a_n^r), \quad (2.121)$$

onde  $r > 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+$ . Tomando  $r := q > 1$  e  $n = 2$  em (2.121) temos que

$$e^{-qt}[y(u)]^q = e^{-qt}[u + \alpha u^m]^q \leq 2^{q-1}e^{-qt}(u^q + \alpha^q u^{qm}), \quad t \geq 0. \quad (2.122)$$

Por outro lado, vale que

$$\begin{aligned} 2^{q-1}e^{qmt}y(e^{-qt}u^q) &= 2^{q-1}e^{qmt}[e^{-qt}u^q + \alpha e^{-qmt}u^{qm}] \\ &\geq 2^{q-1}e^{-qt}[e^{qmt}u^q + \alpha u^{qm}] \\ &\geq 2^{q-1}e^{-qt}[u^q + \alpha^q u^{qm}] \\ &\stackrel{(2.122)}{\geq} e^{-qt}[y(u)]^q, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Portanto, a função  $y(t)$  satisfaz a condição (q) com  $R(t) := 2^{q-1}e^{qmt}$ .

**Observação 2.3.2.** *O quadro abaixo resume os casos analisados nos Exemplos 2.3.1 e 2.3.2, mostrando que a função  $R(t)$  da condição (q) não é geral para qualquer função considerada.*

| Função                  | Parâmetros                    | $R(t)$ para $q > 1$ |
|-------------------------|-------------------------------|---------------------|
| $x(u) = u^m$            | $m > 0$                       | $e^{(m-1)qt}$       |
| $y(u) = u + \alpha u^m$ | $m \geq 1, \alpha \in (0, 1]$ | $2^{q-1}e^{qmt}$    |

Os dois próximos resultados (Teoremas 2.31 e 2.32) basearam-se no artigo de Medved (ver [21], Teorema 1, página 351), e para suas provas necessitamos demonstrar uma Desigualdade de Gronwall Clássica que até então não havia sido abordada no desenvolvimento desse estudo, a saber, a que consta no Teorema 2.5. Através dessa conexão, ressaltamos novamente a intrínseca relação entre as versões singulares e clássicas de Gronwall.

Em vista da singularidade no núcleo integral em (2.123), a prova foi dividida em dois casos, sendo  $\beta = \frac{1}{2}$  o ponto crucial que desencadeou os resultados supracitados. Este fator limítrofe, como veremos nas demonstrações seguintes, se dá justamente para garantir a boa definição da função Gama nos argumentos em que ela será aplicada. Além disso, o caso  $\beta \geq 1$  não resulta em singularidades, sendo suficiente fazer uso dos resultados clássicos para limitações nessas circunstâncias.

Desigualdades célebres como a de Cauchy-Schwarz e de Hölder também foram essenciais nesses resultados, pois viabilizaram a obtenção de determinadas estimativas que recaíram na expressão do Gronwall Clássico citado anteriormente, além da aplicação da condição (q) para superar o impasse da não linearidade da desigualdade com relação a  $x(t)$ .

**Teorema 2.31 (GS5).** *Sejam  $a, b, x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  e  $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  funções contínuas, com  $a$  e  $y$  não decrescentes,  $a \in C^1(0, T)$ ,  $y(0) = 0$  e  $y(t) > 0$  em  $(0, T)$ , satisfazendo a seguinte desigualdade para  $\beta > \frac{1}{2}$ :*

$$x(t) \leq a(t) + \int_0^t (t-s)^{\beta-1} b(s) y(x(s)) ds, \quad t \in [0, T]. \quad (2.123)$$

Se  $y$  satisfaz a condição (q) da Definição 2.3.1 para  $q = 2$  e função contínua  $R_1(t)$ , então

$$x(t) \leq e^t \left\{ Y^{-1} \left[ Y(2a^2(t)) + g_1(t) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad t \in [0, T_1], \quad (2.124)$$

onde

$$g_1(t) := \frac{\Gamma(2\beta - 1)}{4^{\beta-1}} \int_0^t R_1(s) b^2(s) ds,$$

$Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por  $Y(u) := \int_{u_0}^u \frac{1}{y(s)} ds$ , com  $u_0 \in \mathbb{R}_+$ ,  $Y^{-1}$  é a inversa de  $Y$  e  $T_1 \in \mathbb{R}_+$  é tal que

$$[Y(2a^2(t)) + g_1(t)] \in \text{Dom}(Y^{-1}), \quad t \in [0, T_1].$$

*Demonstração.* Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz em (2.123), obtemos:

$$\begin{aligned} x(t) &\leq a(t) + \int_0^t (t-s)^{\beta-1} e^s b(s) e^{-s} y(x(s)) ds \\ &\stackrel{C-S}{\leq} a(t) + \left[ \int_0^t (t-s)^{2\beta-2} e^{2s} ds \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_0^t b^2(s) e^{-2s} y^2(x(s)) ds \right]^{\frac{1}{2}}, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Definindo  $I_\beta(t) := \int_0^t (t-s)^{2\beta-2} e^{2s} ds$  segue que

$$I_\beta(t) = e^{2t} \int_0^t u^{2\beta-2} e^{-2u} du = \frac{2e^{2t}}{4^\beta} \int_0^{2t} v^{2\beta-2} e^{-v} dv \leq \frac{2e^{2t}}{4^\beta} \Gamma(2\beta-1). \quad (2.126)$$

De (2.125), (2.126) e do Corolário 1.4 com  $n = r = 2$  provamos que

$$\begin{aligned} x^2(t) &\leq \left\{ \underbrace{a(t)}_{:=a_1} + \underbrace{\left[ \frac{2e^{2t}}{4^\beta} \Gamma(2\beta-1) \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_0^t b^2(s) e^{-2s} y^2(x(s)) ds \right]^{\frac{1}{2}}}_{:=a_2} \right\}^2 \\ &\leq 2a^2(t) + \frac{e^{2t}}{4^{\beta-1}} \Gamma(2\beta-1) \int_0^t b^2(s) e^{-2s} y^2(x(s)) ds, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2.127)$$

Além disso, como  $y$  satisfaz a condição (q) com  $q = 2$  e  $R_1 : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  contínua, vale que

$$e^{-2t} y^2(u) \leq R_1(t) y(e^{-2t} u^2), \quad \forall u \geq 0, \quad t \in [0, T]. \quad (2.128)$$

De (2.127) e (2.128) deduzimos que

$$x^2(t) \leq 2a^2(t) + \frac{e^{2t}}{4^{\beta-1}} \Gamma(2\beta-1) \int_0^t b^2(s) R_1(s) y(e^{-2s} x^2(s)) ds,$$

da qual obtemos a seguinte desigualdade:

$$[e^{-t} x(t)]^2 \leq 2a^2(t) + \frac{\Gamma(2\beta-1)}{4^{\beta-1}} \int_0^t b^2(s) R_1(s) y([e^{-s} x(s)]^2) ds, \quad t \in [0, T]. \quad (2.129)$$

Aplicando o Teorema 2.5 em (2.129) obtemos que

$$[e^{-t} x(t)]^2 \leq Y^{-1} \left( Y(2a^2(t)) + \frac{\Gamma(2\beta-1)}{4^{\beta-1}} \int_0^t b^2(s) R_1(s) ds \right), \quad t \in [0, T_1],$$

considerando  $T_1 > 0$  tal que  $[Y(2a^2(t)) + g_1(t)] \in \text{Dom}(Y^{-1})$  para  $t \in [0, T_1]$ , considerando

$$g_1(t) := \frac{\Gamma(2\beta-1)}{4^{\beta-1}} \int_0^t b^2(s) R_1(s) ds,$$

o que prova (2.124). □

**Teorema 2.32 (GS6).** *Sejam  $a, b, x : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$  e  $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  funções contínuas, com  $a$  e  $y$  não decrescentes,  $a \in C^1(0, T)$ ,  $y(0) = 0$  e  $y(t) > 0$  em  $(0, T)$ , satisfazendo a seguinte desigualdade para  $\beta \in (0, \frac{1}{2}]$ :*

$$x(t) \leq a(t) + \int_0^t (t-s)^{\beta-1} b(s) y(x(s)) ds, \quad t \in [0, T). \quad (2.130)$$

*Se  $y$  satisfaz a condição (q) da Definição 2.3.1 para  $q := 1 + \frac{1}{\beta}$  e função contínua  $R_2(t)$ , então*

$$x(t) \leq e^t \left\{ Y^{-1} \left[ Y(2^{q-1} a^q(t)) + g_2(t) \right] \right\}^{\frac{1}{q}}, \quad t \in [0, T_2], \quad (2.131)$$

onde

$$g_2(t) := 2^{q-1} \left[ \frac{\Gamma(1-\alpha p)}{p^{1-\alpha p}} \right]^{\frac{q}{p}} \int_0^t R_2(s) b^q(s) ds, \quad \alpha := 1 - \beta, \quad p := 1 + \beta,$$

$Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por  $Y(u) := \int_{u_0}^u \frac{1}{y(s)} ds$ , com  $u_0 \in \mathbb{R}_+$ ,  $Y^{-1}$  é a inversa de  $Y$  e  $T_2 \in \mathbb{R}_+$  é tal que

$$[Y(2^{q-1} a^q(t)) + g_2(t)] \in \text{Dom}(Y^{-1}), \quad t \in [0, T_2].$$

*Demonstração.* Como  $\beta - 1 = -\alpha$ , temos pela hipótese (2.130) que

$$x(t) \leq a(t) + \int_0^t (t-s)^{-\alpha} e^s b(s) e^{-s} y(x(s)) ds, \quad t \in [0, T). \quad (2.132)$$

Notemos também que  $(1 - \alpha p) = 1 - (1 - \beta)(1 + \beta) = \beta^2 \in (0, \frac{1}{4}]$  e

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{1+\beta} + \frac{1}{1+\frac{1}{\beta}} = \frac{1}{1+\beta} + \frac{1}{\frac{1+\beta}{\beta}} = \frac{1}{1+\beta} + \frac{\beta}{1+\beta} = 1.$$

Além disso, para  $t \in [0, T)$  temos que  $f(s) := (t-s)^{-\alpha} e^s \in L^p(0, t)$ , pois

$$\int_0^t |f(s)|^p ds = \int_0^t (t-s)^{-\alpha p} e^{sp} ds = e^{tp} \int_0^t u^{-\alpha p} e^{-up} du \leq \frac{e^{tp}}{p^{1-\alpha p}} \Gamma(1 - \alpha p) < \infty, \quad (2.133)$$

e  $g(s) := b(s) e^{-s} y(x(s)) \in L^q(0, t)$  pela continuidade das funções  $b, x$  e  $y$ . Segue de (2.132), (2.133) e da desigualdade de Hölder para integrais que

$$\begin{aligned} x(t) &\leq a(t) + \left( \int_0^t (t-s)^{-\alpha p} e^{sp} ds \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^t b^q(s) e^{-sq} y^q(x(s)) ds \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq a(t) + e^t \left[ \frac{\Gamma(1-\alpha p)}{p^{1-\alpha p}} \right]^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^t b^q(s) e^{-sq} y^q(x(s)) ds \right)^{\frac{1}{q}}, \quad t \in [0, T). \end{aligned} \quad (2.134)$$

Como  $y$  satisfaz a condição (q) com  $q = 1 + \beta^{-1}$  e  $R_2 : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$  contínua, vale que

$$e^{-qt}y^q(u) \leq R_2(t)y(e^{-qt}u^q), \forall u \geq 0, t \in [0, T). \quad (2.135)$$

De (2.134), (2.135) e do Corolário 1.4 com  $n = 2$  e  $r = q > 1$ , obtemos:

$$\begin{aligned} x^q(t) &\leq \left\{ a(t) + e^t \left[ \frac{\Gamma(1 - \alpha p)}{p^{1 - \alpha p}} \right]^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^t b^q(s) R_2(s) y(e^{-sq} x^q(s)) ds \right)^{\frac{1}{q}} \right\}^q \\ &\leq 2^{q-1} a^q(t) + 2^{q-1} e^{qt} \left[ \frac{\Gamma(1 - \alpha p)}{p^{1 - \alpha p}} \right]^{\frac{q}{p}} \int_0^t b^q(s) R_2(s) y(e^{-sq} x^q(s)) ds, \quad t \in [0, T). \end{aligned} \quad (2.136)$$

Segue de (2.136) e do Teorema 2.5 que

$$\begin{aligned} [e^{-t}x(t)]^q &\leq 2^{q-1} a^q(t) + 2^{q-1} \left[ \frac{\Gamma(1 - \alpha p)}{p^{1 - \alpha p}} \right]^{\frac{q}{p}} \int_0^t b^q(s) R_2(s) y([e^{-s}x(s)]^q) ds \\ &\leq Y^{-1} \left( Y(2^{q-1} a^q(t)) + 2^{q-1} \left[ \frac{\Gamma(1 - \alpha p)}{p^{1 - \alpha p}} \right]^{\frac{q}{p}} \int_0^t b^q(s) R_2(s) ds \right), \quad t \in [0, T_2], \end{aligned}$$

considerando  $T_2 > 0$  tal que  $[Y(2^{q-1} a^q(t)) + g_2(t)] \in \text{Dom}(Y^{-1})$  para  $t \in [0, T_2]$ , com

$$g_2(t) := 2^{q-1} \left[ \frac{\Gamma(1 - \alpha p)}{p^{1 - \alpha p}} \right]^{\frac{q}{p}} \int_0^t b^q(s) R_2(s) ds,$$

provando (2.131). □

Os resultados singulares dos Teoremas 2.31 e 2.32 correspondem ao análogo do Gronwall Clássico do Teorema 2.5 (equivalentemente ao Teorema 2.4, que é um caso particular do anterior), além de ser uma decorrência do mesmo, como comentamos anteriormente.

Apesar de tais demonstrações recorrerem à aplicação da condição (q), elas foram menos complexas se comparadas as versões singulares anteriores. No entanto, isso se deu pelo fato de ter como suporte a recorrência ao caso clássico, cuja prova demandou uma análise detalhada dos argumentos utilizados, principalmente para garantir a boa definição da aplicação  $Y$  e a existência de sua inversa  $Y^{-1}$ .

A seguir, veremos algumas aplicações dos Teoremas 2.31 e 2.32, nas quais será possível identificar a função  $Y$  e sua inversa  $Y^{-1}$ , bem como as funções  $R(t)$  associadas a condição (q) da função  $y(t)$ .

**Corolário 2.33 (GS7).** *Sejam  $a, b, x : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$  funções contínuas, com  $a(t)$  não decrescente de classe  $C^1(0, T)$ , satisfazendo a seguinte desigualdade para  $\beta > 0$ :*

$$x(t) \leq a(t) + \int_0^t (t - s)^{\beta-1} b(s) x(s) ds, \quad t \in [0, T). \quad (2.137)$$

(i) Se  $\beta > \frac{1}{2}$ , então

$$x(t) \leq \sqrt{2}a(t)e^{\left[\frac{2\Gamma(2\beta-1)}{4^\beta} \int_0^t b^2(s)ds+t\right]}, \quad t \in [0, T]. \quad (2.138)$$

(ii) Se  $\beta \in (0, \frac{1}{2}]$ , então

$$x(t) \leq 2^{1-\frac{1}{q}}a(t)e^{\left[\frac{2^{q-1}k_\beta^q}{q} \int_0^t b^q(s)ds+t\right]}, \quad t \in [0, T]. \quad (2.139)$$

onde  $q := 1 + \frac{1}{\beta}$ ,  $\alpha := 1 - \beta$ ,  $p := 1 + \beta$  e  $k_\beta := \left(\frac{\Gamma(1-\alpha p)}{p^{1-\alpha p}}\right)^{\frac{1}{p}}$ .

*Demonstração.* Sejam  $y(t) := t$  e  $R(t) := 1$ . Para qualquer  $q > 0$  temos que  $y$  satisfaz a condição (q), pois

$$e^{-qt}[y(u)]^q = e^{-qt}u^q = R(t)y(e^{-qt}u^q), \quad u \geq 0, \quad t \in [0, T].$$

Além disso, se  $Y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por  $Y(u) := \int_{u_0}^u \frac{1}{y(s)}ds$ , com  $u_0 > 0$ , então

$$Y(u) = \int_{u_0}^u \frac{1}{s}ds = \ln(u) - \ln(u_0),$$

e sua inversa  $Y^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  é dada por  $Y^{-1}(u) := e^{u+\ln(u_0)}$ .

Nestas condições, segue do Teorema 2.31 com  $q = 2$  e  $\beta > \frac{1}{2}$  que

$$\begin{aligned} x(t) &\leq e^t \left\{ Y^{-1} \left[ Y(2a^2(t)) + \frac{\Gamma(2\beta-1)}{4^{\beta-1}} \int_0^t b^2(s)ds \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= e^t \left\{ Y^{-1} \left[ \ln(2a^2(t)) - \ln(u_0) + \frac{\Gamma(2\beta-1)}{4^{\beta-1}} \int_0^t b^2(s)ds \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= e^t \left\{ \exp \left( \ln(2a^2(t)) - \ln(u_0) + \frac{\Gamma(2\beta-1)}{4^{\beta-1}} \int_0^t b^2(s)ds + \ln(u_0) \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= e^t \left\{ 2a^2(t) \exp \left( \frac{\Gamma(2\beta-1)}{4^{\beta-1}} \int_0^t b^2(s)ds \right) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2}a(t)e^{\left[\frac{2\Gamma(2\beta-1)}{4^\beta} \int_0^t b^2(s)ds+t\right]}, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

pois  $[Y(2a^2(t)) + g_1(t)] \in \text{Dom}(Y^{-1})$  para todo  $t \in [0, T]$ , o que prova o item (i).

Para  $\beta \in (0, \frac{1}{2}]$  e  $q := 1 + \frac{1}{\beta}$ , aplicando o Teorema 2.32 obtemos a seguinte

desigualdade:

$$\begin{aligned}
x(t) &\leq e^t \left\{ Y^{-1} \left[ Y(2^{q-1}a^q(t)) + 2^{q-1} \left[ \frac{\Gamma(1-\alpha p)}{p^{1-\alpha p}} \right]^{\frac{q}{p}} \int_0^t b^q(s) ds \right] \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&= e^t \left\{ Y^{-1} \left[ \ln(2^{q-1}a^q(t)) - \ln(u_0) + 2^{q-1} \left[ \frac{\Gamma(1-\alpha p)}{p^{1-\alpha p}} \right]^{\frac{q}{p}} \int_0^t b^q(s) ds \right] \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&= e^t \left\{ \exp \left( \ln(2^{q-1}a^q(t)) - \ln(u_0) + 2^{q-1} \left[ \frac{\Gamma(1-\alpha p)}{p^{1-\alpha p}} \right]^{\frac{q}{p}} \int_0^t b^q(s) ds + \ln(u_0) \right) \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&= e^t \left\{ 2^{q-1}a^q(t) \exp \left( 2^{q-1} \left[ \frac{\Gamma(1-\alpha p)}{p^{1-\alpha p}} \right]^{\frac{q}{p}} \int_0^t b^q(s) ds \right) \right\}^{\frac{1}{q}} \\
&= 2^{1-\frac{1}{q}} a(t) e^{\left[ \frac{2^{q-1}}{q} k_\beta^q \int_0^t b^q(s) ds + t \right]}, \quad t \in [0, T],
\end{aligned}$$

onde  $\alpha := 1 - \beta$ ,  $p := 1 + \beta$  e  $k_\beta := \left( \frac{\Gamma(1-\alpha p)}{p^{1-\alpha p}} \right)^{\frac{1}{p}}$ , provando o item (ii) do teorema.  $\square$

Podemos perceber que o Corolário 2.33 apresenta uma hipótese mais geral do que a desigualdade (2.88) do Corolário 2.30, com pequenas variações acerca da regularidade das funções envolvidas, no qual não necessitamos analisar dois casos para o expoente em que se encontra a singularidade. Apesar disso, a tese obtida no Corolário 2.33 é, sob certos aspectos, semelhante a obtida no Corolário 2.30, levando em consideração que a função de Mittag-Leffler em (2.118) generaliza a função exponencial.

Dissertamos ainda que o Gronwall Singular do Corolário 2.33 corresponde ao análogo do Gronwall Clássico do Teorema 2.2, cuja prova contou apenas com argumentos básicos referentes a resolução de equações diferenciais ordinárias, o que novamente evidencia o maior instrumental teórico necessário para lidar com problemas envolvendo singularidades.

Do mesmo modo que particularizamos os Teoremas 2.31 e 2.32 para  $y$  sendo a identidade, procederemos no próximo resultado para obter um caso não linear, considerando  $y(s) := s^m$ , com  $m > 0$  e  $m \neq 1$ , por meio do qual identificaremos a função  $Y$ , sua inversa  $Y^{-1}$  e as funções associadas a nova condição ( $q$ ).

**Corolário 2.34 (GS8).** *Sejam  $a, b, x : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$  funções contínuas, com  $a(t)$  não decrescente de classe  $C^1(0, T)$ , satisfazendo a seguinte desigualdade para  $\beta$ ,  $m > 0$ , com  $m \neq 1$ :*

$$x(t) \leq a(t) + \int_0^t (t-s)^{\beta-1} b(s) x^m(s) ds, \quad t \in [0, T]. \quad (2.140)$$

(i) *Se  $\beta > \frac{1}{2}$ , então*

$$x(t) \leq e^t \left\{ [\sqrt{2}a(t)]^{2(1-m)} + C_{\beta, m} \int_0^t e^{2(m-1)s} b^2(s) ds \right\}^{\frac{1}{2(1-m)}}, \quad t \in I,$$

para algum  $I \subseteq [0, T)$ , onde  $C_{\beta, m} := \frac{(1-m)\Gamma(2\beta-1)}{4^{\beta-1}}$ .

(ii) Se  $\beta \in (0, \frac{1}{2}]$ , então

$$x(t) \leq e^t \left\{ (2^{q-1}a^q(t))^{1-m} + K_{\beta, m} \int_0^t e^{(m-1)qs} b^q(s) ds \right\}^{\frac{1}{q(1-m)}}, \quad t \in J,$$

para algum  $J \subseteq [0, T)$ , onde  $K_{\beta, m} := 2^{q-1}(1-m) \left[ \frac{\Gamma(1-\alpha p)}{p^{1-\alpha p}} \right]^{\frac{q}{p}}$ ,  $q := 1 + \frac{1}{\beta}$ ,  $\alpha := 1 - \beta$  e  $p := 1 + \beta$ .

*Demonstração.* Segue do Exemplo 2.3.1 que a função  $y(u) := u^m$ , com  $m > 0$ , satisfaz a condição (q) com  $R(t) := e^{(m-1)qt}$  para qualquer  $q > 0$ .

(i)  $\beta > \frac{1}{2}$ .

Como  $y$  satisfaz a condição (q), em particular para  $q = 2$ , segue do Teorema 2.31 com

- $g_1(t) := \frac{\Gamma(2\beta-1)}{4^{\beta-1}} \int_0^t e^{2(m-1)s} b^2(s) ds$ ,
- $Y(u) := \int_{u_0}^u \frac{1}{y(s)} ds = \int_{u_0}^u \frac{1}{s^m} ds = \frac{u^{1-m}}{1-m} - \frac{u_0^{1-m}}{1-m}$ ,  $u_0 > 0$ ,
- $Y^{-1}(u) = \left\{ (1-m)u + u_0^{1-m} \right\}^{\frac{1}{1-m}}$ ,  $u_0 > 0$ ,
- $Dom(Y^{-1}) = \mathbb{R} - \{t_0\}$ ,  $t_0 := \frac{-u_0^{1-m}}{1-m}$ ,

a seguinte desigualdade:

$$x(t) \leq e^t \left\{ Y^{-1} \left[ Y(2a^2(t)) + g_1(t) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad t \in [0, T_1], \quad (2.141)$$

onde  $T_1 \in \mathbb{R}_+$  é tal que  $[Y(2a^2(t)) + g_1(t)] \in Dom(Y^{-1})$  para  $t \in [0, T_1]$ . Nestas condições, para  $t \in [0, T_1]$  temos de (2.141) que

$$\begin{aligned} x(t) &\leq e^t \left\{ Y^{-1} \left[ \frac{(2a^2(t))^{1-m}}{1-m} - \frac{u_0^{1-m}}{1-m} + g_1(t) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq e^t \left\{ (2a^2(t))^{1-m} - u_0^{1-m} + (1-m)g_1(t) + u_0^{1-m} \right\}^{\frac{1}{2(1-m)}} \\ &\leq e^t \left\{ [\sqrt{2}a(t)]^{2(1-m)} + \frac{(1-m)\Gamma(2\beta-1)}{4^{\beta-1}} \int_0^t e^{2(m-1)s} b^2(s) ds \right\}^{\frac{1}{2(1-m)}}. \end{aligned}$$

(ii)  $\beta \in (0, \frac{1}{2}]$ .

Como  $y(u) = u^m$  satisfaz a condição (q) para qualquer  $q > 0$ , em particular, para  $q := 1 + \frac{1}{\beta}$

podemos aplicar o Teorema 2.32 com  $Y$  e sua inversa definidas como no caso anterior e

$$g_2(t) := 2^{q-1} \left[ \frac{\Gamma(1-\alpha p)}{p^{1-\alpha p}} \right]^{\frac{q}{p}} \int_0^t e^{(m-1)qs} b^q(s) ds, \quad \alpha := 1 - \beta, \quad p := 1 + \beta.$$

Desta forma, para  $T_2 \in \mathbb{R}_+$  tal que  $[Y(2^{q-1}a^q(t)) + g_2(t)] \in \text{Dom}(Y^{-1})$ , obtemos:

$$\begin{aligned} x(t) &\leq e^t \left\{ Y^{-1} \left[ Y(2^{q-1}a^q(t)) + g_2(t) \right] \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &= e^t \left\{ Y^{-1} \left[ \frac{(2^{q-1}a^q(t))^{1-m}}{1-m} - \frac{u_0^{1-m}}{1-m} + g_2(t) \right] \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &= e^t \left\{ (2^{q-1}a^q(t))^{1-m} - u_0^{1-m} + (1-m)g_2(t) + u_0^{1-m} \right\}^{\frac{1}{q(1-m)}} \\ &= e^t \left\{ (2^{q-1}a^q(t))^{1-m} + 2^{q-1}(1-m) \left[ \frac{\Gamma(1-\alpha p)}{p^{1-\alpha p}} \right]^{\frac{q}{p}} \int_0^t e^{(m-1)qs} b^q(s) ds \right\}^{\frac{1}{q(1-m)}}, \quad t \in [0, T_2]. \end{aligned}$$

□

O Corolário 2.34 corresponde ao Corolário 2.6 da versão clássica. A tese do Gronwall Singular, mesmo que com entradas mais complexas nas funções envolvidas, mantém um padrão com relação as constantes e funções envolvidas no termo integral do Gronwall Clássico, tornando notória a analogia entre os casos.

**Observação 2.3.3.** *Resultados análogos aos Corolários 2.33 e 2.34 podem ser reproduzidos variando a expressão da função  $y$ , bastando encontrar a função contínua  $R : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$  que satisfaça a Definição 2.3.1, para valores apropriados da condição  $(q)$ , como no Exemplo 2.3.1 com  $y(u) := u + \alpha u^m$ , onde  $\alpha \in (0, 1]$ ,  $m \geq 1$  e  $R(t) := 2^{q-1}e^{qmt}$ . Para isso, também é necessário encontrar a função  $Y$  e sua inversa, bem como os respectivos intervalos de  $[0, T)$  em que as desigualdades são válidas. No entanto, como o intuito desta seção é obter os resultados correspondentes as versões clássicas da Seção 2.1, optamos por nos manter nas aplicações explicitadas nos teoremas mencionados acima.*

O próximo resultado (Teorema 2.35) embasou-se em Medved (ver [21], Teorema 3, página 356), porém adaptamos sua demonstração para aplicar a generalização do Gronwall Clássico do Teorema 2.2.

**Teorema 2.35 (GS9).** *Sejam  $\beta > 0$  e  $a, b, x, y : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$  funções integráveis com*

$$x(t) \leq a(t) + b(t) \int_0^t (t-s)^{\beta-1} y(s)x(s) ds, \quad t \in [0, T). \quad (2.142)$$

(i) *Se  $\beta > \frac{1}{2}$ , então*

$$x(t) \leq e^t [z_1(t)]^{\frac{1}{2}}, \quad t \in [0, T), \quad (2.143)$$

onde

$$z_1(t) := 2a^2(t) + 2k_\beta b^2(t) \int_0^t a^2(s)y^2(s)e^{\left[ k_\beta \int_s^t b^2(r)y^2(r)dr \right]} ds, \quad k_\beta := \frac{\Gamma(2\beta - 1)}{4^{\beta-1}}.$$

(ii) Se  $\beta \in (0, \frac{1}{2}]$ , então

$$x(t) \leq e^t [z_2(t)]^{\frac{1}{q}}, \quad t \in [0, T], \quad (2.144)$$

onde

$$z_2(t) := 2^{q-1}a^q(t) + 4^{q-1}K_\beta^q b^q(t) \int_0^t a^q(s)y^q(s)e^{\left[ 2^{q-1}K_\beta^q \int_s^t b^q(r)y^q(r)dr \right]} ds,$$

$$\text{com } q := 1 + \frac{1}{\beta}, \quad \alpha := 1 - \beta, \quad p := 1 + \beta \text{ e } K_\beta := \left( \frac{\Gamma(1-\alpha p)}{p^{1-\alpha p}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

*Demonstração.* Para  $\beta > \frac{1}{2}$ , segue de (2.142) e da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned} x(t) &\leq a(t) + b(t) \int_0^t (t-s)^{\beta-1} e^s e^{-s} y(s) x(s) ds \\ &\leq a(t) + b(t) \left[ \int_0^t (t-s)^{2\beta-2} e^{2s} ds \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_0^t e^{-2s} y^2(s) x^2(s) ds \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\stackrel{(2.126)}{\leq} a(t) + b(t) \left[ \frac{2e^{2t}}{4^\beta} \Gamma(2\beta - 1) \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_0^t e^{-2s} y^2(s) x^2(s) ds \right]^{\frac{1}{2}}, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2.145)$$

Aplicando o Corolário 1.4 em (2.145) com  $n = r = 2$ , obtemos:

$$\begin{aligned} x^2(t) &\leq \left\{ a(t) + b(t) \left[ \frac{2e^{2t}}{4^\beta} \Gamma(2\beta - 1) \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_0^t e^{-2s} y^2(s) x^2(s) ds \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^2 \\ &\leq 2a^2(t) + 2b^2(t) \frac{2e^{2t}}{4^\beta} \Gamma(2\beta - 1) \int_0^t e^{-2s} y^2(s) x^2(s) ds, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2.146)$$

De (2.146) segue que

$$[e^{-t}x(t)]^2 \leq 2a^2(t) + \frac{\Gamma(2\beta - 1)}{4^{\beta-1}} b^2(t) \int_0^t y^2(s) [e^{-s}x(s)]^2 ds, \quad t \in [0, T]. \quad (2.147)$$

Como o produto de funções integráveis também é integrável, e de posse dos Teoremas 1.10 e 1.11, podemos aplicar o Teorema 2.2 em (2.147) para obter a seguinte desigualdade em  $[0, T]$ :

$$[e^{-t}x(t)]^2 \leq 2a^2(t) + 2k_\beta b^2(t) \int_0^t a^2(s)y^2(s)e^{\int_s^t k_\beta b^2(r)y^2(r)dr} ds,$$

com  $k_\beta := \frac{\Gamma(2\beta-1)}{4^{\beta-1}}$ , o que prova o item (i).

Para  $\beta \in (0, \frac{1}{2}]$ , segue de (2.142) e da desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}
 x(t) &\leq a(t) + b(t) \int_0^t \underbrace{(t-s)^{-\alpha} e^s}_{\in L^p} \underbrace{e^{-s} y(s) x(s)}_{\in L^q} ds \\
 &\leq a(t) + b(t) \left[ \int_0^t (t-s)^{-\alpha p} e^{sp} ds \right]^{\frac{1}{p}} \left[ \int_0^t e^{-qs} y^q(s) x^q(s) ds \right]^{\frac{1}{q}} \\
 &\stackrel{(2.133)}{\leq} a(t) + b(t) \left[ \frac{e^{tp}}{p^{1-\alpha p}} \Gamma(1-\alpha p) \right]^{\frac{1}{p}} \left[ \int_0^t e^{-qs} y^q(s) x^q(s) ds \right]^{\frac{1}{q}}, \quad t \in [0, T]. \quad (2.148)
 \end{aligned}$$

Aplicando o Corolário 1.4 e o Teorema 2.2 em (2.148), com  $n = 2$  e  $r = q$ , obtemos a seguinte desigualdade em  $[0, T)$ :

$$\begin{aligned}
 x^q(t) &\leq \left\{ a(t) + b(t) \left[ \frac{e^{tp}}{p^{1-\alpha p}} \Gamma(1-\alpha p) \right]^{\frac{1}{p}} \left[ \int_0^t e^{-qs} y^q(s) x^q(s) ds \right]^{\frac{1}{q}} \right\}^q \\
 &\leq 2^{q-1} a^q(t) + 2^{q-1} b^q(t) \left[ \frac{e^{tp}}{p^{1-\alpha p}} \Gamma(1-\alpha p) \right]^{\frac{q}{p}} \int_0^t e^{-qs} y^q(s) x^q(s) ds. \quad (2.149)
 \end{aligned}$$

Segue de (2.149) que

$$\begin{aligned}
 [e^{-t} x(t)]^q &\leq 2^{q-1} a^q(t) + 2^{q-1} b^q(t) \left[ \frac{\Gamma(1-\alpha p)}{p^{1-\alpha p}} \right]^{\frac{q}{p}} \int_0^t y^q(s) [e^{-s} x(s)]^q ds \\
 &\leq 2^{q-1} a^q(t) + 2^{q-1} b^q(t) K_\beta^q \int_0^t 2^{q-1} a^q(s) y^q(s) e^{\int_s^t 2^{q-1} b^q(r) K_\beta^q y^q(r) dr} ds,
 \end{aligned}$$

com  $K_\beta := \left( \frac{\Gamma(1-\alpha p)}{p^{1-\alpha p}} \right)^{\frac{1}{p}}$ , provando o item (ii) do teorema.  $\square$

O Teorema 2.35, assim como o Teorema 2.29 já comentado, procede como o correspondente singular do Gronwall Clássico do Teorema 2.2. Todavia, podemos notar que a prova do Teorema 2.29 baseou-se em argumentos iterativos, com uso constante das convergências da função Gama e de outras de suas propriedades.

Por outro lado, o Teorema 2.35 seguiu um caminho totalmente diferente em sua demonstração, recaindo em versões clássicas por meio de desigualdades substanciais em Análise Funcional. Essas comparações exibem o vasto aparato teórico que subsidia demonstrações dessa natureza, podendo levar a um caminho mais custoso se não tiverem respaldo em resultados auxiliares, por meio da recorrência às versões clássicas.

A partir daqui, daremos continuidade aos resultados singulares de Gronwall, considerando o acréscimo de uma singularidade no núcleo integral. Iniciaremos com o Teorema 2.36, cuja hipótese consiste em um sistema com duas desigualdades singulares. Sua demonstração foi adaptada de Qin (ver [25], Teorema 1.3.3, página 117), mas com argumentos diferentes a partir de dada estimativa.

Conforme veremos na demonstração seguinte, tais adaptações viabilizaram a

aplicação de um dos resultados clássicos da Seção 2.1, o que não seria possível pelo caminho tomado no referido trabalho, realçando ainda mais a aplicabilidade das versões não singulares.

**Teorema 2.36 (GS10).** *Sejam  $k, k_0, k_1 \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\gamma_1, \gamma_2, \theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$  e  $x, y : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$  funções contínuas satisfazendo para todo  $t \in [0, T)$  o sistema*

$$\begin{cases} x(t) \leq k_0 + kt^{\gamma_1} \int_0^t (t-s)^{-\gamma_1} s^{-\gamma_2} y(s) ds, \\ y(t) \leq k_1 + kt^{\theta_1} \int_0^t (t-s)^{-\theta_1} s^{-\theta_2} x(s) ds. \end{cases} \quad (2.150)$$

Então, existe uma constante  $M = M(\gamma_1, \gamma_2, \theta_1, \theta_2, k, T) > 0$  satisfazendo as desigualdades

$$x(t) \leq M(k_0 + k_1 t^{1-\gamma_2}), \quad t \in [0, T), \quad (2.151)$$

$$y(t) \leq M(k_1 + k_0 t^{1-\theta_2}), \quad t \in [0, T). \quad (2.152)$$

*Demonstração.* Consideremos as funções definidas por

$$\tilde{x}(t) := \sup_{0 \leq s \leq t} x(s), \quad \tilde{y}(t) := \sup_{0 \leq s \leq t} y(s), \quad t \in [0, T). \quad (2.153)$$

Então, para  $0 < \tau < t$  temos que

$$\begin{aligned} \tau^{\gamma_1} \int_0^\tau (\tau-s)^{-\gamma_1} s^{-\gamma_2} \tilde{y}(s) ds &\stackrel{s=\tau z}{=} \tau^{\gamma_1} \int_0^1 (\tau-\tau z)^{-\gamma_1} (\tau z)^{-\gamma_2} \tilde{y}(\tau z) \tau dz \\ &= \tau^{1-\gamma_2} \int_0^1 (1-z)^{-\gamma_1} z^{-\gamma_2} \tilde{y}(\tau z) dz \\ &\stackrel{\tau < t}{\leq} t^{1-\gamma_2} \int_0^1 (1-z)^{-\gamma_1} z^{-\gamma_2} \tilde{y}(\tau z) dz. \end{aligned} \quad (2.154)$$

Como  $0 < z < 1$  e  $0 < \tau < t$ , segue que  $[0, \tau z] \subset [0, tz]$ , conseqüentemente,

$$\tilde{y}(\tau z) = \sup_{0 \leq s \leq \tau z} y(s) \leq \sup_{0 \leq s \leq tz} y(s) = \tilde{y}(tz).$$

Retornando em (2.154), obtemos:

$$\begin{aligned} \tau^{\gamma_1} \int_0^\tau (\tau-s)^{-\gamma_1} s^{-\gamma_2} \tilde{y}(s) ds &\leq t^{1-\gamma_2} \int_0^1 (1-z)^{-\gamma_1} z^{-\gamma_2} \tilde{y}(tz) dz \\ &\stackrel{tz=st^{1-\gamma_2}}{=} t^{1-\gamma_2} \int_0^t \left(1-\frac{s}{t}\right)^{-\gamma_1} \left(\frac{s}{t}\right)^{-\gamma_2} \tilde{y}(s) \frac{1}{t} ds \\ &= t^{\gamma_1} \int_0^t (t-s)^{-\gamma_1} s^{-\gamma_2} \tilde{y}(s) ds, \quad 0 < \tau < t. \end{aligned} \quad (2.155)$$

De (2.155) e da primeira equação do sistema (2.150), obtemos:

$$\begin{aligned} x(\tau) &\leq k_0 + k\tau^{\gamma_1} \int_0^\tau (\tau - s)^{-\gamma_1} s^{-\gamma_2} \tilde{y}(s) ds \\ &\leq k_0 + kt^{\gamma_1} \int_0^t (t - s)^{-\gamma_1} s^{-\gamma_2} \tilde{y}(s) ds, \quad 0 < \tau < t, \end{aligned}$$

implicando em

$$\tilde{x}(t) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} x(\tau) \leq k_0 + kt^{\gamma_1} \int_0^t (t - s)^{-\gamma_1} s^{-\gamma_2} \tilde{y}(s) ds, \quad t \in [0, T]. \quad (2.156)$$

Analogamente,

$$\tilde{y}(t) = \sup_{0 \leq \tau \leq t} y(\tau) \leq k_1 + kt^{\theta_1} \int_0^t (t - s)^{-\theta_1} s^{-\theta_2} \tilde{x}(s) ds, \quad t \in [0, T]. \quad (2.157)$$

Logo, as funções  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$  satisfazem o sistema (2.150). Para concluirmos a demonstração do teorema é suficiente provarmos (2.151) e (2.152) para  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$ , como veremos a seguir.

Se  $t = 0$  a prova do teorema é imediata. Façamos a prova para  $t \neq 0$ .

Como pelo Lema 1.7 as integrais  $\int_0^1 (1 - s)^{-\gamma_1} s^{-\gamma_2} ds$  e  $\int_0^1 (1 - s)^{-\theta_1} s^{-\theta_2} ds$  convergem, podemos considerar  $t_0, t_1 \in (0, 1)$ , com  $t_0$  e  $t_1$  suficientemente próximos de 0 e 1, respectivamente, satisfazendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \int_0^{t_0} (1 - s)^{-\gamma_1} s^{-\gamma_2} ds + \int_{t_1}^1 (1 - s)^{-\gamma_1} s^{-\gamma_2} ds \leq \frac{1}{2k} T^{\gamma_2 - 1}, \\ \int_0^{t_0} (1 - s)^{-\theta_1} s^{-\theta_2} ds + \int_{t_1}^1 (1 - s)^{-\theta_1} s^{-\theta_2} ds \leq \frac{1}{2k} T^{\theta_2 - 1}. \end{cases} \quad (2.158)$$

De (2.156) deduzimos que

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &\leq k_0 + kt^{\gamma_1} \left( \int_0^{t_0 t} + \int_{t_0 t}^{t_1 t} + \int_{t_1 t}^t \right) t^{-\gamma_1} \left( 1 - \frac{s}{t} \right)^{-\gamma_1} s^{-\gamma_2} \tilde{y}(s) ds \\ &= k_0 + k \left( \int_0^{t_0 t} + \int_{t_0 t}^{t_1 t} + \int_{t_1 t}^t \right) \left( 1 - \frac{s}{t} \right)^{-\gamma_1} s^{-\gamma_2} \tilde{y}(s) ds \\ &\stackrel{z = \frac{s}{t}}{=} k_0 + k \left( \int_0^{t_0} + \int_{t_0}^{t_1} + \int_{t_1}^1 \right) (1 - z)^{-\gamma_1} (tz)^{-\gamma_2} \tilde{y}(tz) t dz \\ &= k_0 + kt^{1-\gamma_2} \left( \int_0^{t_0} + \int_{t_0}^{t_1} + \int_{t_1}^1 \right) (1 - s)^{-\gamma_1} s^{-\gamma_2} \tilde{y}(ts) ds, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2.159)$$

Como  $t_0, t_1 \in (0, 1)$  e  $t \geq 0$ , valem as seguintes implicações:

$$0 \leq s \leq t_0 \implies 0 \leq ts \leq tt_0 \leq t \implies [0, ts] \subset [0, t] \implies \tilde{y}(ts) \leq \tilde{y}(t), \quad (2.160)$$

$$t_1 \leq s \leq 1 \implies 0 \leq tt_1 \leq ts \leq t \implies [0, ts] \subset [0, t] \implies \tilde{y}(ts) \leq \tilde{y}(t). \quad (2.161)$$

Retornando em (2.159) obtemos que

$$\begin{aligned}
\tilde{x}(t) &\leq k_0 + kt^{1-\gamma_2} \tilde{y}(t) \left( \int_0^{t_0} + \int_{t_1}^1 \right) (1-s)^{-\gamma_1} s^{-\gamma_2} ds + kt^{1-\gamma_2} \int_{t_0}^{t_1} (1-s)^{-\gamma_1} s^{-\gamma_2} \tilde{y}(ts) ds \\
&\stackrel{(2.158)}{\leq} k_0 + kt^{1-\gamma_2} \tilde{y}(t) \frac{1}{2k} T^{\gamma_2-1} + kt^{1-\gamma_2} \int_{t_0}^{t_1} (1-s)^{-\gamma_1} s^{-\gamma_2} \tilde{y}(ts) ds \\
&\leq k_0 + \frac{1}{2} \tilde{y}(t) \underbrace{\left( \frac{t}{T} \right)^{1-\gamma_2}}_{t < T} + kt^{1-\gamma_2} \int_{t_0}^{t_1} (1-t_1)^{-\gamma_1} t_0^{-\gamma_2} \tilde{y}(ts) ds \\
&\stackrel{z=st}{=} k_0 + \frac{1}{2} \tilde{y}(t) + kt^{1-\gamma_2} (1-t_1)^{-\gamma_1} t_0^{-\gamma_2} \int_{t_0 t}^{t_1 t} \tilde{y}(z) \frac{1}{t} dz \\
&\leq k_0 + \frac{1}{2} \tilde{y}(t) + k(1-t_1)^{-\gamma_1} t_0^{-\gamma_2} t^{-\gamma_2} \int_0^t \tilde{y}(s) ds, \quad t \in (0, T). \tag{2.162}
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\tilde{y}(t) \leq k_1 + \frac{1}{2} \tilde{x}(t) + k(1-t_1)^{-\theta_1} t_0^{-\gamma_2} t^{-\theta_2} \int_0^t \tilde{x}(s) ds, \quad t \in (0, T). \tag{2.163}$$

Fazendo  $M_1 := \max\{k(1-t_1)^{-\gamma_1} t_0^{-\gamma_2}, k(1-t_1)^{-\theta_1} t_0^{-\theta_2}\} > 0$ , segue que

$$\tilde{x}(t) \leq k_0 + \frac{1}{2} \tilde{y}(t) + M_1 t^{-\gamma_2} \int_0^t \tilde{y}(s) ds, \quad t \in (0, T), \tag{2.164}$$

$$\tilde{y}(t) \leq k_1 + \frac{1}{2} \tilde{x}(t) + M_1 t^{-\theta_2} \int_0^t \tilde{x}(s) ds, \quad t \in (0, T). \tag{2.165}$$

Sendo  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$  funções não negativas, obtemos de (2.164) e (2.165) que

$$\tilde{x}(t) \leq k_0 + \frac{1}{2} \tilde{y}(t) + M_1 t^{-\gamma_2} \int_0^t [\tilde{x}(s) + \tilde{y}(s)] ds, \quad t \in (0, T), \tag{2.166}$$

$$\tilde{y}(t) \leq k_1 + \frac{1}{2} \tilde{x}(t) + M_1 t^{-\theta_2} \int_0^t [\tilde{x}(s) + \tilde{y}(s)] ds, \quad t \in (0, T). \tag{2.167}$$

Somando (2.166) e (2.167) segue que

$$\tilde{x}(t) + \tilde{y}(t) \leq 2(k_0 + k_1) + 2M_1 [t^{-\gamma_2} + t^{-\theta_2}] \int_0^t [\tilde{x}(s) + \tilde{y}(s)] ds, \quad t \in (0, T). \tag{2.168}$$

Segue do Teorema 2.2 que

$$\begin{aligned}
\tilde{x}(t) + \tilde{y}(t) &\leq 2(k_0 + k_1) + 2M_1[t^{-\gamma_2} + t^{-\theta_2}] \int_0^t 2(k_0 + k_1) e^{\int_s^t 2M_1[r^{-\gamma_2} + r^{-\theta_2}] dr} ds \\
&= 2(k_0 + k_1) + 4(k_0 + k_1)M_1[t^{-\gamma_2} + t^{-\theta_2}] \int_0^t e^{\int_s^t 2M_1[r^{-\gamma_2} + r^{-\theta_2}] dr} ds \\
&= 2(k_0 + k_1) + 4(k_0 + k_1)M_1[t^{-\gamma_2} + t^{-\theta_2}] \int_0^t e^{2M_1 \left[ \frac{t^{1-\gamma_2}}{1-\gamma_2} - \frac{s^{1-\gamma_2}}{1-\gamma_2} + \frac{t^{1-\theta_2}}{1-\theta_2} - \frac{s^{1-\theta_2}}{1-\theta_2} \right]} ds \\
&\leq 2(k_0 + k_1) + 4(k_0 + k_1)M_1[t^{-\gamma_2} + t^{-\theta_2}] \int_0^t e^{2M_1 \left[ \frac{t^{1-\gamma_2}}{1-\gamma_2} + \frac{t^{1-\theta_2}}{1-\theta_2} \right]} ds \\
&\leq 2(k_0 + k_1) + 4(k_0 + k_1)M_1[t^{-\gamma_2} + t^{-\theta_2}] \underbrace{e^{2M_1 \left[ \frac{T^{1-\gamma_2}}{1-\gamma_2} + \frac{T^{1-\theta_2}}{1-\theta_2} \right]}}_{:=M_2} t \\
&= 2(k_0 + k_1) + 4(k_0 + k_1)M_1M_2[t^{1-\gamma_2} + t^{1-\theta_2}], \quad t \in (0, T). \tag{2.169}
\end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
\tilde{x}(t) &\leq \tilde{x}(t) + \tilde{y}(t) \\
&\stackrel{(2.169)}{\leq} 2(k_0 + k_1) + 4(k_0 + k_1)M_1M_2t^{1-\gamma_2} + 4(k_0 + k_1)M_1M_2T^{1-\theta_2}, \quad t \in (0, T). \tag{2.170}
\end{aligned}$$

Com os devidos ajustes nas constantes em (2.170) obtemos  $\tilde{M}(\gamma_1, \gamma_2, \theta_1, \theta_2, k, T) > 0$  tal que

$$\tilde{x}(t) \leq \tilde{M}(k_0 + k_1 t^{1-\gamma_2}), \quad t \in (0, T). \tag{2.171}$$

Analogamente, obtemos  $\tilde{M}(\gamma_1, \gamma_2, \theta_1, \theta_2, k, T)$  satisfazendo

$$\tilde{y}(t) \leq \tilde{M}(k_1 + k_0 t^{1-\theta_2}), \quad t \in (0, T). \tag{2.172}$$

Logo, as desigualdades (2.151) e (2.152) são satisfeitas para as funções  $\tilde{x}$  e  $\tilde{y}$ , respectivamente, para todo  $t \in (0, T)$ , com

$$M := \max\{\tilde{M}, \tilde{M}\}.$$

Então, tais desigualdades são satisfeitas também para as funções  $x$  e  $y$ , pois para cada  $t \in [0, T)$  obtemos que

$$x(t) \leq \sup_{0 \leq s \leq t} x(s) = \tilde{x}(t) \quad e \quad y(t) \leq \sup_{0 \leq s \leq t} y(s) = \tilde{y}(t),$$

como queríamos provar. □

De forma específica, na demonstração do Teorema 2.36, a partir das desigualdades (2.166) e (2.167), utilizamos argumentos divergentes da referência original para pros-

seguir com as estimativas. O método utilizado por nós valorizou ainda mais a essência deste trabalho, pois viabilizou a aplicação do Gronwall Clássico do Teorema 2.2, o que não se dava na referência original, cujos procedimentos se embasaram na solução de um sistema de equação diferencial na forma vetorial.

Partindo do caso geral do sistema em (2.150), o qual desencadeou minuciosos estudos até a obtenção final de suas limitações, particularizamos o Teorema 2.36 no resultado a seguir, obtendo uma só Desigualdade de Gronwall Singular:

**Corolário 2.37 (GS11).** *Sejam  $k, k_0, \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\gamma_1, \gamma_2 \in (0, 1)$  e  $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  uma função contínua tal que*

$$x(t) \leq k_0 + kt^{\gamma_1} \int_0^t (t-s)^{-\gamma_1} s^{-\gamma_2} x(s) ds, \quad t \in [0, T]. \quad (2.173)$$

Então, existe uma constante  $M = M(\gamma_1, \gamma_2, k, T) > 0$  satisfazendo a desigualdade

$$x(t) \leq k_0 M(1 + t^{1-\gamma_2}), \quad t \in [0, T]. \quad (2.174)$$

*Demonstração.* Consequência imediata do Teorema 2.36. □

A Desigualdade de Gronwall do Corolário 2.37 apresenta duas singularidades, extrapolando o que foi abordado até o momento neste trabalho. Apesar dessa generalidade com respeito aos termos singulares do núcleo integral, as demais funções presentes na desigualdade (2.173) são particulares, pois se restringem à funções constantes e do tipo polinomial.

No intuito de obter um resultado mais geral desta natureza (com duas singularidades), apresentaremos o próximo resultado (Teorema 2.38), considerando como referência Medved (ver [21], Teorema 4, página 357).

A ideia central de sua demonstração é, inicialmente, reduzir o problema a um Gronwall Singular dependente de uma única singularidade, e a partir disso aplicar desigualdades advindas da Análise Funcional, para então recair em Desigualdades de Gronwall Clássicas, viabilizando a aplicação de resultados já fundamentados na Seção 2.1.

Como pode ser consultado na referência supracitada e na demonstração a seguir, encontramos divergências nas limitações obtidas pelo autor nos valores de algumas constantes, apesar de termos seguido o mesmo procedimento de demonstração. Além disso, utilizamos justificativas próprias para determinadas estimativas advindas da referência base, objetivando aplicar o Gronwall Clássico do Teorema 2.1, a fim de ressaltar ainda mais a relação entre as versões clássicas e singulares.

**Teorema 2.38 (GS12).** *Sejam  $\beta, \gamma > 0$  e  $a, b, x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  funções contínuas, com  $a(t)$  não decrescente, satisfazendo a desigualdade*

$$x(t) \leq a(t) + \int_0^t (t-s)^{\beta-1} s^{\gamma-1} b(s)x(s) ds, \quad t \in [0, T]. \quad (2.175)$$

(i) Se  $\beta > \frac{1}{2}$  e  $\gamma > 1 - \frac{1}{2p}$ , com  $p > 1$ , então

$$x(t) \leq 2^{1-\frac{1}{2q}} a(t) e^{\left[ \frac{2^{q-1}}{2q} (K_{\beta,\gamma})^q \int_0^t e^{qs} [b(s)]^{2q} ds + t \right]}, \quad t \in [0, T], \quad (2.176)$$

onde  $q > 1$  é tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  e

$$K_{\beta,\gamma} := \frac{\Gamma(2\beta - 1)}{4^{\beta-1}} \left[ \frac{\Gamma((2\gamma - 2)p + 1)}{p^{(2\gamma-2)p+1}} \right]^{\frac{1}{p}}.$$

(ii) Se  $\beta \in (0, \frac{1}{2}]$ , com  $\beta := \frac{1}{\theta+1}$  para algum  $\theta \geq 1$ , e  $\gamma > 1 - \frac{1}{\varepsilon q}$ , com  $\varepsilon > 1$ ,  $p = 1 + \beta$  e  $q = 1 + \frac{1}{\beta}$ , então

$$x(t) \leq 2^{1-\frac{1}{qr}} a(t) e^{\left[ \frac{2^{qr-1}}{qr} (M_{\beta,\gamma})^r \int_0^t e^{rs} [b(s)]^{qr} ds + t \right]}, \quad t \in [0, T], \quad (2.177)$$

onde  $r > 1$  é tal que  $\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{r} = 1$  e

$$M_{\beta,\gamma} := \left[ \frac{\Gamma(1 - \alpha p)}{p^{1-\alpha p}} \right]^{\frac{q}{p}} \left[ \frac{\Gamma((\gamma - 1)\varepsilon q + 1)}{\varepsilon^{(\gamma-1)\varepsilon q + 1}} \right]^{\frac{1}{\varepsilon}}, \quad \alpha := 1 - \beta.$$

*Demonstração.* Iniciemos pela prova do item (i), para o qual  $\Gamma(2\beta - 1)$  está bem definida. Segue da hipótese (2.175) e da Desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned} x(t) &\leq a(t) + \int_0^t \underbrace{(t-s)^{\beta-1} e^s}_{f_1(s)} \underbrace{e^{-s} s^{\gamma-1} b(s) x(s)}_{f_2(s)} ds \\ &\stackrel{C-S}{\leq} a(t) + \left[ \int_0^t (t-s)^{2\beta-2} e^{2s} ds \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_0^t e^{-2s} s^{2\gamma-2} b^2(s) x^2(s) ds \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\stackrel{(2.126)}{\leq} a(t) + e^t \left[ \frac{2}{4^\beta} \Gamma(2\beta - 1) \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_0^t s^{2\gamma-2} b^2(s) [e^{-s} x(s)]^2 ds \right]^{\frac{1}{2}}, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2.178)$$

De (2.178) e do Corolário 1.4, obtemos:

$$\begin{aligned} x^2(t) &\leq \left\{ a(t) + e^t \left[ \frac{2}{4^\beta} \Gamma(2\beta - 1) \right]^{\frac{1}{2}} \left[ \int_0^t s^{2\gamma-2} b^2(s) [e^{-s} x(s)]^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^2 \\ &\leq 2a^2(t) + 2e^{2t} \frac{2}{4^\beta} \Gamma(2\beta - 1) \int_0^t s^{2\gamma-2} b^2(s) [e^{-s} x(s)]^2 ds, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2.179)$$

Segue de (2.179), com  $z(t) := [e^{-t} x(t)]^2$  e  $k_\beta := \frac{1}{4^{\beta-1}} \Gamma(2\beta - 1)$ , a seguinte desigualdade:

$$z(t) \leq 2a^2(t) + k_\beta \int_0^t s^{2\gamma-2} b^2(s) z(s) ds, \quad t \in [0, T]. \quad (2.180)$$

Em (2.180) temos uma Desigualdade Singular de Gronwall, com o termo singular diferente dos outros resultados já vistos nesta seção. No que segue, veremos como proceder com esta nova classe de singularidade, até recairmos na aplicação de um Gronwall Clássico.

Para isso, consideremos  $q$  o expoente conjugado de  $p > 1$ . Nestas condições, a função  $f(s) := s^{2\gamma-2}e^{-s}$  pertence a  $L^p$ , pois para qualquer  $t \in (0, T)$  temos que

$$\int_0^t |f(s)|^p ds = \frac{1}{p^{(2\gamma-2)p+1}} \int_0^{pt} v^{(2\gamma-2)p} e^{-v} dv \leq \frac{\Gamma((2\gamma-2)p+1)}{p^{(2\gamma-2)p+1}} := k_\gamma < \infty. \quad (2.181)$$

A função Gama está definida (e converge) no ponto  $[(2\gamma-2)p+1] > 0$  devido a hipótese  $\gamma > 1 - \frac{1}{2p}$ . Por outro lado, a função  $g(s) := e^s b^2(s) z(s)$  pertence a  $L^q$ , sendo consequência imediata de sua continuidade. Com essas informações, retornando em (2.180) e aplicando a Desigualdade de Hölder (Proposição 1.9), obtemos:

$$\begin{aligned} z(t) &\leq 2a^2(t) + k_\beta \int_0^t \underbrace{s^{2\gamma-2} e^{-s}}_{\in L^p} \underbrace{e^s b^2(s) z(s)}_{\in L^q} ds \\ &\leq 2a^2(t) + k_\beta \left[ \int_0^t s^{(2\gamma-2)p} e^{-sp} ds \right]^{\frac{1}{p}} \left[ \int_0^t e^{qs} [b(s)]^{2q} z^q(s) ds \right]^{\frac{1}{q}}, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2.182)$$

Segue de (2.181) e (2.182) que

$$\begin{aligned} \underbrace{z^q(t)}_{\tilde{x}(t)} &\leq \left\{ 2a^2(t) + k_\beta (k_\gamma)^{\frac{1}{p}} \left[ \int_0^t e^{qs} [b(s)]^{2q} z^q(s) ds \right]^{\frac{1}{q}} \right\}^q \\ &\stackrel{(1.1)}{\leq} \underbrace{2^{2q-1} [a(t)]^{2q}}_{\tilde{a}(t)} + \int_0^t \underbrace{2^{q-1} k_\beta^q (k_\gamma)^{\frac{q}{p}} e^{qs} [b(s)]^{2q}}_{\tilde{b}(s)} \underbrace{z^q(s)}_{\tilde{x}(s)} ds, \quad t \in [0, T]. \end{aligned} \quad (2.183)$$

É neste momento que aplicaremos o Gronwall Clássico do Teorema 2.1 na desigualdade (2.183), usando a monotonicidade da função  $a(t)$ :

$$z^q(t) = \tilde{x}(t) \leq \tilde{a}(t) + \int_0^t \tilde{a}(s) \tilde{b}(s) e^{\int_s^t \tilde{b}(u) du} ds \leq \tilde{a}(t) \left[ 1 - \int_0^t \frac{d}{ds} e^{\int_s^t \tilde{b}(u) du} ds \right] \stackrel{TFC}{=} \tilde{a}(t) e^{\int_0^t \tilde{b}(s) ds},$$

provando que

$$z(t) \leq 2^{2-\frac{1}{q}} [a(t)]^2 e^{\left[ \frac{2q-1}{q} (K_{\beta,\gamma})^q \int_0^t e^{qs} [b(s)]^{2q} ds \right]}, \quad t \in [0, T], \quad (2.184)$$

onde  $K_{\beta,\gamma} := k_\beta (k_\gamma)^{\frac{1}{p}}$ . Agora, substituindo  $z(t) = [e^{-t} x(t)]^2$  em (2.184), obtemos:

$$x(t) \leq 2^{1-\frac{1}{2q}} a(t) e^{\left[ \frac{2q-1}{2q} (K_{\beta,\gamma})^q \int_0^t e^{qs} [b(s)]^{2q} ds + t \right]}, \quad t \in [0, T]. \quad (2.185)$$

Com isso, concluimos a prova do item (i).

Para provar (ii), consideremos  $\beta \in (0, \frac{1}{2}]$ , com  $\beta := \frac{1}{\theta+1}$  para algum  $\theta \geq 1$ ,  $\gamma > 1 - \frac{1}{\varepsilon q}$ , com  $\varepsilon > 1$ ,  $p = 1 + \beta$ ,  $q = 1 + \frac{1}{\beta}$ ,  $\alpha = 1 - \beta$  e  $r > 1$  satisfazendo  $\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{r} = 1$ . Iniciemos por analisar a convergência das seguintes integrais:

$$\bullet \int_0^t (t-s)^{-\alpha p} e^{ps} ds \stackrel{(t-s)=\frac{u}{p}}{=} \frac{e^{pt}}{p^{1-\alpha p}} \int_0^{pt} u^{-\alpha p} e^{-u} du \leq \frac{e^{pt}}{p^{1-\alpha p}} \Gamma(1 - p\alpha) < \infty; \quad (2.186)$$

$$\bullet \int_0^t s^{q\varepsilon(\gamma-1)} e^{-s\varepsilon} ds \stackrel{v=s\varepsilon}{=} \frac{1}{\varepsilon^{q\varepsilon(\gamma-1)+1}} \int_0^{t\varepsilon} v^{q\varepsilon(\gamma-1)} e^{-v} dv \leq \frac{\Gamma(q\varepsilon(\gamma-1) + 1)}{\varepsilon^{q\varepsilon(\gamma-1)+1}} < \infty. \quad (2.187)$$

A partir disso, como  $p$  e  $q$  são expoentes conjugados, aplicando a Desigualdade de Hölder (Proposição 1.9) na hipótese (2.175), obtemos:

$$\begin{aligned} x(t) &\leq a(t) + \int_0^t \underbrace{(t-s)^{-\alpha} e^s}_{\in L^p} \underbrace{e^{-s} s^{\gamma-1} b(s) x(s)}_{\in L^q} ds \\ &\leq a(t) + \left[ \int_0^t (t-s)^{-\alpha p} e^{ps} ds \right]^{\frac{1}{p}} \left[ \int_0^t \underbrace{s^{q\gamma-q} e^{-s}}_{\in L^\varepsilon} \underbrace{e^s e^{-qs} b^q(s) x^q(s)}_{\in L^r} ds \right]^{\frac{1}{q}} \\ &\stackrel{(*)}{\leq} a(t) + \left[ \int_0^t (t-s)^{-\alpha p} e^{ps} ds \right]^{\frac{1}{p}} \left[ \int_0^t s^{q\varepsilon(\gamma-1)} e^{-s\varepsilon} ds \right]^{\frac{1}{q\varepsilon}} \left[ \int_0^t e^{rs} [b(s)]^{qr} [e^{-s} x(s)]^{qr} ds \right]^{\frac{1}{qr}}, \end{aligned} \quad (2.188)$$

onde em (\*) aplicamos a Desigualdade de Hölder para os expoentes conjugados  $r$  e  $\varepsilon$ . De (2.188) e das estimativas obtidas em (2.186) e (2.187), segue que

$$[x(t)]^{qr} \leq \left\{ a(t) + e^t \left[ \frac{\Gamma(1 - \alpha p)}{p^{1-\alpha p}} \right]^{\frac{1}{p}} \left[ \frac{\Gamma(q\varepsilon(\gamma-1) + 1)}{\varepsilon^{q\varepsilon(\gamma-1)+1}} \right]^{\frac{1}{q\varepsilon}} \left[ \int_0^t e^{rs} [b(s)]^{qr} [e^{-s} x(s)]^{qr} ds \right]^{\frac{1}{qr}} \right\}^{qr}, \quad (2.189)$$

e aplicando (1.1) em (2.189), obtemos:

$$\underbrace{[e^{-t} x(t)]^{qr}}_{\tilde{x}(t)} \leq \underbrace{2^{qr-1} [a(t)]^{qr}}_{\tilde{a}(t)} + \int_0^t \underbrace{2^{qr-1} (M_{\beta,\gamma})^r e^{rs} [b(s)]^{qr}}_{\tilde{b}(s)} \underbrace{[e^{-s} x(s)]^{qr}}_{\tilde{x}(s)} ds, \quad (2.190)$$

onde

$$M_{\beta,\gamma} := \left[ \frac{\Gamma(1 - \alpha p)}{p^{1-\alpha p}} \right]^{\frac{q}{p}} \left[ \frac{\Gamma((\gamma-1)\varepsilon q + 1)}{\varepsilon^{(\gamma-1)\varepsilon q + 1}} \right]^{\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Por fim, aplicando o Gronwall Clássico do Teorema 2.1 na desigualdade (2.190) e usando a

relação obtida anteriormente, a partir do Teorema Fundamental do Cálculo, obtemos:

$$[e^{-t}x(t)]^{qr} \leq \tilde{a}(t)e^{\int_0^t \tilde{b}(s)ds} = 2^{qr-1}[a(t)]^{qr}e^{\left[2^{qr-1}(M_{\beta,\gamma})^r \int_0^t e^{rs}[b(s)]^{qr}ds\right]},$$

provando que

$$x(t) \leq 2^{1-\frac{1}{qr}}a(t)e^{\left[\frac{2^{qr-1}}{qr}(M_{\beta,\gamma})^r \int_0^t e^{rs}[b(s)]^{qr}ds+t\right]}, \quad t \in [0, T].$$

□

Podemos observar que, na demonstração do Teorema 2.38, necessitamos usar a Desigualdade de Hölder sucessivas vezes, tanto na versão numérica quanto na versão integral, para conseguirmos reduzir os problemas à duas situações envolvendo versões clássicas de Gronwall. Além disso, assim como nos resultados anteriores desta seção, o fator crítico se dá quando o expoente da singularidade no ponto  $s = t$  é igual a  $\frac{1}{2}$ , com restrições análogas para a singularidade acrescentada no ponto  $s = 0$ , as quais são primordiais para manter a convergência da função Gama nos pontos em que é requerida.

No que concerne às duas singularidades na hipótese (2.175), a saber, as advindas dos termos  $(t-s)^{\beta-1}$  e  $s^{\gamma-1}$ , percebemos no decorrer da demonstração do Teorema 2.38 que, após reduzirmos os problemas a uma só singularidade da forma  $s^{\gamma-1}$ , os resultados obtidos anteriormente não foram suficientes para prosseguirmos com as estimativas. Deste modo, necessitamos de um instrumental teórico além do que já havíamos utilizado, mostrando que, por mais que ambos os termos singulares sejam parecidos, a natureza de cada um particulariza seus procedimentos demonstrativos.

No que segue, enunciaremos como corolário as desigualdades singulares cujo procedimento demonstrativo se baseia na prova do Teorema 2.38.

**Corolário 2.39 (GS13).** *Sejam  $\gamma, k_0 > 0$  e  $a, b, x : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$  funções contínuas, com  $a(t)$  não decrescente, satisfazendo a desigualdade*

$$x(t) \leq a(t) + k_0 \int_0^t s^{\gamma-1}b(s)x(s)ds, \quad t \in [0, T). \quad (2.191)$$

(i) *Se  $\gamma > \frac{1}{2}$ , então*

$$x(t) \leq \sqrt{2}a(t)e^{\left[(k_0K_\gamma)^2 \int_0^t e^{2sb^2(s)}ds\right]}, \quad t \in [0, T), \quad (2.192)$$

$$\text{onde } K_\gamma := \left[\frac{\Gamma((\gamma-1)2+1)}{2^{(\gamma-1)2+1}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

(ii) Se  $\gamma \in (0, \frac{1}{2}]$ , então

$$x(t) \leq 2^{1-\frac{1}{q}} a(t) e^{\left[ \frac{2^{q-1}}{q} (k_0 M_\gamma)^q \int_0^t e^{qsb^q(s)} ds \right]}, \quad t \in [0, T), \quad (2.193)$$

$$\text{onde } p = 1 + \gamma, \quad q = 1 + \frac{1}{\gamma} \text{ e } M_\gamma := \left[ \frac{\Gamma((\gamma-1)p+1)}{p(\gamma-1)^{p+1}} \right]^{\frac{1}{p}}.$$

*Demonstração.* Análogo as desigualdades demonstradas no decorrer da prova do Teorema 2.38.  $\square$

A natureza dos Corolários 2.33 e 2.39 são semelhantes. No entanto, a singularidade da forma  $(t-s)^{\beta-1}$  exigiu resultados adicionais envolvendo a referida condição ( $q$ ) da Definição 2.3.1, enquanto a singularidade do tipo  $s^{\gamma-1}$  requeriu apenas aplicações da Desigualdade de Hölder para expoentes conjugados apropriados ao intervalo que se insere o termo singular. Apesar disso, o padrão nas estimativas desses resultados se mantém, com particularidades nas constantes envolvidas.

Os resultados desta seção mostraram que a versão singular apresenta uma intrínseca relação com a versão clássica, mesmo com um número maior de singularidades, como vimos no Teorema 2.38. Tal fato ressalta substancialmente a importância do estudo detalhado presente na Seção 2.1, visto que na maioria dos casos saímos do Gronwall Singular para aplicar os casos não singulares.

Como consequência das Desigualdades de Gronwall Singulares, podemos ainda obter resultados envolvendo a soma de integrais com singularidades. Um exemplo dessa aplicação pode ser visualizada no resultado a seguir (Corolário 2.40), o qual decorre do Corolário 2.30 depois de expressarmos o núcleo singular em termos de uma única singularidade.

**Corolário 2.40 (GS14).** *Sejam  $\beta, \gamma > 0$ , com  $\beta \leq \gamma$ ,  $a : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$  função localmente integrável e não decrescente,  $b : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$  função contínua não decrescente e limitada. Se  $x : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$  é uma função localmente integrável que satisfaz a desigualdade*

$$x(t) \leq a(t) + b(t) \int_0^t [(t-s)^{\beta-1} + (t-s)^{\gamma-1}] x(s) ds, \quad t \in [0, T), \quad (2.194)$$

então

$$x(t) \leq a(t) E_\beta(Kb(t)\Gamma(\beta)t^\beta), \quad t \in [0, T), \quad (2.195)$$

onde  $E_\beta$  é a função de Mittag-Leffler definida em (2.52) e  $K := \max\{1, T^{\gamma-\beta}\}$ .

*Demonstração.* Para todo  $s$  satisfazendo  $0 \leq s \leq t < T$ , segue que

$$(t-s)^{\gamma-1} = (t-s)^{\gamma-\beta}(t-s)^{\beta-1} \leq T^{\gamma-\beta}(t-s)^{\beta-1}. \quad (2.196)$$

Considerando

$$K = K_{\beta,\gamma,T} := \max\{1, T^{\gamma-\beta}\},$$

obtemos de (2.194) e (2.196) a seguinte desigualdade singular:

$$x(t) \leq a(t) + Kb(t) \int_0^t (t-s)^{\beta-1} x(s) ds, \quad t \in [0, T]. \quad (2.197)$$

Nestas condições, aplicando o Corolário 2.30 em (2.197) concluímos o resultado.  $\square$

**Observação 2.3.4.** *A demonstração do Corolário 2.40 ilustra um procedimento para reescrevermos a soma de duas singularidades em função do menor expoente singular. Outras generalizações, de natureza semelhante à que consta na desigualdade (2.194) ou versões análogas com outras singularidades, como a considerada no Corolário 2.39, podem ser demonstradas seguindo a estratégia anterior, sob as devidas hipóteses de regularidade para as funções envolvidas.*

**Observação 2.3.5.** *Na prova do Teorema 2.38 trabalhamos com as desigualdades até obtermos estimativas não singulares, para assim utilizarmos resultados clássicos já sistematizados. Já no Corolário 2.40, fizemos uso de uma estimativa para recair em um único núcleo singular. Essas demonstrações ilustram maneiras de proceder ao nos depararmos com problemas englobando mais de uma singularidade. Para outras generalizações referentes ao caso singular, o leitor pode consultar, por exemplo, as referências [15, 19, 21, 24, 25, 31].*

## 2.4 SÍNTESE DOS RESULTADOS

Levando em consideração que as analogias entre as desigualdades clássicas e singulares já foram abordadas no decorrer da Seção 2.3, por fins didáticos, reunimos de forma sintetizada nos quadros a seguir as hipóteses e teses dos teoremas/corolários demonstrados. Com isso, o leitor dimensionará os resultados que foram desenvolvidos neste trabalho, além de ilustrar a evolução das generalizações das Desigualdades de Gronwall no decorrer do estudo.

No que segue,  $m$  e  $u_0$  são constantes não negativas, com  $m \neq 1$ ,  $p$  e  $q$  são expoentes conjugados, e  $Y$  é a função definida por  $Y(u) := \int_{u_0}^u \frac{1}{y(s)} ds$ , com inversa  $Y^{-1}$ .

### DESIGUALDADES CLÁSSICAS DE GRONWALL

| Gronwall                 | Hipótese   | Tese  |
|--------------------------|--|---|
| <b>Teo. 2.1</b><br>(GC1) | $x(t) \leq a(t) + \int_0^t b(s)x(s)ds$                         | $x(t) \leq a(t) + \int_0^t a(s)b(s)e^{\int_s^t b(u)du} ds$  |
| <b>Teo. 2.2</b><br>(GC2) | $x(t) \leq a(t) + y(t) \int_0^t b(s)x(s)ds$                    | $x(t) \leq a(t) + y(t) \int_0^t a(s)b(s)e^{\int_s^t b(r)y(r)dr} ds$   |
| <b>Teo. 2.3</b><br>(GC3) | $x(t) \leq c + \int_0^t a(s)x(s)ds + \int_0^t b(s)[x(s)]^m ds$ | $x(t) \leq \left\{ c^{1-m} e^{(1-m) \int_0^t a(r)dr} + (1-m) \int_0^t b(s) e^{(1-m) \int_s^t a(r)dr} ds \right\}^{\frac{1}{1-m}}$ |
| <b>Teo. 2.4</b><br>(GC4) | $x(t) \leq M + \int_0^t a(s)y(x(s))ds$                         | $x(t) \leq Y^{-1} \left( Y(M) + \int_0^t a(s)ds \right)$  |
| <b>Teo. 2.5</b><br>(GC5) | $x(t) \leq a(t) + k \int_0^t b(s)y(x(s))ds$                    | $x(t) \leq Y^{-1} \left( Y(a(t)) + k \int_0^t b(s)ds \right)$   |
| <b>Cor. 2.6</b><br>(GC6) | $x(t) \leq a(t) + k \int_0^t b(s)[x(s)]^m ds$                  | $x(t) \leq \left\{ [a(t)]^{1-m} + k(1-m) \int_0^t b(s)ds \right\}^{\frac{1}{1-m}}$  |
| <b>Teo. 2.7</b><br>(GC7) | $x(t) \leq a(t) + b(t) \int_0^t L(s, x(s))ds$                  | $x(t) \leq a(t) + b(t) \int_0^t L(u, a(u))e^{\int_u^t y(s,a(s))b(s)ds} du$  |

## DESIGUALDADES SINGULARES DE GRONWALL

| Gronwall                  | Hipótese   | Tese  |
|---------------------------|--|---|
| <b>Teo. 2.26</b><br>(GS1) | $\alpha \in (0, 1);$<br>$x(t) \leq a(t) + C_0 \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} x(s) ds$                 | $\exists C_1(\alpha, T, C_0), C_2(\alpha, T, C_0) > 0;$<br>$x(t) \leq a(t) + C_1 e^{C_2 t} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} a(s) ds$   |
| <b>Cor. 2.27</b><br>(GS2) | $\alpha, \beta \in (0, 1);$<br>$x(t) \leq k_0 t^{-\alpha} + k_1 \int_0^t (t-s)^{-\beta} x(s) ds$ | $\exists M(k_1, \beta, T) > 0;$<br>$x(t) \leq \frac{k_0 t^{-\alpha}}{1-\alpha} M(k_1, \beta, T)$  |
| <b>Teo. 2.29</b><br>(GS3) | $\gamma > 0;$<br>$x(t) \leq a(t) + b(t) \int_0^t (t-s)^{\gamma-1} x(s) ds$                       | $x(t) \leq a(t)$<br>$+ \int_0^t \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(b(t)\Gamma(\gamma))^n}{\Gamma(n\gamma)} (t-s)^{n\gamma-1} a(s) \right] ds$  |
| <b>Cor. 2.30</b><br>(GS4) | $\gamma > 0;$<br>$x(t) \leq a(t) + b(t) \int_0^t (t-s)^{\gamma-1} x(s) ds$                       | $x(t) \leq a(t) E_\gamma(b(t)\Gamma(\gamma)t^\gamma)$   |
| <b>Teo. 2.31</b><br>(GS5) | $\beta > \frac{1}{2};$<br>$x(t) \leq a(t) + \int_0^t (t-s)^{\beta-1} b(s) y(x(s)) ds$            | $x(t) \leq e^t \left\{ Y^{-1} \left[ Y(2a^2(t)) + g_1(t) \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$<br>$g_1(t) = \frac{\Gamma(2\beta-1)}{4^{\beta-1}} \int_0^t R_1(s) b^2(s) ds$   |
| <b>Teo. 2.32</b><br>(GS6) | $\beta \in (0, \frac{1}{2}];$<br>$x(t) \leq a(t) + \int_0^t (t-s)^{\beta-1} b(s) y(x(s)) ds$     | $x(t) \leq e^t \left\{ Y^{-1} \left[ Y(2^{q-1} a^q(t)) + g_2(t) \right] \right\}^{\frac{1}{q}}$<br>$g_2(t) = 2^{q-1} \left[ \frac{\Gamma(1-\alpha p)}{p^{1-\alpha p}} \right]^{\frac{q}{p}} \int_0^t R_2(s) b^q(s) ds$  |
| <b>Cor. 2.33</b><br>(GS7) | $\beta > 0;$<br>$x(t) \leq a(t) + \int_0^t (t-s)^{\beta-1} b(s) x(s) ds$                         | $x(t) \leq \sqrt{2} a(t) e^{\left[ \frac{2\Gamma(2\beta-1)}{4^\beta} \int_0^t b^2(s) ds + t \right]}, \beta > \frac{1}{2}$<br>$x(t) \leq 2^{1-\frac{1}{q}} a(t) e^{\left[ \frac{2^{q-1}}{q} k_\beta^q \int_0^t b^q(s) ds + t \right]}, \beta \leq \frac{1}{2}$                                      |
| <b>Cor. 2.34</b><br>(GS8) | $\beta > 0;$<br>$x(t) \leq a(t) + \int_0^t (t-s)^{\beta-1} b(s) x^m(s) ds$                       | $x(t) \leq e^t \left\{ [\sqrt{2} a(t)]^{2(1-m)} + C_{\beta, m} \int_0^t e^{2(m-1)s} b^2(s) ds \right\}^{\frac{1}{2(1-m)}}, \beta > \frac{1}{2}$<br>$x(t) \leq e^t \left\{ (2^{q-1} a^q(t))^{1-m} + K_{\beta, m} \int_0^t e^{(m-1)qs} b^q(s) ds \right\}^{\frac{1}{q(1-m)}}, \beta \leq \frac{1}{2}$ |

| Gronwall                          | Hipótese  | Tese   |
|-----------------------------------|---|--|
| <b>Teo. 2.35</b><br><b>(GS9)</b>  | $\beta > 0;$<br>$x(t) \leq a(t) + b(t) \int_0^t (t-s)^{\beta-1} y(s)x(s)ds$   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\beta &gt; \frac{1}{2}</math></li> </ul> $x(t) \leq e^t [2a^2(t) + 2k_\beta b^2(t)g_1(t)]^{\frac{1}{2}}$<br>$g_1(t) = \int_0^t a^2(s)y^2(s)e^{[k_\beta \int_s^t b^2(r)y^2(r)dr]}ds$<br><ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\beta \leq \frac{1}{2}</math></li> </ul> $x(t) \leq e^t [2^{q-1}a^q(t) + 4^{q-1}K_\beta^q b^q(t)g_2(t)]^{\frac{1}{q}}$<br>$g_2(t) = \int_0^t a^q(s)y^q(s)e^{[2^{q-1}K_\beta^q \int_s^t b^q(r)y^q(r)dr]}ds$                              |
| <b>Teo. 2.36</b><br><b>(GS10)</b> | $\gamma_1, \gamma_2, \theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$<br>$x(t) \leq k_0 + kt^{\gamma_1} \int_0^t (t-s)^{-\gamma_1} s^{-\gamma_2} y(s)ds$<br>$y(t) \leq k_1 + kt^{\theta_1} \int_0^t (t-s)^{-\theta_1} s^{-\theta_2} x(s)ds$ | $\exists M(\gamma_1, \gamma_2, \theta_1, \theta_2, k, T) > 0;$<br>$x(t) \leq M(k_0 + k_1 t^{1-\gamma_2})$<br>$y(t) \leq M(k_1 + k_0 t^{1-\theta_2})$   |
| <b>Cor. 2.37</b><br><b>(GS11)</b> | $\gamma_1, \gamma_2 \in (0, 1)$<br>$x(t) \leq k_0 + kt^{\gamma_1} \int_0^t (t-s)^{-\gamma_1} s^{-\gamma_2} x(s)ds$  | $\exists M(\gamma_1, \gamma_2, k, T) > 0;$<br>$x(t) \leq k_0 M(1 + t^{1-\gamma_2})$  |
| <b>Teo. 2.38</b><br><b>(GS12)</b> | $\beta, \gamma > 0;$<br>$x(t) \leq a(t) + \int_0^t (t-s)^{\beta-1} s^{\gamma-1} b(s)x(s)ds$   | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\beta &gt; \frac{1}{2}, \gamma &gt; 1 - \frac{1}{2p}</math></li> </ul> $x(t) \leq 2^{1-\frac{1}{2q}} a(t) e^{\left[ \frac{2^{q-1}}{2q} K_{\beta, \gamma}^q \int_0^t e^{qs} [b(s)]^{2q} ds + t \right]}$<br><ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\beta \leq \frac{1}{2}, \gamma &gt; 1 - \frac{1}{\varepsilon q}</math></li> </ul> $x(t) \leq 2^{1-\frac{1}{qr}} a(t) e^{\left[ \frac{2^{qr-1}}{qr} M_{\beta, \gamma}^r \int_0^t e^{rs} [b(s)]^{qr} ds + t \right]}$ |
| <b>Cor. 2.39</b><br><b>(GS13)</b> | $\gamma > 0;$<br>$x(t) \leq a(t) + k_0 \int_0^t s^{\gamma-1} b(s)x(s)ds$  | <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\gamma &gt; \frac{1}{2}</math></li> </ul> $x(t) \leq \sqrt{2}a(t) e^{\left[ (k_0 K_\gamma)^2 \int_0^t e^{2s} b^2(s) ds \right]}$<br><ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\gamma \leq \frac{1}{2}</math></li> </ul> $x(t) \leq 2^{1-\frac{1}{q}} a(t) e^{\left[ \frac{2^{q-1}}{q} (k_0 M_\gamma)^q \int_0^t e^{qs} b^q(s) ds \right]}$   |
| <b>Cor. 2.40</b><br><b>(GS14)</b> | $0 < \beta \leq \gamma;$<br>$x(t) \leq a(t) + b(t) \int_0^t (t-s)^{\beta-1} x(s)ds$<br>$+ b(t) \int_0^t (t-s)^{\gamma-1} x(s)ds$  | $K = \max\{1, T^{\gamma-\beta}\}$<br>$x(t) \leq a(t) E_\beta(Kb(t)\Gamma(\beta)t^\beta)$   |

### 3 APLICAÇÕES EM PVI E VERSÕES DIFERENCIAIS DE GRONWALL

Neste capítulo abordaremos, inicialmente, duas aplicações das Desigualdades de Gronwall: a primeira em um problema de valor inicial de ordem inteira (PVI) (caso do Gronwall Clássico) e a segunda em um problema de valor inicial fracionário (PVIF) (caso do Gronwall Singular). Para isso, relembremos alguns conceitos preliminares relativos as equações diferenciais ordinárias e fracionárias, assim como observações acerca da existência e unicidade de solução dos problemas mencionados inicialmente, apresentando resultados análogos nos dois contextos. Em seguida, apresentaremos versões diferenciais das Desigualdades de Gronwall que podem ser aplicadas no estudo do comportamento assintótico da função solução.

#### 3.1 APLICAÇÕES EM PVI

Sabemos da teoria de Equações Diferenciais Ordinárias que um problema de valor inicial de primeira ordem (PVI) é constituído de uma equação diferencial da forma  $\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x)$ , e de uma condição inicial  $x(t_0) = x_0$ , onde  $t_0$  e  $x_0$  são números reais e  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua dada, o qual representamos por:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f(t, x), t > 0, \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Além disso, sua solução é uma função  $x : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1(J, \mathbb{R})$  que satisfaz a equação diferencial e a condição inicial em (3.1).

Recordemos também que  $x(t)$  é uma solução para (3.1) se, e só se,  $x(t)$  é solução da equação integral de Volterra

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s))ds, \quad (3.2)$$

sendo  $f$  usualmente chamada de núcleo da equação integral.

Para  $f$  sob certas hipóteses (a serem explicitadas no Teorema 3.1 a seguir), exibiremos resultados de existência e unicidade de solução desse PVI, bem como propriedades qualitativas da função solução, formulados na literatura, como nos trabalhos de Kreyszig [18] e Brezis [4].

A seguir, enunciaremos o Teorema de Picard, o qual assegura a existência e unicidade de solução para o PVI (3.1), cuja demonstração será referenciada.

**Teorema 3.1 (Teorema de Picard).** *Seja  $f(t, x)$  uma função contínua a valores reais, limitada no retângulo*

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2; |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$$

por uma constante  $M > 0$ , ou seja,

$$|f(t, x)| \leq M, \forall (t, x) \in R.$$

Suponhamos ainda que  $f$  seja Lipschitziana na segunda variável, isto é, existe uma constante  $L > 0$  tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|, \forall (t, x), (t, y) \in R.$$

Então, o PVI (3.1) tem uma única solução no intervalo  $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ , onde  $\beta < \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\}$ .

*Demonstração.* Ver Kreyszig [18], Capítulo 5, Teorema 5.3-1, página 315.  $\square$

No intuito de aplicar as Desigualdades de Gronwall Clássicas, iremos considerar o problema de valor inicial descrito abaixo para analisar a dependência contínua da solução com respeito aos dados iniciais:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x), & t \in [0, T], \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Assumiremos formalmente que (3.3) possui única solução para cada  $x_0 \in \mathbb{R}$  e  $f : [0, T) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua verificando certas limitações (as quais serão dadas nos itens (i) - (iii) a seguir), com respaldo nas referências citadas anteriormente, levando em consideração que um estudo mais detalhado acerca da teoria de existência de solução de problemas de Cauchy foge do escopo deste trabalho.

Para as aplicações desta seção, sequenciaremos as hipóteses acerca da limitação da função contínua  $f : [0, T) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , variando as condições do "tipo Lipschitz", conforme listado a seguir:

- (i)  $|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$ ,  $L > 0$ ;
- (ii)  $|f(t, x) - f(t, y)| \leq \phi(t)|x - y|$ ,  $\phi : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$ ;
- (iii)  $|f(t, x) - f(t, y)| \leq \phi(t)|x - y|^m$ ,  $\phi : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $m > 0$ ,  $m \neq 1$ .

Com essas hipóteses, aplicaremos, respectivamente, os seguintes resultados da Seção 2.1 envolvendo Desigualdades de Gronwall Clássicas:

- (i) Teorema 2.1 para  $b(t) := k$  constante, com hipótese  $x(t) \leq a(t) + k \int_0^t x(s) ds$ ;
- (ii) Teorema 2.1, com hipótese  $x(t) \leq a(t) + \int_0^t b(s)x(s) ds$ ;
- (iii) Corolário 2.6, com hipótese  $x(t) \leq a(t) + k \int_0^t b(s)[x(s)]^m ds$ .

A partir disso, destacaremos nos próximos resultados as passagens que envolveram as aplicações das Desigualdades de Gronwall Clássicas.

**Teorema 3.2.** *Sejam  $x$  e  $y$  as soluções do PVI (3.3) com dados iniciais  $x_0$  e  $y_0$ , respectivamente, com a função  $f : [0, T) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua satisfazendo a condição de Lipschitz com respeito a segunda variável, isto é,*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|, \quad (3.4)$$

para uma constante  $L > 0$  independente de  $t$ ,  $x$  e  $y$ . Então

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0|e^{Lt}, \quad t \in [0, T). \quad (3.5)$$

*Demonstração.* Prosseguindo como em (3.2), obtemos:

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leq |x_0 - y_0| + \int_0^t |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \\ &\stackrel{(3.4)}{\leq} |x_0 - y_0| + L \int_0^t |x(s) - y(s)| ds, \quad t \in [0, T). \end{aligned}$$

Este é o momento onde aplicaremos o Gronwall Clássico do Teorema 2.1:

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| + |x_0 - y_0|L \int_0^t e^{L(t-s)} ds = |x_0 - y_0|e^{Lt}, \quad t \in [0, T).$$

□

**Teorema 3.3.** *Sejam  $x$  e  $y$  as soluções do PVI (3.3) com dados iniciais  $x_0$  e  $y_0$ , respectivamente, com a função  $f : [0, T) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua satisfazendo*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \phi(t)|x - y|, \quad (3.6)$$

onde  $\phi : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$  é uma função contínua. Então

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| + |x_0 - y_0| \int_0^t \phi(s) e^{\int_s^t \phi(u) du} ds, \quad t \in [0, T). \quad (3.7)$$

*Demonstração.* Reescrevendo as soluções em termos das equações integrais, obtemos:

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leq |x_0 - y_0| + \int_0^t |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \\ &\stackrel{(3.6)}{\leq} |x_0 - y_0| + \int_0^t \phi(s) |x(s) - y(s)| ds, \quad t \in [0, T). \end{aligned}$$

É nesta desigualdade que aplicaremos o Gronwall Clássico do Teorema 2.1:

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| + |x_0 - y_0| \int_0^t \phi(s) e^{\int_s^t \phi(u) du} ds, \quad t \in [0, T).$$

□

**Observação 3.1.1.** Os Teoremas 3.2 e 3.3 nos exibem a unicidade de solução para o PVI (3.3), sob as respectivas hipóteses de limitação para a função  $f$ . De fato, se  $x_0 = y_0$  em (3.5) e (3.7), ou seja, se consideramos soluções do PVI com mesmo dado inicial, vemos claramente por essas desigualdades que  $x = y$ . Tais resultados ilustram a aplicabilidade das Desigualdades de Gronwall, nas versões clássicas, para análise da unicidade de solução em problemas de valor inicial desta classe.

**Teorema 3.4.** Sejam  $x$  e  $y$  as soluções do PVI (3.3) com dados iniciais  $x_0$  e  $y_0$ , respectivamente, com a função  $f : [0, T) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua satisfazendo

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \phi(t)|x - y|^m, \quad (3.8)$$

onde  $\phi : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$  é contínua e  $m \neq 1$  uma constante positiva. Então

$$|x(t) - y(t)| \leq \left\{ |x_0 - y_0|^{1-m} + (1-m) \int_0^t \phi(s) ds \right\}^{\frac{1}{1-m}}, \quad t \in [0, T).$$

*Demonstração.* De modo análogo ao que foi feito na demonstração do Teorema 3.3, obtemos:

$$|x(t) - y(t)| \stackrel{(3.8)}{\leq} |x_0 - y_0| + \int_0^t \phi(s) |x(s) - y(s)|^m ds, \quad t \in [0, T).$$

É neste momento que aplicaremos o Gronwall Clássico não linear do Corolário 2.6:

$$|x(t) - y(t)| \leq \left\{ |x_0 - y_0|^{1-m} + (1-m) \int_0^t \phi(s) ds \right\}^{\frac{1}{1-m}}, \quad t \in [0, T).$$

□

É possível percebermos que os Teoremas 3.2 e 3.3 apresentam limitações para  $|x(t) - y(t)|$  envolvendo os dados iniciais, e a partir disso conseguimos analisar a dependência contínua das soluções do PVI com respeito a esses dados. Tais resultados, juntamente com o Teorema 3.4, reafirmam a importância das Desigualdades de Gronwall Clássicas no estudo de problemas de valor inicial, considerando a derivada de ordem inteira.

Convém ressaltar que, para analisar a diferença entre a solução e o dado inicial, ou seja, estimar  $|x(t) - x_0|$ , basta reproduzirmos resultados análogos aos anteriores, com as devidas modificações acerca da regularidade das funções envolvidas, de modo a satisfazer as hipóteses de algum teorema da Seção 2.1 envolvendo Desigualdades de Gronwall Clássicas.

Para mais, podemos variar a hipótese de limitação acerca da função  $f$  de modo a recair em casos mais abrangentes de aplicações, como o que aparece na Desigualdade de Gronwall Clássica do Teorema 2.5, dada por

$$x(t) \leq a(t) + k \int_0^t b(s)y(x(s))ds,$$

ou ainda, em um grau maior de abstração, como consta na hipótese do Teorema 2.7, satisfazendo desigualdades generalizadas do tipo

$$x(t) \leq a(t) + b(t) \int_0^t L(s, x(s)) ds.$$

Levando em consideração que os resultados apresentados nessa seção ilustram a ideia a ser seguida para as demais aplicações desta natureza, os consideramos suficientes para as aplicações requisitadas. Veremos aplicações análogas a essas na Seção 3.3 para um problema de valor inicial correspondente, considerando uma classe específica de derivada fracionária. A partir disso, iremos discutir os resultados obtidos em ambos os casos na Seção 3.4.

### 3.2 CONCEITOS DO CÁLCULO FRACIONÁRIO

O cálculo fracionário, ou cálculo de ordem não inteira, é definido por derivadas e integrais que assumem ordens arbitrárias. Tal conceito é tão antigo quanto o cálculo de ordem inteira, entretanto, não foi difundido da mesma forma, tendo um desenvolvimento acentuado principalmente no século XX, partindo de contribuições de matemáticos das épocas anteriores, como os trabalhos de Wallis<sup>1</sup>, Euler<sup>2</sup>, Lagrange<sup>3</sup>, Laplace<sup>4</sup>, Lacroix<sup>5</sup> e Fourier<sup>6</sup>, culminando em aplicações importantes nos estudos de Abel<sup>7</sup>, Liouville<sup>8</sup>, Riemann<sup>9</sup>, Heaviside<sup>10</sup>, Caputo<sup>11</sup>, dentre outros.

Do ponto de vista histórico, o primeiro registro do cálculo fracionário consta em uma troca de correspondência entre Leibniz<sup>12</sup> e L'Hôpital<sup>13</sup>, datada de 30 de setembro de 1695, na qual L'Hôpital o questionou a respeito de uma possível interpretação caso o operador derivação tivesse ordem  $n = \frac{1}{2}$ . Na notação de Leibniz, seria como interpretar  $D^{\frac{1}{2}}$  ou  $\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}}$ . Para Leibniz, isso aparentava um paradoxo frutífero para o desenvolvimento de muitas teorias.

Atualmente, sabemos que é possível generalizar a derivada de ordem inteira para uma ordem arbitrária, e que são muitas as definições existentes para tais generalizações. A seguir, apresentaremos as definições de derivada e integral fracionária, no sentido de Riemann-Liouville e Caputo, além de algumas propriedades que serão necessárias para as aplicações subsequentes.

---

<sup>1</sup>John Wallis (★1616 - †1703)

<sup>2</sup>Leonhard Paul Euler (★1707 - †1783)

<sup>3</sup>Joseph Louis Lagrange (★1736 - †1813)

<sup>4</sup>Pierre Simon Laplace (★1749 - †1827)

<sup>5</sup>Sylvestre François Lacroix (★1765 - †1843)

<sup>6</sup>Jean Baptist Joseph Fourier (★1768 - †1830)

<sup>7</sup>Niels Henrik Abel (★1802 - †1829)

<sup>8</sup>Joseph Liouville (★1809 - †1882)

<sup>9</sup>Georg Friedrich Bernhard Riemann (★1826 - †1866)

<sup>10</sup>Oliver Heaviside (★1850 - †1925)

<sup>11</sup>Michele Caputo (★1927)

<sup>12</sup>Gottfried Wilhelm Leibniz (★1646 - †1716)

<sup>13</sup>Guillaume François Antoine (Marquês de L'Hôpital) (★1661 - †1704)

Para uma explanação mais detalhada acerca do desenvolvimento histórico do cálculo fracionário, assim como dos conceitos que serão abordados nesta seção, recomendamos os trabalhos de Figueiredo de Camargo e Capelas de Oliveira [9], Kubica, Ryszewska e Yamamoto [19], e Podlubny [24].

**Definição 3.2.1.** *Sejam  $\alpha \in (0, 1)$  e  $f \in L^1(0, T)$ . A derivada fracionária de Riemann-Liouville de ordem  $\alpha$  para a função  $f$  é dada por*

$$D_t^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds.$$

**Definição 3.2.2.** *Sejam  $\alpha \in (0, 1)$  e  $f \in L^1(0, T)$ , com  $\frac{df}{ds} \in L^1(0, T)$ . A derivada fracionária de Caputo de ordem  $\alpha$  para a função  $f$  é dada por*

$$d_t^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \frac{d}{ds} f(s) ds.$$

**Observação 3.2.1.** *As Definições 3.2.1 e 3.2.2 mostram que a derivada fracionária segundo Caputo é bastante similar à de Riemann-Liouville, exceto pela inversão nas ordens de integração e derivação, e pelo fato da definição de Caputo ser mais restritiva no que diz respeito às condições impostas sobre  $f$ . Além disso, ambas possuem singularidades em seus núcleos integrais no ponto  $t = s$ , sendo este um forte indício da necessidade das Desigualdades de Gronwall Singulares em problemas envolvendo derivadas desta classe, conforme veremos nas aplicações da Seção 3.3.*

**Exemplo 3.2.1.** *Sejam  $\alpha \in (0, 1)$  e  $\beta > 0$ . Nestas condições,  $t^\beta, \frac{dt^\beta}{dt} \in L^1(0, T)$  e as derivadas segundo Riemann-Liouville e Caputo de ordem  $\alpha$  coincidem na função  $t^\beta$ , valendo que*

$$d_t^\alpha(t^\beta) = D_t^\alpha(t^\beta) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} t^{\beta-\alpha}.$$

*De fato, pela definição da derivada de Caputo e usando o Lema 2.20 e a Proposição 2.10, obtemos:*

$$\begin{aligned} d_t^\alpha(t^\beta) &= \frac{\beta}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{1-\alpha-1} s^{\beta-1} ds \\ &= \frac{\beta}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\alpha+\beta)} t^{1-\alpha+\beta-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} t^{\beta-\alpha}. \end{aligned}$$

*Por outro lado, da definição da derivada de Riemann-Liouville, do Lema 2.20 e da Proposição*

2.10, seguem as igualdades:

$$\begin{aligned}
 D_t^\alpha(t^\beta) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{1-\alpha-1} s^{\beta+1-1} ds \\
 &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+2)} t^{\beta-\alpha+1} \right) \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{(\beta-\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha+1)} (\beta-\alpha+1) t^{\beta-\alpha} \\
 &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\alpha)} t^{\beta-\alpha}.
 \end{aligned}$$

Por meio do Exemplo 3.2.1 evidenciamos a importância do estudo inicial acerca das funções clássicas Gama e Beta, pois, como veremos nos próximos resultados, elas estão presentes em diversas relações envolvendo as derivadas fracionárias definidas nesta seção. Este exemplo tratou de um caso específico de função na qual as derivadas de Riemann-Liouville e Caputo coincidem. No próximo resultado (Lema 3.5), veremos uma relação entre essas derivadas para um caso mais geral de função suficientemente regular.

**Lema 3.5.** *Sejam  $\alpha \in (0, 1)$  e  $f \in C^1[0, T]$ . Então,*

$$D_t^\alpha f(t) = d_t^\alpha f(t) + \frac{f(0)}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}, \quad t \in [0, T].$$

*Demonstração.* Como  $f \in C^1$ , fazendo integração por partes obtemos que

$$\int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds = f(0) \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha} \int_0^t (t-s)^{1-\alpha} \frac{d}{ds} f(s) ds. \quad (3.9)$$

De (3.9) segue a relação

$$\frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds = f(0) t^{-\alpha} + \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \frac{d}{ds} f(s) ds,$$

provando que

$$\Gamma(1-\alpha) D_t^\alpha f(t) = f(0) t^{-\alpha} + \Gamma(1-\alpha) d_t^\alpha f(t).$$

□

**Observação 3.2.2.** *O Lema 3.5 mostra que as derivadas de Riemann-Liouville e Caputo se diferenciam por uma função do "tipo polinomial", considerando funções de classe  $C^1$ . É fácil ver que a derivada de Caputo se anula em funções constantes, como ocorre na derivada usual. No entanto, a de Riemann-Liouville não verifica esta propriedade, pois, para  $C, t \in \mathbb{R}^*$ ,*

$$D_t^\alpha(C) = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} ds = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left( \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) = \frac{C}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha} \neq 0.$$

Isso faz com que a definição de Caputo ganhe crédito em relação à formulação de Riemann-Liouville nas aplicações que envolvam Equações Diferenciais Fracionárias, principalmente quando se procura interpretar as derivadas como taxas de variação e se quer calcular a taxa de uma constante, de modo que seja nula.

Esses operadores fracionários satisfazem a linearidade, porém, outras propriedades que decorrem da derivada de ordem inteira não se aplicam neste contexto, como a "regra do produto". Para mais detalhes acerca destas diferenças, recomendamos o trabalho de Kubica, Ryszewska e Yamamoto [19].

**Observação 3.2.3.** As derivadas fracionárias segundo Riemann-Liouville e Caputo podem ainda ser estendidas para casos mais gerais de ordem positiva e não inteira, exigindo que a função  $f$  seja suficientemente regular. Para isso, consideramos  $\alpha > 0$  e  $m \in \mathbb{N}$  satisfazendo  $m - 1 < \alpha < m$ , e  $f \in C^m(0, T)$ . Neste caso, as derivadas de Riemann-Liouville e Caputo de ordem  $\alpha$  para a função  $f$  são dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} \bullet D_t^\alpha f(t) &:= \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t (t - s)^{m - \alpha - 1} f(s) ds, \\ \bullet d_t^\alpha f(t) &:= \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^t (t - s)^{m - \alpha - 1} \frac{d^m}{ds^m} f(s) ds. \end{aligned}$$

Notemos que essas definições envolvem derivadas ordinárias de ordem  $m$ , e as singularidades permanecem no ponto  $t = s$ , pois  $m - \alpha - 1 < 0$ . Apesar dessas generalizações, optamos por considerar apenas as derivadas fracionárias com ordem  $\alpha \in (0, 1)$  para os resultados seguintes, pois o objetivo é reproduzir o caso análogo das aplicações realizadas na Seção 3.1.

No que segue, veremos um caso particular de integral fracionária, segundo Riemann-Liouville, e algumas de suas relações com as derivadas fracionárias definidas anteriormente.

**Definição 3.2.3.** Sejam  $\alpha > 0$  e  $f \in L^1(0, T)$ . A integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem  $\alpha$  para a função  $f$  é dada por

$$I_t^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - s)^{\alpha - 1} f(s) ds.$$

Para o caso  $\alpha = 0$ , definimos  $I_t^0 f(t) := f(t)$ .

O operador de integração  $I_t^\alpha$  é linear. Em particular, para  $\alpha = 1$  a integral fracionária de Riemann-Liouville recai na integral usual (no sentido de Lebesgue). Além disso, sabemos pelo Teorema Fundamental do Cálculo que a derivada e a integral (de ordem inteira) são operações inversas, verificando a identidade

$$\int_0^t \frac{d}{ds} f(s) ds = f(t) - f(0).$$

Um resultado semelhante segue para  $D_t^\alpha$ ,  $d_t^\alpha$  e  $I_t^\alpha$ , conforme veremos no Lema 3.6.

**Lema 3.6.** *Sejam  $\alpha \in (0, 1)$  e  $f \in C[0, T] \cap C^1(0, T]$ . Nestas condições,*

$$(i) \quad I_t^\alpha d_t^\alpha f(t) = f(t) - f(0), \quad t \in [0, T];$$

$$(ii) \quad I_t^\alpha D_t^\alpha f(t) = f(t), \quad t \in [0, T].$$

*Demonstração.* De fato,

$$\begin{aligned} I_t^\alpha d_t^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \int_0^s (t-s)^{\alpha-1} (s-\xi)^{-\alpha} \frac{d}{d\xi} f(\xi) d\xi ds \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{d}{d\xi} f(\xi) \left( \int_\xi^t (t-s)^{\alpha-1} (s-\xi)^{-\alpha} ds \right) d\xi \\ &\stackrel{(**)}{=} \int_0^t \frac{d}{d\xi} f(\xi) d\xi \\ &= f(t) - f(0), \end{aligned}$$

provando (i), onde em (\*) fizemos mudança de variável e em (\*\*) aplicamos o Lema 2.20.

Usando (i) e o Lema 3.5, obtemos a prova de (ii):

$$\begin{aligned} f(t) - f(0) &= I_t^\alpha \left( D_t^\alpha f(t) - \frac{f(0)}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha} \right) \\ &= I_t^\alpha D_t^\alpha f(t) - \frac{f(0)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} ds \\ &= I_t^\alpha D_t^\alpha f(t) - f(0). \end{aligned}$$

□

Com base no Lema 3.6 e sob as devidas hipóteses de regularidade, vemos que, se uma função  $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  é solução da equação diferencial fracionária segundo Caputo

$$d_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)),$$

então é solução da equação integral fracionária de Riemann-Liouville

$$x(t) = I_t^\alpha f(t, x(t)) + x(0).$$

A partir disso, desenvolveremos as aplicações em problemas de valor inicial fracionário, segundo a derivada de Caputo, na Seção 3.3.

### 3.3 APLICAÇÕES EM PVIF

Vimos na Seção 3.1 aplicações das Desigualdades de Gronwall Clássicas no estudo do Problema de Valor Inicial (PVI)

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)), t \in [0, T), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

com  $f : [0, T) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua satisfazendo certas limitações, o qual admite uma única solução  $x : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  para cada  $x_0 \in \mathbb{R}$  fixado.

No intuito de aplicar as Desigualdades de Gronwall Singulares, iremos considerar o seguinte Problema de Valor Inicial Fracionário (PVIF) em termos da derivada fracionária de Caputo, para  $\alpha \in (0, 1)$ :

$$\begin{cases} d_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)), t \in [0, T), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Os resultados de existência e unicidade de solução desse PVIF já se encontram formulados na literatura, podendo ser encontrados, por exemplo, em Diethelm [7], Kilbas, Srivastava e Trujillo [17], Kubica, Ryszewska e Yamamoto [19] e Podlubny [24], assim como inúmeras de suas propriedades qualitativas. A fim de elucidá-los, enunciamos o seguinte teorema:

**Teorema 3.7.** *Seja  $f(t, x)$  uma função contínua a valores reais, definida em um domínio  $G$ , satisfazendo as seguintes propriedades:*

- (i)  *$f$  é Lipschitz em  $G$  com respeito a segunda variável, isto é, existe uma constante  $L > 0$  tal que  $|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$  em  $G$ .*
- (ii)  *$f$  é limitada em  $G$ , ou seja, existe uma constante  $M > 0$  tal que  $|f(t, x)| \leq M < \infty$  para todo  $(t, x) \in G$ ;*

*Então, existe uma região  $R(h, K) \subset G$  na qual o PVIF (3.10) possui única solução contínua, onde as constantes  $h, K > 0$  satisfazem a desigualdade  $\frac{Mh}{\Gamma(1+\alpha)} \leq K$ .*

*Demonstração.* Ver Podlubny [24], Capítulo 3, Teorema 3.4<sup>14</sup>, página 127. □

Como uma explanação acerca desta teoria foge do escopo deste trabalho, assumiremos formalmente que o PVIF (3.10) possui solução, com base nas referências citadas anteriormente, considerando hipóteses adequadas de regularidade para as funções envolvidas, da mesma forma como procedemos no caso de ordem inteira na Seção 3.1.

<sup>14</sup>Tal resultado é enunciado com hipóteses mais gerais, as quais particularizamos no Teorema 3.7 para o PVIF (3.10), que é foco deste estudo.

Nesta seção, vamos apresentar resultados sobre a dependência da solução do PVIF (3.10) com respeito aos dados iniciais. As hipóteses acerca da limitação da função contínua  $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  serão sequenciadas, conforme listamos abaixo:

- (i)  $|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$ ,  $L > 0$ ;
- (ii)  $|f(t, x) - f(t, y)| \leq \phi(t)|x - y|$ ,  $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ ;
- (iii)  $|f(t, x) - f(t, y)| \leq \phi(t)|x - y|^m$ ,  $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $m > 0$ ,  $m \neq 1$ .

Com tais hipóteses, aplicaremos, respectivamente, os seguintes resultados da Seção 2.3 envolvendo Desigualdades de Gronwall Singulares, para  $\alpha \in (0, 1)$ :

- (i) Corolário 2.30 para  $b(t) := k$  constante, com hipótese  $x(t) \leq a(t) + k \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} x(s) ds$ ;
- (ii) Corolário 2.33, com hipótese  $x(t) \leq a(t) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} b(s) x(s) ds$ ;
- (iii) Corolário 2.34, com hipótese  $x(t) \leq a(t) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} b(s) x^m(s) ds$ .

Para isso, levando em consideração o que foi desenvolvido na Seção 3.2, reduziremos o PVIF (3.10) à seguinte equação integral fracionária com singularidade no ponto  $t = s$ :

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, x(s)) ds, \quad t \in [0, T]. \quad (3.11)$$

No que segue, destacaremos em cada resultado as passagens que envolveram as aplicações das Desigualdades de Gronwall Singulares.

**Teorema 3.8.** *Sejam  $x$  e  $y$  as soluções do PVIF (3.10) com dados iniciais  $x_0$  e  $y_0$ , respectivamente, com a função  $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua satisfazendo a condição de Lipschitz com respeito a segunda variável, isto é,*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|, \quad (3.12)$$

para uma constante  $L > 0$  independente de  $t$ ,  $x$  e  $y$ . Então

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| E_\alpha(Lt^\alpha), \quad t \in [0, T]. \quad (3.13)$$

*Demonstração.* Prosseguindo como em (3.11), obtemos:

$$|x(t) - y(t)| \stackrel{(3.12)}{\leq} |x_0 - y_0| + \frac{L}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |x(s) - y(s)| ds, \quad (3.14)$$

a qual consiste em uma desigualdade singular de Gronwall. Aplicando o Corolário 2.30 em (3.14) segue que

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| E_\alpha(Lt^\alpha),$$

onde  $E_\alpha$  é a função de Mittag-Leffler de um parâmetro  $\alpha$ .  $\square$

**Teorema 3.9.** *Sejam  $x$  e  $y$  as soluções do PVIF (3.10) com dados iniciais  $x_0$  e  $y_0$ , respectivamente, com a função  $f : [0, T) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua satisfazendo*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \phi(t)|x - y|, \quad (3.15)$$

onde  $\phi : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$  é uma função contínua.

(i) Se  $\alpha > \frac{1}{2}$ , então

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| \sqrt{2} e^{\left[ \frac{2^{1-2\alpha} \Gamma(2\alpha-1)}{[\Gamma(\alpha)]^2} \int_0^t \phi^2(s) ds + t \right]}, \quad t \in [0, T). \quad (3.16)$$

(ii) Se  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ , então

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| 2^{1-\frac{1}{q}} e^{\left[ \frac{2^{q-1}}{q[\Gamma(\alpha)]^q} k_\alpha^q \int_0^t \phi^q(s) ds + t \right]}, \quad t \in [0, T), \quad (3.17)$$

$$\text{onde } q := 1 + \frac{1}{\alpha}, p := 1 + \alpha \text{ e } k_\alpha := \left( \frac{\Gamma(1+(\alpha-1)p)}{p^{1+(\alpha-1)p}} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

*Demonstração.* Usando a versão integral do PVIF, como em (3.11), obtemos:

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leq |x_0 - y_0| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \\ &\stackrel{(3.15)}{\leq} |x_0 - y_0| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \phi(s) |x(s) - y(s)| ds. \end{aligned} \quad (3.18)$$

É neste momento que aplicaremos a desigualdade singular de Gronwall do Corolário 2.33 em (3.18), dividindo em casos para o parâmetro  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \alpha > \frac{1}{2} &\implies |x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| \sqrt{2} e^{\left[ \frac{2^{1-2\alpha} \Gamma(2\alpha-1)}{[\Gamma(\alpha)]^2} \int_0^t \phi^2(s) ds + t \right]}; \\ \bullet \quad 0 < \alpha \leq \frac{1}{2} &\implies |x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| 2^{1-\frac{1}{q}} e^{\left[ \frac{2^{q-1}}{q[\Gamma(\alpha)]^q} k_\alpha^q \int_0^t \phi^q(s) ds + t \right]}, \end{aligned}$$

$$\text{onde } q := 1 + \frac{1}{\alpha}, p := 1 + \alpha \text{ e } k_\alpha := \left( \frac{\Gamma(1+(\alpha-1)p)}{p^{1+(\alpha-1)p}} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad \square$$

**Observação 3.3.1.** *De modo análogo ao que foi comentado na Observação 3.1.1, os Teoremas 3.8 e 3.9 provam a unicidade de solução para o PVIF (3.10), com as devidas hipóteses de limitação para a função  $f$ , bastando considerar  $x_0 = y_0$  nas desigualdades (3.13), (3.16) e*

(3.17), das quais seguem que  $x = y$  como consequência da convergência da função de Mittag-Leffler. Deste modo, os resultados supracitados ilustram a aplicabilidade das Desigualdades de Gronwall, nas versões singulares, para provar a unicidade de solução em problemas de valor inicial fracionário desta natureza.

**Teorema 3.10.** *Sejam  $x$  e  $y$  as soluções do PVIF (3.10) com dados iniciais  $x_0$  e  $y_0$ , respectivamente, com a função  $f : [0, T) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua satisfazendo*

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \phi(t)|x - y|^m, \quad (3.19)$$

onde  $\phi : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$  é contínua e  $m \neq 1$  uma constante positiva.

(i) Se  $\alpha > \frac{1}{2}$ , então para algum intervalo  $I \subseteq [0, T)$  vale que

$$|x(t) - y(t)| \leq e^t \left\{ [\sqrt{2}|x_0 - y_0|]^{2(1-m)} + C_{\alpha, m} \int_0^t e^{2(m-1)s} \phi^2(s) ds \right\}^{\frac{1}{2(1-m)}}, \quad t \in I,$$

$$\text{onde } C_{\alpha, m} := \frac{(1-m)\Gamma(2\alpha-1)}{4^{\alpha-1}[\Gamma(\alpha)]^2}.$$

(ii) Se  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ , então para algum intervalo  $I \subseteq [0, T)$  vale que

$$|x(t) - y(t)| \leq e^t \left\{ (2^{q-1}|x_0 - y_0|^q)^{1-m} + K_{\alpha, m} \int_0^t e^{(m-1)qs} \phi^q(s) ds \right\}^{\frac{1}{q(1-m)}}, \quad t \in I,$$

$$\text{onde } q := 1 + \frac{1}{\alpha}, p := 1 + \alpha \text{ e } K_{\alpha, m} := 2^{q-1}(1-m) \left[ \frac{\Gamma(1+(\alpha-1)p)}{p^{1+(\alpha-1)p}[\Gamma(\alpha)]^q} \right]^{\frac{q}{p}}.$$

*Demonstração.* Prosseguindo como na demonstração do Teorema 3.9, obtemos:

$$|x(t) - y(t)| \stackrel{(3.19)}{\leq} |x_0 - y_0| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \phi(s) |x(s) - y(s)|^m ds. \quad (3.20)$$

Segue do Corolário 2.34, aplicado a desigualdade (3.20), que existe um intervalo  $I \subseteq [0, T)$  no qual as seguintes desigualdades são válidas:

- $\alpha > \frac{1}{2} \implies |x - y| \leq e^t \left\{ [\sqrt{2}|x_0 - y_0|]^{2(1-m)} + C_{\alpha, m} \int_0^t e^{2(m-1)s} \phi^2(s) ds \right\}^{\frac{1}{2(1-m)}};$
- $0 < \alpha < \frac{1}{2} \implies |x - y| \leq e^t \left\{ (2^{q-1}|x_0 - y_0|^q)^{1-m} + K_{\alpha, m} \int_0^t e^{(m-1)qs} \phi^q(s) ds \right\}^{\frac{1}{q(1-m)}},$

onde  $C_{\alpha, m} := \frac{(1-m)\Gamma(2\alpha-1)}{4^{\alpha-1}[\Gamma(\alpha)]^2}$ ,  $q := 1 + \frac{1}{\alpha}$ ,  $p := 1 + \alpha$  e

$$K_{\alpha, m} := 2^{q-1}(1-m) \left[ \frac{\Gamma(1+(\alpha-1)p)}{p^{1+(\alpha-1)p}[\Gamma(\alpha)]^q} \right]^{\frac{q}{p}}.$$

□

Os resultados obtidos nos Teoremas 3.8, 3.9 e 3.10 mostram um certo padrão nas limitações de  $|x(t) - y(t)|$ , à medida que generalizamos a hipótese acerca da função  $f$ , envolvendo exponenciais e funções Gama. As entradas de tais funções se tornam cada vez mais complexas conforme inserimos não-linearidades na hipótese. Mesmo com o alto nível de abstração nas teses obtidas, elas dependem apenas dos parâmetros dados ( $\alpha$  e  $m$ ) e da função  $\phi$ , conhecida à priori, o que evidencia a aplicabilidade das Desigualdades de Gronwall Singulares no estudo de problemas de valor inicial fracionários.

Ressaltamos ainda que, para analisar a diferença entre a solução e o dado inicial, ou seja, estimar  $|x(t) - x_0|$ , basta reproduzirmos resultados análogos aos anteriores, com as devidas modificações acerca da regularidade das funções envolvidas, de modo a satisfazer as hipóteses de algum dos teoremas da Seção 2.3 envolvendo Desigualdades de Gronwall Singulares.

Além disso, podemos variar a hipótese de limitação acerca da função  $f$  de modo a recair em casos mais gerais de aplicação, como o que aparece na Desigualdade de Gronwall Singular do Teorema 2.35:

$$x(t) \leq a(t) + b(t) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s) x(s) ds, \quad \alpha > 0.$$

Como o foco desta seção é mostrar algumas aplicações das Desigualdades de Gronwall Singulares, reproduzindo o equivalente às aplicações clássicas da Seção 3.1, optamos por nos ater apenas a esses resultados, levando em consideração que as ideias embasadoras para as possíveis generalizações foram exploradas neles.

### 3.4 CORRESPONDÊNCIA ENTRE OS RESULTADOS

Elencamos nos quadros a seguir as três aplicações realizadas para cada uma das limitações consideradas para a função contínua  $f : [0, T) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , com as respectivas Desigualdades de Gronwall, clássicas e singulares, que foram utilizadas. Deste modo, será possível analisar a correspondência entre os resultados obtidos para o problema de valor inicial de ordem inteira com o de ordem fracionária.

|  |  |
|--|--|
| <b>PVI</b>   | <b>PVIF</b>  |
| $\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t)), \\ x(0) = x_0. \end{array} \right.$ | $\left\{ \begin{array}{l} d_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \quad \alpha \in (0, 1), \\ x(0) = x_0. \end{array} \right.$ |

**Aplicação 1.** Hipótese de limitação:  $|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$ ,  $L > 0$ .

| Gronwall Utilizado     | Hipótese   | Tese   |
|------------------------|--|--|
| <b>Teo. 2.1 (GC1)</b>  | $x(t) \leq a(t) + k \int_0^t x(s) ds$                    | $ x - y  \leq  x_0 - y_0  e^{Lt}$              |
| <b>Cor. 2.30 (GS4)</b> | $x(t) \leq a(t) + k \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} x(s) ds$ | $ x - y  \leq  x_0 - y_0  E_\alpha(Lt^\alpha)$ |

Esta aplicação evidencia o papel da função de Mittag-Leffler no cálculo da estimativa da solução de equações diferenciais fracionárias, assim como a função exponencial se relaciona com a solução de equações diferenciais ordinárias, lembrando ainda que a função de Mittag-Leffler generaliza a exponencial.

**Aplicação 2.** Hipótese de limitação:  $|f(t, x) - f(t, y)| \leq \phi(t)|x - y|$ ,  $\phi : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

| Gronwall Utilizado     | Hipótese   | Tese  |
|------------------------|--|---|
| <b>Teo. 2.1 (GC1)</b>  | $x(t) \leq a(t) + \int_0^t b(s)x(s) ds$                    | $ x - y  \leq  x_0 - y_0  \left( 1 + \int_0^t \phi(s) e^{\int_s^t \phi(u) du} ds \right)$   |
| <b>Cor. 2.33 (GS7)</b> | $x(t) \leq a(t) + \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} b(s)x(s) ds$ | $ x - y  \leq  x_0 - y_0  \sqrt{2} e^{\left[ C_\alpha \int_0^t \phi^2(s) ds + t \right]}$<br>$ x - y  \leq  x_0 - y_0  2^{1-\frac{1}{q}} e^{\left[ C_{q,\alpha} \int_0^t \phi^q(s) ds + t \right]}$ |

As constantes envolvidas nesses resultados são dadas por:

- $p = 1 + \alpha$ ,
- $q = 1 + \alpha^{-1}$ ,
- $C_\alpha = \frac{2^{1-2\alpha} \Gamma(2\alpha - 1)}{[\Gamma(\alpha)]^2}$ ,
- $C_{q,\alpha} = \frac{2^{q-1}}{q[\Gamma(\alpha)]^q} \left( \frac{\Gamma(1 + (\alpha - 1)p)}{p^{1+(\alpha-1)p}} \right)^{\frac{q}{p}}$ ,

onde a primeira parte da tese da aplicação singular é para  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$  e a segunda para  $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$ .

Assim como na Aplicação 1, o padrão nas limitações de  $|x(t) - y(t)|$  nesta aplicação se mantém para o caso clássico e singular. No entanto, na versão singular enfatizamos

a dependência da limitação em termos dos expoentes conjugados ( $p$  e  $q$ ), os quais são dados em função do parâmetro  $\alpha$ . Além disso, o resultado clássico se mostra mais simplificado, levando em consideração que no singular temos a análise de dois intervalos, sendo  $\alpha = \frac{1}{2}$  o ponto crítico das estimativas fracionárias.

**Aplicação 3.** Hipótese de limitação:  $|f(t, x) - f(t, y)| \leq \phi(t)|x - y|^m$ ,  $m > 0$ ,  $m \neq 1$ .

| Gronwall Utilizado     | Hipótese  | Tese   |
|------------------------|---|--|
| <b>Cor. 2.6 (GC6)</b>  | $x(t) \leq a(t) + k \int_0^t b(s)x^m(s)ds$                | $ x - y  \leq \left\{  x_0 - y_0 ^{1-m} + (1-m) \int_0^t \phi(s)ds \right\}^{\frac{1}{1-m}}$   |
| <b>Cor. 2.34 (GS8)</b> | $x(t) \leq a(t) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} b(s)x^m(s)ds$ | $ x - y  \leq e^t \left\{ C_0 + C_{\alpha,m} \int_0^t e^{(m-1)2s} \phi^2(s)ds \right\}^{\frac{1}{2(1-m)}}$<br>$ x - y  \leq e^t \left\{ K_0 + K_{\alpha,m} \int_0^t e^{(m-1)qs} \phi^q(s)ds \right\}^{\frac{1}{q(1-m)}}$ |

As constantes envolvidas nesses resultados são dadas por:

- $p = 1 + \alpha$ ,
- $q = 1 + \alpha^{-1}$ ,
- $C_0 = [\sqrt{2}|x_0 - y_0|]^{2(1-m)}$ ,
- $K_0 = (2^{q-1}|x_0 - y_0|^q)^{1-m}$ ,
- $C_{\alpha,m} = \frac{(1-m)\Gamma(2\alpha-1)}{4^{\alpha-1}[\Gamma(\alpha)]^2}$ ,
- $K_{\alpha,m} = 2^{q-1}(1-m) \left[ \frac{\Gamma(1+(\alpha-1)p)}{p^{1+(\alpha-1)p}[\Gamma(\alpha)]^q} \right]^{\frac{q}{p}}$ ,

lembrando que a primeira parte da tese da aplicação singular é para  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$  e a segunda para  $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$ .

Conforme podemos analisar no quadro anterior, o acréscimo da singularidade no caso das desigualdades não lineares proporcionam resultados extremamente mais abstratos. Apesar disso, as estimativas se amoldam seguindo um padrão semelhante nas aplicações clássicas e singulares.

Com base nas correspondências realizadas nesta seção e levando em consideração as observações frequentes no decorrer da Seção 2.3, findamos ressaltando que as Desigualdades de Gronwall, nas versões clássicas e singulares, estão intimamente relacionadas, e que essas relações se mantêm nas aplicações quando consideramos equações diferenciais de ordem inteira ou fracionária, sendo a Desigualdade de Gronwall Singular uma extensão, de certa forma, da Desigualdade de Gronwall Clássica.

### 3.5 DESIGUALDADES DIFERENCIAIS DE GRONWALL

Nesta seção apresentaremos versões diferenciais do tipo Gronwall, tendo como foco resultados cujas demonstrações não prosseguem imediatamente das desigualdades integrais do Capítulo 2 ou seguem ideias análogas as aplicações das Seções 3.1 e 3.3, para as quais recaímos nas equações integrais equivalentes aos PVIs (3.3) e (3.10).

Conforme vimos nas referidas seções de aplicações, as Desigualdades de Gronwall viabilizam a prova da unicidade de soluções. Além disso, veremos nos próximos teoremas que tais desigualdades também desempenham um papel muito importante na investigação das propriedades assintóticas de equações diferenciais.

O teorema a seguir pode ser encontrado em Pata [23] e consiste na desigualdade clássica de Gronwall na forma diferencial. Suas hipóteses só estão bem postas devido ao Teorema 1.8, pois uma função absolutamente contínua é diferenciável quase sempre.

**Teorema 3.11.** *Seja  $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  uma função absolutamente contínua satisfazendo quase em toda parte a desigualdade diferencial*

$$x'(t) + \varepsilon x(t) \leq c, \quad (3.21)$$

para constantes  $\varepsilon > 0$  e  $c \geq 0$ . Então

$$x(t) \leq x(0)e^{-\varepsilon t} + \frac{c}{\varepsilon}, \quad t \geq 0. \quad (3.22)$$

*Demonstração.* Com efeito, multiplicando (3.21) pelo fator integrante  $e^{\varepsilon t} > 0$ , obtemos que

$$\frac{d}{dt} \left( x(t)e^{\varepsilon t} \right) \leq ce^{\varepsilon t}. \quad (3.23)$$

Integrando (3.23) em  $[0, t]$  segue que

$$x(t)e^{\varepsilon t} - x(0)e^0 \leq \int_0^t ce^{\varepsilon u} du,$$

provando que

$$x(t) \leq x(0)e^{-\varepsilon t} + \frac{c}{\varepsilon}.$$

□

A partir da tese em (3.22) podemos estudar o comportamento da função solução ao longo do tempo, obtendo, para  $t \rightarrow \infty$ , uma limitação da forma  $x(t) \leq \frac{c}{\varepsilon}$ , a qual depende das constantes advindas dos dados iniciais  $\varepsilon$  e  $c$ .

Os próximos resultados foram motivados por Rivera (ver [26], Lemas 1.5.1 e 1.5.2, respectivamente), sendo versões mais gerais do que o Gronwall Diferencial em (3.21).

**Teorema 3.12.** *Seja  $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  uma função absolutamente contínua satisfazendo quase em toda parte a desigualdade diferencial*

$$x'(t) + k_0x(t) \leq k_1e^{-\gamma t}, \quad (3.24)$$

onde  $k_0, k_1, \gamma \in \mathbb{R}_+^*$ . Então, existem constantes  $k_2, \gamma_0 \in \mathbb{R}_+^*$  dependentes dos dados iniciais, tais que

$$x(t) \leq k_2e^{-\gamma_0 t}, \quad t \geq 0. \quad (3.25)$$

*Demonstração.* Seja  $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  a função definida por

$$y(t) := x(t) + \frac{2k_1}{\gamma}e^{-\gamma t}.$$

Derivando a função obtemos que vale quase sempre a desigualdade

$$y'(t) = x'(t) - 2k_1e^{-\gamma t} \stackrel{(3.24)}{\leq} -k_0x(t) - k_1e^{-\gamma t}. \quad (3.26)$$

Seja  $\gamma_0 := \min \left\{ k_0, \frac{\gamma}{2} \right\} > 0$ . Nestas condições,  $-k_0 \leq -\gamma_0$  e  $-1 \leq -\frac{2}{\gamma}\gamma_0$ . Dessas limitações e de (3.26) segue que

$$y'(t) \leq -\gamma_0x(t) - \frac{2k_1}{\gamma}\gamma_0e^{-\gamma t} = -\gamma_0y(t). \quad (3.27)$$

Multiplicando (3.27) pelo fator integrante  $e^{\gamma_0 t} > 0$  e integrando em  $[0, t]$ , obtemos:

$$y(t) \leq y(0)e^{-\gamma_0 t}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} x(t) &\leq -\frac{2k_1}{\gamma}e^{-\gamma t} + \left[ x(0) + \frac{2k_1}{\gamma} \right] e^{-\gamma_0 t} \\ &\leq \left[ x(0) + \frac{2k_1}{\gamma} \right] e^{-\gamma_0 t}, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Definindo  $k_2 := x(0) + \frac{2k_1}{\gamma} > 0$  em (3.28) concluímos a prova de (3.25).  $\square$

**Teorema 3.13.** *Seja  $x : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  uma função absolutamente contínua satisfazendo quase em toda parte a desigualdade diferencial*

$$x'(t) + k_0[x(t)]^{1+\frac{1}{p}} \leq \frac{k_1}{(1+t)^{p+1}}, \quad (3.29)$$

onde  $k_0, k_1 \in \mathbb{R}_+^*$  e  $p \in [1, \infty)$ . Então, existe uma constante  $k_2 \in \mathbb{R}_+^*$  dependente dos dados

iniciais, tal que

$$x(t) \leq k_2 \frac{px(0) + 2k_1}{(1+t)^p}, \quad t \geq 0. \quad (3.30)$$

*Demonstração.* Consideremos as funções  $y, z : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  definidas, respectivamente, por

$$y(t) := \frac{2k_1}{p(1+t)^p}, \quad z(t) := x(t) + y(t).$$

Nestas condições,

$$[y(t)]^{1+\frac{1}{p}} = \left(\frac{2}{p}\right)^{1+\frac{1}{p}} \frac{k_1^{1+\frac{1}{p}}}{(1+t)^{p+1}},$$

ou equivalentemente,

$$\left(\frac{p}{2}\right)^{1+\frac{1}{p}} [y(t)]^{1+\frac{1}{p}} = \frac{k_1^{1+\frac{1}{p}}}{(1+t)^{p+1}}. \quad (3.31)$$

Sendo assim, para quase todo  $t \geq 0$  vale que

$$\begin{aligned} z'(t) &= x'(t) - \frac{2k_1}{(1+t)^{p+1}} \stackrel{(3.29)}{\leq} -k_0 \left\{ [x(t)]^{1+\frac{1}{p}} + \frac{k_1}{k_0(1+t)^{p+1}} \right\} \\ &= -k_0 \left\{ [x(t)]^{1+\frac{1}{p}} + \frac{k_1 k_1^{\frac{1}{p}}}{k_0 k_1^{\frac{1}{p}} (1+t)^{p+1}} \right\} \\ &\stackrel{(3.31)}{=} -k_0 \left\{ [x(t)]^{1+\frac{1}{p}} + \frac{1}{k_0 k_1^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{p}{2}\right)^{1+\frac{1}{p}} [y(t)]^{1+\frac{1}{p}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Considerando  $a_0 := \min \left\{ 1, \frac{1}{k_0 k_1^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{p}{2}\right)^{1+\frac{1}{p}} \right\} > 0$  e retornando em (3.32), obtemos:

$$z'(t) \leq -k_0 a_0 \left\{ [x(t)]^{1+\frac{1}{p}} + [y(t)]^{1+\frac{1}{p}} \right\}. \quad (3.33)$$

Da desigualdade dada por

$$|a+b|^p \leq 2^p(|a|^p + |b|^p), \quad a, b \geq 0, \quad p \geq 1,$$

deduzimos a seguinte limitação:

$$[z(t)]^{1+\frac{1}{p}} = [x(t) + y(t)]^{1+\frac{1}{p}} \leq a_1 \left\{ [x(t)]^{1+\frac{1}{p}} + [y(t)]^{1+\frac{1}{p}} \right\}, \quad a_1 := 2^{1+\frac{1}{p}}. \quad (3.34)$$

De (3.33) e (3.34) segue que

$$\frac{z'(t)}{[z(t)]^{1+\frac{1}{p}}} \leq \frac{-k_0 a_0}{a_1},$$

implicando em

$$\frac{d}{dt} \left( -p[z(t)]^{-\frac{1}{p}} \right) \leq \frac{-k_0 a_0}{a_1}. \quad (3.35)$$

Integrando (3.35) em  $[0, t]$  segue que

$$-p[z(t)]^{-\frac{1}{p}} + p[z(0)]^{-\frac{1}{p}} \leq \frac{-k_0 a_0 t}{a_1},$$

provando a seguinte limitação para a função  $z$ :

$$z(t) \leq \frac{p^p z(0)}{\left\{ \frac{k_0 a_0}{a_1} t [z(0)]^{\frac{1}{p}} + p \right\}^p}. \quad (3.36)$$

Definindo  $a_2 := \min \left\{ p, \frac{k_0 a_0}{a_1} [z(0)]^{\frac{1}{p}} \right\} > 0$  deduzimos que

$$\frac{k_0 a_0}{a_1} t [z(0)]^{\frac{1}{p}} + p \geq a_2 t + a_2 = a_2(1 + t),$$

ou equivalentemente,

$$\frac{1}{\frac{k_0 a_0}{a_1} t [z(0)]^{\frac{1}{p}} + p} \leq \frac{1}{a_2(1 + t)}. \quad (3.37)$$

De (3.36) e (3.37) temos

$$\begin{aligned} z(t) &\leq \frac{p^p z(0)}{[a_2(1 + t)]^p} \\ &= \frac{p^p [x(0) + \frac{2k_1}{p}]}{a_2^p (1 + t)^p} \\ &= \frac{p^{p-1} [px(0) + 2k_1]}{a_2^p (1 + t)^p}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Considerando  $k_2 := \frac{p^{p-1}}{a_2^p} > 0$  e retornando em (3.38) concluímos que

$$x(t) \leq \frac{k_2 [px(0) + 2k_1]}{(1 + t)^p} - y(t), \quad t \geq 0, \quad (3.39)$$

o que prova (3.30). □

**Observação 3.5.1.** *Vejam, no quadro a seguir, as hipóteses e teses advindas dos Teoremas 3.12 e 3.13.*

| Teorema          | Hipótese  | Tese   |
|------------------|---|--|
| <b>Teo. 3.12</b> | $x'(t) + k_0x(t) \leq k_1e^{-\gamma t}$ q.s.                          | $0 \leq x(t) \leq k_2e^{-\gamma_0 t}$ , $t \geq 0$             |
| <b>Teo. 3.13</b> | $x'(t) + k_0[x(t)]^{1+\frac{1}{p}} \leq \frac{k_1}{(1+t)^{p+1}}$ q.s. | $0 \leq x(t) \leq k_2 \frac{px(0)+2k_1}{(1+t)^p}$ , $t \geq 0$ |

Nas estimativas obtidas nestes resultados, notamos que em ambos o limite da função  $x$  é igual a zero quando  $t \rightarrow \infty$ . Com efeito, segue da tese do Teorema 3.12 que

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} (k_2 e^{-\gamma_0 t}) = 0.$$

Analogamente, da limitação advinda do Teorema 3.13 concluímos que

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \left( k_2 \frac{px(0) + 2k_1}{(1+t)^p} \right) = 0.$$

No entanto, observamos que o decaimento é do tipo exponencial no Teorema 3.12, o qual vai para zero muito mais rapidamente do que o decaimento que consta no Teorema 3.13, que é de natureza polinomial.

O próximo resultado foi motivado por Showalter (ver Lema 4.1 de [28]), tendo hipóteses mais gerais ao considerar coeficientes não necessariamente constantes na desigualdade diferencial.

**Teorema 3.14.** *Sejam  $a, b \in L^1(0, T)$  funções não negativas e  $x : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}_+$  uma função absolutamente contínua satisfazendo quase em toda parte a desigualdade*

$$(1 - k)x'(t) \leq a(t)x(t) + b(t)[x(t)]^k, \quad (3.40)$$

onde  $0 \leq k < 1$ . Então

$$[x(t)]^{1-k} \leq [x(0)]^{1-k} e^{\int_0^t a(s) ds} + \int_0^t e^{\int_s^t a(u) du} b(s) ds, \quad t \in [0, T). \quad (3.41)$$

*Demonstração.* Substituindo a função não negativa  $x(t)$  por  $x(t) + \varepsilon$  para algum  $\varepsilon > 0$ , de modo que (3.40) continue valendo, e dividindo a mesma desigualdade por  $[x(t) + \varepsilon]^k > 0$ , obtemos que

$$\frac{(1 - k)x'(t)}{[x(t) + \varepsilon]^k} \leq \frac{a(t)[x(t) + \varepsilon]}{[x(t) + \varepsilon]^k} + \frac{b(t)[x(t) + \varepsilon]^k}{[x(t) + \varepsilon]^k},$$

ou equivalentemente,

$$(1 - k)x'(t)[x(t) + \varepsilon]^{-k} \leq a(t)[x(t) + \varepsilon]^{1-k} + b(t). \quad (3.42)$$

Seja  $y : [0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por

$$y(t) := e^{-\int_0^t a(s)ds} [x(t) + \varepsilon]^{1-k}.$$

Nestas condições,

$$\begin{aligned} y'(t) &= -a(t)e^{-\int_0^t a(s)ds} [x(t) + \varepsilon]^{1-k} + (1 - k)e^{-\int_0^t a(s)ds} [x(t) + \varepsilon]^{-k} x'(t) \\ &\stackrel{(3.42)}{\leq} b(t)e^{-\int_0^t a(s)ds}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Integrando (3.43) em  $[0, t]$  segue que

$$y(t) - y(0) \leq \int_0^t e^{-\int_0^s a(u)du} b(s) ds,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} [x(t) + \varepsilon]^{1-k} &\leq [x(0) + \varepsilon]^{1-k} e^{\int_0^t a(s)ds} + e^{\int_0^t a(s)ds} \int_0^t e^{-\int_0^s a(u)du} b(s) ds \\ &= [x(0) + \varepsilon]^{1-k} e^{\int_0^t a(s)ds} + \int_0^t e^{\int_s^t a(u)du} b(s) ds, \quad \forall \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Fazendo  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  em (3.44) concluímos a prova de (3.41).  $\square$

**Observação 3.5.2.** A desigualdade em (3.41) estabelece um limite superior para a função  $x$  em termos de integrais envolvendo as funções  $a$  e  $b$ . Deste modo, a análise assintótica a partir desta desigualdade não se torna tão evidente quanto nos teoremas anteriores, sendo necessário explicitar as funções  $a$  e  $b$  para as devidas considerações.

Os resultados precedentes correspondem a apenas quatro formas das Desigualdades Diferenciais de Gronwall que são estudadas atualmente. Existem outras variantes e generalizações dessas desigualdades, dependendo do contexto e das condições específicas a serem considerados nas equações diferenciais.

Entretanto, como o objetivo desta seção é apresentar resultados para ilustrar a aplicação das Desigualdades de Gronwall, no estudo do comportamento da solução de equações diferenciais ao longo do tempo, consideramos suficiente os resultados acima abordados. Versões mais abstratas, bem como suas aplicações em equações diferenciais parciais, podem ser exploradas, por exemplo, nos trabalhos de Gatti, Pata e Zelik [11] e de Yang e Wang [30].

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Desigualdade de Gronwall Clássica (DGC) é uma desigualdade amplamente utilizada em análise e teoria das equações diferenciais, estabelecendo determinada relação entre uma função (em geral) não negativa e sua integral (ou derivada) em um intervalo. Conforme abordamos na Seção 3.1, a DGC é extremamente útil para provar a existência e unicidade de soluções para equações diferenciais.

Além disso, sabe-se que a DGC é também uma ferramenta poderosa na análise assintótica de problemas de estabilidade e controle de sistemas dinâmicos, principalmente àqueles provenientes de equações diferenciais cuja modelagem se aplica em diversas áreas da ciência, como estatística, engenharia, física e biologia, o que exalta sua importância no ramo de análise e matemática aplicada.

A Desigualdade de Gronwall Singular (DGS) é uma variação da DGC, sendo utilizada em problemas envolvendo funções que podem se tornar infinitas ou indefinidas em um ponto específico, o que denominamos por "singularidade", e igualmente estabelecendo relações entre uma função e sua integral (ou derivada) com possíveis singularidades adicionais de uma (ou mais) função não negativa em um intervalo.

A DGS também é útil para provar a existência e unicidade de soluções para equações diferenciais, mas agora estendendo-se à problemas com derivadas tempo-fracionárias, ou seja, possíveis singularidades nos termos das equações. Deste modo, assim como a DGC, a DGS constitui-se de uma ferramenta prestigiada na análise e na teoria das equações diferenciais, sendo amplamente utilizada em várias áreas da matemática e de outras ciências, como em problemas de controle e estabilidade de equações diferenciais tempo-fracionárias, como vimos na Seção 3.3.

Em síntese, ambas Desigualdades de Gronwall (clássica e singular) são instrumentos importantes na construção teórica e análise qualitativa de equações diferenciais, sendo a utilização das mesmas uma via para concluir resultados úteis em uma variedade de problemas em matemática e outros campos das ciências. Inclusive, conforme ressaltamos no decorrer do Capítulo 2, as duas versões possuem intrínsecas relações, levando em consideração que muitos dos resultados singulares recaíram na aplicação dos teoremas do caso clássico.

Por meio da pesquisa estabelecida, foi possível observar que núcleos generalizados ou singulares compõem uma classe extremamente complicada de se abordar, principalmente à medida que o número de singularidades aumenta. Mesmo com essa dificuldade, conseguimos estabelecer os resultados análogos para as versões clássicas e singulares, comparando a natureza das limitações obtidas em cada um deles, além de aplicá-los na estimativa das soluções de problemas de valor inicial de ordem inteira e fracionária, cumprindo os objetivos propostos no início do estudo.

Além dos resultados aqui desenvolvidos, existem muitas outras generalizações e aplicações envolvendo essas desigualdades, que só o tempo e a atuação na área viabilizará a identificação das respectivas possibilidades. Nestas circunstâncias, deixamos aqui registrado o propósito subsequente de investigar resultados singulares expressos por sistemas mais gerais do que o apresentado no Teorema 2.36, ponderando que trabalhos desta natureza não constam na literatura, até onde sabemos.

Mediante aos resultados obtidos neste trabalho, podemos concluir que as Desigualdades de Gronwall, nas versões clássicas e singulares, são artifícios extremamente pertinentes quando a solução analítica de dada equação diferencial/integral não é conhecida ou possível de se determinar através dos algoritmos já conhecidos, sendo este o fator mais significativo que expressa a importância desta pesquisa, a qual pode ser direcionada para estudos futuros envolvendo o cálculo integro-diferencial fracionário em espaços cada vez mais abstratos, como na teoria de Equações Diferenciais Parciais.

## REFERÊNCIAS

- [1] ARGAWAL, R. P. *Sur une question se rattachant à l'équation de M. P. Humbert*. C. R. des Séances S. M. F. 1932, 23-25.
- [2] BELLMAN, R. *Stability Theory of Differential Equations*. McGraw Hill, Nova York, 1953.
- [3] BIHARI, I. *A generalization of a lemma of Bellman and its application to uniqueness problems of differential equations*. Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica, 1956, 81-94.
- [4] BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science and Business Media, 2010.
- [5] CAPELAS DE OLIVEIRA, E. *Funções Especiais com Aplicações*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2005.
- [6] CAVALHEIRO, A. C. *Tópicos de Análise Real*. Editora Ciência Moderna Ltda., Rio de Janeiro, 2018.
- [7] DIETHELM, K. *The Analysis of Fractional Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [8] DRAGOMIR, S. S. *Some Gronwall Type Inequalities and Applications*. School of Communications and Informatics Victoria University of Technology, Australia, 2002.
- [9] FIGUEIREDO CAMARGO, R.; CAPELAS DE OLIVEIRA, E. *Cálculo Fracionário*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2015.
- [10] FOLLAND, G. B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Second edition, Pure and Applied Mathematics, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.
- [11] GATTI, S.; PATA, V.; ZELIK, S. *A Gronwall-type lemma with parameter and dissipative estimates for PDEs*. Nonlinear Anal. 70 (2009), 2337–2343.
- [12] GODEFROY, M. *La Fonction Gamma: Théorie, Histoire, Bibliographie*. Gauthier Villars, Paris, 1901.
- [13] GORENFLO, R. et al. *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications*. Springer-Verlag, 2014.
- [14] GRONWALL, T. H. *Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations*. Annals of Mathematics 20 (1919), 292-296.

- [15] HENRY, D. *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1981.
- [16] ISNARD, C. *Introdução à medida e integração*. Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2013.
- [17] KILBAS, A. A.; SRIVASTAVA, H. M.; TRUJILLO, J. J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [18] KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. Wiley Classics Library, 1978.
- [19] KUBICA, A.; RYSZEWSKA, K.; YAMAMOTO, M. *Time-fractional differential equations - a theoretical introduction*. Springer Briefs in Mathematics, Singapore, 2020.
- [20] LIMA, E. L. *Curso de Análise*, vol. 1. 14 ed. IMPA, Rio de Janeiro, 2017.
- [21] MEDVED, M. *A new approach to an analysis of Henry type integral inequalities and their Bihari type versions*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 214 (1997), 349-366.
- [22] MITTAG-LEFFLER, M. G. *Sur la Nouvelle Function  $E_\alpha(x)$* . Comptes Rendus Academie des Sciences Paris 137 (1903), 554-558.
- [23] PATA, V. *Uniform estimates of Gronwall type*. Uniform estimates of Gronwall type 373 (2011), 264-270.
- [24] PODLUBNY, I. *Fractional Differential Equations*. Mathematics in Science and Engineering. Academic, San Diego, 1999.
- [25] QIN, Y. *Integral and Discrete Inequalities and Their Applications*. Volume I: Linear Inequalities. Springer International Publishing Switzerland, 2016.
- [26] RIVERA, J. E. M. *Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais*. Laboratório Nacional de Computação Científica, Petrópolis, Rio de Janeiro, 2004. 242p.
- [27] SAVOSTIANOV, A. *Strichartz estimates and smooth attractors for a sub-quintic wave equation with fractional damping in bounded domains*. Advances in Differential Equations 20 (2015), 495-530.
- [28] SHOWALTER, R. E. *Monotone Operator in Banach Space and Nonlinear Equations*. American Mathematical Society, Philadelphia, 1996.

- [29] TORELLI, P. G. P. *Uma introdução ao cálculo fracionário e sua aplicação ao problema das equações de onda-difusão tempo fracionárias*. 2021. 118 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise, 2021.
- [30] YANG, Z.; WANG, Y. *Global attractor for the Kirchhoff type equation with a strong dissipation*. J. Differential Equations 249 (2010), 3258–3278.
- [31] YE, H.; GAO, J.; DING, Y. *A generalized Gronwall inequality and its application to a fractional differential equation*. Journal of Mathematical Analysis and Applications 328 (2007), 1075–1081.