



UNIVERSIDADE
ESTADUAL de LONDRINA

ALEXIS DAVID SALDIVAR

**CORRELAÇÕES QUÂNTICAS DE DOIS QUBITS EM
ESTADOS DE QUATRO QUBITS**

Londrina
2016

ALEXIS DAVID SALDIVAR

**CORRELAÇÕES QUÂNTICAS DE DOIS QUBITS EM
ESTADOS DE QUATRO QUBITS**

Dissertação de mestrado apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dra. Santosh Shelly Sharma.

Londrina
2016

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

S162c Saldivar, Alexis David.

Correlações quânticas de dois qubits em estados de quatro qubits / Alexis David Saldivar. - Londrina, 2016.
73 f.: il.

Orientador: Santosh Shelly Sharma.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2016.

Bibliografia: f. 71-73.

1. Computação quântica. – Teses. 2. Von Neumann, Álgebra de. – Teses. 3. Entropia quântica. – Teses. 4. Emaranhamento (Física). – Teses. 5. Computadores quânticos. – Teses. I. Sharma, Santosh Shelly. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

CDU 530.145

ALEXIS DAVID SALDIVAR

**CORRELAÇÕES QUÂNTICAS DE DOIS QUBITS EM
ESTADOS DE QUATRO QUBITS**

Dissertação de mestrado apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física.

BANCA EXAMINADORA

Orientador: Prof. Dra. Santosh Shelly Sharma
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Prof. Dr. Renio Dos Santos Mendes
Universidade Estadual de Maringá – UEM

Prof. Dr. Paulo José dos Reis
Universidade Estadual do Centro-Oeste –
UNICENTRO

Londrina, 01 de abril de 2016.

Dedico este trabalho para meus afetos

Agradecimentos

À Professora Dra. Santosh Shelly Sharma, pela orientação e pela amizade.
Aos colegas Felipe, Renan, Mateus, Poliane, Dioncio, Rodrigo,
pela ajuda e parceria.

À minha mãe Maria Victoria, e meu padrasto Nino.

À Leila Maidana.

À CAPES, pelo apoio e suporte financeiro.

Do not go gentle into that good night...

SALDIVAR, Alexis. CORRELAÇÕES QUÂNTICAS DE DOIS QUBITS EM ESTADOS DE QUATRO QUBITS. 2016. 73 p. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

Resumo

As correlações quânticas desempenham um papel importante na computação quântica. Em comparação com a computação clássica, muitas tarefas podem ser implementadas com uma eficiência significativamente maior quando são usadas as propriedades quânticas de um sistema. O emaranhamento quântico é considerado o principal recurso físico, responsável na melhoria da eficiência de tarefas computacionais. Neste trabalho, é destacada a existência de correlações quânticas que vão além do emaranhamento. Cada átomo de um par de átomos de dois níveis, inicialmente emaranhados, é colocado numa cavidade óptica independente. A dinâmica do emaranhamento dos estados reduzidos dos átomos exhibe o fenômeno de morte súbita e renascimento do emaranhamento, que apresenta um cenário interessante para o estudo de correlações de dois corpos. Não é considerado a interação entre o sistema quântico e o ambiente. Negatividade da transposta parcial do estado de qubits atômicos é usado como medida de emaranhamento do estado de dois qubits. Foram obtidas expressões analíticas para a entropia condicional e a discordância quântica, seguido de cálculos numéricos. Para examinar as relações entre correlações presentes no estado composto e a pureza do estado atômico, foi feito também um cálculo na primeira ordem de aproximação para a discordância. Isso implicou na substituição da entropia de Von Neumann pela entropia linear na definição da discordância quântica. Foi usado um programa escrito em fortran para gerar os valores numéricos dos quantificadores de correlações clássicas e quânticas, para casos onde o quadrado de negatividade do estado atômico tem valores iniciais 0,35 e 0,90. A discordância quântica, plotada como função do parâmetro de interação tem valores positivos durante o intervalo entre a morte súbita e o renascimento, isso é, o intervalo de tempo durante o qual o emaranhamento livre entre os qubits atômicos é zero, exceto onde o estado é separável. Também foi calculada a discordância quântica no contexto dos operadores de medida fraca, de maneira a estudar as correlações chamadas de super discordância quântica. Os gráficos que correspondem ao uso de operadores de medida fraca mostram um aumento nas correlações quânticas comparado com a discordância quântica usual obtida através de medidas projetivas ou de Von Neumann.

Palavras-chave: Correlações Quânticas. Cavidade QED . Emaranhamento. Discordância. Medidas fracas

SALDIVAR, Alexis. QUANTUM CORRELATIONS OF TWO QUBITS STATES IN FOUR QUBITS STATES. 2016. 73 p. Dissertation (Master of Science in Physics) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

Abstract

Quantum correlations play an important role in quantum computation. In comparison with classical computation, several tasks can be implemented with significantly higher efficiency when quantum properties of a system are used. Quantum entanglement is considered the main physical resource, responsible for improving the efficiency of computational tasks. In this work, the existence of quantum correlations that go beyond entanglement is highlighted. Each atom of a pair of two level atoms in entangled state, is placed in an independent optical cavity. Entanglement dynamics of the two atom reduced state exhibits the phenomenon of sudden death and rebirth of entanglement, which presents an interesting scenario to study two body correlations. Interaction of the quantum system with environment is not considered. Negativity of partial transpose of the state of atomic qubits is used as the measure of entanglement of two qubit state. Analytical expressions have been obtained for conditional entropy and quantum discord, followed by numerical calculations. To examine the relationship between the correlations present in the composite state and the purity of atomic state, calculation of first order approximation to discord have also been done. It involves replacing von Neumann entropy by linear entropy in the definition of quantum discord. A program written in fortran has been used to generate numerical values of quantifiers of classical and quantum correlations for cases where the entangled initial state of atoms has squared negativity value of 0,35 and 0,90. Quantum discord, plotted as a function of interaction parameter, is found to be positive definite during the interval between sudden death and rebirth, that is, the time interval during which the free entanglement between atomic qubits is zero, except where the state is separable. Quantum discord has also been calculated in the context of weak measurement operators, in order to study the correlations called super quantum discord. The graphs corresponding to the use of weak measurement operators show an increase in quantum correlations as compared to the usual quantum discord obtained through projective von Neumann measurement.

Keywords: Quantum Correlations. Cavity QED. Entanglement. Discord. Weak measurements

Lista de ilustrações

- Figura 1 – Quadrado da negatividade $N_g^2(\rho^{A_1A_2})$, entropia $S_L(\rho^{A_1})$, entropia $S_L(\rho^{A_2})$ e entropia $S_L(\rho^{A_1A_2})$ como função do parâmetro de interação ($\tau = g_c t$) para $\delta = 0$ e estado inicial atômico com $\theta = 18^\circ$ 43
- Figura 2 – Quadrado da negatividade global $N_g^2(\rho^{A_1A_2})$, entropia $S_L(\rho^{A_1})$, entropia $S_L(\rho^{A_2})$, e entropia $S_L(\rho^{A_1A_2})$ como função do parâmetro de interação τ , para um estado atômico inicial caracterizado por $\theta = 36^\circ$, no caso ressonante. 46
- Figura 3 – Quadrado da negatividade global $N_g^2(\rho^{A_1A_2})$, entropia $S_L(\rho^{A_1})$, entropia $S_L(\rho^{A_2})$, e entropia $S_L(\rho^{A_1A_2})$ como função do parâmetro de interação τ , para um estado atômico inicial caracterizado por $\theta = 18^\circ$, e dessintonia $\delta = 5g_c$ 47
- Figura 4 – Quadrado da negatividade global $N_g^2(\rho^{A_1A_2})$, entropia $S_L(\rho^{A_1})$, entropia $S_L(\rho^{A_2})$, e entropia $S_L(\rho^{A_1A_2})$ como função do parâmetro de interação τ , para um estado atômico inicial caracterizado por $\theta = 36^\circ$, e dessintonia $\delta = 5g_c$ 48
- Figura 5 – Entropia $S_L[\rho^{A_1A_2}]_{\widehat{M}}$ em função do parâmetro de interação τ , para $\delta = 0$, $\theta = 18^\circ$ e valores do parâmetro de medida a onde a entropia tem extremos. 49
- Figura 6 – Entropia $S_L[\rho^{A_1A_2}]_{\widehat{M}}$ em função do parâmetro de interação τ , para $\delta = 0$, $\theta = 36^\circ$ e valores do parâmetro de medida a onde a entropia tem extremos. 50
- Figura 7 – Quadrado da negatividade global $N_g^2(\rho^{A_1A_2})$, discordância quântica aproximada $Q_L(\rho^{A_1} : \rho^{A_2})$, informação conjunta $I_L(\rho^{A_1} ; \rho^{A_2})$ e correlação clássica $J_L(\rho^{A_1} : \rho^{A_2})$ aproximada para o estado $\widehat{\rho}^{A_1A_2}$ como função do parâmetro de interação τ . O estado atômico inicial é dado por $\theta = 18^\circ$, e o sistema apresenta ressonância. 51
- Figura 8 – Quadrado da negatividade global $N_g^2(\rho^{A_1A_2})$, discordância quântica aproximada $Q_L(\rho^{A_1} : \rho^{A_2})$, informação conjunta $I_L(\rho^{A_1} ; \rho^{A_2})$ e correlação clássica $J_L(\rho^{A_1} : \rho^{A_2})$ aproximada para o estado $\widehat{\rho}^{A_1A_2}$ como função do parâmetro de interação τ . O estado atômico inicial é dado por $\theta = 36^\circ$ e o sistema apresenta ressonância. 52
- Figura 9 – Quadrado da negatividade global $N_g^2(\rho^{A_1A_2})$, entropia $S(\rho^{A_1})$, entropia $S(\rho^{A_2})$, e entropia $S(\rho^{A_1A_2})$ como função do parâmetro de interação τ , para $\theta = 18^\circ$ e $\delta = 0$ 53
- Figura 10 – Quadrado da negatividade global $N_g^2(\rho^{A_1A_2})$, entropia $S(\rho^{A_1})$, entropia $S(\rho^{A_2})$, e entropia $S(\rho^{A_1A_2})$ como função do parâmetro de interação τ , para $\theta = 36^\circ$ e $\delta = 5g$ 55

Figura 11 – Entropia $S[\rho^{A_1 A_2}]_{\widehat{M}}$ como função do parâmetro de interação τ , para $\delta = 0$, $\theta = 18^\circ$ e valores do parâmetro de medida a onde a entropia tem extremos.	56
Figura 12 – Entropia $S[\rho^{A_1 A_2}]_{\widehat{M}}$ como função do parâmetro de interação τ , para $\delta = 0$, $\theta = 36^\circ$ e valores do parâmetro de medida a onde a entropia tem extremos.	57
Figura 13 – Quadrado da negatividade global $N_g^2(\rho^{A_1A_2})$, discordância quântica $Q(\rho^{A_1} : \rho^{A_2})$, informação conjunta $I(\rho^{A_1} : \rho^{A_2})$ e correlação clássica $J(\rho^{A_1} : \rho^{A_2})$ para o estado $\widehat{\rho}^{A_1A_2}$ como função do parâmetro de interação τ . O estado atômico inicial é dado por $\theta = 18^\circ$, e o sistema apresenta ressonância ($\delta = 0$). . .	59
Figura 14 – Quadrado da negatividade global $N_g^2(\rho^{A_1A_2})$, discordância quântica $Q(\rho^{A_1} : \rho^{A_2})$, informação conjunta $I(\rho^{A_1} : \rho^{A_2})$ e entropia condicional $J(\rho^{A_1} : \rho^{A_2})$ para o estado $\widehat{\rho}^{A_1A_2}$ como função do parâmetro de interação τ . O estado atômico inicial é dado por $\theta = 36^\circ$, e o sistema apresenta ressonância ($\delta = 0$). 60	60
Figura 15 – Quadrado da negatividade global $N_g^2(\rho^{A_1A_2}(t))$, super discordância quântica $Q_S(\rho^{A_1}(t) : \rho^{A_2}(t))$, correlação total $I(\rho^{A_1}(t) : \rho^{A_2}(t))$ e correlação clássica $J_S(\rho^{A_1}(t) : \rho^{A_2}(t))$ como função do parâmetro de interação τ . O estado atômico inicial é dado por $\theta = 18^\circ$, e o sistema apresenta ressonância ($\delta = 0$). Os valores do parâmetro de intensidade de medida são $x = 0$, $x = 0,42$, e $x = 1,1$	65
Figura 16 – Quadrado da negatividade global $N_g^2(\rho^{A_1A_2}(t))$, super discordância quântica $Q_S(\rho^{A_1}(t) : \rho^{A_2}(t))$, correlação total $I(\rho^{A_1}(t) : \rho^{A_2}(t))$ e correlação clássica $J_S(\rho^{A_1}(t) : \rho^{A_2}(t))$ como função do parâmetro de interação τ . O estado atômico inicial é dado por $\theta = 36^\circ$, e o sistema apresenta ressonância ($\delta = 0$). Os valores do parâmetro de intensidade de medida são $x = 0$, $x = 0,42$, e $x = 1,1$	66

Sumário

1	INTRODUÇÃO	19
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	23
2.1	O qubit	23
2.2	O operador densidade	23
2.2.1	Propriedades do operador densidade	24
2.2.2	O operador densidade reduzido	25
2.3	Emaranhamento	25
2.4	Critérios para medidas de correlações quânticas	26
2.4.1	Condições necessárias	26
2.4.2	Condições razoáveis	26
2.4.3	Condições discutíveis	26
2.5	Criterio de separabilidade de Peres	27
2.6	Negatividade global	27
2.7	Entropia de Shannon	28
2.8	Entropia de Von Neumann	28
2.9	Entropia linear	29
2.10	Informação conjunta	29
2.11	Discordância quântica	30
2.12	O modelo de Jaynes-Cummings	31
2.12.1	Quantização do campo eletromagnético	31
2.12.2	Hamiltoniano de Jaynes Cummings	33
2.13	Formalismo de medidas quânticas	35
2.13.1	Medidas de Von Neumann	35
2.13.2	Medidas Generalizadas	35
2.13.3	Medidas fracas	37
3	DINÂMICA DE CORRELAÇÕES QUÂNTICAS E EMARANHA- MENTO DE DOIS ÁTOMOS DE DOIS NÍVEIS EM CAVIDA- DES ÓPTICAS INDEPENDENTES	39
3.1	Evolução temporal de dois átomos em cavidades independentes	39
3.1.1	Estado do sistema composto	40
3.1.2	Estado de dois átomos	41
3.2	Discordância quântica aproximada para o estado atômico $\rho^{A_1 A_2}(t)$	42
3.3	Discordância quântica no estado atômico $\hat{\rho}^{A_1 A_2}(t)$	52

4	MEDIDA FRACA E DISCORDÂNCIA PARA ESTADO DE DOIS QUBITS ATÔMICOS	61
4.1	Discordância quântica com operadores de medida fraca para estados de dois átomos	61
5	CONCLUSÕES	69
	REFERÊNCIAS	71

1 Introdução

O surgimento da mecânica quântica causou uma revolução profunda nos modelos teóricos que descrevem a natureza. Entre as novas características dessa teoria, a existência de correlações que não tem análogo clássico, e violam a localidade, levaram a por em dúvida sua completude. Mas com o passar do tempo experimentos cada vez mais precisos confirmaram a não localidade dessas correlações. Entre as aplicações da mecânica quântica surgiu a proposta teórica de um computador quântico usando propriedades como a superposição e as correlações não locais. Isso começou com o trabalho de Paul Beniof quem descreveu um modelo de computador quântico por meio de Hamiltonianos, seguido pela observação de Feynman que em geral não parece possível que um computador clássico possa simular a evolução de um sistema quântico, e a descrição do primeiro computador quântico dado por David Deutsch. As correlações quânticas desempenham um papel importante na computação quântica. Uma grande melhoria na eficiência de tarefas computacionais foram encontradas possíveis aproveitando propriedades quânticas.

Um dos recursos principais para a melhoria na eficiência de tarefas computacionais é a parte das correlações quânticas capturadas pelo emaranhamento. Desde que o emaranhamento dos sistemas quânticos foi sugerido primeiro por Schrödinger, e seguido por Einstein, Podolski e Rosen, nos trabalhos [1] e [2], chamou muito a atenção dos físicos devido principalmente pela implicação contraintuitiva que apresenta, assim como pela importância intrínseca no entendimento da mecânica quântica em questões como por exemplo: a não localidade, a teoria de medidas quânticas, ou a perda de coerência. No contexto da computação quântica com estados puros, o emaranhamento foi considerado um recurso fundamental na hora de adquirir uma aceleração exponencial de processamento na computação comparada com a computação clássica. No trabalho [3] é provado que a presença de emaranhamento multipartido é necessário para que qualquer algoritmo quântico baseado em estados puros, forneça um aumento exponencial na velocidade de computação comparada com a computação clássica. O emaranhamento foi usado com sucesso no teletransporte quântico, a codificação superdensa, assim como na criptografia. Inicialmente o emaranhamento quântico foi considerado sinônimo de correlações quânticas, sendo que, um estado quântico composto poderia ser caracterizado como emaranhado ou separável. Isso mudou drasticamente na última década. Em 2001 Olliver e Zurek [4] concluíram que o emaranhamento não captura todas as correlações quânticas, e que existem estados separáveis que possuem correlações que não são clássicas. Eles definiram um quantificador de correlações quânticas chamado de discordância quântica. Existem duas generalizações da informação conjunta (que são equivalentes para o caso clássico) para o caso quântico. A generalização quântica chamada I é considerado o quantificador de correlação total conforme a referência [5]. No outro lado, a generalização quântica da outra expressão clássica da informação

conjunta J , é interpretada como um quantificador de correlações clássicas na referência [6]. A discordância quântica é definida como a diferença das generalizações quânticas de duas expressões para a informação conjunta.

Na referência [7] foi proposto um modelo de computação chamado de computação quântica determinista com um bit quântico (DQC1), onde o estado inicial é altamente misto. A DQC1 é considerado um modelo não trivial que se encontra entre a computação clássica e a computação quântica padrão. Foi mostrado que esse modelo é menos eficiente que outro onde tem se acesso a bits de estado puro. Porém pode resolver problemas relacionados a simulação de sistemas físicos (por exemplo estimação de densidade espectral), para o qual não há um algoritmo clássico eficiente. Em 2008 Datta, Shaji e Caves [8] calcularam a discordância quântica no modelo de computação de Knill, fixando uma base consistente sobre a existência de correlações quânticas que vão além do emaranhamento.

Na realização experimental da computação quântica, a chamada cavidade QED é uma das principais opções que permitiria sua implementação, fundamentada pelo fato de ser um dos poucos procedimentos experimentais onde a manipulação controlada de estados quânticos de maneira aceitável é conseguida no laboratório. Um estado quântico que não tem contato com o ambiente possui uma evolução reversível, e o possível emaranhamento que tiver é preservado, mas quando o sistema for manipulado ou medido, ele se acopla com o mundo macroscópico produzindo perda de coerência, o que tem como consequência o decaimento do estado antes que a computação seja finalizada. Um dos desafios maiores na computação quântica é conseguir realizar uma operação local antes do decaimento do estado. Na computação quântica, as informações são armazenadas em um registro quântico composto de N sistemas de dois níveis que representam os bits quânticos, e o estado geral de um computador quântico é uma superposição linear desses estados. Um aparelho desses deveria ser capaz de realizar operações unitárias em um registro quântico, o qual pode se decompor em uma sequência de passos que envolve a dinâmica condicionada de poucos qubits (portas quânticas) [9]. A cavidade QED estuda a interação da luz e a matéria, ambas confinadas em uma caixa, mais especificamente consiste na colocação de átomos em uma cavidade eletromagnética de alta qualidade Q , onde apenas um ou dois modos de campo eletromagnético existe dentro da cavidade, estes estão fortemente acoplados aos átomos (acoplamento dipolar). O fato de que a qualidade da cavidade ser alta possibilita o fóton interagir muitas vezes com o átomo antes de escapar da cavidade [10]. As aplicações da cavidade QED baseiam-se no fato de transferir estados quânticos entre qubits materiais e qubits de fótons, e usando esta ideia, muitos protocolos para portas de dois qubits foram desenvolvidas gerando emaranhamento entre átomos, ou fótons com átomos [9, 11, 12, 13].

Considerando um modelo com dois átomos de dois níveis inicialmente emaranhados, onde cada átomo é colocado em uma cavidade, e acoplado ao estado vácuo da cavidade, Yu e Eberly [14] estudaram a dinâmica do sistema mostrando que a coerência local decai de maneira assintótica enquanto o emaranhamento desaparece em um tempo finito

durante a evolução dinâmica do sistema. O decaimento do emaranhamento em um tempo finito é conhecido como morte súbita do emaranhamento. Esse fenômeno foi verificado experimentalmente nos trabalhos [15] e [16]. Quando no modelo em que é estudado a dinâmica das correlações, o sistema composto é acoplado a um reservatório comum em um regime não markoviano [17], [18], ou a dissipação é excluída do modelo [19], [20], o renascimento do emaranhamento é observado após de um tempo. O controle da dinâmica e morte súbita do emaranhamento têm sido examinados em alguns trabalhos [21, 22, 23], pelo grande potencial apresentado no contexto do processamento de informação quântica.

Estados quânticos são frágeis com relação a medidas feitas sobre o sistema, pelo qual é impossível conhecer um estado quântico dado uma única cópia. A medida de um estado quântico em uma base ortogonal faz com que o estado perda sua coerência. Se a medida realizada acopla de maneira fraca o aparelho de medida e o sistema, o estado não será muito perturbado e a perda de coerência não seria total. As medidas fracas apresentam-se como uma possibilidade de controlar e manipular estados quânticos pelo fato de que elas causam uma mudança pequena em um estado quântico. O formalismo de medida fraca foi introduzido na referência [24]. Na teoria de medida fraca o aparelho de medida é tratado como um sistema quântico que interage fracamente com o sistema medido, logo da interação se realiza uma medida forte sobre o aparelho, e o colapso do estado quântico do aparelho de medida é considerado o resultado de um processo de medida fraca. Uma das motivações da generalização de medidas projetivas por meio de medidas fracas é a possibilidade de manter o estado inicial enquanto é acumulada informação. Medidas fracas podem também ser usadas para a determinação do estado de um sistema que acontece entre duas medidas de Von Neumann, assim como revelar valores fracos não usuais entre outras coisas [25]. No trabalho [26] tem-se apresentado uma generalização de medidas quânticas como uma sequência de medidas fracas usando uma estrutura do tipo caminho aleatório no espaço de estado, também foram definidos operadores de medidas fracas, e foi assinalada a importância desses operadores no estudo de operações locais e comunicação clássica (LOCC), como por exemplo no estudo da teoria de emaranhamento. A monotonia de emaranhamento é um conceito importante que consiste basicamente no fato de que o valor do quantificador de emaranhamento na média não aumenta sob operações locais. Devido ao fato de que para estados puros as operações realizadas são unitárias e as medidas são generalizadas, e dado que todas as operações unitárias podem se decompor numa série de passos infinitesimais e todas as medidas podem se decompor em medidas fracas, logo é suficiente olhar para a monotonia sob pequenas mudanças no estado. Isso dá a possibilidade de encontrar condições diferenciais para que uma função (quantificador de emaranhamento) possua monotonia de emaranhamento. Além disso é possível pensar no conjunto de LOCC como sendo gerado por um conjunto de operações locais infinitesimais, o que permite pensar a respeito dos protocolos de emaranhamentos de uma forma análoga ao estudo da álgebra de Lie, olhando para o comportamento de seus geradores segundo a sugestão em [26]. Outras aplicações

para a chamada amplificação de valores fracos foram encontradas como por exemplo na interrogação de um estado quântico de uma maneira coerente, no entendimento do papel do principio de incerteza no experimento da fenda dupla, na observação de uma versão fotônica do spin no efeito Hall, no controle de feedback de sistemas quânticos, assim como também tem sido mostrado que a medida fraca ajuda na proteção do emaranhamento quântico da perda de coerência [27]. Os operadores de medida fraca definidos em [26] foram usados no contexto da discordância quântica, pelo fato de que a discordância é sensível ao tipo de medida local realizada. Foram incluídos os operadores de medida fraca na definição da discordância quântica, e as correlações capturadas dessa forma são chamadas de super quantum discord (ou super discordância quântica) [27].

Neste trabalho se apresenta um estudo da discordância quântica de um sistema de dois átomos de dois níveis inicialmente emaranhados, com cada átomo colocado numa cavidade óptica no estado vácuo, onde a dinâmica do sistema é governada pelo modelo de Jaynes Cummings [28]. Para simplificar esse modelo foram consideradas duas aproximações (aproximação dipolar e aproximação da onda girante), e foi usada a versão simplificada do Hamiltoniano do modelo de Jaynes Cummings, dada na referência [10]. No capítulo 2 são apresentados os fundamentos teóricos necessários para este trabalho. O capítulo 3 apresenta duas abordagens. Primeiramente, substituindo as entropias de Von Neumann por entropias lineares na definição tanto da entropia condicional quanto da discordância quântica foram obtidas aproximações para a entropia condicional e a discordância quântica. Na segunda abordagem obtiveram-se expressões para a entropia condicional e a discordância quântica usuais (entropia de Von Neumann). Usando a linguagem de programação fortran foram gerados algoritmos para obter dados numéricos das entropias (lineares e de Von Neumann), assim como para as correlações (aproximada e exata) total, clássica e quântica dos estados atômicos. Foram considerados dois estados atômicos iniciais para a geração de dados numéricos. Também foram considerados dois valores do parâmetro de dessintonia $\delta = 0$ e $\delta = 5g_c$. O caso ressonante ($\delta = 0$) foi escolhido como o caso de estudo principal, devido a que sob certas condições aparece o fenômeno de morte súbita e renascimento do emaranhamento. No capítulo 4 é estudada a discordância quântica dos estados atômicos calculados no capítulo 3, substituindo os operadores de medida projetiva, por operadores de medida fraca (definidos em [26]) na definição de discordância quântica (super discordância quântica Q_S). Foram gerados dados numéricos para a entropia condicional com operadores de medida fraca S_f , para a correlação clássica J_S e para a super discordância quântica Q_S . Os resultados dos dados numéricos gerados para as expressões do capítulo 3 e 4 foram apresentados como figuras nos respectivos capítulos.

2 Fundamentação Teórica

Neste capítulo são apresentados os fundamentos teóricos que são utilizados no presente trabalho.

2.1 O qubit

O qubit (quantum bit) é a unidade básica da informação quântica, ele pode ser representado por uma superposição de dois estados quânticos, que podemos chamar de $|0\rangle$ e $|1\rangle$. A superposição dos estados quânticos é uma característica do qubit que não possui o bit clássico, sendo que o bit clássico só pode estar no estado 0 ou 1. O qubit é definido como

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad (2.1)$$

onde α e β são números complexos que satisfazem a relação $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Embora o qubit é resultado de um processo físico, desde um ponto de vista matemático ele pode ser considerado como um vetor num espaço complexo (espaço de Hilbert) de duas dimensões com norma unidade [10]. O conjunto $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ é chamado de base computacional.

2.2 O operador densidade

O operador densidade, apresentado independentemente por Von Neumann e Landau, representa uma alternativa ao vetor de estado para expressar a informação contida num sistema quântico [10]. Além de ser outra forma de expressar a informação de um sistema quântico, também permite a descrição de estados quânticos mistos, estados constituídos por um ensemble de estados puros do tipo $\{p_i, |\psi_i\rangle\}$, onde não é possível conhecer as probabilidades de cada estado puro, sendo p_i uma probabilidade estatística associado a $|\psi_i\rangle$. Como exemplo, supondo que o número de partículas de um sistema é muito grande, então não é possível associar uma função de onda para cada uma das partículas, mas é possível achar a média estatística de que um dado subconjunto manifesta-se numa medida, então esse subconjunto leva um peso estatístico, e diz-se que o estado resultante é uma mistura de estados puros. O operador densidade está definido como uma combinação convexa de operadores de projeção,

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad (2.2)$$

onde,

$$p_i \geq 0 \quad , \quad \sum_i p_i = 1. \quad (2.3)$$

Podemos observar que quando calculamos o valor médio de um observável \widehat{M} , o operador densidade surge de forma natural [29],

$$\begin{aligned} \langle \widehat{M} \rangle &= \sum_i p_i \langle \psi_i | \widehat{M} | \psi_i \rangle = \sum_{m,n} \left\langle \langle n | \sum_i p_i | \psi_i \rangle \langle \psi_i | m \rangle \langle m | \widehat{M} | n \rangle \right\rangle, \\ &= \sum_n \langle n | \rho \widehat{M} | n \rangle = Tr[\rho \widehat{M}], \end{aligned} \quad (2.4)$$

e diz-nos que o valor médio do observável é simplesmente o traço do produto das representações matriciais do operador densidade e do observável.

2.2.1 Propriedades do operador densidade

Da definição do operador densidade vemos que ele satisfaz a propriedade de hermiticidade

$$\widehat{\rho} = \widehat{\rho}^\dagger, \quad (2.5)$$

isso leva a outras propriedades importantes como o fato de ter uma representação espectral, quer dizer que $\widehat{\rho}$ é diagonal com relação a alguma base ortonormal num espaço vetorial V [10]. Logo pode ser expressado como

$$\widehat{\rho} = \sum_k \lambda_k |k\rangle \langle k|. \quad (2.6)$$

Computando o valor esperado de $\widehat{\rho}$ temos

$$\langle k | \widehat{\rho} | k \rangle = \langle k | \left(\sum_i p_i | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \right) | k \rangle = \sum_i p_i |\langle k | \psi_i \rangle|^2 = \lambda_k, \quad (2.7)$$

vemos que $\lambda_k \geq 0$. De fato, para qualquer $|\psi\rangle$, $\langle \psi | \widehat{\rho} | \psi \rangle \geq 0$, ou seja $\widehat{\rho}$ é um operador semi definido positivo. Também se observa que $Tr(\rho) = 1$ é característico do operador densidade. É obvio da equação (2.2) que se existe só um termo na parte direita da equação isso implica que há só um estado com probabilidade bem definida $p_i = 1$, por tanto ele é um estado puro, sendo que

$$\widehat{\rho}^2 = p_i^2 | \psi_i \rangle \langle \psi_i | | \psi_i \rangle \langle \psi_i | = | \psi_i \rangle \langle \psi_i | = \widehat{\rho}, \quad (2.8)$$

e o operador densidade de um estado puro pode ser visto como um projetor no estado $|\psi_i\rangle$, então como

$$\hat{\rho}^2 = \hat{\rho} \longrightarrow \text{Tr}(\rho^2) = \text{Tr}(\rho) = 1, \quad (2.9)$$

o que não acontece no caso da equação (2.2) possuir mais de um termo, ou seja $\text{Tr}(\rho^2) < 1$ implica a mistura de estados.

2.2.2 O operador densidade reduzido

O operador densidade reduzido é uma ferramenta que permite olhar para uma parte de um sistema composto, ele está baseado na operação de traço parcial sobre a representação matricial do operador densidade que representa o estado composto, devido que esta operação descreve a estatística correta na reconstrução da expressão da parte do sistema para a qual estamos olhando [10]. Supondo que dois sistemas de dois níveis sejam preparados separadamente,

$$\rho^{AB} = \rho^A \otimes \rho^B = \begin{bmatrix} \rho_{11}^A \rho^B & \rho_{12}^A \rho^B \\ \rho_{21}^A \rho^B & \rho_{22}^A \rho^B \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

então se observa que somando os elementos da diagonal em (2.10) é recuperada a matriz que representa o operador densidade do estado $\rho^B = \rho_{11}^A \rho^B + \rho_{22}^A \rho^B$, onde $\rho_{11}^A + \rho_{22}^A = 1$. Quer dizer somar os sub-blocos diagonais da matriz densidade ρ^A para obter a matriz densidade ρ^B é chamado o traço parcial respeito de A . Se de novo são somados os elementos diagonais da matriz resultante, isso é equivalente a fazer o traço da matriz ρ^{AB} . Quando o estado não é separável, pode se pensar que a matriz densidade para o subsistema B que é fornecido pela matriz do sistema composto AB . Que o traço da matriz ρ^{AB} seja igual ao traço respeito a A seguido pelo traço respeito a B é garantido só se o traço parcial com respeito a A da matriz ρ^{AB} é ρ^B , logo para um observável em B ,

$$\langle \Lambda_B \rangle = \text{Tr}[\Lambda_B \rho^B] = \text{Tr}[\Lambda_B \rho^{AB}] = \text{Tr}[(I \otimes \Lambda_B) \rho^{AB}], \quad (2.11)$$

dado que a equação (2.11) se cumpre para qualquer observável de B então se tem que o traço parcial com respeito a A dá a descrição correta do estado ρ^B .

2.3 Emaranhamento

No estudo dos sistemas que interagem é possível a realização de estados do tipo $|\Phi\rangle = \alpha |u_1\rangle \otimes |v_1\rangle + \beta |u_2\rangle \otimes |v_2\rangle$ onde o estado combinado $|\Phi\rangle$ é um estado puro, mas não existe um teste completo para os estados correspondentes aos subsistemas 1 e 2 separadamente, só o par 1 – 2 tem um estado puro bem definido onde eles estão correlacionados

[30]. De uma maneira formal o estado emaranhado define-se como a impossibilidade de separar ou fatorar os subsistemas que compõem o sistema, por exemplo, se ρ representa a matriz densidade de um sistema bipartido, ela não pode ser expressada como,

$$\rho = \sum_j p_j \rho_j^A \otimes \rho_j^B, \quad (2.12)$$

onde ρ_j^A e ρ_j^B são as matrizes densidade para os dois subsistemas. No caso que ela possa ser escrita dessa forma então o estado é chamado separável.

2.4 Critérios para medidas de correlações quânticas

Devido ao fato de que existem diferentes tipos de correlações quânticas assim como diferentes quantificadores, não existe um consenso geral sobre qual é uma medida padrão apropriada que qualifica e quantifica os tipos de correlações. Na referência [31] é proposto critérios que deveria cumprir uma medida de correlação quântica. Esses critérios são classificados pelos autores em: necessários, razoáveis e discutíveis.

2.4.1 Condições necessárias

1. Os estados produto π não tem correlações: $\Gamma(\pi) = Q(\pi) = C(\pi) = 0$, onde Γ é a correlação total, Q é a correlação quântica, e C corresponde a correlação clássica.
2. Todas as correlações são invariantes sob operações unitárias locais.
3. Todas as correlações são não negativas: $C \geq 0$, $Q \geq 0$ e $\Gamma \geq 0$.
4. Γ não aumenta sob operações locais.
5. Estados clássicos não têm correlações quânticas. $Q[\widehat{M}(\widehat{\rho})] = 0$ para todo $\widehat{\rho}$ e todo \widehat{M} , onde \widehat{M} é um operador de medida e $\widehat{\rho}$ representa um operador densidade.

2.4.2 Condições razoáveis

1. Continuidade sob pequenas perturbações.
2. Continuidade forte de M_ρ sob pequenas perturbações (SCM).
3. Continuidade fraca de M_ρ sob pequenas perturbações (WCM)

2.4.3 Condições discutíveis

1. Para um estado puro bipartido, as correlações total, quântica e clássica, podem se definir pelas marginais: $\Gamma(\rho) = G_t(\rho^A)$, $Q(\rho) = G_q(\rho^A)$, $C(\rho) = G_c(\rho^A)$.

2. Correlações são aditivas $\Gamma = C + Q$.
3. C e/ou Q não aumenta sob operações locais.
4. Simetria sob a troca de subsistemas.

2.5 Critério de separabilidade de Peres

O critério de Peres é um teste que usa o fato de que um estado separável sempre pode ser escrito como $\rho = \sum_j p_j \rho_j^A \otimes \rho_j^B$, e que o fato de traspor uma das partes do sistema, por exemplo $(\rho_j^A)^T$, não afeta certas propriedades do operador densidade que representa o subsistema, como $Tr(\rho) = 1$, ou a positividade do operador. Logo os autovalores do subsistema transposto são também positivos [32]. O critério diz que se ao traspor parcialmente a matriz densidade de um sistema composto, em sua representação global se encontram autovalores negativos, ela não é separável, essa é além uma condição suficiente para dimensões 2×2 e 2×3 . A transposição parcial é definida dado um sistema ρ^{AB} como,

$$\rho^{TA} = \sum_j p_j (\rho_j^A)^T \otimes \rho_j^B, \quad (2.13)$$

onde a matriz densidade correspondente ao subsistema A é trasposto, então o critério diz que se a matriz densidade parcialmente transposta do sistema global tem autovalores positivos, ela é separável, mas se ela tiver autovalores negativos ela possui emaranhamento.

2.6 Negatividade global

No estudo de estados emaranhados multipartidos, algumas de suas propriedades de emaranhamento dependem da matriz densidade do estado reduzido, que está num estado misto. Nesse contexto definiu-se uma quantidade ou medida computável de emaranhamento baseada no critério da transposta parcial de Peres [33]

$$N(\rho) \equiv \frac{\|\rho^{TA}\|_1 - 1}{2} \quad (2.14)$$

onde o termo dentro do módulo é a soma dos valores absolutos dos autovalores da matriz densidade transposta em relação ao sistema A . Como originalmente ρ é um operador semi definido positivo (antes da transposição parcial), o que quantifica a negatividade global é o afastamento dessa propriedade de ser semi-definido positivo do operador densidade. Antes da negatividade global foi feita uma proposta similar de uma medida baseada no critério de Peres [5].

$$t \equiv \sum_{i=1}^N |\lambda_i| - 1. \quad (2.15)$$

Outros autores usam uma expressão análoga com essa de acima (equação (2.16)),

$$N(\rho) \equiv \frac{1}{d-1} (\|\rho^{T_A}\| - 1), \quad (2.16)$$

onde o fator $\frac{1}{d-1}$ é inserido de modo a normalizar a negatividade, sendo d a dimensão do espaço.

2.7 Entropia de Shannon

A entropia de informação foi introduzida por Shannon como uma grandeza H que mede a quantidade de informação produzida por uma fonte de informação discreta representada como um processo de Markov [34]. Estabelecendo 3 propriedades que deve cumprir essa grandeza:

1. H deve ser contínuo em p_i .
2. Se a distribuição de probabilidade é tal que $p_1 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$ então H deve ser uma função monotonamente crescente respeito de n . Devido ao fato de que uma maior quantidade de opções implica um aumento da incerteza.
3. Se um evento é dividido em dois subeventos sucessivos, a função H original deve ser uma soma ponderada dos valores individuais de H

Então é definida a quantidade H que satisfaz essas propriedades como,

$$H = -K \sum p_i \log p_i \quad (2.17)$$

onde K é uma constante positiva que depende das unidades de medida, logo a expressão anterior pode se escrever como

$$H = - \sum p_i \log p_i. \quad (2.18)$$

2.8 Entropia de Von Neumann

A entropia de Von Neumann é uma generalização da entropia de Shannon para sistemas quânticos, mede a quantidade média de informação do sistema, substituindo as distribuições de probabilidade por operadores densidade [10]. Ela é definida como

$$S(\rho) = -\text{tr}(\rho \log \rho) \quad (2.19)$$

que também pode se reescrever em termos dos autovalores de ρ como

$$S(\rho) = - \sum_i \lambda_i \log \lambda_i \quad (2.20)$$

onde o logaritmo é considerado na base 2. Como $\rho = \rho^2$ para um estado puro, então $H(\rho) = 0$ para esse estado, e a entropia de Von Neumann fornece uma maneira de quantificar a mistura de ρ , além disso também existem medidas de correlações baseadas na entropia de Von Neumann.

2.9 Entropia linear

A entropia linear S_L é o primeiro termo na expansão da entropia de Von Neumann [35], que foi definida como

$$S(\rho) = -tr(\rho \ln \rho)$$

então, usando a expansão

$$\ln(x-1) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{x} \dots \quad (2.21)$$

vemos que a entropia linear tem a forma

$$S_L = -tr(\rho(\rho-1)) = tr(\rho - \rho^2) = 1 - tr\rho^2 \quad (2.22)$$

onde a quantidade $tr(\rho^2)$ é também um critério para quantificar a mistura do sistema, e é chamado pureza, isso mostra como a entropia caracteriza de uma forma natural a mistura de um sistema. A entropia linear é as vezes normalizada da seguinte maneira

$$S_L = \frac{d}{d-1} [1 - tr(\rho^2)] \quad (2.23)$$

onde d é a dimensão do espaço.

2.10 Informação conjunta

Definida a entropia de Shannon como uma expressão que mede a quantidade media de informação contida num sistema, ela pode ser usada para definir uma expressão para a informação que compartilham duas variáveis aleatórias X e Y ,

$$I(X : Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y), \quad (2.24)$$

chamada de informação conjunta, onde $H(X)$ é a entropia de Shannon da variável X , $H(Y)$ é a entropia de Shannon da variável Y e $H(X, Y)$ é a entropia de Shannon para a distribuição conjunta de probabilidades de X e Y . Esta expressão é generalizada para o caso quântico substituindo as distribuições de probabilidade pelas matrizes densidade que caracterizam o

sistema. Sejam A_1 e A_2 dois sistemas quânticos de um sistema composto, então a expressão para a informação media que possui o sistema composto é

$$I(\rho^{A_1} : \rho^{A_2}) = S(\rho^{A_1}) + S(\rho^{A_2}) - S(\rho^{A_1 A_2}) \quad (2.25)$$

onde $S(\rho^{A_1})$ e $S(\rho^{A_2})$ são as entropias de Von Neumann dos estado reduzidos ρ^{A_1} e ρ^{A_2} respectivamente e $S(\rho^{A_1 A_2})$ é a entropia de Von Neumann do sistema composto [10].

2.11 Discordância quântica

No caso clássico a informação conjunta possui outra expressão equivalente à (2.25), baseada no fato do conhecimento ou medida sobre um dos subsistemas que compõem o sistema total, é dizer, sejam X e Y duas variáveis aleatórias, a expressão para a informação conjunta J , condicionada ao conhecimento de uma das variáveis é

$$J(X : Y) = H(X) - H(X/Y) \quad (2.26)$$

que diz quanto diminui a ignorância da variável X devido a Y ter acontecido . Como essa condicionalidade sobre uma das variáveis implica sua medida, num sistema quântico isso faz que sua generalização não seja trivial como no caso de I , ou seja as duas expressões para a informação conjunta que são equivalentes no caso clássico, não batem em geral para sistemas quânticos. A generalização da entropia condicional $H(X/Y)$ para sistemas quânticos é

$$S(\rho^{A_1/A_2}) = S(\rho^{A_1 A_2} / \{\Pi_j^{A_2}\}) = \sum_j p_j S(\rho_j) \quad (2.27)$$

onde $\rho_j = tr_{A_2}(\Pi_j \rho^{A_1 A_2} \Pi_j / p_j)$ e $p_j = tr(\Pi_j \rho^{A_1 A_2})$, isso significa que a entropia de Von Neumann é calculada sobre o estado reduzido ρ^{A_1} depois de ter aplicado um conjunto completo de operadores de medida $I \otimes \Pi_j$ sobre o sistema composto $\rho^{A_1 A_2}$ e fazendo o traço parcial respeito de A_2 . A medida é realizada no sentido de Von Neumann, é dizer, Π_K são projetores unidimensionais. Olliver e Zurek interpretam a minimização de $S(\rho^{A_1/A_2})$ como uma medida de correlação clássica entre ρ^{A_1} e ρ^{A_2} [36].

Logo a expressão quântica para J toma a forma

$$J(\rho^{A_1} : \rho^{A_2}) = S(\rho^{A_1}) - S(\rho^{A_1/A_2}) \quad (2.28)$$

A diferença entre as duas expressões para a informação conjunta que existe em sistemas quânticos (equações 2.25 e 2.26) é chamada discordância quântica [4].

$$Q(\rho^{A_1} : \rho^{A_2}) = S(\rho^{A_2}) + S(\rho^{A_1/A_2}) - S(\rho^{A_1 A_2}) \quad (2.29)$$

e depende de $\rho^{A_1 A_2}$ e dos projetores $\{\Pi_j^{A_2}\}$. A minimização sobre todas as posáveis medidas é feita considerando o fato de que essa medida é a que menos afeta o estado geral do sistema, o que permite tirar maior informação sobre a entropia condicional S .

2.12 O modelo de Jaynes-Cummings

Em 1963 os físicos americanos Edwin Jaynes e Fred Cummings construíram um modelo que descreve a interação entre um modo de campo quantizado e um átomo de dois níveis numa cavidade óptica. Eles propuseram um dos poucos modelos com solução exata na óptica quântica.

2.12.1 Quantização do campo eletromagnético

Quando os números de fótons são pequenos o campo eletromagnético não pode ser considerado contínuo (como no caso clássico), então a teoria quântica da luz torna-se muito importante. A quantização do campo é basicamente um sistema de osciladores harmônicos desacoplados. Então como nos textos padrões e partindo das equações de Maxwell sem fontes é mostrada a quantização do campo eletromagnético

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (2.30)$$

$$\nabla \cdot D = 0 \quad (2.31)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (2.32)$$

$$\nabla \times H = \frac{\partial D}{\partial t} \quad (2.33)$$

onde $B = \mu_0 H$, $D = \epsilon_0 E$, $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$. A equação de Faraday e $\nabla \cdot B = 0$ permitem a introdução dos potenciais escalar e vetorial, Φ e A . Então no gauge de Coulomb:

$$B = \nabla \times A \quad (2.34)$$

$$E = -\frac{\partial A}{\partial t} \quad (2.35)$$

Da condição

$$\nabla \cdot A = 0 \quad (2.36)$$

se vê que

$$\nabla^2 A(r, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A(r, t)}{\partial t^2} \quad (2.37)$$

e

$$\nabla^2 E(r, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E(r, t)}{\partial t^2} \quad (2.38)$$

O potencial vetorial pode ser expressado da seguinte maneira

$$A(r, t) = \sum_k c_k u_k(r) \tilde{a}_k(t) + c_k^* u_k^*(r) \tilde{a}_k^*(t) \quad (2.39)$$

ou normalizando a expressão para fazer $a_k(t)$ adimensional

$$A(r, t) = -i \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k \epsilon_0}} [u_k(r) a_k(t) + u_k^*(r) a_k^*(t)] \quad (2.40)$$

Inserindo a expressão anterior na equação de onda para A temos

$$\left[\nabla^2 + \frac{\omega_k^2}{c^2} \right] u_k(r) = 0 \quad (2.41)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_k^2 \right] a_k(t) = 0 \quad (2.42)$$

com

$$a_k(t) = a_k e^{-i\omega_k t} \quad (2.43)$$

$$a_k^*(t) = a_k^* e^{i\omega_k t} \quad (2.44)$$

Com condições periódicas de contorno

$$u_k(r) = u_k(r + L\hat{x}) = u_k(r + L\hat{y}) = u_k(r + L\hat{z}) \quad (2.45)$$

achamos as soluções para $u_k(r)$

$$u_k(r) = \hat{\epsilon} \frac{1}{\sqrt{V/2}} e^{i(k_n r)} \quad (2.46)$$

onde $V = L^3$ e $k_n = \frac{2\pi}{L}(n_x \hat{x} + n_y \hat{y} + n_z \hat{z})$ e $\hat{\epsilon}_k$ é o vetor de polarização ($\hat{\epsilon}_k \cdot k_n = 0$). Logo

$$A(r, t) = -i \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k \epsilon_0 V}} \hat{\epsilon}_k [a_j e^{-i\omega_k + ik_n r} + c.c.] \quad (2.47)$$

$$E(r, t) = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0 V}} \hat{\epsilon}_k [a_j e^{-i\omega_k + ik_n r} + c.c.] \quad (2.48)$$

$$H(r, t) = \frac{1}{\mu_0} \sum_k \sqrt{\frac{\hbar \omega_k}{2\epsilon_0 V}} (k_n \times \hat{\epsilon}_k) [a_j e^{-i\omega_k + ik_n r} + c.c.] \quad (2.49)$$

A partir de a_k e a_k^* seguem as equações de movimento de um oscilador harmônico com coordenadas

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^*) \quad (2.50)$$

$$p = -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(a - a^*) \quad (2.51)$$

a quantização é obtida substituindo os números a e a^* por operadores

$$a \longrightarrow \hat{a}, \quad (2.52)$$

e

$$a^* \longrightarrow \hat{a}^\dagger, \quad (2.53)$$

que obedecem as seguintes relações de comutação

$$[\hat{a}_m, \hat{a}_n^\dagger] = \delta_{mn} \quad (2.54)$$

$$[\hat{a}_m, \hat{a}_n] = 0 \quad (2.55)$$

$$[\hat{a}_m^\dagger, \hat{a}_n^\dagger] = 0 \quad (2.56)$$

O hamiltoniano do campo eletromagnético livre é então

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int (\epsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2) \quad (2.57)$$

$$= \sum_k \hbar\omega_k (\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2}) \quad (2.58)$$

2.12.2 Hamiltoniano de Jaynes Cummings

O Hamiltoniano do modelo Jaynes Cummings simplificado segundo [10] pode ser expressado como

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hbar\omega_a \hat{\sigma}_z + \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hbar g_c (\hat{a} \hat{\sigma}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-), \quad (2.59)$$

onde $\hat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$ é o operador que descreve os níveis das energias atômicas, $\hat{\sigma}_+ = \frac{\hat{\sigma}_x + i\hat{\sigma}_y}{2}$, $\hat{\sigma}_- = \frac{\hat{\sigma}_x - i\hat{\sigma}_y}{2}$ são os operadores atômicos que vão de um nível para outro de energia, \hat{a} , \hat{a}^\dagger são os operadores de criação e aniquilação de fótons, e ω_a , ω_c são as frequências do átomo e do campo respectivamente. A constante de acoplamento g_c é o produto do momento dipolar do átomo (aproximação dipolar) e da função do modo da cavidade na posição do átomo. O hamiltoniano pode se reescrever de uma forma conveniente como

$$\hat{H} = \hbar\delta \hat{\sigma}_z + \hbar\omega_c (\hat{N} + \frac{\hat{\sigma}_z}{2}) + \hbar g_c (\hat{a} \hat{\sigma}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-), \quad (2.60)$$

onde a quantidade $\delta = \frac{\omega_a - \omega_c}{2}$ é chamada dissintonia entre a frequência do nível atômico e a frequência do campo. Então o Hamiltoniano na base $|n+1, g\rangle, |n, e\rangle$ (onde $|g\rangle$ é o nível mais baixo de energia, “ground”, $|e\rangle$ é o estado excitado, “excited”, e $|n\rangle$ o estado número de fótons), em unidades de \hbar é

$$\widehat{H} = \begin{bmatrix} -\delta + \omega_c(n + \frac{1}{2}) & g_c \sqrt{n+1} \\ g_c \sqrt{n+1} & \delta + \omega_c(n + \frac{1}{2}) \end{bmatrix}, \quad (2.61)$$

que tem autovalores

$$\lambda_{\pm} = (n + \frac{1}{2})\omega_c \pm \sqrt{\delta^2 + g_c^2(n+1)} = (n + \frac{1}{2})\omega_c \pm \Omega_n, \quad (2.62)$$

e como $\Omega_n = \sqrt{\delta^2 + g_c^2(n+1)}$, e $g_c \sqrt{n+1} = \sqrt{(\Omega_n^2 - \delta^2)}$, os autovetores tomam a forma

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\Omega_n}} [\sqrt{\Omega_n - \delta} |n+1, g\rangle + \sqrt{\Omega_n + \delta} |n, e\rangle], \quad (2.63)$$

e

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\Omega_n}} [-\sqrt{\Omega_n + \delta} |n+1, g\rangle + \sqrt{\Omega_n - \delta} |n, e\rangle]. \quad (2.64)$$

Podemos expressar a transformação unitária que descreve a evolução do sistema na base $|n+1, g\rangle, |n, e\rangle$ como

$$\begin{aligned} \widehat{U}(t) &= \exp\left[-i(n + \frac{1}{2})\omega_c t\right] \\ &\times \begin{bmatrix} \cos(\Omega_n t) + i\frac{\delta}{\Omega_n} \sin(\Omega_n t) & -i\frac{\sqrt{\Omega_n^2 - \delta^2}}{\Omega_n} \sin(\Omega_n t) \\ -i\frac{\sqrt{\Omega_n^2 - \delta^2}}{\Omega_n} \sin(\Omega_n t) & \cos \Omega_n t - i\frac{\delta}{\Omega_n} \sin(\Omega_n t) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.65)$$

logo usando essa transformação unitária, escrevemos a evolução dos vetores $|n+1, g\rangle_t = \widehat{U}(t)|n+1, g\rangle$ e $|n, e\rangle_t = \widehat{U}(t)|n, e\rangle$, que são

$$|n+1, g\rangle_t = \exp -i(n + \frac{1}{2})\omega_c t \left[(\cos(\Omega_n t) + i\frac{\delta}{\Omega_n} \sin(\Omega_n t)) |n+1, g\rangle - i\frac{\sqrt{\Omega_n^2 - \delta^2}}{\Omega_n} \sin(\Omega_n t) |n, e\rangle \right] \quad (2.66)$$

$$|n, e\rangle_t = \exp -i(n + \frac{1}{2})\omega_c t \left[-i\frac{\sqrt{\Omega_n^2 - \delta^2}}{\Omega_n} \sin(\Omega_n t) |n+1, g\rangle + (\cos \Omega_n t - i\frac{\delta}{\Omega_n} \sin(\Omega_n t)) |n, e\rangle \right]. \quad (2.67)$$

2.13 Formalismo de medidas quânticas

2.13.1 Medidas de Von Neumann

Na mecânica quântica, o estado quântico num sistema é definido como um vetor num espaço de Hilbert [10]. Se um conjunto ortonormal de vetores $\{|v\rangle\}$ é uma base para esse espaço, então o postulado da medida em mecânica quântica diz que é possível escolher uma base e olhar se o estado se acha nessa base, e depois de feita a medida temos que encontrar o estado num dos vetores da base. Se temos um vetor de estado qualquer expressado em termos da base $\{|v\rangle\}$

$$|\phi\rangle = \sum_i c_i |v_i\rangle, \quad (2.68)$$

onde c_i são números complexos e $\sum_i |c_i|^2 = 1$, então temos uma probabilidade $|c_i|^2$ de encontrar o estado em $|v_i\rangle$ quando olhamos para esse estado. Este tipo de medida é chamada de medida de Von Neumann. O que diz, é que dada uma base $\{|v\rangle\}$ podemos construir operadores de projeção, quer dizer, operadores que projetam o estado para um vetor da base do espaço de estado que estamos olhando da seguinte forma: seja

$$\hat{P}_j = |v_j\rangle\langle v_j|, \quad (2.69)$$

um projetor no espaço de Hilbert do sistema que tem um vetor de estado $|\phi\rangle$, então a aplicação desse projetor sobre o estado da o seguinte

$$\hat{P}_j |\phi\rangle = (|v_j\rangle\langle v_j|) \sum_i c_i |v_i\rangle = c_j |v_j\rangle, \quad (2.70)$$

Levando para o formalismo do operador densidade $\hat{\rho}$, a equação (2.70) é equivalente a escrever

$$\hat{P}_j |\phi\rangle\langle\phi| \hat{P}_j^\dagger = \hat{P}_j \hat{\rho} \hat{P}_j^\dagger = \hat{\rho}_j, \quad (2.71)$$

e a probabilidade de encontrar o estado em $|v_j\rangle$ é computado fazendo

$$p_j = \langle v_j | \hat{\rho} | v_j \rangle = \text{Tr}(\hat{P}_j \hat{\rho} \hat{P}_j) = \text{Tr}(\hat{P}_j^2 \hat{\rho}), \quad (2.72)$$

e depois da medida, o estado fica projetado num vetor da base do espaço de estado,

$$\widetilde{\hat{\rho}}_j = \frac{1}{p_j} \hat{\rho}_j, \quad (2.73)$$

onde o fator p_j aparece para normalizar o estado.

2.13.2 Medidas Generalizadas

Seguindo o esquema usado em [37] se mostra como tipos mais gerais de medidas podem ser derivadas a partir das medidas de Von Neumann. Para fazer isso é

considerado o sistema que vai ser medido, chamado de objetivo, e outro sistema preparado previamente que é chamado de ensaio. O caso consiste em fazer interagir os dois sistemas, onde o sistema ensaio é preparado em algum estado particular. Como consequência da interação os estados do sistema ensaio ficam correlacionados aos estados do sistema objetivo, o que permite obter informação do objetivo medindo o sistema ensaio. Por exemplo podemos preparar o sistema ensaio num estado particular $|e_1\rangle$ sem perda de generalidade, então o estado inicial do sistema ensaio-objetivo é o produto tensorial deles, ou seja

$$\rho_{inicial} = |e_1\rangle\langle e_1| \otimes \rho_{objetivo}. \quad (2.74)$$

Logo podemos pensar na interação como sendo representado por um operador unitário \hat{U} , como esse operador unitário atua sobre o espaço produto do sistema *ensaio* \otimes *objetivo*, então pode ser escrita em função de seus elementos de matriz como

$$U = \sum_{ii',jj'} u_{ij,i'j'} |e_i o_j\rangle\langle e_{i'} o_{j'}| \quad (2.75)$$

onde o conjunto $\{|e_i\rangle\}$ corresponde a base dos estados do sistema ensaio que iremos medir, $|o_j\rangle$ é a base que corresponde ao sistema objetivo, e $u_{ij,i'j'}$ são os elementos da matriz U . Pela estrutura do produto tensorial é possível expressar a matriz U como composta de sub-blocos da seguinte forma

$$U = \sum_{ii'} M_{ii'} \otimes |e_i\rangle\langle e_{i'}|, \quad (2.76)$$

onde os operadores $M_{ii'}$ são dados por

$$M_{ii'} = \sum_{jj'} u_{ij,i'j'} |o_j\rangle\langle o_{j'}| \quad (2.77)$$

então por exemplo a expressão M_{i1} corresponde a primeira coluna de sub-blocos e podemos expressar simplesmente como $M_{i1} = M_i$. Dado que $UU^\dagger = I$, então se tem que cada sub-bloco da diagonal em UU^\dagger deve ser a identidade para o sistema objetivo, quer dizer, sejam os sub-blocos da diagonal de UU^\dagger , então usando (2.76) temos

$$\langle e_1|UU^\dagger|e_1\rangle = \sum_{ii'} M_i^\dagger M_i = I \quad (2.78)$$

onde os sub-blocos M_i podem ser qualquer tipo de operador enquanto eles satisfazem (2.78). O seguinte passo é fazer atuar U em nosso estado inicial e projetá-lo sobre o estado $|e_i\rangle\langle e_i|$, então

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= (I \otimes |e_i\rangle\langle e_i|) [U(|e_1\rangle\langle e_1| \otimes \rho_{objetivo}) U^\dagger] (I \otimes |e_i\rangle\langle e_i|) \\ &= |e_i\rangle\langle e_i| \otimes M_i \rho_{inicial} M_i^\dagger, \end{aligned} \quad (2.79)$$

finalmente o estado após da normalização é

$$\hat{\rho}_i = \frac{M_i \rho_{inicial} M_i^\dagger}{\text{tr}(M_i M_i^\dagger \rho_{inicial})}. \quad (2.80)$$

Então temos representado um esquema de medidas generalizadas que alguns autores chamam de "positive operator value measurement" (POVM).

2.13.3 Medidas fracas

Na subseção anterior vimos que o postulado da medida em mecânica quântica surgiu primeiramente como um conjunto de operadores de projeção ortogonais, ou medidas de Von Neumann, quer dizer depois da medida o estado inicial era projetado para um subespaço do espaço de estado. A partir dessa definição de medida foi possível derivar um conjunto de medidas mais gerais conhecida como "POVM" que possuem características diferentes das medidas projetivas como por exemplo medidas com informação incompleta [26], medidas incluindo aleatoriedade extra, etc. Nesta subseção apresentamos um formalismo de medida conhecido como "medida fraca". Ele foi introduzido no trabalho [24] no contexto de medidas feitas para partículas de spin $\frac{1}{2}$. O esquema consiste basicamente em fazer medidas sobre um ensemble grande de partículas e considerar só um conjunto de resultados sobre o total, quer dizer fazendo uma posseleção dos estados que resultam depois da medida no ensemble, onde as partículas do ensemble estão preparadas num mesmo estado inicial (estado presseleção). Dizer que as partículas estão preparadas num mesmo estado inicial é equivalente a dizer que foi feita uma medida completa que define um estado $|\psi\rangle$ num tempo $t_1 = 0$, logo num tempo t_2 é feita outra medida "forte" ou projetiva que define o estado de posseleção $|\phi\rangle$. Dentro do intervalo de tempo $0 < t < t_2$ o estado $|\psi\rangle$ evolui e provavelmente interage com outro sistema. Dependendo do tipo de medida M_2 feita no tempo t_2 é possível obter diferentes estados de posseleção $|\phi\rangle$ compatíveis com o estado de presseleção $|\psi\rangle$, esse processo é chamado formalismo de dois vetores de estado. Então o formalismo de dois vetores de estado diz que usando esses fatos é possível realizar a descrição do sistema no tempo intermediário t , em função dos estados de pre e posseleção. Na descrição do sistema no formalismo de dois vetores de estado é considerada a reversibilidade temporal do estado posselecionado, quer dizer, na descrição usual da mecânica quântica, um estado $|\psi\rangle$ depois de uma medida M_m evolui para o futuro na forma

$$|\psi(t)\rangle_m = e^{-i \int_0^t H dt} |\psi\rangle_m, \quad (2.81)$$

então o argumento é que não existe em principio na teoria uma restrição pela qual não possa ser considerada uma evolução unitária do tipo

$$\langle\phi(t)| = \langle\phi(0)| e^{i \int_t^0 H dt} \quad (2.82)$$

onde o vetor de estado $\langle\phi|$ evolui para o passado.

A probabilidade para uma medida forte M_i no formalismo de dois vetores de estados está dada por

$$P(m_i) = \frac{|\langle\phi|M_i|\psi\rangle|^2}{\sum_i |\langle\phi|M_i|\psi\rangle|^2}, \quad (2.83)$$

onde o numerador de (2.83) é a probabilidade conjunta de obter o valor m_i e o estado $|\phi\rangle$ dado $|\psi\rangle$ e M_m . A equação (2.83) também é conhecida como a regra ABL (Aharonov, Bergman, Lebowitz).

No formalismo de medida introduzido por Von Neumann a interação entre o sistema a ser medido e o aparelho é dado pelo Hamiltoniano

$$\widehat{H}_{int} = g(t)\widehat{P}\widehat{M}, \quad (2.84)$$

onde $g(t)$ é a função de acoplamento, \widehat{P} é o operador do momento canônico que corresponde ao aparelho, e \widehat{M} é o observável do sistema que quer se medir, nesse sentido a medida fraca acontece para valores de interação $g(t)$ muito pequenos. O valor fraco, ou valor de medida fraca está definido como

$$m_{fraca} = \frac{\langle \phi | \widehat{M} | \psi \rangle}{\langle \phi | | \psi \rangle}. \quad (2.85)$$

Na referencia [26], define-se a medida fraca, como aquelas onde seus operadores podem se escrever na forma

$$\widehat{M}_j = q_j(\widehat{I} + \widehat{\varepsilon}_j) \quad (2.86)$$

com $0 \leq q_j \leq 1$, e $\widehat{\varepsilon}$ é um operador com norma $\|\widehat{\varepsilon}\| \ll 1$. No mesmo trabalho foram definidos os operadores de medida fraca

$$\widehat{M}(\pm x) = \epsilon(-x)\widehat{\pi}_0 + \epsilon(+x)\widehat{\pi}_1, \quad x \in R \quad (2.87)$$

onde $\epsilon(\pm x) = \sqrt{\frac{1 \pm \tanh(x)}{2}}$, $\widehat{\pi}_0$ e $\widehat{\pi}_1$ são projetores, com $\widehat{\pi}_0 + \widehat{\pi}_1 = \widehat{I}$ e também $\widehat{M}^2(x) + \widehat{M}^2(-x) = \widehat{I}$. Se $x = \varepsilon$, onde $|\varepsilon| \ll 1$ a medida é considerada fraca. Considerando essa última definição de medida fraca, pode se dizer que é aquela medida que produz uma pequena mudança no estado, com relação ao estado inicial.

3 Dinâmica de correlações quânticas e emaranhamento de dois átomos de dois níveis em cavidades ópticas independentes

Neste capítulo apresenta-se um cálculo para a discordância quântica entre dois qubits atômicos. Foi escolhido um sistema de dois átomos de dois níveis em duas cavidades. O estado inicial do sistema é dado por dois átomos emaranhados, onde cada átomo interage com o campo quantizado da cavidade que ocupa. O sistema não tem dissipação, isso permite observar o efeito de morte súbita e renascimento do emaranhamento, que oferece um contexto interessante para estudar a dinâmica das correlações quânticas e verificar por meio do cálculo da discordância quântica do sistema de dois qubits, que existem correlações quânticas além do emaranhamento presentes entre os átomos durante a evolução do sistema. A dinâmica dentro de cada cavidade é governada pelo Hamiltoniano de Jaynes-Cummings onde ele é simplificado usando as aproximações dipolar e da onda girante. As cavidades são preparadas no estado de vácuo inicialmente e são separadas (não apresentam interação). São calculadas as funções de onda do estado atômico composto, assim como de cada átomo, e as expressões analíticas das entropias de Von Neumann dos estados envolvidos na definição de discordância quântica. Apresentam-se expressões analíticas para a entropia condicional, e a discordância quântica. São obtidas expressões analíticas aproximadas para a entropia condicional dado um conjunto completo de medidas, e a discordância quântica entre os estados atômicos, por meio da entropia linear. Foram calculadas soluções numéricas para as equações que correspondem a discordância quântica sendo plotadas e comparadas junto com outras correlações dentro do sistema. Os cálculos numéricos foram realizados com um programa escrito em Fortran para dois casos de emaranhamento inicial dos átomos.

3.1 Evolução temporal de dois átomos em cavidades independentes

Na seção 2.13 foi obtido o operador para a evolução do estado de um átomo interagindo com o campo quantizado de uma cavidade. Como os átomos estão em cavidades diferentes seus estados evoluem de forma independente. Dado que as cavidades são independentes então a evolução unitária que descreve o sistema composto é dada por $\hat{U}(t) = \hat{U}_1(t) \otimes \hat{U}_2(t)$, onde $\hat{U}_1(t)$ e $\hat{U}_2(t)$ são os operadores de evolução unitária que descrevem a evolução temporal de cada átomo com o campo quantizado da cavidade que ocupa.

3.1.1 Estado do sistema composto

Como inicialmente os estados atômicos não apresentam emaranhamento com os estados da cavidade, o estado do sistema composto é o produto tensorial dos estados das cavidades e os estados atômicos $|\Psi\rangle_{comp} = |\phi\rangle_{cav} \otimes |\phi\rangle_{atom}$. É calculada a evolução temporal do estado composto usando o fato de que o operador evolução temporal tem a forma $\hat{U}(t) = \hat{U}_1(t) \otimes \hat{U}_2(t)$. As cavidades são preparadas no estado $|n(0)\rangle = |00\rangle$. O estado inicial do sistema composto é

$$|\Psi(0)\rangle_{comp} = |00\rangle \otimes (\sin \theta |gg\rangle + \cos \theta |ee\rangle) = \sin \theta |0g0g\rangle + \cos \theta |0e0e\rangle, \quad (3.1)$$

e a evolução temporal do estado inicial é dada pela seguinte equação

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle_{comp} &= \hat{U}(t) |\Psi(0)\rangle_{comp} \\ &= (\hat{U}_1(t) \otimes \hat{U}_2(t)) (\sin \theta |0g0g\rangle + \cos \theta |0e0e\rangle) \\ &= \sin \theta \hat{U}_1(t) |0g\rangle \otimes \hat{U}_2(t) |0g\rangle + \cos \theta \hat{U}_1(t) |0e\rangle \otimes \hat{U}_2(t) |0e\rangle. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Utilizando as expressões (2.67) e (2.68) com o número de fótons fixo $n = 0$, a expressão para a função de onda do sistema composto no instante t , em função dos parâmetros que descrevem o sistema átomo-cavidade tem a forma

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle_{comp} &= \sin \theta \exp \left[-i \left(\delta_1 + \delta_2 + \frac{\omega_{c_1} + \omega_{c_2}}{2} \right) t \right] |0g0g\rangle + \cos \theta \exp \left[-i \left(\frac{\omega_{c_1} + \omega_{c_2}}{2} \right) t \right] \\ &\quad \left\{ -\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \left[\frac{\cos((\Omega_1 - \Omega_2)t) - \cos((\Omega_1 + \Omega_2)t)}{2} \right] |1g1g\rangle \right. \\ &\quad - \left[i \cos \varphi_1 \left(\frac{\sin((\Omega_1 + \Omega_2)t) + \sin((\Omega_1 - \Omega_2)t)}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 \left(\frac{\cos((\Omega_1 - \Omega_2)t) - \cos((\Omega_1 + \Omega_2)t)}{2} \right) \right] |1g0e\rangle \\ &\quad - \left[i \cos \varphi_2 \left(\frac{\sin((\Omega_1 + \Omega_2)t) + \sin((\Omega_2 - \Omega_1)t)}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \left(\frac{\cos((\Omega_2 - \Omega_1)t) - \cos((\Omega_1 + \Omega_2)t)}{2} \right) \right] |0e1g\rangle \\ &\quad + \left[\left(\frac{\cos((\Omega_1 + \Omega_2)t) + \cos((\Omega_1 - \Omega_2)t)}{2} \right) \right. \\ &\quad - i \sin \varphi_2 \left(\frac{\sin((\Omega_1 + \Omega_2)t) - \sin((\Omega_1 - \Omega_2)t)}{2} \right) \\ &\quad - i \sin \varphi_1 \left(\frac{\sin((\Omega_1 + \Omega_2)t) + \sin((\Omega_1 - \Omega_2)t)}{2} \right) \\ &\quad \left. \left. - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \left(\frac{\cos((\Omega_1 - \Omega_2)t) - \cos((\Omega_1 + \Omega_2)t)}{2} \right) \right] |0e0e\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

As quantidades $\cos \varphi_i = \frac{\sqrt{\Omega_i^2 - \delta_i^2}}{\Omega_i}$, e $\sin \varphi_i = \frac{\delta_i}{\Omega_i}$, com $i = 1, 2$, são constantes para valores fixos dos parâmetros que descrevem a interação do átomo com o campo dentro de cada cavidade, como a dessintonia $\delta = \frac{\omega_a - \omega_c}{2}$, $\Omega = \sqrt{\delta^2 + g_c^2}$ (onde g_c é a constante de acoplamento entre o átomo e o campo), e ω_{c_1} , ω_{c_2} que são as frequências das cavidades.

3.1.2 Estado de dois átomos

Para encontrar a expressão que descreve a evolução do estado atômico primeiramente foi expressa a equação (3.3) na representação do operador densidade da seguinte maneira,

$$\hat{\rho}^{CA}(t) = |\Psi^{CA}(t)\rangle\langle\Psi^{CA}(t)| = \hat{\rho}^{C_1A_1C_2A_2}(t), \quad (3.4)$$

logo foi realizada a operação do traço parcial sobre a representação matricial do operador densidade, respeito dos graus de liberdade da cavidade. Assim partindo da dinâmica de um estado de quatro qubits foi obtida a evolução temporal de um estado de dois qubits (qubits atômicos),

$$\hat{\rho}^A(t) = \text{tr}_C \hat{\rho}^{CA}(t), \quad (3.5)$$

com $\hat{\rho}^C = \hat{\rho}^{C_1C_2}$ e $\hat{\rho}^A = \hat{\rho}^{A_1A_2}$. Considerando o estado composto atômico para o caso particular onde $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, $\omega_{c_1} = \omega_{c_2} = \omega_c$, e $\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega$, (o que significa que as duas cavidades apresentam as mesmas condições), o estado $\hat{\rho}^{A_1A_2}(t)$ na representação matricial é

$$\rho^{A_1A_2}(t) = \begin{bmatrix} \rho_{gggg}(t) & 0 & 0 & \rho_{ggee}(t) \\ 0 & \rho_{gege}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{egeg}(t) & 0 \\ \rho_{eeeg}(t) & 0 & 0 & \rho_{eeee}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

e os elementos de matriz de $\rho^{A_1A_2}(t)$ em função dos parâmetros que descrevem a interação campo-átomo são,

$$\rho_{gggg}(t) = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \cos^4 \varphi \left(\frac{1 - \cos(2\Omega t)}{2} \right)^2, \quad (3.7)$$

$$\rho_{gege}(t) = \rho_{egeg}(t) = \cos^2 \theta \left[\frac{\cos^2 \varphi \sin^2(2\Omega t)}{4} + \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \left(\frac{1 - \cos(2\Omega t)}{2} \right)^2 \right], \quad (3.8)$$

$$\rho_{eeee}(t) = \cos^2 \theta \left[\left(\left(\frac{1 + \cos(2\Omega t)}{2} \right) - \sin^2 \varphi \left(\frac{1 - \cos(2\Omega t)}{2} \right) \right)^2 + \sin^2 \varphi \sin^2(2\Omega t) \right], \quad (3.9)$$

$$\rho_{ggee}(t) = \sin \theta \cos \theta \exp[2i(\delta + \omega_c)t] \left[\left(\frac{1 + \cos(2\Omega t)}{2} \right) - \sin^2 \varphi \left(\frac{1 - \cos(2\Omega t)}{2} \right) + i \sin \varphi \sin(2\Omega t) \right], \quad (3.10)$$

$$\rho_{eeeg}(t) = \sin \theta \cos \theta \exp[-2i(\delta + \omega_c)t] \left[\left(\frac{1 + \cos(2\Omega t)}{2} \right) - \sin^2 \varphi \left(\frac{1 - \cos(2\Omega t)}{2} \right) - i \sin \varphi \sin(2\Omega t) \right], \quad (3.11)$$

3.2 Discordância quântica aproximada para o estado atômico

$$\rho^{A_1 A_2}(t)$$

Na seção 2.12 a discordância quântica foi definida como sendo a diferença das generalizações quânticas de duas expressões (classicamente equivalentes) para a informação conjunta, $Q(\rho^{A_1} : \rho^{A_2}) = S(\rho^{A_2}) + S(\rho^{A_1|A_2}) - S(\rho^{A_1 A_2})$, sendo $S(\rho)$ a entropia de Von Neumann dos estados envolvidos na definição da discordância. Substituindo a entropia de Von Neumann pela entropia linear na definição da discordância quântica, temos a seguinte expressão aproximada para a discordância quântica,

$$Q_L(\rho^{A_1} : \rho^{A_2}) = S_L(\rho^{A_2}) + S_L(\rho^{A_1|A_2}) - S_L(\rho^{A_1 A_2}), \quad (3.12)$$

onde $S_L(\rho)$ é a entropia linear do estado ρ , e $S_L(\rho^{A_1|A_2})$ corresponde a entropia linear do sistema A_1 , após de uma medida completa feita no espaço do sistema A_2 e minimizada em função dos parâmetros que descrevem os operadores de medida numa base arbitraria. Neste caso os operadores de medida que agem sobre o sistema A_2 são operadores de medida projetiva .

Para obter a discordância quântica do estado $\rho^{A_1 A_2}(t)$ dado pela equação (3.6) primeiramente se reduz o estado $\widehat{\rho}^{A_1 A_2}(t)$ para o estado $\rho^{A_2}(t) = \text{tr}_{A_1} \rho^{A_1 A_2}(t)$, que tem a forma,

$$\rho^{A_2}(t) = \begin{bmatrix} \rho_{gg}^{A_2}(t) & 0 \\ 0 & \rho_{ee}^{A_2}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

tendo por elementos de matriz as expressões,

$$\rho_{gg}^{A_2} = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \cos^2 \varphi \left(\frac{1 - \cos(2\Omega t)}{2} \right), \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \rho_{ee}^{A_2} = & \cos^2 \theta \left[\left(\frac{1 + \cos(2\Omega t)}{2} \right)^2 - \frac{\sin^2 \varphi}{2} \left(\frac{1 - \cos(2\Omega t)}{2} \right) (1 + 3 \cos(2\Omega t)) \right. \\ & \left. + \frac{\sin^2(2\Omega t)}{4} (4 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

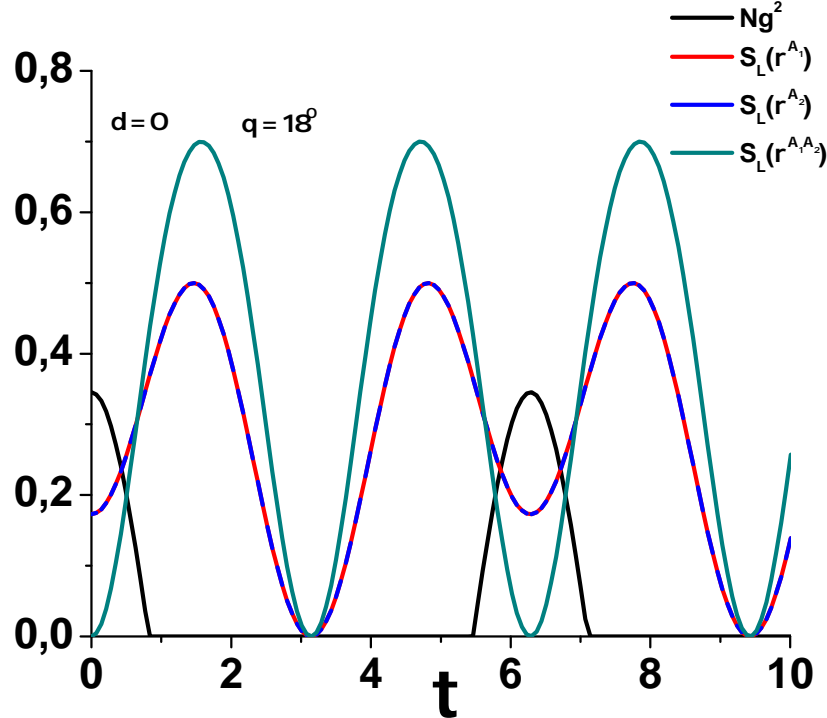
Logo obtêm-se as expressões para as entropias lineares S_L de $\rho^{A_1 A_2}(t)$ e $\rho^{A_2}(t)$. Em função dos elementos de matriz da equação (3.6) as respectivas entropias são

$$\begin{aligned} S_L(\rho^{A_1 A_2}(t)) = & 1 - (2|\rho_{ggee}(t)|^2 + \rho_{gggg}^2(t) + \rho_{gege}^2(t) \\ & + \rho_{egeg}^2(t) + \rho_{eeee}^2(t)), \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$S_L(\rho^{A_2}(t)) = 1 - ([\rho_{gggg}(t) + \rho_{egeg}(t)]^2 + [\rho_{gege}(t) + \rho_{eeee}(t)]^2). \quad (3.17)$$

A figura 1 mostra o quadrado da negatividade global $N_g^2(\rho^{A_1 A_2})$ (linha preta), a entropia linear $S_L(\rho^{A_1})$ (linha vermelha), a entropia linear $S_L(\rho^{A_2})$ (linha azul), e a entropia linear $S_L(\rho^{A_1 A_2})$ (linha verde) plotados como função do parâmetro de interação $\tau = g_c t$ que é o produto da constante de interação g_c com a duração da interação t . A figura corresponde ao caso ressonante $\delta = 0$, e um estado inicial caracterizado por $\theta = 18^\circ$. Observa-se o fenômeno de morte súbita e renascimento do emaranhamento (linha preta) que é quantificado pela negatividade global, onde foi usada a equação (2.16) como medida de emaranhamento entre os qubits atômicos. No gráfico se vê que o emaranhamento vai para zero para $\tau = 0,8$ e permanece zero até $\tau = 5,5$, quando ocorre o renascimento do emaranhamento. O máximo valor do emaranhamento é atingido quando $\tau = 6,3$ e nesse ponto o estado volta para o estado inicial com emaranhamento $N_g^2 = 0,35$. Neste caso a negatividade representa o emaranhamento livre entre os qubits atômicos. Em geral ao contrário do emaranhamento, outras expressões plotadas mostram uma evolução unitária com periodicidade fixa. Para os valores $\tau = 3,15$ e $\tau = 9,45$ todas as entropias lineares vão para zero, logo para esses valores de τ o estado do sistema composto é puro e separável.

Figura 1 – Quadrado da negatividade $N_g^2(\rho^{A_1 A_2})$, entropia $S_L(\rho^{A_1})$, entropia $S_L(\rho^{A_2})$ e entropia $S_L(\rho^{A_1 A_2})$ como função do parâmetro de interação ($\tau = g_c t$) para $\delta = 0$ e estado inicial atômico com $\theta = 18^\circ$.



No seguinte passo procura-se a expressão para a aproximação da entropia que depende dos parâmetros de um conjunto de operadores de medida aplicado, $S_L[\rho^{A_1 A_2}(t)]_{\widehat{M}_i}$. Primeiramente são obtidos os estados condicionados $[\rho^{A_1 A_2}(t)]_{\widehat{M}_i}$, onde o índice i corresponde a um operador de medida \widehat{M}_i . Para isso são aplicados operadores

de medida projetiva sobre o subsistema A_2 do estado composto $\rho^{A_1A_2}(t)$. Os operadores de medida $|g\rangle\langle g|$ e $|e\rangle\langle e|$ da base atômica são levadas para uma base arbitrária por meio da transformação unitária $\widehat{V} = t\widehat{I} + i\vec{y}\widehat{\sigma}$, onde t é um escalar, \vec{y} é um vetor arbitrário, $\widehat{\sigma}$ são os operadores de Pauli, e \widehat{I} é o operador identidade. Dessa forma se obtêm os operadores de medida em uma base arbitrária $\widehat{M}_g = V|g\rangle\langle g|V^\dagger$ e $\widehat{M}_e = V|e\rangle\langle e|V^\dagger$. Devido a unitariedade de V os escalares t, y_1, y_2, y_3 tem a relação $t^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$, e os operadores de medida tem a forma matricial,

$$\widehat{M}_g = \begin{bmatrix} t^2 + y_3^2 & -(t + iy_3)(iy_1 + y_2) \\ (t - iy_3)(iy_1 - y_2) & y_1^2 + y_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b^* & c \end{bmatrix}, \quad (3.18)$$

e

$$\widehat{M}_e = \begin{bmatrix} y_1^2 + y_2^2 & (t + iy_3)(iy_1 + y_2) \\ (t - iy_3)(iy_1 - y_2) & t^2 + y_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -b \\ -b^* & a \end{bmatrix}, \quad (3.19)$$

onde os elementos de matriz dos operadores de medida estão relacionados da forma $a + c = 1$ e $|b|^2 = a.c$.

São aplicados os operadores de medida \widehat{M}_g e \widehat{M}_e do espaço correspondente ao subsistema A_2 sobre o estado composto $\widehat{\rho}^{A_1A_2}(t)$, que resultam nos estados $[\rho^{A_1A_2}(t)]_{\widehat{M}_g}$ e $[\rho^{A_1A_2}(t)]_{\widehat{M}_e}$. Esses estados são normalizados dividindo pelas probabilidades p_g e p_e respectivamente. Logo por meio da operação de traço parcial das matrizes que representam os estados, respeito dos graus de liberdade de A_2 , são obtidos os seguintes estados reduzidos $(\rho^{A_1|A_2}(t))_{\widehat{M}_g}$ e $(\rho^{A_1|A_2}(t))_{\widehat{M}_e}$, que tem a forma matricial

$$(\rho^{A_1|A_2}(t))_{\widehat{M}_g} = \frac{1}{p_g} \begin{bmatrix} a\rho_{gggg}(t) + c\rho_{gege}(t) & b^*\rho_{ggee}(t) \\ b\rho_{eeeg}(t) & a\rho_{egeg}(t) + c\rho_{eeee}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

e

$$(\rho^{A_1|A_2}(t))_{\widehat{M}_e} = \frac{1}{p_e} \begin{bmatrix} c\rho_{gggg}(t) + a\rho_{gege}(t) & -b^*\rho_{ggee}(t) \\ -b\rho_{eeeg}(t) & c\rho_{egeg}(t) + a\rho_{eeee}(t) \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

onde

$$p_g = \text{tr}[\widehat{M}_g \widehat{\rho}^{A_1A_2}(t)] = [\rho_{gggg}(t) + \rho_{eeeg}(t)]a + [\rho_{gege}(t) + \rho_{eeee}(t)]c, \quad (3.22)$$

$$p_e = \text{tr}[\widehat{M}_e \widehat{\rho}^{A_1A_2}(t)] = [\rho_{gege}(t) + \rho_{eeee}(t)]a + [\rho_{gggg}(t) + \rho_{egeg}(t)]c. \quad (3.23)$$

Obtidas as expressões dos estados reduzidos $(\rho^{A_1|A_2}(t))_{\widehat{M}_g}$ e $(\rho^{A_1|A_2}(t))_{\widehat{M}_e}$, são calculadas suas respectivas entropias lineares,

$$S_L \left[(\rho^{A_1|A_2}(t))_{\widehat{M}_g} \right] = 1 - \frac{1}{p_g^2} (a^2(\rho_{gggg}^2(t) + \rho_{eeeg}^2(t)) + 2ac(\rho_{gggg}(t)\rho_{gege}(t) + \rho_{ggee}(t)\rho_{eeeg}(t) + \rho_{eeeg}(t)\rho_{eeee}(t)) + c^2(\rho_{gege}^2(t) + \rho_{eeee}^2(t))), \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned}
S_L \left[\left(\rho^{A_1 | A_2}(t) \right)_{\widehat{M}_e} \right] &= 1 - \frac{1}{p_e^2} (c^2 (\rho_{gggg}^2(t) + \rho_{egeg}^2(t)) + 2ac (\rho_{gggg}(t) \rho_{gege}(t) + \rho_{ggee}(t) \rho_{eeeg}(t)) \\
&\quad + \rho_{egeg}(t) \rho_{eeee}(t)) + a^2 (\rho_{gege}^2(t) + \rho_{eeee}^2(t)),
\end{aligned} \tag{3.25}$$

para no seguinte passo minimizar a expressão de $S_L \left[\rho^{A_1 | A_2}(t) \right]_{\widehat{M}}$, ou seja obter os valores do parâmetro a que minimizam a entropia linear condicionada por um conjunto de medidas,

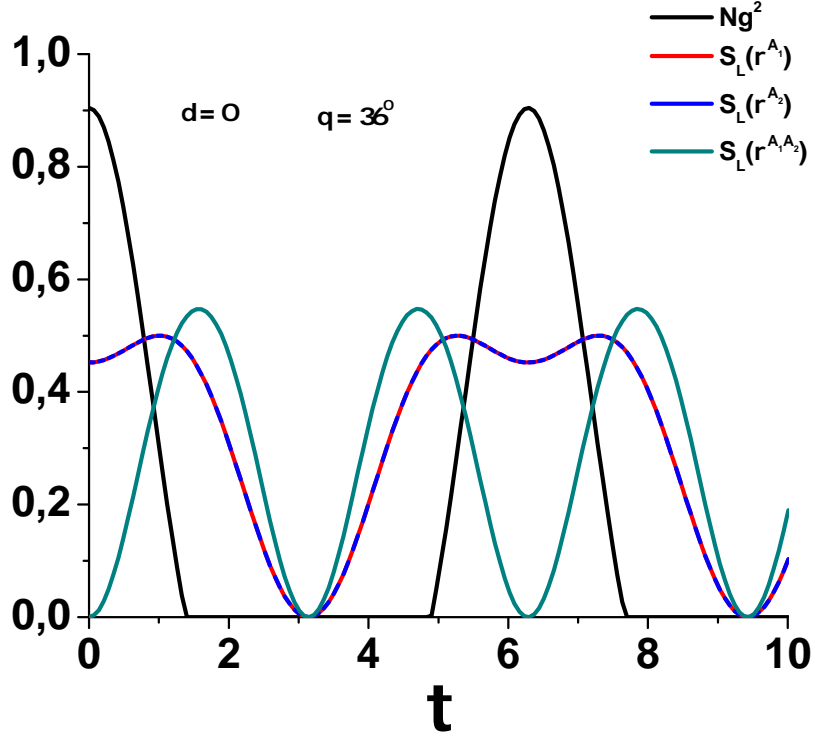
$$S_L \left[\rho^{A_1 | A_2}(t) \right]_{\widehat{M}} = p_g S_L \left[\left(\rho^{A_1 / A_2}(t) \right)_{\widehat{M}_g} \right] + p_e S_L \left[\left(\rho^{A_1 / A_2}(t) \right)_{\widehat{M}_e} \right]. \tag{3.26}$$

Encontrar os valores do parâmetro a que minimizam a função, corresponde a determinar os valores do operador de medida que menos perturbam o sistema, primeiramente para isso são procurados os extremos da função, usando a condição de extremo,

$$\frac{dS_L \left[\rho^{A_1 / A_2}(t) \right]_{\widehat{M}}}{da} = 0. \tag{3.27}$$

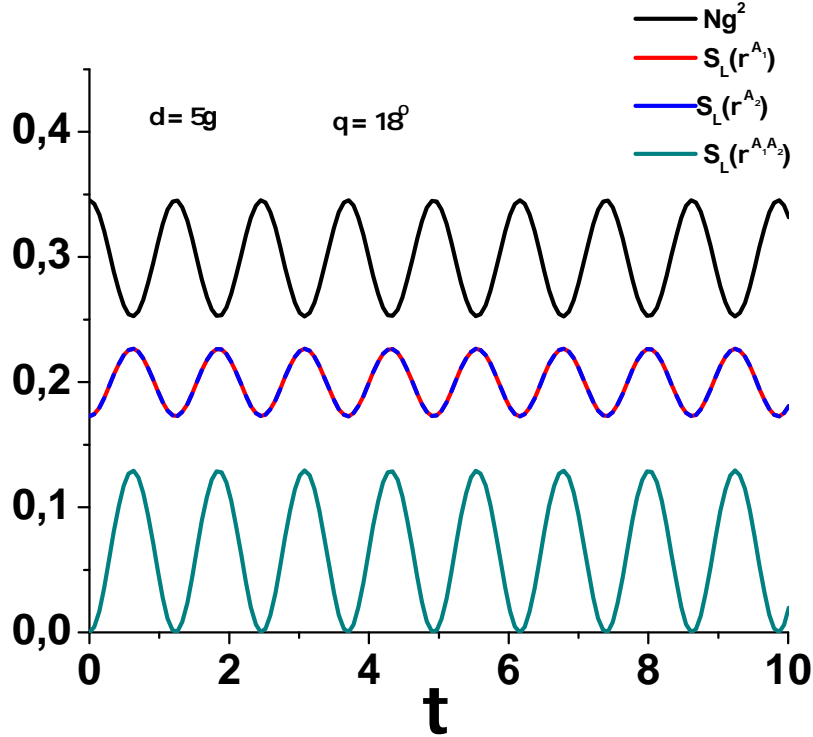
A figura 2 mostra a evolução temporal das entropias lineares $S_L(\rho^{A_1})$, $S_L(\rho^{A_2})$, $S_L(\rho^{A_1 A_2})$, e do quadrado da negatividade $N_g^2(\rho^{A_1 A_2})$ como função do parâmetro de interação τ para o caso ressonante ($\delta = 0$), com o estado atômico inicial dado por $\theta = 36^\circ$. Se observa que o sistema atômico apresenta um emaranhamento inicial maior do que tem o estado atômico inicial dado por $\theta = 18^\circ$, e uma diminuição do período de tempo para o qual o emaranhamento é zero. O fenômeno de morte súbita do emaranhamento ocorre para o valor do parâmetro de interação $\tau = 1,4$, e o emaranhamento permanece zero até $\tau = 4,9$, dando passo ao renascimento do emaranhamento. A morte súbita novamente ocorre em $\tau = 7,7$. As entropias lineares no sistema mostram uma evolução unitária ao contrario do que acontece com o emaranhamento. Para valores de $\tau = 3,14$ e $\tau = 9,43$ todas as entropias vão para zero, em ambos casos isso ocorre para o intervalo de tempo no qual o emaranhamento é zero, logo para esses valores de τ o estado do sistema composto é puro e separável.

Figura 2 – Quadrado da negatividade global $N_g^2(\rho^{A_1A_2})$, entropia $S_L(\rho^{A_1})$, entropia $S_L(\rho^{A_2})$, e entropia $S_L(\rho^{A_1A_2})$ como função do parâmetro de interação τ , para um estado atômico inicial caracterizado por $\theta = 36^\circ$, no caso ressonante.



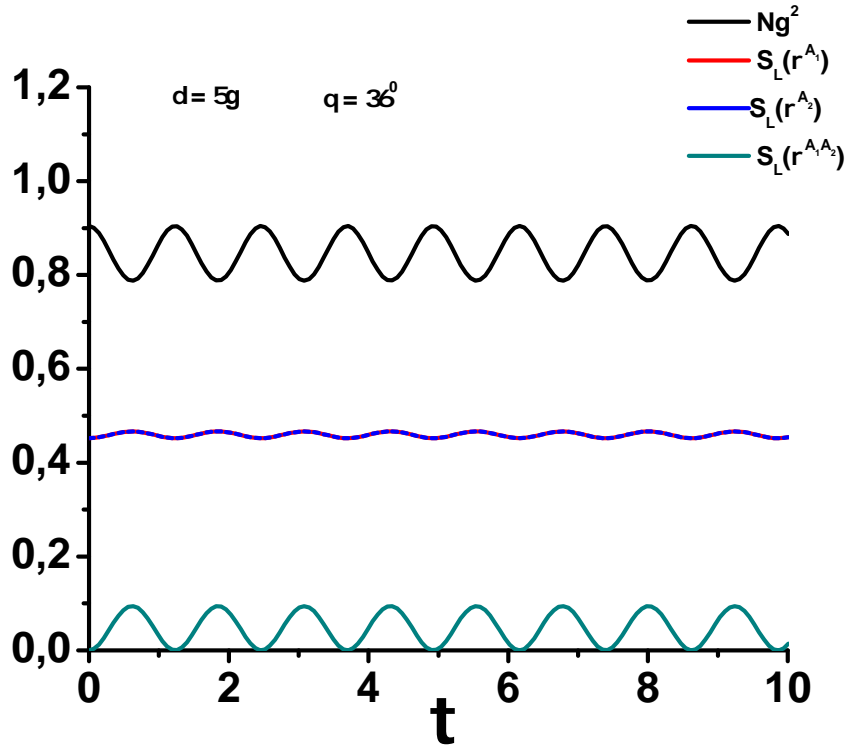
A figura 3 apresenta o quadrado da negatividade global $N_g^2(\rho^{A_1A_2})$, a entropia linear $S_L(\rho^{A_1})$, a entropia linear $S_L(\rho^{A_2})$ e a entropia linear $S_L(\rho^{A_1A_2})$ plotadas como função do parâmetro de interação τ , para um sistema caracterizado por o estado atômico inicial com $\theta = 18^\circ$ e uma dessintonia $\delta = 5g_c$. Com a escolha de um valor apropriado do parâmetro de dessintonia se vê que morte súbita do emaranhamento (linha preta) é controlada, e o emaranhamento mostra uma evolução unitária, diferente do caso ressonante. Logo o estado dos átomos continua emaranhado para qualquer valor de τ . As entropias lineares dos estados ρ^{A_1} (linha vermelha) e ρ^{A_2} (linha azul) mostram que esses estados são estados mistos independente de τ . Para o estado composto $\rho^{A_1A_2}$ (linha verde) a entropia linear vai para zero para valores de τ que concordam com valores máximos do emaranhamento.

Figura 3 – Quadrado da negatividade global $N_g^2(\rho^{A_1 A_2})$, entropia $S_L(\rho^{A_1})$, entropia $S_L(\rho^{A_2})$, e entropia $S_L(\rho^{A_1 A_2})$ como função do parâmetro de interação τ , para um estado atômico inicial caracterizado por $\theta = 18^\circ$, e dessintonia $\delta = 5g_c$.



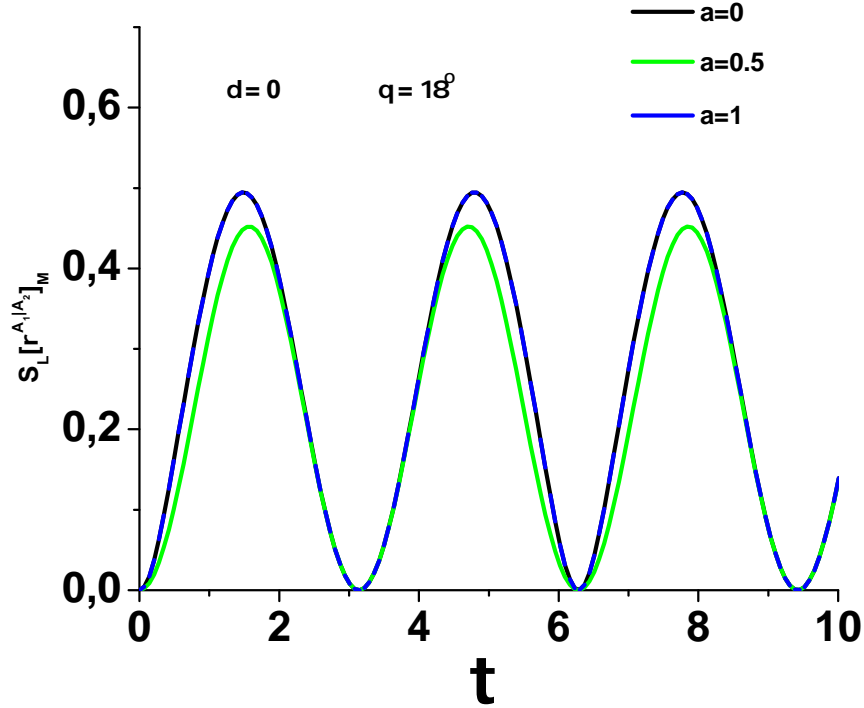
Na figura 4 são plotadas as entropias lineares dos estados reduzidos ρ^{A_1} , ρ^{A_2} e do estado composto $\rho^{A_1 A_2}$ assim como o quadrado da negatividade global $N_g^2(\rho^{A_1 A_2})$ em função do parâmetro de interação τ , para um estado composto inicial caracterizado por $\theta = 36^\circ$, e com dessintonia igual a $\delta = 5g_c$. O fenômeno de morte súbita do emaranhamento novamente é controlado pela escolha de um valor apropriado do parâmetro de dessintonia. Todas as expressões plotadas mostram uma evolução unitária. Para o estado atômico inicial dado por $\theta = 36^\circ$ se observa que o emaranhamento inicial entre os átomos é muito maior $N_g^2(\rho^{A_1 A_2}) = 0,90$, que no caso onde o estado inicial $\rho^{A_1 A_2}$ é dado por $\theta = 18^\circ$, $N_g^2(\rho^{A_1 A_2}) = 0,34$. As entropias dos estados ρ^{A_1} e ρ^{A_2} (linhas vermelha e azul) nunca vão para zero, logo eles são estados mistos independente do valor de τ . A entropia linear do estado composto (linha verde) vai para zero para valores τ onde o emaranhamento é máximo.

Figura 4 – Quadrado da negatividade global $N_g^2(\rho^{A_1A_2})$, entropia $S_L(\rho^{A_1})$, entropia $S_L(\rho^{A_2})$, e entropia $S_L(\rho^{A_1A_2})$ como função do parâmetro de interação τ , para um estado atômico inicial caracterizado por $\theta = 36^\circ$, e dessintonia $\delta = 5g_c$.



Para a determinação dos extremos da função (3.26) é usado o fato de que a função apresenta uma simetria em relação a troca das variáveis $a = 1 - c$ e c , o que mostra que os extremos da função encontram-se nos pontos $a = c = \frac{1}{2}$ ou $a = 0, a = 1$, sem ter que calcular as raízes da equação (3.27). Logo usando esses valores extremos, é plotada a expressão para a entropia que depende de um conjunto de medidas para assim identificar o valor que minimiza essa entropia.

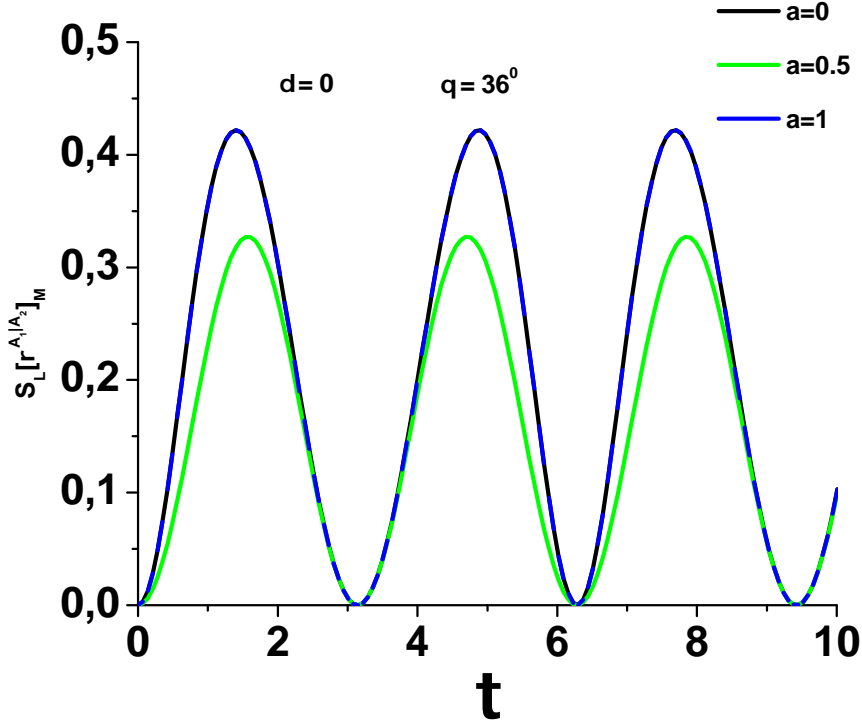
Figura 5 – Entropia $S_L[\rho^{A_1 A_2}]_{\widehat{M}}$ em função do parâmetro de interação τ , para $\delta = 0$, $\theta = 18^\circ$ e valores do parâmetro de medida a onde a entropia tem extremos.



A figura 5 mostra a entropia linear do estado $[\rho^{A_1 A_2}(t)]_{\widehat{M}}$ como função do parâmetro de interação τ , para os valores de a onde as curvas da entropia linear são extremos. O gráfico mostra que a entropia linear do qubit A_1 que depende de um conjunto de medidas, é minimizada para o valor do parâmetro de medida $a = 0.5$ (linha verde). O estado atômico inicial é caracterizado por $\theta = 18^\circ$, e o sistema apresenta ressonância $\delta = 0$.

A figura 6 apresenta a entropia linear do estado $[\rho^{A_1 A_2}(t)]_{\widehat{M}}$ no caso ressonante $\delta = 0$, e um estado atômico inicial caracterizado por $\theta = 36^\circ$ como função do parâmetro de interação τ , para valores do parâmetro de medida a que extremizam a entropia linear. A figura 6 corrobora que a entropia linear do qubit A_1 que depende de um conjunto completo de medidas $S_L[\rho^{A_1 A_2}]_{\widehat{M}}$, é mínima para o valor do parâmetro de medida $a = 0.5$.

Figura 6 – Entropia $S_L[\rho^{A_1|A_2}]_{\widehat{M}}$ em função do parâmetro de interação τ , para $\delta = 0$, $\theta = 36^\circ$ e valores do parâmetro de medida a onde a entropia tem extremos.



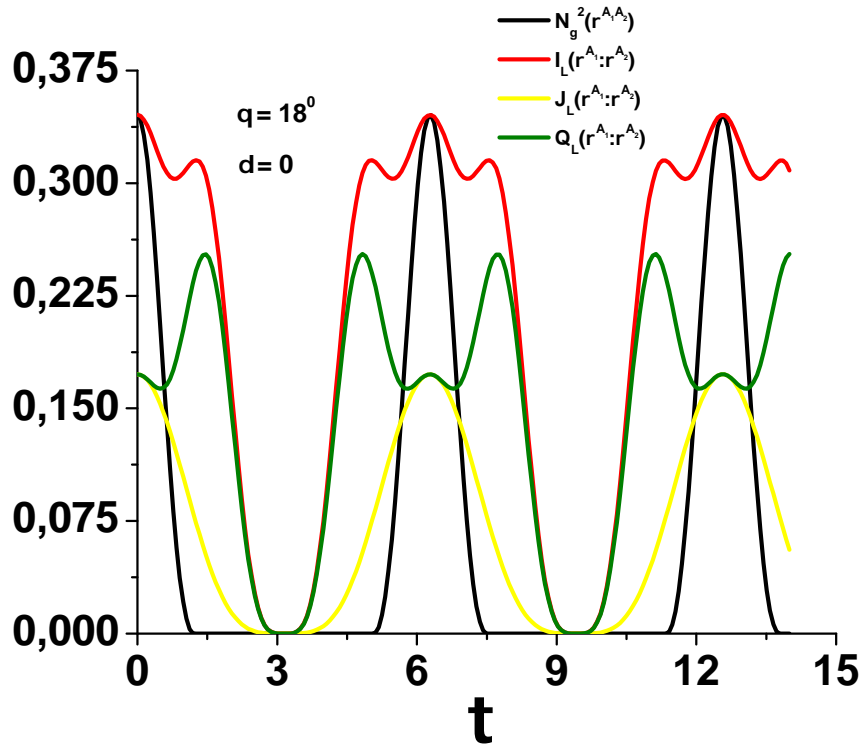
Obtido o valor do parâmetro medida $a = 0,5$ que minimiza a entropia linear $S_L[\rho^{A_1|A_2}(t)]_{\widehat{M}}$, é possível escrever a expressão para a entropia condicional, substituindo os valores dos parâmetros de medida $a = c = 0,5$, na expressão da entropia linear que depende de medidas, tendo em conta que a entropia condicional $S_L[\rho^{A_1|A_2}(t)]$ é definida como $S_L[\rho^{A_1|A_2}(t)] = \min_{\widehat{M}} S_L[\rho^{A_1|A_2}(t)]_{\widehat{M}}$. Logo a entropia condicional tem a forma,

$$\begin{aligned}
 S_L[\rho^{A_1|A_2}(t)] &= 1 - \frac{1}{4} [\rho_{gggg}^2(t) + \rho_{gege}^2(t) + \rho_{egeg}^2(t) + \rho_{eeee}^2(t)] \\
 &\quad - \frac{1}{2} [(\rho_{gggg}(t)\rho_{gege}(t) + \rho_{egeg}(t)\rho_{eeee}(t) + |\rho_{ggee}(t)|^2)] \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

Usando as equações (3.16), (3.17) e (3.18), escreve-se a expressão para a aproximação linear da discordância quântica Q_L . Ela é explicitada em função dos elementos da matriz (3.6) da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
 Q_L(\rho^{A_1} : \rho^{A_2}) &= 1 - \frac{1}{4} [\rho_{gggg}^2(t) + \rho_{gege}^2(t) + \rho_{egeg}^2(t) + \rho_{eeee}^2(t)] \\
 &\quad - \frac{1}{2} [(\rho_{gggg}(t)\rho_{gege}(t) + \rho_{egeg}(t)\rho_{eeee}(t) + |\rho_{ggee}(t)|^2)] \\
 &\quad + 2[|\rho_{ggee}(t)|^2 - \rho_{gggg}(t)\rho_{egeg}(t) - \rho_{eeee}(t)\rho_{gege}(t)]. \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

Figura 7 – Quadrado da negatividade global $N_g^2(\rho^{A_1 A_2})$, discordância quântica aproximada $Q_L(\rho^{A_1} : \rho^{A_2})$, informação conjunta $I_L(\rho^{A_1}; \rho^{A_2})$ e correlação clássica $J_L(\rho^{A_1} : \rho^{A_2})$ aproximada para o estado $\hat{\rho}^{A_1 A_2}$ como função do parâmetro de interação τ . O estado atômico inicial é dado por $\theta = 18^\circ$, e o sistema apresenta ressonância.

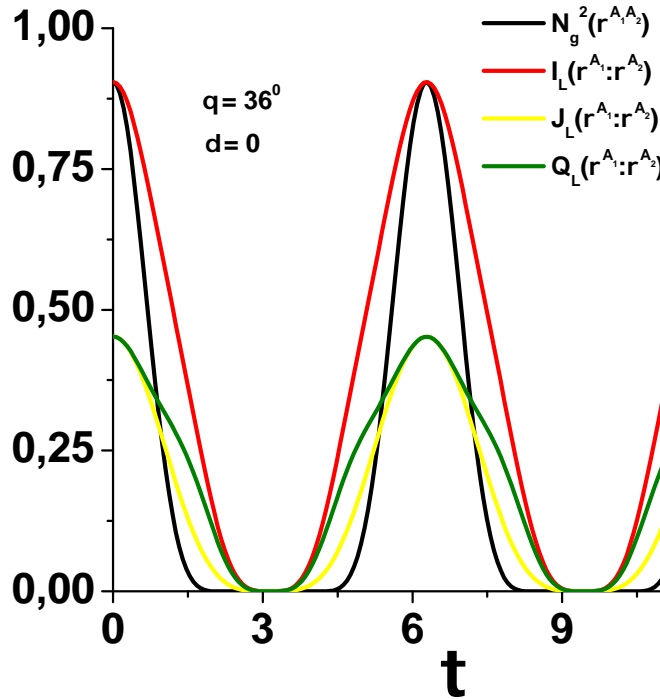


A figura 7 mostra o quadrado da negatividade $N_g^2(\rho^{A_1 A_2})$, a informação conjunta aproximada $I_L(\rho^{A_1}; \rho^{A_2})$, a correlação clássica aproximada $S_L(\rho^{A_1|A_2})$ e a discordância quântica aproximada $Q_L(\rho^{A_1} : \rho^{A_2})$ no estado de dois qubits atômicos, com um estado atômico inicial composto dado por $\theta = 18^\circ$. As expressões são plotadas como função do parâmetro de interação τ . A correlação total aproximada dada pela informação conjunta (linha vermelha) atinge valores máximos periódicos, e nesses períodos a negatividade também atinge valores máximos, e o estado volta para o estado inicial. Se observa que existem intervalos onde a negatividade (linha preta) é zero. Dentro desses intervalos a discordância quântica (linha verde) possui um valor finito positivo, excepto num ponto dentro de cada intervalo, onde é zero.

Na figura 8 se apresenta o quadrado da negatividade global (linha preta), a discordância quântica aproximada (linha verde), a informação conjunta aproximada (linha vermelha), e a correlação clássica aproximada (linha amarela) plotadas como função do parâmetro de interação τ . Neste caso o estado atômico inicial é dado por $\theta = 36^\circ$, e o sistema apresenta ressonância $\delta = 0$. Se observa que existe uma diminuição do período no qual a negatividade é zero comparado com a figura 7, assim como um aumento das correlações presentes. Também se verifica a existência de correlações quânticas (por meio

da discordância) para intervalos onde a negatividade é zero.

Figura 8 – Quadrado da negatividade global $N_g^2(\rho^{A_1A_2})$, discordância quântica aproximada $Q_L(\rho^{A_1} : \rho^{A_2})$, informação conjunta $I_L(\rho^{A_1} : \rho^{A_2})$ e correlação clássica $J_L(\rho^{A_1} : \rho^{A_2})$ aproximada para o estado $\hat{\rho}^{A_1A_2}$ como função do parâmetro de interação τ . O estado atômico inicial é dado por $\theta = 36^\circ$ e o sistema apresenta ressonância.



3.3 Discordância quântica no estado atômico $\hat{\rho}^{A_1A_2}(t)$

Nesta seção, é calculada a discordância quântica entre os estados atômicos do sistema composto $\hat{\rho}^{A_1A_2}(t)$ dada pela expressão (3.6), usando a definição da seção 2.12, onde a discordância quântica é definida como sendo,

$$Q(\rho^{A_1} : \rho^{A_2}) = S(\rho^{A_2}) + S(\rho^{A_1|A_2}) - S(\rho^{A_1A_2}).$$

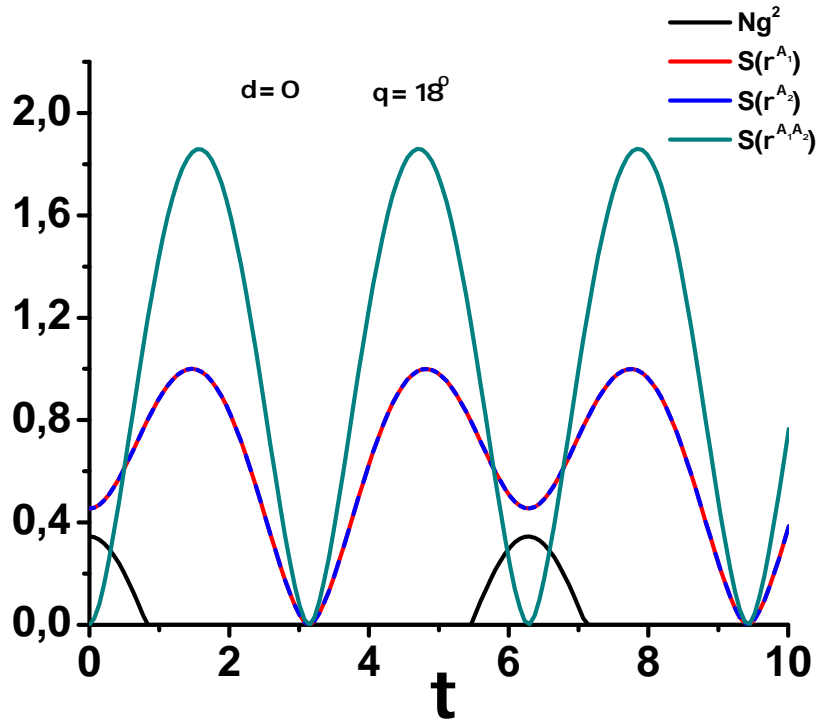
Os estados $\rho^{A_1A_2}(t)$, $\rho^{A_2}(t)$, $[\rho^{A_1|A_2}(t)]_{\hat{M}_g}$ e $[\rho^{A_1|A_2}(t)]_{\hat{M}_c}$ foram obtidos na seção 3.2, equações (3.6), (3.13), (3.20) e (3.21) respectivamente. São calculadas as entropias de Von Neumann desses estados. Primeiramente obtemos as expressões para as entropias de Von Neumann dos estados $\rho^{A_1A_2}(t)$ e $\rho^{A_2}(t)$,

$$\begin{aligned}
S[\rho^{A_1A_2}(t)] = & -\rho_{ggeg}(t)\log_2[\rho_{ggeg}(t)] - \rho_{egeg}(t)\log_2[\rho_{egeg}(t)] \\
& - \frac{1}{2}(\rho_{gggg}(t) + \rho_{eeee}(t))\log_2[\rho_{gggg}(t)\rho_{eeee}(t) - \rho_{ggee}(t)\rho_{eeeg}(t)] \\
& + \frac{1}{2}\sqrt{4\rho_{ggee}(t)\rho_{eeeg}(t) + (\rho_{gggg}(t) - \rho_{eeee}(t))^2} \times \\
& \log_2 \frac{\rho_{gggg}(t) + \rho_{eeee}(t) - \sqrt{4\rho_{ggee}(t)\rho_{eeeg}(t) + (\rho_{gggg}(t) - \rho_{eeee}(t))^2}}{\rho_{gggg}(t) + \rho_{eeee}(t) + \sqrt{4\rho_{ggee}(t)\rho_{eeeg}(t) + (\rho_{gggg}(t) - \rho_{eeee}(t))^2}}. \quad (3.30)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
S[\rho^{A_2}(t)] = & -(\rho_{gggg}(t) + \rho_{egeg}(t))\log_2(\rho_{gggg}(t) + \rho_{egeg}(t)) \\
& - (\rho_{ggeg}(t) + \rho_{eeee}(t))\log_2(\rho_{ggeg}(t) + \rho_{eeee}(t)). \quad (3.31)
\end{aligned}$$

Figura 9 – Quadrado da negatividade global $N_g^2(\rho^{A_1A_2})$, entropia $S(\rho^{A_1})$, entropia $S(\rho^{A_2})$, e entropia $S(\rho^{A_1A_2})$ como função do parâmetro de interação τ , para $\theta = 18^\circ$ e $\delta = 0$.



A figura 9 apresenta a entropia de Von Neumann do estado atômico composto $\rho^{A_1A_2}$, as entropias de Von Neumann dos estados reduzidos ρ^{A_1} e ρ^{A_2} e o quadrado da negatividade do estado atômico composto como função do parâmetro de interação τ , para $\theta = 18^\circ$. A morte súbita e renascimento do emaranhamento é observada novamente para o caso ressonante $\delta = 0$. A morte súbita do emaranhamento ocorre para $\tau = 0,8$, e o renascimento acontece para aproximadamente $\tau = 5,5$. As entropias de Von Neumann dos

estados plotados evoluem de forma unitária. Para valores $\tau = 3, 15$ e $\tau = 9, 45$ as entropias de todos os estados vão para zero, isso coincide com o valor zero para a negatividade global, logo o estado atômico composto é puro e separável para esses instantes.

Seguidamente são obtidas as expressões para as entropias de Von Neumann dos estados do qubit A_1 , condicionadas por medidas feitas sobre o qubit A_2 , $[\rho^{A_1|A_2}(t)]_{\widehat{M}_g}$ e $[\rho^{A_1|A_2}(t)]_{\widehat{M}_e}$. As entropias de Von Neumann desses estados são,

$$S\left[(\rho^{A_1|A_2}(t))_{\widehat{M}_g}\right] = -\left(\frac{1+\xi_g}{2}\right)\log_2\left(\frac{1+\xi_g}{2}\right) - \left(\frac{1-\xi_g}{2}\right)\log_2\left(\frac{1-\xi_g}{2}\right), \quad (3.32)$$

e

$$S\left[(\rho^{A_1|A_2}(t))_{\widehat{M}_e}\right] = -\left(\frac{1+\xi_e}{2}\right)\log_2\left(\frac{1+\xi_e}{2}\right) - \left(\frac{1-\xi_e}{2}\right)\log_2\left(\frac{1-\xi_e}{2}\right), \quad (3.33)$$

com

$$\begin{aligned} p_g &= \text{tr}[\widehat{M}_g \widehat{\rho}^{A_1 A_2}(t)] \\ &= [\rho_{gggg}(t) + \rho_{egeg}(t)]a + [\rho_{gege}(t) + \rho_{eeee}(t)]c, \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} p_e &= \text{tr}[\widehat{M}_e \widehat{\rho}^{A_1 A_2}(t)], \\ &= [\rho_{gege}(t) + \rho_{eeee}(t)]a + [\rho_{gggg}(t) + \rho_{egeg}(t)]c, \end{aligned} \quad (3.35)$$

sendo as probabilidades que normalizam os estados, que resultam da aplicação dos operadores de medida sobre o qubit A_2 do estado $\rho^{A_1 A_2}(t)$. Assim, a expressão geral da entropia de Von Neumann que depende de medidas realizadas sobre o qubit A_2 é,

$$\begin{aligned} S[\rho^{A_1|A_2}(t)]_M &= p_g S\left[(\rho^{A_1|A_2}(t))_{\widehat{M}_g}\right] + p_e S\left[(\rho^{A_1|A_2}(t))_{\widehat{M}_e}\right] \\ &= p_g \left[-\left(\frac{1+\xi_g}{2}\right)\log_2\left(\frac{1+\xi_g}{2}\right) - \left(\frac{1-\xi_g}{2}\right)\log_2\left(\frac{1-\xi_g}{2}\right) \right] \\ &\quad + p_e \left[-\left(\frac{1+\xi_e}{2}\right)\log_2\left(\frac{1+\xi_e}{2}\right) - \left(\frac{1-\xi_e}{2}\right)\log_2\left(\frac{1-\xi_e}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.36)$$

As variáveis ξ_g e ξ_e da equação (3.36) contém os parâmetros de medida a e c . A entropia $S[\rho^{A_1|A_2}(t)]_M$ é minimizada respeito desses parâmetros. Como foi observado na seção anterior, esses parâmetros de medida estão relacionados de maneira que $a + c = 1$ e $|b|^2 = a.c$. As variáveis ξ_g e ξ_e tem a forma,

$$\xi_g = \sqrt{\frac{k_1 a^2 + k_2 c^2 + k_3 a c + 1}{p_g^2}}, \quad (3.37)$$

$$\xi_e = \sqrt{\frac{k_2 a^2 + k_1 c^2 + k_3 a c + 1}{p_e^2}}, \quad (3.38)$$

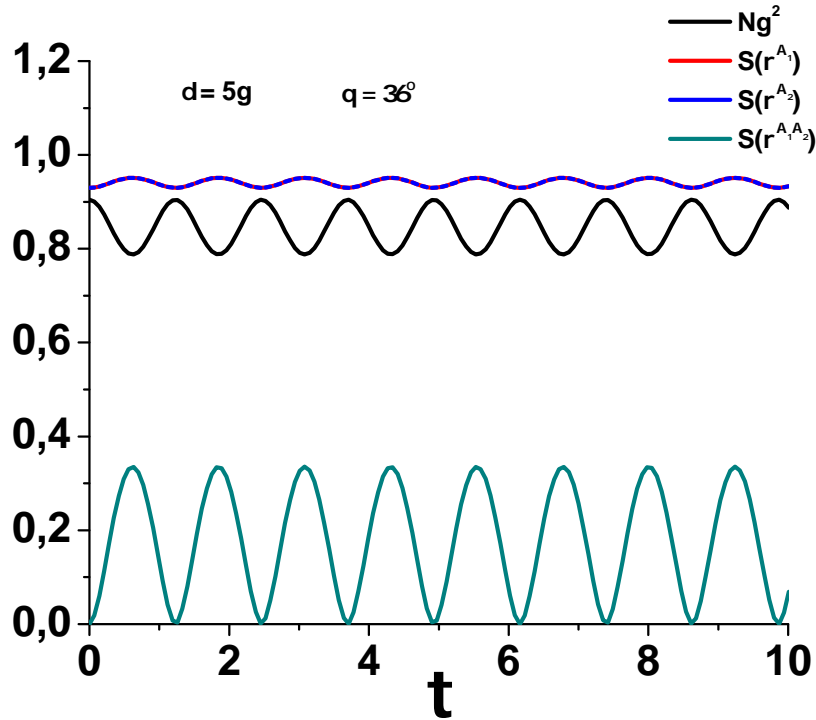
onde k_1 , k_2 e k_3 são quantidades relacionadas com os elementos de matriz da equação (3.6)

$$k_1 = -4\rho_{gggg}(t)\rho_{egeg}(t), \quad (3.39)$$

$$k_2 = -4\rho_{gege}(t)\rho_{eeee}(t), \quad (3.40)$$

$$k_3 = -4(\rho_{gggg}(t)\rho_{eeee}(t) + \rho_{gege}(t)\rho_{egeg}(t) - |\rho_{ggee}(t)|^2) \quad (3.41)$$

Figura 10 – Quadrado da negatividade global $N_g^2(\rho^{A_1A_2})$, entropia $S(\rho^{A_1})$, entropia $S(\rho^{A_2})$, e entropia $S(\rho^{A_1A_2})$ como função do parâmetro de interação τ , para $\theta = 36^\circ$ e $\delta = 5g$.

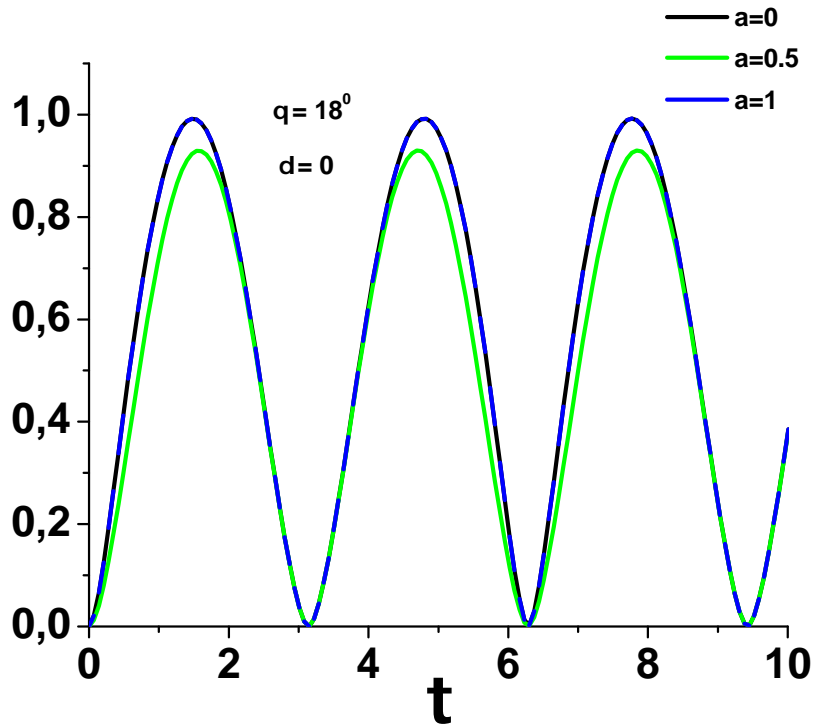


Na figura 10 é plotado o quadrado da negatividade global (linha preta), e as entropias de Von Neumann dos estados $\rho^{A_1}(t)$ (linha vermelha), $\rho^{A_2}(t)$ (linha azul), e $\rho^{A_1A_2}(t)$ (linha verde), para um estado atômico inicial caracterizado por $\theta = 36^\circ$. O fenômeno de morte súbita e renascimento do emaranhamento é controlado incluindo um valor do parâmetro de dessintonia $\delta = 5g$ no sistema. Também observa-se que a entropia de Von Neumann de cada estado atômico (linhas azul e vermelha) é maior do que a entropia de Von Neumann do estado composto (linha verde) para qualquer valor de τ . Todas as expressões plotadas evoluem unitariamente.

Para minimizar a expressão (3.36), requerida na definição da entropia condicional, antes de calcular as derivadas respeito dos parâmetros a e c de forma a encontrar

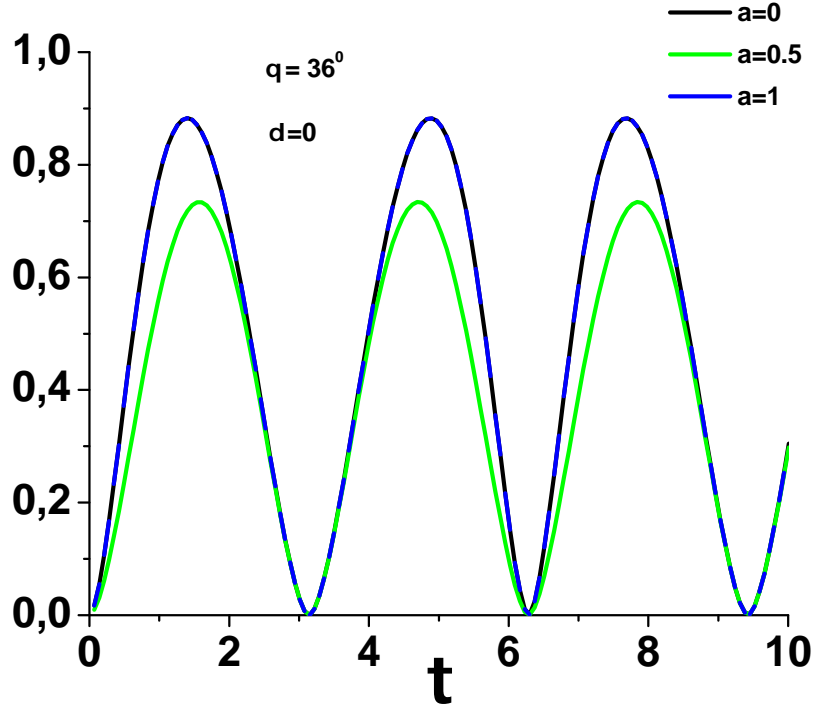
os extremos da entropia $S[\rho^{A_1|A_2}(t)]_{\widehat{M}}$, procede-se a olhar para sua simetria. Nesse sentido a entropia que depende de medidas mostra ser simétrica respeito da troca de variáveis $a = 1 - c$ e $c = 1 - a$, o que significa que ela é par respeito de $(a - c)$. Como consequência dessa simetria se vê que os extremos estão dados por os valores $a = c = \frac{1}{2}$, ou os valores $a = 0$ e $a = 1$. Logo é plotada a entropia que depende de um conjunto de medidas como função do parâmetro de interação τ , para cada valor do parâmetro de medida a que mostra ser um extremo. A figura 11 mostra que a menor das curvas da entropia $S[\rho^{A_1|A_2}]_{\widehat{M}}$ é dada para o valor do parâmetro de medida $a = 0.5$ (linha verde), a figura corresponde ao caso ressonante com um estado atômico inicial dado por $\theta = 18^\circ$.

Figura 11 – Entropia $S[\rho^{A_1|A_2}]_{\widehat{M}}$ como função do parâmetro de interação τ , para $\delta = 0$, $\theta = 18^\circ$ e valores do parâmetro de medida a onde a entropia tem extremos.



A figura 12 corrobora mais uma vez que a entropia condicional é atingida para o valor de $a = 0.5$ (linha verde). Ela é plotada para um estado composto inicial dado por $\theta = 36^\circ$ e com dessintonia $\delta = 5g$. Isso mostra que o valor do parâmetro que minimiza a curva da entropia que depende de um conjunto de medidas não depende do estado atômico inicial nem do parâmetro de dessintonia.

Figura 12 – Entropia $S[\rho^{A_1|A_2}]_{\widehat{M}}$ como função do parâmetro de interação τ , para $\delta = 0$, $\theta = 36^\circ$ e valores do parâmetro de medida a onde a entropia tem extremos.



Uma vez obtidos os valores de a e c são substituídos na expressão (3.36), para escrever a expressão da entropia condicional da seguinte maneira,

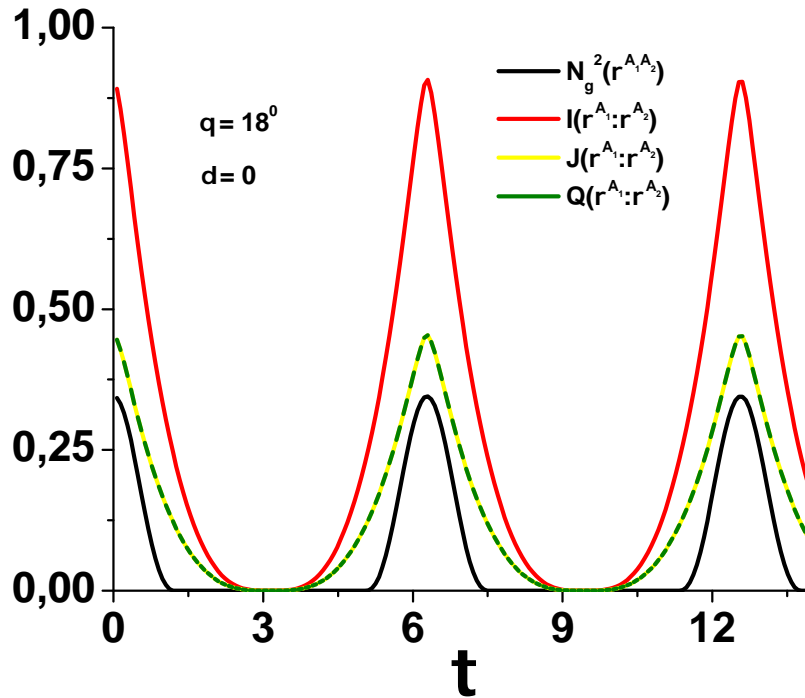
$$S[\rho^{A_1|A_2}(t)] = -2\left(1 + \sqrt{k_1 + k_2 + k_3 + 4}\right) \log_2 \left(\frac{1 + \sqrt{k_1 + k_2 + k_3 + 4}}{2} \right) - 2\left(1 - \sqrt{k_1 + k_2 + k_3 + 4}\right) \log_2 \left(\frac{1 - \sqrt{k_1 + k_2 + k_3 + 4}}{2} \right). \quad (3.42)$$

Tendo calculadas todas as expressões envolvidas na discordância quântica, é explicitada a expressão para a discordância quântica entre dois átomos de dois níveis cada uma numa cavidade separada como sendo,

$$\begin{aligned}
 Q(\rho^{A_1} : \rho^{A_2}) = & -(\rho_{gggg}(t) + \rho_{egeg}(t)) \log_2(\rho_{gggg}(t) + \rho_{egeg}(t)) \\
 & - (\rho_{gege}(t) + \rho_{eeee}(t)) \log_2(\rho_{gege}(t) + \rho_{eeee}(t)) \\
 & - 2 \left(1 + \sqrt{4 + 4[|\rho_{ggee}(t)|^2 - (\rho_{egeg}(t) + \rho_{eeee}(t))(\rho_{gggg}(t) + \rho_{gege}(t))]} \right) \\
 & \times \log_2 \left(\frac{1 + \sqrt{4 + 4[|\rho_{ggee}(t)|^2 - (\rho_{egeg}(t) + \rho_{eeee}(t))(\rho_{gggg}(t) + \rho_{gege}(t))]} }{2} \right) \\
 & - 2 \left(1 - \sqrt{4 + 4[|\rho_{ggee}(t)|^2 - (\rho_{egeg}(t) + \rho_{eeee}(t))(\rho_{gggg}(t) + \rho_{gege}(t))]} \right) \\
 & \times \log_2 \left(\frac{1 - \sqrt{4 + 4[|\rho_{ggee}(t)|^2 - (\rho_{egeg}(t) + \rho_{eeee}(t))(\rho_{gggg}(t) + \rho_{gege}(t))]} }{2} \right) \\
 & + \rho_{gege}(t) \log_2(\rho_{gege}(t)) + \rho_{egeg}(t) \log_2(\rho_{egeg}(t)) \\
 & + \frac{1}{2} (\rho_{gggg}(t) + \rho_{eeee}(t)) \log_2(\rho_{gggg}(t) \rho_{eeee}(t) - |\rho_{ggee}(t)|^2) \\
 & - \frac{1}{2} \sqrt{4|\rho_{ggee}(t)|^2 + (\rho_{gggg}(t) - \rho_{eeee}(t))^2} \\
 & \times \log_2 \left[\frac{\rho_{gggg}(t) + \rho_{eeee}(t) - \sqrt{4|\rho_{ggee}(t)|^2 + (\rho_{gggg}(t) - \rho_{eeee}(t))^2}}{\rho_{gggg}(t) + \rho_{eeee}(t) + \sqrt{4|\rho_{ggee}(t)|^2 + (\rho_{gggg}(t) - \rho_{eeee}(t))^2}} \right].
 \end{aligned}$$

Resultados de cálculos numéricos usando um programa escrito em fortran, são plotadas as figuras 13 e 14. Elas mostram a correlação total que é dada pela informação conjunta (linha vermelha), o emaranhamento dado pelo quadrado da negatividade global (linha preta), a correlação clássica (linha amarela), e a discordância quântica (linha verde). Como no caso dos gráficos plotados na seção anterior para a discordância quântica usando entropia linear, também observa-se que as correlações dependem do estado atômico inicial (3.6). A figura 13 é plotada para o caso onde o estado inicial atômico está caracterizado por $\theta = 18^\circ$, e a figura 14 corresponde a um estado atômico inicial caracterizado por $\theta = 36^\circ$. Se vê que para o caso onde $\theta = 36^\circ$ as correlações atingem valores maiores do que para $\theta = 18^\circ$. As duas figuras mostram o caso ressonante, permitindo o surgimento do fenômeno de morte súbita e renascimento do emaranhamento. Na figura 13 o emaranhamento é zero durante o período $\tau = 1,2$ até $\tau = 5$, onde surge novamente o emaranhamento, logo vai novamente para zero em $\tau = 7,5$, isso mostra uma periodicidade maior que no caso da figura 14 onde o emaranhamento é zero desde $\tau = 1,8$ até $\tau = 4,3$ aproximadamente. Para os dois gráficos é observado que todas as correlações vão para zero nos instantes $\tau = 3,15$ e $\tau = 9,45$. Para esses instantes o estado composto representado nas respectivas figuras são estados separáveis, assim como estados puros segundo a figura 9.

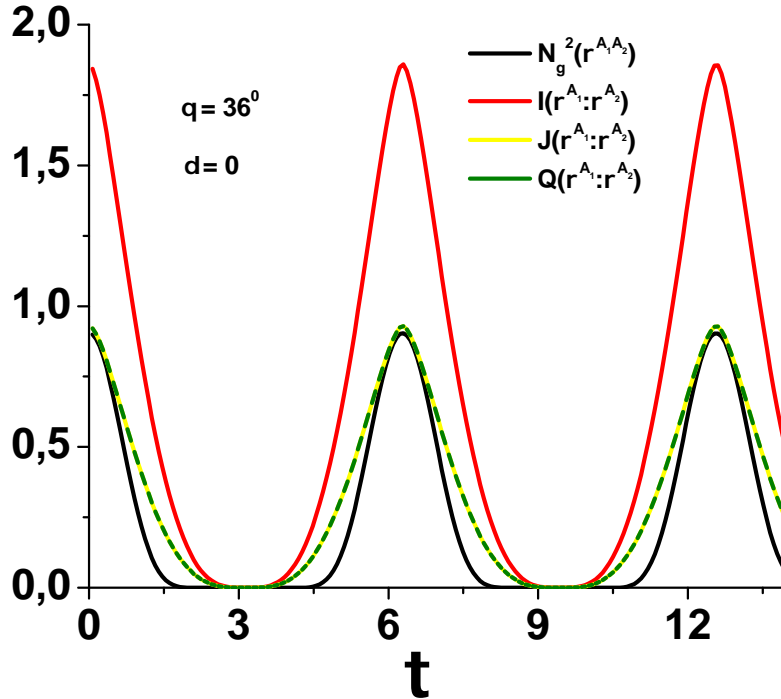
Figura 13 – Quadrado da negatividade global $N_g^2(\rho^{A_1 A_2})$, discordância quântica $Q(\rho^{A_1} : \rho^{A_2})$, informação conjunta $I(\rho^{A_1} : \rho^{A_2})$ e correlação clássica $J(\rho^{A_1} : \rho^{A_2})$ para o estado $\hat{\rho}^{A_1 A_2}$ como função do parâmetro de interação τ . O estado atômico inicial é dado por $\theta = 18^\circ$, e o sistema apresenta ressonância ($\delta = 0$).



Para o estado atômico inicial dado por $\theta = 18^\circ$ com caso ressonante, as curvas da informação conjunta aproximada $I_L(\rho^{A_1}(t) : \rho^{A_2}(t))$, a correlação clássica aproximada $J_L(\rho^{A_1|A_2}(t))$, e a discordância quântica aproximada $Q_L(\rho^{A_1}(t) : \rho^{A_2}(t))$ mostram um comportamento diferente comparando com as curvas das expressões exatas dessas quantidades. Observa-se que $I_L \ll I$, $J_L(\rho^{A_1}(t) : \rho^{A_2}(t)) = Q_L(\rho^{A_1}(t) : \rho^{A_2}(t))$, e $J(\rho^{A_1}(t) : \rho^{A_2}(t)) \neq Q(\rho^{A_1}(t) : \rho^{A_2}(t))$.

No sistema caracterizado por o estado atômico inicial $\theta = 36^\circ$ as curvas das correlações aproximadas plotadas na figura 8 e das correlações plotadas na figura 14 mostram que $I_L \ll I$, $J_L(\rho^{A_1}(t) : \rho^{A_2}(t)) = Q_L(\rho^{A_1}(t) : \rho^{A_2}(t))$ mas $J(\rho^{A_1}(t) : \rho^{A_2}(t)) \neq Q(\rho^{A_1}(t) : \rho^{A_2}(t))$.

Figura 14 – Quadrado da negatividade global $N_g^2(\rho^{A_1 A_2})$, discordância quântica $Q(\rho^{A_1} : \rho^{A_2})$, informação conjunta $I(\rho^{A_1} : \rho^{A_2})$ e entropia condicional $J(\rho^{A_1} : \rho^{A_2})$ para o estado $\tilde{\rho}^{A_1 A_2}$ como função do parâmetro de interação τ . O estado atômico inicial é dado por $\theta = 36^\circ$, e o sistema apresenta ressonância ($\delta = 0$).



Resumindo, a primeira parte do capítulo foi enfocada em obter resultados aproximados dos quantificadores de correlação, correlação total (informação conjunta aproximada), correlação quântica (discordância quântica aproximada), substituindo as entropias de Von Neumann por entropias lineares em suas respectivas definições. Dado que a entropia linear esta relacionada ao conceito de pureza, isso permitiu estudar tanto a pureza quanto as correlações dentro do sistema. A segunda parte do capítulo consistiu no estudo da discordância quântica exata entre os qubits atômicos. Foram obtidas expressões analíticas para as entropias de Von Neumann dos estados e para a discordância quântica. Usando a linguagem de programação fortran foi escrito um programa para obter valores numéricos para os quantificadores de correlação, e com esses valores numéricos foram plotados gráficos.

4 Medida fraca e discordância para estado de dois qubits atômicos

É apresentado em este capítulo a discordância quântica entre dois átomos de dois níveis em duas cavidades independentes usando operadores de medida fraca. O sistema é considerado sem dissipação, o que dá lugar ao surgimento do fenômeno de morte súbita e renascimento do emaranhamento. Isso permite o estudo da correlação chamada de super discordância quântica entre os qubits atômicos dados por (3.6), nesse sistema. A dinâmica é governada pelo Hamiltoniano de Jaynes-Cummings após de considerar as aproximações dipolar e da onda girante, descrita pela equação (2.61).

Seguindo a definição dada na referência [27], são substituídos os operadores de medida projetiva dada na definição de discordância quântica [4], por operadores de medida fraca dadas pela equação (2.88). Finalmente são plotados cálculos numéricos realizados para as correlações.

4.1 Discordância quântica com operadores de medida fraca para estados de dois átomos

Na definição de discordância quântica, um dos termos que estão envolvidos é a entropia condicional, quer dizer a entropia para um estado que depende de um conjunto de medidas. A discordância foi originalmente definida para medidas projetivas ou de Von Neumann [4]. É possível estender a definição da discordância para tipos de medidas mais gerais, como por exemplo para os POVM (positive operator value measurement). Neste capítulo são utilizados operadores de medida fraca que foram definidos na referência [26], que têm a forma,

$$\widehat{M}(\pm x) = \epsilon(\mp x)\widehat{\pi}_0 + \epsilon(\pm x)\widehat{\pi}_1, \quad (4.1)$$

com $\widehat{\pi}_0$ e $\widehat{\pi}_1$ sendo projetores, e $\epsilon(\pm x) = \sqrt{\frac{1 \pm \tanh(x)}{2}}$, onde x é chamado parâmetro de intensidade de medida. Usando projetores na base atômica $|g\rangle$ e $|e\rangle$ que representam os estados $|g\rangle$ (ground) e $|e\rangle$ (excited) do estado atômico, os operadores de medida fraca sobre os estados dos átomos podem ser reescritos como,

$$\widehat{M}(\pm x) = \epsilon(\mp x)|g\rangle\langle g| + \epsilon(\pm x)|e\rangle\langle e|. \quad (4.2)$$

O parâmetro x dos operadores de medida fraca é uma variável que mede a intensidade da medida. Os operadores de medida fraca satisfazem as seguintes propriedades, (i) $\widehat{M}(0) = \frac{\widehat{I}}{\sqrt{2}}$ (ii) $\widehat{M}^\dagger(+x)\widehat{M}(+x) + \widehat{M}^\dagger(-x)\widehat{M}(-x) = \widehat{I}$, (iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \widehat{M}(x) = \widehat{\pi}_0$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} \widehat{M}(x) = \widehat{\pi}_1$.

A discordância quântica entre os estados atômicos ρ^{A_1} e ρ^{A_2} , usando os operadores de medida fraca (ou super discordância quântica Q_S) definidos acima pode ser escrita como

$$Q_S(\rho^{A_1} : \rho^{A_2}) = \min_{\{\widehat{M}^{A_2}(\pm x)\}} \left[p_{+x} S(\rho_{\widehat{M}^{A_2}(+x)}^{A_1|A_2}) + p_{-x} S(\rho_{\widehat{M}^{A_2}(-x)}^{A_1|A_2}) \right] + S(\rho^{A_2}) - S(\rho^{A_1 A_2}), \quad (4.3)$$

onde ρ^{A_2} é o estado reduzido do qubit A_2 a partir do estado atômico (3.6), $[\rho^{A_1|A_2}]_{\widehat{M}^{A_2}(+x)}$ e $[\rho^{A_1|A_2}]_{\widehat{M}^{A_2}(-x)}$ são os estados no espaço do subsistema A_1 , que resultam de aplicar os operadores de medida $\widehat{M}(\pm x)$ sobre o subsistema A_2 do estado atômico composto $\rho^{A_1 A_2}(t)$ que logo são reduzidos por meio do traço parcial em relação aos graus de liberdade do subsistema A_2 . Para encontrar as medidas que perturbam menos o sistema, os projetores $|g\rangle\langle g|$ e $|e\rangle\langle e|$ na equação (4.2), são levados para uma base arbitrária usando a transformação unitária $V = t\widehat{I} + i\widehat{Y}\widehat{\sigma}$. Isso leva os projetores para as expressões \widehat{M}_g e \widehat{M}_e obtidas no capítulo anterior, equações (3.18) e (3.19). O índice S na equação (4.3) diz que a discordância é calculada usando operadores de medida fraca.

Para uma base arbitrária os operadores de medida fraca se reescrevem como $\widehat{M}'(\pm x) = \widehat{V}\widehat{M}(\pm x)\widehat{V}^\dagger = \epsilon(\mp x)\widehat{M}_g + \epsilon(\pm x)\widehat{M}_e$. A minimização assinalada na equação (4.3) é realizada em função dos parâmetros da transformação unitária que estão contidos nos projetores \widehat{M}_g e \widehat{M}_e , lembrando que eles tem a relação $a + c = 1$ e $|b|^2 = a.c$.

As formas matriciais dos operadores de medida fraca são,

$$\widehat{M}'(+x) = \begin{bmatrix} \epsilon(-x)a + \epsilon(+x)c & (\epsilon(-x) - \epsilon(+x))b \\ (\epsilon(-x) - \epsilon(+x))b^* & \epsilon(+x)a + \epsilon(-x)c \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

$$\widehat{M}'(-x) = \begin{bmatrix} \epsilon(+x)a + \epsilon(-x)c & (\epsilon(+x) - \epsilon(-x))b \\ (\epsilon(+x) - \epsilon(-x))b^* & \epsilon(-x)a + \epsilon(+x)c \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

São aplicados os operadores de medida fraca sobre o subsistema A_2 do estado composto $\rho^{A_1 A_2}(t)$. Logo são normalizados os estados resultantes da aplicação desses operadores de medida, dividindo pelas probabilidades p_{+x} e p_{-x} dadas pelas equações (4.16) e (4.17). Seguidamente é feito o traço parcial em relação aos graus de liberdade do subsistema A_2 para obter os estados reduzidos do espaço correspondente ao subsistema A_1 . Eles são

$$(\rho^{A_1|A_2}(x, t))_{\widehat{M}'(+x)} = \frac{1}{p_{+x}} \begin{bmatrix} \rho_{11+}(x, t) & \rho_{12+}(x, t) \\ \rho_{21+}(x, t) & \rho_{22+}(x, t) \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

onde os elementos de matriz da equação (4.6) têm a forma explícita,

$$\rho_{11+}(x, t) = [\epsilon^2(-x)a^2 + \epsilon^2(+x)c^2 + ac] \rho_{gggg}(t) + [\epsilon^2(-x)c^2 + \epsilon^2(+x)a^2 + ac] \rho_{gege}(t), \quad (4.7)$$

$$\rho_{12+}(x, t) = -\tanh(x)b^* \rho_{ggee}(t), \quad (4.8)$$

$$\rho_{21+}(x, t) = -\tanh(x)b \rho_{eeeg}(t), \quad (4.9)$$

$$\rho_{22+}(x, t) = [\epsilon^2(-x)a^2 + \epsilon^2(+x)c^2 + ac] \rho_{eeeg}(t) + [\epsilon^2(-x)c^2 + \epsilon^2(+x)a^2 + ac] \rho_{eeee}(t), \quad (4.10)$$

e

$$(\rho^{A_1|A_2}(x, t))_{\widehat{M}'(-x)} = \frac{1}{p_{-x}} \begin{bmatrix} \rho_{11}(x, t) & \rho_{12}(x, t) \\ \rho_{21}(x, t) & \rho_{22}(x, t) \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

com elementos de matriz dados por

$$\rho_{11-}(x, t) = [\epsilon^2(-x)c^2 + \epsilon^2(+x)a^2 + ac] \rho_{gggg}(t) + [\epsilon^2(-x)a^2 + \epsilon^2(+x)c^2 + ac] \rho_{gege}(t), \quad (4.12)$$

$$\rho_{12-}(x, t) = \tanh(x)b^* \rho_{ggee}(t), \quad (4.13)$$

$$\rho_{21-}(x, t) = \tanh(x)b \rho_{eeeg}(t), \quad (4.14)$$

$$\rho_{22-}(x, t) = [\epsilon^2(-x)c^2 + \epsilon^2(+x)a^2 + ac] \rho_{eeeg}(t) + [\epsilon^2(-x)a^2 + \epsilon^2(+x)c^2 + ac] \rho_{eeee}(t). \quad (4.15)$$

onde $\rho_{gggg}(t)$, $\rho_{eeee}(t)$, $\rho_{ggee}(t)$, $\rho_{eeeg}(t)$, $\rho_{gege}(t)$ e $\rho_{egeg}(t)$ são elementos de matriz do operador densidade que representa o estado atômico $\rho^{A_1A_2}(t)$, equação (3.6).

As probabilidades $p_x = \text{tr}[\widehat{M}'_{(+x)} \widehat{\rho}^{A_1A_2}(t)]$ e $p_{-x} = \text{tr}[\widehat{M}'_{(-x)} \widehat{\rho}^{A_1A_2}(t)]$ estão dadas por,

$$p_{+x} = [(\rho_{gggg}(t) + \rho_{eeeg}(t))a + (\rho_{gege}(t) + \rho_{eeee}(t))c] \epsilon(-x) + [(\rho_{gege}(t) + \rho_{eeee}(t))a + (\rho_{gggg}(t) + \rho_{eeeg}(t))c] \epsilon(+x), \quad (4.16)$$

$$p_{-x} = [(\rho_{gege}(t) + \rho_{eeee}(t))a + (\rho_{gggg}(t) + \rho_{eeeg}(t))c] \epsilon(-x) + [(\rho_{gggg}(t) + \rho_{eeeg}(t))a + (\rho_{gege}(t) + \rho_{eeee}(t))c] \epsilon(+x). \quad (4.17)$$

No seguinte passo é calculada a entropia de Von Neumann dos estados $(\rho^{A_1|A_2}(t))_{\widehat{M}'(+x)}$ e $(\rho^{A_1|A_2}(t))_{\widehat{M}'(-x)}$,

$$S \left[(\rho^{A_1|A_2}(t))_{\widehat{M}'(+x)} \right] = -\lambda_{+x}^+ \log_2(\lambda_{+x}^+) - \lambda_{+x}^- \log_2(\lambda_{+x}^-), \quad (4.18)$$

onde $\lambda_{\pm x}^{\pm}$ são os autovalores que correspondem aos estados $(\rho^{A_1|A_2}(x, t))_{\widehat{M}'(+x)}$ e $(\rho^{A_1|A_2}(x, t))_{\widehat{M}'(-x)}$, com $\lambda_{+x}^{\pm} = \frac{1}{2p_{+x}} \left(p_{+x} \pm \sqrt{p_{+x}^2 - 4[\rho_{11+}(x, t)\rho_{22+}(x, t) - \rho_{12+}(x, t)\rho_{21+}(x, t)]} \right)$.

$$S \left[(\rho^{A_1|A_2}(x, t))_{\widehat{M}'(-x)} \right] = -\lambda_{-x}^+ \log_2(\lambda_{-x}^+) - \lambda_{-x}^- \log_2(\lambda_{-x}^-), \quad (4.19)$$

com $\lambda_{-x}^{\pm} = \frac{1}{2p_{-x}} \left(p_{-x} \pm \sqrt{p_{-x}^2 - 4[\rho_{11-}(x, t)\rho_{22-}(x, t) - \rho_{12-}(x, t)\rho_{21-}(x, t)]} \right)$.

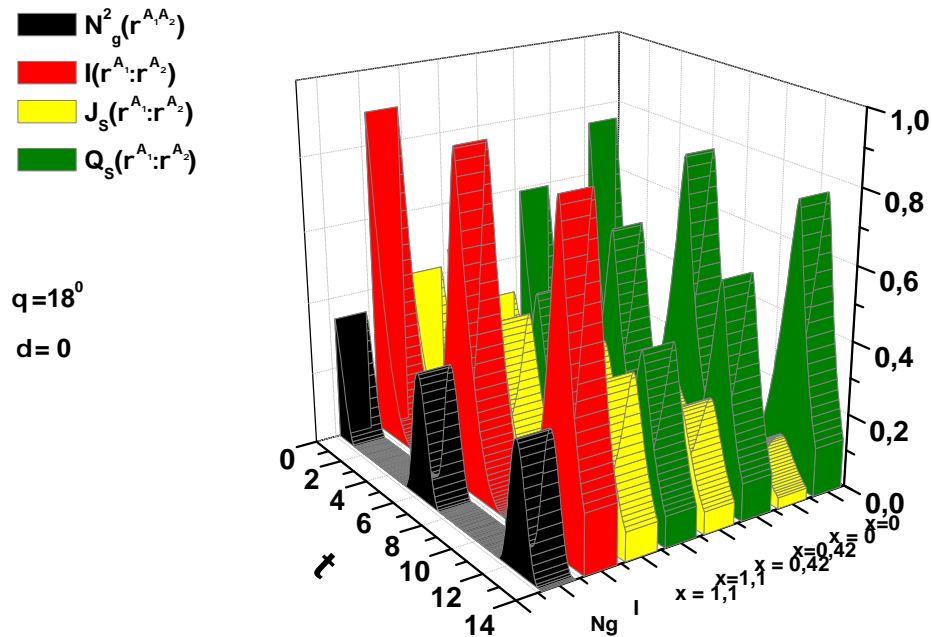
Então a expressão geral da entropia no subsistema A_1 devido à medidas realizadas sobre o subsistema A_2 é

$$\begin{aligned}
S[(\rho^{A_1|A_2}(x, t))] &= p_{+x} S[(\rho^{A_1|A_2}(x, t))_{\widehat{M}_{(+x)}}] + p_{-x} S[(\rho^{A_1|A_2}(x, t))_{\widehat{M}_{(-x)}}] \\
&= -\frac{1}{2} \left(p_{+x} + \sqrt{p_{+x}^2 - 4[\rho_{11+}(x, t)\rho_{22+}(x, t) - \rho_{12+}(x, t)\rho_{21+}(x, t)]} \right) \\
&\quad \times \log_2 \left[\frac{1}{2p_{+x}} \left(p_{+x} + \sqrt{p_{+x}^2 - 4[\rho_{11+}(x, t)\rho_{22+}(x, t) - \rho_{12+}(x, t)\rho_{21+}(x, t)]} \right) \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(p_{+x} - \sqrt{p_{+x}^2 - 4[\rho_{11+}(x, t)\rho_{22+}(x, t) - \rho_{12+}(x, t)\rho_{21+}(x, t)]} \right) \\
&\quad \times \log_2 \left[\frac{1}{2p_{+x}} \left(p_{+x} - \sqrt{p_{+x}^2 - 4[\rho_{11+}(x, t)\rho_{22+}(x, t) - \rho_{12+}(x, t)\rho_{21+}(x, t)]} \right) \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(p_{-x} + \sqrt{p_{-x}^2 - 4[\rho_{11-}(x, t)\rho_{22-}(x, t) - \rho_{12-}(x, t)\rho_{21-}(x, t)]} \right) \\
&\quad \times \log_2 \left[\frac{1}{2p_{-x}} \left(p_{-x} + \sqrt{p_{-x}^2 - 4[\rho_{11-}(x, t)\rho_{22-}(x, t) - \rho_{12-}(x, t)\rho_{21-}(x, t)]} \right) \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(p_{-x} - \sqrt{p_{-x}^2 - 4[\rho_{11-}(x, t)\rho_{22-}(x, t) - \rho_{12-}(x, t)\rho_{21-}(x, t)]} \right) \\
&\quad \times \log_2 \left[\frac{1}{2p_{-x}} \left(p_{-x} - \sqrt{p_{-x}^2 - 4[\rho_{11-}(x, t)\rho_{22-}(x, t) - \rho_{12-}(x, t)\rho_{21-}(x, t)]} \right) \right].
\end{aligned} \tag{4.20}$$

A entropia $S[(\rho^{A_1|A_2}(x, t))]$ é uma função dos parâmetros de medida a e c . A entropia condicional corresponde ao valor de $S[(\rho^{A_1|A_2}(x, t))]$ no seu mínimo. Para encontrar os valores de a e c , que minimizam a função $S[(\rho^{A_1|A_2}(x, t))]$ é analisada a expressão (4.20). A função apresenta uma simetria com relação a troca de variáveis $a = 1 - c$, o que significa que é par com relação a $a - c$. Devido a essa paridade se vê que os extremos correspondem aos valores $a = c = \frac{1}{2}$, $a = 0$ ou $a = 1$. O valor que minimiza a expressão $S[(\rho^{A_1|A_2}(x, t))]$ corresponde a $a = c = \frac{1}{2}$. Isso permite obter uma expressão analítica para a entropia condicional, e como consequência uma expressão analítica para a super discordância quântica.

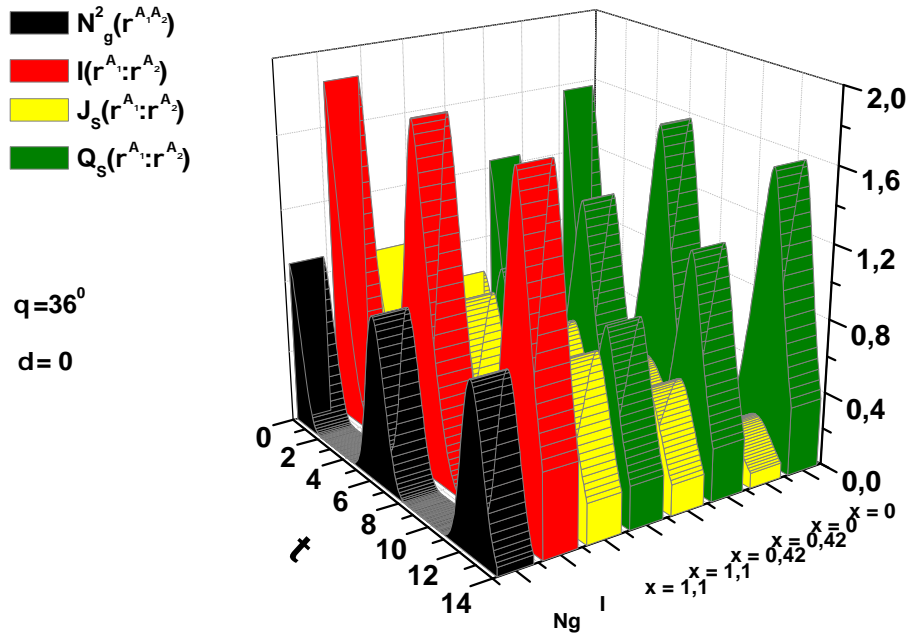
Segue-se os gráficos, resultados de plotar os dados numéricos para as correlações no sistema de dois átomos.

Figura 15 – Quadrado da negatividade global $N_g^2(\rho^{A_1 A_2}(t))$, super discordância quântica $Q_S(\rho^{A_1}(t) : \rho^{A_2}(t))$, correlação total $I(\rho^{A_1}(t) : \rho^{A_2}(t))$ e correlação clássica $J_S(\rho^{A_1}(t) : \rho^{A_2}(t))$ como função do parâmetro de interação τ . O estado atômico inicial é dado por $\theta = 18^\circ$, e o sistema apresenta ressonância ($\delta = 0$). Os valores do parâmetro de intensidade de medida são $x = 0$, $x = 0,42$, e $x = 1,1$.



A figura 15 apresenta o quadrado da negatividade global $N_g^2(\rho^{A_1 A_2}(t))$ (cor preto), a super discordância quântica $Q_S(\rho^{A_1}(t); \rho^{A_2}(t))$ (cor verde), a correlação total $I(\rho^{A_1}(t) : \rho^{A_2}(t))$ (cor vermelho) e a correlação clássica $J(\rho^{A_1}(t) : \rho^{A_2}(t))$ (cor amarelo), para um estado atômico inicial dado por $\theta = 18^\circ$ e três valores do parâmetro de intensidade de medida x , como função do parâmetro de interação τ . Comparando com a figura 13 do capítulo anterior onde foi plotada a discordância quântica usando medidas de Von Neumann, se observa que a discordância quântica apresenta valores maiores, relacionada com a diminuição do parâmetro de intensidade de medida x , e como consequência disso uma diminuição dos valores que representam correlação clássica (cor amarelo). Para o valor $x = 1,1$ a discordância quântica e a correlação clássica mostram-se muito similares as da figura 13. Já para o valor $x = 0$ ocorre um aumento considerável da discordância e uma diminuição da correlação clássica, evidenciando uma marcada diferença com as curvas obtidas usando medidas projetivas.

Figura 16 – Quadrado da negatividade global $N_g^2(\rho^{A_1 A_2}(t))$, super discordância quântica $Q_S(\rho^{A_1}(t) : \rho^{A_2}(t))$, correlação total $I(\rho^{A_1}(t) : \rho^{A_2}(t))$ e correlação clássica $J_S(\rho^{A_1}(t) : \rho^{A_2}(t))$ como função do parâmetro de interação τ . O estado atômico inicial é dado por $\theta = 36^\circ$, e o sistema apresenta ressonância ($\delta = 0$). Os valores do parâmetro de intensidade de medida são $x = 0$, $x = 0,42$, e $x = 1,1$.



A figura 16 apresenta o quadrado da negatividade global $N_g^2(\rho^{A_1 A_2}(t))$ (cor preto), a super discordância quântica $Q_S(\rho^{A_1}(t) ; \rho^{A_2}(t))$ (cor verde), a correlação total $I(\rho^{A_1}(t) : \rho^{A_2}(t))$ (cor vermelho) e a correlação clássica $J(\rho^{A_1}(t) : \rho^{A_2}(t))$ (cor amarelo), para um estado atômico inicial dado por $\theta = 36^\circ$ e três valores do parâmetro de intensidade de medida x , como função do parâmetro de interação τ . Dado que as únicas expressões que dependem das medidas são a super discordância quântica e a correlação clássica, tanto o quadrado da negatividade como a correlação total não mudam com a mudança do parâmetro x . A figura mostra como varia a super discordância (aumenta) e a correlação clássica (diminui) dada uma diminuição do parâmetro de intensidade de medida x . Comparando com a figura 14 que corresponde ao caso da discordância quântica para medidas projetivas, se observa que para $x = 1,1$ os valores que representam a discordância quântica e a correlação clássica são similares ao caso exato. Para valores menores do parâmetro de intensidade de medida x a tendência do aumento nas correlações quânticas é muito marcada.

Em conclusão os gráficos para a discordância quântica usando operadores de medida fraca mostram como as correlações quânticas variam como função do parâmetro de intensidade de medida x . Para os três valores de x escolhidos foi observado que as correlações quânticas aumentam quando o valor de x diminui. Assim também as correlações

quânticas são maiores se o emaranhamento do estado inicial é maior. Neste capítulo foi considerado o caso ressonante ($\delta = 0$), dado que o objetivo da seção foi a comparação das correlações quânticas capturadas usando operadores de medida fraca com a discordância quântica usual calculada no capítulo três (medidas projetivas). Novamente foram usados os estados atômicos iniciais caracterizados por dois valores do parâmetro θ , $\theta = 18^\circ$ e $\theta = 36^\circ$. Os valores da discordância quântica usando operadores de medida fraca mostram que existem más informações sobre as correlações quânticas que não são capturadas por meio do uso de medidas projetivas.

5 Conclusões

Neste trabalho foram estudadas as correlações quânticas e clássicas entre dois qubits atômicos inicialmente emaranhados, onde cada átomo foi colocado numa cavidade óptica independente, sem ter em consideração a dissipação no sistema. A escolha deste sistema, deve-se ao fato de que sob certas condições observa-se o fenômeno de morte súbita e renascimento do emaranhamento entre os qubits. Foi obtida a função de onda do estado composto. Realizando a operação do traço parcial sobre o estado composto foram eliminados os graus de liberdade das cavidades, para obter a evolução temporal do estado $\rho^{A_1 A_2}(t)$ (equação (3.6)). Substituindo a entropia de Von Neumann por a entropia linear na definição da entropia condicional $S(\rho^{A_1|A_2})$ foi realizada uma primeira aproximação para a entropia condicional $S_L(\rho^{A_1|A_2})$, assim também foi definido uma medida de correlação quântica aproximada para a discordância quântica $Q_L(\rho^{A_1} : \rho^{A_2})$. Expressões analíticas foram obtidas para $S_L(\rho^{A_1|A_2})$ e $Q_L(\rho^{A_1} : \rho^{A_2})$ para o estado da equação (3.6). O fato de usar entropias lineares permitiu examinar a pureza do estado de dois qubits atômicos durante a evolução temporal das correlações aproximadas. Usando um programa escrito na linguagem fortran foram realizados cálculos numéricos para $S_L(\rho^{A_1})$, $S_L(\rho^{A_2})$, $S_L(\rho^{A_1 A_2})$, e para as correlações aproximadas (correlação total I_L , correlação quântica Q_L , e correlação clássica J_L), e para o emaranhamento livre. O emaranhamento foi quantificado pela negatividade global $N_g(\rho^{A_1 A_2})$. Para os cálculos numéricos foram escolhidos dois estados atômicos iniciais dados por $\theta = 18^\circ$ e $\theta = 36^\circ$, e dois valores do parâmetro de dessintonia $\delta = 0$ e $\delta = 5g_c$.

As figuras plotadas (como função de τ) usando os dados numéricos verificaram que as correlações aproximadas dependem do emaranhamento inicial, sendo que as correlações aproximadas alcançaram valores maiores para $\theta = 36^\circ$ do que para $\theta = 18^\circ$. Em geral as correlações aproximadas mostraram uma evolução unitária, o que não aconteceu com o emaranhamento. O emaranhamento mostrou evolução unitária para o caso onde o parâmetro de dessintonia $\delta = 5g_c$. Quando $\delta = 0$ o sistema mostrou o fenômeno de morte súbita e renascimento do emaranhamento, isso deve-se a que sendo a frequência atômica ω_a igual a frequência da cavidade ω_c , os átomos tem uma alta probabilidade de interagir com os fótons das cavidades, e dada essa interação os átomos ficaram emaranhados aos fótons. Devido a existência de um período de tempo no qual o emaranhamento entre os átomos é zero ($\delta = 0$), e tendo a discordância quântica aproximada um valor finito positivo (evolução unitária), conclui-se que existem outras correlações quânticas além do emaranhamento entre os qubits atômicos. Com relação a pureza, a entropia linear para o estados $\rho^{A_1 A_2}(t)$, $\rho^{A_1}(t)$ e $\rho^{A_2}(t)$ mostraram uma taxa de variação maior para $\theta = 18^\circ$ do que para $\theta = 36^\circ$, assim como uma taxa de variação muito maior para $\delta = 0$ do que para $\delta = 5g_c$.

Se obtiveram expressões analíticas para a entropia condicional $S(\rho^{A_1|A_2})$ e para a discordância quântica $Q(\rho^{A_1} : \rho^{A_2})$. Foram gerados dados numéricos para as

entropias de Von Neumann $S(\rho^{A_1})$, $S(\rho^{A_2})$, $S(\rho^{A_1A_2})$, como também para as correlações total $I(\rho^{A_1} : \rho^{A_2})$, clássica $J(\rho^{A_1} : \rho^{A_2})$ e quântica $Q(\rho^{A_1} : \rho^{A_2})$. Os estados atômicos iniciais foram os mesmos que no caso das correlações aproximadas ($\theta = 18^\circ$, $\theta = 36^\circ$), mas só foi considerado um valor do parâmetro de dessintonia para os gráficos correspondendo as correlações exatas, $\delta = 0$. Os gráficos das entropias foram plotados para $\theta = 18^\circ$, $\delta = 0$ e para $\theta = 36^\circ$, $\delta = 5g_c$. O análise dos gráficos resultou na confirmação da existência de um valor finito positivo para a discordância quântica no período que o emaranhamento livre é zero, também que $Q(\rho^{A_1} : \rho^{A_2}) = J(\rho^{A_1} : \rho^{A_2})$ para tudo valor de τ . Como era esperado a correlação clássica atingiu valores maiores dado um emaranhamento inicial maior. Com relação a informação contida nos estados ρ^{A_1} , ρ^{A_2} , e $\rho^{A_1A_2}$ quantificada pela entropia de Von Neumann, se encontrou que as taxas de variação das entropias para o caso $\theta = 18^\circ$, $\delta = 0$ são muito maiores que para $\theta = 36^\circ$, $\delta = 5g_c$.

Na última parte do trabalho foi estudada a dinâmica das correlações para o mesmo sistema de dois átomos inicialmente emaranhados em duas cavidades independentes usando o formalismo de medida fraca. Os operadores de medida fraca dependem de um parâmetro chamado de intensidade de medida x . Se encontrou uma expressão para a entropia condicional usando esses operadores. Se geraram dados numéricos da correlação clássica $J_S(\rho^{A_1} : \rho^{A_2})$ e da correlação quântica $Q_S(\rho^{A_1} : \rho^{A_2})$ para três valores de x , $x = 1$, $x = 0,42$ e $x = 0$. Os cálculos da seção foram feitos para o caso ressonante. Finalmente foram plotadas figuras usando esses dados numéricos para os diferentes valores do parâmetro de intensidade de medida x , e para os estados atômicos iniciais dados por $\theta = 18^\circ$ e $\theta = 36^\circ$.

As figuras mostram que a medida que o valor do parâmetro x diminui, a discordância quântica aumenta e ao mesmo tempo o valor da medida de correlações clássicas J_S diminui. Assim também se observa que as correlações quânticas usando operadores de medida fraca atingem valores maiores do que as correlações quânticas usando medidas de Von Neumann.

Como resultado geral encontrou se a existência de correlações quânticas em ausência de emaranhamento quântico para o sistema escolhido. Estas correlações quânticas foram assinaladas no trabalho [8] como responsável para a realização de tarefas num modelo de computação chamado computação quântica determinista com um qubit. O outro resultado principal do trabalho foi demonstrar que com o uso de operadores de medida fraca é possível evidenciar a existencia de uma quantidade maior de correlações quânticas no sistema.

Referências

- [1] SCHRÖDINGER, E. Die gegenwärtige situation in der quantenmechanik. *Naturwissenschaften*, Springer, v. 23, n. 49, p. 823–828, 1935.
- [2] EINSTEIN, A.; PODOLSKY, B.; ROSEN, N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review*, APS, v. 47, n. 10, p. 777, 1935.
- [3] JOZSA, R.; LINDEN, N. On the role of entanglement in quantum-computational speed-up. In: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. [S.l.]: The Royal Society, 2003. p. 2011–2032.
- [4] OLLIVIER, H.; ZUREK, W. H. Quantum discord: a measure of the quantumness of correlations. *Physical Review Letters*, APS, v. 88, n. 1, p. 017901, 2001.
- [5] ŻYCZKOWSKI, K. et al. Volume of the set of separable states. *Physical Review A*, APS, v. 58, n. 2, p. 883, 1998.
- [6] HENDERSON, L.; VEDRAL, V. Classical, quantum and total correlations. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 34, n. 35, p. 6899, 2001.
- [7] KNILL, E.; LAFLAMME, R. Power of one bit of quantum information. *Physical Review Letters*, APS, v. 81, n. 25, p. 5672, 1998.
- [8] DATTA, A.; SHAJI, A.; CAVES, C. M. Quantum discord and the power of one qubit. *Physical Review Letters*, APS, v. 100, n. 5, p. 050502, 2008.
- [9] PELLIZZARI, T. et al. Decoherence, continuous observation, and quantum computing: A cavity qed model. *Physical Review Letters*, APS, v. 75, n. 21, p. 3788, 1995.
- [10] NIELSEN, M. A.; CHUANG, I. L. Quantum computation and quantum information. Cambridge University Press, 2010.
- [11] PACHOS, J.; WALTHER, H. Quantum computation with trapped ions in an optical cavity. *Physical Review Letters*, APS, v. 89, n. 18, p. 187903, 2002.
- [12] ENK, S. V.; CIRAC, J.; ZOLLER, P. Purifying two-bit quantum gates and joint measurements in cavity qed. *Physical Review Letters*, APS, v. 79, n. 25, p. 5178, 1997.
- [13] DUAN, L.-M.; KUZMICH, A.; KIMBLE, H. Cavity qed and quantum-information processing with hot trapped atoms. *Physical Review A*, APS, v. 67, n. 3, p. 032305, 2003.
- [14] YU, T.; EBERLY, J. Finite-time disentanglement via spontaneous emission. *Physical Review Letters*, APS, v. 93, n. 14, p. 140404, 2004.

- [15] ALMEIDA, M. et al. Environment-induced sudden death of entanglement. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 316, n. 5824, p. 579–582, 2007.
- [16] LAURAT, J. et al. Heralded entanglement between atomic ensembles: preparation, decoherence, and scaling. *Physical Review Letters*, APS, v. 99, n. 18, p. 180504, 2007.
- [17] BELLOMO, B.; FRANCO, R. L.; COMPAGNO, G. Non-markovian effects on the dynamics of entanglement. *Physical Review Letters*, APS, v. 99, n. 16, p. 160502, 2007.
- [18] MAZZOLA, L. et al. Sudden death and sudden birth of entanglement in common structured reservoirs. *Physical Review A*, APS, v. 79, n. 4, p. 042302, 2009.
- [19] YU, T.; EBERLY, J. Sudden death of entanglement. *Science*, American Association for the Advancement of Science, v. 323, n. 5914, p. 598–601, 2009.
- [20] QIN, X.; MAO-FA, F. Entanglement dynamics of atoms in double jaynes-cummings models with kerr medium. *Communications in Theoretical Physics*, IOP Publishing, v. 54, n. 5, p. 840, 2010.
- [21] ZHANG, J.-S.; XU, J.-B. Controlling entanglement sudden death and birth in cavity qed. *Optics Communications*, Elsevier, v. 282, n. 17, p. 3652–3655, 2009.
- [22] ZHANG, Y.-J.; MAN, Z.-X.; XIA, Y.-J. Atomic entanglement sudden death in a strongly driven cavity qed system. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, IOP Publishing, v. 42, n. 9, p. 095503, 2009.
- [23] YU, X.-y.; LI, J.-h. Coherent and ultrafast manipulation of entanglement sudden death and recurrence. *Optics Letters*, Optical Society of America, v. 35, n. 16, p. 2744–2746, 2010.
- [24] AHARONOV, Y.; ALBERT, D. Z.; VAIDMAN, L. How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-1/2 particle can turn out to be 100. *Physical Review Letters*, APS, v. 60, n. 14, p. 1351, 1988.
- [25] TAMIR, B.; COHEN, E. Introduction to weak measurements and weak values. *Quanta*, v. 2, n. 1, p. 7–17, 2013.
- [26] ORESHKOV, O.; BRUN, T. A. Weak measurements are universal. *Physical Review Letters*, APS, v. 95, n. 11, p. 110409, 2005.
- [27] SINGH, U.; PATI, A. K. Quantum discord with weak measurements. *Annals of Physics*, Elsevier, v. 343, p. 141–152, 2014.
- [28] JAYNES, E. T.; CUMMINGS, F. W. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proceedings of the IEEE*, IEEE, v. 51, n. 1, p. 89–109, 1963.

- [29] COHEN-TANNOUJDI, C.; DIU, B.; LALOE, F. Quantum mechanics. vol. 1. 4. rev. upd. 2009.
- [30] PERES, A. Quantum theory: concepts and methods. Springer Science & Business Media, v. 57, 1995.
- [31] BRODUTCH, A.; MODI, K. Criteria for measures of quantum correlations. *Quantum Information & Computation*, Rinton Press, Incorporated, v. 12, n. 9-10, p. 721–742, 2012.
- [32] PERES, A. Separability criterion for density matrices. *Physical Review Letters*, APS, v. 77, n. 8, p. 1413, 1996.
- [33] VIDAL, G.; WERNER, R. F. Computable measure of entanglement. *Physical Review A*, APS, v. 65, n. 3, p. 032314, 2002.
- [34] SHANNON, C. E. A mathematical theory of communication. *ACM SIGMOBILE Mobile Computing and Communications Review*, ACM, v. 5, n. 1, p. 3–55, 2001.
- [35] LIN, C.-H.; LIN, Y.-C.; HO, Y. K. Quantification of linear entropy for quantum entanglement in he, h- and ps- ions using highly-correlated hylleraas functions. *Few-Body Systems*, Springer, v. 54, n. 11, p. 2147–2153, 2013.
- [36] LUO, S. Quantum discord for two-qubit systems. *Physical Review A*, APS, v. 77, n. 4, p. 042303, 2008.
- [37] JACOBS, K. Quantum measurement theory and its applications. *Quantum Measurement Theory and its Applications*, by Kurt Jacobs, Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2014, v. 1, 2014.