Universidade
Estadual de Londrina

ELIZANGELA MENDES PEREIRA

UMA PROPRIEDADE DAS FUNÇÕES E DISTRIBUIÇÕES ANULADAS POR UMA ESTRUTURA LOCALMENTE INTEGRÁVEL

Londrina
2018

ELIZANGELA MENDES PEREIRA

UMA PROPRIEDADE DAS FUNÇÕES E DISTRIBUIÇÕES ANULADAS POR UMA ESTRUTURA LOCALMENTE INTEGRÁVEL

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Antonio Liboni Filho.

Londrina
2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Pereira, Elizangela Mendes.

Uma propriedade das funções e distribuições anuladas por uma estrutura localmente integrável / Elizangela Mendes Pereira. - Londrina, 2018.
134 f.

Orientador: Paulo Antonio Liboni Filho.

Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2018.

Inclui bibliografia.

1. Variedades diferenciáveis - Tese. 2. Equações diferenciais parciais - Tese. 3. Estruturas localmente integráveis - Tese. 4. Teorema de Aproximação de Baouendi-Treves - Tese. I. Liboni Filho, Paulo Antonio . II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

ELIZANGELA MENDES PEREIRA

UMA PROPRIEDADE DAS FUNÇÕES E DISTRIBUIÇÕES ANULADAS POR UMA ESTRUTURA LOCALMENTE INTEGRÁVEL

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA

Orientador: Prof. Dr. Paulo Antonio Liboni Filho
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. Jamil Gomes de Abreu Júnior
Universidade Federal do Espírito Santo - Ufes

Prof. Dr. José Henrique Rodrigues
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 23 de fevereiro de 2018.

Dedico este trabalho a minha família.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus, minha grandiosa fortaleza, pela vida maravilhosa que me deste.

À minha mãe, um exemplo de mulher guerreira, pelo incentivo, por sempre acreditar em mim, pelo seu apoio e por seus ensinamentos, pois graças a eles eu pude chegar onde cheguei e tenho certeza que irei ainda mais longe.

À minha família e amigos por fazerem parte de minha vida, por sempre estarem ao meu lado nos momentos de dificuldade e nos momentos de alegria.

Ao professor Paulo Antonio Liboni Filho pela paciência e incentivo durante a realização deste trabalho.

À todos os professores do PGMAC que contribuíram para minha formação.

Aos professores da graduação, em especial ao professor Sandro Marcos Guzzo e ao professor André Vicente que me incentivaram a dar os primeiros passos no estudo científico.

Aos meus colegas de Mestrado, em especial a Suellen e a Thais, com as quais compartilhei momentos de desespero e de alegria. Juntas vencemos dias intensos de estudos.

Ao professor Luiz Baldissera que hoje não está entre nós, mas lá no ensino médio me motivou a estudar matemática com seu entusiasmo e simplicidade.

Às bancas, tanto de qualificação quanto de defesa, pela leitura deste texto.

Finalmente, agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

"Só em Deus repousa minha alma, só Dele me vem a salvação. Só Ele é meu rochedo, minha salvação, minha fortaleza: jamais vacilarei."(Sl 61, 2-3)

PEREIRA, Elizangela Mendes. **Uma propriedade das funções e distribuições anuladas por uma estrutura localmente integrável.** 2018. 134 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é o estudo do Teorema de Aproximação, provado em 1981 por Baouendi e Treves, que é uma das principais ferramentas disponíveis na teoria das estruturas localmente integráveis. Tal resultado afirma que funções e distribuições que são anuladas por uma estrutura localmente integrável $\mathcal{L}$, ou seja, funções e distribuições que satisfazem a equação $\mathcal{L}u = 0$, podem ser localmente aproximadas por polinômios nas variáveis $Z = (Z_1,\ldots,Z_m)$ que formam um conjunto completo de integrais primeiras.

Palavras-chave: Teorema de Aproximação de Baouendi-Treves. Estruturas localmente integráveis. Equações diferenciais parciais. Variedades diferenciáveis.

PEREIRA, Elizangela Mendes. **A property of the functions and distributions annihilated by a locally integrable structures.** 2018. 134 p. Dissertation (Master's Degree in Applied and Computational Mathematics) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

ABSTRACT

The goal of this work is to study the Approximation Theorem, proven in 1981 by Baouendi and Treves, which is one of the main tools available in the theory of locally integrable structures. The result states that functions and distributions annihilated by a locally integrable structures $\mathcal{L}$, i.e., functions and distributions satisfying the equation $\mathcal{L}u = 0$, may be locally approximated by polynomials in the variables $Z = (Z_1, \ldots, Z_m)$ which forms a complete set of first integrals.

Keywords: Baouendi-Treves Approximation Theorem . Locally integrable structures. Partial differential equations. Differentiable manifolds.

SUMÁRIO

Introdução **12**

1 TÓPICOS DA TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES **15**

1.1 ESPAÇO DE FUNÇÕES TESTES 15

1.1.1 **Conceitos e Notações Preliminares** 15

1.1.2 **Convergência em $C_0^\infty(\Omega)$ e alguns Resultados em $L^p(\Omega)$** 16

1.2 DISTRIBUIÇÕES SOBRE $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 19

1.2.1 **Definições e Exemplos Básicos** 19

1.2.2 **Derivada de Distribuições** 22

1.2.3 **Suporte de Distribuições** 24

1.3 ESPAÇOS DE SOBOLEV 26

2 TÓPICOS DA TEORIA DAS ESTRUTURAS LOCALMENTE INTEGRÁVEIS **28**

2.1 CAMPOS VETORIAIS COMPLEXOS 28

2.1.1 **A Estrutura Algébrica de $\mathscr{X}(\Omega)$** 32

2.1.2 **Representação de um Campo Vetorial em Coordenadas Locais** . . . 35

2.2 ESTRUTURAS FORMALMENTE INTEGRÁVEIS 38

2.3 FORMAS DIFERENCIAIS 44

2.3.1 **Fibrados e Subfibrados Cotangente** 50

2.4 O TEOREMA DE FROBENIUS 57

2.5 ESTRUTURAS ANALÍTICAS 74

2.6 O CONJUNTO CARACTERÍSTICO 76

2.7 ALGUMAS ESTRUTURAS ESPECIAIS 78

3 ESTRUTURAS LOCALMENTE INTEGRÁVEIS **86**

3.1 INTEGRABILIDADE LOCAL 86

3.2 GERADORES LOCAIS 89

4 A FÓRMULA DE APROXIMAÇÃO DE BAOUENDI-TREVES **100**

4.1 O TEOREMA DE APROXIMAÇÃO 100

4.2 DEMONSTRAÇÃO: VERSÃO CLÁSSICA 103

4.2.1 **A Aproximação de $E_\tau u(x,t)$ por Polinômios em $Z(x,t)$** 107

4.2.2 **Uma Aproximação da Identidade e a Convergência em $\mathcal{D}'$** 109

4.2.3 **A Estimativa do Resto e a Convergência em $\mathcal{D}'$** 116

4.2.4 **As Fórmulas de Comutação e a Convergência na Topologia de C^k, $1 \leq k \leq \infty$** 119

4.3 **O Teorema de Aproximação em Outros Espaços Funcionais** . . 128
4.4 **Propagação de Zeros de Soluções Homogêneas** 129

REFERÊNCIAS **133**

INTRODUÇÃO

Alguns resultados clássicos de um curso de funções de uma variável complexa como *"Toda função holomorfa num aberto de $\mathbb{C}$ é analítica neste aberto"*, podem ser generalizados a mais variáveis e em variedades. Assim, o objetivo deste trabalho é estudar o Teorema de Aproximação de Baouendi-Treves, o qual generaliza tais resultados.

Como o resultado principal envolve convergência nos espaços de distribuições, apresentamos no Capítulo 1 alguns elementos introdutórios da teoria das distribuições, tais como: espaço de funções testes, distribuições sobre um subjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e espaços de Sobolev.

No Capítulo 2 são estudados elementos da teoria das estruturas localmente integráveis, tais como: campos vetoriais complexos, vetores tangente complexos, formas diferencias de grau 1, fibrados tangente e cotangente complexificados, subfibrados tangente e cotangente, entre outros, afim de definir no Capítulo 3 uma estrutura localmente integrável.

Considere Ω uma variedade diferenciável de dimensão N. Os campos vetoriais complexos são aplicações $L : C^\infty(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\Omega)$ lineares sobre $\mathbb{C}$ e que satisfazem a regra de Leibniz, isto é, $L(fg) = fL(g) + gL(f)$ onde $f, g \in C^\infty(\Omega)$. Assim, dada $(U, \mathbf{x})$ uma carta local em Ω e considerando um campo vetorial complexo $L : C^\infty(U) \longrightarrow C^\infty(U)$, obtemos a representação local de L em coordenadas locais $(x_1, \ldots, x_N)$ da forma

$$L = \sum_{j=1}^{N} a_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

onde a_j são funções suaves. Assim, por exemplo, dados L_1, L_2 campos vetoriais complexos temos que o sistema

$$\begin{cases} L_1 u = 0 \\ L_2 u = 0 \end{cases}$$

representa um sistema de equações diferenciais parciais linear homogêneo.

Os sistemas de campos vetoriais surgiram como uma base local de um subfibrado involutivo $\mathcal{V}$ do fibrado tangente complexificado $\mathbb{C}T\Omega$, onde Ω é uma variedade diferenciável. A involutividade de $\mathcal{V}$ significa que: se $W \subset \Omega$ é aberto e L, M são seções de $\mathcal{V}$ sobre W, então o colchete de comutação $[L, M]$ é uma seção de $\mathcal{V}$ sobre W, onde uma seção é um campo vetorial complexo L tal que $L_p \in \mathcal{V}_p$. Exemplos de estruturas involutivas incluem foliações, estruturas complexas e estruturas de Cauchy-Riemann.

Na Seção 2.4, Capítulo 2, apresentamos o Teorema de Frobenius o qual nos possibilita fazer uma mudança de coordenadas para representar de maneira simplificada um campo vetorial e assim, simplificar os sistemas de equações a serem estudados. Por exemplo, dados $\Omega = \mathbb{R}^2$ uma variedade diferenciável, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ um sistema de coordenadas locais em Ω, onde

$\mathbf{x}(s,t) = (s,t)$ com $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, (u,v) as coordenadas euclidianas e

$$L = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}$$

um campo vetorial real é possível determinar um sistema de coordenadas locais y_1, y_2 tais que

$$L = \frac{\partial}{\partial y_1}.$$

No Capítulo 3, definimos uma estrutura localmente integrável e provamos a existência de coordenadas locais e geradores locais para tal estrutura que foram de extrema importância para a demonstração do resultado principal. Um primeiro estudo das estruturas localmente integráveis como o que apresentaremos neste texto se encontra em [17]. Tais estruturas também foram extensivamente estudadas em [18]. No presente trabalho, tal estudo foi baseado principalmente em [3].

Suponha que Ω seja uma variedade diferenciável de dimensão N e seja $p \in \Omega$. Considere n campos vetoriais complexos $\{L_1, \ldots, L_n\}$ que formam uma base de $\mathcal{V}$ sobre alguma vizinhança de p. Então, $\mathcal{V}$ é uma estrutura localmente integrável, se pudermos encontrar funções suaves complexas $Z_1, \ldots, Z_m$, onde $m = N - n$, de forma que sejam soluções das equações

$$L_j h = 0, \quad 1 \leq j \leq n \tag{1}$$

e cujos diferenciais sejam linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$ em uma vizinhança do ponto p. As m funções $Z = (Z_1, \ldots, Z_m)$ são chamadas de conjunto completo de integrais primeiras da estrutura localmente integrável.

Um exemplo de uma estrutura localmente integrável é o subfibrado tangente gerado, sobre um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, pelo campo vetorial Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Tomando $z(x,y) = x + iy \in C^\infty(\Omega)$ temos que $dz = dx + idy \neq 0$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(z) = 0$.

Em 1981, Baouendi e Treves [2], provaram que em uma estrutura localmente integrável, cada solução de (1) pode ser localmente aproximada por uma sequência de polinômios $P_k(Z)$ em m variáveis, onde $Z = (Z_1, \ldots, Z_m)$ é um conjunto completo de integrais primeiras. Com isso, o resultado *"Toda função holomorfa num aberto de $\mathbb{C}$ é analítica neste aberto"* (ou, em outras palavras, toda função holomorfa é localmente aproximada por polinômios na variável complexa z) é facilmente provado, pois tomando o subfibrado tangente de Cauchy-Riemann, temos que ele é uma estrutura localmente integrável. Além disso, toda função holomorfa é suave e é solução da equação $\frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = 0$. Portanto, pelo Teorema de Aproximação, qualquer função holomorfa pode ser localmente aproximada por polinômios na variável complexa z.

Esse Teorema de Aproximação tem permitido que vários pesquisadores usem métodos de análise complexa, análise harmônica e equações diferenciais parciais para estudar muitos problemas em estruturas localmente integráveis. Esses problemas incluem: a regularidade local e microlocal das soluções de (1), a determinação de conjuntos de singularidade para soluções de (1) e muitas outras propriedades das soluções de (1).

A ideia da demonstração do Teorema de Aproximação é a seguinte: inicialmente define-se uma família de funções $\{E_\tau u\}$, onde $0 < \tau < \infty$, de forma que $E_\tau u(x,t)$ é aproximada por polinômios em $Z(x,t)$. Em seguida define-se outra família de funções $\{G_\tau u\}$ que não é aproximada por polinômios, mas em contrapartida, é uma aproximação da identidade. Portanto, mostra-se que $u(x,t)$ é aproximada por $G_\tau u(x,t)$ e para concluir a demonstração, usando o Teorema de Stokes e o fato de u ser solução de (1), prova-se que $|R_\tau u| := |G_\tau u - E_\tau u|$ converge a zero. No Capítulo 4 Seção 4.2, fazemos uma exposição detalhada da demonstração do Teorema de Aproximação de Baouendi-Treves na versão clássica, podendo ser encontrada a demonstração na versão distribucional em [3], página 62.

Ainda, nesse último capítulo apresentamos uma aplicação interessante do Teorema de Aproximação: a propagação de zeros de soluções homogêneas. Nesse momento, estamos interessados em encontrar condições para que uma solução u de (1) seja identicamente nula, o que nos conduz a generalização a mais variáveis e em variedades do seguinte resultado clássico de funções de uma variável complexa: "*Seja $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica, onde U é aberto e conexo. Se $f^{-1}(0)$ possui algum ponto de acumulação em U, então $f^{-1}(0) = U$, ou seja $f \equiv 0$*". Resumidamente, o estudo da propagação de zeros de soluções homogêneas nos permite mostrar que, se $\mathcal{L}$ é uma estrutura localmente integrável definida, por exemplo, sobre $\mathbb{R}^2$ e u, v são distribuições definidas sobre $\mathbb{R}^2$ tais que $\mathcal{L}u = \mathcal{L}v$ e $u(x,0) = v(x,0)$, então $u \equiv v$.

1 TÓPICOS DA TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES

Neste capítulo, abordaremos algumas definições e resultados sobre a teoria das distribuições, espaços de Sobolev e espaços L^p que serão importantes ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

1.1 Espaço de Funções Testes

1.1.1 Conceitos e Notações Preliminares

Denotaremos por $x = (x_1, \ldots, x_n)$ os pontos do $\mathbb{R}^n$ e por $\mathbb{K}$ o corpo dos números complexos ou reais.

Definição 1.1. *Dado $n \in \mathbb{N}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ é chamado multi-índice e definimos a ordem de α por $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. Além disso, definimos $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$.*

Definição 1.2. *Dado $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ e $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{K}^n$ definimos $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{\alpha_n}$.*

Notação 1.3. Denotaremos o operador derivada por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

e quando $\alpha = 0$, D^0 denotará o operador identidade.

Proposição 1.4. *(Regra de Leibniz) Se u e v são funções com derivada até ordem α e β, com $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \leq \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, isto é, $\beta_i \leq \alpha_i$ para $i = 1, \ldots, n$, então*

$$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} (D^\beta u)(D^{\alpha-\beta} v).$$

No que segue Ω denotará um aberto do $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.5. *Denotaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço de Banach das (classes de equivalência de) funções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ tais que, no sentido de Lebesgue, $\int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty$. Defineremos a norma*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Denotaremos por $L^\infty(\Omega)$ o espaço de Banach das (classes de equivalência de) funções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ tais que, no sentido de Lebesgue, u é essencialmente limitada em Ω, isto é,

$$\operatorname{supess}_{x \in \Omega} |u(x)| < \infty.$$

Também definiremos a norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \mathrm{supess}_{x\in\Omega}\,|u(x)|.$$

Observação 1.6. Quando $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, onde o produto interno e a norma são, respectivamente, denotados por

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx$$

e $\|u\|^2 = (u, u)$ com $u, v \in L^2(\Omega)$.

Definição 1.7. *Denotaremos por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço das (classes de equivalência de) funções $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$, tais que no sentido de Lebesgue, $\int_K |u(x)|^p dx < \infty$ para qualquer compacto $K \subset \Omega$.*

Definição 1.8. *Diz-se que uma sequência de funções $(u_\nu) \subset L^p_{loc}(\Omega)$ converge à $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ (isto é, $u_\nu \longrightarrow u$ em $L^p_{loc}(\Omega)$) se para cada compacto $K \subset \Omega$ tem-se que*

$$\|u_\nu - u\|_{L^p(K)} = \left(\int_K |u_\nu(x) - u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 0.$$

Observação 1.9. $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^p_{loc}(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, onde o símbolo $\hookrightarrow$ indica uma imersão contínua.

Definição 1.10. *Seja $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ contínua. O suporte de u é definido como sendo*

$$\mathrm{supp}(u) = \overline{\{x \in \Omega;\ u(x) \neq 0\}}^{\Omega}.$$

Se esse conjunto for um compacto do $\mathbb{R}^n$, então dizemos que u possui suporte compacto.

Notação 1.11. Consideremos $C^k(\Omega) = \{\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{K};\ \phi \text{ é } k\text{-vezes continuamente diferenciável}\}$ e $C^\infty(\Omega) = \{\phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{K};\ \phi \text{ é infinitamente diferenciável}\}$. Assim, $C^k_0(\Omega)$ e $C^\infty_0(\Omega)$ denotarão as funções ϕ de C^k e $C^\infty(\Omega)$, respectivamente, cujo $\mathrm{supp}(\phi)$ é compacto.

Observação 1.12. $C^\infty_0(\Omega) \hookrightarrow C^k_0(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^p_{loc}(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega)$ com $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$.

1.1.2 Convergência em $C^\infty_0(\Omega)$ e alguns Resultados em $L^p(\Omega)$

Definição 1.13. *Diz-se que uma sequência de funções $(\varphi_\nu) \subset C^\infty_0(\Omega)$ converge à $\varphi \in C^\infty_0(\Omega)$ (isto é, $\varphi_\nu \longrightarrow \varphi$ em $C^\infty_0(\Omega)$) se, e somente se, existe um subcontjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que*

(i) $\mathrm{supp}(\varphi) \subset K$ *e* $\mathrm{supp}(\varphi_\nu) \subset K$ *para todo* $\nu \in \mathbb{N}$;

(ii) para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $D^\alpha \varphi_\nu \longrightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente sobre K.

Com essa noção de convergência, o espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é chamado espaço das funções testes e é denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

A seguinte definição trata de uma sequência de funções testes $(\rho_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, as quais têm suporte cada vez menores, à medida que ν cresce, mas preservam o volume contido sob o gráfico. O fato de existirem tais funções pode ser encontrado em [12] página 4.

Definição 1.14. *Denomina-se uma sequência regularizante a toda sequência de funções $(\rho_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ tal que:*

(i) $\rho_\nu \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\rho_\nu \geq 0$;

(ii) $\operatorname{supp}(\rho_\nu) \subset \overline{B_{\frac{1}{\nu}}(0)} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| \leq \frac{1}{\nu}\}$;

(iii) $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu(x)dx = 1$, $\nu \in \mathbb{N}$.

Definição 1.15. *Seja $u \in L^p(\Omega)$. O suporte de u é dado pela interseção de todos os subconjuntos fechados em Ω, fora dos quais u se anula quase sempre. Denotamos o suporte de u por* $\operatorname{supp}(u)$.

Observação 1.16. Se $u \in C(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ então as noções de suporte definidas para funções contínuas em Ω e para funções de $L^p(\Omega)$ coincidem.

Agora, definiremos a convolução de uma função em $L^1(\mathbb{R}^n)$ por uma função em $L^p(\mathbb{R}^n)$. O fato de tal convolução estar bem definida pode ser encontrado em [9], página 104.

Definição 1.17. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Definimos a convolução de f por g por*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

A seguir, apresentamos um resultado técnico que será muito útil em nosso estudo.

Proposição 1.18. *Sejam K um compacto não vazio e F um subconjunto fechado do $\mathbb{R}^n$, tais que $K \cap F = \emptyset$. Então existe $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi = 1$ em K, $\psi = 0$ em F e $0 \leq \psi(x) \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Como K é compacto, F é fechado e $K \cap F \neq \emptyset$, então

$$d(F, K) = \inf\{d(x, y); x \in F, y \in K\} > 0.$$

Assim, definamos $\epsilon = \frac{1}{4}d(K, F) > 0$ e consideremos os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned}
K_1 &= \{x \in \mathbb{R}^n;\ d(x, K) \leq \epsilon\},\\
K_2 &= \{x \in \mathbb{R}^n;\ d(x, K) \leq 2\epsilon\},\\
K_3 &= \{x \in \mathbb{R}^n;\ d(x, K) \leq 3\epsilon\},\\
F_0 &= \{x \in \mathbb{R}^n;\ d(x, K) \geq 2\epsilon\},
\end{aligned}$$

onde $d(x,K) = \inf\{d(x,y);\ y \in K\}$. Assim, K_1 é compacto, F_0 é fechado e $K_1 \cap F_0 = \emptyset$. Então, definindo a função

$$v(x) = \frac{d(x,F_0)}{d(x,F_0) + d(x,K_1)}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

temos que valem as seguintes propriedades:

(i) v é contínua em $\mathbb{R}^n$;

(ii) $v(x) = 0$ se, e somente se, $x \in F_0$, $v(x) = 1$ se $x \in K_1$ e $0 \leq v(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$;

(iii) $\text{supp}(v) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n;\ v(x) \neq 0\}}^{\mathbb{R}^n} \subset \overline{\mathbb{R}^n - F_0}^{\mathbb{R}^n} = K_2$, isto é, $v \in C_0(\mathbb{R}^n)$.

Agora, seja $\theta_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\theta_\epsilon \geq 0$, $\text{supp}(\theta_\epsilon) = \overline{B_\epsilon(0)}$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \theta_\epsilon(x)dx = 1$. Assim, definindo $\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\psi(x) = (\theta_\epsilon * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \theta_\epsilon(y)v(x-y)dy,$$

temos que $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, pois θ_ϵ e v possuem suportes compactos. Além disso,

$$\text{supp}(\psi) \subset \text{supp}(\theta_\epsilon) + \text{supp}(v) \subset \overline{B_\epsilon(0)} + K_2 \subset K_3 \subset \mathbb{R}^n - F.$$

Logo, se $x \in F$ então $x \notin \text{supp}(\psi)$ o que nos mostra, que $\psi(x) = 0$, ou seja, $\psi = 0$ em F.

Agora, note que $K + \overline{B_\epsilon(0)} \subset K_1$. Portanto, para $x \in K$ e $y \in \overline{B_\epsilon(0)}$ tem-se $x - y = x + (-y) \in K_1$. Logo, por (ii) temos que $v(x-y) = 1$. Assim, para todo $x \in K$ obtemos

$$\psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \theta_\epsilon(y)v(x-y)dy = \int_{\overline{B_\epsilon(0)}} \theta_\epsilon(y)v(x-y)dy = \int_{\overline{B_\epsilon(0)}} \theta_\epsilon(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} \theta_\epsilon(y)dy = 1.$$

Logo, $\psi = 1$ em K. Finalmente, como $0 \leq v(x-y) \leq 1$ segue que

$$0 \leq \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \theta_\epsilon(y)v(x-y)dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \theta_\epsilon(y)dy = 1,$$

isto é, $0 \leq \psi(x) \leq 1$ como desejado. □

Proposição 1.19. *O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Ver [12], página 109. □

Proposição 1.20. *(de Du Bois Raymond) Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0, \quad \textit{para todo } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Então, $u = 0$ q.s em Ω.

Demonstração. Ver [12], página 110. □

1.2 DISTRIBUIÇÕES SOBRE $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

1.2.1 Definições e Exemplos Básicos

Definição 1.21. *Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^N$. Uma distribuição sobre Ω é uma forma linear*

$$\begin{array}{rll} T: & \mathcal{D}(\Omega) & \longrightarrow \mathbb{K} \\ & \varphi & \longmapsto T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle \end{array}$$

que é contínua no sentido da convergência sobre $\mathcal{D}(\Omega)$, dada na Definição 1.13.

Denotaremos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as distribuições.

Observação 1.22. $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se, e somente se, para toda sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ convergente para zero no sentido dado na Definição 1.13, tivermos que a sequência $(\langle T, \varphi_\nu \rangle)_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge a zero em $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Definição 1.23. *Sejam $(T_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Diremos que $T_\nu \longrightarrow T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se*

$$\langle T_\nu, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle, \quad \textit{para toda } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.1}$$

Munimos o espaço $\mathcal{D}'(\Omega)$ com a topologia fraca dada justamente pela convergência em (1.1).

Vejamos alguns exemplos de distribuição:

Exemplo 1.24. Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e defina

$$\begin{array}{rll} T_u: & \mathcal{D}(\Omega) & \longrightarrow \mathbb{K} \\ & \varphi & \longmapsto \langle T_u, \varphi \rangle = \displaystyle\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx. \end{array}$$

Então, $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Com efeito, sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\gamma \in \mathbb{K}$. Então,

$$\begin{aligned} \langle T_u, \varphi + \gamma\psi \rangle &= \int_\Omega u(x)[\varphi(x) + \gamma\psi(x)]dx \\ &= \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx + \gamma \int_\Omega u(x)\psi(x)dx \\ &= \langle T_u, \varphi \rangle + \gamma \langle T_u, \psi \rangle, \end{aligned}$$

donde T_u é linear. Agora, seja $(\varphi_\nu) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ com $\varphi_\nu \longrightarrow 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é, existe $K \subset \Omega$ compacto tal que $\operatorname{supp}(\varphi_\nu) \subset K$ e

$$D^\alpha \varphi_\nu \longrightarrow 0 \quad \text{uniformemente sobre } K, \tag{1.2}$$

para todo $\nu \in \mathbb{N}^n$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} 0 \leq |\langle T_u, \varphi_\nu \rangle| &= \left| \int_\Omega u(x)\varphi_\nu(x)dx \right| \leq \int_\Omega |u(x)||\varphi_\nu(x)|dx \\ &= \int_K |u(x)||\varphi_\nu(x)|dx \leq \left(\max_{x \in K} |\varphi_\nu(x)| \right) \int_K |u(x)|dx. \end{aligned}$$

Fazendo $\nu \longrightarrow \infty$ segue, de (1.2) com $\alpha = 0$, que $\langle T_u, \varphi_\nu \rangle \longrightarrow 0$ em $\mathbb{K}$. Portanto, $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Observação 1.25. A partir do Exemplo 1.24 podemos definir a aplicação

$$\begin{aligned} T: \ L^1_{loc}(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ u &\longmapsto T_u \end{aligned} \tag{1.3}$$

onde

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Pela Proposição 1.20, a aplicação definida em (1.3) é linear e injetora.

Desse modo, podemos identificar $L^1_{loc}(\Omega)$ com $T(L^1_{loc}(\Omega)) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ e devido a isso, a cada $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ identificamos com uma única distribuição $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e diz-se "a distribução u"ao invés de a distribuição T_u. Além disso,

$$L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega). \tag{1.4}$$

De fato, consideremos $(u_\nu) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ e $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$u_\nu \longrightarrow u \quad \text{em } L^1_{loc}(\Omega). \tag{1.5}$$

Identificando u_ν e u com T_{u_ν} e T_u, respectivamente, obtemos para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, que

$$\begin{aligned} |\langle u_\nu - u, \varphi \rangle| &= |\langle T_{u_\nu} - T_u, \varphi \rangle \\ &= \left| \int_\Omega (u_\nu(x) - u(x))\varphi(x)dx \right| \\ &\leq \int_\Omega |u_\nu(x) - u(x)||\varphi(x)|dx \\ &= \int_K |u_\nu(x) - u(x)||\varphi(x)|dx \\ &\leq \left(\max_{x \in K} |\varphi(x)| \right) \int_K |u_\nu(x) - u(x)|dx \end{aligned} \tag{1.6}$$

onde $K = \operatorname{supp}(\varphi)$. Contudo, de (1.6) juntamente com (1.5) temos que $|\langle u_\nu - u, \varphi \rangle| \longrightarrow 0$ em $\mathbb{R}$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, donde $\langle u_\nu, \varphi \rangle \longrightarrow \langle u, \varphi \rangle$ em $\mathbb{R}$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Assim, provamos que

$$u_\nu \longrightarrow u \text{ em } L^1_{loc}(\Omega) \Rightarrow u_\nu \longrightarrow u \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Isso nos mostra que a aplicação dada em (1.3) é contínua e, portanto, vale (1.4).

Em contrapartida, o seguinte exemplo nos mostra que nem toda distribuição é definida por funções localmente integráveis.

Exemplo 1.26. Seja $x_0 \in \Omega$ e considere

$$\begin{aligned} \delta_{x_0}: \ \mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi \quad &\longmapsto \langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0). \end{aligned}$$

É fácil verificar que δ_{x_0} é uma distribuição, a qual chamamos delta de Dirac e escrevemos δ_0 quando $x_0 = 0$. Além disso, $\delta_{x_0} \notin L^1_{loc}(\Omega)$. De fato, suponhamos por absurdo que $\delta_{x_0} \in L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$. Assim, existe $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $\delta_{x_0} = T_u$, ou seja

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Por outro lado, $\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0)$. Portanto,

$$\varphi(x_0) = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.7}$$

Agora, dada $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$, definamos

$$\psi(x) = \xi(x)\|x - x_0\|^2 = \xi(x)\left(\sum_{i=1}^n (x_i - x_{0i})^2\right).$$

Então, $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e de (1.7) vem que

$$\int_\Omega u(x)\xi(x)\|x - x_0\|^2 dx = \int_\Omega u(x)\psi(x)dx = \langle \delta_{x_0}, \psi \rangle = \psi(x_0) = 0$$

para toda $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Logo, pelo Lema de Du Bois Raymond segue que

$$u(x)\|x - x_0\|^2 = 0 \quad \text{q.s em } \Omega,$$

donde $u = 0$ q.s em Ω. Voltando em (1.7) obtemos $\varphi(x_0) = 0$, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, o que é um absurdo.

1.2.2 Derivada de Distribuições

Definição 1.27. *Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. A derivada de ordem $\alpha \in \mathbb{N}^n$ de T é definida por*

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle, \quad \textit{para toda } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

A seguinte observação nos mostra que uma distribuição sempre possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições.

Observação 1.28. Se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, então $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$. De fato, seja $(\varphi_\nu) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi_\nu \longrightarrow 0$ em $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é, existe $K \subset \Omega$ um compacto tal que $\operatorname{supp}(\varphi_\nu) \subset K$, para todo $\nu \in \mathbb{N}$, e $D^\alpha \varphi_\nu \longrightarrow 0$ uniformemente sobre K, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Como $(\varphi_\nu) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ temos que $D^\alpha \varphi_\nu \in \mathcal{D}(\Omega)$, para todo $\nu \in \mathbb{N}$. Ainda

$$\operatorname{supp}(D^\alpha \varphi_\nu) \subset \operatorname{supp}(\varphi_\nu) \subset K.$$

Assim, qualquer que seja $\beta \in \mathbb{N}^m$ tem-se

$$D^\beta(D^\alpha \varphi_\nu) = D^{\beta+\alpha}\varphi_\nu \longrightarrow 0 \text{ uniformemente sobre } K.$$

Como $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, segue da Observação 1.22 que

$$\langle T, D^\alpha \varphi_\nu\rangle \longrightarrow 0 \text{ em } \mathbb{K}.$$

Logo,

$$\langle D^\alpha T, \varphi_\nu\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi_\nu\rangle \longrightarrow 0 \text{ em } \mathbb{K}.$$

Portanto, novamente pela Observação 1.22 temos que $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Observação 1.29. A aplicação

$$\begin{aligned} D^\alpha : \quad \mathcal{D}'(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ T &\longmapsto D^\alpha T \end{aligned}$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Com efeito, suponhamos que $T_\nu \longrightarrow T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Então,

$$\langle T_\nu, \varphi\rangle \longrightarrow \langle T, \varphi\rangle, \quad \text{para toda } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Logo, para toda $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\langle D^\alpha T_\nu, \psi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T_\nu, D^\alpha \psi\rangle \longrightarrow (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \psi\rangle = \langle D^\alpha T, \psi\rangle,$$

quando $\nu \longrightarrow \infty$, ou seja, $D^\alpha T_\nu \longrightarrow D^\alpha T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ provando, assim, a continuidade da aplicação D^α.

Vejamos agora alguns resultados interessantes da derivação no sentido das distribuições.

Proposição 1.30. *Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ temos que*

$$D^{\alpha+\beta}T = D^\alpha(D^\beta T) = D^\beta(D^\alpha T) = D^{\beta+\alpha}T, \quad \textit{para todo } T \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Demonstração. Seja $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Basta mostrarmos que $D^\alpha(D^\beta T) = D^\beta(D^\alpha T)$, isto é,

$$\langle D^\alpha(D^\beta T), \varphi\rangle = \langle D^\beta(D^\alpha T), \varphi\rangle, \quad \text{para toda } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Assim, tome $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ arbitrário. Então, $D^\alpha\varphi, D^\beta\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $D^\alpha(D^\beta\varphi) = D^\beta(D^\alpha\varphi)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\langle D^\alpha(D^\beta T), \varphi\rangle &= (-1)^{|\alpha|}\langle D^\beta T, D^\alpha\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}(-1)^{|\beta|}\langle T, D^\beta(D^\alpha\varphi)\rangle \\
&= (-1)^{|\beta|}(-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha(D^\beta\varphi)\rangle = (-1)^{|\beta|}\langle D^\alpha T, D^\beta\varphi\rangle \\
&= \langle D^\beta(D^\alpha T), \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto, pela arbitrariedade de $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ segue o desejado. □

Proposição 1.31. *Se $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$, então a derivada $D^\alpha u$, $|\alpha| \le k$, no sentido das distribuições é igual a derivada de ordem α de u no sentido clássico, ou seja,*

$$D^\alpha T u = T_{D^\alpha u}.$$

Demonstração. Como $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$, então $u, D^\alpha u \in C(\mathbb{R}^n)$ onde $|\alpha| \le k$. Assim, $u, D^\alpha u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ donde podemos identificar u e $D^\alpha u$ com as distribuições T_u e $T_{D^\alpha u}$, respectivamente, ou seja,

$$u = T_u \quad \text{e} \quad D^\alpha u = T_{D^\alpha u}.$$

Portanto, basta mostrarmos que $T_{D^\alpha u} = D^\alpha T_u$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Com efeito, seja $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ arbitrária. Assim, pela integração por partes

$$\begin{aligned}
\langle T_{D^\alpha u}, \varphi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha u(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^n} u(x)D^\alpha\varphi(x)dx \\
&= (-1)^{|\alpha|}\langle T_u, D^\alpha\varphi\rangle = \langle D^\alpha T_u, \varphi\rangle,
\end{aligned}$$

o que mostra o desejado. □

Definiremos, agora, o produto de uma função infinitamente diferenciável por uma distribuição.

Definição 1.32. *Sejam $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\rho \in C^\infty(\Omega)$. O produto $\rho T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{K}$ é definido por*

$$\langle \rho T, \varphi \rangle = \langle T, \rho\varphi \rangle, \quad \textit{para toda } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Observação 1.33. Nas condições da definição acima temos que $\rho T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Proposição 1.34. *(Regra de Leibniz) Se $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\rho \in C^\infty(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ vale que*

$$D^\alpha(\rho T) = \sum_{\beta \leq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} D^\beta \rho D^{\alpha-\beta} T.$$

Demonstração. Mostraremos que a Regra de Leibniz vale para $\alpha = e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$. Assim, dada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ arbitrária, temos que

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho T), \varphi \right\rangle &= -\left\langle \rho T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = -\left\langle T, \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \\
&= \left\langle T, -\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\varphi) + \frac{\partial \rho}{\partial x_i}\varphi \right\rangle \\
&= \left\langle T, -\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho\varphi) \right\rangle + \left\langle T, \frac{\partial \rho}{\partial x_i}\varphi \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \rho\varphi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \rho}{\partial x_i} T, \varphi \right\rangle \\
&= \left\langle \rho \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \rho}{\partial x_i} T, \varphi \right\rangle = \left\langle \rho \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} T, \varphi \right\rangle.
\end{aligned}$$

Pela arbitrariedade de φ, segue que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho T) = \rho \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} T.$$

A prova da proposição segue por indução sobre $|\alpha|$. □

1.2.3 Suporte de Distribuições

Definição 1.35. *O suporte de uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ é o complementar (com relação a Ω) do maior aberto $U_T \subset \Omega$ no qual T se anula, ou seja,*

$$\operatorname{supp}(T) = \Omega - U_T.$$

A seguir, apresentamos algumas propriedades do suporte de uma distribuição.

Proposição 1.36. *Sejam $u \in C(\Omega)$ e T_u a distribuição correspondente. Então*

$$\operatorname{supp}(T_u) = \operatorname{supp}(u)$$

Demonstração. Sejam U_{T_u} o maior aberto para o qual T_u se anula e $x \in U_{T_u}$.

Afirmação 1: u se anula em U_{T_u}. De fato, suponhamos por absurdo, que exista $x_0 \in U_{T_u}$ tal que $u(x_0) \neq 0$. Sem perda de generalidade suponhamos que $u(x_0)$>0. Como u é contínua, existe uma vizinhança V_{x_0} de x_0, que podemos supor estritamente contida em U_{T_u}, tal que $u(x) > 0$, para todo $x \in V_{x_0}$. Consideremos, agora, $K \subset V_{x_0}$ compacto e seja $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\text{supp}(\varphi_0) \subset U_{T_u}$, $\varphi_0 = 1$ em K, $\varphi_0 = 0$ em $\Omega - V_{x_0}$ e $0 \leq \varphi_0 \leq 1$, cuja existência vem garantida pela Proposição 1.18. Assim,

$$\langle T_u, \varphi_0 \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi_0(x)dx > 0.$$

Mas isto é um absurdo, pois $\langle T_u, \varphi \rangle = 0$, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ com $\text{supp}(\varphi) \subset U_{T_u}$, o que prova a afirmação 1.
Da afirmação 1, temos que

$$U_{T_u} \subset \{x \in \Omega;\ u(x) = 0\}$$

e daí vem que

$$\{x \in \Omega;\ u(x) \neq 0\} \subset \Omega - U_{T_u}.$$

Tomando-se o fecho em Ω segue que

$$\text{supp}(u) \subset \text{supp}(T_u).$$

Reciprocamente, pondo-se

$$\Omega_0 = \Omega - \overline{\{x \in \Omega;\ u(x) \neq 0\}}^{\Omega}$$

então Ω_0 é um aberto contido em Ω.
Afirmação 2: T_u se anula em Ω_0. Com efeito, seja $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\text{supp}(\varphi) \subset \Omega_0$. Então,

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = \int_{\Omega_0} u(x)\varphi(x)dx. \tag{1.8}$$

Mas, se $x \in \Omega_0$ então $x \in \Omega$ e $x \neq \overline{\{x \in \Omega;\ u(x) \neq 0\}}^{\Omega}$. Consequentemente, $u(x) = 0$ e de (1.8) vem que $\langle T_u, \varphi \rangle = 0$, isto é, T_u se anula em Ω_0.
Como Ω_0 um conjunto aberto contido em Ω e pelo fato de U_{T_u} ser o maior aberto para o qual T_u se anula vem que $\Omega_0 \subset U_{T_u}$. Logo,

$$\Omega - U_{T_u} \subset \overline{\{x \in \Omega;\ u(x) \neq 0\}}^{\Omega},$$

ou seja,

$$\text{supp}(T_u) \subset \text{supp}(u),$$

donde segue o desejado. $\square$

Proposição 1.37. *Sejam $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $x \in \Omega$. Então $x \in \operatorname{supp}(T)$ se, e somente se, para toda vizinhança V de x existe $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ com $\operatorname{supp}(\varphi) \subset V$ e $\langle T, \varphi \rangle \neq 0$.*

Demonstração. Ver [4], página 40. □

Proposição 1.38. *Sejam $T, S \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\rho \in C^\infty(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ com $\lambda \neq 0$. Então,*

(i) $\operatorname{supp}(S+T) \subset \operatorname{supp}(S) \cup \operatorname{supp}(T)$*;*

(ii) $\operatorname{supp}(\lambda T) = \operatorname{supp}(T)$*;*

(iii) $\operatorname{supp}(\rho T) \subset \operatorname{supp}(\rho) \cap \operatorname{supp}(T)$.

Demonstração. Ver [4], página 42. □

1.3 ESPAÇOS DE SOBOLEV

Definição 1.39. *Definimos o espaço de Sobolev como sendo o espaço vetorial $W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),$ para todo $|\alpha| \leq m\}$ munido da norma*

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

No caso particular $p = 2$, denotamos $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

A demonstração da seguinte observação pode ser encontrada em [12], página 53.

Observação 1.40. (i) O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach;

(ii) Os espaços $H^m(\Omega)$ são espaços de Hilbert.

Seja $(a, b) \subset \mathbb{R}$. O seguinte exemplo nos mostra que existem funções em $W^{1,p}(a, b)$, $1 \leq p < \infty$, cuja derivada usual não existe.

Exemplo 1.41. Considere a função

$$\begin{aligned} u: \quad (-1,1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \quad &\longmapsto u(x) = |x|. \end{aligned}$$

Sabemos que tal função não é diferenciável no sentido usual em $x = 0$. Porém, $u \in W^{1,p}(-1, 1)$, com $1 \leq p < \infty$ e

$$u'(x) = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ -1, & \text{se } -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

De fato, seja $\varphi \in C_0^\infty$. Assim, integrando por partes

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} u(x)\varphi'(x)dx = \int_{-1}^{1} |x|\varphi'(x)dx &= \int_{-1}^{0} (-x)\varphi'(x)dx + \int_{0}^{1} x\varphi'(x)dx \\
&= \int_{-1}^{0} \varphi(x)dx - \int_{0}^{1} \varphi(x)dx \\
&= -\left(\int_{-1}^{0} (-1)\varphi(x)dx + \int_{0}^{1} 1 \cdot \varphi(x)dx\right) \\
&= -\int_{-1}^{1} \operatorname{sign}(x)\varphi(x)dx.
\end{aligned}$$

Além disso, é evidente que $u \in L^p(-1,1)$ e $\operatorname{sign} \in L^p(\Omega)$, donde segue o desejado.

2 TÓPICOS DA TEORIA DAS ESTRUTURAS LOCALMENTE INTEGRÁVEIS

Neste capítulo, apresentamos conceitos e resultados principais sobre a teoria das estruturas localmente integráveis afim de estabelecer notações e nos familiarizar com os elementos dos capítulos seguintes.

2.1 Campos Vetoriais Complexos

Nesta seção, introduziremos os conceitos de variedade diferenciável e funções suaves definidas numa variedade diferenciável. Em seguida, será apresentada a definição de campo vetorial complexo, que são funções definidas no espaços das funções suaves à valores neste mesmo espaço.

Vamos supor do leitor alguma familiaridade com as noções básicas de Topologia Geral. Veja, por exemplo, [14].

Definição 2.1. *Seja Ω um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável de conjuntos abertos. Uma estrutura diferenciável sobre Ω de dimensão N é uma família de pares $\mathcal{F} = \{(U, \boldsymbol{x})\}$, onde $U \subset \Omega$ é um conjunto aberto não vazio e $\boldsymbol{x} : U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é um homeomorfismo sobre um subconjunto aberto $\boldsymbol{x}(U)$ de $\mathbb{R}^N$, satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) $\bigcup_{(U,\boldsymbol{x})\in\mathcal{F}} U = \Omega$;

(ii) *A função $\boldsymbol{x}_2 \circ \boldsymbol{x}_1^{-1} : \boldsymbol{x}_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \boldsymbol{x}_2(U_1 \cap U_2)$ é C^∞ para cada par $(U_1, \boldsymbol{x}_1), (U_2, \boldsymbol{x}_2) \in \mathcal{F}$ com $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$;*

(iii) *$\mathcal{F}$ é maximal com respeito à (i) e (ii), isto é, se $\emptyset \neq V \subset \Omega$ é aberto e $\boldsymbol{y} : V \longrightarrow \boldsymbol{y}(V)$ é um homoemorfismo sobre um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$, tal que para qualquer $(U, \boldsymbol{x}) \in \mathcal{F}$ com $U \cap V \neq \emptyset$ a composição $\boldsymbol{y} \circ \boldsymbol{x}^{-1} : \boldsymbol{x}(U \cap V) \longrightarrow \boldsymbol{y}(U \cap V)$ é C^∞, então $(V, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{F}$.*

Observação 2.2. Dada uma família qualquer $\mathcal{F}^* = \{(U, \mathbf{x})\}$ como na definição acima, mas satisfazendo (i) e (ii) apenas, existe uma única estrutura diferenciável $\mathcal{F}$ sobre Ω, de dimensão N, tal que $\mathcal{F}^* \subset \mathcal{F}$.

Definição 2.3. *Uma variedade diferenciável de dimensão N é o par $(\Omega, \mathcal{F})$, onde Ω é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável, e $\mathcal{F}$ é uma estrutura diferenciável de dimensão N. Quando não houver risco de confusão com relação a estrutura diferenciável $\mathcal{F}$, denotaremos a variedade diferenciável de dimensão N apenas por Ω.*

A seguir apresentamos alguns exemplos de variedades diferenciáveis.

Exemplo 2.4. Dada a família $\mathcal{F}^* = \{(\mathbb{R}^N, Id : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N)\}$ temos que $\mathbb{R}^N$ é uma variedade diferenciável de dimensão N.

Exemplo 2.5. Seja $(\Omega, \mathcal{F})$ uma variedade diferenciável de dimensão N e $W \subset \Omega$ aberto com a topologia induzida de Ω. Sobre W definimos uma estrutura diferenciável natural de dimensão N por $\mathcal{F}_W = \{(W \cap U, \mathbf{x}|_{W\cap U}); (U, \mathbf{x}) \in \mathcal{F}, W \cap U \neq \emptyset\}$. Assim W é uma variedade diferenciável de dimensão N.

Notação 2.6. Um elemento $(U, \mathbf{x}) \in \mathcal{F}$ é chamado de carta local ou sistema de coordenadas locais. Se escrevermos $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ então, para $p \in U$, suas coordenadas locais (com respeito à carta local dada) são dadas por $(x_1(p), \ldots, x_N(p))$.

Deste ponto em diante, Ω representará uma variedade diferenciável de dimensão N.

Definição 2.7. *Uma função $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ é suave se para cada $(U, \boldsymbol{x}) \in \mathcal{F}$ temos que $f \circ \boldsymbol{x}^{-1} \in C^\infty(\boldsymbol{x}(U))$. Denotamos por $C^\infty(\Omega)$ o conjunto constituído de tais funções.*

As seguintes observações sobre o conjunto das funções suaves são facilmente verificadas.

Observação 2.8.

(i) O conjunto $C^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial complexo de dimensão infinita;

(ii) O conjunto $C^\infty(\Omega)$ é uma álgebra sobre $\mathbb{C}$;

(iii) Quando $\mathbb{R}^N$ é entendido como variedade, o conjunto $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ coincide com o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis do Cálculo Avançado.

Definição 2.9. *Um campo vetorial complexo sobre Ω é uma aplicação $L : C^\infty(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\Omega)$ satisfazendo as seguintes condições:*

(a) L é linear sobre $\mathbb{C}$;

(b) L satisfaz a regra de Leibniz, isto é,

$$L(fg) = fL(g) + gL(f), \quad f, g \in C^\infty(\Omega).$$

Notação 2.10. O conjunto de todos os campos vetoriais complexos sobre Ω é denotado por $\mathscr{X}(\Omega)$.

O seguinte exemplo nos diz que a derivada de uma função $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ é um campo vetorial complexo sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.11. A aplicação $L : C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ dada por $L(f) = f'$, para todo $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, é um campo vetorial complexo sobre $\mathbb{R}$. De fato, sejam $f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Então,

$$L(\alpha f + g) = (\alpha f + g)' = \alpha f' + g' = \alpha L(f) + L(g),$$

donde L é linear e,

$$L(fg) = (fg)' = f'g + fg' = gL(f) + fL(g),$$

donde L satisfaz a regra de Leibniz.

Definiremos agora a derivada parcial de uma função suave definida sobre uma variedade.

Definição 2.12. *Dada uma carta local $(U, \boldsymbol{x})$ em Ω, definamos a aplicação $\frac{\partial}{\partial x_j} : C^\infty(U) \longrightarrow C^\infty(U)$ por,*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial(f \circ \boldsymbol{x}^{-1})}{\partial x_j} \circ \boldsymbol{x}.$$

Observação 2.13. A aplicação definida acima é um elemento de $\mathscr{X}(U)$. De fato, primeiramente note que dado $f \in C^\infty(U)$, temos que $f \circ \mathbf{x}^{-1} \in C^\infty(\mathbf{x}(U))$, donde $\frac{\partial f \circ \mathbf{x}^{-1}}{\partial x_j} \in C^\infty(\mathbf{x}(U))$, o que implica $\frac{\partial f \circ \mathbf{x}^{-1}}{\partial x_j} \circ \mathbf{x} \in C^\infty(U)$. Agora, sejam $f, g \in C^\infty(U)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\alpha f + g)}{\partial x_j} = \frac{\partial[(\alpha f \circ \mathbf{x}^{-1}) + (g \circ \mathbf{x}^{-1})]}{\partial x_j} \circ \mathbf{x} &= \left(\alpha \frac{\partial(f \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial x_j} + \frac{\partial(g \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial x_j}\right) \circ \mathbf{x} \\
&= \alpha \left(\frac{\partial(f \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial x_j} \circ \mathbf{x}\right) + \left(\frac{\partial(g \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial x_j} \circ \mathbf{x}\right) \\
&= \alpha \frac{\partial f}{\partial x_j} + \frac{\partial g}{\partial x_j}
\end{aligned}$$

donde $\frac{\partial}{\partial x_j}$ é linear sobre $\mathbb{C}$ e,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(fg)}{\partial x_j} = \frac{\partial[(f \circ \mathbf{x}^{-1})(g \circ \mathbf{x}^{-1})]}{\partial x_j} \circ \mathbf{x} &= \left(\frac{\partial(f \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial x_j}(g \circ \mathbf{x}^{-1}) + (f \circ \mathbf{x}^{-1})\frac{\partial(g \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial x_j}\right) \circ \mathbf{x} \\
&= \left(\frac{\partial(f \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial x_j} \circ \mathbf{x}\right) g + f \left(\frac{\partial(g \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial x_j} \circ \mathbf{x}\right) \\
&= g\frac{\partial f}{\partial x_j} + f\frac{\partial g}{\partial x_j}
\end{aligned}$$

donde $\frac{\partial}{\partial x_j}$ satisfaz a regra de Leibniz. Portanto, $\frac{\partial}{\partial x_j} \in \mathscr{X}(U)$.

A seguir apresentamos alguns resultados envolvendo campos vetoriais.

Proposição 2.14. *Seja $L \in \mathscr{X}(\Omega)$. Se f é constante então $Lf = 0$.*

Demonstração. Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(p) = c$, para todo $p \in \Omega$. Como L satisfaz a regra de Leibniz, observe que

$$L(1) = L(1 \cdot 1) = 1L(1) + 1L(1) = 2L(1).$$

Logo, $L(1) = 0$. Disto e pela linearidade de L, segue que

$$L(f) = L(c) = L(c \cdot 1) = cL(1) = c \cdot 0 = 0,$$

como queríamos. $\square$

Antes de enunciarmos o próximo resultado definiremos o suporte de uma função.

Definição 2.15. *Seja f uma função definida em Ω com valores em $\mathbb{C}$. Definimos o suporte de f como sendo*

$$\text{supp}(f) = \Omega - \bigcup_{i \in I} \omega_i,$$

onde $\{\omega_i\}_{i \in I}$ é uma família de abertos com $\omega_i \subset \Omega$ e tais que $f \equiv 0$ quase sempre em ω_i para todo $i \in I$.

Proposição 2.16. *Seja $L \in \mathscr{X}(\Omega)$. Então,* $\text{supp}(Lf) \subset \text{supp}(f)$*, para todo $f \in C^\infty(\Omega)$.*

Demonstração. Sejam $f \in C^\infty(\Omega)$ e $L \in \mathscr{X}(\Omega)$. Por definição temos que,

$$supp(f) = \Omega - \bigcup_{U \in \mathscr{F}_f} U \quad \text{e} \quad supp(Lf) = \Omega - \bigcup_{V \in \mathscr{F}_{Lf}} V,$$

onde $\mathscr{F}_f$ é a família de todos os abertos $U \subset \Omega$ não vazios, tais que $f|_U = 0$ e $\mathscr{F}_{Lf}$ é a família de todos os abertos $V \subset \Omega$ não vazios, tais que $Lf|_V = 0$. Logo, para mostrar que $\text{supp}(Lf) \subset \text{supp}(f)$ mostraremos que $\bigcup_{U \in \mathscr{F}_f} U \subset \bigcup_{V \in \mathscr{F}_{Lf}} V$. Então, seja $p \in \bigcup_{U \in \mathscr{F}_f} U$. Assim, existe um aberto não vazio $U_0 \subset \Omega$ com $f|_{U_0} = 0$ tal que $p \in U_0$. Tome $V_0 = U_0$. Então $V_0 \subset \Omega$ aberto e $p \in V_0$. Como V_0 é aberto, existe um aberto básico $U' \subset \Omega$ tal que $p \in U' \subset V_0$. Considere a carta local $(U', \mathbf{x'}) \in \mathcal{F}$. Como $\mathbf{x'}(U') \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e $\{\mathbf{x'}(p)\} \subset \mathbf{x'}(U')$ é compacto, temos que existe $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{x'}(U'))$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$ e $\varphi|_{\tilde{U}} = 1$, onde $\tilde{U}$ é uma vizinhança de $\{\mathbf{x'}(p)\}$. Assim, $\varphi(\mathbf{x'}(p)) = 1$.

Defina $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(q) = \begin{cases} \varphi(\mathbf{x'}(q)), & \text{se } q \in U'; \\ 0, & \text{se } q \notin U'. \end{cases}$$

Note que $g \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ e, dado $q \in \Omega - V_0$, temos que $g(q) = 0$. Agora, observe que $f = (1 - g)f$. De fato, dado $q \in \Omega$
se $q \notin U'$ temos $[(1 - g)f](q) = (1 - g(q))f(q) = 1f(q) = f(q)$ e,
se $q \in U' \subset V_0$ temos $[(1 - g)f](q) = (1 - g(q))f(q) = (1 - 1)f(q) = 0 = f(q)$.

Portanto, $f = (1-g)f$. Assim,

$$\begin{aligned} L(f)(p) = L[(1-g)f](p) &= f(p)L(1-g)(p) + (1-g(p))L(f)(p) \\ &= f(p)L(1)(p) - f(p)L(g)(p) + (1-1)L(f)(p) \\ &= f(p).0 - f(p).0 + 0.L(f)(p) = 0 \end{aligned}$$

Logo, existe um aberto não vazio $V_0 \subset \Omega$ com $Lf|_{V_0} = 0$, tal que $p \in V_0$, donde $p \in \bigcup_{V \in \mathscr{F}_{Lf}} V$, como queríamos. $\square$

Como consequência da Proposição 2.16 é possível definir a restrição de um campo vetorial $L \in \mathscr{X}(\Omega)$ sobre um subconjunto aberto não vazio $W \subset \Omega$. É o que faremos na próxima obervação.

Observação 2.17. Existe uma aplicação linear sobre $\mathbb{C}$

$$\mathscr{X}(\Omega) \ni L \longrightarrow L_W \in \mathscr{X}(W)$$

que torna o diagrama abaixo comutativo

$$\begin{tikzcd} C^\infty(\Omega) \arrow[r, "L"] \arrow[d] & C^\infty(\Omega) \arrow[d] \\ C^\infty(W) \arrow[r, "L_W"] & C^\infty(W). \end{tikzcd}$$

De fato, sejam $W \subset \Omega$ aberto não vazio e $L \in \mathscr{X}(\Omega)$. Defina para cada $f \in C^\infty(W)$

$$L_W(f)(p) = L(\tilde{f})(p),$$

onde $\tilde{f} \in C^\infty(\Omega)$ e $\tilde{f} = f$ em alguma vizinhança de p. Observe que L_W está bem definida. Com efeito, sejam $f, g \in C^\infty(W)$ tais que $f = g$. Considere $p \in W$ e $L_W(f)(p) = L(\tilde{f})(p), L_W(g)(p) = L(\tilde{g})(p)$, onde $\tilde{f}, \tilde{g} \in C^\infty(\Omega)$ são tais que $f|_U = \tilde{f}|_U$ e $g|_V = \tilde{g}|_V$ com U e V vizinhanças de p. Então $(\tilde{f} - \tilde{g})|_{U\cap V} = \tilde{f}|_{U\cap V} - \tilde{g}|_{U\cap V} = f|_{U\cap V} - g|_{U\cap V} = 0$, donde $U \cap V \subset (\mathrm{supp}(\tilde{f} - \tilde{g}))^c$. Como $\tilde{f} - \tilde{g} \in C^\infty(\Omega)$ segue da Proposição 2.16 que $\mathrm{supp}[L(\tilde{f} - \tilde{g})] \subset \mathrm{supp}(\tilde{f} - \tilde{g})$. Portanto, $U \cap V \subset (\mathrm{supp}[L(\tilde{f} - \tilde{g})])^c$. Assim, como $p \in U \cap V$ temos que $p \notin \mathrm{supp}[L(\tilde{f} - \tilde{g})]$, isto é, $L(\tilde{f})(p) = L(\tilde{g})(p)$, como queríamos. Além disso, é fácil verificar que $L_W \in \mathscr{X}(\Omega)$ e que L_W torna o diagrama comutativo.

2.1.1 A Estrutura Algébrica de $\mathscr{X}(\Omega)$

Nesta subseção, apresentaremos algumas operações sobre o espaço $\mathscr{X}(\Omega)$. Primeiramente, definamos a soma de dois campos vetoriais e a multiplicação de um campo vetorial por um escalar em $\mathbb{C}$.

Definição 2.18. *Dados $L_1, L_2 \in \mathscr{X}(\Omega)$, $f \in C^\infty(\Omega)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, definimos as seguintes operações:*

$$\begin{aligned} (L_1 + L_2)(f) &:= L_1(f) + L_2(f) \\ (\lambda L_1)(f) &:= \lambda L_1(f) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Verifiquemos que tais operações são fechadas em $\mathscr{X}(\Omega)$. De fato, sejam $f, g \in C^\infty(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Então,

$$\begin{aligned} (L_1 + L_2)(\alpha f + g) &= L_1(\alpha f + g) + L_2(\alpha f + g) \\ &= \alpha L_1(f) + L_1(g) + \alpha L_2(f) + L_2(g) \\ &= \alpha(L_1 + L_2)(f) + (L_1 + L_2)(g) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\lambda L_1)(\alpha f + g) = \lambda L_1(\alpha f + g) &= \lambda(\alpha L_1(f) + L_1(g)) \\ &= \alpha\lambda L_1(f) + \lambda L_1(g) \\ &= \alpha(\lambda L_1)(f) + (\lambda L_1)(g) \end{aligned}$$

o que implica que as aplicações definidas são lineares. Agora, resta verificar a regra de Leibniz. Temos,

$$\begin{aligned} (L_1 + L_2)(fg) = L_1(fg) + L_2(fg) &= fL_1(g) + gL_1(f) + fL_2(g) + gL_2(f) \\ &= f(L_1(g) + L_2(g)) + g(L_1(f) + L_2(f)) \\ &= f(L_1 + L_2)(g) + g(L_1 + L_2)(f) \end{aligned}$$

e

$$(\lambda L)(fg) = \lambda L(fg) = \lambda(fL(g) + gL(f)) = \lambda f L(g) + \lambda g L(f) = f(\lambda L)(g) + g(\lambda L)(f).$$

O conjunto $\mathscr{X}(\Omega)$ munido das operações definidas em (2.2) é um espaço vetorial complexo.

Uma operação muito importante em $\mathscr{X}(\Omega)$ é o chamado colchete de Lie (ou comutador) entre dois campos vetoriais.

Definição 2.19. *Dados $L, M \in \mathscr{X}(\Omega)$ defina $[\cdot,\cdot] : \mathscr{X}(\Omega) \times \mathscr{X}(\Omega) \longrightarrow \mathscr{X}(\Omega)$ por*

$$[L, M](f) = L(M(f)) - M(L(f)) \tag{2.2}$$

para todo $f \in C^\infty(\Omega)$.

Verifiquemos que $[L, M] \in \mathscr{X}(\Omega)$. Com efeito, dados $\alpha \in \mathbb{C}$ e $f, g \in C^\infty(\Omega)$, temos

$$\begin{aligned}
[L, M](\alpha f + g) &= L(M(\alpha f + g)) - M(L(\alpha f + g)) \\
&= L(\alpha M(f) + M(g)) - M(\alpha L(f) + L(g)) \\
&= \alpha L(M(f)) + L(M(g)) - \alpha M(L(f)) - M(L(g)) \\
&= \alpha(L(M(f)) - M(L(f))) + L(M(g)) - M(L(g)) \\
&= \alpha[L, M](f) + [L, M](g)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
[L, M](fg) &= L(M(fg)) - M(L(fg)) \\
&= L(fM(g) + gM(f)) - M(fL(g) + gL(f)) \\
&= L(fM(g)) + L(gM(f)) - M(fL(g)) - M(gL(f)) \\
&= fL(M(g)) + M(g)L(f) + gL(M(f)) + M(f)L(g) - fM(L(g)) - L(g)M(f) \\
&- gM(L(f)) - L(f)M(g) \\
&= f\{L(M(g)) - M(L(g))\} + g\{L(M(f)) - M(L(f))\} \\
&= f[L, M](g) + g[L, M](f),
\end{aligned}$$

concluindo assim o que queríamos.
O conjunto $\mathscr{X}(\Omega)$ munido do colchete de Lie é uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{C}$, pois $\mathscr{X}(\Omega)$ é um espaço vetorial e o operador definido em (2.2) é bilinear, antissimétrico e satisfaz a identidade de Jacobi.

Agora, definamos a multiplicação de um campo vetorial por uma função suave e vejamos que essa operação é fechada em $\mathscr{X}(\Omega)$.

Definição 2.20. *Dado $g \in C^\infty(\Omega)$ e $L \in \mathscr{X}(\Omega)$ definamos $gL : C^\infty(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\Omega)$, por*

$$(gL)(f) = gL(f) \tag{2.3}$$

para todo $f \in C^\infty(\Omega)$.

Temos que $gL \in \mathscr{X}(\Omega)$, pois dados $\alpha \in \mathbb{C}$ e $f, h \in C^\infty(\Omega)$ segue que,

$$(gL)(\alpha f + h) = gL(\alpha f + h) = g(\alpha L(f) + L(h)) = \alpha gL(f) + gL(h) = \alpha(gL)(f) + (gL)(h)$$

isto é, gL é linear sobre $\mathbb{C}$. Temos também

$$(gL)(fh) = gL(fh) = g(fL(h) + hL(f)) = fgL(h) + hgL(f) = f(gL)(h) + h(gL)(f)$$

isto é, gL satisfaz a regra de Leibniz.

Além disso, o grupo abeliano $(\mathscr{X}(\Omega), +)$ em conjunto com a operação definida em (2.3), satisfaz as seguintes condições para $f, g \in C^\infty(\Omega)$ e $L, M \in \mathscr{X}(\Omega)$:

- $f(L+M) = fL + fM$,
- $(f+g)L = fL + gL$,
- $(fg)L = f(gL)$,
- $1_{C^\infty(\Omega)} L = L$,

onde $C^\infty(\Omega)$ é um anel e $1_{C^\infty(\Omega)}$ é sua identidade multiplicativa. Dessa forma, temos que $\mathscr{X}(\Omega)$ é um $C^\infty(\Omega)$-módulo.

2.1.2 Representação de um Campo Vetorial em Coordenadas Locais

Seja $(U, \mathbf{x})$ uma carta local em Ω e considere $L \in \mathscr{X}(U)$. Fixe $p \in U$ e escreva $\mathbf{x}(q) = (x_1(q), \ldots x_N(q))$, onde $q \in U$. Como $\mathbf{x}(p) \in \mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^N$ e $\mathbf{x}(U)$ é aberto, existe $r_p > 0$ tal que $B(\mathbf{x}(p), r_p) \subset \mathbf{x}(U)$. Tome $V = \mathbf{x}^{-1}(B(\mathbf{x}(p), r_p)) \subset U$. É claro que $p \in V$. Ainda, se $a = (a_1, \ldots, a_N) = \mathbf{x}(p)$ então $\mathbf{x}(V) = B(a, r_p)$.

Assim, dado $f \in C^\infty(U)$ e definindo $f^* = f \circ \mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(U) \longrightarrow \mathbb{C}$, temos que $f^* \in C^\infty(\mathbf{x}(U))$. Para cada $(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbf{x}(V)$, tome a função $\phi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\phi(t) = f^*(a + t(\mathbf{x} - a)) = f^*(a_1 + t(x_1 - a_1), \ldots, a_N + t(x_N - a_N)).$$

Logo, $\phi \in C^\infty([0,1])$ e pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$\phi(1) = \phi(0) + \int_0^1 \phi'(t)dt,$$

donde,

$$\begin{aligned} f^*(x_1, \ldots, x_N) &= f^*(a_1, \ldots, a_N) + \int_0^1 \sum_{j=1}^N \frac{\partial f^*}{\partial x_j}(a + t(\mathbf{x} - a))(x_j - a_j)dt \\ &= f^*(a_1, \ldots, a_N) + \sum_{j=1}^N \int_0^1 \frac{\partial f^*}{\partial x_j}(a + t(\mathbf{x} - a))dt(x_j - a_j) \\ &= f^*(a_1, \ldots, a_N) + \sum_{j=1}^N h_j(x_1, \ldots, x_N)(x_j - a_j), \end{aligned}$$

onde, $h_j \in C^\infty(\mathbf{x}(V))$, dada por $h_j(x_1, \ldots, x_N) = \int_0^1 \frac{\partial f^*}{\partial x_j}(a + t(\mathbf{x} - a))dt$, para todo $j = 1, \ldots, N$.

Tome ainda, $g_j = h_j \circ \mathbf{x} \in C^\infty(V)$. Assim,

$$f(q) = f(p) + \sum_{j=1}^{N} g_j(q)(x_j(q) - x_j(p)), \tag{2.4}$$

para todo $q \in V$. Aplicando $L \in \mathscr{X}(U)$ em (2.4) e da regra de Leibniz vem que

$$L(f)(q) = \sum_{j=1}^{N} [x_j(q)L(g_j)(q) + g_j(q)L(x_j)(q) - x_j(p)L(g_j)(q)]$$

para todo $q \in V$. Em particular, para $p \in V$ temos que

$$L(f)(p) = \sum_{j=1}^{N} g_j(p)L(x_j)(p). \tag{2.5}$$

Mas,

$$g_j(p) = h_j(\mathbf{x}(p)) = h_j(a) = \int_0^1 \frac{\partial f^*}{\partial x_j}(a)dt = \frac{\partial f^*}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial f^*}{\partial x_j}(\mathbf{x}(p)) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(p).$$

Logo,

$$L(f)(p) = \sum_{j=1}^{N} L(x_j)(p) \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(p).$$

Como $p \in U$ e $f \in C^\infty(U)$ são arbitrários, obtemos a representação de L em coordenadas locais $(x_1, \ldots, x_N)$:

$$L = \sum_{j=1}^{N} L(x_j)\frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{2.6}$$

Observação 2.21. Para todo $j, k = 1, \ldots, N$ vale que

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_k} = \delta_{jk}.$$

De fato, dado $q = (q_1, \ldots, q_N) \in \mathbf{x}(U) \subset \mathbb{R}^N$ temos $x_j \circ \mathbf{x}^{-1}(q) = q_j$, pois

$$Id = \mathbf{x} \circ \mathbf{x}^{-1} = (x_1, \ldots, x_N) \circ \mathbf{x}^{-1} = (x_1 \circ \mathbf{x}^{-1}, \ldots, x_N \circ \mathbf{x}^{-1}),$$

donde,

$$q = Id(q) = (x_1 \circ \mathbf{x}^{-1}(q), \ldots, x_N \circ \mathbf{x}^{-1}(q)),$$

e como, $q = (q_1, \ldots, q_N)$, temos $x_j \circ \mathbf{x}^{-1}(q) = q_j$.

Agora, para cada $p \in U$, denote $q = \mathbf{x}(p) \in \mathbf{x}(U)$. Assim, se $j \neq k$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_j}{\partial x_k}(p) = \frac{\partial(x_j \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial x_k}(\mathbf{x}(p)) &= \frac{\partial(x_j \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial x_k}(q) \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{(x_j \circ \mathbf{x}^{-1})(q + te_k) - (x_j \circ \mathbf{x}^{-1})(q)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{q_j - q_j}{t} = 0
\end{aligned}$$

e, se $j = k$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x_j}{\partial x_j}(p) = \frac{\partial(x_j \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial x_j}(\mathbf{x}(p)) &= \frac{\partial(x_j \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial x_j}(q) \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{(x_j \circ \mathbf{x}^{-1})(q + te_j) - (x_j \circ \mathbf{x}^{-1})(q)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{q_j + t - q_j}{t} = 1,
\end{aligned}$$

como queríamos.

Agora, voltando a equação (2.6), afirmamos que o conjunto $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_N}\right\}$ é uma base para o $C^\infty(U)$-módulo $\mathscr{X}(U)$. Para isto, resta verificar que o conjunto $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_N}\right\}$ é L.I. De fato, sejam $g_1, \ldots, g_N \in C^\infty(U)$ tais que

$$\sum_{j=1}^{N} g_j \frac{\partial}{\partial x_j} = 0. \tag{2.7}$$

Defina $f_k = \rho_k \circ \mathbf{x}$, onde $\rho_k : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ é dada por $\rho_k(\mathbf{y}) = y_k$ para todo $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ e para todo $k = 1, \ldots, N$. Temos que $f_k \in C^\infty(U)$. Ainda dado $p \in U$

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \frac{\partial(\rho_k \circ \mathbf{x})}{\partial x_j} = \frac{\partial \rho_k(x_1, \ldots, x_N)}{\partial x_j} = \frac{\partial x_k}{\partial x_j} = \delta_{kj} \qquad j, k = 1, \ldots, N.$$

Assim,

$$\sum_{j=1}^{N} g_j \frac{\partial f_k}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{N} g_j \delta_{kj} = g_k, \qquad k = 1, \ldots, N.$$

Por outro lado,

$$\sum_{j=1}^{N} g_j \frac{\partial f_k}{\partial x_j} = 0 \qquad k = 1, \ldots, N.$$

Logo, $g_k = 0$ para todo $k = 1, \ldots, N$. Portanto, $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_N}\right\}$ é L.I.

2.2 ESTRUTURAS FORMALMENTE INTEGRÁVEIS

Iniciaremos a seção com o conceito de germes de funções suaves em um ponto $p \in \Omega$. Em seguida, definiremos vetores tangentes complexos e mostraremos a sua representação local. Nosso objetivo principal é definir estruturas formalmente integráveis, para o qual são necessários os conceitos de fibrado tangente complexificado e subfibrado tangente.

Seja $p \in \Omega$ e denote por $\mathcal{B}_p$ o conjunto de todos os pares (V, f), onde $V \subset \Omega$ é uma vizinhança aberta de p e $f \in C^\infty(V)$. Em $\mathcal{B}_p$ defina a seguinte relação de equivalência: $(V_1, f_1) \sim (V_2, f_2)$ se, e somente se, existe uma vizinhança V de p, com $V \subset V_1 \cap V_2$, tal que $f_1|_V = f_2|_V$. A reflexividade e simetria dessa relação são triviais. Verifiquemos a transitividade. Suponha que $(V_1, f_1) \sim (V_2, f_2)$ e $(V_2, f_2) \sim (V_3, f_3)$, então existem U e V vizinhanças de p com $U \subset V_1 \cap V_2$ e $V \subset V_2 \cap V_3$, tais que $f_1|_U = f_2|_U$ e $f_2|_V = f_3|_V$. Tome $W = U \cap V \subset V_1 \cap V_3$. Temos que $p \in W$ e

$$(f_1 - f_3)|_W = (f_1 - f_3)|_{U \cap V} = f_1|_{U\cap V} - f_3|_{U \cap V} = f_2|_{U\cap V} - f_2|_{U\cap V} = 0,$$

isto é, $f_1|_W = f_3|_W$. Logo, $(V_1, f_1) \sim (V_3, f_3)$.

Definição 2.22. *O germe de uma função $f \in C^\infty(\Omega)$ no ponto p é o elemento no espaço quociente $C^\infty(p) = \mathcal{B}_p/\sim$. Denotamos por $\underline{f}$, onde $\underline{f} = \{g \in C^\infty(\Omega);\ f \sim g\}$.*

Definiremos agora algumas operações sobre $C^\infty(p)$. Sejam $\underline{f}, \underline{g} \in C^\infty(p)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Como $f \in C^\infty(V)$ e $g \in C^\infty(U)$, onde $V, U \subset \Omega$ são abertos contendo p, temos que $f \in C^\infty(W)$ e $g \in C^\infty(W)$, onde $W = V \cap U \subset \Omega$ é um aberto contendo p. Logo, $f + g \in C^\infty(W)$ e $\alpha f \in C^\infty(V)$, donde $(W, f+g) \in \mathcal{B}_p$ e $(V, \alpha f) \in \mathcal{B}_p$. Defina

$$\underline{f} + \underline{g} = \underline{f+g} \quad \text{e} \quad \alpha \underline{f} = \underline{\alpha f}. \tag{2.8}$$

Observe que a definição das operações independe da escolha dos representantes de $\underline{f}$ e $\underline{g}$, pois dados $\tilde{f} \in \underline{f}$ e $\tilde{g} \in \underline{g}$ temos que $(V, f) \sim (\tilde{V}, \tilde{f})$, isto é, existe $V' \subset V \cap \tilde{V}$ aberto contendo p tal que $f|_{V'} = \tilde{f}|_{V'}$ e, que $(U, g) \sim (\tilde{U}, \tilde{g})$, isto é, existe $U' \subset U \cap \tilde{U}$ aberto contendo p tal que $g|_{U'} = \tilde{g}|_{U'}$. Assim, $V' \cap U' \subset V \cap \tilde{V}$ é um aberto contendo p com $f|_{V'\cap U'} = \tilde{f}|_{V'\cap U'}$ e, $V' \cap U' \subset U \cap \tilde{U}$ é um aberto contendo p com $g|_{V'\cap U'} = \tilde{g}|_{V'\cap U'}$.
Logo, $V' \cap U' \subset W \cap (\tilde{V} \cap \tilde{U})$ é um aberto contendo p tal que $(f+g)|_{V'\cap U'} = (\tilde{f} + \tilde{g})|_{V'\cap U'}$. Portanto, $(W, f+g) \sim (\tilde{V} \cap \tilde{U}, \tilde{f} + \tilde{g})$, o que implica $\tilde{f} + \tilde{g} \in \underline{f+g}$. Ainda, como $V' \subset V \cap \tilde{V}$ é um aberto contendo p com $(\alpha f)|_{V'} = (\alpha \tilde{f})|_{V'}$, temos que $(V, \alpha f) \sim (\tilde{V}, \alpha \tilde{f})$, donde $\alpha \tilde{f} \in \underline{\alpha f}$.

Assim, concluímos que $C^\infty(p)$ é um espaço vetorial complexo. Agora, analogamente à soma, definimos $\underline{f}\,\underline{g} = \underline{fg}$.

Observação 2.23. O conjunto $C^\infty(p)$ é uma álgebra sobre $\mathbb{C}$.

Observação 2.24. Existe um homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebra $H : C^\infty(p) \longrightarrow \mathbb{C}$ definido por $H(\underline{f}) = f(p)$, para todo $\underline{f} \in C^\infty(p)$. De fato, primeiramente note que H está bem definida, pois dado $\underline{f} = \underline{g} \in C^\infty(p)$, temos $f|_V = g|_V$ para algum $V \subset \Omega$ aberto contendo p. Em particular, $f(p) = g(p)$, isto é, $H(\underline{f}) = H(\underline{g})$. Agora, sejam $\underline{f}, \underline{g} \in C^\infty(p)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Então,

$$\begin{aligned} H(\underline{f} + \underline{g}) &= H(\underline{f+g}) = f(p) + g(p) = H(\underline{f}) + H(\underline{g}) \\ H(\underline{f}\ \underline{g}) &= H(\underline{fg}) = f(p)g(p) = H(\underline{f})H(\underline{g}) \\ H(\alpha\underline{f}) &= H(\underline{\alpha f}) = \alpha f(p) = \alpha H(\underline{f}), \end{aligned}$$

como queríamos.

Definição 2.25. *Um vetor tangente complexo à Ω em p é uma aplicação $v : C^\infty(p) \longrightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo as seguintes condições:*

(a) *v é linear sobre $\mathbb{C}$;*

(b) $v(\underline{f}\ \underline{g}) = f(p)v(\underline{g}) + g(p)v(\underline{f}), \quad \underline{f}, \underline{g} \in C^\infty(p).$

Notação 2.26. Denotamos o conjunto de todos os vetores tangentes complexos em p por $\mathbb{C}T_p\Omega$ e o chamamos de espaço tangente à Ω em p.

Observação 2.27. $\mathbb{C}T_p\Omega$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$.

O seguinte exemplo nos mostra que a cada campo vetorial complexo podemos associar um vetor tangente complexo.

Exemplo 2.28. Seja $L \in \mathscr{X}(\Omega)$ e considere $L_p : C^\infty(p) \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $L_p(\underline{f}) = L(f)(p)$, para todo $\underline{f} \in C^\infty(p)$. Então, $L_p \in \mathbb{C}T_p\Omega$. De fato, note que L_p está bem definido, pois dados $\underline{f}, \underline{g} \in C^\infty(p)$ tais que $\underline{f} = \underline{g}$, temos que $f|_V = g|_V$ para algum $V \subset \Omega$ aberto contendo p. Logo, $f(p) = g(p)$ e, por (2.6),

$$L(f)(p) = \sum_{j=1}^{N} L(x_j)(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(f)(p) = \sum_{j=1}^{N} L(x_j)(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(g)(p) = L(g)(p),$$

donde $L_p(\underline{f}) = L_p(\underline{g})$. Agora, dados $\alpha \in \mathbb{C}$ e $\underline{f}, \underline{g} \in C^\infty(p)$, temos

$$L_p(\alpha\underline{f} + \underline{g}) = L_p(\underline{\alpha f + g}) = L(\alpha f + g)(p) = \alpha L(f)(p) + L(g)(p) = \alpha L_p(\underline{f}) + L_p(\underline{g})$$

e

$$L_p(\underline{f}\ \underline{g}) = L_p(\underline{fg}) = L(fg)(p) = f(p)L(g)(p) + g(p)L(f)(p) = f(p)L_p(\underline{g}) + g(p)L_p(\underline{f}).$$

Portanto, $L_p \in \mathbb{C}T_p\Omega$.

Reciprocamente temos o seguinte exemplo:

Exemplo 2.29. Suponha que para cada $p \in \Omega$ temos um elemento $v_p \in \mathbb{C}T_p\Omega$ tal que $p \longmapsto v_p(\underline{f})$ seja $C^\infty(\Omega)$, para todo $f \in C^\infty(\Omega)$. Então existe $L \in \mathscr{X}(\Omega)$ tal que $L_p = v_p$, para todo $p \in \Omega$. De fato, defina $L : C^\infty(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\Omega)$ dada por $L(f)(p) = v_p(\underline{f})$ para todo $f \in C^\infty(\Omega)$ e para todo $p \in \Omega$. Temos que, dado $f \in C^\infty(\Omega)$, segue por hipótese que $L(f) \in C^\infty(\Omega)$. Além disso, L está bem definida, pois v_p está bem definido. Agora, dados $f, g \in C^\infty(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, temos que

$$L(\alpha f + g)(p) = v_p(\underline{\alpha f + g}) = v_p(\alpha \underline{f} + \underline{g}) = \alpha v_p(\underline{f}) + v_p(\underline{g}) = \alpha L(f)(p) + L(g)(p)$$

e

$$L(fg)(p) = v_p(\underline{fg}) = v_p(\underline{f}\ \underline{g}) = f(p)v_p(\underline{g}) + g(p)v_p(\underline{f}) = f(p)L(g)(p) + g(p)L(f)(p),$$

donde $L \in \mathscr{X}(\Omega)$ e $L_p = v_p$ para todo $p \in \Omega$.

Dos Exemplos (2.28) e (2.29) concluímos que campos vetoriais complexos e vetores tangente complexos são essencialmente a mesma coisa.

Proposição 2.30. *Se $v \in \mathbb{C}T_p\Omega$ e f é constante, então $v(\underline{f}) = 0$.*

Demonstração. Analogamente à demonstração da Proposição 2.14. □

Assim como para campos vetoriais (cf. Equação(2.6)), obtemos a seguir a representação local para vetores tangentes.

Dados $p \in U$, $(U, \mathbf{x})$ uma carta local em Ω e $L \in \mathscr{X}(U)$, pela construção feita na Subseção 2.1.2 temos que existe $V \subset U$ aberto contendo p tal que se $f \in C^\infty(V)$, $\mathbf{x}(V) = B(a, r_p)$ e $a = \mathbf{x}(p)$, com

$$f(q) = f(p) + \sum_{j=1}^{N} g_j(q)(x_j(q) - x_j(p)), \qquad \text{para} \quad \text{todo} \quad q \in V.$$

Assim,

$$\underline{f} = \underline{f(p)} + \sum_{j=1}^{N} \underline{g_j}(\underline{x_j} - \underline{x_j(p)}), \qquad \text{para} \quad \text{todo} \quad \underline{f} \in C^\infty(p).$$

Logo, dado $v \in \mathbb{C}T_p\Omega$ temos

$$v(\underline{f}) = \sum_{j=1}^{N} g_j(p)v(\underline{x_j}) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)v(\underline{x_j}) = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p (\underline{f})v(\underline{x_j}).$$

Como $\underline{f} \in C^\infty(p)$ é arbitrário, temos que

$$v = \sum_{j=1}^{N} v(\underline{x_j}) \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p. \tag{2.9}$$

De maneira análoga ao feito para campos vetoriais (cf. Página37), prova-se que o conjunto $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p; j=1,\ldots,N\right\}$ é L.I, sendo assim uma base de $\mathbb{C}T_p\Omega$.

Definição 2.31. *Definimos o fibrado tangente complexificado de Ω como sendo a união disjunta*

$$\mathbb{C}T\Omega = \bigcup_{p\in\Omega} \mathbb{C}T_p\Omega.$$

O próximo conceito é o de subfibrado tangente, o qual será muito usado em nosso estudo.

Definição 2.32. *Seja $\mathcal{V}_p$ um subespaço vetorial de $\mathbb{C}T_p\Omega$ para cada $p\in\Omega$. Dizemos que a união disjunta $\mathcal{V}=\bigcup_{p\in\Omega}\mathcal{V}_p$ é um subfibrado tangente, se as seguintes condições forem satisfeitas:*

(i) $\dim \mathcal{V}_p = n$, *para todo $p\in\Omega$;*

(ii) Dado $p_0\in\Omega$, existem U_0 aberto contendo p_0 e campos vetoriais $L_1,\ldots,L_n\in\mathscr{X}(U_0)$ tais que $\mathcal{V}_p=\operatorname{span}\{L_{1p},\ldots,L_{np}\}$ para cada $p\in U_0$.

O espaço vetorial $\mathcal{V}_p$ é chamado a fibra de $\mathcal{V}$ em p.

Para uma explanação da definição acima, seja $\Omega=\mathbb{R}^2$ e considere

$$\mathbb{C}T_p\Omega = \operatorname{span}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p\right\}.$$

Considerando as fibras $\mathcal{V}_p=\operatorname{span}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p\right\}$ temos que as condições (i) e (ii) da definição são satisfeitas. Agora se escolhermos $\mathcal{V}_p$ como abaixo:

$$\mathcal{V}_p = \begin{cases} \operatorname{span}\left\{\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)_p\right\}, & \text{se } \Re(p)>0; \\ \\ \operatorname{span}\left\{\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right)_p\right\}, & \text{se } \Re(p)\leq 0. \end{cases}$$

temos que a condição (i) da definição é satisfeita, porém a condição (ii) não é satisfeita, o que nos mostra uma decontinuidade em torno de qualquer ponto sobre o eixo y.

Definição 2.33. *Seja $\mathcal{V}$ um subfibrado tangente e $W\subset\Omega$ aberto. Uma seção de $\mathcal{V}$ sobre W é um elemento L de $\mathscr{X}(W)$ tal que $L_p\in\mathcal{V}_p$ para todo $p\in W$.*

Intuitivamente, observe que cada seção é uma equação do sistema de equações que queremos estudar.

Finalmente definiremos estrutura formalmente integrável.

Definição 2.34. *Uma estrutura formalmente integrável sobre Ω é um subfibrado tangente $\mathcal{V}$ que satisfaz a condição involutiva (ou de Frobenius): Se $W \subset \Omega$ é aberto e $L, M \in \mathscr{X}(W)$ são seções de $\mathcal{V}$ sobre W então $[L, M]$ é uma seção de $\mathcal{V}$ sobre W.*

Definição 2.35. *Uma solução (clássica) para a estrutura formalmente integrável $\mathcal{V}$ sobre Ω é uma função $u \in C^1(\Omega)$ tal que $Lu = 0$ para cada seção L de $\mathcal{V}$ definida em um subconjunto aberto de Ω.*

Exemplo 2.36. Seja $\Omega = \mathbb{R}^2$ e considere

$$\mathcal{V}_p = \operatorname{span}\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p \right\}$$

para todo $p \in \mathbb{R}^2$. Temos que o subfibrado tangente $\mathcal{V}$ é uma estrutura formalmente integrável. De fato, pela Definição 2.34 basta verificarmos que $\mathcal{V}$ satisfaz a condição de Frobenius. Assim, sejam $W \subset \mathbb{R}^2$ aberto e $L, M \in \mathscr{X}(W)$ seções de $\mathcal{V}$ sobre W. Então

$$L = a\frac{\partial}{\partial x} \quad \text{e} \quad M = b\frac{\partial}{\partial x},$$

onde $a, b \in C^\infty(W)$. Logo,

$$\begin{aligned}
[L, M](f) &= L(M(f)) - M(L(f)) \\
&= L\left(b\frac{\partial f}{\partial x}\right) - M\left(a\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\
&= a\frac{\partial}{\partial x}\left(b\frac{\partial f}{\partial x}\right) - b\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\
&= a\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + ab\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - b\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} - ba\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\
&= \left(a\frac{\partial b}{\partial x} - b\frac{\partial a}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \text{para todo} \quad f \in C^\infty(W).
\end{aligned}$$

Portanto, $[L, M] = \left(a\frac{\partial b}{\partial x} - b\frac{\partial a}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}$, donde $[L, M]$ é seção de $\mathcal{V}$ sobre W. Além disso, considere a aplicação $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $u(p) = c$ para todo $p \in \mathbb{R}^2$. É claro que $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Como $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, temos que u é solução clássica para a estrutura formalmente integrável $\mathcal{V}$ sobre $\mathbb{R}^2$.

Utilizaremos o próximo resultado na demonstração da proposição subsequente.

Lema 2.37. *Sejam $U \subset \Omega$ aberto não vazio e $L_1, \ldots, L_n \in \mathscr{X}(U)$. Se, para cada $p \in U$, o conjunto $\{L_{1p}, \ldots, L_{np}\}$ é L.I em $\mathbb{C}T_p\Omega$ então o conjunto $\{L_1, \ldots, L_n\}$ é L.I em $\mathscr{X}(U)$.*

Demonstração. De fato, sejam $f_1, \ldots, f_n \in C^\infty(U)$ tais que

$$\sum_{j=1}^{n} f_j L_j = 0.$$

Então,

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(p)L_{jp} = 0$$

para todo $p \in U$. Como $\{L_{1p}, \ldots, L_{np}\}$ é L.I, temos que $f_j(p) = 0$, para todo $j = 1, \ldots, n$ e para todo $p \in U$. Logo, $f_j = 0$, para todo $j = 1, \ldots, n$, como queríamos. $\square$

Proposição 2.38. *Seja $\mathcal{V}$ uma estrutura formalmente integrável sobre Ω e fixe $p \in \Omega$. Considere uma carta local $(U, \boldsymbol{x})$ com $p \in U$ e campos vetoriais $L_1, \ldots, L_n \in \mathscr{X}(U)$ tais que $\{L_{1q}, \ldots, L_{nq}\}$ é uma base de $\mathcal{V}_q$ para cada $q \in U$. Então, existem $c_{jk}^{\nu} \in C^\infty(U)$ com $j, k, \nu = 1, \ldots, n$ tais que*

$$[L_j, L_k] = \sum_{\nu=1}^{n} c_{jk}^{\nu} L_\nu, \qquad j, k = 1, \ldots, n.$$

Demonstração. Com efeito, como $L_j \in \mathscr{X}(U)$ para todo $j = 1 \ldots, n$, temos que existem $a_{jk} \in C^\infty(U)$ tais que

$$L_j = \sum_{j=1}^{N} a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Pelo Lema 2.37 temos que $\{L_1, \ldots, L_n\}$ é L.I, assim, a matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1N} & a_{2N} & \cdots & a_{nN} \end{pmatrix}$$

tem posto n e, após uma reoordenação dos índices podemos dizer que a matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

é invertível.

Afirmamos que o conjunto $\{L_1, \ldots, L_n, \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_N}\}$ é uma base para o $C^\infty(U)$-módulo $\mathscr{X}(U)$. De fato, considere

$$P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & Id \end{pmatrix},$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{1,n+1} & a_{2,n+1} & \cdots & a_{n,n+1} \\ a_{1,n+2} & a_{2,n+2} & \cdots & a_{n,n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1N} & a_{2N} & \cdots & a_{nN} \end{pmatrix}$$

e Id é a matriz identidade de ordem $N-n$. Note que P é a matriz dos coeficientes dos vetores $L_1, \ldots, L_n, \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_N}$ na base canônica de $\mathscr{X}(U)$. Como $\det(P) = \det(A) \neq 0$, P é invertível, donde $\{L_1, \ldots, L_n, \frac{\partial}{\partial x_{n+1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_N}\}$ é uma base para o $C^\infty(U)$-módulo $\mathscr{X}(U)$.

Agora, como para todo $j,k = 1, \ldots, n$, $L_j, L_k \in \mathscr{X}(U)$ são seções de $\mathcal{V}$ sobre U e como $\mathcal{V}$ é uma estrutura formalmente integrável sobre Ω, temos que $[L_j, L_k] \in \mathscr{X}(U)$ e $[L_j, L_k]_q \in \mathcal{V}_q$ para todo $q \in U$. Assim, existem $c_{jk}^\nu \in C^\infty(U)$, $j,k = 1, \ldots, n$ e $\nu = 1, \ldots, N$ tais que

$$[L_j, L_k] = \sum_{\nu=1}^{n} c_{jk}^\nu L_\nu + \sum_{\nu=n+1}^{N} c_{jk}^\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}.$$

Além disso, como para todo $q \in U$ o conjunto $\{L_{1q}, \ldots, L_{nq}\}$ é base de $\mathcal{V}_q$, temos que

$$\sum_{\nu=n+1}^{N} c_{jk}^\nu(q) \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)_q = 0.$$

Como $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)_q ; \nu = n+1 \ldots, N\right\}$ é L.I segue que $c_{jk}^\nu(q) = 0$ para todo $q \in U$, $j,k = 1, \ldots, n$ e $\nu = n+1, \ldots, N$. Portanto, $c_{jk}^\nu = 0$, com $j,k = 1, \ldots, n$ e $\nu = n+1, \ldots, N$, donde vem que

$$[L_j, L_k] = \sum_{\nu=1}^{n} c_{jk}^\nu L_\nu, \qquad j,k = 1, \ldots, n.$$

□

2.3 Formas Diferenciais

Na presente seção, definiremos o dual do $C^\infty(\Omega)$-módulo $\mathscr{X}(\Omega)$, que é o espaço das formas diferenciais e o dual do espaço $\mathbb{C}T_p\Omega$. Além disso, definiremos o diferencial de uma função $C^\infty(\Omega)$ e, de forma rápida, estudaremos as formas diferencias de grau r e definiremos o produto exterior de 1-formas.

Definição 2.39. *Denotaremos por $\mathfrak{N}(\Omega)$ o dual do $C^\infty(\Omega)$-módulo $\mathscr{X}(\Omega)$ e chamaremos seus elementos de formas diferenciais sobre Ω de grau 1 ou 1-formas. Assim, uma 1-forma em Ω é* *uma aplicação $C^\infty(\Omega)$-linear $\omega : \mathscr{X}(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\Omega)$, ou seja, $\omega(fL+M) = f\omega(L)+\omega(M)$ para todo $f \in C^\infty(\Omega)$ e para todo $L, M \in \mathscr{X}(\Omega)$.*

Proposição 2.40. *Sejam $\omega \in \mathfrak{N}(\Omega)$, $L \in \mathscr{X}(\Omega)$ e suponha que L se anula em um subconjunto aberto $V \subset \Omega$. Então $\omega(L)$ também se anula em V.*

Demonstração. Seja $p \in V$. Como V é aberto, existe um aberto básico $U \subset \Omega$ tal que $p \in U \subset V$. Considere a carta local $(U, \mathbf{x})$ e $g \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ tal que $0 \leq g \leq 1$, $g|_U = 1$ e $g|_{V^c} = 0$. Afirmamos que $L = (1-g)L$. Com efeito, dado $q \in \Omega$ temos que
se $q \in V$, então $[(1-g)L](q) = (1-g(q))0 = 0 = L(q)$,
e se $q \notin V$, então $[(1-g)L](q) = (1-0)L(q) = L(q)$.

Portanto, $L = (1-g)L$. Logo, como ω é $C^\infty(\Omega)$-linear e $g(p) = 1$, segue que

$$\omega(L)(p) = \omega[(1-g)L](p) = (1-g)(p)\omega(L)(p) = (1-g(p))\omega(L)(p) = 0.$$

Pela abitrariedade de p, temos que $\omega(L) = 0$ em V. $\square$

Exemplo 2.41. Seja $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tal que $\varphi(x, y) = 0$, se $\|(x, y)\| > R$ onde $R > 0$. Considere $L : C^\infty(\mathbb{R}^2) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^2)$ dada por $L(f)(p) = \varphi(p)\frac{\partial f}{\partial x}(p)$, para toda $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Temos que $L \in \mathscr{X}(\mathbb{R}^2)$, pois $\frac{\partial}{\partial x} \in \mathscr{X}(\mathbb{R}^2)$. Ainda se $\|p\| > R$, então $\varphi(p) = 0$, logo L se anula em $\|p\| > R$ e, da Proposição 2.40 temos que $\omega(L)$ também se anula em $\|p\| > R$.

Como consequência da Proposição 2.40 é possível definir a restrição de uma 1-forma $\omega \in \mathfrak{N}(\Omega)$ sobre $W \subset \Omega$ aberto não vazio. Tal consequência é o conteúdo da próxima observação.

Observação 2.42. Dado $\omega \in \mathfrak{N}(\Omega)$ existe $\omega|_W \in \mathfrak{N}(W)$ que torna o diagrama abaixo comutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{X}(\Omega) \arrow[r, "\omega"] \arrow[d] & C^\infty(\Omega) \arrow[d] \\
\mathscr{X}(W) \arrow[r, "\omega|_W"] & C^\infty(W).
\end{tikzcd}$$

De fato, sejam $W \subset \Omega$ aberto não vazio e $\omega \in \mathfrak{N}(\Omega)$. Defina para cada $L \in \mathscr{X}(W)$

$$\omega|_W(L)(p) = \omega(\tilde{L})(p),$$

onde $\tilde{L} \in \mathscr{X}(\Omega)$ e $\tilde{L} = L$ em alguma vizinhança de p. Observe que $\omega|_W$ está bem definida. Com efeito, sejam $L, M \in \mathscr{X}(W)$ tais que $L = M$. Considere $p \in W$, $\omega|_W(L)(p) = \omega(\tilde{L})(p)$ e $\omega|_W(M)(p) = \omega(\tilde{M})(p)$, onde $\tilde{L}, \tilde{M} \in \mathscr{X}(\Omega)$ são tais que $\tilde{L}|_V = L|_V$ e $\tilde{M}|_U = M|_U$ com V e U vizinhanças de p. Então, $(\tilde{M} - \tilde{L})|_{U\cap V} = 0$. Da Proposição 2.40 temos que $[\omega(\tilde{M} - \tilde{L})]|_{U\cap V} = 0$. Como $p \in U \cap V$ segue que $\omega(\tilde{M} - \tilde{L})(p) = 0$, donde $\omega(\tilde{M})(p) = \omega(\tilde{L})(p)$. Além disso, é fácil verificar que $\omega|_W \in \mathfrak{N}(W)$ e que o diagrama é comutativo.

Lema 2.43. *Sejam $\omega \in \mathfrak{N}(\Omega)$, $L \in \mathscr{X}(\Omega)$ e suponha que $L_p = 0$. Então, $\omega(L)(p) = 0$.*

Demonstração. Seja $(U, \mathbf{x})$ uma carta local em Ω e considere $p \in U$. Dado $L_U \in \mathscr{X}(U)$ temos que

$$L_U = \sum_{j=1}^{N} L_U(x_j)\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Logo, pela Observação 2.42e pelo Exemplo 2.28 segue que

$$\begin{aligned}
\omega(L)(p) &= \omega|_U(L_U)(p) \\
&= \omega|_U\left(\sum_{j=1}^{N} L_U(x_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(p) \\
&= \sum_{j=1}^{N} L_U(x_j)(p)\omega|_U\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(p) \\
&= \sum_{j=1}^{N} L_p(\underline{x_j})\omega|_U\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)(p) = 0,
\end{aligned}$$

como queríamos. $\square$

Definição 2.44. *Definimos $\mathbb{C}T_p^*\Omega$ como sendo o dual de $\mathbb{C}T_p\Omega$ e o chamamos espaço cotangente complexo à Ω em p.*

Exemplo 2.45. A cada $\omega \in \mathfrak{N}(\Omega)$ associaremos um elemento $\omega_p \in \mathbb{C}T_p^*\Omega$ dado por

$$\omega_p(v) = \omega(L)(p),$$

onde $L \in \mathscr{X}(\Omega)$ é tal que $L_p = v$. Verifiquemos que ω_p está bem definida e que é linear. De fato, sejam $v, w \in \mathbb{C}T_p\Omega$ tais que $v = w$ e considere $L, M \in \mathscr{X}(\Omega)$ tais que $L_p = v$ e $M_p = w$. Então, $L_p = M_p$, donde $(L - M)_p = 0$. Assim, pelo Lema 2.43 temos que $\omega(L - M)(p) = 0$, o que implica que $\omega(L)(p) = \omega(M)(p)$, donde ω_p está bem definida. Agora sejam $\lambda \in \mathbb{C}$ e $v, w \in \mathbb{C}T_p\Omega$. Então $\lambda v + w = \lambda L_p + M_p = (\lambda L + M)_p$. Disto,

$$\omega_p(\lambda v + w) = \omega(\lambda L + M)(p) = \lambda\omega(L)(p) + \omega(M)(p) = \lambda\omega_p(v) + \omega_p(w).$$

Logo, ω_p é linear.

Reciprocamente, temos o seguinte exemplo:

Exemplo 2.46. Suponha que para cada $p \in \Omega$ temos um elemento $\eta_p \in \mathbb{C}T_p^*\Omega$ tal que $p \longmapsto \eta_p(L_p)$ seja $C^\infty(\Omega)$, para todo $L \in \mathscr{X}(\Omega)$. Então existe $\omega \in \mathfrak{N}(\Omega)$ tal que $\omega_p = \eta_p$, para todo $p \in \Omega$. De fato, defina $\omega : \mathscr{X}(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\Omega)$ dada por

$$\omega(L)(p) = \eta_p(L_p)$$

para todo $L \in \mathscr{X}(\Omega)$ e para todo $p \in \Omega$. Observe que como $L \in \mathscr{X}(\Omega)$, por hipótese temos $\omega(L) \in C^\infty(\Omega)$. Ainda, ω está bem definida, pois η_p está bem definida. Agora, dados $f \in C^\infty(\Omega)$ e $L, M \in \mathscr{X}(\Omega)$, temos que

$$\begin{aligned} \omega(fL+M)(p) = \eta_p((fL+M)_p) &= \eta_p(f(p)L_p + M_p) \\ &= f(p)\eta_p(L_p) + \eta_p(M_p) \\ &= f(p)\omega(L)(p) + \omega(M)(p) \\ &= (f\omega(L) + \omega(M))(p), \quad \text{para todo} \quad p \in \Omega. \end{aligned}$$

Portanto, $\omega(fL+M) = f\omega(L) + \omega(M)$, o que implica que ω é $C^\infty(\Omega)$-linear.

Seja $(U, \mathbf{x})$ uma carta local em Ω com $p \in U$. Para cada $j = 1, \ldots, N$ considere a aplicação $dx_j : \mathscr{X}(U) \longrightarrow C^\infty(U)$ dada por

$$dx_j\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \delta_{jk}, \quad \text{para todo} \quad j, k = 1, \ldots, N. \tag{2.10}$$

De (2.6) e (2.10) temos que $dx_j \in \mathfrak{N}(U)$, para todo $j = 1, \ldots, N$. Além disso, $\{dx_1, \ldots, dx_N\}$ é a base dual de $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_N}\right\}$ e, para todo $\omega \in \mathfrak{N}(U)$, temos que

$$\omega = \sum_{j=1}^{N} \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) dx_j, \tag{2.11}$$

onde $\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) \in C^\infty(U)$. De fato, seja $\omega \in \mathfrak{N}(U)$. Observe que dado $L \in \mathscr{X}(U)$ temos, por (2.6),

$$L = \sum_{j=1}^{N} L(x_j)\frac{\partial}{\partial x_j}, \tag{2.12}$$

onde $L(x_j) \in C^\infty(U)$, para todo $j = 1, \ldots, N$. Como dx_k é $C^\infty(U)$-linear para todo $k = 1, \ldots, N$, de (2.10) temos que

$$dx_k(L) = \sum_{j=1}^{N} L(x_j) dx_k\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{j=1}^{N} L(x_j)\delta_{kj} = L(x_k). \tag{2.13}$$

De (2.12) e (2.13) segue que

$$\omega(L) = \sum_{j=1}^{N} L(x_j)\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \sum_{j=1}^{N} dx_j(L)\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

Portanto,

$$\omega = \sum_{j=1}^{N} \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) dx_j.$$

Analogamente, temos que $\{dx_{1p}, \ldots, dx_{Np}\} \subset \mathbb{C}T_p^*\Omega$ é a base dual de

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_N}\right)_p \right\} \subset \mathbb{C}T_p\Omega$$

e que qualquer elemento $\eta \in \mathbb{C}T_p^*\Omega$ pode ser escrito da forma

$$\eta = \sum_{j=1}^{N} \eta \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p dx_{jp}, \tag{2.14}$$

onde $\eta\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p \in \mathbb{C}$ para todo $j = 1, \ldots, N$.

A próxima proposição mostra que o espaço cotangente é o conjunto de todas as 1-formas aplicada num ponto.

Proposição 2.47. $\mathbb{C}T_p^*\Omega = \{\omega_p;\ \omega \in \mathfrak{N}(\Omega)\}$.

Demonstração. Pelo Exemplo 2.45 segue que $\{\omega_p; \omega \in \mathfrak{N}(\Omega)\} \subset \mathbb{C}T_p^*\Omega$. Agora mostraremos que $\mathbb{C}T_p^*\Omega \subset \{\omega_p; \omega \in \mathfrak{N}(\Omega)\}$, isto é, dado $\eta \in \mathbb{C}T_p^*\Omega$ mostraremos que existe $\omega \in \mathfrak{N}(\Omega)$ tal que $\eta = \omega_p$. Assim, seja $\eta \in \mathbb{C}T_p^*\Omega$. Então existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{C}$ tais que

$$\eta = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j dx_{jp}.$$

Considere uma carta local $(U, \mathbf{x})$ em Ω com $p \in U$ e $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ tal que, $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi(p) = 1$ e $\varphi|_{U^c} = 0$. Defina, $\omega : \mathscr{X}(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\Omega)$ por

$$\omega(L)(q) = \varphi(q) \sum_{j=1}^{N} \alpha_j dx_j(L)(q), \qquad L \in \mathscr{X}(\Omega), q \in \Omega.$$

Veja que ω está bem definida, pois dados $L, M \in \mathscr{X}(\Omega)$ tais que $L = M$, temos que para todo $q \in \Omega$, $L(x_j)(q) = M(x_j)(q)$, o que implica $dx_j(L)(q) = dx_j(M)(q)$, por (2.13). Agora, dado $f \in C^\infty(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned} \omega(fL + M)(q) &= \varphi(q) \sum_{j=1}^{N} \alpha_j dx_j(fL + M)(q) \\ &= f\varphi(q) \sum_{j=1}^{N} \alpha_j dx_j(L)(q) + \varphi(q) \sum_{j=1}^{N} \alpha_j dx_j(M)(q) \\ &= f\omega(L)(q) + \omega(M)(q), \qquad q \in \Omega. \end{aligned}$$

Portanto, $\omega \in \mathfrak{N}(\Omega)$ e, dado $v = L_p \in \mathbb{C}T_p^*\Omega$ temos

$$\omega_p(v) = \omega(L)(p) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j dx_j(L)(p) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j dx_{jp}(v) = \eta(v).$$

Logo, $\eta = \omega_p$, como queríamos. □

Agora definiremos o diferencial de uma função $C^\infty(\Omega)$.

Definição 2.48. *Dado $f \in C^\infty(\Omega)$ definamos $df : \mathscr{X}(\Omega) \longrightarrow C^\infty(\Omega)$ pela fórmula*

$$df(L) = L(f), \quad L \in \mathscr{X}(\Omega) \tag{2.15}$$

Observação 2.49. Vale que $df \in \mathfrak{N}(\Omega)$. De fato, observe primeiramente que df está bem definida, pois L está bem definido. Agora, sejam $L, M \in \mathscr{X}(\Omega)$ e $g \in C^\infty(\Omega)$. Então,

$$df(gL + M) = (gL + M)(f) = gL(f) + M(f) = gdf(L) + df(M),$$

o que prova a observação.

Proposição 2.50. *Se f é constante então $df = 0$.*

Demonstração. Seja f uma função constante e tome $L \in \mathscr{X}(\Omega)$ qualquer. Então, pela Proposição 2.16 temos que $L(f) = 0$. Logo, $df(L) = L(f) = 0$. Pela arbitrariedade de L, segue que $df = 0$. □

A partir de (2.11), obtemos a representação usual em coordenadas locais

$$df = \sum_{j=1}^{N} df\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right) dx_j = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j. \tag{2.16}$$

Faremos agora uma breve pausa para estudarmos as formas diferenciais de grau r, as quais generalizam as 1-formas. Além disso, definiremos o produto exterior de 1-formas.

Seja $(U, \mathbf{x})$ uma carta local em Ω e recordemos que $\{dx_1, \ldots, dx_N\} \subset \mathfrak{N}(U)$ é a base dual do conjunto $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_N}\}$, o qual é a base do $C^\infty(U)$-módulo $\mathscr{X}(U)$. Considere o conjunto $I = \{i_1 < \ldots < i_r\} \subset \{1, 2, \ldots, N\}$ e escrevamos

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}.$$

Dada uma lista de r campos $L_1, \ldots, L_r \in \mathscr{X}(U)$, os quais podem ser escritos da forma

$$L_j \sum_{i=1}^{N} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad 1 \leq j \leq r,$$

e denotando por A a matriz $N \times r$, cujas entradas são as funções suaves a_{ij}, podemos definir a aplicação $dx_I : \mathscr{X}(U)^r \longrightarrow C^\infty(U)$ por

$$dx_I(L_1, \ldots, L_r) = \det(A_I),$$

onde A_I é a matriz $r \times r$ obtida de A selecionando as linhas cujos índices pertencem ao conjunto I.

Definição 2.51. *Uma forma diferencial ω de grau r, ou simplesmente uma r-forma, é a combinação linear*

$$\omega = \sum_{\alpha \in C^\infty} \alpha dx_I,$$

onde $I = \{i_1 < \ldots < i_r\} \subset \{1, 2, \ldots, N\}$ e $\deg dx_I = r$.

Notação 2.52. Denotamos o conjunto das r-formas por $\mathcal{A}_r$ e convencionaremos que as funções definidas em U são formas de grau 0.

Dessa forma, considere a aplicação $\Lambda : \mathfrak{N}(U)^r \longrightarrow \mathcal{A}_r$ dada na base por

$$\Lambda(dx_{i_1}, \ldots, dx_{i_r}) = \begin{cases} 0, & \text{se } i_p = i_q, \text{ para algum } p \text{ e } q; \\ \sigma(i_1, \ldots, i_r) dx_I, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

onde $\sigma(i_1, \ldots, i_r)$ é o sinal da permutação $1 \longmapsto i_1, \ldots, r \longmapsto i_r$. A aplicação Λ é chamada de produto exterior e é uma extensão do símbolo $\wedge$. Portanto, utilizaremos a convenção $\Lambda(dx_{i_1}, \ldots, dx_{i_r}) = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_r}$.

2.3.1 Fibrados e Subfibrados Cotangente

Nesta subseção, definiremos fibrado cotangente complexificado, subfibrado cotangente e o ortogonal de um subfibrado tangente, o qual é um subfibrado cotangente, a fim de nas seções posteriores definirmos estrutura localmente integrável. Ao final da subseção, veremos a definição de conjugado complexo dos conceitos estudados até então.

Definição 2.53. *Definimos o fibrado cotangente complexificado de Ω como sendo a união disjunta*

$$\mathbb{C}T^*\Omega = \bigcup_{p \in \Omega} \mathbb{C}T_p^*\Omega.$$

Definição 2.54. *Seja $\mathcal{W}_p$ um subespaço vetorial de $\mathbb{C}T_p^*\Omega$ para cada $p \in \Omega$. Dizemos que a união disjunta $\mathcal{W} = \bigcup_{p \in \Omega} \mathcal{W}_p$ é um subfibrado cotangente, se as seguintes condições forem satisfeitas:*

(i) $\dim \mathcal{W}_p = m$, *para todo* $p \in \Omega$*;*

(ii) Dado $p_0 \in \Omega$, existem U_0 aberto contendo p_0 e 1-formas $\omega_1, \ldots, \omega_m \in \mathfrak{N}(U_0)$ tais que $\mathcal{W}_p = \operatorname{span}\{\omega_{1p}, \ldots, \omega_{mp}\}$ para cada $p \in U_0$.

O espaço vetorial $\mathcal{W}_p$ é chamado a fibra de $\mathcal{W}$ em p.

Proposição 2.55. *Seja $\mathcal{V} = \bigcup_{p\in\Omega} \mathcal{V}_p$ um subfibrado tangente e considere o conjunto*

$$\mathcal{V}_p^{\perp} = \{\lambda \in \mathbb{C}T_p^*\Omega; \lambda = 0 \quad \textit{em} \quad \mathcal{V}_p\}$$

para cada $p \in \Omega$. Então $\mathcal{V}^{\perp} = \bigcup_{p\in\Omega} \mathcal{V}_p^{\perp}$ é um subfibrado cotangente m-dimensional, onde $m = N - n$.

Demonstração. Vamos primeiramente verificar que $\mathcal{V}_p^{\perp} \subset \mathbb{C}T_p^*\Omega$ é um subespaço vetorial m-dimensional, para cada $p \in \Omega$. Assim, sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{V}_p^{\perp}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, então

$$(\alpha\lambda_1 + \lambda_2)(v) = \alpha\lambda_1(v) + \lambda_2(v) = \alpha \cdot 0 + 0 = 0, \qquad v \in \mathcal{V}_p.$$

Logo, $\alpha\lambda_1 + \lambda_2 \in \mathcal{V}_p^{\perp}$, donde $\mathcal{V}_p^{\perp}$ é subespaço vetorial de $\mathbb{C}T_p^*\Omega$. Agora, dado $\{v_{1p}, \ldots, v_{np}\}$ uma base para $\mathcal{V}_p$, existem $v_{n+1p}, \ldots, v_{Np} \in \mathbb{C}T_p\Omega$ tais que $\{v_{1p}, \ldots, v_{Np}\}$ é uma base de $\mathbb{C}T_p\Omega$. Considere $\{u_{1p}, \ldots, u_{Np}\}$ a base dual de $\{v_{1p}, \ldots, v_{Np}\}$. Então, dado $u \in \mathcal{V}_p^{\perp}$ temos que $u(v_{jp}) = 0$, $j = 1, \ldots, n$, e $u \in \mathbb{C}T_p^*\Omega$. Assim,

$$u = \sum_{j=1}^{n} u(v_{jp})u_{jp} + \sum_{j=n+1}^{N} u(v_{jp})u_{jp} = \sum_{j=n+1}^{N} u(v_{jp})u_{jp}$$

e, portanto, $\mathcal{V}_p^{\perp} = \operatorname{span}\{u_{n+1p}, \ldots, u_{Np}\}$. Como o conjunto $\{u_{n+1p}, \ldots, u_{Np}\}$ é L.I, segue que $\mathcal{V}_p^{\perp}$ é um espaço vetorial de dimensão $N - n = m$.

Por fim, resta verificar o segundo item da definição 2.54. Para isto, seja $p_0 \in \Omega$. Como $\mathcal{V} = \bigcup_{p\in\Omega} \mathcal{V}_p$ é um subfibrado tangente, existem $U_0 \subset \Omega$ aberto contendo p_0 e $L_1, \ldots, L_n \in \mathscr{X}(U_0)$ tais que $\{L_{1p}, \ldots, L_{np}\}$ é uma base de $\mathcal{V}_p$ para cada $p \in U_0$. Considere a carta local $(U_0, \mathbf{x})$. Como $L_1, \ldots, L_n \in \mathscr{X}(U_0)$ temos que para todo $j = 1, \ldots, n$ e $k = 1, \ldots, N$ existem $a_{jk} \in C^{\infty}(U_0)$ tais que

$$L_j = \sum_{j=1}^{N} a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Como para cada $p \in U_0$ o conjunto $\{L_{1p}, \ldots, L_{np}\}$ é L.I, temos em particular que a matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11}(p_0) & a_{21}(p_0) & \cdots & a_{n1}(p_0) \\ a_{12}(p_0) & a_{22}(p_0) & \cdots & a_{n2}(p_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1N}(p_0) & a_{2N}(p_0) & \cdots & a_{nN}(p_0) \end{pmatrix}$$

tem posto n e, que após uma reordenação dos índices, a matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11}(p_0) & a_{21}(p_0) & \cdots & a_{n1}(p_0) \\ a_{12}(p_0) & a_{22}(p_0) & \cdots & a_{n2}(p_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}(p_0) & a_{2n}(p_0) & \cdots & a_{nn}(p_0) \end{pmatrix}$$

possui determinante diferente de zero. Diminuindo a vizinhança U_0 em torno de p_0, se necessário, podemos assumir que a matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11}(p) & a_{21}(p) & \cdots & a_{n1}(p) \\ a_{12}(p) & a_{22}(p) & \cdots & a_{n2}(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}(p) & a_{2n}(p) & \cdots & a_{nn}(p) \end{pmatrix}$$

é invertível em U_0.

Seja $(b_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$ a inversa de $(a_{jk})_{j,k=1,\dots,n}$, onde $b_{jk} \in C^\infty(U_0)$, isto é,

$$\sum_{j=1}^{n} a_{lj}(p)b_{jk}(p) = \sum_{j=1}^{n} b_{lj}(p)a_{jk}(p) = \delta_{lk}, \qquad p \in U_0, \quad l,k = 1\dots,n.$$

Considere

$$L_j^\sharp = \sum_{\nu=1}^{n} b_{j\nu}L_\nu, \qquad j = 1\dots,n.$$

Como a matriz $(b_{j\nu}(p))_{j,\nu=1,\dots,n}$ é invertível para todo $p \in U_0$, temos que $\{L_{1p}^\sharp,\dots,L_{np}^\sharp\}$ é uma base para $\mathcal{V}_p$. Além disso,

$$\begin{aligned} L_j^\sharp &= \sum_{\nu=1}^{n} b_{j\nu}L_\nu \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} b_{j\nu}\sum_{k=1}^{N} a_{\nu k}\frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{\nu=1}^{n} b_{j\nu}a_{\nu k}\right)\frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{\nu=1}^{n} b_{j\nu}a_{\nu k}\right)\frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{k=n+1}^{N}\left(\sum_{\nu=1}^{n} b_{j\nu}a_{\nu k}\right)\frac{\partial}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k=n+1}^{N}\left(\sum_{\nu=1}^{n} b_{j\nu}a_{\nu k}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad j = 1,\dots,n. \end{aligned}$$

Definindo

$$c_{jk} = \sum_{\nu=1}^{n} b_{j\nu} a_{\nu(k+n)} \qquad j = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, N-n$$

temos que c_{jk} são suaves em U_0 e,

$$L_j^\sharp = \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{m} c_{jk} \frac{\partial}{\partial x_{k+n}}, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Agora defina

$$\omega_l = dx_{n+l} - \sum_{\gamma=1}^{n} c_{\gamma l} dx_\gamma, \qquad l = 1, \dots, m.$$

Observe que $\omega_l \in \mathfrak{N}(U_0)$, para todo $l = 1, \dots, m$. Mostraremos que $\{\omega_{1p}, \dots, \omega_{mp}\} \subset \mathcal{V}_p^\perp$e que este conjunto é L.I para todo $p \in U_0$, pois assim teremos que $\mathcal{V}_p^\perp = \operatorname{span}\{\omega_{1p}, \dots, \omega_{mp}\}$, para todo $p \in U_0$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\omega_{lp}(L_{jp}^\sharp) &= dx_{n+lp}(L_{jp}^\sharp) - \sum_{\gamma=1}^{n} c_{\gamma l}(p) dx_{\gamma p}(L_{jp}^\sharp) \\
&= dx_{n+lp}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p + \sum_{k=1}^{m} c_{jk}(p) dx_{n+lp}\left(\frac{\partial}{\partial x_{k+n}}\right)_p \\
&- \sum_{\gamma=1}^{n} c_{\gamma l}(p)\left[dx_{\gamma p}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p + \sum_{k=1}^{m} c_{jk}(p) dx_{\gamma p}\left(\frac{\partial}{\partial x_{k+n}}\right)_p\right] \\
&= c_{jl}(p) - \sum_{\gamma=1}^{n} c_{\gamma l}(p) dx_{\gamma p}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p - \sum_{\gamma=1}^{n} c_{\gamma l}(p) \sum_{k=1}^{m} c_{jk}(p) dx_{\gamma p}\left(\frac{\partial}{\partial x_{k+n}}\right)_p \\
&= c_{jl}(p) - c_{jl}(p) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

para todo $l = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$. Como $\{L_{1p}^\sharp, \dots, L_{np}^\sharp\}$ é base de $\mathcal{V}_p$, temos que $\{\omega_{1p}, \dots, \omega_{mp}\} \subset \mathcal{V}_p^\perp$. Ainda, sejam $\alpha_{1p}, \dots, \alpha_{mp} \in \mathbb{C}$ tais que

$$\sum_{l=1}^{m} \alpha_{lp} \omega_{lp} = 0,$$

onde $p \in U_0$ é fixo. Logo, para todo $j = 1, \dots, m$,

$$\sum_{l=1}^{m} \alpha_{lp} \omega_{lp} \left(\frac{\partial}{\partial x_{n+j}}\right)_p = 0.$$

Por outro lado,

$$\sum_{l=1}^{m}\alpha_{lp}\omega_{lp}\left(\frac{\partial}{\partial x_{n+j}}\right)_p=\sum_{l=1}^{m}\alpha_{lp}dx_{n+lp}\left(\frac{\partial}{\partial x_{n+j}}\right)_p-\sum_{l=1}^{m}\alpha_{lp}\sum_{\gamma=1}^{n}c_{\gamma l}(p)dx_{\gamma p}\left(\frac{\partial}{\partial x_{n+j}}\right)_p=\alpha_{jp}$$

para todo $j=1,\dots,m$. Portanto, $\alpha_{jp}=0$, $j=1,\dots,m$, donde vem que $\{\omega_{1p},\dots,\omega_{mp}\}$ é L.I para todo $p\in U_0$, como queríamos. $\square$

Observação 2.56. A recíproca da proposição anterior também é válida, isto é, se $\mathcal{V}^{\perp}$ é um subfibrado cotangente, então $\mathcal{V}$ é um subfibrado tangente. De fato, primeiramente vejamos que $\mathcal{V}_p\subset\mathbb{C}T_p\Omega$ é um subespaço vetorial n-dimensional, para cada $p\in\Omega$. Para isto, sejam $\alpha_1,\alpha_2\in\mathcal{V}_p$ e $\lambda\in\mathbb{C}$. Então para todo $u\in\mathcal{V}_p^{\perp}$, temos que

$$u(\lambda\alpha_1+\alpha_2)=\lambda u(\alpha_1)+u(\alpha_2)=\lambda\cdot 0+0=0,$$

donde $\lambda\alpha_1+\alpha_2\in\mathcal{V}_p$. Logo, $\mathcal{V}_p$ é subespaço de $\mathbb{C}T_p\Omega$. Agora seja $\{v_{1p},\dots,v_{mp}\}$ uma base para $\mathcal{V}_p^{\perp}$, então existem $v_{m+1,p},\dots,v_{Np}$ tais que $\{v_{1p},\dots,v_{Np}\}$ é base de $\mathbb{C}T_p^*\Omega$. Considere $\{u_{1p},\dots,u_{Np}\}$ uma base de $\mathbb{C}T_p\Omega$, assim, $v_{jp}(u_{ip})=\delta_{ji}$, para todo $j,i=1,\dots,N$. Ainda, dado $u\in\mathcal{V}_p$, temos que $u\in\mathbb{C}T_p\Omega$. Logo, existem $\alpha_1,\dots,\alpha_N\in\mathbb{C}$ tais que

$$u=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i u_{ip}.$$

Dessa forma, para cada $k=1,\dots,m$ temos que

$$0=v_{kp}(u)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i v_{kp}(u_{ip})=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i v_{kp}(u_{ip})+\sum_{i=m+1}^{N}\alpha_i v_{kp}(u_{ip})=\alpha_k.$$

Portanto,

$$u=\sum_{i=m+1}^{N}\alpha_i u_{ip},$$

donde $\mathcal{V}_p=\operatorname{span}\{u_{m+1,p},\dots,u_{Np}\}$ e, como este conjunto é L.I segue que $\mathcal{V}_p$ é um espaço vetorial de dimensão $N-m=n$. A demonstração do segundo item da definição 2.32 é análoga ao feito na Proposição 2.55, isto é, como $\mathcal{V}^{\perp}=\bigcup_{p\in\Omega}\mathcal{V}_p^{\perp}$ é um subfibrado cotangente, existem $U_0\subset\Omega$ aberto contendo p_0 e $\omega_1,\dots,\omega_m\in\mathfrak{N}(U_0)$ tais que $\{\omega_{1p},\dots,\omega_{mp}\}$ é uma base de $\mathcal{V}_p^{\perp}$ para cada $p\in U_0$. Considere a carta local $(U_0,\mathbf{x})$. Como $\omega_1,\dots,\omega_m\in\mathfrak{N}(U_0)$ temos que para todo $j=1,\dots,m$ e $k=1,\dots,N$ existem $a_{jk}\in C^{\infty}(U_0)$ tais que

$$\omega_j=\sum_{j=1}^{N}a_{jk}dx_k.$$

Logo, basta considerarmos

$$\omega_j^\sharp = \sum_{\nu=1}^{m} b_{j\nu}\omega_\nu, \qquad j = 1, \ldots, m,$$

onde $(b_{jk})_{j,k=1,\ldots,m}$, é a inversa de $(a_{jk})_{j,k=1,\ldots,m}$. Assim, obteremos que $\{\omega_{1p}^\sharp, \ldots, \omega_{mp}^\sharp\}$ é uma base de $\mathcal{V}_p^\perp$ e que

$$\omega_j^\sharp = dx_j + \sum_{k=1}^{n} c_{jk}dx_{k+m}, \qquad j = 1, \ldots, m,$$

onde, $c_{jk} = \sum_{\nu=1}^{m} b_{j\nu}a_{\nu,k+m}$, $j = 1, \ldots, m$ e $k = 1, \ldots, n$. Por fim, tomando os campos vetoriais

$$L_l = \frac{\partial}{\partial x_{m+l}} - \sum_{\gamma=1}^{m} c_{\gamma l}\frac{\partial}{\partial x_\gamma}, \qquad l = 1, \ldots, n$$

temos que $\mathcal{V}_p = \operatorname{span}\{L_{1p}, \ldots, L_{np}\}$, para todo $p \in U_0$, concluindo a demonstração.

Notação 2.57. Se $\mathcal{V}$ for uma estrutura formalmente integrável sobre Ω de dimensão N, denotaremos o subfibrado $\mathcal{V}^\perp$ por T'. Além disso, n sempre denotará o posto de $\mathcal{V}$ e $m = N - n$ o posto de T'.

Além disso, usaremos as seguintes notações:

$$\begin{aligned} T_p\Omega &= \{v \in \mathbb{C}T_p\Omega;\ v \text{ é real}\};\\ T_p^*\Omega &= \{\xi \in \mathbb{C}T_p^*\Omega;\ \xi \text{ é real}\};\\ T\Omega &= \bigcup_{p\in\Omega} T_p\Omega;\\ T^*\Omega &= \bigcup_{p\in\Omega} T_p^*\Omega. \end{aligned}$$

Vejamos agora as definições de conjugado complexo de elementos nos espaços $\mathscr{X}(\Omega)$, $C^\infty(p)$, $\mathbb{C}T_p\Omega$, $\mathbb{C}T_p^*\Omega$ e $\mathfrak{N}(\Omega)$.

Definição 2.58. *Dado $L \in \mathscr{X}(\Omega)$, seu conjugado complexo é o campo vetorial $\overline{L} \in \mathscr{X}(\Omega)$ definido por*

$$\overline{L}(f) = \overline{L(\overline{f})}, \qquad f \in C^\infty(\Omega). \tag{2.17}$$

Além disso, dizemos que L é um campo vetorial real se $L = \overline{L}$.

Observação 2.59. Dado $L \in \mathscr{X}(\Omega)$ temos que L é real se, e somente se, $L(C^\infty(\Omega, \mathbb{R})) \subset C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. De fato, seja $g \in L(C^\infty(\Omega, \mathbb{R}))$. Então, existe $h \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ tal que $g = L(h)$. Queremos mostrar que $g \in \mathbb{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, isto é, $g(p) = \overline{g(p)}$, para todo $p \in \Omega$. Assim, seja $p \in \Omega$. Logo, por (2.17) e pela hipótese temos que

$$\overline{g(p)} = \overline{L(h)(p)} = \overline{L}(\overline{(h)(p)}) = L(h)(p) = g(p).$$

Portanto, $L(C^\infty(\Omega,\mathbb{R})) \subset C^\infty(\Omega,\mathbb{R})$. Reciprocamente, seja $f \in C^\infty(\Omega,\mathbb{R})$. Por hipótese, temos que $L(f) \in C^\infty(\Omega,\mathbb{R})$. Disto e por (2.17) segue que

$$L(f) = \overline{L(f)} = \overline{L}(\overline{f}) = \overline{L}(f),$$

para toda $f \in C^\infty(\Omega,\mathbb{R})$. Logo, $L = \overline{L}$, o que conclui a demonstração.

Definição 2.60. *Dado $\underline{f} \in C^\infty(p)$ seu conjugado complexo é o elemento $\underline{\overline{f}} \in C^\infty(p)$, isto é,*

$$\underline{\overline{f}} = \{g \in C^\infty(\Omega);\ \overline{f} \sim g\}.$$

Definição 2.61. *Dado $v \in \mathbb{C}T_p\Omega$, seu conjugado complexo é o vetor tangente $\overline{v} \in \mathbb{C}T_p\Omega$ definido por*

$$\overline{v}(\underline{f}) = \overline{v(\underline{\overline{f}})}, \qquad \underline{f} \in C^\infty(p). \tag{2.18}$$

Além disso, dizemos que v é um vetor tangente real se $v = \overline{v}$.

Definição 2.62. *Dado $\eta \in \mathbb{C}T_p^*\Omega$, seu conjugado complexo é o elemento $\overline{\eta} \in \mathbb{C}T_p^*\Omega$ definido por*

$$\overline{\eta}(v) = \overline{\eta(\overline{v})}, \qquad \overline{v} \in \mathbb{C}T_p\Omega. \tag{2.19}$$

Além disso, dizemos que η é real se $\eta = \overline{\eta}$.

Definição 2.63. *Dado $\omega \in \mathfrak{N}(\Omega)$, seu conjugado complexo é a 1-forma $\overline{\omega} \in \mathfrak{N}(\Omega)$ definida por*

$$\overline{\omega}(L) = \overline{\omega(\overline{L})}, \qquad L \in \mathscr{X}(\Omega). \tag{2.20}$$

Além disso, dizemos que ω é uma 1-forma real se $\omega = \overline{\omega}$.

Observação 2.64. Dado um subespaço $\mathcal{V}_p \subset \mathbb{C}T_p\Omega$ definimos seu conjugado complexo por

$$\overline{\mathcal{V}}_p = \{\overline{v} \in \mathbb{C}T_p\Omega;\ v \in \mathcal{V}_p\}. \tag{2.21}$$

Assim, se $\mathcal{V} = \bigcup_{p\in\Omega} \mathcal{V}_p$ é um subfibrado tangente, então $\overline{\mathcal{V}} = \bigcup_{p\in\Omega} \overline{\mathcal{V}}_p$ também é um subfibrado tangente. Além disso, $\overline{\mathcal{V}}^\perp = \overline{\mathcal{V}^\perp}$. De fato, primeiramente provemos que $\overline{\mathcal{V}}_p$ é um subespaço de $\mathbb{C}T_p\Omega$. Assim, sejam $\overline{v}_1, \overline{v}_2 \in \overline{\mathcal{V}}_p$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Então, $\overline{v}_1, \overline{v}_2 \in \mathbb{C}T_p\Omega$ tais que $v_1, v_2 \in \mathcal{V}_p$. Assim,

$$\overline{\overline{\alpha} v_1 + v_2} = \alpha\overline{v}_1 + \overline{v}_2 \in \mathbb{C}T_p\Omega \quad \text{e} \quad \overline{\alpha} v_1 + v_2 \in \mathcal{V}_p,$$

pois $\mathbb{C}T_p\Omega$ e $\mathcal{V}_p$ são espaços vetoriais. Logo, $\alpha\overline{v}_1 + \overline{v}_2 \in \overline{\mathcal{V}}_p$, donde $\overline{\mathcal{V}}_p$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{C}T_p\Omega$.

Agora, como $\mathcal{V}$ é um subfibrado tangente, sabemos que $dim\mathcal{V}_p = n$ para todo $p \in \Omega$ e, que dado $p_0 \in \Omega$, existem uma vizinhança U_0 de p_0 e $L_1, \ldots, L_n \in \mathscr{X}(U_0)$ tais que $\mathcal{V}_p = \mathrm{span}\{L_{1p}, \ldots, L_{np}\}$, para todo $p \in U_0$. Como $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_n \in \mathscr{X}(U_0)$, considere o conjunto

$\{\overline{L}_{1p}, \ldots, \overline{L}_{np}\} \subset \overline{\mathcal{V}}_p$ e mostremos que $\overline{\mathcal{V}}_p = \text{span}\{\overline{L}_{1p}, \ldots, \overline{L}_{np}\}$, para todo $p \in U_0$. Com efeito, seja $\overline{u} \in \overline{\mathcal{V}}_p$, então $u \in \mathcal{V}_p$. Logo, existem $\alpha_{ip} \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, n$, tais que

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ip} L_{ip}, \qquad p \in U_0.$$

Assim,

$$\overline{u} = \overline{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ip} L_{ip}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_{ip}}\,\overline{L_{ip}},$$

donde, $\overline{\mathcal{V}}_p = \text{span}\{\overline{L}_{1p}, \ldots, \overline{L}_{np}\}$, para todo $p \in U_0$. Além disso, o conjunto $\{\overline{L}_{1p}, \ldots, \overline{L}_{np}\}$ é L.I para todo $p \in U_0$, pois caso contrário existiria $\tilde{p} \in U_0$ tal que, sem perda de generalidade,

$$\overline{L}_{1\tilde{p}} = \lambda_{2\tilde{p}} \overline{L}_{2\tilde{p}} + \ldots + \lambda_{n\tilde{p}} \overline{L}_{n\tilde{p}} = \overline{\overline{\lambda_{2\tilde{p}}} L_{2\tilde{p}} + \ldots + \overline{\lambda_{n\tilde{p}}} L_{n\tilde{p}}}.$$

Logo,

$$L_{1\tilde{p}} = \overline{\lambda_{2\tilde{p}}} L_{2\tilde{p}} + \ldots + \overline{\lambda_{n\tilde{p}}} L_{n\tilde{p}}$$

o que é um absurdo, pois $\{L_{1p}, \ldots, L_{np}\}$ é L.I para todo $p \in U_0$. Portanto, $\dim \overline{\mathcal{V}}_p = n$ para todo $p \in U_0$. Por fim, provemos que $\overline{\mathcal{V}}^{\perp} = \overline{\mathcal{V}^{\perp}}$. Para isto, é suficiente provar que $\overline{\mathcal{V}_p}^{\perp} = \overline{\mathcal{V}_p^{\perp}}$, para algum $p \in \Omega$. Assim, seja $\lambda \in \overline{\mathcal{V}_p}^{\perp}$. Então, $\lambda(\overline{v}) = 0$ para todo $\overline{v} \in \overline{\mathcal{V}}_p$, isto é, para todo $v \in \mathcal{V}_p$. Logo, $\overline{\lambda}(v) = \overline{\lambda(\overline{v})} = \overline{0} = 0$ para todo $v \in \mathcal{V}_p$, o que implica que $\lambda \in \overline{\mathcal{V}_p^{\perp}}$. Reciprocamente, seja $\lambda \in \overline{\mathcal{V}_p^{\perp}}$. Então, $\overline{\lambda} \in \mathcal{V}_p^{\perp}$, isto é, $\overline{\lambda}(v) = 0$ para todo $v \in \mathcal{V}_p$. Assim, $\lambda(\overline{v}) = \overline{\overline{\lambda}(v)} = \overline{0} = 0$, para todo $v \in \mathcal{V}_p$, ou seja, para todo $\overline{v} \in \overline{\mathcal{V}}_p$. Portanto, $\lambda \in \overline{\mathcal{V}_p}^{\perp}$, como queríamos.

2.4 O Teorema de Frobenius

Seja Ω uma variedade diferenciável N-dimensional e tome um sistema de coordenadas locais em Ω. O Teorema de Frobenius nos permite, sob algumas hipóteses, determinar um novo sistema de coordenadas locais em Ω, de forma que podemos representar de maneira simplificada um campo vetorial real. Veja o seguinte exemplo:

Exemplo 2.65. Sejam $\Omega = \mathbb{R}^2$ uma variedade diferenciável, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ um sistema de coordenadas locais em Ω, onde $\mathbf{x}(s,t) = (s,t)$ com $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, e (u,v) as coordenadas euclidianas. Considere o campo vetorial real

$$L = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}.$$

Vamos determinar um sistema de coordenadas locais y_1, y_2 tais que

$$L = \frac{\partial}{\partial y_1}.$$

Considere o seguinte problema de Cauchy inverso

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} = 1 \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} = 1 \\ x_1(0, y_2) = 0 \\ x_2(0, y_2) = y_2 \end{cases} \tag{2.22}$$

Temos que $x_1(y_1, y_2) = y_1$ e $x_2(y_1, y_2) = y_1 + y_2$ é a única solução do problema (2.22). Invertendo a solução do problema encontramos o sistema y_1, y_2, ou seja, $y_1(x_1, x_2) = x_1$ e $y_2(x_1, x_2) = x_2 - x_1$. Agora verifiquemos que $\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial y_1}$. De fato, seja $f \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Então,

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}(p, q) = \left\{ \frac{\partial (f \circ \mathbf{y}^{-1})}{\partial u} \circ \mathbf{y} \right\}(p, q) = \frac{\partial (f \circ \mathbf{y}^{-1})}{\partial u}(\mathbf{y}(p, q)) = \frac{\partial (f \circ \mathbf{y}^{-1})}{\partial u}(p, q - p). \tag{2.23}$$

Mas, $(f \circ \mathbf{y}^{-1})(u, v) = f(\mathbf{y}^{-1}(u, v)) = f(u, u + v)$ donde,

$$\begin{aligned} \frac{\partial (f \circ \mathbf{y}^{-1})}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial u}(u, u + v) \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(u, u + v)\frac{\partial u}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}(u, u + v)\frac{\partial (u + v)}{\partial u} \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(u, u + v) + \frac{\partial f}{\partial v}(u, u + v). \end{aligned}$$

Logo, voltando em (2.23) temos que

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}(p, q) = \frac{\partial (f \circ \mathbf{y}^{-1})}{\partial u}(p, q - p) = \frac{\partial f}{\partial u}(p, q) + \frac{\partial f}{\partial v}(p, q). \tag{2.24}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(s, t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(s, t) &= \left\{ \frac{\partial (f \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial u} \circ \mathbf{x} \right\}(s, t) + \left\{ \frac{\partial (f \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial v} \circ \mathbf{x} \right\}(s, t) \\ &= \frac{\partial (f \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial u}(\mathbf{x}(s, t)) + \frac{\partial (f \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial v}(\mathbf{x}(s, t)) \\ &= \frac{\partial (f \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial u}(s, t) + \frac{\partial (f \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial v}(s, t) \end{aligned} \tag{2.25}$$

Mas, $(f \circ \mathbf{x}^{-1})(u, v) = f(\mathbf{x}^{-1}(u, v)) = f(u, v)$, o que implica que

$$\frac{\partial (f \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \quad \text{e} \quad \frac{\partial (f \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial v}(u, v).$$

Voltando em (2.25) temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial u}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial v}(s,t). \tag{2.26}$$

De (2.24) e (2.26), vem que

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial u}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial v}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(s,t),$$

como queríamos.

Proposição 2.66. *Considere um campo vetorial real $L \in \mathscr{X}(U)$, onde U é uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^N$ e, suponha que $L \neq 0$. Então existem coordenadas locais $y_1, \ldots, y_N$ definidas numa vizinhança da origem em $\mathbb{R}^N$ tal que*

$$L = \frac{\partial}{\partial y_1}.$$

Demonstração. Seja $L \in \mathscr{X}(U)$ um campo vetorial real. Assim,

$$L = \sum_{j=1}^{N} a_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

onde $a_j \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ para todo $j = 1, \ldots, N$. Como $L \neq 0$ temos que existe $p \in \mathbb{R}^N$ tal que $L_p \neq 0$. Assim, $a_j(p) \neq 0$ para algum $j = 1, \ldots, N$. Defina o sistema de coordenadas locais $y_1 = x_j - x_j(p),\ y_2 = x_2 - x_2(p),\ y_3 = x_3 - x_3(p), \ldots,\ y_j = x_1 - x_1(p)$. Então podemos dizer que $a_1(0) \neq 0$. Considere o seguinte problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial x_j}{\partial y_1} = a_j(x_1, \ldots, x_N), \quad j = 1, \ldots, N \\ x_1(0, y_2, \ldots, y_N) = 0 \\ x_j(0, y_2, \ldots, y_N) = y_j, \quad j = 2, \ldots, N. \end{cases} \tag{2.27}$$

Tomando a matriz

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial y_N} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial y_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_N}{\partial y_1} & \frac{\partial x_N}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial x_N}{\partial y_N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(x_1, \ldots, x_N) & 0 & \cdots & 0 \\ a_2(x_1, \ldots, x_N) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_N(x_1, \ldots, x_N) & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

temos que $\det A = a_1(x_1, \ldots, x_N)$. Ainda, como $a_1(0) \neq 0$ e a_1 é contínua, existe uma vizinhança V de 0 tal que $a_1 \neq 0$ em V, isto é, $\det A \neq 0$ em V. Portanto, o problema (2.27) possui uma única solução em V. Além disso, pelo Teorema da Função Inversa a aplicação

$(y_1, \ldots, y_N) \longmapsto (x_1, \ldots, x_N)$ é um difeomorfismo suave na origem. Portanto,

$$L = \sum_{j=1}^{N} a_j \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial x_j}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial y_1}.$$

$\square$

Corolário 2.67. *Considere $L \in \mathscr{X}(U)$ real, onde U é uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}$ e suponha que $L \neq 0$. Então existe uma coordenada local y definida numa vizinhança da origem tal que*

$$L = \frac{d}{dy}.$$

Demonstração. Seja $L = a\frac{d}{dx}$, onde $a \in C^\infty(U, \mathbb{R})$. Como $L \neq 0$, existe $p \in \mathbb{R}$ tal que $L_p \neq 0$, o que implica, que $a(p) \neq 0$. Tomando o seguinte sistema de coordenadas locais $y = x - x(p)$, temos que neste novo sistema $p = 0$, isto é, $a(0) \neq 0$. Considere o seguinte PVI

$$\begin{cases} \frac{dx}{dy} = a(x) \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{2.28}$$

Como $a \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ temos que o sistema (2.28) possui uma única solução $x \in U$ não nula, pois caso contrário, $a(0) = 0$ e x não seria homeomorfismo. Além disso, pelo Teorema da Função Inversa a aplicação $y \longmapsto x$ é um difeomorfismo suave na origem. Portanto,

$$L = a\frac{d}{dx} = \frac{dx}{dy}\frac{d}{dx} = \frac{d}{dy}.$$

$\square$

A generalização da Proposição 2.66 à n campos vetoriais é o clássico Teorema de Frobenius:

Teorema 2.68. *Sejam $L_1, \ldots, L_n$ campos vetoriais reais, linearmente independentes, definidos em uma vizinhança V da origem de $\mathbb{R}^N$. Suponha que o subfibrado $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}TV$ gerado por $L_1, \ldots, L_n$ seja uma estrutura formalmente integrável. Então existem coordenadas locais $y_1, \ldots, y_N$ definidas em uma vizinhança da origem, tais que $\mathcal{V}$ é gerado por $\frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}$.*

A demonstração deste teorema foi baseada em [16].

Demonstração. Provaremos por indução sobre N. Se $N = 1$, temos que $n = 1$, pois $n \leq N$ e, assim este caso segue diretamente do Corolário 2.67. Agora, suponha que o resultado vale para $N - 1$ e, sejam $L_1, \ldots, L_n$ campos vetoriais reais, L.I, definidos em uma vizinhança V da origem de $\mathbb{R}^N$, sendo que o subfibrado $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}TV$ gerado por $L_1, \ldots, L_n$ é uma estrurtura formalmente integrável. Como $L_1, \ldots, L_n$ são L.I, temos que $L_j \neq 0$, para todo $j = 1, \ldots, n$.

Aplicando o procedimento descrito na Proposição 2.66 e, diminuindo a vizinhança de V se necessário, existe um difeomorfismo **x** : $V \longrightarrow$ **x**(V) com **x**$(0) = 0$, tal que

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial x_1},\ L_j = \sum_{k=1}^{N} a_{jk}\frac{\partial}{\partial x_k},\ j = 2, \ldots, n.$$

Defina, $L_1^\sharp = L_1$ e $L_j^\sharp = L_j - a_{j1}L_1$, $j = 2, \ldots, n$. Note que,

$$L_j^\sharp = \sum_{k=1}^{N} a_{jk}\frac{\partial}{\partial x_k} - a_{j1}\frac{\partial}{\partial x_1} = \sum_{k=2}^{N} a_{jk}\frac{\partial}{\partial x_k}, \quad j = 2, \ldots, n$$

isto é, $L_j^\sharp$ não envolve diferenciação na variável x_1. Ainda, para cada $p \in V$ temos

$$L_{1p}^\sharp = L_{1p} \in \mathcal{V}_p = span\{L_{1p}, \ldots, L_{np}\} \tag{2.29}$$

$$L_{jp}^\sharp = L_{jp} - a_{j1}(p)L_{1p} \in \mathcal{V}_p = span\{L_{1p}, \ldots, L_{np}\} \quad j = 2, \ldots, n \tag{2.30}$$

e se $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ são tais que

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j L_{jp}^\sharp = 0$$

temos que,

$$\alpha_1 L_{1p}^\sharp + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j L_{jp}^\sharp = 0.$$

Disto, e de (2.29) e (2.30) obtemos

$$\left(\alpha_1 - \sum_{j=2}^{n} \alpha_j a_{j1}(p)\right) L_{1p} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j L_{jp} = 0.$$

Como $\{L_{1p}, \ldots, L_{np}\}$ é L.I, temos que $\alpha_j = 0$ para todo $j = 2, \ldots, n$ e

$$\alpha_1 = \sum_{j=2}^{n} \alpha_j a_{j1}(p) = 0.$$

Logo, $\{L_{1p}^\sharp, \ldots, L_{np}^\sharp\} \subset \mathcal{V}_p$ é L.I para todo $p \in V$, donde $\mathcal{V}_p = \mathrm{span}\{L_{1p}^\sharp, \ldots, L_{np}^\sharp\}$ para todo $p \in V$.

Como o subfibrado $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}TV$ é uma estrutura formalmente integrável, segue da Proposição 2.38 que existem $c_{jk}^\nu \in C^\infty(V)$ tais que

$$[L_j^\sharp, L_k^\sharp] = \sum_{\nu=1}^{n} c_{jk}^\nu L_\nu^\sharp, \qquad j, k = 1, \ldots, n.$$

Observe que para $j, k = 1, \ldots, n$ temos que

$$\begin{aligned} dx_1[L_j^\sharp, L_k^\sharp] &= dx_1\left(c_{jk}^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{\nu=2}^{n} c_{jk}^\nu \sum_{k=2}^{n} a_{\nu k} \frac{\partial}{\partial x_k}\right) \\ &= c_{jk}^1 dx_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) + \sum_{\nu=2}^{n} c_{jk}^\nu \sum_{k=2}^{n} a_{\nu k} dx_1\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) \\ &= c_{jk}^1. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} dx_1[L_j^\sharp, L_k^\sharp] &= dx_1 \sum_{\nu=1}^{N} [L_j^\sharp, L_k^\sharp](x_\nu)\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right) = \sum_{\nu=1}^{N} [L_j^\sharp, L_k^\sharp](x_\nu) dx_1\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right) \\ &= [L_j^\sharp, L_k^\sharp](x_1) = L_j^\sharp\left(\sum_{\nu=2}^{N} a_{k\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} x_1\right) - L_k^\sharp\left(\sum_{\nu=2}^{N} a_{j\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} x_1\right) = 0. \end{aligned}$$

Dessa forma, $c_{jk}^1 = 0$, para todo $j, k = 1, \ldots, n$ e, consequentemente,

$$[L_j^\sharp, L_k^\sharp] = \sum_{\nu=2}^{n} c_{jk}^\nu L_\nu^\sharp, \qquad j, k = 1, \ldots, n.$$

Agora, como $\mathbf{x}(V)$ é um aberto de $\mathbb{R}^N$ que contém a origem, temos que existe $\delta > 0$ tal que $B_{\mathbb{R}^N}(0, \delta) \subset \mathbf{x}(V)$.Considere $W = B_{\mathbb{R}^{N-1}}(0, \delta) \subset \mathbb{R}^{N-1}$. Assim, W é uma variedade diferenciável de dimensão $N - 1$. Além disso, diminuindo a vizinhança de V, se necessário, podemos supor que $B_{\mathbb{R}^N}(0, \delta) = \mathbf{x}(V)$.

Dado $L \in \mathscr{X}(V)$, definamos $L_U \in \mathscr{X}(U)$, onde $U = \mathbf{x}(V) \subset \mathbb{R}^N$ é aberto, por

$$\begin{aligned} L_U: \quad C^\infty(U) &\longrightarrow C^\infty(U) \\ g \quad &\longmapsto L_U(g) = L(g \circ \mathbf{x}) \circ \mathbf{x}^{-1}. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Observe que L_U está bem definida, pois dados $g_1, g_2 \in C^\infty(U)$ tais que $g_1 = g_2$ temos que, $g_1 \circ \mathbf{x} = g_2 \circ \mathbf{x}$, o que implica, que $L(g_1 \circ \mathbf{x}) = L(g_2 \circ \mathbf{x})$. Logo, $L(g_1 \circ \mathbf{x}) \circ \mathbf{x}^{-1} = L(g_2 \circ \mathbf{x}) \circ \mathbf{x}^{-1}$. Ainda,

$$\begin{aligned} L_U(\lambda g_1 + g_2) &= L[(\lambda g_1 + g_2) \circ \mathbf{x}] \circ \mathbf{x}^{-1} \\ &= L[(\lambda g_1 \circ \mathbf{x}) + (g_2 \circ \mathbf{x})] \circ \mathbf{x}^{-1} \\ &= [\lambda L(g_1 \circ \mathbf{x}) + L(g_2 \circ \mathbf{x})] \circ \mathbf{x}^{-1} \\ &= \lambda L(g_1 \circ \mathbf{x}) \circ \mathbf{x}^{-1} + L(g_2 \circ \mathbf{x}) \circ \mathbf{x}^{-1} \\ &= \lambda L_U(g_1) + L_U(g_2), \quad \text{para todo } \lambda \in \mathbb{C} \text{ e } g_1, g_2 \in C^\infty(U) \end{aligned}$$

isto é, L_U é linear sobre $\mathbb{C}$ e,

$$\begin{aligned} L_U(g_1g_2) &= L[(g_1g_2)\circ \mathbf{x}]\circ \mathbf{x}^{-1} \\ &= L[(g_1\circ \mathbf{x})(g_2\circ \mathbf{x})]\circ \mathbf{x}^{-1} \\ &= [(g_1\circ \mathbf{x})L(g_2\circ \mathbf{x}) + (g_2\circ \mathbf{x})L(g_1\circ \mathbf{x})]\circ \mathbf{x}^{-1} \\ &= g_1L(g_2\circ \mathbf{x})\circ \mathbf{x}^{-1} + g_2L(g_1\circ \mathbf{x})\circ \mathbf{x}^{-1} \\ &= g_1L_U(g_2) + g_2L_U(g_1), \quad \text{para todo } g_1, g_2 \in C^\infty(U). \end{aligned}$$

Portanto, $L_U \in \mathscr{X}(U)$.

Agora, dado $L \in \mathscr{X}(U)$, definiremos $L|_W \in \mathscr{X}(W)$. Para isto, dada $f \in C^\infty(W)$, defina

$$\begin{aligned} \tilde{f}: \quad U &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (t,q) &\longmapsto \tilde{f}(t,q) = f(q), \end{aligned} \tag{2.32}$$

onde $t \in \mathbb{R}$. Veja que $\tilde{f} \in C^\infty(U)$. De fato, basta observar que $\tilde{f}(t,q) = f\circ T(t,q) = f(q)$, onde

$$\begin{aligned} T: \quad U &\longrightarrow W \\ (t,q) &\longmapsto T(t,q) = q \end{aligned}$$

é uma tranformação linear. Como f e T são suaves temos que $\tilde{f}$ é suave. Assim, definamos

$$L|_W(f)(q) = L(\tilde{f})(0,q), \tag{2.33}$$

para todo $f \in C^\infty(W)$ e para todo $q \in W$. Observe que $L|_W$ está bem definida, pois dados $f, g \in C^\infty(W)$ tais que $f = g$ temos que, $f(q) = g(q)$, o que implica, que $\tilde{f}(0,q) = \tilde{g}(0,q)$, donde $L(\tilde{f})(0,q) = L(\tilde{g})(0,q)$. Ainda, dados $f_1, f_2 \in C^\infty(W)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, temos que $\tilde{f}_1(t,q) = f_1(q)$ e $\tilde{f}_2(t,q) = f_2(q)$. Assim, $(\alpha f_1 + f_2)(q) = (\alpha\tilde{f}_1 + \tilde{f}_2)(t,q)$ e $(f_1f_2)(q) = (\tilde{f}_1\tilde{f}_2)(t,q)$. Logo,

$$L|_W(\alpha f_1+f_2)(q) = L(\alpha\tilde{f}_1+\tilde{f}_2)(0,q) = \alpha L(\tilde{f}_1)(0,q)+L(\tilde{f}_2)(0,q) = \alpha L|_W(f_1)(q)+L|_W(f_2)(q),$$

e

$$\begin{aligned} L|_W(f_1f_2)(q) &= L(\tilde{f}_1\tilde{f}_2)(0,q) \\ &= \tilde{f}_1(0,q)L(\tilde{f}_2)(0,q) + \tilde{f}_2(0,q)L(\tilde{f}_1)(0,q) \\ &= f_1(q)L|_W(f_2)(q) + f_2(q)L|_W(f_1)(q) \end{aligned}$$

para todo $q \in W$. Portanto, $L|_W \in \mathscr{X}(W)$.

Como $L_j^\sharp \in \mathscr{X}(V)$, temos que $(L_j^\sharp)_U|_W \in \mathscr{X}(W)$. Assim, definamos os campos vetoriais reais $M_j = (L_j^\sharp)_U|_W \in \mathscr{X}(W)$, para cada $j = 2, \ldots, n$. Dessa forma, dado $f \in C^\infty(W)$ e $q \in W$

$$\begin{aligned}
M_j(f)(q) &= (L_j^\sharp)_U(\tilde{f})(0,q) = \left(L_j^\sharp(\tilde{f}\circ \mathbf{x})\circ \mathbf{x}^{-1}\right)(0,q) \\
&= \left[\left(\sum_{k=2}^{N} a_{jk}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)(\tilde{f}\circ \mathbf{x})\right]\circ \mathbf{x}^{-1}(0,q) \\
&= \sum_{k=2}^{N} a_{jk}(\mathbf{x}^{-1}(0,q))\frac{\partial(\tilde{f}\circ \mathbf{x})}{\partial x_k}\circ \mathbf{x}^{-1}(0,q) \\
&= \sum_{k=2}^{N}(a_{jk}\circ \mathbf{x}^{-1}(0,q))\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_U(\tilde{f})(0,q) \\
&= \left[\sum_{k=2}^{N}(a_{jk}\circ \mathbf{x}^{-1}\circ\psi)\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_U|_W\right](f)(q),
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\psi:\ W &\longrightarrow U \\
q &\longmapsto \psi(q) = (0,q).
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Assim,

$$M_j = \sum_{k=2}^{N}(a_{jk}\circ \mathbf{x}^{-1}\circ\psi)\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_U|_W, \qquad j = 2, \ldots, n.$$

Verifiquemos agora que o conjunto $\{M_{2q}, \ldots, M_{nq}\}$ é L.I, para todo $q \in W$. Para isto, sejam $\beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{C}$ tais que

$$\sum_{j=2}^{n}\beta_j M_{jq} = 0, \quad \text{para todo } q \in W. \tag{2.35}$$

Dado $p = (p_2, \ldots, p_N) \in W$, definamos $\tilde{p} = \mathbf{x}^{-1}(0,p) \in V$ e, dado $f \in C^\infty(V)$ definamos $\hat{f} \in C^\infty(W)$ por $\hat{f}(q) = (f\circ \mathbf{x}^{-1})(0,q) = f(\tilde{q})$, para todo $q \in W$. Observe que, para todo $f \in C^\infty(V)$ e $j = 2, \ldots, n$ temos

$$L_j^\sharp(f)(\tilde{p}) = \left(\sum_{k=2}^{n} a_{jk}\frac{\partial}{\partial x_k}\right)(f)(\tilde{p}) = \sum_{k=2}^{n} a_{jk}(\tilde{p})\frac{\partial f}{\partial x_k}(\tilde{p}) = \sum_{k=2}^{n} a_{jk}(\tilde{p})\frac{\partial \hat{f}}{\partial x_k}(p).$$

Mas, de (2.32) $\hat{f}(p) = \tilde{\hat{f}}(0,p)$. Então,

$$\begin{aligned}
L_j^\sharp(f)(\tilde{p}) &= \sum_{k=2}^{n} a_{jk}(\tilde{p})\frac{\partial \tilde{\hat{f}}}{\partial x_k}(0,p) = \sum_{k=2}^{n} a_{jk}(\tilde{p})\frac{\partial(\tilde{\hat{f}}\circ \mathbf{x}\circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial x_k}(\mathbf{x}(\tilde{p})) = \sum_{k=2}^{n} a_{jk}(\tilde{p})\frac{\partial(\tilde{\hat{f}}\circ \mathbf{x})}{\partial x_k}(\tilde{p}) \\
&= L_j^\sharp(\tilde{\hat{f}}\circ \mathbf{x})(\tilde{p}).
\end{aligned}$$

Por outro lado, de (2.31) e (2.33) temos que

$$M_j(\hat{f})(p) = (L_j^\sharp)_U|_W(\hat{f})(p) = (L_j^\sharp)_U(\tilde{\hat{f}})(0,p) = L_j^\sharp(\tilde{\hat{f}} \circ \mathbf{x})(\mathbf{x}^{-1}(0,p)). \tag{2.36}$$

Portanto,

$$L_j^\sharp(f)(\tilde{p}) = L_j^\sharp(\tilde{\hat{f}} \circ \mathbf{x})(\tilde{p}) = L_j^\sharp(\tilde{\hat{f}} \circ \mathbf{x})(\mathbf{x}^{-1}(0,p)) = M_j(\hat{f})(p).$$

Disto e de (2.35), temos que para todo $\underline{f} \in C^\infty(\tilde{p})$

$$\sum_{j=2}^n \beta_j L_{j\tilde{p}}^\sharp(\underline{f}) = \sum_{j=2}^n \beta_j L_j^\sharp(f)(\tilde{p}) = \sum_{j=2}^n \beta_j M_j(\hat{f})(p) = \sum_{j=2}^n \beta_j M_{jp}(\underline{\hat{f}}) = 0.$$

Assim,

$$\sum_{j=2}^n \beta_j L_{j\tilde{p}}^\sharp = 0,$$

e como $\{L_{1\tilde{p}}^\sharp, \ldots, L_{n\tilde{p}}^\sharp\}$ é L.I, pois $\tilde{p} \in V$, temos que $\beta_j = 0$ para todo $j = 2, \ldots, n$. Logo, $\{M_{2q}, \ldots, M_{nq}\}$ é L.I, para todo $q \in W$. Consequentemente, do Lema 2.37 temos que $\{M_2, \ldots, M_n\}$ é L.I.

Definindo $\mathcal{V}'_q = \operatorname{span}\{M_{2q}, \ldots, M_{nq}\}$ para todo $q \in W$, temos que

$$\mathcal{V}' = \bigcup_{q \in W} \mathcal{V}'_q \subset \mathbb{C}TW$$

é um subfibrado tangente. Iremos provar agora que $\mathcal{V}'$ é uma estrutura formalmente integrável. Assim, para cada $j,k = 2, \ldots, n$, sejam $M_j, M_k \in \mathscr{X}(W)$ seções de $\mathcal{V}'$ sobre W. Mostraremos que $[M_j, M_k]_q \in \mathcal{V}'_q$, para todo $q \in W$.

Afirmação 1: $[M_j, M_k] = \sum_{\nu=2}^n (c_{jk}^\nu \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi) M_\nu$, $j,k = 2, \ldots, n$.

Com efeito, dados $f \in C^\infty(W)$ e $q \in W$ temos que

$$\begin{aligned}
[L_j^\sharp, L_k^\sharp]_U|_W(f)(q) &= \left(\sum_{\nu=2}^n c_{jk}^\nu L_\nu^\sharp\right)_U |_W(f)(q) = \left(\sum_{\nu=2}^n c_{jk}^\nu L_\nu^\sharp\right)_U (\tilde{f})(0,q) \\
&= \left[\left(\sum_{\nu=2}^n c_{jk}^\nu L_\nu^\sharp\right)(\tilde{f} \circ \mathbf{x})\right] \circ \mathbf{x}^{-1}(0,q) \\
&= \sum_{\nu=2}^n c_{jk}^\nu(\mathbf{x}^{-1}(0,q)) L_\nu^\sharp(\tilde{f} \circ \mathbf{x})(\mathbf{x}^{-1}(0,q)).
\end{aligned}$$

Mas, como $f \in C^\infty(W)$ temos de (2.36) que $L_\nu^\sharp(\tilde{f} \circ \mathbf{x})(\mathbf{x}^{-1}(0,q)) = M_\nu(f)(q)$. Logo,

$$[L_j^\sharp, L_k^\sharp]_U|_W(f)(q) = \sum_{\nu=2}^n c_{jk}^\nu(\mathbf{x}^{-1}(0,q)) M_\nu(f)(q) = \left(\sum_{\nu=2}^n (c_{jk}^\nu \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi) M_\nu\right)(f)(q)$$

para todo $f \in C^\infty(W)$ e $q \in W$. Assim,

$$[L_j^\sharp, L_k^\sharp]_U|_W = \sum_{\nu=2}^{n}(c_{jk}^\nu \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi)M_\nu, \quad j,k = 2,\ldots,n.$$

Para concluirmos a afirmação resta provarmos que

$$[L_j^\sharp, L_k^\sharp]_U|_W = [M_j, M_k], \quad j,k = 2,\ldots,n.$$

Para isto, sejam $f \in C^\infty(W)$, $q \in W$ e $j,k = 2,\ldots,n$. Assim,

$$\begin{aligned}
[L_j^\sharp, L_k^\sharp]_U|_W(f)(q) &= [L_j^\sharp, L_k^\sharp]_U(\tilde{f})(0,q) \\
&= \left\{[L_j^\sharp, L_k^\sharp](\tilde{f} \circ \mathbf{x})\right\}(\mathbf{x}^{-1}(0,q)) \\
&= L_j^\sharp(L_k^\sharp(\tilde{f} \circ \mathbf{x}))(\mathbf{x}^{-1}(0,q)) - L_k^\sharp(L_j^\sharp(\tilde{f} \circ \mathbf{x}))(\mathbf{x}^{-1}(0,q)).
\end{aligned}$$

Pela representação local dos campos vetoriais complexos, temos que

$$\begin{aligned}
[L_j^\sharp, L_k^\sharp]_U|_W(f)(q) &= L_j^\sharp\left(\sum_{\nu=2}^{n} a_{k\nu}\frac{\partial(\tilde{f} \circ \mathbf{x})}{\partial x_\nu}\right)(\mathbf{x}^{-1}(0,q)) - L_k^\sharp\left(\sum_{l=2}^{n} a_{jl}\frac{\partial(\tilde{f} \circ \mathbf{x})}{\partial x_l}\right)(\mathbf{x}^{-1}(0,q)) \\
&= \left(\sum_{l=2}^{n} a_{jl}\frac{\partial}{\partial x_l}\right)\left(\sum_{\nu=2}^{n} a_{k\nu}\frac{\partial(\tilde{f} \circ \mathbf{x})}{\partial x_\nu}\right)(\mathbf{x}^{-1}(0,q)) \\
&- \left(\sum_{\nu=2}^{n} a_{k\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu}\right)\left(\sum_{l=2}^{n} a_{jl}\frac{\partial(\tilde{f} \circ \mathbf{x})}{\partial x_l}\right)(\mathbf{x}^{-1}(0,q)).
\end{aligned}$$

Agora pela regra do produto, vem que

$$\begin{aligned}
[L_j^\sharp, L_k^\sharp]_U|_W(f)(q) &= \left(\sum_{l,\nu=2}^{n} a_{jl}\frac{\partial a_{k\nu}}{\partial x_l}\frac{\partial(\tilde{f} \circ \mathbf{x})}{\partial x_\nu} + a_{jl}a_{k\nu}\frac{\partial^2(\tilde{f} \circ \mathbf{x})}{\partial x_l \partial x_\nu}\right)(\mathbf{x}^{-1}(0,q)) \\
&- \left(\sum_{l,\nu=2}^{n} a_{k\nu}\frac{\partial a_{jl}}{\partial x_\nu}\frac{\partial(\tilde{f} \circ \mathbf{x})}{\partial x_l} + a_{k\nu}a_{jl}\frac{\partial^2(\tilde{f} \circ \mathbf{x})}{\partial x_\nu \partial x_l}\right)(\mathbf{x}^{-1}(0,q)) \\
&= \left(\sum_{l,\nu=2}^{n} a_{jl}\frac{\partial a_{k\nu}}{\partial x_l}\frac{\partial(\tilde{f} \circ \mathbf{x})}{\partial x_\nu}\right)(\mathbf{x}^{-1}(0,q)) - \left(\sum_{l,\nu=2}^{n} a_{k\nu}\frac{\partial a_{jl}}{\partial x_\nu}\frac{\partial(\tilde{f} \circ \mathbf{x})}{\partial x_l}\right)(\mathbf{x}^{-1}(0,q)) \\
&= \sum_{l,\nu=2}^{n} a_{jl}(\mathbf{x}^{-1}(0,q))\frac{\partial a_{k\nu}}{\partial x_l}(\mathbf{x}^{-1}(0,q))\frac{\partial(\tilde{f} \circ \mathbf{x})}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}^{-1}(0,q)) \\
&- \sum_{l,\nu=2}^{n} a_{k\nu}(\mathbf{x}^{-1}(0,q))\frac{\partial a_{jl}}{\partial x_\nu}(\mathbf{x}^{-1}(0,q))\frac{\partial(\tilde{f} \circ \mathbf{x})}{\partial x_l}(\mathbf{x}^{-1}(0,q)).
\end{aligned}$$

Disto e de (2.31) e (2.33) obtemos

$$
\begin{aligned}
[L_j^\sharp, L_k^\sharp]_U|_W(f)(q) &= \sum_{l,\nu=2}^{n} (a_{jl} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi)(q) \left(\frac{\partial a_{k\nu}}{\partial x_l} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi \right)(q) \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \right)_U (\tilde{f})(0,q) \\
&- \sum_{l,\nu=2}^{n} (a_{k\nu} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi)(q) \left(\frac{\partial a_{jl}}{\partial x_\nu} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi \right)(q) \left(\frac{\partial}{\partial x_l} \right)_U (\tilde{f})(0,q) \\
&= \sum_{l,\nu=2}^{n} (a_{jl} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi)(q) \left(\frac{\partial a_{k\nu}}{\partial x_l} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi \right)(q) \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \right)_U |_W(f)(q) \\
&- \sum_{l,\nu=2}^{n} (a_{k\nu} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi)(q) \left(\frac{\partial a_{jl}}{\partial x_\nu} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi \right)(q) \left(\frac{\partial}{\partial x_l} \right)_U |_W(f)(q).
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
[M_j, M_k](f)(q) &= M_j(M_k(f))(q) - M_k(M_j(f))(q) \\
&= M_j \left(\sum_{\nu=2}^{n} (a_{k\nu} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi) \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \right)_U |_W(f) \right)(q) \\
&- M_k \left(\sum_{l=2}^{n} (a_{jl} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi) \left(\frac{\partial}{\partial x_l} \right)_U |_W(f) \right)(q) \\
&= \left(\sum_{l=2}^{n} (a_{jl} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi) \left(\frac{\partial}{\partial x_l} \right)_U |_W \right) \left(\sum_{\nu=2}^{n} (a_{k\nu} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi) \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \right)_U |_W(f) \right)(q) \\
&- \left(\sum_{\nu=2}^{n} (a_{k\nu} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi) \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \right)_U |_W \right) \left(\sum_{l=2}^{n} (a_{jl} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi) \left(\frac{\partial}{\partial x_l} \right)_U |_W(f) \right)(q).
\end{aligned}
$$

Novamente, pela regra do produto, temos

$$
\begin{aligned}
[M_j, M_k](f)(q) &= \sum_{\nu,l=2}^{n} (a_{jl} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi)(q) \left(\frac{\partial}{\partial x_l} \right)_U |_W(a_{k\nu} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi)(q) \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \right)_U |_W(f)(q) \\
&+ \sum_{\nu,l=2}^{n} (a_{jl} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi)(q)(a_{k\nu} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi)(q) \left(\frac{\partial}{\partial x_l} \right)_U |_W \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \right)_U |_W(f)(q) \\
&- \sum_{\nu,l=2}^{n} (a_{k\nu} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi)(q) \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \right)_U |_W(a_{jl} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi)(q) \left(\frac{\partial}{\partial x_l} \right)_U |_W(f)(q) \\
&- \sum_{\nu,l=2}^{n} (a_{k\nu} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi)(q)(a_{jl} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi)(q) \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \right)_U |_W \left(\frac{\partial}{\partial x_l} \right)_U |_W(f)(q) \\
&= \sum_{\nu,l=2}^{n} (a_{jl} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi)(q) \left(\frac{\partial}{\partial x_l} \right)_U |_W(a_{k\nu} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi)(q) \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \right)_U |_W(f)(q) \\
&- \sum_{\nu,l=2}^{n} (a_{k\nu} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi)(q) \left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} \right)_U |_W(a_{jl} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi)(q) \left(\frac{\partial}{\partial x_l} \right)_U |_W(f)(q).
\end{aligned}
$$

Dessa forma, provando que

$$\frac{\partial a_{k\nu}}{\partial x_l} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi = \left(\frac{\partial}{\partial x_l}\right)_U |_W (a_{k\nu} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi),$$

para todo $l, k = 2, \ldots, n$, teremos o desejado.
Assim, denotando $g(q) = (a_{k\nu} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi)(q)$, com $q \in W$, temos que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\right)_U |_W (g)(q) = \left(\frac{\partial}{\partial x_l}\right)_U (\tilde{g})(0, q) = \left(\frac{\partial(\tilde{g} \circ \mathbf{x})}{\partial x_l} \circ \mathbf{x}^{-1}\right)(0, q) = \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_l}(0, q).$$

Mas, como $g \in C^\infty(W)$, pois é composição de funções suaves, temos de (2.32) que $\tilde{g}(0, q) = g(q)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\right)_U |_W (g)(q) &= \frac{\partial g}{\partial x_l}(q) \\
&= \frac{\partial(a_{k\nu} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi)}{\partial x_l}(q) \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(a_{k\nu} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi)(q + he_l) - (a_{k\nu} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi)(q)}{h}.
\end{aligned}$$

Mas por (2.34) temos que

$$\psi(q + he_l) = (0, q + he_l) = (0, q) + h(0, e_l) \quad \text{e} \quad \psi(q) = (0, q).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\right)_U |_W (g)(q) &= \lim_{h \to 0} \frac{(a_{k\nu} \circ \mathbf{x}^{-1})((0, q) + h(0, e_l)) - (a_{k\nu} \circ \mathbf{x}^{-1})(0, q)}{h} \\
&= \frac{\partial(a_{k\nu} \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial x_l}(0, q) \\
&= \frac{\partial(a_{k\nu} \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial x_l} \circ \mathbf{x} \circ \mathbf{x}^{-1}(0, q) \\
&= \frac{\partial a_{k\nu}}{\partial x_l} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi(q),
\end{aligned}$$

o que conclui a afirmação 1.
Portanto,

$$[M_j, M_k]_q = \sum_{\nu=2}^{n} (c_{jk}^\nu \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi)(q) M_{\nu q} \in \mathcal{V}'_q,$$

para todo $q \in W$, donde $\mathcal{V}'$ é uma estrutura formalmente integrável. Aplicando a hipótese de indução, temos que existem coordenadas locais $w_2, \ldots, w_N$ definidas em uma vizinhança da origem de $\mathbb{R}^{N-1}$ tais que

$$\mathcal{V}'_q = span\left\{\left(\frac{\partial}{\partial w_2}\right)_q, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial w_n}\right)_q\right\}, \quad \text{para todo } q \in W.$$

Em particular, $\mathbf{w} : W \longrightarrow \mathbf{w}(W) \subset \mathbb{R}^{N-1}$ é um difeomorfismo. Defina,

$$\begin{aligned} \eta : \quad U \quad &\longrightarrow \eta(U) \\ q \quad &\longmapsto \eta(q) = (q_1, w_2(q_2, \ldots, q_N), \ldots, w_N(q_2, \ldots, q_N)). \end{aligned}$$

Assim,

$$J_\eta(q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \eta_1}{\partial q_1}(q) & \frac{\partial \eta_1}{\partial q_2}(q) & \cdots & \frac{\partial \eta_1}{\partial q_N}(q) \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial q_1}(q) & \frac{\partial \eta_2}{\partial q_2}(q) & \cdots & \frac{\partial \eta_2}{\partial q_N}(q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \eta_N}{\partial q_1}(q) & \frac{\partial \eta_N}{\partial q_2}(q) & \cdots & \frac{\partial \eta_N}{\partial q_N}(q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\partial w_2}{\partial q_2}(q) & \cdots & \frac{\partial w_2}{\partial q_N}(q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \frac{\partial w_N}{\partial q_2}(q) & \cdots & \frac{\partial w_N}{\partial q_N}(q) \end{pmatrix}.$$

Logo, $\det(J_\eta(q)) = \det(J_{\mathbf{w}}(q)) \neq 0$, pois $\mathbf{w}$ é difeomorfismo. Então, pelo Teorema da Função Inversa, temos que η é um difeomorfismo. Observe que

$$\eta(U) = \eta(\mathbf{x}(V)) = (-\delta, \delta) \times \mathbf{w}(W).$$

Com efeito, usando a norma do máximo em $\mathbb{R}^N$ e $\mathbb{R}^{N-1}$ temos que, dado $a \in \eta(\mathbf{x}(V))$, existe $b \in \mathbf{x}(V) = B_{\mathbb{R}^N}(0, \delta)$ tal que $a = \eta(b) = (b_1, w_2(b_2, \ldots, b_N), \ldots, w_N(b_2, \ldots, b_N))$. Assim, $|b_1| \leq \max_{j=1,\ldots,N}\{|b_j|\} = \|b\|_{\mathbb{R}^N} < \delta$, o que implica, que $b_1 \in (-\delta, \delta)$. Logo, $a = (b_1, w_2(b_2, \ldots, b_N), \ldots, w_N(b_2, \ldots, b_N)) \in (-\delta, \delta) \times \mathbf{w}(W)$. Reciprocamente, seja $a \in (-\delta, \delta) \times \mathbf{w}(W)$. Então, $a_1 \in (-\delta, \delta)$ e $(a_2, \ldots, a_N) \in \mathbf{w}(W)$. Assim, existe $(b_2, \ldots, b_N) \in W$ tal que $\mathbf{w}(b_2, \ldots, b_N) = (a_2, \ldots, a_N)$. Logo, $w_k(b_2, \ldots, b_N) = a_k$, para todo $k = 2, \ldots, N$. Tomando $b_1 = a_1$ temos que $(b_1, b_2, \ldots, b_N) \in \mathbf{x}(V) = B_{\mathbb{R}^N}(0, \delta)$, pois $\|(b_1, b_2, \ldots, b_N)\|_{\mathbb{R}^N} = \max\{|b_1|, |b_2|, \ldots, |b_N|\} = |b_j|$ para algum $j = 1, \ldots, N$, ou seja, se $j = 1$ temos que $|b_1| = |a_1| < \delta$ e, se $j = 2, \ldots, N$ temos que $|b_j| \leq \max\{|b_2|, \ldots, |b_N|\} = \|(b_2, \ldots, b_N)\|_{\mathbb{R}^{N-1}} < \delta$. Consequentemente, $\|(b_1, b_2, \ldots, b_N)\|_{\mathbb{R}^N} < \delta$. Assim,

$$\eta(b_1, b_2, \ldots, b_N) = (b_1, w_2(b_2, \ldots, b_N), \ldots, w_N(b_2, \ldots, b_N)) = (a_1, a_2, \ldots, a_N) = a.$$

Logo, $a \in \eta(\mathbf{x}(V))$. Analogamente, $U = (-\delta, \delta) \times \mathbf{W}$.

Agora, defina

$$\begin{aligned} \mathbf{y} : \quad V \quad &\longrightarrow \mathbf{y}(V) \subset \eta(U) \\ q \quad &\longmapsto \mathbf{y}(q) = \eta(\mathbf{x}(q)). \end{aligned}$$

Veja que $\mathbf{y}$ é difeomorfismo, pois é composição de difeomorfismo e $y_1 = x_1$.
Afirmação 2:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \left(\frac{\partial}{\partial y_l}\right)_U |_W &= \frac{\partial}{\partial w_l}, \quad l = 2, \ldots, N. \end{aligned}$$

Com efeito, sejam $f \in C^{\infty}(V)$, $q \in V$ e, tome $k > 0$ suficientemente pequeno de forma que $(\mathbf{x}(q) + ke_1) \in \mathbf{x}(V)$. Considere $\tilde{q} = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{x}(q) + ke_1) \in V$. Então,

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\tilde{q}) &= \eta(\mathbf{x}(\tilde{q})) \\ &= \eta(\mathbf{x}(q) + ke_1) \\ &= (x_1(q) + k, w_2(x_2(q), \ldots, x_N(q)), \ldots, w_N(x_2(q), \ldots, x_N(q))) \\ &= \eta(\mathbf{x}(q)) + ke_1 = \mathbf{y}(q) + ke_1. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y_1}(q) &= \frac{\partial (f \circ \mathbf{y}^{-1})}{\partial y_1}(\mathbf{y}(q)) = \lim_{k \to 0} \frac{(f \circ \mathbf{y}^{-1})(\mathbf{y}(q) + ke_1) - (f \circ \mathbf{y}^{-1})(\mathbf{y}(q))}{k} \\ &= \lim_{k \to 0} \frac{(f \circ \mathbf{y}^{-1})(\mathbf{y}(\tilde{q})) - (f \circ \mathbf{y}^{-1})(\mathbf{y}(q))}{k} \\ &= \lim_{k \to 0} \frac{f(\tilde{q}) - f(q)}{k}. \end{aligned}$$

Mas, $\tilde{q} = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{x}(q) + ke_1)$. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y_1}(q) &= \lim_{k \to 0} \frac{(f \circ \mathbf{x}^{-1})(\mathbf{x}(q) + ke_1) - (f \circ \mathbf{x}^{-1})(\mathbf{x}(q))}{k} \\ &= \frac{\partial (f \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial x_1}(\mathbf{x}(q)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(q) \end{aligned}$$

donde,

$$\frac{\partial}{\partial y_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Agora, note que dados $f \in C^{\infty}(W)$ e $q \in W$ temos que

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}^{-1}(0, q)) = \eta(\mathbf{x}(\mathbf{x}^{-1}(0, q))) = \eta(0, q) = (0, \mathbf{w}(q)). \tag{2.37}$$

Disto, temos que

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial y_l}\right)_U |_W(f)(q) &= \left(\frac{\partial(\tilde{f}\circ \mathbf{x})}{\partial y_l}\circ \mathbf{x}^{-1}\right)(0,q) = \left(\frac{\partial(\tilde{f}\circ \mathbf{x}\circ \mathbf{y}^{-1})}{\partial y_l}\circ \mathbf{y}\right)(\mathbf{x}^{-1}(0,q))\\ &= \frac{\partial(\tilde{f}\circ \mathbf{x}\circ \mathbf{y}^{-1})}{\partial y_l}(0,\mathbf{w}(q)).\end{aligned}$$

Mas, como $\mathbf{y} = \eta\circ \mathbf{x}$, temos que $\eta^{-1} = \mathbf{x}\circ \mathbf{y}^{-1}$. Assim,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial y_l}\right)_U |_W(f)(q) &= \frac{\partial(\tilde{f}\circ \eta^{-1})}{\partial y_l}(0,\mathbf{w}(q))\\ &= \lim_{k\to 0}\frac{(\tilde{f}\circ\eta^{-1})((0,\mathbf{w}(q))+ke_l)-(\tilde{f}\circ\eta^{-1})(0,\mathbf{w}(q))}{k}. \qquad (2.38)\end{aligned}$$

Considere a aplicação

$$\begin{aligned}\xi:\ \eta(U) &\longrightarrow U\\ q &\longmapsto \xi(q) = (q_1,\mathbf{w}^{-1}(q_2,\dots,q_N)\end{aligned}$$

e observe que

$$\xi(\eta(q)) = \xi(q_1,\mathbf{w}(q_2,\dots,q_N)) = (q_1,\mathbf{w}^{-1}(\mathbf{w}(q_2,\dots,q_N))) = q,$$

e

$$\eta(\xi(q)) = \eta(q_1,\mathbf{w}^{-1}(q_2,\dots,q_N)) = (q_1,\mathbf{w}(\mathbf{w}^{-1}(q_2,\dots,q_N))) = q,$$

isto é, $\eta^{-1} = \xi$. Logo, disto e de (2.32), temos que

$$(\tilde{f}\circ\eta^{-1})(q) = \tilde{f}(\xi(q)) = \tilde{f}(q_1,\mathbf{w}^{-1}(q_2,\dots,q_N)) = f(\mathbf{w}^{-1}(q_2,\dots,q_N)).$$

Agora voltando em (2.38) temos que

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial y_l}\right)_U |_W(f)(q) &= \lim_{k\to 0}\frac{(f\circ \mathbf{w}^{-1})(\mathbf{w}(q)+ke_l)-(f\circ\mathbf{w}^{-1})(\mathbf{w}(q))}{k}\\ &= \frac{\partial(f\circ\mathbf{w}^{-1})}{\partial w_l}(\mathbf{w}(q))\\ &= \frac{\partial f}{\partial w_l}(q),\end{aligned}$$

concluindo a afirmação 2.

Portanto,

$$L_1^\sharp = \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial y_1}$$

e existem funções $b_{jk} \in C^\infty(V)$, $j = 2, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, N$, tais que

$$L_j^\sharp = \sum_{k=1}^{N} b_{jk} \frac{\partial}{\partial y_k}.$$

Por outro lado, como $y_1 = x_1$ temos que $L_j^\sharp(y_1) = L_j^\sharp(x_1)$, para todo $j = 2, \ldots, n$. Mas,

$$L_j^\sharp(y_1) = \sum_{k=1}^{N} b_{jk} \frac{\partial y_1}{\partial y_k} = b_{j1}$$

e

$$L_j^\sharp(x_1) = \sum_{k=1}^{N} b_{jk} \frac{\partial x_1}{\partial y_k} = 0.$$

Logo, $b_{j1} = 0$ para todo $j = 2, \ldots, n$ e, consequentemente,

$$L_j^\sharp = \sum_{k=2}^{N} b_{jk} \frac{\partial}{\partial y_k}.$$

Ainda, temos que

$$M_j = (L_j^\sharp)_U|_W = \sum_{k=2}^{N} (b_{jk} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi) \left(\frac{\partial}{\partial y_k} \right)_U |_W = \sum_{k=2}^{N} (b_{jk} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi) \frac{\partial}{\partial w_k},$$

para todo $j = 2, \ldots, n$. Assim,

$$M_{jq} = \sum_{k=2}^{N} (b_{jk} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi)(q) \left(\frac{\partial}{\partial w_k} \right)_q, \qquad q \in W.$$

Porém, $M_{jq} \in \mathcal{V}'_q = \operatorname{span}\{ \left(\frac{\partial}{\partial w_2} \right)_q, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial w_n} \right)_q \}$ para todo $j = 2, \ldots, n$. Então,

$$(b_{jk} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \psi)(q) = (b_{jk} \circ \mathbf{x}^{-1})(0, q) = 0, \quad j = 2, \ldots, n, \; k = n+1, \ldots, N, \; q \in W. \quad (2.39)$$

Vamos mostrar que $b_{jk} = 0$, $j = 2, \ldots, n$, $k = n+1, \ldots, N$ e, assim, teremos que

$$\begin{aligned} L_1^\sharp &= \frac{\partial}{\partial y_1} \\ L_j^\sharp &= \sum_{k=2}^{n} b_{jk} \frac{\partial}{\partial y_k}, \qquad j = 2, \ldots, n, \end{aligned}$$

donde $\mathcal{V}_p = \operatorname{span}\{ \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n} \right)_p \}$, para todo $p \in V$, como desejamos.

Primeiramente, para todo $j = 2, \ldots, n$ sabemos que

$$[L_1^\sharp, L_j^\sharp] = \sum_{\nu=2}^{n} c_{1j}^\nu L_\nu^\sharp = \sum_{k=2}^{N} \left(\sum_{\nu=2}^{n} c_{1j}^\nu b_{\nu k} \right) \frac{\partial}{\partial y_k}.$$

Por outro lado, para todo $g \in C^\infty(V)$ e $j = 2, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} [L_1^\sharp, L_j^\sharp](g) &= L_1^\sharp(L_j^\sharp(g)) - L_j^\sharp(L_1^\sharp(g)) = \frac{\partial}{\partial y_1} \left(\sum_{k=2}^{N} b_{jk} \frac{\partial g}{\partial y_k} \right) - \left(\sum_{k=2}^{N} b_{jk} \frac{\partial}{\partial y_k} \right) \frac{\partial g}{\partial y_1} \\ &= \sum_{k=2}^{N} \left(\frac{\partial b_{jk}}{\partial y_1} \frac{\partial g}{\partial y_k} + b_{jk} \frac{\partial^2 g}{\partial y_1 y_k} - b_{jk} \frac{\partial^2 g}{\partial y_k y_1} \right) = \sum_{k=2}^{N} \frac{\partial b_{jk}}{\partial y_1} \frac{\partial g}{\partial y_k}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$[L_1^\sharp, L_j^\sharp] = \sum_{k=2}^{N} \frac{\partial b_{jk}}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial y_k}.$$

Assim,

$$\sum_{k=2}^{N} \left(\sum_{\nu=2}^{n} c_{1j}^\nu b_{\nu k} \right) \frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{k=2}^{N} \left(\frac{\partial b_{jk}}{\partial y_1} \right) \frac{\partial}{\partial y_k}, \quad j = 2, \ldots, n,$$

donde vem que

$$\frac{\partial b_{jk}}{\partial y_1} = \sum_{\nu=2}^{n} c_{1j}^\nu b_{\nu k}, \quad j = 2, \ldots, n, \ k = 2, \ldots, N.$$

Assim,

$$\frac{\partial b_{jk}}{\partial y_1} \circ \mathbf{x}^{-1} = \sum_{\nu=2}^{n} (c_{1j}^\nu \circ \mathbf{x}^{-1})(b_{\nu k} \circ \mathbf{x}^{-1}), \quad j = 2, \ldots, n, \ k = 2, \ldots, N.$$

Além disso, de (2.37)

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{jk}}{\partial y_1}(\mathbf{x}^{-1}(q)) &= \frac{\partial (b_{jk} \circ \mathbf{y}^{-1})}{\partial y_1}(\mathbf{y}(\mathbf{x}^{-1}(q))) \\ &= \frac{\partial (b_{jk} \circ \mathbf{y}^{-1})}{\partial y_1}(q_1, \mathbf{w}(q_2, \ldots, q_N)) \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(b_{jk} \circ \mathbf{y}^{-1})(q_1 + h, \mathbf{w}(q_2, \ldots, q_N)) - (b_{jk} \circ \mathbf{y}^{-1})(q_1, \mathbf{w}(q_2, \ldots, q_N))}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(b_{jk} \circ \mathbf{x}^{-1})(q_1 + h, q_2, \ldots, q_N) - (b_{jk} \circ \mathbf{x}^{-1})(q)}{h} \\ &= \frac{\partial (b_{jk} \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial y_1}(q), \end{aligned}$$

para todo $q \in U$, $j = 2, \ldots, n$ e $k = 2, \ldots, N$. Logo,

$$\frac{\partial (b_{jk} \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial y_1} = \frac{\partial b_{jk}}{\partial y_1} \circ \mathbf{x}^{-1} = \sum_{\nu=2}^{n} (c_{1j}^\nu \circ \mathbf{x}^{-1})(b_{\nu k} \circ \mathbf{x}^{-1}), \quad j = 2, \ldots, n, \ k = 2, \ldots, N. \tag{2.40}$$

Denotando $B_{jk} = b_{jk} \circ \mathbf{x}^{-1}$ e $C^{\nu}_{1j} = c^{\nu}_{1j} \circ \mathbf{x}^{-1}$, $j = 2, \ldots, n$, $k = 2, \ldots, N$, temos que (2.39) e (2.40) nos fornecem o seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial B_{jk}}{\partial y_1} = \sum_{\nu=2}^{n} C^{\nu}_{1j} B_{\nu k}, \quad j = 2, \ldots, n, \ k = 2, \ldots, N \\ B_{jk}(0, q) = (b_{jk} \circ \mathbf{x}^{-1})(0, q) = 0, \quad j = 2, \ldots, n, \ k = n+1, \ldots, N. \end{cases} \tag{2.41}$$

Fixamos $q \in W$ e definamos

$$\begin{aligned} B_{jkq}(t) &= B_{jk}(t, q) \\ C^{\nu}_{1jq}(t) &= C^{\nu}_{1j}(t, q), \end{aligned}$$

onde $t \in (-\delta, \delta)$. Reescrevendo o sistema (2.41), obtemos a seguinte E.D.O

$$\begin{cases} \frac{dB_{jkq}}{dt}(t) = \sum_{\nu=2}^{n} C^{\nu}_{1jq}(t) B_{\nu kq}(t), \quad t \in (-\delta, \delta) \\ B_{jkq}(0) = 0, \quad j = 2, \ldots, n, \ k = n+1, \ldots, N. \end{cases} \tag{2.42}$$

Como $C^{\nu}_{1jq}(t) = (C^{\nu}_{1j} \circ \pi)(t)$, onde

$$\begin{aligned} \pi : \ (-\delta, \delta) &\longrightarrow U \\ t &\longmapsto \pi(t) = (t, q), \end{aligned}$$

temos que $C^{\nu}_{1jq} \in C^{\infty}(-\delta, \delta)$, pois é composição de funções suaves. Portanto, temos que (2.42) admite única solução. Mas, $B_{jkq}(t) = 0$ é solução de (2.42), donde concluimos que $B_{jk}(t, q) = B_{jkq}(t) = 0$, com $t \in (-\delta, \delta)$, $q \in W$, $j = 2, \ldots, n$ e $k = n+1, \ldots, N$. Logo, para todo $j = 2, \ldots, n$ e $k = n+1, \ldots, N$ temos que $b_{jk} \circ \mathbf{x}^{-1} = B_{jk} = 0$ e, consequentemente, $b_{jk} = 0$, como queríamos. □

2.5 ESTRUTURAS ANALÍTICAS

Estudaremos brevemente alguns conceitos, das seções anteriores, sob uma variedade analítica real.

Definição 2.69. *Seja Ω um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável de conjuntos abertos. Uma estrutura análitica real sobre Ω de dimensão N é uma família de pares $\mathcal{F} = \{(V, \boldsymbol{x})\}$, onde $V \subset \Omega$ é um conjunto aberto não vazio e $\boldsymbol{x} : V \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é um homeomorfismo sobre um subconjunto aberto $\boldsymbol{x}(V)$ de $\mathbb{R}^N$, satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) $\bigcup_{(V,\boldsymbol{x}) \in \mathcal{F}} V = \Omega$;

(ii) A função $\boldsymbol{x}_2 \circ \boldsymbol{x}_1^{-1} : \boldsymbol{x}_1(V_1 \cap V_2) \longrightarrow \boldsymbol{x}_2(V_1 \cap V_2)$ é analítica real para cada par $(V_1, \boldsymbol{x}_1), (V_2, \boldsymbol{x}_2) \in \mathcal{F}$ com $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$;

(iii) *$\mathcal{F}$ é maximal com respeito à (i) e (ii), isto é, se $\emptyset \neq W \subset \Omega$ é aberto e $\boldsymbol{y} : W \longrightarrow \boldsymbol{y}(W)$ é um homoemorfismo sobre um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$, tal que para qualquer $(V, \boldsymbol{x}) \in \mathcal{F}$ com $V \cap W \neq \emptyset$ a composição $\boldsymbol{y} \circ \boldsymbol{x}^{-1} : \boldsymbol{x}(V \cap W) \longrightarrow \boldsymbol{y}(V \cap W)$ é analítica real, então $(W, \boldsymbol{y}) \in \mathcal{F}$.*

Definição 2.70. *Uma variedade analítica real de dimensão N é o par $(\Omega, \mathcal{F})$, onde Ω é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável, e $\mathcal{F}$ é uma estrutura analítica real de dimensão N.*

Definição 2.71. *Uma função $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ é analítica real, se para cada $(V, \boldsymbol{x}) \in \mathcal{F}$ a composição $f \circ \boldsymbol{x}^{-1}$ é analítica real em $\boldsymbol{x}(V)$.*

Notação 2.72. Dado $U \subset \Omega$ um conjunto aberto, denotaremos por $\mathcal{A}(U)$ o espaço das funções analíticas reais em U.

Definição 2.73. *Um elemento $L \in \mathscr{X}(\Omega)$ é dito ser um campo vetorial analítico real em Ω se*

$$L(\mathcal{A}(U)) \subset \mathcal{A}(U), \qquad \textit{para todo } U \subset \Omega \textit{ aberto}.$$

Teorema 2.74. *Seja $(U, \boldsymbol{x})$ uma carta local em Ω e suponha que*

$$L = \sum_{j=1}^{N} L(x_j) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Então, L é analítico real se, e somente se, os coeficientes $L(x_j)$, $j = 1, \ldots, N$ são funções analíticas reais.

Demonstração. Suponha que L seja analítica real. Então, $L(\mathcal{A}(U)) \subset \mathcal{A}(U)$ para todo $U \subset \Omega$ aberto. Tome $(V, \mathbf{y})$ uma carta local em Ω. Como Ω é uma variedade analítica real, temos que $\mathbf{x} \circ \mathbf{y}^{-1} : \mathbf{y}(U \cap V) \longrightarrow \mathbf{x}(U \cap V)$ é analítica real. Além disso, $\mathbf{x} \circ \mathbf{y}^{-1}(t_1, \ldots, t_N) = (f_1(t_1, \ldots, t_N), \ldots, f_N(t_1, \ldots, t_N))$, onde $f_i : \mathbf{y}(U \cap V) \longrightarrow \mathbb{R}$ são analíticas reais, para todo $i = 1, \ldots, N$.

Considere para cada $j = 1, \ldots, N$,

$$\begin{aligned} \pi_j : \qquad \mathbb{R}^N \qquad &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, \ldots, v_N) \ &\longmapsto \pi_j(v_1, \ldots, v_N) = v_j. \end{aligned}$$

Logo,

$$\pi_j(\mathbf{x} \circ \mathbf{y}^{-1}(t_1, \ldots, t_N)) = \pi_j(f_1(t_1, \ldots, t_N), \ldots, f_N(t_1, \ldots, t_N)),$$

donde

$$x_j \circ \mathbf{y}^{-1}(t_1, \ldots, t_N)) = f_j(t_1, \ldots, t_N).$$

Como f_j são analíticas reais, temos que $x_j \circ \mathbf{y}^{-1}$ é analítica real em $\mathbf{y}(U \cap V)$, para todo $j = 1, \ldots, N$. Portanto, x_j é analítica real em $U \cap V$, o qual é um subconjunto aberto de Ω, ou seja, $x_j \in \mathcal{A}(U \cap V)$ e como $L(\mathcal{A}(U \cap V)) \subset \mathcal{A}(U \cap V)$, temos que $L(x_j) \in \mathcal{A}(U \cap V)$, para todo $j = 1, \ldots, N$. Reciprocamente, suponha que $L(x_j)$, $j = 1, \ldots, N$, sejam funções analíticas reais e tome $f \in L(\mathcal{A}(U))$, onde $U \subset \Omega$ é aberto. Então existe $g \in \mathcal{A}(U)$ tal que $L(g) = f$, isto é,

$$f = L(g) = \sum_{j=1}^{N} L(x_j) \frac{\partial g}{\partial x_j}.$$

Como, $g \in \mathcal{A}(U)$ temos que $\frac{\partial g}{\partial x_j} \in \mathcal{A}(U)$. Ainda, o produto e a soma de funções analíticas reais é uma função analítica real. Portanto, temos que $f \in \mathcal{A}(U)$, donde L é analítico real. $\square$

Definição 2.75. *Dizemos que $\omega \in \mathfrak{N}(\Omega)$ é uma 1-forma analítica real em Ω, se $\omega(L) \in \mathcal{A}(U)$ para cada $U \subset \Omega$ aberto e cada campo vetorial analítico real L.*

A partir dessas definições, podemos introduzir as noções de subfibrado tangente e cotangente analítico. Em particular, podemos nos referir a noção de uma estrutura formalmente integrável analítica sobre Ω.

2.6 O Conjunto Característico

Neste momento, definiremos o conjunto característico T^0 de uma estrutura formalmente integrável $\mathcal{V}$ e exemplificaremos que nem sempre o conjunto característico é um subfibrado vetorial de $T^*\Omega$.

Recordemos que se $\mathcal{V}$ é uma estrutura formalmente integrável sobre Ω, então T' denota o subfibrado $\mathcal{V}^{\perp}$.

Definição 2.76. *Seja $\mathcal{V} \subset \mathbb{C}T\Omega$ uma estrutura formalmente integrável sobre Ω. O conjunto característico de $\mathcal{V}$ é o subconjunto de $T^*\Omega$ definido por*

$$T^0 = T^{'} \cap T^*\Omega.$$

Além disso, definimos $T_p^0 = T_p^{'} \cap T_p^*\Omega$ se $p \in \Omega$, isto é, $T^0 = \bigcup_{p \in \Omega} T_p^0$.

Observação 2.77. T_p^0 é subespaço vetorial de $T_p^*\Omega$. De fato, por definição $T_p^0 \subset T_p^*\Omega$ e, note que $T_p^0 \neq \emptyset$, pois $0 \in T_p^{'} \cap T_p^*\Omega = T_p^0$. Agora, sejam $u, v \in T_p^0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim, $u, v \in T_p^*\Omega$ e $u(a) = v(a) = 0$, para todo $a \in \mathcal{V}_p$. Como $T_p^*\Omega$ é espaço vetorial, temos que $\lambda u + v \in T_p^*\Omega$. Além disso,

$$(\lambda u + v)(a) = \lambda u(a) + v(a) = 0, \qquad a \in \mathcal{V}_p,$$

o que implica, que $\lambda u + v \in \mathcal{V}_p^{\perp} = T_p^{'}$. Portanto, $\lambda u + v \in T_p^0$ e, consequentemente, T_p^0 é subespaço vetorial de $T_p^*\Omega$.

Definição 2.78. *O símbolo de um campo vetorial* $L \in \mathscr{X}(\Omega)$ *é a função* $\sigma(L) : T^*\Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ *dada por* $\sigma(L)(\xi) = \xi(L_p)$*, para cada* $\xi \in T_p^*\Omega$ *e* $p \in \Omega$*.*

Proposição 2.79. *Seja* $\mathcal{V}$ *uma estrutura formalmente integrável sobre* Ω*. Então,* $\xi \in T_p^0$ *se, e somente se,* $\sigma(L)(\xi) = 0$*, para cada seção* L *de* $\mathcal{V}$*.*

Demonstração. Suponha que $\xi \in T_p^0$ e tome L um seção de $\mathcal{V}$. Então, $L_p \in \mathcal{V}_p$, para todo $p \in \Omega$. Como $\xi \in T_p^0 = T_p^{'} \cap T_p^*\Omega$, temos que $\xi \in T_p^{'}$, isto é, $\xi = 0$ em $\mathcal{V}_p$ para todo $p \in \Omega$. Logo, $\sigma(L)(\xi) = \xi(L_p) = 0$. Reciprocamente, suponha que $\sigma(L)(\xi) = 0$, para toda seção L de $\mathcal{V}$ e tome $p \in \Omega$ arbitrário. Então, $\xi(L_p) = 0$. Pela definição 2.78, temos que $\xi \in T_p^*\Omega$, assim, resta-nos mostrar que $\xi \in T_p^{'}$. Mas, note que $\mathcal{V}$ é um subfibrado tangente, logo existem campos vetoriais $L_1, \ldots, L_n$ definidos numa vizinhança $U_0 \subset \Omega$ de p, tais que $\{L_{1p}, \ldots, L_{np}\}$ é uma base de $\mathcal{V}_p$, para todo $p \in U_0$. Dessa forma, $L_1, \ldots, L_n$ são seções de $\mathcal{V}$ sobre U_0 e, por hipótese, $\xi(L_{jp}) = 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$ e para todo $p \in U_0$. Como $L_{1p}, \ldots, L_{np}$ são elementos da base de $\mathcal{V}_p$, temos que $\xi = 0$ em $\mathcal{V}_p$, para todo $p \in \Omega$. Portanto, $\xi \in \mathcal{V}_p^{\perp} = T_p^{'}$, como queríamos. □

Vejamos agora uma forma muito útil de descrever o conjunto característico a partir da Definição 2.78 e da Proposição 2.79. Considere $(U, \mathbf{x})$ uma carta local em Ω e $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N)$. Tome $p \in U$, $\xi \in T_p^*\Omega$ e $L \in \mathscr{X}(U)$. Então podemos escrever

$$\xi = \sum_{j=1}^{N} \xi_j dx_{jp},$$

onde $\xi_j \in \mathbb{R}$, para todo $j = 1, \ldots, N$ e,

$$L = \sum_{j=1}^{N} a_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

onde $a_j \in C^\infty(U)$. Assim,

$$\begin{aligned} \sigma(L)(\xi) = \xi(L_p) &= \left(\sum_{j=1}^{N} \xi_j dx_{jp} \right) \left(\sum_{k=1}^{N} a_k(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_p \right) \\ &= \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{N} a_k(p) dx_{jp} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_p \right) \xi_j \\ &= \sum_{j=1}^{N} a_j(p) \xi_j. \end{aligned}$$

Portanto, se $L_j = \sum_{k=1}^{N} a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}$, com $j = 1, \ldots, n$, são n seções L.I de $\mathcal{V}$ sobre U, e tomando $\xi \in T^0 \cap T^*U$ temos que $\xi \in \bigcup_{p \in U} T_p^0$, ou seja, $\xi \in T_{\tilde{p}}^0$ para algum $\tilde{p} \in U$. Logo, pela Proposição 2.79 $\sigma(L_j)(\xi) = 0$, para todo $j = 1, \ldots, n$. Isto é, podemos descrever o conjunto característico $T^0 \cap T^*U$ pelo sistema de equações

$$\sum_{k=1}^{N} a_{jk}(p)\xi_k = 0, \quad p \in U,\ \xi_k \in \mathbb{R},\ j = 1, \ldots, n.$$

Exemplo 2.80. Seja $\Omega = \mathbb{R}^2$ com coordenadas (x, t) e considere

$$M = \frac{\partial}{\partial t} - it\frac{\partial}{\partial x} \in \mathscr{X}(\mathbb{R}^2) \tag{2.43}$$

o campo vetorial de Mizohata ou operador de Mizohata. O conjunto característico da estrutura formalmente integrável $\mathcal{V}$ gerada por M não é um subfibrado vetorial de $T^*\mathbb{R}^2$. De fato, sejam $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\xi \in T_p^*\mathbb{R}^2$. Então, $\xi = \xi_1 dx_p + \xi_2 dt_p$, $M_p = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_p - ip_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p$ e $\sigma(M)(\xi) = \xi(M_p) = -ip_2\xi_1 + \xi_2$. Assim,

$$\begin{aligned} T_p^0 = \{\xi; -ip_2\xi_1 + \xi_2 = 0\} \quad &= \quad \begin{cases} \{\xi; \xi_2 = 0\}, & \text{se } p_2 = 0 \\ \{\xi; \xi_1 = \xi_2 = 0\}, & \text{se } p_2 \neq 0 \end{cases} \\ &= \quad \begin{cases} \{\xi_1 dx_p; \xi_1 \in \mathbb{R}\}, & \text{se } p_2 = 0 \\ \{0\}, & \text{se } p_2 \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, $\dim T_p^0$ depende de $p \in \mathbb{R}^2$ e, portanto, T^0 não é um subfibrado vetorial de $T^*\mathbb{R}^2$.

2.7 Algumas Estruturas Especiais

Definição 2.81. *Seja $\mathcal{V}$ uma estrutura formalmente integrável sobre Ω. Dizemos que $\mathcal{V}$ é uma estrutura*

(i) elíptica se $T_p^0 = 0$, para todo $p \in \Omega$;

(ii) complexa se $\mathcal{V}_p \oplus \overline{\mathcal{V}}_p = \mathbb{C}T_p\Omega$, para todo $p \in \Omega$;

(iii) Cauchy-Riemann (CR) se $\mathcal{V}_p \cap \overline{\mathcal{V}}_p = 0$, para todo $p \in \Omega$;

(iv) essencialmente real se $\mathcal{V}_p = \overline{\mathcal{V}}_p$, para todo $p \in \Omega$.

Exemplo 2.82. A estrutura formalmente integrável dada no Exemplo 2.36 é uma estrutura essencialmente real. De fato, dado $p \in \mathbb{R}^2$ temos que

$$\overline{\mathcal{V}}_p = \{\overline{v}; v \in \mathcal{V}_p\} = \left\{\overline{v}; v = \lambda\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p, \lambda \in \mathbb{C}\right\} = \left\{\overline{\lambda\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p}; \lambda \in \mathbb{C}\right\}.$$

Para mostrarmos que $\overline{\mathcal{V}}_p = \mathcal{V}_p$, para todo $p \in \Omega$, resta-nos mostrar que $\overline{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p$, pois assim

$$\overline{\mathcal{V}}_p = \left\{ \overline{\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_p ; \lambda \in \mathbb{C} \right\} = \text{span} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_p \right\} = \mathcal{V}_p$$

para todo $p \in \mathbb{R}^2$. Então, dado $\underline{f} \in \mathbb{C}^\infty(p)$, temos

$$\overline{\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_p} (\underline{f}) = \overline{\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_p (\overline{\underline{f}})} = \overline{\left(\frac{\partial}{\partial x} \right) (\overline{f})(p)} = \overline{\left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \overline{(f)(p)}} = \overline{\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)} (f)(p).$$

Por outro lado,

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_p (\underline{f}) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) (f)(p).$$

Logo, mostraremos que $\frac{\partial}{\partial x}(C^\infty(\Omega, \mathbb{R})) \subset C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, pois assim pela observação 2.59 teremos que $\frac{\partial}{\partial x} = \overline{\frac{\partial}{\partial x}}$. Com efeito, dado $g \in \frac{\partial}{\partial x}(C^\infty(\Omega, \mathbb{R}))$, temos que existe $h \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ tal que $\frac{\partial}{\partial x}(h) = g$. Como, $h \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, temos que $\frac{\partial}{\partial x}(h) \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Logo, $g \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. Portanto,

$$\overline{\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_p} (\underline{f}) = \overline{\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)} (f)(p) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) (f)(p) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_p (\underline{f}), \quad \underline{f} \in C^\infty(p),$$

donde $\overline{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p$, como queríamos.

Lema 2.83. *Se $L_1, \ldots, L_n \in \mathscr{X}(U)$ forem tais que $\{L_{1p_0}, \ldots, L_{np_0}\}$ é L.I, para algum $p_0 \in U$, então existe $V \subset U$ aberto contendo p_0, tal que $\{L_{1p}, \ldots, L_{np}\}$ é L.I, para todo $p \in V$.*

Demonstração. Sejam $p_0 \in U \subset \Omega$ e $L_1, \ldots, L_n \in \mathscr{X}(U)$, então existem $a_{1k}, \ldots, a_{nk} \in C^\infty(U)$, com $k = 1, \ldots, N$, tais que

$$L_j = \sum_{k=1}^{N} a_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Como $\{L_{1p_0}, \ldots, L_{np_0}\}$ é L.I temos que a matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11}(p_0) & a_{21}(p_0) & \cdots & a_{n1}(p_0) \\ a_{12}(p_0) & a_{22}(p_0) & \cdots & a_{n2}(p_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1N}(p_0) & a_{2N}(p_0) & \cdots & a_{nN}(p_0) \end{pmatrix}$$

tem posto n.

Assim, reordenando os índices da matriz anterior, temos que a matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11}(p_0) & a_{21}(p_0) & \cdots & a_{n1}(p_0) \\ a_{12}(p_0) & a_{22}(p_0) & \cdots & a_{n2}(p_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}(p_0) & a_{2n}(p_0) & \cdots & a_{nn}(p_0) \end{pmatrix}$$

é invertível, isto é, $\det(a_{jk}(p_0))_{n\times n} \neq 0$. Como o determinante é uma função contínua,temos que existe $V \subset U$ aberto contendo p_0, tal que $\det(a_{jk}(q))_{n\times n} \neq 0$ para todo $q \in V$, ou seja,

$$\begin{pmatrix} a_{11}(q) & a_{21}(q) & \cdots & a_{n1}(q) \\ a_{12}(q) & a_{22}(q) & \cdots & a_{n2}(q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n}(q) & a_{2n}(q) & \cdots & a_{nn}(q) \end{pmatrix}$$

tem n linhas L.I para todo $q \in V$. Agora, sejam $\alpha_{jp} \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, n$, tais que

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jp} L_{jp} = 0, \qquad p \in V.$$

Então,

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jp} a_{jk}(p) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_p = 0, \qquad p \in V.$$

Como, $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_p ; k = 1, \ldots, N \right\}$ é L.I, temos que

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jp} a_{jk}(p) = 0, \tag{2.44}$$

para todo $k = 1, \ldots, N$ e $p \in V$. Em particular, (2.44) vale para todo $k = 1, \ldots, n$, isto é,

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jp} a_{j1}(p) = 0 \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jp} a_{j2}(p) = 0 \\ \ldots \\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jp} a_{jn}(p) = 0. \end{cases}$$

Utilizando notação vetorial, segue que

$$\alpha_{1p}(a_{11}(p), a_{12}(p), \ldots, a_{1n}(p)) + \ldots + \alpha_{np}(a_{n1}(p), a_{n2}(p), \ldots, a_{nn}(p)) = 0, \qquad p \in V.$$

Como $(a_{jk}(p))_{j,k=1,\ldots,n}$ tem n linhas L.I, segue que $\alpha_{1p} = \alpha_{2p} = \ldots = \alpha_{np} = 0$ para todo

$p \in V$. Portanto, $\{L_{1p}, \ldots, L_{np}\}$ é L.I para todo $p \in V$. $\square$

A próxima proposição envolve estrutura essencialmente real, a qual mais tarde provaremos ser uma estrutura localmente integrável.

Proposição 2.84. *Toda estrutura essencialmente real é localmente gerada por campos vetoriais reais.*

Demonstração. Seja $\mathcal{V}$ uma estrutura essencialmente real . Assim, dado $p_0 \in \Omega$, existem $U_0 \subset \Omega$ contendo p_0 e campos vetoriais $L_1, \ldots, L_n \in \mathscr{X}(U_0)$ tais que $\mathcal{V}_p = \operatorname{span}\{L_{1p}, \ldots, L_{np}\}$, para todo $p \in U_0$. Em particular, $\mathcal{V}_{p_0} = \operatorname{span}\{L_{1p_0}, \ldots, L_{np_0}\}$.
Defina os campos vetoriais reais

$$\Re L_j = \frac{L_j + \overline{L_j}}{2} \text{ e } \Im L_j = \frac{L_j - \overline{L_j}}{2i}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Observe que, $L_j = \Re L_j + i \Im L_j$, $j = 1, \ldots, n$. Como, por hipótese, $\mathcal{V}_p = \overline{\mathcal{V}}_p$, para todo $p \in \Omega$, temos que $\overline{L_{jp_0}} \in \mathcal{V}_{p_0}$ com $j = 1, \ldots, n$. Logo, $\Re L_{jp_0}, \Im L_{jp_0} \in \mathcal{V}_{p_0}$, donde

$$\operatorname{span}\{\Re L_{jp_0}, \Im L_{jp_0}; j = 1, \ldots, N\} \subset \mathcal{V}_{p_0}.$$

Por outro lado, $L_{jp_0} = \Re L_{jp_0} + i \Im L_{jp_0}$, $j = 1, \ldots, n$, o que implica, que

$$L_{jp_0} \in \operatorname{span}\{\Re L_{jp_0}, \Im L_{jp_0}; j = 1, \ldots, n\},$$

isto é,

$$\mathcal{V}_{p_0} = \operatorname{span}\{L_{1p_0}, \ldots, L_{np_0}\} \subset \operatorname{span}\{\Re L_{jp_0}, \Im L_{jp_0}; j = 1, \ldots, n\}.$$

Logo, $\mathcal{V}_{p_0} = \operatorname{span}\{\Re L_{jp_0}, \Im L_{jp_0}; j = 1, \ldots, n\}$. Este conjunto possui $2n$ vetores reais, mas $\dim \mathcal{V}_{p_0} = n$, logo n vetores desse conjunto geram $\mathcal{V}_{p_0}$ e são L.I. Assim, sejam $M_{1p_0}, \ldots, M_{np_0} \in \{\Re L_{jp_0}, \Im L_{jp_0};\ j = 1, \ldots, n\}$ tais que

$$\mathcal{V}_{p_0} = \operatorname{span}\{M_{1p_0}, \ldots, M_{np_0}\}.$$

Como, $\{M_{1p_0}, \ldots, M_{np_0}\}$ é L.I, pelo Lema 2.83 segue que existe $V \subset U_0$ vizinhança de p_0 tal que $\{M_{1p}, \ldots, M_{np}\}$ é L.I, para todo $p \in V$. Ainda, $\{M_{1p}, \ldots, M_{np}\} \subset \mathcal{V}_p$, para todo $p \in U_0$, em particular, para todo $p \in V$. Portanto, $\mathcal{V}_p = \operatorname{span}\{M_{1p}, \ldots, M_{np}\}$, para todo $p \in V$, como queríamos. $\square$

Apresentamos agora um lema técnico que, em nosso estudo, foi fundamental na determinação de geradores locais para uma estrutura formalmente integrável e para uma estrutura localmente integrável.

Lema 2.85. *Sejam $V \subset \mathbb{C}^N$ um subespaço vetorial de dimensão m, $V_0 = V \cap \mathbb{R}^N$, $d = \dim_{\mathbb{R}} V_0$ e $\nu = m - d$. Além disso, seja $V_1 \subset \mathbb{C}^N$ um subespaço vetorial tal que $(V_0 \oplus iV_0) \oplus V_1 = V$*

e considere $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu\}$ *base de* V_1 *e* $\{\xi_{\nu+1}, \ldots, \xi_m\}$ *base real de* V_0*. Se escrevermos* $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$, $j = 1, \ldots, \nu$, *então*

(i) $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu, \xi_{\nu+1}, \ldots, \xi_m\}$ *é base de* V*;*

(ii) $\{\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta_1, \ldots, \eta_\nu\}$ *é L.I sobre* $\mathbb{R}$*;*

(iii) $\nu + m \leq N$*.*

Demonstração. Primeiramente, observe que $\{\xi_{\nu+1}, \ldots, \xi_m\}$ é também base de $V_0 \oplus iV_0$. De fato, dado $v \in V_0 \oplus iV_0$ temos que, existem únicos $u, w \in V_0$ tais que, $v = u + iw$. Logo,

$$v = \sum_{j=\nu+1}^{m} \alpha_j \xi_j + i \sum_{j=\nu+1}^{m} \beta_j \xi_j = \sum_{j=\nu+1}^{m} (\alpha_j + i\beta_j)\xi_j,$$

onde $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{C}$. Assim, $V_0 \oplus iV_0 = \operatorname{span}\{\xi_{\nu+1}, \ldots, \xi_m\}$ e, como $\{\xi_{\nu+1}, \ldots, \xi_m\}$ é L.I, temos que este conjunto é base de $V_0 \oplus iV_0$. Além disso, $(V_0 \oplus iV_0) \cap V_1 = \{0\}$ e $V = (V_0 \oplus iV_0) + V_1$, portanto, $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu, \xi_{\nu+1}, \ldots, \xi_m\}$ é base de V, o que prova o item (i).

Agora, note que $V \cap \overline{V}_1 = \{0\}$. Com efeito, seja $z \in V \cap \overline{V}_1$, então $z \in V$ e $z \in \overline{V}_1$, donde $\overline{z} \in V_1 \subset V$. Assim, $z, \overline{z} \in V$ e disto, vem que $\Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \in V \cap \mathbb{R}^N = V_0$ e $\Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i} \in V \cap \mathbb{R}^N = V_0$. Logo, $\overline{z} = \Re(z) - i\Im(z) = \Re(z) + i(-\Im(z)) \in (V_0 \oplus iV_0)$. Portanto, $\overline{z} \in V_1 \cap (V_0 \oplus iV_0) = \{0\}$, donde $z = 0$. Ainda, como $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu\}$ é base de V_1 temos que $\{\overline{\zeta}_1, \ldots, \overline{\zeta}_\nu\}$ é base de $\overline{V}_1$ e pelo item (i) sabemos que $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu, \xi_{\nu+1}, \ldots, \xi_m\}$ é base de V. Então, usando o fato que $V \cap \overline{V}_1 = \{0\}$ temos que $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu, \overline{\zeta}_1, \ldots, \overline{\zeta}_\nu, \xi_{\nu+1}, \ldots, \xi_m\}$ é um conjunto L.I sobre $\mathbb{C}$, o que implica que $\nu + m = \nu + \nu + d \leq N$, provando o item (iii).

Por fim, vejamos que $\{\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta_1, \ldots, \eta_\nu\}$ é L.I sobre $\mathbb{R}$. Para isso, sejam $\alpha_j, \beta_k, \gamma_j \in \mathbb{R}$, com $j = 1, \ldots, \nu$ e $k = \nu + 1, \ldots, m$, tais que

$$\sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j \xi_j + \sum_{k=\nu+1}^{m} \beta_k \xi_k + \sum_{j=1}^{\nu} \gamma_j \eta_j = 0.$$

Como, $\xi_j = \frac{\zeta_j + \overline{\zeta}_j}{2}$ e $\eta_j = \frac{\zeta_j - \overline{\zeta}_j}{2i}$, para todo $j = 1, \ldots, \nu$, temos que

$$\sum_{j=1}^{\nu} \alpha_j \left(\frac{\zeta_j + \overline{\zeta}_j}{2} \right) + \sum_{k=\nu+1}^{m} \beta_k \xi_k + \sum_{j=1}^{\nu} \gamma_j \left(\frac{\zeta_j - \overline{\zeta}_j}{2i} \right) = 0,$$

donde,

$$\sum_{j=1}^{\nu} \left(\frac{\alpha_j}{2} + \frac{\gamma_j}{2i} \right) \zeta_j + \sum_{j=1}^{\nu} \left(\frac{\alpha_j}{2} - \frac{\gamma_j}{2i} \right) \overline{\zeta}_j + \sum_{k=\nu+1}^{m} \beta_k \xi_k = 0.$$

Mas, $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu, \overline{\zeta}_1, \ldots, \overline{\zeta}_\nu, \xi_{\nu+1}, \ldots, \xi_m\}$ é L.I, portanto, $\alpha_j = \beta_k = \gamma_j = 0$, para todo $j = 1, \ldots, \nu$ e para todo $k = \nu + 1, \ldots, m$. Consequentemente, $\{\xi_1, \ldots, \xi_m, \eta_1, \ldots, \eta_\nu\}$ é L.I sobre $\mathbb{R}$, o que conclui a demonstração. $\square$

Seja $\mathcal{V}$ uma estrutura formalmente integrável sobre Ω e fixemos $p \in \Omega$. Vamos determinar agora um conjunto de geradores locais para $\mathcal{V}$. Para isto, aplicaremos o Lema 2.85 com

$$V = T'_p,\ V_0 = T^0_p.$$

Primeiramente, tomemos um sistema de coordenadas locais

$$x_1, \dots, x_\nu, y_1, \dots, y_\nu, s_1, \dots, s_d, t_1, \dots, t_{n'}$$

que se anula em p, onde $n' = N - 2\nu - d$. Escrevendo, $z_j = x_j + iy_j$, $j = 1, \dots, \nu$, temos que

$$dz_j|_p = \zeta_j,\ ds_k|_p = \xi_{\nu+k}, \qquad j = 1, \dots, \nu,\ k = 1, \dots, d.$$

Em seguida, tomemos as 1-formas $\omega_1, \dots, \omega_\nu, \theta_1, \dots, \theta_d$, as quais geram T' em uma vizinhança de p e tais que

$$\omega_j|_p = \zeta_j = dz_j|_p,\ \theta_k|_p = \xi_{\nu+k} = ds_k|_p, \qquad j = 1, \dots, \nu,\ k = 1, \dots, d.$$

Se L é um campo vetorial complexo em Ω, definido numa vizinhança de p, podemos escrevê-lo na forma

$$L = \sum_{j=1}^{\nu} a_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{\nu} b_j \frac{\partial}{\partial y_j} + \sum_{k=1}^{d} c_k \frac{\partial}{\partial s_k} + \sum_{l=1}^{n'} d_l \frac{\partial}{\partial t_l}, \tag{2.45}$$

onde a_j, b_j, c_k, d_l são funções suaves, para todo $j = 1, \dots, \nu$, $k = 1, \dots, d$, $l = 1, \dots, n'$. Como, $z_j = x_j + iy_j$ temos que $\overline{z}_j = x_j - iy_j$. Assim, dz_j e $d\overline{z}_j$ são os duais dos campos

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right) \text{ e } \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right),$$

respectivamente. Disto e de (2.45) vem que

$$\begin{aligned} L &= \sum_{j=1}^{\nu} a_j \left(\frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\right) + \sum_{j=1}^{\nu} b_j \left(i\frac{\partial}{\partial z_j} - i\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j}\right) + \sum_{k=1}^{d} c_k \frac{\partial}{\partial s_k} + \sum_{l=1}^{n'} d_l \frac{\partial}{\partial t_l} \\ &= \sum_{j=1}^{\nu} A_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{j=1}^{\nu} B_j \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} + \sum_{k=1}^{d} C_k \frac{\partial}{\partial s_k} + \sum_{l=1}^{n'} D_l \frac{\partial}{\partial t_l}, \end{aligned}$$

onde $A_j = a_j + ib_j$, $B_j = a_j - ib_j$, $C_k = c_k$ e $D_l = d_l$ são funções suaves, para todo $j = 1, \dots, \nu$, $k = 1, \dots, d$, $l = 1, \dots, n'$.

Além disso, se L for uma seção de $\mathcal{V}$ teremos que $L_p \in \mathcal{V}_p$. Lembremos aqui, que $\{\zeta_1, \dots, \zeta_\nu, \xi_{\nu+1}, \dots, \xi_m\}$ é base de T'_p. Assim,

$$0 = \zeta_j(L_p) = dz_j|_p(L_p) = \sum_{i=1}^{\nu} A_i(p) dz_j|_p \left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right)_p = A_j(p), \qquad j = 1, \dots, \nu,$$

e

$$0 = \xi_{\nu+k}(L_p) = ds_k|_p(L_p) = \sum_{i=1}^{d} C_i(p) ds_k|_p \left(\frac{\partial}{\partial s_i}\right)_p = C_k(p), \qquad k = 1, \ldots, d.$$

Como, $n' = N-2\nu-d$, temos que $n' = N-\nu-m$, donde $(n'+\nu)+m = N$, o que implica, que $n'+\nu = n$. Logo, sendo $\mathcal{V}$ um subfibrado tangente, temos que existem $L_1^\sharp, \ldots, L_\nu^\sharp, \tilde{L}_1^\sharp, \ldots, \tilde{L}_{n'}^\sharp$ campos vetoriais definidos numa vizinhança de p que geram $\mathcal{V}$. Pelo que acabamos de fazer, podemos escrever esses n campos na forma

$$L_i^\sharp = \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij}^\sharp \frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{j=1}^{\nu} b_{ij}^\sharp \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} + \sum_{k=1}^{d} c_{ik}^\sharp \frac{\partial}{\partial s_k} + \sum_{l=1}^{n'} d_{il}^\sharp \frac{\partial}{\partial t_l}, \qquad i = 1, \ldots, \nu,$$

e

$$\tilde{L}_{i'}^\sharp = \sum_{j=1}^{\nu} \tilde{a}_{i'j}^\sharp \frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{j=1}^{\nu} \tilde{b}_{i'j}^\sharp \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} + \sum_{k=1}^{d} \tilde{c}_{i'k}^\sharp \frac{\partial}{\partial s_k} + \sum_{l=1}^{n'} \tilde{d}_{i'l}^\sharp \frac{\partial}{\partial t_l}, \qquad i' = 1, \ldots, n',$$

onde $a_{ij}^\sharp(p) = c_{ik}^\sharp(p) = \tilde{a}_{i'j}^\sharp(p) = \tilde{c}_{i'k}^\sharp(p) = 0$, para todo $i, j = 1, \ldots, \nu$, $k = 1, \ldots, d$ e $i' = 1, \ldots, n'$.

Definamos as matrizes

$$A^\sharp = (a_{ij}^\sharp)_{\nu\times\nu},\ B^\sharp = (b_{ij}^\sharp)_{\nu\times\nu},\ C^\sharp = (c_{ik}^\sharp)_{\nu\times d},\ D^\sharp = (d_{il}^\sharp)_{\nu\times n'}$$

$$\tilde{A}^\sharp = (\tilde{a}_{i'j}^\sharp)_{n'\times\nu},\ \tilde{B}^\sharp = (\tilde{b}_{i'j}^\sharp)_{n'\times\nu},\ \tilde{C}^\sharp = (\tilde{c}_{i'k}^\sharp)_{n'\times d},\ \tilde{D}^\sharp = (\tilde{d}_{i'l}^\sharp)_{n'\times n'}$$

$$P = \begin{pmatrix} A^\sharp & B^\sharp & C^\sharp & D^\sharp \\ \tilde{A}^\sharp & \tilde{B}^\sharp & \tilde{C}^\sharp & \tilde{D}^\sharp \end{pmatrix}_{n\times N}.$$

Como $L_{1p}^\sharp, \ldots, L_{\nu p}^\sharp, \tilde{L}_{1p}^\sharp, \ldots, \tilde{L}_{n'p}^\sharp$ são L.I, temos que a matriz $P(p)$ possui n linhas L.I. Considere a matriz $n \times n$

$$Q = \begin{pmatrix} B^\sharp & D^\sharp \\ \tilde{B}^\sharp & \tilde{D}^\sharp \end{pmatrix}_{n\times N}.$$

Observe que Q é invertível numa vizinhança do ponto p. De fato, como $P(p)$ tem n linhas L.I e $Q(p)$ é uma submatriz de $P(p)$, temos que $Q(p)$ tem n linhas L.I, o que implica, que $\det(Q(p)) \neq 0$. Pela continuidade da função determinante, temos que a existe uma vizinhança U de p tal que a matriz Q é invertível em U. Definamos então, sobre U, n campos vetoriais $L_1, \ldots, L_\nu, \tilde{L}_1, \ldots, \tilde{L}_{n'}$, pela fórmula

$$\begin{aligned}(L_1, \ldots, L_\nu, \tilde{L}_1, \ldots, \tilde{L}_{n'})^T &= Q^{-1}(L_1^\sharp, \ldots, L_\nu^\sharp, \tilde{L}_1^\sharp, \ldots, \tilde{L}_{n'}^\sharp)^T \\ &= Q^{-1}P(\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_\nu}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_\nu}, \frac{\partial}{\partial s_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial s_d}, \frac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_{n'}})^T.\end{aligned}$$

Como $QQ^{-1} = I_{n\times n}$, obtemos que

$$(L_1,\dots,L_\nu,\tilde{L}_1,\dots,\tilde{L}_{n'})^T = \left(\begin{array}{cccc} A & I_{\nu\times\nu} & C & 0_{\nu\times n'} \\ \tilde{A} & 0_{n'\times\nu} & \tilde{C} & I_{n'\times n'} \end{array}\right)_{n\times N} (\frac{\partial}{\partial z_1},\dots,\frac{\partial}{\partial t_{n'}})^T,$$

onde

$$A = (a_{ij})_{\nu\times\nu},\ C = (c_{ik})_{\nu\times d},\ \tilde{A} = (\tilde{a}_{i'j})_{n'\times\nu},\ \tilde{C} = (\tilde{c}_{i'k})_{n'\times d}.$$

Assim,

$$L_i = \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij}\frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}_i} + \sum_{k=1}^{d} c_{ik}\frac{\partial}{\partial s_k}, \qquad i = 1,\dots,\nu,$$

e,

$$\tilde{L}_{i'} = \sum_{j=1}^{\nu} \tilde{a}_{i'j}\frac{\partial}{\partial z_j} + \sum_{k=1}^{d} \tilde{c}_{i'k}\frac{\partial}{\partial s_k} + \frac{\partial}{\partial t_{i'}}, \qquad i' = 1,\dots,n'.$$

Como $L_1^\sharp,\dots,L_\nu^\sharp,\tilde{L}_1^\sharp,\dots,\tilde{L}_{n'}^\sharp$ são L.I temos que $L_1,\dots,L_\nu,\tilde{L}_1,\dots,\tilde{L}_{n'}$ são L.I. Portanto, esses últimos campos vetoriais formam um conjunto de geradores locais para $\mathcal{V}$.

3 ESTRUTURAS LOCALMENTE INTEGRÁVEIS

Chegamos num ponto crucial de nosso estudo, onde o objetivo é definir uma *estrutura localmente integrável*, que é o ambiente onde estudaremos o resultado principal, e extrair algumas propriedades importantes de tal definição que mais tarde nos auxiliarão na demonstração do Teorema de Aproximação.

3.1 INTEGRABILIDADE LOCAL

Antes de definirmos uma estrutura localmente integrável, relembremos que se $\mathcal{V} = \bigcup_{p\in\Omega} \mathcal{V}_p$ é um subfibrado tangente, então $\mathcal{V}^\perp = \bigcup_{p\in\Omega} \mathcal{V}_p^\perp$ é um subfibrado cotangente (cf. Proposição 2.55).

Definição 3.1. *Um subfibrado tangente $\mathcal{V}$, de posto n, é uma estrutura localmente integrável se dado um ponto arbitrário $p_0 \in \Omega$, existem uma vizinhança U_0 de p_0 e funções $Z_1, \dots, Z_m \in C^\infty(U_0)$, com $m = N - n$, tais que*

$$\operatorname{span}\{dZ_{1p}, \dots, dZ_{mp}\} = \mathcal{V}_p^\perp, \qquad \textit{para todo } p \in U_0. \tag{3.1}$$

Chamamos as m funções $Z = (Z_1, \dots, Z_m)$ de conjunto completo de integrais primeiras da estrutura localmente integrável.

Exemplo 3.2. A estrutura formalmente integrável gerada pelo operador de Mizohata (2.43) é uma estrutura localmente integrável. Com efeito, definamos $Z : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $Z(x,t) = x + i\frac{t^2}{2}$. Logo, $Z \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$, pois é uma função polinomial. Além disso,

$$dZ_{(x,t)} = 1 \cdot dx_{(x,t)} + itdt_{(x,t)} \neq 0, \quad \text{para todo } (x,t) \in \mathbb{R}^2$$

e,

$$dZ_{(x,t)}(M_{(x,t)}) = M(Z)(x,t) = it - it = 0, \quad \text{para todo } (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Logo, $\{dZ_{(x,t)}\}$ é L.I e $\{dZ_{(x,t)}\} \subset T'_{(x,t)}$. Consequentemente, $\mathcal{V}$ é uma estrutura localmente integrável e $T'_{(x,t)} = \operatorname{span}\{dZ_{(x,t)}\}$, para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.

Lema 3.3. *Seja $\mathcal{V}$ um subfibrado tangente e $g \in C^\infty(W)$. Então, dg é uma seção de $\mathcal{V}^\perp$ sobre W se, e somente se, $Lg = 0$ para cada seção L de $\mathcal{V}$ sobre W.*

Demonstração. Suponha que dg seja uma seção de $\mathcal{V}^\perp$ sobre W e tome $p \in W$ arbitrário . Logo, $dg_p = 0$ em $\mathcal{V}_p$. Portanto, para toda seção L de $\mathcal{V}$ sobre W temos que

$$L(g)(p) = dg(L)(p) = dg_p(L_p) = 0,$$

donde $L(g) = 0$. Reciprocamente, suponha que $Lg = 0$ para toda seção L de $\mathcal{V}$ sobre W e tome $p_0 \in W$ arbitrário. Como $\mathcal{V}$ é subfibrado tangente, existem campos vetoriais $L_1, \ldots, L_n$ definidos sobre $U \subset W$ vizinhança de p_0 tais que $\{L_{1p}, \ldots, L_{np}\}$ é uma base de $\mathcal{V}_p$, para todo $p \in U$. Em particular, $\{L_{1p_0}, \ldots, L_{np_0}\}$ é uma base de $\mathcal{V}_{p_0}$. Logo, para todo $j = 1, \ldots, n$ temos que L_j é seção de $\mathcal{V}$ e, por hipótese,

$$dg_{p_0}(L_{jp_0}) = dg(L_j)(p_0) = L_j(g)(p_0) = 0.$$

Como L_{jp_0} são elementos da base de $\mathcal{V}_{p_0}$ temos que $dg_{p_0} = 0$ em $\mathcal{V}_{p_0}$, isto é, $dg_{p_0} \in \mathcal{V}_{p_0}^{\perp}$. Pela arbitrariedade de p_0, segue que dg é seção de $\mathcal{V}^{\perp}$ sobre W. $\square$

Teorema 3.4. *Toda estrutura localmente integrável é formalmente integrável.*

Demonstração. Seja $\mathcal{V}$ uma estrutura localmente integrável. Então, basta verificarmos que $\mathcal{V}$ satisfaz a condição de Frobenius. Assim, sejam $W \subset \Omega$ aberto e $L, M \in \mathscr{X}(W)$ duas seções de $\mathcal{V}$ sobre W. Tome $p \in W$ arbitrário. Pela Definição 3.1, temos que existem $U \subset W$ vizinhança de p e funções $Z_1, \ldots, Z_m \in C^{\infty}(U)$, tais que

$$\operatorname{span}\{dZ_{1q}, \ldots, dZ_{mq}\} = \mathcal{V}_q^{\perp}, \quad \text{para todo } q \in U.$$

Logo, para todo $j = 1, \ldots, m$, temos que dZ_j são seções de $\mathcal{V}^{\perp}$ sobre U e pelo Lema 3.3

$$L(Z_j) = M(Z_j) = 0, \text{ em } U.$$

Disto, vem que

$$[L, M](Z_j) = L(M(Z_j)) - M(L(Z_j)) = L(0) - M(0) = 0, \text{ em } U.$$

para todo $j = 1, \ldots, m$. Como $p \in U$, temos que $dZ_{jp} \in \mathcal{V}_p^{\perp}$, com $j = 1, \ldots, m$, e

$$dZ_{jp}([L, M]_p) = dZ_j([L, M])(p) = [L, M](Z_j)(p) = 0.$$

Logo, $[L, M]_p \in \mathcal{V}_p$ para todo $p \in W$, isto é, $[L, M] \in \mathscr{X}(W)$ é uma seção de $\mathcal{V}$ sobre W e, consequentemente, $\mathcal{V}$ é formalmente integrável. $\square$

Temos uma forma equivalente à Definição 3.1 para verificar se uma estrutura é localmente integrável:

Teorema 3.5. *A estrutura formalmente integrável $\mathcal{V}$ é localmente integrável se, e somente se, dado $p_0 \in \Omega$ e campos vetoriais $L_1, \ldots, L_n$, os quais geram $\mathcal{V}$ em uma vizinhança aberta U_0 de p_0, existem uma vizinhança aberta $V_0 \subset U_0$ de p_0 e funções $Z_1, \ldots, Z_m \in C^{\infty}(V_0)$, tais que*

(i) $dZ_1 \wedge \ldots \wedge dZ_m \neq 0$ *em* V_0;

(ii) $L_j Z_k = 0$, $j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, m$.

Demonstração. A prova do primeiro e segundo item são triviais e, por isso, serão omitidas aqui. Reciprocamente, suponhamos que $\mathcal{V}$ seja uma estrutura formalmente integrável e considere $p_0 \in \Omega$. Assim, existem $L_1, \ldots, L_n \in \mathscr{X}(U_0)$, onde U_0 é uma vizinhança de p_0, os quais geram $\mathcal{V}$. Pela hipótese, existem uma vizinhança $V_0 \subset U_0$ de p_0 e funções $Z_1, \ldots, Z_m \in C^\infty(V_0)$ tais que

$$dZ_1 \wedge \ldots \wedge dZ_m \neq 0 \text{ em } V_0$$

e

$$L_j Z_k = 0, \quad j = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, m.$$

Como $dZ_{kp}(L_{jp}) = L_{jp}(Z_{kp}) = 0$ e $\{L_{1p} \ldots, L_{np}\}$ é base de $\mathcal{V}_p$, temos que $\{dZ_{1p}, \ldots, dZ_{mp}\} \subset \mathcal{V}_p^\perp$ para todo $p \in V_0$. Resta-nos provar que $\{dZ_{1p}, \ldots, dZ_{mp}\}$ é L.I. Assim, tome $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ tais que

$$\alpha_1 dZ_{1p} + \alpha_2 dZ_{2p} + \ldots + \alpha_m dZ_{mp} = 0. \tag{3.2}$$

Fazendo o produto exterior com dZ_{mp} obtemos

$$\alpha_1 dZ_{1p} \wedge dZ_{mp} + \alpha_2 dZ_{2p} \wedge dZ_{mp} + \ldots + \alpha_{m-1} dZ_{m-1,p} \wedge dZ_{mp} = 0$$

e fazendo o produto exterior com $dZ_{m-1,p}$ temos que

$$\alpha_1 dZ_{1p} \wedge dZ_{mp} \wedge dZ_{m-1,p} + \alpha_2 dZ_{2p} \wedge dZ_{mp} \wedge dZ_{m-1,p} + \ldots + \alpha_{m-2} dZ_{m-2,p} \wedge dZ_{mp} \wedge dZ_{m-1,p} = 0.$$

Continuando o processo até o produto exterior com dZ_{2p}, chegaremos à

$$\alpha_1 dZ_{1p} \wedge dZ_{mp} \wedge dZ_{m-1,p} \wedge \ldots \wedge dZ_{2p} = 0$$

e reordenando os termos segue que

$$(-1)^\alpha \alpha_1 dZ_{1p} \wedge dZ_{2p} \wedge \ldots \wedge dZ_{mp} = 0,$$

para algum $\alpha \in \mathbb{N}$, donde $\alpha_1 = 0$, pois $dZ_1 \wedge \ldots \wedge dZ_m \neq 0$. Voltando em (3.2) temos que

$$\alpha_2 dZ_{2p} + \alpha_3 dZ_{3p} + \ldots + \alpha_m dZ_{mp} = 0.$$

Fazendo o produto exterior com dZ_{1p} obtemos

$$\alpha_2 dZ_{2p} \wedge dZ_{1p} + \alpha_3 dZ_{3p} \wedge dZ_{1p} + \ldots + \alpha_m dZ_{mp} \wedge dZ_{1p} = 0.$$

Agora, fazendo como anteriormente o produto exterior com dZ_{mp} até o produto exterior com

dZ_{3p} chegaremos à

$$\alpha_2 dZ_{2p} \wedge dZ_{1p} \wedge dZ_{mp} \wedge dZ_{m-1,p} \wedge \ldots \wedge dZ_{3p} = 0$$

e reordenando os termos

$$(-1)^{\beta}\alpha_2 dZ_{1p} \wedge dZ_{2p} \wedge \ldots \wedge dZ_{mp} = 0$$

para algum $\beta \in \mathbb{N}$, donde $\alpha_2 = 0$. Prosseguindo, obteremos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$. Portanto,

$$\mathcal{V}_p^{\perp} = \operatorname{span}\{dZ_{1p}, \ldots, dZ_{mp}\}, \quad p \in V_0.$$

□

Portanto, verificar integrabilidade local é equivalente a procurar por um número máximo de soluções, não triviais, para o sistema homogêneo definido por um conjunto fixo de seções independentes de $\mathcal{V}$.

Teorema 3.6. *Toda estrutura essencialmente real é localmente integrável.*

Demonstração. Seja $\mathcal{V}$ uma estrutura essencialmente real. Dado $p_0 \in \Omega$, considere o sistema de coordenadas $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N)$ tal que $\mathbf{x}(p_0) = 0$. Pela Proposição 2.84, existem campos vetoriais reais $M_1, \ldots, M_n \in \mathscr{X}(U)$, onde $U \subset \Omega$ é uma vizinhança de p_0, tais que $M_1, \ldots, M_n$ geram $\mathcal{V}$. Logo, pelo Teorema de Frobenius 2.68 temos que existem coordenadas locais $y_1, \ldots, y_N$, definidas sobre $V \subset U$ uma vizinhança de p_0, tais que $\frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}$ geram $\mathcal{V}$, isto é, $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)_p\right\}$ é base de $\mathcal{V}_p$, para todo $p \in V$. Defina $Z_k = y_{k+n} \in C^{\infty}(V)$, $k = 1, \ldots, m$. Assim, para todo $p \in V$, $dZ_{kp} = dy_{k+np}$ e

$$dZ_{kp}\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p = dy_{k+np}\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p = 0 \quad j = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, m.$$

Como, $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p ;\ j = 1, \ldots, n\right\}$ é base de $\mathcal{V}_p$, segue que $\{dZ_{1p}, \ldots, dZ_{mp}\} \subset \mathcal{V}_p^{\perp}$ para todo $p \in V$. Além disso, o conjunto $\{dZ_{1p}, \ldots, dZ_{mp}\}$ é L.I, pois $\{dy_{1+np}, \ldots, dy_{Np}\}$ é L.I. Portanto,

$$\mathcal{V}_p^{\perp} = \operatorname{span}\{dZ_{1p}, \ldots, dZ_{mp}\}, \quad \text{para todo } p \in V,$$

e, consequentemente, $\mathcal{V}$ é localmente integrável. □

3.2 Geradores Locais

Nesta seção, construiremos coordenadas locais e geradores locais apropriados para o subfibrado T' quando a estrutura $\mathcal{V}$ é localmente integrável.

Seja $\mathcal{V}$ uma estrutura localmente integrável. Então, dado $p \in \Omega$ existem U vizinhança de p e funções $G_1, \ldots, G_m \in C^\infty(U)$ tais que $T'_q = \operatorname{span}\{dG_{1q}, \ldots, dG_{mq}\}$, para todo $q \in U$. Aplicando o Lema 2.85 com $V = T'_p$ e $V_0 = T^0_p$, temos que o conjunto $\{\zeta_1, \ldots, \zeta_\nu, \xi_{\nu+1}, \ldots, \xi_m\}$ é uma base de T'_p, com $p \in U$. Assim, existe $(c_{jk}) \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{C})$ tal que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m} c_{jk} \mathrm{d}G_{kp} &= \zeta_j, \qquad j = 1, \ldots, \nu, \\ \sum_{k=1}^{m} c_{jk} dG_{kp} &= \xi_j, \qquad j = \nu+1, \ldots, m. \end{aligned}$$

Defina

$$\begin{aligned} Z_j &= \sum_{k=1}^{m} c_{jk}\{G_k - G_k(p)\}, \qquad j = 1, \ldots, \nu, \\ W_l &= \sum_{k=1}^{m} c_{\nu+l,k}\{G_k - G_k(p)\}, \qquad l = 1, \ldots, d. \end{aligned}$$

Observe que $Z_j, W_l \in C^\infty(U)$, para todo $j = 1, \ldots, \nu$ e para todo $l = 1, \ldots, d$. Além disso, pela Proposição 2.50 obtemos que

$$\begin{aligned} dZ_j &= \sum_{k=1}^{m} c_{jk} dG_k, \qquad j = 1, \ldots, \nu, \\ dW_l &= \sum_{k=1}^{m} c_{\nu+l,k} dG_k, \qquad l = 1, \ldots, d, \end{aligned}$$

donde,

$$dZ_{jp} = \zeta_j, \; dW_{lp} = \xi_{\nu+l}.$$

Logo, $\{dZ_{1p}, \ldots, dZ_{\nu p}, dW_{1p}, \ldots, dW_{dp}\}$ é uma base de T'_p, concluindo que

$$dZ_1, \ldots, dZ_\nu, dW_1, \ldots, dW_d$$

geram T' sobre U.

Se ainda definirmos

$$x_j = \Re Z_j \in C^\infty(U, \mathbb{R}), \; y_j = \Im Z_j \in C^\infty(U, \mathbb{R}), \; s_l = \Re W_l \in C^\infty(U, \mathbb{R}),$$

temos que $dx_{jp} = \Re dZ_{jp} = \Re \zeta_j$, $dy_{jp} = \Im dZ_{jp} = \Im \zeta_j$ e $ds_{lp} = \Re dW_{lp} = \xi_{\nu+l}$, com $j = 1, \ldots, \nu$ e $l = 1, \ldots, d$. Logo, pelo Lema 2.85, segue que

$$dx_{1p}, \ldots, dx_{\nu p}, dy_{1p}, \ldots, dy_{\nu p}, ds_{1p}, \ldots, ds_{dp}$$

são L.I sobre $\mathbb{R}$. Ainda, note que $x_j(p) = y_j(p) = s_l(p) = 0$, pois $Z_j(p) = W_l(p) = 0$, com $j = 1, \dots, \nu$ e $l = 1, \dots, d$.

Estamos agora prontos para provar o seguinte importante resultado:

Teorema 3.7. *Seja $\mathcal{V}$ uma estrutura localmente integrável definida sobre uma variedade Ω. Considere $p \in \Omega$ e d a dimensão real de T_p^0. Então existe um sistema de coordenadas que se anula em p, a dizer*

$$\{x_1, \dots, x_\nu, y_1, \dots, y_\nu, s_1, \dots, s_d, t_1, \dots, t_{n'}\}$$

e funções reais, suaves $\phi_1, \dots, \phi_d$ definidas em uma vizinhança da origem e satisfazendo

$$\phi_k(0) = 0,\ d\phi_k(0) = 0, \quad k = 1, \dots, d,$$

tais que os diferenciais das funções

$$\begin{aligned} Z_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= z_j = x_j + iy_j, \quad j = 1, \dots, \nu \\ W_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}) &= s_k + i\phi_k(\boldsymbol{z},\boldsymbol{s},\boldsymbol{t}), \quad k = 1, \dots, d, \end{aligned}$$

geram T' em uma vizinhança da origem. Em particular, temos $\nu + d = m$, $\nu + n' = n$ e, além disso,

$$T_p^0 = \operatorname{span}\{ds_1|_0, \dots, ds_d|_0\}.$$

Demonstração. Usando nossa discussão anterior, basta considerarmos $t_1, \dots, t_{n'}$ funções suaves à valores reais, definidas sobre U, com $t_i(p) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n'$, tais que

$$dx_{1p}, \dots, dx_{\nu p}, dy_{1p}, \dots, dy_{\nu p}, ds_{1p}, \dots, ds_{dp}, dt_{1p}, \dots, dt_{n'p}$$

são L.I. Ainda, defina $\phi_k = \Im W_k \in C^\infty(U, \mathbb{R})$. Logo, $\phi_k(p) = \Im W_k(p) = 0$, pois $W_k(p) = 0$ para todo $k = 1, \dots, d$. Além disso, $d\phi_{kp} = \Im dW_{kp} = 0$, pois $dW_{kp} = \xi_{\nu+k} \in \mathbb{R}$ para todo $k = 1, \dots, d$. Em particular, como $\nu + d = m$ e $2\nu + d + n' = N$, temos que $\nu + n' = n$ e, sendo $ds_{lp} = \xi_{\nu+l}$, $l = 1, \dots, d$, onde $\{\xi_{\nu+1}, \dots, \xi_m\}$ é base real de $V_0 = T_p^0$, obtemos que

$$T_p^0 = \operatorname{span}\{ds_1|_0, \dots, ds_d|_0\}.$$

□

Como consequência do Teorema 3.7, podemos definir, em uma vizinhança da origem de $\mathbb{R}^N$, os campos vetoriais

$$M_k = \sum_{k'=1}^{d} \mu_{kk'} \frac{\partial}{\partial s_{k'}}, \quad k = 1, \dots, d, \tag{3.3}$$

caracterizados pelas relações $M_kW_{k'} = \delta_{kk'}$. De fato, do Teorema 3.7 temos que

$$W_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{s}, \mathbf{t}) = s_k + i\phi_k(\mathbf{z}, \mathbf{s}, \mathbf{t}), \quad k = 1, \ldots, d.$$

Então,

$$\frac{\partial W_k}{\partial s_{k'}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{s}, \mathbf{t}) = \delta_{kk'} + i\frac{\partial \phi_k}{\partial s_{k'}}(\mathbf{z}, \mathbf{s}, \mathbf{t}).$$

Assim,

$$\frac{\partial W_k}{\partial s_{k'}}(0) = \delta_{kk'} + i\frac{\partial \phi_k}{\partial s_{k'}}(0) = \delta_{kk'} + id\phi_k|_0 \left(\frac{\partial}{\partial s_{k'}}\right)_0 = \delta_{kk'},$$

pois, $d\phi_k|_0 = 0$. Considere a matriz $A = (a_{kk'})_{d\times d}$, onde $a_{kk'} = \frac{\partial W_k}{\partial s_{k'}} \in C^\infty(U)$. Como, $A(0) = I_{d\times d}$ temos que $\det(A(0)) \neq 0$. Pela continuidade da função determinante, diminuindo a viznhança U em torno da origem, se necessário, podemos assumir que A é invertível em U. Tome $B = (b_{kk'})_{d\times d}$ a inversa de A e defina sobre $U \subset \mathbb{R}^N$ os campos vetoriais

$$M_k = \sum_{k'=1}^{d} \mu_{kk'}\frac{\partial}{\partial s_{k'}}, \quad k = 1, \ldots, d,$$

onde $\mu_{kk'} = b_{k'k} \in C^\infty(U)$. Assim,

$$M_kW_{k'} = \sum_{j=1}^{d} \mu_{kj}\frac{\partial W_{k'}}{\partial s_j} = \sum_{j='}^{d} b_{jk}a_{k'j} = \delta_{k'k} = \delta_{kk'}.$$

Observação 3.8. Considere os campos vetoriais

$$L_j = \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} - i\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial \phi_k}{\partial \overline{z}_j}M_k, \quad j = 1, \ldots, \nu,$$

e

$$\tilde{L}_l = \frac{\partial}{\partial t_l} - i\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial \phi_k}{\partial t_l}M_k, \quad l = 1, \ldots, n',$$

onde M_k são os campos dados em (3.3). Então, $L_1, \ldots, L_\nu, \tilde{L}_1, \ldots, \tilde{L}_{n'}$ são L.I e satisfazem

$$L_jZ_{j'} = \tilde{L}_lZ_{j'} = L_jW_k = \tilde{L}_lW_k = 0, \tag{3.4}$$

para todo $j, j' = 1, \ldots \nu, k = 1, \ldots, d, l = 1, \ldots, n'$. Consequentemente, $L_1, \ldots, L_\nu, \tilde{L}_1, \ldots, \tilde{L}_{n'}$ geram $\mathcal{V}$ sobre U. De fato, para cada $q \in U$ sejam $\alpha_{jp}, \beta_{lq} \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, \nu$ e $l = 1, \ldots n'$ tais que

$$\sum_{j=1}^{\nu}\alpha_{jq}L_{jq} + \sum_{l=1}^{n'}\beta_{lq}\tilde{L}_{lq} = 0.$$

Então,

$$\sum_{j=1}^{\nu}\alpha_{jq}\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}_j}\right)_q - i\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{k=1}^{d}\alpha_{jq}\frac{\partial\phi_k}{\partial\overline{z}_j}(q)M_{kq} + \sum_{l=1}^{n'}\beta_{lq}\left(\frac{\partial}{\partial t_l}\right)_q - i\sum_{l=1}^{n'}\sum_{k=1}^{d}\beta_{lq}\frac{\partial\phi_k}{\partial t_l}(q)M_{kq} = 0.$$

Mas, $\frac{\partial}{\partial\overline{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$. Logo,

$$\sum_{j=1}^{\nu}\frac{\alpha_{jq}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_q + i\sum_{j=1}^{\nu}\frac{\alpha_{jq}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_q - i\sum_{k'=1}^{d}\gamma_{k'q}\left(\frac{\partial}{\partial s_{k'}}\right)_q + \sum_{l=1}^{n'}\beta_{lq}\left(\frac{\partial}{\partial t_l}\right)_q = 0,$$

onde

$$\gamma_{k'q} = \sum_{k=1}^{d}\left(\sum_{j=1}^{\nu}\alpha_{jq}\frac{\partial\phi_k}{\partial\overline{z}_j}(q) + \sum_{l=1}^{n'}\beta_{lq}\frac{\partial\phi_k}{\partial t_l}(q)\right)\mu_{kk'}(q).$$

Como, $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_q, \left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_q, \left(\frac{\partial}{\partial s_{k'}}\right)_q, \left(\frac{\partial}{\partial t_l}\right)_q;\ j = 1,\ldots,\nu,\ l = 1,\ldots,n',\ k = 1,\ldots d\right\}$ é base de $\mathbb{C}T_q\Omega$, temos que $\alpha_{jq} = \beta_{lq} = 0$, para todo $j = 1,\ldots,\nu$ e $l = 1,\ldots,n'$. Portanto, $L_{1q},\ldots,L_{\nu q},\tilde{L}_{1q},\ldots,\tilde{L}_{n'q}$ são L.I para todo $q \in U$, o que implica, que $L_1,\ldots,L_\nu,\tilde{L}_1,\ldots,\tilde{L}_{n'}$ são L.I. Ainda, $M_kZ_{j'} = \sum_{k'=1}^{d}\mu_{kk'}\frac{\partial Z_{j'}}{\partial s_{k'}} = 0$, para todo $k = 1,\ldots,d$, logo,

$$L_jZ_{j'} = \frac{\partial Z_{j'}}{\partial\overline{z}_j} - i\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial\phi_k}{\partial\overline{z}_j}M_k(Z_{j'}) = 0,$$

para todo $j, j' = 1,\ldots\nu$,

$$\tilde{L}_lZ_{j'} = \frac{\partial Z_{j'}}{\partial t_l} - i\sum_{k=1}^{d}\frac{\partial\phi_k}{\partial t_l}M_k(Z_{j'}) = 0,$$

para todo $l = 1,\ldots,n'$ e $j' = 1,\ldots\nu$,

$$L_jW_k = \frac{\partial W_k}{\partial\overline{z}_j} - i\sum_{\tilde{k}=1}^{d}\frac{\partial\phi_{\tilde{k}}}{\partial\overline{z}_j}M_{\tilde{k}}(W_k) = \frac{\partial W_k}{\partial\overline{z}_j} - i\frac{\partial\phi_k}{\partial\overline{z}_j} = 0,$$

para todo $j = 1,\ldots\nu$ e $k = 1,\ldots,d$,

$$\tilde{L}_lW_k = \frac{\partial W_k}{\partial t_l} - i\sum_{\tilde{k}=1}^{d}\frac{\partial\phi_{\tilde{k}}}{\partial t_l}M_{\tilde{k}}(W_k) = \frac{\partial W_k}{\partial t_l} - i\frac{\partial\phi_k}{\partial t_l} = \frac{\partial(W_k - i\phi_k)}{\partial t_l} = \frac{\partial s_k}{\partial t_l} = 0,$$

para todo $l = 1,\ldots,n'$ e $k = 1,\ldots,d$. Assim, $dZ_{j'}(L_j) = dW_k(L_j) = dZ_{j'}(\tilde{L}_l) = dW_k(\tilde{L}_l) = 0$, com $j, j' = 1,\ldots\nu$, $l = 1,\ldots,n'$, $k = 1,\ldots,d$, donde $\{L_1,\ldots,L_\nu,\tilde{L}_1,\ldots,\tilde{L}_{n'}\} \subset \mathcal{V}$ e, por ser L.I, gera $\mathcal{V}$ sobre U.

Observação 3.9. As 1-formas

$$dz_1, \ldots, dz_\nu, d\overline{z}_1, \ldots, d\overline{z}_\nu, dW_1, \ldots, dW_d, dt_1, \ldots, dt_{n'} \tag{3.5}$$

geram $\mathbb{C}T^*\Omega$ sobre U. Com efeito, para cada $q \in U$ sejam $\alpha_{jq}, \beta_{jq}, \gamma_{kq}, \tau_{lq} \in \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, \nu$, $k = 1, \ldots, d$ e $l = 1, \ldots, n'$, tais que

$$\sum_{j=1}^{\nu} \alpha_{jq} dz_{jq} + \sum_{j=1}^{\nu} \beta_{jq} d\overline{z}_{jq} + \sum_{k=1}^{d} \gamma_{kq} dW_{kq} + \sum_{l=1}^{n'} \tau_{lq} dt_{lq} = 0.$$

Então

$$\sum_{j=1}^{\nu} \alpha_{jq} dZ_{jq} + \sum_{k=1}^{d} \gamma_{kq} dW_{kq} = -\sum_{j=1}^{\nu} \beta_{jq} d\overline{Z}_{jq} - \sum_{l=1}^{n'} \tau_{lq} dt_{lq}. \tag{3.6}$$

Note que

$$d\overline{Z}_{jq}(M_{kq}) = M_k(\overline{Z}_j)(q) = \sum_{k'=1}^{d} \mu_{kk'}(q) \frac{\partial \overline{Z}_j}{\partial s_{k'}}(q) = 0 \tag{3.7}$$

e

$$dt_{lq}(M_{kq}) = M_k(t_l)(q) = \sum_{k'=1}^{d} \mu_{kk'}(q) \frac{\partial t_l}{\partial s_{k'}}(q) = 0. \tag{3.8}$$

Assim, aplicando (3.6) em $L_{j'q} \in \mathcal{V}_q$, $j' = 1, \ldots, \nu$, temos que

$$0 = \sum_{j=1}^{\nu} \beta_{jq} d\overline{Z}_{jq}(L_{j'q}) + \sum_{l=1}^{n'} \tau_{lq} dt_{lq}(L_{j'q}). \tag{3.9}$$

Mas, de (3.7) e (3.8), obtemos que $dt_{lq}(L_{j'q}) = 0$ e $d\overline{Z}_{jq}(L_{j'q}) = d\overline{Z}_{jq}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_{j'}}\right)_q = \delta_{jj'}$. Disto em (3.9), vem que

$$0 = \sum_{j=1}^{\nu} \beta_{jq} \delta_{jj'},$$

donde,

$$\beta_{j'q} = 0, \qquad j' = 1, \ldots, \nu. \tag{3.10}$$

Por outro lado, aplicando (3.6) em $\tilde{L}_{l'q} \in \mathcal{V}_q$, $l' = 1, \ldots, n'$, temos que

$$0 = \sum_{j=1}^{\nu} \beta_{jq} d\overline{Z}_{jq}(\tilde{L}_{l'q}) + \sum_{l=1}^{n'} \tau_{lq} dt_{lq}(\tilde{L}_{l'q}). \tag{3.11}$$

Mas, de (3.7) e (3.8), obtemos que $dt_{lq}(\tilde{L}_{l'q}) = dt_{lq}\left(\frac{\partial}{\partial t_{l'}}\right)_q = \delta_{ll'}$ e $d\overline{Z}_{jq}(\tilde{L}_{l'q}) = 0$. Disto em (3.11), vem que

$$0 = \sum_{l=1}^{n'} \tau_{lq} \delta_{ll'},$$

donde,

$$\tau_{l'q} = 0, \qquad l' = 1, \ldots, n'. \tag{3.12}$$

Logo, de (3.10) e (3.12) em (3.6), obtemos que

$$\sum_{j=1}^{\nu} \alpha_{jq} dZ_{jq} + \sum_{k=1}^{d} \gamma_{kq} dW_{kq} = 0,$$

e, como $\{dZ_{1q}, \ldots, dZ_{\nu q}, dW_{1q}, \ldots, dW_{dq}\}$ é L.I, temos que $\alpha_{jq} = \gamma_{kq} = 0$, com $j = 1, \ldots, \nu$ e $k = 1, \ldots, d$. Consequentemente,$\{dz_{1q}, \ldots, dz_{\nu q}, d\overline{z}_{1q}, \ldots, d\overline{z}_{\nu q}, dW_{1q}, \ldots, dW_{dq}, dt_{1q}, \ldots, dt_{n'q}\}$ é L.I, para todo $q \in U$ e, como cada elemento desse conjunto pertence à $\mathbb{C}T_q^*\Omega$, o qual é um espaço N-dimensional, temos que tal conjunto gera $\mathbb{C}T_q^*\Omega$, para todo $q \in U$.

Observação 3.10. O conjunto formado pelas 1-formas dadas em (3.5) é a base dual do conjunto

$$\{L_1^\flat, \ldots, L_\nu^\flat, L_1, \ldots, L_\nu, M_1, \ldots, M_d, \tilde{L}_1, \ldots, \tilde{L}_{n'}\} \tag{3.13}$$

onde,

$$L_j^\flat = \frac{\partial}{\partial z_j} - i \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial \phi_k}{\partial z_j} M_k, \quad j = 1, \ldots, \nu.$$

Além disso, os campos vetoriais em (3.13) comutam dois a dois. De fato,

$$dz_j(L_{j'}^\flat) = L_{j'}^\flat(z_j) = \delta_{jj'},$$

pois $M_k(z_j) = 0$. Além disso, $dz_j(M_k) = 0$. De (3.4), vem que $dz_j(L_{j'}) = dz_j(\tilde{L}_l) = 0$. De (3.7)

$$d\overline{z}_j(L_{j'}^\flat) = L_{j'}^\flat(\overline{z}_j) = 0.$$

Também já vimos na demonstração da observação 3.9 que $d\overline{z}_j(L_{j'}) = \delta_{jj'}$ e que $d\overline{z}_j(M_k) = d\overline{z}_j(\tilde{L}_{l'}) = 0$. Agora,

$$dW_k(L_{j'}^\flat) = L_{j'}^\flat(W_k) = \frac{\partial W_k}{\partial z_{j'}} - i \sum_{\tilde{k}=1}^{d} \frac{\partial \phi_{\tilde{k}}}{\partial z_{j'}} M_{\tilde{k}}(W_k) = \frac{\partial (W_k - i\phi_k)}{\partial z_{j'}} = \frac{\partial s_k}{\partial z_{j'}} = 0.$$

De (3.4) $dW_k(L_{j'}) = dW_k(\tilde{L}_l) = 0$ e, como $M_{\tilde{k}}(W_k) = \delta_{\tilde{k}k}$, temos que $dW_k(M_{\tilde{k}}) = \delta_{\tilde{k}k}$. Por fim, de (3.8) temos que

$$dt_l(L_{j'}^\flat) = L_{j'}^\flat(t_l) = 0,$$

e da demonstração da observação 3.9, segue que $dt_l(L_{j'}) = dt_l(M_k) = 0$ e $dt_l(\tilde{L}_{l'}) = \delta_{ll'}$, concluindo assim que (3.5) é dual de (3.13). Agora verifiquemos que os campos dados em (3.13) comutam dois a dois. Para isto, basta provarmos que $dF([P, Q]) = 0$, onde F é qualquer umas das funções $\{Z_j, \overline{Z}_j, W_k, t_l\}$ e P, Q é qualquer um dos campos vetoriais em (3.13), pois assim $[P,Q]=0$. Então, fixemos $F=Z_j$. Logo,

$$\begin{aligned}
dZ_j([L^\flat_{j'},L^\flat_{\tilde{j}}]) &= L^\flat_{j'}(L^\flat_{\tilde{j}}(Z_j)) - L^\flat_{\tilde{j}}(L^\flat_{j'}(Z_j)) = L^\flat_{j'}(\delta_{j\tilde{j}}) - L^\flat_{\tilde{j}}(\delta_{jj'}) = 0,\\
dZ_j([L_{j'},L_{\tilde{j}}]) &= L_{j'}(0) - L_{\tilde{j}}(0) = 0,\\
dZ_j([M_k,M_{k'}]) &= M_k(0) - M_{k'}(0) = 0,\\
dZ_j([\tilde{L}_l,\tilde{L}_{l'}]) &= \tilde{L}_l(0) - \tilde{L}_{l'}(0) = 0,\\
dZ_j([L^\flat_{j'},L_{\tilde{j}}]) &= L^\flat_{j'}(L_{\tilde{j}}(Z_j)) - L_{\tilde{j}}(L^\flat_{j'}(Z_j)) = L^\flat_{j'}(0) - L_{\tilde{j}}(\delta_{jj'}) = 0,\\
dZ_j([L^\flat_{j'},M_k]) &= L^\flat_{j'}(M_k(Z_j)) - M_k(L^\flat_{j'}(Z_j) = L^\flat_{j'}(0) - M_k(\delta_{jj'}) = 0,\\
dZ_j([L^\flat_{j'},\tilde{L}_l]) &= L^\flat_{j'}(\tilde{L}_l(Z_j)) - \tilde{L}_l(L^\flat_{j'}(Z_j) = L^\flat_{j'}(0) - \tilde{L}_l(\delta_{jj'}) = 0,\\
dZ_j([L_{\tilde{j}},M_k]) &= L_{\tilde{j}}(M_k(Z_j)) - M_k(L_{\tilde{j}}(Z_j)) = L_{\tilde{j}}(0) - M_k(0) = 0,\\
dZ_j([L_{\tilde{j}},\tilde{L}_l]) &= L_{\tilde{j}}(\tilde{L}_l(Z_j)) - \tilde{L}_l(L_{\tilde{j}}(Z_j)) = L_{\tilde{j}}(0) - \tilde{L}_l(0) = 0,\\
dZ_j([M_k,\tilde{L}_l]) &= M_k(\tilde{L}_l(Z_j)) - \tilde{L}_l(M_k(Z_j)) = M_k(0) - \tilde{L}_l(0) = 0.
\end{aligned}$$

Fazendo F variar, os cálculos seguem de maneira análoga.

Em muitos casos, o seguinte caso particular do Teorema 3.7 é suficiente:

Corolário 3.11. *Seja $\mathcal{V}$ uma estrutura localmente integrável definida sobre um variedade Ω e considere $p\in\Omega$. Então existe um sistema de coordenadas que se anula em p, a dizer*

$$\{x_1,\dots,x_m,t_1,\dots,t_n\}$$

e funções reais, suaves $\phi_1,\dots,\phi_m$ definidas em uma vizinhança da origem e satisfazendo

$$\phi_k(0,0)=0,\ d_x\phi_k(0,0)=0,\quad k=1,\dots,m,$$

tais que os diferenciais das funções

$$Z_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = x_k + i\phi_k(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}),\quad k=1,\dots,m,$$

geram T' em uma vizinhança da origem.

Demonstração. Pelo Teorema 3.7, existe um sistema de coordenadas que se anula em p

$$\{\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_\nu,\tilde{y}_1,\dots,\tilde{y}_\nu,\tilde{s}_1,\dots,\tilde{s}_d,\tilde{t}_1,\dots,\tilde{t}_{n'}\}$$

e funções reais, suaves $\tilde{\phi}_1,\dots,\tilde{\phi}_d$ definidas em uma vizinhança da origem e satisfazendo

$$\tilde{\phi}_k(0)=0,\ d\tilde{\phi}_k(0)=0,\quad k=1,\dots,d,$$

tais que os diferenciais das funções

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_j(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{y}}) &= \tilde{z}_j = \tilde{x}_j + i\tilde{y}_j, \quad j=1,\dots,\nu\\ \tilde{W}_k(\tilde{\mathbf{x}},\tilde{\mathbf{y}},\tilde{\mathbf{s}},\tilde{\mathbf{t}}) &= \tilde{s}_k + i\tilde{\phi}_k(\tilde{\mathbf{z}},\tilde{\mathbf{s}},\tilde{\mathbf{t}}), \quad k=1,\dots,d,\end{aligned}$$

geram T' em uma vizinhança da origem. Assim, tome

$$x_k = \begin{cases}\tilde{x}_k, & k=1,\dots,\nu\\ \tilde{s}_k, & k=\nu+1,\dots,m\end{cases}, \qquad t_k = \begin{cases}\tilde{y}_k, & k=1,\dots,\nu\\ \tilde{t}_k, & k=\nu+1,\dots,n\end{cases},$$

$$\phi_k = \begin{cases}\tilde{y}_k, & k=1,\dots,\nu\\ \tilde{\phi}_k, & k=\nu+1,\dots,m\end{cases}.$$

Logo, teremos que $\{x_1,\dots,x_m,t_1,\dots,t_n\}$ se anula em p e que $\phi_1,\dots,\phi_m$ são funções reais, suaves definidas em uma vizinhaça da origem e satisfazendo

$$\phi_k(0,0) = \begin{cases}\tilde{y}_k(0,0)=0, & k=1,\dots,\nu\\ \tilde{\phi}_k(0,0)=0, & k=\nu+1,\dots,m\end{cases},$$

$$d_x\phi_k(0,0) = \begin{cases}d_x\tilde{y}_k(0,0)=0, & k=1,\dots,\nu\\ d_x\tilde{\phi}_k(0,0)=0, & k=\nu+1,\dots,m\end{cases},$$

tais que os diferenciais das funções

$$Z_k = x_k + i\phi_k = \begin{cases}\tilde{x}_k + i\tilde{y}_k, & k=1,\dots,\nu\\ \tilde{s}_k + i\tilde{\phi}_k, & k=\nu+1,\dots,m\end{cases} = \begin{cases}\tilde{Z}_k, & k=1,\dots,\nu\\ \tilde{W}_k, & k=\nu+1,\dots,m\end{cases}$$

geram T' numa vizinhança da origem. □

Analogamente à consequência obtida do Teorema 3.7, temos agora como consequência do Corolário 3.11 que, podemos definir em uma vizinhança da origem do $\mathbb{R}^N$, os campos vetoriais

$$M_k = \sum_{l=1}^{m} \mu_{kl}\frac{\partial}{\partial x_l}, \quad k=1,\dots,d, \tag{3.14}$$

caracterizados pelas relações $M_k Z_l = \delta_{kl}$.

As demonstrações das seguintes observações serão omitidas, pois são análogas as observações 3.8, 3.9 e 3.10.

Observação 3.12. Considere os campos vetoriais

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} - i\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\phi_k}{\partial t_j}M_k, \quad j=1,\dots,n,$$

onde M_k são os campos definidos em (3.14). Então, $L_1, \ldots, L_n$ são L.I e satisfazem $L_j Z_k = 0$, com $j = 1, \ldots, n$ e $k = 1, \ldots, m$. Consequentemente, $L_1, \ldots, L_n$ geram $\mathcal{V}$ em uma vizinhança da origem.

Observação 3.13. As 1-formas

$$dz_1, \ldots, dz_m, dt_1, \ldots, dt_n \tag{3.15}$$

geram $\mathbb{C}T^*\Omega$ em uma vizinhança da origem.

Observação 3.14. O conjunto formado pelas 1-formas dadas em (3.15) é a base dual do conjunto

$$\{L_1, \ldots, L_n, M_1, \ldots, M_m\}. \tag{3.16}$$

Além disso, os campos vetoriais em (3.16) comutam dois a dois.

Exemplo 3.15. Seja U um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e assuma $\Phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função suave, dada por $\Phi(t) = (\phi_1(t), \ldots, \phi_m(t))$. Chamamos uma estrutura tubo em $\mathbb{R}^m \times U$ a estrutura localmente integrável $\mathcal{V}$ em $\mathbb{R}^m \times U$, tal que T' é gerada pelos diferenciais das funções

$$Z_k = x_k + i\phi_k(t), \quad k = 1, \ldots, m.$$

Temos que os geradores globais da estrutura tubo $\mathcal{V}$ são dados por

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} - i \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \phi_k}{\partial t_j}(t) \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

De fato, temos que

$$\frac{\partial Z_k}{\partial x_l}(x,t) = \frac{\partial x_k}{\partial x_l} + i \frac{\partial \phi_k}{\partial x_l}(t) = \delta_{kl}, \quad l, k = 1, \ldots, m,$$

pois ϕ_k não depende de x. Logo, se escrevermos $Z = (Z_1, \ldots, Z_m)$, obtemos

$$Z_x(x,t) = \left(\frac{\partial Z_k}{\partial x_l}(x,t) \right)_{m \times m} = I_{m \times m}, \quad \text{para todo } (x,t) \in \mathbb{R}^m \times U.$$

Disto, tomemos $\mu_{kl} = \delta_{kl}$, donde

$$M_k = \sum_{l=1}^{m} \delta_{kl} \frac{\partial}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Por outro lado, os campos vetoriais

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} - i \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \phi_k}{\partial t_j}(t) M_k, \quad j = 1, \ldots, n,$$

geram $\mathcal{V}$ sobre $\mathbb{R}^m \times U$. Portanto,

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} - i \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \phi_k}{\partial t_j}(t) \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad j = 1, \ldots, n.$$

4 A FÓRMULA DE APROXIMAÇÃO DE BAOUENDI-TREVES

Neste capítulo, provaremos o que provalvelmente é o resultado mais importante na teoria de estruturas localmente integráveis. Esse resultado afirma que em uma vizinhança de um dado ponto do domínio de uma estrututura localmente integrável $\mathcal{L}$, qualquer solução da equação $\mathcal{L}u = 0$ pode ser aproximada por polinômios em um número finito de soluções homogêneas, onde as soluções nesse conjunto são escolhidas com diferenciais L.I e com quantidade igual ao co-posto de $\mathcal{L}$. Tal conjunto recebe o nome de conjunto completo de integrais primeiras da estrutura localmente integrável.

4.1 O Teorema de Aproximação

Como a fórmula de aproximação é de natureza local, será suficiente restringir nossa atenção à uma estrutura localmente integrável $\mathcal{L}$ definida em um subconjunto aberto Ω de $\mathbb{R}^N$, sobre o qual $\mathcal{L}^\perp$ é gerado pelos diferenciais $dZ_1, \ldots, dZ_m$, onde $Z_j \in C^\infty(\Omega)$, $j = 1, \ldots, m$. Assim, se n é o posto de $\mathcal{L}$, relembremos que $N = n + m$.

Definição 4.1. *Dada uma distribuição $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, dizemos que u é uma solução homogênea de $\mathcal{L}$ e escrevemos $\mathcal{L}u = 0$ se,*

$$Lu = 0 \quad \textit{em } U,$$

para toda seção local L de $\mathcal{L}$ definida em um subconjunto aberto $U \subset \Omega$.

A seguir apresentamos alguns exemplos de solução homogênea de $\mathcal{L}$.

Exemplo 4.2. As funções constantes são soluções homogêneas de $\mathcal{L}$. Com efeito, seja $u : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $u(p) = c$, para todo $p \in \mathbb{R}^N$. Então, dado $K \subset \mathbb{R}^N$ compacto temos que

$$\int_K u(x)dx = \int_K c\, dx = c|K| < \infty.$$

Portanto, $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. Agora, dado $x_1, \ldots, x_N$ um sistema de coordenadas locais em $\mathbb{R}^N$ e L uma seção local qualquer de $\mathcal{L}$, temos que

$$Lu = \sum_{j=1}^{N} a_j \frac{\partial c}{\partial x_j} = 0.$$

Logo, a função constante é uma solução homogênea de $\mathcal{L}$.

Exemplo 4.3. As funções $Z_1, \ldots, Z_m \in C^\infty(\Omega)$ são soluções homogêneas de $\mathcal{L}$. De fato, como $C^\infty(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ temos que $Z_1, \ldots, Z_m \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Além disso, dada L uma seção local qualquer de $\mathcal{L}$, temos que $LZ_j = \langle dZ_j, L\rangle = 0$, para todo $j = 1, \ldots, m$, pois $dZ_j \in \mathcal{L}^\perp$.

Consequentemente, as funções Z_j são soluções homogêneas de $\mathcal{L}$. O significado da notação $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o mesmo dado na Definição 1.21 do Capítulo 2.

Exemplo 4.4. Sejam u e v soluções homogêneas suaves de $\mathcal{L}$. Então, uv é uma solução homogênea. De fato, sejam $u, v \in C^\infty(\Omega)$, então $uv \in C^\infty(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Ainda, $L(uv) = uL(v) + vL(u) = 0$, pois u e v são soluções homogêneas. Portanto, uv é solução homogênea suave de $\mathcal{L}$.

Dessa forma, segue dos Exemplos 4.3 e 4.4 que um polinômio com coeficientes constantes nas m funções Z_j, isto é, uma função da forma

$$P(Z) = \sum_{|\alpha| \leq d} c_\alpha Z^\alpha, \ \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}^m, \ c_\alpha \in \mathbb{C}, \tag{4.1}$$

é uma solução homogênea de $\mathcal{L}$.

Enunciaremos, agora, o Teorema de Aproximação que afirma que qualquer distribuição u, que é solução de $\mathcal{L}u = 0$, é o limite fraco de soluções polinomiais tais como (4.1). Em seguida, apresentaremos um exemplo, bem conhecido em análise, em que aplicaremos o teorema.

Teorema 4.5. *Seja $\mathcal{L}$ uma estrutura localmente integrável em Ω e assuma que $dZ_1, \ldots, dZ_m$ geram $\mathcal{L}^\perp$ em todos os pontos de Ω. Então, para qualquer $p \in \Omega$, existem U e W abertos, com $p \in U \subset \overline{U} \subset W \subset \Omega$, tais que*

(i) todo $u \in \mathcal{D}'(W)$ que satisfaz $\mathcal{L}u = 0$ em W é o limite em $\mathcal{D}'(U)$ de uma sequência de soluções polinomiais $P_j(Z_1, \ldots, Z_m)$:

$$u = \lim_{j \to \infty} P_j \circ Z \quad \text{em } \mathcal{D}'(U); \tag{4.2}$$

(ii) se $u \in C^k(W)$, a convergência vale na topologia de $C^k(U)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, \infty$.

Exemplo 4.6. Toda função holomorfa é localmente aproximada por polinômios na variável complexa z. De fato, seja $\mathcal{L}$ o subfibrado tangente gerado, sobre um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$, pelo campo vetorial Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Tomando $z(x, y) = x + iy \in C^\infty(\Omega)$ temos que $dz = dx + idy \neq 0$ e $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(z) = 0$. Logo, $\mathcal{L}$ é uma estrutura localmente integrável. Além disso, observe que toda função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa é solução de $\mathcal{L}u = 0$, pois $u \in C^\infty(\Omega)$ e $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(u) = 0$. Logo, pelo Teorema de Aproximação qualquer função holomorfa pode ser localmente aproximada por polinômios na variável complexa z.

Definição 4.7. *Considere a relação de equivalência entre pontos $p, q \in U \subset \Omega$: $p \sim q$ se, e somente se, $Z(p) = Z(q)$. Definimos as fibras de Z em U como sendo as classes de equivalência da relação $\sim$.*

Vejamos, agora, uma consequência interessante do Teorema 4.5.

Proposição 4.8. *Toda solução $u \in C^0(\Omega)$ de $\mathcal{L}u = 0$ é constante sobre as fibras de Z em U.*

Demonstração. Seja $[p]$ uma fibra arbitrária de Z em U e tome $q \in [p]$. Com isso, $p \sim q$, isto é, $Z(p) = Z(q)$. Logo, para qualquer polinômio P em m variáveis temos que $P \circ Z(p) = P \circ Z(q)$ e, pela aproximação uniforme de u em U pelos polinômios em Z, segue que

$$u(p) = \lim_{j\to\infty} P_j \circ Z(p) = \lim_{j\to\infty} P_j \circ Z(q) = u(q).$$

Isto é, $u(q) = u(p)$, para todo $q \in [p]$. Logo u é constante sobre $[p]$. Pela arbitrariedade de $[p]$ temos que u é constante sobre as fibras de Z em U. □

Assim, se os diferenciais de $Z_1^\sharp, \ldots, Z_m^\sharp$ geram $\mathcal{L}^\perp$ sobre Ω, temos que $Z_j^\sharp \in C^\infty(\Omega) \subset C^0(\Omega)$. Além disso, já vimos que as funções $Z_j^\sharp$ satisfazem $\mathcal{L}Z_j^\sharp = 0$, para todo $j = 1, \ldots, m$. Logo, segue da Proposição 4.8 que $Z_j^\sharp$ é constante sobre as fibras de Z em U, para todo $j = 1, \ldots, m$, isto é, $Z^\sharp = (Z_1^\sharp, \ldots, Z_m^\sharp)$ é constante sobre as fibras de Z em U.

Aplicando o teorema com $Z^\sharp$ ao invés de Z e considerando, para cada $j = 1, \ldots, m$, $u^\sharp = Z_j$, podemos encontrar uma vizinhança $U^\sharp \subset U$ de p tal que Z é constante sobre as fibras de $Z^\sharp$ em $U^\sharp$. Dessa forma, o seguinte resultado nos diz que as fibras numa vizinhança não dependem da escolha do conjunto completo de integrais primeiras.

Proposição 4.9. *As fibras de Z e as fibras de $Z^\sharp$ são idênticas em $U^\sharp$.*

Demonstração. Considere $\{[p]_Z; p \in U^\sharp\}$ as fibras de Z em $U^\sharp$ e $\{[p]_{Z^\sharp}; p \in U^\sharp\}$ as fibras de $Z^\sharp$ em $U^\sharp$. Provaremos que $[p]_Z = [p]_{Z^\sharp}$. Seja $q \in [p]_Z$, então $Z(p) = Z(q)$. Para cada $j = 1, \ldots, m$, tomemos $u = Z_j^\sharp \in C^\infty(U^\sharp)$. Como, $P_k \circ Z(p) = P_k \circ Z(q)$, para todo $k = 1, \ldots, m$, temos pelo Teorema 4.5 que

$$Z_j^\sharp(p) = \lim_{k\to\infty} P_k \circ Z(p) = \lim_{k\to\infty} P_k \circ Z(q) = Z_j^\sharp(q), \quad j = 1, \ldots, m,$$

ou seja, $Z^\sharp(p) = Z^\sharp(q)$, donde $q \in [p]_{Z^\sharp}$. Reciprocamente, tomemos $q \in [p]_{Z^\sharp}$, então $Z^\sharp(p) = Z^\sharp(q)$. Disto, temos que $P_k \circ Z^\sharp(p) = P_k \circ Z^\sharp(q)$, para qualquer $k = 1, \ldots, m$. Agora, para cada $j = 1, \ldots, m$, tomemos $u^\sharp = Z_j \in C^\infty(U)$. Assim, aplicando o Teorema 4.5 com $Z^\sharp$ no lugar de Z, obtemos que

$$Z_j(p) = \lim_{k\to\infty} P_k \circ Z^\sharp(p) = \lim_{k\to\infty} P_k \circ Z^\sharp(q) = Z_j(q), \quad j = 1, \ldots, m.$$

Isto é, $Z(p) = Z(q)$, donde $q \in [p]_Z$. □

Além disso, toda solução $u \in C^0(\Omega)$ de $\mathcal{L}u = 0$ pode ser fatorada como a composição de uma função contínua, definida em um subconjunto de C^m, com Z. Isto é, existe $\tilde{u} \in C^0(Z(U))$ tal que $u = \tilde{u} \circ Z$.

4.2 Demonstração: Versão Clássica

Como o Teorema de Aproximação é de caráter local, consideraremos $B((0,0), M) \subset \mathbb{R}^N$, onde $M > 0$. Iremos provar o Teorema 4.5 em várias etapas. A primeira etapa consiste em tomar coordenadas locais convenientes em uma vizinhança de p. Como $\mathcal{L}$ é uma estrutura localmente integrável temos, pelo Corolário 3.11 da Seção 3.2, que existe um sistema de coordendas que se anula em p, a dizer

$$\{x_1, \dots, x_m, t_1, \dots, t_n\}$$

e funções reais, suaves $\phi_1, \dots, \phi_m$ definidas sobre $B((0,0), M)$ e satisfazendo

$$\phi_k(0,0) = 0, \quad d_x\phi_k(0,0) = 0, \qquad k = 1, \dots, m,$$

tais que os diferenciais das funções

$$Z_k(x,t) = x_k + i\phi_k(x,t), \qquad k = 1, \dots, m \tag{4.3}$$

geram T' sobre $B((0,0), M)$. Agora, tomemos $R > 0$ e consideremos o conjunto

$$V = \{(x,t) \in B((0,0), M);\ |x| < R \text{ e } |t| < R\} \tag{4.4}$$

de forma que (4.3) seja válido em uma vizinhança de $\overline{V}$.

Observação 4.10. O conjunto V definido em (4.4) é aberto. De fato, escrevamos $V = V_1 \cap V_2$, onde $V_1 = \{(x,0) \in B((0,0), M);\ |x| < R\}$ e $V_2 = \{(0,t) \in B((0,0), M);\ |t| < R\}$. Denotando $|x| = f(x)$, temos que f é contínua e

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x,0) \in B((0,0), M);\ |x| < R\} \\ &= \{(x,0) \in B((0,0), M);\ -\infty < |x| < R\} = f^{-1}(-\infty, R). \end{aligned}$$

Como f é contínua temos que V_1 é aberto. Analogamente, temos que V_2 é aberto. Portanto, $V = V_1 \cap V_2$ é aberto, como queríamos.

Antes de enunciarmos a próxima observação, tomemos $X \subset \overline{V}$ aberto de forma que $\overline{X} \cap V^c = \emptyset$. Assim, existe $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\psi = 1$ em $\overline{X}$, $\psi = 0$ em V^c e $0 \leq \psi(x) \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Observação 4.11. Podemos escolher $R > 0$ de forma que:

(i) $\left\| \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x_k}(x,t) \right) \right\| < \frac{1}{4}$, para todo $(x,t) \in \overline{V}$;

(ii) $|\phi_j(x,t)| < \frac{1}{4M}$, para todo $(x,t) \in \overline{V}$,

onde $M = \max_{(x,t)\in\mathbb{R}^N} |\nabla_x \psi(x,t)|$ e $\|\cdot\|$ indica a norma da matriz $\phi_x(x,t) = \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x_k}(x,t)\right)_{m\times m}$ como um operador linear em $\mathbb{R}^m$. Com efeito, note que $\frac{\partial \phi_j}{\partial x_k}(0,0) = 0$ para todo $j = 1,\dots,m$, pois $d_x\phi_j(0,0) = 0$. Além disso, como $\overline{V} \subset U$ temos que $\frac{\partial \phi_j}{\partial x_k} \in C^\infty(\overline{V})$, ou seja, $\frac{\partial \phi_j}{\partial x_k}$ é contínua em $(0,0)$. Logo, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|(x,t)-(0,0)| < \delta \Longrightarrow \left\| \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x_k}(x,t)\right) - \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x_k}(0,0)\right)\right\| < \epsilon.$$

Em particular, para $\epsilon = \frac{1}{4}$, existe $\delta^* > 0$ tal que

$$\left\| \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x_k}(x,t)\right)\right\| < \frac{1}{4}, \quad \text{para todo}(x,t) \in B((0,0),\delta^*).$$

Agora, como $\phi_j \in C^\infty(\overline{V})$ e $\phi_j(0,0)$ temos que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|(x,t)| < 0 \Longrightarrow |\phi_j(x,t)| < \epsilon.$$

Em particular, para $\epsilon = \frac{1}{4M}$ existe $\tilde{\delta} > 0$ tal que

$$|\phi_j(x,t)| < \frac{1}{4M}, \quad \text{para todo}(x,t) \in B((0,0),\tilde{\delta}).$$

Tomando $\delta' = \min\{\delta^*, \tilde{\delta}\}$ e reduzindo R, se necessário, temos o desejado.

Observação 4.12.

$$\left\| \left(\frac{\partial (\phi_j\psi)}{\partial x_k}(x,t)\right)\right\| < \frac{1}{2}, \quad \text{para todo}(x,t) \in \mathbb{R}^N.$$

De fato, se $(x,t) \in \overline{X} \subset \overline{V}$ então $\psi(x,t) = 1$ e pelo primeiro item da observaçao 4.11 vem que

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\frac{\partial (\phi_j\psi)}{\partial x_k}(x,t)\right)\right\| &= \left\| \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x_k}(x,t)\psi(x,t) + \frac{\partial \psi}{\partial x_k}(x,t)\phi_j(x,t)\right)\right\| \\
&= \left\| \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x_k}(x,t)\right)\right\| < \frac{1}{4} < \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Agora, se $(x,t) \in V^c$ então $\psi(x,t) = 0$, donde

$$\left\| \left(\frac{\partial (\phi_j\psi)}{\partial x_k}(x,t)\right)\right\| = 0 < \frac{1}{2}.$$

Por fim, se $(x,t) \in V$ e $(x,t) \notin \overline{X}$ então $0 \le \psi(x,t) \le 1$ e pelo segundo item da observação

4.11 obtemos

$$
\begin{aligned}
\left\|\left(\frac{\partial(\phi_j\psi)}{\partial x_k}(x,t)\right)\right\| &\leq \left\|\left(\frac{\partial\phi_j}{\partial x_k}(x,t)\right)\right\| \sup|\psi(x,t)| + |\nabla_x\psi(x,t)| \sup|\phi_j(x,t)| \\
&\leq \left\|\left(\frac{\partial\phi_j}{\partial x_k}(x,t)\right)\right\| + M\frac{1}{4M} \\
&< \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

o que conclui a demonstração da observação.

Como as funções $\frac{\partial(\phi_j\psi)}{\partial x_k}$ coincidem com as funções $\frac{\partial\phi_j}{\partial x_k}$ em $\overline{X}\subset\overline{V}$ escreveremos, por simplicidade, $\frac{\partial\phi_j}{\partial x_k}$, isto é,

$$
\left\|\left(\frac{\partial\phi_j}{\partial x_k}(x,t)\right)\right\| < \frac{1}{2}, \quad \text{para todo}(x,t)\in\mathbb{R}^N. \tag{4.5}
$$

Analogamente, modificando $\mathcal{L}$ fora de uma vizinhança de $\overline{V}$, isto é, multiplicando os campos $L_{j'}$, $j'=1,\dots n$, pela função ψ, podemos assumir que os diferenciais dZ_j, $j=1,\dots,m$, dados por (4.3) geram $\mathcal{L}^\perp$ sobre $\mathbb{R}^N$. Assim, a nova estrutura $\mathcal{L}$ e a antiga coincidem em V, o que significa que qualquer conclusão obtida sobre a nova estrutura $\mathcal{L}$ em V irá ser válida para a antiga estrutura $\mathcal{L}$.

Consideremos os campos vetoriais

$$
M_k=\sum_{l=1}^{m}\mu_{kl}\frac{\partial}{\partial x_l}, \quad k=1,\dots,m,
$$

caracterizados pelas relações

$$
M_kZ_l=\delta_{kl}, \qquad k,l=1,\dots,m,
$$

e os campos vetoriais

$$
L_j=\frac{\partial}{\partial t_j}-i\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\phi_k}{\partial t_j}M_k \qquad j=1,\dots,n
$$

os quais são L.I e satisfazem $L_jZ_k=0$, $j=1,\dots,n$, $k=1,\dots,m$. Tais campos foram introduzidos na Seção 3.2 depois do Corolário 3.11. Multiplicando as funções μ_{kl} pela função ψ temos que os campos M_k's e L_j's ficam definidos sobre todo $\mathbb{R}^N$. Assim, $L_1,\dots,L_n$ geram $\mathcal{L}$ sobre $\mathbb{R}^N$, enquanto os $N=n+m$ campos vetoriais

$$
L_1,\dots,L_n,M_1,\dots,M_m
$$

comutam dois a dois e geram $\mathbb{C}T\mathbb{R}^N$. Como

$$dZ_1, \dots, dZ_m, dt_1, \dots, dt_n$$

geram $\mathbb{C}T^*\mathbb{R}^N$, o diferencial $d\omega$ de uma função $\omega(x,t) \in C^1$ pode ser expresso nesta base na forma

$$d\omega = \sum_{j=1}^{n} L_j(\omega) dt_j + \sum_{k=1}^{m} M_k(\omega) dZ_k. \tag{4.6}$$

Com efeito, dado $p \in \mathbb{R}^N$ como $d\omega_p \in \mathbb{C}T_p^*\mathbb{R}^N$ temos que

$$d\omega_p = \sum_{j=1}^{n} a_j(p) dt_{jp} + \sum_{k=1}^{m} b_k(p) dZ_{kp},$$

onde $a_j, b_k \in C^0(\mathbb{R}^N)$. Assim, para todo $j = 1, \dots, n$

$$d\omega_p(L_{jp}) = \sum_{j'=1}^{n} a_{j'}(p) dt_{j'p}(L_{jp}) + \sum_{k=1}^{m} b_k(p) dZ_{kp}(L_{jp}) = a_j(p),$$

isto é, $L_j(\omega)(p) = a_j(p)$, pois $L_j Z_k = 0$ e $L_j t_{j'} = \delta_{jj'}$ para todo $j, j' = 1, \dots, n$ e $k = 1, \dots, m$. Por outro lado, para todo $k = 1, \dots, m$

$$d\omega_p(M_{kp}) = \sum_{j=1}^{n} a_j(p) dt_{jp}(M_{kp}) + \sum_{k'=1}^{m} b_{k'}(p) dZ_{k'p}(M_{kp}) = b_k(p),$$

isto é, $M_k(\omega)(p) = b_k(p)$, pois $M_k t_j = 0$ e $M_k Z_{k'} = \delta_{k'k}$ para todo $k, k' = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$. Portanto,

$$d\omega_p = \sum_{j=1}^{n} L_j(\omega)(p) dt_{jp} + \sum_{k=1}^{m} M_k(\omega)(p) dZ_{kp}$$

como desejado.

Provaremos inicialmente parte do primeiro item do Teorema 4.5 para distribuições regulares. Já que a nova estrutura $\mathcal{L}$ está definida sobre todo $\mathbb{R}^N$, assumiremos que u é uma solução homogênea suave de $\mathcal{L}u = 0$, definida sobre $\mathbb{R}^N$ com derivadas de todas as ordens contínuas. Assim, seja $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo em $\mathbb{R}^N$ o sistema de equações sobredeterminado

$$\begin{cases} L_1 u = 0 \\ L_2 u = 0 \\ \dots \\ L_n u = 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

4.2.1 A Aproximação de $E_\tau u(x,t)$ por Polinômios em $Z(x,t)$

Definamos uma família de funções $\{E_\tau u\}$ que depende de um parâmetro real τ, $0 < \tau < \infty$, por meio da fórmula

$$E_\tau u(x,t) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',0)]^2} u(x',0)h(x') \det Z_x(x',0)dx', \tag{4.8}$$

onde $Z(x,t) - Z(x',0) \in \mathbb{C}^m$ e para qualquer $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_m) \in \mathbb{C}^m$ usaremos a notação $[\zeta]^2 = \zeta_1^2 + \ldots + \zeta_m^2$. Além disso, temos que $h(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ tal que $h(x) = 1$ em uma vizinhança de $|x| \leq \frac{R}{2}$ e $h(x) = 0$ para $|x| \geq R$, em que R foi dado anteriormente na construção do conjunto V. Assim, a aplicação $\mathbb{R}^m \ni x' \longmapsto u(x',0)h(x') \in \mathbb{C}$ está bem definida em $\mathbb{R}^m$, é de classe C^∞ e tem suporte compacto. Por último, sendo $Z = (Z_1, \ldots, Z_m)$ consideramos Z_x como sendo a matriz $\left(\frac{\partial Z_j}{\partial x_k}\right)_{j,k=1,\ldots,m}$ e denotamos seu determinante por $\det Z_x$.

Observação 4.13. A exponencial no integrando da equação (4.8) é uma função inteira de $(Z_1, \ldots, Z_m)$ e ela satisfaz o sistema de equações homogêneo (4.7). Consequentemente, $E_\tau u(x,t)$ satisfaz o sistema (4.7), onde $0 < \tau < \infty$. De fato, sejam $L_j \in \mathscr{X}(\mathbb{R}^N)$, $j = 1, \ldots, n$ campos vetoriais que geram $\mathcal{L}$. Por simplicidade escrevamos

$$L_j = \sum_{k=1}^N a_{jk} \frac{\partial}{\partial y_k},$$

onde y corresponde ao sistema de coordenadas (x,t). Então,

$$\begin{aligned}
L_j(e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',0)]^2}) &= \sum_{k=1}^N a_{jk} \frac{\partial(e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',0)]^2})}{\partial y_k} \\
&= \sum_{k=1}^N a_{jk} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',0)]^2} \frac{\partial(-\tau[Z(x,t)-Z(x',0)]^2)}{\partial y_k} \\
&= -\tau e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',0)]^2} \sum_{k=1}^N a_{jk} \frac{\partial([Z(x,t)-Z(x',0)]^2)}{\partial y_k} \\
&= -\tau e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',0)]^2} L_j([Z(x,t)-Z(x',0)]^2).
\end{aligned}$$

Como $Z_k \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ é solução de $\mathcal{L}Z_k = 0$, para todo $k = 1, \ldots, m$, temos que

$$L_j(Z_k(x,t) - Z_k(x',0)) = L_j(Z_k - Z_k(x',0))(x,t) = L_j Z_k(x,t) = 0.$$

Logo, $L_j(e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',0)]^2}) = 0$, pois o produto de soluções homogêneas suaves é ainda uma solução homogênea suave. Consequentemente, pela diferenciação sob o sinal de integral vem que

$$
\begin{aligned}
L_j(E_\tau u(x,t)) &= \sum_{k=1}^{N} a_{jk}\frac{\partial(E_\tau u(x,t))}{\partial y_k}\\
&= \sum_{k=1}^{N} a_{jk}\left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}}\int_{\mathbb{R}^m} u(x',0)h(x')\det Z_x(x',0)\frac{\partial(e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',0)]^2})}{\partial y_k}dx'\\
&= \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}}\int_{\mathbb{R}^m} u(x',0)h(x')\det Z_x(x',0)\sum_{k=1}^{N} a_{jk}\frac{\partial(e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',0)]^2})}{\partial y_k}dx' = 0,
\end{aligned}
$$

o que prova a observação.

Vamos denotar por $P_k(\zeta)$ as somas parcias de grau k da série de Taylor da função exponencial $e^{-[\zeta]^2}$, em um polidisco fixo que contém o conjunto

$$\{\sqrt{\tau}(Z(x,t)-Z(x',0));\ |x|,|x'|<R,\ |t|<R\}.$$

Substituindo a exponencial na definição de E_τ por $P_k(\sqrt{\tau}(Z(x,t)-Z(x',0)))$ temos

$$F_\tau^k u(x,t) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}}\int_{\mathbb{R}^m} P_k(\sqrt{\tau}(Z(x,t)-Z(x',0)))u(x',0)h(x')\det Z_x(x',0)dx'$$

onde $F_\tau^k u$ é um polinômio em $Z(x,t)$. Além disso, para $|x|<\frac{R}{4}$ e $|t|<T$ temos que

$$\lim_{k\to\infty} F_\tau^k u(x,t) = E_\tau u(x,t)$$

na topologia C^∞, pois $P_k(\zeta)\to e^{-[\zeta]^2}$ na topologia C^∞, quando $k\to\infty$. Assim, a segunda etapa da demonstração será mostrar que, para $|x|<\frac{R}{4}$ e $|t|<T<R$, com T convenientemente pequeno, $E_\tau u(x,t)\longrightarrow u(x,t)$ uniformemente quando $\tau\to\infty$, pois dessa forma teremos que

$$\lim_{\tau\to\infty}\lim_{k\to\infty} F_\tau^k u(x,t) = \lim_{\tau\to\infty} E_\tau u(x,t) = u(x,t).$$

Fazendo $j=\min\{\tau,k\}$, concluimos que

$$\lim_{j\to\infty} F_j u(x,t) = u(x,t).$$

Consequentemente, de agora em diante, fixemos nossa atenção na convergência

$$E_\tau u(x,t) \longrightarrow u(x,t).$$

4.2.2 Uma Aproximação da Identidade e a Convergência em $\mathcal{D}'$

Consideremos a seguinte modificação do operador E_τ:

$$G_\tau u(x,t) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t)]^2} u(x',t)h(x') \det Z_x(x',t)dx'.$$

Note que, quando $\phi_k = 0$, $k = 1, \ldots, m$, temos que $Z(x,t) = x$ e $\det Z_x = 1$. Então, G_τ fica

$$G_\tau u(x,t) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[x-x']} u(x',t)h(x')dx',$$

isto é, G_τ é a convolução de $u(x,t)h(x)$ em uma integral gaussiana em $\mathbb{R}^m$, sendo assim uma aproximação da identidade, bem conhecida, quando $\tau \to \infty$. Em geral, as funções $\phi_k' s$ não se anulam, mas são relativamente pequenas, pois se anulam na origem e vale (4.5). Assim, G_τ ainda é uma aproximação da identidade. Então, a ideia é provar que $G_\tau u \longrightarrow u$ e, em seguida, estimar a diferença $R_\tau u = G_\tau u - E_\tau u$ usando o fato que $\mathcal{L}u = 0$. Antes, contemplaremos alguns lemas técnicos.

Lema 4.14. *Se A é uma matriz $m \times m$ com coeficientes reias, simétrica, positiva definida, então*

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-\langle Ax,x\rangle} dx = \pi^{\frac{m}{2}} (\det A)^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.9}$$

Demonstração. Usando coordenadas polares e, em seguida, fazendo uma mudança de variáveis é fácil verificar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} dt = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}}, \text{ onde } a > 0. \tag{4.10}$$

Como A é simétrica, temos que existe uma matriz $m \times m$ ortogonal B tal que $B^tAB = D$ é uma matriz $m \times m$ diagonal. Por B ser ortogonal temos que $BB^t = B^tB = I$ e $\det B = \pm 1$. Então, podemos escrever $A = BDB^t$. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-\langle Ax,x\rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\langle BDB^tx,x\rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\langle DB^tx,B^tx\rangle} dx$$

Fazendo a mudança de variáveis $y = B^tx$ temos que o determinante Jacobiano da função $x = f(y) = By$ é

$$\det J_f(y) = \det B \neq 0.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-\langle Ax,x\rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\langle Dy,y\rangle} |\det B| dy = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\langle Dy,y\rangle} dy. \tag{4.11}$$

Sabemos que a matriz diagonal D é dada por

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_m \end{pmatrix},$$

onde d_i são os autovalores de A. Além disso, $d_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$, pois A é simétrica e positiva definida. Portanto, de (4.10) e (4.11) segue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\langle Ax,x\rangle} dx &= \int_{\mathbb{R}^m} e^{-d_1 y_1^2 - \ldots - d_m y_m^2} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} e^{-d_1 y_1^2} \cdot \ldots \cdot e^{-d_m y_m^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-d_1 y_1^2} d_{y_1} \cdot \ldots \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-d_m y_m^2} d_{y_m} \\ &= \left(\frac{\pi}{d_1}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{\pi}{d_m}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{(\det D)^{\frac{1}{2}}} = \pi^{\frac{m}{2}} (\det A)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

pois $\det D = \det(B^t A B) = (\det B)^2 \det A = \det A$. □

Se tomarmos o conjunto H das matrizes $m \times m$ com coeficientes complexos, simétricas com parte real positiva definida, afirmamos que a identidade dada em (4.9) se verifica para todo $A \in H$. A demonstração de tal afirmação, junto com a escolha adequada do ramo da raiz a ser tomado, se encontra em [10], página 85. Como consequência desse fato, segue o seguinte lema:

Lema 4.15. *Seja B uma matriz $m \times m$ com coeficientes reais e norma $\|B\| < 1$ e considere $A = I + iB$, onde I é a matriz identidade. Então,*

$$\det A \int_{\mathbb{R}^m} e^{-[Ax]^2} dx = \pi^{\frac{m}{2}}.$$

Demonstração. Observe quue, $[Ax]^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^t Ax, x\rangle$. Assim, $e^{-[Ax]^2} = e^{-\langle Cx,x\rangle}$, onde a matriz $C = A^t A$ tem parte real positiva definida. Com efeito, um cálculo trivial nos fornece que $\Re C = I - B^t B$. Assim, dado $x \in \mathbb{R}^m$ não nulo temos que

$$\begin{aligned} x^t(I - B^t B)x &= \langle x, (I - B^t B)x\rangle = \langle x, x - B^t Bx\rangle = \langle x, x\rangle - \langle x, B^t Bx\rangle \\ &= |x|^2 - \langle Bx, Bx\rangle = |x|^2 - \|Bx\|^2 > |x|^2 - |x|^2 = 0, \end{aligned}$$

pois $\|B\| < 1$. Logo, sendo C uma matriz $m \times m$ com coeficientes complexos, simétrica com parte real positiva definida, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-[Ax]^2} dx = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\langle Cx,x\rangle} dx = \pi^{\frac{m}{2}} (\det C)^{-\frac{1}{2}}.$$

Mas, como $C = A^t A$, note que $\det C = \det(A^t A) = (\det A)^2$ e, portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-[Ax]^2} dx = \pi^{\frac{m}{2}} (\det A)^{-1},$$

donde

$$\det A \int_{\mathbb{R}^m} e^{-[Ax]^2} dx = \pi^{\frac{m}{2}},$$

como desejado. □

Consideremos $v(x,t) = h(x)u(x,t) \det Z_x(x,t)$ e observe que $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Fixado $(x,t) \in \mathbb{R}^N$ note que a matriz $Z_x(x,t) = I + i\phi_x(x,t)$ satisfaz as hipóteses do Lema 4.15, pois $\phi_x(x,t)$ é uma matriz $m \times m$ com coeficientes reais e vale (4.5). Assim, temos que

$$\det Z_x(x,t) \int_{\mathbb{R}^m} e^{-[Z_x(x,t)x']^2} dx' = \pi^{\frac{m}{2}}, \tag{4.12}$$

donde, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\pi^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-[Z_x(x,t)x']^2} v(x,t) dx' &= v(x,t) \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-[Z_x(x,t)x']^2} dx' \\
&= h(x)u(x,t) \det Z_x(x,t) \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-[Z_x(x,t)x']^2} dx' \\
&= h(x)u(x,t).
\end{aligned}$$

Introduzindo a mudança de variável $\tilde{x} \mapsto x + \tau^{-\frac{1}{2}} x'$ na integral que define $G_\tau u$, segue que

$$\begin{aligned}
G_\tau u(x,t) &= \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(\tilde{x},t)]^2} v(\tilde{x},t) d\tilde{x} \\
&= \tau^{\frac{m}{2}} \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x+\tau^{-\frac{1}{2}}x',t)]^2} v(x+\tau^{-\frac{1}{2}}x',t) \tau^{-\frac{m}{2}} dx' \\
&= \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x+\tau^{-\frac{1}{2}}x',t)]^2} v(x+\tau^{-\frac{1}{2}}x',t) dx'.
\end{aligned}$$

Mas, como $v \in C_0^\infty(R^N)$ e vale (4.12), temos que

$$\pi^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-[Z_x(x,t)x']^2} v(x+\tau^{-\frac{1}{2}}x',t) dx' < \infty.$$

Então,

$$\begin{aligned} G_\tau u(x,t) - h(x)u(x,t) &= \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x+\tau^{-\frac{1}{2}}x',t)]^2} v(x+\tau^{-\frac{1}{2}}x',t)dx' \\ &- \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-[Z_x(x,t)x']^2} v(x,t)dx' \\ &= \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-[Z_x(x,t)x']^2} \Big(v(x+\tau^{-\frac{1}{2}}x',t) - v(x,t) \Big) dx' \\ &+ \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} \Big(e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x+\tau^{-\frac{1}{2}}x',t)]^2} - e^{-[Z_x(x,t)x']^2} \Big) v(x+\tau^{-\frac{1}{2}}x',t)dx', \end{aligned}$$

Portanto, $G_\tau u(x,t) - h(x)u(x,t) = I_\tau + J_\tau$, onde

$$I_\tau(x,t) = \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-[Z_x(x,t)x']^2} \Big(v(x+\tau^{-\frac{1}{2}}x',t) - v(x,t) \Big) dx'$$

e

$$J_\tau(x,t) = \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} \Big(e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x+\tau^{-\frac{1}{2}}x',t)]^2} - e^{-[Z_x(x,t)x']^2} \Big) v(x+\tau^{-\frac{1}{2}}x',t)dx.'$$

Primeiramente, iremos estimar I_τ.

Afirmação 1: $\left| e^{-[Z_x(x,t)x']^2} \right| \leq e^{-\frac{3|x'|^2}{4}}$.

De fato, de (4.5)

$$\left| e^{-[Z_x(x,t)x']^2} \right| = e^{\Re(-[Z_x(x,t)x']^2)} = e^{-|x'|^2 + |\phi_x(x,t)x'|^2} \leq e^{-|x'|^2 + \frac{1}{4}|x'|^2} = e^{-\frac{3}{4}|x'|^2}.$$

Afirmação 2: $|\nabla_x v(x,t)|$ é limitado em $\mathbb{R}^m \times \{|t| \leq R\}$.

Com efeito, pelo fato de $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ temos que $\frac{\partial v}{\partial x_j} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m \times \{|t| \leq R\})$, isto é, para cada $j = 1, \ldots, m$ existe $K_j = \max\left\{ \left| \frac{\partial v}{\partial x_j}(x,t) \right| \right\}$. Então, indicando a norma da soma por $|\cdot|_S$ temos que $|\nabla_x v(x,t)|_S = \left| \frac{\partial v}{\partial x_1}(x,t) \right| + \ldots + \left| \frac{\partial v}{\partial x_m}(x,t) \right| \leq K_1 + \ldots + K_m = \tilde{K}$. Agora, como a norma euclidiana e a norma da soma são equivalentes temos que existe $\tilde{C} > 0$ tal que $|\nabla_x v(x,t)| \leq \tilde{C} |\nabla_x v(x,t)|_S \leq K$, para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^m \times \{|t| \leq R\}$, concluindo a afirmação 2.

Afirmação 3: $\int_{\mathbb{R}^m} e^{-\frac{3}{4}|x'|^2} |x'| dx' < \infty$.

Com efeito, usando a fórmula da integração polar m-dimensional, se f é uma função positiva então

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} f(|x|)dx &\leq \lim_{R \to +\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \ldots \int_0^\pi \int_0^R f(\rho) |\sin^{m-2}(\phi_1)| |\sin^{m-3}(\phi_2)| \ldots |\sin(\phi_{m-2})| \rho^{m-1} \\ &\quad d\rho d\phi_1 \ldots d\phi_{m-1} \\ &\leq \lim_{R \to +\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \ldots \int_0^\pi \int_0^R f(\rho) \rho^{m-1} d\rho d\phi_1 \ldots d\phi_{m-1} \\ &= \lim_{R \to +\infty} 2\pi(\pi)^{m-2} \int_0^R f(\rho)\rho^{m-1} d\rho = \lim_{R \to +\infty} 2\pi^{m-1} \int_0^R f(\rho)\rho^{m-1} d\rho. \end{aligned}$$

Aplicando isso a função $f(|x'|) = e^{-\frac{3|x'|^2}{4}}|x'|$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-\frac{3|x'|^2}{4}}|x'|dx' \leq \lim_{R\to+\infty} 2\pi^{m-1}\int_0^R e^{-\frac{3\rho^2}{4}}\rho^m d\rho.$$

Assim, se provarmos que $e^{-\frac{3\rho^2}{4}}\rho^m \in L^1(0,+\infty)$, teremos o desejado. Primeiramente, pela regra de L'Hôpital

$$e^{-\frac{3\rho^2}{4}}\rho^{m+2} \longrightarrow 0, \quad \text{se } \rho \to +\infty.$$

Então $e^{-\frac{3\rho^2}{4}}\rho^{m+2}$ é limitado, isto é, existe $C > 0$ tal que $e^{-\frac{3\rho^2}{4}}\rho^m \leq \frac{C}{\rho^2}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{3\rho^2}{4}}\rho^m d\rho &= \int_0^1 e^{-\frac{3\rho^2}{4}}\rho^m d\rho + \int_1^{+\infty} e^{-\frac{3\rho^2}{4}}\rho^m d\rho \leq \tilde{C} + \int_1^{+\infty}\frac{C}{\rho^2}d\rho \\ &= \tilde{C} + \left(-\frac{C}{\rho}|_1^{+\infty}\right) = \tilde{C} + C < \infty, \end{aligned}$$

como queríamos.

Pela afirmação 2, a desigualdade do valor médio nos fornece

$$|v(x+\tau^{-\frac{1}{2}}x',t) - v(x,t)| \leq K|(\tau^{-\frac{1}{2}}x',0)| = K\tau^{-\frac{1}{2}}|x'|.$$

Disso e da afirmação 1 segue que

$$\begin{aligned} |I_\tau(x,t)| &\leq \pi^{-\frac{m}{2}}\int_{\mathbb{R}^m}\left|e^{-[Z_x(x,t)x']^2}\right|\left|v(x+\tau^{-\frac{1}{2}}x',t) - v(x,t)\right|dx' \\ &\leq \pi^{-\frac{m}{2}}\int_{\mathbb{R}^m} e^{-\frac{3}{4}|x'|^2}K\tau^{-\frac{1}{2}}|x'|dx' = C\tau^{-\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}^m} e^{-\frac{3}{4}|x'|^2}|x'|dx' = C'\tau^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

onde $C' = C\int_{\mathbb{R}^m} e^{-\frac{3}{4}|x'|^2}|x'|dx' < \infty$. Logo, quando $\tau \to \infty$, temos que $|I_\tau(x,t)| \longrightarrow 0$ uniformemente em $\mathbb{R}^m \times \{|t| \leq R\}$. Agora estimaremos J_τ.

Afirmação 4: $\left|e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x+\tau^{-\frac{1}{2}}x',t)]^2} - e^{-[Z_x(x,t)x']^2}\right| \leq 2e^{-\frac{3|x'|^2}{4}}$.

De fato, como $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e vale (4.5) segue da desigualdade do valor médio que

$$\left|\phi(x+\tau^{-\frac{1}{2}}x',t) - \phi(x,t)\right| \leq \frac{1}{2}|(\tau^{-\frac{1}{2}}x',0)| = \frac{1}{2}\tau^{-\frac{1}{2}}|x'|. \tag{4.13}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left|e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x+\tau^{-\frac{1}{2}}x',t)]^2} - e^{-[Z_x(x,t)x']^2}\right| &\leq \left|e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x+\tau^{-\frac{1}{2}}x',t)]^2}\right| + \left|e^{-[Z_x(x,t)x']^2}\right| \\ &= e^{\Re(-\tau[Z(x,t)-Z(x+\tau^{-\frac{1}{2}}x',t)]^2)} + e^{-[Z_x(x,t)x']^2} \\ &= e^{\tau|\phi(x,t)-\phi(x+\tau^{-\frac{1}{2}}x',t)|^2-|x'|^2} + e^{-[Z_x(x,t)x']^2} \\ &\leq e^{\frac{1}{4}|x'|^2-|x'|^2} + e^{-\frac{3}{4}|x'|^2} \\ &= e^{-\frac{3}{4}|x'|^2} + e^{-\frac{3}{4}|x'|^2} = 2e^{-\frac{3|x'|^2}{4}}. \end{aligned}$$

Agora, como $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m \times \{|t| \leq R\})$, temos que $|v(x,t)| \leq \tilde{C}$, para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^m \times \{|t| \leq R\}$ onde $\tilde{C} = \max |v(x,t)|$. Juntando isto à afirmação 4, vem que

$$\begin{aligned}
|J_\tau(x,t)| &\leq \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} \left| e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x+\tau^{-\frac{1}{2}}x',t)]^2} - e^{-[Z_x(x,t)x']^2} \right| |v(x+\tau^{-\frac{1}{2}}x',t)| dx' \\
&\leq \pi^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} \left| e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x+\tau^{-\frac{1}{2}}x',t)]^2} - e^{-[Z_x(x,t)x']^2} \right| \tilde{C} dx' \\
&\leq C' \int_{\mathbb{R}^m} \left| e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x+\tau^{-\frac{1}{2}}x',t)]^2} - e^{-[Z_x(x,t)x']^2} \right| dx' \\
&= C' \int_{|x'|<K} \left| e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x+\tau^{-\frac{1}{2}}x',t)]^2} - e^{-[Z_x(x,t)x']^2} \right| dx' \\
&+ C' \int_{|x'|\geq K} \left| e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x+\tau^{-\frac{1}{2}}x',t)]^2} - e^{-[Z_x(x,t)x']^2} \right| dx' \\
&= C' \int_{|x'|<K} \left| e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x+\tau^{-\frac{1}{2}}x',t)]^2} - e^{-[Z_x(x,t)x']^2} \right| dx' + 2C' \int_{|x'|\geq K} e^{-\frac{3|x'|^2}{4}} dx'
\end{aligned}$$

Analisemos primeiramente a integral sobre $\{x';\ |x'| \geq K\}$. Como $|x'| \geq K$, então

$$-\frac{3}{4}|x'|^2 = -\frac{1}{4}|x'|^2 - \frac{1}{2}|x'|^2 \leq -\frac{1}{4}|x'|^2 - \frac{1}{2}K^2.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
2C' \int_{|x'|\geq K} e^{-\frac{3|x'|^2}{4}} dx' &\leq 2C' \int_{|x'|\geq K} e^{-\frac{1}{4}|x'|^2 - \frac{1}{2}K^2} dx' \\
&= 2C' e^{-\frac{1}{2}K^2} \int_{|x'|\geq K} e^{-\frac{1}{4}|x'|^2} dx' = C e^{-\frac{1}{2}K^2},
\end{aligned}$$

onde $C = 2C' \int_{|x'|\geq K} e^{-\frac{1}{4}|x'|^2} dx' \leq 2C' \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\frac{1}{4}|x'|^2} dx' < \infty$. Logo,

$$|J_\tau(x,t)| \leq C' \int_{|x'|<K} \left| e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x+\tau^{-\frac{1}{2}}x',t)]^2} - e^{-[Z_x(x,t)x']^2} \right| dx' + C e^{-\frac{1}{2}K^2}. \tag{4.14}$$

Então, para mostrar que $|J_\tau(x,t)| \longrightarrow 0$ uniformemente quando $\tau \to \infty$, precisamos estimar a integral sobre $\{x';\ |x'| < K\}$ para qualquer K grande. Observe que, por definição o quociente de Leibniz $\zeta_1^\tau = \frac{Z(x,t)-Z(x+\tau^{-\frac{1}{2}}x',t)}{\tau^{-\frac{1}{2}}}$ converge à $\zeta_2 = -Z_x(x,t)x'$ em x, quando $\tau \to \infty$ e para $|x'| \leq K$ e $|t| \leq R$ tal convergência é uniforme. Agora, tendo em vista (4.5) e (4.13) , obtemos que

$$\Re[\zeta_2]^2 = |x'|^2 - |\phi_x(x,t)x'|^2 \geq |x'|^2 - \frac{1}{4}|x'|^2 \geq 0$$

e,

$$\Re[\zeta_1^\tau]^2 = -\tau|\phi(x,t) - \phi(x+\tau^{-\frac{1}{2}}x',t)|^2 + |x'|^2 \geq -\frac{1}{4}|x'|^2 + |x'|^2 \geq 0.$$

Afirmação 5: $f(\zeta) = e^{-\zeta}$ é uma função Lipschitz sobre $\{\zeta;\ \Re\zeta \geq 0\}$.

De fato, observe que

$$|f'(\zeta)| = |-e^{-\zeta}| = |e^{-\zeta}| = e^{-\Re\zeta} = \frac{1}{e^{\Re\zeta}} \leq 1, \text{ quando } \Re\zeta \geq 0.$$

Portanto, dados $\zeta_1, \zeta_2 \in \{\zeta;\ \Re\zeta \geq 0\}$, como a função exponencial é diferenciável, temos pela desigualdade do valor médio que

$$|e^{-\zeta_1} - e^{-\zeta_2}| \leq \sup_{\xi\in[\zeta_1,\zeta_2]} |e^{-\xi}||\zeta_1 - \zeta_2| \leq |\zeta_1 - \zeta_2|,$$

o que conclui a afirmação.

Ainda, como

$$\lim_{\tau\to\infty} \zeta_1^\tau = \lim_{\tau\to\infty} \frac{Z(x,t) - Z(x + \tau^{-\frac{1}{2}}x', t)}{\tau^{-\frac{1}{2}}} = -Z_x(x,t)x' = \zeta_2,$$

obtemos que

$$\lim_{\tau\to\infty} \frac{Z_j(x,t) - Z_j(x + \tau^{-\frac{1}{2}}x', t)}{\tau^{-\frac{1}{2}}} = -Z_{jx}(x,t)x'$$

para todo $j = 1, \ldots, m$. Logo, $\lim_{\tau\to\infty}[\zeta_1^\tau]^2 = [\zeta_2]^2$, isto é, para todo $\epsilon > 0$, existe $\tau_0 > 0$ tal que, para todo $\tau > \tau_0 \Rightarrow |[\zeta_1^\tau]^2 - [\zeta_2]^2| < \epsilon$. Em particular, para $\epsilon = C\tau^{-\frac{1}{2}}$, onde $C > 0$, existe $\tilde{\tau}_0 > 0$ tal que, para todo $\tau > \tilde{\tau}_0$ temos que

$$|[\zeta_1^\tau]^2 - [\zeta_2]^2| < C\tau^{-\frac{1}{2}}.$$

Disso e do fato de $e^{-\zeta}$ ser Lipschitz sobre $\{\zeta;\ \Re\zeta \geq 0\}$ vem que

$$|e^{-[\zeta_1^\tau]^2} - e^{-[\zeta_2]^2}| \leq |-[\zeta_1^\tau]^2 + [\zeta_2]^2| \leq C\tau^{-\frac{1}{2}},$$

ou seja,

$$\left| e^{-\tau[Z(x,t) - Z(x+\tau^{-\frac{1}{2}}x',t)]^2} - e^{-[Z_x(x,t)x']^2} \right| \leq C\tau^{-\frac{1}{2}}.$$

Combinando a desigualdade acima com a desigualdade (4.14) segue que

$$|J_\tau(x,t)| \leq C' \int_{|x'|<K} C\tau^{-\frac{1}{2}} dx' + Ce^{-\frac{1}{2}K^2} = C\tau^{-\frac{1}{2}} \int_{|x'|<K} dx' + Ce^{-\frac{1}{2}K^2} \leq^{(*)} C\tau^{-\frac{1}{2}} K^m + Ce^{-\frac{1}{2}K^2}.$$

Portanto, $|J_\tau(x,t)| \longrightarrow 0$ uniformemente em $\mathbb{R}^m \times \{|t| \leq R\}$, quando $\tau, K \to \infty$. Assim, $|G_\tau u(x,t) - h(x)u(x,t)| = |I_\tau + J_\tau| \leq |I_\tau| + |J_\tau| \longrightarrow 0$ uniformemente em $\mathbb{R}^m \times \{|t| \leq R\}$, quando $\tau \to \infty$ e $G_\tau u(x,t) \longrightarrow u(x,t)$ para $|x| < \frac{R}{2}$.

Verificação da desigualdade $(*)$: Seja B_d uma bola quadrada que contém a bola $B(0, K)$, assim,

$$\int_{|x'|<K} dx' = \mu(B(0,K)) \leq \mu(B_d(0,\tilde{K})) = (2\tilde{K})^m = 2^m C^m K^m = CK^m.$$

4.2.3 A Estimativa do Resto e a Convergência em $\mathcal{D}'$

Para finalizar a primeira parte do teorema, iremos estimar o resto $R_\tau = G_\tau - E_\tau$ por meio do Teorema de Stokes. O fato que u satisfaz o sistema (4.7) não foi usado para provar $G_\tau u \longrightarrow hu$, mas agora este fato será essencial. Seja $(x,t) \in R^N$ fixado e considere a m-forma em $\mathbb{R}^N$ dada por

$$\omega(x',t') = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2} u(x',t')h(x')dZ(x',t') = v(x',t')dZ(x',t'),$$

onde $dZ = dZ_1 \wedge \ldots \wedge dZ_m$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
G_\tau u(x,t) &= \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t)]^2} u(x',t)h(x') \det Z_x(x',t)dx' \\
&= \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m\times\{t\}} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2} u(x',t')h(x') \det Z_x(x',t')dx' \\
&= \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m\times\{t\}} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2} u(x',t')h(x')dZ(x',t') = \int_{\mathbb{R}^m\times\{t\}} \omega,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
E_\tau u(x,t) &= \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',0)]^2} u(x',0)h(x') \det Z_x(x',0)dx' \\
&= \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m\times\{0\}} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2} u(x',t')h(x') \det Z_x(x',t')dx' \\
&= \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m\times\{0\}} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2} u(x',t')h(x')dZ(x',t') = \int_{\mathbb{R}^m\times\{0\}} \omega,
\end{aligned}$$

pois o pull-back[1] de $dZ(x',t')$ para $\{t = c = \text{constante}\}$ é dado por $\det Z_x(x',c)dx'_1 \wedge \ldots \wedge dx'_m$. Lembrando que $h(x') = 0$ para $|x'| \geq R$, temos que $\omega(x',t') = 0$ para $|x'| \geq R$. Assim, pelo Teorema de Stokes

$$G_\tau(x,t) - E_\tau u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^m\times\{t\}} \omega - \int_{\mathbb{R}^m\times\{0\}} \omega = \int_{\partial(\mathbb{R}^m\times[0,t])} \omega = \int_{\mathbb{R}^m\times[0,t]} d\omega,$$

onde $[0,t]$ denota o segmento que liga a origem de $\mathbb{R}^n$ ao ponto $t \in \mathbb{R}^n$. Para calcular $d\omega$ faremos uso da equação (4.6). Como $\omega = vdZ$, então $d\omega = d(vdZ) = dv \wedge dZ$, mas de (4.6)

[1] O conceito de pull-back de uma forma de grau r se encontra em [13], página 403.

temos que

$$dv = \sum_{j=1}^{n} L_j(v)dt_j + \sum_{k=1}^{m} M_k(v)dZ_k.$$

Logo,

$$\begin{aligned} d\omega &= \left(\sum_{j=1}^{n} L_j(v)dt_j + \sum_{k=1}^{m} M_k(v)dZ_k\right) \wedge dZ \\ &= \sum_{j=1}^{n} L_j(v)dt_j \wedge dZ + \sum_{k=1}^{m} M_k(v)dZ_k \wedge dZ \\ &= \sum_{j=1}^{n} L_j(v)dt_j \wedge dZ. \end{aligned}$$

Contudo, usando o fato que $L_j(e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2}) = 0$ e a hipótese de que $L_j u = 0$, para todo $j = 1, \ldots, m$ segue que

$$L_j v(x',t') = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2} u(x',t') L_j(h(x')).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} R_\tau u(x,t) &= G_\tau u(x,t) - E_\tau u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^m \times [0,t]} d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}^m \times [0,t]} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2} u(x',t') L_j(h(x')) dt_j \wedge dZ \\ &= \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^m \times [0,t]} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2} u(x',t') L_j(h(x')) dt_j \wedge dZ. \quad (4.15) \end{aligned}$$

Assumamos agora que $|x| \leq \frac{R}{4}$ e $|t| \leq T$, onde T ainda será escolhido. Desejamos estimar a exponencial no integrando de (4.15). Assim,

$$\left| e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2} \right| = e^{\Re(-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2)} = e^{\tau(|\phi(x,t)-\phi(x',t')|^2 - |x-x'|^2)}. \quad (4.16)$$

Considere as aplicações $\xi^1 : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ e $\xi^2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dadas por $\xi^1(x) = \phi(x,t)$ e $\xi^2(t) = \phi(x',t)$. É claro que tais aplicações estão bem definidas e são suaves. Além disso, $\|\xi^1_x(x)\| = \|\phi_x(x,t)\| < \frac{1}{2}$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$ e como $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$ temos que $\phi_t \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$. Assim, existe $C > 0$ tal que $C = \max\{\|\phi_t(x,t)\|\}$, donde $\|\xi^2_t(t)\| = \|\phi_t(x,t)\| \leq C$. Então, aplicando a desigualdade do valor médio para as funções ξ^1 e ξ^2, obtemos

$$|\phi(x,t) - \phi(x',t)| = |\xi^1(x) - \xi^1(x')| \leq \frac{1}{2}|x - x'|$$

e
$$|\phi(x',t)-\phi(x',t')| = |\xi^2(t)-\xi^2(t')| \le C|t-t'|.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|\phi(x,t)-\phi(x',t')| &\le |\phi(x,t)-\phi(x',t)| + |\phi(x',t)-\phi(x',t')| \\
&\le \frac{1}{2}|x-x'| + C|t-t'|. \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

Mas, note que $t' \in [0,t]$ implica que $t' = (1-\alpha)0 + \alpha t = \alpha t$, com $\alpha \in [0,1]$. Então,

$$C|t-t'| = C|t-\alpha t| = C(1-\alpha)|t| \le C|t| \le CT.$$

Voltando em (4.17) vem que

$$|\phi(x,t)-\phi(x',t')| \le \frac{1}{2}|x-x'| + CT,$$

e elevando ambos os membros ao quadrado

$$|\phi(x,t)-\phi(x',t')|^2 \le \frac{1}{4}|x-x'|^2 + C^2T^2 \le |x-x'|^2 - \frac{1}{2}|x-x'|^2 + C^2T^2,$$

donde
$$|\phi(x,t)-\phi(x',t')|^2 - |x-x'|^2 \le -\frac{1}{2}|x-x'|^2 + C^2T^2.$$

Logo, (4.16) fica
$$\left| e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2} \right| \le e^{\tau\left(C^2T^2 - \frac{|x-x'|^2}{2}\right)}.$$

Agora, sabemos que $h(x') = 1$ para $|x'| \le \frac{R}{2}$ e $h(x') = 0$ para $|x'| \ge R$, então sob essas mesmas condições $L_j(h(x')) = 0$. Assim, a região de integração da expressão R_τ dada em (4.15) se reduz à $\{\frac{R}{2} \le |x'| \le R\} \times [0,t]$ e

$$\begin{aligned}
|R_\tau u(x,t)| &\le \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \sum_{j=1}^{n} \int_{\{\frac{R}{2}\le|x'|\le R\}\times[0,t]} \left| e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2} \right| |u(x',t')L_j(h(x'))| dt_j \wedge dZ \\
&\le \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \sum_{j=1}^{n} \int_{\{\frac{R}{2}\le|x'|\le R\}\times[0,t]} e^{\tau\left(C^2T^2 - \frac{|x-x'|^2}{2}\right)} |u(x',t')L_j(h(x'))| dt_j \wedge dZ.
\end{aligned}$$

Com isso, observe que $|x-x'| = |x'-x| \ge ||x'|-|x|| \ge |x'|-|x| \ge \frac{R}{2} - \frac{R}{4} = \frac{R}{4}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
|R_\tau u(x,t)| &\le e^{\tau\left(C^2T^2 - \frac{R^2}{32}\right)} \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \sum_{j=1}^{n} \int_{\{\frac{R}{2}\le|x'|\le R\}\times[0,t]} |u(x',t')L_j(h(x'))| dt_j \wedge dZ \\
&\le e^{\tau\left(C^2T^2 - \frac{R^2}{32}\right)} \tau^{\frac{m}{2}} \tilde{C},
\end{aligned}$$

onde

$$\tilde{C} = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \sum_{j=1}^{n} \int_{\{\frac{R}{2}\leq|x'|\leq R\}\times[0,t]} |u(x',t')L_j(h(x'))| \det Z_x(x',t')dt_j dx'_1 \ldots dx'_m < \infty.$$

Escolhendo $T \leq \left(\frac{R^2}{64C^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, concluimos que

$$|R_\tau u(x,t)| \leq \tilde{C}e^{-\tau\frac{R^2}{64}}\tau^{\frac{m}{2}},$$

e fazendo $\tau \to \infty$, pela regra de L'Hôpital segue que $|R_\tau u(x,t)| \longrightarrow 0$ uniformemente sobre o conjunto $U = \{|x| < \frac{R}{4}\} \times \{|t| < T\}$. Resumindo, encontramos uma vizinhança U da origem tal que para qualquer solução $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ de (4.7), $E_\tau u \longrightarrow u$ uniformemente em U, o que prova a primeira parte do teorema para distribuições regulares.

4.2.4 As Fórmulas de Comutação e a Convergência na Topologia de C^k, $1 \leq k \leq \infty$

A terceira etapa é provar o segundo item do teorema para $k = \infty$ (os casos $1 \leq k < \infty$ serão provados mais tarde). A ferramenta principal será o uso das fórmulas de comutação dos campos vetoriais M_k com G_τ.

Lema 4.16. *Sejam v e w funções de classe C^1 tais que uma delas têm suporte compacto. Então,*

$$\int_{\mathbb{R}^m\times\{t\}} wM_k v dZ = -\int_{\mathbb{R}^m\times\{t\}} vM_k w dZ.$$

Demonstração. Considere a m-forma exata de classe C^1 e de suporte compacto definida por

$$\begin{aligned} \omega_k &= d(wv dZ_1 \wedge \ldots \wedge d\hat{Z}_k \wedge \ldots \wedge dZ_m) \\ &= d(wv) \wedge dZ_1 \wedge \ldots \wedge d\hat{Z}_k \wedge \ldots \wedge dZ_m, \end{aligned}$$

onde o chapéu indica que o fator dZ_k foi omitido.

Como o pull-back de ω_k em $\{t\} \times \mathbb{R}^m$ é exato, pois ω_k é exata, segue do Teorema de Stokes que

$$\int_{\{t\}\times\mathbb{R}^m} \omega_k = 0. \tag{4.18}$$

Usando (4.6) para calcular $d(wv)$, obtemos

$$d(wv) = \sum_{j=1}^{n} L_j(wv)dt_j + \sum_{k=1}^{m} M_k(wv)dZ_k.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\omega_k &= \sum_{j=1}^{n} L_j(wv)dt_j \wedge dZ_1 \wedge \ldots \wedge d\hat{Z}_k \wedge \ldots \wedge dZ_m \\
&+ \sum_{k=1}^{m} M_k(wv)dZ_k \wedge dZ_1 \wedge \ldots \wedge d\hat{Z}_k \wedge \ldots \wedge dZ_m \\
&= \sum_{j=1}^{n} L_j(wv)dt_j \wedge dZ_1 \wedge \ldots \wedge d\hat{Z}_k \wedge \ldots \wedge dZ_m \\
&+ M_k(wv)dZ_k \wedge dZ_1 \wedge \ldots \wedge d\hat{Z}_k \wedge \ldots \wedge dZ_m \\
&= (-1)^{k-1} M_k(wv)dZ + \sum_{j=1}^{n} L_j(wv)dt_j \wedge dZ_1 \wedge \ldots \wedge d\hat{Z}_k \wedge \ldots \wedge dZ_m.
\end{aligned}$$

Já que o pull-back dos termos que contêm o fator dt_j se anulam, temos que

$$\omega_k|_{\{t\}\times\mathbb{R}^m} = (-1)^{k-1}(wM_k(v) + vM_k(w))dZ_k|_{\{t\}\times\mathbb{R}^m}.$$

Disto em (4.18), vem que

$$\int_{\{t\}\times\mathbb{R}^m} (wM_k(v) + vM_k(w))dZ = 0$$

donde segue o desejado. □

Lema 4.17. *Para $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$ e $k = 1, \ldots, m$, valem as seguintes identidades*

$$\begin{aligned}
M_k G_\tau u(x,t) &- G_\tau M_k u(x,t) = [M_k, G_\tau]u(x,t) \\
&= \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t)]^2} u(x',t) M_k h(x') \det Z_x(x',t)dx'. \quad (4.19)
\end{aligned}$$

Demonstração. Consideremos os campos vetoriais

$$M_k(x,t,D_x) = \sum_{l=1}^{m} \mu_{kl}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_l} \ \text{ e } \ M_k(x',t,D_{x'}) = \sum_{l=1}^{m} \mu_{kl}(x',t)\frac{\partial}{\partial x'_l}$$

definidos sobre todo $\mathbb{R}^N$ e, respectivamente, caracterizados pelas relações

$$M_k(x,t,D_x)Z_j(x,t) = \delta_{jk} \ \text{ e } \ M_k(x',t,D_{x'})Z_j(x',t) = \delta_{jk},$$

para todo $k, j = 1, \ldots, m$. Logo,

$$\begin{aligned}
\delta_{jk} &= M_k(x,t,D_x)(Z_j(x,t) - Z_j(x',t)) \\
&= -M_k(x',t,D_{x'})(Z_j(x,t) - Z_j(x',t)).
\end{aligned}$$

Agora, seja $F(\zeta)$ uma função suave e consideremos a função $f : \mathbb{R}^{2m+n} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $f(x,x',t) = F(Z(x,t) - Z(x',t))$. Note que, $f = F \circ G$, onde $G : \mathbb{R}^{2m+n} \longrightarrow \mathbb{C}^m$ é dada por $G(x,x',t) = (Z_1(x,t) - Z_1(x',t), \ldots, Z_m(x,t) - Z_m(x',t))$. Assim, pela regra da cadeia temos que

$$\frac{\partial f}{\partial x_l}(x,x',t) = \frac{\partial (F\circ G)}{\partial x_l}(x,x',t) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial \zeta_j}(\zeta)\frac{\partial G_j}{\partial x_l}(x,x',t) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial \zeta_j}(\zeta)\frac{\partial (Z_j(x,t) - Z_j(x',t))}{\partial x_l}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
M_k(x,t,D_x)f(x,x',t) &= \sum_{l=1}^{m} \mu_{kl}(x,t)\frac{\partial f}{\partial x_l}(x,x',t) \\
&= \sum_{l=1}^{m} \mu_{kl}(x,t)\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial \zeta_j}(\zeta)\frac{\partial (Z_j(x,t) - Z_j(x',t))}{\partial x_l} \\
&= -\sum_{l=1}^{m} \mu_{kl}(x,t)\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial \zeta_j}(\zeta)\frac{\partial (Z_j(x,t) - Z_j(x',t))}{\partial x'_l} \\
&= -\sum_{l=1}^{m} \mu_{kl}(x,t)\frac{\partial f}{\partial x'_l}(x,x',t) = -M_k(x',t,D_{x'})f(x,x',t).
\end{aligned}$$

Aplicando isso a função $F(\zeta) = e^{-\tau[\zeta]^2}$, obtemos que

$$M_k(x,t,D_x)e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t)]^2} = -M_k(x',t,D_{x'})e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t)]^2}. \tag{4.20}$$

Logo, diferenciando sob o sinal de integral, pela equação (4.20) e usando o fato que o pull-back para qualquer $t' =$ constante da m-forma $dZ_1 \wedge \ldots \wedge dZ_m$ é dado por $\det Z_x(x',t)dx'$, temos que

$$\begin{aligned}
M_kG_\tau u(x,t) &= \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} M_k\left(e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t)]^2}\right) u(x',t)h(x')\det Z_x(x',t)dx' \\
&= -\left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} M_k(x',t,D_{x'})\left(e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t)]^2}\right) u(x',t)h(x')\det Z_x(x',t)dx' \\
&= -\left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} M_k(x',t,D_{x'})\left(e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t)]^2}\right) u(x',t)h(x')dZ(x',t).
\end{aligned}$$

Agora, usando o Lema 4.16 com $w = e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t)]^2}$ e $v = u(x',t)h(x')$, segue que

$$\begin{aligned}
M_kG_\tau u(x,t) &= \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t)]^2} M_k(u(x',t)h(x'))dZ(x',t) \\
&= \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t)]^2} (M_ku(x',t)h(x') + u(x',t)M_kh(x'))dZ(x',t) \\
&= \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t)]^2} (M_ku(x',t)h(x') + u(x',t)M_kh(x'))\det Z_x(x',t)dx'.
\end{aligned}$$

Mas,

$$G_\tau M_k u(x,t) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t)]^2} M_k u(x',t) h(x') \det Z_x(x',t) dx'.$$

Portanto,

$$M_k G_\tau u(x,t) - G_\tau M_k u(x,t) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t)]^2} u(x',t) M_k h(x') \det Z_x(x',t) dx'.$$

□

Nosso próximo passo será provar as fórmulas de comutação dos campos vetoriais L_j com G_τ. Antes disso, escrevamos

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk} \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

onde $\lambda_{jk} = -i \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial \phi_l}{\partial t_j} \mu_{lk} \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ e provemos o seguinte lema técnico:

Lema 4.18.

$$\frac{\partial \det Z_x}{\partial t_j} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial(\lambda_{jk} \det Z_x)}{\partial x_k} = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{4.21}$$

Demonstração. Como para cada $j = 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial \det Z_x}{\partial t_j} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial(\lambda_{jk} \det Z_x)}{\partial x_k} \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^N),$$

temos que, se

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\partial \det Z_x}{\partial t_j} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial(\lambda_{jk} \det Z_x)}{\partial x_k} \right) v dx dt = 0,$$

para todo $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, então

$$\frac{\partial \det Z_x}{\partial t_j} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial(\lambda_{jk} \det Z_x)}{\partial x_k} = 0, \text{ q.s. em } \mathbb{R}^N.$$

Assim, seja $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ arbitrário e considere a forma

$$\begin{aligned}
\omega_j &= d(v dZ \wedge dt_1 \wedge \ldots \wedge \hat{dt_j} \wedge \ldots \wedge dt_n) \\
&= dv \wedge dZ \wedge dt_1 \wedge \ldots \wedge \hat{dt_j} \wedge \ldots \wedge dt_n \\
&= \sum_{\tilde{j}=1}^{n} L_{\tilde{j}} v dt_{\tilde{j}} \wedge dZ \wedge dt_1 \wedge \ldots \wedge \hat{dt_j} \wedge \ldots \wedge dt_n \\
&= L_j v dt_j \wedge dZ \wedge dt_1 \wedge \ldots \wedge \hat{dt_j} \wedge \ldots \wedge dt_n \\
&= (-1)^{m+j-1} L_j v dZ \wedge dt.
\end{aligned}$$

Como v tem suporte compacto temos que ω_j tem suporte compacto. Além disso, ω_j é uma forma exata pois $d\omega_j = 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
0 = \int_{\mathbb{R}^N} \omega_j &= \int_{\mathbb{R}^N} L_j v dZ dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} L_j v \det Z_x dx dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\partial v}{\partial t_j} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk} \frac{\partial v}{\partial x_k} \right) \det Z_x dx dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial v}{\partial t_j} \det Z_x dx dt + \sum_{k=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^N} \lambda_{jk} \det Z_x \frac{\partial v}{\partial x_k} dx dt \\
&= -\int_{\mathbb{R}^N} v \frac{\partial \det Z_x}{\partial t_j} dx dt - \sum_{k=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^N} v \frac{\partial (\lambda_{jk} \det Z_x)}{\partial x_k} dx dt.
\end{aligned}$$

Assim,

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} v \left(\frac{\partial \det Z_x}{\partial t_j} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial (\lambda_{jk} \det Z_x)}{\partial x_k} \right) dx dt,$$

e pela arbitrariedade de v segue o desejado. □

Lema 4.19. *Para $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$ e $j = 1, \ldots, n$ valem as seguintes identidades*

$$\begin{aligned}
L_j G_\tau u(x,t) &- G_\tau L_j u(x,t) = [L_j, G_\tau] u(x,t) \\
&= \left(\frac{\tau}{\pi} \right)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau [Z(x,t) - Z(x',t)]^2} u(x',t) L_j h(x') \det Z_x(x',t) dx'. \quad (4.22)
\end{aligned}$$

Demonstração. Seja $\tilde{g}(\zeta, t)$ uma função suave sobre $\mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^n$ e considere $g : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por $g(x,t) = \tilde{g}(Z(x,t),t)$. Veja que $g = \tilde{g} \circ h$, onde $h : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^n$ dada por $h(x,t) = (Z_1(x,t), \ldots, Z_m(x,t), t_1, \ldots, t_n)$ é uma função suave. Então, para $j = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned}
L_j g(x,t) &= L_j (\tilde{g} \circ h)(x,t) = \frac{\partial (\tilde{g} \circ h)}{\partial t_j}(x,t) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk} \frac{\partial (\tilde{g} \circ h)}{\partial x_k}(x,t) \\
&= \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \zeta_l}(Z(x,t),t) \frac{\partial Z_l}{\partial t_j}(x,t) + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t_l}(Z(x,t),t) \frac{\partial t_l}{\partial t_j}(x,t) \\
&+ \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk} \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \zeta_l}(Z(x,t),t) \frac{\partial Z_l}{\partial x_k}(x,t) \\
&= \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t_j}(Z(x,t),t) + \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \zeta_l}(Z(x,t),t) \left(\frac{\partial Z_l}{\partial t_j} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_{jk} \frac{\partial Z_l}{\partial x_k} \right)(x,t) \\
&= \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t_j}(Z(x,t),t) + \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \zeta_l}(Z(x,t),t) L_j(Z_l)(x,t) = \frac{\partial \tilde{g}}{\partial t_j}(Z(x,t),t).
\end{aligned}$$

Assim, escrevamos

$$G_\tau u(x,t) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \tilde{G}_\tau u(Z(x,t),t),$$

onde

$$\tilde{G}_\tau u(\zeta,t) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[\zeta - Z(x',t)]^2} u(x',t) h(x') \det Z_x(x',t) dx'. \tag{4.23}$$

Portanto,

$$L_j G_\tau u(x,t) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{\partial \tilde{G}_\tau u}{\partial t_j}(Z(x,t),t).$$

Para calcular $\frac{\partial \tilde{G}_\tau u}{\partial t_j}(\zeta,t)$, por simplicidade, denotemos $e_\tau(\zeta,x',t) = e^{-\tau[\zeta - Z(x',t)]^2}$ e derivando (4.23) com respeito a t_j sob o sinal de integral, vem que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(e_\tau uh \det Z_x)}{\partial t_j} &= \frac{\partial(e_\tau uh)}{\partial t_j} \det Z_x + \frac{\partial \det Z_x}{\partial t_j} e_\tau uh \\
&= \det Z_x \left\{ \frac{\partial(e_\tau uh)}{\partial t_j} + \sum_{k=1}^m \lambda_{jk} \frac{\partial(e_\tau uh)}{\partial x_k} \right\} - \det Z_x \sum_{k=1}^m \lambda_{jk} \frac{\partial(e_\tau uh)}{\partial x_k} \\
&+ e_\tau uh \frac{\partial \det Z_x}{\partial t_j} \\
&= \det Z_x L_j(e_\tau uh) - \det Z_x \sum_{k=1}^m \lambda_{jk} \frac{\partial(e_\tau uh)}{\partial x_k} + e_\tau uh \frac{\partial \det Z_x}{\partial t_j}.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\det Z_x L_j(e_\tau uh) &= \det Z_x e_\tau L_j(uh) + \det Z_x uh L_j(e_\tau) \\
&= \det Z_x e_\tau h L_j(u) + \det Z_x e_\tau u L_j(h),
\end{aligned}$$

pois $L_j(e_\tau) = 0$. Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{G}_\tau u}{\partial t_j}(\zeta,t) &= \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial(e_\tau uh \det Z_x)}{\partial t_j} dx' \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \det Z_x e_\tau h L_j(u) dx' + \int_{\mathbb{R}^m} \det Z_x e_\tau u L_j(h) dx' \\
&- \int_{\mathbb{R}^m} \det Z_x \sum_{k=1}^m \lambda_{jk} \frac{\partial(e_\tau uh)}{\partial x_k} dx' + \int_{\mathbb{R}^m} e_\tau uh \frac{\partial \det Z_x}{\partial t_j} dx' \\
&= \tilde{G}_\tau L_j u(\zeta,t) + \int_{\mathbb{R}^m} \det Z_x e_\tau u L_j(h) dx' - \sum_{k=1}^m \int_{\mathbb{R}^m} \det Z_x \lambda_{jk} \frac{\partial(e_\tau uh)}{\partial x_k} dx' \\
&+ \int_{\mathbb{R}^m} e_\tau uh \frac{\partial \det Z_x}{\partial t_j} dx'.
\end{aligned}$$

Usando integração por partes e pela equação (4.21) segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{G}_\tau u}{\partial t_j}(\zeta, t) &= \tilde{G}_\tau L_j u(\zeta, t) + \int_{\mathbb{R}^m} \det Z_x e_\tau u L_j(h) dx' + \sum_{k=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial(\det Z_x \lambda_{jk})}{\partial x_k} e_\tau u h dx' \\
&+ \int_{\mathbb{R}^m} e_\tau u h \frac{\partial \det Z_x}{\partial t_j} dx' \\
&= \tilde{G}_\tau L_j u(\zeta, t) + \int_{\mathbb{R}^m} \det Z_x e_\tau u L_j(h) dx' \\
&+ \int_{\mathbb{R}^m} e_\tau u h \left(\frac{\partial \det Z_x}{\partial t_j} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial(\det Z_x \lambda_{jk})}{\partial x_k} \right) dx' \\
&= \tilde{G}_\tau L_j u(\zeta, t) + \int_{\mathbb{R}^m} \det Z_x e_\tau u L_j(h) dx'.
\end{aligned}$$

Quando $\zeta = Z(x, t)$, temos que

$$\frac{\partial \tilde{G}_\tau u}{\partial t_j}(Z(x,t), t) = \int_{R^m} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t)]^2} u(x', t) L_j h(x') \det Z_x(x', t) dx' + \tilde{G}_\tau L_j u(Z(x,t), t).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
L_j G_\tau u(x,t) - G_\tau L_j u(x,t) &= \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t)]^2} u(x', t) L_j h(x') \det Z_x(x', t) dx' \\
&+ \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \tilde{G}_\tau L_j u(Z(x,t), t) - \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \tilde{G}_\tau L_j u(Z(x,t), t) \\
&= \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t)]^2} u(x', t) L_j h(x') \det Z_x(x', t) dx'.
\end{aligned}$$

□

Assumamos, agora, que $u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ satisfaz $\mathcal{L}u = 0$. Desejamos provar que

$$E_\tau u(x,t) \longrightarrow u(x,t) \quad \text{em} \quad C^\infty(U).$$

Já provamos que $G_\tau u \longrightarrow hu$ uniformemente em $\{|t| \le T\} \times \mathbb{R}^m$. Como os campos $L_j's$ e $M_k's$ comutam entre si, isto é, $[L_j, M_k] = 0$ então $[L_j, M_k]u = 0$, o que implica, que $L_j M_k u = M_k L_j u = 0$ com $j = 1, \ldots, n$ e $k = 1, \ldots, m$. Logo, $M_k u$ satisfaz $\mathcal{L} M_k u = 0$ e, assim, $G_\tau M_k u \longrightarrow h M_k u$ uniformemente em $\{|t| \le T\} \times \mathbb{R}^m$. Observe que a expressão de $[M_k, G_\tau]u$ é quase idêntica à $G_\tau u$, a única diferença é que h foi substituído por $M_k h$, mas $M_k h$ ainda é suave de suporte compacto. Então, podemos concluir que $[M_k, G_\tau]u \longrightarrow (M_k h)u$ uniformemente em $\{|t| \le T\} \times \mathbb{R}^m$. Portanto,

$$M_k G_\tau u = G_\tau M_k u + [M_k, G_\tau]u \longrightarrow h M_k u + (M_k h) u$$

e, quando $h = 1$ temos que $M_k h = 0$, logo $M_k G_\tau u \longrightarrow M_k u$ uniformemente em U quando

$\tau \to \infty$. Analogamente, obtemos que $[L_j, G_\tau]u \longrightarrow (L_j h)u$ uniformemente em $\{|t| \leq T\} \times \mathbb{R}^m$ e, como a expresão de $G_\tau L_j u$ é quase idêntica a $G_\tau u$, com a diferença que u foi substituído por $L_j u$, temos que $G_\tau L_j u \longrightarrow hL_j u$ uniformemente em $\{|t| \leq T\} \times \mathbb{R}^m$. Portanto,

$$L_j G_\tau u = G_\tau L_j u + [L_j, G_\tau]u \longrightarrow hL_j u + (L_j h)u \tag{4.24}$$

e quando $h = 1$, $L_j G_\tau u \longrightarrow L_j u$ uniformemente em U quando $\tau \to \infty$.

Agora, como $L_{1p}, \ldots, L_{np}, M_{1p}, \ldots, M_{mp}$ geram $\mathbb{C}T_p\mathbb{R}^N$, para todo $p \in \mathbb{R}^N$, temos que qualquer derivada de primeira ordem D é escrita como

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_j L_j + \sum_{k=1}^{m} b_k M_k,$$

onde $a_j, b_k \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Assim,

$$DG_\tau u = \sum_{j=1}^{n} a_j L_j G_\tau u + \sum_{k=1}^{m} b_k M_k G_\tau u \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_j L_j u + \sum_{k=1}^{m} b_k M_k u = Du,$$

isto é, $DG_\tau u \longrightarrow Du$ uniformemente em U, o que nos mostra que $G_\tau u \longrightarrow u$ em $C^1(U)$. Agora mostremos que $G_\tau u \longrightarrow u$ em $C^2(U)$, isto é, que $D(DG_\tau u) \longrightarrow D(Du)$ uniformemente em U. Inicialmente observe que de (4.24), para todo $j, j' = 1, \ldots, n$ e $k, k' = 1, \ldots, m$

$$L_j L_{j'} G_\tau u = L_j[L_{j'}, G_\tau]u + L_j G_\tau L_{j'} u \longrightarrow (L_{j'}h)L_j u + (L_j L_{j'} h) + hL_j L_{j'} u + (L_j h)L_{j'} u$$

uniformemente em $\mathbb{R}^m \times \{t\}$. Logo, $L_j L_{j'} G_\tau u \longrightarrow L_j L_{j'} u$ uniformemente em U. Além disso, de (4.24)

$$L_j M_{k'} G_\tau u = L_j[M_{k'}, G_\tau]u + L_j G_\tau M_{k'} u \longrightarrow (M_{k'}h)L_j u + (L_j M_{k'} h) + hL_j M_{k'} u + (L_j h)M_{k'} u$$

uniformemente em $\mathbb{R}^m \times \{t\}$. Logo, $L_j M_{k'} G_\tau u \longrightarrow L_j M_{k'} u$ uniformemente em U. Então,

$$\begin{aligned} L_j DG_\tau u &= L_j \left(\sum_{j'=1}^{n} a_{j'} L_{j'} G_\tau u + \sum_{k'=1}^{m} b_{k'} M_{k'} G_\tau u \right) \\ &= \sum_{j'=1}^{n} \{(L_j a_{j'}) L_{j'} G_\tau u + a_{j'} L_j L_{j'} G_\tau u\} + \sum_{k'=1}^{m} \{(L_j b_{k'}) M_{k'} G_\tau u + b_{k'} L_j M_{k'} G_\tau u\} \end{aligned}$$

e fazendo $\tau \to \infty$ obtemos

$$L_j DG_\tau u \longrightarrow \sum_{j'=1}^{n} \{(L_j a_{j'}) L_{j'} u + a_{j'} L_j L_{j'} u\} + \sum_{k'=1}^{m} \{(L_j b_{k'}) M_{k'} u + b_{k'} L_j M_{k'} u\} = L_j Du,$$

uniformemente em U. Analogamente, mostra-se que $M_k DG_\tau u \longrightarrow M_k Du$ uniformemente em

U. Portanto,

$$D(DG_\tau u) = \sum_{j=1}^{n} a_j L_j DG_\tau u + \sum_{k=1}^{m} b_k M_k DG_\tau u \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_j L_j Du + \sum_{k=1}^{m} b_k M_k Du = D(Du),$$

uniformemente em U, como queríamos. Procedendo de maneira análoga para as demais derivadas de ordem superior podemos concluir que $G_\tau u \longrightarrow u$ em $C^\infty(U)$.

Para finalmente concluirmos que $E_\tau u \longrightarrow u$ em $C^\infty(U)$ resta verificarmos que

$$|R_\tau u(x,t)| \longrightarrow 0 \text{ em } C^\infty(U).$$

Para isto, faremos uso da fórmula do resto dada em (4.15) e de todos os cálculos feitos sobre esta, para concluir que $|R_\tau u(x,t)| \longrightarrow 0$. Então, fixado $l = 1, \ldots, m$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial R_\tau u}{\partial x_l}(x,t)\right| &= \left|\left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \sum_{j=1}^{n} \int_{\{\frac{R}{2} \le |x'| \le R\} \times [0,t]} \frac{\partial}{\partial x_l}(e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2}) u(x',t') L_j(h(x')) dt_j \wedge dZ\right| \\
&\le \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \sum_{j=1}^{n} \int_{\{\frac{R}{2} \le |x'| \le R\} \times [0,t]} |e^{-\tau[Z(x,t)-Z(x',t')]^2} (-\tau) 2[Z(x,t) - Z(x',t')] \\
&\quad \frac{\partial Z}{\partial x_l}(x,t) u(x',t') L_j(h(x'))| dt_j \wedge dZ.
\end{aligned}$$

Agora,

$$\left|\frac{\partial Z}{\partial x_l}(x,t)\right| = \left|\frac{\partial x}{\partial x_l} + i\frac{\partial \phi}{\partial x_l}(x,t)\right| \le 2, \quad \text{para todo } (x,t) \in \mathbb{R}^N.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial R_\tau u}{\partial x_l}(x,t)\right| &\le \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \sum_{j=1}^{n} \int_{\{\frac{R}{2} \le |x'| \le R\} \times [0,t]} e^{\tau\left(C^2T^2 - \frac{R^2}{32}\right)} \tau C |[Z(x,t) - Z(x',t')] u(x',t') L_j(h(x'))| \\
&\quad dt_j \wedge dZ \\
&= C e^{\tau\left(C^2T^2 - \frac{R^2}{32}\right)} \tau^{\frac{m}{2}+1} \sum_{j=1}^{n} \int_{\{\frac{R}{2} \le |x'| \le R\} \times [0,t]} |[Z(x,t) - Z(x',t')] u(x',t') L_j(h(x'))| \\
&\quad \det Z_x(x',t') dt_j dx'_1 \ldots dx'_m \\
&= C e^{\tau\left(C^2T^2 - \frac{R^2}{32}\right)} \tau^{\frac{m}{2}+1} \\
&\le C e^{-\tau \frac{R^2}{64}} \tau^{\frac{m}{2}+1},
\end{aligned}$$

desde que $T \le \left(\frac{R^2}{64C^2}\right)^{\frac{1}{2}}$. Portanto, fazendo $\tau \to \infty$, $\left|\frac{\partial R_\tau u}{\partial x_l}(x,t)\right| \longrightarrow 0$ uniformemente em U. Analogamente, para $j = 1, \ldots, n$ temos que $\left|\frac{\partial R_\tau u}{\partial t_j}(x,t)\right| \longrightarrow 0$ uniformemente em U. Logo, $|R_\tau u(x,t)| \longrightarrow 0$ em $C^1(U)$. O argumento pode ser iterado para derivadas de ordem superior e assim obtermos que $|R_\tau u(x,t)| \longrightarrow 0$ em $C^\infty(U)$.

Concluindo, temos que para qualquer $p \in B((0,0), M)$ escolhendo o conjunto W

como qualquer vizinhança fixada de $\overline{V}$ em $B((0,0),M)$ e sendo $U = \{|x| < \frac{R}{4}\} \times \{|t| < T\}$ temos que $p \in U \subset \overline{U} \subset \overline{V} \subset W \subset B((0,0),M) \subset \mathbb{R}^N$ e toda $u \in \mathcal{D}'(W)$, que satisfaz $\mathcal{L}u = 0$ em W, é o limite em $\mathcal{D}'(U)$ de uma sequência de soluções polinomiais $P_j(Z_1, \ldots, Z_m)$, isto é,

$$u = \lim_{j\to\infty} P_j \circ Z \quad \text{em } \mathcal{D}'(U)$$

e se $u \in C^k(W)$, a convergência vale na topologia de $C^k(U)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, \infty$.

4.3 O Teorema de Aproximação em Outros Espaços Funcionais

O objetivo desta seção é apenas enunciar o Teorema de Aproximação em espaços L^p e em espaços de Hölder. Para maiores detalhes de tais resultados recomendamos [3].

Teorema 4.20. *(Convergência em L^p) Seja $\mathcal{L}$ uma estrutura localmente integrável sobre Ω e assuma que $dZ_1, \ldots, dZ_m$ geram $\mathcal{L}^\perp$ em todo ponto de Ω. Então, para todo $z \in \Omega$, existem dois conjuntos abertos U e W, com $z \in U \subset \overline{U} \subset W \subset \Omega$, tais que para qualquer $u \in L^p_{loc}(W)$, $1 \leq p \leq \infty$, satisfazendo $\mathcal{L}u = 0$,*

$$E_\tau u(x,t) \longrightarrow u(x,t) \quad \textit{q.s em } U \textit{ quando } \tau \to \infty.$$

Se p for finito, isto é, $1 \leq p < \infty$,

$$E_\tau u(x,t) \longrightarrow u(x,t) \quad \textit{em } L^p(U) \textit{ quando } \tau \to \infty. \tag{4.25}$$

Em geral, a convergência dada em (4.25) é falsa para $p = \infty$, pois o limite uniforme de uma sequência de funções contínuas, tais como $E_\tau u(x,t)$, é contínuo.

Antes de enunciarmos o Teorema de Aproximação em espaços de Hölder, vejamos a seguinte definição:

Definição 4.21. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto, limitado e convexo. O espaço de Hölder $C^\alpha(\Omega)$ é definido como*

$$C^\alpha(\Omega) = \{u \in C^k(\overline{\Omega});\ \|u\|_\alpha < \infty\},$$

onde

$$\|u\|_\alpha = |u|_\alpha + |u|_0, \quad |u|_0 = \sup_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|,$$

$$|u|_\alpha = \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega}\\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

$$|u|_\alpha = \sum_{\sigma\leq k} |D^\sigma u|_{\alpha-k}, \quad k < \alpha \leq k+1,\ k \in \mathbb{Z}_+,\ u \in C^k(\Omega).$$

Teorema 4.22. *(Convergência em Espaços de Hölder) Seja $\mathcal{L}$ uma estrutura localmente integrável com integrais primeiras $Z_1, \ldots, Z_m$, definidas em uma vizinhança do fecho de $W =$*

$B_x \times B_t$, onde $B_x = \{|x| < R\}$ e $B_t = \{|t| < R\}$. Então existe uma vizinhaça convexa $U \subset \Omega$ da origem tal que para qualquer $u \in C^\beta(W)$, $\beta > 0$, satisfazendo $\mathcal{L}u = 0$ em uma vizinhança de $\overline{W}$ e qualquer $0 \leq \alpha < \beta$

$$E_\tau u(x,t) \longrightarrow u(x,t) \quad \textit{em } C^\alpha(U) \textit{ quando } \tau \to \infty.$$

Nas convergências dadas nos Teoremas 4.20 e 4.22 podemos substituir o operador E_τ por uma sequência conveniente de polinômios em Z, $P_l(Z_1, \ldots, Z_m)$.

O seguinte exemplo nos mostra que não é possível tomar $\alpha = \beta$ no Teorema 4.22.

Exemplo 4.23. Considere em $\mathbb{R}^2$, onde denotamos as coordenadas por (x,t), a estrutura localmente integrável $\mathcal{L}$ gerada por $\frac{\partial}{\partial t}$ com integral primeira $Z(x,t) = x$ e seja $0 < \beta \leq 1$. Tome uma função $u(x) \in C_0^\beta(\mathbb{R}^2)$ independente de t (assim, ela satisfaz $\mathcal{L}u = 0$) tal que $u(x) = |x|^\beta$ para $|x| \leq 1$. Se $w(x,t)$ é de classe C^1 em uma vizinhança da origem, temos para $0 < \epsilon < 1$ suficientemente pequeno, que

$$\begin{aligned}
|u - w|_\beta &= \sup_{\substack{x,y \in \mathbb{R}^2 \\ x \neq y}} \frac{|(u-w)(x) - (u-w)(y)|}{|x-y|^\beta} \geq \frac{|u(\epsilon) - w(\epsilon,0) - u(0) + w(0,0)|}{\epsilon^\beta} \\
&= \frac{|\epsilon^\beta - w(\epsilon,0) + w(0,0)|}{\epsilon^\beta} \geq 1 - \frac{|w(\epsilon,0) - w(0,0)|}{\epsilon^\beta} \geq 1 - \frac{c\epsilon}{\epsilon^\beta}.
\end{aligned}$$

Assim, escolhendo ϵ de forma que $\frac{c\epsilon}{\epsilon^\beta} \leq \frac{1}{2}$ temos que $|u - w|_\beta \geq \frac{1}{2}$, mostrando que u não pode ser aproximado por funções continuamente diferenciáveis na topologia de C^β.

4.4 Propagação de Zeros de Soluções Homogêneas

Nesta seção estamos interessados em estudar a aplicação do Teorema de Aproximação de Baouendi-Treves no estudo da propagação de zeros de soluções homogêneas.

Seja $\mathcal{L}$ uma estrutura localmente integrável e u uma solução de $\mathcal{L}u = 0$. Nosso objetivo é responder a seguinte pergunta: qual condição adicional a solução u deve satisfazer para que ela seja identicamente nula? A versão local dessa questão é: seja $p \in \Omega$ e uma vizinhança V de p. Sob quais condições podemos dizer que existe uma vizinhança $U \subset V$ contendo p, sobre a qual u é identicamente nula? Uma condição natural seria exigir que u se anulasse num subconjunto de V.

Sabemos que em uma vizinhança do ponto p, $\mathcal{L}u = 0$ é expressado por um sistema de equações sobredeterminado como em (4.7). Considerando uma estrutura localmente integrável gerada por um único campo vetorial, por exemplo, $L = A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y}$ definido sobre um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, com $|A|+|B| > 0$, é claro que a função constante satisfaz $Lu = 0$. Agora, se exigirmos que $u(p) = 0$, teremos excluído as constantes diferente de zero. Porém, esse argumento não é suficiente para a maioria dos campos vetoriais, assim como nos mostra os seguintes exemplos:

Exemplo 4.24. Seja $L = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ o campo vetorial de Cauchy-Riemann dado no exemplo 4.6. Como a função seno é holomorfa temos que $\frac{\partial \operatorname{sen}}{\partial \bar{z}} = 0$. Além disso, tomando $p = 0$, $\operatorname{sen}(p) = 0$, porém em qualquer vizinhança de p sabemos que a função seno não se anula.

Exemplo 4.25. Considerando $L = \frac{\partial}{\partial x}$ e $u(x, y) = y$, é claro que $Lu = 0$. Agora, tomando $p = 0$ temos que $u(p) = 0$, mas para qualquer vizinhança de p sabemos que a função u não se anula.

Assim, uma melhor condição seria impor que u fosse identicamente nula sobre a curva $\Sigma = \{(p_1, y)\}$, $p = (p_1, p_2)$. Então, suponha que u se anule em Σ que é uma subvariedade de codimensão 1. Com isso, temos que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(p_1, y) = 0 \end{cases} \implies u = 0$$

e

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = 0 \\ u(p_1, y) = 0 \end{cases} \implies u = 0.$$

Agora, para

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ u(1, y) = 0 \end{cases}$$

temos que $u(x, y) = -x + 1$ é uma solução não nula. Isso se deve ao fato de que $\frac{\partial}{\partial y}$ é tangente à Σ enquanto $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}$ são transversais a qualquer linha vertical. Logo, devemos nos atentar ao caso onde u se anula em uma subvariedade Σ, de codimensão 1, a qual L é transversal. Portanto, para uma estrutura localmente integrável $\mathcal{L}$ de posto n e co-posto m, definida sobre uma variedade de dimensão $N = n + m$, temos a seguinte definição:

Definição 4.26. *Seja $\Sigma \subset \Omega$ uma subvariedade mergulhada*[2]. *Dizemos que Σ é real maximal com respeito a $\mathcal{L}$ se:*

(i) a dimensão de Σ é igual a m;

(ii) para todo $p \in \Sigma$, qualquer seção não nula L de $\mathcal{L}$ definida em uma vizinhança de p é transversal à Σ em p.

Notação 4.27. Denotamos por $u|_\Sigma$ a restrição de u a Σ. Sabemos que, mesmo quando u é uma distribuição, o traço de u a Σ, $u|_\Sigma$, também está bem definido neste contexto.

O próximo teorema, o qual responde nossa pergunta inicial, é uma generalização da análise de zeros de uma função analítica estudada em cursos de funções de uma variável complexa.

[2]O conceito de subvariedade mergulhada encontra-se em [3], Capítulo 1 Seção 14.

Teorema 4.28. *Seja $\mathcal{L}$ uma estrutura localmente integrável sobre a variedade Ω e considere $\Sigma \subset \Omega$ uma subvariedade mergulhada real maximal com respeito a $\mathcal{L}$. Se $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ satisfizer as seguintes condições*

(i) $\mathcal{L}u = 0$ *em* Ω*;*

(ii) $u|_\Sigma = 0$*;*

então u é identicamente nula em uma vizinhança de Σ.

Demonstração. Como $\mathcal{L}$ é uma estrutura localmente integrável temos, pelo Corolário 3.11 da Seção 3.2, que existe um sistema de coordendas que se anula em p, a dizer

$$\{x_1, \ldots, x_m, t_1, \ldots, t_n\}$$

e que $\mathcal{L}^\perp$ é gerado em uma vizinhança da origem por $dZ_1, \ldots, dZ_m$, onde $Z_j(x,t) = x_j + i\phi_j(x,t)$, $\phi_j(0,0) = 0$ e $\left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x_k}(0,0)\right) = 0$, com $j,k = 1,\ldots,m$. Ainda, na origem, $\Re L_j = \frac{\partial}{\partial t_j}$ com $j = 1, \ldots, n$.

Agora, sendo Σ uma subvariedade mergulhada real maximal, as seções $\frac{\partial}{\partial t_j}$ são transversais a Σ na origem. Assim, segue do Teorema da Função Implícita que existem funções $\tau_j(x)$, definidas localmente, tais que $\Sigma = \{(x, \tau(x))\}$, onde $\tau(x) = (\tau_1(x), \ldots, \tau_n(x))$. Assim, tomando as coordenadas

$$x' = x \quad \text{e} \quad t' = t - \tau(x),$$

Z fica escrito na forma

$$Z'(x',t') = x' + i\phi(x', t' + \tau(x')) = x' + i\phi'(x',t').$$

Portanto, $\Sigma = \{(x', 0)\}$ nas novas coordenadas (x', t').

Ainda, da demonstração do Teorema de Aproximação de Baouendi-Treves, temos que

$$E_\tau u(x,t) = \left(\frac{\tau}{\pi}\right)^{\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\tau[Z(x,t) - Z(x',0)]^2} u(x',0) h(x') \det Z_x(x',0) dx'$$

e, por hipótese, $u|_\Sigma = 0$ o que implica $E_\tau u(x,t) = 0$. Mas,

$$E_\tau u(x,t) \longrightarrow u(x,t) \quad \text{uniformemente em } U.$$

Portanto, $u(x,t) = 0$ em U. $\square$

Definição 4.29. *Seja $\mathcal{L}$ uma estrutura localmente integrável definida sobre Ω. Dizemos que $\mathcal{L}u = \mathcal{L}v$, para $u, v \in \mathcal{D}'(\Omega)$, se $\mathcal{L}(u - v) = 0$. Além disso, diremos que $u|_\Sigma = v|_\Sigma$ se $(u - v)|_\Sigma = 0$.*

Como consequência do Teorema 4.28 temos o seguinte resultado que é uma generalização de um princípio clássico da extensão analítica.

Corolário 4.30. *Sob as mesmas hipóteses do Teorema 4.28 temos que a seguinte implicação é verdadeira:*

$$\textit{Se } \mathcal{L}u = \mathcal{L}v \textit{ e } u|_\Sigma = v|_\Sigma \Longrightarrow u = v \textit{ numa vizinhança de } \Sigma.$$

Demonstração. Suponha que $\mathcal{L}u = \mathcal{L}v$ e que $u|_\Sigma = v|_\Sigma$. Então, por definição, $\mathcal{L}(u - v) = 0$ e $(u - v)|_\Sigma = 0$. Logo, pelo Teorema 4.28 segue que $u - v = 0$ em uma vizinhança de Σ, donde temos o desejado. $\square$

REFERÊNCIAS

[1] Adams, R.A. *Sobolev Spaces*. Academic Press, 1975.

[2] Baouendi M.S., Treves F. *A Property of the Functions and Distributions Annihilated by a Locally Integrable System of Complex Vector Fields.* Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 113, No. 2 (Mar., 1981), pp. 387-421.

[3] Berhanu S., Cordaro P. and Hounie J. *An Introduction to Involutive Structures*. Cambridge University Press: New York, 1ª edição, 2008.

[4] Cavalcanti M.M. e Domingos Cavalcanti V.N. *Introdução a Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev*. Maringá: UEM/DMA, 2007.

[5] Dautray R., Lions J.-L. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*. Vol.2 Functional and Variational Methods, Springer, Berlin, 1988.

[6] Evans L.C. *Partial differential equations*. American Mathematical Society, 2002.

[7] Fernandez P.J. *Medida e Integração*. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

[8] Frank W.A. and Kent R.F. *Rings and Categories of Modules*. Graduate texts in Mathematics, Vol. 13, 2ª edição, Springer-Verlag, New York, 1992.

[9] Haim B. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, New York, 2011.

[10] Hömander L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I.* Springer-Verlag, 2ª edição, 1990.

[11] Hounie J. G. *Teoria Elementar das Distribuições*. IMPA, 1979.

[12] Kesavan S. *Topics in Functional Analysis and Applications*. Wiley, 1989.

[13] Lima E.L. *Curso de Análise*. Rio de Janeiro: IMPA, Vol. 2, 11ª edição, 2015.

[14] Munkres J.R. *Topology*. Prentice Hall, 2ª edição, 2000.

[15] Neto A.L. *Funções de uma Váriável Complexa*. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

[16] Salge L.M. *Fórmula de Aproximação de Baouendi-Treves*. Dissertação (Mestrado em Matemática). Orientador Éder Ritis Aragão Costa. ICMC-USP, São Carlos, 2015.

[17] Treves F. *Approximation and Representation of Functions and Distributions Annihilated by a System of Complex Vector Fields*. École Polytech., Centre de Math., Palaiseau, France, 1981.

[18] Treves F. *Hypo-Analytic Structures*. Princeton University Press, 1992.