Universidade Estadual de Londrina

RODRIGO MORENO LUNA

q-SÉRIES E FUNÇÕES ESPECTRAIS DE GEOMETRIA HIPERBÓLICA COM APLICAÇÕES EM TEORIA TOPOLÓGICA DE CAMPOS

Londrina
2015

RODRIGO MORENO LUNA

q-SÉRIES E FUNÇÕES ESPECTRAIS DE GEOMETRIA HIPERBÓLICA COM APLICAÇÕES EM TEORIA TOPOLÓGICA DE CAMPOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor.

Orientador: Prof. Dr. Andrey Aleksandrovich Bytsenko.

Londrina
2015

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Luna, Rodrigo Moreno.

q-Séries e Funções Espectrais de Geometria Hiperbólica com Aplicações em Teoria Topológica de Campos / Rodrigo Moreno Luna. - Londrina, 2015.
73 f.

Orientador: Andrey Bytsenko.
Tese (Doutorado em Física) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2015.
Inclui bibliografia.

1. q-séries - Teses. 2. funções espectrais - Teses. 3. vértices topológicos - Teses. I. Bytsenko, Andrey. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

RODRIGO MORENO LUNA

q-SÉRIES E FUNÇÕES ESPECTRAIS DE GEOMETRIA HIPERBÓLICA COM APLICAÇÕES EM TEORIA TOPOLÓGICA DE CAMPOS

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Andrey Aleksandrovich Bytsenko
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof. Dr. Ugo Bruzzo
Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati - SISSA

Prof. Dr. José Abdalla Helayël-Neto
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF

Prof. Dra. Maria Emília Xavier Guimarães
Universidade Federal Flumenense - UFF

Prof. Dr. Antônio Edson Gonçalves
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 02 de Junho de 2015.

AGRADECIMENTOS

Ao fim desses anos de doutoramento é necessário dar os devidos créditos aos que me ajudaram na realização desse trabalho, que não seria finalizado sem esse inestimável auxílio.

Gostaria de começar por quem mais me aguentou e quem, incondicionalmente, sempre me apoiou durante esses últimos anos de muito mau-humor e preocupações, quem sempre soube a hora certa de colocar sua mão em meu ombro e dizer que estaria ao meu lado “pro que der e vier”, me dando força para enfrentar as interpéries e paciência com as diferenças. Obrigado Juliane, por tudo!

Não posso esquecer dos colegas aqui da universidade, com quem tive esses anos todos de convivência que, com certeza, nunca esquecerei. Flávio, Luis Gustavo, Patrocínio, Rafael Cobo, Nagata e Ricardo Amaral.

Agradeço à CAPES pelo apoio financeiro durante todo o meu doutorado (e também mestrado).

Por fim, um agradecimento especial ao Prof. Andrey Bytsenko por sempre acreditar e me superestimar, algumas vezes de maneira um pouco exagerada, desde a minha graduação e que sem sua ajuda esse e muitos outros trabalhos e projetos não teriam sido possíveis.

LUNA, Rordrigo Moreno. **q-Séries e funções espectrais de geometria hiperbólica com aplicações em teoria topológica de campos.** 2015. 100 f. Tese (Doutorado em Física) – Universidade Estadual de Londrina, 2015.

RESUMO

Esse trabalho mostra como as funções espectrais de geometria hiperbólica associadas à q-séries podem ser empregadas em alguns modelos físicos. Mostra-se que identidades combinatoriais, importantes para a teoria física, podem ser obtidas a partir de complexos de álgebras de Lie. Vê-se também que para a gravidade AdS_3 o caráter formal do *Vir*-module está ligado à funções partição *one-loop*. Evidencia-se a ligação existente entre funções geradoras quânticas e funções espectrais de Selberg-Patterson. E, por fim, com o auxílio das q-séries reescreve-se as funções partição para branas lagrangeanas, *stack* de branas, assim como determina-se a forma generalizada (da função partição) para dois casos de variedades Calabi-Yau tóricas em termos das funções de Ruelle.

Palavras-chave: q-Séries. Funções espectrais. Vértices topológicos.

LUNA, Rordrigo Moreno. **q-Series and Spectral Functions with Applications to Topological Field Theory.** 2015. 100 p. Thesis (Doctoral degree in Physics) – Universidade Estadual de Londrina, 2015.

ABSTRACT

This work shows how the spectral functions of hyperbolic geometry associa- ted with the q series can be used in some physical models. It is shown that combinatorial identities, important to the physical theory, can be obtained from complexes of Lie algebras. Here is also showed that for AdS_3 quantum gravity the formal character of *Vir-module* is connected to the *one-loop* partition functions. Is stressed the link between quantum generating functions and spectral functions of Selberg-Patterson. And finally, with the help of q-series, rewrites the partition functions to Lagrangian branes, stack of branes, as well determines its generalized form (of the partition function) for two cases of toric Calabi-Yau manifolds in terms of Ruelle functions.

Keywords: q-Series. Spectral functions. Topological vertex.

SUMÁRIO

Capítulo 1

Introdução

Recentemente o estudo das q-séries (*q-series*) atraiu novos interesses de pesquisa nas áreas de *Teoria Topológica de Campos* e *Álgebras de Lie*, além de vir estimulando novos desenvolvimentos em áreas da matemática, como na combinatória e partições de inteiros, onde já são objetos bem conhecidos.

A relação entre identidades combinatoriais, como a fórmula de Euler, e álgebras de Lie foi primeiramente descoberta por Macdonald e baseando-se na fórmula de *Euler-Poincaré* foi criado um esquema geral para a prova de tais identidades.

Identidades combinatoriais possuem um papel fundamental em inúmeros modelos físicos e quando relacionadas a certas álgebras e grupos de Lie acabam sendo ligadas diretamente à funções partição da gravidade quântica, supergravidade, gêneros elípticos da teoria quântica superconforme e modelos sigma supersimétricos.

Tais relações se dão de maneira ainda mais notável para o caso da correspondência entre a gravidade quântica 3D (em um espaço-tempo assintótico a AdS_3) e teorias conformes de campos 2D. Estando as funções partição e formas modulares no lado CFT_2 e as funções espectrais (de Selberg e Ruelle) no lado AdS_3.

Mais precisamente, sabe-se que existe uma notável ligação entre funções partição quânticas e séries formais de potências associadas às dimensões de cadeias de complexos e homologia de álgebras de Lie, que por sua vez estão conectadas à fórmula de Euler-Poincaré.

As funções partição podem de fato serem convertidas em produtórios e algumas fórmulas para funções partição (e polinômios de Poincaré) são associadas às dimensões de homologias de determinados espaços topológicos e ligadas à funções geradoras e gêneros elípticos.

Em suma, esses objetos possuem um plano de fundo comum que são as identidades de Euler-Poincaré e de Macdonald, as quais descrevem os aspéctos homológicos das representações de álgebras de Lie tanto de dimensão finita quanto infinita.

Esboçando um esquema geral

Suponha que G seja um grupo de Lie e que $\mathfrak{g}$ seja sua álgebra de Lie. Considere o par (H, G) de grupos de Lie, onde H é um subgrupo fechado de G com um subgrupo normalizador $N_H \subset G$.

Assim o par (H, G) com o grupo quociente discreto N_H/H corresponde à inclusão $\mathfrak{g} \hookrightarrow W_n$, onde W_n é a álgebra de Lie de campos vetoriais formais em $n = dim\, G/H$ variáveis, enquanto o espaço homogêneo G/H possui uma $\mathfrak{g}$-estrutura canônica Ω, sendo, de acordo com [30], uma $\mathfrak{g}$-estrutura numa variedade X (bem comportada) uma 1-forma (smooth) Ω em X com valores em $\mathfrak{g}$ que satisfazem a equação de Maurer-Cartan, $\mathrm{d}w = -\frac{1}{2}[w, w]$, i.e. para qualquer par de campos vetoriais ξ_1 e ξ_2 em X, tem-se que $\mathrm{d}w(\xi_1, \xi_2) = [w(\xi_1), w(\xi_2)]$.

Combinando essa $\mathfrak{g}$-estrutura com a inclusão $\mathfrak{g} \hookrightarrow W_n$, obtem-se um W_n-estrutura no espaço quociente $G/\mathfrak{G}$, sendo $\mathfrak{G}$ qualquer subgrupo discreto do grupo de Lie G. Isso é exatamente a W_n-estrutura que corresponde à foliação H-equivariante de G por cosets esquerdos de $\mathfrak{G}$, para detalhes [1].

O homomorfismo $\mathrm{char}_\omega : H^\bullet(W_n) \rightarrow H^\bullet(G/\mathfrak{G}, \mathbb{R})$ associado à classes características de W_n-estruturas desmembra-se numa composição de dois homomorfismos, sendo eles $H^\bullet(W_n) \rightarrow H^\bullet(\mathfrak{g})$ e $H^\bullet(\mathfrak{g}) \rightarrow H^\bullet(G/\mathfrak{G}, \mathbb{R})$.

O primeiro deles é independente de $\mathfrak{G}$ e é induzido pela inclusão $\mathfrak{g} \hookrightarrow W_n$, onde escontram-se mais detalhes em [33].

O segundo homomorfismo é independente de H e corresponde ao homomorfismo canônico que determina as classes características da $\mathfrak{g}$-estrutura w em $G/\mathfrak{G}$. Caso o grupo G seja semisimples, a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é unitária e G contém um subgrupo $\mathfrak{G}$ para o qual $G/\mathfrak{G}$ é compacto. Para escolhas apropriadas de $\mathfrak{G}$ o kernel do homomorfismo $H^\bullet(\mathfrak{g}) \rightarrow H^\bullet(G/\mathfrak{G}, \mathbb{R})$ corresponde ao kernel de $H^\bullet(W_n) \rightarrow H^\bullet(\mathfrak{g})$.

Além do crescente interesse sobre os tópicos comentados acima, tem-se também que o estudo das funções de MacMahon (bi e tridimensionais) que vem sendo feito em diversas áreas da física estatística, como por exemplo em estudos sobre crescimento de cristais e em estatísticas de Bose-Einstein, recentemente ganhou um novo incremento em seu interesse científico, agora relacionado com a teoria topológica de cordas. Esse aumento se dá devido ao fato de que as funções de MacMahon (2D e 3D) são utilizadas em cálculos diretos de amplitudes do modelo A de cordas topológicas em variedades Calabi-Yau locais. E mais, essas funções também aparecem no estudo da teoria das representações de álgebras de Lie de dimensão infinita, sendo elas o caráter ch_V das representações básicas da álgebra $sl(\infty)$.

Cordas topológicas em variedades Calabi-Yau, por sua vez, tem sido um outro tópico de pesquisa intensa por anos e já existe um certo número de conjecturas relacionando amplitudes de cordas topológicas com diversas funções geradoras bastante interessantes tanto para físicos quanto os matemáticos. Vale lembrar também que o vértice topológico possui uma interpretação combinatorial em termos de contagens de partições 3D com assíntotas fixas. O formalismo do vértice topológico fornece um método para se calcular a função partição de cordas topológicas para variedades Calabi-Yau (*3-folds*) não-compactas. Com o intuito de se conseguir um refinamento da teoria de Gromov-Witten do 3-folds Calabi-Yau tóricos foi definido um vértice topológico refinado $C_{\lambda\mu\nu}(t, q)$ [13] que agora depende de um parâmetro extra comparado ao vértice topológico habitual.

Mas o vértice refinado pode ser utilizado para se definir invariantes (refinados) apenas quando o Calabi-Yau 3-fold tórico for composto por vértices, todos eles contendo um *locus* fixo (p, q) do ciclo evanescente (*vanishing cicles*) em T^2. Isso implica que é possível calcular as amplitudes de cordas topológicas refinadas apenas para 3-folds tóricos que são bastante especiais[1].

Esse trabalho se divide da seguinte maneira. No capítulo 2 considera-se a teoria da gravidade quântica 3D num espaço-tempo assintótico a AdS_3, cujo grupo de simetria (dadas as condições de contorno adequadas) é gerado pela álgebra de Virasoro e mostra-se que as funções partição *one-loop* são de fato funções partição de uma teoria conforme de campo bidimensional cuja a contribuição holomórfica corresponde ao caráter formal do módulo de Verma sobre a álgebra de Virasoro (*Vir-module*).

No capítulo 3 discutiu-se os aspectos homológicos das identidades de Macdonald que estão relacionadas com álgebras de Lie (Fórmula de Euler-Poincaré). Seguindo os principais resultados de [1], procurou-se apresentar uma breve introdução aos aspectos homológicos de complexos diferenciais e também mostrar como identidades combinatoriais, úteis para derivações de funções partição, podem ser obtidas a partir de complexos de álgebras de Lie. Como normalmente a fórmula de Euler-Poincaré é aplicada a *cadeias de complexos* de álgebras de Lie de dimensão finita, para o caso de dimensões infinitas considera-se álgebras de Lie *gradadas*.

No capítulo 4, com a ideia de ilustrar a correspondência entre as funções espectrais de geometria hiperbólica 3D (com seu espectro sendo codificado nas funções espectrais) e as séries de Poincaré associadas a estruturas conformes em duas dimensões, foram apresentadas as funções espectrais de Patterson-Selberg e de Ruelle de geometria hiperbólica tridimensional, usando como exemplo de aplicação a ligação da função zeta de Patterson-Selberg com o

[1] Pode-se obter um caso tórico a partir do vértice refinado utilizando-se a continuação analítica e manipulação dos vértices.

espectro do buraco negro BTZ e a escrita das funções partição da $\mathcal{N}$=1 Supergravidade em termos das funções de Ruelle.

O capítulo 5 começa com a ideia de uma *álgebra vértice* que foi, primeiramente, apresentada por Richard Bocherds. A rica estrutura algébrica da teoria da álgebra (de operadores) vértice garante uma formulação adequada e novas visões para a teoria da representação da Álgebra de Virasoro. A noção moderna de álgebra *chiral* na teoria de campo conforme basicamente corresponde à noção matemática da álgebra de operadores vértice. Aqui deu-se a definição para a álgebra de operadores vértice a partir de quatro axiomas deduzidos dos axiomas de Wightman. Depois foi apresentada a álgebra de operadores vértice q-deformados e suas generalizações juntamente com algumas de suas propriedades, sendo o foco principal a relação entre as funções de MacMahon [2] e de Ruelle, motivado pelo interesse crescente na aplicação de funções simétricas em diferentes áreas da física estatística e teoria topológica de cordas.

No capítulo 6 considera-se gêneros elípticos, que são invariantes topológicos naturais, sendo primeiramente calculados por Edward Witten, em [3]. Gêneros elípticos dos Modelos de Landau-Ginzburg (2,2) supersimétricos concebem caminhos eficazes para calcular gêneros elípticos de modelos sigma não-lineares correspondentes. Os gêneros elípticos de Landau-Ginzburg possuem um significado natural na cohomologia elíptica equivariante, mas focou-se no gênero elíptico dos modelos de Langau-Ginzburg sobre espaços vetoriais. Nesses exemplos mostrou-se que os gêneros elípticos podem ser reescritos em termos de funções espectrais de geometria hiperbólica associadas a q-séries.

Para a parte final (capítulos 7 e 8), viu-se uma interpretação combinatorial de vértices em termos de partições tridimensionais, posto que o *vértice refinado* possui uma interpretação em termos de amplitudes de cordas topológicas abertas na presença de A-branas.

Os principais resultados obtidos nesse trabalho:

- A forma final para uma brana lagrangeana, *stack* de branas, vértice refinado, funções partição para os casos de 3-folds Calabi-Yau são reescritos em termos de funções espectrais de geometria hiperbólica tridimensional associadas a q-séries.

- A relação entre modelos quânticos bidimensionais e tridimensionais se manifesta no fato que determinadas q-séries, como as séries características e

[2]Uma função de MacMahon p-dimensional é a função geradora da partição p-dimensional de inteiros, que é o número das diferentes formas de se dividir um inteiro utilizando-se arranjos p-dimensionais de inteiros não-negativos (não está claro onde a dimensão p da partição pode possuir um significado físico).

caráteres de álgebras de Lie superconformes, podem ser expressas de uma maneira universal em termos de geometria hiperbólica.

Parte dos resultados desse trabalho foram apresentados:

- Na "*7th International Conference Mathematical Methods in Physics*", 2012, Rio de Janeiro, RJ.
- Em seminário ministrado para o curso de graduação em física, dentro do curso Seminários I, 2013.

Artigos Publicados

1. A. A. Bytsenko, E. Elizalde and R. M. Luna. *The Casimir effect in Topological Field Theory: Case of Elliptic Genera.* 7th International Conference Mathematical Methods in Physics. Trieste: PoS - Proceedings of Science, 2012.
2. M. E. X. Guimarães, R. M. Luna and T. O. Rosa. *Topological Vertex, String Amplitudes and Spectral Functions of Hyperbolic Geometry.* Eur. Phys. J. C (2014) 74: 2880 European Physical Journal. C, Particles and Fields (Print) , 2014.

Capítulo 2

Correspondência AdS_3/CFT_2 e q-Séries

A ideia principal desse capítulo é comentar alguns aspéctos da correspondência AdS_3/CFT_2. Já é conhecido que a estrutura geométrica da gravidade $3D$ (e buracos negros) permite cálculos exatos desde que sua contraparte euclidiana seja localmente isomórfica ao espaço hiperbólico de curvatura constante. Devido à correspondência AdS_3/CFT_2, espera-se um relação entre funções espectrais relacionadas a AdS_3 (euclidiano) e funções tipo-modulares (séries de Poincaré) [1].

Assume-se que essa correspondência ocorra quando os argumentos das funções espectrais tomam valores em uma superfície riemaniana, vista como o contorno conforme de AdS_3.

Uma formulação geral para o *Princípio Holográfico* afirma que existe uma forte ligação entre certas quantidades da teoria de campos no *bulk* de uma variedade AdS_3 e quantidades no seu contorno no infinito. Mais precisamente, as classes de espaços Euclidianos AdS_3 são quocientes do espaço hiperbólico real por um grupo discreto. O contorno desses espaços podem ser superfícies orientadas compactas com estrutura conforme.

2.1 Gravidade Quântica em AdS_3

Sabe-se que a contribuição para a função partição da gravidade tridimensional em um espaço-tempo assintótico a AdS_3 vem de geometrias bem comportadas dadas por

$$M = AdS_3/\Gamma, \tag{2.1}$$

com Γ sendo um subgrupo discreto de $SO(3,1)$. De modo geral uma solução M da gravidade tridimensional com constante cosmológica negativa assume a forma AdS_3'/Γ, com AdS_3' sendo a parte de AdS_3 onde Γ atua de maneira discreta [12].

Mais precisamente, escreve-se M para o espaço-tempo tridimen-

[1] As formas modulares em questão são as formas para o subgrupo de congruência de $SL(2,\mathbb{Z})$.

sional e Σ, para seu contorno conforme [2], onde um grupo discreto Γ atua livremente num aberto $U \subset \mathbb{CP}^1$ de forma que $\Sigma = U/\Gamma$. A necessidade de que Σ possua *genus* 1 implica que topologicamente essa superfície seja um 2-tóro (T^2) e que o grupo fundamental de U seja um subgrupo do grupo fundamental de Σ (para que a relação acima comentada seja mantida). Restringiremos a análise de modo que o grupo fundamental de U seja[3] $\mathbb{Z}$, o que por sua vez significa que topologicamente U é $\mathbb{R} \times S^1$ e Γ isomórfico a $\mathbb{Z}$.

Dado que o módulo dessa superfície riemaniana Σ é definido para

$$\gamma \cdot \tau = (a\tau + b)/(c\tau + d), \tag{2.2}$$

com $\gamma \in SL(2, \mathbb{Z})$, é possível concluir que obtém-se uma variedade que obedece às condições acima descritas para toda escolha de a, b, c e d. Mas isso não é verdade já que uma vez definidos c e d, tem-se que a e b são unicamente determinados por $ad - bc = 1$ de forma que $(a, b) \to (a, b) + t(c, d)$, com $t \in \mathbb{Z}$. Assim as variedades que se encaixam nas devidas condições dependem somente de c e d.

Assim a contribuição para a função partição vem de geometrias $M_{c,d}$, onde c e d são pares de *inteiros primos entre si*, com $c \geq 0$ e o par (c, d) identificado com $(-c, -d)$. As variedades $M_{c,d}$ são todas difeomórficas entre si e devido a isso a contribuição $W_{c,d}(\tau)$ à função partição pode ser expressa em termos de qualquer uma delas por meio de uma transformação modular. Temos então que

$$W_{c,d}(\tau, \overline{\tau}) = W_{0,1}((a\tau + b)/(c\tau + d), \overline{\tau}). \tag{2.3}$$

E com isso pode-se construir:

$$W_{0,1}(\tau, \overline{\tau}) := |q\bar{q}|^{-k} \prod_{n=2}^{\infty} |1 - q^n|^{-2}. \tag{2.4}$$

Na Eq. (2.4) tem-se que $24k = c_L = c_R = c$, sendo c a carga central de uma teoria conforme de campos, $q = \exp(2\pi i\tau) = \exp[2\pi(-\mathrm{Im}\tau + i\mathrm{Re}\tau)]$ tal que $|q\overline{q}|^{-k} = \exp(4\pi k\mathrm{Im}\tau)$ corresponda ao prefator clássico.

As funções geradoras vistas como as contribuições conhecidas dos estados do modos *left-* e *right-movers* na teoria conforme de campos possuem a forma [12]

$$\sum_{c,d} W_{c,d}(\tau, \overline{\tau}) = \sum_{c,d} W_{0,1}((a\tau + b)/(c\tau + d), \overline{\tau})\,, \tag{2.5}$$

[2] Σ sendo uma superfície riemaniana de *genus* 1.

[3] O grupo fundamental de Σ é $\pi(\Sigma) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, o que permite que o grupo fundamental de U seja também isomórfico a $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ além de trivial.

e contribuem simplesmente com $Tr\exp(-\beta H - i\theta J)$, calculado num espaço de Hilbert. Lembrando que se conhecidos os autovalores da comutação dos operadores H e J no espaço de Hilbert, então é possível se calcular o traço. Agora apenas com o intuito de tecer alguns comentários sobre a soma sobre geometrias, sabe-se que as funções geradoras tem a forma[4]

$$\sum_{c,d} W_{c,d}(\gamma \cdot \tau, \overline{\tau}) \;=\; \sum_{c,d} \left| q^{-k} \prod_{n=2}^{\infty} (1-q^n)^{-1} \right|_{\gamma}^{2} \qquad (2.6)$$

Onde $|...|_\gamma$ representa a transformada de uma expressão $|...|$ por γ dado por (2.2). O somatório em (2.6) é independente da escolha de a e b em γ. Também vê-se que a soma em c e d em (2.6) deve ser vista como a soma sobre a *coset* $PSL(2,\mathbb{Z})/\mathbb{Z} \equiv (SL(2,\mathbb{Z})/\{\pm 1\})\mathbb{Z}$.

2.2 Módulo Verma sobre a Álgebra de Virasoro

A *álgebra de Virasoro* é uma álgebra de Lie de dimensão infinita, denotada por Vir, sobre $\mathbb{C}$ e com base L_n $(n \in \mathbb{Z})$, carga central c e as seguintes relações

$$[L_m, L_n] = (n-m)L_{n+m} + \delta_{n,-m}\frac{m^3-m}{12}c, \quad m,n \in \mathbb{Z}, \qquad (2.7)$$

$$[c, L_m] = 0, \quad m \in \mathbb{Z}. \qquad (2.8)$$

A álgebra Vir é uma extensão central (universal) da álgebra de Lie de campos vetoriais holomórficos no plano complexo [5] $\mathbb{C}$ (a menos da origem) possuindo séries de Laurent finitas. Devido a isso a álgebra Vir possui um papel central na teoria conforme de campo. A notável ligação entre a teoria de módulos de *peso-máximo* (*highest-weight*) sobre a álgebra Vir, teoria conforme de campo e mecânica estatística foi descoberta em [16].

Apenas com a intenção de ilustrar e relembrar alguns fatos e elementos da teoria das representações da álgebre Vir, definimos o *Módulo Verma* $M(c,h)$, com $c, h \in \mathbb{C}$, sobre Vir. A carga central conforme c atua em $M(c,h)$ como cI. Como tem-se que $[L_0, L_{-n}] = nL_{-n}$, L_0 é diagonalizável em $M(c,h)$ com espéctro $h + \mathbb{Z}_+$ e com a decomposição autoespaço

$$M(c,h) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}_+} M(c,h)_{h+j}\,, \qquad (2.9)$$

[4]Dada uma função de τ, como (2.6), que seja invariante por $\tau \to \tau + 1$, pode-se montar uma soma da forma $W(\tau, \overline{\tau}) = \Sigma_{c,d} W_{0,1}(\tau, \overline{\tau})$ conhecida como uma *série de Poincaré*.

[5]Álgebra de Witt de dimensão infinita.

onde $M(c,h)_{h+j}$ é gerado por elementos da base de $M(c,h)$. Como visto em [2], tem-se que $W_j = \dim M(c,h)_{h+j}$, onde W_j, visto como uma função de j, é a função partição clássica. Isso significa que a função partição de Konstant para a álgebra Vir é a função partição clássica. Por outro lado as funções partição podem ser reescritas na forma

$$\mathrm{Tr}_{M(c,h)}\, q^{L_0} := \sum_{\lambda} q^{\lambda} \dim M(c,h)_{\lambda} = q^h \prod_{j=1}^{\infty} (1-q^j)^{-1}\,. \tag{2.10}$$

A série $\mathrm{Tr}_{M(c,h)}\, q^{L_0}$ são ditas como sendo o *carácter formal* do módulo Vir V.

Para a gravidade tridimensional num espaço hiperbólico real as funções geradoras *one-loop*, sob a ótica de produtos de funções holomórficas e anti-holomórficas tem a forma

$$\log W^{1-\mathrm{loop}}_{\mathrm{gravity}}(\tau,\overline{\tau}) \;=\; [\prod_{n=2}^{\infty}(1-q^n)\cdot \prod_{n=2}^{\infty}(1-\overline{q}^n)]^{-1}. \tag{2.11}$$

A função partição completa (2.4) admite uma fatorização $W_{0,1}(\tau,\overline{\tau}) = W(\tau)_{\mathrm{hol}} \cdot W(\overline{\tau})_{\mathrm{antihol}}$, onde

$$W(\tau)_{\mathrm{hol}} = q^{-k}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{n+1})^{-1}\,, \qquad W(\overline{\tau})_{\mathrm{antihol}} = \overline{q}^{-k}\prod_{n=1}^{\infty}(1-\overline{q}^{n+1})^{-1}\,. \tag{2.12}$$

Vê-se que a contribuição holomórfica em (2.12) corresponde ao *caráter formal* do módulo Vir (2.10).

Capítulo 3

Aspéctos Homológicos das Identidades Combinatoriais

Primeiramente gostaríamos de analisar o que acreditamos ser a origem matemática das identidades combinatoriais que são a base da relação entre funções partição, séries de potências e homologias das álgebras de Lie. A meta para esse capítulo é fornecer uma curta introdução aos aspéctos homológicos de complexos diferenciais, em particular gostaríamos de mostrar como identidades combinatoriais podem ser derivadas de complexos de álgebras de Lie gradadas. Lembrando que os principais resultados seguem do livro [1] e sendo o nosso interesse a fórmula de Euler-Poincaré associada a complexos consistindo de espaços lineares de dimensão finita.

Introdução

Dada a *Identidade de Euler*

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(q^{\frac{3n^2-n}{2}}+q^{\frac{3n^2+n}{2}}\right)\\ &= 1-q-q^2+q^5+q^7-q^{12}-q^{15}+\cdots\,, \end{aligned}\tag{3.1}$$

descoberta por volta de 1740 e utilizada por ele[1] para a prova de corolários relacionados à decomposição de números inteiros. Em [1] é possível encontrar a demonstração e mais detalhes sobre tais corolários.

Anos após a descoberta de Euler, foi encontrada a identidade de *Gauss-Jacobi*,

$$\begin{aligned}&\prod_{m=1}^{\infty}(1-q_1^m q_2^m)(1-q_1^m q_2^{m-1})(1-q_1^{m-1}q_2^m)\\ &=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(q_1^{\frac{k(k+1)}{2}}q_2^{\frac{k(k-1)}{2}}+q_1^{\frac{k(k-1)}{2}}q_2^{\frac{k(k+1)}{2}}\right).\end{aligned}\tag{3.2}$$

Perceba que se definirmos $q_1=q^2$ e $q_2=q$, obtemos novamente a identidade de Euler. Mas se agora considerarmos sua derivada em relação a q_2 e só então

[1]Como Euler não obteve êxito em desmonstrá-la, essa relação foi vista como uma conjectura.

definirmos $q_1 = q$ e $q_2 = 1$, teremos a seguinte fórmula[2]

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^3 = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(2k-1)q^{\frac{k(k-1)}{2}}. \tag{3.3}$$

Com o passar dos anos mais identidades relacionando somas infinitas com produtos infinitos surgiram, dando origem à expressões para diferentes potências para a fórmula de Euler, $\prod(1-q^n)^k$, como exemplo as séries de Klein com $\prod(1-q^n)^8$ e de Dyson com $\prod(1-q^n)^{24}$. Sendo que para apenas alguns $k's$ tal fórmula possui uma forma "interessante" para a série [1].

A relação entre álgebras de Lie e identidades combinatoriais foi descoberta por Macdonald [23, 24], sendo a fórmula de Euler-Poincarè útil para as identidades combinatoriais ditas *Identidades de Macdonald* que por sua vez estão relacionadas às álgebras de Lie de diferentes maneiras e podem ser associadas a funções geradoras (em particular, gêneros elípticos) na teoria quântica.

De modo a compreender a relação existente a fórmula de Euler e álgebras de Lie o capítulo de desdobra.

3.1 Complexos Diferenciais

Esta seção relembrará algumas das definições de complexos diferenciais que serão utilizados na sequência desse capítulo.

A soma direta $\mathfrak{C}^\bullet = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathfrak{C}^k$ de espaços vetoriais $\mathfrak{C}^k$ indexada por k inteiros é dita um *complexo diferencial* se existem homomorfismos

$$... \longrightarrow \mathfrak{C}^{k-1} \xrightarrow{\delta} \mathfrak{C}^k \xrightarrow{\delta} \mathfrak{C}^{k+1} \longrightarrow ..., \tag{3.4}$$

de modo que $\delta^2 = 0$. Tal homomorfismo δ é chamado de *operador diferencial* do complexo $\mathfrak{C}^\bullet$. Elementos $c^k \in \mathfrak{C}^k$ são ditos k-*cochains*.

Considere o espaço Z^k definido por

$$Z^k := \mathrm{Ker}\delta \cap \mathfrak{C}^k = \{z^k \in \mathfrak{C}^k \text{ tal que } \delta z^k = 0\}\ , \tag{3.5}$$

sendo que elementos $z^k \in Z^k$ são chamados de k-*cocycles* enquanto Z^k dito o *espaço dos* k-*cocycles*.

Já um espaço B^k sendo definido por

$$B^k := \mathrm{Im}\delta \cap \mathfrak{C}^k = \{b^k \in \mathfrak{C}^k \text{ tal que } b^k = \delta c^{k-1} \text{ para um } c^{k-1} \in \mathfrak{C}^{k-1}\} \tag{3.6}$$

[2]É notável que o cubo da série de Euler possua uma "forma" mais simples que a própria série em si.

é dito *espaço dos k-coboundaries* e elementos $b^k \in B^k$ ditos *k-coboundaries.*

É possivel perceber que $B^k \subset Z^k \subset \mathfrak{C}^k$, e de fato cada k-coboundary b^k é um k-cocycle: $\delta b^k = \delta^2 c^{k-1} = 0$.

Cocycles z^k tais que $z^k \neq \delta c^{k-1}$ são ditos *k-cocycles não-triviais.* O espaço dos k-cocycles não-triviais é parametrizado pelo espaço quociente

$$H^k := Z^k / B^k.$$

O espaço H^k é dito *k-ésimo espaço cohomológico* do complexo $\mathfrak{C}^\bullet$. A cohomologia do complexo diferencial $\mathfrak{C}^\bullet$ é a soma direta de espaços quocientes H^k, assumindo a forma de $H^\bullet = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} H^k$.

3.1.1 Exemplos

Complexo de De Rham

Seja X uma variedade diferenciável (bem comportada) de dimensão real n, $\Omega^k(X)$ é o espaço das k-formas diferenciais em X e d é a derivada exterior: $\Omega^k(X) \to \Omega^{k+1}(X)$, $d^2 = 0$. Dessa maneira temos o complexo diferenciável de De Rham

$$\Omega^\bullet(X) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k(X)\,. \tag{3.7}$$

Uma forma diferencial ω em X é chamada *fechada* se $d\omega = 0$. Uma forma diferencial τ em X é chamada *exata* se $\tau = d\varphi$ para alguma forma φ.

Definindo $Z^k_{dR}(X)$ como sendo o espaço das k-formas fechadas em X e que $B^k_{dR}(X)$ seja o espaço das k-formas exatas em X, nota-se que

$$B^k_{dR}(X) \subset Z^k_{dR}(X) \subset \Omega^k(X).$$

Lembrando que na linguagem de complexos diferenciais as k-formas fechadas e exatas são chamadas respectivamente de *k-cocycles* e *k-coboundaries* de De Rham. Assim o espaço quociente $H^k_{dR}(X) = Z^k_{dR}(X)/B^k_{dR}(X)$ é chamado de *k-ésimo espaço cohomológico de De Rham* de X e a soma direta

$$H^\bullet_{dR}(X) = \bigoplus_{k=0}^{n} H^k_{dR}(X) \tag{3.8}$$

é dita *Cohomologia de De Rham* de X.

Complexo de Doulbeault

Seja Y uma variedade de dimensão complexa n e $\Omega^{p,q}(Y)$ o espaço das (p,q)-formas (bem comportadas) em Y. A derivada exterior d em uma variedade complexa é dividida em uma soma direta de dois operadores diferenciais ∂ e $\bar{\partial}$, tais que

$$d = \partial + \bar{\partial} \ , \ d^2 = \partial^2 = \bar{\partial}^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0.$$

Esses operadores diferenciais atuam no espaço $\Omega^{p,q}(Y)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \partial : &\quad \Omega^{p,q}(Y) \longrightarrow \Omega^{p+1,q}(Y), \quad \bar{\partial} : \Omega^{p,q}(Y) \longrightarrow \Omega^{p,q+1}(Y) \ , \\ d : &\quad \Omega^{p,q}(Y) \longrightarrow \Omega^{p+1,q}(Y) \oplus \Omega^{p,q+1}(Y) \ . \end{aligned} \tag{3.9}$$

Considere a sequência de homomorfismos

$$\Omega^{p,0}(Y) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{p,1}(Y) \xrightarrow{\bar{\partial}} ... \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{p,n}(Y) \longrightarrow 0 \, . \tag{3.10}$$

Visto que $\bar{\partial}^2 = 0$, a soma direta $\Omega^{p,\bullet}(Y) = \overset{n}{\underset{q=0}{\oplus}} \Omega^{p,q}(Y)$ dos espaços $\Omega^{p,q}(Y)$ é um complexo diferencial, dito *Complexo de Doulbeault.*

Uma (p, q)-forma ω é dita *$\bar{\partial}$-fechada* se $\bar{\partial}\omega = 0$. Para o caso $q = 0$ tais formas $\bar{\partial}$-fechadas são ditas *holomórficas*. Seja

$$Z^{p,q}_{\bar{\partial}}(Y) := \mathrm{Ker}\bar{\partial} \cap \Omega^{p,q}(Y) = \{\omega \in \Omega^{p,q}(Y) \text{ tal que } \bar{\partial}\omega = 0\} \tag{3.11}$$

o espaço das (p, q)-formas $\bar{\partial}$-fechadas, i.e. q-cocycles de Doulbeault na linguagem de complexos diferenciais, e seja

$$\begin{aligned} B^{p,q}_{\bar{\partial}}(Y) \ &:= \ \mathrm{Im}\bar{\partial} \cap \Omega^{p,q}(Y) = \{\tau \in \Omega^{p,q}(Y) \\ \text{tal que} \quad \tau \ &= \ \bar{\partial}\nu \quad \text{para algum} \quad \nu \in \Omega^{p,q-1}(Y)\} \end{aligned} \tag{3.12}$$

o espaço das (p, q)-formas $\bar{\partial}$-exatas, i.e. q-coboundaries de Doulbeault.

Denotando por $\mathcal{E}^p(Y) := Z^{p,0}_{\bar{\partial}}(Y)$ o espaço das $(p, 0)$-formas holomórficas, o espaço quociente $H^{p,q}_{\bar{\partial}}(Y) = Z^{p,q}_{\bar{\partial}}(Y)/B^{p,q}_{\bar{\partial}}(Y)$ é chamado de (p, q)-*iésimo espaço cohomológico de Doulbeault* de Y.

Por fim, a soma direta

$$H^{p,\bullet}_{\bar{\partial}}(Y) = \overset{n}{\underset{q=0}{\oplus}} H^{p,q}_{\bar{\partial}}(Y) \tag{3.13}$$

é dita *Cohomologia de Doulbeault* de Y.

3.2 Complexos de Álgebras de Lie

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão infinita, e assumindo que esta álgebra possua uma gradação, i.e. $\mathfrak{g}$ é uma soma direta de suas componentes homogêneas $\mathfrak{g}_{(\lambda)}$, onde λ são elementos de um grupo abeliano;

$$[\mathfrak{g}_{(\lambda)}, \mathfrak{g}_{(\mu)}] \subset \mathfrak{g}_{(\lambda+\mu)}. \tag{3.14}$$

Consideremos um módulo A sobre $\mathfrak{g}$, ou $\mathfrak{g}$-*module*. A é um espaço vetorial com uma propriedade de modo que exista um mapa bilinear $\mu : \mathfrak{g}\times A \to A$ tal que

$$[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] = \mathfrak{g}_1(\mathfrak{g}_2 a) - \mathfrak{g}_2(\mathfrak{g}_1 a)$$

para todo $a \in A$, $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2 \in \mathfrak{g}$. Em outras palavras, esse $\mathfrak{g}$-*module* é um módulo esquerdo sobre a álgebra envolvente universal $U(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$, sendo que $U(\mathfrak{g})$ é a álgebra quociente da álgebra tensorial

$$T^n\mathfrak{g} = \bigoplus_{n=0}^{\infty}(\overbrace{\mathfrak{g}\otimes ... \otimes \mathfrak{g}}^{n-\text{vezes}})$$

pelo ideal gerado pelos elementos da forma $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] - (\mathfrak{g}_1 \otimes \mathfrak{g}_2 - \mathfrak{g}_2 \otimes \mathfrak{g}_1)$.

Seja $C^n(\mathfrak{g}; A)$ o espaço de todas as *cochains*, uma *cochain* n-dimensional da álgebra $\mathfrak{g}$ com coeficientes em A sendo um funcional antissimétrico n-linear sobre $\mathfrak{g}$ com valores em A. Desde que $C^n(\mathfrak{g}; A) = \mathrm{Hom}(\Lambda^n, A)$, o espaço *cochain* $C^n(\mathfrak{g}; A)$ se torna um $\mathfrak{g}$-*module*.

O diferencial $d = d_n : C^n(\mathfrak{g}; A) \to C^{n+1}(\mathfrak{g}; A)$ pode ser definido como

$$\begin{aligned} dc(\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_{n+1}) &= \sum_{1\leq s\leq t\leq n+1} (-1)^{s+t-1} c([\mathfrak{g}_s, \mathfrak{g}_t], \mathfrak{g}_1, \dots, \widehat{\mathfrak{g}}_s, \dots \widehat{\mathfrak{g}}_t, \dots, \mathfrak{g}_{n+1}) \\ &+ \sum_{1\leq s\leq n+1} (-1)^s \mathfrak{g}_s c(\mathfrak{g}_1, \dots, \widehat{\mathfrak{g}}_s, ..., \mathfrak{g}_{n+1}), \end{aligned} \tag{3.15}$$

onde $c \in C^n(\mathfrak{g}; A)$, $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_{n+1} \in \mathfrak{g}$, e $C^n(\mathfrak{g}; A) = 0$, $d_n = 0$ para $n < 0$. Como tem-se que $d_{n+1} \circ d_n = 0$ para todo n, o conjunto $C^\bullet(\mathfrak{g}; A) \equiv \{C^n(\mathfrak{g}; A), d_n\}$ é um complexo algébrico, enquanto a cohomologia correspondente $H^n(\mathfrak{g}; A)$ é conhecida como a cohomologia da álgebra $\mathfrak{g}$ com coeficientes em A.

Seja $C_n(\mathfrak{g}; A)$ o espaço das *chains* n dimensionais da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Podemos definí-lo como $A \otimes \Lambda^n\mathfrak{g}$. O diferencial $\delta = \delta_n : C_n(\mathfrak{g}; A) \to C_{n-1}(\mathfrak{g}; A)$ é definido pela fórmula

$$\begin{aligned} \delta(a \otimes (\mathfrak{g}_1 \wedge \dots \wedge \mathfrak{g}_n)) &= \sum_{1\leq s\leq t\leq n} (-1)^{s+t-1} a \otimes ([\mathfrak{g}_s, \mathfrak{g}_t] \wedge \mathfrak{g}_1 \wedge \dots \widehat{\mathfrak{g}}_s \dots \widehat{\mathfrak{g}}_t \dots \wedge \mathfrak{g}_n) \\ &+ \sum_{1\leq s\leq n} (-1)^s \mathfrak{g}_s a \otimes (\mathfrak{g}_1 \wedge \dots \widehat{\mathfrak{g}}_s \dots \wedge \mathfrak{g}_n). \end{aligned} \tag{3.16}$$

A homologia $H_n(\mathfrak{g}; A)$ do complexo $\{C_n(\mathfrak{g}; A), \delta_n\}$ é conhecida como a homologia da álgebra $\mathfrak{g}$.

3.2.1 Fórmula de Euler-Poincaré

Suponha agora que o $\mathfrak{g}$-*module* A possa ser gradado por componentes homogêneas $A_{(\mu)}$ de tal maneira que $\mathfrak{g}_{(\lambda)}A_{(\mu)} \subset A_{(\lambda+\mu)}$. Para o caso em que o módulo A é trivial assume-se que $A = A_{(0)}$. A gradação de nossas álgebras de Lie confere uma gradação aos dois espaços, *chains* e *cochains*, de modo que podemos definir

$$\begin{aligned} C^n_{(\lambda)}(\mathfrak{g}; A) &= \{c \in C^n(\mathfrak{g}; A) | c(\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n) \\ &\in A_{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n-\lambda)} \quad \text{para} \quad \mathfrak{g}_i \in \mathfrak{g}_{(\lambda_i)}\}; \end{aligned} \tag{3.17}$$

e

$$\begin{aligned} &C^{(\lambda)}_n(\mathfrak{g}; A) \quad \text{sendo gerada pelas cadeias} \; a \otimes (\mathfrak{g}_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{g}_n),\; a \in A_{(\mu)}, \\ &\mathfrak{g}_i \in \mathfrak{g}_{(\lambda_i)}, \quad \lambda_1 + \ldots + \lambda_n + \mu = \lambda\,. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Temos $d(C^n_{(\lambda)}(\mathfrak{g}; A)) \subset C^{n+1}_{(\lambda)}(\mathfrak{g}; A)$ e $\delta(C^{(\lambda)}_n(\mathfrak{g}; A)) \subset C^{(\lambda)}_{n-1}(\mathfrak{g}; A)$ e ambos os espaços adiquirem gradações, já que as estruturas multiplicativas cohomológicas (e homológicas) são compatíveis com as gradações, por exemplo, $H^m_{(\lambda)}(\mathfrak{g}) \otimes H^n_{(\mu)}(\mathfrak{g}) \subset H^{m+n}_{(\lambda+\mu)}(\mathfrak{g})$.

O complexo $C_\bullet(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g} = \oplus_{\lambda=1}^{\infty}\mathfrak{g}_{(\lambda)}$, $\dim \mathfrak{g}_{(\lambda)} < \infty$, pode ser decomposto numa soma de complexos

$$0 \longleftarrow C^{(\lambda)}_0(\mathfrak{g}) \longleftarrow C^{(\lambda)}_1(\mathfrak{g}) \ldots \longleftarrow C^{(\lambda)}_N(\mathfrak{g}) \longleftarrow 0\,, \tag{3.19}$$

de maneira que cada complexo $C^{(\lambda)}_\bullet(\mathfrak{g})$,para cada λ, é composto de um número finito de espaços de dimensão finita. Dadas tais condições, a fórmula de Euler-Poincaré nos fornece:

$$\sum_m (-1)^m \dim C^{(\lambda)}_m(\mathfrak{g}; A) = \sum_m (-1)^m \dim H^{(\lambda)}_m(\mathfrak{g}; A)\,. \tag{3.20}$$

Com o intuito de agrupar tal sequência de identidades, podemos introduzir uma variável formal q e reescrever a identidade (3.20) como uma série formal de potências [3]:

$$\sum_{m,\lambda}(-1)^m q^\lambda \dim C_m^{(\lambda)}(\mathfrak{g}) = \sum_{m,\lambda}(-1)^m q^\lambda \dim H_m^{(\lambda)}(\mathfrak{g}) = \prod_n (1-q^n)^{\dim \mathfrak{g}_n}. \quad (3.21)$$

Para uma álgebra de dimensão finita $\mathfrak{g}$ obviamente temos $C^n(\mathfrak{g}) = [C_n(\mathfrak{g})]^*$ e $H^n(\mathfrak{g}) = [H_n(\mathfrak{g})]^*$, onde o símbolo $*$ denota o espaço dual. Está claro que no caso de cohomologias temos uma série de potências semelhante a 3.21. Para o caso de dimensão finita, bem como para o caso de dimensão infinita, um elemento do espaço $H^n(\mathfrak{g}; A)$ define um mapa linear $H_n(\mathfrak{g}) \to A$; se a álgebra $\mathfrak{g}$ e o módulo A tem dimensão finita, então $H^n(\mathfrak{g}; A^*) = [H_n(\mathfrak{g}; A)]^*$.

De modo a obter a identidade em sua forma final, a homologia $H_m^{(\lambda)}(\mathfrak{g})$ deve ser calculada.

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie (poli)gradada,

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\substack{\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_k \geq 0 \\ \lambda_1 + \ldots + \lambda_k > 0}} \mathfrak{g}_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)},$$

satisfazendo a condição $\dim \mathfrak{g}_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)} < \infty$. Para séries de potências formais em $q_1, \ldots, q_k$ temos a seguinte identidade [1]:

$$\sum_{m, \lambda_1, \ldots, \lambda_k} (-1)^m q_1^{\lambda_1} \ldots q_k^{\lambda_k} H_m^{(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)} = \prod_{n_1, \ldots, n_k} (1 - q_1^{n_1} \cdots q_k^{n_k})^{\dim \mathfrak{g}_{n_1, \ldots, n_k}}. \quad (3.22)$$

Pode-se encontrar em [1] alguns cálculos da homologia $H_m^{(\lambda)}$ nas suas formas finais. Existem álgebras que podem ser construídas de automorfismos exteriores de álgebras simples que possuem um centro finito. Nesse caso tem-se que encontrar as dimensões do espaço $H_\bullet^{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)}(\mathfrak{g})$.

De maneira geral pode-se obter certas fórmulas para os polinômios de Poincaré da seguinte forma

$$\prod_n (1-q^n)^{\dim \mathfrak{g}_n}, \qquad \prod_n (1-q^n)^{\operatorname{rank} \mathfrak{g}_n}. \quad (3.23)$$

Essas fórmulas estão associadas às dimensões das homologias de espaços topológicos adequados e vinculadas a funções geradoras e, possivelmente, a *gêneros elípticos*. No próximo capítulo mostraremos que funções geradoras da forma (3.23) possuem representações em termos de funções espectrais do tipo Selberg relacionadas ao subgrupo de congruência de $SL(2, \mathbb{Z})$.

[3] Se A é o *corpo principal* a notação $C_n(\mathfrak{g}; A)$, $H_n(\mathfrak{g}; A)$ é abreviada para $C_n(\mathfrak{g})$,$H_n(\mathfrak{g})$.

Capítulo 4

Funções Espectrais de Geometria Hiperbólica e Aplicações

Esse capítulo foi organizado de maneira a ilustrar a correspondência entre as funções espectrais de geometria hiperbólica 3D (seu espectro a ser codificado nas funções espectrais Petterson-Selberg) e as séries de Poincaré associadas a estruturas conformes em duas dimensões.

Começando com a ideia de conjugação em $SL(2,\mathbb{C})$ e utilizando a notação usual para $G = GL(2,\mathbb{C})$ sendo o grupo as matrizes S 2×2 com entradas em $\mathbb{C}$ (corpo dos números complexos) e $\det S \neq 0$. Temos o subgrupo $SL(2,\mathbb{C})$ dos elementos S de G com $\det S = 1$.

Dados A,$B \in G$, denota-se que A e B são G-conjugados se para algum $S \in G$ tem-se $A = SBS^{-1}$.

Sendo $A \in SL(2,\mathbb{C})$ e $A \neq \pm 1$, então A é G-conjugado a uma matriz do tipo

$$\begin{bmatrix} \pm 1 & 1 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{bmatrix},$$

com $\lambda \neq 0, \pm 1$. Com isso em mãos classifica-se A como sendo:

- Um elemento *parabólico* se $\operatorname{Tr} A = \pm 2$,
- Um elemento *elíptico* se $\operatorname{Tr} A \in \mathbb{R}$ e $|\operatorname{Tr} A| < 2$,
- Um elemento *hiperbólico* se $\operatorname{Tr} A \in \mathbb{R}$ e $|\operatorname{Tr} A| > 2$.

Caso $\operatorname{Tr} A \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$ A é dito *loxodrômico.*

Agora para $a, b \in \mathbb{R}$ (fixos), com $a \neq 0$ [1], define-se

$$\gamma = \gamma_{(a,b)} := \begin{bmatrix} e^{a+ib} & 0 \\ 0 & e^{-(a+ib)} \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

O subgrupo discreto $\Gamma = \Gamma_{(a,b)} \in SL(2,\mathbb{C})$ gerado por γ é dado por

$$\Gamma := \{\gamma^n \mid n \in \mathbb{Z}\}. \tag{4.2}$$

[1] $a \neq 0$ implica que $\gamma \neq \pm 1$. γ é loxodrômico a menos que $b = \pi n$, com $n \in \mathbb{Z}$, o que nesse caso deixa γ hiperbólico.

O grupo complexo unimodular $G = SL(2,\mathbb{C})$ age no espaço hiperbólico real H^3 de maneira padrão, ou seja, para $(x,y,z) \in H^3$ e $g \in G$, temos $g \cdot (x,y,z) = (u,v,w) \in\ H^3$.

Onde temos que $r = x + iy$,

$$g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \tag{4.3}$$

$$u + iv = [(ar+b)\overline{(cr+d)} + a\bar{c}z^2] \cdot [|cr+d|^2 + |c|^2 z^2]^{-1}, \tag{4.4}$$

$$w = z \cdot [|cr+d|^2 + |c|^2 z^2]^{-1}. \tag{4.5}$$

Aqui a barra indica o conjugado complexo.

4.1 Função Espectral de Selberg-Patterson

Seja $\Gamma \in G$ um grupo discreto de G definido como

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{\mathrm{diag}(e^{2n\pi(\mathrm{Im}\,\tau + i\mathrm{Re}\,\tau)},\ e^{-2n\pi(\mathrm{Im}\,\tau + i\mathrm{Re}\,\tau)}) : n \in \mathbb{Z}\} = \{\mathfrak{g}^n \,:\, n \in \mathbb{Z}\}\,, \\ \gamma &= \mathrm{diag}(e^{2\pi(\mathrm{Im}\,\tau + i\mathrm{Re}\,\tau)},\ e^{-2\pi(\mathrm{Im}\,\tau + i\mathrm{Re}\,\tau)})\,. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Pode-se definir a função zeta tipo Selberg para o grupo $\Gamma = \{\gamma^n : n \in \mathbb{Z}\}$ gerado por um simples elemento hiperbólico da forma $\gamma = \mathrm{diag}(e^z, e^{-z})$ [20], onde $z = \alpha + i\beta$ para $\alpha, \beta > 0$. De fato tomaremos $\alpha = 2\pi\mathrm{Im}\,\tau$, $\beta = 2\pi\mathrm{Re}\,\tau$. Para uma ação padrão de $SL(2,\mathbb{C})$ em H^3 tem-se

$$\gamma \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & e^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & e^\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\mathrm{sen}(\beta) & 0 \\ \mathrm{sen}(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

Portanto γ é uma composição de uma rotação em $\mathbb{R}^2$ com autovalores complexos $\exp(\pm i\beta)$ e uma dilatação $\exp(\alpha)$.

A função espectral de Selberg-Patterson $Z_\Gamma(s)$ pode ser atrelada a H^3/Γ (veja [8]) como se segue:

$$Z_\Gamma(s) := \prod_{\substack{k_1,k_2 \geq 0 \\ k_1,k_2 \in \mathbb{Z}}}^{\infty} [1 - (e^{i\beta})^{k_1} (e^{-i\beta})^{k_2} e^{-(k_1+k_2+s)\alpha}]\,. \tag{4.8}$$

Os zeros de $Z_\Gamma(s)$ são precisamente os números complexos

$$\zeta_{n,k_1,k_2} = -(k_1+k_2) + i(k_1-k_2)\beta/\alpha + 2\pi i n/\alpha, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{4.9}$$

O logarítmo de $Z_\Gamma(s)$ para $\operatorname{Re} s > 0$ é dado por [8]

$$\log Z_\Gamma(s) = -\frac{1}{4}\sum_{n\in\mathbb{Z}_+}^{\infty} \frac{e^{-n\alpha(s-1)}}{n[\sinh^2\left(\frac{\alpha n}{2}\right) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\beta n}{2}\right)]}\,. \tag{4.10}$$

4.1.1 Funções Geradoras

Utilizando a igualdade

$$\operatorname{senh}^2(\alpha \mathrm{n}/2) + \operatorname{sen}^2(\beta \mathrm{n}/2) = |\operatorname{sen}(\mathrm{n}\pi\tau)|^2 = |1-\mathrm{q}^\mathrm{n}|^2/(4|\mathrm{q}|^\mathrm{n}) \tag{4.11}$$

e a equação (4.10) pode-se encontrar as seguintes relações:

$$\begin{aligned}\log\prod_{m=\ell}^{\infty}(1-q^{m+\varepsilon}) &= \sum_{m=\ell}^{\infty}\log(1-q^{m+\varepsilon}) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{(\ell+\varepsilon)n}(1-\overline{q}^n)|q|^{-n}}{4n|\operatorname{sen}(n\pi\tau)|^2}\\ &= \log\left[\frac{Z_\Gamma(\xi(1-it))}{Z_\Gamma(\xi(1-it)+1+it)}\right],\end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned}\log\prod_{m=\ell}^{\infty}(1-\overline{q}^{m+\varepsilon}) &= \sum_{m=\ell}^{\infty}\log(1-\overline{q}^{m+\varepsilon}) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{q}^{(\ell+\varepsilon)n}(1-q^n)|q|^{-n}}{4n|\operatorname{sen}(n\pi\tau)|^2}\\ &= \log\left[\frac{Z_\Gamma(\xi(1+it))}{Z_\Gamma(\xi(1+it)+1-it)}\right],\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}\log\prod_{m=\ell}^{\infty}(1+q^{m+\varepsilon}) &= \sum_{m=\ell}^{\infty}\log(1+q^{m+\varepsilon}) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{(\ell+\varepsilon)n}(1-\overline{q}^n)|q|^{-n}}{4n|\operatorname{sen}(n\pi\tau)|^2}\\ &= \log\left[\frac{Z_\Gamma(\xi(1-it)+i\eta(\tau))}{Z_\Gamma(\xi(1+it)+1-it+i\eta(\tau))}\right],\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}\log\prod_{m=\ell}^{\infty}(1+\overline{q}^{m+\varepsilon}) &= \sum_{m=\ell}^{\infty}\log(1+\overline{q}^{m+\varepsilon}) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{(\ell+\varepsilon)n}(1-q^n)|q|^{-n}}{4n|\operatorname{sen}(n\pi\tau)|^2}\\ &= \log\left[\frac{Z_\Gamma(\xi(1+it)+i\eta(\tau))}{Z_\Gamma(\xi(1+it)+1-it+i\eta(\tau))}\right],\end{aligned} \tag{4.15}$$

onde $\ell \in \mathbb{Z}_+$, $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $t = \operatorname{Re}\tau/\operatorname{Im}\tau$, $\xi = \ell+\varepsilon$ e $\eta(\tau) = \pm(2\tau)^{-1}$.

Lembrando que a função η de Dedekind é dada por

$$\eta_D(q) \equiv q^{1/24} \prod_{n\in\mathbb{Z}_+} (1-q^n),$$

vamos agora apresentar algumas funções já bem conhecidas e suas propriedades modulares sob a ação de $SL(2,\mathbb{Z})$, para os casos especiais associados a (4.12) e (4.13), (veja [2] para mais detalhes):

$$f_1(q) = q^{-\frac{1}{48}} \prod_{m\in\mathbb{Z}_+} (1-q^{m+\frac{1}{2}}) = \frac{\eta_D(q^{\frac{1}{2}})}{\eta_D(q)}, \quad (4.16)$$

$$f_2(q) = q^{-\frac{1}{48}} \prod_{m\in\mathbb{Z}_+} (1+q^{m+\frac{1}{2}}) = \frac{\eta_D(q)^2}{\eta_D(q^{\frac{1}{2}})\eta_D(q^2)}, \quad (4.17)$$

$$f_3(q) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{m\in\mathbb{Z}_+} (1+q^{m+1}) = \frac{\eta_D(q^2)}{\eta_D(q)}. \quad (4.18)$$

A extensão linear de $f_1(q), f_2(q)$ e $f_3(q)$ é invariante sob $SL(2,\mathbb{Z})$ [2], ou seja[2],

$$g \in \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \text{temos} \quad \mathrm{g}\cdot \mathrm{f}(\tau) = \mathrm{f}\left(\frac{\mathrm{a}\tau+\mathrm{b}}{\mathrm{c}\tau+\mathrm{d}}\right).$$

4.2 Função de Ruelle

Uma função de Ruelle $\mathcal{R}(s)$ pode ser definida[3] para uma $\mathrm{Re}\, s$ grande e meromorficamente continuada para o plano complexo inteiro $\mathbb{C}$ [9]. $\mathcal{R}(s)$ é um produto altenado de fatores mais complicados, sendo cada um deles uma função espectral de Selberg,

$$\mathcal{R}(s) := \prod_{p=0}^{\dim X-1} Z_\Gamma(s+p)^{(-1)^p}. \quad (4.19)$$

Introduzindo a seguir as funções de Ruelle $\mathcal{R}(s)$, $\mathcal{R}(\overline{s})$, $\mathcal{R}(\sigma)$, $\mathcal{R}(\overline{\sigma})$:

$$\prod_{n=\ell}^{\infty}(1-q^{n+\varepsilon}) = \prod_{p=0,1} Z_\Gamma(s+p(1+it))^{(-1)^p} = \mathcal{R}(s=\xi(1-it)), \quad (4.20)$$

[2]Pode ser mostrado que essas são formas modulares de *peso* 0 para o principal subgrupo de congruência Γ^{48}.

[3]Para uma variedade fechada hiperbólica tridimensional da forma $X = H^3/\Gamma$ (e qualquer representação ortogonal de $\pi_1(X)$) a torção analítica toma a forma [11]: $[T_{\mathrm{an}}(X)]^2 = \mathcal{R}(0)$.

$$\prod_{n=\ell}^{\infty}(1-\overline{q}^{n+\varepsilon}) = \prod_{p=0,1} Z_\Gamma(\overline{s}+p(1-it))^{(-1)^p} = \mathcal{R}(\overline{s}=\xi(1+it)), \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned}\prod_{n=\ell}^{\infty}(1+q^{n+\varepsilon}) &= \prod_{p=0,1} Z_\Gamma(\sigma+p(1+it))^{(-1)^p}\\ &= \mathcal{R}(\sigma=\xi(1-it)+i\eta(\tau)), \quad (4.22)\\ \prod_{n=\ell}^{\infty}(1+\overline{q}^{n+\varepsilon}) &= \prod_{p=0,1} Z_\Gamma(\overline{\sigma}+p(1-it))^{(-1)^p}\\ &= \mathcal{R}(\overline{\sigma}=\xi(1+it)+i\eta(\tau))\,. \quad (4.23)\end{aligned}$$

Como sabe-se que $f_1(q)\cdot f_2(q)\cdot f_3(q)=1$ tem-se

$$\mathcal{R}(s=3/2-(3/2)it)\cdot\mathcal{R}(\sigma=3/2-(3/2)it+i\eta(\tau))\cdot\mathcal{R}(\sigma=2-2it+i\eta(\tau))=1\,. \quad (4.24)$$

Um conjunto de funções geradoras úteis se encontra na tabela no apêndice.

4.3 Exemplos

4.3.1 Buraco Negro BTZ

O buraco negro BTZ possui uma descrição dada por

$$B_{\Gamma_{(a,b)}} = H^3/\Gamma_{(a,b)}$$

para parâmetros $a>0$, $b\geq 0$, onde $H^3=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z>0\}$ é um espaço hiperbólico 3-dimensional e $\Gamma_{(a,b)}\subset SL(2,\mathbb{C})$ é um grupo cíclico de isomerias. Sabe-se que $B_{\Gamma_{(a,b)}}$ é solução das equações de Einstein

$$R_{ij}-\frac{1}{2}g_{ij}R_g-\Lambda g_{ij}=0 \quad (4.25)$$

com constante cosmológica Λ negativa, uma métrica hiperbólica

$$ds^2=\frac{\sigma^2}{z^2}(dx^2+dy^2+dz^2) \quad (4.26)$$

com $\sigma=(-\Lambda)^{-\frac{1}{2}}$, e curvatura escalar constante $R_g=\frac{6}{\sigma^2}=-6\Lambda$. A métrica original de BTZ em coordenadas (r,ϕ,τ) pode ser transformada para a encontrada na equação (4.26) por meio de uma mudança de coordenadas $(r,\phi,\tau)\to(x,y,z)$

[4] (veja [8, 20]).

Sejam $M > 0$, $J \geq 0$ a massa e o momento angular do buraco negro BTZ, respectivamente, e seja $r_+ > 0, r_- \in i\mathbb{R}$ [5] os horizontes externo e interno dados por:

$$r_+^2 = \frac{M\sigma^2}{2}\left[1 + \left(1 + \frac{J^2}{M^2\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right], \tag{4.27}$$

$$r_- = -\frac{\sigma J i}{2r_+}, \tag{4.28}$$

Define-se

$$a := \pi r_+/\sigma, \;\; b := \pi\left|r_-\right|/\sigma. \tag{4.29}$$

E tem-se $\Gamma_{(a,b)}$ definido com o subgrupo cíclico de $G = SL(2, \mathbb{C})$ cujo gerador é:

$$\gamma_{(a,b)} := \begin{bmatrix} e^{a+ib} & 0 \\ 0 & e^{-(a+ib)} \end{bmatrix}, \tag{4.30}$$

$$\Gamma_{(a,b)} := \{\gamma_{(a,b)}^n \mid n \in \mathbb{Z}\}. \tag{4.31}$$

O elemento de volume Riemaniano dv correspondente a (4.26) é dado por

$$dv = \frac{\sigma^3}{z^3} dxdydz. \tag{4.32}$$

É conhecido que o domínio fundamental $F_{(a,b)}$ para a ação de $\Gamma_{(a,b)}$ em H^3 é dado por

$$F_{(a,b)} = \{(x, y, z) \in H^3 \mid 1 < x^2 + y^2 + z^2 < e^{2a}\}. \tag{4.33}$$

Vê-se que $\Gamma_{(a,b)}$ é um subgrupo Kleniano de G, ou seja,

$$vol\left(F_{(a,b)}\right) = \int_{F_{(a,b)}} dv = \infty. \tag{4.34}$$

Como $F_{(a,b)}$ possui um volume hiperbólico infinito, a teoria espectral usual para o laplaciano $\Delta_{\Gamma_{(a,b)}}$ de $B_{\Gamma_{(a,b)}}$ não é aplicável. Esquematizaremos então uma análise adequada do $-\Delta_{\Gamma_{(a,b)}}$ onde a ideia central é a mesma das *ressonâncias de espalhamento* (scattering resonances), que substituem a função dos autovalores do Laplaciano no caso de volumes infinitos.

Utilizando (4.26), é possível notar que o operador Δ_Γ pode ser

[4] É a periodicidade da variável ϕ de Schwarzschild que permite essa descrição orbifold, ou seja, existe a identificação $\phi \sim \phi + 2\pi n$.

[5] $i^2 = -1$.

escrito como [6]:

$$\Delta_\Gamma = \frac{1}{\sigma^2}\left[z^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)-z\frac{\partial}{\partial z}\right]. \tag{4.35}$$

O espaço das funções quadraticamente integráveis no buraco negro $B_\Gamma = \Gamma\backslash H^3$, em relação ao elemento dv em (4.32), possui uma decomposição ortogonal

$$L^2\left(B_\Gamma, dv\right) = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \oplus H_{mn} \tag{4.36}$$

com isomorfismos do espaço de Hilbert $H_{mn} \simeq L^2\left(\mathbb{R}^+, dt\right)$ (com $\mathbb{R}^+$ sendo o espaço dos números reais positivos), e ainda uma decomposição espectral

$$-\sigma^2\Delta_\Gamma \simeq \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} \oplus L_{mn} \tag{4.37}$$

onde temos

$$L_{mn} = -\frac{d^2}{dt^2}+1+V_{mn}(t) \tag{4.38}$$

sendo operadores de Schrödinger com potenciais de Pöschel-Teller

$$V_{mn}(t) = \left(k_{mn}^2+\frac{1}{2}\right)\mathrm{sech}^2 t + \left(m^2-\frac{1}{4}\right)\cosh^2 t \tag{4.39}$$

com

$$k_{mn} := -\frac{mb}{a}+\frac{\pi n}{a}. \tag{4.40}$$

Para detalhes e comentários das relações acima veja [20].

A equação de Schrödinger

$$\Psi''(x)+[E-V_{mn}(x)]\Psi(x) = 0, \tag{4.41}$$

que é o mesmo que o problema de autovalores

$$L_{mn}\Psi = k^2\Psi$$

com $E = k^2-1$, possui uma solução já conhecida $\Psi^+(x)$, dada em temos da função hipergeométrica, com assíntotas

$$\Psi^+(x) \sim \frac{e^{ikx}}{T_{mn}(k)}+\frac{R_{mn}(k)}{T_{mn}(k)}e^{-ikx}, \tag{4.42}$$

sendo $T_{mn}(k)$ e $R_{mn}(k)$ os coeficientes de reflexão e transmissão, respectivamente.

[6] Usamos a notação Γ para $\Gamma_{(a,b)}$.

Definindo que $k = i(1-s)$ pode-se montar a *matriz de espalhamento*

$$[\mathcal{R}_{mn}(s)] := [R_{mn}(k)] \tag{4.43}$$

de $-\Delta_\Gamma$, cujas entradas são quocientes de *funções gama* com pólos triviais dados por $s = 1 + j$ [20], $j = 0, 1, 2, 3, \ldots$, e pólos não triviais dados por

$$s^{\pm}_{mnj} := -2j - |m| \pm i\,|k_{mn}| \tag{4.44}$$

sendo que k_{mn} em (4.40), $j = 0, 1, 2, 3, \ldots$; e também com a equação (4.29). Vamos comparar os zeros da função (4.9) com os pólos de espalhamento acima. Resolvendo as equações, primeiramente para $m \geq 0$, temos:

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= 2j + m \\ k_1 - k_2 &= \pm m \end{aligned}$$

Por fim, resolvendo para $m \leq 0$ ficamos com

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 &= 2j - m \\ k_1 - k_2 &= \pm m. \end{aligned}$$

Dessa maneira é possível perceber que $(k_1, k_2) = (j, j + |m|)$ ou $(j + |m|, j)$, como n e m estendem-se por todos os inteiros, os (k_1, k_2) correspondentes estendem-se por todos os inteiros não negativos. Com isso os conjuntos

$$\{\zeta_{n,k_1,k_2} : n, k_1, k_2 \in \mathbb{Z}, k_1, k_2 \geq 0\}$$

e

$$\{s_{m,n,j} : n, m, j \in \mathbb{Z}, j \geq 0\}$$

coincidem.

É notável o fato do conjunto de pólos de espalhamento (4.44) coincidam com os zeros da função zeta (4.9), como pode-se verificar. Então a função $Z_\Gamma(s)$ contém o espectro do buraco negro BTZ.

4.3.2 $\mathcal{N}$=1 Supergravidade

O grupo de simetria $SL(2,\mathbb{R}) \times SL(2,\mathbb{R})$ de AdS_3 é substituído por $OSp(1|2) \times OSp(1|2)$, onde $OSp(1|2)$ é um supergrupo cuja parte bosônica é $Sp(2,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R})$. O contorno CFT possui supersimetria $(1,1)$, ou seja, supersimetria $\mathcal{N} = 1$ tanto para os *left-movers* quanto para os *right-movers*.

Existem poucas escolhas possíveis para funções partição, de tal forma ficamos com

$$\mathrm{Tr}\,\exp(-\beta H - i\theta J), \quad ou \quad \mathrm{Tr}\,(-1)^F \exp(-\beta H - i\theta J)\,. \tag{4.45}$$

O momento linear conservado $J = L_0 - \bar{L}_0$ gera uma rotação no infinito no espaço-tempo assintótico AdS_3. O operador $(-1)^F$ é equivalente a $(-1)^{2J}$ e estados de J inteiro são ditos bosônicos e para J semi-inteiro fermiônicos.

Essa propriedade é herdada do espectro perturbativo das excitações de Brown-Henneaux. O traço pode ser calculado tanto no setor Neveu-Schwarz (NS) quanto no setor Ramond (R). Pode-se calcular essas funções partição pela soma sobre variedades (*three-manifolds*) X que são localmente AdS_3 e cujo contorno conforme é uma superfície riemaniana Σ de gênero 1 (*genus 1*).

As quatro funções partição possíveis associadas aos setores NS ou R correspondem às quatro estruturas spin em Σ. Um elemento g de $G = SL(2,\mathbb{R})$ atua na estrutura spin como

$$g \cdot \begin{bmatrix} \mu \\ \nu \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mu \\ \nu \end{bmatrix}, \tag{4.46}$$

com $\mu, \nu \in (1/2)\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$, onde as quatro estruturas spin no tóro (T^2) Σ são representadas pelo vetor coluna e μ, ν assumem valores $(1/2)$ para condições de contorno anti-periódicas (NS) e 0 para periódicas (R).

Levando em conta a escolha da estrutura spin em Σ, pode-se somar sobre escolhas de X tais que dadas estruturas spin em Σ não se extendam sobre X. A estrutura spin NS em Σ é compatível com $W_{0,1}$ (2.4) e dessa maneira $W_{0,1}$ contribue para os traços no setor NS, e não no setor R.

A função partição das excitações *left-* e *right-moving* é

$$F(q, \overline{q}) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{NS}} \exp(-\beta H - i\theta J). \tag{4.47}$$

Agora, se $\mu = 0$, $\nu = 1/2$, então teremos

$$G(q, \overline{q}) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{NS}}(-1)^F \exp(-\beta H - i\theta J). \tag{4.48}$$

Então a contribuição para $F(q, \overline{q})$ e $G(q, \overline{q})$ associada a $W_{0,1}$ para todas as estruturas spin ficam [12]

$$F_{0,1}(\tau,\overline{\tau}) = F_{0,1}^{(\mathrm{fund})} \cdot \widehat{F}_{0,1}(\tau,\overline{\tau}) \equiv \left|q^{-k^*/2}\right|^2 \cdot \left|\prod_{n=2}^{\infty} \frac{1+q^{n-1/2}}{1-q^n}\right|^2, \qquad (4.49)$$

$$G_{0,1}(\tau,\overline{\tau}) = G_{0,1}^{(\mathrm{fund})} \cdot \widehat{G}_{0,1}(\tau,\overline{\tau}) \equiv \left|q^{-k^*/2}\right|^2 \cdot \left|\prod_{n=2}^{\infty} \frac{1-q^{n-1/2}}{1-q^n}\right|^2. \qquad (4.50)$$

As contribuições $F_{0,1}^{(\mathrm{fund})} = G_{0,1}^{(\mathrm{fund})} \equiv \left|q^{-k^*/2}\right|^2$ estão relacionadas com a energia do estado fundamental. A contribuição $G_{0,1}$ de $W_{0,1}$ é obtida revertendo-se o sinal de todas as contribuições fermiônicas em (4.49). As funções completas $F(\tau)$ e $G(\tau)$ podem ser conseguidas pela soma de $F_{0,1}$ e $G_{0,1}$ sobre as imagens modulares com $(c+d)$ ímpar. Isso corresponde à estrutura spin com $\mu = \nu = 1/2$

$$\widehat{F}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}(\tau,\overline{\tau}) = \sum_{c,d|(c+d)\ \mathrm{mpar}} \widehat{F}_{0,1}((a\tau+b)/(c\tau+d),\overline{\tau}), \qquad (4.51)$$

e $\mu = 0$ e $\nu = 1/2$

$$\widehat{G}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}(\tau,\overline{\tau}) = \sum_{c,d|d\ \mathrm{mpar}} \widehat{G}_{0,1}((a\tau+b)/(c\tau+d),\overline{\tau}). \qquad (4.52)$$

Os somatórios 4.51 e 4.52 não dependem da escolha de a e b. Uma transformação modular $\tau \to \tau + 1$ troca

$$(\mu,\nu) = (0, 1/2) \ \text{ para } \ (\mu,\nu) = (1/2, 1/2),$$

ou seja,

$$F(\tau) = G(\tau+1) = F(\tau+2).$$

Pode-se calcular a função partição *Ramond*

$$K = \mathrm{Tr}_{\mathrm{R}} \exp(-\beta H - i\theta J), \qquad (4.53)$$

para $\mu = 1/2$ e $\nu = 0$, então

$$K(\tau) = G(-1/\tau).$$

Isso completa a lista de 3 entre 4 funções partição. Numa teoria supersimétrica com espectro discreto, a quarta função partição

$$Q = \mathrm{Tr}_{\mathrm{R}}(-1)^F \exp(-\beta H - i\theta J), \qquad (4.54)$$

é um inteiro, independente de β e θ, ou seja, ela pode ser vista como o *index* de um gerador de supersimetria. Essa função precisa ser calculada utilizando uma estrutura spin ímpar, com $\mu = 0$ e $\nu = 0$. Normalmente em gravidade $3D$ a função Q desaparece, já que a estrutura spin ímpar não existe sobre qualquer variedade tridimensional (*three-manifold*) com contorno Σ.

Agora analisando as funções partição comentadas nessa seção em maiores detalhes e repetindo a análise da seção anterior utilizando a representação das funções espectrais para a teoria fatorizada holomorficamente $\{\mathcal{R}(s), \mathcal{R}(\sigma)\}$ e anti-holomorficamente $\{\mathcal{R}(\overline{s}), \mathcal{R}(\overline{\sigma})\}$. Temos que

$$\begin{aligned}
\widehat{F}_{0,1}(\tau,\overline{\tau}) &= \left[\frac{\prod_{n=2}^{\infty}(1+q^{n-1/2})}{\prod_{n=2}^{\infty}(1-q^{n})}\right]\cdot\left[\frac{\prod_{n=2}^{\infty}(1+\overline{q}^{n-1/2})}{\prod_{n=2}^{\infty}(1-\overline{q}^{n})}\right] \\
&= \left[\frac{\mathcal{R}(\sigma = 3/2-(3/2)it+i\eta(\tau))}{\mathcal{R}(s=2-2it)}\right] \\
&\times \left[\frac{\mathcal{R}(\overline{\sigma} = 3/2+(3/2)it+i\eta(\tau))}{\mathcal{R}(\overline{s}=2+2it)}\right], \qquad (4.55)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widehat{G}_{0,1}(\tau,\overline{\tau}) &= \left[\frac{\prod_{n=2}^{\infty}(1-q^{n-1/2})}{\prod_{n=2}^{\infty}(1-q^{n})}\right]\cdot\left[\frac{\prod_{n=2}^{\infty}(1-\overline{q}^{n-1/2})}{\prod_{n=2}^{\infty}(1-\overline{q}^{n})}\right] \\
&= \left[\frac{\mathcal{R}(s = 3/2-(3/2)it)}{\mathcal{R}(s=2-2it)}\right]\cdot\left[\frac{\mathcal{R}(\overline{s} = 3/2+(3/2)it)}{\mathcal{R}(\overline{s}=2+2it)}\right]. \qquad (4.56)
\end{aligned}$$

As funções completas $F(\tau), G(\tau)$ tomam a forma

$$\begin{aligned}
F\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}(\tau,\overline{\tau}) &= \sum_{c,d|(c+d)\text{ odd}} F_{0,1}^{(\text{ground})}(\gamma\cdot\tau,\overline{\tau})\,\widehat{F}_{0,1}(\gamma\cdot\tau,\overline{\tau}) \\
&= \sum_{c,d|(c+d)\text{ odd}} F_{0,1}^{(\text{ground})}(\gamma\cdot\tau,\overline{\tau})\left\{\left[\frac{\mathcal{R}(\sigma = 3/2-(3/2)it+(1+2d/c)i\eta(\tau))}{\mathcal{R}(s=2-2it+i\eta(\tau))}\right]\right\}_{\gamma} \\
&\times \left\{\left[\frac{\mathcal{R}(\overline{\sigma} = 3/2+(3/2)it+(1+2d/c)i\eta(\tau))}{\mathcal{R}(\overline{s}=2+2it+i\eta(\tau))}\right]\right\}_{\gamma}, \qquad (4.57)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}(\tau,\overline{\tau}) &= \sum_{c,d|(c+d)\text{ odd}} G_{0,1}^{(\text{ground})}(\gamma\cdot\tau,\overline{\tau})\,\widehat{G}_{0,1}(\gamma\cdot\tau,\overline{\tau}) \\
&= \sum_{c,d|(c+d)\text{ odd}} G_{0,1}^{(\text{ground})}(\gamma\cdot\tau,\overline{\tau})\left\{\left[\frac{\mathcal{R}(s = 3/2-(3/2)it+(1+2d/c)i\eta(\tau))}{\mathcal{R}(s=2-2it+(2d/c)i\eta(\tau))}\right]\right\}_{\gamma} \\
&\times \left\{\left[\frac{\mathcal{R}(\overline{s} = 3/2+(3/2)it+(1+2d/c)i\eta(\tau))}{\mathcal{R}(\overline{s}=2+2it+(2d/c)i\eta(\tau))}\right]\right\}_{\gamma}. \qquad (4.58)
\end{aligned}$$

Nesse caso as somas finais (4.57) e (4.58) são divergentes (esses casos de divergência também são encontrados em somas parecidas em [17–19]) as correções *one-loop* devem ser regularizadas. Esse procedimento pode ser realizado por meio da técnica de soma de Poisson de maneira similar aos cálculos das séries de Poincaré em [12].

Capítulo 5

Álgebra dos Operadores Vértice associada à Caráteres Formais

Nessa primeira parte do capítulo usaremos as definições e estruturas descritas em [2]. Primeiramente introduzida por Richard Bocherds, a estrutura algébrica da *álgebra vértice* acaba por fornecer uma rigorosa formulação matemáticapara a *teoria de campos conformes* em duas dimensões.

Começaremos com a estrutura algébrica surgindo como o limite clássico de uma álgebra vértice, ou seja, a estrutura de uma álgebra associativa, comutativa e *unitária* (unitária).

Definição 5.1. [1] *Uma álgebra associativa, comutativa e unitária é definida como o espaço linear V em $\mathbb{C}$, dotado com o mapa linear $Y : V \to End(V)$ que satisfaz*

$$[Y(v), Y(w)] = 0 \quad \forall v, w \in V \ .$$

O elemento unitário, denotado por $\mathbf{1}$, é tal que

$$Y(\mathbf{1}) = I_V \quad e \quad Y(v)\mathbf{1} = v \quad \forall v \in V \ .$$

Pode-se definir a regra do produto por $v \cdot w = Y(v)w$, $\forall v, w \in V$. Visto que

$$v \cdot \mathbf{1} = Y(v)\mathbf{1} = v = \mathrm{I}_V v = Y(\mathbf{1})v = \mathbf{1} \cdot v \ .$$

A relação

$$v \cdot w \;=\; Y(v)Y(w)\mathbf{1} = Y(w)Y(v)\mathbf{1} = w \cdot v \tag{5.1}$$

mostra que o produto é comutativo, e

$$\begin{aligned} v \cdot (w \cdot x) &= Y(v)Y(w)x = Y(v)Y(x)w = Y(x)Y(v)w \\ &= Y(Y(v)w)x = (v \cdot w) \cdot x \end{aligned} \tag{5.2}$$

mostra sua associatividade.

[1] Essa formulação é equivalente à usual.

5.1 Definição

A formulação anterior baseava-se em definir uma álgebra associativa, comutativa e *unitária* por meio de axiomas satisfeitos pelo seu conjunto $\{Y(v) \mid v \in V\}$ de *translações esquerdas*. Uma *álgebra vértice* é definida de forma análoga, embora suas *translações esquerdas* dependam de uma variável formal z, com isso, uma álgebra vértice pode ser vista como uma álgebra dotada de uma regra de produto dependente de parâmetro dada por

$$a_z b = Y(a,z)b = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)} b z^{-n-1} \ .$$

A seguir definimos uma álgebra vértice. Uma *álgebra vértice* consiste de quatro elementos

$$(V, |0\rangle, T, Y)$$

que satisfazem os axiomas listados mais abaixo, onde temos que:

- V é o superespaço $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$, chamado de *espaço dos estados*;
- $|0\rangle \in V_{\bar{0}}$ é chamado *vetor de vácuo*;
- T é um endomorfismo, linear e par que atua em V, chamado de *operador covariante infinitesimal de translação*;
- Y é um mapa linear e que preserva a paridade, de V para o espaço das distribuições formais com valores em $End(V)$, atuando como:

  $$Y(\cdot, z) \ : \ V \to \mathrm{End}(V)[[z, z^{-1}]] \ : \ a \to Y(a,z) \ ,$$

  onde $\forall v \in V$, $Y(a,z)v \in V[[z]][z^{-1}]$.

O campo $Y(a,z)$ é dito um *operador vértice*. Esses quatro elementos $(V, |0\rangle, T, Y)$ dotam V com uma estrutura de álgebra vértice quando os seguintes axiomas são satisfeitos:

(1) Vácuo :

$$Y(|0\rangle, z) = \mathrm{Id}_V \tag{5.3}$$
$$Y(a,z)|0\rangle = a \mod zV[[z]] \tag{5.4}$$
$$T|0\rangle = 0 \ , \tag{5.5}$$

(2) translação :

$$[T, Y(a,z)] = \partial_z Y(a,z) \ , \tag{5.6}$$

(3) Localidade : $\{Y(a,z) \mid a \in V\}$ é uma família local de campos, i.e. para $a, b \in V$,

$$(z-w)^n [Y(a,z), Y(b,w)] = 0 \quad n >> 0 \ , \tag{5.7}$$

onde $[Y(a,z), Y(b,z)] \doteq Y(a,z)Y(b,w) - p(a,b)Y(b,w)Y(a,z)$.

Consideremos agora um exemplo de álgebra vértice[2].

Seja 1 o elemento unitário de V e uma álgebra associativa, comutativa e *unitária*, dotada de uma derivação par T. Definindo que

$$\begin{aligned} |0\rangle &\doteq 1 \\ Y(a,z) &\doteq e^{zT} a \ , \end{aligned}$$

Assim é concedida a V uma estrutura de álgebra vértice. Mais ainda,

$$a_{(-1-n)} b = \left(\frac{T^n a}{n!} \right) b$$

e $a_{(n)} b = 0$ para $n \in \mathbb{Z}^+$. Verificando primeiramente o axioma do vácuo. Como T é uma derivação par e 1 é o elemento unitário,

$$T(1) = T(1 \cdot 1) \ = \ T(1) \cdot 1 + (-1)^{p(1)p(T)} 1 \cdot T(1) \ = \ 2T(1) \tag{5.8}$$

então $T(1) = 0$ e assim $T|0\rangle = 0$. Como tem-se que, $Y(|0\rangle, z)b = \left(e^{zT} 1\right) b = b$ e $Y(|0\rangle, z) = I_V$. E mais ainda, tem-se que

$$Y(a,z)|0\rangle = \left(e^{zT} a\right) 1 = a \mod zV[[z]].$$

Verificando agora o axioma da translação, tem-se que:

$$\begin{aligned} [T, Y(a,z)]b &= T(Y(a,z)b) - Y(a,z)T(b) \\ &= T(e^{zT} a)b - (e^{zT} a)T(b) \\ &= T(ab + T(a)bz + T^2(a)b\frac{z^2}{2} + \cdots) - aT(b) - T(a)T(b)\frac{z^2}{2} - \cdots \\ &= (T(a) + T^2(a)z + T^3(a)\frac{z^2}{2} + \cdots)b \\ &= \partial_z(a + T(a)z + T^2(a)\frac{z^2}{2} + T^3(a)\frac{z^3}{6} + \cdots)b \\ &= (\partial_z Y(a,z))b \end{aligned}$$

[2]Quando $Y(a,z)$ são séries formais em potência positivas de z, a álgebra vértice é dita *holomórfica*.

Como V é comutativo, o axioma da translação é satisfeito de modo que, consequentemente, $[Y(a,z), Y(b,z)] = 0$. Por fim, já que

$$Y(a,z)b = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{(n)} b z^{-1-n} = \left(e^{zT}a\right) b \ ,$$

obtém-se $a_{(-1-n)}b = \left(\frac{T^n a}{n!}\right) b$ e $a_{(n)}b = 0$ para $n \in \mathbb{Z}^+$.

5.1.1 Álgebra dos Operadores Vértice

No estudo de teorias conformes um vetor ν distinto surge. Esse vetor é tal que o campo associado $Y(\nu, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L_n z^{-n-2}$ é um campo de Virasoro com carga central c. Ou em outras palavras, seus coeficientes da série de Fourier gera uma álgebra de Virasoro (seção 2.2) com um elemento central atuando de forma cI_V $(c \in \mathbb{C})$ em V, onde $L_{-1} = T$ e L_0 é diagonalizável em V. Esse vetor então é dito um *vetor conforme*.

A álgebra vértice passa a ser chamada de álgebra vértice conforme de *rank* c, ou também é dita **álgebra dos operadores vértice**.[3]

5.2 Álgebra dos Operadores Vértice q-Deformados

Nesta seção serão apresentados a notação e alguns resultados, já conhecidos na literatura, mas que precisaremos. Para isso seguiremos [25] e, em particular, a elaboração subsequente de [27]. Consideremos a hierarquia dos operadores vértice q-deformados localmente $\Gamma^{(p)}_{\pm}(z,q)$ $(p > 1)$ dados por

$$\Gamma^{(p)}_{\pm}(z,q) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mp i}{n} \frac{z^{\mp n}}{(1-q^n)^{p-1}} J_{\pm n}\right) . \tag{5.9}$$

Onde temos que os J_n são os modos da álgebra holomórfica de *Kac-Moody* $U(1)$ gerada pela corrente $J(z)$ com a série de Laurent

$$J(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n-1} J_n, \quad J_n = \oint (z^n/2\pi i) J(z) dz.$$

A álgebra de Heisenberg[4] é $[J_n, J_m] = n\delta_{n+m,0}$, $J_n^\dagger = J_{-n}$ e $J_n|0\rangle = 0$ para $n \geq 1$. Usando a seguinte identidade

$$z^{\pm n}/(1-q^n)^{p-1} = \sum_{j=1}^{p-1} z^n q^{\pm n}/(1-q^n)^j + z^{\pm n},$$

[3] O campo $Y(\nu, z)$ é chamado de *campo energia-momento* da álgebra V [2].
[4] O modo de comutação J_0 é desconsiderado.

obtém-se as seguintes relações recursivas

$$\Gamma_-^{(p)}(z,q) = \Gamma_-^{(1)}(z)\prod_{j=2}^{p-1}\Gamma_-^{(j)}(qz,q)\,, \qquad \Gamma_+^{(p)}(z,q) = \Gamma_+^{(1)}(z)\prod_{j=2}^{p-1}\Gamma_+^{(j)}(z/q,q)\,. \quad (5.10)$$

Os operadores locais $\Gamma_\pm^{(1)}(z) := \Gamma_\pm(z)$ atuam nos estados de $c = 1$ da teoria de campo conforme 2d no espaço de Hilbert e apresentam propriedades herdadas da álgebra dos $J_{\pm n}$.

Eles obedecem a seguinte álgebra

$$\begin{aligned} \Gamma_\pm(x)\Gamma_\pm(y) &= \Gamma_\pm(y)\Gamma_\pm(x), \qquad x, y \in \mathbb{C}, \\ \Gamma_+(x)\Gamma_-(y) &= (1 - y/x)^{-1}\Gamma_-(y)\Gamma_+(x)\,. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Se introduzirmos $L_0 = \sum_{n>0}^{\infty} J_{-n}J_n$, temos

$$[L_0, \Gamma_\pm^{(p)}(z,q)] = z\frac{d}{dz}\Gamma_\pm^{(p)}(z,q). \quad (5.12)$$

Então $\Gamma_\pm^{(p)}(z,q)$ são os *peso 0 primários*. Segue-se que, particularmente, o operador q^{L_0} atua em $\Gamma_\pm(z,q)$ do seguinte modo: $q^{L_0}\Gamma_\pm(z,q)q^{-L_0} = \Gamma_\pm(qz,q)$.

Devido às propriedades $J_n|0\rangle = 0$, $\langle 0|J_{-n} = 0$ para $n > 0$, os operadores $\Gamma_\pm(z)$ atuam no vácuo como o operador identidade: $\Gamma_+(z)|0\rangle = |0\rangle, \langle 0|\Gamma_-(z) = \langle 0|$ o que implica em

$$\langle 0|\Gamma_+(z)\Gamma_-(w)|0\rangle = \frac{1}{1 - \frac{w}{z}}. \quad (5.13)$$

Como já visto em [27], $\Gamma_-(z)$ contém todos os monômios emJ_{-n_j}, $J_{-\mathbf{n}}^{\lambda} \equiv \prod_{j\geq 1}\left(J_{-n_j}\right)^{\lambda_j}$, onde $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ é uma partição 2d, o estado $\Gamma_-(z)|0\rangle$ é reduzível e é dado pela soma de todas as partições possíveis λ. No caso $z = 1$, $\Gamma_-(1)|0\rangle = \sum_{(\text{2d partitions } \lambda)} |\lambda\rangle$. Uma relação similar é válida para $\langle 0|\Gamma_+(1)$.

Assim, com o ferramental matemático apresentado, pode-se prosseguir para generalizações de dimensões maiores. Por exemplo, pode-se reescrever

$\Gamma_{\pm}^{(2)}(z,q)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{-}^{(2)}(z,q) &= \prod_{t=-\infty}^{-1} \Gamma_{-}(1)\,(z)\,q^{L_0} = \prod_{k=0}^{\infty} \Gamma_{-}(1)\left(q^k z\right) \\
&= \exp\left(\sum_{n\geq 1} \frac{i}{n}\frac{z^n}{(1-q^n)} J_{-n}\right), \qquad (5.14) \\
\Gamma_{+}^{(2)}(z,q) &= \prod_{t=0}^{\infty} q^{L_0}\Gamma_{+}(1)\,(z) = \prod_{k=0}^{\infty} \Gamma_{+}(1)\left(q^{-k} z\right) \\
&= \exp\left(-\sum_{n\geq 1} \frac{i}{n}\frac{z^{-n}}{(1-q^n)} J_{n}\right). \qquad (5.15)
\end{aligned}$$

Os produtos $\prod_{t=-\infty}^{-1}(\text{—})$ nessas equações são tomados sobre fatias diagonais de partições 3d. Eles são uma reminiscência do método de matriz de transferência onde uma partição 3d é considerada como uma amplitude entre a fatia em $t=-\infty$ (*in-state*) e a fatia em $t=\infty$ (*out-state*). A álgebra desses operadores vértice assume a forma

$$q^{L_0}\Gamma_{\pm}^{(2)}(z,q)q^{-L_0} = \Gamma_{\pm}^{(2)}(qz,q), \qquad \Gamma_{\pm}^{(2)}(z,q)\Gamma_{\pm}^{(2)}(w,q) = \Gamma_{\pm}^{(2)}(w,q)\Gamma_{\pm}^{(2)}(z,q). \tag{5.16}$$

Pode-se repetir recursivamente essa construção. E isso nos leva à seguinte hierarquia de composição de operadores vértice

$$\Gamma_{-}^{(n+1)}(z,q) = \prod_{t_n=1}^{\infty}\cdots\prod_{t_2=1}^{\infty}\prod_{t_1=1}^{\infty}\left(\Gamma_{-}(z)\,q^{L_0}\right)\cdot q^{L_0}\cdots q^{L_0}. \tag{5.17}$$

Uma expressão semelhante pode ser escrita para $\Gamma_{+}^{(n+1)}(z,q)$. Para $n=0$, temos apenas que $\Gamma_{-}(z)$.

É possível verificar que a expressão para os operadores vértice $\Gamma_{-}^{(p)}(z,q)$ $(p\geq 1)$ atuando no vácuo é dada por

$$\Gamma_{-}^{(p)}(z,q)\,|0\rangle = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{iz^n J_{-n}}{n\,(1-q^n)^{p-1}}\right)|0\rangle = \Gamma_{-}(z)\prod_{k=2}^{p-1}\Gamma_{-}^{(k)}(qz,q)\,|0\rangle\,.$$

5.3 Funções de MacMahon e Partição

Utilizando as fórmulas do Capítulo 4, transcreveremos as funções partição de MacMahon em termos de funções espectrais de geometria hiperbólica.

Dado que a função p-dimensional de MacMahon generalizada é expressa pela fórmula:

$$M_p(q) = \prod_{l=1}^{\infty} \left[(1-q^l)^{\frac{(l+p-3)!}{(l-1)!(p-2)!}} \right], \tag{5.18}$$

para $p \geq 2$, e caso contrário, definindo que $D_0(q) = 1$ e $D_1(q) = \frac{1}{1-q}$. As funções de MacMahon 1d e 2d podem ser interpretadas como a correlação *two-point* dos operadores vértice $\Gamma_+(1)$ e $\Gamma_-(q)$

$$\begin{aligned} Z_{1d} &= \langle 0|\Gamma_+(1)\,\Gamma_-(q)\,|0\rangle = \left\langle 0|\ \Gamma_+(1)\,q^{L_0}\Gamma_-(1)\,|0\right\rangle = (1-q)^{-1}, \quad (5.19)\\ Z_{2d} &= \langle 0|\Gamma_+(1)\,q^{L_0}\prod_{k\geq 1}\Gamma_-(1)q^{L_0}|0\rangle = \langle 0|\Gamma_+(1)\prod_{k\geq 1}\Gamma_-(q^k)|0\rangle \\ &= \prod_{k\geq 1}\left(1-q^k\right)^{-1} \overset{\text{pela Eq. (A.5)}}{=\!=\!=} [\mathcal{R}(s=1-i\varrho(\tau))]^{-1}. \quad (5.20)\end{aligned}$$

Na seção anterior apresentamos a hierarquia de nível p de operadores vértice $\Gamma_{\pm}^{(p)}$. De maneira análoga a Z_{1d} e Z_{2d} pode-se calcular Z_{3d}:

$$\begin{aligned} Z_{3d} &= \left\langle 0|\left(\prod_{t=0}^{\infty} q^{L_0}\Gamma_+(1)\right) q^{L_0}\left(\prod_{t=-\infty}^{-1}\Gamma_-(1)q^{L_0}\right)|0\right\rangle \\ &= \left\langle 0|\ \prod_{t=0}^{\infty}\Gamma_+^{(1)}\left(q^{-t-\frac{1}{2}}\right)\prod_{\ell=1}^{\infty}\Gamma_-^{(1)}\left(q^{\ell-\frac{1}{2}}\right)\ |0\right\rangle \\ &= \prod_{\ell=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{\infty}\left[1-q^{j+\ell}\right]^{-1} \overset{k:=j+\ell}{=\!=\!=} \prod_{k=1}^{\infty}\prod_{j=1}^{k}\left[1-q^k\right]^{-1} = \prod_{k=1}^{\infty}\left[1-q^k\right]^{-k}. \quad (5.21)\end{aligned}$$

Onde na segunda linha da equação (5.21) dividimos q^{L_0} em $q^{L_0/2}q^{L_0/2}$ e comutamos cada um dos operadores $q^{L_0/2}$ para a esquerda e o outro para a direita. O último termo na equação (5.21) é exatamente a forma habitual da Função 3d de MacMahon, a qual, pode ser reescrita em termos das funções espectrais de Ruelle:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left[1-q^k\right]^{-k} \overset{\text{pela Eq. (A.7)}}{=\!=\!=} \prod_{n=1}^{\infty}[\mathcal{R}(s=n(1-i\varrho(\tau)))]^{-1}. \tag{5.22}$$

Funções Partição p-dimensionais

A estrutura das funções partição p-dimensionais Z_{pd} pode ser analisada em termos dos operadores vértice $\Gamma_{\pm}^{(p)}(z,q)$ já apresentados. Como visto acima, (5.17), este pode ser interpretado como a generalização de nível p de $\Gamma_-(z)$, obedecendo às seguintes relações

$$\Gamma_-^{(p)}(z,q) = q^{L_0}\Gamma_-^{(p)}(1,q)\,q^{-L_0}, \quad \text{para } \ \mathrm{p} \geq 0.$$

As funções partição p-dimensionais podem ser definidas como [27]

$$Z_{pd} = \left\langle 0|\Gamma_{+}(1)\,\Gamma_{-}^{(p)}(z,q)|0\right\rangle \equiv \left\langle 0|\Gamma_{+}(1)\,q^{L_0}\Gamma_{-}^{(p)}(1,q)\,|0\right\rangle, \quad p \geq 0. \tag{5.23}$$

Pode-se reescrever tais funções em termos das funções espectrais de Ruelle. De fato, comutando $\Gamma_{-}^{(p)}(z,q)$ à esquerda de $\Gamma_{+}(1,q)$ para $p \geq 2$, por indução (detalhes em [27]) temos

$$Z_{pd} = \prod_{k=1}^{\infty}\left[1-q^k\right]^{-C(k,p)} \overset{\text{pela Eq.(4.58)}}{=\!=\!=} \prod_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\mathcal{R}(s=n(1-i\varrho(\tau)))}{\mathcal{R}(s=(n+1)(1-i\varrho(\tau)))}\right]^{-C(n,p)} \tag{5.24}$$

com

$$C(n,p) = \frac{(n+p-3)!}{(n-1)!(p-2)!}. \tag{5.25}$$

Partições Planas

Denominamos Z_{pd} como uma função partição p dimensional. Devido ao fato de que as funções de correlação dos operadores vértice correspondentes admitem uma apresentação que pode ser associada a partições de dimensões maiores. Lembrando que partições de n de dimensões maiores são uma coluna de números que somados resultam em n:

$$n = \sum_{j_1,\ldots,j_r\geq 0} n_{j_1 j_2\ldots j_r}, \quad \text{where} \quad n_{j_1 j_2\ldots j_r} \geq n_{k_1 k_2\ldots k_r} \tag{5.26}$$

quaisquer $j_1 \geq k_1, j_2 \geq k_2, \ldots, j_r \geq k_r$, e todos $n_{j_1 j_2\ldots j_r}$ inteiros não negativos. Introduzindo agora a ideia de partições planas que nada mais são do que matrizes bidimensionais de inteiros não-negativos sujeitos à uma condição de não decrescência ao longo tanto das colunas quanto das linhas. Vale lembrar que diagramas de Young com regras de decrescimento ao longo das colunas são equivalentes à partições planas. Utilizadas originalmente por Alfred Young em seu trabalho sobre teoria invariante, elas possuem um importante papel na teoria de representações do grupo simétrico e também aparecem na geometria algébrica e vários problemas combinatoriais.

Denominaremos $\pi_r(n_1, n_2, \ldots, n_k; q)$ a função geradora para partições planas com no máximo r colunas e k linhas, e sendo n_i o primeiro elemento na i-ésima linha. As funções $\pi_r(n_1, n_2, \ldots, n_k; q)$ são completamente determinadas pela seguinte relação de recorrência e condição inicial

$$\pi_1(n_1, n_2, \ldots, n_k; q) = q^{\sum_{j=1}^{k}(n_j)}. \tag{5.27}$$

$$\pi_{r+1}(n_1, n_2, \ldots, n_k; q) \;=\; q^{\sum_{j=1}^{k}(n_j)} \sum_{m_k=0}^{n_k} \sum_{m_{k-1}=m_k}^{n_k-1} \cdots \sum_{m_1=m_2}^{n_1} \pi_r(m_1, \ldots, m_k; q), \tag{5.28}$$

$\pi_{r+1}(n_1, n_2, \ldots, n_k; q)$ pode ser representada como um determinante (para maiores detalhes [10]):

$$\pi_r(n_1, n_2, \ldots, n_k; q) = q^{\sum_{j=1}^{k}(n_j)} \det \left[q^{(i-j)(i-j-1)/2} \binom{n_j + r - 1}{r - i + j - 1} \right]_{1 \le i, j \le k} . \tag{5.29}$$

Definindo o número de partições planas de m, $p_{k,r}(m, n)$, com no máximo r colunas e k linhas, e cada elemento $\le n$, e sendo $\pi_{k,r}(n; q) := \sum_{m=0}^{\infty} p_{k,r}(m, n) q^m$. Pode-se observar que

$$\begin{aligned} \pi_{k,r}(n; q) &\overset{\text{pela Eq. (5.28)}}{=\!=\!=} \sum_{n_k \le \cdots \le n_1 \le n} \pi_r(n_1, n_2, \ldots, n_k; q) = q^{-kn} \pi_{r+1}(n_1, n_2, \ldots, n_k; q) \\ &\overset{\text{pela Eq. (5.29)}}{=\!=\!=} \det \left[q^{(i-j)(i-j-1)/2} \binom{n + r}{r - i + j} \right]_{1 \le i, j \le k} . \end{aligned} \tag{5.30}$$

Como resultado *temos* as fórmulas de MacMahon para a função geradora de partições planas de k linhas $\pi_{k,\infty}(\infty; q)$ da mesma maneira que em [10]

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_{k,\infty}(m, \infty) q^m \;=\; \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-\min(k,n)}, \tag{5.31}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_{\infty,\infty}(m, \infty) q^m \;=\; \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-n} = Z_{3d}. \tag{5.32}$$

Seja $\mu_k(j)$ o número de partições k dimensionais de j, então devido a conjectura de MacMahon

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mu_k(j) q^j = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-C(n,k)}, \qquad C(n, k) = \frac{(n + k - 2)!}{(n - 1)!} . \tag{5.33}$$

Apesar da falsidade dessa conjectura, (5.33), ter sido mostrada no final dos anos 60, [10], ela é verdadeira para $k = 1$ e $k = 2$. Sendo que é de salientar que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mu_1(j) q^j \;=\; \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-1} = Z_{2d} \,, \tag{5.34}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mu_2(j) q^j \;=\; \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{-n} = Z_{3d} \,. \tag{5.35}$$

Comparando (5.33) e (5.24), (5.25) temos as relações $C(n, k = 1) = C(n, p = 2)$, $C(n, k = 2) = C(n, p = 3)$. Utilindo-se de uma comparação entre $C(n, k)$ e a potência $C(n, p)$ na expansão q da função partição p dimensional Z_{pd} pode-se corrigir a conjectura de MacMahon para o caso $k > 3$.

5.4 Funções Geradoras Multiparticionadas

Considere, para qualquer ℓ-upla ordenada de inteiros não negativos e não todos nulos, $(k_1, k_2, \ldots, k_\ell) = \mathbf{k}$ (denominado ℓ-particionado ou números *multiparticionados*), as (multi)partições, i.e. representações distintas de $(k_1, k_2, \ldots, k_\ell)$ como somas de números multiparticionados. Denotando por $\mathcal{C}_-^{(u,\ell)}(\mathbf{k}) = \mathcal{C}_-^{(\ell)}(u; k_1, k_2, \cdots, k_\ell)$ o número de tais multipartições, também apresentando o símbolo $\mathcal{C}_+^{(u,\ell)}(\mathbf{k}) = \mathcal{C}_+^{(\ell)}(u; k_1, k_2, \cdots, k_\ell)$. Suas funções partição são definidas por

$$\mathcal{F}(u) := \prod_{\mathbf{k}\geq 0}\left(1 - u x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_\ell^{k_\ell}\right)^{-1} = \sum_{\mathbf{k}\geq 0} \mathcal{C}_-^{(u,\ell)}(\mathbf{k}) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_\ell^{k_\ell}\,, \tag{5.36}$$

$$\mathcal{G}(u) := \prod_{\mathbf{k}\geq 0}\left(1 + u x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_\ell^{k_\ell}\right) = \sum_{\mathbf{k}\geq 0} \mathcal{C}_+^{(u,\ell)}(\mathbf{k}) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_\ell^{n_\ell}\,. \tag{5.37}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\log \mathcal{F}(u) &= -\sum_{\mathbf{k}\geq 0} \log\left(1 - u x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_\ell^{k_\ell}\right) = \sum_{\mathbf{k}\geq 0}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{u^m}{m} x_1^{mk_1} x_2^{mk_2} \cdots x_\ell^{mk_\ell} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u^m}{m} (1 - x_1^m)^{-1} (1 - x_2^m)^{-1} \cdots (1 - x_\ell^m)^{-1} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{u^m}{m} \prod_{j=1}^{l} (1 - x_j^m)^{-1}, \qquad (5.38) \\
\log \mathcal{G}(-u) &= \log \mathcal{F}(u)\,. \qquad (5.39)
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\mathcal{F}(u) = \sum_{\mathbf{k}\geq 0} \mathcal{C}_-^{(u,\ell)}(\mathbf{k}) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_\ell^{k_\ell} = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{u^m}{m} \prod_{j=1}^{l} (1 - x_j^m)^{-1}\right), \tag{5.40}$$

$$\mathcal{G}(u) = \sum_{\mathbf{k}\geq 0} \mathcal{C}_+^{(u,\ell)}(\mathbf{k}) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_\ell^{n_\ell} = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-u)^m}{m} \prod_{j=1}^{l} (1 - x_j^m)^{-1}\right). \tag{5.41}$$

Dentro dos problemas combinatoriais, já é de grande conhecimento que, os polinômios de Bell são de grande ajuda. Seguindo [10], gostaríamos de mostrar sua aplicação em partições multiparticionadas. A técnica dos polinômios de Bell pode ser utilizada para o cálculo $\mathcal{C}_-^{(\ell)}(\mathbf{k})$ e $\mathcal{C}_+^{(\ell)}(\mathbf{k})$. Seja

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(u) &:= 1+\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{P}_j(x_1,x_2,\ldots,x_\ell)u^j, && (5.42)\\
\mathcal{P}_j &= 1+\sum_{\mathbf{k}>0}P(\mathbf{k};j)x_1^{n_1}\cdots x_\ell^{n_\ell},\\
\mathcal{G}(u) &:= 1+\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{Q}_j(x_1,x_2,\ldots,x_\ell)u^j, && (5.43)\\
\mathcal{Q}_j &= 1+\sum_{\mathbf{k}>0}Q(\mathbf{k};j)x_1^{n_1}\cdots x_\ell^{n_\ell}.
\end{aligned}$$

Relações de recorrência dos polinômios de Bell $Y_n(g_1,g_2,\ldots,g_n)$ e funções geradoras $\mathcal{B}(u)$ tem as formas [10]:

$$Y_{n+1}(g_1,g_2,\ldots,g_{n+1})=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}Y_{n-k}(g_1,g_2,\ldots,g_{n-k})g_{k+1}, \quad (5.44)$$

$$\mathcal{B}(u)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Y_nu^n}{n!} \quad\Longrightarrow\quad \log\mathcal{B}(u)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g_nu^n}{n!}. \quad (5.45)$$

Diferenciando em relação a u verifica-se a segunda formula em (5.45) e se compararmos os coeficientes de u^n na equação resultante produz-se uma identidade equivalente a (5.44). Pode-se obter, a partir de (5.44), a seguinte fórmula para os polinômios de Bell[5]:

$$Y_n(g_1,g_2,\ldots,g_n)=\sum_{\mathbf{k}\vdash n}\frac{n!}{k_1!\cdots k_n!}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{g_j}{j!}\right)^{k_j}. \quad (5.46)$$

Seja $\beta_l(m):=\prod_{j=1}^{l}(1-x_j^m)^{-1}$; os demais resultados se mantem (para detalhes veja [10]):

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_j &= \frac{1}{j!}Y_j\left(0!\beta_l(1),\ 1!\beta_l(2)\ ,\ldots,\ (j-1)!\beta_l(j)\right), && (5.47)\\
\mathcal{Q}_j &= \frac{1}{(-1)^j j!}Y_j\left(-0!\beta_l(1),\ -1!\beta_l(2)\ ,\ldots,\ -(j-1)!\beta_l(j)\right). && (5.48)
\end{aligned}$$

Como exemplo, calcularemos o coeficiente $\mathcal{P}_2$. Utilizando a relação de recorrência

[5]Fórmula de Faa di Bruno.

(5.44) temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_2 &= (1/2)Y_2(\beta_l(1),\, \beta_l(2)) = (1/2)Y_2(\beta_l(1)^2,\, \beta_l(2)) \\ &= (1/2)\left(\prod_{j=1}^{l}(1-x_j^2)^{-1} + \prod_{j=1}^{l}(1-x_j^2)\right).\end{aligned}$$

Hierarquia Infinita

Considerando novamente a hierarquia $\Gamma_-^{(p)}(z,q)$ dos operadores vértice q-deformados, temos $\Gamma_+(1)\,\Gamma_-^{(p)}(z,q) = M_p(q)\,\Gamma_-^{(p)}(z,q)\,\Gamma_+(1)$, onde $M_p(q)$ é precisamente a função p dimensional generalizada de MacMahon. A relação geral fica

$$\langle 0|\,\Gamma_+(z_1)\,\Gamma_-^{(\ell+1)}(z_\ell,q)\,|0\rangle = \prod_{k_\ell=0}^{\infty}\cdots\prod_{k_1=0}^{\infty}\prod_{k_0=0}^{\infty}\left[1-q^{k_1+\ldots+k_\ell}\frac{z_\ell}{z_1}\right]^{-1}, \tag{5.49}$$

com $z_\ell/z_1 = q^{k_0}$. No caso de $x_1 = x_2 = \cdots = x_\ell = q$, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(u) &= \prod_{\mathbf{k}\geq 0}\left(1-uq^{k_1+k_2+\cdots+k_\ell}\right)^{-1} = \exp\left(-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{u^m}{m}(1-q^m)^{-\ell}\right), \quad (5.50)\\ \mathcal{G}(u) &= \prod_{\mathbf{k}\geq 0}\left(1+uq^{k_1+k_2+\cdots+k_\ell}\right) = \exp\left(-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-u)^m}{m}(1-q^m)^{-\ell}\right). \quad (5.51)\end{aligned}$$

Tais fórmulas podem ser interpretadas como ℓ cópias de representações de CTF_2 livres. De fato, definindo $uq^{k_1+\ldots+k_\ell} = Q_{\mathbf{k}}q^{k_0}$ com $Q_{\mathbf{k}} = q^{k_1+\ldots+k_l}$ $(\mathbf{k} = (k_1,\ldots,k_\ell))$ tem-se

$$Z_2(Q_{\mathbf{k}},q) = \prod_{k_0=0}^{\infty}\left[1-Q_{\mathbf{k}}q^{k_0}\right]^{-1} = [(1-Q_{\mathbf{k}})\mathcal{R}(s=(k_1+\ldots+k_\ell)(1-i\varrho(\tau)))]^{-1}. \tag{5.52}$$

Portanto o lado direito da Eq. (5.49) pode ser fatorizado como $\prod_{\mathbf{k}\geq\mathbf{0}} Z_2(Q_{\mathbf{k}},q)$. Tratando essa fatorização como o produto de infinitas cópias, cada uma delas em $Z_2(Q_{\mathbf{k}},q)$ e correspondendo a CTF_2 livre.

Capítulo 6

Gêneros Elípticos

6.1 Protótipos para Gêneros Elípticos

Em [7] foi estudada a problemática em se definir gêneros elípticos para variedades singulares, onde foram dadas as definições para orbifolds e para pares constituídos des variedades projetivas. No trabalho mencionado acima seus autores demonstraram que suas definições eram independentes das resoluções das singularidades.

Sendo que para um fibrado vetorial holomórfico, E em X, e uma variável formal z, usaremos as seguintes definições:

$$\begin{aligned}
S_q\left(zE\right) &= 1 \oplus zqE \oplus z^2q^2\mathrm{Sym}^2E \oplus z^3q^3\mathrm{Sym}^3E \oplus \cdots = S_{zq}E\,, && (6.1)\\
\Lambda_q\left(zE\right) &= 1 \oplus zqE \oplus z^2q^2\mathrm{Alt}^2E \oplus z^3q^3\mathrm{Alt}^3E \oplus \cdots = \Lambda_{zq}E\,, && (6.2)\\
S_q\left(zE\right)^{\mathbb{C}} &= S_q\left(zE\right)\otimes S_q\left(\overline{z}\overline{E}\right)\,, && (6.3)\\
\Lambda_q\left(zE\right)^{\mathbb{C}} &= \Lambda_q\left(zE\right)\otimes \Lambda_q\left(\overline{z}\overline{E}\right)\,. && (6.4)
\end{aligned}$$

Tais definições possuem propriedades multiplicativas

$$\begin{aligned}
S_q\left(E\oplus F\right) &= \left(S_qE\right)\otimes\left(S_qF\right)\,, \quad S_q\left(E\ominus F\right)=\left(S_qE\right)\otimes\left(S_qF\right)^{-1}\,, && (6.5)\\
\Lambda_q\left(E\oplus F\right) &= \left(\Lambda_qE\right)\otimes\left(\Lambda_qF\right)\,, \quad \Lambda_q\left(E\ominus F\right)=\left(\Lambda_qE\right)\otimes\left(\Lambda_qF\right)^{-1}\,. && (6.6)
\end{aligned}$$

Para um fibrado vetorial holomórfico $\mathcal{E}$ X e uma variável formal z, usamos as seguintes identidades

$$\begin{aligned}
S_q\left(z\mathcal{E}\right) &= 1 \oplus zq\mathcal{E} \oplus z^2q^2\mathrm{Sym}^2\mathcal{E} \oplus z^3q^3\mathrm{Sym}^3\mathcal{E} \oplus \cdots = S_{zq}\mathcal{E}\,, && (6.7)\\
\Lambda_q\left(z\mathcal{E}\right) &= 1 \oplus zq\mathcal{E} \oplus z^2q^2\mathrm{Alt}^2\mathcal{E} \oplus z^3q^3\mathrm{Alt}^3\mathcal{E} \oplus \cdots = \Lambda_{zq}\mathcal{E}\,. && (6.8)
\end{aligned}$$

De maneira similar,

$$S_q\left(z\mathcal{E}\right)^{\mathbb{C}} = S_q\left(z\mathcal{E}\right)\otimes S_q\left(\overline{z}\overline{\mathcal{E}}\right)\,, \quad \Lambda_q\left(z\mathcal{E}\right)^{\mathbb{C}} = \Lambda_q\left(z\mathcal{E}\right)\otimes \Lambda_q\left(\overline{z}\overline{\mathcal{E}}\right)\,. \qquad (6.9)$$

Tais identidades possuem boas propriedades multiplicativas e seus elementos devem ser entendidos como elementos da teoria K do espaço sujacente.

$$S_q\left(\mathcal{E}\oplus\mathcal{F}\right) = \left(S_q\mathcal{E}\right)\otimes\left(S_q\mathcal{F}\right), \quad S_q\left(\mathcal{E}\ominus\mathcal{F}\right) = \left(S_q\mathcal{E}\right)\otimes\left(S_q\mathcal{F}\right)^{-1}, \quad (6.10)$$

$$\Lambda_q\left(\mathcal{E}\oplus\mathcal{F}\right) = \left(\Lambda_q\mathcal{E}\right)\otimes\left(\Lambda_q\mathcal{F}\right), \quad \Lambda_q\left(\mathcal{E}\ominus\mathcal{F}\right) = \left(\Lambda_q\mathcal{E}\right)\otimes\left(\Lambda_q\mathcal{F}\right)^{-1}. \quad (6.11)$$

Na Eqs. (6.10), (6.11) usamos o fato de que

$$\mathrm{Sym}^n(\mathcal{E}\oplus\mathcal{F}) = \bigoplus_{i=0}^{n}\mathrm{Sym}^i(\mathcal{E})\otimes\mathrm{Sym}^{n-i}(\mathcal{F}), \quad (6.12)$$

$$\mathrm{Alt}^n(\mathcal{E}\oplus\mathcal{F}) = \bigoplus_{i=0}^{n}\mathrm{Alt}^i(\mathcal{E})\otimes\mathrm{Alt}^{n-i}(\mathcal{F}). \quad (6.13)$$

No caso de um *fibrado linha* $\mathcal{L}$, temos $S_q\mathcal{L} = 1\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}q^n\mathcal{L}^n = (1\ominus q\mathcal{L})^{-1} = (\Lambda_{-q}\mathcal{L})^{-1}$, e assim $(S_q\mathcal{E})^{-1} = \Lambda_{-q}\mathcal{E}$ para qualquer fibrado $\mathcal{E}$, e similarmente $(\Lambda_q\mathcal{E})^{-1} = S_{-q}\mathcal{E}$.

Exemplos

Polarização

Suponha que o par (X, g) seja um espaço vetorial real (complexo) de dimensão finita, com um produto interno $g : X\otimes X \to \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$. Isso significa que $g(a;b) = g(b;a)$ para $a, b\in X$, e se $a\neq 0$; então $g(a,\cdot) : X\to\mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ é uma função linear não trivial em X. Denominaremos *polarização* de um espaço vetorial X com o produto interno g a decomposição $X = X'\oplus X''$, tal que $g(a_1,\, a_2) = g(b_1,\, b_2) = 0$ para $a_1, a_2\in X'$, $b_1, b_2\in X''$. Está claro que g induz um isomorfismo $X''\cong(X')^*$. Seja $X = X_R\otimes\mathbb{C}$ e $g = g_R\otimes\mathbb{C}$. Considere X um espaço vetorial complexo X_c, então $X'\cong X_c$ e $X''\cong\overline{X_c}$. Para uma polarização $X = X'\oplus X''$, *define-se os espaços*

$$\begin{aligned} F_R(X,g) &= \Lambda\Big(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+\cup\{0\}} t^{-n}X'\Big)\otimes\Lambda\Big(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} t^{-n}X''\Big) \\ &= \Lambda(X')\bigotimes_{n\in\mathbb{Z}_+}\Lambda(t^{-n}X')\bigotimes_{n\in\mathbb{Z}_+}\Lambda(t^{-n}X''), \quad (6.14) \\ F_{NS}(X,g) &= \bigotimes_{n\in\mathbb{Z}_+}\Lambda(t^{-n+1/2}X')\bigotimes_{n\in\mathbb{Z}_+}\Lambda(t^{-n+1/2}X''). \quad (6.15) \end{aligned}$$

Caráteres de fibrados algébricos vértice

Seja V uma álgebra de operador de vértice tal que os autovalores de L_0 formem um conjunto enumerável $\{h_1, h_2, \ldots\}$ em $\mathbb{C}$, e todos os autoespaços tem dimensão finita. Seja $V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+}V^{h_n}$ a decomposição do autoespaço de L_0

em V. Por definição, o caráter de V é

$$\mathrm{ch}\,(V;q) = q^{-c/24}\,\mathrm{STr}\,q^{L_0} = q^{-c/24}\sum_n \mathrm{STr}(Id\,|\,V^{h_n})q^{h_n}\,, \tag{6.16}$$

onde STr é o supertraço, que nada mais é do que o traço comum num subespaço par, e o negativo do traço comum em um subespaço ímpar. A notação a seguir será utilizada:

$$G(V;q) = q^{-c/24}\sum_n V^{h_n}d^{h_n}. \tag{6.17}$$

Assim, $\mathrm{ch}(V,q)$ pode ser obtido tomando-se o supertraço do mapa identidade em $G(V,q)$ termo a termo.

Suponha uma álgebra de operador de vértice V com uma corrente $U(1)$, e que os autovalores de L_0 e J_0 componham dois subconjuntos enumeráveis de $\mathbb{C}$, $\{h_1,h_2,\ldots\}$ e $\{j_1,j_2,\ldots\}$, respectivamente.

Seja $V=\bigoplus_{n,m\in\mathbb{Z}_+}V^{h_n,j_m}$ a decomposição de V em autoespaços comuns de L_0 e J_0. Suponha que cada V^{h,j_m} tem dimensão finita. Assim o caráter com carga $U(1)$ de uma álgebra de vértice conforme V com corrente $U(1)$ é definida por [5]

$$\begin{aligned} G(V;q,y) &= \sum_{n,m} V^{h_n,j_m}q^{h_n-c/24}(-y)^{j_m}\,, &(6.18)\\ \mathrm{ch}\,(V;q,y) &= \mathrm{Tr}\,q^{L_0-c/24}(-y)^{J_0} = \sum_{n,m}\mathrm{Tr}\,(Id\,|\,V^{h_n,j_m})q^{h_n-c/24}(-y)^{j_m}. &(6.19)\end{aligned}$$

Se a gradação $\mathbb{Z}$ gerada pelo autoespaço de decomposição de J_0 coincide com a gradação $\mathbb{Z}$ em V, tem-se $\mathrm{ch}\,(V;q,1) = \mathrm{ch}\,(V;q)$. Finalmente nota-se que o caráter carregado para o espaço de Fock fermiônico é [5]:

$$\mathrm{ch}\,(V;q,y) = q^{-c_\lambda/24}\prod_{j\in\mathbb{Z}_+}(1-yq^{j+1-\lambda})(1-y^{-1}q^{j+\lambda}), \tag{6.20}$$

no que diz respeito ao vetor conforme ν_λ.

6.2 Gêneros Elípticos dos Modelos Sigma não-Lineares

Gêneros elípticos de modelos sigma não-lineares já foram amplamente debatidos, portanto faremos apenas uma breve revisão aqui. Em aplicações físicas, um gênero elíptico representa a função partição de one-loop de uma teoria com supersimetria no mínimo $(0,2)$. Nesse tipo de teoria os férmions *movendo-se* *para direita* estão todos no setor *Ramond R* (além disso, temos a função partição de uma teoria *half-twisted*), e possivelmente os estados *left-moving* também estão *twisted* de alguma forma. Mais precisamente, consideraremos gêneros elípticos que são da forma

$$\mathrm{Tr}\ (-)^{F_R} \exp(i\gamma J_L) q^{L_0} \overline{q}^{\overline{L}_0}\,, \tag{6.21}$$

onde q é o parâmetro modular, e a corrente J_L é uma corrente $U(1)$ *left-moving*, que é assumida a sua existência. Cálculos de tal gênero foram iniciados em [21] e discutidos repetidamente dentro da literatura física. Seguindo os passo e ideias de [6], consideraremos modelos sigma não-lineares com supersimetria $(0,2)$, definidos em uma variedade complexa Kähleriana X de dimensão n com um fibrado de calibre $\mathcal{E}$ de rank r, que satisfaz $\Lambda^{top}\mathcal{E} = K_X\ \mathrm{ch}_2(TX) = \mathrm{ch}_2(\mathcal{E})$.

Assumiremos X sendo um espaço de Calab-Yau (que iremos observar casos especiais em que os resultados sensíveis podem ser obtidos de maneira mais geral). Foi mostrado que o gênero elíptico comentado acima é um *index* [21, 4]. Portanto, este *index* é invariante sob deformação contínuas da teoria, e pode-se de maneira consistente deformar a teoria até o limite de distância onde o cálculo dos *index* se torna o cálculo de um campo livre. Uma vez que os *right-movers* estão todos no setor R, está claro que os modos não-nulos dos férmions e bósons se cancelam, restando apenas os modos nulos dos *left-movers* e *right-moving* contribuindo.

Os modos nulos *right-moving* são definidos por um vácuo de Fock transformando-se como um levantamento spinor de TX [6]. Como resultado, todos os estados que aparecem no gênero elíptico possuem índices spinores. Deve-se salientar que o gênero elíptico é o *index* do operador de Dirac acoplado a vários fibrados definidos pelos modos não nulos dos campos. Para deixar isso específico, abaixo listamos alguns osciladores bosônicos e os fibrados correspondentes, para um modelo sigma não-linear em X:

Nível de massa	Oscilador	Fibrado
1	α^{μ}_{-1}	TX
2	$\alpha^{\mu}_{-2},\ \alpha^{\mu}_{-1}\alpha^{\mu}_{-1}$	$TX \oplus \mathrm{Sym}^2(TX)$
3	$\alpha^{\mu}_{-3},\ \alpha^{\mu}_{-2}\alpha^{\nu}_{-1},\ \alpha^{\mu}_{-1}\alpha^{\nu}_{-1}\alpha^{\rho}_{-1}$	$TX \oplus (TX \otimes TX) \oplus \mathrm{Sym}^3(TX)$

No nível de massa n, é fácil verificar que o fibrado obtido acima é o coeficiente de q^n no seguinte elemento do grupo de Grothendieck de fibrados vetoriais: $\bigotimes_{n\in\mathbb{Z}_+} S_{q^n}(TX)$.

Cada fator de $S_{q^n}(TX)$ corresponde a um conjunto de estados na forma $\{1, \alpha^{\mu}_{-n}, \alpha^{\mu_1}_{-n}\alpha^{\mu_2}_{-n}, \alpha^{\mu_1}_{-n}\alpha^{\mu_2}_{-n}\alpha^{\mu_3}_{-n}, \cdots\}$ e o produto tensorial contém todos os produtos de todos os operadores de criação não nulos. Assim, por exemplo, o resultado final para o gênero elíptico envolverá o cálculo do índice de um fibrado o qual possui, além de outras coisas, um fator do produto tensorial. Mais ainda, porque temos implicitamente trabalhado com variedades complexas, fibrados holomórficos, e distinguimos α^{i}_{-1} de $\alpha^{\bar{i}}_{-1}$, temos

$$\bigotimes_{n\in\mathbb{Z}_+} S_{q^n}\left((TX)^{\mathbb{C}} \equiv TX \oplus \overline{TX}\right).$$

6.3 (0,2) Modelos Sigma não-Lineares Supersimétricos

Usaremos com a seguinte notação:

$$B\begin{bmatrix} \xi \\ \sigma q \end{bmatrix}(\mathcal{P})^{\mathbb{C}} := \bigotimes_{n\in\mathbb{Z}_+} S_{\sigma q^n}\left((\xi\mathcal{P})^{\mathbb{C}}\right), \quad \widehat{B}\begin{bmatrix} \xi \\ \sigma q \end{bmatrix}(\mathcal{P})^{\mathbb{C}} := \bigotimes_{n\in\mathbb{Z}_+/2} S_{\sigma q^n}\left((\xi\mathcal{P})^{\mathbb{C}}\right), \tag{6.22}$$

$$F\begin{bmatrix} \zeta \\ \lambda q \end{bmatrix}(\mathcal{Q})^{\mathbb{C}} := \bigotimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \Lambda_{\lambda q^n}\left((\zeta\mathcal{Q})^{\mathbb{C}}\right), \quad \widehat{F}\begin{bmatrix} \zeta \\ \lambda q \end{bmatrix}(\mathcal{Q})^{\mathbb{C}} := \bigotimes_{n\in\mathbb{Z}_+/2} \Lambda_{\lambda q^n}\left((\zeta\mathcal{Q})^{\mathbb{C}}\right), \tag{6.23}$$

$$BF\begin{bmatrix} \xi\ \zeta \\ \sigma q\ \lambda q \end{bmatrix}(\mathcal{P},\mathcal{Q})^{\mathbb{C}} := \bigotimes_{n\in\mathbb{Z}_+} S_{\sigma q^n}((\xi\mathcal{P})^{\mathbb{C}}) \bigotimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \Lambda_{\lambda q^n}\left((\zeta\mathcal{Q})^{\mathbb{C}}\right), \tag{6.24}$$

$$B\widehat{F}\begin{bmatrix} \xi\ \zeta \\ \sigma q\ \lambda q \end{bmatrix}(\mathcal{P},\mathcal{Q})^{\mathbb{C}} := \bigotimes_{n\in\mathbb{Z}_+} S_{\sigma q^n}((\xi\mathcal{P})^{\mathbb{C}}) \bigotimes_{n\in\mathbb{Z}_+/2} \Lambda_{\lambda q^n}\left((\zeta\mathcal{Q})^{\mathbb{C}}\right), \tag{6.25}$$

$$\widehat{B}F\begin{bmatrix} \xi\ \zeta \\ \sigma q\ \lambda q \end{bmatrix}(\mathcal{P},\mathcal{Q})^{\mathbb{C}} := \bigotimes_{n\in\mathbb{Z}_+/2} S_{\sigma q^n}((\xi\mathcal{P})^{\mathbb{C}}) \bigotimes_{n\in\mathbb{Z}_+} \Lambda_{\lambda q^n}\left((\zeta\mathcal{Q})^{\mathbb{C}}\right), \tag{6.26}$$

$$\widehat{B}\widehat{F}\begin{bmatrix} \xi\ \zeta \\ \sigma q\ \lambda q \end{bmatrix}(\mathcal{P},\mathcal{Q})^{\mathbb{C}} := \bigotimes_{n\in\mathbb{Z}_+/2} S_{\sigma q^n}((\xi\mathcal{P})^{\mathbb{C}}) \bigotimes_{n\in\mathbb{Z}_+/2} \Lambda_{\lambda q^n}\left((\zeta\mathcal{Q})^{\mathbb{C}}\right). \tag{6.27}$$

Nos modelos sigma não-lineares (0,2) supersimétricos consideramos que a corrente J_L existe em virtude da condição $\Lambda^{top}\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_X$ on $\mathcal{E}$ (e se torna a R-corrente esquerda no caso especial de supersimetria (2,2)).

Gêneros do setor NS

Se os férmions *left-moving* estão no setor NS, então o traço (6.21) é dado por [21, 4]

$$q^{-(1/24)(2n+r)}\int_X \mathrm{Td}(TX)\wedge \mathrm{ch}\left(B\widehat{F}\left[\begin{array}{cc} e^{i\gamma} & 1 \\ q & q \end{array}\right](TX,\mathcal{E})^{\mathbb{C}}\right), \qquad (6.28)$$

onde $S_q(TX)$ é como acima, $\Lambda_q(\mathcal{E})$ simboliza um elemento do grupo de Grothendieck dos fibrados vetoriais em X, definido como combinações lineares[1]

$$\Lambda_q = 1+\sum_j q^j \mathrm{Alt}^j(\mathcal{E}),$$

e o símbolo $\mathbb{C}$ indica a complexificação: $(TX)^{\mathbb{C}} = T^{1,0}X \oplus \overline{T^{1,0}X}$, $(z\mathcal{E})^{\mathbb{C}} = z\mathcal{E} \oplus \overline{z}\overline{\mathcal{E}}$. O prefator de q é devido a energia zero do vácuo: cada bóson complexo periódico contribui com $-1/12$, e cada férmion complexo anti-periódico contribui com $-1/24$. O fato que os S_{q^n} são *tensored* juntos para um inteiro n reflete o fato de que osciladores bosônicos são integralmente *moded*; o fato de que os Λ_{q^n} são *tensored* juntos por um semi-inteiros n reflete o fato de que osciladores fermiônicos são semi-integralmente *moded*.

Gêneros do setor R

Se os férmions *left-moving* estão no setor R ao invés de estarem no setor NS, então o gênero elíptico $\mathrm{Tr}_{\mathrm{RR}}(-)^{F_R}\exp(i\gamma J_L)\, q^{L_0}\overline{q}^{\overline{L}_0}$ é dado por

$$q^{+(1/12)(r-n)}\int_X \widehat{A}(TX)\wedge \mathrm{ch}\left(z^{-r/2}\,(\det\mathcal{E})^{+1/2}\,\Lambda_1\left(z\mathcal{E}^{\vee}\right) BF\left[\begin{array}{cc} z^{-1} & 1 \\ q & q \end{array}\right](TX,\mathcal{E})^{\mathbb{C}}\right) \qquad (6.29)$$

onde $z=\exp(-i\gamma)$ (cf. [4]).

No caso de X ser Calabi-Yau, $\det\mathcal{E}$ é trivial, já que $\Lambda^{\mathrm{top}}\mathcal{E}\cong K_X$, então a expressão acima é bem definida. É sabido que é possível calcular o *gênero de Witten* como um caso especial do setor R acima. Especificamente,

[1] Ele surge fisicamente dos modos do oscilador do férmion *left-moving*, assim como o fator $B\left[\begin{array}{c} 1 \\ q \end{array}\right](TX)$ surgiu dos modos do oscilador bosônicos.

para $z=-1$, o gênero do setor R é proporcional a

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_{RR}(-)^{F_R}(-)^{F_L}q^{L_0}\overline{q}^{\overline{L}_0} &= \\ q^{+(1/12)(r-n)}\int_X \widehat{A}(TX) &\bigwedge \mathrm{ch}\left((\det\mathcal{E})^{+1/2}\,\Lambda_{-1}\left(\mathcal{E}^\vee\right) BF\left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ q & -q\end{array}\right](TX,\mathcal{E})^{\mathbb{C}}\right)\end{aligned} \tag{6.30}$$

o que é precisamente o gênero de Witten [21]. Esse gênero tem demonstrado um papel fundamental na cohomologia elíptica [31]. Quando $z=-1$, ambos os gêneros (6.29) e (6.30) são modulares dadas as duas condições $\Lambda^{top}\mathcal{E}=K_X$, $\mathrm{ch}_2(TX)=\mathrm{ch}_2(\mathcal{E})$ se mantém [6]. No entanto não é necessário que X seja Calabi-Yau.

Como exemplo, suponha que o polinômio de Chern tenha a forma $c(TX)=\prod_i(1+x_i)$. Para $\bigotimes_{n\in\mathbb{Z}_+}S_{q^n}((TX)^{\mathbb{C}})$ a caráter de Chern é

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(\bigotimes_{n\in\mathbb{Z}_+}S_{q^n}((TX)^{\mathbb{C}})) &= \mathrm{ch}(B\left[\begin{array}{c} 1 \\ q\end{array}\right](TX)^{\mathbb{C}})=\prod_i\prod_{n\in\mathbb{Z}_+}[(1-q^ne^{x_i})(1-q^ne^{-x_i})]^{-1} \\ &= \prod_i[\mathcal{R}(s=x_i(1-it))\cdot\mathcal{R}(s=-x_i(1-it))]^{-1}\,. \end{aligned}\tag{6.31}$$

O fator de

$$z^{-r/2}\,(\det\mathcal{E})^{+1/2}\,\Lambda_1(z\mathcal{E}^\vee)\;=\;z^{+r/2}\,(\det\mathcal{E})^{-1/2}\,\Lambda_1(z^{-1}\mathcal{E}) \tag{6.32}$$

surge acima dos modos zero dos férmions *left-moving.* Isso mostra a ambiguidade no vácuo de Fock: se definirmos $|0\rangle$ por $\lambda_-^a|0\rangle=0$ (ou $|0\rangle$ por $\lambda_-^{\overline{a}}|0\rangle=0$) então temos um conjunto de vácuos

$$|0\rangle,\ \lambda_-^{\overline{a}}|0\rangle,\ \cdots,\lambda_-^{\overline{a}_1}\cdots\lambda_-^{\overline{a}_r}|0\rangle\quad(\text{or}\ \ |0\rangle,\ \lambda_-^{a}|0\rangle,\ \cdots,\lambda_-^{a_1}\cdots\lambda_-^{a_r}|0\rangle)\,. \tag{6.33}$$

A existência dessas duas caracterizações diferentes dos vácuos de Fock correspondem aos dois lados da equação (6.32). Mais ainda, esses vácuos correspondem a *levantamentos espinoriais* de $\mathcal{E}$: nota-se que podemos escrever $\Lambda_1(z\mathcal{E}^\vee)=\mathcal{S}_+(z\mathcal{E}^\vee)\oplus\mathcal{S}_-(z\mathcal{E}^\vee)$, onde $\mathcal{S}_\pm$ simboliza os dois *chiral Spin^c lifts* de $\mathcal{E}^\vee$, *i.e.*

$$\mathcal{S}_+(\mathcal{E}^\vee)\equiv\bigoplus_{n\,\mathrm{even}}\Lambda^n\mathcal{E}^\vee\,,\qquad\mathcal{S}_-(\mathcal{E}^\vee)\equiv\bigoplus_{n\,\mathrm{odd}}\Lambda^n\mathcal{E}^\vee \tag{6.34}$$

os quais são transformados em espinores via fatores $\sqrt{\det\mathcal{E}}$. (Fisicamente, todo fibrado vetorial é acompanhado de uma métrica hermitiana fibrada, assim muitas vezes falharemos em distinguir $\mathcal{E}^\vee$ de $\overline{\mathcal{E}}$.)

O prefator de q é devido a energia zero do vácuo: cada bóson complexo periódico contribui $-1/12$, e cada férmion complexo periódico contribui $1/12$.

Perceba que nos *levantamentos espinoriais* de $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ não é complexificado, ao contrário dos modos não nulos. Isso se deve à ambiguidade do vácuo de Fock, por isso foi usada a relação $\{\psi_0^i, \psi_{0j}\} \propto \delta_j^i$, depois então tomou-se uma das formas de ψ_0^i, ψ_{0j} para serem os operadores de criação e a outra para serem os operadores de aniquilação[2].

6.4 Gênero Elíptico dos Modelos Landau-Ginzburg Sobre Espaços Vetoriais

Gênero do Setor R

Já foi revisado alguns cálculos de gêneros elípticos em modelos sigma não-lineares; a seguir, reveremos cálculos de gêneros elípticos de modelos de Landau-Ginzburg sobre espaços topológicos triviais, com superpotenciais quasi-homogêneos, já discutidos em [3]. Particularmente, nos focaremos no caso especial de modelos de Landau-Ginzburg sobre a linha complexa, com superpotencial monomial. Considerando um modelo de Landau-Ginzburg sobre a linha complexa $\mathbb{C}$, com superpotencial $W = \Phi^{k+2}$, assim como em [3], o gênero elíptico é definido como o traço

$$\mathrm{Tr}\ (-)^{F_R} q^{L_0} \overline{q}^{\overline{L}_0} \exp(i\gamma J_L) \tag{6.35}$$

sobre os estados. As condições de contorno ao longo das direções *timelike* requerem maiores explicações. Trabalhando as *cargas R esquerdas* dos campos de modo a entender o fator $\exp(i\gamma J_L)$ no traço. Por causa das interações dos superpotenciais, a *simetria R esquerda* no mais apenas rotaciona os ψ_-'s de uma fase, deixando os campos invariantes, mas agora rotaciona todos os campos por uma fase.

As *cargas R esquerdas* são:

Campo	carga R	condições de contorno R
ϕ	1	$\phi(x_1+1, x_2) = \phi(x_1, x_2)$
ψ_+	1	$\psi_+(x_1+1, x_2) = \psi_+(x_1, x_2)$
ψ_-	$-(k+1)$	$\psi_-(x_1+1, x_2) = \psi_-(x_1, x_2)$

[2] A escolha é indiferente, pois a coleção de estados resultante é a mesma.

E mais, por causa das interações dos superpotenciais, $(-)^{F_R}$ não corresponde mais apenas ao sinal nos ψ_+s, ele gera os sinais tanto nos ψ_+ quanto nos ψ_- simultaneamente. Apenas lembrando que campos com condições de contorno de Ramond ao longo das direções *timelike* correspondem a traços com fatores $(-)^F$.Os modos nulos de ψ_- contribuem com um fator $\exp(-i\gamma(k+1)/2) - \exp(+i\gamma(k+1)/2)$, e os modos nulos de ψ_+ contribuem com um fator de $\exp(i\gamma/2) - \exp(-i\gamma/2)$.

Contribuição Fermiônica

Os modos não-nulos dos férmions contribuem

$$\begin{aligned}&\prod_{n\in\mathbb{Z}_+}[1-z^{k+1}q^n][1-z^{-(k+1)}q^n][1-z^{-1}\overline{q}^n][1-z\overline{q}^n]\\&=\mathcal{R}(s=-i\gamma(k+1)(1-it))\cdot\mathcal{R}(s=i\gamma(k+1)(1-it))\\&\times\,\mathcal{R}(\overline{s}=-i\gamma(1-it))\cdot\mathcal{R}(\overline{s}=i\gamma(1-it))\,,\end{aligned}\tag{6.36}$$

onde assim como anteriormente $z=\exp(-i\gamma)$ e o sinal negativo são devido ao fator $(-)^{F_R}$ no traço (e também por causa das interações dos superpotenciais, $(-)^{F_R}$ multiplica simultaneamente ψ_- e ψ_+ por um sinal).

Se fizermos com que L represente o fibrado tangente de $\mathbb{C}$ restrito à origem, então a expressão da contribuição dos modos não-nulos dos férmions, escrita acima, fica da forma

$$\mathrm{ch}\left(F\begin{bmatrix} z^{k+1}\\ -q\end{bmatrix}(L)^{\mathbb{C}}F\begin{bmatrix} z^{-1}\\ -q\end{bmatrix}(L)^{\mathbb{C}}\right)\tag{6.37}$$

e podemos escrevê-la dessa maneira como um index de um operador de Dirac.

Contribuição Bosônica

Os modos não-nulos dos bósons contribuem

$$\begin{aligned}&\prod_{n\in\mathbb{Z}_+}\left([1-zq^n][1-z^{-1}q^n][1-z\overline{q}^n][1-z^{-1}\overline{q}^n]\right)^{-1}\\&=\left[\mathcal{R}(s=-i\gamma(1-it))\cdot\mathcal{R}(s=i\gamma(1-it))\right]^{-1}\\&\times\,\left[\mathcal{R}(\overline{s}=-i\gamma(1-it))\cdot\mathcal{R}(\overline{s}=i\gamma(1-it))\right]^{-1}\,.\end{aligned}\tag{6.38}$$

que podemos escrever como

$$\mathrm{ch}\left(B\begin{bmatrix} z^{-1}\\ q\end{bmatrix}(L)^{\mathbb{C}}B\begin{bmatrix} z^{-1}\\ -\overline{q}\end{bmatrix}(L)^{\mathbb{C}}\right)\tag{6.39}$$

Note que, pelo produtório acima, as contribuições $\overline{q}$ dos bóson e férmions se cancelam.

Caso de modos nulos

Finalmente, nesse caso especial, os modos nulos[3] ϕ_0, $\overline{\phi}_0$ também contribuem com um fator $[(1-z)(1-z^{-1})]^{-1}$ como visto em [3]. Juntando tudo, temos o gênero

$$\begin{aligned} f(z,q) &= \frac{z^{-1/2}\left(z^{(k+1)/2} - z^{-(k+1)/2}\right)}{(1 - z^{-1})} \prod_{n\in\mathbb{Z}_+} \frac{\left(1 - z^{k+1}q^n\right)\left(1 - z^{-(k+1)}q^n\right)}{\left(1 - z^{-1}q^n\right)\left(1 - zq^n\right)} \\ &= \frac{\mathrm{sen}\frac{\gamma}{2}(k+1)}{\mathrm{sen}\frac{\gamma}{2}} \left[\frac{\mathcal{R}(s=-i\gamma(k+1)(1-it))\cdot\mathcal{R}(s=(i\gamma(k+1)(1-it))}{\mathcal{R}(\overline{s}=-i\gamma(1-it))\cdot\mathcal{R}(\overline{s}=i\gamma(1-it))}\right]. \end{aligned} \tag{6.40}$$

Podemos interpretá-lo como uma *teoria index* sobre um ponto, ou seja, um espaço de modos nulos bosônicos que satisfazem as condições de contorno $\phi(x_1, x_2+1) = \exp(i\gamma)\phi(x_1,x_2)$ para um γ genérico, que é o mesmo que dizer, $\phi_0 = \{0\}$. Visto que a expressão para os modos não-nulos é dada por

$$\mathrm{ch}\left(B\begin{bmatrix}1\\ z^{-1}q\end{bmatrix}(L)^{\mathbb{C}}B\begin{bmatrix}1\\ zq\end{bmatrix}(\overline{L})^{\mathbb{C}}F\begin{bmatrix}1\\ -z^{k+1}q\end{bmatrix}(L)^{\mathbb{C}}F\begin{bmatrix}1\\ -z^{-k-1}q\end{bmatrix}(\overline{L})^{\mathbb{C}}\right). \tag{6.41}$$

Ao invés de se trabalhar com os campos com condições de contorno R ao long das direções *timelike*, pode-se calcular o gênero elíptico no qual ψ_- possua condições de contorno NS em direções *espaciais*. Mas lembrando que por causa do acoplamento $\psi_+\psi_-\phi^k$ de Yukawa, se ψ_- possui condições de contorno NS, então o mesmo se dará para ψ_+, consequentemente as contribuições *right-moving* não se cancelarão.

Gêneros do Setor NS

Na última seção foram revistos os resultados de [3] quando se calcula gêneros elípticos de modelos de Landau-Ginzburg sobre espaços vetoriais, no setor R. Nessa seção extenderemos os resultados de [3] para o setor NS. A partir da tabela das *cargas R esquerdas* da última seção, vê-se que os campos no setor NS possuem condições de contorno *spacelike* $\phi(x_1+1, x_2) = -\phi(x_1,x_2)$, $\psi_+(x_1+1,x_2) = -\psi_+(x_1,x_2)$, $\psi_-(x_1+1,x_2) = (-)^{k+1}\psi_-(x_1,x_2)$.

[3] Levando em conta condições de contorno *timelike*, não existem modos nulos do ponto de vista da quantização por integral de caminho. Os ϕ_0, $\overline{\phi}_0$ aqui referidos são apenas um artefato de modulação periódica na quantização canônica.

Das condições de contorno acima, vê-se que é necessário considerar os casos de k par e ímpar separadamente.

Caso para k sendo par

Nesse caso não há modos nulos, e os férmions contribuem

$$\begin{aligned}
&\prod_{n\in\mathbb{Z}_+/2}\left[1-z^{k+1}q^n\right]\left[1-z^{-(k+1)}q^n\right]\left[1-z^{-1}\overline{q}^n\right]\left[1-z\overline{q}^n\right] \\
&= \mathcal{R}(s=-i\gamma(k+1)(1-it))\cdot\mathcal{R}(s=i\gamma(k+1)(1-it)) \\
&\times \mathcal{R}(\overline{s}=-i\gamma(1-it))\cdot\mathcal{R}(\overline{s}=i\gamma(1-it))
\end{aligned} \tag{6.42}$$

e os bóson contribuem

$$\begin{aligned}
&\prod_{n\in\mathbb{Z}_+/2}\left[1-z^{-1}q^n\right]^{-1}\left[1-zq^n\right]^{-1}\left[1-z^{-1}\overline{q}^n\right]^{-1}\left[1-z\overline{q}^n\right]^{-1} \\
&= \left[\mathcal{R}(s=-i\gamma(1-it))\cdot\mathcal{R}(s=i\gamma(1-it))\right]^{-1} \\
&\times \left[\mathcal{R}(\overline{s}=-i\gamma(1-it))\cdot\mathcal{R}(\overline{s}=i\gamma(1-it))\right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{6.43}$$

Agrupando tudo, o gênero elíptico para um k par é dado por

$$\begin{aligned}
&\prod_{n\in\mathbb{Z}_+/2}\left[1-z^{k+1}q^n\right]\left[1-z^{-(k+1)}q^n\right]\left[1-z^{-1}q^n\right]^{-1}\left[1-zq^n\right]^{-1} \\
&= \left[\frac{\mathcal{R}(s=-i\gamma(1-it))\cdot\mathcal{R}(s=i\gamma(1-it))}{\mathcal{R}(s=-i\gamma(1-it))\cdot\mathcal{R}(s=i\gamma(1-it))}\right].
\end{aligned} \tag{6.44}$$

Caso para k sendo ímpar

Existem modos nulos ψ_-. Nesse caso a contribuição total dos férmions é

$$\begin{aligned}
&\left(z^{(k+1)/2}-z^{-(k+1)/2}\right)\prod_{n\in\mathbb{Z}_+}\left[1-z^{k+1}q^n\right]\left[1-z^{-(k+1)}q^n\right]\prod_{n\in\mathbb{Z}_+/2}\left[1-z^{-1}\overline{q}^n\right]\left[1-z\overline{q}^n\right] \\
&= -2i\,\mathrm{sen}\frac{\gamma}{2}(k+1)\mathcal{R}(s=-i\gamma(k+1)(1-it))\cdot\mathcal{R}(s=i\gamma(k+1)(1-it)) \\
&\times \mathcal{R}(s=-i\gamma(1-it))\cdot\mathcal{R}(s=i\gamma(1-it)),
\end{aligned} \tag{6.45}$$

e os bóson contribuem

$$\prod_{n\in\mathbb{Z}_+/2}\left[1-z^{-1}q^n\right]^{-1}\left[1-zq^n\right]^{-1}\left[1-z^{-1}\overline{q}^n\right]^{-1}\left[1-z\overline{q}^n\right]^{-1}.$$

Juntando tudo, o gênero elíptico é dado por

$$\left(z^{(k+1)/2} - z^{-(k+1)/2}\right) \prod_{n\in\mathbb{Z}_+} \left[1 - z^{k+1}q^n\right] \left[1 - z^{-(k+1)}q^n\right] \prod_{n\in\mathbb{Z}_+-1/2} \left[1 - z^{-1}q^n\right]^{-1} \left[1 - zq^n\right]^{-1}$$
$$= -2i\,\mathrm{sen}\frac{\gamma}{2}(k+1)\left[\frac{\mathcal{R}(s=-i\gamma(k+1)(1-it))\cdot\mathcal{R}(s=(i\gamma(k+1)(1-it))}{\mathcal{R}(s=-i\gamma(1-it))\cdot\mathcal{R}(s=i\gamma(1-it))}\right]. \qquad (6.46)$$

Capítulo 7

Branas Lagrangeanas

Relembrando a relação entre vértice topológico e amplitudes de cordas abertas na presença de *stack* de branas. É conhecido que no caso de *stack* de D-branas lagrangeanas terminando em uma das pernas de $\mathbb{C}^3$ (seguindo [13] na notação e na reprodução de resultados necessários), a função partição é dada por

$$\mathcal{F}(q;V) = \sum_{\nu} C_{\emptyset\emptyset\nu}(q^{-1})\,\mathrm{Tr}_{\nu}V\,. \tag{7.1}$$

Onde $\mathrm{Tr}_{\nu}V = s_{\nu}(\mathbf{x})$ são funções de Schur, $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \cdots\}$ sendo os autovalores da matriz de holonomia V, e $C_{\lambda\mu\nu}(q)$ é o vértice topológico [14]. Também é conhecido que o vértice topológico possui uma interpretação em termos da contagem de certas partições tridimensionais com assíntotas fixas [15]. Sabendo que as funções de Schur tem a propriedade $s_{\nu/\lambda}(Q) = Q^{|\nu|-|\lambda|}$, $\nu \succ \lambda$, e caso contrário $s_{\nu/\lambda}(Q) = 0$, começaremos o capítulo considerando uma brana lagrangeana.

7.1 Brana Lagrangeana Simples

Para uma brana langrangeana simples $\mathbf{x} = (-Q, 0, 0, 0, \cdots)$ temos a já conhecida função partição

$$\mathcal{F}(q;Q) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - Q\,q^{-n+\frac{1}{2}}) \overset{\text{pela Eq.(A.5)}}{=\!=\!=} \mathcal{R}(s = (\alpha - 1/2)(1 - i\varrho(\tau)) + 2)\,. \tag{7.2}$$

De maneira cuidadosa e em concordância com as notações padrões, usamos as variáveis $\{Q, q, t\}$ quando falamos sobre amplitudes de cordas topológicas calculadas através de vértices topológicos, ver [13]. Esse conjunto de variáveis é relacionado às nossas notações $\{Q^{\alpha}, q = \exp(2\pi i\tau), t = \exp(2\pi i\sigma)\}$ da seguinte maneira: $\tau = F_1/2\pi i$, $\sigma = F_2/F_1$, quando colocamos um *graviphoton field strength* (campo tensorial) constante não autodual $F = F_1 dx^1 \wedge dx^2 + F_2 dx^3 \wedge dx^4$, e $\alpha = -\int_C \omega/F_1$ [13].

A função partição de uma única brana lagrangeana, dada acima, pode ser interpretada em termos de séries de Hilbert de produtos simétricos de $\mathbb{C}$. De fato, $s_{\nu}(Q)$ é não-nulo apenas para as partições nas quais $\ell(\nu) = 1$, ou seja, $\nu = (\nu_1, 0, 0, \cdots)$.

Essas são, precisamente, as partições que discriminam os pontos fixos do produto simétrico de $\mathbb{C}$, *i.e.*, $\mathrm{Sym}^\bullet(\mathbb{C})$ possui apenas um ponto fixo marcado pela função partição $\nu = (\bullet, 0, 0, \cdots)$. Uma função geradora da série de Hilbert de produto simétrico é [32]

$$\mathfrak{G}(\psi, q) := \sum_{k=0}^{\infty} \psi^k \, H[\,\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C})](q). \tag{7.3}$$

De maneira a determinar $H[\,\mathrm{Sym}^k(\mathbb{C})](q)$ note que R_k é o anel de funções simétricas nas variáveis $\{z_1, z_2, \cdots, z_k\}$ e por isso as funções de Schur fornecem uma base de R_k, $R_k = \langle s_\nu(z_1, \cdots, z_k) | \ell(\nu) \leq k \rangle$. A condição $\ell(\nu) \leq k$ é necessária desde que $s_\nu(z_1, \cdots, z_k) = 0$ para $\ell(\nu) > k$. R_k é isomorfo ao espaço de Hilbert $\mathcal{H}_k$, gerado pelo *oscilador bosônico até a carga* k. Os espaços de Hilbert $\{\mathcal{H}_k\}_{k=0}^{\infty}$ formam uma sequência $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_3 \subset \cdots$ que corresponde à sequência dos diagramas de Young de número de linhas crescente.

A ação $\mathbb{C}^\times$ (em $\mathbb{C}$ q atua como uma ação $\mathbb{C}^\times$ $z \mapsto qz$), que eleva para uma ação em $\mathrm{Sym}^\bullet(\mathbb{C})$ tal que as funções de Schur $s_\nu(z_1, \cdots, z_k)$ são autofunções com autovalor $q^{|\nu|}$, se torna a ação de q^{L_0} nos estados de $\mathcal{H}$, com $L_0 = \sum_{n>0} \alpha_{-n}\alpha_n$,

$$\begin{aligned} H[R_k](q) &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_k} q^{L_0} = \sum_{\nu | \ell(\nu) \leq k} q^{|\nu|} = \prod_{n=1}^{k} (1 - q^n)^{-1} = s_{(k)}(1, q, q^2, \cdots) \\ &= \left[\frac{\mathcal{R}(s = 1 - i\varrho(\tau))}{\mathcal{R}(s = (k+1)(1 - i\varrho(\tau)))} \right]^{-1}. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Note que as séries de Hilbert de R_k nesse caso tornam-se a função partição do número de partições com no máximo k partes. Então as funções geradoras $\mathfrak{G}(\psi, q)$ são dadas por

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}(\psi, q) &= \sum_{k=0}^{\infty} \psi^k H[R_k](q) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi^k \mathrm{Tr}_{\mathcal{H}_k} q^{L_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \psi^k s_{(k)}(1, q, q^2, \cdots) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} s_{(k)}(\psi) s_{(k)}(1, q, q^2, \cdots) = \sum_{\nu} s_\nu(\psi) s_\nu(1, q, q^2, \cdots) = \sum_{\nu} s_\nu(q^{-\rho}) s_\nu(\psi\, q^{-\frac{1}{2}}) \\ &= \sum_{\nu} s_{\nu^t}(q^\rho)\, s_\nu(-q^{-\frac{1}{2}}\psi) = \sum_{\nu} C_{\emptyset\emptyset\nu}(q^{-1})\, \mathrm{Tr}_\nu V = \mathcal{F}(q; Q). \end{aligned} \tag{7.5}$$

onde $\mathrm{Tr}_\nu V = s_\nu(Q)$ e $Q = q^{-\frac{1}{2}}\psi$. $\mathrm{Tr}_\nu V = s_\nu(\mathbf{x})$ onde $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \cdots\}$ são os autovalores da matriz de holonomia V. Então a função partição assume a forma

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(q;V) &= \sum_{\nu} C_{\emptyset\emptyset\nu}(q^{-1})\, s_{\nu}(\mathbf{x}) = \sum_{\nu} s_{\nu^t}(q^{\rho}) s_{\nu}(\mathbf{x}) = \prod_{k,j=1}^{\infty}(1+q^{-k+\frac{1}{2}}x_j) \\ &\underset{\text{by Eq.(A.6)}}{=\!=\!=} \prod_{j=1}^{\infty}\mathcal{R}(s=(a_j-1/2)(1-i\varrho(\tau))+2+i/(2\mathrm{Im}\tau))\,, \end{aligned} \tag{7.6}$$

onde $a_j \equiv \log x_j/\log q$.

Se movimentarmos a brana para o infinito ($Q = e^{-\int_C \omega} \mapsto 0$) a contribuição dos modos mais elevados é suprimida. Mas por outro lado, conforme a brana se movimenta em direção à origem ($Q \mapsto 1$) modos mais elevados do oscilador começam a contribuir com o mesmo peso para a função partição. Segue também que o vértice topológico $C_{\emptyset\emptyset(k)}(q)$ possui uma interpretação que conta o número de estados de uma dada energia no espaço de Hilbert $\mathcal{H}_k$. É tentador conjecturar que o vértice topológico com todas as três partições não-triviais possui uma interpretação similar em termos de funções espectrais.

7.2 *Stack* de Branas

Consideremos o caso de múltiplas branas lagrangeanas em uma das pernas de $\mathbb{C}^3$. Assim $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ e a função partição se torna

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\mathbf{x},q) &= \sum_{\nu} C_{\emptyset\emptyset\nu}(q^{-1})\, s_{\nu}(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{N}\prod_{k=1}^{\infty}(1+q^{-k+\frac{1}{2}}x_j) \\ &= \prod_{j=1}^{N}\mathcal{R}(s=(a_j-1/2)(1-i\varrho(\tau))+2+i/(2\mathrm{Im}\tau))\,. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Está claro que a função partição (7.7) é a função geradora da série de Hilbert de *produto de produtos simétricos* de $\mathbb{C}$.

Capítulo 8

Vértice Topológico e Amplitudes de Cordas

Nesta seção explicaremos a interpretação (combinatorial) de vértices em termos de partições tridimensionais. O vértice refinado tem uma interpretação em termos de amplitudes de cordas topológicas abertas na presença de pilhas (stack) de A-branas. Esse vértice pode ser visto como *peças fundamentais building blocks* para o cálculo dos nós invariantes de Khovanov que podem ser obtidos de variedades Calabi-Yau tóricas locais. A pilha de D-branas no contexto de vértice refinado também pode ser relacionada com o produto simétrico de $\mathbb{C}$, da mesma forma que foi possível no contexto de vértice usual. O vértice topológico refinado também possui uma interpretação combinatorial em termos de partições 3D [13, 28, 29].

8.1 Função Partição de Corda Aberta

Perceba que a função partição da corda aberta depende de qual perna é colocada a pilha de branas. Basicamente temos três opções para a função partição da corda aberta correspondentes às três pernas de $\mathbb{C}^3$ [13]:
(**1**) $C_{\lambda\emptyset\emptyset}(t,q) = (q/t)^{|\lambda|/2}\, s_{\lambda^t}(t^{-\rho})\,;$
(**2**) $C_{\emptyset\mu\emptyset}(t,q) = (q/t)^{(||\mu^t||^2-|\mu|)/2}\, s_{\mu^t}(q^{-\rho})\,;$
(**3**) $C_{\emptyset\emptyset\nu}(t,q) = q^{||\nu||^2/2}/\prod_{s\in\nu}(1-t^{1+a(s)}\,q^{\ell(s)})\,.$

Nos dois primeiros casos a função partição é a mesma que a função partição obtida de um vértice comum exceto que a função partição depende ou de t ou q, dependendo de qual perna a brana termina. O terceiro caso é o mais interessante, a brana pode terminar na perna *preferencial*. Nesse caso $\mathbf{x} = \{-Q, 0, 0, \cdots\}$ a amplitude de corda aberta é dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(Q,t,q) &= \sum_{\nu} C_{\emptyset\emptyset\nu}(t^{-1},q^{-1})\, s_{\nu}(-Q) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{\emptyset\emptyset(k)}(t^{-1},q^{-1})(-Q)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \Big(Q\frac{t}{\sqrt{k}}\Big)^k \prod_{n=1}^{k}(1-t\,q^{n-1})^{-1} \\
&\overset{t:=q^{\sigma}}{=\!=\!=} \sum_{k=0}^{\infty} \Big(Q\frac{q^{\sigma}}{\sqrt{k}}\Big)^k \left[\frac{\mathcal{R}(s=(\sigma-1)(1-i\varrho(\tau)))}{\mathcal{R}(s=(k+\sigma)(1-i\varrho(\tau)))}\right]^{-1} .
\end{aligned} \tag{8.1}$$

*A função partição acima pode ser escrita usando uma série de Hilbert de produtos simétricos de $\mathbb{C}$.

O caso do Calabi-Yau *threefold* $\mathcal{X} = \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-1) \mapsto \mathbb{P}^1$

Pode-se utilizar o vértice refinado topológico para determinar a função partição generalizada para vários *Calabi-Yau threefold* tóricos locais. A compactificação da *teoria de cordas tipo IIA* em $\mathcal{X} \mapsto \mathbb{P}^1$ dá origem a uma teoria de gauge $U(1)$ $\mathcal{N}=2$ no $\mathbb{C}^2$ transverso num certo limite específico [26]. A função partição da corda topológica é dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(q,Q) &= \sum_{\nu} Q^{|\nu|}(-1)^{|\nu|}\, C_{\emptyset\emptyset\nu}(q)\, C_{\emptyset\emptyset\nu^t}(q) = \sum_{\nu} Q^{|\nu|}(-1)^{|\nu|} s_{\nu^t}(q^{-\rho}) s_{\nu}(q^{-\rho}) \\
&= \prod_{k,j=1}^{\infty}\Big(1-Q\,q^{k+j-1}\Big) = \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-q^n\,Q\Big)^n \\
&\overset{\text{by Eq.(A.7)}}{=\!=\!=\!=} \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}(s=(n+\alpha)(1-i\varrho(\tau)))\,.
\end{aligned} \tag{8.2}$$

onde $-\log Q = \int_C \omega$ é o parâmetro de Kähler, o tamanho do $\mathbb{P}^1$. Assim o vértice refinado topológico pode ser utilizado para determinar a função partição refinada. Outra opção de função partição refinada é

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(t,q,Q) &= \sum_\lambda Q^{|\lambda|}(-1)^{|\lambda|}\, C_{\lambda\,\emptyset\,\emptyset}(t,q)\, C_{\lambda^t\,\emptyset\,\emptyset}(q,t) \\
&= \sum_\lambda (-Q)^{|\lambda|}\left(\tfrac{q}{t}\right)^{\frac{|\lambda|}{2}} s_{\lambda^t}(t^{-\rho})\left(\tfrac{t}{q}\right)^{\frac{|\lambda|}{2}} s_\lambda(q^{-\rho}) \\
&= \sum_\lambda (-Q)^{|\lambda|} s_{\lambda^t}(t^{-\rho})\, s_\lambda(q^{-\rho}) \;=\; \prod_{k,j=1}^{\infty}(1-Q\,q^{k-\frac{1}{2}}\,t^{j-\frac{1}{2}}) \\
&= \prod_{j=1}^{\infty}\mathcal{R}(s=(\alpha+\sigma(j-1/2)-1/2)(1-i\varrho(\tau)))\,. \qquad (8.3)
\end{aligned}$$

O caso do Calabi-Yau *threefold* $\mathcal{X}=\mathcal{O}(0)\oplus\mathcal{O}(-2)\mapsto\mathbb{P}^1$

No formalismo de vértices topológicos as funções partição assumem a forma[1]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(q,Q) &= \sum_\nu Q^{|\nu|}(-1)^{|\nu|} C_{\emptyset\,\emptyset\,\nu}(q)\,(-1)^{|\nu|}\, q^{\frac{\kappa(\nu)}{2}}\, C_{\emptyset\,\emptyset\,\nu^t}(q) \\
&= \sum_\nu Q^{|\nu|} s_{\nu^t}(q^{-\rho})\, q^{\frac{\kappa(\nu)}{2}}\, s_\nu(q^{-\rho}) \\
&= \sum_\nu Q^{|\nu|} s_{\nu^t}(q^{-\rho})\, s_{\nu^t}(q^{-\rho}) = \prod_{k,j=1}^{\infty}\Big(1-Q\,q^{k+j-1}\Big)^{-1} = \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-Q\,q^n\Big)^{-n} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty}\left[\mathcal{R}(s=(n+\alpha)(1-i\varrho(\tau)))\right]^{-1}\,. \qquad (8.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(t,q,Q) &= \sum_\lambda Q^{|\lambda|}(-1)^{|\lambda|}\, C_{\emptyset\,\lambda\,\emptyset}(t,q)\, f_\lambda(t,q)\; C_{\lambda^t\,\emptyset\,\emptyset}(t,q) \\
&= \sum_\lambda (-Q)^{|\lambda|}\left(\frac{q}{t}\right)^{\frac{||\lambda||^2}{2}} t^{\frac{\kappa(\lambda)}{2}}\, s_{\lambda^t}(q^{-\rho})\, f_\lambda(t,q)\, s_\lambda(t^{-\rho}) \\
&= \sum_\lambda (Q\sqrt{\tfrac{q}{t}})^{|\lambda|}\, s_{\lambda^t}(t^{-\rho})\, s_{\lambda^t}(q^{-\rho}) = \prod_{k,j=1}^{\infty}\Big(1-Q\,q^k\,t^{j-1}\Big)^{-1} \\
&= \prod_{j=1}^{\infty}\left[\mathcal{R}(s=(1+\alpha+\sigma(j-1))(1-i\varrho(\tau)))\right]^{-1}\,. \qquad (8.5)
\end{aligned}$$

[1] É possível obter-se essa geometria a partir de $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ locais adimitindo que o tamanho de um $\mathbb{P}^1$ é muito grande e tomando-se duas cópias de $\mathcal{O}(0)\oplus\mathcal{O}(-2)\mapsto\mathbb{P}^1$.

Capítulo 9

Conclusões

O conceito central e o principal resultado nos exemplos vistos é que as funções geradoras quânticas consideradas nesse trabalho podem ser convertidas em produtos de funções espectrais associadas à q-séries. Essa característica comum contém uma conexão com álgebras de Lie de dimensão infinita e suas homologias, juntamente com uma notável ligação com geometria hiperbólica. Mais ainda, o *link* entre modelos quânticos bidimensionais e tridimensionais se manifesta no fato que determinadas q-séries, como as séries características e caráteres de álgebras de Lie superconformes, podem ser expressas de uma maneira universal em termos de geometria hiperbólica. Os polinômios de Poincaré, os vértices topológicos e as amplitudes de cordas podem ser convertidas em produtos que herdam propriedades modulares e homológicas de álgebras adequadas. Esse ferramental matemático nos permite encontrar novos e interessantes resultados (assim como importantes resultados já conhecidos) particularmente em teoria de campos superconformes. O interesse de esclarecer tal ligação é um desafio para o futuro.

Bibliografia

[1] D. B. Fuks, *Cohomology of Infinite-Dimensional Lie Algebras*, Contemporary Soviet Mathematics, Consultans Bureau, New York, 1986.

[2] V. G. Kac, *Infinite Dimensional Lie Algebras*, third ed. Cambridge University Press, 1990.

[3] E. Witten, *On the Landau-Ginzburg description of N=2 minimal models*, Int. J. Mod. Phys. A **9** (1994) 4783-4800;

[4] E. Witten, *The index of the Dirac operator in loop space*, in "Elliptic Curves and Modular forms in Algebraic Topology" (Princeton, NF, 1988), 161-181, Lect. Notes in Math., **1326**, Springer, Berlin, 1988.

[5] J. Zhou, *Vertex Operator Algebras and Differential Geometry*, http://www.cms.zju.edu.cn/UploadFiles/AttachFiles/200471116231511.pdf. Lecture notes, 2004.

[6] M. Ando and E. Sharpe, *Elliptic genera of Landau-Ginzburg models over nontrivial spaces.*

[7] L. Borisov and A. Libgober, *Elliptic Genera of Singular Varieties*, Duke Math. J. **116** (2003) 319-351; [arXiv:math.AG/0007108].

[8] A. A. Bytsenko and M. E. X. Guimãraes, *Expository Remarks on Three-Dimensional Gravity and Hyperbolic Invariants*, Class. Quantum Grav. **25** (2008) 228001; [arXiv:hep-th/0809.5179].

[9] A. Deitmar, *The Selberg Trace Formula and the Ruelle Zeta Function for Compact Hyperbolics*, Abh. Math. Se. Univ. Hamburg **59** (1989) 101.

[10] G. E. Andrews, *The Theory of Partitions*, In Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Addison-Wesley Publishing Company, 1976.

[11] D. Fried, *Analytic torsion and closed geodesics on hyperbolic manifolds, Invent. Math. 84 (1986) 523.*

[12] A. Maloney and E. Witten, Quantum Gravity Partition Function In Three Dimensions, JHEP **1002** *(2010) 029; [arXiv:hep-th/0712.0155].*

[13] A. Iqbal, C. Kozçaz and C. Vafa, The Refined Topological Vertex, JHEP **0910** *(2009) 069 (70pp.); [arXiv:hep-th/0701156v2].*

[14] M. Aganagic, A. Klemm, M. Marino and C. Vafa, *The Topological Vertex, Commun. Math. Phys.* **254** *(2005) 425-478; [arXiv:hep-th/0305132].*

[15] A. Okounkov, N. Reshetikhin, C. Vafa, *Quantum Calabi-Yau and Classical Crystals, Progr. Math.* **244** *(2006) 597-618; [arXiv:hep-th/0309208v2].*

[16] A. A. Belavin, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory, Nucl. Phys. B* **241** *(1984) 333.*

[17] R. Dijkgraaf, *Discrete torsion and symmetric products, arXiv:hep-th/9912101.*

[18] M. Kleban, M. Porrati and R. Rabadan, *Poincaré Recurrences and Topological Diversity, JHEP* **0410** *(2004) 030; [arXiv:hep-th/0407192].*

[19] J. Manschot, *AdS_3 Partition Functions Reconstructed, JHEP* **0710** *(2007) 103; [arXiv:hep-th/0707.1159].*

[20] F. L. Williams, *Remarks on the Patterson-Selberg zeta function, Black Hole vacua and extremal CFT partition functions, J. Phys. A: Math. Theor. 45 (2012) 374008 (19pp).*

[21] E. Witten, *Elliptic genera and quantum field theory, Commun. Math. Phys.* **109** *(1987) 525–536.*

[22] E. Witten, *On Landau-Ginzburg description of $\mathcal{N} = 2$ minimal models, Int. J. Mod. Phys. A* **9** *(1994) 4783–4800.*

[23] I. G. Macdonald, *The Poincaré polynomial of a symmetric product, Proc. Cambridge Philos. Soc.* **58** *(1962) 563.*

[24] I. G. Macdonald, *Affine root systems and Dedekind's function, Invent. Math.* **15** *(1972) 91.*

[25] A. Iqbal, C. Kozcaz and C. Vafa, *The Refined Topological Vertex, JHEP* **0910** *(2009) 069; [arXiv:hep-th/0701156].*

[26] C. P. Boyer and K. Galicki, *Sasakian Geometry, Holonomy, and Supersymmetry, arXiv:math.DG/0703231v2.*

[27] L. B. Drissi, J. Houda and E. H. Saidi, *Generalized MacMahon $G_d(q)$ as q-deformed CFT_2 correlation function, Nucl. Phys. B* **801** *(2008) 316-345; [arXiv:hep-th/0801.2661v2].*

[28] Bytsenko, A. A. ; ELIZALDE, E. ; LUNA, R. M. . The Casimir effect in Topological Field Theory: Case of Elliptic Genera. In: 7th International Conference Mathematical Methods in Physics, 2012, Rio de Janeiro, RJ. 7th International Conference Mathematical Methods in Physics. Trieste: PoS - Proceedings of Science, 2012.

[29] Guimarães, M. E. X. ; LUNA, R. M. ; ROSA, T. O. . Topological Vertex, String Amplitudes and Spectral Functions of Hyperbolic Geometry. Eur. Phys. J. C (2014) 74: 2880 European Physical Journal. C, Particles and Fields (Print) , 2014.

[30] I. N. Bernshtein and B. I. Rozenfel'd, Homogeneous spaces of infinite-dimensional Lie algebras and characteristic classes of foliations, Russian Math. Surveys **28** *(1973) 107–142.*

[31] M. Ando, M. J. Hopkins and N. P. Strickland, Elliptic spectra, the Witten genus, and the theorem of the cube, Inv. Math. **146** *(2001) 595-687.*

[32] D. Martelli, J. Sparks and S. T. Yau, The Geometric Dual of a-maximisation for Toric Sasaki-Einstein Manifolds, Commun. Math. Phys. **280** *(2006) 39-65; [arXiv:hep-th/0503183].*

[33] A. A. Bytsenko, M. Chaichian, A. Tureanu and F. L. Williams, BRST-invariant deformations of geometric structures in topological field theories, Int. J. Mod. Phys. A **28** *(2013) 1350069; [arXiv:hep-th/1306.0373].*

Apêndice A

Propriedades Analíticas das Funções Zeta

A magnitude da função zeta é limitada tanto para $\mathrm{Re}\, s \geq 0$ quanto $\mathrm{Re}\, s \leq 0$, e seu crescimento pode ser estimado como

$$\left|Z_{\mathfrak{G}^\gamma}(s)\right| \leq \Big(\prod_{k_1+k_2 \leq |s|} \mathrm{e}^{\,|s|\,\ell} \Big) \Big(\prod_{k_1+k_2 \geq |s|} \big(1 - \mathrm{e}^{\,(|s|-k_1-k_2)\,\ell}\big) \Big) \leq C_1\, \mathrm{e}^{\,C_2\,|s|^3} \quad \text{(A.1)}$$

para constantes adequadasvℓ, C_1, C_2. Percebe-se que o primeiro produtório do lado direito de (A.1) fornece o crescimento exponencial, enquanto o segundo produtório é limitado. A função espectral $Z_{\mathfrak{G}^\gamma}(s)$ é uma função inteira de ordem 3 (três) e finita, a qual pode ser escrita como uma produto de Hadamard [20]

$$Z_{\mathfrak{G}^\gamma}(s) = \mathrm{e}^{\,Q(s)} \prod_{\zeta \in \Sigma} \Big(1 - \frac{s}{\zeta}\Big) \exp\Big(\frac{s}{\zeta} + \frac{s^2}{2\zeta^2} + \frac{s^3}{3\zeta^3}\Big)\,, \quad \text{(A.2)}$$

onde Σ é o conjunto de zeros $\zeta := \zeta_{n,k_1,k_2}$ e $Q(s)$ é um polinômio de, no máximo, terceiro grau. Da representação do produto de Hadamard (A.2) tem-se que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \log Z_{\mathfrak{G}^\gamma}(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} Q(s) + \sum_{\zeta \in \Sigma} \frac{(s/\zeta)^3}{s - \zeta}\,. \quad \text{(A.3)}$$

Agora definindo que

$$\Xi(y \pm \mathrm{i}\,\xi) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \log Z_{\mathfrak{G}^\gamma}, (s)$$

com $s = y \pm \mathrm{i}\,\xi$. Fica-se com

$$\Xi(y \pm \mathrm{i}\,\xi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} Q(s = y \pm \mathrm{i}\,\xi) - \mathrm{i} \sum_{y \pm \mathrm{i}\,\varepsilon \in \Sigma} \frac{(y \pm \mathrm{i}\,\xi)^3}{(y \pm \mathrm{i}\,\varepsilon)^3\,(\pm\,\xi - \varepsilon)}\,. \quad \text{(A.4)}$$

Lembrando do capítulo 4 que a função Ruelle $\mathcal{R}(s)$ é dada pela divisão de funções de Selberg-Patterson dada por[1]

$$\mathcal{R}(s) := Z_{\mathfrak{G}^\gamma}(s)\, Z_{\mathfrak{G}^\gamma}(s+2)/Z_{\mathfrak{G}^\gamma}(s+1).$$

[1]Definida para $\mathrm{Re}\, s \gg 1$ e podendo ser continuada meromorficamente em todo o plano complexo $\mathbb{C}$.

Para o caso de AdS_3, encontram-se as seguintes identidades de produtos infinitos:

$$\prod_{n=m}^{\infty}\big(1-q^{\mu\,n+\varepsilon}\big) \;=\; \frac{Z_{\mathfrak{G}^\gamma}(s)}{Z_{\mathfrak{G}^\gamma}\big(s+\mu\,(1+\,\mathrm{i}\,\varrho(\tau))\big)}$$
$$= \mathcal{R}\big(s=(\mu\,m+\varepsilon)\,(1-\,\mathrm{i}\,\varrho(\tau))+1-\mu\big)\;, \tag{A.5}$$

$$\prod_{n=m}^{\infty}\big(1+q^{\mu\,n+\varepsilon}\big) \;=\; \frac{Z_{\mathfrak{G}^\gamma}(s)}{Z_{\mathfrak{G}^\gamma}\big(s+\mu\,(1+\,\mathrm{i}\,\varrho(\tau))\big)}$$
$$= \mathcal{R}\big(s=(\mu\,m+\varepsilon)\,(1-\,\mathrm{i}\,\varrho(\tau))+1-\mu+\,\mathrm{i}\,/(2\,\mathrm{Im}\,\tau)\big), \tag{A.6}$$

com $q := \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\tau}$, $\varrho(\tau) = \mathrm{Re}\,\tau/\mathrm{Im}\,\tau$, $\mu \in \mathbb{R}$, $m \geq 1$ e $\varepsilon \in \mathbb{C}$. Para $\nu \in \mathbb{C}$, é possível que as funções de Ruelle sejam utilizadas para se escrever identidades de produtos infinitos mais gerais, dados por:

$$\prod_{n=m}^{\infty}\big(1-q^{\mu\,n+\varepsilon}\big)^{\nu\,n} \;=\; \mathcal{R}\big(s=(\mu\,m+\varepsilon)\,(1-\,\mathrm{i}\,\varrho(\tau))+1-\mu\big)^{\nu\,m}$$
$$\times\; \prod_{n=m+1}^{\infty}\mathcal{R}\big(s=(\mu\,n+\varepsilon)\,(1-\,\mathrm{i}\,\varrho(\tau))+1-\mu\big)^{\nu}\;, \tag{A.7}$$

$$\prod_{n=m}^{\infty}\big(1+q^{\mu\,n+\varepsilon}\big)^{\nu\,n} \;=\; \mathcal{R}\big(s=(\mu\,m+\varepsilon)\,(1-\,\mathrm{i}\,\varrho(\tau))+1-\mu+\,\mathrm{i}\,/(2\,\mathrm{Im}\,\tau)\big)^{\nu\,m}$$
$$\times\; \prod_{n=m+1}^{\infty}\mathcal{R}\big(s=(\mu\,n+\varepsilon)\,(1-\,\mathrm{i}\,\varrho(\tau))+1-\mu+\,\mathrm{i}\,/(2\,\mathrm{Im}\,\tau)\big)^{\nu}. \tag{A.8}$$

Tabela 1 - Lista de funções geradoras

$$\prod_{n=\ell}^{\infty}(1-q^{n+\varepsilon}) = \left[\frac{Z_\Gamma(\xi(1-it))}{Z_\Gamma(\xi(1-it)+1+it)}\right] = \mathcal{R}(s=\xi(1-it))$$

$$\prod_{n=\ell}^{\infty}(1-\overline{q}^{n+\varepsilon}) = \left[\frac{Z_\Gamma(\xi(1+it))}{Z_\Gamma(\xi(1+it)+1-it)}\right] = \mathcal{R}(\overline{s}=\xi(1+it))$$

$$\prod_{n=\ell}^{\infty}(1+q^{n+\varepsilon}) = \left[\frac{Z_\Gamma(\xi(1-it)+i\eta(\tau))}{Z_\Gamma(\xi(1-it)+i\eta(\tau)+1+it)}\right] = \mathcal{R}(\sigma=\xi(1-it)+i\eta(\tau))$$

$$\prod_{n=\ell}^{\infty}(1+\overline{q}^{n+\varepsilon}) = \left[\frac{Z_\Gamma(\xi(1+it)+i\eta(\tau))}{Z_\Gamma(\xi(1+it)+i\eta(\tau)+1-it)}\right] = \mathcal{R}(\overline{\sigma}=\xi(1+it)+i\eta(\tau))$$

$$\prod_{n=2}^{\infty}(1-q^{n}) = \left[\frac{Z_\Gamma(2-2it)}{Z_\Gamma(3-it)}\right] = \mathcal{R}(s=2-2it)$$

$$\prod_{n=2}^{\infty}(1-\overline{q}^{n}) = \left[\frac{Z_\Gamma(2+2it)}{Z_\Gamma(3+it)}\right] = \mathcal{R}(\overline{s}=2+2it)$$

$$\prod_{n=2}^{\infty}(1+q^{n}) = \left[\frac{Z_\Gamma(2-2it+i\eta(\tau)}{Z_\Gamma(3-it+i\eta(\tau)}\right] = \mathcal{R}(\sigma=2-2it+i\eta(\tau))$$

$$\prod_{n=2}^{\infty}(1+\overline{q}^{n}) = \left[\frac{Z_\Gamma(2+2it+i\eta(\tau))}{Z_\Gamma(3+it+i\eta(\tau))}\right] = \mathcal{R}(\overline{\sigma}=2+2it+i\eta(\tau))$$

$$\prod_{n=2}^{\infty}(1-q^{n-\frac{1}{2}}) = \left[\frac{Z_\Gamma(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}it)}{Z_\Gamma(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}it)}\right] = \mathcal{R}(s=3/2-(3/2)it)$$

$$\prod_{n=2}^{\infty}(1-\overline{q}^{n-\frac{1}{2}}) = \left[\frac{Z_\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}it)}{Z_\Gamma(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}it)}\right] = \mathcal{R}(\overline{s}=3/2+(3/2)it)$$

$$\prod_{n=2}^{\infty}(1+q^{n-\frac{1}{2}}) = \left[\frac{Z_\Gamma(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}it+i\eta(\tau))}{Z_\Gamma(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}it+i\eta(\tau))}\right] = \mathcal{R}(\sigma=3/2-(3/2)it+i\eta(\tau))$$

$$\prod_{n=2}^{\infty}(1+\overline{q}^{n-\frac{1}{2}}) = \left[\frac{Z_\Gamma(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}it+i\eta(\tau))}{Z_\Gamma(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}it+i\eta(\tau))}\right] = \mathcal{R}(\overline{\sigma}=3/2+(3/2)it+i\eta(\tau))$$

$$\prod_{n=\ell}^{\infty}(1-q^{n+\epsilon})^{n} = \mathcal{R}(s=\xi(1-it))^{\ell}\prod_{n=\ell}^{\infty}\mathcal{R}(s=(n+\varepsilon+1)(1-it))$$

$$\prod_{n=\ell}^{\infty}(1-\overline{q}^{n+\epsilon})^{n} = \mathcal{R}(\overline{s}=\xi(1+it))^{\ell}\prod_{n=\ell}^{\infty}\mathcal{R}(s=(n+\varepsilon+1)(1+it))$$

$$\prod_{n=\ell}^{\infty}(1+q^{n+\epsilon})^{n} = \mathcal{R}(\sigma=\xi(1-it)+i\eta(\tau))^{\ell}\prod_{n=\ell}^{\infty}\mathcal{R}(\sigma=(n+\varepsilon+1)(1-it)+i\eta(\tau))$$

$$\prod_{n=\ell}^{\infty}(1+\overline{q}^{n+\epsilon})^{n} = \mathcal{R}(\overline{\sigma}=\xi(1+it)+i\eta(\tau))^{\ell}\prod_{n=\ell}^{\infty}\mathcal{R}(\overline{\sigma}=(n+\varepsilon+1)(1+it)+i\eta(\tau))$$