



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

DAIANE GISELE DE LIMA

**ASPECTOS DO ENSINO DE GEOMETRIA EVIDENCIADOS
POR PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM UM CONTEXTO
DE FORMAÇÃO ONLINE: UMA ANÁLISE À LUZ DOS
SUBSÍDIOS TEÓRICOS DE RAYMOND DUVAL**

Londrina
2023

DAIANE GISELE DE LIMA

**ASPECTOS DO ENSINO DE GEOMETRIA EVIDENCIADOS
POR PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM UM CONTEXTO
DE FORMAÇÃO ONLINE: UMA ANÁLISE À LUZ DOS
SUBSÍDIOS TEÓRICOS DE RAYMOND DUVAL**

Texto apresentado à Banca Examinadora
como requisito para aprovação no exame de
defesa do Programa de Pós-Graduação em
Ensino de Ciências e Educação Matemática
da Universidade Estadual de Londrina.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Márcia Cristina de
Costa Trindade Cyrino

Londrina
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

LIMA, DAIANE GISELE DE.

Aspectos do ensino de Geometria evidenciados por professores de Matemática em um contexto de formação online: Uma análise à luz dos subsídios teóricos de Raymond Duval / DAIANE GISELE DE LIMA. - Londrina, 2023.
123 f.

Orientador: Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2023.
Inclui bibliografia.

1. Tarefas em Geometria. Formação de Professores. Software GeoGebra. Visualização. - Tese. I. Cyrino, Márcia Cristina de Costa Trindade . II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 37

ASPECTOS DO ENSINO DE GEOMETRIA EVIDENCIADOS POR
PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM UM CONTEXTO DE FORMAÇÃO
ONLINE: UMA ANÁLISE À LUZ DOS SUBSÍDIOS TEÓRICOS DE
RAYMOND DUVAL

Texto apresentado à Banca Examinadora
como requisito para aprovação no exame de
defesa do Programa de Pós-Graduação em
Ensino de Ciências e Educação Matemática
da Universidade Estadual de Londrina.

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Márcia Cristina de
Costa Trindade Cyrino

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Márcia Cristina de Costa
Trindade Cyrino Universidade Estadual de
Londrina – UEL

Prof^ª. Dr^ª. Loreni Aparecida Ferreira Baldini
Secretaria de Estado e Esporte do Paraná -
SEED

Prof. Dr. Jorge Cássio Costa Nóbriga
Universidade Federal de Santa Catarina-UFSC

Londrina, 24 de fevereiro de 2023.

*Dedico este trabalho àqueles que estiveram ao meu lado e acompanharam-me nas alegrias e nas angústias presentes na trajetória de escrever esta dissertação: o meu carinho e meu amor a todos: meus filhos **Giovana Aiko Asanuma** e **Alan Kenji Asanuma**, meu esposo **Sérgio Carrazedo Dantas** e minha querida vó **Maria da Conceição Lima**.*

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me permitido chegar até aqui e proporcionado condições para eu superar todos os obstáculos que a vida colocou à minha frente desde a minha saída do Jardim América até a minha chegada ao Japão e o retorno ao Brasil para continuar os meus estudos.

À minha orientadora, professora **Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino**, por ter aceitado me orientar, sempre dedicada direcionando-me e proporcionando momentos de aprendizagens durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos professores membros da banca, **Prof.^a. Dr.^a. Loreni Aparecida Ferreira Baldini** e **Prof. Dr. Jorge Cássio Costa Nóbriga**, por aceitarem examinar este trabalho, por suas cuidadosas leituras, relevantes contribuições e orientações.

À minha família e aos meus pais **Antonio** e **Ilma** que já não estão mais presentes para vibrar com mais esta vitória, mas certamente de onde estiverem sabem o esforço e a superação que foi chegar até aqui. Meu Avohai (Avô e Pai) Antonio que disse sim, quando outro disse não. Criou-me com valores e princípios e oportunizou algo que ele e seus filhos não tiveram, a oportunidade de estudar. O meu muito obrigada à minha mãe que sempre dizia que o tempo passa você estudando ou não, então seria melhor passá-lo estudando. A minha vizinha **Maria da Conceição** que sempre pergunta: Quanto tempo ainda falta para terminar esse estudo? E sempre tem uma palavra de conforto no meio da tribulação. Aos meus filhos (**Alan Kenji e Giovana Aiko**) que por vezes tive que ser ausente e sempre com aquela palavra que vai passar...

Ao meu esposo **Sérgio Dantas** que sempre me apoiou em todas as minhas decisões, foi amigo durante os momentos mais difíceis, proporcionou-me momentos de reflexões, de companheirismo e gentilmente disponibilizou os dados do curso de GeoGebra para esta investigação, o meu muito obrigada.

Agradeço à minha amiga Loreni Baldini que desde sempre me incentivou e orientou no momento que decidi pela docência.

Aos membros do **GEPEFOPEM** e amigos que fiz durante o mestrado pelo apoio e amizade. Em especial agradeço a Talisson Leiria, Anna Flavia, Ana Claudia, Eliana, Cris e Salvador pela amizade, pelos momentos de interlocução e pelas valiosas contribuições à minha pesquisa.

Aos amigos que fiz durante o mestrado pelo apoio e amizade. Em especial, agradeço à Talita Canassa Weber e Anna Flávia Magnoni.

Aos meus professores do ensino Fundamental Professora Ines e Prof. Edmar por quem sempre tenho boa lembranças. Aos meus professores da graduação que são meu maior exemplo do que é ser professor... Prof. Edimar, Prof^a Letícia Barcaro Celeste, Prof. Luiz Jairo, Prof. Paulo Rodrigues, Prof. Ricardo e Prof. Sérgio Dantas.

As minhas coordenadoras do Colégio Estadual Talita Bresolin, Noemi e Nilza que sempre me incentivaram.

À **CAPES** pelo auxílio financeiro.

A todas as pessoas que direta ou indiretamente influenciaram o desenvolvimento desta pesquisa.

*A Bahia já me deu
Régua e compasso
Quem sabe de mim sou eu
Aquele abraço!
"Aquele abraço"
Gilberto Gil*

LIMA, DAIANE. **Aspectos do ensino de Geometria evidenciados por professores de Matemática em um contexto de formação online: Uma análise à luz dos subsídios teóricos de Raymond Duval.** 2023. 140 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2023.

RESUMO

Este estudo tem como objetivo compreender os processos de visualização, construção e raciocínio mobilizados por professores de Matemática em uma Ação Formativa envolvendo o *software* GeoGebra à luz da teoria de Raymond Duval, na busca de responder à seguinte questão: que elementos geométricos são evidenciados em tarefas propostas por professores de Matemática em uma Ação Formativa envolvendo o *software* GeoGebra podem mobilizar processos cognitivos que abrangem o ensino de Geometria? Para tanto, foi realizada uma pesquisa de natureza qualitativa, de caráter interpretativo, em um contexto de formação online denominado Curso de GeoGebra. Os professores investigados atuam na Educação Básica e fizeram parte da 18ª Edição deste curso. As informações foram coletadas no módulo três – destinado ao estudo de Geometria. Os resultados evidenciaram que as tarefas propostas pelos professores em formação oferecem condições para a mobilização de elementos geométricos (como pontos, retas, segmentos, vértices e arestas) e de processos cognitivos que abrangem o ensino da Geometria, sendo destacados o processo de visualização e os processos discursivos (raciocínio). Com isso, propõe-se que sejam fomentadas políticas públicas que proporcionem espaços formativos que possibilitem aos professores de matemática acesso: a metodologias de ensino de geometria diferenciadas; a momentos de diálogos entre os pares a respeito do ensino de Geometria; à mobilização de recursos tecnológicos e tecnologias digitais, como o recurso do *software* GeoGebra. Esse recurso tem apresentado potencialidades para o ensino, por meio da visualização em Geometria, e para evidenciar o papel das figuras em uma atividade geométrica, dado que estas exercem um papel fundamental na resolução de problemas.

Palavras-chave: Tarefas em Geometria. Formação de Professores. *Software* GeoGebra. Visualização.

LIMA, DAIANE. **Aspects of Geometry teaching evidenced by Mathematics teachers in an online training context: An analysis in the light of Raymond Duval's theoretical subsidies.** 2023. 141 f. Dissertation (Master in Science Teaching and Mathematics Education) – State University of Londrina, Londrina, 2023.

ABSTRACT

This study aims to understand the visualization, construction and reasoning processes mobilized by Mathematics teachers in a Formative Action involving the GeoGebra software in the light of Raymond Duval's theory, in an attempt to answer the following question: which geometric elements are evidenced in tasks proposals by Mathematics teachers in a Training Action involving the GeoGebra software mobilize cognitive processes that encompass the teaching of Geometry? To this end, qualitative research of an interpretative nature was carried out in an online training context called GeoGebra Course. The investigated teachers are Basic Education teachers who took part in the 18th Edition of this course. The information was collected in module three – intended for the study of Geometry. The results showed that the tasks proposed by the teachers in training provided the mobilization of geometric elements (such as points, lines, segments, vertices and edges) and cognitive processes that cover the teaching of Geometry, with emphasis on the visualization process and the discursive processes (reasoning). With this, it is proposed that public policies be fostered that provide training spaces that allow mathematics teachers access to: differentiated geometry teaching methodologies; moments of dialogue between peers regarding the teaching of Geometry; the mobilization of technological resources and digital technologies, such as the GeoGebra software resource. This resource has shown potential for teaching, through visualization in Geometry, and to highlight the role of figures in a geometric activity, given that they play a fundamental role in solving a problem.

Keywords: Tasks in Geometry. Teacher training. GeoGebra Software. Visualization.

LISTA DE FIGURAS

INTRODUÇÃO

FIGURA 1: LAYOUT DO GEOGEBRA CLASSIC	19
FIGURA 3: EXEMPLO - TRATAMENTO E CONVERSÃO	20
FIGURA 4: APREENSÃO PERCEPTIVA - QUADRADO	23
FIGURA 5: APREENSÃO DISCURSIVA DE UMA FIGURA: IDENTIFICAÇÃO DE OUTRAS PROPRIEDADES	23
FIGURA 6: APREENSÃO OPERATÓRIA – REPARTIR UM QUADRADO EM SEIS PARTES IGUAIS	24
FIGURA 7: APREENSÃO SEQUENCIAL	24
FIGURA 8: PROPOSIÇÃO DA AÇÃO FORMATIVA – MÓDULO 3 DA 18ª EDIÇÃO DO CURSO DE <i>GEOGEBRA</i>	29
FIGURA 9: ORGANIZAÇÃO DA DISSERTAÇÃO NO FORMATO <i>MULTIPAPER</i>	14

CAPÍTULO 1

FIGURA 1: UM TRATAMENTO PURAMENTE FIGURAL PARA A PERCEPÇÃO DO VALOR DA SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS DE UM TRIÂNGULO	21
FIGURA 2: BLOCO DE CUBOS	22
FIGURA 3: TRIÂNGULO ABC	22
FIGURA 4: MODIFICAÇÕES DA FIGURA GEOMÉTRICA	23
FIGURA 5: CONSTRUÇÃO NO GEOGEBRA DE UM TRIÂNGULO ISÓSCELES	24
FIGURA 6: CONSTRUÇÃO DA REPRESENTAÇÃO DE UM QUADRADO	24
FIGURA 7: ROTAÇÃO E TRANSLAÇÃO	26
FIGURA 8: PROPOSIÇÃO DA AÇÃO FORMATIVA – MÓDULO 3 DA 18ª EDIÇÃO DO CURSO DE <i>GEOGEBRA</i>	29
FIGURA 9: CAIXA DE SELEÇÃO – REPRESENTAÇÃO DE UM PRISMA E UMA PIRÂMIDE	34
FIGURA 10: REPRESENTAÇÃO DE PRISMAS E PIRÂMIDES DE DIFERENTES BASES	35
FIGURA 11: PLANIFICAÇÃO DO TETRAEDRO	42
FIGURA 12: CUBO	44
FIGURA 13: PRISMA	47

CAPÍTULO 2

FIGURA 1: SUPERPOSIÇÃO DE DUAS FORMAS – QUADRADO E RETÂNGULO	60
FIGURA 2: CLASSIFICAÇÃO DAS UNIDADES FIGURAIS ELEMENTARES	61
FIGURA 3: BARRA DE FERRAMENTAS E INTERFACE DO GEOGEBRA	62
FIGURA 4: APREENSÃO PERCEPTIVA	63
FIGURA 5: APREENSÃO DISCURSIVA	63
FIGURA 6: APREENSÃO OPERATÓRIA	64
FIGURA 7: CONTROLE DESLIZANTE	64
FIGURA 8: PROPOSIÇÃO DA AÇÃO FORMATIVA – MÓDULO 3 DA 18ª EDIÇÃO DO CURSO DE <i>GEOGEBRA</i>	67
FIGURA 9: MANIPULAÇÃO DOS CONTROLES DESLIZANTES	69
FIGURA 10: MANIPULAÇÃO DO CONTROLE DESLIZANTE	73

FIGURA 11: DIFERENTES POLÍGONOS JANELA DE VISUALIZAÇÃO 2D E DIFERENTES BASES JANELA DE VISUALIZAÇÃO 3D.....	77
---	----

CAPÍTULO 3

FIGURA 1: CILINDRO	90
FIGURA 2: TRATAMENTO E CONVERSÃO	92
FIGURA 3: EXEMPLO DE TRATAMENTO DE CONVERSÃO	92
FIGURA 4: PASSAGEM DA FUNÇÃO À SUA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA.....	93
FIGURA 5: CLASSIFICAÇÃO DE UNIDADES ELEMENTARES DE UMA FIGURA	93
FIGURA 6: DECOMPOSIÇÃO DE UMA FIGURA DE PARTIDA	96
FIGURA 7: DETERMINE A MEDIDA DOS ÂNGULOS EXTERNOS DA REPRESENTAÇÃO DO TRIÂNGULO ABE	96
FIGURA 8: SABENDO QUE $R//S$, DETERMINE A MEDIDA DE X	97
FIGURA 9: ADICIONADO TRAÇOS A FIGURA DE PARTIDA	97
FIGURA 10: PROPOSIÇÃO DA AÇÃO FORMATIVA – MÓDULO 3 DA 18ª EDIÇÃO DO CURSO DE GEOGEBRA.....	100

LISTA DE QUADROS

INTRODUÇÃO

QUADRO 1: DEFINIÇÕES DO PROCESSO DE VISUALIZAÇÃO	22
QUADRO 2: QUATRO ENTRADAS CLÁSSICAS NA GEOMETRIA	25
QUADRO 3: DOIS MECANISMOS DE IDENTIFICAÇÃO DE OBJETOS A PARTIR DE FORMAS VISUAIS.....	26
QUADRO 1: PRODUÇÃO ESCRITA DO P1	31

CAPÍTULO 1

QUADRO 2: PRODUÇÃO ESCRITA DO P2	37
QUADRO 3: PRODUÇÃO ESCRITA DO P3	40
QUADRO 4: APREENSÕES GEOMÉTRICAS	45
QUADRO 5: PRODUÇÃO ESCRITA DO P4	45

CAPÍTULO 2

QUADRO 1: PRODUÇÃO ESCRITA DO P1	68
QUADRO 2: PRODUÇÃO ESCRITA DO P2	70
QUADRO 3: PRODUÇÃO ESCRITA DO P3	72
QUADRO 4: PRODUÇÃO ESCRITA DO P4	74
QUADRO 5: PRODUÇÃO ESCRITA DO P5	76
QUADRO 6: PRODUÇÃO ESCRITA DO P6	78
QUADRO 7: PRODUÇÃO ESCRITA DO P7	79

CAPÍTULO 3

QUADRO 1: REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA DO TRONCO DE PIRÂMIDE QUADRANGULAR	89
QUADRO 2: QUATRO ENTRADAS CLÁSSICAS NA GEOMETRIA	94
QUADRO 3: DOIS MECANISMOS DE IDENTIFICAÇÃO DE OBJETOS A PARTIR DE FORMAS VISUAIS.....	95
QUADRO 4: PRODUÇÃO ESCRITA DO P1	101
QUADRO 5: PRODUÇÃO ESCRITA DO P2	103
QUADRO 6: PRODUÇÃO ESCRITA DO P3	105
QUADRO 7: PRODUÇÃO ESCRITA DO P4	109

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	14
O ENSINO DE GEOMETRIA E A FORMAÇÃO DE PROFESSORES	15
O <i>SOFTWARE</i> GEOGEBRA E O ENSINO DE GEOMETRIA	17
A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E A PERSPECTIVA DE DUVAL PARA O ENSINO DE GEOMETRIA.....	19
ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS	26
ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO	30
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	14
ARTIGO/CAPÍTULO 1 - FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM UM AMBIENTE ONLINE: POTENCIALIDADES DE TAREFAS ENVOLVENDO O GEOGEBRA PARA A MOBILIZAÇÃO DE APREENSÕES EM GEOMETRIA	18
INTRODUÇÃO	18
COMPREENSÃO DO ENSINO DA GEOMETRIA DE UM PONTO DE VISTA COGNITIVO	20
APREENSÕES GEOMÉTRICAS	22
O <i>SOFTWARE</i> GEOGEBRA E AS CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO DA GEOMETRIA.....	26
ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS	27
ANÁLISE DE TAREFAS DE GEOMETRIA DISCUTIDAS NA AÇÃO DE FORMAÇÃO E DE SUAS POTENCIALIDADES PARA MOBILIZAÇÃO DE APREENSÕES EM GEOMETRIA.....	30
<i>Tarefas propostas pelos professores em formação: sugestões discutidas e suas potencialidades</i>	31
POTENCIALIDADES DE TAREFAS ENVOLVENDO POLIEDROS PARA APREENSÕES EM GEOMETRIA.....	49
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	54
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	54
ARTIGO/CAPÍTULO 2 - VISUALIZAÇÃO EM GEOMETRIA: POTENCIALIDADES DE TAREFAS SOBRE VOLUME PROPOSTAS POR PROFESSORES EM UMA AÇÃO FORMATIVA ENVOLVENDO O SOFTWARE GEOGEBRA	57
INTRODUÇÃO	57
A VISUALIZAÇÃO EM GEOMETRIA NA PERSPECTIVA DE RAYMOND DUVAL E AS CONTRIBUIÇÕES DO <i>SOFTWARE</i> GEOGEBRA.....	59
ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS	65
<i>Descrição e Análise das produções escritas dos professores investigados</i>	68
POTENCIALIDADES DAS TAREFAS PARA VISUALIZAÇÃO EM GEOMETRIA	81
CONSIDERAÇÕES FINAIS	82
REFERÊNCIAS	83
ARTIGO/CAPÍTULO 3 - VISUALIZAÇÃO E DISCURSO EM GEOMETRIA: UMA ANÁLISE DE TAREFAS PROPOSTAS POR PROFESSORES EM UMA AÇÃO FORMATIVA ENVOLVENDO O SOFTWARE GEOGEBRA	86
INTRODUÇÃO	86
FIGURAS GEOMÉTRICAS NO ENSINO DE GEOMETRIA E A PERSPECTIVA DE DUVAL QUANTO À ARTICULAÇÃO ENTRE VISUALIZAÇÃO E O DISCURSO.....	87
ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS	98
ANÁLISE DE TAREFAS DE GEOMETRIA DISCUTIDAS NA AÇÃO DE FORMAÇÃO QUE BUSCAM ARTICULAÇÃO ENTRE A VISUALIZAÇÃO E O DISCURSO.....	100
<i>Tarefas propostas por professores em formação envolvendo sólidos geométricos</i>	101
ARTICULAÇÕES ENTRE A VISUALIZAÇÃO E O DISCURSO PRESENTES EM TAREFAS ENVOLVENDO SÓLIDOS GEOMÉTRICOS.....	111
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	113
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	114
CONSIDERAÇÕES FINAIS	117

Por que ensinar e aprender Geometria? No seu texto “Geometria de um Ponto de Vista Cognitiva”, Duval questiona o modo como a Geometria vem sendo ensinada e como ela deve ser ensinada, visto que o ensino dessa disciplina muitas vezes se apresenta complexo e malsucedido.

Em relação ao primeiro questionamento, o ensino de Geometria é extremamente relevante, uma vez que os conhecimentos adquiridos nessa área contribuem para a compreensão do mundo. Para Abrantes *et al.* (1999), as primeiras experiências de uma criança estão sempre relacionadas ao mundo em que vive, pois essas primeiras experiências costumam ser geométricas e espaciais. Isso ocorre quando ela começa a distinguir um objeto de outro, por exemplo.

Quanto ao segundo questionamento, como a Geometria deve ser ensinada? Para Duval (2003), o ensino de Geometria deve ocorrer a partir de uma abordagem cognitiva, descrevendo o funcionamento cognitivo que contribuía para a aprendizagem do estudante.

Na área da Educação Matemática, como área de pesquisa, há uma grande quantidade de investigações que discutem o ensino de Geometria e a formação de professores de matemática. Tais investigações apontam a relevância do ensino de Geometria e a necessidade de formação de professores (GONÇALVES; FERREIRA; FERREIRA; MENEGAIS, 2020; KUHN; QUADROS, 2020; LECRER; PAZUCH, 2021; MARQUES; CALDEIRA, 2018; MINÉ; DOS PASSOS PEREIRA, 2021; PAVANELLO; COSTA; VERRENGIA, 2020).

Essas pesquisas têm como objeto de investigação o ensino e a aprendizagem de Geometria na Educação Básica e constataam a necessidade de promover espaços de formação, nos quais o professor tenha a oportunidade de dialogar com seus pares, refletir as suas práticas pedagógicas e repensar aspectos conceituais da geometria.

Para Cyrino

é importante que os programas de formação de professores busquem espaço diferenciados[...] para que os futuros professores possam, por meio de um trabalho colaborativo, investigar, discutir e refletir a respeito da produção/difusão de conhecimentos matemáticos, dos aspectos didáticos, filosóficos, sociológicos, psicológicos e políticos desses conhecimentos e de outros tópicos necessários para a sua profissionalização. Nesses espaços, eles são convidados a assumir que a produção/difusão do conhecimento matemático e do seu ensino é um processo que abarca transformação, criatividade, criticidade, liberdade solidária e participação ativa na constituição de conhecimentos essenciais para sua atividade profissional (2021, p.2).

Nogueira *et al.* (2016), Lovis e Franco (2013) e Almouloud *et al.* (2004) manifestam a necessidade de programas de formação continuada, constituídos por meio de grupos de estudos,

nos quais professores de matemática possam ter a oportunidade de discutir, refletir o ensino de geometria e suas práticas.

As pesquisas supracitadas defendem que a intervenção do professor no processo de aprendizagem influencia diretamente na construção do conhecimento dos alunos. Nesse sentido, um professor que tem oportunidade de refletir e ressignificar sua prática pode contribuir com a aprendizagem de geometria a partir de diferentes estratégias de ensino (NUNES; ONUCHIC, 2019).

Buscando participar desse debate sobre formação de professores de Matemática, esta pesquisa é oriunda de minhas inquietações e preocupações desde o período de minha graduação em Matemática, passando pela minha formação no mestrado em Educação Matemática. Nesses momentos de formação tive e estou tendo várias oportunidades de participar de debates e reflexões sobre o papel da formação de professores de matemática, particularmente no que tange ao ensino da Geometria.

Durante minha graduação tive também a oportunidade de discutir temas associados ao uso de tecnologias digitais e sobre o uso do *software* GeoGebra e suas contribuições para o ensino da Matemática. Isso ocorreu nos períodos em que participei de um projeto de iniciação científica, de uma das ações de um projeto de extensão intitulado “O GeoGebra no ensino, na aprendizagem e na pesquisa em Educação Matemática” e em uma das edições do “Curso de GeoGebra” promovidos pela Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR) campus de Apucarana). Ambos os projetos são coordenados pelo professor Sérgio Carrazedo Dantas.

Diante disso, acreditamos que é importante proporcionar momentos de formação continuada a professores de matemática, nos quais esses professores possam refletir o ensino de geometria e repensar suas práticas pedagógicas considerando a utilização do *software* GeoGebra. Assim, o objetivo do presente estudo é discutir os processos de visualização, construção e raciocínio mobilizados por professores de matemática na proposição de tarefas em uma ação formativa envolvendo o *software* GeoGebra à luz da teoria de Raymond Duval.

Tendo em vista as temáticas apresentadas e sua relevância para o ensino de Geometria, nas seções que seguem, apresentamos o ensino da geometria e a formação de professores, as contribuições do *software* GeoGebra para o ensino de Geometria e a perspectiva de Raymond Duval para o ensino da geometria. Finalizamos esta introdução com o encaminhamento metodológico e a forma de como nossa dissertação está organizada.

O ENSINO DE GEOMETRIA E A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL,1998) já apontavam a

relevância do ensino de geometria no currículo da matemática da Educação Básica por contribuir com o desenvolvimento de um tipo de pensamento dos alunos, nomeadamente o pensamento geométrico, que permite compreender, descrever e representar de forma organizada o mundo em que vivem. Fonseca *et al.* (2005) apontam a relevância social, caráter prático e utilitário destacados no bloco “Grandezas e Medidas” dos PCN (BRASIL, 1998).

Na Base Nacional Comum Curricular – BNCC, (BRASIL,2018), ao apresentar o ensino de geometria, há a defesa de que o ensino de geometria não deve se restringir à aplicação de fórmulas. De acordo com esse documento, o aluno deve ser convidado a realizar investigações, conjecturar e produzir argumentos.

A segunda competência geral da Educação Básica evidenciada pela BNCC (BRASIL, 2018) refere-se ao incentivo da investigação, reflexão e análise crítica[...] que contribuam para testar hipóteses, formular e resolver problemas [...] Além disso, a BNCC (BRASIL, 2018) destaca que o estudo da Geometria deve proporcionar o desenvolvimento do pensamento geométrico, afirmando que “Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes” (BRASIL, 2018, p. 271).

Arinos e Silva (2021, p. 271) salientam que para que ocorra a aprendizagem em Geometria é fundamental “não apresentar a geometria apenas como um conjunto de definições, propriedades e fórmulas que desligam esse conhecimento de quaisquer aplicações”, sendo assim, as aulas realizadas por meio de situações-problema e atividades investigativas possibilitam que o estudante possa elaborar e validar suas hipóteses.

Nesse sentido, o ensino de Geometria deve ser realizado contemplando explorações intuitivas, mas de modo que vise à construção formal e explorações que possibilitem o estabelecimento de conhecimentos e conseqüentemente a uma sistematização (PAVANELLO; COSTA; VERRENGIA, 2020).

No processo de ensino e aprendizagem de Geometria é importante destacar o papel do professor desde o seu início: no momento da elaboração da tarefa e as condições de aplicação da tarefa, visto que o professor deve considerar os conhecimentos prévios do estudante e os conhecimentos a serem atingidos com a tarefa proposta. Além disso, o professor enquanto mediador do conhecimento, contribui para estimular a produção de significados. Moraes e Barguil (2015) apontam que, segundo os PCN (BRASIL, 1998), o professor desempenha um papel fundamental de mediador entre o conhecimento matemático e o estudante, sendo responsável por planejar atividades que estimulem o aprendizado e a cooperação.

Para tanto, é necessário que o professor conheça as dificuldades que podem ocorrer no processo de ensino e aprendizagem, uma vez que elas se apresentam no momento de identificar

e desenvolver conceitos que contribuam com a solução de problemas (GONÇALVES; FERREIRA, MENEGAIS, 2020).

Nessa perspectiva, Perovano e Silva (2021) apontam a relevância de identificar que conhecimentos de geometria foram constituídos pelos alunos durante a Educação Básica, visto que, durante a formação inicial, os estudantes podem apresentar conceitos geométricos equivocados adquiridos durante a etapa anterior, avançando com esses conceitos para outros níveis.

Pesquisas mais recentes revelam que o ensino da geometria “se mostra ineficiente e precário, o que evidencia as dificuldades tanto de professores quanto de alunos em todos os segmentos da Educação Básica” (BARROS; PAVANELLO, 2022, p. 12). Além disso, Nunes e Onuchic (2019) constataram em seus estudos que os professores se sentem despreparados para o trabalho com a geometria e indicam formações que permitam refletir sobre práticas e conceitos geométricos, uma vez que apresentam dificuldades no ensino e aprendizagem, consequência que os acompanham desde a Educação Básica.

Para além de oportunizar formação de professores, é indispensável que professores tenham a possibilidade de estudar fundamentos teóricos e metodológicos da Geometria (CARDOSO, 2022). Desse modo, para Rocha *et al.* (2021) é preciso ter em mente que a formação de professores não se encerra com o término da graduação, uma vez que o desenvolvimento profissional ocorre de maneira contínua.

Considerando a relevância da formação de professores para o ensino de Geometria e a necessidade de abordar os conceitos de Geometria a partir de explorações e investigações que contribuam para a constituição de conceitos geométricos, a seguir apresentamos as contribuições do *software* GeoGebra para os processos de visualização.

O SOFTWARE GEOGEBRA E O ENSINO DE GEOMETRIA

A acelerada revolução digital definida por momentos de constantes evoluções tecnológicas impactou diversas áreas da sociedade, o que não seria diferente com a área da Educação. Para Novoa (2019, p.4), “é impossível ignorar o impacto da revolução digital, bem como a necessidade de diferenciar os percursos dos alunos”. Nesse sentido, o uso das tecnologias digitais visando potencializar o ensino e a aprendizagem da matemática e como alternativa de recurso didático está cada vez mais presente nas escolas.

Torna-se um grande desafio (re)pensar o ensino, a aprendizagem e a formação de professores levando em conta as tecnologias digitais no atual momento. Nesse contexto, o *software* GeoGebra se apresenta como um recurso profícuo para o ensino de Matemática, de

modo particular o ensino de Geometria.

O *software* GeoGebra é um *software* de geometria dinâmica gratuito que apresenta uma variedade de ferramentas que permitem a construção de pontos, segmentos de retas, retas paralelas e retas perpendiculares. Além disso, possui uma interface muito intuitiva composta por uma barra de ferramentas, Janela de Álgebra, Janela de Visualização 2D e Janela de Visualização 3D.

Além dos recursos quanto ao aspecto visual como cores, espessura e movimento, o GeoGebra possui uma ferramenta denominada de *controle deslizante* que permite causar variações nas representações ao assumir uma função de variável. A título de exemplo, pode-se construir a representação de um polígono regular de n lados em que um controle deslizante representa o número de lados variando de três e a vinte. Nogari e Martin (2021) defendem que o *software* GeoGebra apresenta uma variedade de recursos que permite ao estudante construir conceitos matemáticos por meio da manipulação dos objetos.

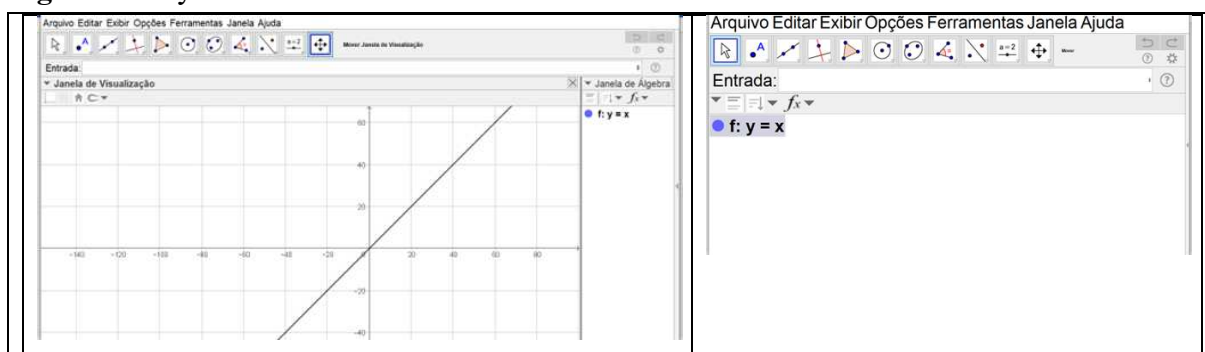
O *software* GeoGebra permite que o aluno visualize uma representação em movimento. Dessa maneira, esse *software* apresenta contribuições relacionadas aos aspectos da visualização, especialmente quando tratamos das representações dos objetos tridimensionais, em razão de proporcionar o acesso às representações desses objetos. De acordo com Duval (2009, p.29) “não há conhecimento que não possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação”. Segundo esse autor existe um sistema denominado registro de representação semiótica que é utilizado para representar um objeto matemático e suas diversas representações, visto que o objeto matemático não está acessível à percepção ou experiência intuitiva como os objetos do cotidiano.

Duval explica que “a apreensão¹ dos objetos matemáticos não pode ser mais do que uma apreensão conceitual e, de outro, é somente por meio de representações semióticas que a atividade sobre os objetos matemáticos se torna possível”(2012, p.268). Para Oliveira *et al.* “ao realizar construções geométricas na janela de visualização do *software* é possível observar variações nas representações algébricas presentes na janela de álgebra e vice-versa” (2020, p. 621).

Ao inserir um comando na caixa de entrada, o resultado poderá ser observado tanto na Janela de Álgebra, quanto na Janela de Visualização 2D, bem como Janela de Visualização 3D como ocorre no caso das representações dos objetos tridimensionais.

¹ Posteriormente serão discutidas as apreensões geométricas segundo Raymond Duval.

Figura 1: Layout do GeoGebra Classic



Fonte: as autoras.

As construções realizadas no *software* GeoGebra, permitem observarmos as modificações das representações algébricas que ocorrem simultaneamente nas construções geométricas.

Para o estudo de Geometria, Duval (2005, p. 11) declara que o uso de *softwares* de construção nos permite “eliminar completamente as aproximações compensatórias da mão no uso dos instrumentos”, visto que os *softwares* de geometria dinâmica eliminam as imprecisões durante a construção. O uso de instrumentos pode favorecer aos estudantes a observação de que “as propriedades geométricas não são apenas características perceptuais”, uma vez que o instrumento permite investigar as propriedades geométricas.

Devido às contribuições que o *software* GeoGebra apresenta no que diz respeito à visualização, à manipulação e à construção das representações dos objetos geométricos, apresentamos a perspectiva de Duval para o ensino da geometria.

A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E A PERSPECTIVA DE DUVAL PARA O ENSINO DE GEOMETRIA

Para Duval (1995), todo estudo dos fenômenos que envolvem o conhecimento passa pela noção de representação. Segundo esse autor, as representações semióticas cumprem na atividade cognitiva uma função de comunicação e funções de suporte para representações mentais.

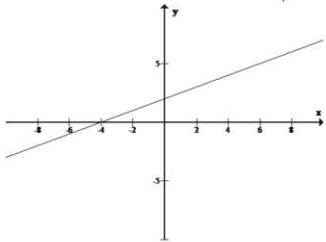
O papel da semiose é um fenômeno relevante para compreender o desenvolvimento do pensamento e o desenvolvimento dos conhecimentos. De acordo com Duval (1995, p.65, tradução nossa) “ não é o emprego de um ou outro tipo de signo, mas a variedade dos tipos de signos que podem ser utilizados”. Desse modo, a semiose, que se qualifica como a produção de uma representação semiótica, é inseparável de uma diversidade de tipos de signos disponíveis e não há noésis sem semiose. A noésis está relacionada aos atos cognitivos, ou à apreensão conceitual de um objeto. A noésis tem relação direta com a apreensão perceptiva que será

definida mais adiante, apreensão de cores e figuras geométricas.

Duval (2012) afirma que um sistema semiótico somente será um registro de representação se permitir as três atividades cognitivas fundamentais ligadas à semiose: a formação de uma representação identificável, o tratamento e a conversão.

A **conversão** é uma operação de transformação da representação do objeto, é uma transformação externa ao registro da representação de partida, diferentemente do que ocorrer com o **tratamento** que, ao contrário, é a transformação de uma representação inicial em outra representação, ou seja, ocorre uma transformação interna de uma representação no registro de representação (DUVAL, 1995).

Figura 3: Exemplo - Tratamento e Conversão

<p>a) $0,25 + 0,25 = 0,5$ (representação decimal, tratamento decimal)</p> <p>b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ (representação fracionária, tratamento fracionário)</p>	<p>O preço a pagar por uma corrida de táxi depende da distância percorrida. A tarifa y é composta de duas partes: uma parte fixa denominada bandeirada e uma parte variável que depende do número x de quilômetros rodados. Suponha que a bandeirada esteja custando R\$ 2,00 e o quilômetro rodado, R\$ 0,50.</p> <p style="text-align: right;">1ª CONVERSÃO → $y = 2 + 0,5x$</p> <p style="text-align: right;">↓ 2ª CONVERSÃO</p> 
Exemplo de tratamento	Conversão entre registros de representação semiótica

Fonte: Pirola(2012, p.37)

A partir das diferentes atividades cognitivas fundamentais das representações vinculadas ao sistema semiótico, a abordagem cognitiva não parte de análises de erros para determinar o que o aluno compreende, mas em descrever o funcionamento cognitivo que permite o aluno compreender e controlar os diferentes processos matemáticos (DUVAL, 2003). Segundo esse autor, a geometria é uma área do conhecimento que exige uma demanda cognitiva maior, uma vez que devemos construir, raciocinar e ver. Logo, o ensino da geometria mobiliza o olhar, a linguagem e o gesto (DUVAL, 2005). Nesse sentido, Duval (1998) defende que é necessário compreender os três processos cognitivos indispensáveis para a aprendizagem em geometria, quais sejam os processos de visualização², construção e raciocínio.

Os processos de visualização são constituídos a partir de uma exploração heurística de uma situação. Os processos de construção por ferramentas se constituem como um modelo e

² O foco de nossa dissertação está no processo de visualização.

estão relacionados aos objetos matemáticos representados. Por sua vez, o raciocínio diz respeito ao processo discursivo que é utilizado em provas e justificativas (DUVAL, 1998).

A compreensão em matemática e em geometria inclui a coordenação de diferentes registros de representação, uma vez que o acesso aos objetos matemáticos ocorre por meio das representações semióticas (DUVAL, 2012). Essa compreensão ocorre quando há a articulação desses registros, isso significa que é fundamental que ocorra “a coordenação entre os tratamentos específicos ao registro das figuras e os do discurso teórico em língua natural” (DUVAL, 2011, p.196), uma vez que, no ensino de geometria, são envolvidas atividades heterogêneas em virtude do uso de figuras, o raciocínio dedutivo e argumentação (DUVAL, 1994).

Segundo Duval (1998), para que uma figura possa representar um objeto matemático, ela deve atender dois requisitos, quais sejam: atender uma condição visual, ou seja, ser uma constituição de várias formas, e estar ancorado em propriedades (hipóteses). Além disso, “as figuras são a forma mais direta de explorar os diferentes aspectos, de antecipar os resultados de um processo, de selecionar uma solução” (DUVAL, 1994, p.121).

Duval explica que “uma figura é uma organização de elementos de um campo perceptivo, não homogêneo, que constitui um objeto que se destaca deste campo” (2012, p.121). Ademais, uma figura sempre terá a configuração de ao menos duas unidades de figuras elementares (DUVAL, 1995).

Isso significa que uma figura é composta de ao menos duas unidades figurais elementares. Para Duval, “um quadrado com as suas diagonais, uma linha reta e um ponto marcado sobre ou fora dele, um círculo e o seu centro (marcado apenas pelo ponto do compasso), são configurações de duas unidades figurais elementares” (1995, p. 200, tradução nossa).

Nessa perspectiva, as figuras geométricas podem ser um importante suporte intuitivo, permitem ver além das afirmações, realizar explorações, além de terem um papel heurístico, pois podem contribuir com a resolução de um problema. Duval afirma que “uma figura dá uma representação de uma situação geométrica que é mais fácil de apreender do que a sua apresentação em uma declaração verbal: ela faz aparecer sobre um objeto visível relações ou hipóteses de relações que não são claramente evidentes em uma declaração verbal” (1994, p.121).

Tão importante quanto as figuras em uma situação geométrica, o processo de visualização é discutido por diversos autores que apresentam diferentes definições para esse processo como pode ser observado no Quadro 1.

Quadro1: Definições do processo de visualização

Autores	visualização
Arcavi	“é a capacidade, o processo e o produto de criação, interpretação, uso e reflexão sobre imagens, diagramas, na nossa mente, em papel ou ferramentas tecnológicas com o objetivo de representar e comunicar informações, pensar sobre e desenvolver ideias”[...] (1999, p. 26).
Cifuentes	“visualizar é ser capaz de formular imagens e está no início de todo processo de abstração”(2005, p.71).
Duval	“ a visualização refere-se a uma atividade cognitiva que é intrinsecamente semiótica, ou seja, nem mental, nem física” (1999, p.7, tradução, nossa).
Gutierrez	“ um tipo de atividade de raciocínio baseado no uso de elementos visuais ou espaciais, seja mental ou físico, realizado para resolver problemas, ou provas propriedades”(1996, p.9).
Kalef	“visualizar é formar e conceber uma imagem visual, mental de algo que não se tem ante os olhos no momento”(1988, p. 16).
Presmeg	“assim, a visualização é tomada para incluir processos de construção e transformação de imagens mentais visuais e todas as inscrições de natureza espacial que podem estar implicadas em fazer matemática”(2006, p.206, tradução nossa).
Van Garderen	“ é a capacidade de manipular mentalmente, girar ou torcer mentalmente um objeto apresentado”(2006, p.496, tradução nossa).

Fonte: as autoras.

No que se refere ao processo de visualização, para Duval (2005), ver compreende o reconhecimento discriminativo das formas e a identificação dos objetos reconhecidos. Isto significa, que é fundamental desenvolver um modo de visualização que permite não somente “ver” o que está posto na figura, mas adentrar em seus conceitos e propriedades, visto que “nem sempre é fácil ver numa figura as relações ou propriedades relativas às hipóteses dadas e que correspondem à solução procurada” (DUVAL, 1995, p.202).

A **visualização** desempenha um papel relevante na matemática, uma vez que permite o acesso às representações dos objetos matemáticos mesmo na ausência destes. Para Duval, “a visualização é baseada na produção de uma representação semiótica” (1999, p.7). Essas representações “são produções constituídas pelo emprego das regras de sinais (enunciado em língua natural, uma forma algébrica, gráfico, figura geométrica)” (DUVAL, 2009, p.15). Em razão disso, é importante distinguir um objeto matemático de sua representação, visto que um mesmo objeto matemático pode apresentar representações distintas.

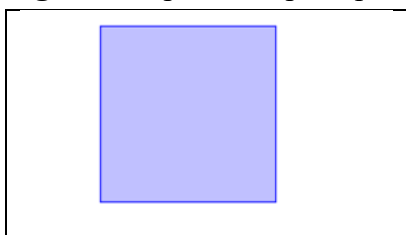
Além disso, a **visualização** permite a realização de uma exploração das figuras geométricas. Mas o que ocorre muitas vezes em uma atividade matemática é que “a mera visão de uma figura parece excluir o olhar matemático sobre ela” (DUVAL, 1994, p.121). Logo, há uma dificuldade de adentrar na maneira matemática de visualizar e acessar unidades figurais inferiores 1D/0D (retas, segmentos, pontos, vértices).

A maneira matemática de visualizar ocorre por meio das apreensões geométricas e uma desconstrução dimensional das formas, contudo, para que ocorra a aprendizagem geométrica,

Duval explica que é necessária a compreensão dos quatros tipos de apreensões: **perceptiva**, **discursiva**, **operatória** e **sequencial**. Já a visualização abrange as **apreensões perceptiva**, **discursiva** e **operatória** (DUVAL, 1998).

A primeira apreensão a ser mobilizada em uma atividade de geometria é a **apreensão perceptiva**. Por meio dela reconhecemos e identificamos uma forma em um plano ou no espaço. A apreensão perceptiva realiza uma função epistemológica de identificação dos objetos em duas ou três dimensões. Logo, a **apreensão perceptiva** refere-se ao primeiro olhar sobre uma figura e a interpretação dessas formas.

Figura 4: Apreensão perceptiva - quadrado



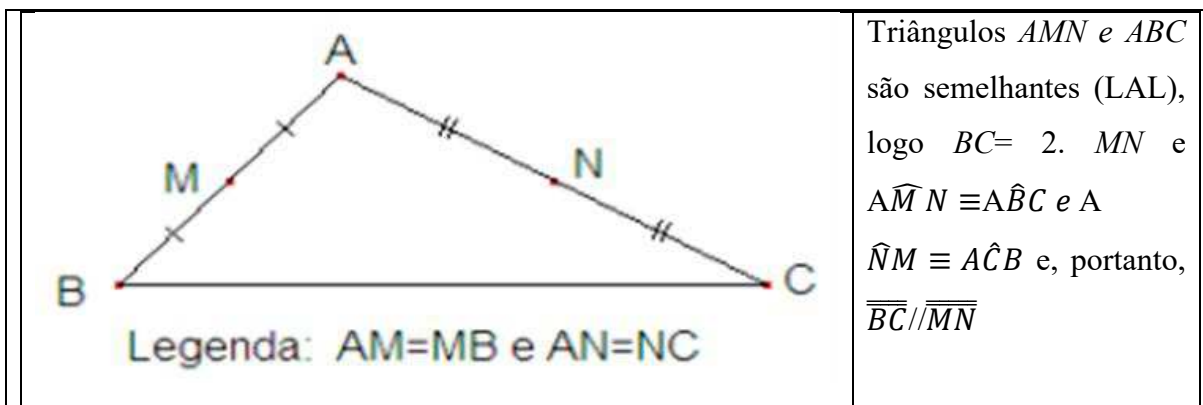
Fonte: as autoras.

Duval afirma que “o significado perceptual é determinado pela **apreensão perceptiva**. Esse tipo de apreensão é independente de qualquer **apreensão discursiva**” (DUVAL, 1994, p. 134), ou seja, é possível que uma forma seja reconhecida e, no entanto, há a possibilidade de não mobilizarmos as propriedades necessárias pertinentes à resolução de um problema. A apreensão discursiva “[...] corresponde a uma explicação das propriedades matemáticas de uma figura, além daquelas indicadas por uma legenda ou pelas hipóteses. Essa explicação é de natureza dedutiva” (DUVAL, 1994, p. 124, tradução nossa).

Nas atividades geométricas, as figuras utilizadas para resolver problemas distintos exigem que sejam realizadas transições entre a visualização e o discurso, isso significa que é necessário transitar entre diferentes apreensões como apreensão perceptiva, discursiva e operatória (DUVAL,1999). Dessa maneira, não podemos afirmar que propriedades matemáticas constam em uma figura geométrica, sem analisá-la em relação a uma legenda, uma hipótese que explicita certas propriedades matemáticas.

Figura 5: Apreensão discursiva de uma figura: identificação de outras propriedades

<i>Dados: No triângulo ABC, $AM=MB$ e $AN=NC$</i>	Outras propriedades da figura
---	-------------------------------

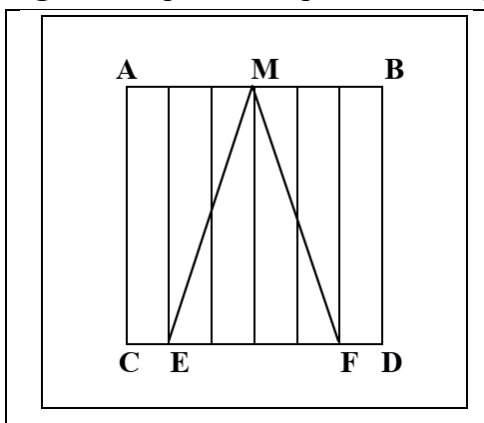


Fonte: Jahn e Bongiovanni (2019).

Logo, para Duval (1994), a **apreensão discursiva** fornece explicações de outras propriedades matemáticas, além daquelas que foram indicadas nas hipóteses. Um exemplo são “os exercícios elementares de aplicação de teoremas ou definições se baseiam apenas nesta **apreensão discursiva**” (DUVAL, 1994, p. 126).

Ao tratarmos de uma mudança figurativa ou apreensão operatória, devemos distingui-la das apreensões perceptiva com as quais tem forte relação e da apreensão discursiva que fixa as hipóteses. A apreensão operatória de figuras é uma apreensão centrada nas modificações possíveis de uma figura inicial e nas reorganizações possíveis dessas modificações. Para cada tipo de modificação, são diversas as operações possíveis [...] (DUVAL, 2012, p. 125)

Figura 6: Apreensão operatória – Repartir um quadrado em seis partes iguais

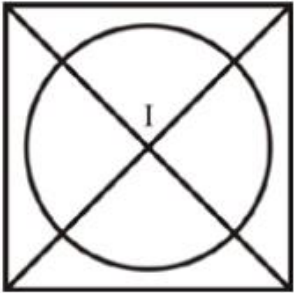


Fonte: Duval (2012).

Na resolução do problema proposto é utilizado o recurso de reconfiguração intermediária, no qual a partir do ponto médio M é realizada a partição do quadrado. Logo, a apreensão operatória nos permite operar sobre as figuras, sendo possível manipular, reconfigurar e realizar comparações dos objetos geométricos.

Quando nos referimos aos processos de construção, no qual utilizamos um instrumento, seja um *software*, ou régua e compasso, estamos tratando da **apreensão sequencial**.

Figura 7: Apreensão sequencial

<p>Exemplo 5: Considere a figura e as frases a seguir:</p> <ul style="list-style-type: none"> a- Chame de I o ponto onde as diagonais se cortam; b- Desenhe um quadrado com 5cm de lado; c- Trace o círculo de centro em I no interior do quadrado; d- Trace as diagonais do quadrado. 	
--	--

Fonte: Moretti e Brandt (2015, p. 611).

Segundo Duval “esta ordem depende não só das propriedades matemáticas da figura a ser construída, mas também das restrições técnicas dos instrumentos utilizados” (1994, p.126). A função dessa apreensão é fornecer um modelo.

Após propor os quatro tipos de apreensões geométricas, Duval (2022) classifica as maneiras de ver em função do papel das figuras nas atividades geométricas. Desse modo, ele apresenta quatro tipos de olhares em geometria.

Quadro 2: Quatro entradas clássicas na geometria

	BOTÂNICO	AGRIMENSOR-geômetra	CONSTRUTOR	INVENTOR-faz-tudo
1. Tipo de operação nas FORMAS VISUAIS , exigida para a atividade proposta	Reconhecer as formas a partir das qualificações visuais do contorno: UMA forma particular é privilegiada como TÍPICA	Medir as bordas de uma superfície: em um TERRENO ou em um DESENHO (variação de escala de grandeza e consequentemente do procedimento de medida)	Decompor uma forma em traços construtíveis com a ajuda de um instrumento. É preciso (frequentemente) passar de TRAÇOS AUXILIARES que não pertencem a figura “final”.	Transformar formas, umas em outras. Deve-se adicionar TRAÇOS REORGANIZADORES na figura final para iniciar as transformações
2. Como as PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS são mobilizadas em relação ao tipo de operação	Sem ligações entre as diferentes propriedades (não há definição matemática possível)	As propriedades são dos critérios de escolha para as medidas a fazer. Elas só são úteis se remetem a uma fórmula permitindo um cálculo	Como restrições de uma ordem de construção. Certas propriedades são obtidas por uma única operação de traçagem , as outras exigem várias operações	Implicitamente por enviar a uma rede mais complexa (uma trama de retas para a geometria plana ou uma trama de intersecções de planos ...) que a figura de partida

Fonte: Duval (2022)

Para Duval (2022) há sempre um problema cognitivo na passagem do reconhecimento discriminativo de formas e a identificação de objetos dados a ver, uma vez que a percepção do mundo a nossa tende a repousar em “semelhanças”.

O impasse que ocorre na aprendizagem em Geometria é que a maneira de visualizar em geometria é centrada em uma visualização não icônica e no nosso dia a dia estamos condicionados a uma visualização icônica. Em algumas situações a semelhança é capaz de nos conduzir ao reconhecimento do objeto, contudo nem sempre isso ocorre, sendo necessário recorrer a uma enunciação, uma entrada verbal. Ainda a **apreensão operatória** pode apresentar o que Duval (2022, p.12) denomina de “fecundidade intuitiva das figuras”.

Quadro 3: Dois mecanismos de identificação de objetos a partir de formas visuais

VISUALIZAÇÃO ICÔNICA		VISUALIZAÇÃO NÃO ICÔNICA	
<p>É SEMELHANTE AO perfil de um objeto real, ou a um conjunto de deslocamentos em um território ou a um modelo típico (padrão). <i>A figura permanece um objeto independentemente das operações efetuadas sobre ela.</i></p>		<p>É uma SEQUÊNCIA DE OPERAÇÕES que permite reconhecer as propriedades geométricas, por impossibilidade de obter certas configurações, ou por invariância das configurações obtidas. <i>A figura é uma configuração contextualmente destacada de uma rede ou de uma organização mais complexa.</i></p>	
BOTÂNICO	AGRIMENSOR geômetra	CONSTRUTOR	INVENTOR faz-tudo

Fonte: Duval(2022)

Observe que a visualização icônica está relacionada aos olhares do botânico e agrimensor. A visualização não icônica está diretamente relacionada aos olhares do construtor e do inventor.

Tendo em vista o que foi discutido até aqui, nas próximas seções serão propostos os objetivos geral e específicos, os encaminhamentos metodológicos e a organização da pesquisa.

ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

As questões que emergiram das inquietações advindas das experiências da trajetória profissional e de pesquisas relacionadas com as investigações no cenário da formação continuada de professores, aliadas aos conhecimentos necessários para o ensino de geometria em conjunto com o recurso do *software* GeoGebra, conduziu-nos a investigar as tarefas de geometria elaboradas por professores de matemática em uma ação formativa envolvendo o *software* GeoGebra. Nessa conjuntura, traçamos o seguinte objetivo de de investigação: compreender os processos de visualização, construção e raciocínio mobilizados por professores de Matemática em uma Ação Formativa envolvendo o *software* GeoGebra à luz da teoria de Raymond Duval.

Com o propósito de buscar respostas, estruturamos objetivos específicos, aos quais compõem objetos de investigação em cada um dos artigos que constituem esta dissertação, a saber:

- Analisar as potencialidades de tarefas envolvendo poliedros, que foram propostas e discutidas por professores de matemática em uma Ação Formativa envolvendo *software* GeoGebra, para mobilização de apreensões em geometria;
- Discutir as potencialidades de tarefas que exploram a visualização em Geometria para o conceito de volume de sólidos geométricos, que foram propostas por professores de matemática em uma Ação Formativa envolvendo o *software* GeoGebra;
- Discutir a articulação entre visualização e o discurso evidenciados nas tarefas propostas por professores de matemática em uma Ação Formativa envolvendo o *software* GeoGebra”.

Ao delinear os procedimentos metodológicos desta pesquisa, apresentamos as concepções que refletem nossas escolhas teóricas e metodológicas. Esta é uma pesquisa de natureza qualitativa amparada na perspectiva de Bogdan e Biklen (1994, p. 47-50). Para esses autores, em “uma investigação qualitativa, a fonte dos dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal. [...]. O significado é de grande importância na abordagem qualitativa”.

Este trabalho foi desenvolvido em um contexto de um curso de formação de professores de Matemática, denominado “Curso de GeoGebra”. O curso é um espaço de formação de professores on-line e, embora seja intitulado como um curso, apresenta uma estrutura formativa não vertical, isso significa que são propostas ações pautadas em uma formação que oportuniza um trabalho cooperativo, discussões, debates e socialização. Tem como objetivo proporcionar um ambiente que permita aos participantes em formação compartilhar suas práticas pedagógicas, refletir e discutir aspectos técnicos do *software* GeoGebra e as contribuições desse recurso para o ensino e para a aprendizagem da Matemática.

Essa formação de professores foi ofertada pela Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR) em parceria com a Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT) e contou com o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Mato Grosso (FAPEMAT), sendo realizado em um período de oito módulos que ocorriam semanalmente. No primeiro módulo os participantes em formação têm acesso a interface do programa e modos de realizar construções geométricas básicas (retas, círculos e formas geométricas em geral). A partir do

segundo módulo os participantes em formação têm acesso a construções de polígonos por meio das ferramentas da interface e a inserção de comandos na caixa de entrada.

O terceiro módulo é dedicado aos tópicos das Geometrias plana e espacial utilizando recursos estudados nos módulos anteriores, bem como comando sequência. Os demais módulos do curso abordam recursos que podem ser aplicados aos tópicos de funções e sequências, além de outros comandos e ferramentas próprias do programa. Em cada módulo os participantes em formação tiveram acesso aos materiais escritos e vídeos para seu estudo relativo ao que é abordado em cada módulo da formação.

Na presente pesquisa foram investigados professores em formação que fizeram parte da 18ª Edição do Curso de GeoGebra. Essa edição contou com 603 participantes, sendo 153 colaboradores integrantes da equipe formadora e 450 participantes em formação. Os participantes desse curso, em sua maioria são: estudantes de Graduação em Matemática; Estudantes de Pós-Graduação Lato ou Stricto Sensu (das áreas de Matemática, Ensino de Matemática ou Educação Matemática); e professores de Matemática que atuam na Educação Básica ou no Ensino Superior.

Para a realização das tarefas, os participantes em formação são divididos em cinco grupos (G1, G2, G3, G4, G5) com 90 participantes em formação em cada grupo, sendo acompanhados durante o período da formação por colaboradores voluntários. Esses colaboradores voluntários são participantes de edições anteriores do curso que apresentaram um bom desempenho no desenvolvimento das tarefas, na interlocução com seus pares ao longo da participação e na realização integral do curso.

No decorrer da formação, cada colaborador voluntário fica encarregado por acompanhar semanalmente cinco participantes em formação. Esses colaboradores verificam as construções elaboradas no *software* GeoGebra, interagem com os participantes em formação nos fóruns de discussões, realizam questionamentos e acompanham o seu desenvolvimento ao longo de cada módulo. Esse acompanhamento é registrado semanalmente por meio de um relatório com o objetivo de direcionar o trabalho.

Os dados analisados na presente investigação foram obtidos no terceiro módulo desse curso, sendo considerado o “Grupo 5 (cinco)” com o maior número de participantes em formação que atendiam aos critérios estabelecidos em consonância com o objetivo da pesquisa. Sendo assim, o primeiro critério de seleção dos participantes em formação é que no ato da inscrição se identificassem como professores da Educação Básica e tivessem 100% de participação no curso, uma vez que há participantes em formação que não são professores da Educação Básica.

Dentre 90 participantes em formação, selecionamos a produção escrita do módulo três (conteúdo, tarefa, construção e registro no fórum) de 30 participantes em formação integrantes do Grupo 5 (cinco) que atendiam a esses respectivos critérios, contudo desse total foram analisadas 15 produções escritas ao longo desta pesquisa, sendo quatro produções para o artigo 1, sete produções para o artigo 2 e quatro para o artigo 3.

Na Ação Formativa (Figura 8) do módulo três foi solicitado aos participantes em formação que escolhessem um conteúdo de Geometria dos Anos Finais do Ensino Fundamental ou Ensino Médio e, na sequência, elaborassem uma tarefa³ destacando o modo como ela poderia ser explorada em sala de aula e uma possível resolução (construção realizada utilizando o *software* GeoGebra) conforme (Figura 8 – Parte 1). Essas produções foram disponibilizadas e debatidas pelos participantes em formação no fórum de discussão do “Curso de GeoGebra” (Figura 8 – Parte 2).

Figura 8: Proposição da Ação Formativa⁴ – Módulo 3 da 18ª Edição do Curso de *GeoGebra*

Tarefa 3

Esta tarefa deve ser realizada em duas partes.

Parte 1
Considere que você vai lecionar um tópico de Matemática do Ensino Fundamental ou do Ensino Médio durante duas aulas seguidas. Para isso, você deve levar um ou mais arquivos previamente construídos no GeoGebra, utilizando conteúdos abordados nos três primeiros módulos do curso. Os estudantes terão acesso a esse(s) arquivo(s) em computadores (ou celulares) e vão utilizá-lo(s) durante a sua aula. Poste esse(s) arquivo(s) no fórum "Tarefa 3" com uma descrição de como pretende utilizá-lo(s) e de como ele(s) ajuda(m) nas atividades planejadas para sua aula.

Você deve realizar a Parte 1 até 28 de fevereiro às 23h59min (horário de Brasília).

Parte 2
Escolha construções realizadas por, no mínimo, dois colegas e interaja com eles fazendo perguntas, sugerindo alterações ou acréscimos em suas construções.

Você deve realizar a Parte 2 até 03 de março às 23h59min (horário de Brasília).

Fonte: 18ª Edição do Curso de GeoGebra.

³ Tarefas são os enunciados produzidos pelos professores em formação durante a participação no Curso de *GeoGebra*.

⁴ Ação Formativa é a proposição solicitada pelo colaborador voluntário aos professores em formação que é constituída pela (parte 1 e parte 2).

Para a análise, buscamos interpretar as produções escritas (tarefa e construção) elaboradas pelos professores em formação, utilizando como lente teórica, aspectos do processo de visualização e discurso, as apreensões geométricas, noções de Duval (1994, 1998, 1999, 2005, 2011).

Em um primeiro momento, a partir da construção elaborada no *software* GeoGebra, procuramos identificar as características que apresentam aspectos perceptuais de uma figura geométrica. Exploramos as produções escritas, de modo a identificar relações entre as declarações dos professores em formação, a fim de verificar as convergências entre o processo de visualização e o raciocínio (processo discursivo). Além de verificar as convergências entre os processos citados, procuramos identificar convergências entre os processos de construção, os processos de visualização e raciocínio, o objetivo geral de nossa dissertação é compreender os processos de visualização, construção e raciocínio mobilizados por professores de Matemática em uma Ação Formativa envolvendo o *software* GeoGebra à luz da teoria de Raymond Duval.

ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

Nesta dissertação, optamos pela apresentação do trabalho no formato *multipaper*. Duke e Beck (1999) defendem esse formato como um meio profícuo para a comunicação e a disseminação da pesquisa. De acordo com Garnica (2011, p. 8), os textos “guardam entre si, certa independência, mas configuram algo que se pretende coeso, com cada um dos textos auxiliando na formação de um objeto”.

Barbosa (2015) explica que o formato *multipaper* se apresenta como uma coletânea de artigos, que são parte de um projeto mais amplo e que têm características próprias fundamentais para viabilizar suas publicações. Segundo Garnica, “os textos dialogam, e muitas vezes revisitam momentos e temas já visitados: algo como que uma independência que complementa, e complementando talvez organize informações de modo a permitir, sempre, reconfigurações e, é claro, ressignificações” (2011, p.8).

Desse modo, produzimos um artigo para cada objetivo específico que buscasse atender a cada objetivo específico de nossa dissertação. Após esta introdução expandida, a dissertação apresenta, portanto, a seguinte organização:

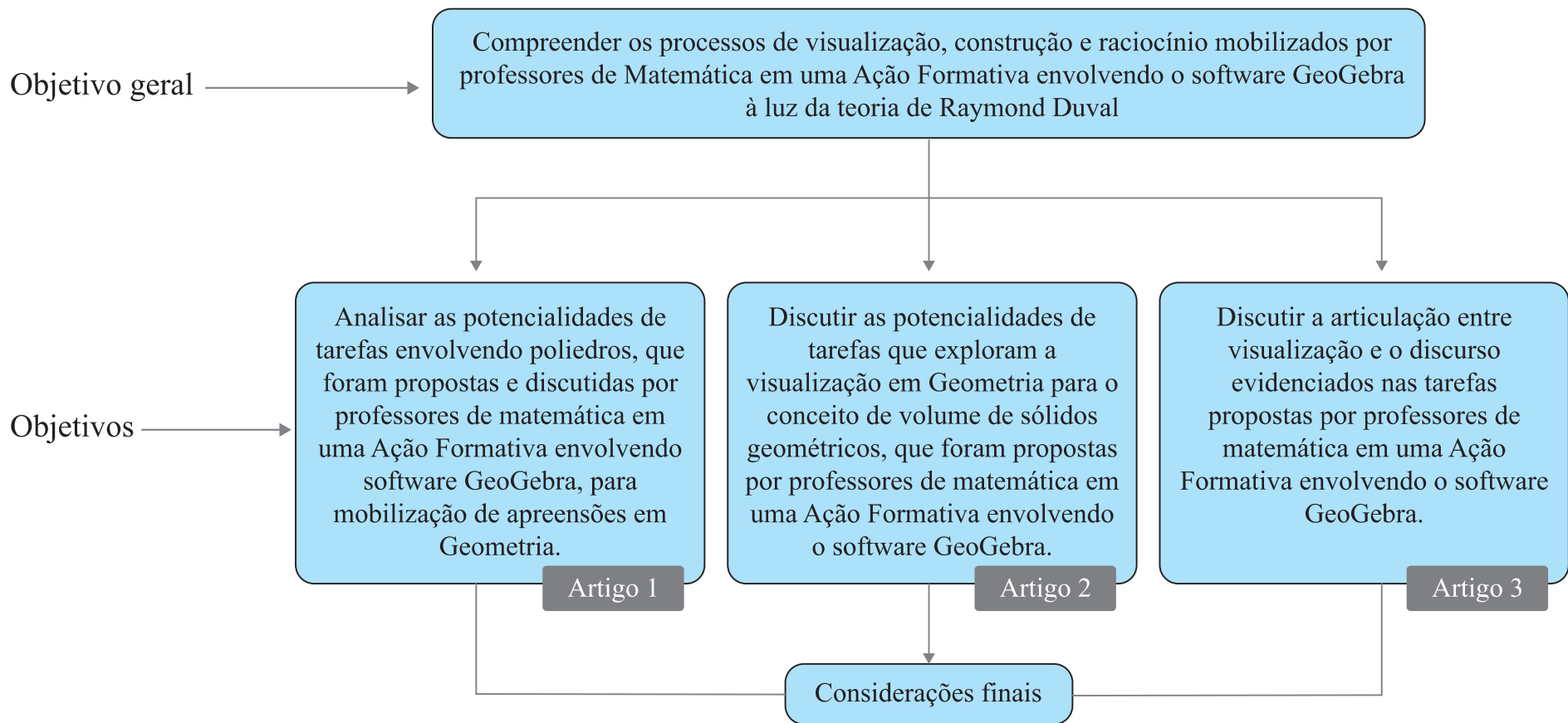
- O capítulo 1 traz o 1º artigo, cujo título é “Formação de professores de Matemática em um ambiente online: Potencialidades de tarefas envolvendo o GeoGebra para a mobilização de apreensões em Geometria;
- O capítulo 2 traz o 2º artigo, cujo título é “Visualização em Geometria:

Potencialidades de tarefas sobre volume que foram propostas por professores em uma Ação Formativa envolvendo o *software* GeoGebra”;

- O capítulo 3 traz o 3º artigo, cujo título é “Visualização e Discurso em Geometria: Uma análise de tarefas propostas por professores em uma Ação Formativa envolvendo o *software* GeoGebra.

Apresentamos na Figura 9, uma visão geral de nossa dissertação por meio de um organograma que compõe os objetivos específicos que orientam a discussão dos capítulos/artigos visando atender o objetivo geral de nossa investigação.

Figura 9: Organização da dissertação no formato *multipaper*.



Fonte: as autoras.

Além desta introdução expandida, na presente dissertação apresentamos três artigos/capítulos que buscam atender a cada um dos objetivos específicos e um quarto capítulo, em que respondemos o objetivo geral de nossa dissertação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARCAVI, A. (1999). The role of visual representation in the learning of mathematics. In: NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE PME, 1999. **Proceedings**. Disponível em: <<http://www.clab.edc.uoc.gr/aestit/4th/PDF/26.pdf>>. Acesso em: 26 jan. 2023.

ARINOS, C. R. M; SILVA, C. O. Da. Possibilidades didáticas com construções geométricas para os anos finais do ensino fundamental: Um estudo com teorema de Pitágoras. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática** – v. 08, n. 23, p. 269-285, 2021

BALDINI, L. F. Elementos de uma comunidade de prática que permitem o desenvolvimento profissional de professores e futuros professores de matemática na utilização do software GeoGebra, Londrina, **Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática)**, 200 f, 2014.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. **Formatos insubordinados de dissertações e teses na Educação Matemática**. In: D'AMBRÓSIO, Beatriz Silva; LOPES, Celi Espassadin (Org.). Vertentes da subversão na produção científica em Educação Matemática. Campinas: Mercado das Letras, 2015. p. 347-367.

BARROS, R.C. P; PAVANELLO, R. Relação entre figuras planas e espaciais no ensino fundamental: o que diz a BNCC? **JIEEM** v.15, n.1, p. 11-19, 2022.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: Matemática/ Anos iniciais**. Secretaria de Educação Fundamental – Brasília: MEC/SEF, 1997, 142 p.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEB, 2018, 600p.

CARDOSO, F. P. Ensino e aprendizagem da geometria na formação de professores. **Ensino em Perspectivas**, Fortaleza, v. 3, n. 1, p. 1-8, 2022.

CIFUENTES, J. C. Uma via estética de acesso ao conhecimento matemático. **Boletim GPEM**, Rio de Janeiro n.46, p. 55–72, jan./jun., 2005.

DUKE, N. K.; BECK, S. W. Education should consider alternative formats for the dissertation. **Educational Researcher**, Washington, v. 28, n. 3. p. 31-36, 1999.

DUVAL, R. Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. **Repères**, n.17, p.121-138, 1994.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Bern: Peter Lang, 1995a.

DUVAL, R. Geometry from a Cognitive Point of View. In: MAMMANA, C.; VILLANI, (Orgs.). **Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: an ICMI study**.

Dordrecht: Kluwer, p. 37-52, 1998.

DUVAL, R. Representation, vision, and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In: HITT, F.; SANTOS, M. (ed.). **Proceeding of the 21st Annual Meeting of the 228 North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Mexico, p. 3-26, oct., 1999.

DUVAL, Raymond. **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática**. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica*. Campinas: Papirus, 2003, p. 14-69.

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Maria Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009. 110 p.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas**. Organização de Tânia M. M. Campos. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011. 160 p

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: Mércles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - Revemat**. Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 118-138, 2012.

FIGENBAUM, J; MATHIAS, C. Uma abordagem destinada à compreensão de elementos de Geometria Analítica por meio do software GrafEq. **Revista Eletrônica da Matemática – REMAT**, Bento Gonçalves, v. 3, n.2, p. 24-39, 207.

GARNICA, A. V. M. Apresentação. In: SOUZA, L. A. de. **Trilhas na construção de versões históricas sobre um Grupo Escolar**. 2011. Tese (Doutorado em Educação Matemática) -UNESP de Rio Claro: São Paulo, 2011.

GONÇALVES, T. Da. C.; FERREIRA, C. C; FERREIRA, V. L. D; MENEGAIS, D. A. F.N. Identificação de Lacunas no processo de aprendizagem dos conteúdos de Geometria no ensino médio pelo método de Van Hiele. **Revista Eletrônica de Matemática - REMAT**, v. 15, p. 01-20, 2020.

GRAVINA, M. A. O potencial semiótico do GeoGebra na aprendizagem da geometria: Uma experiência ilustrativa. **Vydia**. Santa Maria, v. 35, n. 2, p. 237-253, 2015.

KUHN, M. C.; QUADROS, B. M. De. Geometria nos Anos Iniciais: Possíveis Conexões Teóricas e Práticas. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 13, p. 246-254, 2020.

LECRER, O. P. V.G.; PAZUCH, V. Reflexão sobre o processo de elaboração de tarefas de geometria espacial em um movimento formativo de professores. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - Rematec**, Belém, v. 16, ed. 37, p. 97-122, 2021.

LOVIS, K. A; FRANCO, V. S. Reflexões sobre o uso do GeoGebra e o ensino de Geometria Euclidiana. **Informática na Educação: teoria e prática**, Porto Alegre, v. 16, n.1, pp. 149-160, 2013.

MARQUES, V. D.; CALDEIRA, C. R. Da. C. Dificuldades e carências na aprendizagem da

Matemática do Ensino Fundamental e suas implicações no conhecimento da Geometria. **Revista Thema**, [s. l.], v. 15, ed. 2, 2018.

MINÉ, V. A. do. A.; DOS PASSOS PEREIRA, M. R. Políticas públicas na formação continuada para o ensino de geometria. **Roteiro, Joaçaba**, v. 46, 2021.

MORAES, Francisco Ronald Feitosa; BARGUILL, Paulo Meireles. A FORMAÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA: contribuições do Estágio Supervisionado no Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Regional do Cariri - URCA. *In*: ANDRADE, Francisco Ari; CHAVEZ, Flávio Muniz; CHAVES, Luzianny Borges. **Educação Brasileira : cenários e versões**. Curitiba: CRV, 2015. p. 133-143.

NOGARI, M. C; MARTIN, G. F. S. O software GeoGebra e a pipa: possibilidades pedagógicas para o ensino de Geometria Plana. **Research, Society and Development**, v. 10, n. 11, 2021.

NÓVOA, A. Os professores e a sua formação num tempo de metamorfose da escola. **Educação & Realidade**, Porto Alegre, v. 44, n. 3, 2019.

NUNES, C. B; ONUCHIC, L. DE.LA. R. O uso das transformações geométricas através da resolução de problemas na formação de futuros professores de Matemática. **Interfaces da Educação**, Paranaíba, v.10, n.30, p. 30-56, 2019

OLIVEIRA, F. C. De; BUCHARDT, A. T. Formação Continuada: Uma proposta de prática investigativa e interdisciplinar para o ensino de Geometria Plana. **Revista Prática Docente**. v. 3, n. 1, p. 75-90, 2018.

OLIVEIRA, V. S. D; VITOLO, A. P.M; MAIA E SILVA; A. C. Uso do GeoGebra à Luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **Anais dos Workshops do VIII Congresso Brasileiro de Informática na Educação, 2019**.

PAVANELLO, R. M; COSTA, L. P. Da; VERRENGIA, S. R. D'A. Geometria e Educação Infantil: Entre a Pesquisa, o Desenvolvimento de Materiais de Ensino e a Formação Continuada de Professoras. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 13, p. 238-245, 2020.

PEREIRA DA COSTA, A. Pensamento geométrico: em busca de uma caracterização à luz de Fischbein, Duval e Pais. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 9, n. 18, p. 152-179, 26 jun. 2020.

PEREIRA DA COSTA, A.; SANTOS, M. R. d. Pensamento geométrico na licenciatura em Matemática: uma análise à luz de Duval e Van-Hiele. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 10, p. 1-20, 2020.

PEROVANO, A. P; SILVA, C. V. Perspectivas em relação ao Ensino de geometria de alguns alunos de um curso de licenciatura em matemática. *Com a Palavra o Professor*, Vitória da Conquista (BA), v.6, n.14, 2021.

PRESMEG, Norma C. Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics. *In*: GUITIERREZ, A.; BOERO, P. (Eds.) **Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future**. The Netherlands, Sense Publishers, p.205-235, 2006.

RAMATLAPANA, K.; BERGER, M. Prospective Mathematics Teachers' perceptual and Discursive Apprehensions when Making Geometric Connections. **African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education**, [S. l.], v. 22, n. 2, p. 162—173, 2018. DOI: 10.1080/18117295.2018.1466495.

ROCHA, F. S.; ZIMER, T. T. B.; CAMARGO, S.; MOTTA, M. de.S. Formação continuada de professores de matemática para uso de tecnologias digitais: Uma análise a partir de um curso de extensão sobre o software scratch. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, Florianópolis, v. 16, p. 01-21, 2021.

ROSA, M. C; SOUZA, D. Da S; SANTOS, N. M.S. Formação continuada de professores de matemática e o ensino de geometria: Um Panorama das Pesquisas dos últimos anos. **Educação Matemática e Pesquisa**, v. 22, Ed. 2, p. 635-657, 2020.

SILVA, A. C. De. J. Educação continuada do professor de matemática. **Revista Científica Multidisciplinar. Núcleo do Conhecimento**. Ano 05, Ed. 01, v. 04, pp. 62-72.

STIEGELMEIER, E. W; MARTHOS, S. R. D'A; BRESSAN, G. M. O contexto da geometria no âmbito escolar: concepções e implicações na formação docente. **Revista Eletrônica de Matemática - REMAT**, v. 5, p. 25-40, 2019.

ARTIGO/CAPÍTULO 1

FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM UM AMBIENTE ONLINE: POTENCIALIDADES DE TAREFAS ENVOLVENDO O GEOGEBRA PARA A MOBILIZAÇÃO DE APREENSÕES EM GEOMETRIA

Resumo: O objetivo do presente artigo é analisar as potencialidades de tarefas envolvendo poliedros, que foram propostas e discutidas por professores de matemática em uma Ação Formativa envolvendo o *software* GeoGebra, para mobilização de apreensões em geometria. Para tanto, foi realizada uma pesquisa de natureza qualitativa, cunho interpretativo da produção escrita de professores de matemática na proposição, resolução e discussões de quatro tarefas envolvendo poliedros na 18ª edição de um curso de formação denominado “Curso de GeoGebra”. Os resultados evidenciam que as tarefas/resoluções têm potencial para promover a mobilização das apreensões perceptiva, discursiva, operatória e sequencial. A proposição e discussão de tarefas que envolvem figuras dinâmicas e sua exploração em um *software* dinâmico, como o GeoGebra, têm grande potencial para que professores de matemática possam compreender a importância da investigação de figuras geométricas para a mobilização das apreensões em geometria.

Palavras-chave: Apreensões em Geometria, *Software* GeoGebra, Formação de professores de Matemática.

INTRODUÇÃO

Pesquisas têm enfatizado a relevância do Ensino de Geometria e a discussão dessa temática na formação de professores, visto que ainda é incipiente a abordagem de conteúdos geométricos nas escolas e na formação de Professores que Ensinam Matemática – PEM, mediante uma abordagem exploratória e investigativa (GONÇALVES; FERREIRA; FERREIRA; MENEGAIS, 2020; KUHN; QUADROS, 2020; MARQUES; CALDEIRA, 2018; MINÉ; DOS PASSOS PEREIRA, 2021; NUNES; ONUCHIC, 2019; PAVANELLO; COSTA; VERRENGIA, 2020; PEREIRA DA COSTA, 2019; PEREIRA DA COSTA; ROSA DOS SANTOS, 2020; ROSA; SOUZA; SANTOS, 2020; STIEGELMEIER; MARTHOS; BRESSAN, 2019).

Rocha *et al.* (2021) defendem a necessidade de que sejam oferecidas condições para que os professores se envolvam em processos formativos que priorizem a sua aprendizagem. Nos últimos anos, com a inserção das tecnologias digitais no contexto escolar, os professores têm buscado conhecer e compreender os recursos digitais disponíveis que colaboram com os processos de ensino e de aprendizagem em sala de aula.

Acreditamos que um ensino de qualidade tem início com uma boa formação dos professores, e conseqüentemente uma mudança no cenário educacional. Isso só é possível com a implementação

de políticas públicas, incentivo à pesquisa e a diferentes estratégias metodológicas (SILVA, 2020). Nesse cenário, encontra-se o ensino da Geometria que durante anos foi relegado do processo de ensino, de acordo com Pavanello (1993). Posteriormente Passos e Nacarato (2014) afirmam que a Geometria tem ganhado espaço no currículo acadêmico, mas isso ainda não tem refletido nas salas de aulas. Talvez se deva ao fato de tal conteúdo ter ficado ausente dos programas de ensino por um longo período.

Nos últimos anos os pesquisadores da área de Educação Matemática têm enfatizado a relevância da temática Geometria e diferentes abordagens metodológicas (DANTAS, 2022; NUNES; ONUCHIC, 2019; PAVANELLO; COSTA; VERRENGIA, 2020), visto que a ela proporciona a possibilidade de olhar, comparar, medir e experimentar. Essas possibilidades favorecem o desenvolvimento dos alunos e de um pensamento crítico (FONSECA; LOPES; BARBOSA; GOMES; BAYRELL, 2005).

No âmbito das pesquisas que abordam o uso das tecnologias digitais aliadas ao ensino da Geometria, são recomendados o uso de diferentes estratégias, a exemplo dos *softwares* de geometria dinâmica como um recurso significativo para a construção, identificação, classificação, transformações e visualização da representação de objetos geométricos (KUHN; QUADROS; 2020; MARQUES; CALDEIRA; 2018).

No que se refere ao uso das tecnologias digitais, Duval (1998) afirma que os computadores apresentam grandes contribuições nos aspectos da visualização, especialmente quando se trata do movimento e transformação da representação dos objetos geométricos. Duval (2012a) afirma que a distinção entre o objeto e sua representação são fundamentais para a compreensão em matemática, já que os objetos matemáticos não estão acessíveis à percepção ou a uma experiência intuitiva como os objetivos ditos “reais”. Assim, nesta pesquisa utilizaremos o termo representações para nos referirmos aos objetos matemáticos.

É fato que nem sempre os professores têm acesso aos programas de formação que promovam a inserção de tecnologias digitais no contexto escolar, sobretudo com o foco no ensino da geometria por meio de diferentes estratégias. Desse modo, tornam-se relevantes pesquisas que investiguem a utilização de recursos das tecnologias digitais como estratégias metodológicas para o ensino da Geometria, como, por exemplo, a elaboração de tarefas potenciais para evidenciar o papel das figuras, da visualização e de outros aspectos relevantes para a aprendizagem de conceitos geométricos.

Nos últimos anos, houve um crescimento de investigações com intuito de evidenciar o papel das figuras em uma abordagem geométrica, os modos de visualização e apropriação dos conceitos geométricos pelos estudantes. Dentre essas investigações encontramos os trabalhos de Raymond Duval (1994, 1999, 1998, 2012a, 2012b). Em tais investigações são apontadas a

relevância das apreensões no ensino e na aprendizagem em Geometria que são classificadas por Duval em **perceptiva, discursiva, operatória e sequencial**.

Inserido em um contexto de uma Ação formativa, o presente artigo tem o objetivo de analisar as potencialidades de tarefas envolvendo poliedros, que foram propostas e discutidas por professores de matemática em uma Ação Formativa envolvendo *software* GeoGebra para mobilização de apreensões em geometria. Nesse sentido assumimos a perspectiva de Raymond Duval.

As informações que são objeto de análise foram coletadas em um ambiente de formação *on-line* denominado Curso de GeoGebra, em sua 18ª Edição. Esse curso é realizado com objetivo de formar professores para o uso do *software* GeoGebra, além de promover um ambiente de interações e fomentar discussões entre professores de diversas regiões do Brasil. Nas próximas seções apresentaremos a compreensão do ensino da Geometria de um ponto de vista cognitivo, as apreensões geométricas e as figuras geométricas no ensino da Geometria na perspectiva teórica de Raymond Duval e o *software* GeoGebra e as contribuições para o ensino da Geometria.

COMPREENSÃO DO ENSINO DA GEOMETRIA DE UM PONTO DE VISTA COGNITIVO

A compreensão matemática primeiramente está vinculada à distinção dos objetos matemáticos e suas diferentes representações e há ainda um conjunto de imagens e de conceituações que um indivíduo pode ter a respeito de um objeto ou situação, ou seja, representações mentais. As representações semióticas se apresentam como formas de exteriorizar as representações mentais, constituindo-se de produções de sinais, formas algébricas, figuras geométricas e outros. Duval (1995) explica que a apreensão ou produção de uma representação semiótica diz respeito a semioses e à apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou uma inferência relaciona-se a noésis. As representações semióticas são fundamentais para comunicação e desenvolvimento de uma atividade matemática (DUVAL, 1995).

A aprendizagem matemática envolve atividades cognitivas fundamentais como a conceitualização, o raciocínio, a resolução de problemas e a compreensão de textos. Essas atividades requerem a utilização de diferentes sistemas de representação que vão além da linguagem natural ou das imagens. São notações simbólicas para objetos, figuras geométricas, gráficos cartesianos, esquemas etc. (DUVAL, 1995).

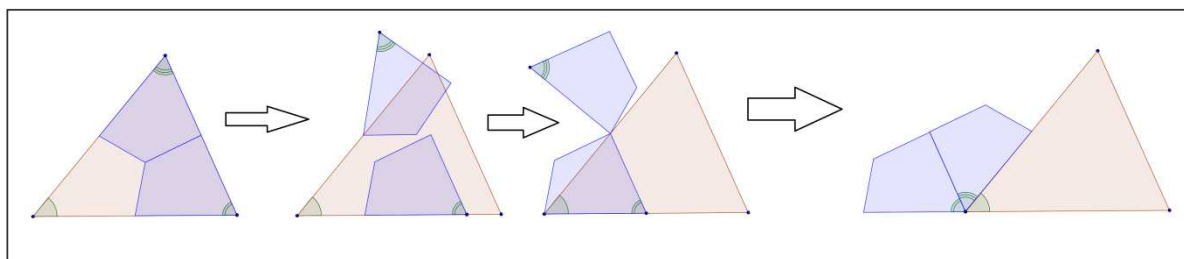
No caso específico da Geometria, Duval (1998) destaca que ela envolve três tipos de

processos cognitivos fundamentais para a aprendizagem geométrica: processos de visualização, construção por ferramentas e o raciocínio. Nesse processo a visualização é compreendida como uma exploração heurística de uma situação complexa. A construção de configuração pode funcionar como um modelo e o raciocínio que diz respeito ao conhecimento, prova e explicação.

Nesse sentido, é importante evidenciar o papel das figuras geométricas no ensino e na aprendizagem da Geometria

De acordo com Duval (1999), as figuras são constituídas por unidades figurativas que podem ser reconfiguradas mental ou materialmente. Esse autor explica que é possível decompor uma figura geométrica em partes de várias formas e combiná-las em outra figura inteira, formando assim uma nova figura. Duval (1995) afirma que ao realizar a reconfiguração de uma figura, é possível compará-las e reagrupá-las. Essa operação conduz a produção heurística de uma figura, ampliando as possibilidades de solucionar um problema. Além disso, Duval (1995, p.205, tradução nossa) explica que todas as modificações que não possuem uma mesma natureza promovem uma operação específica e constituem a produtividade heurística das figuras. Em relação à reconfiguração, podemos considerar o exemplo da figura 1.

Figura 1: Um tratamento puramente figural para a percepção do valor da soma dos ângulos internos de um triângulo



Fonte: Nóbriga (2015, p.60).

A Figura 1 mostra uma situação de reconfiguração para exemplificar as transformações das unidades figurais, como no caso da separação de uma unidade figural 2D em três unidades figurais e isso requer que sejam comparadas várias subfiguras.

Nas palavras de Duval (1995), um mesmo “desenho” pode representar situações matemáticas muito diferentes, logo necessitaríamos de um apoio discursivo para ancorar a figura geométrica e promover condições para a resolução do problema.

Para além da figura, Duval ressalta que é preciso uma descrição (enunciado) que nos conduza à resolução do problema proposto, no caso da Geometria “não há desenho que se represente, ou seja, não há desenho, sem legenda.” (1995, p.209).

Segundo Duval

[...] elementos e as propriedades que aparecem sobre a figura não têm mais do que o estatuto e a certeza das asserções correspondentes no discurso geométrico, o qual é comandado por definições, axiomas e teoremas já estabelecidos. A mesma figura, do ponto perceptivo, pode, desse modo, ser uma figura geométrica diferente, se modificarmos o enunciado das hipóteses (1995, p. 133).

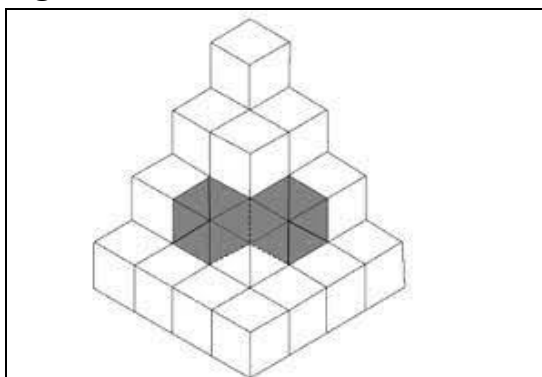
O que uma figura pode mostrar para o aluno e para o professor sugere que há diferentes tipos de apreensões possíveis em uma mesma figura. Desse modo, apresentamos os quatro tipos de apreensões geométricas discutidas por Raymond Duval.

APREENSÕES GEOMÉTRICAS

De acordo com Duval (2005b), para desenvolver a forma matemática de olhar para uma figura em Geometria é fundamental uma aprendizagem específica de cada tipo de apreensão, as quais ele classifica em perceptiva, discursiva, operatória e sequencial. A **apreensão perceptiva** é a mais imediata e permite identificar e reconhecer uma forma ou objeto, sendo assim, essa identificação de uma forma em 2D ou 3D é realizada de acordo com as chamadas leis da Gestalt. Segundo Filho (2008), as forças de organização ou as leis de organização perceptual são os princípios que explicam o modo como vemos ou não as coisas de uma certa maneira.

Na Figura 2, a apreensão perceptiva nos permite o reconhecimento de uma figura composta por vários cubinhos ou uma malha formada por paralelogramos. Contudo, se inserirmos um enunciado na mesma figura, como por exemplo, “quantos cubos há nessa figura”, a apreensão discursiva poderá ser mobilizada.

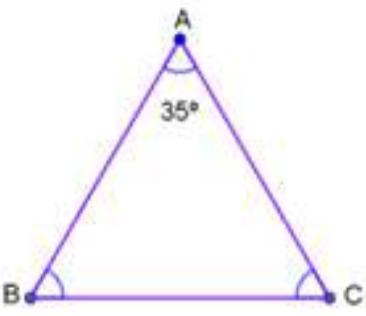
Figura 2: Bloco de Cubos



Fonte: as autoras.

Na Figura 3 é representado um triângulo isósceles, contudo, somente a figura não nos permitiria essa inferência. O que seria possível é a identificação de um triângulo e três ângulos, no qual o ângulo oposto a base tem uma medida determinada de 35° .

Figura 3: Triângulo ABC

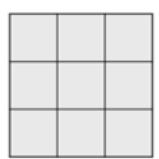
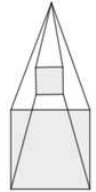

	<p>Dado o triângulo ABC isósceles, com ângulo oposto à base de medida 35°, determine a medida dos ângulos da base.</p>
---	--

Fonte: as autoras.

Entretanto, a descrição da tarefa (Figura 3) promove a identificação de uma representação de um triângulo isósceles e a explicitação de outras propriedades, como, por exemplo, o fato de o triângulo isósceles possuir dois lados e dois ângulos com medidas iguais, o que possibilitará o encontro de uma possível resolução desse problema. Nesse sentido, a **apreensão discursiva** é mobilizada e dá-nos acesso às propriedades matemáticas. De acordo com Duval “a **apreensão discursiva** de uma figura geométrica equivale a mergulhar segundo as indicações de um enunciado, em uma rede semântica, que é, ao mesmo tempo, mais complexa e mais estável” (1995, p.135). Não poderíamos afirmar ao olhar para uma figura que uma determinada propriedade está nela contida. Existe assim uma oposição entre a **apreensão discursiva** de uma figura e a sua **apreensão perceptiva**: essa oposição é aquela entre o que é reconhecido espontaneamente em uma figura, ou seja, o que ela mostra, e o que ela representa matematicamente (DUVAL, 1994).

A **apreensão operatória** ou mudança figurativa é a mais difícil de ser compreendida. Ela diz respeito à manipulação e à exploração heurística de uma figura (DUVAL, 1998), visto que essa é centrada nas possíveis modificações de uma figura.

Figura 4: Modificações da figura geométrica

		
Modificação Mereológica	Modificação ótica	Modificação posicional

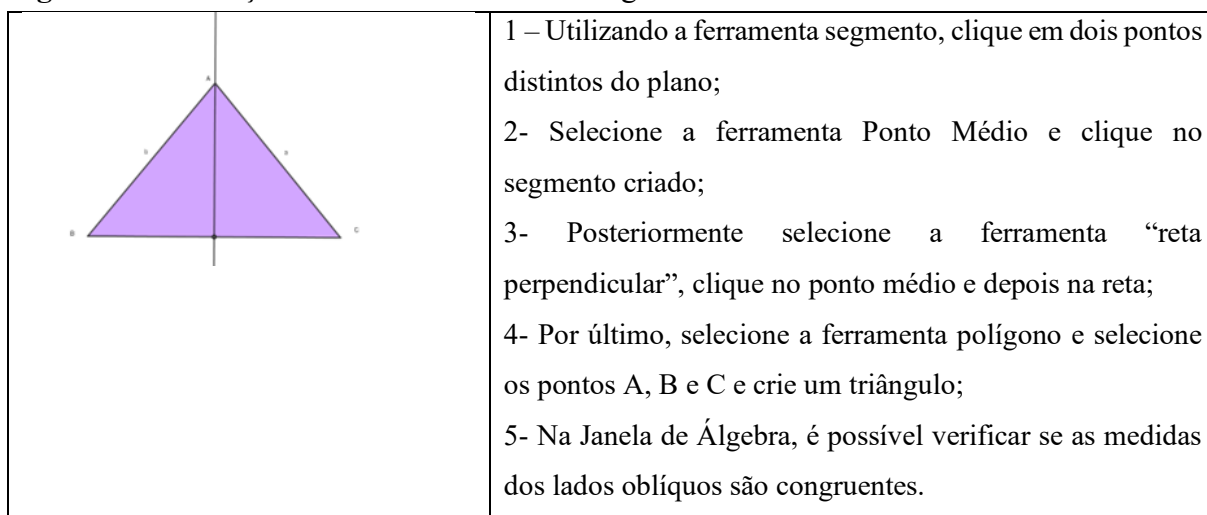
Fonte: adaptado de Duval (1999, 2012).

A Figura 4 nos mostra os três tipos de modificações que podem ser realizadas nas figuras geométricas. Segundo Duval (2012a) uma figura pode ser modificada de muitas formas: mereológica, ótica e posicional. A modificação mereológica se faz em função da relação parte-

todo, decompondo a figura em subfiguras. A modificação ótica diz respeito às deformações, reduções e ampliações, homotetias, transformando a figura em outra. Esse tipo de modificação permite visualizar, de acordo com Duval (1999), figuras planas como se estivessem em um espaço 3D. A modificação posicional consiste nas transformações geométricas de rotação, translação e simetria.

A Figura 5 apresenta uma representação de um triângulo isósceles construído no *software* GeoGebra. Dessa forma, é apresentada uma sequência ou ordem de passos para obter a representação.

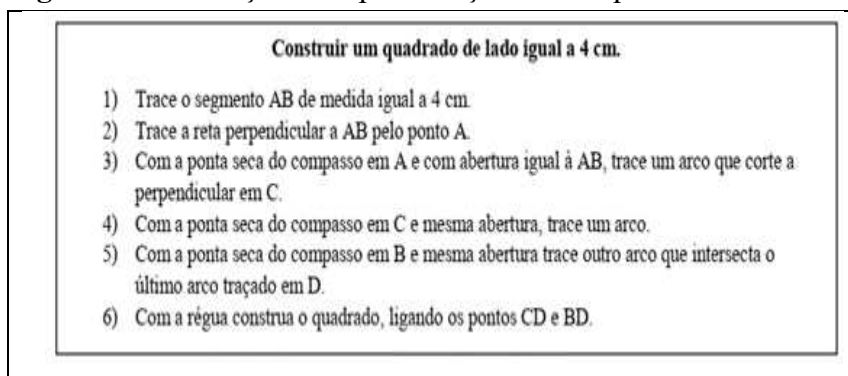
Figura 5: Construção no GeoGebra de um triângulo isósceles



Fonte: as autoras.

Quando estamos tratando da construção de uma figura geométrica, estamos tratando da **apreensão sequencial** que se refere à ordem de construção de uma figura. Essa apreensão está subordinada às propriedades matemáticas da figura, assim como está subordinada às restrições técnicas dos instrumentos que são utilizados nessas construções. Essas restrições referem-se aos instrumentos como: compasso, régua e aos comandos de um *software*, como é possível observar na Figura 6 que possui a descrição da construção da representação de um quadrado utilizando os instrumentos régua e compasso.

Figura 6: Construção da representação de um quadrado



Fonte: Scheifer(2017, p. 67)

Para Duval (1997), a construção de uma figura geométrica é o resultado da conexão entre as **apreensões discursiva e sequencial** que também requerem a **apreensão perceptiva**. Pelo que vimos até aqui, as apreensões perceptiva, discursiva, operatória e sequenciais são essenciais para a aprendizagem da Geometria. Isso não é tão fácil de ser desenvolvido, então recursos didáticos e metodologias vêm sendo desenvolvidos para minimizar as dificuldades. No próximo tópico veremos como o Geogebra pode auxiliar o ensino da Geometria.

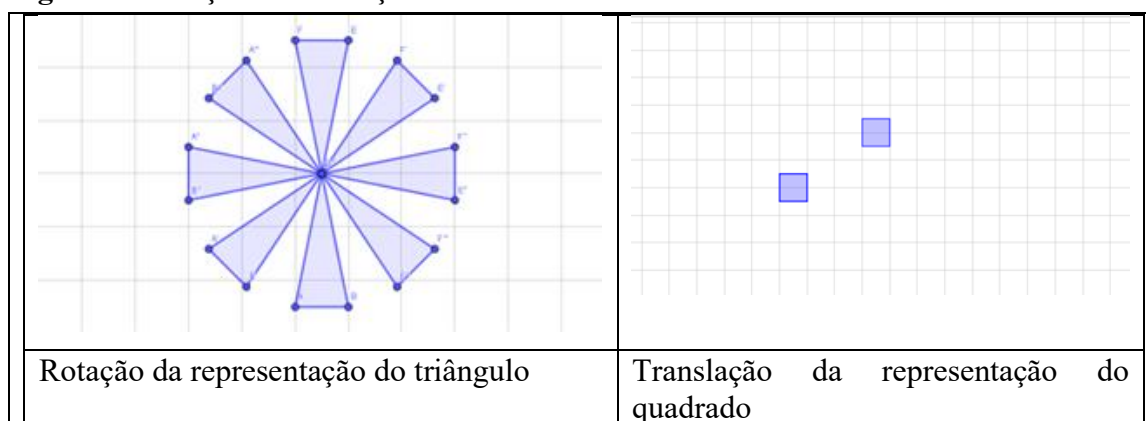
O SOFTWARE GEOGEBRA E AS CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO DA GEOMETRIA

O *software* GeoGebra oferece diversos recursos e contribuições para condução do ensino em sala de aula. Além disso, possui uma interface intuitiva que permite a construção de pontos, segmentos de retas, construção de gráficos de funções e construção de figuras geométricas.

Estudos têm evidenciado que o *software* GeoGebra proporciona ao estudante um novo meio de explorar os conceitos geométricos a partir da manipulação, comparação e modificação da representação de objetos geométricos. Gravina e Selbach (2020) afirmam que o GeoGebra permite ao estudante obter representações de objetos geométricos na tela por meio da exploração de relações algébricas que geram os objetos geométricos.

Ao desenvolver atividades com *software* GeoGebra, o estudante pode “arrastar” na tela do computador e desse modo perceber propriedades da figura (BRANDT; MORETTI; NOVAK, 2018; GRAVINA; SELBACH, 2020; LOVIS; FRANCO; 2018; ZANELLA; FRANCO, CANAVARRO, 2018). Segundo Brandt *et al.* (2018), um dos pontos positivos do *software* GeoGebra é a possibilidade de arrastar, movimentar as representações de objetos geométricos, isso o diferencia de uma figura estática.

Figura 7: Rotação e Translação



Fonte: autoras.

Na Figura 7 podemos observar a translação da representação do quadrado, isso significa que é possível reconhecer que as duas representações são iguais geometricamente e que uma delas é a imagem da outra, que ocorre por meio da translação. No caso da rotação, a isometria, foi obtida uma nova representação a partir do giro da representação original ao redor de um ponto fixo. O *software* GeoGebra permite transladar, rotacionar, arrastar as representações na tela de um computador e explorar diferentes propriedades, contornos e cores dessas representações. Ao movimentar as construções realizadas no GeoGebra, o estudante ainda tem a possibilidade de investigar de maneira dinâmica, por exemplo, segmentos, vértices e ângulos

de um polígono.

Zanella *et al.* (2018) destaca as potencialidades e as características do GeoGebra, a fácil utilização e acesso, além do rigor e precisão nas construções geométricas. Baldini (2014) afirma que o *software* pode contribuir com o trabalho do professor, visto que este pode auxiliá-lo na verificação dos processos de construção que foram utilizados pelos estudantes, além de identificar as potencialidades da aprendizagem matemática e possíveis dificuldades que os estudantes apresentem.

Diante desse cenário, apresentamos os encaminhamentos metodológicos, o contexto investigativo e a análise das informações.

ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

A fim de analisar as potencialidades de tarefas envolvendo poliedros, que foram propostas e discutidas por professores de matemática em uma Ação Formativa envolvendo *software* GeoGebra, para mobilização de apreensões em geometria, essa investigação⁵, de natureza qualitativa e de cunho interpretativo, foi desenvolvida no contexto de um curso de formação de professores de Matemática, denominado “Curso de GeoGebra”.

Esse curso é um espaço de formação de professores on-line e, embora se intitule um curso, apresenta uma estrutura formativa não vertical, isso significa que são propostas ações pautadas em uma formação que oportuniza trabalho cooperativo, discussões, debates, socialização, criação de tarefas, tendo como objetivo proporcionar um ambiente que permita aos participantes em formação, compartilhar suas práticas pedagógicas, refletir e discutir aspectos técnicos do *software* GeoGebra e as contribuições desse recurso para o ensino e para a aprendizagem da Matemática.

O curso é ofertado pela Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR) em parceria com a Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT) e conta com o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Mato Grosso (FAPEMAT), sendo realizado em um período de oito módulos semanais. No primeiro módulo, os participantes em formação têm acesso à interface do programa e a modos de realizar construções geométricas básicas (retas, círculos e formas geométricas em geral). A partir do segundo módulo os participantes em formação têm acesso a construções de polígonos por meio das ferramentas da interface e a inserção de comandos na caixa de entrada.

O terceiro módulo é dedicado a tópicos das Geometrias plana e espacial utilizando

⁵ A presente investigação foi aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa (Número do Parecer: 5.001.063; CAAE: 50991921.1.0000.5231).

recursos estudados nos módulos anteriores, bem como comando sequência. Os demais módulos do curso abordam recursos que podem ser aplicados aos tópicos de funções e sequências, além de outros comandos e ferramentas próprias do programa. Em cada módulo os participantes em formação tiveram acesso a materiais escritos e vídeos para seu estudo relativo ao que é abordado.

Na presente pesquisa, foram investigados quinze professores em formação que fizeram parte da 18ª Edição do Curso de GeoGebra. Essa edição contou com 603 participantes, sendo 153 colaboradores integrantes da equipe formadora e 450 participantes em formação. Os participantes desse curso, em sua maioria, são estudantes de Graduação em Matemática; Estudantes de Pós-Graduação Lato ou Stricto Sensu (das áreas de Matemática, Ensino de Matemática ou Educação Matemática); e professores de Matemática que atuam na Educação Básica ou no Ensino Superior.

Para a realização das tarefas, os participantes em formação foram divididos em cinco grupos (G1, G2, G3, G4, G5) com 90 participantes em formação em cada grupo, sendo acompanhados durante o período da formação por colaboradores voluntários. Esses colaboradores voluntários são participantes de outras edições do curso, que apresentaram um bom desempenho no desenvolvimento das tarefas, na interlocução com seus pares ao longo da participação e na realização integral do curso.

No decorrer da formação, cada colaborador voluntário fica encarregado por acompanhar semanalmente cinco participantes em formação. Esses colaboradores verificam as construções⁶ realizadas pelos participantes em formação, interagem com os participantes em formação nos fóruns de discussões, realizam questionamentos e acompanham o seu desenvolvimento ao longo de cada módulo. Esse acompanhamento é registrado semanalmente por meio de um relatório que tem a função de acompanhar cada participante em formação. O objetivo do relatório não é atribuir uma nota para futura aprovação, mas direcionar o trabalho.

Os dados analisados na presente investigação foram obtidos no terceiro módulo desse curso, sendo considerado o “Grupo 5 (cinco)” com o maior número de participantes em formação que atendiam a critérios estabelecidos em consonância com o objetivo da pesquisa. Sendo assim, o primeiro critério a seleção de participantes em formação é que no ato da inscrição se identificassem como professores da Educação Básica e obtivessem 100% de participação no curso, uma vez que há participantes em formação que não são professores da Educação Básica. Dentre 90 participantes em formação, selecionamos a produção escrita do

⁶ Construção de um arquivo realizado no software GeoGebra.

módulo três (conteúdo, tarefa, construção e registro no fórum) de 30 participantes em formação que atendiam aos critérios estabelecidos.

Na Ação Formativa (Figura 8) do módulo três, foi solicitado aos participantes em formação que escolhessem um conteúdo de Geometria dos Anos Finais do Ensino Fundamental ou Ensino Médio e na sequência elaborassem uma tarefa⁷, destacando o modo como essa tarefa poderia ser explorada em sala de aula e uma construção realizada utilizando o *software* GeoGebra), conforme (Figura 8 – Parte 1). Essas produções foram disponibilizadas e debatidas pelos participantes em formação no fórum de discussão do “Curso de GeoGebra” (Figura 8 – Parte 2).

Figura 8: Proposição da Ação Formativa⁸ – Módulo 3 da 18ª Edição do Curso de *GeoGebra*

Parte 1

Considere que você vai lecionar um tópico de Matemática do Ensino Fundamental ou do Ensino Médio durante duas aulas seguidas. Para isso, você deve levar um ou mais arquivos previamente construídos no GeoGebra, utilizando conteúdos abordados nos três primeiros módulos do curso. Os estudantes terão acesso a esse(s) arquivo(s) em computadores (ou celulares) e vão utilizá-lo(s) durante a sua aula. Poste esse(s) arquivo(s) no fórum "Tarefa 3" com uma descrição de como pretende utilizá-lo(s) e de como ele(s) ajuda(m) nas atividades planejadas para sua aula.

Você deve realizar a Parte 1 até 28 de fevereiro às 23h59min (horário de Brasília).

Parte 2

Escolha construções realizadas por, no mínimo, dois colegas e interaja com eles fazendo perguntas, sugerindo alterações ou acréscimos em suas construções.

Você deve realizar a Parte 2 até 03 de março às 23h59min (horário de Brasília).

Fonte: 18ª Edição do Curso de GeoGebra

Para análise dos dados, realizamos inicialmente a leitura de 30 produções escritas (tarefas e construções apresentadas por meio da exploração do GeoGebra). Ao realizar a leitura das produções escritas, identificamos que cinco atendiam à descrição da Ação Formativa (Figura 8 – Parte 1), ou seja, era uma tarefa voltada para a sala de aula da Educação Básica. Parte das tarefas contemplavam apenas a descrição do modo de construir, ou seja, as construções no *software GeoGebra* e o conteúdo que seria abordado, diferentemente da proposição da Ação Formativa. Em seguida selecionamos para análise a produção escrita de quatro professores em formação⁹.

As demais produções apresentavam a descrição do desenvolvimento da aula, entretanto,

⁷ Tarefas são os enunciados produzidos pelos professores em formação durante a participação no Curso de *GeoGebra*.

⁸ Ação Formativa é a “tarefa” solicitada pela equipe formadora aos participantes em formação que é constituída pela tarefa (enunciado) e pela resolução (construção).

⁹ Nomeamos “professores em formação”, os participantes que tiveram as produções escritas para a análise dos dados.

não contemplavam um enunciado que pode ser assimilado na leitura do desenvolvimento ou na resposta aos questionamentos do fórum¹⁰. Dentre as tarefas apresentadas pelos professores em formação, parte das tarefas abordavam o cálculo de volume de sólidos geométricos, área de figuras planas e Relação de Euler.

Para análise das potencialidades de tarefas elaboradas e discutidas pelos participantes em formação no desenvolvimento do terceiro módulo do curso de GeoGebra, selecionamos a produção escrita de quatro professores em formação, bem como os registros das discussões no fórum com sugestões de outras explorações.

De posse desses registros escritos, analisamos as potencialidades dessas tarefas produzidas pelos professores em formação e que apreensões em Geometria podem ser mobilizadas nas explorações dessas tarefas a partir do GeoGebra, assente na teoria de Raymond Duval. Vale destacar que, para as análises, os professores em formação são denominados por P1, P2, P3 e P4 e os colaboradores voluntários por C1, C2, C3, C4 e C5. Os participantes em formação serão identificados pela letra P seguida de um número.

Na próxima seção, apresentamos as análises das tarefas envolvendo poliedros, mais especificamente a **Relação de Euler**, e como as análises foram organizadas.

ANÁLISE DE TAREFAS DE GEOMETRIA DISCUTIDAS NA AÇÃO DE FORMAÇÃO E DE SUAS POTENCIALIDADES PARA MOBILIZAÇÃO DE APREENSÕES EM GEOMETRIA

Nesta seção descreveremos e analisaremos as propostas de tarefas apresentadas por quatro professores na Ação formativa – Módulo 3 da 18ª Edição do Curso de GeoGebra; as sugestões de outras possibilidades de explorações discutidas no fórum com participantes do curso que podem ser desencadeadas a partir dessas tarefas, utilizando o GeoGebra; e as potencialidades dessas tarefas e explorações para mobilização de apreensões em geometria

Para tanto, foi organizada a produção escrita de cada professor em formação em quadros, nos quais foram registrados: a descrição da tarefa; conteúdo(s) envolvido(s); o(s) objetivo(s) a ser(em) atingido(s); o ano de escolaridade em que pode ser trabalhada; uma descrição de como a tarefa pode ser explorada em sala de aula; e uma possível resolução. Após cada quadro, apresentamos a análise da proposta de cada professor em formação e de outras explorações que essa proposta pode desencadear em interface com os diálogos estabelecidos

¹⁰ Consideramos o fórum de discussões um espaço on-line destinado à interação e postagem das tarefas realizadas no “Curso de GeoGebra”.


com outros professores do curso no fórum de discussão. No decorrer dessa análise focamos na identificação de possíveis potencialidades das tarefas e explorações para mobilização de apreensões em geometria assente na teoria de Raymond Duval (1994, 1999, 2012).

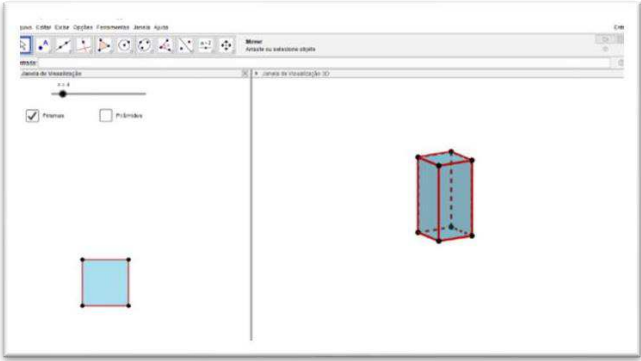
Tarefas propostas pelos professores em formação: sugestões discutidas e suas potencialidades

Produção escrita de P1

O P1 apresentou no fórum de discussão duas tarefas (Quadro 1) direcionadas aos alunos do 6º Ano do Ensino Fundamental, assim como uma tabela (arquivo em word anexado ao fórum) a ser explorada junto com a construção realizada no *software GeoGebra*.

Quadro 1: Produção Escrita do P1

 Por PROFESSOR EM FORMAÇÃO 1 - domingo, 28 Fev 2021, 23:57	
Conteúdo: Relação de Euler	
<p>Descrição da tarefa:</p>	<p>Tarefa 1</p> <p>Entregar fotografias e imagens de objetos ou construções que lembram poliedros (convexos e não convexos).</p> <p>Solicitar aos alunos que:</p> <p>Classifiquem cada uma das imagens quanto ao tipo de poliedro (convexo e não convexo) e nomeá-los - prismas, pirâmides [...];</p> <p>Separem somente os poliedros convexos;</p> <p>Pintem de preto os vértices, de vermelho as arestas e de azul-claro as faces dos poliedros.</p> <p>Tarefa 2</p> <p>Abrir o arquivo (anexo) no GeoGebra e pedir que os alunos marquem a caixa prismas e manipulem o controle deslizante n.</p> <p>VERIFICAÇÃO DA RELAÇÃO DE EULER</p> <p>Parte 1 – Preencha a tabela a seguir com base nas suas observações dos prismas e pirâmides gerados ao variar o valor de n. (acrescentar na tabela a quantidade de linhas que achar viável e necessárias para que os alunos percebam o padrão).</p>

	Nome do poliedro	Tipo de face	Número de vértices (V)	Número de faces (F)	Número de arestas (A)	V+F
Prismas						
Pirâmides						
<p>Agora responda?</p> <p>1- Pode-se estabelecer alguma relação entre a quantidade de vértices (V), faces (F) e arestas (A) de um Poliedro regular? (Dica: Some $V + F$ e compare com A).</p> <p>2 - Conjecture a relação encontrada. (Obs: Uma conjectura é uma ideia, fórmula ou frase, a qual não foi provada ser verdadeira, baseada em suposições ou ideias com fundamento não verificado).</p>						
Objetivos:	<ul style="list-style-type: none"> - Identificar os poliedros e suas nomenclaturas; - Identificar poliedros convexos; - Reconhecer a Relação de Euler nos Poliedros. 					
Ano de escolaridade:	6º Ano do Ensino Fundamental					
Comentários do professor quanto ao desenvolvimento da tarefa em sala de aula	<p>“Para este módulo proponho uma tarefa de fácil construção no GeoGebra e que já apliquei em sala de aula. Está prevista para ser executada em uma ou no máximo duas aulas de 50min. Inicialmente o professor pode começar a aula dividindo a turma em grupos de 5 ou 6 alunos. Observar os grupos para verificar se identificam satisfatoriamente poliedros convexos - corrigir possíveis problemas conceituais, caso ocorram” (P1).</p>					
Arquivo com a resolução proposta pelo professor por meio do software GeoGebra						

Fonte: Módulo 3 - 18ª Edição do Curso de GeoGebra.

O P1 propõe duas tarefas, uma relacionada à identificação das representações de

poliedros convexos e não convexos e suas nomenclaturas, que ocorrerá a partir da entrega de imagens e fotografias, objetos e construções de representações de poliedros. A outra tarefa é relacionada à investigação dos elementos das representações dos poliedros por meio da construção realizada no *software* GeoGebra e de uma tabela disponibilizada pelo professor.

O P1 declara que essas tarefas (1 e 2) podem contribuir para o desenvolvimento de uma das habilidades propostas pela Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, p. 303), qual seja: “(EF06MA17) quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial”. De fato, a exploração da tarefa 1 quando solicita ao estudante que pinte os vértices de preto, as arestas de vermelho e as faces de azul pode permitir o reconhecimento desses elementos. A tarefa 2 associada ao preenchimento da tabela com o número de vértices, arestas e faces pode contribuir para o estabelecimento das relações entre os vértices e faces. O P1 inicia com a expressão $(V+F)$ e posteriormente poderá concluir a Relação de Euler.

Com relação à tarefa 2, no Fórum de discussões, o P7 questionou o professor P1 a respeito de outros encaminhamentos:

*P7: [...] o que você acha de, com uma aula mais, fazer os alunos construírem poliedros com os números F , V , e A dados? Podendo colocar um ou dois trios de números que não satisfazem a relação de Euler, e assim explorar a diferença entre condição **suficiente e necessária** (Fórum de discussão-Tarefa 3 – Curso de GeoGebra).*

O comentário de P7 sugere que o professor P1 explore a Relação de Euler inicialmente a partir de alguns dados do problema. Isso significa que P1 aplicaria o trio (V , F e A) que não satisfizessem a Relação de Euler com o objetivo de demonstrar o caso da representação do poliedro não convexo. No entanto, é importante lembrar que alguns poliedros convexos podem satisfazer a Relação de Euler. Nesse sentido, a exploração dessa tarefa partiria de outra tabela e não das construções elaboradas pelo professor P1, as quais podem ser manipuladas e posteriormente realizar o preenchimento da tabela. Dessa maneira, a sugestão de P7 propõe que a partida para a resolução do problema ocorra mediante a mobilização da **apreensão discursiva** e não de uma **apreensão perceptiva e operatória**. Nesse caso, a maneira de ver em Matemática, como explica Duval(2015), ocorre a partir das declarações e propriedades.

A tarefa de P1 pode direcionar a exploração das formas mediante a **apreensão operatória** 0D(vértices), 1D(arestas) e 2D(faces) e ao reconhecimento das diferentes unidades figurais discerníveis nas representações. Dessa forma, a figura assume uma função heurística, isso significa que a utilização heurística de uma figura ocorre, de acordo com Duval (2012),

quando somos capazes de decompô-la como peças de um quebra-cabeça, mental ou materialmente. Ao olhar para a representação além de reconhecermos e identificarmos unidades de dimensão 2D, somos capazes de decompô-la em unidades de dimensões inferiores.

As discussões entre os professores em formação no fórum ampliaram as possibilidades do desenvolvimento da tarefa, pois, ao responder ao questionamento de P7, P1 argumenta:

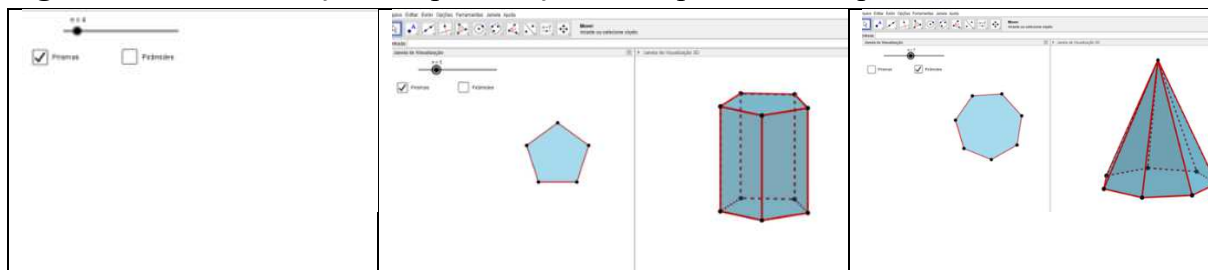
P1: [...] essa atividade de construir os poliedros dados F , V e A seria, de fato, a sequência da aula que propus. Antes disso, poderia utilizar as imagens dos poliedros não convexos entregues a eles no começo da aula para que eles verifiquem que a relação de Euler não satisfaz esse tipo de poliedro [...] (Fórum de discussão -Tarefa 3– Curso de GeoGebra).

O comentário de P1 revela que poderiam ser exploradas outras potencialidades da tarefa, visto que, em um primeiro momento, a intencionalidade de P1 estava relacionada à identificação, classificação das imagens quanto ao tipo de Poliedro (convexo e não convexo). A sugestão de P7 quanto à verificação da Relação de Euler para além das representações dos poliedros convexos, permite que o estudante investigue e realize inferências utilizando a tabela disponibilizada por P1 e, conseqüentemente, validando os casos em que a relação não é satisfeita.

Na construção da Tarefa 2 realizada no *software* GeoGebra, Figura 9, é possível observar representações planas de prismas e de pirâmides mediante a caixa de seleção na Janela de Visualização 2D.

Quanto à questão da “percepção espacial”, a tarefa 2 pode possibilitar o acesso a uma discriminação visual, ou seja, a identificação das semelhanças e diferenças entre os atributos das representações. Além disso, é possível a visualização de unidades figurais de dimensões inferiores na Janela de visualização 2D. Por exemplo, na Figura 9, na Janela de Visualização 3D, temos acesso à representação plana de um prisma de base pentagonal, observamos os vértices (0D), as arestas(1D) e suas faces(2D). Na Janela de Visualização 2D temos acesso à representação de um pentágono, observamos, então, que os lados dessa representação (polígono regular 2D) são compostos por segmentos (1D), vértices (0D). Duval (1995) explica que a percepção está predominantemente direcionada para as unidades de dimensão 2D.

Figura 9: Caixa de Seleção – Representação de um prisma e uma pirâmide

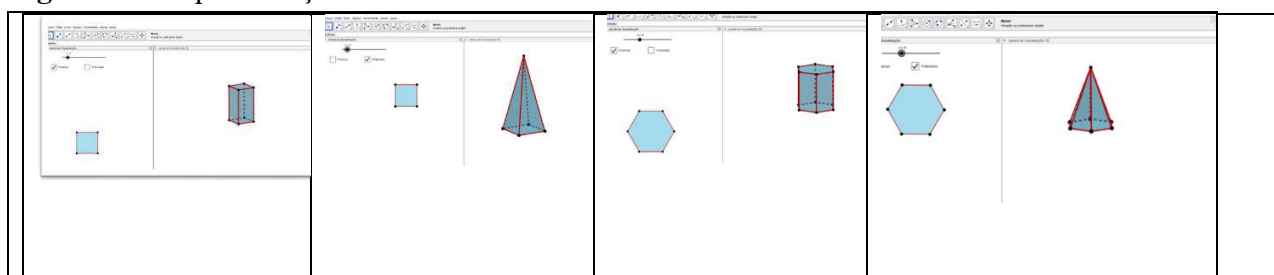


Caixa de seleção	Representação de um prisma de base pentagonal	Representação de uma pirâmide de base octagonal
------------------	---	---

Fonte: Módulo 3 - 18ª Edição do Curso de GeoGebra.

O *controle deslizante* apresentado na tarefa e nomeado por “n” na Janela de Visualização 2D permite a manipulação e observação de representações de prismas, ou ao habilitar a caixa de seleção, também na Janela de Visualização 2D e manipular o *controle deslizante* como podemos observar na Figura 9, temos acesso a representações de pirâmides de diferentes bases. A **apreensão operatória** está relacionada à qualidade de manipular e comparar as representações de objetos geométricos de modo a observar as semelhanças e diferenças.

Figura 10: Representação de Prismas e Pirâmides de diferentes bases



Fonte: Módulo 3 - 18ª Edição do Curso de GeoGebra.

Na Figura 10, podemos observar as semelhanças e diferenças entre as representações de prismas e pirâmides de diferentes bases. É importante considerar que as representações de prismas e pirâmides têm em comum sua forma tridimensional, contudo a representação da pirâmide se diferencia da representação do prisma por possuir uma única base (polígonos regulares) e ainda por possuir suas faces triangulares. As representações de prismas sempre têm faces com formas de quadrados ou retângulos e possuem duas bases (polígonos regulares) congruentes. Na Figura 10, podemos observar que temos um prisma de base quadrangular e uma pirâmide de base também quadrangular, bem como uma representação de um prisma de base hexagonal e uma pirâmide de base hexagonal

No momento da manipulação e observação das semelhanças e diferenças, pode ocorrer a articulação entre a **apreensão perceptiva** e a **apreensão operatória**. A articulação entre as apreensões parece ser suficiente para a resolução da tarefa e preenchimento da tabela, contudo, caso a tarefa solicitasse o cálculo da medida da área das bases, seria necessário algum conhecimento de como calcular as medidas, uma vez que, no caso específico do quadrado, a área é calculada como a medida de um lado multiplicado pela medida do outro lado. Nos demais casos é necessário o cálculo do semiperímetro multiplicado pelo apótema, ou seja, a **apreensão discursiva** poderia ser favorecida com a intervenção do professor.

A exploração de representação de prismas e pirâmides de diferentes bases favorece a

mobilização da **apreensão discursiva**, pois é possível verificar as hipóteses que foram propostas no enunciado, diferentes tipos de representações de prismas e pirâmides em que os estudantes poderiam realizar a contagem dos vértices, faces e arestas para posteriormente serem capazes da realização da generalização da Relação de Euler.


Fica evidente que a tarefa, do modo como foi proposta por P1, pode possibilitar aos estudantes a oportunidade de generalizar a Relação de Euler. Ao manipular a construção no *software* GeoGebra, P1 poderia realizar intervenções e questionamentos quanto aos elementos das representações dos poliedros, como, por exemplo: “partindo de cada vértice identificamos o encontro de quantas arestas?”; “a partir de cada aresta identificamos o encontro de quantas faces?”. Dessa maneira, ao preencher o quadro e ao responder aos questionamentos, os estudantes teriam a oportunidade de generalizar a Relação de Euler e observar algumas regularidades.

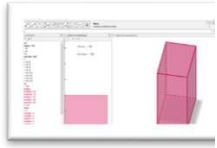
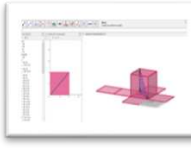
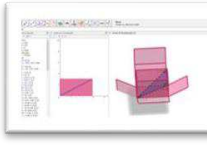
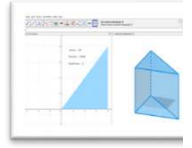
A tarefa 2 e a construção apresentadas por P1 podem permitir condições para o estabelecimento da Relação de Euler e a mobilização da **apreensão operatória**. A construção elaborada pode permitir a verificação das propriedades, isso significa que as escolhas realizadas durante o processo de construção no *software* GeoGebra exige, por exemplo, a seleção de entes primitivos, como pontos, retas, polígonos regulares, associações entre as ferramentas disponíveis do *software* e as propriedades matemáticas a fim de que, ao manipular a figura, ela não seja deformada. São sequências e configurações que garantem a reprodução de um modelo e podem mobilizar a apreensão **sequencial**.

Produção escrita de P2

O P2 também apresentou duas tarefas (Quadro 2) com o objetivo de abordar o conteúdo de Sólidos Geométricos direcionados a estudantes do 2º Ano do Ensino Médio. Foram construídas quatro resoluções (arquivos no *software* GeoGebra) com o propósito de explorar elementos das representações planas de prismas (vértices, arestas e faces).

Quadro 2: Produção Escrita do P2

 Por PROFESSOR EM FORMAÇÃO 2 - domingo, 28 fev. 2021, 16:43	
Conteúdo: Relação de Euler	
Descrição da tarefa:	<p>Tarefa 1</p> <p>Solicite aos estudantes que abram o arquivo prisma quadrangular, que inicialmente estará com as medidas dos variáveis c, l, h, p iguais a zero.</p> <p>Na sequência, manipulem os controles deslizantes para valores iguais nas medidas c, l, h. Classifique esse poliedro, identifique os números de vértices e números de arestas.</p> <p>Planifique o poliedro e identifique os números de faces.</p> <p>Marque uma diagonal da base e uma diagonal do prisma. Ligue as diagonais formadas com o cateto adjacente a elas.</p> <p>Indique os ângulos desse polígono. Qual o polígono formado com as diagonais?</p> <p>Agora manipule os controles deslizantes para valores diferentes nas medidas c, l, h.</p> <p>Planifique o poliedro e identifique os números de faces.</p> <p>Tarefa 2</p> <p>Uma fábrica vende um suco em uma embalagem de papelão que tem a forma de prisma reto de base retangular com dimensões 6 cm, 4 cm e 8cm. O fabricante pretende vender outro tipo de suco numa nova embalagem, que tem forma de prisma triangular reto, cuja base é um triângulo retângulo isósceles cujos lados iguais medem 6 cm.</p> <p>Inicialmente solicite aos estudantes que abram os arquivos prisma retangular e prisma triangular, os quais estarão com as medidas das variáveis c, l e h iguais.</p> <p>Na sequência, manipule os controles deslizantes para valores das medidas c, l, h, indicados no problema para construir prisma reto de base retangular.</p> <p>Solicite que os alunos manipulem os controles deslizantes do arquivo prisma triangular e verifiquem as medidas de c, l e h obtidas. Qual deve ser a altura da nova embalagem para que ela tenha a mesma capacidade da primeira?</p> <p>Em qual das duas embalagens será usada uma menor quantidade de papelão?</p> <p>Planifique o prisma reto triangular e identifique os números de faces, os números de vértices e os números de arestas.</p>
Objetivos:	<ul style="list-style-type: none">- Analisar as formas tridimensionais do prisma reto quadrangular, do prisma reto retangular e do prisma reto triangular utilizando o GeoGebra;- Classificar os prismas;

	-Identificar seus elementos.			
Ano de escolaridade:	2º Ano do Ensino Médio			
Comentários do professor quanto ao desenvolvimento da tarefa em sala de aula	“Com o auxílio dessa ferramenta, os alunos poderão classificar os prismas, identificar seus elementos, números de faces, números de vértices, números de arestas, diagonais da base e diagonais do prisma, determinar a área e o volume (capacidade) e verificar a planificação dos sólidos geométricos”(P2).			
Arquivo com a resolução proposta pelo professor por meio do software GeoGebra				
	Prisma de Base retangular	Prisma de Base quadrangular	Prisma de Base retangular	Prisma de base triangular

Fonte: Módulo 3 - 18ª Edição do Curso de GeoGebra.

Em sua produção, P2 apresenta duas tarefas que serão exploradas por meio de quatro resoluções – a representação plana de um prisma de base triangular, prisma de base quadrada e dois prismas de base retangular. Uma das representações dos prismas de base retangular e o prisma de base triangular apresentam os valores das medidas de volume e de área total na Janela de Visualização 2D¹¹.

A tarefa que envolve a representação plana de um prisma retangular, permite o reconhecimento e identificação de uma representação plana de um prisma de base retangular na Janela de Visualização 3D e uma representação de um retângulo na Janela de Visualização 2D, favorecendo a mobilização de uma **apreensão perceptiva**, uma vez que as cores, espessura e a possibilidade de movimentar e girar as representações planas do prisma de base quadrangular e retangular contribuem para a mobilização da **apreensão operatória**, visto que é possível desconstruir a figura inicial. Isso significa que temos acesso às superfícies dos poliedros que são formadas por superfícies poligonais planas. Podemos observar que cada uma das faces do poliedro tem um lado em comum com a outra face.

Embora na Janela de Álgebra estejam acessíveis os valores da medida da área do retângulo e a capacidade do volume da representação plana do prisma, ressaltamos que a tarefa conduz à investigação da medida do volume que, de acordo com Van de Walle, são termos utilizados para “medidas de tamanho de regiões tridimensionais” (2009, p. 417), sendo a capacidade utilizada quando tratamos da quantidade que um recipiente pode conter e o volume pode ser usado para declarar o tamanho das representações dos objetos sólidos. É importante

¹¹ No software GeoGebra.

evidenciar que não há uma distinção no *software* GeoGebra entre o cálculo da medida do volume de uma representação e o cálculo da medida da capacidade da representação.

As diferentes bases (triangulares, retangulares e quadrada) e as cores das representações planas dos prismas propostos por P2 também contribuem para uma melhor percepção das formas, números de faces, vértices e arestas. Essas percepções são consoantes às ideias de Duval (2012), que argumenta que uma figura é uma organização de elementos de um campo perceptivo que se destaca nele.

No que se refere à representação plana do prisma triangular, ele possibilita ainda o desenvolvimento da ideia de volume, retomando o cálculo da área da base do triângulo utilizando a fórmula de Heron. Essa fórmula permite o cálculo da área de um triângulo em função das medidas dos seus três lados, sendo usada, sobretudo, quando a medida da altura relativa a um dos lados do triângulo não é conhecida.

No Fórum de discussões C3¹² e P6 questionam P2 quanto às contribuições do *software* na resolução da tarefa:

C3 – quanto às contribuições da resolução da tarefa por meio do software: [...] você acredita que a utilização de construções no GeoGebra pode influenciar a aula? Por exemplo, você acha que tem diferença em resolver um problema envolvendo esse contexto que você propôs com o GeoGebra e sem ele?

P2 - [...] nas minhas aulas sobre sólidos geométricos, os alunos apresentam muita dificuldade de reconhecer as formas tridimensionais. Confundem quadrado com cubo, triângulo com pirâmide. No livro tem dificuldade de interpretar os desenhos dos sólidos [...]

Se os alunos construírem esses sólidos no GeoGebra, o desenho vai ficar correto. Poderão perceber diferentes características se mudarem os valores, ver a figura geométrica se movimentando em vários ângulos, observar a planificação de sólidos e lados instantaneamente. Os alunos poderão fazer várias investigações na mesma construção. Ajudando na abstração para resolução de problemas.

P6 - [...] na descrição da tarefa você pede para os alunos marcarem as diagonais [do polígono] da base e do prisma e depois indicar os ângulos, mas na sua construção isso já está feito. Deixou feito só para demonstração para nós e na sala de aula realmente deixaria para os alunos essa parte da construção? Outra pergunta, para que séries você propõe essa tarefa?

P2 - [...] deixaria para os alunos marcarem as diagonais da base e do prisma e depois indicar os ângulos, para que eles reconheçam que o polígono formado foi um triângulo retângulo. A turma seria 2º ano do ensino médio.

Os comentários realizados pelos professores em formação e o colaborador voluntário

¹² Com a intenção de preservar o anonimato dos professores voluntários, na apresentação dos resultados, utilizamos as siglas: C1, C2 (...) C5 para representar cada um dos colaboradores voluntários.

evidenciam que as construções realizadas no GeoGebra possibilitam distinguir as representações das figuras planas e as representações das figuras espaciais, visualizar de modo dinâmico as alterações nas figuras geométricas em consequência da alteração dos valores, por exemplo, a manipulação dos *controles deslizantes* referente ao número de lados do polígono da base. Além disso, o item “c” da tarefa 1 permite a exploração de outros elementos da representação do prisma Quadrangular como generalizar o cálculo da medida da diagonal do cubo e que este é um caso de paralelepípedo reto regular.


Para Duval (2015), a forma matemática de visualizar é realizada por meio da desconstrução dimensional das figuras geométricas que podem ser realizadas por reconfigurações, modificações mereológicas, óticas e posicionais. Entretanto, nem sempre é fácil para o estudante olhar para uma representação e conseguir realizar esse processo sem a intervenção do professor ou realizar mentalmente esse processo.

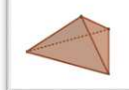
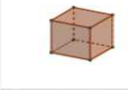
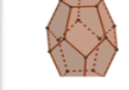

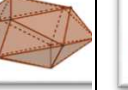

As **apreensões sequencial e discursiva** foram mobilizadas, pois as tarefas propostas por P2 apresentam uma articulação entre a apreensão discursiva e sequencial que Duval (1997) define como construção geométrica. Mas, entre as articulações dessas duas apreensões, a **apreensão perceptiva** também é requerida. Afirmamos isso, pois, para realizar a construção das representações dos prismas, existe uma ordem e um processo de construção, além das escolhas dos entes primitivos, como pontos, retas, polígonos regulares, até a composição da representação do prisma.

Produção escrita de P3

O P3 apresentou duas tarefas relacionadas ao ensino de poliedros de Platão. A tarefa 1 está relacionada à investigação dos poliedros de Platão. A segunda tarefa é referente à exploração de projeções e vistas. As tarefas são destinadas aos alunos do 8º Ano do Ensino Fundamental.

Quadro 3: Produção Escrita do P3

	Por PROFESSOR EM FORMAÇÃO 3 - sábado, 27 Fev 2021, 14:26
Conteúdo: Poliedros de Platão e Projeções e Vistas	

<p>Descrição da tarefa:</p>	<p>Tarefa 1 - Manusear no GeoGebra cada um dos Poliedros e preencher a tabela:</p> <table border="1" data-bbox="448 259 1251 546"> <thead> <tr> <th>Poliedro</th> <th>Forma geométrica das faces</th> <th>Quantidade de faces</th> <th>Quantidade de arestas</th> <th>Quantidade de vértices</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Tetraedro</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Hexaedro</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Octaedro</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Dodecaedro</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Icosaedro</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>Tarefa 2 – Blocos de Cubos Empilhados – O professor manipulará a construção realizada no <i>software</i> GeoGebra e solicitará aos estudantes que representem na malha quadriculada as vistas observadas; vista frontal, superior ou lateral dos cubos.</p>						Poliedro	Forma geométrica das faces	Quantidade de faces	Quantidade de arestas	Quantidade de vértices	Tetraedro					Hexaedro					Octaedro					Dodecaedro					Icosaedro				
Poliedro	Forma geométrica das faces	Quantidade de faces	Quantidade de arestas	Quantidade de vértices																																
Tetraedro																																				
Hexaedro																																				
Octaedro																																				
Dodecaedro																																				
Icosaedro																																				
<p>Objetivos:</p>	<p>- Compreender como calcular a quantidade de arestas de um Poliedro - Aprender sobre Projeções e Vistas</p>																																			
<p>Ano de escolaridade:</p>	<p>8º Ano do Ensino Fundamental</p>																																			
<p>Comentários do professor quanto ao desenvolvimento da tarefa em sala de aula</p>	<p>“Para a aula, falaremos sobre os Poliedros de Platão. Inicialmente explicaremos a importância do estudo dos Poliedros e, em específico, sobre os Poliedros de Platão. Os alunos devem manusear no GeoGebra cada um dos poliedros e preencher a tabela. Além da tabela, os alunos serão direcionados a compreender como calcular a quantidade de arestas de um Poliedro, que vai auxiliar também no entendimento da tarefa posterior sobre o Teorema de Euler.</p> <p>Quanto à tarefa – Projeções e Vistas, os alunos receberão uma malha quadriculada e, conforme o professor manipular a imagem na janela de visualização 3D, solicitará para os alunos que representem nessa malha determinada as vistas (Frontal, Superior ou Lateral) dos cubos presentes na imagem” (P3).</p>																																			
<p>Arquivo com a resolução proposta pelo professor por meio do software GeoGebra</p>																																				
	<p>Tetraedro</p>	<p>Cubo</p>	<p>Dodecaedro</p>	<p>Icosaedro</p>	<p>Octaedro</p>	<p>Bloco de Cubos</p>																														

Fonte: Módulo 3 - 18ª Edição do Curso de GeoGebra.

Como visto no Quadro 3, a tarefa 1 proposta por P3 demanda que o aluno explore os elementos das representações dos poliedros como: forma das faces dos poliedros, quantidade de faces, quantidade de arestas e quantidade de vértices do (tetraedro, cubo, octaedro,

dodecaedro e icosaedro) por meio da manipulação das construções e realize o preenchimento da tabela. O objetivo de P3 com essa tarefa refere-se à identificação das formas geométricas e de seus elementos, como quantificação das faces, arestas e vértices.

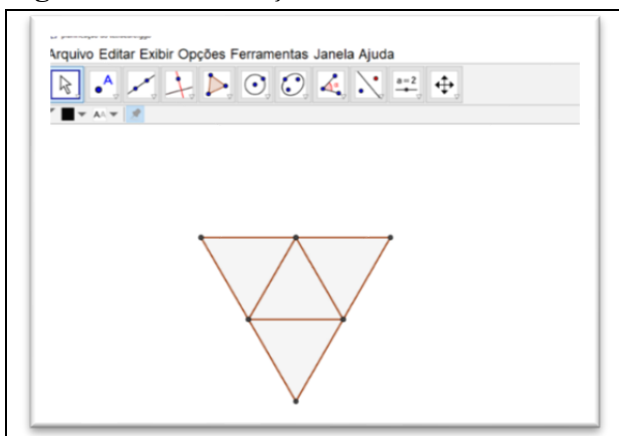
O P3 declara nos comentários da tarefa 1 que iniciará a aula sobre os poliedros de Platão evidenciando a relevância do estudo de poliedros de Platão e como costuma abordar esse conteúdo na sala de aula.

P3 – [...] para a aula que falaremos sobre os Poliedros de Platão, inicialmente, explicaremos a importância do estudo dos poliedros e, em específico sobre os Poliedros de Platão, os alunos devem manusear no GeoGebra cada um dos poliedros[...]

*P3 - [...] costumo trabalhar com os Poliedros confeccionados com canudinhos ou papel. Além da tabela, os alunos são direcionados a compreender **como calcular a quantidade de arestas de um poliedro**, que vai auxiliar também no entendimento posterior quanto **aprenderem sobre o Teorema de Euler**.*

A tarefa proposta por P3 (poliedros de Platão), construídos no *software* GeoGebra possibilita que as planificações sejam impressas, como ilustrado na Figura 11. Sendo assim, o professor P3 pode confeccionar juntamente com os estudantes as representações dos poliedros de Platão. Dessa forma, poderão observar que as representações de poliedros regulares têm suas faces compostas por representações de polígonos regulares, bem como suas arestas e seus vértices.

Figura 11: Planificação do Tetraedro



Fonte: Módulo 3 - 18ª Edição do Curso de GeoGebra.

Ao ter a oportunidade de manipular, girar as construções e ter acesso às planificações de todas as representações, o estudante pode realizar mais facilmente a contagem das arestas, vértices e faces das representações, visto que a planificação da superfície das representações permite a identificação de dois tipos de unidades figurais elementares: as 0D no caso do ponto, 1D no caso do segmento e 2D no caso dos polígonos que formam as faces.

Ao observar uma figura geométrica, a **apreensão perceptiva** nos conduz à identificação das formas. As planificações das superfícies das figuras, como a representação de um cubo, permitem observar que as faces dessa representação são formadas por representações de quadrados e estes são formados por segmentos e pontos. Espera-se que ao observar as planificações das representações, o estudante seja capaz de inferir que cada lado de um polígono é comum a exatamente duas faces. Ou seja, cada aresta é comum a duas faces. Nesse caso, poderíamos nos perguntar se a planificação auxiliaria a identificação e contagem do número de arestas.

Na segunda proposta apresentada por P3, a tarefa – blocos de cubos empilhados, o estudante deve representar as vistas em uma malha quadriculada. A partir da manipulação, o professor solicitará aos estudantes que representem as projeções do bloco de cubos empilhados (frontal, superior e lateral) na malha quadriculada, conforme são visualizadas pelos estudantes. C2 indaga P3 quanto à tarefa de Projeções e Vistas e a exploração das planificações dos Poliedros:

C2 - [...] gostaria de entender melhor o que você pensou em termos de projeções e vistas. Na sala de aula, entendo que um trabalho interessante, com os arquivos que você compôs, refere-se à planificação dos poliedros, que em geral temos contato por meio de planificações em livros didáticos. A exploração das planificações está no contexto de sua aula planejada?

P3 - [...] na verdade, pensei em duas aulas. Uma primeira para trabalhar com os Poliedros de Platão e as planificações (preenchendo a tabela que indiquei originalmente, aprender a calcular as arestas e Teorema de Euler) e, num segundo momento, trabalhar com os cubos empilhados de maneiras diversas (o anexo é apenas um exemplo de construção) e, conforme o professor muda a posição da figura 3D, os alunos precisam registrar as vistas (frontal, superior, lateral) numa malha quadriculada [...]

O comentário de P3 evidencia que a representação plana de um sólido geométrico pode ser observada de diferentes posições. O estudante, ao observar os cubos empilhados, pode verificar as diferentes vistas ortogonais (vista superior, vista lateral, vista inferior e vista frontal) em um mesmo objeto, ou sólido geométrico.

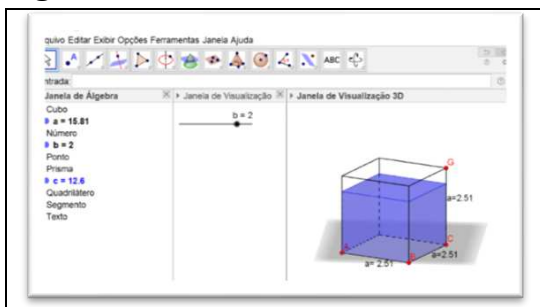
A partir da tarefa proposta por P3, o estudante pode ter a possibilidade de verificar, via a exploração, que as vistas encontradas são polígonos regulares. Dessa maneira, a partir da manipulação da resolução, a **apreensão perceptiva** é favorecida, ao explorarmos a forma do cubo das vistas inferiores, vista frontal e lateral.

Para o C2 as construções de P3 apresentam possibilidades para que sejam abordados outros temas:

*Em relação aos cubos, podem surgir outras explorações, porque se trata de um objeto com inúmeras possibilidades de temas.
[...] manipulei pontos de suas construções e surgem figuras surpreendentes. Bem, isso pode aparecer em uma aula, ao apresentar um arquivo ao aluno, que possa ser manipulado [...]*

Para a tarefa 2 (projeções e vistas) – o professor P3 propôs uma construção com blocos e pilha de cubos. A partir da manipulação da construção realizada no *software* GeoGebra, os estudantes registrariam em uma malha quadriculada as vistas frontal, superior e lateral. A tarefa apresentada por P3 pode permitir a exploração de uma das habilidades propostas pela Base Nacional Curricular Comum (BRASIL, p.315) - (EF08MA21) “resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de recipiente cujo formato é o de um bloco retangular”. A intervenção do professor neste caso é fundamental para a investigação da representação do cubo e do conceito de capacidade na forma de uma representação de um cubo, uma vez que o *software* GeoGebra não faz distinção entre o conceito de volume e capacidade. Para tanto, propomos a construção da representação de um cubo e a representação de um prisma para explorar a capacidade desse cubo conforme exposto na Figura 12. No problema apresentado temos a representação de uma caixa cúbica (volume do cubo) e em azul denominado de prisma a quantidade de líquido (capacidade) que está inserido na caixa cúbica no momento.

Figura 12: Cubo

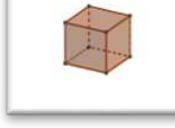
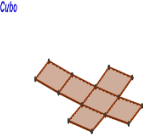


Fonte: as autoras.

Além disso, pode-se explorar o cálculo da área das faces poligonais: cálculo da área de um triângulo equilátero, no caso do tetraedro e do octaedro e do icosaedro; cálculo da área do quadrado, no caso do cubo e cálculo da área do pentágono regular, no caso do dodecaedro.

A tarefa proposta por P3 no *software* GeoGebra contribui para a mobilização das apreensões geométricas, como podemos observar no Quadro 4.

Quadro 4: Apreensões geométricas

	<p>- Manusear a construção e verificar as formas geométricas, arestas, faces e vértices.</p>	
<p>Apreensão perceptiva – visualização de unidades 2D/3D</p>	<p>Apreensão discursiva – enunciado da tarefa</p>	<p>Apreensão operatória exploração de unidades (0D, 1D)</p>

Fonte: as autoras.

No Quadro 4, é possível observar que a apreensão perceptiva é mobilizada, uma vez que se pode identificar as formas das faces poligonais (2D) como no caso da representação do cubo, pois, ao visualizar a construção, identificamos as faces quadradas. Ao girar e manipular e na sequência planificar a representação do cubo temos acesso à representação plana do cubo, segmentos e vértices (0D, 1D), isso é possível mediante a mobilização da **apreensão operatória**.


No caso da **apreensão discursiva**, podemos observar que as tarefas contribuem para a mobilização desta, pois há uma consonância entre o enunciado e as representações construídas no *software* GeoGebra que contribuem para a investigação proposta.

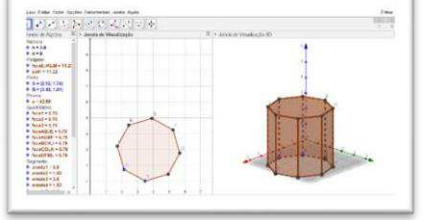
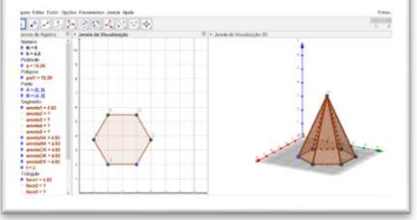
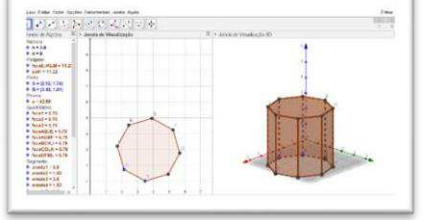
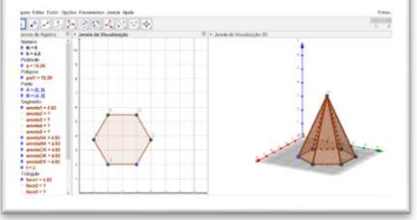
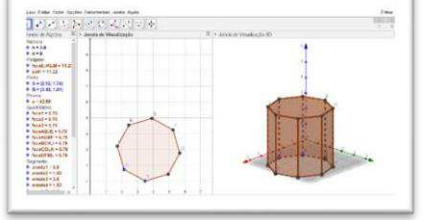
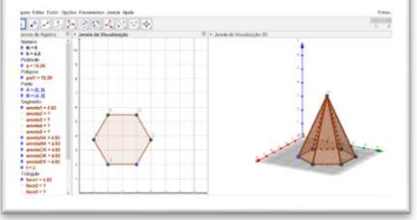
Ao realizar a construção das representações, o P3 estabeleceu uma ordem, um processo de construção, reproduzindo, assim, um modelo matemático que pode contribuir para a mobilização da apreensão **sequencial**.

Produção escrita de P4

O P4 disponibilizou uma tarefa dividida em duas partes e duas tabelas que serão utilizadas com a exploração das resoluções – Pirâmide e Prisma. O objetivo de P4 com a tarefa estava relacionado à investigação das semelhanças e diferenças entre os prismas e pirâmides pelos alunos do 6º Ano do Ensino Fundamental. Os alunos explorariam os arquivos e observariam os vértices, arestas e faces dos sólidos.

Quadro 5: Produção Escrita do P4

	<p>Por PROFESSOR EM FORMAÇÃO 4 - sábado, 27 fev. 2021, 23:05</p>
<p>Conteúdo: Sólidos geométricos</p>	

<p>Descrição da tarefa:</p>	<p>1ª parte da tarefa:</p> <p>Solicitará aos alunos que utilizem os controles deslizantes “n e h” do (arquivo do GeoGebra) para modificar a base e a altura dos prismas e das pirâmides. Após a manipulação, registrarão os nomes de todos os prismas e pirâmides e também as principais diferenças entre eles.</p> <p>2ª parte da tarefa:</p> <p>Os alunos receberão duas tabelas e utilizarão as duas construções do GeoGebra para ajudar no preenchimento a e A, entre a e F e entre v e V.</p> <table border="1" data-bbox="504 640 1370 815"> <thead> <tr> <th>Nomenclatura</th> <th>Número de arestas de uma das bases(a)</th> <th>Número total de arestas (A)</th> <th>Número de faces (F)</th> <th>Número de vértices de uma das bases(v)</th> <th>Número total de vértices (V)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Prisma de basetriangular</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Prisma de basequadrada</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Prisma de basepentagonal</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Prisma de basehexagonal</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Prisma de baseheptagonal</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>	Nomenclatura	Número de arestas de uma das bases(a)	Número total de arestas (A)	Número de faces (F)	Número de vértices de uma das bases(v)	Número total de vértices (V)	Prisma de basetriangular						Prisma de basequadrada						Prisma de basepentagonal						Prisma de basehexagonal						Prisma de baseheptagonal					
Nomenclatura	Número de arestas de uma das bases(a)	Número total de arestas (A)	Número de faces (F)	Número de vértices de uma das bases(v)	Número total de vértices (V)																																
Prisma de basetriangular																																					
Prisma de basequadrada																																					
Prisma de basepentagonal																																					
Prisma de basehexagonal																																					
Prisma de baseheptagonal																																					
<p>Objetivos:</p>	<p>- Diferenciar Prismas de Pirâmides; - Perceber as regularidades existentes entre os elementos.</p>																																				
<p>Ano de escolaridade:</p>	<p>6º Ano do Ensino Fundamental</p>																																				
<p>Comentários do professor quanto ao desenvolvimento da tarefa em sala de aula</p>	<p>“Os alunos receberão dois arquivos do GeoGebra de prismas e pirâmides. O professor pode também compartilhar os links das duas construções, caso a internet e o uso de celulares for acessível” (P4).</p>																																				
<p>Arquivo com a resolução proposta pelo professor por meio do software GeoGebra</p>	<table border="1"> <tr> <td data-bbox="504 1200 948 1451">  </td> <td data-bbox="963 1200 1398 1451">  </td> </tr> <tr> <td data-bbox="504 1451 948 1516"> <p>Prisma</p> </td> <td data-bbox="963 1451 1398 1516"> <p>Pirâmide</p> </td> </tr> </table>			<p>Prisma</p>	<p>Pirâmide</p>																																
																																					
<p>Prisma</p>	<p>Pirâmide</p>																																				

Fonte: Módulo 3 - 18ª Edição do Curso de GeoGebra.

O P4 propôs uma tarefa que tratava da representação de um prisma e de uma pirâmide. Para a tarefa foram disponibilizadas duas tabelas que constam a nomenclatura dos poliedros, número total de vértices, número total de arestas, número de vértice da base e número de arestas da base e número de faces. Uma das tabelas está destinada ao preenchimento dos elementos da representação do prisma e a outra destinada aos elementos da representação da pirâmide.

A manipulação dos *controles deslizantes*, que determinam o número de lados do polígono da base dessas representações, possibilita-nos o reconhecimento de diferentes bases da representação do prisma e da representação da pirâmide na Janela de Visualização 3D. A observação da Janela de Visualização permite identificarmos diferentes polígonos e, com isso,

constatamos que o estudante pode explorar as características tanto dos poliedros, quanto das representações dos polígonos. Além disso, com a intervenção do professor poderá estabelecer relações entre as figuras bidimensionais e tridimensionais, ou seja, poderá concluir que as representações dos poliedros são formadas pela reunião de um número finito de representações de polígonos. É possível girar as representações, observar suas arestas, faces e vértices, realizar a contagem desses e verificar que essas representações mantêm suas propriedades. Ao girar, é possível perceber que uma face lateral do prisma que parecia um paralelogramo é na realidade um retângulo. Isso significa que ao arrastar essas representações na tela do computador, elas mudam sua aparência, no entanto, não deixam de ser prismas, mantendo suas propriedades.

O C1 no fórum de discussões questiona P4 a respeito da identificação, percepção, dos elementos das representações dos sólidos geométricos, mediante apenas a manipulação das construções prontas ou, se a construção pelos estudantes poderia contribuir ou prejudicar o processo de ensino e aprendizagem.

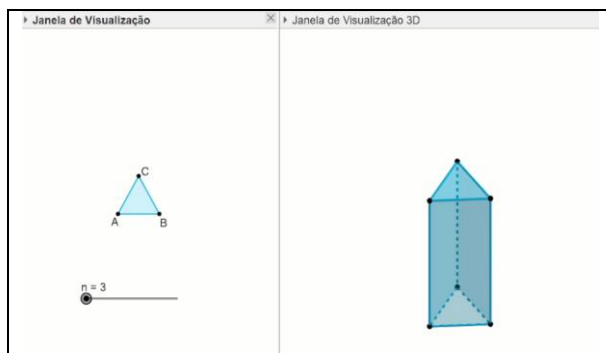
C1: [...] vou te fazer uma indagação: pelo que entendi de sua explicação, os alunos receberiam os arquivos prontos para observação e análise. Você acredita que seria possível realizar a construção desses arquivos ou de outros similares, com seus estudantes? A realização dessas construções com eles poderia beneficiar (ou prejudicar) o processo de ensino e aprendizagem de alguma forma? Como?

P4 diz [...] durante as construções, os estudantes reconhecem diversas características e propriedades que devem ser seguidas para garantir a sua eficácia. Além disso, descobrem mais propriedades quando manipulam essas figuras.

Eu usaria um outro momento da aula para fazer as construções com os alunos, pois o foco da minha proposta é analisar a relação entre o número de faces, vértices e arestas entre os prismas e entre as pirâmides.

A Janela de Visualização 3D permite explorarmos as faces, as arestas e os vértices das representações dos sólidos geométricos, consoante ao objetivo de P4 com as tarefas propostas. O *controle deslizante*, como podemos observar na Figura 14, possibilita a alteração da altura e acessar diferentes representações dos polígonos da base dos prismas e das pirâmides, favorecendo a mobilização da **apreensão operatória**. Isso ocorre pois pode acontecer uma desconstrução dimensional mesmo que mental da figura inicial, ou seja, no caso de uma figura tridimensional pode-se realizar uma desconstrução dimensional para identificar uma forma bidimensional ou acessar outras unidades da figura.

Figura 13: Prisma



Fonte: as autoras.

A articulação entre a Janela de Visualização 2D que apresenta as representações das figuras planas e a Janela de Visualização 3D que exibe as representações das figuras espaciais pode contribuir para o desenvolvimento das **apreensões perceptiva, discursiva e operatória**, pois oferece condições para o reconhecimento, exploração das representações e a verificação das propriedades.

No Fórum de discussões o P8 propõe a P4:

P8: [...] gostaria de sugerir que você também incluisse a questão do volume nas suas construções e nas tabelas propostas, pois é interessante que o aluno perceba a influência que a altura e os polígonos das bases exercem nele.

Podemos perceber que a proposta de P8 não está relacionada com a intencionalidade de P4, já que estava direcionada à percepção dos padrões e regularidades existentes entre os elementos das representações planas de prismas e pirâmides. Apesar de ser possível com essa construção explorar o volume dos prismas e pirâmides, por ser um 6º Ano do Ensino Fundamental, envolveria justificativas matemáticas que não fariam parte de tal etapa curricular.

*P4 afirma que: [...] Sem dúvida, o uso dessas construções para os alunos compreenderem o cálculo do volume é fundamental. Obrigada pela dica! **Eu só não comentei, pois pensei em uma tarefa para o sexto ano, mas sem dúvida posso explorar o cálculo do volume com eles de uma forma intuitiva [...]***

Em relação à representação do prisma, poderíamos explorar a medida de capacidade, por meio de material concreto, visto que o *software* GeoGebra só dispõe a ferramenta do cálculo da medida do volume. Isso significa que o *software* só nos dá condições de abordar a medida de volume do prisma em comparação à porção do espaço ocupado por este com a porção do espaço ocupado por uma unidade de medida de volume. Dessa forma, o planejamento do professor é fundamental para abordar esses conceitos utilizando o GeoGebra como recurso e utilizando o material manipulável didático para complementar e explorar a ideia de capacidade. Nesse sentido, seria necessária a utilização das representações de prismas e pirâmides de acrílico, realizando a comparação de um prisma e uma pirâmide de mesma base e mesma altura.

Poderíamos preencher a representação da pirâmide totalmente com água e na sequência transferir essa quantidade para a representação do prisma e verificar quantas medidas de pirâmides são necessárias para preencher o prisma, constatando que são necessárias três medidas.

Outra maneira de demonstrar essa relação seria por meio do princípio de Cavalieri que afirma que um prisma e uma pirâmide de mesma base e mesma altura possuem o mesmo volume, no entanto, para o 6º Ano do Ensino Fundamental a quem a tarefa estava direcionada, talvez não fosse aconselhado utilizar esse método.

Com relação ao processo de construção da tarefa de P4, ao construir a representação do prisma e a representação da pirâmide realizou escolhas de entes primitivos como pontos, segmentos e posteriormente polígonos regulares até concluir as representações dos sólidos, dessa forma houve a mobilização da **apreensão sequencial**, visto que foram determinadas configurações que constituíram um modelo.

Diante da relevância das tarefas propostas pelos professores em formação, na próxima seção serão apresentadas as potencialidades de tarefas envolvendo poliedros para as apreensões em geometria, as considerações finais e o referencial teórico deste trabalho.

POTENCIALIDADES DE TAREFAS ENVOLVENDO POLIEDROS PARA APREENSÕES EM GEOMETRIA

As resoluções elaboradas no *software* GeoGebra contribuem com a visualização das representações dos objetos tridimensionais, diferentemente do livro didático, dado que possibilitam a exploração de diferentes unidades figurais de uma figura geométrica, bem como a exploração dos elementos dos poliedros via a manipulação de *controles deslizantes* e a possibilidade de movimentar e girar as representações. A Janela de Visualização 3D do *software* GeoGebra possibilita que os poliedros sejam manipulados e rotacionados, favorecendo a mobilização das **apreensões perceptiva** e **discursiva**, conexões entre a figura e suas propriedades, pois há um equilíbrio entre o enunciado das hipóteses, a identificação das formas e a contagem dos elementos, por exemplo, quantidades de arestas, faces e vértices.

A Janela de Visualização 2D permite o acesso às figuras planas e a Janela de Visualização 3D o acesso às representações dos objetos tridimensionais e suas planificações. Logo, **apreensão perceptiva** pode conduzir ao reconhecimento visual das formas e a figura, desempenhando uma função heurística que é realizada por meio da **apreensão operatória**.

A tarefa do professor P1, que propõe investigações de poliedros a partir da manipulação da representação de prismas e pirâmides de diferentes bases, possibilita a identificação, a

quantificação dos elementos dos poliedros e o estabelecimento das relações entre os números vértices, arestas e faces. Era possível girar as representações e observar as características dos prismas e das pirâmides em diferentes posições, visualizando as suas faces e bases e mobilizando, assim, a **apreensão perceptiva**.

O material manipulável complementar a exploração da construção no *software* GeoGebra, pois, segundo Duval (2012), há fatores próprios à **apreensão perceptiva** que favorecem ou inibem as operações, que permitem encontrar a solução de um problema. O estudante observa uma representação plana de um prisma na tela do computador, mas esse é um objeto tridimensional. Dessa forma, a experiência com a exploração do material manipulável onde ele possa tocar e observar também outro tipo de representação como a construída no *software* GeoGebra pode contribuir para o professor observar que há diferentes representações de um mesmo objeto matemático.

Em se tratando do que a figura pode mostrar e o que o enunciado propõe, segundo Duval (1998), esse procedimento está relacionado ao processo de raciocínio que envolve argumentos, justificativas e conjecturas. A partir da proposta da tarefa que tem por objetivo estabelecer a Relação de Euler, é possível a exploração dos conhecimentos prévios dos alunos no que diz respeito à compreensão do que é um vértice, o que é uma aresta, faces e a característica da superfície dos poliedros. Esse tipo de tarefa favorece a mobilização da **apreensão discursiva**. Duval argumenta “que uma mesma figura pode ilustrar situações geométricas diferentes, quer dizer situações nas quais as hipóteses iniciais não são as mesmas” (2012, p.134). Como, por exemplo, um quadrado se estiver oblíquo e sem um enunciado pode ser tomado pelos estudantes como um losango ou um paralelogramo, por isso a importância de uma declaração a respeito de uma figura proposta.

É relevante que o professor estimule o estudante a explorar e identificar no enunciado as informações referentes ao objeto geométrico. Espera-se que o estudante seja capaz de observar que os poliedros são formas geométricas espaciais que apresentam superfícies formadas a partir de polígonos.

Em relação aos elementos do poliedro, espera-se que o estudante compreenda e relacione que o vértice é o encontro das arestas do poliedro, que a aresta é um segmento de reta determinado pelo encontro de duas faces de um poliedro e que cada face são regiões poligonais que delimitam um poliedro.

A tarefa proposta por P2 apresentava a possibilidade de planificação (Prisma Triangular e Prisma Retangular reto com ângulos), as demais possibilitavam girar as construções, favorecendo a **apreensão perceptiva** e a **apreensão operatória**, sendo possível observar

a representação da maneira que Duval (2015) denomina como desconstrução dimensional de formas, investigando as unidades de dimensões 2D, 1D e 0D como os polígonos das faces, arestas e vértices. No que diz respeito à **apreensão operatória**, dada a natureza heurística das tarefas, essa favorece a solução do problema proposto.

A tarefa elaborada no *software* GeoGebra por P3, poliedros de Platão, pode permitir a mobilização da **apreensão perceptiva e operatória**, uma vez que as planificações podem possibilitar uma mudança no olhar a respeito da figura que, segundo Duval (2011), permite reconhecer formas dentro de uma forma, sendo possível visualizar e explorar as unidades figurais de dimensão 0D e 1D, isso trata de uma desconstrução dimensional¹³. Duval (2012) explica que a produtividade heurística de uma figura está relacionada às suas modificações e aos tratamentos matemáticos possíveis para o problema proposto.

A Janela de Visualização 3D, a Janela de Visualização 2D, a possibilidade de manipular e girar as construções e explorar as faces, vértices, arestas e bases das construções e a ferramenta *controle deslizante* favorecem a exploração de todos os itens da tabela proposta por P1, P3 e P4, percepção de regularidades e a visualização de diferentes bases. Desse modo, a atividade contribui com a investigação da figura dinâmica e seus elementos, apresentando possíveis soluções (DUVAL, 1994).

Ao explorar as representações dos objetos tridimensionais, é relevante que o professor proporcione construções em que o estudante possa identificar elementos de dimensões inferiores como 1D/2D ou 2D/2D (linha reta ou curva, contorno fechado de um triângulo, de um quadrilátero). Dessa forma, a exploração heurística dos poliedros permite ao estudante, mediante as planificações, acessar com mais facilidade esses elementos, estabelecendo relações entre as representações das figuras bidimensionais e tridimensionais, bem como analisar e comparar suas semelhanças e diferenças.

As resoluções elaboradas no *software* GeoGebra contribuem com a visualização das representações dos objetos tridimensionais, diferentemente do livro didático, dado que, possibilitam a exploração de diferentes unidades figurais de uma figura geométrica, bem como a exploração dos elementos dos poliedros via a manipulação de *controles deslizantes* e a possibilidade de movimentar e girar as representações. A Janela de Visualização 3D do *software* GeoGebra possibilita que os poliedros sejam manipulados e rotacionados, favorecendo a mobilização das **apreensões perceptiva e discursiva**, conexões entre a figura e suas propriedades, pois há um equilíbrio entre o enunciado das hipóteses, a identificação das formas

¹³ A desconstrução dimensional permite uma mudança de olhar que vai em direção oposta ao reconhecimento automático de unidades figurais superiores, esta permite o reconhecimento de formas que não são percebidas de imediato (DUVAL, 2011).

e a contagem dos elementos, por exemplo, quantidades de arestas, faces e vértices.

A Janela de Visualização 2D do GeoGebra permite o acesso às figuras planas e a Janela de Visualização 3D, o acesso às representações dos objetos tridimensionais e suas planificações. Logo, **apreensão perceptiva** pode conduzir ao reconhecimento visual das formas e a figura desempenha uma função heurística que é realizada por meio da **apreensão operatória**.

P1 propõe investigações de poliedros a partir da manipulação da representação de prismas e pirâmides de diferentes bases, possibilita a identificação, a quantificação dos elementos dos poliedros e o estabelecimento das relações entre os números vértices, arestas e faces. Possibilita, ainda, girar e observar as representações dos prismas e das pirâmides de diferentes posições, visualizando as suas faces e bases mobilizando, assim, a apreensão perceptiva.

O material manipulável didático no caso de P4 complementaria a exploração da construção no *software* GeoGebra, pois, segundo Duval (2012), há fatores próprios à **apreensão perceptiva** que favorecem ou inibem as operações, que permitem encontrar a solução de um problema. Embora no caso das tarefas propostas por P1, P2, P3 e P4 o estudante esteja observando uma representação de um prisma na tela do computador (Janela 3D), ele pode observar uma representação plana de um objeto tridimensional (janela 2D), além de ter a oportunidade de comparar as representações do objeto nas três janelas (Algébrica, 2D e 3D). Dessa forma, a experiência com a exploração do material manipulável, que ele pode tocar e observar, além de outros tipos de representações disponíveis, como as construídas no *software* GeoGebra, podem contribuir para que o aluno conclua que há diferentes representações de um mesmo objeto matemático e diferentes apreensões em Geometria.

Em se tratando do que a figura pode mostrar e o que o enunciado propõe, segundo Duval (1998), está relacionado ao processo de raciocínio que envolve argumentos, justificativas e conjecturas. A partir da proposta da tarefa que tem por objetivo estabelecer a Relação de Euler, é possível a exploração dos conhecimentos prévios dos alunos no que diz respeito à compreensão do que é um vértice, o que é uma aresta, faces e a característica da superfície dos poliedros. Esse tipo de tarefa favorece a mobilização da **apreensão discursiva**. Duval argumenta “que uma mesma figura pode ilustrar situações geométricas diferentes, quer dizer situações nas quais as hipóteses iniciais não são as mesmas” (2012, p.134). Como, por exemplo, um quadrado se estiver oblíquo e sem um enunciado, pode ser tomado pelos estudantes como um losango, ou um paralelogramo, por isso a importância de uma declaração a respeito de uma figura proposta.

Tarefas como as propostas pelos professores tem potencial para conduzir ao estudante a observação de que poliedros são formas geométricas espaciais que apresentam superfície

formadas a partir de polígonos. Em relação aos elementos dos poliedros, espera-se que o estudante compreenda e relacione que o vértice é o encontro das arestas do poliedro, que a aresta é um segmento de reta determinado pelo encontro de duas faces de um poliedro e que cada face são regiões poligonais que delimitam um poliedro.

A tarefa de P2 apresentava a possibilidade de planificação (Prisma Triangular e Prisma Retangular reto com ângulos), as demais possibilitavam girar as construções aspectos que favorecem a **apreensão perceptiva** e a **apreensão operatória**, dado que é possível observar a representação da maneira que Duval (2015) denomina como desconstrução dimensional de formas, investigando desde unidades de dimensões 2D, 1D e 0D como os polígonos das faces, arestas e vértices. No que diz respeito à **apreensão operatória**, dada a natureza heurística das tarefas, essa favorece a solução do problema proposto.

A tarefa elaborada no *software* GeoGebra por P3, poliedros de Platão, permite a mobilização da **apreensão perceptiva** e **operatória**, uma vez que as planificações permitem uma mudança no olhar a respeito da figura que, segundo Duval (2011), permite reconhecer formas dentro de uma forma, sendo possível visualizar e explorar as unidades figurais de dimensão 0D e 1D, isso se trata de uma desconstrução dimensional¹⁴. Duval (2012) explica que a produtividade heurística de uma figura está relacionada às suas modificações e os tratamentos matemáticos possíveis para o problema proposto.

A Janela de Visualização 3D, a Janela de Visualização 2D, a possibilidade de manipular e girar as construções e explorar as faces, vértices, arestas e bases das construções e a ferramenta *controle deslizante* favorecem a exploração de todos os itens da tabela proposta por P1, P3 e P4, além da percepção de regularidades e a visualização de diferentes bases. Desse modo, a atividade fornece uma ajuda heurística (a investigação da figura dinâmica e seus elementos), apresentando possíveis soluções (DUVAL, 1994).

Ao explorar as representações dos objetos tridimensionais, é relevante que o professor proporcione construções em que o estudante possa identificar elementos de dimensões inferiores como 1D/2D ou 2D/2D (linha reta ou curva, contorno fechado de um triângulo, de um quadrilátero). Dessa forma, a exploração heurística dos poliedros permite ao estudante, mediante as planificações, acessar com mais facilidade esses elementos e estabelecer relações entre as representações das figuras bidimensionais e tridimensionais, bem como analisar e comparar suas semelhanças e diferenças.

A **apreensão sequencial** está presente entre a associação das propriedades e a utilização

¹⁴ A desconstrução dimensional permite uma mudança de olhar que vai em direção oposta ao reconhecimento automático de unidades figurais superiores, esta permite o reconhecimento de formas que não são percebidas de imediato (DUVAL, 2011).

das ferramentas do *software* durante a atividade de construção. Segundo Duval (1998, p.38), “mesmo que a construção conduza à visualização, os processos de construção dependem apenas de conexões entre as propriedades matemáticas e as restrições técnicas das ferramentas usadas.” No processo de construção há uma articulação entre a **apreensão discursiva** e a **apreensão sequencial**.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As construções apresentadas pelos professores que participaram da formação evidenciam que, para o desenvolvimento dos processos discursivos, é fundamental que o professor apresente um enunciado, uma declaração a respeito da tarefa, uma vez que, a partir do enunciado, pode-se afirmar que o referido texto tem como função explicar a figura geométrica. As construções em sua maioria atendiam ao que foi proposto em seu enunciado ou o que foi declarado, permitindo a realização de explorações que poderiam contribuir para a solução do problema proposto.

Caso a figura geométrica fosse elaborada a fim de produzir uma declaração, poderiam ser produzidos significados distintos. Isso significa que mesmo que a articulação entre as **apreensões perceptiva** e **operatória** pudessem direcionar a uma solução mediante uma exploração heurística, é necessário um retorno ao que foi declarado, ou seja, à mobilização da **apreensão discursiva**, visto que o raciocínio é apoiado em processos discursivos e uma mesma figura geométrica pode conduzir a diferentes explorações.

O *software* GeoGebra apresenta grandes contribuições para esse processo, uma vez que é possível observar as transformações das representações na tela, ter acesso a diferentes representações do mesmo objeto matemático e explorar conceitos. O *software* permite, ainda, realizar uma desconstrução dimensional, identificar regularidades, girar a construção e observar as representações de diferentes posições.

Ao discutir as potencialidades das tarefas, esta pesquisa aponta as contribuições da elaboração de tarefas por meio de um *software* dinâmico, visto que elas possibilitam a visualização, manipulação e apreensão dos conceitos geométricos.

Este trabalho foi desenvolvido visando contribuir com a formação de professores de matemática e promover reflexões a respeito do ensino de geometria. Diante das análises realizadas neste estudo, apresentamos as potencialidades e contribuições do uso do *software* GeoGebra como recurso metodológico e sua contribuição para a mobilização das apreensões em Geometria, a partir do olhar de professores e da pesquisadora quanto às tarefas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRANDT, C. F.; MORETTI, M. T.; NOVAK, F. I. L. O Desenvolvimento de aspectos específicos da aprendizagem em Geometria segundo Raymond Duval: Uma articulação com o ambiente dinâmico GeoGebra. **Olhar de Professor, Ponta Grossa**, 2018.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: Mércles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Matemática-Revmat**, Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 118-138, jan./jun. 2012a.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Mércles Thadeu Moretti. **Revmat, Florianópolis**, v. 7, n. 2, p. 266-297, jul./dez. 2012b.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais**. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira- São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. In.: PLUVINAGE, F. (dir.). **Annales de Didactique et Sciences Cognitives**, v. 10. Strasbourg: IREM, 2005. p. 5-53.

DUVAL, R. Representation, vision and visualization: cognitive function in mathematical thinking. Basic issues for learning. In: HITT, F.; SANTOS, M. (ed.). Proceeding of the 21st Annual Meeting of the 228North American Chapter of the International Group for the **Psychology of Mathematics Education**, Mexico, oct. 1999b. p. 3-26.

DUVAL, R. Geometry from a Cognitive Point of View. In: MAMMANA, C.; VILLANI, (Orgs.). Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: an **ICMI study**. Dordrecht: Kluwer, 1998. p. 37-52

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Bern: Peter Lang, 1995a.

DUVAL, R. Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. **Repères**, n.17, p.121-138, 1994.

FILHO, J. G. Leis da Gestalt. In: **Gestalt do objeto - Sistema de leitura visual da forma**. 8ª. ed. [S. l.: s. n.], 2008. cap. 1.

GONÇALVES, T. Da. C.; FERREIRA, C. C.; FERREIRA, V. L. D; MENEGAIS, D. A. F.N.

Identificação de Lacunas no processo de aprendizagem dos conteúdos de Geometria no ensino médio pelo método de Van Hiele. **Revista Eletrônica de Matemática - REMAT**, v. 15, p. 01-20, 2020.

GRAVINA, M. A.; SELBACH, M. T. Computador em Sala de Aula - Álgebra e Geometria: números comandando pontos. **Revista do Professor de Matemática**, [s. l.], ed. 8, 2020.

KUHN, M. C.; QUADROS, B. M. De. Geometria nos Anos Iniciais: Possíveis Conexões Teóricas e Práticas. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 13, p. 246-254, 2020.

MARQUES, V. D.; CALDEIRA, C. R. Da. C. Dificuldades e carências na aprendizagem da Matemática do Ensino Fundamental e suas implicações no conhecimento da Geometria. **Revista Thema**, [s. l.], v. 15, ed. 2, 2018.

MINÉ, V. A. do. A.; DOS PASSOS PEREIRA, M. R. Políticas públicas na formação continuada para o ensino de geometria. **Roteiro, Joaçaba**, v. 46, 2021.

PAVANELLO, R. M; COSTA, L. P. Da; VERRENGIA, S. R. D'A. Geometria e Educação Infantil: Entre a Pesquisa, o Desenvolvimento de Materiais de Ensino e a Formação Continuada Professoras. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 13, p. 238- 245, 2020.

PEREIRA DA COSTA, A. Pensamento geométrico: em busca de uma caracterização à luz de Fischbein, Duval e Pais. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 9, n. 18, p. 152-179, 26 jun. 2020.

ROCHA, F. S.; ZIMER, T. T. B.; CAMARGO, S.; MOTTA, M. de.S. Formação continuada de professores de matemática para uso de tecnologias digitais: Uma análise a partir de um curso de extensão sobre o software scratch. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT**, Florianópolis, v. 16, p. 01-21, 2021.

ROSA, M. C; SOUZA, D. Da S; SANTOS, N. M.S. Formação continuada de professores de matemática e o ensino de geometria: Um Panorama das Pesquisas dos últimos anos. **Educação Matemática e Pesquisa**, v. 22, Ed. 2, p. 635-657, 2020.

STIEGELMEIER, E. W; MARTHOS, S. R. D'A; BRESSAN, G. M. O contexto da geometria no âmbito escolar: concepções e implicações na formação docente. **Revista Eletrônica de Matemática - REMAT**, v. 5, p. 25-40, 2019.

VAN DE VALLE, J. A. **MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL FORMAÇÃO DE PROFESSORES E APLICAÇÃO EM SALA DE AULA**. In: Desenvolvendo Conceitos de Medida, O Pensamento e os Conceitos Geométricos. 6. ed. [S. l.: s. n.], 2009. cap. 20-21, ISBN 0-20-548392-5.

ZANELLA, I.; FRANCO, V. S.; CANAVARRO, A. P. Realizar construções geométricas com o GeoGebra: A contribuição do ambiente de geometria dinâmica para o futuro professor de matemática. **Revista Paranaense de Educação Matemática -RPEM**, Campo Mourão, v. 7, ed. 14, p. 179-207, 2018.

ARTIGO/CAPÍTULO 2

VISUALIZAÇÃO EM GEOMETRIA: POTENCIALIDADES DE TAREFAS SOBRE VOLUME PROPOSTAS POR PROFESSORES EM UMA AÇÃO FORMATIVA ENVOLVENDO O SOFTWARE GEOGEBRA

Resumo: O objetivo da pesquisa relatada neste texto é discutir as potencialidades de tarefas que exploram a visualização em Geometria para o conceito de volume de sólidos geométricos que foram propostas por professores de matemática em uma ação formativa envolvendo o *software* GeoGebra. Para tanto, foi realizada uma investigação qualitativa de cunho interpretativo da produção escrita de sete professores de matemática que apresentaram, em uma plataforma virtual de um curso de formação de professores online envolvendo o GeoGebra, tarefas sobre volume de sólidos geométricos e suas resoluções. Os resultados indicaram que as tarefas e construções elaboradas pelos professores em formação têm potencial para mobilizar a visualização que abrange as apreensões perceptiva, discursiva e operatória. Isso ocorre devido a uma figura ser composta por ao menos duas unidades figurais elementares e o *software* GeoGebra permitira a exploração dessas unidades.

Palavras-chave: Apreensões, Formação de professores de Matemática, *Software* GeoGebra, Tarefas. Visualização.

INTRODUÇÃO

No âmbito da formação de professores, discussões a respeito do ensino de Geometria e do seu abandono em escolas e currículos indicam um dos motivos da defasagem no estudo dessa temática na formação acadêmica de professores que ensinam matemática (PEM) (BRUNHEIRA; PONTE, 2019; GONÇALVES *et al.* 2020; KUHN; QUADROS, 2020; LECRER; PAZUCH, 2021; MARQUES; CALDEIRA, 2018; MINÉ; DOS PASSOS PEREIRA, 2021; PAVANELLO; DA COSTA; VERRENGIA, 2020; PEREIRA DA COSTA, 2019; PEREIRA DA COSTA; ROSA DOS SANTOS, 2020; ROSA; SOUZA; SANTOS, 2020; STIEGELMEIER; MARTHOS; BRESSAN, 2019).

No contexto da Educação Matemática há uma grande preocupação em discutir o ensino e a aprendizagem em geometria. Contudo, ainda persiste o desafio de proporcionar uma formação de professores de matemática que avance nessa temática, levando em conta o que é proposto pelas políticas públicas de educação e pelas investigações.

Pavanello *et al.* (2020) indica que, muitas vezes, os professores que ensinam matemática (PEM) não tiveram uma formação que os apoie nas mudanças necessárias. Os docentes necessitam de tempo e espaço para pensar em alternativas de ensino, refletir sua prática e organizar as proposições de tarefas que atendam e provoquem tais mudanças que levem em consideração os saberes do aluno.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, (BRASIL, 1998) já apontavam que os

conceitos geométricos constituem parte importante do currículo da Matemática e podem contribuir com o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento dos alunos, que os permita compreender, descrever e representar de forma organizada o mundo em que vivem.

Na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2018) são apresentados argumentos sobre a necessidade de se propor ações que oportunizem aos alunos a possibilidade de estudar e compreender as relações entre os elementos das figuras planas e espaciais com objetivo de promover o desenvolvimento do seu pensamento geométrico, pois “esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes” (BRASIL, 2018, p.271).

Pesquisas recomendam o emprego de diferentes estratégias no ensino de geometria, dentre essas podemos citar o trabalho com *softwares* de geometria dinâmica, em virtude de sua relevância no processo de compreensão das representações dos objetos geométricos. Os *softwares* dinâmicos de geometria são vistos como recursos significativos para a construção, identificação e visualização das representações dos objetos geométricos (MARQUES; CALDEIRA, 2018; KUHN; QUADROS, 2020; LECRER; PAZUCH, 2021).

No processo de ensino, os professores podem associar o uso de softwares aos conteúdos de Geometria por meio de tarefas que sejam desafiadoras e que convidem os estudantes a investigar, formular conjecturas, realizar provas e refutações. Para isso é necessário que os professores passem em sua formação por experiências que possam mobilizar conhecimentos de geometria de modo articulado. Lecker e Pazuch (2021) destacam que os professores podem mobilizar esses conhecimentos em contextos como: cursos de extensão, grupos de estudos, formação inicial e grupos colaborativos.

Para Duval, as inovações no ensino de Geometria, por meio do desenvolvimento dos *softwares* de construção, permitem “eliminar completamente as aproximações compensatórias da mão no uso dos instrumentos. Em outras palavras, não é possível conseguir uma construção por ‘juízo’, sem levar em conta as propriedades geométricas” (2005, p.11).

Nos PCNs (BRASIL, 1997), consta que “a Matemática está vinculada à compreensão, à apreensão de significados e isto significa que aprender o significado de um objeto, pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos” (BRASIL, 1997, p.19). Nesse sentido, Duval (2012a) ressalta que é fundamental para a compreensão em Matemática distinguir as diferentes representações de um objeto, dado que os objetos matemáticos não estão acessíveis à percepção como outros objetos do cotidiano.

Para possibilitar tal compreensão por parte dos PEM, Lecker e Pazuch (2020) destacam a necessidade de se pensar e implementar processos formativos de professores de Matemática

que viabilizem o uso de estratégias e recursos tecnológicos utilizados para o ensino da Geometria.

Tendo em conta os aspectos apresentados até aqui, o objetivo do presente estudo é “*discutir as potencialidades de tarefas que exploram a visualização em Geometria para o conceito de volume de sólidos geométricos, que foram propostas por professores de matemática em uma ação formativa envolvendo o software GeoGebra*”.

A seguir discutimos a visualização em Geometria na perspectiva de Raymond Duval e as contribuições do *software* GeoGebra; apresentamos os procedimentos metodológicos utilizados nesta pesquisa, assim como algumas reflexões a respeito das potencialidades de tarefas para a visualização e as considerações finais.

A VISUALIZAÇÃO EM GEOMETRIA NA PERSPECTIVA DE RAYMOND DUVAL E AS CONTRIBUIÇÕES DO *SOFTWARE* GEOGEBRA

Segundo Duval(2005) a Geometria é uma das áreas da matemática que exige uma demanda cognitiva maior. Para esse autor, ela possibilita meios de construir, raciocinar e ver, além de mobilizar o olhar, a linguagem e o gesto (DUVAL, 2005). Para que possamos compreender as dificuldades dos alunos frente a matemática, uma vez que eles apresentam maior dificuldade quando se trata do ensino da Geometria, é fundamental uma abordagem cognitiva.

Segundo Duval

A originalidade de uma abordagem cognitiva não está em partir dos erros para tentar determinar as “concepções” dos alunos e a origem de suas dificuldades em álgebra, em decimais, neste, ou naquele conceito geométrico etc. A originalidade da abordagem cognitiva está em procurar inicialmente descrever o funcionamento cognitivo que possibilite a um aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos em situação de ensino (2003, p.12).

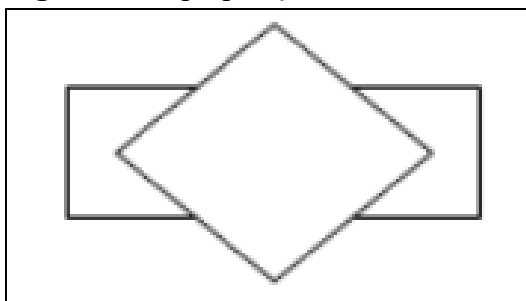
A aprendizagem matemática está relacionada a três processos indispensáveis, quais sejam: processos de visualização, processos de construção por ferramentas e o raciocínio (DUVAL, 1998). Neste trabalho será evidenciado o processo de visualização.

A visualização exerce um papel fundamental na aprendizagem de matemática, uma vez que, além de permitir a realização de uma exploração heurística das figuras geométricas, permite acesso às representações dos objetos matemáticos, pois “a visualização é baseada na produção de uma representação semiótica” (DUVAL, 1999, p. 7). Essas representações semióticas “são produções constituídas pelo emprego das regras de sinais (enunciado em língua natural, uma forma algébrica, um gráfico, figuras geométricas)”. Em razão disso, é importante distinguir um objeto matemático de sua representação, visto que, um mesmo objeto matemático

pode ter representações distintas (DUVAL, 2009, p. 15).

Ver uma figura compreende até três operações distintas, sendo que duas delas estão relacionadas à maneira comum de olhar as imagens e à percepção dos objetos. Logo, a maneira de “ver” compreende o reconhecimento discriminativo das formas e identificação de objetos (DUVAL, 2005). Para Duval (2011), ver uma figura está relacionada a reconhecer formas e contornos que estão justapostos e superpostos, como no exemplo da Figura 1.

Figura 1: Superposição de duas formas – quadrado e retângulo



Fonte: Duval (2012, p, 121).

A terceira operação é sempre solicitada em uma atividade geométrica e está relacionada ao reconhecimento de unidades inferiores que normalmente ficam ocultas pela percepção, isso só é possível ao realizar uma desconstrução dimensional.

Para Duval (2022), a maneira matemática de ver figuras é realizar uma desconstrução dimensional das formas. Olhar a figura como se ela fosse formada de peças de um quebra-cabeça, isso significa que é necessário realizar uma decomposição de formas $nD/2D$, em unidades figurais de dimensões inferiores. Um exemplo é a representação do cubo ou de uma pirâmide ($3D/2D$) que podem ser decompostos em quadrados e triângulos que possuem unidades figurais $2D$, assim como os polígonos poderão ser decompostos em segmentos de retas e pontos unidades $1D/0D$.

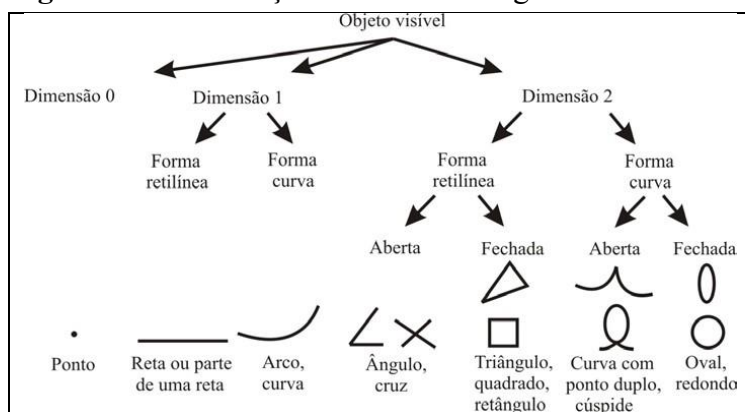
Em uma aplicação de um tratamento matemático, aplicações de definições e teoremas, são exigidas unidades figurativas de dimensão (1 ou 0). Contudo, a **percepção** sempre focaliza unidades de dimensão 2 (DUVAL, 1995). Isso significa que “no registro de figuras há uma predominância perceptual das unidades de dimensão 2 sobre as de dimensões inferiores[...] “Assim, um quadrado é percebido como uma figura única e não como a reunião de quatro segmentos opostos de dois em dois” (DUVAL, 1995, pp.199 - 201). Desse modo, nem sempre é fácil “ver” as relações ou propriedades matemáticas das figuras geométricas que são fundamentais para encontrar a solução esperada em um problema matemático (Duval,1995).

Essa dificuldade pode ser um complicador na compreensão de ideias, noções e conceitos de Geometria Espacial, e para entender a representação plana de um objeto tridimensional e observar suas características. Portanto, é necessário compreender que “uma figura é uma

organização de elementos de um campo perceptivo, não homogêneo, que constitui um objeto que se destaca deste campo” (DUVAL, 2012, p. 121).

A lei de organização perceptiva permite a identificação visual de imagens e de formas que representam objetos matemáticos, a partir de unidades figurais elementares (Figura 1). “Uma figura permite que você veja uma ou várias formas 1D/2D ou 2D/2D (linha reta ou curva, contorno fechado de um triângulo, de um quadrilátero) ou formas 3D/2D (cubo, tigela)” (DUVAL, 1998, p.40).

Figura 2: Classificação das unidades figurais elementares



Fonte: Duval (1995, p. 199).

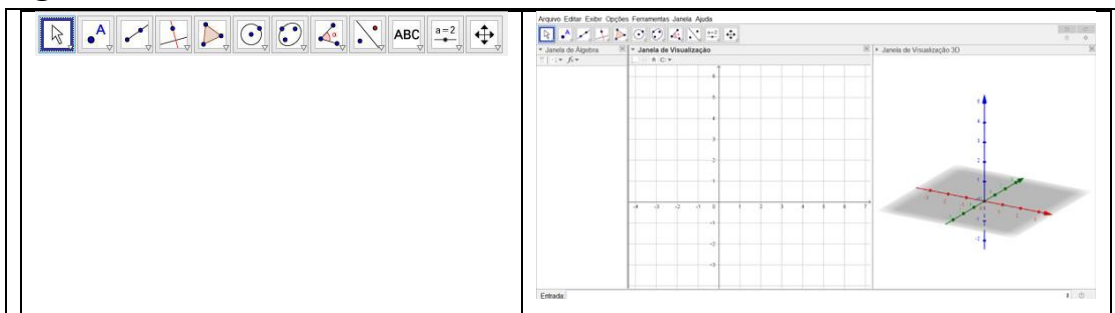
Contudo, nem sempre a figura em uma atividade geométrica contribui para a resolução de um problema, o simples olhar de uma figura geométrica aparenta excluir o olhar matemático sobre ela (DUVAL, 1994). Isso significa que é necessário desenvolver a forma matemática de olhar para uma figura em Geometria. Logo, é preciso uma aprendizagem específica de cada tipo de apreensão que, segundo Duval (2005), são quatro¹⁵: **perceptiva, discursiva, operatória e sequencial**.

Outro fator evidenciado por Duval (2005), devido às inovações nas últimas décadas, são as contribuições de *softwares* de geometria dinâmica. Esses *softwares* contribuem com a execução das tarefas e eliminam as aproximações que poderiam surgir ao realizar uma construção utilizando outros instrumentos. Consoante a Duval (2005), Moran e Franco (2014) afirmam que os *softwares* de geometria dinâmica oportunizam a realização de construções e a visualização de operações que à mão não seriam realizadas com precisão e de maneira dinâmica. Nesse contexto, o *software* GeoGebra tem se apresentado como um recurso didático útil, pois, além de ser um *software* gratuito de matemática dinâmica, possibilita a construção de pontos, segmentos, retas, funções, polígonos regulares, dentre outros objetos matemáticos, e

¹⁵ Apreensão perceptiva – identificação e reconhecimento imediato de formas 2D/3D. Apreensão discursiva – diz respeito ao enunciado, hipóteses que fixam certas propriedades. Apreensão operatória trata das possíveis modificações de uma figura e a Apreensão sequencial está relacionada à ordem, ao processo de construção.

permite analisar os movimentos das construções. Para tanto, é possível realizar construções de maneiras distintas, entre elas inserir comandos na caixa de entrada ou acessar as ferramentas disponíveis na interface.

Figura 3: Barra de Ferramentas e Interface do GeoGebra



Fonte: as autoras.

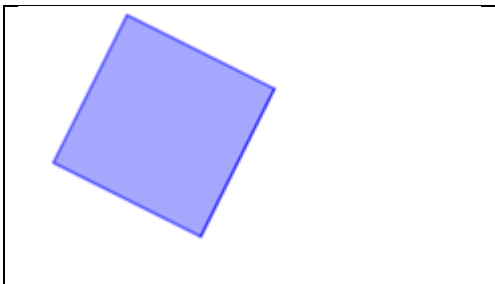
O GeoGebra pode proporcionar diferentes possibilidades de visualização e explorações de diferentes representações dos objetos matemáticos, quais sejam: algébricas, numéricas e geométricas, o que é possível por meio da Janela de Álgebra, Janela de Visualização e Janela de Visualização 3D.

Para Gravina (2015, p. 243), “uma figura dinâmica é entendida como uma coleção de desenhos em movimento, que respeitam um certo procedimento de construção”. O desenho na tela do computador, ou seja, a figura dinâmica, resguarda suas relações geométricas.

Nóbriga (2015) destaca o papel de tarefas que recorrem à utilização do *software* GeoGebra para elucidação de conceitos e para a visualização. Para esse autor, os *softwares* dinâmicos possibilitam ao estudante experimentar um novo modo de compreender a Geometria, uma vez que se pode movimentar a representação dos objetos geométricos, visualizá-los e explorá-los sem perder as propriedades. Consoante a isso, Duval (2011, p. 84) afirma que “a construção instrumental das figuras, sobretudo utilizando *software*, confere às figuras uma confiabilidade e uma objetividade que permitem efetuar verificações e observações”. Além de contribuir para a visualização, especialmente quando se trata do aspecto do movimento dos objetos geométricos (DUVAL, 1998).

Nesse sentido, é possível mobilizar a **apreensão perceptiva**, uma vez que esta ocorre quando identificamos e reconhecemos uma forma ou objeto em um plano ou espaço. Ela apresenta uma função epistemológica de identificação de objetos em duas ou três dimensões (DUVAL, 1994, 1998), sendo a mais imediata.

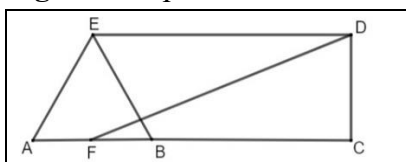
Figura 4: Apreensão perceptiva



Fonte: as autoras.

A **apreensão discursiva** nos permite acessar as propriedades matemáticas que são evidenciadas por meio de uma legenda, uma hipótese, ou seja, não podemos afirmar, ao olhar para uma figura, que uma propriedade está contida na figura. Além disso, fornece explicações de outras propriedades matemáticas, que não foram indicadas nas figuras. A exemplo disso, temos os exercícios de aplicação de teoremas e definições baseados somente na **apreensão discursiva** (DUVAL, 1994). Vejamos um exemplo na figura 5.

Figura 5: Apreensão discursiva

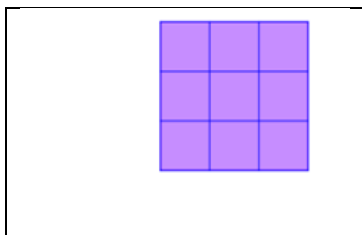
 <p>A medida do segmento DF, em unidades de comprimento, é igual a:</p>	<p>Na figura, os segmentos \overline{AC} e \overline{DE} são paralelos entre si e perpendiculares ao segmento \overline{CD}; o ponto B pertence ao segmento \overline{AC}; F é o ponto médio do segmento \overline{AB}; e $\triangle AEB$ é um triângulo equilátero. Além disso, o segmento \overline{BC} mede 10 unidades de comprimento e o segmento \overline{AE} mede 6 unidades de comprimento.</p>
--	--

Fonte: Fuvest(2021).

Ao observar a Figura 5, fica evidente que sem um enunciado não teríamos condições de afirmar, apenas com a mobilização da apreensão perceptiva, que a representação do triângulo ABE é de fato um triângulo equilátero e que F é o ponto médio do segmento \overline{AB} . Contudo, com as informações listadas no enunciado, como a informação de que temos um triângulo equilátero e F é o ponto médio do segmento \overline{AB} , a afirmação se torna possível.

Quando tratamos das manipulações, as modificações possíveis de uma figura e a sua exploração heurística dizem respeito à apreensão operatória. Nessa apreensão podem ser realizadas modificações em uma figura em busca da modificação heurísticamente relevante, isso é, aquela que será útil para solucionar um problema.

Figura 6: Apreensão operatória



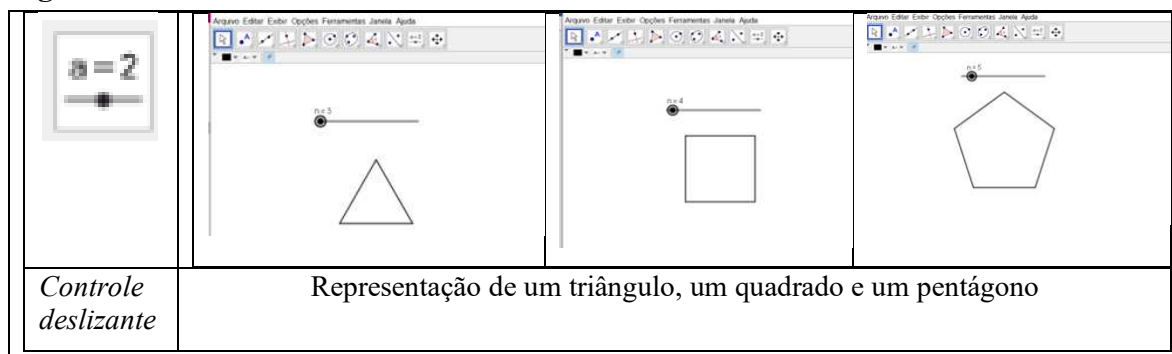
Fonte: adaptado de Duval (2012)

A Figura 6 nos sugere um tipo de composição denominada homogênea que é realizada em unidades figurais da mesma forma da figura de partida.

O *controle deslizante* é uma ferramenta que permite causar variações nas representações dos objetos matemáticos e, quando está associado às representações dos objetos matemáticos, essa ferramenta pode assumir a função de uma variável determinando um intervalo. Na Figura 6, é apresentada a construção de representações de polígonos regulares em um intervalo variando de 3 a 20 lados. Ao manipular o *controle deslizante*, é possível visualizar diferentes representações.

Para Basniak (2020), as explorações e os movimentos das construções vinculados à ferramenta *controle deslizante* permitem que seja criada uma variável dentro de um intervalo estabelecido, sendo o objeto e os movimentos dependentes desse controle (BASNIAK, 2020).

Figura 7: Controle deslizante



Fonte: as autoras

Além do *controle deslizante* que permite manipular e explorar as construções realizadas no *software* GeoGebra, a movimentação das representações dos objetos tridimensionais disponíveis na Janela de Visualização 3D permite visualizar as faces em diferentes posições, as bases, possibilitando a identificação das faces e de características tais como medidas dos ângulos internos, lados etc.

De acordo com Duval (1998), as **apreensões perceptiva, discursiva e operatória** dizem respeito à **visualização** e ainda desempenha um papel heurístico, que ocorre por meio da **apreensão operatória**. O papel heurístico ou ajuda heurística é convocada para justificar a

utilização das figuras que visam apresentar possíveis soluções ou tem a função de demonstração (DUVAL, 1994).

Tendo em vista o que foi discutido até o momento, na próxima seção apresentamos os encaminhamentos metodológicos, o contexto investigado e as tarefas que exploram a visualização em Geometria para o conceito de volume de sólidos geométricos.

ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

Para estudar potencialidades de tarefas que exploram a visualização em Geometria para o conceito de volume de sólidos geométricos propostas por professores de matemática em uma ação formativa envolvendo o *software* GeoGebra, realizamos uma investigação¹⁶ de natureza qualitativa e de cunho interpretativo. A coleta das informações foi realizada no contexto de um curso online de formação continuada de professores de Matemática denominado Curso de GeoGebra.

Esse curso é um espaço de formação de professores on-line e, embora seja intitulado como um curso, apresenta uma estrutura formativa não vertical, isso significa que são propostas ações pautadas em uma formação que oportuniza um trabalho cooperativo, discussões, debates, socialização, criação de tarefas etc., tendo como objetivo proporcionar um ambiente que permita aos participantes em formação, compartilhar suas práticas pedagógicas, refletir e discutir aspectos técnicos do *software* GeoGebra e as contribuições desse recurso para o ensino e para a aprendizagem da Matemática.

O curso é ofertado pela Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR) em parceria com a Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT) e conta com o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Mato Grosso – FAPEMAT, sendo realizado em um período de oito módulos semanais. No primeiro módulo, os participantes em formação têm acesso à interface do programa e a modos de realizar construções geométricas básicas (retas, círculos e formas geométricas em geral). A partir do segundo módulo, os participantes em formação têm acesso a construções de polígonos por meio das ferramentas da interface e à inserção de comandos na caixa de entrada.

O terceiro módulo é dedicado a tópicos das Geometrias plana e espacial utilizando recursos estudados nos módulos anteriores, bem como comando sequência. Os demais módulos do curso abordam recursos que podem ser aplicados aos tópicos de funções, sequências, além de outros comandos e ferramentas próprias do programa. Em cada módulo, os participantes em

¹⁶ A presente investigação foi aprovada pelo Comitê de Ética em Pesquisa (Número do Parecer: 5.001.063; CAAE: 50991921.1.0000.5231).

formação tiveram acesso a materiais escritos e vídeos para seu estudo.

Na presente pesquisa foram investigados professores em formação que fizeram parte da 18ª Edição do Curso de GeoGebra. Essa edição contou com 603 participantes, sendo 153 colaboradores integrantes da equipe formadora e 450 participantes em formação. Os participantes desse curso, em sua maioria, são estudantes de Graduação em Matemática; Estudantes de Pós-Graduação Lato ou Stricto Sensu (das áreas de Matemática, Ensino de Matemática ou Educação Matemática); e professores de Matemática que atuam na Educação Básica ou no Ensino Superior.

Para a realização das tarefas, os participantes em formação são divididos em cinco grupos (G1, G2, G3, G4, G5) com 90 participantes em cada grupo, sendo acompanhados durante o período do curso por colaboradores voluntários. Esses colaboradores voluntários são participantes de outras edições do curso que apresentaram um bom desempenho no desenvolvimento das tarefas, interlocução com seus pares ao longo da participação e a realização integral do curso.

No decorrer da formação, cada colaborador voluntário fica encarregado por acompanhar semanalmente cinco participantes em formação. Eles verificam as construções realizadas no *software* GeoGebra pelos participantes em formação, interagem com os participantes em formação nos fóruns de discussões, realizam questionamentos e acompanham o desenvolvimento ao longo de cada módulo. O acompanhamento é registrado semanalmente por meio de um relatório, mas vale ressaltar que ele não tem o objetivo de atribuir uma nota para futura aprovação, mas direcionar o trabalho.

Os dados analisados na presente investigação foram obtidos no terceiro módulo desse curso, sendo considerado o “Grupo 5 (cinco)” com o maior número de participantes em formação que atendiam critérios estabelecidos em consonância com o objetivo da pesquisa. Sendo assim, o primeiro critério para a seleção de participantes em formação é que no ato da inscrição se identificassem como professores da Educação Básica e obtivessem 100% de participação no curso, uma vez que há participantes em formação que não são professores da Educação Básica. Dentre 90 participantes em formação, selecionamos a produção escrita do módulo três (conteúdo, tarefa, resolução e registro no fórum) de 30 participantes em formação que faziam parte do Grupo 5(cinco).

Na Ação Formativa (Figura 6) do módulo três, foi solicitado aos participantes em formação que escolhessem um conteúdo de Geometria dos Anos Finais do Ensino Fundamental

ou Ensino Médio e na sequência elaborassem uma tarefa¹⁷, destacando o modo como essa tarefa pode ser explorada em sala de aula e uma possível resolução (construção realizada utilizando o *software* GeoGebra), conforme (Figura 8 – Parte 1). Essas produções foram disponibilizadas e debatidas pelos participantes em formação no fórum de discussão do “Curso de GeoGebra” (Figura 8 – Parte 2).

Figura 8: Proposição da Ação Formativa¹⁸ – Módulo 3 da 18ª Edição do Curso de *GeoGebra*

Parte 1

Considere que você vai lecionar um tópico de Matemática do Ensino Fundamental ou do Ensino Médio durante duas aulas seguidas. Para isso, você deve levar um ou mais arquivos previamente construídos no GeoGebra, utilizando conteúdos abordados nos três primeiros módulos do curso. Os estudantes terão acesso a esse(s) arquivo(s) em computadores (ou celulares) e vão utilizá-lo(s) durante a sua aula. Poste esse(s) arquivo(s) no fórum "Tarefa 3" com uma descrição de como pretende utilizá-lo(s) e de como ele(s) ajuda(m) nas atividades planejadas para sua aula.

Você deve realizar a Parte 1 até 28 de fevereiro às 23h59min (horário de Brasília).

Parte 2

Escolha construções realizadas por, no mínimo, dois colegas e interaja com eles fazendo perguntas, sugerindo alterações ou acréscimos em suas construções.

Você deve realizar a Parte 2 até 03 de março às 23h59min (horário de Brasília).

Fonte: 18ª Edição do Curso de GeoGebra.

Para análise dos dados, realizamos a leitura de 30 produções escritas (tarefas e as construções apresentadas por meio da exploração do GeoGebra). Durante a leitura das 30 produções escritas, verificamos que as produções não atendiam ao que era solicitado na Ação Formativa (a elaboração de uma tarefa (enunciado e construção) a partir de conteúdo voltado para a sala de aula). Contudo verificamos que, dentre essas 30 produções escritas, sete produções apresentavam em comum um mesmo conteúdo (“O estudo do volume dos sólidos geométricos”), ano de escolaridade, uma descrição de como a tarefa poderia ser abordada e as construções realizadas no *software* GeoGebra. Posteriormente foram identificadas as potencialidades das tarefas para a visualização em geometria e outras potencialidades que podem ser desencadeadas a partir da resolução apresentada pelos professores em formação, fundamentados na teoria de Raymond Duval. Os sete professores em formação que tiveram suas produções analisadas são denominados de P1, P2, P3, P4, P5, P6 e P7.

Na próxima seção, apresentamos as potencialidades para **visualização** identificadas nas

¹⁷ Tarefas são os enunciados produzidos pelos professores em formação durante a participação no Curso de *GeoGebra*.

¹⁸ Ação Formativa é a proposição solicitada pelo formador aos professores em formação que é constituída pela parte 1 e parte 2.

setes tarefas que envolvem volume de sólidos geométricos.

Descrição e Análise das produções escritas pelos professores investigados


Nesta seção analisamos as tarefas elaboradas por sete professores que fizeram parte do curso de formação, na busca de discutir as potencialidades de tarefas que exploram a visualização em Geometria para o conceito de volume de sólidos geométricos de acordo com a teoria de Raymond Duval.

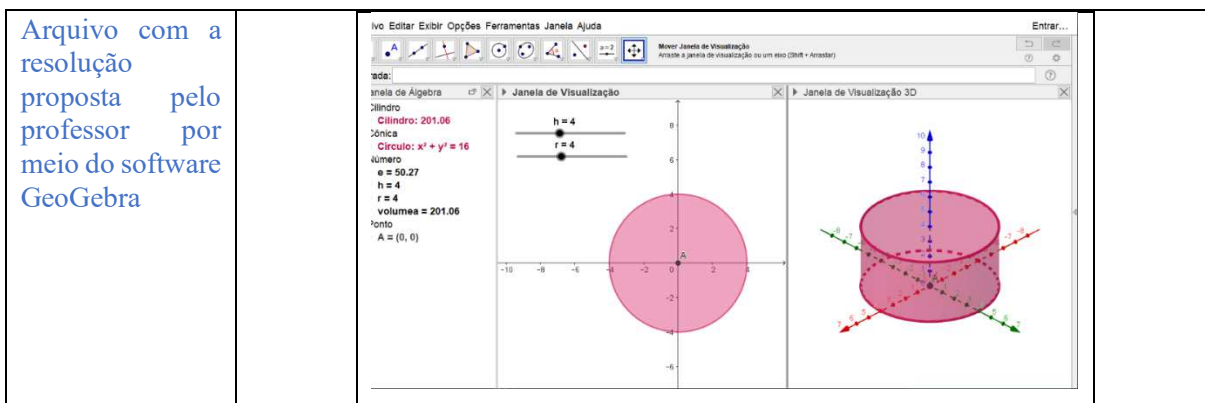
Serão apresentados em quadros o conteúdo, o ano escolar, os comentários do professor a respeito do desenvolvimento da tarefa em sala de aula, a imagem do arquivo com construção proposta pelo professor no *software*. Além disso, após cada quadro, apresentamos a análise das tarefas em relação às apreensões: perceptiva, discursiva e operatória em busca de evidenciar potencialidades para a **visualização** em Geometria.

Produção escrita de P1

O professor P1 apresentou no fórum de discussão uma tarefa (Quadro 1) direcionada aos alunos do 8º Ano do Ensino Fundamental, com o objetivo de abordar o estudo do volume do cilindro reto.

Quadro 1: Produção Escrita do P1

 Por PROFESSOR EM FORMAÇÃO 1 - sábado, 27 Fev 2021, 22:23	
Conteúdo: Sólidos Geométricos	
Ano de escolaridade:	8º Ano do Ensino Fundamental
Comentários do professor quanto ao desenvolvimento da tarefa em sala de aula	<p>“[...] o estudo do volume de um cilindro reto, que acredito ser um sólido com vasta aplicabilidade em nossa sociedade, desde reservatórios de água em residências até peças presentes em indústrias e em componentes das engenharias. Tendo em vista que o conteúdo seria trabalhado durante duas aulas, em um primeiro momento [...] (propomos a) utilização de material palpável feito em acrílico, por exemplo, ou outro material disponível [...] assim sendo, na primeira aula eu iria trabalhar com o acrílico buscando levar os alunos a compreenderem que um cilindro possui bases formadas por figuras geométricas que eles já conhecem: o círculo. E, então, de modo dedutivo, chegar à conclusão de que o volume de um cilindro nada mais é do que o produto entre a área da base (círculo) e sua altura. Na segunda aula seria utilizado o arquivo previamente construído no GeoGebra, que poderia ser manipulado via dois controles deslizantes h e r, para a altura e o raio, respectivamente [...]” (P1).</p>



Fonte: Módulo 3 - 18ª Edição do Curso de GeoGebra.

Observamos que a tarefa elaborada pelo professor P1 dispunha de *controles deslizantes* nomeados como r (raio) e h (altura), da representação de um círculo preenchido na cor rosa na Janela de Visualização 2D¹⁹ e da representação de um cilindro na Janela de Visualização 3D²⁰ do *software* GeoGebra, mobilizando, assim, a **apreensão perceptiva**, uma vez que temos acesso a diferentes unidades figurais. No caso da representação do cilindro, temos acesso a unidades de dimensão 2D (as elipses que são as bases do cilindro) e de dimensão 3D, no caso da representação plana do cilindro.

Como o objetivo de P1 é conduzir os estudantes à generalização da fórmula para calcular o volume do cilindro, seriam relevantes as intervenções de P1 e as explorações da construção realizada no *software* GeoGebra, a fim de possibilitar ao estudante a produção de significados para a fórmula do cálculo do volume, realizando uma aula de caráter exploratório.

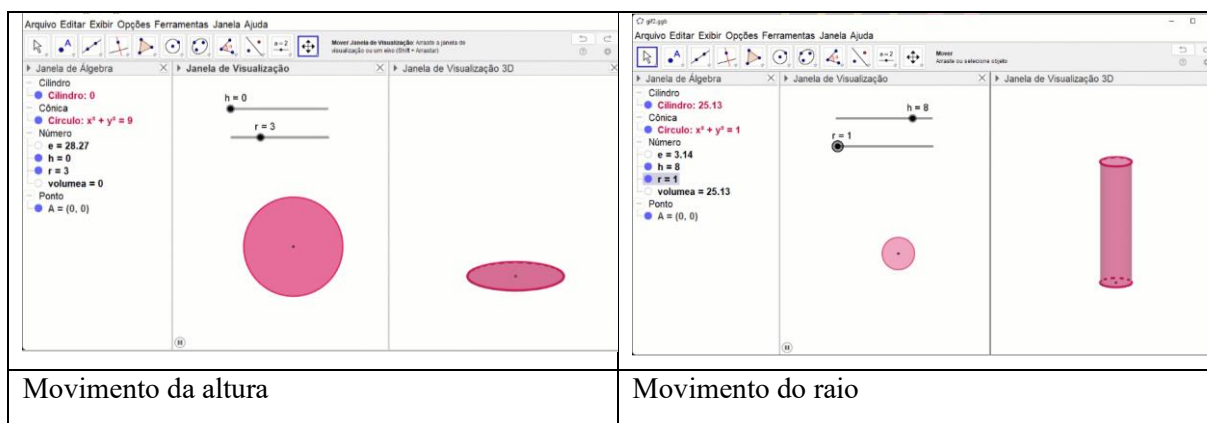
P1 ainda propõe uma abordagem com a representação do cilindro em material acrílico. Desse modo, os estudantes, a partir da primeira aula, teriam acesso a diferentes representações de um mesmo objeto matemático e poderiam compreender que o cilindro é formado por bases circulares, dado que terão comparado a representação do cilindro construído no *software* GeoGebra com a representação do cilindro em material acrílico.

A tarefa apresentada pelo professor P1 tem potencial para explorar identificação dos elementos que compõem o cilindro e o que ocorre com a medida de seu volume.

Figura 9: Manipulação dos controles deslizantes

¹⁹ A Janela de Visualização 2D por padrão apresenta o plano cartesiano, nela são apresentados os desenhos ou figuras que podem ser feitos pela entrada de comandos ou pela barra de ferramentas.

²⁰ A Janela de Visualização 3D é um conjunto de ferramentas para construir objetos, realizar movimentos e modificar propriedades de objetos (figuras espaciais).




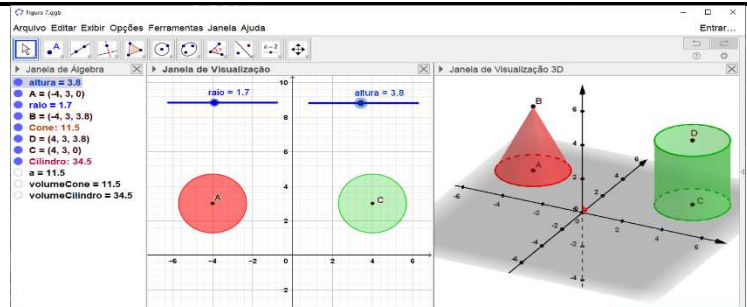
Fonte: Módulo 3 - 18ª Edição do Curso de GeoGebra.

Por exemplo, pode-se solicitar aos estudantes que alterem a medida do raio e a medida da altura e descrevam o que ocorre com a medida do volume, isso é possível por meio da manipulação dos *controles deslizantes* r e h . Desse modo a **apreensão operatória** pode ser mobilizada, possibilitando que os discentes observem que a altura do cilindro e a medida do volume foram alteradas. Após a exploração da altura, pode-se solicitar aos estudantes que manipulem o raio e observem o que ocorre na Janela de Visualização 2D com a área do círculo. Em relação à manipulação da altura, eles podem observar que a medida da área do círculo não sofrerá alteração. No entanto, ao alterar o raio não será tão intuitivo verificar a alteração da medida da área do círculo, dado que na Janela de Álgebra a medida da área do círculo não está nomeada como o que ocorre com a medida do volume do cilindro. Possivelmente os estudantes do 8º Ano do Ensino Fundamental já tenham, em algum momento do currículo escolar, alguma experiência com a unidade temática “Grandezas e Medidas”, porém pode ser necessário que P1 retome conceitos de medir, comparar e estimar, mobilizando, assim, a **apreensão discursiva**. O *software* GeoGebra contribui com a visualização dos elementos do cilindro e a manipulação da representação, mas, no caso da representação do cilindro, não apresenta o recurso de planificação, como ocorre na representação de poliedros, e não faz distinção entre o conceito de volume e capacidade. A intervenção do professor é fundamental para que os estudantes percebam regularidades.

Produção escrita do P2

O professor P2 apresentou uma tarefa (Quadro 2) com o objetivo de abordar os volumes do cone e do cilindro. Desse modo, P2 evidenciou a relação entre o volume do cone e do cilindro de mesma base e mesma altura.

Quadro 2: Produção Escrita do P2

 Por PROFESSOR EM FORMAÇÃO 2 - sábado, 27 Fev 2021, 16:20	
Conteúdo: Sólidos Geométricos	
Ano de escolaridade:	8º Ano do Ensino Fundamental
Comentários do professor quanto ao desenvolvimento da tarefa em sala de aula	“[...] a proposta é que, após o professor apresentar e discutir com os alunos como se chega ao volume desses dois sólidos e realizar alguns cálculos, confirmar através desta construção a relação entre seus volumes, alterando os raios e alturas [...]” (P2).
Arquivo com a resolução proposta pelo professor por meio do software GeoGebra	

Fonte: Módulo 3 - 18ª Edição do Curso de GeoGebra.

A tarefa proposta pelo professor P2 pode permitir o reconhecimento das formas de dimensão 2D e 3D e, por conseguinte, favorece a mobilização da **apreensão perceptiva**. Por meio da Janela de Visualização 2D observamos dois círculos e na Janela de Visualização 3D, a representação de um cone na cor vermelha e a representação de um cilindro na cor verde.

O *software* GeoGebra não apresenta o recurso de planificação dessas representações, então, na janela de visualização 2D, só temos acesso à base dessas representações. Mediante a manipulação do *controle deslizante* nomeado por raio, o estudante poderá observar que as medidas dos volumes são alteradas, pois na Janela de Álgebra há duas legendas que estão vinculadas aos *controles deslizantes* que permitem verificar a medida do volume de cada sólido durante a manipulação do raio e da altura. No entanto, para o desenvolvimento da tarefa proposta, é necessário que se recorra à conhecimentos prévios como: cálculo da área do círculo e comparações entre grandezas, colaborando para a mobilização da **apreensão discursiva**.


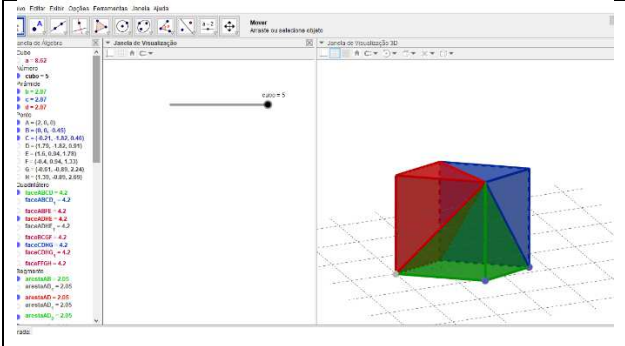
Para verificar os cálculos, mediante a construção, pode-se solicitar aos estudantes que explorem os *controles deslizantes* na Janela de Visualização 2D e observem o que ocorre com as medidas do volume do cilindro e do volume cone na Janela de Álgebra. Ao explorar os *controles deslizantes* (raio e altura), podemos partir da mesma ideia de P1, conduzindo à exploração da medida da área do círculo e da medida do volume do cilindro na Janela de Visualização 3D.

Em relação ao cone, é possível solicitar a exploração do *controle deslizante* do raio e da altura e observar o que ocorre na Janela de Visualização 2D com a área do círculo e na Janela de Visualização 3D. A partir disso, pode-se pedir ao estudante que descreva o que ele observa na Janela de Álgebra em relação às medidas dos volumes do cone e do cilindro que possuem legenda de suas medidas. O *software* GeoGebra contribui com a visualização de diferentes dimensões da figura geométrica e a tarefa elaborada por P2 poderia ser introdutória ao conteúdo, uma vez que apresenta potencial para a realização da generalização da fórmula do cálculo das medidas de volume. Evidentemente, a intervenção do professor é fundamental para que os estudantes possam compreender isso.

Produção escrita do P3

Para o módulo 3, o professor P3 apresentou uma tarefa (Quadro 3) que pede a demonstração da relação que há entre os volumes de um prisma (cubo) e três pirâmides. A tarefa é proposta para alunos do 9º Ano do Ensino Fundamental.

Quadro 3: Produção Escrita do P3

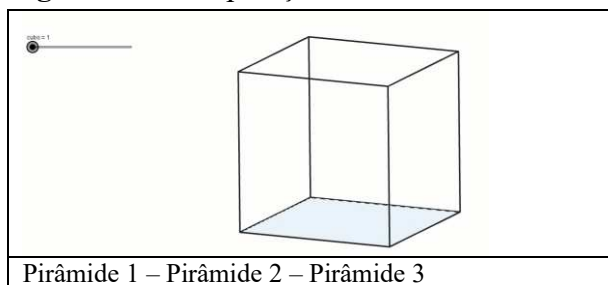
 Por PROFESSOR EM FORMAÇÃO 3 - sábado, 27 Feb 2021, 19:47	
Conteúdo: Sólidos Geométricos	
Ano de escolaridade:	9º Ano do Ensino Fundamental
Comentários do professor quanto ao desenvolvimento da tarefa em sala de aula	“(Penso que seja importante) levar um arquivo pronto para a sala de aula, projetar a tela do notebook e, enquanto é abordado itens importantes sobre volume de pirâmide, manipular o arquivo para mostrar o efeito gráfico para os estudantes. O arquivo contém a construção de um prisma e três pirâmides de mesma base e mesma altura, que serão controlados por um controle deslizante com o objetivo de visualizar a relação que há entre seus volumes, ou seja, a medida do volume da pirâmide corresponde a 1/3 da medida do volume do prisma com mesma base e altura [...]” (P3)
Arquivo com a resolução proposta pelo professor por meio do software GeoGebra	

Fonte: Módulo 3 - 18ª Edição do Curso de GeoGebra.

A tarefa proposta pelo professor P3 permite o reconhecimento da representação de um cubo, no qual as suas faces têm decomposição em triângulos de cores diferentes. Com um olhar cuidadoso, podemos identificar a forma de pirâmides inscritas nesse cubo, identificamos ainda as arestas e vértices e, por conseguinte, afirmamos que a **apreensão perceptiva** pode ser contemplada. Além disso, é possível decompor o cubo em três pirâmides, isso significa que é possível realizar uma operação de reconfiguração²¹.

O professor P3, com a tarefa proposta, tem como objetivo abordar a relação existente entre o volume de uma pirâmide e o volume de um prisma, ou seja, a ideia de que o cubo pode ser decomposto em três pirâmides. Na Figura 10, observamos a existência de apenas uma representação da pirâmide na cor verde, contudo, ao rotacionar a figura ou manipular o *controle deslizante*, é possível ter acesso as outras duas representações da pirâmide. Embora o *controle deslizante* esteja nomeado por cubo, este refere-se às três pirâmides inscritas ao cubo.

Figura 10: Manipulação do controle deslizante



Fonte: Módulo 3 - 18ª Edição do Curso de GeoGebra.


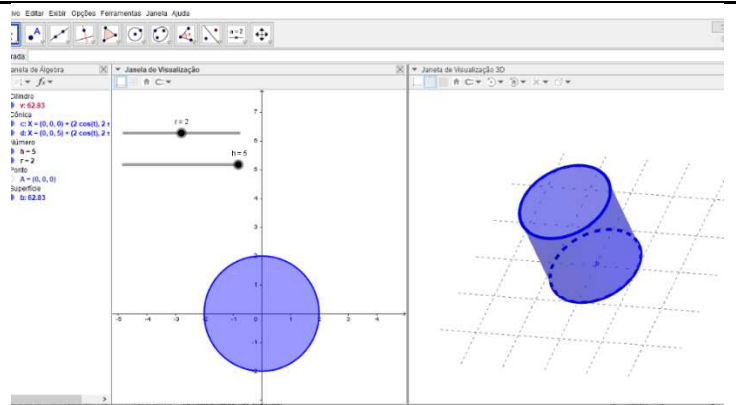
Ao explorar a tarefa, mediante o *controle deslizante*, pode-se solicitar aos estudantes que observem a Janela de Álgebra e descrevam o que pode ser inferido. Ao selecionar o *controle deslizante* “n” em 1, será possível visualizar uma pirâmide inscrita ao cubo e na Janela de Álgebra teremos a medida do volume da pirâmide que será a medida de um terço da medida do volume do cubo. Mas, ao selecionar o *controle deslizante* “n” em 2, será possível visualizar a segunda pirâmide inscrita ao cubo e, conseqüentemente, a medida do seu volume na Janela de Álgebra que também será um terço da medida do volume do cubo, sendo que ocorrerá o mesmo para a terceira pirâmide. Para que ocorra uma articulação entre a **apreensão operatória** e a **apreensão discursiva**, é fundamental que o estudante explore o *controle deslizante*, observe as alterações na Janela de Álgebra e retorne à proposta da tarefa, realizando comparações das grandezas. Por fim, com essa tarefa, é possível constatar que o *software* GeoGebra contribui com a visualização da decomposição do cubo em três pirâmides.

²¹ Para Duval (1995), a reconfiguração é uma operação que consiste em reorganizar a figura em várias subfiguras diferentes da figura dada.

Produção escrita do P4

O professor P4 apresentou uma tarefa e construção (Quadro 4) com a identificação de um cilindro oblíquo. P4 apresenta como objetivo da tarefa a abordagem do conteúdo de Volume do Cilindro, direcionado às turmas do Ensino Fundamental.

Quadro 4: Produção Escrita do P4

 Por PROFESSOR EM FORMAÇÃO 4 - sábado, 27 Fev 2021, 18:45	
Conteúdo: Sólidos Geométricos	
Ano de escolaridade:	Ensino Fundamental
Comentários do professor quanto ao desenvolvimento da tarefa em sala de aula	“[...]escolhi o cilindro que geralmente faço com papel e objetos relacionados como copo, rolo do papel toalha, latas entre outras [...] acredito que este exercício ajudará os alunos a visualizarem os elementos importantes como raio, altura, volume. Também os exercícios que se referem ao cilindro exigem conhecimento do círculo e circunferência [...]” (P4).
Arquivo com a resolução proposta pelo professor por meio do software GeoGebra	

Fonte: Módulo 3 - 18ª Edição do Curso de GeoGebra.

A tarefa proposta pelo professor P4 trata da representação de um círculo e a representação de um cilindro oblíquo. P4 declara que ao abordar esse conteúdo com a sua turma, normalmente, costuma utilizar objetos do cotidiano dos alunos, como, por exemplo, rolo de papel, latas e copos. No entanto, a tarefa apresentada por meio do *software* GeoGebra pode colaborar com a **visualização**.

O professor P4 demonstra uma inquietação quanto ao modo de “ver” de seus estudantes, ou seja, a maneira de visualizar as representações dos objetos tridimensionais. A visualização nos permite ir além da retina humana e criar a representação do objeto, então, para a realização da tarefa, são necessários conhecimentos prévios de círculo e circunferência.

Ao acessarmos a tarefa proposta por P4, na Janela de Visualização 2D vemos a

representação de um círculo e na Janela de Visualização 3D observamos a representação de um cilindro na projeção oblíquo. Nesse caso, é possível que a **apreensão perceptiva** seja a primeira a ser mobilizada. Essa apreensão nos permite a identificação e reconhecimento de formas.

Ao solicitar ao estudante que manipule os *controles deslizantes* (raio e altura), é possível a observação na Janela de Visualização 2D, a medida da área do círculo e a medida do volume do cilindro.

Os comentários de P4 demonstravam a intencionalidade de abordar elementos e o volume de um cilindro oblíquo a partir da tarefa elaborada. No entanto, a construção apresentada permitia a exploração de elementos e volume de um cilindro reto.

No caso da tarefa apresentada por P4 a geratriz é igual à altura do cilindro, ou seja, um cilindro circular reto. Para que o cilindro fosse classificado como oblíquo a sua geratriz deveria ser diferente da altura. A representação do cilindro apresentava-se oblíquo, pois a Janela de Visualização 3D possibilita utilizar o recurso inclinação do plano e esse recurso estava selecionado.


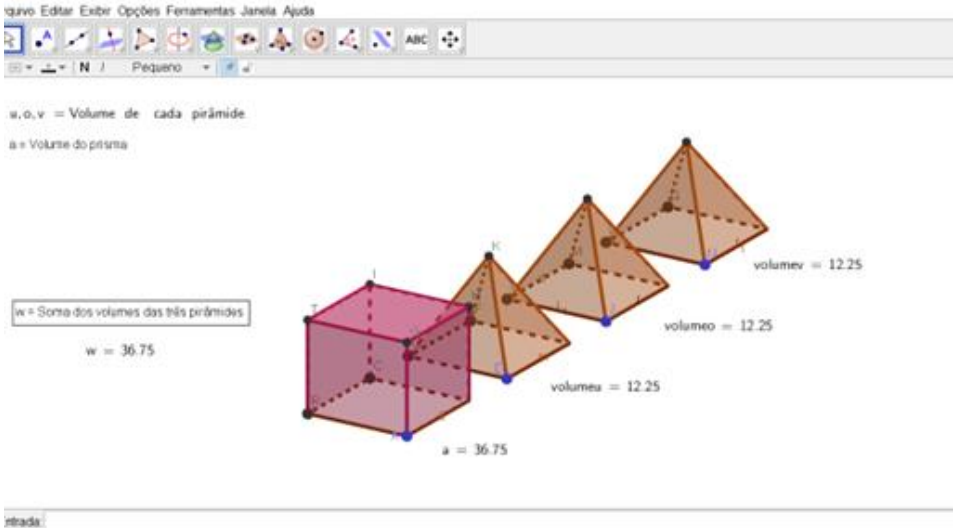
Durante a exploração, foi necessário recorrer às propriedades matemáticas e às hipóteses declaradas por P4 que permitem distinguir um cilindro oblíquo de um cilindro reto, ou seja, é necessária a mobilização de uma **apreensão discursiva**. Com base nos conhecimentos de cilindro oblíquo e cilindro reto, é possível verificar que entre a legenda da tarefa e a resolução não havia uma conformidade, dado que um cilindro oblíquo, de acordo com Souza (2021, p. 118) “é aquele cujas geratrizes são oblíquas ao plano que contém as bases”. Somente a exploração por meio da **apreensão operatória** não daria condições de encontrar a resolução do problema proposto por P4.

O P4 declara que, para que seja abordado o volume do cilindro e seus elementos, é necessário que os estudantes apresentem um conhecimento prévio quanto à circunferência e círculo, visto que, quando tratamos do cálculo da medida da circunferência, tratamos do perímetro dela. Já o cálculo da medida do círculo se refere à medida da área do círculo e o cilindro é composto por bases paralelas e uma área lateral que os conecta. Para o cálculo do volume, é necessário o cálculo da medida da área da base do cilindro e sua altura.

Produção escrita do P5

O professor P5 apresentou uma tarefa (Quadro 5). Trata-se da representação de um prisma e três pirâmides de mesma base e mesma altura. O objetivo de P5 com esta tarefa é demonstrar a relação existente entre o volume do prisma e o volume da pirâmide.

Quadro 5: Produção Escrita do P5

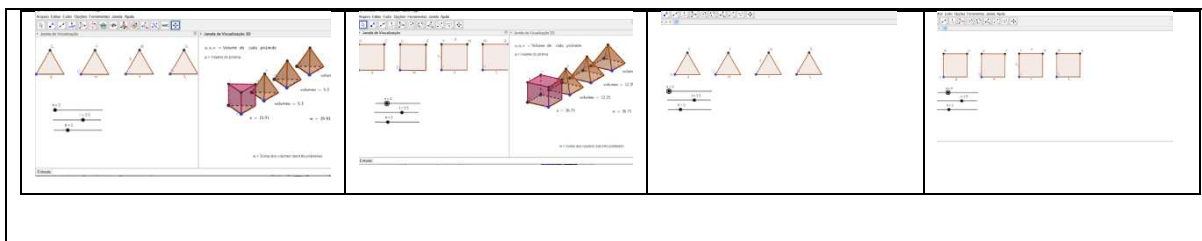
	Por PROFESSOR EM FORMAÇÃO 5 - domingo, 28 Fev 2021, 18:10
Conteúdo: Sólidos Geométricos	
Ano de escolaridade:	2º Ano do Ensino Médio
Comentários do professor quanto ao desenvolvimento da tarefa em sala de aula	“A proposta da atividade é a relação entre o volume de um prisma e o volume de uma pirâmide de mesma base e altura, de onde podemos extrair a generalização para cálculo de volume de pirâmides [...]” (P5).
Arquivo com a resolução proposta pelo professor por meio do software GeoGebra	

Fonte: Módulo 3 - 18ª Edição do Curso de GeoGebra.

A tarefa apresentada pelo professor P5 permite a identificação de polígonos regulares, manipulando o *controle deslizante* (n) referente ao número de lados do polígono da base, no caso podemos observar na Janela de Visualização 2D a representação de quatro triângulos. Ainda na Janela de Visualização 2D havia dois controles deslizantes referentes à altura e largura das representações.

Na Janela de Visualização 3D, observamos a representação de um prisma de base triangular, contudo, com a manipulação do *controle deslizante*, era possível ter acesso a representações de prismas e pirâmides de diferentes bases. Além disso apresentam uma legenda ao lado que representava a medida de seu volume.

Figura 11: Diferentes polígonos Janela de Visualização 2D e diferentes bases Janela de Visualização 3D



Fonte: Módulo 3 - 18ª Edição do Curso de GeoGebra.

É possível afirmar que a tarefa favorece a **apreensão perceptiva**, conduzindo-nos ao reconhecimento das formas. O reconhecimento de contornos fechados e formas 2D/3D a que se refere (a um triângulo ou quadrilátero) nas representações, de maneira geral, são unidades representativas que dizem respeito às figuras planas ou sólidos geométricos.

As três representações de pirâmides apresentavam, cada uma, legenda referente à medida do volume. Havia ainda a soma das medidas das três pirâmides, indicadas por w conforme podemos observar na figura do Quadro 5. Elas podem colaborar com os comentários do professor P5, que pretende apresentar a relação entre as medidas dos volumes do prisma e das pirâmides.

Devido às caixas de texto apresentadas ao lado de cada pirâmide e do prisma e ainda uma soma da medida do volume das três pirâmides, o estudante, ao manipular o *controle deslizante* com a intervenção do professor, poderia ter condições de perceber regularidades, como: as figuras dinâmicas possuem a mesma altura, o mesmo número de lados do polígono da base e a mesma largura e, ainda, observar a alteração das medidas do volume de cada pirâmide e a medida do volume do prisma. Diferentemente do que ocorre na tarefa proposta por P3, o professor P5 pode solicitar que os estudantes explorem os *controles deslizantes* e descrevam o que observam. Aqui as medidas do volume deveriam ser observadas na Janela de Álgebra.

É possível manipular e girar as construções podendo, assim, observar todas as faces e bases do prisma e das pirâmides, bem como suas arestas e vértices, sendo possível o acesso a diferentes dimensões da figura por meio da Janela de Visualização 3D. Temos, também, acesso ao polígono da base na Janela de Visualização 2D, dessa forma podemos afirmar que a **apreensão operatória** pode ser mobilizada, visto que é possível explorar diferentes unidades figurais da construção elaborada por P5.

Diferentemente de P5, P3 construiu as três pirâmides inscritas ao cubo, no qual a manipulação ocorria por meio do *controle deslizante* que somente possibilita a visualização das


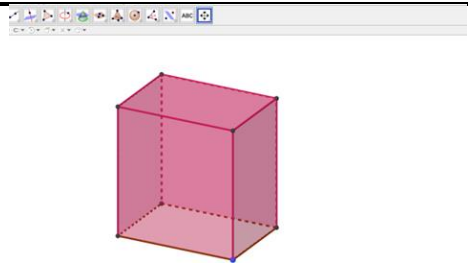
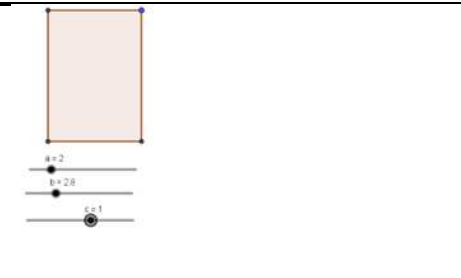
pirâmides de base quadrada e tanto a medida do volume do cubo quanto das pirâmides eram constantes.

O professor P5, em seus comentários, menciona que a exploração da tarefa pode possibilitar a generalização do cálculo do volume da pirâmide. Compreendemos que a construção pode contribuir para a proposta de P5, em virtude de a exploração dos *controles deslizantes* permitirem a investigação da altura, da largura e do número de lados do polígono da base. Embora, o recurso do GeoGebra seja relevante para o ensino e a visualização em Geometria, a intervenção do professor é fundamental para conduzir o estudante a uma aprendizagem significativa, visto que ele pode avaliar os conhecimentos prévios necessários para a realização de tal tarefa e os conhecimentos que serão adquiridos com a proposta da tarefa elaborada. A construção proposta por P5 pode conduzir o estudante à compreensão de que a relação entre a medida do volume do prisma e o volume da pirâmide de mesma base e mesma altura é três vezes a medida do volume de uma pirâmide.

Produção escrita do P6

Para a tarefa 3 – P6 apresentou uma tarefa (Quadro 6) direcionada aos alunos do Ensino Médio. O objetivo da tarefa proposta por P6 é abordar o estudo do Volume do Paralelepípedo.

Quadro 6: Produção Escrita do P6

 Por PROFESSOR EM FORMAÇÃO 6 - sábado, 27 Feb 2021, 11:20	
Conteúdo: Sólidos Geométricos	
Ano de escolaridade:	Ensino Médio
Comentários do professor quanto ao desenvolvimento da tarefa em sala de aula	“Na primeira atividade fiz a construção de um paralelepípedo usando controles deslizantes nas três dimensões com a proposta de mostrar para aos alunos, através da manipulação dos controles, que o volume do paralelepípedo é dado pela multiplicação dessas três dimensões”.
Arquivo com a resolução proposta pelo professor por meio do software GeoGebra	
	
	Janela de Visualização 3D
	Janela de Visualização 2D

Fonte: Módulo 3 - 18ª Edição do Curso de GeoGebra.

O professor P6 apresentou a tarefa 1 que tratava de uma representação de um paralelepípedo.

Ao acessar a tarefa 1 proposta por P6, observamos na Janela de Visualização 2D a representação de um quadrilátero e três *controles deslizantes* denominados a, b e c que representam, respectivamente, o comprimento, a largura e a altura. Na Janela de Visualização 3D, observamos a representação de um paralelepípedo. Compreendemos que a **apreensão perceptiva** é mobilizada, pois é possível o reconhecimento e a identificação de dimensões 2D/3D (forma reta fechada, sólidos geométricos com superfícies planas).


A construção elaborada por P6 apresenta medidas relacionadas a manipulação dos três *controles deslizantes* (comprimento, largura e altura). Desse modo, P6 poderá solicitar aos estudantes que explorem os *controles deslizantes* (comprimento, largura e altura) e descrevam o que ocorre com a medida do volume do paralelepípedo na Janela de Álgebra. Além disso, é possível ampliar ou reduzir a figura dinâmica, aspectos que dizem respeito à **apreensão operatória**. Com relação à **apreensão discursiva**, os estudantes terão que mobilizar conhecimentos prévios de grandeza.

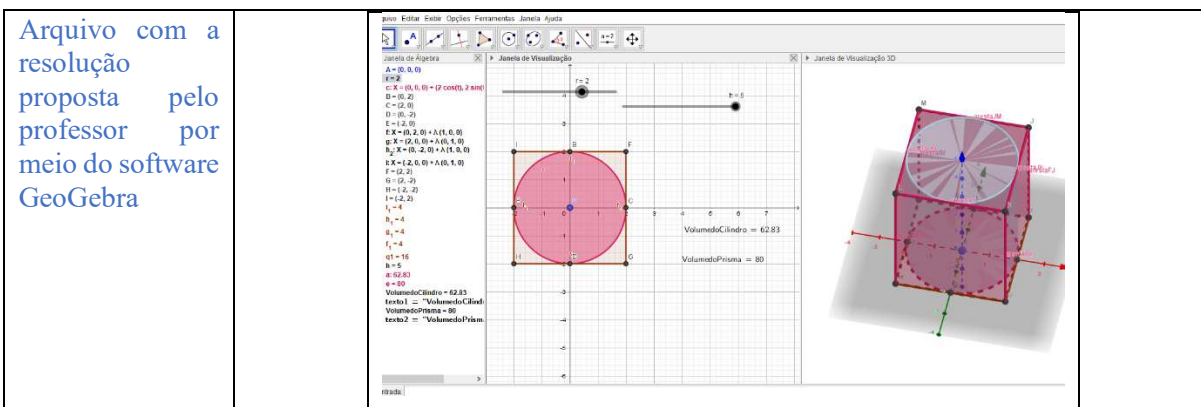
O P6 poderia ampliar a tarefa solicitando aos estudantes que observassem e realizassem a contagem das faces, vértices e arestas do paralelepípedo, realizassem o cálculo da área total, investigassem a forma das faces. Poderia, ainda, abordar com os estudantes que o paralelepípedo é um caso particular de prisma e que no cotidiano existem objetos com esta forma.

Produção escrita do P7

O professor P7 apresentou um cilindro inscrito em um prisma (Quadro 7). O objetivo de P7 com a tarefa apresentada era abordar os volumes do prisma e do cilindro.

Quadro 7: Produção Escrita do P7

 Por PROFESSOR EM FORMAÇÃO 7 - domingo, 28 Fev 2021, 18:00	
Conteúdo: Sólidos Geométricos	
Ano de escolaridade:	Não declarado pelo professor
Comentários do professor quanto ao desenvolvimento da tarefa em sala de aula	“Para o plano de aula: Aula 1: Determinar o volume de cada sólido separadamente; Aula 2: Fazer comparação dos volumes dos sólidos” (p7).



Fonte: Módulo 3 - 18ª Edição do Curso de GeoGebra.

Ao observarmos a tarefa proposta pelo professor P7, temos acesso a um cilindro reto inscrito em um prisma na Janela de Visualização 3D e na Janela de Visualização 2D observamos um círculo inscrito em um quadrado, bem como dois *controles deslizantes*, um referente ao raio do círculo e outro referente à altura, relacionados ao prisma e ao cilindro. É possível afirmar que a **apreensão perceptiva** é mobilizada, dado que identificamos os elementos dos sólidos geométricos, por exemplo, a aresta do prisma e seus vértices. Também identificamos o cilindro e suas bases. Na Janela de Visualização 2D temos ainda um texto referente à medida do volume do prisma e outro referente à medida do volume do cilindro que estão vinculados à manipulação dos *controles deslizantes*.

O professor P7 declara que pretende determinar o volume de cada sólido separadamente e ainda comparar o volume dos dois sólidos. Ao visualizar a construção, já é possível observar que os sólidos não têm a mesma medida de volume. A partir da manipulação dos *controles deslizantes* e do texto disponível na Janela de Visualização 2D, é possível confirmar que os sólidos de fato não possuem o mesmo volume. Ademais, para que seja realizada uma investigação que vá ao encontro do objetivo de P7, compreendemos que é necessário um conhecimento prévio do cálculo das medidas das áreas das bases dos sólidos, sendo fundamental recorrer às hipóteses do enunciado, para que possa ser mobilizada a **apreensão discursiva**.

A **apreensão operatória**, no caso da tarefa de P7, é caracterizada somente pela manipulação dos *controles deslizantes* e explorações da Janela de Álgebra, visto que nenhuma modificação pode ser realizada na figura inicial a fim de encontrar a solução do problema.

O professor P7 naquele momento tinha como objetivo determinar e comparar as medidas dos volumes desses sólidos geométricos. Como sugestão para a ampliação da tarefa de P7, poderia ser solicitado aos estudantes que observassem e descrevessem as semelhanças e diferenças entre o prisma e o cilindro e classificassem esses sólidos geométricos, com isso

estaria possibilitando a apreensão **perceptiva e discursiva**.

Nesta próxima seção serão apresentados os resultados e as reflexões quanto às potencialidades das tarefas para a mobilização das **apreensões perceptiva, discursiva, operatória**, a partir da lente teórica de Raymond Duval.

POTENCIALIDADES DAS TAREFAS PARA VISUALIZAÇÃO EM GEOMETRIA

As tarefas produzidas têm potencialidades que podem contribuir para a visualização do volume de diferentes sólidos geométricos envolvendo o *software* GeoGebra, contribuindo, assim, para a **visualização** em geometria.

Essas tarefas permitem tanto ao aluno quanto ao professor ter acesso a diferentes unidades figurais, dimensões de uma figura, reconhecer formas 2D, 3D, reconhecer a representação de um poliedro e não poliedros, identificar os vértices, as faces, as arestas dos poliedros, identificar polígonos distintos e, ainda, identificar as semelhanças e diferenças entre prismas e cilindros, prismas e pirâmides, além de classificar os sólidos geométricos a partir de características observadas (poliedros e não poliedros), desse modo pode-se mobilizar a apreensão perceptiva.

Em relação a uma figura geométrica, não significa que não existam variáveis visuais que possam contribuir para a leitura dela (DUVAL,1995,1998), embora apresente menos variáveis visuais que um gráfico, em virtude de este apresentar cor, orientação, tamanho, proporcionalidade entre os dados numéricos que pode ser concernente a uma situação econômica, demográfica e outras. A cor, por exemplo, pode ser um aspecto relevante no caso das figuras que representam objetos no espaço. Já se tratando dos aspectos visuais, ressaltamos que a tarefa elaborada por P2 deixava mais evidente as representações do cone e do cilindro devido às cores utilizadas, diferentemente do que ocorreu com as pirâmides inscritas ao cubo de P3 e com o cilindro inscrito ao prisma de P7.

Além dos aspectos visuais, uma figura pode ser explorada de maneira que possa dar a ideia ou caminho para a resolução de um problema, como no caso dos cilindros propostos por P2 e P4. A partir dessas tarefas, temos acesso a uma figura plana na Janela de Visualização, as medidas da área e do volume na Janela de Álgebra e acesso à própria representação do cilindro na Janela de Visualização 3D. Dessa maneira é possível estabelecer a relação entre as medidas da área da figura plana e a medida do volume do cilindro. Nessa capacidade reside a produtividade heurística de uma figura, conforme afirma Duval (1995). Isso significa que existem conexões entre as apreensões perceptiva, discursiva e operatória que ocorrem no processo de visualização e que são realizadas por uma exploração heurística.

A **apreensão operatória** se apresenta na medida em que é possível explorar a heurística de diferentes figuras geométricas, explorar dimensões 2D e 3D de uma figura e diferentes unidades figurais. A partir dessa exploração, pode-se realizar generalizações e encontrar possíveis soluções de um problema, como calcular volume dos sólidos geométricos.

As tarefas apresentadas por P4 e P7, o cilindro oblíquo e o cilindro inscrito ao prisma, exigem retomadas nas indicações do enunciado e nas propriedades matemáticas para que ocorra uma interpretação discursiva da figura geométrica. É preciso olhar para a figura abandonando a **apreensão perceptiva**, visto que uma figura é analisada pela declaração ou hipóteses e não apenas pelo que está visível na figura. Isso significa que as propriedades matemáticas contidas em uma figura não são determinadas por uma simples observação visual. Desse modo, compreendemos que **apreensão discursiva** é mobilizada, quando é possível verificar as propriedades matemáticas a partir da proposta do enunciado.

Nesse sentido, a visualização assume um papel importante quando tratamos das apreensões geométricas propostas por Raymond Duval. A visualização para esse autor diz respeito às **apreensões perceptiva, discursiva e operatória** (DUVAL, 1999).

É importante ressaltar que o *software* GeoGebra contribui para a visualização, dado que uma de suas características é proporcionar as representações algébricas e geométricas de um mesmo objeto. Logo, ao representarmos um sólido geométrico na Janela de Visualização 3D, teremos acesso a uma representação de um polígono (base) desse sólido geométrico na Janela de Visualização e uma representação algébrica na janela de álgebra que permite realizar explorações.

No caso das tarefas investigadas, as figuras geométricas foram produzidas para ilustrar uma situação e, a partir das descrições dos professores de como seriam exploradas, é possível adentrar no processo discursivo, visto que as tarefas não apresentam um enunciado conforme a Ação Formativa solicitava. A Ação Formativa solicitava aos participantes em formação que elaborassem uma tarefa (enunciado e construção realizada no *software* GeoGebra) a partir de um conteúdo voltado para o ensino da Geometria, isso significa que para além das construções de figuras utilizando o *software* GeoGebra, os participantes deveriam escolher o conteúdo a ser ministrado, planejar a aula, elaborar o enunciado da tarefa e realizar a construção que seria trabalhada em sala de aula.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

No contexto de nossa investigação, compreendemos que a visualização é um processo necessário para a compreensão do conceito de volume, pois, em muitos casos, o estudante terá

que fazer uso de representações planas dos objetos tridimensionais, isso ocorre devido a uma figura ser composta por ao menos duas unidades figurais elementares. Portanto, as tarefas elaboradas no *software* GeoGebra, as figuras tridimensionais, favorecem a apreensão dos conceitos geométricos na medida em que é possível explorar, investigar as propriedades e visualizar as figuras geométricas de modo dinâmico.

A partir da manipulação, possibilitando girar as figuras geométricas dinâmicas, tanto professores quanto alunos podem acessar formas e realizar conexões entre as propriedades e o modelo construído para representar o objeto matemático.

Entende-se que a **visualização** no contexto geométrico é muito relevante para o estudante. Ainda que a **visualização** seja independente da construção, conforme Duval (1998), o professor, ao construir uma figura geométrica no *software* GeoGebra, no qual é possível manter as propriedades geométricas, possibilita ao estudante explorar e acessar os elementos de um poliedro, contribuindo para a escolha de um tratamento matemático possível.

A **visualização** permite um estudo heurístico das figuras geométricas, em virtude dessas se apresentarem como representando um objeto matemático. As figuras geométricas elaboradas funcionam como um modelo, visto que mantêm as propriedades matemáticas e permitem realizar explorações e explicações.

O processo de visualização possibilita ao estudante interagir com as representações, alterar suas medidas, verificar propriedades, explorar conceitos etc. Para Duval (2009), a distinção entre um desenho e uma figura geométrica no papel ou no computador está no fato de uma figura representar as propriedades do objeto. Esse processo envolve as articulações entre as **apreensões perceptiva, operatória, discursiva**. Contudo, em nossa investigação compreendemos que a apreensão sequencial é necessária neste processo.

Com a mediação do professor, os alunos podem constituir os conceitos existentes entre as figuras planas e espaciais. As tarefas elaboradas no *software* GeoGebra permitem acesso a diferentes representações de um mesmo objeto matemático, uma vez que as figuras geométricas são sempre uma combinação de diferentes dimensões (0D,1D,2D,3D), e permitem acesso a dimensões inferiores como 0D/1D (arestas, vértices, pontos e segmentos).

REFERÊNCIAS

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEB, 2018, 600p.

BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEE, 1997.

BRUNHEIRA, L; PONTE, J. P. Da. Justificando Generalizações Geométricas na Formação Inicial de Professores dos Primeiros Anos. **Boletim de Educação Matemática -Bolema**, Rio Claro, v. 33, ed. 63, p. 88-108, 2019.

COSTA NÓBRIGA, J. C. GGBOOK: uma plataforma que integra o software de geometria dinâmica Geogebra com editor de texto e equações a fim de permitir a construção de narrativas matemáticas dinâmicas. 2015. 246 p. **Tese** (Doutorado em educação) - Universidade de Brasília Faculdade de Educação Programa de Pós-Graduação em Educação, [S. l.], 2015.

DUVAL, R. Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. **Repères**, n.17, p.121-138, 1994.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Bern: Peter Lang, 1995a.

DUVAL, R. Geometry from a Cognitive Point of View. In: MAMMANA, C.; VILLANI, (Orgs.). **Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century: an ICMI study**. Dordrecht: Kluwer, p. 37-52, 1998.

DUVAL, R. Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. In: HITT, F.; SANTOS, M. (ed.). **Proceeding of the 21st Annual Meeting of the 228 North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Mexico, p. 3-26, oct., 1999.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Mércles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Matemática - Revemat**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012b.

DUVAL, R. Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. In: PLUVINAGE, F. (dir.). **Annales de Didactique et Sciences Cognitives**, v. 10. Strasbourg: IREM, 2005. pp. 5-53.

GONÇALVES, T.D.C; FERREIRA, C.C; FERREIRA, V.L.D; MENEGAIS, D.A.F.N. Identificação de Lacunas no processo de aprendizagem dos conteúdos de Geometria no ensino médio pelo método de Van Hiele. **Revista Eletrônica de Matemática - REMAT**, v. 15, p. 01-20, 2020.

GRAVINA, M. A. O POTENCIAL SEMIÓTICO DO GEOGEBRA NA APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA: UMA EXPERIÊNCIA ILUSTRATIVA. **Vydia**. Santa Maria, v. 35, n. 2, p. 237-253, 2015.

KUHN, M. C; QUADROS, B. M. De. Geometria nos Anos Iniciais: Possíveis Conexões Teóricas e Práticas. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 13, p. 246-254, 2020.

LECRER, O. P. V. G.; PAZUCH, V. Reflexão sobre o processo de elaboração de tarefas de geometria espacial em um movimento formativo de professores. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - Rematec**, Belém, v. 16, ed. 37, p. 97-122, 2021.

MARQUES, V. D; CALDEIRA, C. R. Da. C. Dificuldades e carências na aprendizagem da Matemática do Ensino Fundamental e suas implicações no conhecimento da

Geometria. **Revista Thema**, [s. l.], v. 15, ed. 2, 2018.

MINÉ, V. A. Do. A; DOS PASSOS PEREIRA, M. R. Políticas públicas na formação continuada para o ensino de geometria. **Roteiro, Joaçaba**, v. 46, 2021.

PAVANELLO, R. M; COSTA, L. P. Da; VERRENGIA, S. R. D'a. Geometria e Educação Infantil: Entre a Pesquisa, o Desenvolvimento de Materiais de Ensino e a Formação Continuada de Professoras. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 13, p. 238-245, 2020.

PEREIRA DA COSTA, A. Pensamento geométrico: em busca de uma caracterização à luz de Fischbein, Duval e Pais. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 9, n. 18, p. 152-179, 26 jun. 2020.

PEREIRA DA COSTA, A.; SANTOS, M. R. d. Pensamento geométrico na licenciatura em Matemática: uma análise à luz de Duval e Van-Hiele. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 10, p. 1-20, 2020.

ROSA, Maria. C; SOUZA, D. Da S; SANTOS, N. M. S. Formação continuada de professores de matemática e o ensino de geometria: um panorama das pesquisas dos últimos anos. **Educação Matemática e Pesquisa**, v. 22, ed. 2, p. 635-657, 2020.

STIEGELMEIER, E. W.; MARTHOS, S. R. D'a; BRESSAN, G. M. O contexto da geometria no âmbito escolar: concepções e implicações na formação docente. **Revista Eletrônica de Matemática - REMAT**, v. 5, p. 25-40, 2019.

ARTIGO/CAPÍTULO 3

VISUALIZAÇÃO E DISCURSO EM GEOMETRIA: UMA ANÁLISE DE TAREFAS PROPOSTAS POR PROFESSORES EM UMA AÇÃO FORMATIVA ENVOLVENDO O *SOFTWARE* GEOGEBRA

Resumo: O objetivo do presente artigo é “discutir a articulação entre visualização e o discurso evidenciados nas tarefas propostas por professores de matemática em uma Ação Formativa envolvendo o *software* GeoGebra”. Para tanto, foi realizada uma investigação qualitativa de cunho interpretativo da produção escrita de quatro professores de matemática que apresentaram, em uma plataforma virtual de um curso de formação de professores on-line envolvendo o GeoGebra, tarefas que envolvem sólidos geométricos. Os resultados evidenciam que as tarefas propostas pelos professores em formação, de modo geral, permitem o acesso a um tipo de visualização não icônica, a realização de uma desconstrução dimensional, visto que as quatro tarefas apresentam as planificações das representações, o que pode contribuir para a visualização de unidades figurais de dimensões inferiores 1D/0D (arestas, vértices, segmentos e pontos), ou seja, articulações entre diferentes registros de representação como registro figural e registro discursivo, articulação entre a visualização e o discursivo. Com isso, destaca-se a relevância da proposição de tarefas no *software* GeoGebra que estimulem aos estudantes à exploração de elementos que compõem uma figura geométrica e a tarefas que estabelecem a relação entre a visualização e o discurso. Processos cognitivos considerados fundamentais para a aprendizagem geométrica.

Palavras-chave: Visualização icônica e visualização não icônica, olhares botanista, agrimensor, construtor e inventor, Formação de professores de Matemática, *Software* GeoGebra, Tarefas Matemáticas.

INTRODUÇÃO

No âmbito da Educação Matemática, o ensino da Geometria se apresenta como foco de discussões entre educadores matemáticos e formadores, visto que avaliações externas à escola, como o Programa Internacional de Avaliação de Alunos - PISA e o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica - SAEB, demonstram dificuldades de estudantes quando se refere às atividades de Geometria. De acordo com Frantz e Bisogin (2022) e o relatório Brasil no PISA (2018-2019), na prova do PISA (uma avaliação internacional coordenada no Brasil pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – INEP), entre as categorias de conteúdos matemáticos avaliados na edição da prova de 2018, o desempenho mais problemático foi relativo ao conteúdo de espaço e forma. Estudantes demonstraram dificuldades em reconhecer formas que não sejam elementares e a representação de um triângulo que não esteja em posição comumente utilizada nos livros didáticos, ou seja, com o vértice no topo e base na horizontal.

De acordo com Pavanello, Da Costa e Verrengia (2020), muitas das dificuldades de aprendizagem da Geometria no Brasil, manifestadas por estudantes da Educação Básica, se devem ao fato de que o seu ensino teve, durante anos, uma característica essencialmente axiomática ou tenha sido preterido no currículo escolar. Algumas dessas dificuldades também

são observadas junto a professores em processo de formação continuada, que buscam complementar a “defasagem” de sua formação inicial.

Nesse sentido, consideramos a necessidade de políticas públicas e espaços direcionados à formação continuada de professores que permitam reflexões quanto às suas práticas e ressignificações de conteúdos geométricos (GONÇALVES *et al.* 2020; KUHN; QUADROS, 2020; LECRER; PAZUCH, 2021; MARQUES; CALDEIRA, 2018; NÓVOA, 2019; SILVA, 2020).

Aliado à formação de professores, o uso das tecnologias digitais tem se destacado como um recurso didático profícuo para o ensino da Geometria, dado que eles possibilitam aos estudantes a experiência de construir, movimentar e girar as representações dos objetos geométricos.

Leivas *et al.* (2018) apontam em seu estudo que o uso das tecnologias como o *software* GeoGebra proporciona a experiência com conceitos de geometria em suas diferentes formas de representação, permitindo recordar, fixar e descobrir conceitos elementares, além de estimular a visualização e a aprendizagem. Nesse sentido, o *software* GeoGebra tem se apresentado como um recurso didático que possibilita a investigação de elementos que constituem uma figura geométrica e pode dar entrada em um tipo de visualização que ultrapassa o simples reconhecimento de formas elementares.

O *software* GeoGebra oportuniza ao estudante a obtenção de representações dos objetos geométricos na tela por meio da exploração de relações algébricas (GRAVINA E SELBACH, 2020). Isso pode contribuir para a compreensão em matemática, pois, segundo Duval (2022), tal compreensão se inicia ao realizarmos a distinção de objetos matemáticos de suas representações, visto que há uma diversidade de representações para um mesmo objeto matemático. Duval explica que “os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva” (2022, p. 268). Esses objetos só são acessíveis por meio de representações semióticas.

Pesquisas que abordam perspectivas quanto ao uso das tecnologias digitais em Geometria, como no caso do *software* GeoGebra, afirmam que esses ambientes proporcionam novos objetivos de aprendizagem, permitindo a exploração e experimentação. Ademais, apresentam contribuições no que diz respeito à visualização, visto que o *software* permite a exploração de diferentes representações dos objetos geométricos (GRAVINA; SELBACH, 2020; GRAVINA, 2015; OLIVEIRA; VITOLO; SILVA, 2019).

Para Duval (2015), os *softwares* se tornaram um recurso cada vez mais importante no ensino, pois permitem a produção de figuras geométricas, possibilitando a modificação de uma

figura inicial e contribuindo para a visualização do que permanece invariante nas figuras. Aquilo que permanece invariante corresponde à estrutura que não é modificável na configuração, como as propriedades geométricas.

No contexto do ensino e da aprendizagem da Geometria, a visualização desempenha um papel fundamental para a exploração de uma figura geométrica, seguida de uma descrição para orientar a escolha de procedimentos de resolução. Nesse sentido, visando compreender o papel da visualização e do discurso em uma atividade geométrica e suas implicações no ensino de Geometria, o presente artigo tem como objetivo “*discutir a articulação entre visualização e o discurso evidenciados nas tarefas propostas por professores de matemática em uma ação formativa envolvendo o software GeoGebra*”.

Para tanto, investigamos as ações de quatro professores em um ambiente de formação *on-line* denominado “Curso de GeoGebra”, em sua 18ª Edição. Esse curso é realizado com objetivo de formar professores para o uso do *software GeoGebra*, além de promover um ambiente de interações e fomentar discussões entre professores de diversas regiões do Brasil.

Tendo em vista o que foi discutido até o momento, nas seções que seguem apresentamos as figuras geométricas no ensino de Geometria e a perspectiva de Duval quanto à articulação entre a visualização e o discurso, os encaminhamentos metodológicos, as articulações entre a visualização e o discurso presentes em tarefas envolvendo sólidos geométricos e as considerações finais.

FIGURAS GEOMÉTRICAS NO ENSINO DE GEOMETRIA E A PERSPECTIVA DE DUVAL QUANTO À ARTICULAÇÃO ENTRE VISUALIZAÇÃO E O DISCURSO

Duval (1995) explica que no ensino da Geometria as figuras geométricas se destacam por oferecer um suporte intuitivo aos indivíduos, uma vez que essas permitem “ver” além das afirmações constatadas. Para Van de Walle (2009), a intuição trata-se de uma sensibilidade sobre as formas definidas como senso espacial. Os indivíduos que possuem o senso espacial ou “tato” têm maior sensibilidade aos aspectos geométricos de seu ambiente.

Ao ver a representação geométrica de um quadrado ou a representação de um triângulo, o que fica mais evidente em um primeiro momento é o tamanho, a cor e a forma. Conforme Duval (2022, p.7), “o reconhecimento de propriedades ‘puramente qualitativas’ parece estar diretamente enraizado na percepção”.

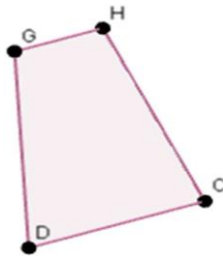
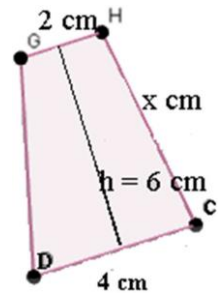
Para Duval

a dissociação entre as operações que constituem o ato de ver é tanto mais necessária quanto pode haver um conflito entre o reconhecimento das formas pela simples semelhança com um exemplo padrão e a identificação do objeto a que corresponde a forma reconhecida. Pois as relações constitutivas dos objetos não são propriedades

cuja presença pode ser determinada à primeira. A visão só permite as relações entre duas unidades figurativas, uma estimativa perceptual sujeita à ilusão e com estreitos limiares de discernibilidade (2022, p.13).

Muitas vezes as figuras geométricas costumam gerar uma não compreensão por parte do estudante quando envolvem dois registros de representações: um registro discursivo e um registro não discursivo, dos quais as figuras geométricas fazem parte. Isso significa que as tarefas em Geometria podem dispor de uma descrição (um enunciado em língua natural) e um registro não discursivo que se referem a registros figurais, como nas tarefas apresentadas da Quadro 1.

Quadro 1: Registros de representação semiótica do tronco de pirâmide quadrangular

	Representações Discursivas	Representações Não Discursivas
Registros Multifuncionais: os tratamentos não são algoritmizáveis.	Registro ¹ em Língua Natural (designação, enunciação e raciocínio): Exemplo: construa um tronco de pirâmide, seguindo as instruções: construa um polígono quadrangular ABDC no plano, trace as diagonais e, na interseção das diagonais, trace uma reta perpendicular. Num plano paralelo e não coincidente à base, construa um polígono quadrangular EFGH, de modo que a interseção das diagonais desse polígono pertença à reta perpendicular. Determine AEFBA, DGFB, CHGD, AEHC, regiões poligonais que, juntamente com a região poligonal ABCD e a EFGH, formam o poliedro chamado Tronco de Pirâmide Quadrangular.	Registro Figurais 3D: Registro Figurais 2D: 
Registros Monofuncionais: os tratamentos	Registro Algébrico: Exemplo: fórmula para calcular a área de uma face lateral.	Esquema: 

são principalmente algoritmizáveis.	$A_{\text{trapézio}} = \frac{(B + b) \times h}{2}$
	Registro Numérico (natural, inteiro, racional, irracional): $A_{\text{trapézio}} = \frac{(4 + 2) \times 6}{2} =$ $= \frac{(6) \times 6}{2} = \frac{36}{2} = 18$

Fonte: Leivas (2018, p. 5)

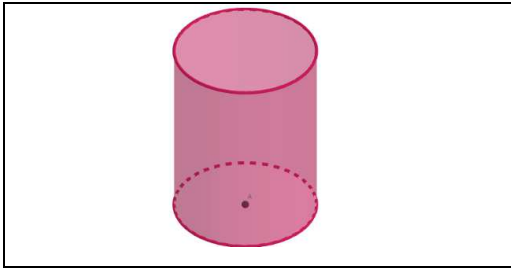
Duval (2011) afirma que uma figura (ou uma imagem) não fala por si só. A tarefa solicitada pode definir a relação com a figura geométrica, ou seja, a atividade a ser mobilizada depende de uma descrição que possa conduzir a compreensão dos conceitos e direcionar para uma possível solução da tarefa. Ao explorar uma figura, devemos ter em mente a que discurso ela deve estar associada, uma vez que a descrição ocorre antes de mobilizar qualquer tipo de raciocínio.

Segundo Duval (1995), perguntas que surgem a respeito da natureza da linguagem, que papel está exercendo no funcionamento do pensamento e sobre a aprendizagem em sala de aula, devem ser abordadas a partir das variedades de discursos existentes, da linguagem natural, do uso de símbolos e das linguagens formais. Duval explica que “o discurso é o emprego de uma língua para dizer alguma coisa, é dizer, para falar de objetos físicos, ideais ou imaginários, que não são somente as potencialidades significantes de uma língua” (1995, pg. 122, tradução nossa). Para ele, torna-se impossível a separação do discurso do funcionamento cognitivo.

Para que um discurso se torne possível, de acordo com Duval (1995), as funções discursivas se apresentam como funções cognitivas em um sistema semiótico. Nesse sentido são cumpridas quatro funções discursivas que permitem que o discurso se torne possível: descrever objetos, descrever alguma coisa sobre os objetos a partir de uma proposição enunciada, vincular uma proposição enunciada a outras realizando inferências e identificar valores, modos.

Uma figura geométrica, por exemplo, necessita de um enunciado, pois, de acordo com Duval (2022), ela pode representar situações diferentes a depender da tarefa solicitada, ou seja, é a tarefa (o seu enunciado) que determinará a relação com a figura. Uma figura sem enunciado (ou sem uma descrição) pode não determinar as propriedades que conduzirão à resolução de um problema, como pode ser observado na Figura 1.

Figura 1: Cilindro



Fonte: 18ª edição do Curso de GeoGebra

A Figura 1 não possui um enunciado ou a discriminação das medidas da representação do sólido geométrico, ou seja, não é possível saber qual a tarefa a ser resolvida. A Figura 1 pode ser descrita como a representação de um cilindro, contudo, não temos mais informações que permitam a identificação das propriedades que regem esse cilindro, se ele é um cilindro reto, se é um cilindro equilátero, por exemplo. No entanto, com conhecimentos que adquirimos ao longo de nossa vida somos capazes de reconhecer uma forma cilíndrica, o que poderia ser diferente com o caso de uma criança que ainda não possui tal experiência.

De acordo com Duval (2003), os registros discursivos que envolvem uma declaração verbal ou o funcionamento do processo de descrição podem envolver registros discursivos e não discursivos (mapas, diagramas, planos, figuras) visto que a declaração verbal pode nos permitir visualizar o que está sendo descrito. Ainda a descrição ocorre antes de qualquer raciocínio. Para esse autor, descrever mobiliza dois registros de representações distintos e abrange situações como transmissão de informações e observação.

Com o objetivo de demonstrar como os processos de descrição ocorrem no funcionamento cognitivo, Duval (2003) apresenta dois exemplos fora da matemática. Um primeiro exemplo clássico ocorre quando você está em uma cidade a passeio e solicita uma informação de algum morador local a respeito de algum lugar em que precisa chegar. Podem ocorrer duas possibilidades: a explicação ser apenas verbal com alguns gestos com a intencionalidade de apontar a direção que você deve seguir ou essa pessoa pode construir um esboço, “mapa”, para que você possa segui-lo. Um segundo exemplo mais relacionado com o ensino pode ser considerado com apresentação aos alunos do 7º ano de questões relacionadas com a existência física do ar. Como o professor pode descrever as propriedades físicas que não são perceptíveis? Nesse caso, o processo de descrição é fundamental para o funcionamento cognitivo.

por exemplo, tomamos uma garrafa de plástico vazia e um balão inflável preso à boca, como os distribuídos em festas: a garrafa é comprimida e o volume do balão cresce. Nesta situação de observação, há um ponto crucial para a própria atividade de descoberta: a observação do fenômeno para os propósitos de interpretação ou explicação, envolve a descrição da manipulação. Essa descrição pode ser verbal (oralmente ou registrada por escrito), mas também pode ser também pode ser feito

usando um chamado desenho de “observação”. A função desta descrição é tanto para focar a atenção nos dois dados observáveis dessa manipulação e registrá-los: a redução do volume da garrafa e aumentando o volume do balão (DUVAL, 2003, p.18, tradução nossa).

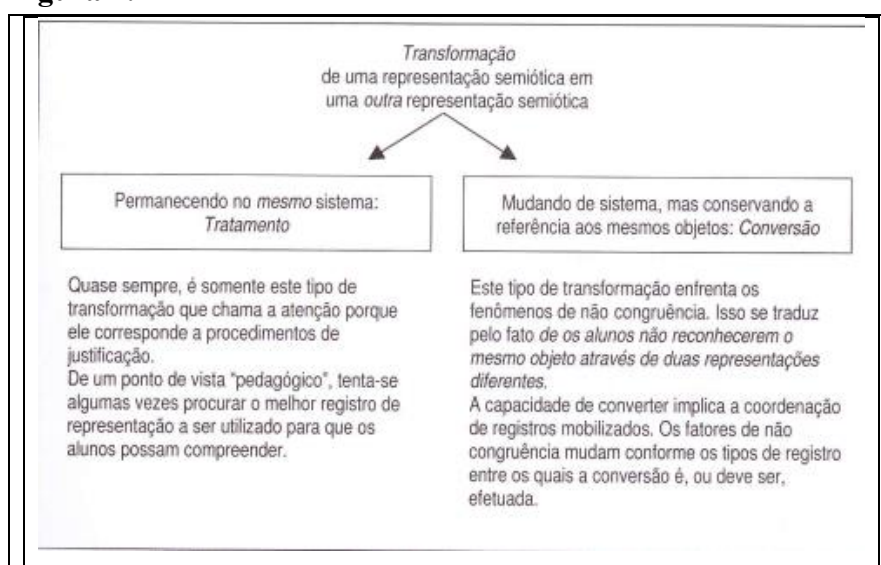
No caso do ensino da Geometria, um dos desafios a ser vencido é ultrapassar os obstáculos que muitas vezes surgem por meio da percepção, permitindo o reconhecimento e a caracterização de propriedades de uma figura geométrica. A percepção é caracterizada como a habilidade responsável pela identificação e reconhecimento por meio dos nossos sentidos.

A capacidade de ver e interpretar as informações que chegam aos nossos olhos refere-se à percepção visual. Por outro lado, apenas a percepção visual não nos permite acessar os elementos dos polígonos (segmentos, pontos e ângulos), visto que a visão somente autoriza as relações entre duas unidades figurativas.

Duval explica que “a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação” (2003, p. 14).

De acordo com Duval (1995), as atividades cognitivas estão vinculadas a um sistema de representação semiótica produzido pela **semiose** e há dois tipos de transformações dessas representações semióticas que são relevantes para a análise de atividades de matemática em uma perspectiva de ensino e aprendizagem, Duval (2003) se refere ao tratamento e conversão.

Figura 2: Tratamento e conversão



Fonte: Duval (2003, p.15)

Nos casos de tratamentos, as transformações de representações ocorrem dentro de um mesmo registro. Nas conversões, as transformações das representações acontecem mudando de registro, mas conservando os objetos denotados, conforme podemos observar na Figura 3.

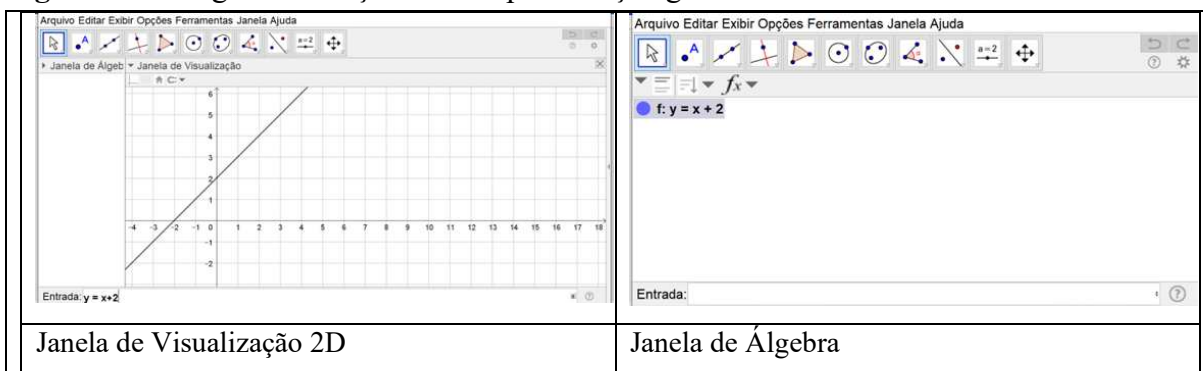
Figura 3: Exemplo de tratamento de conversão

<p>a) $0,25 + 0,25 = 0,5$ (representação decimal, tratamento decimal)</p> <p>b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ (representação fracionária, tratamento fracionário)</p>	<p>O preço a pagar por uma corrida de táxi depende da distância percorrida. A tarifa y é composta de duas partes: uma parte fixa denominada bandeirada e uma parte variável que depende do número x de quilômetros rodados. Suponha que a bandeirada esteja custando R\$ 2,00 e o quilômetro rodado, R\$ 0,50.</p> <p>1ª CONVERSÃO $y = 2 + 0,5x$</p> <p>2ª CONVERSÃO</p>
Tratamento	Conversão

Fonte: Pirola (2012, p.37).

O *software* GeoGebra pode ser um grande aliado ao ensino de Geometria e possibilitar a abordagem de tarefas que apresentem transformações relacionadas à conversão, como o exemplo da Figura 4, visto que, ao inserir na caixa de entrada a equação da função, teremos na Janela de Álgebra a sua representação algébrica e uma representação gráfica na Janela de Visualização 2D conforme (Figura 4). De acordo com Oliveira *et al.* (2019, p.621), “ao inserir ou modificar as representações algébricas na janela de álgebra é imediatamente visível a alteração das construções geométricas na janela de visualização”.

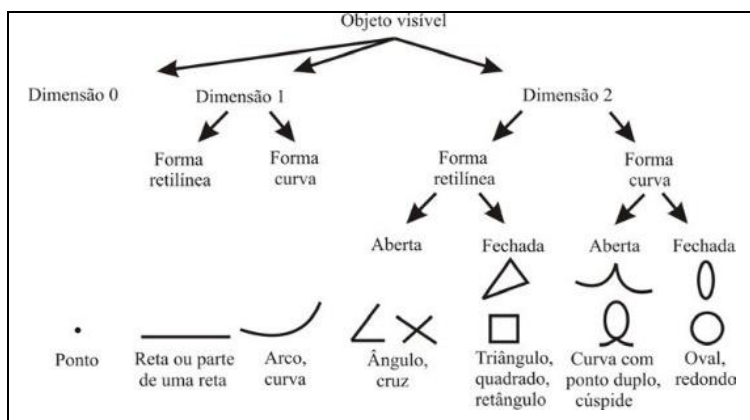
Figura 4: Passagem da função à sua representação gráfica



Fonte: as autoras.

Além de transitar entre diferentes registros de representação, o que uma figura geométrica pode mostrar para o estudante e para o professor, de acordo com Duval(1994), é que é necessário estimular o desenvolvimento do olhar em Geometria, isso significa que o estudante deve transitar entre as diferentes composições de uma figura geométrica e suas dimensões. Para Duval (1995), as figuras são compostas de diferentes dimensões e unidades figurais, conforme podemos observar na Figura 5.

Figura 5: Classificação de unidades elementares de uma figura



Fonte: Duval (1995, p.199, tradução nossa)

Diante da diversidade de representações e unidades que compõem uma figura, é preciso conhecer boas maneiras de analisar uma figura geométrica em uma atividade matemática. Nesse sentido, Duval (2022) classifica as maneiras de ver em função do papel das figuras nas atividades geométricas apresentando os quatro tipos de olhares em geometria.

Quadro 2: Quatro entradas clássicas na geometria

	BOTÂNICO	AGRIMENSOR-geômetra	CONSTRUTOR	INVENTOR-faz-tudo
1. Tipo de operação nas FORMAS VISUAIS , exigida para a atividade proposta	Reconhecer as formas a partir das qualificações visuais do contorno: UMA forma particular é privilegiada como TÍPICA	Medir as bordas de uma superfície: em um TERRENO ou em um DESENHO (variação de escala de grandeza e consequentemente do procedimento de medida)	Decompor uma forma em traços construtíveis com a ajuda de um instrumento. É preciso (frequentemente) passar de TRAÇOS AUXILIARES que não pertencem a figura "final".	Transformar formas, umas em outras. Deve-se adicionar TRAÇOS REORGANIZADORES na figura final para iniciar as transformações
2. Como as PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS são mobilizadas em relação ao tipo de operação	Sem ligações entre as diferentes propriedades (não há definição matemática possível)	As propriedades são dos critérios de escolha para as medidas a fazer. Elas só são úteis se remetem a uma fórmula permitindo um cálculo	Como restrições de uma ordem de construção. Certas propriedades são obtidas por uma única operação de traçagem , as outras exigem várias operações	Implicitamente por enviar a uma rede mais complexa (uma trama de retas para a geometria plana ou uma trama de intersecções de planos ...) que a figura de partida

Fonte: Duval(2022, p.7)

Além dos quatros tipos de olhares, Duval (2022) apresenta dois modos opostos de visualização denominados de visualização icônica e visualização não icônica. Segundo o autor, ocorre um problema cognitivo durante a passagem do reconhecimento discriminativo de formas e a identificação de objetos que são nos dado a ver, isso em função da percepção do mundo ao nosso redor estar apoiado em “semelhanças”, ou seja, formas comumente encontradas no cotidiano.

O que muitas vezes ocorre é um impasse na aprendizagem em Geometria, pois ela exige uma maneira de visualizar distinta da percepção e centrada em uma visualização não icônica, salientando que, em nosso dia a dia, estamos condicionados a uma visualização icônica.

Algumas situações nos conduzem ao reconhecimento do objeto, no entanto, talvez isso não seja suficiente, sendo necessária uma entrada verbal.

No Quadro 3, apresentamos a definição de visualização icônica e não icônica e sua relação com os quatro tipos de olhares.

Quadro 3: Dois mecanismos de identificação de objetos a partir de formas visuais

VISUALIZAÇÃO ICÔNICA		VISUALIZAÇÃO NÃO ICÔNICA	
<p>É SEMELHANTE AO perfil de um objeto real, ou a um conjunto de deslocamentos em um território ou a um modelo típico (padrão). <i>A figura permanece um objeto independentemente das operações efetuadas sobre ela.</i></p>		<p>É uma SEQUÊNCIA DE OPERAÇÕES que permite reconhecer as propriedades geométricas, por impossibilidade de obter certas configurações, ou por invariância das configurações obtidas. <i>A figura é uma configuração contextualmente destacada de uma rede ou de uma organização mais complexa.</i></p>	
BOTÂNICO	AGRIMENSOR geômetra	CONSTRUTOR	INVENTOR faz-tudo

Fonte: Duval (2022, p.12)

O olhar botânico permite o reconhecimento de formas a partir de qualidades visuais e não possui qualquer ligação com propriedades matemáticas. O olhar do agrimensor se refere à variação de escala de grandeza e procedimento de medida, esses tipos de olhares estão relacionados com o tipo de **visualização icônica**. A Figura 1 representa uma **visualização icônica**, isso significa que reconhecemos uma forma que pode ser comumente encontrada: como latas de refrigerante ou achocolatado, dentre outros. Isso é possível devido ao fato de que a **visualização icônica** nos proporciona a representação de uma forma comumente encontrada no cotidiano.

A **visualização não icônica** nos permite a verificação de uma sequência de operações que conduzem ao reconhecimento de propriedades e está relacionada aos olhares do construtor e do inventor.

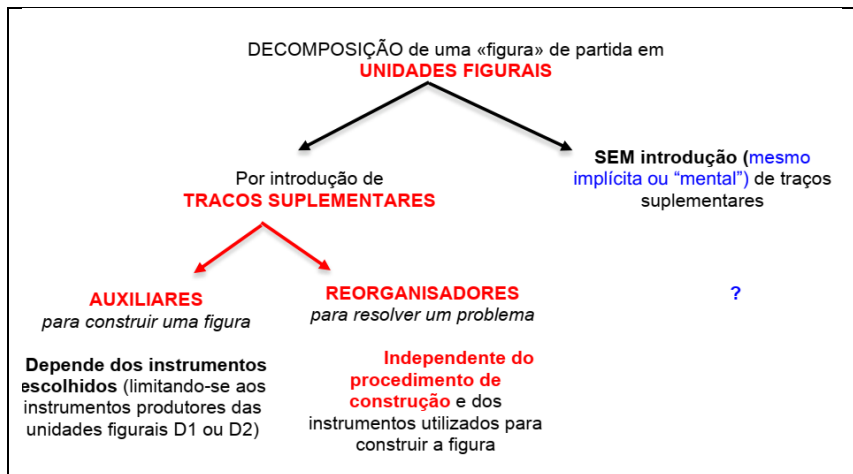
O modo próprio de visualizar em Geometria, de acordo com Duval (2015), solicita que seja realizada uma **desconstrução dimensional de formas**. Nesse sentido, dentre as diferentes ferramentas do *software* GeoGebra, evidenciamos que o referido *software* pode contribuir para a visualização em Geometria e permitir ao acesso a diferentes representações de objetos matemáticos, bem como a decomposição de figuras.

A entrada em um funcionamento, que é próprio da **visualização não icônica ou desconstrução de formas**, exige a decomposição de formas discriminadas e apresenta duas possibilidades de decomposição dessa figura de partida em unidades figurais. Uma figura de partida apresenta um enunciado ou pode ser construída a partir dele (DUVAL, 2022).

A primeira possibilidade diz respeito aos instrumentos utilizados para a construção da figura e a segunda possibilidade resulta da escolha de um traço suplementar (um traço auxiliar)

que permita a visualização de um procedimento de resolução.

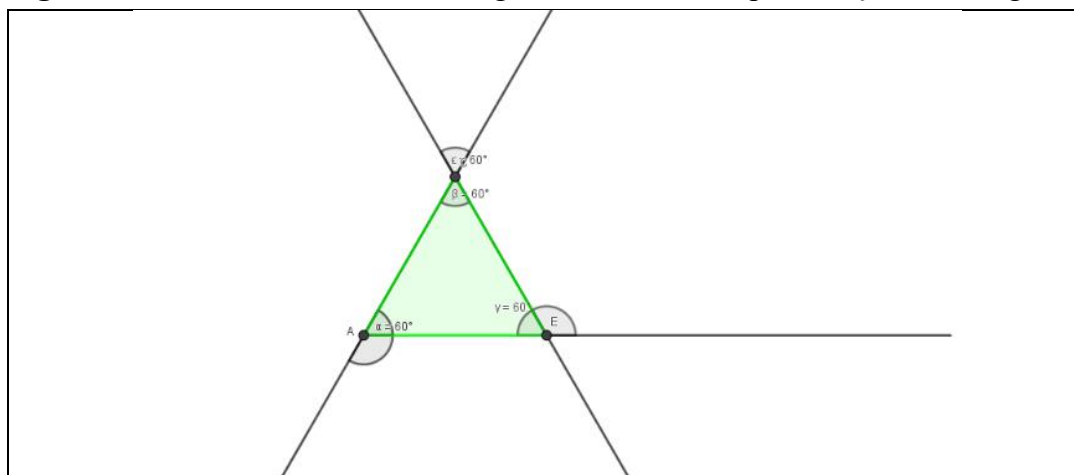
Figura 6: Decomposição de uma figura de partida



Fonte: Duval(2022, p.14).

Um exemplo que exige a aplicação de traços suplementares é o caso do prolongamento do lado da representação de um triângulo para obter a medida de um ângulo interno ou externo (Figura 7).

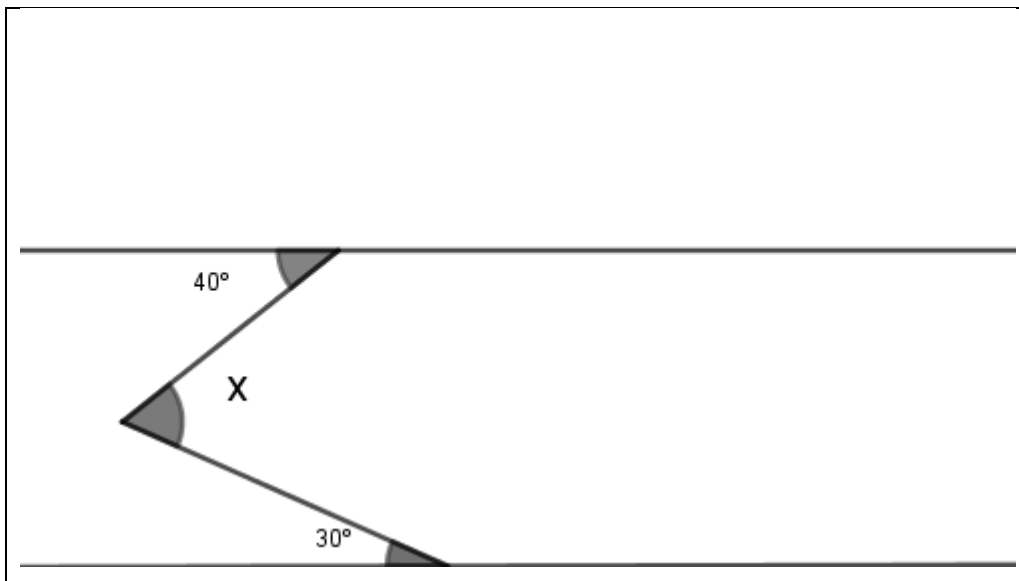
Figura 7: Determine a medida dos ângulos externos da representação do triângulo $A\hat{B}E$



Fonte: as autoras.

Outro exemplo que apresenta a necessidade de traços suplementares é o caso da determinação da medida de um ângulo de uma representação que não são formas facilmente reconhecidas como no caso da Figura 8.

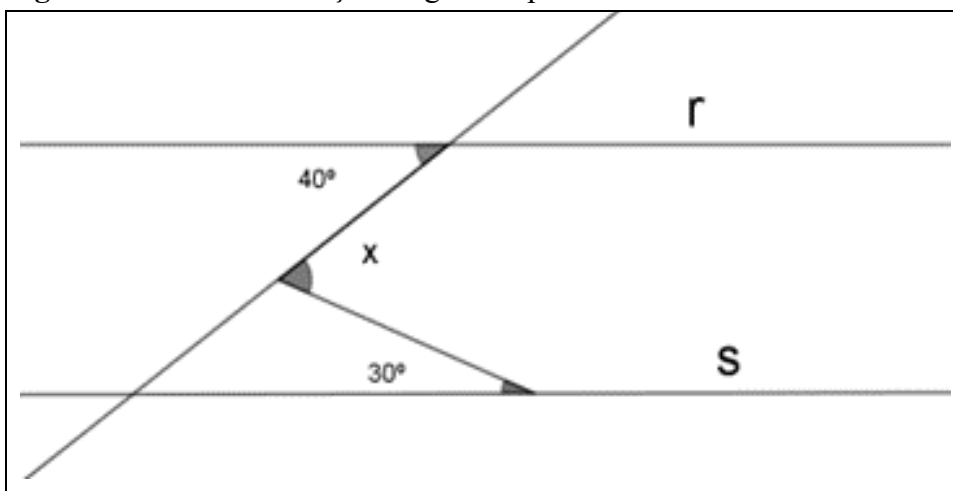
Figura 8: Sabendo que $r \parallel s$, determine a medida de x



Fonte: adaptado de Jahn e Bongiovanni (2019, p.249)

A Figura 8 é uma figura de partida, ou seja, aquela que apresenta uma descrição ou pode ser construída a partir de um enunciado. Nesse caso poderão ser inseridos traços suplementares que permitam uma reorganização visual dessa figura e, conseqüentemente, poderá conduzir a um procedimento de resolução (Figura 9).

Figura 9: Adicionado traços a figura de partida



Fonte: adaptado de Jahn e Bongiovanni (2019, p, 249)

Desse modo, ao realizar o prolongamento da transversal, é possível reconfigurar a figura de partida e, assim, encontrar um procedimento de resolução. Contudo, esse tipo de tarefa envolve a mobilização de conceitos e propriedades de ângulos alternos internos e externos, colaterais internos e externos, uma vez que temos o caso de duas retas paralelas e uma

transversal.

Considerando a relevância entre as diferentes representações dos objetos geométricos e as articulações entre visualização e discurso discutidos até o momento, para esta pesquisa serão analisadas as tarefas elaboradas por professores de matemática envolvidos em uma ação formativa envolvendo o *software* GeoGebra.

ENCAMINHAMENTOS METODOLÓGICOS

Tendo em conta o objetivo da presente investigação, assumimos uma perspectiva metodológica de natureza qualitativa e de cunho interpretativo, a fim de “*discutir a articulação entre visualização e o discurso evidenciados nas tarefas propostas por professores de matemática em uma ação formativa envolvendo o software GeoGebra*”. A ação formativa foi desenvolvida no contexto de um curso de formação de professores de Matemática, denominado “Curso de GeoGebra”.

Este curso é um espaço de formação de professores on-line e apresenta uma estrutura formativa não vertical. São propostas ações pautadas no trabalho cooperativo privilegiando discussões, debates, socialização e criação de tarefas, com objetivo de proporcionar um ambiente que permita aos participantes em formação compartilhar suas práticas pedagógicas, refletir e discutir aspectos técnicos do *software* GeoGebra e as contribuições desse recurso para o ensino e a aprendizagem da Matemática.

O curso é ofertado pela Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR) em parceria com a Universidade do Estado de Mato Grosso (UNEMAT) e conta com o apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Mato Grosso (FAPEMAT), sendo realizado em um período de oito módulos semanais. No primeiro módulo, os participantes em formação têm acesso à interface do programa e modos de realizar construções geométricas básicas (retas, círculos e formas geométricas em geral). A partir do segundo módulo, os participantes em formação têm acesso a construções de polígonos por meio das ferramentas da interface e à inserção de comandos na caixa de entrada.

O terceiro módulo é dedicado a tópicos das Geometrias plana e espacial utilizando recursos estudados nos módulos anteriores, bem como comando sequência. Os demais módulos abordam recursos que podem ser aplicados aos tópicos de funções e sequências, além de outros comandos e ferramentas próprias do programa. Em cada módulo os participantes em formação têm acesso aos materiais escritos e vídeos para seu estudo relativo ao que é abordado.

Na presente pesquisa foram investigados quatro professores em formação que fizeram parte da 18ª Edição do Curso de GeoGebra. Essa edição contou com 603 participantes, sendo

153 colaboradores integrantes da equipe formadora e 450 participantes em formação. Os participantes desse curso, em sua maioria, são estudantes de Graduação em Matemática; Estudantes de Pós-Graduação Lato ou Stricto Sensu (das áreas de Matemática, Ensino de Matemática ou Educação Matemática); e professores de Matemática que atuam na Educação Básica ou no Ensino Superior.

Para a realização das tarefas, os participantes em formação são divididos em cinco grupos (G1, G2, G3, G4, G5) com 90 participantes em cada grupo, sendo acompanhados por colaboradores voluntários. Esses colaboradores voluntários são participantes de edições anteriores do curso que apresentaram um bom desempenho no desenvolvimento das tarefas, na interlocução com seus pares ao longo da participação e que tiveram participação integral no curso.

No decorrer da formação, cada colaborador voluntário fica encarregado por acompanhar semanalmente cinco participantes em formação. Esses colaboradores verificam as resoluções (construções no *software* GeoGebra) realizadas pelos participantes em formação, interagem com eles nos fóruns de discussões, realizando questionamentos e acompanhando o seu desenvolvimento ao longo de cada módulo. Esse acompanhamento é registrado semanalmente por meio de um relatório, cujo objetivo não é atribuir uma nota para futura aprovação, mas direcionar o trabalho.

Para a presente investigação, os dados foram obtidos no terceiro módulo desse curso, sendo considerado o “Grupo 5 (cinco)”, que apresentou o maior número de participantes em formação que atendiam aos critérios estabelecidos em consonância com o objetivo da pesquisa, quais sejam: serem professores da Educação Básica e terem 100% de participação no curso. Dentre os 90 participantes do Grupo 5, 30 atendiam aos referidos critérios.

Na Ação Formativa do módulo três, foi solicitado aos participantes em formação que escolhessem um conteúdo de Geometria dos anos finais do Ensino Fundamental ou do Ensino Médio e, na sequência, elaborassem uma tarefa²² destacando o modo como essa tarefa poderia ser explorada em sala de aula e uma possível resolução (construção realizada utilizando o *software* GeoGebra) conforme (Figura 10 – Parte 1). Essas produções foram disponibilizadas e debatidas pelos participantes em formação no fórum de discussão do “Curso de GeoGebra” (Figura 10 – Parte 2).

²² Tarefas são os enunciados produzidos pelos professores em formação durante a participação no Curso de *GeoGebra*

Figura 10: Proposição da Ação Formativa²³ – Módulo 3 da 18ª Edição do Curso de GeoGebra

Parte 1
Considere que você vai lecionar um tópico de Matemática do Ensino Fundamental ou do Ensino Médio durante duas aulas seguidas. Para isso, você deve levar um ou mais arquivos previamente construídos no GeoGebra, utilizando conteúdos abordados nos três primeiros módulos do curso. Os estudantes terão acesso a esse(s) arquivo(s) em computadores (ou celulares) e vão utilizá-lo(s) durante a sua aula. Poste esse(s) arquivo(s) no fórum "Tarefa 3" com uma descrição de como pretende utilizá-lo(s) e de como ele(s) ajuda(m) nas atividades planejadas para sua aula.

Você deve realizar a Parte 1 até 28 de fevereiro às 23h59min (horário de Brasília).

Parte 2
Escolha construções realizadas por, no mínimo, dois colegas e interaja com eles fazendo perguntas, sugerindo alterações ou acréscimos em suas construções.

Você deve realizar a Parte 2 até 03 de março às 23h59min (horário de Brasília).

Fonte: 18ª Edição do Curso de GeoGebra.

Inicialmente realizamos a leitura das produções escritas dos 30 professores que atendiam aos critérios de seleção. Essas produções escritas são compostas pelas tarefas e as respectivas construções realizadas por meio *software* GeoGebra. Após essa primeira leitura, restaram sete tarefas, contudo, essas tarefas não atendiam integralmente à solicitação da Ação Formativa, ou seja, elaborar uma tarefa com um conteúdo voltado para sala de aula, mas atendiam parcialmente, visto que havia a escolha de um conteúdo, comentários do professor quanto ao desenvolvimento da tarefa em sala de aula e a construção realizada no *software* GeoGebra.

Na sequência, identificamos que das sete tarefas selecionadas, quatro apresentavam uma particularidade - a representação de sólidos geométricos e suas planificações, uma desconstrução dimensional de formas (decomposição da figura geométrica em unidades figurais 3D/2D e 1D/0D). Sendo assim, selecionamos a produção escrita de quatro professores em formação.²⁴ No presente artigo, esses professores são identificados por P1, P2, P3 e P4.

Na próxima seção, apresentamos a descrição e as análises das produções escritas envolvendo sólidos geométricos que contribuem para a articulação entre a visualização e o discurso.

ANÁLISE DE TAREFAS DE GEOMETRIA DISCUTIDAS NA AÇÃO DE FORMAÇÃO QUE BUSCAM ARTICULAÇÃO ENTRE A VISUALIZAÇÃO E O DISCURSO

Nesta seção foram descritas e analisadas as propostas de tarefas apresentadas por quatro professores na Ação Formativa – Módulo 3 (três) da 18ª Edição do Curso de GeoGebra. Para

²³ Ação Formativa é a “tarefa” solicitada pela equipe formadora aos participantes em formação e é constituída pela tarefa (enunciado) e a resolução (construção).


²⁴ Nomeamos “professores em formação” os participantes que tiveram suas produções escritas selecionadas para a análise.

tanto, foi organizada a produção escrita de cada professor em formação em quadros nos quais foram registrados: a descrição da tarefa a partir da leitura da pesquisadora; o ano de escolaridade em que pode ser trabalhada; comentários do professor quanto ao desenvolvimento da tarefa em sala de aula; e a construção realizada no *software* GeoGebra. Após cada quadro, apresentamos a análise da proposta de cada professor em formação e, no decorrer dessa análise, focamos na identificação de articulações entre a **visualização (icônica – olhar botanista e agrimensor)**, **visualização não icônica (construtor e inventor)** e o **discurso (registro discursivo – registro em língua natural – enunciado)** presentes nas tarefas elaboradas pelos professores em formação em uma Ação formativa utilizando o *software* GeoGebra.

Tarefas propostas por professores em formação envolvendo sólidos geométricos

Produção escrita de P1

Quadro 4: Produção escrita do P1

 Por PROFESSOR EM FORMAÇÃO P1 - domingo, 28 Feb 2021, 00:22	
Conteúdo: Prismas	
Descrição da tarefa a partir da leitura da pesquisadora	Tarefa 1 Realizar a contagem de faces, vértices e arestas dos prismas a partir de figuras impressas. Tarefa 2 Manipular o arquivo construído no GeoGebra e analisar as faces, vértices, arestas e base do prisma.
Ano de escolaridade:	6º Ano do Ensino Fundamental
Comentários do professor quanto ao desenvolvimento da tarefa em sala de aula	“Em um primeiro momento, apresento as figuras impressas ao alunos [...]. Na sequência apresento o arquivo do GeoGebra para facilitar a visualização do que foi solicitado, mostrando para eles essa questão de profundidade que os sólidos apresentam, pois eles sempre demonstram dificuldades no entendimento” (P1).
Arquivo com a resolução proposta pelo professor por meio do software GeoGebra	

Fonte: Módulo 3 - 18ª Edição do Curso de *GeoGebra*

P1 propõe duas tarefas, sendo a primeira referente à entrega de figuras impressas de representações de prismas com o objetivo de que os estudantes realizem a contagem de elementos de representações dos prismas (vértices, arestas e faces).

A segunda tarefa, apresenta a manipulação da representação de um prisma construído no *software* GeoGebra. As tarefas propostas por P1 podem mobilizar a visualização dos estudantes, pois, ao apresentar as figuras planas impressas, os estudantes não têm acesso a todas as faces, por exemplo, da representação plana do prisma.

Despertar esse tipo de observação nem sempre é uma tarefa fácil quando o único recurso utilizado é o livro didático e as figuras impressas. P1 complementa a tarefa 1 com o apoio do *software* GeoGebra como recurso didático (Tarefa 2) que permite o movimento, o giro da construção e, desse modo, pode conduzir a visualização das faces, arestas e base da representação.

Na Janela de visualização 2D, temos acesso à representação de um quadrado e *controles deslizantes*. Na Janela de Visualização 3D, temos acesso à representação de um prisma e sua planificação que podem ser exploradas pela manipulação dos *controles deslizantes* que permitem a modificação das medidas da altura, do comprimento e da largura.

Essa construção e sua planificação podem possibilitar a transposição ao obstáculo da percepção (um reconhecimento imediato) de dimensões superiores 3D/2D por meio da **desconstrução dimensional de formas**. Isso ocorre devido à visualização permitir acesso a dimensões inferiores da figura 1D/0D como arestas, vértices, segmentos e pontos. Em um primeiro momento, uma forma 3D será decomposta em uma forma 2D (polígonos) que pode ser decomposta em uma forma 1D (segmentos de retas) e posteriormente em unidades figurais 0D (pontos).

A planificação dessa tarefa ainda permite uma transformação denominada de **tratamento**, que consiste na realização de transformações de representações dentro de um mesmo registro (DUVAL, 1995). Desse modo, para que a representação do sólido geométrico, ou seja, a representação do prisma, seja reconhecida, é necessária a mobilização de seus elementos. Precisamos observar as formas de suas faces e suas bases, suas arestas, considerar como seriam distribuídas, dado que uma representação tridimensional possui comprimento, largura e altura, como P1 havia descrito “*uma questão de profundidade*” (P1).

No caso do prisma, ele será decomposto em um primeiro momento em 4 faces retangulares e 2 bases quadradas e esses polígonos serão decompostos em segmentos e vértices. Nesse sentido, a tarefa proposta por P1 pode promover a mobilização de um olhar centrado no enriquecimento heurístico da representação, possibilitando a visualização de formas que muitas


vezes não são facilmente visíveis sem uma **desconstrução dimensional de formas**. A tarefa de P1 introduz o estudante a uma tarefa que permite investigar a representação e realizar a contagem de vértices, arestas e faces da representação do prisma, manipular e girar essa representação, permitindo uma experiência que exige um tratamento por meio de algoritmos.

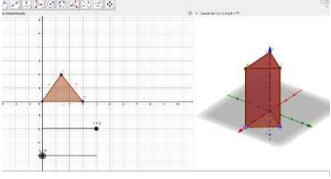
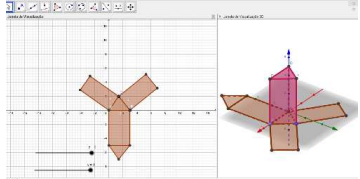
Em relação aos registros figurais e registros discursivos, que no caso de nossa investigação foram considerados: a descrição da tarefa a partir da leitura da pesquisadora, o registro em língua natural e os comentários do professor quanto ao desenvolvimento da tarefa em sala de aula, é possível verificar que há uma articulação entre a **visualização** e o **discurso**, **dado que é possível transitar entre esses registros de representação**.

P1 declara que a tarefa é direcionada a estudantes do 6º Ano do Ensino Fundamental. Nesse sentido, a tarefa pode contribuir para a visualização, dado que uma das etapas mais intuitivas que os estudantes percorrem é a manipulação das representações.

Produção escrita de P2

Quadro 5: Produção escrita do P2

 Por PROFESSOR EM FORMAÇÃO 2 - sábado , 27 Fev 2021, 19:34	
Conteúdo: Prismas	
Descrição da tarefa a partir da leitura da pesquisadora	Tarefa 1 Observar o prisma triangular e calcular a área da base e a área lateral; Calcular o volume dos prismas.
Ano de escolaridade:	Não declarado pelo professor
Comentários do professor quanto ao desenvolvimento da tarefa em sala de aula	<p>“Orientações: Faça com que os alunos se sintam motivados a testar seus conhecimentos, e mostre que eles podem fazer mais do que imaginam. Permita que os alunos realizem a atividade sozinhos, depois que eles discutam com seus colegas e, por fim, falem sobre suas resoluções. Esta aula deve ocorrer com a participação dos alunos divididos em grupos de no máximo 5 componentes.</p> <p>Discuta com a turma:</p> <p>Quais dados é fornecido pelo problema?</p> <p>Quais dados necessitamos para resolvê-lo?</p> <p>Como posso consegui-los?”(P2).</p>

Arquivo com a resolução proposta pelo professor por meio do software GeoGebra	Representação de um prisma de base triangular		
---	---	--	---

Fonte: Módulo 3 - 18ª Edição do Curso de *GeoGebra*

A construção realizada por P2 de uma representação de um prisma triangular possui *controles deslizantes* que permitem a manipulação da altura dessa representação e a planificação da representação de um prisma triangular. Contudo, não há *controles deslizantes* que permitam a exploração de diferentes bases dessa representação. Nesse sentido, acreditamos que P2 partiria da representação de um prisma (base triangular) e na sequência apresentaria a representação de prismas que possuem outras bases utilizando outro recurso que não uma construção no GeoGebra.

A discussão sugerida por P2 conduz à exploração da representação que permite a seleção e a visualização de informações relevantes para a resolução do problema, diferentemente do que ocorre em tarefas de aplicação, nas quais são realizadas a seleção de informações indicadas na declaração dos enunciados e são reduzidas a mera aplicação de fórmulas.

Nessa investigação, o enunciado ou discurso é apresentado como descrição da tarefa a partir da leitura da pesquisadora, registro em língua natural e comentários do professor quanto ao desenvolvimento da tarefa em sala de aula. A realização de uma análise discursiva que mobiliza um tipo de registro discursivo, a visualização das formas e a exploração dos elementos da representação ocorrem por meio de um registro não discursivo – figural (figuras geométricas). Desse modo é possível afirmar que há uma coordenação entre dois registros de representações.

De acordo com Duval (2003), a compreensão matemática implica a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica e a mudança de registro. Sendo assim, é possível verificar que há uma articulação entre a **visualização** e o **discurso** na tarefa proposta por P2.

Essa tarefa permite uma exploração que proporciona o desenvolvimento de uma maneira de “ver” que não analisa apenas as unidades figurais 3D/2D, que conduz à **desconstrução dimensional de formas** que dá acesso às outras unidades da representação, sendo uma condição fundamental para a exploração visual de qualquer configuração geométrica. A planificação da representação proporciona um caminho heurístico da figura geométrica e uma representação auxiliar da tarefa que permitem identificar as formas da base, formas das faces laterais, arestas


e vértices da representação.

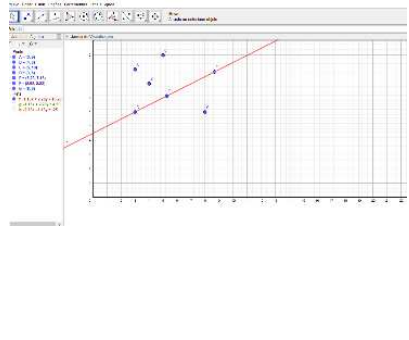
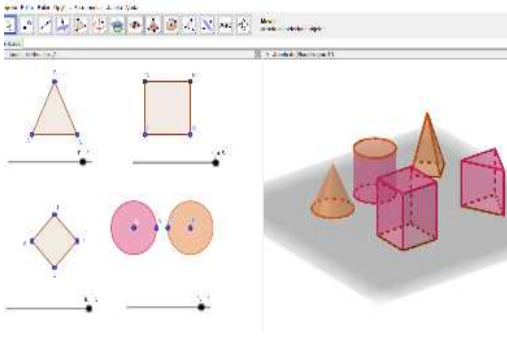
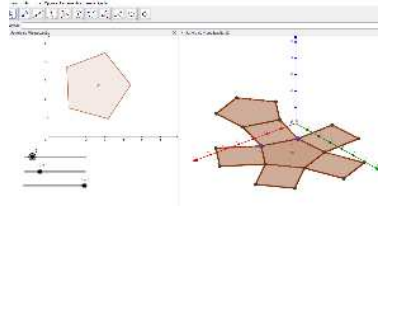
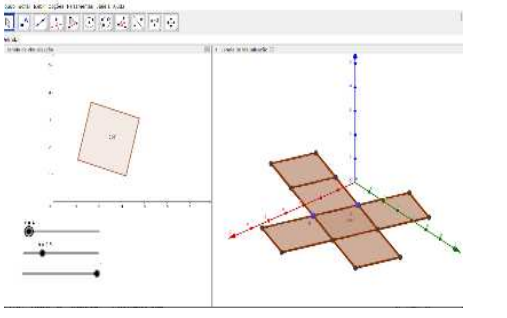
A tarefa de P2 permite o acesso das diferentes unidades de uma figura rompendo o que Duval (2015) denomina por obstáculo à visualização, uma vez que a percepção impõe as unidades figurais 2D. Ao observar a planificação da representação do prisma de base triangular, temos acesso a uma **visualização não icônica**. É possível acessar as demais unidades figurais 1D/0D (segmentos, pontos, arestas e vértices). Primeiramente uma forma 3D será decomposta em uma forma 2D (polígonos) que será decomposta em uma forma 1D (segmentos de retas) e posteriormente em unidades figurais 0D (pontos).

P2 não declara o ano de escolaridade que essa tarefa pode ser aplicada. Sendo assim, poderia ser solicitada a construção da representação de um prisma no *software* GeoGebra. A organização da sequência da construção permitiria outra forma de visualização e o estabelecimento da relação entre as figuras planas e espaciais, visto que seria uma outra forma de desconstrução dimensional de formas.

Produção escrita de P3

Quadro 6: Produção escrita do P3

 Por PROFESSOR EM FORMAÇÃO 3 - domingo, 28 Fev 2021, 11:21	
Conteúdo: Figuras planas e espaciais	
Descrição da tarefa a partir da leitura da pesquisadora	Tarefa 1 Manipular os arquivos do GeoGebra e verificar os elementos das figuras planas e das figuras espaciais; Relacionar as planificações com os respectivos poliedros.
Ano de escolaridade:	6º Ano do Ensino Fundamental
Comentários do professor quanto ao desenvolvimento da tarefa em sala de aula	“Para a primeira aula, criei o arquivo "Ponto_reta". Nesse momento, o objetivo é apresentar os entes primitivos da Geometria, ponto, reta e plano, bem como a forma de nomeá-los. Aproveito esse arquivo também para mostrar que três pontos são colineares quando estão na mesma reta, exploro a posição dos pontos em relação às retas (pertence ou não pertence), à posição entre duas retas no plano e mostro retas paralelas e concorrentes. Ainda nessa primeira aula, utilizo o arquivo "Figuras planas e não planas". A ideia é utilizar esse arquivo para mostrar diferentes tipos de formas geométricas, diferenciar figuras planas e não planas. Explorar os conceitos de vértices, lados, área, arestas, faces e volumes. Para a segunda aula, será explorada a construção de dois

	arquivos "Planificação_ primas" e "Planificação_poliedros_Platão". Nesses arquivos, a ideia é mostrar os diferentes tipos de poliedros e o conceito de planificação, além de mostrar para os estudantes três dos cinco famosos Poliedros de Platão”(P3).	
Arquivo com a resolução proposta pelo professor por meio do software GeoGebra		
	Ponto e reta	Figuras planas e espaciais
		
Planificação do prisma de base pentagonal	Planificação do Cubo	

Fonte: Módulo 3 - 18ª Edição do Curso de *GeoGebra*

P3 apresenta quatro construções para a realização da tarefa, com as quais pretende iniciar sua aula usando o arquivo de construção denominado “ponto e reta”. A construção apresentada por P3 nos permite o acesso às representações de pontos e reta na Janela de Visualização 2D do *software* GeoGebra e a Janela de Álgebra.

A construção da representação de figuras planas e espaciais nos possibilita o acesso a representações de triângulos, quadrados e círculos, além de *controles deslizantes* referentes à altura da representação de sólidos geométricos na Janela de Visualização 2D. Na Janela de Visualização 3D, temos acesso a representações de cilindro, cone, pirâmide e prismas de base quadrangular e triangular.

Com essa tarefa, P3 tem como objetivo apresentar os elementos primitivos da Geometria e, posteriormente, apresentar as representações de figuras planas e figuras espaciais de modo a explorar os conceitos de área e volume e conduzir ao estabelecimento das relações existentes entre as diferentes representações de figuras planas e espaciais.

Exploramos a planificação da representação de prismas de diferentes bases, visto que,

na Janela de Visualização 2D, acessamos à representação de polígonos. Os *controles deslizantes* são referentes à altura, à planificação e ao número de lados da representação. Na Janela de Visualização 3D temos acesso à planificação desses prismas. P3 apresenta também a representação dos Poliedros de Platão na Janela de Visualização 3D, enquanto na Janela de Visualização 2D é possível explorar a planificação desses poliedros.

As construções de P3 permitem o acesso a unidades figurais 3D/2D e a representações de prismas de diferentes bases poligonais, nos quais é possível realizar a contagem de faces, lados e de unidades inferiores 1D/0D (vértices, arestas, pontos e segmentos).

O objetivo de P3 é iniciar a aula com o arquivo da construção dos elementos primitivos. Contudo, se o caminho realizado por P3 fosse o oposto, por meio de uma organização das tarefas que permitisse a sua exploração mediante uma **desconstrução dimensional das formas**, P3 poderia explorar a tarefa de uma maneira investigativa, dado que essa desconstrução dimensional de formas contraria a percepção que focaliza apenas em unidades figurais superiores.

A distinção entre as representações de figuras geométricas espaciais (representações de formas tridimensionais) exigiria um olhar que permitisse visualizar uma forma 2D adquirida por meio da interseção da representação de um sólido com um plano no espaço e, dessa maneira, podemos ter acesso a diferentes unidades figurais. Ademais, as representações de sólidos geométricos são mais familiares aos estudantes.

Temos acesso ainda a uma **visualização não icônica (olhar do construtor e inventor)**, visto que é possível visualizar a representação dos sólidos geométricos por meio de uma decomposição das formas em unidades figurativas de dimensões inferiores, por exemplo, a representação do cubo e da pirâmide que podem ser decompostas em uma configuração de triângulos e quadrados que são compostos por unidades figurais 2D.

As representações desses polígonos podem ser decompostas em segmentos (unidades figurativas 1D e em 0D (pontos). A ocorrência de uma sequência de operações possibilita a obtenção de configurações e o estabelecimento da relação entre as representações de figuras planas e espaciais, proporcionando uma exploração visual que vai além de evidências perceptuais.

No que diz respeito à exploração do conceito de volume, P3 pode utilizar a construção “figuras planas e não planas”, contudo teria dificuldade em estabelecer a relação entre a medida da área da base da representação desses sólidos e a altura. As medidas das bases das representações eram fixas, não havia um *controle deslizante* que, por exemplo, pudesse ser manipulado a fim de alterar o raio das representações do cilindro e do cone.

Ao manipular a construção das representações das “figuras planas e não planas” e explorar a altura das representações na Janela de Visualização 2D, observamos que não seria tão intuitivo estabelecer a relação entre as medidas das áreas do círculo e as medidas do volume do cone e do cilindro.

P3 apresenta quatro construções para a realização da tarefa, pois pretende iniciar sua aula com o arquivo de construção denominado “ponto e reta”. A construção apresentada por P3 nos permite o acesso às representações de pontos e reta na Janela de Visualização 2D do *software* GeoGebra e na Janela de Álgebra.

A construção da representação de figuras planas e espaciais possibilita o acesso a representações de triângulos, quadrados e círculos, além de *controles deslizantes* referentes à altura da representação de sólidos geométricos na Janela de Visualização 2D. Na Janela de Visualização 3D temos acesso a representações de cilindro, cone, pirâmide e prismas de base quadrangular e triangular.

Com essa tarefa, P3 tem como objetivo apresentar os elementos primitivos da Geometria e, posteriormente, apresentar as representações de figuras planas e figuras espaciais de modo a explorar os conceitos de área e volume, conduzindo ao estabelecimento das relações existentes entre as diferentes representações de figuras planas e espaciais.

É possível, assim, explorar a planificação da representação de prismas de diferentes bases. A construção apresenta *controles deslizantes* referentes à altura, a planificação e ao número de lados da representação. Na Janela de Visualização 3D temos acesso à planificação desses prismas. P3 apresenta também a representação dos Poliedros de Platão na Janela de Visualização 3D, enquanto na Janela de Visualização 2D é possível explorar a planificação desses poliedros.

As construções de P3 permitem o acesso a unidades figurais 3D/2D e a representações de prismas de diferentes bases poligonais, nos quais é possível realizar a contagem de faces, lados e das unidades inferiores 1D/0D (vértices, arestas, pontos e segmentos).

O objetivo de P3 é iniciar a aula com o arquivo da construção dos elementos primitivos. Contudo, se o caminho realizado por P3 fosse o oposto, por meio de uma organização das tarefas que permitissem a sua exploração mediante a uma **desconstrução dimensional das formas**, ele poderia explorar a tarefa de uma maneira investigativa, dado que essa desconstrução dimensional de formas contraria a percepção que focaliza apenas em unidades figurais superiores.


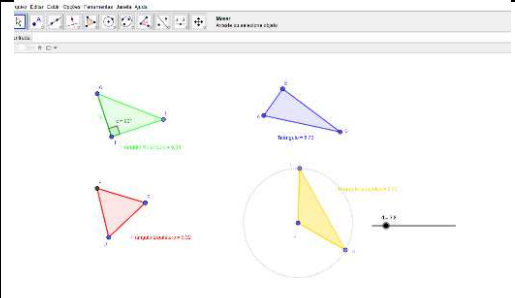
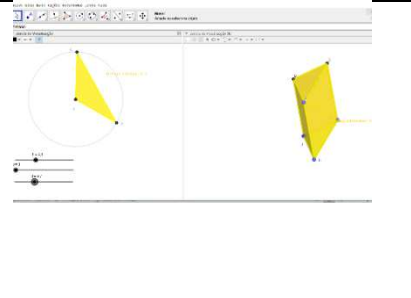
A distinção entre as representações de figuras geométricas espaciais (representações de formas tridimensionais) exigiria um olhar que permitisse visualizar uma forma 2D adquirida

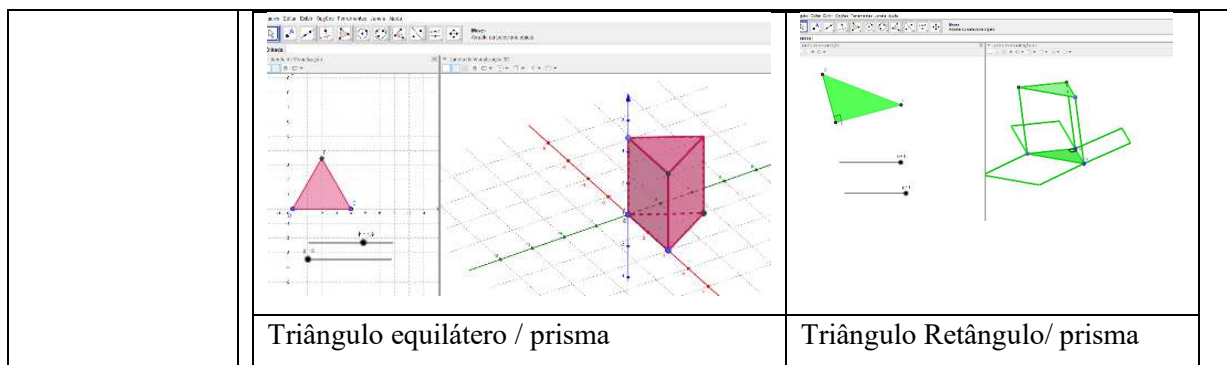
por meio da interseção da representação de um sólido com um plano no espaço e, dessa maneira, ocorreria uma oscilação entre as unidades figurais. Ademais, as representações de sólidos geométricos são mais familiares aos estudantes.

Sendo assim, embora um dos objetivos de P3 seja a exploração do conceito de volume, o **discurso** não está totalmente articulado com **visualização**.

Produção escrita de P4

Quadro 7: Produção escrita do P4

 Por PROFESSOR EM FORMAÇÃO 4 - sábado, 27 Fev 2021, 18:16		
Conteúdo: Prismas		
Descrição da tarefa a partir da leitura da pesquisadora	Tarefa 1 Manipular os arquivos do Geogebra e calcular a área dos triângulos; Calcular a área total dos prismas.	
Ano de escolaridade:	7º e 8º Ano do Ensino Fundamental	
Comentários do professor quanto ao desenvolvimento da tarefa em sala de aula	<p>Aula 1: Na primeira aula, usaria os triângulos previamente construídos do arquivo triângulos e áreas para discutir com os alunos as diferentes formas de calcularmos áreas de triângulos.</p> <p>Para relembrar a fórmula da área ($\text{base} \cdot \text{altura} / 2$), utilizarei o teorema de Pitágoras para encontrar a fórmula do triângulo equilátero, utilizarei o teorema de Pitágoras para encontrar a área do triângulo isósceles (recordar que altura coincide com a mediana) e retomar a fórmula do cálculo da área de triângulos conhecendo apenas as medidas dos lados.</p> <p>Aula 2: Para a segunda aula, usarei os triângulos da primeira construção(aula 1) para construir os prismas e as planificações.</p> <p>O objetivo será abordar a área total dos prismas triangulares (a área total da superfície é a área da planificação)”(P4).</p>	
Arquivo com a resolução proposta pelo professor por meio do software GeoGebra		
	Triângulos e áreas	Triângulo isósceles/ prisma



Fonte: Módulo 3 - 18ª Edição do Curso de *GeoGebra*

P4 apresenta uma construção de diferentes representações de triângulos na Janela de Visualização 2D (triângulo isósceles inscrito em uma circunferência, equilátero, triângulo retângulo) e um *controle deslizante* referente ao diâmetro do círculo. Na Janela de Álgebra temos acesso às medidas das áreas das representações.

A segunda construção apresentada por P4 permite o acesso à Janela de Visualização 2D de um triângulo isósceles inscrito numa circunferência e três *controles deslizantes* referentes ao diâmetro da representação de uma circunferência, a altura da representação do prisma de base triangular e a sua planificação. Na Janela de Visualização 3D temos acesso à representação de um prisma de base triangular isósceles e à sua planificação, além da medida da área da representação do triângulo isósceles. Na Janela de Visualização 3D temos acesso à representação do prisma e sua planificação que nos permite a visualização das faces, arestas, vértices e das bases da representação desse sólido.

No que diz respeito à terceira construção apresentada por P4, na Janela de Visualização 2D, temos acesso à representação de um triângulo, à representação de um polígono regular que é aquele que possui todos os lados congruentes. Para tanto, ao construir a representação, P4 utilizou a ferramenta polígono regular para se certificar de que a representação teria todos os lados com a mesma medida.

A quarta construção apresentada por P4 nos permite o acesso à representação de um triângulo retângulo na Janela de Visualização 2D e dois *controles deslizantes* referentes à altura da representação do prisma e à sua planificação. Na Janela de Visualização 3D temos acesso à representação do prisma e à sua planificação o que nos permite a visualização das faces, das arestas, dos vértices e das bases desse sólido representado.

As construções realizadas por P4 permitem o acesso tanto a uma **visualização icônica**, quanto a uma **visualização não icônica**. Isso significa que é possível a exploração visual de formas conhecidas, um **olhar botanista** da representação, mas ainda uma **visualização não icônica** mobilizando, assim, um tipo de olhar denominado por Duval (2012) de “**construtor e**

inventor”, no qual a atividade exige uma ordem de construção e transforma as formas em outras, ou seja, a **desconstrução visual das formas** perceptuais que surgem a um primeiro olhar.

No que diz respeito ao enunciado, P4 pretende abordar o cálculo da medida da área dos triângulos, mas as construções já apresentavam uma medida fixa dessas áreas, a qual poderia ser acessada na Janela de Álgebra e no tópico desenvolvimento da tarefa em sala de aula, P4 afirma que utilizaria a construção de diferentes representações de triângulos para retomar o cálculo da medida da área.

P4 ainda pretende abordar o cálculo da medida da área do prisma de base triangular o que pode ser implementado por meio da planificação da representação do prisma, visto que visualizamos as faces da representação e suas bases com facilidade. Como P4 já retomou o cálculo da medida da área da representação do triângulo, na sequência poderá realizar o cálculo da medida da área lateral da representação do prisma. Nesse sentido há uma articulação entre o enunciado e as construções, ou seja, uma articulação entre a **visualização** e o **discurso**.

As construções de P4 mobilizam a visualização icônica, sendo o reconhecimento das formas mais elementares, e mobilizam também a **visualização não icônica** mediante a planificação das representações dos prismas, já que temos acesso a uma decomposição (**desconstrução dimensional das formas**) da representação do prisma e exploramos diferentes unidades figurais.

ARTICULAÇÕES ENTRE A VISUALIZAÇÃO E O DISCURSO PRESENTES EM TAREFAS ENVOLVENDO SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

Nesta seção, a partir das tarefas elaboradas pelos professores em formação, ressaltamos as principais características das articulações entre a **visualização** e o **discurso** de tarefas envolvendo sólidos geométricos.

Os resultados evidenciam que as tarefas apresentadas pelos professores em formação podem contribuir para articulações entre dois diferentes registros de representação, como registro figural e registro discursivo, isso significa que há uma articulação entre a (**visualização** e o **discursivo**). Essa ocorrência se dá pelo fato de as tarefas elaboradas pelos professores em formação serem constituídas por figuras geométricas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3), que são representações não discursivas, e o discurso, que tem como função descrever uma tarefa e enunciar propriedades geométricas. Para Duval (2003), a atividade matemática exige a mobilização de ao menos dois registros de representações simultaneamente. Para o autor, a articulação desses registros constitui uma condição necessária para a compreensão em

matemática.

As tarefas elaboradas pelos professores, de modo geral, permitem a realização de uma **desconstrução dimensional de formas**, visto que as tarefas propostas por (P1, P2, P3 e P4) apresentam planificações das representações, o que contribui para a visualização de unidades figurais de dimensões inferiores. Para Duval (2022), transitar entre diferentes dimensões está no centro de um olhar geométrico sobre as figuras.

A tarefa de P1 nos permite o acesso a uma **desconstrução dimensional de formas**, levando, dessa forma, ao acesso a unidades figurais inferiores e acesso a uma operação de transformação denominada de **tratamento** que permite a transformação de uma representação semiótica dentro do mesmo registro.

A discussão sugerida por P2 conduz à seleção e à visualização de informações relevantes para a resolução do problema, uma vez que compreender a descrição de uma tarefa é visualizar o que é descrito. Além disso, a descrição ocorre antes da mobilização de qualquer raciocínio.

No que diz respeito à visualização, é fundamental dissociar-se de uma **visualização icônica** centrada nas formas, visto que esse tipo de visualização não foca em uma desconstrução dimensional de formas. A tarefa de P2 possibilita superar o obstáculo cognitivo à visualização, o que pode contribuir com a compreensão em Geometria, visto que a tarefa dá acesso a diferentes unidades de uma figura, contrapondo a percepção que impõe unidades figurais 2D, nas quais as unidades figurativas de unidades 1D desaparecem visualmente em seu contorno fechado.

A planificação da representação do prisma triangular nos permite o acesso às demais unidades figurais 1D/0D (arestas, vértices, segmentos e pontos) que são outras unidades que constituem uma figura geométrica.

A tarefa proposta por P2 requer uma exploração que conduza ao encontro de um procedimento que atenda ao enunciado proposto. Nesse sentido, a construção realizada no *software* GeoGebra proporciona um caminho heurístico da figura geométrica, que permite identificar as formas da base e das faces laterais da representação. Esse caminho proporciona um desenvolvimento de uma maneira de ver, mediante uma **desconstrução dimensional de formas** que não analisa apenas unidades figurais superiores. Para Duval (2015), a maneira heurística de ver uma figura geométrica sempre será oposta a uma percepção. Esse modo de ver é sempre baseado em inversões do olhar, sendo uma exploração visual que permite a identificação de propriedades que contribuam com a resolução da tarefa.

As tarefas elaboradas no *software* GeoGebra pelos professores em formação, de modo geral, proporcionam acesso a uma visualização icônica, uma entrada no olhar denominado

como **olhar botanista**. Esse olhar permite a exploração visual e o reconhecimento de formas mais elementares, a exemplo da tarefa proposta por P3 e P4, pelas quais temos acesso a representação de triângulos, quadrados e círculos na Janela de Visualização 2D. Essas formas não exigem definições de propriedades matemática para o seu reconhecimento que ocorre a partir de qualidades ditas visuais como o contorno fechado.

Além da **visualização icônica**, temos acesso à **visualização não icônica** que diz respeito à mobilização de um tipo de olhar denominado “**construtor**”. Esse olhar exige a construção das representações a partir de um instrumento e de uma ordem, que possa reproduzir uma forma visual que contenha uma propriedade geométrica, impondo uma regularidade ao movimento traçado.

Ainda com relação à **visualização não icônica**, temos um tipo de olhar denominado “**inventor**”, a **desconstrução visual das formas** perceptuais que surge em um primeiro olhar e transforma a figura inicial. Esse tipo de olhar decompõe e reorganiza uma figura geométrica em unidades de dimensões inferiores, como, por exemplo, a tarefa proposta por P3 na representação de um cubo ou de uma pirâmide que pode ser decomposta em uma configuração de triângulos e quadrados que são compostos por unidades figurais 2D. Quanto aos polígonos, eles podem ser decompostos em segmentos (unidades figurativas 1D). A sequência de operações conduz à obtenção de configurações e ao estabelecimento da relação entre as representações de figuras planas e espaciais, proporcionando uma exploração visual que vai além de evidências perceptuais.

As representações de objetos geométricos elaboradas pelos professores em formação (P1, P2, P3 e P4) possibilitam o acesso à **visualização icônica e não icônica** e permitem a verificação da articulação entre a visualização e o discurso.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir de nossas análises no contexto desta investigação, ressaltamos a importância da proposição de tarefas no *software* GeoGebra que conduzem os estudantes à exploração dos elementos que compõem uma figura geométrica, bem como a relação existente entre a visualização e o discurso, que são processos cognitivos fundamentais para a aprendizagem geométrica.

Inferimos que, ao elaborar uma tarefa, o professor deve se ater à articulação entre a visualização e o discurso, ou seja, o que pode ser descrito pela visualização e o que realmente a tarefa solicita ao estudante. Para além da proposição de tarefas, destacamos o papel do professor enquanto mediador do processo de aprendizagem e o compromisso com a

aprendizagem, neste artigo, abordado na seção comentários dos quadros.

Quanto ao recurso utilizado, o *software* GeoGebra, defendemos o uso desse recurso voltado às atividades que proporcionem aos estudantes experiências de desconstrução dimensional das formas e estabelecem a relação entre as figuras planas e espaciais, o que pode ser realizado a partir da construção de representações de objetos geométricos. Contudo, compreendemos a dificuldade dos professores quanto à disponibilidade de recursos nas escolas brasileiras como, por exemplo, a falta de computadores.

Como sugestão para pesquisas futuras, destacamos que há a necessidade de evidenciar o papel das figuras geométricas e o discurso na atividade geométrica, uma vez que a figura geométrica pode contribuir ou dificultar a resolução de um problema.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARROS, R.C. P; PAVANELLO, R. Relação entre figuras planas e espaciais no ensino fundamental: o que diz a BNCC? **JIEEM** v.15, n.1, p. 11-19, 2022.

CARDOSO, F. P. Ensino e aprendizagem da geometria na formação de professores. **Ensino em Perspectivas**, Fortaleza, v. 3, n. 1, p. 1-8, 2022.

DUVAL, Raymond. As CONDIÇÕES COGNITIVAS DA APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA: DESENVOLVIMENTO DA VISUALIZAÇÃO, DIFERENCIAÇÃO DOS RACIOCÍNIOS E COORDENAÇÃO DE SEUS FUNCIONAMENTOS. Tradução: ARINOS, Cleide Ribeiro Mota; FREITAS, José Luiz Magalhães de; MORETTI, Mércles Thadeu. **REVISTA ELETRONICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - REVEMAT**, Florianópolis, v. 17, p. 01-52, 2022.

DUVAL, Raymond. Figures et visualisation géométrique : «voir» en géométrie: Du mot au concept. Figure. **Baillé, J., Lima, J. (Orgs) -Grenoble: Presses Universitaires.**, [s. l.], p. 147-182, 2015.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução: Mércles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Educação Matemática - Revemat**. Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 118-138, 2012.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas**. Organização de Tânia M. M. Campos. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011. 160 p

DUVAL, Raymond. **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática**. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica. Campinas: Papirus, 2003, p. 14-69.

DUVAL, Raymond. DÉCRIRE, VISUALISER OU RAISONNER : QUELS “APPRENTISSAGES PREMIERS” DE L’ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE ?. **Annales de didactique et sciences cognitives**, STRASBOURG, v. 8, p. 13-62, 2003.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages**

intellectuals. Bern: Peter Lang, 1995a.

GONÇALVES, T. Da. C.; FERREIRA, C. C; FERREIRA, V. L. D; MENEGAIS, D. A. F.N. Identificação de Lacunas no processo de aprendizagem dos conteúdos de Geometria no ensino médio pelo método de Van Hiele. **Revista Eletrônica de Matemática - REMAT**, v. 15, p. 01-20, 2020.

GRAVINA, M. A. O POTENCIAL SEMIÓTICO DO GEOGEBRA NA APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA: UMA EXPERIÊNCIA ILUSTRATIVA. **Vydia**. Santa Maria, v. 35, n. 2, p. 237-253, 2015.

JAHN, Ana Paula; BONGIOVANNI, Vincenzo. Apreensão Operatória de Figuras em Situações Geométricas. **Jornal Internacional de Estudos Em Educação Matemática - JIEEM**, [s. l.], v. 12, ed. 3, p. 245-257, 2019.

KUHN, M. C.; QUADROS, B. M. De. Geometria nos Anos Iniciais: Possíveis Conexões Teóricas e Práticas. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 13, p. 246-254, 2020.

LECRER, O. P. V.G.; PAZUCH, V. Reflexão sobre o processo de elaboração de tarefas de geometria espacial em um movimento formativo de professores. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - Rematec**, Belém, v. 16, ed. 37, p. 97-122, 2021.

LEIVAS, José Carlos Pinto; BETIN, Ane Desconsi Hasselmann; PRETTO, Valdir. O GeoGebra 3D na construção da Pirâmide a partir de seu tronco: Registros de Representação Semiótica. **Hal open Science**, Cuba, 2018.

MARQUES, V. D.; CALDEIRA, C. R. Da. C. Dificuldades e carências na aprendizagem da Matemática do Ensino Fundamental e suas implicações no conhecimento da Geometria. **Revista Thema**, [s. l.], v. 15, ed. 2, 2018.

NÓVOA. A. Os professores e a sua formação num tempo de metamorfose da escola. **Educação & Realidade**, Porto Alegre, v. 44, n. 3, 2019.

OLIVEIRA, F. C. De; BUCHARDT, A. T. Formação Continuada: Uma proposta de prática investigativa e interdisciplinar para o ensino de Geometria Plana. **Revista Prática Docente**. v. 3, n. 1, p. 75-90, 2018.

OLIVEIRA, V. S. D; VITOLO, A. P.M; MAIA E SILVA; A. C. Uso do GeoGebra à Luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **Anais dos Workshops do VIII Congresso Brasileiro de Informática na Educação**, 2019.

PAVANELLO, R. M; COSTA, L. P. Da; VERRENGIA, S. R. D'A. Geometria e Educação Infantil: Entre a Pesquisa, o Desenvolvimento de Materiais de Ensino e a Formação Continuada de Professoras. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 13, p. 238-245, 2020.

SILVA, A. C. De. J. Educação continuada do professor de matemática. **Revista Científica Multidisciplinar. Núcleo do Conhecimento**. Ano 05, Ed. 01, v. 04, pp. 62-72.

VAN DE VALLE, J. A. **MATEMÁTICA NO ENSINO FUNDAMENTAL FORMAÇÃO**

DE PROFESSORES E APLICAÇÃO EM SALA DE AULA. In: Desenvolvendo Conceitos de Medida, O Pensamento e os Conceitos Geométricos. 6. ed. [S. l.: s. n.], 2009. cap. 20-21, ISBN 0-20-548392-5.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Geometria se constitui um campo de conhecimento que pode contribuir diretamente na formação dos estudantes, pois desenvolve o raciocínio geométrico e a capacidade de discriminação de formas (KLUPPEL; BRANDT, 2012).

Para Abrantes *et al.* (1999), esse campo também permite o desenvolvimento da intuição e da visualização espacial. Esta última em especial proporciona condições de apreender o mundo físico, realizar interpretações, antecipações e transformações de objetos.

Nesse sentido, a relevância do Ensino de Geometria e a discussão dessa temática na formação de professores (DANTAS, 2022; KUHN; QUADROS, 2020; MARQUES; CALDEIRA, 2018; NUNES; ONUCHIC, 2019; STIEGELMEIER; MARTHOS; BRESSAN, 2019) apontam a necessidade de um ensino a partir de diferentes abordagens metodológicas, visto que a Geometria possibilita olhar, comparar, medir e experimentar.

O ensino de Geometria deve ser realizado a partir de tarefas que permitam explorações intuitivas, mas de modo que vise à construção formal e a explorações que possibilitem o estabelecimento de conhecimentos e, conseqüentemente, a uma sistematização (PAVANELLO; COSTA; VERRENGIA, 2020).

Para que ocorra a aprendizagem em Geometria, é necessário sejam propostas tarefas investigativas e situações-problema que permitam ao estudante conjecturar e validar conjecturas e não somente decorar um conjunto de definições e propriedades (ARINOS; SILVA, 2021).

Nesta pesquisa buscamos compreender os processos de visualização, construção e raciocínio mobilizados por professores de Matemática em uma Ação Formativa envolvendo o *software* GeoGebra à luz da teoria de Raymond Duval. Propomo-nos a fazer reflexões sobre a formação de professores para o ensino de Geometria, tendo em conta tecnologias digitais, nomeadamente o *software* GeoGebra. Esse *software* se apresenta como um recurso didático que pode favorecer os processos cognitivos, como a **visualização**, a **construção** e o **raciocínio**. Além disso, o *software* GeoGebra pode contribuir para a exploração de elementos geométricos.

Para tanto, a dissertação foi estruturada no formato *multipaper* (DUKE; BECK, 1999), e teve como objetivos específicos:

Objetivo 1: analisar as potencialidades de tarefas envolvendo poliedros, que foram propostas e discutidas por professores de matemática em uma Ação Formativa envolvendo *software* GeoGebra, para mobilização de apreensões em Geometria;

Objetivo 2: discutir as potencialidades de tarefas que exploram a visualização em Geometria para o conceito de volume de sólidos geométricos, que foram propostas por professores de matemática em uma Ação Formativa envolvendo o *software* GeoGebra;

Objetivo 3: discutir a articulação entre visualização e o discurso evidenciados nas tarefas propostas por professores de matemática em uma Ação Formativa envolvendo o *software* GeoGebra.

A partir das tarefas e construções apresentadas pelos professores que tiveram suas produções analisadas, observamos que as tarefas envolvendo poliedros e o conceito de volume de sólidos geométricos têm potencial para promover a mobilização das apreensões perceptiva, discursiva, operatória e sequencial (Duval, 1994). Tais apreensões geométricas são de fundamental importância para a **visualização** em geometria e permitem a constituição de conceitos geométricos e a percepção de propriedades de entes geométricos.

O processo de visualização possibilita ao estudante interagir com as representações, alterar suas medidas, verificar propriedades, explorar conceitos etc. Para Duval (2009), a distinção entre um desenho e uma figura geométrica no papel ou no computador está no fato de uma figura representar as propriedades do objeto. Esse processo envolve as articulações entre as **apreensões perceptiva, operatória e discursiva**. A proposição e discussão de tarefas que envolvem figuras dinâmicas e sua exploração em um *software* dinâmico, como o GeoGebra, têm grande potencial para que professores de matemática possam compreender a importância da investigação de figuras geométricas para a mobilização das apreensões em geometria, assim como para visualização. Contudo, em nossa investigação compreendemos que a apreensão sequencial é necessária neste processo.

O processo de visualização contribui para a identificação e reconhecimento de diferentes unidades figurais e dimensões de uma figura. Isso ocorre devido a uma figura ser composta por ao menos duas unidades figurais elementares e o *software* GeoGebra permite a exploração dessas unidades.

Ao discutir articulações entre a visualização e o discurso presentes na proposição de tarefas elaboradas pelos professores de matemática na Ação Formativa, envolvendo sólidos geométricos e o *software* GeoGebra, os resultados apontam que as tarefas contribuem para

articulações entre dois diferentes registros de representação, o registro figural e o registro discursivo, isto ocorre pois as tarefas propostas são constituídas por figuras geométricas e uma declaração, sendo que a primeira faz parte de representações não discursivas e o segundo, da representação discursiva que apresenta uma função descritiva e de enunciação de propriedades geométricas.

No que diz respeito à **visualização**, é fundamental dissociar-se de uma **visualização icônica** centrada nas formas, visto que esse tipo de visualização não foca em uma desconstrução dimensional de formas. A **desconstrução dimensional de formas** permite acesso a unidades figurais inferiores e o acesso a uma operação de transformação denominada de **tratamento** que permite a transformação de uma representação semiótica dentro do mesmo registro.

Ficou evidente nesta pesquisa que, além da **visualização icônica**, temos acesso à **visualização não icônica**, destacando que dizem respeito à mobilização de um tipo de olhar denominado “**construtor**”. Esse olhar exige a construção das representações a partir de um instrumento e de uma ordem que possam reproduzir uma forma visual que contenha uma propriedade geométrica, impondo uma regularidade.

Podemos inferir que no que tange aos **processos discursivos**, é necessária a apresentação de um enunciado, uma declaração verbal da tarefa solicitada. Ao explorar uma figura, verificamos a que discurso ela está associada, uma vez que a descrição ocorre antes de mobilizar qualquer tipo de raciocínio.

Ao tratar dos **processos discursivos**, remetemos à natureza da linguagem. De acordo com Duval (1995), questionamentos surgem a respeito do papel que a linguagem exerce no funcionamento do pensamento e da aprendizagem em sala de aula, visto que o ensino e a aprendizagem são abordados a partir de uma variedade de discursos, quais sejam: linguagem natural, linguagem formal, uso de símbolos etc. O referido autor explica que “o **discurso** é o emprego de uma língua para dizer alguma coisa, é dizer, para falar de objetos físicos, ideais ou imaginários, que não são somente as potencialidades significantes de uma língua” (DUVAL, 1995, pg. 122, tradução nossa) para ele, torna-se impossível a separação do discurso do funcionamento cognitivo.

No caso das construções apresentadas pelos professores em formação, de uma figura geométrica, a partir do enunciado, pode-se afirmar que o texto em língua natural elaborado pelos professores em formação cumpriu a função de explicar e justificar a figura geométrica. Sendo assim, em sua maioria, atenderam ao que foi proposto no enunciado da tarefa, já que ele permitia a realização de explorações que contribuíam para a solução do problema proposto.

Ao analisar as tarefas em Geometria nesta pesquisa, deparamo-nos com duas situações – a primeira trata-se da proposição de um enunciado, já que, a partir desse enunciado, o leitor

pode produzir um determinado significado para uma determinada figura geométrica. A segunda situação é relacionada ao caso de uma figura geométrica elaborada a fim de produzir uma declaração, um enunciado. Dessa maneira, uma figura geométrica pode produzir significados distintos de acordo com a situação em que essa figura é proposta.

No contexto de nossa investigação, compreendemos que a **visualização** é um processo relevante, pois, a partir dela, identificamos e reconhecemos diferentes unidades figurais e dimensões de uma figura. Isso ocorre devido a uma figura ser composta por, ao menos, duas unidades figurais elementares. A **visualização** permite a exploração das formas das figuras geométricas, em virtude dessas se apresentarem como representantes dos objetos geométricos. As figuras elaboradas funcionam como um modelo, visto que mantêm as propriedades matemáticas e permitem realizar explorações e explicações.

Em relação ao **processo de visualização**, foi possível constatar que o *software* GeoGebra apresenta grandes contribuições para esse processo, dado que se pode observar as transformações geométricas das representações na tela, ter acesso a diferentes representações do mesmo objeto matemático e explorar conceitos. A partir da manipulação das construções, tanto professores quanto estudantes, podem acessar formas e realizar conexões entre as propriedades e o modelo construído para representar o objeto matemático.

Ao diferenciar desenho de uma figura geométrica, Duval observa que a última, seja no papel ou no computador, é identificada como uma figura geométrica pelo fato de carregar todas as propriedades do objeto que ela representa (2009). Esse processo envolve as articulações entre as apreensões perceptiva, operatória e discursiva.

Podemos concluir que as tarefas propostas evidenciaram que o *software* GeoGebra *ainda* permite a realização de uma desconstrução dimensional, além de identificar regularidades, girar a construção, observar as representações de diferentes posições e manter as propriedades geométricas. Possibilita, também, ao estudante explorar e acessar os elementos de um poliedro, contribuindo para a escolha de um tratamento matemático possível.

A proposição de tarefas por meio do *software* GeoGebra proporciona a exploração de diferentes representações de um mesmo objeto matemático e a exploração de elementos de figuras geométricas, visto que essas são sempre uma combinação de diferentes dimensões (0D,1D,2D,3D) e permitem acesso a dimensões inferiores como 0D/1D (arestas, vértices, pontos e segmentos). Além disso, é possível explorar a relação existente entre a **visualização** e o **discurso** que são processos cognitivos fundamentais para a aprendizagem geométrica.

As tarefas propostas pelos professores apresentavam características como descrição das construções elaboradas no *software* GeoGebra, descrição a respeito das representações em

forma de proposição enunciada, a proposição vinculada a representação do objeto. Esses aspectos caracterizaram o cumprimento das quatro funções discursivas necessárias para que ocorra o **discurso**.

Este trabalho traz informações que podem contribuir com a formação de professores de matemática e promover reflexões a respeito do ensino de Geometria, por meio da discussão das potencialidades das tarefas que possibilitam a visualização, manipulação e apreensão dos conceitos geométricos. Diante das análises realizadas neste estudo, foi possível observar potencialidades do uso do *software* GeoGebra como recurso metodológico, ao explorar e investigar as propriedades e ao visualizar as figuras geométricas de modo dinâmico.

Destacamos a necessidade de políticas públicas que proporcionem espaços formativos, os quais possibilitem aos professores de matemática acesso a metodologias de ensino de geometria diferenciadas; a momentos de diálogos entre os pares a respeito do ensino de Geometria; à mobilização de recursos tecnológicos e a tecnologias digitais, como o recurso do *software* GeoGebra.

Esse recurso tem apresentado potencialidades para o ensino, por meio da visualização em Geometria, e para evidenciar o papel das figuras em uma atividade geométrica, dado que elas exercem um papel fundamental na resolução de um problema.

Entendendo a importância desse tema para a educação matemática, outras pesquisas poderiam ser realizadas sobre processos cognitivos no ensino e na aprendizagem de Geometria utilizando a teoria de Duval tendo como foco as operações de tratamento e conversão envolvendo o *software* GeoGebra.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DANTAS, Sérgio Carrazedo. A Geometria Escolar e os pensamentos matemático e computacional. In: BALDINI, Loreni Aparecida Ferreira; MORAN, Mariana. **Geometria práticas e aprendizagens**. [S. l.]: Livraria da Física, 2022.

DUKE, N. K.; BECK, S.W. Research news and comment: Education should consider alternative formats for the dissertation. **Educational Researcher**, v.28, n.3, p.31-36, 1999.

DUVAL, R. **Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Bern: Peter Lang, 1995a.

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. Tradução: Lênio Fernandes Levy e Maria Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009. 110 p.

DUVAL, Raymond. As condições cognitivas da aprendizagem da Geometria:

Desenvolvimento da Visualização, Diferenciação dos raciocínios e coordenação de seus funcionamentos. Tradução: ARINOS, Cleide Ribeiro Mota; FREITAS, José Luiz Magalhães de; MORETTI, Mércles Thadeu. **REVISTA ELETRONICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - REVEMAT**, Florianópolis, v. 17, p. 01-52, 2022.

DUVAL, Raymond. Figures et visualisation géométrique : «voir» en géométrie: Du mot au concept. Figure. **Baillé, J., Lima, J. (Orgs) -Grenoble: Presses Universitaires.**, [s. l.], p. 147-182, 2015.

KUHN, M. C.; QUADROS, B. M. De. Geometria nos Anos Iniciais: Possíveis Conexões Teóricas e Práticas. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 13, p. 246-254, 2020.

MARQUES, V. D.; CALDEIRA, C. R. Da. C. Dificuldades e carências na aprendizagem da Matemática do Ensino Fundamental e suas implicações no conhecimento da Geometria. **Revista Thema**, [s. l.], v. 15, ed. 2, 2018.

NUNES, C. B; ONUCHIC, L. DE. LA. R. O uso das transformações geométricas através da resolução de problemas na formação de futuros professores de Matemática. **Interfaces da Educação**, Paranaíba, v.10, n.30, p. 30-56, 2019

PAVANELLO, R. M; COSTA, L. P. Da; VERRENGIA, S. R. D'A. Geometria e Educação Infantil: Entre a Pesquisa, o Desenvolvimento de Materiais de Ensino e a Formação Continuada Professoras. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 13, p. 238- 245, 2020.

STIEGELMEIER, E. W; MARTHOS, S. R. D'A; BRESSAN, G. M. O contexto da geometria no âmbito escolar: concepções e implicações na formação docente. **Revista Eletrônica de Matemática - REMAT**, v. 5, p. 25-40, 2019.

