Universidade Estadual de Londrina

GIOVANA RODRIGUES CASTILHO

FRAÇÃO NO ENSINO FUNDAMENTAL:

UMA ANÁLISE DE PESQUISAS REALIZADAS ENTRE 2010 E 2020

Londrina
2022

GIOVANA RODRIGUES CASTILHO

FRAÇÃO NO ENSINO FUNDAMENTAL:

UMA ANÁLISE DE PESQUISAS REALIZADAS ENTRE 2010 E 2020

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do Título de Mestra em Educação Matemática.

Orientadora: Profª Drª Angela Marta Pereira das Dores Savioli

Londrina
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

C352f Castilho, Giovana Rodrigues.

Fração no Ensino Fundamental : uma análise de pesquisas realizadas entre 2010 e 2020 / Giovana Rodrigues Castilho. - Londrina, 2022.
122 f. : il.

Orientador: Angela Marta Pereira das Dores Savioli.
Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2022.
Inclui bibliografia.

1. Educação Matemática - Tese. 2. conceito de fração - Tese. 3. interpretações de fração - Tese. 4. dificuldade - Tese. I. Savioli, Angela Marta Pereira das Dores. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51

GIOVANA RODRIGUES CASTILHO

FRAÇÃO NO ENSINO FUNDAMENTAL:

UMA ANÁLISE DE PESQUISAS REALIZADAS ENTRE 2010 E 2020

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do Título de Mestra em Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Profª Drª Angela Marta Pereira das Dores Savioli
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Prof. Dr. Geraldo Aparecido Polegatti
Instituto Federal do Mato Grosso – Campos Juína

Prof. Dr. Marcelo Silva de Jesus
Instituto Federal de Santa Catarina – Campus Jaraguá do Sul

Londrina, 24 de maio de 2022.

AGRADECIMENTOS

À CAPES, pelo apoio financeiro durante o segundo ano do mestrado.

À Profª Drª Angela Marta Pereira das Dores Savioli, por toda paciência e cuidado ao me ensinar e contribuir no processo da realização da dissertação.

Ao Prof. Dr. Geraldo Aparecido Polegatti e Prof. Dr. Marcelo Silva de Jesus por compor a banca de avaliação, pelos apontamentos na qualificação visando minha evolução.

Ao GEPPMAT, por toda parceria e acolhimento que sempre senti desde o primeiro encontro.

E guardemos a certeza pelas próprias dificuldades já superadas que não há mal que dure para sempre. (Chico Xavier)

RESUMO

CASTILHO, Giovana Rodrigues. **Fração no Ensino Fundamental:** Uma análise de pesquisas realizadas entre 2010 e 2020**.** 2022. 117 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2022.

Neste trabalho, o objetivo foi verificar o que apresentam os resultados de algumas pesquisas realizadas com estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental a fim de evidenciar seus conhecimentos a respeito do conceito de fração (ordinárias ou não) e suas interpretações: medida, número, operador, parte-todo, quociente e razão, segundo Kieren e Behr et al, que apontam a necessidade dessas interpretações para o ensino de fração. Essa pesquisa configurou-se do tipo bibliográfica e para a análise dos documentos, os dados foram analisados à luz da Análise do Conteúdo. Dessa forma, escolheu-se sete pesquisas que apresentam informações a respeito do conhecimento dos estudantes do Ensino Fundamental a respeito de fração. Dos resultados das pesquisas, identificou-se lacunas por parte dos estudantes a respeito do conceito de fração e suas interpretações. Entre as dificuldades, viu-se que os estudantes não compreendem nem a noção de inteiro, que é imprescindível para o domínio do conceito de fração. Além disso, seis dos sete trabalhos analisados apontaram que os estudantes não compreendem a fração como parte-todo, noção essencial para compreensão posterior das interpretações medida e número segundo Kieren.

Palavras-chave: educação matemática, conceito de fração, interpretações de fração, dificuldade.

ABSTRACT

CASTILHO, Giovana Rodrigues. **Fraction in the Elementary School:** An analysis of studies realized between 2010 and 2020. 117 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2022.

The aim of this research was to identify what some studies show about the concept of fraction and its interpretations: measure, number, operator, part-whole, quotient and rate, according to Kieren e Behr et al, that point out the necessity of these interpretations for the fraction instruction. This is a bibliographic study, and the documents were analyzed by Bardin's Content Analysis. Therefore, there were chosen seven studies that showed the knowledge students have about the concept of fraction and its interpretations. The results showed that the students have difficulties concerning the concept of fraction and its interpretations. Among the difficulties, the students don't comprehend even the notion of integer, essential to domain the fraction concept. Beyond that, six of seven studies showed that the students don't comprehend fraction as part-whole, an essential notion to posterior comprehension of measure and number interpretations, according to Kieren.

Key-words: mathematics education, concept of fraction, fraction interpretations, difficulty.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O tema dessa pesquisa é *fração e suas interpretações nos Anos Finais do Ensino Fundamental.* A escolha desse tema emergiu dos resultados apresentados por uma pesquisa realizada em 2017-2018, pela autora desta dissertação, cujo objetivo era identificar os conhecimentos e dificuldades de estudantes do sétimo ano do Ensino Fundamental na Resolução de Problemas de Fração por meio de questões a respeito dos conceitos e de uma atividade com seis problemas de fração. Concluiu-se que os estudantes apresentaram desconhecimento sobre o conceito de fração, suas operações e os conceitos de equivalência de frações, frações contínuas e discretas, pois poucos foram capazes de resolver os problemas propostos. Diante disso, surgiu a necessidade de investigar conhecimentos de alunos das séries dos Anos Finais do Ensino Fundamental (5º ao 9º ano) a respeito do conceito de fração.

O foco nesse tema se justifica pela presença das frações em diferentes contextos do dia a dia e a importância da escola em seu ensino, uma vez que as frações surgiram da necessidade de representar numericamente uma medida menor que um referencial tomado como inteiro, situação incomum a uma criança. Inicialmente, a criança tem contato com a matemática por meio da manipulação de objetos a fim de quantificá-los, mensurá-los, estudar suas formas, entre outros. Ela conta quantas maças há num pomar, observa a superfície arredondada da fruta e consegue compará-las pelo tamanho. Entre as ideias matemáticas envolvidas nessas ações, evidenciamos a habilidade de contar objetos, que influenciou na criação de números (um, dois, três,...). Dessa forma, foi construído o conjunto dos números naturais, que ocorre de forma orgânica na mente do indivíduo que pertence a uma sociedade com um sistema numérico.

Por outro lado, o conjunto das frações (ordinárias ou não) não está presente nesse cotidiano. Kieren (1976) afirma que ao lidar com frações, o aluno se vê diante de estruturas matemáticas que não possuem base em seu pensamento natural. Assim, fica a critério do professor conduzir o ensino do conceito de frações e seus aspectos aos estudantes.

Merlyn Behr, Richard Lesh, Thomas Post e Edward Silver afirmam que "[...] os conceitos do números racional estão entre as mais complexas e importantes ideias que os estudantes se deparam durante o Ensino Fundamental." (1983, p. 91)

Os autores justificam essa importância por três perspectivas. A primeira está relacionada à prática, a capacidade de performar com números racionais. Eles apontam que essa capacidade instiga o desenvolvimento da habilidade de compreender e lidar com situações do mundo real. A segunda perspectiva é a partir do olhar psicológico, destacando as estruturas mentais que são fundamentadas pelos números racionais. A terceira perspectiva refere-se à matemática, especificamente as operações algébricas elementares que se fundamentam nas ideias dos racionais.

Behr et al. (1983) defendem que o desenvolvimento do número racional é um processo modelo para generalizar os processos mentais de formação conceitual pois ocorre na transição do pensamento concreto ao operacional formal, contribui para estruturar conceitos subjacentes e assim tomar conhecimento de novos sistemas de representação. Esse desenvolvimento, segundo Behr et al. (1983), reflete nas habilidades simbólica e operacional do estudante e serve de base para todos os processos mentais envolvidos a números racionais, como medidas, probabilidades, sistemas de equação, gráfico etc.

Dito isso, compreendemos que é essencial compreender como os estudantes atuais estão compreendendo fração e se isto está ocorrendo efetivamente, uma vez que o estudante pode até ter tido contato com o conteúdo, porém se não houve aprendizado, esse estudante apresenta lacunas a respeito disso. Dessa forma, o desenvolvimento de conteúdos que utilizam as frações como base conceitual não ocorre, logo devemos interromper esse padrão e estudar a forma mais adequada de ensinar meu aluno sobre frações.

Neste trabalho, temos como objetivo verificar o que apresentam os resultados de algumas pesquisas realizadas com estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental a fim de evidenciar seus conhecimentos a respeito do conceito de fração (ordinárias ou não) e suas interpretações. A questão norteadora a ser respondida é “O que algumas pesquisas realizadas com estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental apresentam sobre o conceito de fração e suas interpretações?”.

No primeiro capítulo, apresentamos os textos de Silva e Almouloud (2018), Kieren (1976, 1980) e Behr et al. (1983) para definir os conceitos de número racional, fração e as interpretações da fração, a base teórica de nossa análise.

Nesse capítulo, será destacada a fundamentação teórica que embasa as análises dos documentos que apresentam resultados sobre pesquisas com estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental a respeito do conteúdo de frações. Com base em Silva e Almouloud (2018) e Kieren (1980), debate-se os conceitos de número racional e fração. As interpretações de fração são fundamentadas nas ideias de Kieren (1976, 1980) e Behr et al. (1983). Ao final desse capítulo, são descritas as interpretações de fração ordinária e não ordinária assumidas nesse trabalho.

Em seguida, em um novo capítulo, a fim de identificar como as interpretações de frações ordinárias ou não ordinárias estão presentes no ensino básico, apresentaremos uma análise da Base Nacional Curricular Comum (2018), um dos documentos oficiais que norteia os conteúdos ministrados em sala de aula, destacando os momentos em que as interpretações emergem.

O terceiro capítulo é referente à metodologia. Apresentaremos como a pesquisa foi realizada, os instrumentos de coleta de informações, os meios de busca dos periódicos, os trabalhos escolhidos e como será realizada a análise do trabalho.

O último capítulo refere-se à análise e discussão das informações coletadas. Vamos apresentar nossas análises dos resultados dos trabalhos escolhidos sobre a compreensão de alunos dos Anos Finais do Ensino Fundamental sobre frações ordinárias e não ordinárias e as interpretações de frações à luz da nossa fundamentação teórica.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para fundamentar essa pesquisa, foram selecionados dois trabalhos de Thomas E. Kieren com números racionais. A publicação de 1976 pela Universidade da Georgia junto com outros seis trabalhos sobre números e medidas intitulado “Nas Fundações Matemática, Cognitiva e Instrucional dos Números Racionais”[1] e a outra de 1980 pelo Instituto Nacional de Educação junto com outros seis trabalhos sobre números e medidas e números racionais intitulado “O Construto Número Racional – Seus Elementos e Mecanismos”[2]. Ambas as coletâneas foram produzidas no grupo de estudo de Kieren sobre números e medidas e números racionais do Centro da Geórgia para o Estudo do Ensino e Aprendizagem de Matemática[3].

Além de Kieren, a fundamentação teórica é composta pelo texto de Behr et al. (1983) “Conceitos do Número Racional”[4] que faz parte do livro de Lesh e Landau, “Aquisição de Conceitos e Processos Matemáticos”[5] de Nova York.

2.1 A Definição De Fração

Dados a e b números inteiros, Kieren (1980, p. 125) define um número racional como “qualquer número que satisfaz $ax = b \ (b \neq 0)$”. O foco está em discorrer sobre o objeto matemático $\frac{a}{b}$. Para denominar esse objeto, deve atentar-se aos termos “a” e “b” que o compõem. Considerando que b nunca pode ser zero, se a e/ou b forem inteiros, $\frac{a}{b}$ é um número racional. Caso a ou b forem números diferentes de inteiros, como por exemplo irracionais, $\frac{a}{b}$ é uma fração.

Niven (1984) constrói o conjuntos dos racionais a partir da operação de divisão entre inteiros[6], produzindo frações do tipo $\frac{3}{4}, \frac{7}{5}, -\frac{1}{2}$, entre outras. A definição de número racional ou fração ordinária, como o autor traz, é o número $\frac{a}{b}$ onde a e b são inteiros e b não é zero, necessariamente. É trazido pelo autor que o termo fração se refere à expressão algébrica que apresenta um numerador e um denominador (p. 31), como $\frac{2}{3}, \frac{x}{y}, \frac{\pi}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}$, entre outros. O autor deixa claro que podemos encontrar frações

---

[1] Traduzido de “On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers”.
[2] Traduzido de “The Rational Number Construct – Its Elements and Mechanisms”.
[3] Traduzido de “Georgia Center for the Study of the Learning and Teaching of Mathematics”.
[4] Traduzido de “Rational-Number Concepts”.
[5] Traduzido de “Acquisition of Mathematics Concepts and Processes”.
[6] Niven (1984) afirma que todo inteiro é um racional, de denominador 1.

equivalentes a números racionais, como no caso do número racional $\frac{1}{2}$, que pode ser escrito como $\frac{\pi}{2\pi}$.

Contudo, a fração $\frac{\pi}{2\pi}$ apresenta numerador e denominador que não são números racionais, e por isso, surgem os números irracionais. Niven (1984), ao trazer a estrutura geométrica dos reais, afirma que os irracionais são todos os reais que não são racionais, ou seja, a partir de uma escala arbitrária, todos os pontos de uma reta numérica que estão associados a todos os números e não podem ser escritos como frações de inteiros, como $\frac{\sqrt{3}}{1}$, são chamados de irracionais.

Devemos esclarecer que $\frac{a}{b}$ sempre será uma fração por sua estrutura, porém se $\frac{a}{b}$ também for um número racional, consideramos que esse está em sua representação fracionária, uma vez que, segundo Silva e Almouloud (2018), os números racionais podem ser representados de duas formas: a fracionária e a decimal. Veja que todo número da forma $\frac{a}{b}$ apresenta uma representação decimal que corresponde ao quociente da divisão de a por b. Focaremos nas ideias relacionadas aos objetos matemáticos denominados frações ordinárias e não ordinárias.

Como apontam Silva e Almouloud (2018), podemos representar na forma de fração outros números além dos racionais. Números como $\frac{\sqrt{2}}{3}$ e $\frac{3i}{5}$, representados por frações, não pertencem ao conjunto dos números racionais, logo o objeto matemático fração transcende os limites do conjunto racional e transita por todos os conjuntos numéricos. Iremos diferenciar essas frações por frações ordinárias (racionais) e não ordinárias (não racionais).

É visto no trabalho de Silva e Almouloud (2018) que o termo “fração” deriva do árabe “al-kasr” que significa “fratura”. Por sua etimologia, o termo deriva do latim *fractio*, ou seja, “aquilo que é partido em pedaços”, ou *frangere*, que significa quebrar. O conceito de fração pode ser atribuído à ideia da ação de quebra, ou seja, de divisão ou a algo que foi partido em pedaços.

Estudos afirmam (Kieren, 1980; Bertoni, 2008) que a representação fracionária do número racional é mais adequada a situações de comparação, por exemplo. De fato, o conceito de razão[7] não existe na representação decimal do

[7] A comparação quantitativa entre duas grandezas (Kieren, 1980, p.135).

número racional, pois, pela definição de razão, o valor decimal não explicita o mesmo que a representação fracionária, que apresenta dois números inteiros sendo comparados.

2.2 A História das Frações

Não se tem certeza da origem da matemática e por isso, há algumas ideias distintas da motivação inicial do homem. No geral, Boyer (1974) aponta que foi pelas necessidades práticas do homem de contar, medir e classificar as formas do mundo. Por outro lado, alguns estudos indicaram que foi a partir da ideia de ordenação, uma vez que era necessária uma ordem específica de apresentação dos participantes dos ritos cerimoniais das tribos. Há outra possibilidade de que a ideia de número foi configurada por um povo em específico e ao longo do tempo, se espalhou ao redor da Terra. Mesmo que distintas, essas ideias mostram a presença da matemática na humanidade.

Disso, podemos enxergar que a necessidade do homem em contar instigou a noção de número. Data-se que cerca de cinco mil anos atrás os egípcios já possuíam uma escrita cuneiforme, no formato de cunhas, baseado nas potências de 10 para representar quantidades. Por esse ponto de vista da contagem, a ideia de fração não emergiu naturalmente, mas sim pela construção humana de medir objetos baseando-se em um referencial conhecido.

Assim, foi visto que as primeiras formalizações das ideias de fração ocorreram na idade moderna da Matemática e não apresentam relação com o surgimento do conceito de número inteiro, cerca de 300 mil anos atrás[8]. Segundo Boyer (1974), os povos da época escolhiam quantidades suficientemente pequenas tal que não houvesse a necessidade de um objeto matemático que representasse esse caso, como a fração.

Antes de 3.300 a.C., época anterior à Idade do Bronze, frações não eram utilizadas, porém com o desenvolvimento das culturas emergiu a necessidade do conceito e da notação de fração. Sobre o povo babilônio, vemos em Boyer (1974) que foi esse povo que deu significado à posição do algarismo no número, e segundo Kieren (1976), cerca de 2000 a.C., indícios de frações foram identificados nos escritos

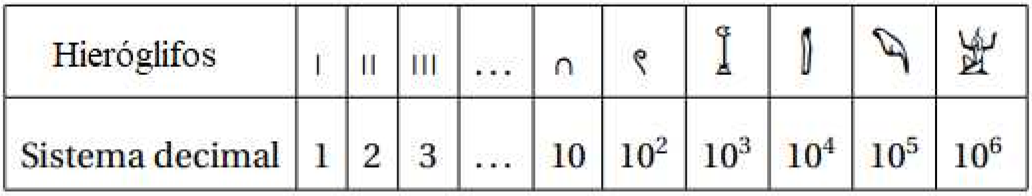
[8] Segundo Boyer (1974), o conceito do número inteiro é o mais antigo conceito da matemática e acredita-se ter sido criado na pré-história (2.5 milhões – 10.000 a.C.).

do povo babilônio, no formato sexagesimal. O sistema numérico da Babilônia assumia representações sexagesimais e decimais, sendo a representação sexagesimal para referir-se à parte menor que 1 e representavam os inteiros com decimais. Essa prática refere-se à cultura do Oriente Médio da época, que misturava representações decimais e sexagesimais, como para medidas angulares.

A civilização mais influente na história das frações foi a civilização egípcia. No papiro de Ahmes, era possível identificar frações unitárias, operações com frações e símbolos que representam frações comuns. Para frações cujo numerador é diferente de 1, eles representavam como uma adição de frações unitárias, pois segundo Ifrah (2010), essas eram as únicas frações conhecidas pelos egípcios.

Vejamos como os egípcios escreviam seus números. Eram utilizadas duas notações, hieroglífica e hierática. A notação hieroglífica era popular e aparecia nos papiros egípcios comuns. Esse sistema de numeração é antigo como as pirâmides, tinha base decimal e foram atribuídos símbolos às potências de 10. Para representar uma unidade, era utilizado um traço vertical. Assim, repetiam-se esses símbolos para representar um número.

Figura 1 - Números em notação hieróglifa.

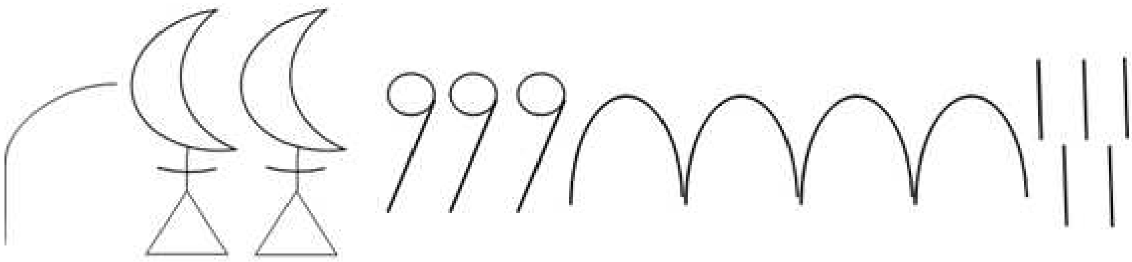


Hieróglifos	I	II	III	…	∩	𓍢	𓆼	𓂭	𓆐	𓁨
Sistema decimal	1	2	3	…	10	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6

Fonte: Adaptado de Huanaco (2015, p. 37).

Boyer (1974) apresentou que a notação do número 12345 em hieróglifos era

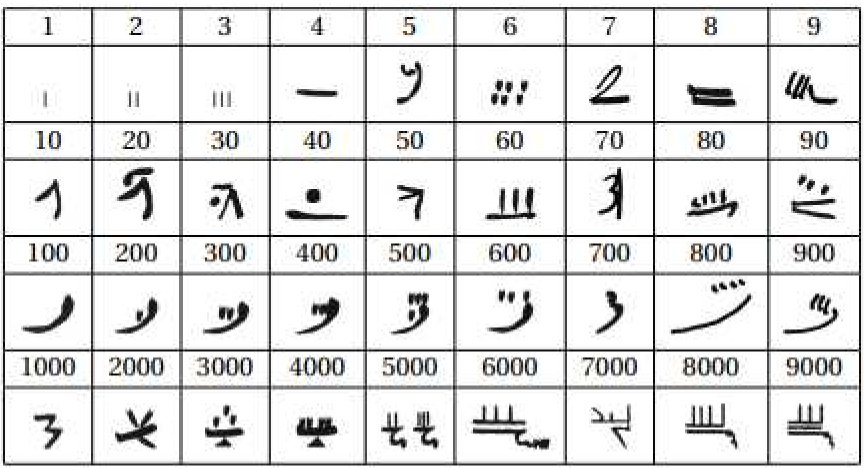
Figura 2 - O número 12345 escrito em hieróglifos.



Fonte: Adaptado de Boyer (1974).

Já a escrita hierática, primeiramente vista no papiro de Ahmes, era mais cursiva, mais adequada ao uso de pena e tinta nas folhas dos papiros de livros sagrados. Ainda que os egípcios tenham carregado dos hieróglifos a base decimal, a prática de repetidos usos do mesmo símbolo para representar um número foi substituída pela atribuição de símbolos únicos a cada uma das quantidades que se buscava representar. O número quatro, por exemplo, nos papiros comuns, era representado por quatro barras verticais. No papiro de Ahmes, uma única barra horizontal representava esse número.

Figura 3 – Números na notação hierática.



Fonte: Huanaco (2015, p. 39).

Assim, por exemplo, os números 2235 e 8976 eram representados da seguinte forma

Figura 4 - Números hieráticos.

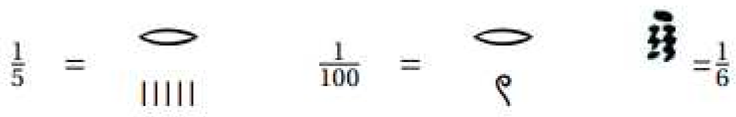
Fonte: Huanaco (2015, p. 38).

Os egípcios operavam apenas com frações unitárias e especialmente com a fração $\frac{2}{3}$, logo todas as frações egípcias eram decompostas em adições com frações unitárias. Segundo Huanaco (2015), essa técnica de duplicação bastante explorada pelos egípcios influenciou em dois tipos de fração unitária: as frações naturais, que são $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\ e \frac{1}{4}$, e as frações algorítmicas, que foram derivadas das naturais. Essa derivação ocorria pela decomposição da fração algorítmica numa soma de frações unitárias e $\frac{2}{3}$. As frações da forma $\frac{n}{10}$ são, por exemplo, representadas como

$$\frac{2}{10} = \frac{1}{5},\ \frac{3}{10} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10} \text{ e } \frac{8}{10} = \frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}.$$

Na notação hieroglífica, as frações possuíam uma notação especial, um símbolo oval horizontal sob o símbolo do natural. Entretanto, não é considerado que esse símbolo oval represente o que chamamos hoje de numerador de uma fração. Boyer (1974) aponta que o símbolo oval representa a operação de tomar a n-ésima parte de n partes iguais, ou seja, considera-se $\frac{1}{n}$.

Figura 5 - Frações algorítmicas na notação hieroglífica.



Fonte: Huaraco (2015, p. 38).

No papiro de Ahmes, a notação hierática substitui a figura oval sob o símbolo do número por um ponto sob o número. Assim, a metade de meio, $\frac{1}{4}$, seria representado por  (BOYER, 1974).

Além das frações unitárias, de acordo com Boyer (1974), os egípcios também operavam com a fração $\frac{2}{3}$ e até atribuíram um símbolo específico, um símbolo hierático que remete ao número 2 atual era utilizado para representar essa fração, 

Além disso, os egípcios operavam com as frações da forma $\frac{n}{(n+1)}$, as frações complementares das frações naturais. De acordo com Boyer (1974), a justificativa para a especificidade da fração $\frac{2}{3}$ é que, para encontrar um terço de algo, os egípcios tomavam dois terços do número para, assim, dividi-lo pela metade e obter um terço. Os egípcios compreendiam todas as frações diferentes de $\frac{2}{3}$ como um processo inacabado, incompleto e por isso utilizavam somas de frações unitárias para representar o mesmo valor de uma fração irredutível[9]. Não se conhece o motivo que justifique a preferência de um pelo outro.

A adição era considerada a operação fundamental dos egípcios, pois ela sustentava a operação de multiplicação. Para realizar uma multiplicação, eram efetuadas repetidas somas para descobrir o resultado desse cálculo, que se assemelha com a propriedade distributiva da multiplicação no conjunto dos inteiros. Por exemplo, Boyer (1974) mostra que para calcular 69 por 19, primeiramente, somava-se 69 com 69, obtendo 138, ou seja, duas vezes 69. A próxima etapa consiste em somar esse valor a ele mesmo para obter quatro vezes 69, ou seja, 138 mais 138 resulta em 276. Repetindo o processo, obtemos 552, isto é, oito vezes 16, e por fim, 552 mais 552 é 1104, dezesseis vezes 69. Assim, com esses resultados, como sabemos que 19 = 16 + 2 + 1, logo

$$69 * 19 = 69 * (16 + 2 + 1) \leftrightarrow$$
$$69 * 19 = 69 * 16 + 69 * 2 + 69 * 1 \leftrightarrow$$
$$69 * 19 = 1104 + 138 + 69 = 1311.$$

No caso das frações, os egípcios repetiam o processo de repetidas somas com frações unitárias e $\frac{2}{3}$.

Para a operação de divisão, esse processo de repetidas adições ocorre com o denominador, assim, a resolução iniciava-se pela busca da metade ou de um terço da quantidade que está dividindo. Boyer (1974) exemplifica a operação de divisão com o seguinte caso: no papiro de Ahmes, pede o resultado da divisão entre 100 e a soma $7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. Adiantamos que o resultado é $12 + \frac{2}{3} + \frac{1}{42} + \frac{1}{126}$. O processo da resolução ocorre da seguinte forma:

A ideia é duplicar o denominador até ele ser um valor muito próximo do numerador. Assim, iniciando a resolução temos:

$$\left(7 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) * 2 = 15 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

Continuando o processo, duplicando o resultado obtido:

---

[9] Fração irredutível é a fração $\frac{m}{n}$ com m e n inteiros onde o único fator em comum entre m e n é 1.

$$\left(15+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)*2=31+\frac{1}{2}$$

Novamente:

$$\left(31+\frac{1}{2}\right)*2=62+1=63.$$

Pelo método da duplicação, obtivemos oito vezes o divisor. Por já conhecermos o resultado, podemos identificar que o processo de duplicação realizado acima é reaproveitado – e será aproveitado novamente na etapa final dessa resolução -, pois $31+\frac{1}{2}$ é o denominador multiplicado em quatro vezes. Assim, realizando a adição $63+31+\frac{1}{2}$ obtemos $94+\frac{1}{2}$ o que produz o quociente $8+4+\frac{1}{2}=\mathbf{12}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$. Agora, pela fração $\frac{2}{3}$, sabemos que o produto entre essa fração e o denominador é $\mathbf{5}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$. Assim, somando à $94+\frac{1}{2}$, obtemos $99+\frac{3}{4}$, faltando $\frac{1}{4}$ para o objetivo que é 100 e chegamos ao quociente $\mathbf{12}+\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}+\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$. Veja que oito vezes o denominador é 63, logo quatro vezes o denominador é metade de 63, ou $\frac{63}{2}$. Temos que o denominador vezes quatro é $\frac{2}{63}$, o que corresponde ao processo de adicionar $\frac{1}{4}$ à $99+\frac{3}{4}$ e obter 100. Para finalizar, os egípcios apenas trabalhavam com frações unitárias e $\frac{2}{3}$, logo

$$\frac{2}{63}=\frac{1}{42}+\frac{1}{126}$$

Assim, o resultado é

$$\frac{100}{7+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}=12+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{42}+\frac{1}{126}.$$

Com esse capítulo, vimos a influência da civilização egípcia a respeito das frações, como ela surgiu, suas notações e as operações realizadas com elas. A seguir, apresentaremos as diferentes interpretações da fração, definidos por Kieren (1976, 1980) e Behr et al. (1983).

2.3 Fração e suas possíveis interpretações

Para compor nossas compreensões a respeito do ensino das frações, escolhemos três textos que discorrem sobre as interpretações da fração. Essas interpretações estruturam o conceito da fração, individualmente, e em conjunto, contribuem para o aprendizado do aluno. À época, os autores utilizaram o termo “número racional”, porém as interpretações também são adequadas à nossa definição de fração.

Segundo Kieren (1980), o conceito do número racional é compreendido como um mega conceito, definido por Wagner (1976), com diversas vertentes conectadas. É possível identificar uma fração que representa a divisão de uma pizza entre três pessoas, a medida de um ingrediente para fazer uma receita, a relação entre um mapa e sua escala. Pelos diversos contextos que as frações estão presentes e sendo utilizadas pelo indivíduo, seu ensino deve considerar todas essas “facetas” da fração, ou como Kieren (1976) define, os subconstrutos da fração.

Kieren (1980) afirma que com o objetivo de desenvolver um construto “funcional, potente e extensivo” a ideia de megaconceito de Wagner (1976) deve ser considerada, para que o ensino ocorra considerando as diferentes situações que o racional está compreendido e as interrelações entre elas.

Assim, identificamos em Kieren (1976, 1980) algumas habilidades essenciais ao aluno para compreender os números racionais (p. 109, p. 126):

1. Dominar a noção de equivalência;
2. Compreender que a operação adição se comporta por axiomas e não como a soma de duas quantidades;
3. Reconhecer as operações de adição e multiplicação como duas operações distintas e definidas abstratamente;
4. Lidar com propriedades, especialmente a noção geral de inverso.

As habilidades descritas acima contribuem para o aprendizado do conceito do número racional. Diferente da maneira com que o conceito do número natural emerge no pensamento do estudante, pois são decorrentes de atividades naturais cotidianas, os conceitos dos racionais se sustentam nas ideias construídas no contexto escolar sobre a multiplicação, ou como Kieren (1976) denomina, uma forma especial de contagem ou adição repetida.

São fundamentais ao aluno conhecer as noções de par ordenado[10] para compreender frações. Kieren (1976) aponta que identificar situações parte-todo, conhecer a simbologia e a linguagem matemática e representar corretamente uma situação parte-todo com uma fração são ações que o aluno deve desempenhar. Esse

---

[10] Kieren (1976, p. 109, tradução nossa) afirma que conhecer as noções de par ordenado corresponde às seguintes etapas: o aluno é capaz de observar a realidade em termos de coordenadas; conhecer estruturas para poder representar a realidade coordenada; e representar corretamente a realidade com as estruturas simbólicas corretas.

conceito é requisito pois ao compreender a noção de par ordenado, podemos estendê-la ao conjunto dos pares ordenados de frações de inteiros, que podem ser representados por inúmeras frações equivalentes, formando os conjuntos de classes de equivalência dos números racionais.

Assim, Kieren (1976) apresenta diversas situações que o número racional assume um papel diferente em cada uma delas. Essas situações serviram de base para o autor definir as possíveis interpretações que o número racional assume. São elas (p. 102-103):

> a) Números racionais como frações que podem ser comparadas, somadas, subtraídas etc.;
> b) Números racionais como frações decimais que naturalmente se estendem ao conjunto dos inteiros;
> c) Números racionais como classes de equivalência de frações. O autor considera $\{\frac{1}{2}.\frac{2}{4}.\frac{3}{6},\dots\}$ como número racional;
> d) Números racionais como números da forma $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros, q ≠0. Aqui, o número racional é uma razão.;
> e) Números racionais como operadores multiplicativos (alongadores, diminuidores etc.);
> f) Números racionais como elementos de um corpo quociente infinito ordenado, ou seja, números da forma $x = \frac{p}{q}$ que satisfaz a equação $xq = p$;
> g) Números racionais como medidas ou pontos de uma reta numérica.

Nesse texto de 1976, Kieren aborda as interpretações do número racional na seguinte estrutura: determinação das estruturas matemáticas envolvidas, apresentação de uma sequência de experiências necessárias para o ensino e identificação das estruturas cognitivas essenciais para a compreensão de cada interpretação. Traremos esses aspectos no nosso referencial teórico.

Como visto, existem sete situações em que o objeto matemático fração assume uma interpretação distinta, portanto, a seguir, apresentaremos as interpretações de fração consideradas por Kieren (1976). Essas sete são novamente citadas por ele em 1980 (p. 133):

- Frações
- Decimais
- Pares ordenados (classes de equivalência)
- Medidas
- Quocientes
- Operadores
- Razões

Além disso, Kieren (1980) sugere que essas interpretações são (ou deveriam ser) isomórficas. Essas interpretações não são tanto matematicamente quanto psicologicamente independentes, contudo são padrões de pensamentos distintos do número racional ou fracionário.

Em Behr et al. (1983), apoiados na análise do contexto do currículo da época a partir de alguns estudos (Kieren, 1976; Novillis,1976; Rappaport, 1962; Riess, 1964; Usiskin. 1979), os autores sugeriram seis possíveis interpretações – ou *subconstrutos* – do número racional: comparação parte-todo, razão, decimal, medida, quociente e operador. Os autores citam Kieren (1976) que defende o ensino de todas as interpretações e de que maneira elas estão relacionadas entre si.

Para nossa pesquisa, trocamos o subconstruto decimal da categorização de Behr et al. (1983) pela interpretação número. Portanto, escolhemos a categorização a seguir:

a) Fração como medida
b) Fração como número
c) Fração como operador
d) Fração como parte-todo
e) Fração como quociente
f) Fração como razão

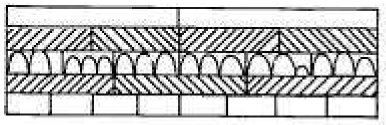
2.3.1 Fração como medida

A fração $\frac{a}{b}$ nessa interpretação corresponde à medida de algo desconhecido comparado a algo conhecido, como por exemplo um sistema métrico. O exemplo mais significativo é a medida três-quartos, que pode ser de uma manga, de uma xícara, de pizza, entre outros.

Atividades com a interpretação medida envolvem a noção de partição, como visualizar as possíveis divisões de um determinado comprimento, ou de medição, como utilizar uma medida para comparar com outras diferentes. Vale ressaltar que ordenar comprimentos é natural ao pensamento até de crianças bem jovens, de acordo com Kieren (1976).

As atividades precursoras à abordagem dessa interpretação permeiam as ideias de medição e partição. O autor sugere a atividade de particionar um inteiro conveniente de diferentes formas de maneira a comparar essas diferentes partições. (**Figura 6**)

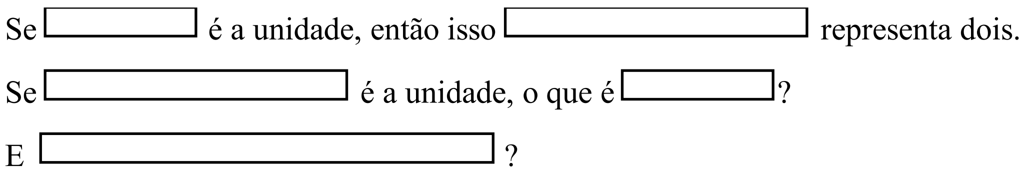
Figura 6 - Diferentes partições do mesmo inteiro.



Fonte: Kieren (1976, p. 125).

Atividades de unidades variáveis, como comparar inteiros a partir de uma medida dada inicialmente, também são sugeridas pelo autor. O ensino dessa interpretação é defendido pelo autor, pelo seu contato direto com os conceitos do número racional.

Figura 7 - Atividade de unidades variáveis.



Fonte: Adaptado de Kieren (1976, p. 125).

Para Behr et al (1983), a interpretação medida está associada à noção de parte-todo, isto é, a fração representa a partição de uma quantidade – contínua ou discreta – em partes iguais, logo é óbvia sua importância às interpretações posteriores. Os autores afirmam que a primeira interação escolar entre o estudante e essa interpretação ocorre nas duas primeiras séries[11] do Ensino Fundamental com as noções de metade e partição.

Behr et al. (1983) afirmam que os exemplos mais comuns utilizados para representar essa interpretação são regiões geométricas, conjuntos de objetos e retas numéricas, contudo reconhecemos que retas numéricas são representações da interpretação **número** da fração. Ainda, os autores citam Owens (1980) e Sambo (1980) para defender que tarefas que envolvem o conceito de área são efetivas para o ensino de frações relacionadas a medidas.

Tal qual Behr et al. (1983), Kieren (1980) aponta que a interpretação medida do número racional também é derivada da relação parte-todo e envolve quantificar uma região. Para quantificar essa região, o autor afirma que é necessário

---

[11] Traduzido de “grade” (Behr et al., 1983, p. 93).

ser capaz de contar a quantidade de partes iguais arbitrárias que preenchem a região de forma satisfatória. Behr et al. (1983) reforçam a conexão entre as noções de parte-todo e medida e defendem o ensino a partir dessa interpretação pois é o mais natural para crianças pequenas. Fazer retângulos no papel é uma tarefa simples que contribui para o desenvolvimento dos conceitos fracionários.

Essa interpretação se diferencia da parte-todo devido à ênfase dada à noção de unidade arbitrária e as subdivisões de uma unidade, segundo Kieren (1980), pois a noção de inteiro é diferente para as interpretações. Ele afirma que o inteiro (unidade) na interpretação parte-todo quase não é identificado por estar implícito e isso é oposto ao destaque dado à noção de unidade na interpretação medida.

Kieren (1980) declara que essa interpretação contribui para o aspecto de adição de vetor que a soma de medidas demonstra e para o desenvolvimento da habilidade do estudante com os decimais, por meio do sistema métrico, quando transita entre as representações dos racionais. Segundo o autor, dessa forma o aluno será instigado a desenvolver as noções de dezenas, centenas e milhares.

2.3.2 Fração como número

Nos textos escolhidos, os autores não apresentam essa interpretação de fração, uma vez que os aspectos relacionados à interpretação número foram categorizados por eles como a interpretação medida da fração. Contudo, reformulamos essa categorização e separamos a interpretação número da interpretação medida.

A fração como número refere-se a dois pilares. Por um lado, a fração se comporta a nível simbólico, isto é, com foco nos procedimentos e algoritmos que envolve a fração. Por outro, a fração é vista como um ponto da reta numérica, logo é necessário que o aluno compreenda a noção de que a reta numérica pode ser dividida em qualquer quantidade de partes congruentes.

Segundo Kieren (1980), atividades com reta numérica contribuem para o aprendizado de adição de frações, uma vez que tomamos vetores que representam frações e os posicionamos um na extremidade do outro, resultando no segmento que representa a soma dessas frações. Particularmente, é quando uma fração é representada por um vetor que podemos atribuir a ela a ideia de ponto da reta numérica. Analogamente, para a multiplicação, o autor exemplifica com $\frac{2}{3} x \frac{3}{4}$, que é possível particionar cada quarto em três partes e tomar duas de cada parte, obtendo seis partes de doze.

Para situações com racionais nessa interpretação, Kieren (1976) afirma que a criança deve, com quantidades contínuas, ter habilidade com inclusão de classe e com quantidades discretas, saber particionar. Essa interpretação é analítica, isto é, está relacionada a um conjunto de pontos, porém explorar a infinidade de escalas da reta numérica contribui para as noções algébricas de operação e equivalência serem desenvolvidas. Além disso, é nessa interpretação que estão situadas as relações de ordem, tricotomia, antissimetria e transitividade.

Segundo Kieren (1976), é necessário que a criança possua três noções prévias: a noção de unidade e sua divisão arbitrária; o domínio da interpretação parte-todo de todas as possíveis situações semelhantes; e o conceito de uma relação de ordem. Logo, na prática, o estudante deve conhecer escalas e saber utilizá-las arbitrariamente, reconhecer situações que são representadas por frações equivalentes, como por exemplo, ao dividir um objeto em seis partes, tomar uma, ela será capaz de identificar um sexto como 0,16, e ordenar as representações fracionárias de situações que não são semelhantes.

Nessa interpretação, segundo Kieren (1976), considera-se que a situação de fração como todo e qualquer número pode ser expresso em decimais. As operações com frações são extensões das operações com inteiros e o sistema numérico simplifica a distinção entre inteiros e racionais. Essa interpretação também contribui para estruturar a análise e discussão dos irracionais. A ideia de estimativa está presente nessa interpretação, seja por aproximação ou em sequências de Cauchy, quando as frações passam a ser consideradas na análise da reta.

As atividades sugeridas para estruturar essa interpretação são, primeiramente, as noções e aspectos dos inteiros, que estruturam as noções do sistema numérico decimal. Em segundo, atividades de medição são essenciais à essa interpretação, como a divisão de um metro em subunidades, como decímetro, centímetro e milímetro. O terceiro tipo de atividade é a de estimativa como “isso é tão comprido quanto aquilo”. A estimativa demanda que o aluno, além de possuir a noção de unidade, seja capaz de hipoteticamente raciocinar sobre uma situação, mesmo que fictícia. Essas atividades foram sugeridas por Kieren (1976) para o que ele considera sobre fração como medida, mas é estruturalmente semelhante à nossa categorização de fração como número.

2.3.3 Fração como operador

Essa interpretação refere-se à fração como um transformador, que pode aumentar ou diminuir o objeto original transformado e o resultado produz um mapa similar (Kieren, 1976, p. 113). Esse mapa similar é o resultado da transformação realizada por um número racional sobre um segmento de reta, um ponto P, um valor correspondente a uma quantidade. Operar é entendido como uma transformação entre um objeto original e uma fração dada, análogo ao mapear que se refere à comparação das posições entre um objeto original e sua imagem transformada por uma fração.

A interpretação operador do número racional está relacionada à ideia de que o número é um “mecanismo” que a partir de um conjunto resulta em outro multiplicativamente, de forma a aumentar, manter ou diminuir o conjunto original (Kieren, 1980, p. 136).

A interpretação operador tem intuito de transformar um conjunto em outro por meio de um objeto da forma $\frac{p}{q}$ onde o numerador p corresponde à operação de multiplicação por p e o denominador q corresponde à operação de divisão por q. Disso, podemos identificar que essa interpretação atribui à fração o papel de operação matemática, pois compõe multiplicação e divisão como operações, assim, a relação parte-todo não é a base conceitual dessa interpretação e sim a noção de razão.

Por se tratar de uma operação, essa interpretação está fortemente associada à álgebra, facilitando a compreensão das noções de identidade e fração inversa, utilizando duas frações na interpretação transformador. Além disso, contribui para a operação de divisão de frações, pois as operações de multiplicação e divisão são opostas. Com isso, pudemos utilizar a interpretação operador a fim de obter o resultado de uma divisão entre frações.

De forma prática, Kieren (1976) sugere que abordemos a interpretação operador de fração com a modelagem[12] de figuras similares, ampliando e diminuindo a escala da mesma figura no papel quadriculado. Por exemplo, comparar duas figuras de tamanhos diferentes, mas semelhantes fazendo perguntas como

[12] Modelar uma figura a fim de medir e compará-la através de quantidades discretas ou contínuas.

"quantas vezes a primeira figura é maior/menor que a segunda?". Além disso, cabe abordar palavras significativas nesse contexto como "dobro", "metade", "um terço", entre outras.

Kieren (1976) aponta que a atividade mais produtiva nessa interpretação é desenhar, medir e comparar escalas no papel quadriculado. A modelagem aqui presente contribui para a contextualização do exercício ao aluno por ser uma referência natural, isto é, o aluno produz um desenho e neste aplica a ferramenta de mensura, identificando conceitos matemáticos em sua própria produção.

Existem segundo Kieren (1976), ainda, atividades que precedem a formalização do conceito de proporcionalidade[13], associado a essa interpretação, incluindo as que partem da produção própria do aluno, e envolvem comparações de tamanhos de figuras semelhantes e aplicação de termos como "dobro" e "duas vezes o valor" de algo. A utilização dessas atividades contribui para a formação desse conceito, uma vez que comparar duas medidas, sendo apenas números ou por termos como "dobro" está relacionado à proporção delas.

Uma forma algébrica de enxergar a fração como operador sugerida por Kieren (1976) é observar a relação entre o objeto e sua imagem que é representada pela fração $\frac{a}{b}$ com b diferente de zero. Se o módulo de $\frac{a}{b}$ é positivo, a relação é de aumento, se negativo, a relação é de diminuição. Se $a = b$, então o objeto original e o produto de sua transformação são iguais.

Pela noção de equivalência de frações, frações equivalentes correspondem ao mesmo operador. Logo, há uma infinidade de operadores equivalentes que realizam a mesma transformação. Quando comparados é visto que os operadores $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$ realizam a mesma transformação de um segmento de reta. De forma análoga, Kieren (1976) mostra que ao analisarmos um segmento de reta e sua imagem podemos identificar os operadores que realizam aquela transformação. Por exemplo, sob o operador $\frac{2}{3}$, um segmento de reta medindo 12 unidades de grandeza "mapearia" um segmento de reta que mede 8 unidades, da mesma forma que um segmento medindo 36 unidades mapeia um de 24 unidades. As frações que representam essas comparações $\frac{8}{12}$, $\frac{24}{36}$ etc., são equivalentes e pertencem à classe $\frac{2}{3}$.

[13] Proporcionalidade é a comparação multiplicativa entre duas grandezas.

Utilizando o conceito de conjunto finito, a noção de operadores equivalentes é explorada por Kieren (1976) na situação “duas caixas de giz de cera são dados a cada três crianças”. O operador $\frac{2}{3}$ mostra que doze crianças possuiriam oito caixas de giz de cera, ou seja, sob essa transformação conseguimos produzir todas as imagens referente ao operador $\frac{2}{3}$. Veja que pelo operador $\frac{4}{6}$ obtemos a mesma quantidade de giz de cera para doze crianças, oito. Logo, esses operadores são equivalentes, pois realizam a mesma transformação.

Quando operamos sob uma dada fração $\frac{a}{b}$ e operamos sua imagem com uma nova fração $\frac{c}{d}$, é observado o processo de multiplicação de frações. A imagem final, quando comparada ao objeto original, é correspondente à fração $\frac{ac}{bd}$. Se operamos sob $\frac{2}{3}$ um segmento de reta com 24 unidades de comprimento, obtemos um segmento de 16 unidades. Uma nova transformação sob o operador $\frac{1}{4}$ de 16 produz a imagem final medindo 4 unidades. Tomando o objeto original, um segmento de reta de 24 unidades de comprimento, a imagem final da composição dos operadores $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{4}$ é um segmento de reta de 4 unidades, ou seja, $\frac{4}{24}$. Disso, emerge a noção de multiplicação de frações.

Explorar as etapas correspondentes à composição de operadores ilumina as noções de identidade e inverso, pois podemos escrever a composição de operações da seguinte forma:

$$\frac{a}{b}(f)\frac{c}{d}$$

Onde (f) representa a composição de operadores. Assim, Kieren (1976) nos questiona:

$$\frac{a}{b}(f)\frac{b}{a}=? \qquad \frac{p}{q}(f)\frac{1}{1}=?$$

Progressivamente, operando novamente com uma fração, ou seja, compondo três operadores, as propriedades associativas e comutativas das operações com frações emergem de forma natural, formando a ideia do grupo multiplicativo dos elementos invertíveis nos racionais. Kieren (1976) ressalta que essa intepretação está intimamente associada à noção de razão e a operação base é a multiplicação, logo é problemático pensar no procedimento da adição sob essa ótica.

Ainda, é possível realizar tal procedimento se tomarmos objetos originais que, quando operados por dois operadores, como a adição, resultem em imagens correspondentes a números inteiros.

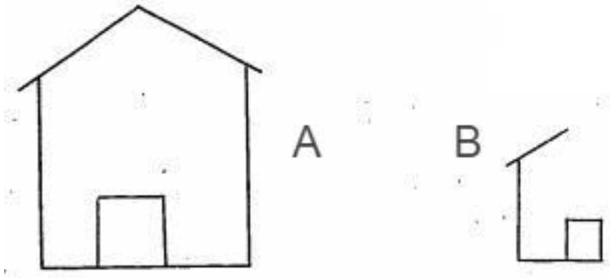
Para Kieren (1976), são três as estruturas cognitivas necessárias para desenvolver essa interpretação. A noção que centra o conceito de proporção decorre das generalizações feitas a partir da prática com essa interpretação, por isso o autor considera as noções de pré-proporcionalidade a primeira estrutura cognitiva necessária.

A segunda estrutura é a noção de composição, associada à ideia de que uma transformação seguida por outra formam uma única. Após conceber a ideia de composição de operações como apenas uma, o aluno deve ser capaz de associar essa composição à sua imagem final, resultado da composição de operadores.

A terceira estrutura cognitiva apresentada por Kieren (1976) é das propriedades, referente às desenvolvidas a partir dessa interpretação, inverso e identidade. A ideia de reversibilidade está na raiz desses conceitos, que é a habilidade de encontrar o inverso em situações de identidade.

O autor sugere dois tipos de atividades para o ensino dessa interpretação. A primeira, baseada na noção de dilatação de mapas, sugere atividades de mensura da escala de figuras similares, mas distintas, como no exemplo dado que apresenta duas figuras simbolizando duas casas, A e B (Figura abaixo). É pedido ao aluno que complete a figura referente à casa B de forma proporcional à casa A e com ambas as figuras completas, o autor faz alguns questionamentos ao aluno, como “A casa A é x vezes mais alta que a casa B” ou “Se a parede da casa A é 5 metros, qual o tamanho da parede da casa B?”, para que ele responda realizando as operações de mensura dos segmentos de reta.

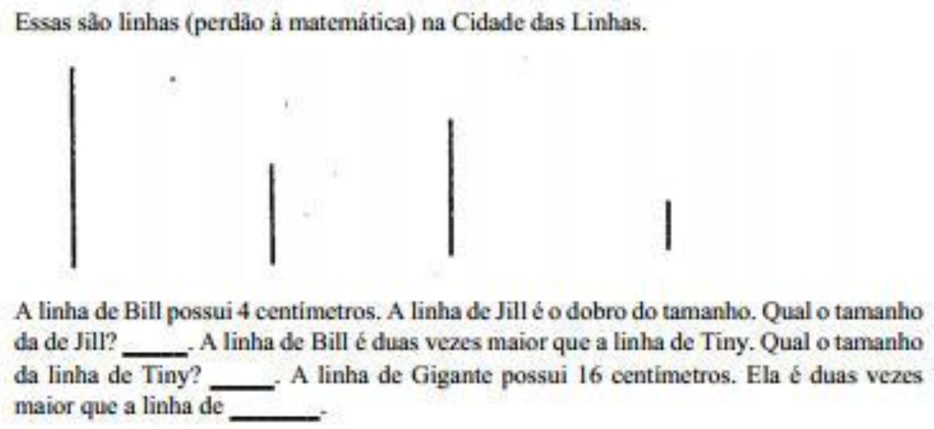
Figura 8 - Atividade apresentada por Kieren (1976).



Fonte: Adaptado de Kieren (1976, p. 116).

A outra atividade apresentada por Kieren (1976) está na figura a seguir.

Figura 9 - Atividade apresentada por Kieren (1976).



Fonte: Traduzido de Kieren (1976, p. 116).

Kieren (1976) aponta duas observações. A primeira diz que a segunda atividade é conceitualmente mais abstrata ao aluno, uma vez que comparações entre segmentos de reta está mais distante de suas experiências pessoais do que figuras que ele é capaz de reconhecer como representações de casas. A segunda, em decorrência do aspecto abstrato da segunda atividade, afirma que esta demanda de forma mais direta o conceito de proporção do que a primeira. Ainda, trabalhar com quantidades discretas simplifica a obtenção da noção de proporcionalidade do aluno. No geral, o autor afirma que a principal contribuição dessa interpretação é na álgebra, pois somos capazes de derivar a noção de multiplicação dos racionais e propriedades de grupo a partir de transformações com fração como operador.

O número racional $\frac{2}{3}$ nessa interpretação leva 12 em 8 pela multiplicação, isto é, 12 foi diminuído por $\frac{2}{3}$ para 8. A presença dos racionais na álgebra de funções é apontada por Kieren, que cita Griesel (1974) e Dienes (1971) para defender a abordagem dos racionais a partir da interpretação operador.

Behr et al. (1983) afirma que a interpretação operador do número racional atribui a esse objeto uma interpretação algébrica, pois $\frac{p}{q}$ é uma função que transforma uma quantidade por meio da multiplicação com $\frac{p}{q}$ que leva numa quantidade $\frac{p}{q}$ vezes que a inicial. Os autores sugerem que podemos pensar essa interpretação como uma máquina “p por q”, como por exemplo para $\frac{3}{4}$, uma entrada de quantidade 4 com saída de quantidade 3.

Ainda em Behr et al. (1983), os autores consideram que para quantidades continuas, essa função alonga ou afina o objeto inicial, por outro lado, para quantidades discretas a ideia de multiplicador ou divisor é associada, pois $\frac{p}{q}$ leva um conjunto de n elementos a outro de np elementos e o reduz ao final de $\frac{np}{q}$ elementos.

Defendendo o ensino dessa interpretação, os autores a relacionam com os conceitos de equivalência de frações e a operação de multiplicação e mostram que encontrar frações equivalentes é o mesmo que identificar máquinas que transformam os mesmos objetos da mesma forma. É possível identificar composição de funções nessa noção.

2.3.4 Fração como parte-todo

Precisamos, primeiramente, compreender a relação parte-todo e a base conceitual que essa relação dá às interpretações de medida e número. Considere a fração $\frac{a}{b}$. Tomamos um inteiro arbitrário, o dividimos em b partes e tomamos a partes de b. Dentre as possíveis aplicações dessa interpretação, uma fração pode representar uma certa quantidade de pedaços de um bolo repartido em pedaços iguais, representar um segmento em relação a um inteiro ou a posição de um ponto num gráfico. Focaremos na primeira situação, quando a fração que representa essa relação pode ser interpretada como parte-todo.

Para estar apto a aprender essa interpretação, o estudante deve estar familiarizado com o conceito de partição e par ordenado, então deve desempenhar habilidade em representar a realidade em termos de coordenadas. Exemplos utilizando conjuntos e subconjuntos (quantidades discretas) e áreas e regiões sombreadas (quantidades contínuas) são sugeridos para aplicar essa interpretação.

Kieren (1976) aponta que para dominar o conceito de subdivisão das partes que é inerente à compreensão dessa interpretação, a habilidade de partição é necessária. Essa noção é ilustrada nas seguintes atividades (Kieren, 1976, p. 110):

1. Há 15 plantas e 5 vasos. Se elas são todas as mesmas, quantas plantas por pote?
2. Divida essa corda em 5 pedaços iguais.

3. Divida essas bolachas entre 4 pessoas.

Deve ser notado que uma noção geral de partição inclui ambas as quantidades discretas e contínuas. Particionar também reflete na habilidade de reconhecer uma situação parte-todo em representações equivalentes que formam a base para a noção de equivalência.

2.3.5 Fração como quociente

A interpretação quociente de uma fração $\frac{a}{b}$ refere-se à divisão de a por b. Essa interpretação não se estrutura na noção de parte-todo bem como na de razão, pois a fração assume função de operação fundamental de divisão. Nesse caso, a fração representa o resultado do cálculo da divisão, a quantidade referente ao numerador dividida pela quantidade do denominador.

Essa intepretação dá a possibilidade de o estudante ter o primeiro contato com a álgebra, pois o conjunto dessas frações corresponde ao conjunto dos valores de x que satisfazem a equação $ax = b$, com a e b inteiros e $a \neq 0$, chamado de corpo quociente. Esse corpo quociente tem propriedades que são provadas pela álgebra, o que demanda pensamento dedutivo.

Usamos essa interpretação para introduzir os alunos a atividades prévias ao trabalho com frações, pois contextualizamos uma equação que facilita o aprendizado do aluno. Por exemplo, transformamos a equação $3x = 6$ na situação "há seis balas e três alunos. Quantas balas cada aluno receberá?". Se buscamos introduzir quantidades contínuas, podemos transformar $2x = 5$ em "se há 2 pizzas e cinco meninos, quanto de pizza cada um receberá?".

Behr et al. (1983) afirma que há outro nível dos racionais relacionado a essa interpretação, quando um número racional é elemento de um corpo quociente, e portanto, apresenta propriedades aditivas e multiplicativas, inverso multiplicativo e elemento neutro. Ainda, a escola não é capaz de criar um ambiente propicio para o desenvolvimento até esse nível dos racionais pois essa noção está relacionada à noção de sistemas algébricos abstratos.

2.3.6 Fração como razão

Segundo Behr et al (1983), a interpretação razão do número racional é como mais uma relação, uma comparação do que um número. Duas coisas são proporcionais uma à outra quando suas razões são iguais, ou seja, a proporcionalidade é a igualdade entre razões, e segundo Behr et al. (1983), usamos proporções para resolver problemas físicos e de comparação de medidas.

Kieren (1976) cita Scandura (1971) que sugere que o ensino seja realizado pela experiência com diversos tipos de conjunto parte-todo[14]. Analisando as situações parte-todo representadas por frações equivalentes, o autor afirma que números racionais como razão são fundamentados pela noção de par ordenado.

Compreender uma fração como par ordenado implica enxergá-lo como um número. Dessa forma, a criança deve ser capaz de relacionar os números racionais aos conjuntos numéricos já conhecidos, por exemplo, pensar se 2 é igual a $\frac{4}{2}$. Também, é necessário que a criança saiba operar com números racionais e frações equivalentes. Para compreender as operações com números racionais, o aluno deve possuir a noção de partição, que é a habilidade de dividir um objeto ou objetos em um dado número de partes iguais.

Fundamentados pelas noções de par ordenado, os números racionais como razão podem ser introduzidos a partir da resposta à seguinte questão: "Numa comparação onde 1 é pareado com 8, 2 com 16, 3 com 24 etc, o que é pareado com 1?"[15] (Skemp, 1964, apud Kieren, 1976, tradução nossa). Para melhor compreensão, reescreveremos o problema na seguinte forma: Se 1 está para 8, 2 está para 16, 3 está para 24, etc., qual número está para 1?".

Aqui a ideia de par ordenado está presente na relação entre (1,8), (2, 16), (3, 24), etc. A resposta do problema é o par ordenado (1, 8) ou $\frac{1}{8}$. Preocupado com as operações de fração decorrentes da noção de classe equivalente de par ordenado, Kieren (1976) esclareceu que se equivalermos os pares ordenados (y, 2) e (1, 8), temos que y é o dobro de x, ou seja y é $\frac{2}{8}$.

Kieren (1980) define razão como a comparação quantitativa entre duas grandezas. Essa fração representa uma grandeza sendo comparada a outra, como a quantidade de maçãs num fruteira cheia ou a composição de uma mistura.

---

[14] São sugeridas quatro definições de conjuntos parte-todo por Scandura (1971, apud Kieren, 1976): estado-estado; estado-operador; operador-estado; operador-operador.

[15] Traduzido de "In a comparison in which 1 is paired with 8, 2 with 16, 3 with 24, etc., what is paired with 1?" (Kieren, 1976, p. 111).

Nessa interpretação, a noção de parte-todo não se aplica. Onuchic e Allevato (2008) afirmam que o numerador passa a ser chamado de antecedente e o denominador de consequente. Diferente da ideia de considerar uma parte de um todo (envolvendo o conceito de partição), existe uma relação quantitativa entre duas grandezas que é representada pela fração.

3 O QUE A BASE NACIONAL CURRICULAR COMUM APRESENTA SOBRE FRAÇÕES

O objetivo dessa pesquisa é verificar o que apresentam os resultados de algumas pesquisas realizadas com estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental a fim de evidenciar seus conhecimentos a respeito do conceito de fração (ordinárias ou não) e suas interpretações. Para isso, entre possíveis caminhos, escolhemos compreender como o ensino de frações ocorre nesses anos utilizando a Base Nacional Comum Curricular que nos direciona sobre os conteúdos e habilidades que estão sendo trabalhadas em sala de aula.

Para a identificação da presença de fração na Base Nacional Curricular Comum, buscaremos por esses termos: fração, frações, representação fracionária. O objetivo dessa etapa é encontrar os momentos que o objeto matemático fração é apresentado no Ensino Fundamental.

Primeiramente, apresentaremos recortes da BNCC que abordam o objeto matemático fração, diretamente retirados do documento, por meio de um, quadro. O objeto matemático em questão está presente na Unidade Temática "Números" – ao todo, são cinco unidades: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e medidas, Probabilidade e estatística. Dessa forma, os recortes foram retirados nas linhas da planilha do documento referentes à essa unidade temática, pois é nessa unidade que o tema dessa pesquisa é abordado conceitualmente. O quadro a seguir é composto do ano, do Objeto de Conhecimento e da Habilidade que atende ao nosso objetivo.

Quadro 1 - Recortes da BNCC que apresentam o objeto matemático fração.

ANO	OBJETO DE CONHECIMENTO	HABILIDADE
4º	Números racionais: frações unitárias mais usuais ($\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ e $\frac{1}{100}$)	(EF04MA09) Reconhecer as frações unitárias mais usuais ($\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ e $\frac{1}{100}$) como unidades de medida menores do que uma unidade, utilizando a reta numérica como recurso.
5º	Representação fracionária dos números racionais: reconhecimento, significados, leitura e representação na reta numérica	(EF05MA03) Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso.
5º	Comparação e ordenação de números racionais na representação decimal e na fracionária utilizando a noção de equivalência	(EF05MA04) Identificar frações equivalentes.

5º	Comparação e ordenação de números racionais na representação decimal e na fracionária utilizando a noção de equivalência	(EF05MA05) Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica.
5º	Cálculo de porcentagens e representação fracionária	(EF05MA06) Associar as representações 10%, 25%, 50%, 75% e 100% respectivamente à décima parte, quarta parte, metade, três quartos e um inteiro, para calcular porcentagens, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.
6º	Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	(EF06MA07) Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes.
6º	Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	(EF06MA08) Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica.
6º	Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	(EF06MA09) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora.
6º	Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	(EF06MA10) Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
7º	Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador	(EF07MA05) Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos.
7º	Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador	(EF07MA06) Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos.
7º	Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador	(EF07MA07) Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas.
7º	Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador	(EF07MA08) Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador.
7º	Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador	(EF07MA09) Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração $\frac{2}{3}$ para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.
7º	Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações	(EF07MA10) Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica.
7º	Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações	(EF07MA11) Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias.

7º	Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações	(EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.
8º	Dízimas periódicas: fração geratriz	(EF08MA05) Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.

Fonte: BNCC (2017).

A seguir, discutiremos cada habilidade presente na BNCC a fim de esclarecer o que está envolvido em cada uma. A divisão das análises por ano se deu simplesmente pela divisão inicial.

A primeira aparição identificada por nós do objeto matemático fração ocorre no 4º ano do Ensino Fundamental com a Habilidade (EF04MA09). Identificamos que, nessa habilidade, a intenção é introduzir as frações unitárias mais frequentes no cotidiano para que os alunos reconheçam um novo tipo de unidade de medida menor que uma unidade e a indicação de utilizar a reta numérica como recurso para a aprendizagem da fração unitária sugere que a fração seja interpretada como **medida** e como **número**.

O objeto matemático surge inicialmente na Habilidade (EF05MA03). Nessa habilidade, o aluno deve ser capaz de identificar frações e representá-las, associando-as ao significado de uma divisão, ou seja, interpretar a fração como **quociente**, e à ideia de parte de um todo, interpretando a fração como **parte-todo**. Novamente, é sugerido o recurso da reta numérica, o que indica a interpretação da fração como **número**.

O segundo Objeto de Conhecimento que aborda frações no 5º ano são (EF05MA04) e (EF05MA05). A ideia geral do OC é que o aluno saiba comparar e ordenar números racionais na representação fracionária a luz da noção de equivalência, ou seja, o aluno deve ter o domínio do conceito de fração equivalente dentro do universo dos números racionais representado por uma fração e, consequentemente, saber aplicá-lo em situações dadas. A primeira habilidade sugere que o aluno saiba identificar frações equivalentes, isto é, dominar o conceito de fração equivalente a fim de identificá-las no contexto escolar. A segunda habilidade diz a respeito da aplicabilidade do conceito de fração equivalente, por comparar e ordenar números racionais na representação fracionária. Por precisar comparar, ordenar e identificar na reta numérica frações, a interpretação **medida** de fração é identificada aqui e a ideia de fração equivalente remete à interpretação **razão** da fração.

O terceiro e último Objeto de Conhecimento que aborda fração é a Habilidade (EF05MA06). Aqui, surge o conceito de porcentagem e sua relação com frações. Com isso, o aluno deve ser capaz de associar as porcentagens mais usuais $(10\%, 25\%, 50\%, 75\%$ e $100\%)$ à sua representação fracionária. Nesse caso, a interpretação **parte-todo** é identificada, pois a porcentagem refere-se a uma parte do cento que representa um inteiro de uma grandeza.

O único Objeto de Conhecimento que aborda frações no sexto ano é "Frações: significados (parte/todo, quociente) [...]". Nesse OC, as interpretações **parte-todo** e **quociente** são evidenciadas e os conceitos de equivalência e comparação de frações são retomados.

A primeira Habilidade é (EF06MA07). Quando a fração é associada à parte de um inteiro, mobilizamos o conceito de partição e a fração como resultado de divisão estão relacionados à interpretação **parte-todo**. Posteriormente, relacionar essas interpretações ao conceito de fração equivalente demanda que o aluno tenha domínio sobre esse conceito para resolver situações-problema.

A segunda Habilidade do 6º ano é (EF06MA08). Há preocupação em reconhecer que o número racional pode ser representado nas formas fracionária e decimal, identificar – se há – relações entre essas duas representações e posicionar o número racional na reta numérica. A interpretação **número** emerge nessa habilidade, pela preocupação com a fração na reta numérica.

A penúltima Habilidade (EF06MA09) refere-se ao cálculo da fração de uma quantidade onde o resultado da multiplicação seja um número natural, isto é, particionar uma quantidade a partir de uma fração arbitrária cujo resultado da partição é um número natural. Aqui, as interpretações **operador**, **parte-todo** e **quociente** são evidentes. Por último, na Habilidade (EF06MA10), a interpretação **número** da fração emerge.

No 7º ano, há dois Objetos de Conhecimento. No primeiro, são abordadas as interpretações **parte-todo**, **quociente**, **razão** e **operador**. No segundo, a interpretação **número** é a única identificada, pela associação da fração a um ponto da reta numérica.

O primeiro OC apresenta cinco habilidades. As três primeiras habilidades são referentes à resolução de problemas que envolvem frações. A primeira Habilidade é (EF07MA05). Aqui, o aluno deve conhecer diferentes representações da solução de um problema que envolve frações. A segunda Habilidade é (EF07MA06). O aluno deve reconhecer que existem semelhanças entre as resoluções condizentes com as semelhanças entre os algoritmos utilizados, uma vez que problemas do mesmo tipo podem ser resolvidos das mesmas maneiras. A terceira Habilidade (EF07MA07) demanda que o aluno seja capaz de transformar suas resoluções em uma série de etapas determinadas que resolvem todos os problemas desse mesmo grupo.

A quarta Habilidade é (EF07MA08). Surgem as interpretações **operador, parte-todo**, **quociente** e **razão**. A quinta e última Habilidade (EF07MA09) refere-se à relação entre as interpretações **razão** e **parte-todo**. Kieren (1980) sugere que "[...] relações parte-todo de números são um caso especial de relações de razão" (p.135).

No oitavo ano, o único Objeto de Conhecimento presente contém uma única Habilidade, (EF08MA05). Nesse ano, o foco é o cálculo da fração geratriz de uma dízima periódica. Como a fração é relacionada à representação decimal, emerge a interpretação **número**.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Essa pesquisa é do tipo bibliográfica segundo Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 102), de forma que analisamos pesquisas já publicadas à luz da nossa fundamentação teórica. Para essa análise, utilizamos a análise de conteúdo de Bardin (1977).

Segundo Bardin (1977, p. 95), a análise de conteúdo é organizada em três polos: a) a pré-análise; b) a exploração do material; c) o tratamento dos resultados, a inferência e a interpretação.

Na pré-análise, o pesquisador se organiza, sistematiza as ideias, estrutura os esquemas necessários para desenvolver aquelas ideias de forma minuciosa, mesmo que o conteúdo dos dados seja idiossincrático. Aqui há três etapas a serem cumpridas: 1. Escolha dos documentos a serem analisados; 2. Hipotetização das ideias e formulação dos objetivos; 3. Elaboração de indicadores dos resultados. Essas etapas não se relacionam cronologicamente, mas ainda estão estritamente conectadas. A escolha dos documentos depende do objetivo da pesquisa, como também o objetivo pode ser satisfeito por causa daquele banco de dados; obtemos os resultados a partir das ideias hipotetizadas, ou como também podemos categorizar hipóteses ao longo da identificação dos indicadores dos resultados.

Para isso, Bardin (1977) listou três atividades a serem realizadas. A primeira, denominada leitura flutuante, sugere que a leitura destes trabalhos seja feita de forma a sermos impressionados pelas opiniões e orientações do texto, e conforme essa ação é repetida, mais assídua torna-se a leitura do documento em função das ideias iniciais de pesquisa.

A segunda atividade refere-se à escolha dos documentos, que pode ser *a priori*, como uma coleta de informações sobre um produto recém-lançado na imprensa, ou a partir de um objetivo pré-determinado, como na nossa pesquisa. No segundo caso, o nosso, é necessária a constituição de um *corpus*, ou seja, um corpo de documentos que satisfazem ao objetivo que buscamos atender.

Existem regras que regem o processo de constituição do *corpus*. Vejamos as principais: 1. Regra da exaustividade: utilizar todos os documentos e dados acessíveis que correspondam aos critérios da pesquisa, sendo complementada pela regra da não-seletividade, analisar todos os documentos que atendem aos critérios; 2. Regra da representatividade: a amostra coletada deve representar o universo de onde foi retirada, e para isso, o pesquisador sonda o ambiente e pode tirar aleatoriamente ou por *quotas*, contextos frequentes conhecidos de uma população replicadas numa proporção reduzida; 3. Regra da homogeneidade: todos os selecionados devem atender aos critérios de escolha pré-determinados, a par de suas singularidades; 4. Regra de pertinência: os documentos escolhidos devem ser adequados ao objetivo de pesquisa.

A terceira etapa da pré-análise corresponde à hipotetização das ideias e formulação dos objetivos. A hipótese corresponde à ideia que pretendemos buscar, via métodos e procedimentos, sua verificação (se sim ou se não) e o objetivo a finalidade que guia as ações do pesquisador. Na nossa pesquisa, buscamos compreender o conhecimento dos alunos sobre o conceito de fração e suas intepretações e para isso, nos questionamos o que as pesquisas que investigaram sobre esse tema indicam.

A quarta etapa refere-se à elaboração dos indicadores dos resultados. Devemos escolher os índices dos resultados que buscamos obter e organizá-los sistematicamente. Ao passo que isso ocorre, inicia-se a construção dos indicadores dos resultados, com as seguintes operações: recortes do textos a fim de categorizá-las; e, codificação para o registro dos dados. A quinta e última etapa discorre sobre a preparação do material, sua ordenação, nomeações, buscando a melhor logística para sua utilização. No nosso caso, os documentos escolhidos foram arquivos digitais de acesso direto, um benefício da era tecnológica.

O segundo polo da análise de Bardin (1977) corresponde à exploração do material, já escolhido segundo critérios pré-determinados e organizado sistematicamente. Essa etapa é mecânica, exaustiva e longa que executa a codificação dos documentos seguindo a estrutura metodológica da pesquisa. O terceiro polo é referente ao tratamento e interpretação dos resultados obtidos. Queremos dar significado aos dados coletados e que podem ser submetidos a diferentes testes que provem os resultados obtidos.

A seguir, discorremos como se deu a escolha dos documentos. A pesquisa dos documentos foi feita nas plataformas Google e Google Scholar, utilizando as palavras “conceito”, “fração”, “Ensino Fundamental” e “Anos Finais” e período específico de 2010 a 2020 (as pesquisas desenvolvidas durante 2019 que foram publicadas em 2020). Após algumas páginas de busca, adicionamos aos termos da pesquisa a palavra “estudante”, pois a maioria das pesquisas obtidas era referente ao conhecimento do professor. Para obter todos os possíveis resultados, realizamos a pesquisa também trocando o termo “estudante” por “aluno”.

Mesmo acrescentando o termo “estudante”, foi visto que a maioria das pesquisas focava no conhecimento do professor, logo, a quantidade de pesquisas sobre o conhecimento de fração do aluno foi aquém da esperada. Dessa forma, as pesquisas que apresentaram resultados satisfatórios, independentemente de seu formato, foram consideradas para a análise, inclusive monografias de conclusão de curso.

Alinhado ao objetivo, queremos compreender se o aluno possui o conceito de fração e se foi ensinado a ele as interpretações de fração que defendemos ser necessárias para o domínio do conceito de fração. Discutiremos esses aspectos nas análises dos periódicos.

Para tal, apresentaremos algumas informações escolhidas a fim de contribuir ao leitor sobre os trabalhos a serem analisados, sendo essas o título, o resumo, destacando em negrito o objetivo, as palavras-chave e os instrumentos de coleta de dados. O **Quadro 2** retoma os trabalhos a serem analisados.

É interessante compreender a base teórica sobre frações que o (a)(s) autor(a)(s) utilizou(aram) para analisar os dados, logo apresentaremos comentários sobre isso. Também, discutiremos sobre como o instrumento de coleta de dados foi construído para conhecermos as abordagens utilizadas pelos pesquisadores.

A justificativa da escolha dos trabalhos é a baixa quantidade de pesquisas sobre o conhecimento dos estudantes sobre fração. Foi observada uma grande quantidade de trabalhos preocupados com a formação inicial e continuada de professores que ensinam matemática em números racionais e frações.

Quadro 2 - Trabalhos escolhidos para análise.

Ano	Tipo	Autor	Título	Palavras-chave
2014	Artigo	Monteiro; Groenwald	Dificuldades Na Aprendizagem De Frações: Reflexões A Partir De Uma Experiência Utilizando Testes Adaptativos	Frações, tecnologias da informação e comunicação, dificuldades de aprendizagem
2015	Tcc	Serafim	O Conhecimento De Alunos Do Ensino Fundamental II Sobre Frações	Fração, Matemática, Educação Matemática

2017	Disse[16]	Silva	Ressonâncias Do Aprender Em Deleuze Em Um Fazer Docente A Partir Da Exploração Do Conceito De Fração Em Turmas Do Sexto Ano Do Ensino Fundamental	Signos, Deleuze, Aprendizado, Fração
2019	Artigo	Santos; Fonseca	Dificuldades dos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental em Aprender Fração	Frações, Dificuldades de aprendizagem, Matemática
2019	Tcc	Tenório	A Mobilização De Saberes Matemáticos De Alunos Do 6º Ano Do Ensino Fundamental Por Meio De Sequências Didáticas Envolvendo O Conteúdo Frações	Didática da Matemática, Engenharia Didática, Ensino de Frações, Números Fracionários, Teoria das Situações Didáticas.
2019	Artigo	Amorim; Etcheverria; Oliveira	Fração Com O Significado De Operador Multiplicativo: Aprendizagem E Ensino	Fração, Operador Multiplicativo, Ensino Fundamental, Aprendizagem e Ensino.
2020[17]	Artigo	Cavallin	O Conceito Número Fracionário Na Ideia Parte-Todo: Entendimentos Apresentados Por Alunos Do 6o Ano Do Ensino Fundamental	Número Racional na Representação Fracionária, Dupla Contagem, Obstáculo Epistemológico, Ensino Fundamental.

Fonte: os documentos.

[16] Dissertação.
[17] O trabalho de Cavallin (2020) apresenta uma pesquisa realizada em 2019, por isso foi considerado.

5 AS ANÁLISES DOS DOCUMENTOS

Neste capítulo, apresentaremos detalhadamente as análises feitas dos trabalhos. De cada um, buscamos identificar o conhecimento dos participantes das pesquisas sobre o conceito e as interpretações de fração segundo Kieren (1976, 1980) e Behr et al. (1983). Para tal, nos interessa expor dos trabalhos o resumo grifando em negrito o objetivo da pesquisa, os instrumentos de coleta utilizados e os resultados obtidos com tais. Uma vez que os instrumentos de coleta são construídos a fim de atender ao objetivo da pesquisa, é interessante observar as abordagens utilizadas pelos pesquisadores, como figuras, imagens, esquemas, entre outros.

Dos resultados, observaremos os conhecimentos e dificuldades dos estudantes com frações. Não garantimos que todos os trabalhos apresentarão as dificuldades, contudo o que for observado sobre o tema será exposto aqui uma vez que ao identificar as dificuldades do estudante estamos mais capacitados a auxiliá-lo na superação desta.

Buscamos identificar as maneiras que o conceito de fração é apresentado pelo estudante a partir dos resultados das pesquisas. Além disso, buscamos identificar as interpretações de fração entre os escritos dos participantes, visto que defendemos a necessidade de dominar todas as interpretações de fração para compreender o conceito, pois como afirma Kieren (1976, p. 103), “cada interpretação possibilita considerar os racionais a partir de uma diferente perspectiva”.

Dividimos as análises de cada trabalho em seções a fim de organizar os dados da melhor forma para expor os resultados que obtivemos.

5.1 MONTEIRO E GROENWALD (2014)

O trabalho de Monteiro e Groenwald intitulado “Dificuldades na Aprendizagem de Frações: Reflexões a partir de uma Experiência utilizando Testes Adaptativos” publicado em 2014, referente à parte da pesquisa desenvolvida para a dissertação de mestrado de Monteiro concluída em 2013, apresentou o seguinte resumo

> O presente artigo apresenta as principais dificuldades de um grupo de alunos na resolução de testes adaptativos envolvendo o conteúdo de frações. O experimento foi realizado com 19 alunos, do 7º ano do Ensino Fundamental, com testes adaptativos implementados no Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA). Esta análise fez parte da pesquisa desenvolvida para a dissertação de mestrado, intitulada “Estudos de recuperação do conteúdo de frações com o uso de Tecnologias da Informação e Comunicação”. O objetivo

> desse artigo é **identificar as principais dificuldades desses alunos com base na análise de dados realizada na pesquisa de mestrado**. Os resultados apontam que os alunos apresentaram dificuldades nos testes envolvendo conceito, equivalência, simplificação e comparação de frações, e por outro lado tiveram um bom desempenho nos testes envolvendo as quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) com frações. (Monteiro e Groenwald, 2014, p. 1, grifo nosso)

Segundo os autores, a coleta de dados ocorreu ao longo de oito encontros de duas horas-aula cada. Um dos instrumentos de coleta de dados foi a plataforma SIENA, que foi desenvolvida na Universidade de La Laguna (ULL), pelo Grupo de Tecnologias Educativas junto com o Grupo de Estudos Curriculares de Educação Matemática da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA). Essa plataforma utiliza de um banco de dados para produzir uma sequência didática eletrônica sobre um tema matemático, a partir de testes adaptativos que personalizam a sequência de acordo com os conhecimentos dos estudantes.

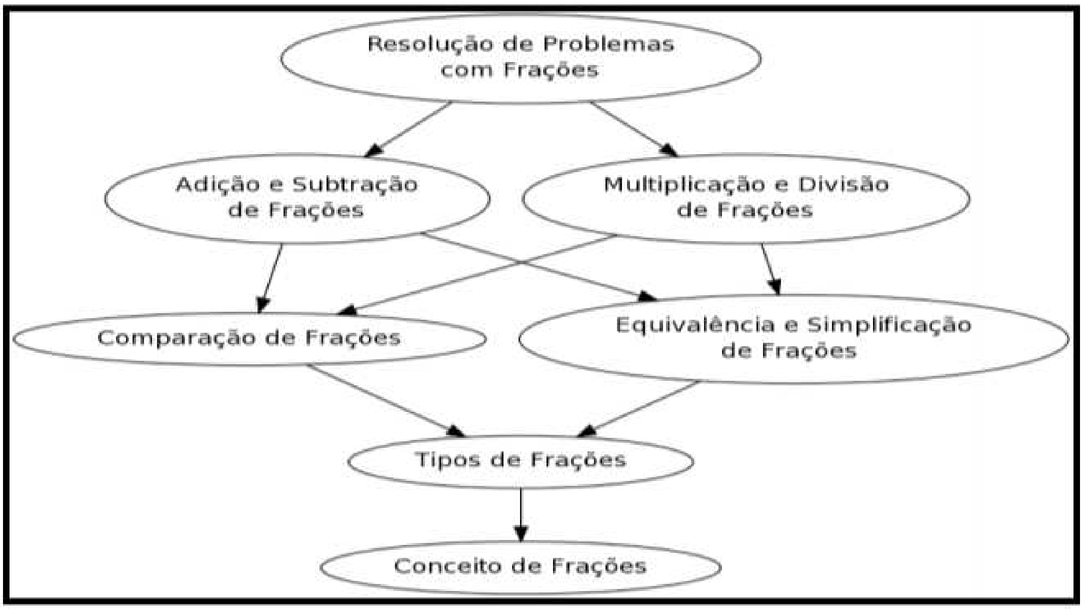
Cada tema da Matemática está relacionado a um grafo produzido pelo próprio sistema a partir de diversos mapas conceituais. Groenwald e Monteiro (2014) afirmam que esse grafo apresenta a sequência de ensino e aprendizagem de um tema, ordenada em conceitos prévios, fundamentais e objetivos, ou seja, um conceito prévio é ensinado anteriormente a um conceito fundamental.

Os autores explicam que, a partir do grafo, é produzido um teste adaptativo virtual que analisa os conhecimentos dos estudantes. É interessante comentar que conforme o estudante responde o teste, o sistema analisa e ajusta as questões a seu nível de conhecimento, dessa forma, o teste é único a cada estudante. É possível acessar as perguntas realizadas, respondidas e a estimativa do conhecimento do estudante feita pelo próprio sistema.

O grafo da plataforma SIENA sobre o tema frações apresenta sete conceitos dispostos na

Figura 10. Segundo os autores, as questões são inseridas de acordo com cada conceito que o grafo apresenta, com informações como o grau de dificuldade da questão, a resposta correta, o tempo para resolvê-la, entre outros. As questões foram criadas pelos autores ou adaptadas de outros trabalhos ou livros didáticos.

Figura 10 - Grafo da plataforma SIENA sobre o conteúdo de frações.



Fonte: Monteiro e Groenwald (2014).

Segundo os autores, o aluno considera complexo o ensino e aprendizagem de frações e afirmam que a frequente prática de estender as propriedades do conjunto dos Números Naturais ao conjunto das frações, ignorando as características fundamentais de cada conjunto, pode causar dificuldades. Apoiados em Nunes e Bryant (1997) e Llinares e Sanchez (1998), os autores afirmam que os estudantes utilizam termos como "metade" sem necessariamente compreender a metade do todo em questão.

No artigo não consta o que os autores compreendem por "dificuldade". É importante ressaltar esse fato, uma vez que a partir dessa definição, podemos classificar situações como dificuldades e compreender a postura epistemológica assumida na pesquisa. Além disso, não foram definidos nem distinguidos os termos "fração" e "número racional" no texto, por isso, compreendemos que os autores assumem que esses termos representam os mesmos objetos matemáticos.

Para fins de fundamentação teórica, compreendemos que possuir uma dificuldade é "[...] algo que ainda não dominamos; um obstáculo que, vencido, se pode eliminar ou ao menos minimizar" (MASOLA E ALLEVATO, 2019, p. 56).

Groenwald e Monteiro (2014) citam três dificuldades decorrentes da prática da extensão das propriedades do conjunto dos naturais para o das frações. A primeira dificuldade dos alunos é compreender que os Números Racionais apresentam diferentes representações fracionárias do mesmo número, devido ao conceito de frações equivalentes.

Segundo os autores, outra dificuldade é lidar com a ordenação desse conjunto, uma vez que entre duas frações sempre podemos encontrar uma outra, que é diferente da ordenação dos Números Naturais e, compreender que o resultado de uma multiplicação pode ser menor que os fatores.

Além disso, os autores afirmam que por apenas utilizarem números naturais para compor frações, os alunos desenvolveram "efeito de distração dos Números Naturais" denominado por Llinares e Sanchez (1988). Esses conjuntos são diferenciados apenas pela notação, pois os alunos consideram que uma fração seria um conjunto de dois números naturais separados por um traço, e por isso, atribuem para o conjunto das frações os mesmos procedimentos de cálculo adotados no conjunto dos naturais.

Os encontros de duas horas cada ocorreram no Laboratório de Informática de uma escola do Rio Grande do Sul, participante de um projeto da Universidade dos autores. Os 19 participantes foram escolhidos pela professora de duas turmas a partir do critério criado pela professora de desempenho insuficiente com o conteúdo de frações, a participação não foi obrigatória e os encontros ocorreram no contraturno da aula.

Os autores apontam que a pesquisa serviu como revisão dos conteúdos de fração nos quais aqueles alunos apresentaram dificuldades, a fim de contribuir para que eles superassem esses obstáculos. Mesmo assim, dos 19 que iniciaram a participação na pesquisa, apenas sete concluíram a sequência didática da plataforma digital, e apenas esses alunos tiveram contato com resolução de problemas com frações, conceito presente em habilidades dos 6º e 7º anos da BNCC (2017).

Cada aluno possuía uma chave de ingresso na plataforma e seu desempenho era registrado. Nessa pesquisa, os autores determinaram que a superação de cada conceito é através do alcance da nota 0.6, variando de 0.0 a 1.0. Para a coleta de dados, os autores consideraram o banco de dados da plataforma SIENA, as anotações dos alunos, as gravações de áudio e vídeo dos encontros e as observações do pesquisador.

A partir desse momento, os autores apresentam a análise dos dados. Mesmo que seja um artigo de dissertação, alguns conceitos essenciais para a compreensão do texto estão ausentes, a definição de fração e número racional, por exemplo. Essas faltas dificultam a continuação da leitura e compreensão das análises.

A análise dos dados foi feita em seções correspondentes aos sete conceitos apresentados no grafo da

Figura 10. A primeira análise corresponde ao item do grafo “Conceito de Frações”. Segundo os autores, esse conceito introduz os significados, as representações contínuas e discretas e números fracionários.

A primeira dificuldade comentada pelos autores é em relação à fração como **parte-todo** de uma quantidade discreta, exemplificada pelas questões trazidas na **Figura 11** e **Figura 12**, respondidas pelo mesmo aluno.

Figura 11 - Questão sobre fração na representação parte-todo com quantidades discretas (ferramentas) resolvida pelo Aluno 102.

Qual a fração correspondente aos serrotes neste grupo de ferramentas?

0) $\frac{5}{8}$

1) $\frac{1}{8}$

2) $\frac{1}{3}$

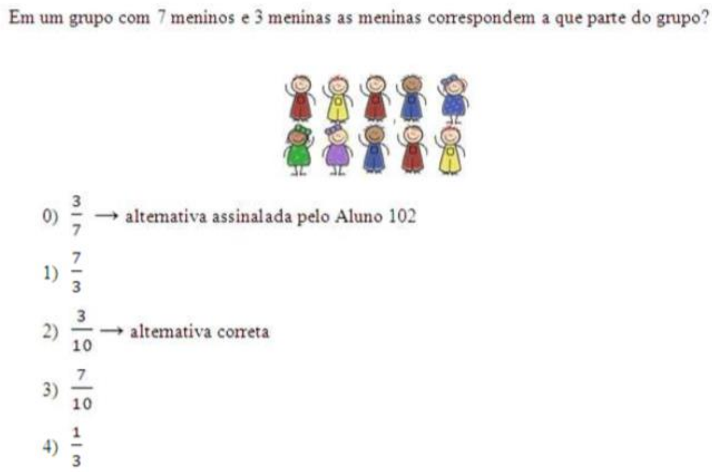
3) $\frac{3}{5}$ → alternativa assinalada pelo Aluno 102

4) $\frac{3}{8}$ → alternativa correta

Fonte: Monteiro e Groenwald (2014).

O aluno não considerou que o inteiro em questão são as oito ferramentas ao todo, e não os cinco martelos comparados a três serrotes.

Figura 12 - Questão sobre fração na representação parte-todo com quantidades discretas (crianças) resolvida pelo Aluno 201.



Fonte: Monteiro e Groenwald (2014).

A partir das respostas dadas, os autores afirmaram que o aluno não reconheceu a quantidade de ferramentas como o todo e sim como a quantidade de martelos da mesma forma que não reconheceu a quantidade total de meninos e meninas e considerou a quantidade de meninos como o todo e isso prova a dificuldade do aluno com relações parte-todo de quantidades discretas.

Além disso, os autores apontaram que outro possível raciocínio do aluno está relacionado ao conceito de razão, pois ele apresentou as mesmas respostas, relacionando uma quantidade com a outra, e não com o todo. No geral, os autores citam que 17 alunos apresentaram dificuldade em questões que envolviam quantidades discretas.

Sobre frações como parte-todo com quantidades contínuas, os autores sugerem que a frequência desse tipo de questão, exemplificada na **Figura 13**, nos livros didáticos é alta. Ainda, citaram que Nunes e Bryant (1997) consideram que os professores em sala de aula priorizam esse tópico matemático, e por esses dois motivos, nenhum aluno apresentou dificuldades.

Figura 13 - Questão sobre relação parte-todo com quantidades contínuas que os alunos não apresentam dificuldade.

A figura representa um segmento de reta. Assinale a fração que corresponde ao trecho pintado em vermelho:

0) $\frac{1}{7}$

1) $\frac{7}{1}$

2) $\frac{1}{8}$ → alternativa correta

3) $\frac{7}{8}$

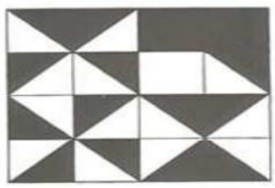
4) $\frac{8}{7}$

Fonte: Monteiro e Groenwald (2014).

Os autores afirmam que, em questões sobre o mesmo tema, mas de formato diferente (**Figura 14**), o mesmo aluno não respondeu corretamente. Isso mostra que o aluno pode estar apenas reproduzindo o procedimento visto em sala de aula, de forma automática e sem significação.

Figura 14 - Exemplo de questão envolvendo relações parte-todo com quantidades contínuas que os alunos apresentaram dificuldade.

Que fração representa as partes brancas da figura acima?



0) $\frac{14}{10}$ → alternativa assinalada pelo Aluno 110

1) $\frac{14}{32}$

2) $\frac{15}{17}$

3) $\frac{15}{32}$ → alternativa correta

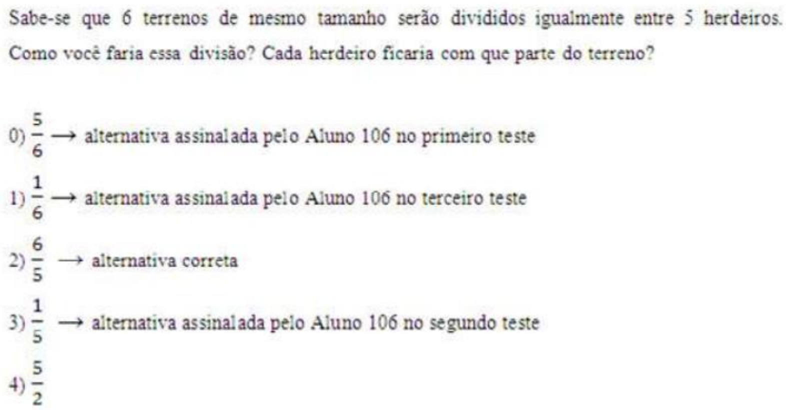
4) $\frac{32}{15}$

Fonte: Monteiro e Groenwald (2014).

Os autores sugerem que a resposta escolhida pelo aluno se estruturou na ideia de dupla contagem das partes brancas e escuras, derivada da noção de razão. Além de realizar esse equívoco, o aluno não considerou as partes como triângulos, o que sugere dificuldade na interpretação da figura. Os autores afirmam que cinco dos seis alunos que responderam essa questão apresentaram dificuldades.

Outra dificuldade identificada pelos autores foi relacionada a frações como quocientes, quando a fração representa uma divisão, exemplificada na **Figura 15**.

Figura 15 - Exemplo de questão que envolve a interpretação quociente de fração.



Sabe-se que 6 terrenos de mesmo tamanho serão divididos igualmente entre 5 herdeiros. Como você faria essa divisão? Cada herdeiro ficaria com que parte do terreno?

0) $\frac{5}{6}$ → alternativa assinalada pelo Aluno 106 no primeiro teste

1) $\frac{1}{6}$ → alternativa assinalada pelo Aluno 106 no terceiro teste

2) $\frac{6}{5}$ → alternativa correta

3) $\frac{1}{5}$ → alternativa assinalada pelo Aluno 106 no segundo teste

4) $\frac{5}{2}$

Fonte: Monteiro e Groenwald (2014).

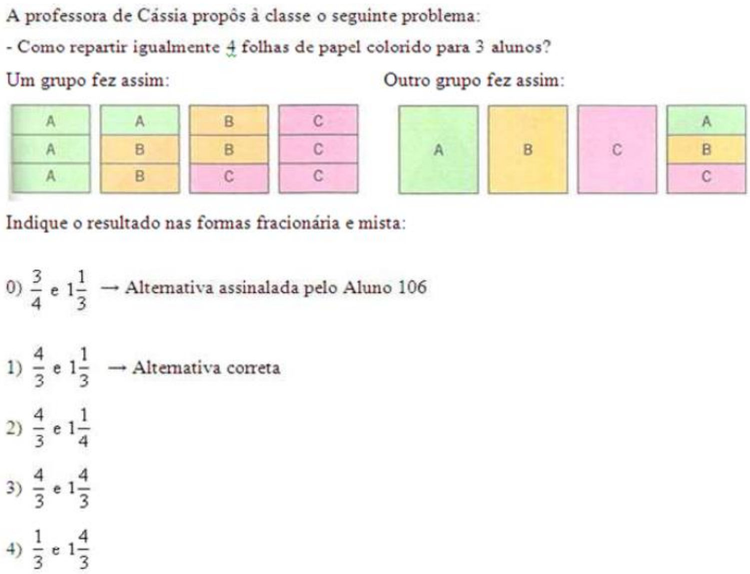
Para superar a dificuldade nesse item, o sistema reformula os testes adaptativos. O Aluno 106, segundo os autores, realizou o teste três vezes, ou seja, apresentou três respostas equivocadas durante o período de aplicação da pesquisa.

Das respostas assinaladas, todas apresentam frações menores que um inteiro, o que indica a concepção do estudante de que todas as frações devem ser menores que uma unidade. Os autores apontam que apenas quatro dos quatorze alunos acertaram a resposta inicialmente.

A seção seguinte compete ao conceito “tipos de frações” do grafo da plataforma SIENA. Nessa seção, segundo os autores, são apresentados os conceitos de frações próprias, impróprias, mistas e aparentes e a ideia de que fração é um número. Este último é reforçado pelos autores, pois baseado nessa ideia, o conceito de equivalência de frações é construído.

À nossa pesquisa é interessante identificar se o aluno compreende a fração como **número**, uma vez que é essencial dominar essa ideia para dominar o conceito de fração. Os autores afirmam que os alunos possuem dificuldade em reconhecer que frações podem ser maiores que uma unidade, pois, apoiados nas ideias de Kerlake (1986), eles apontam que ao associar frações como partes de um inteiro, o aluno é induzido a pensar que todas as frações são menores que um inteiro. Isso é exemplificado na **Figura 16**.

Figura 16 - Questão que envolvia frações impróprias e mistas.



Fonte: Monteiro e Groenwald (2014).

Dessa forma, segundo Monteiro e Groenwald (2014), propor uma fração cujo numerador é maior que o denominador para o aluno que compreende frações como menores que uma unidade é uma contradição, por isso, o estudante não concebe a ideia de fração como número.

As seções seguintes da pesquisa abordam conceitos de equivalência de frações, comparação de frações, operações com frações e Resolução de Problemas com frações, que são conceitos além dos interessantes à nossa análise.

A conclusão apresenta que as maiores dificuldades foram com o conceito de fração, equivalência, simplificação e comparação de frações. Sobre o conceito de fração, os contextos de quociente, razão e parte-todo foram os de mais dificuldade, especialmente com quantidades discretas.

5.2 SERAFIM (2015)

Traremos os resultados obtidos pelo trabalho de conclusão do curso de licenciatura em Matemática apresentado em 2015 pela Michelle Silva Serafim da

Universidade Estadual da Paraíba intitulado “O conhecimento de alunos do ensino fundamental II sobre frações” com o seguinte resumo

> Este trabalho tem por **objetivo analisar o desempenho dos alunos de 6º e 9º ano do Ensino Fundamental II frente a problemas que envolvem o conceito de fração e busca responder às seguintes questões de pesquisa: Qual o desempenho dos alunos do 6º e 9º ano frente a problemas que abordam os cinco significados de fração (número, parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo) e quais os erros mais frequentes?** Para isso, utilizamos um questionário composto de 10 questões, aplicados em duas turmas, sendo 22 alunos do 6º ano e 19 do 9º ano, de uma escola pública do município de Vitória da Conquista. A análise dos dados constou de duas fases: uma quantitativa em que foram construídas tabelas e gráficos para uma melhor representação e leitura dos dados e outra qualitativa, em que foi analisado quais os principais erros dos alunos e em quais significados eles demostraram um maior conhecimento. Os resultados apontam um baixo conhecimento dos estudantes com respeito ao conceito de fração, suas diferentes formas de representação, e um manejo inadequado de técnicas de manipulação de algoritmos. Por fim, inferimos que o atual tratamento dado ao conceito fração parece não garantir que o aluno tenha sucesso na construção do mesmo. (Serafim, 2015, p. 1).

Adiantamos que os resultados expostos serão referentes aos alunos do 6º ano, visto que os conhecimentos do 9º ano não são interessantes à nossa pesquisa.

A autora utilizou o conceito de número racional de Caraça (1951) que apresenta duas definições. A primeira refere-se à construção do número racional no contexto de medida, quando dois segmentos de reta AB e CD são relacionados por uma fração $\frac{m}{n}$ pela forma $AB = \frac{m}{n}$ CD. A segunda ilumina o número racional como quociente, quando dados dois inteiros m e n com n diferente de zero, se m é divisível por n, então o número $\frac{m}{n}$ é o resultado da divisão. Se não, $\frac{m}{n}$ é fracionário.

Para os significados, que na nossa pesquisa são chamados de interpretações, Serafim (2015) usou as dissertações de Merlini (2005) e Santos (2005). Adiantamos que sua categorização é semelhante à nossa, apenas pela fração como razão que a autora não considera.

A autora inicia apresentando o significado número dos racionais que é o número racional como um valor na reta numérica, sem demandar uma situação que problematize a fração. Em segundo, a autora apresenta que considera o significado parte-todo de fração como um todo dividido por n partes e a fração $\frac{1}{n}$ representa cada parte desse todo.

O terceiro significado medida é referente à fração em situações envolvendo proporção, probabilidade ou entre duas quantidades. Aqui, temos a distinção entre fração como medida e fração como razão, o que a autora considera serem da mesma categoria.

O quarto significado considerado por Serafim (2015) é o quociente, que representa o resultado de uma divisão. O quinto e último significado é o operador multiplicativo referente à transformação de um número por meio de uma multiplicação usando a fração para aumenta-lo ou diminuí-lo.

O instrumento de coleta de dados foi um questionário aplicado numa turma de 6º de uma escola pública de Vitória da Conquista, na Bahia, com 22 alunos. O questionário era composto de 10 questões, sendo duas questões cada sobre as cinco interpretações de fração: parte-todo, quociente, medida, operador multiplicativo e número (**Quadro 3**). Todas as 10 questões foram retiradas do instrumento de coleta de dados utilizado por Merlini (2005) pois era um instrumento já validado. A impressão do instrumento de coleta de dados dada aos alunos era colorida para facilitar o entendimento. Não havia um padrão de ordem das questões relacionado ao significado abordado.

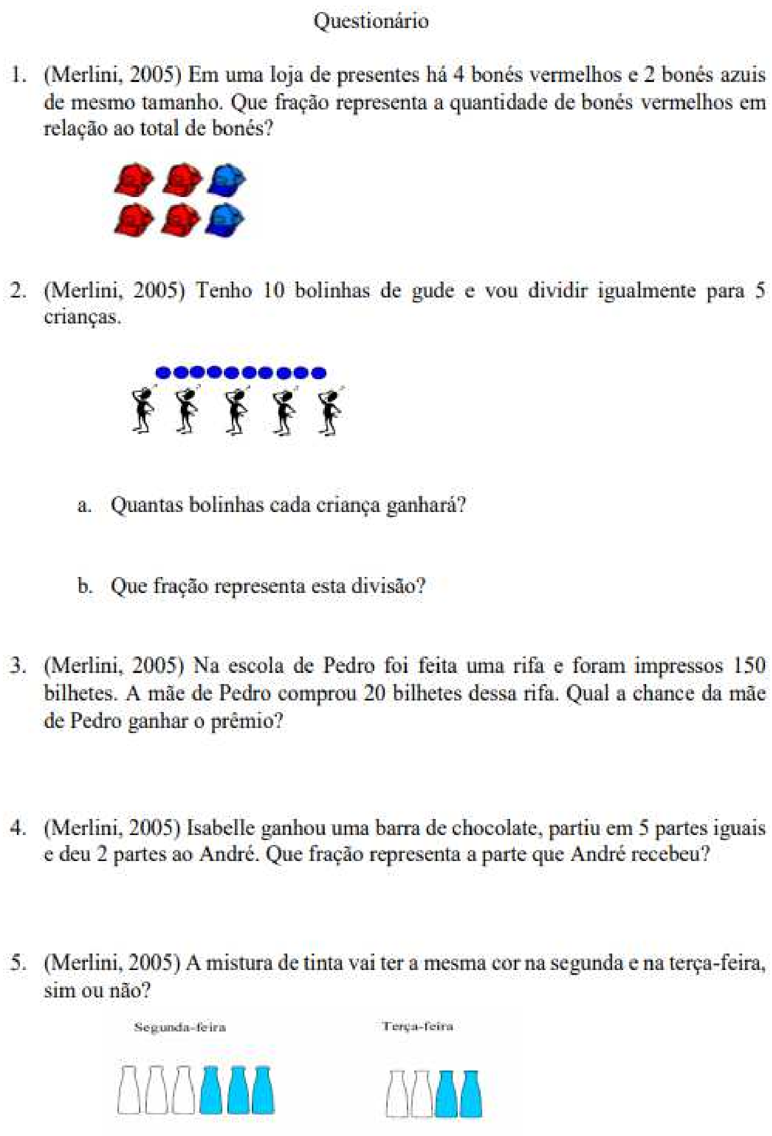
Quadro 3 - Divisão das questões nos significados do número racional.

Significados	Questões
Parte-todo	1, 4
Quociente	2.b, 6
Medida	3, 5
Número	8, 10
Operador multiplicativo	7, 9

Fonte: Serafim (2015).

A figura a seguir apresenta as cinco questões iniciais que Serafim utilizou para coletar os dados.

Figura 17 - Questões 1, 2, 3, 4 e 5 do instrumento de coleta de dados de Serafim (2015).



Questionário

1. (Merlini, 2005) Em uma loja de presentes há 4 bonés vermelhos e 2 bonés azuis de mesmo tamanho. Que fração representa a quantidade de bonés vermelhos em relação ao total de bonés?

2. (Merlini, 2005) Tenho 10 bolinhas de gude e vou dividir igualmente para 5 crianças.

   a. Quantas bolinhas cada criança ganhará?

   b. Que fração representa esta divisão?

3. (Merlini, 2005) Na escola de Pedro foi feita uma rifa e foram impressos 150 bilhetes. A mãe de Pedro comprou 20 bilhetes dessa rifa. Qual a chance da mãe de Pedro ganhar o prêmio?

4. (Merlini, 2005) Isabelle ganhou uma barra de chocolate, partiu em 5 partes iguais e deu 2 partes ao André. Que fração representa a parte que André recebeu?

5. (Merlini, 2005) A mistura de tinta vai ter a mesma cor na segunda e na terça-feira, sim ou não?

Segunda-feira

Terça-feira

Fonte: Serafim (2015, p. 43).

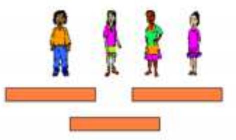
A seguir, a continuação da questão 5 e as questões 6, 7, 8, 9 e 10 utilizadas pela autora.

Figura 18 – Questão 5, 6, 7, 8, 9 e 10 do instrumento de coleta de dados de Serafim (2015).

Que fração representa a quantidade de tinta azul em relação à mistura das tintas azul e branca:

a. Na segunda-feira?
b. E na terça-feira?

6. (Merlini, 2005) Foram divididas igualmente para 4 crianças, 3 barras de chocolate.



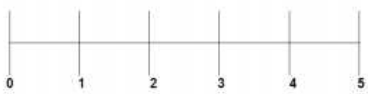
a. Cada criança receberá um chocolate inteiro?

b. Cada criança receberá pelo menos metade de um chocolate?

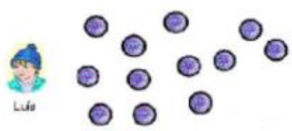
c. Que fração de chocolate cada criança receberá?

7. (Merlini, 2005) Maria ganhou um chocolate e comeu $\frac{2}{5}$. Pinte a quantidade que Maria comeu.

8. (Merlini, 2005) Represente e identifique as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{2}$ na reta numérica abaixo:



9. (Merlini, 2005) Observe a coleção de bolinhas abaixo:



Luís ganhou $\frac{2}{3}$ das bolinhas de gude desta coleção. Quantas bolinhas de gude Luís ganhou?

10. (Merlini, 2005) Represente na forma decimal as seguintes frações:

a. $\frac{1}{5}$

b. $\frac{2}{10}$

Fonte: Serafim (2015, p. 44).

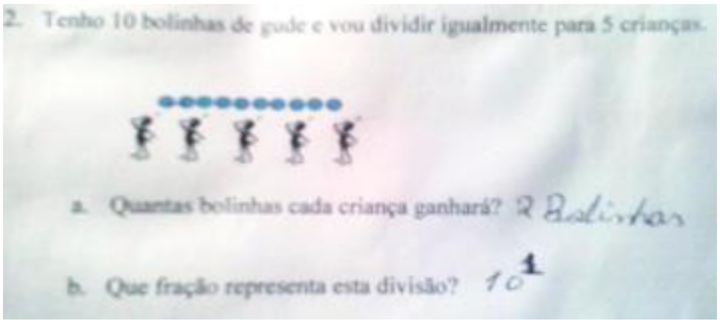
Dos resultados, a autora apontou que a maioria dos alunos não concebe o significado de parte-todo, pois apenas consideraram as partes como o todo apresentadas nas questões referentes a esse significado. Das duas questões que envolviam parte-todo, uma não houve acertos.

Das questões sobre quociente (**Figura 19**), foi visto uma quantidade baixa de acertos (12 de 44), porém os alunos apresentaram mais acertos ao lidar com questões com frações de quantidades discretas do que contínuas. A fim de compreensão, a autora afirma que

> [...] uma quantidade é discreta se ela pode ser expressa com números inteiros. Por outro lado, quando a quantidade é contínua a divisão pode ser feita sem a preocupação de o resultado dar um número inteiro (Serafim, 2015, p. 25).

Uma das dificuldades vistas em uma das questões sobre quociente foi o formato do número racional. Um dos alunos apresentou a resposta como uma potência e não uma fração, indicando desconhecimento sobre a notação de fração, como visto a seguir.

Figura 19 - Questão 2 a respeito da fração como quociente.



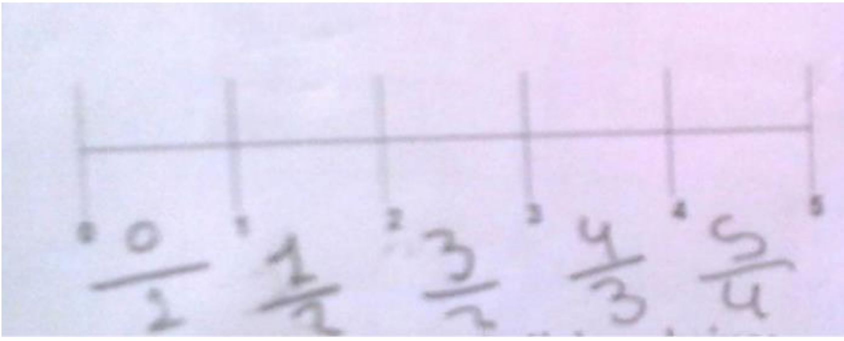
Fonte: Serafim (2015, p. 34).

Além disso, houve pouquíssimos acertos (6 de 66) nas questões que envolviam a interpretação medida[18] do conceito de fração, mesmo que uma das questões que possuía dois itens cuja resposta era igual, dois alunos que acertaram um item erraram o outro item. Do significado de número[19] da fração, nas duas

[18] Serafim (2015) compreende a interpretação medida da representação fracionária como a fração que representa uma relação entre duas grandezas.
[19] A autora compreende a interpretação número de fração como o número fracionário quando, por exemplo, representado na reta numérica.

questões a quantidade utilizada foi contínua e não houve nenhum acerto. A autora afirma que algumas resoluções não estavam claras a ponto de compreender o raciocínio utilizado pelo aluno, como mostra na **Figura 20**.

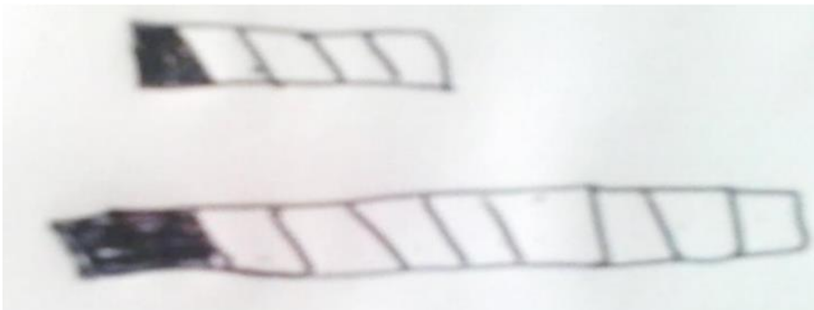
Figura 20 - Resolução da questão 8 retirada de Serafim (2015).



Fonte: Serafim (2015, p. 35).

Sobre o significado número, os participantes apresentaram desconhecimento em localizar frações na reta numérica e fração em sua representação decimal, pois foi pedido que apresentasse tal representação, porém o aluno não respondeu de acordo (**Figura 21**). A autora afirma que essa resposta foi a mais satisfatória entre as coletadas.

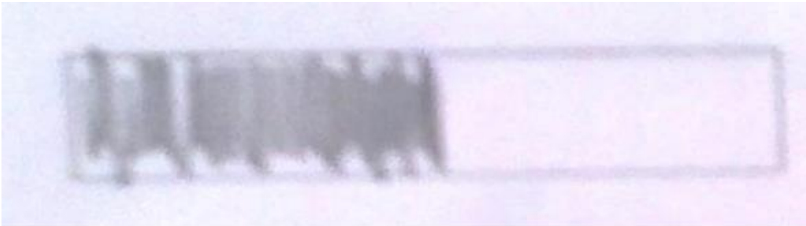
Figura 21 - Resolução da questão 10 retirado de Serafim (2015).



Fonte: Serafim (2015, p. 35).

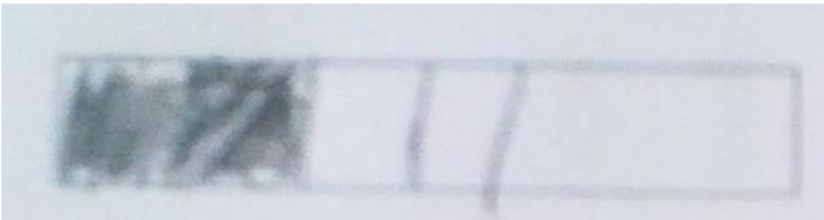
Ademais, nas resoluções das questões sobre o significado operador multiplicativo, foi observado um desempenho aquém do esperado (12 de 44 acertos). A maioria das respostas não era compreensível, a representação da fração como partes pintadas de um retângulo dividido não está dominada pelo aluno, pois um não dividiu o inteiro em partes iguais (**Figura 22**) e outro aluno dividiu em partes de tamanhos diferentes (**Figura 23**). Ainda, um aluno apresentou a fração dada no enunciado da questão como resposta, sem realizar algum cálculo.

Figura 22 - Resolução da questão 7 retirado de Serafim (2015).



Fonte: Serafim (2015, p. 36).

Figura 23 - Resolução da questão 7 retirado de Serafim (2015).



Fonte: Serafim (2015, p. 36).

No geral, o autor conclui que os alunos tiveram dificuldade nas questões 1 (parte-todo), 3 (medida), 8 e 10 (número). Os alunos apresentaram menor desempenho nas questões sobre o significado número e maior nas questões sobre as interpretações quociente e operador multiplicativo. Esse baixo desempenho com o significado número pode ser justificado pelo desconhecimento por parte do aluno sobre a relação entre fração e número decimal.

Ainda, a conclusão indica que os alunos demonstraram não dominar o conceito de fração, pois confundiram denominador com numerador, não abordaram a representação decimal de fração ou não foram capazes de localizá-las na reta numérica.

5.3 SILVA (2017)

Escolhemos a dissertação de Silva intitulada “Ressonâncias Do Aprender Em Deleuze Em Um Fazer Docente A Partir Da Exploração Do Conceito De Fração Em Turmas Do Sexto Ano Do Ensino Fundamental” apresenta o resumo a seguir

> Aprender decorre da interpretação que cada pessoa faz do que está a sua volta e lhe emite signos. Este pressuposto norteou a construção deste texto, a partir de uma prática docente desenvolvida em duas turmas de estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental, por meio da qual se propôs **a elaboração do conceito de fração, levando-se em consideração diferentes contextos e significados para essa forma de representação dos números racionais**. Os estudantes, em geral, apresentaram elementos indicadores de uma aprendizagem do conteúdo proposto, não concluída em termos de um acabamento conceitual, visto que a representação fracionária referente ao conceito de número racional é móvel, conforme seu contexto de significação. As constatações e percepções experimentadas nessa prática expressaram-se por meio de um fazer compartilhado entre os alunos, complementado por momentos de reflexão individual, e aqui são relatadas por meio da análise dos registros e produções realizadas. Enquanto professor-pesquisador, acompanhado de Deleuze, percebi-me como alguém, cujo fazer docente em um cotidiano de vivências de afetos e decifração de signos altera-se e me afeta de maneira contínua. (Silva, 2017, p. 7, grifo nosso).

O autor utiliza os conhecimentos de Deleuze (2003) para caracterizar o termo "aprendizado". Segundo o autor, a obra de destaque de Gilles Deleuze (1925-1995) intitulada "Proust e os signos" apresenta suas ideias sobre aprendizado a partir dos dizeres de Marcel Proust em "Em busca do tempo perdido", que, segundo Silva (2017, p. 14), "[...] relata o aprendizado de um homem de letras".

Para o autor, o aprendizado depende de signos, que são definidos por Deleuze (2003, p. 4) como objetos de um aprendizado temporal, não de um saber abstrato. Silva (2017) afirma que não há aprendizado sem a interpretação desses objetos, ou seja, para que ocorra o aprendizado, o indivíduo decifra e atribui sentido aos signos, de forma a transformá-los em aprendizado. É ressaltado pelo autor que os signos não se restringem a objetos físicos, abordam todo e qualquer elemento que contribui para o aprendizado.

Segundo o autor, o indivíduo depende do ambiente externo para interagir com os signos, pois é nessa interação que ele os decifra. Dessa forma, é de interesse da escola propiciar ambientes onde o estudante se sinta inquieto por estar em contato com signos, relacionados a conteúdos escolares, que formam o aprendizado.

O autor aponta que o pensamento e o aprendizado ocorrem forçados pelos signos presentes no ambiente para o indivíduo. O aprendizado não é espontâneo, surge a partir do sentimento do estudante de decifrar aquele signo.

A título de curiosidade, o autor afirma que Deleuze categorizou quatro tipos de signos, e cada um forma um mundo de signos desse tipo. São eles os signos mundanos, signos amorosos, signos sensíveis e signos da arte. Os três primeiros estão presentes no mundo físico e os signos da arte são os signos desmaterializados, com sentido apenas no mundo das ideias e por isso, o mundo da Arte reflete sobre todos os outros mundos de Deleuze.

Tratando do aprendizado como a decifração de signos, o autor aponta que Deleuze (2003) definiu duas tendências de interpretação do signo. Sendo um conseguinte ao outro, o objetivismo refere-se ao processo de identificar os signos referentes às características do objeto em questão. Contudo, o autor afirma que o objetivismo não conduz à decifração do signo, assim acontece o subjetivismo, quando após não ser capaz de decifrar utilizando o objetivismo, o indivíduo busca no subjetivo meios de decifrar os signos.

Ainda, para Deleuze, Silva (2017) afirma que o indivíduo não é capaz de decifrar os signos, pois para isso, é necessário conhecer as essências dos signos. Categorizadas em alógicas ou supralógicas, sem definição presente no documento, as essências dos signos transcendem as características do objeto e o que está envolvido subjetivamente a esse, e alcançam a irredutibilidade do signo em relação ao objeto que está associado e ao sujeito que o aprende. Compreender a essência é decifrar o signo para possibilitar o aprendizado.

Sobre os Números Racionais, o autor aponta que é comum a escola restringir a construção do conceito de fração à ideia de fração como medida, relacionando as partes com o inteiro. Logo, o autor defende que outros contextos de emprego das frações devem ser comentados de forma a contribuir com o aprendizado dessa representação dos números racionais, como afirma Silva (2017).

Esses contextos podem ser atividades, exemplos ou situações-problema que envolvam o número racional. Segundo o autor, os contextos abrangem situações de fração como medida, quociente de inteiros ou divisão, razão, operador multiplicativo ou probabilidade.

O contexto de fração como medida refere-se, de acordo com Silva (2017, p. 22), à relação entre a fração em pauta e o todo, como em problemas de divisão de uma pizza ou barra de chocolate.

A fração como quociente de inteiros ou divisão indicada remete à ideia de partilha, particionar o inteiro em partes do mesmo tamanho, como em situações de distribuição de uma quantidade de objetos para uma quantidade de pessoas.

O terceiro contexto aborda fração como razão, que relaciona duas quantidades por uma comparação multiplicativa, como por exemplo a taxa de acertos num jogo ou a velocidade que relaciona espaço com o tempo. A fração como operador multiplicativo corresponde “[...] à situação na qual uma grandeza ou quantidade, habitualmente maior que a unidade, é dividida numa certa quantidade de partes iguais, das quais se destacam algumas” (Silva, 2017, p. 23).

O quinto e último contexto refere-se à fração como a representação da comparação entre as chances favoráveis e as chances possíveis de uma probabilidade, exemplificado pelo cálculo das chances de cair o número 1 em um lançamento de dados. Como a probabilidade é a comparação de duas quantidades da mesma grandeza, a fração nesse contexto assemelha-se à ideia de fração como parte-todo na nossa categorização.

Para a coleta dos dados analisados, o autor descreve que a experiência docente ocorreu numa escola da Rede Pública do Rio Grande do Sul com duas turmas do sexto ano do Ensino Fundamental, totalizando 39 participantes. O autor relata que, a princípio, os dados seriam coletados apenas de uma turma, contudo a baixa quantidade de alunos influenciou na escolha de analisar duas turmas. A experiência docente durou onze horas-aula em cada turma, totalizando 22 horas-aula.

As análises foram realizadas a partir do que foi produzido em cada encontro, a saber os registros das atividades propostas e falas dos estudantes, as respostas deles para as perguntas “o que eu aprendi hoje?” e “o que eu sei sobre fração?” (Silva, 2017, p. 27), os registros feitos pelo pesquisador das observações e uma síntese dos acontecidos durante cada encontro.

O autor aponta que as atividades propostas foram escolhidas por sua riqueza de detalhes e por seu grau de complexidade, variando entre os níveis de cada um, e por isso, contribuem à construção do conceito de fração. Os encontros não possuíam uma estrutura em comum, logo será descrito cada encontro segundo Silva (2017).

Para o primeiro e o segundo encontro, foram escolhidas cinco situações-problema para serem trabalhados. No primeiro encontro, com duração de duas horas-aula, foi orientado aos estudantes que se organizassem em grupos de dois, três ou quatro alunos para realizar as atividades, sem qualquer intervenção do pesquisador, no intuito de incentivar os estudantes a se expressarem sobre as resoluções com os outros. Sem sucesso, o autor tentou registrar em vídeo esse encontro, porém teve problemas técnicos.

No segundo encontro, os estudantes também se organizaram em grupos, receberam as mesmas atividades, contudo a diferença foi a possibilidade de conversação entre os estudantes e o pesquisador. Assim, o autor afirma que fez a leitura das questões com eles, de forma a questioná-los, ressaltar detalhes importantes para as resoluções, porém, Silva (2017) afirmou que não se manifestou a respeito dos comentários feitos pelos estudantes durante essa leitura. Segundo o pesquisador, sua participação no segundo encontro idealizou ressaltar elementos das resoluções das atividades.

Descreveremos o primeiro e o segundo encontro inicialmente, depois o terceiro e o quarto e quinto encontros. Escolhemos essa maneira a fim de ressaltar os conhecimentos dos participantes das pesquisas sobre fração e suas interpretações identificadas nas respostas das atividades.

A primeira situação-problema de fração envolveu uma questão retirada de David e Fonseca (1997) envolvendo três pizzas para oito pessoas (Figura 24).

Figura 24 - Questão referente à atividade 1 de Silva (2017).

Oito pessoas entraram numa pizzaria e encomendaram três pizzas grandes. Porém, para as pizzas não esfriarem, eles pediram ao garçom que trouxesse uma pizza de cada vez, e servisse sempre um pedaço de mesmo tamanho para cada um.

a) Represente numericamente o quanto de pizza cada uma das oito pessoas comeu.

b) Se uma pizza custa R$16,00, quanto deverá pagar cada pessoa?

Fonte: Silva (2017).

Em referência ao primeiro encontro, o autor relatou que o item “a” obteve as seguintes respostas:

a) “cada pessoa comeu 1 de 8 da pizza”;
b) “três pedaços de 24”;
c) “1 de 8 pedaços”;

d) “cada pessoa comeu $\frac{1}{8}$ de pizza”;
e) “$\frac{1}{8}$ de três pizzas”.

O autor considerou que todas essas respostas satisfaziam a questão e afirmou que os estudantes que utilizaram fração nas respostas reconhecem sua representação formal, pois utilizaram a notação $\frac{a}{b}$. Esse item abordou a ideia de fração como **parte-todo**, uma vez que tomou um inteiro, a pizza, e a dividiu em partes iguais. O autor apontou que nenhum deles manifestou-se sobre a equivalência entre $\frac{1}{8}$ e $\frac{3}{24}$.

Os estudantes que apresentaram respostas ausentes de fração ainda, segundo Silva (2017), souberam corretamente representar a quantidade inteira da parte e a do todo considerado nessa questão, isto é, a quantidade de pedaços de pizzas consumido por cada pessoa e a quantidade de pedaços de pizza ao todo. Isso indica que o estudante concebe a ideia de fração como **parte-todo**, uma vez que soube, da mesma forma, identificar as partes e o todo corretamente, mesmo sem a forma fracionária.

Já no segundo encontro, pudemos ver no relato que o autor ressaltou que a resposta deveria ser um número e que cada pessoa deveria pagar o mesmo valor. Assim, as respostas mais frequentes apresentadas para o item “a” foram:

a) “cada pessoa comeu 3 vezes de $\frac{1}{8}$”;
b) “$\frac{3}{8}$ de cada pizza”;
c) “$\frac{3}{8}$ de todas pizzas”.

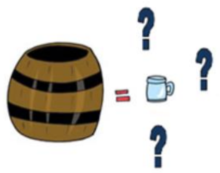
A primeira resposta compreende-se como correta pelo autor, “[...] mesmo que a multiplicação do número de pizzas pela quantidade comida de cada pizza não tenha sido efetuada” (p. 34-35). A segunda resposta era incorreta, pois de cada pizza cada pessoa comeu $\frac{1}{8}$ e a terceira era correta, pois apresenta a representação fracionária da relação entre a quantidade de pedaços de pizza consumidos por cada pessoa e a quantidade total de pedaços de pizza.

Para o item “b”, no primeiro encontro, as respostas obtidas foram as seguintes: “R$16,00 dividido por 8 pessoas”, “cada pessoa pagará R$2,00”, “2 reais para cada pessoa”, “6 reais para cada um”. A única resposta correta é a última, pois considera a quantidade de pizzas, de pessoas e de pedaços que cada uma consumiu. As outras respostas, segundo o autor, indicam que o estudante, essencialmente, realizou a divisão do valor de apenas uma pizza pela quantidade de pessoas.

Já no segundo encontro, o autor apontou que das duas respostas identificadas, “R$6,00 por pessoa” e “cada pessoa pagará R$2,00 por cada pizza”, a segunda foi dada por apenas um grupo. O autor apontou que pela taxa altíssima de acertos, os estudantes indicam dominar a ideia de fração como **operador** multiplicativo.

A segunda situação-problema retirada também de David e Fonseca (1997) aborda a ideia de fração como parte-todo e como medida.

Figura 25 - Questão referente à atividade 2 de Silva (2017).



Um barril pode conter 7 litros de suco de uva. Quantas canecas de 2 litros são necessárias para encher o barril?

Fonte: Silva (2017).

No primeiro encontro, as respostas foram as seguintes (Silva, 2017, p. 29-30):

a) “cabe três canecos e mais um pouco”;
b) “três canecos e mais meio caneco”;
c) “4 canecos vai sobrar”;
d) “dá 3 canecos e uma fração, porque não deu tudo cheio”.

O autor afirma que das respostas é possível observar que todos os estudantes têm a noção de quantidades menores que um inteiro. Mesmo assim, nenhum estudante utilizou a notação $\frac{a}{b}$, segundo Silva (2017). A segunda resposta apresentou de forma escrita a quantidade de canecas exata para resolver a questão, utilizando corretamente o termo “meio” para representar a parte menor que a unidade.

No segundo encontro, as respostas apresentadas pelos estudantes, segundo o autor, foram as seguintes:

a) “3 canecas e meia”;
b) “3,5 canecas”;
c) “$\frac{7}{2}$ canecas de suco”.

O autor afirma que todas essas respostas estão corretas, apenas denotadas por diferentes representações. A questão demanda tomar o todo e dividi-lo em partes iguais, o que está relacionado à interpretação da fração como **parte-todo**. Também, podemos associar essa atividade à ideia de fração como **medida**, pois utilizamos uma unidade de medida conhecida para representar uma quantidade desconhecida da mesma grandeza.

A terceira situação-problema pertence ao acervo pessoal do pesquisador.

Figura 26 - Questão referente à atividade 3 de Silva (2017).

Ao lançarmos um dado, ao acaso, quais são as chances de o resultado obtido ser o número 2? Represente numericamente essa chance.

Fonte: Silva (2017).

As respostas para essa questão, segundo o autor, foram as seguintes:

a) "tem uma chance em seis";
b) "tem 1 de 6";
c) "só um lado tem o 2, daí é só 1 de 6";
d) "$\frac{1}{6}$ pois tem uma chance em 6".

O autor afirma que todas as respostas respondem à questão, porém a última apresenta a fração correspondente à probabilidade correta. A ideia de fração como **parte-todo** estrutura essa questão, uma vez que a probabilidade é a comparação entre duas quantidades da mesma grandeza.

No segundo encontro, o autor relatou que questionou os estudantes a quantidade de faces de um dado e qual o número mostrado em cada face. Segundo Silva (2017), todos os estudantes responderam a fração $\frac{1}{6}$ para responder à questão. Isso indica conhecimento por parte deles sobre a fração como probabilidade.

A quarta situação-problema foi adaptada de David e Fonseca (1997).

Figura 27 - Questão referente à atividade 4 de Silva (2017).

Na proposta de gincana da nossa escola, no Ensino Fundamental, cada grupo de 3 professores se responsabilizará por 2 turmas. Represente numericamente a relação entre o número de professores responsáveis e o número de turmas?

Fonte: Adaptado de Silva (2017, p. 31).

No primeiro encontro, o autor afirmou que as respostas obtidas foram as seguintes:

a) “dá um professor e meio”;
b) “não pode dar meio professor! Pode?”
c) “dá 3 dividido por 2”;
d) “vai sobrar um professor”;
e) “dá mais de um professor, mas não dá dois”.

O autor afirmou que a resposta “dá um professor e meio” está relacionada, provavelmente, ao resultado da divisão entre 3 por 2, contudo, o estudante não refletiu sobre a resposta, pois não é possível dividir um professor ao meio.

O autor apontou que, ao se questionar com a expressão “Pode?”, o estudante que utilizou essa resposta reconhece que a quantidade de professores é uma grandeza discreta, e por isso não seria possível a quantidade de meio professor. Por outro lado, indagar-se nesse caso pode significar que o estudante reconhece a impossibilidade real de haver meio professor e pode usar isso para refletir sobre sua resposta da questão, porém não indica que ele reconhece que essa quantidade é do tipo discreta.

Afirmar que “dá 3 dividido por 2”, segundo o autor, indica que o estudante reconhece a relação entre as duas grandezas, a fração como **razão**, contudo não apresentou a notação fracionária. Entretanto, apenas indicar a divisão de 3 por 2 não sugere que o estudante compreenda a ideia de fração como **razão**, apenas que ele compreende a relação de operação entre os números inteiros do cálculo.

O autor afirma que na penúltima resposta, o estudante raciocinou de forma aditiva, sem reconhecer a razão envolvida e a última resposta sugere que o estudante possui a compreensão de uma quantidade não inteira de professores, mais que um e menos que dois.

No segundo encontro, foram obtidas as seguintes respostas (Silva, 2017, p. 36):

a) “$\frac{3}{2}$ professores”;
b) “mais ou menos 1,5 professor”.

O autor apontou que apenas uma dupla de alunos apresentou a segunda resposta e a maioria do restante dos alunos respondeu corretamente. Ao serem questionados, a dupla de estudantes pretenderam com o termo “mais ou menos” ressaltar que “não existe meio professor”, o que o autor identificou como uma confusão dos estudantes sobre valor não inteiro e valor aproximado.

A quinta e última atividade do primeiro e do segundo encontro foi responder à questão “o que eu aprendi hoje?”. As respostas obtidas, segundo Silva (2017, p. 32):

> a) “dá para escrever com um número em cima, uma barra e um número embaixo”;
> b) “tem um traço entre dois números, é fração”;
> c) “meio é sempre cinco. ‘Que nem’ meio real, que é cinquenta centavos”;
> d) “fração é um pedaço de uma parte maior, quando uma coisa é repartida”;
> e) “fração é uma divisão que me fala quantos pedaços tem e quantos pedaços eu vou precisar”;
> f) “que as coisas podem ser repartidas em pedaços do mesmo tamanho”;
> g) “fração é uma divisão com dois números. Um número em cima e um número embaixo”.

Segundo o autor, percebe-se dois aspectos, os estudantes concebem a noção de fração como representação da parte de um inteiro, dividido em partes – iguais, como a penúltima resposta indicou - e realçaram a notação incomum desse objeto, mesmo que descrita. Além disso, podemos observar que algumas respostas remetem à ideia de fração como uma divisão, relacionada à interpretação **quociente**.

A partir da resposta “meio é sempre cinco. ‘Que nem’ meio real, que é cinquenta centavos” é visto que o estudante associou o conceito de “metade” com o cinco, ou seja, ele compreendeu que metade de algo sempre resultará num valor que possui cinco em alguma casa decimal. Isso pode ter ocorrido pois os estudantes resolveram atividades relacionadas ao conceito de “metade” que envolveram apenas números ímpares. Essa situação é caracterizada por Klausmeier e Goodwin (1997) como a subgeneralização de um conceito, quando o conceito é ensinado a partir de poucos ou até nenhum exemplo.

No segundo encontro, as respostas foram as seguintes, de acordo com Silva (2017, p. 37):

> a) “um oitavo é uma parte de oito”;
> b) “eu sei que fração é uma conta que ajuda a ver o quanto sobrou de alguma coisa. (...) eu tinha três pedaços de chocolate e comi um. Essa fração é 1/3”;
> c) “fração é uma conta que ajuda a dividir”;
> d) “eu sei que fração tem dois conjuntos que se chamam numerador e denominador e que ela (a fração) indica em quantas partes iguais o inteiro foi dividido”;
> e) “eu sei que a fração é um conjunto que se chama numerador e denominador. A fração indica partes iguais o inteiro foi divido e em quantas partes foram tomadas”;
> f) “a fração 1/6 quer dizer uma chance em 6”;
> g) “eu achava que numa fração o número de cima era sempre menor, mas vi que não é assim”.

O autor não apresentou comentários sobre as respostas obtidas no segundo encontro, rompendo nossa expectativa de conhecer a visão do pesquisador sobre isso. Julgamos as respostas obtidas interessantes e com grande potencial de enriquecimento à análise dos dados, e consequentemente, aos resultados da pesquisa.

Compreendemos que o estudante que respondeu “um oitavo é uma parte de oito” deve dominar a nomenclatura da fração e sua correspondência com as partes do todo, como também visto na resposta “a fração $\frac{1}{6}$ quer dizer uma chance em 6” e “[...] eu tinha três pedaços de chocolate e comi um. Essa fração é $\frac{1}{3}$”. Entretanto, conhecer a notação de fração, como identificado nas duas últimas respostas, indica que esse estudante está mais familiarizado com o objeto matemático fração.

No segundo encontro, podemos identificar que as respostas são mais satisfatórias em comparação ao primeiro encontro, pois alguns estudantes responderam corretamente que a fração representa a parte considerada do todo em questão. A noção de fração própria foi abordada na última resposta, evidenciando o *insight* do estudante, pois concebeu que o numerador da fração pode ser maior que o denominador. Todas essas respostas associam fração à intepretação **parte-todo**.

O terceiro encontro abordou o tema de operações com fração, o quarto e o quinto encontro abordaram o tema de frações equivalentes. Esses temas não são abordados na nossa análise, pois estamos interessadas em discutir sobre o conceito de fração, logo não traremos os resultados desses encontros.

Observamos que o autor não apresentou todas as respostas obtidas nas questões, justificando que, como muitas respostas eram semelhantes, “[...] priorizou-se para a discussão aquelas respostas que se apresentaram com mais riqueza de elementos a serem analisados ou que surgiram mais vezes”. Além disso, alguns comentários nos chamaram a atenção, como “me senti angustiado pelo fato de vê-los seguir caminhos de resolução que não levariam às respostas matematicamente corretas [...]” e “em minha prática docente estou acostumado [...] a controlá-los [...]” (Silva, 2017, p. 27, 33).

5.4 Santos e Fonseca (2019)

O artigo publicado na Revista Insignare Scientia de Santos e Fonseca intitulado “Dificuldades dos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental em Aprender Fração” apresentava o seguinte resumo

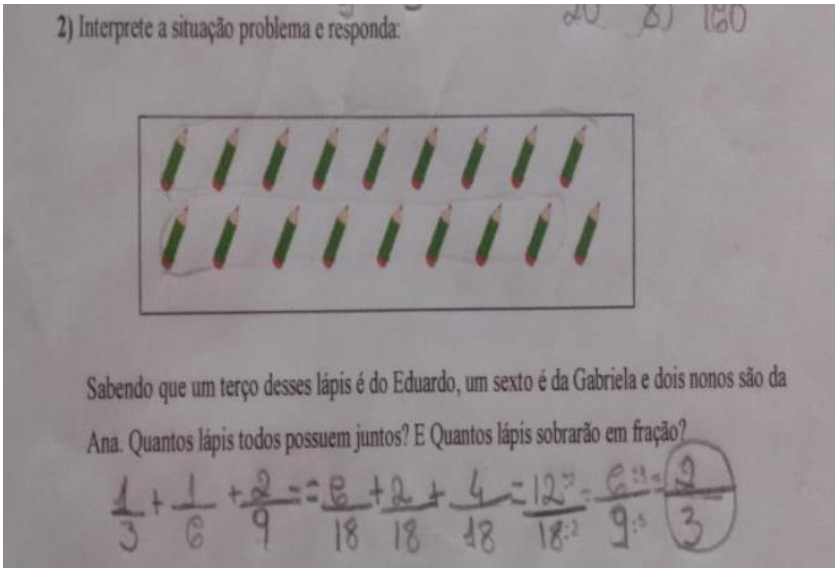
> Neste artigo **investiga-se as dificuldades dos alunos do 7º ano do Ensino Fundamental na aprendizagem de fração**. São muitas as dificuldades do aluno no aprendizado do conteúdo de fração, e isto ocorre devido a diferentes fatores como traumas, pensamentos de que a Matemática é algo complexo, “bicho de sete cabeças”, impossível de se entender até as questões metodológicas de ensino do próprio professor. As dificuldades na aprendizagem referem-se ao desenvolvimento cognitivo, construção e noções básicas da matemática básica, princípios numéricos, entraves na resolução e compreensão do problema, falta de conhecimento dos conceitos principais, prática metodológica não facilitadora à aprendizagem do conteúdo, aversão a disciplina de matemática etc. Por se tratar de uma pesquisa de campo, os dados foram coletados por meio da aplicação de questionário e exercício precedido de uma análise qualitativa. Constatamos que as principais dificuldades dos alunos em relação a fração estão nos conteúdos que são pré-requisitos como as quatro operações básicas, conceitos fracionários como divisão parte-todo, simplificação, cálculo do mínimo múltiplo comum (m.m.c.), aversão à aprendizagem na disciplina de Matemática, leitura, interpretação e organização dos dados das situações problemas. Dessa maneira, se faz necessário que haja uma maior atenção quanto ao acompanhamento da compreensão e aprendizagem dos alunos no conteúdo de fração, visando sempre uma forma de contribuir significativamente à superação das dificuldades encontradas e um ensino calcado numa metodologia facilitadora à compreensão significativa.

As autoras utilizaram a teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud para fundamentar a pesquisa. Elas utilizam a definição de Moreira (2002) a respeito do campo conceitual, que é “[...] a relação de um conjunto de situações que exige, muitas vezes, a compreensão de conceitos diversos” (Santos e Fonseca, 2019, p. 54).

Os participantes dessa pesquisa foram 20 estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal do estado de Alagoas. Para coletar os dados, as autoras apresentaram um exercício com três problemas de fração e uma questão sobre as operações fundamentais com frações e utilizaram a análise qualitativa para compreender os erros cometidos pelos alunos.

A primeira questão abordou as operações fundamentais com fração, logo não comentaremos sobre ela. Nos atentaremos à segunda questão, que abordou a representação fracionária de uma quantidade discreta, e segundo as autoras, nenhum aluno a respondeu completamente. Elas indicaram que dentre as dificuldades identificadas, os alunos demonstraram desconhecimento da noção de parte-todo e na representação da fração a partir de uma ilustração. A seguir traremos as imagens presentes no documento da pesquisa.

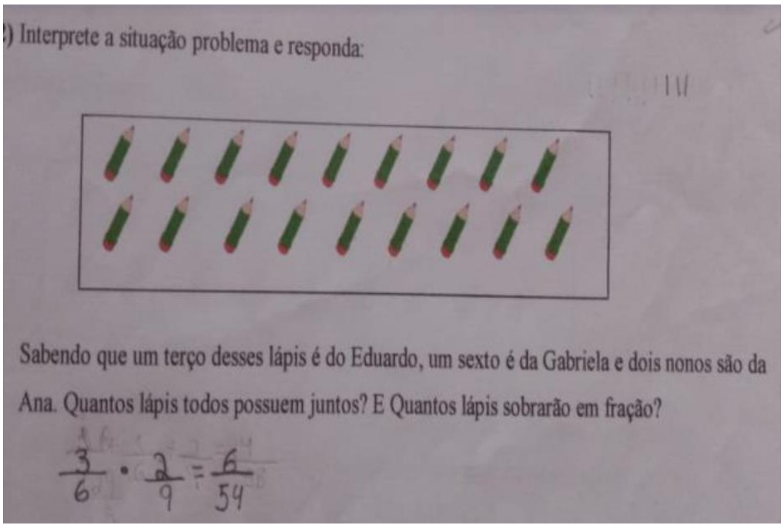
Figura 28 - Questão 2 respondida pelo aluno A5.



Fonte: Santos e Fonseca (2019).

Vejamos que esse aluno representou corretamente as frações escritas, contudo não soube relacioná-las com a quantidade discreta na questão. Isso indica dificuldade do aluno em particionar um todo e apresentar sua representação fracionária correta, relacionada à fração como parte-todo.

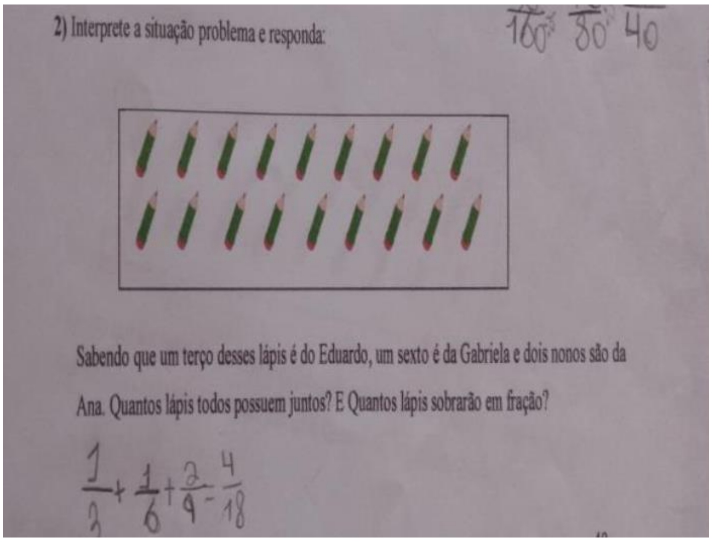
Figura 29 - Questão 2 resolvida pelo estudante A7.



Fonte: Santos e Fonseca (2019).

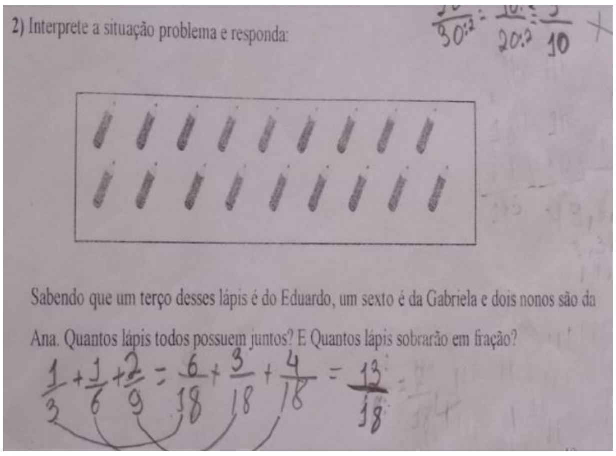
Esse aluno não apresentou duas das três frações descritas no enunciado da questão, mas representou a fração “dois nonos” corretamente. De forma análoga ao aluno anterior, esse também não relacionou a quantidade discreta na resolução da questão.

Figura 30 - Questão 2 resolvida pelo aluno A2.



Fonte: Santos e Fonseca (2019).

Figura 31 - Questão 2 resolvida pelo aluno A19.



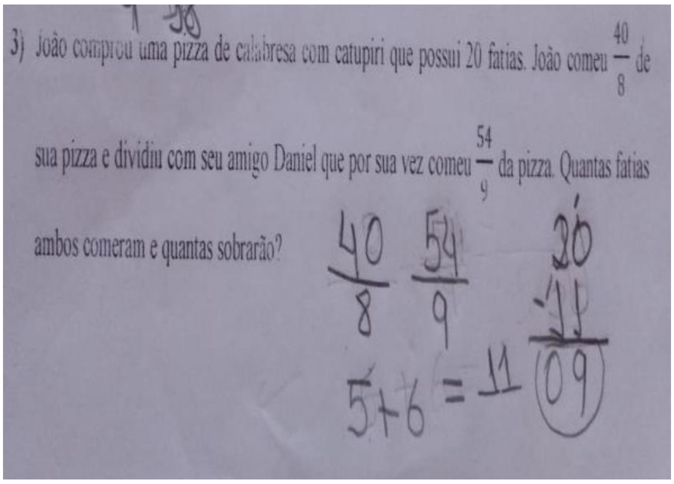
Fonte: Santos e Fonseca (2019).

Esses alunos souberam corretamente representar as frações escritas no enunciado da questão, contudo também não relacionaram a quantidade discreta à representação fracionária. Dessa situação surge a seguinte discussão: saber representar “um terço”, “um sexto” e “dois nonos” na forma $\frac{a}{b}$ é dominar alguma interpretação de fração? Se sim, qual?

Pensamos que sim, esses alunos apresentam dominar as diferentes representações da fração, nesse caso, escrita e forma racional. Logo, compreendemos que esse conhecimento esteja relacionado à fração como número.

A terceira questão possui semelhanças à questão 2, contudo não há ilustração. As autoras apontam que a taxa de acertos foi a maior nessa questão, e elas sugerem que a justificativa desses acertos seria a contextualização do exercício em relação ao aluno, uma vez que apresenta a situação de divisão de uma pizza. As imagens a seguir são de resoluções consideradas corretas pelas autoras.

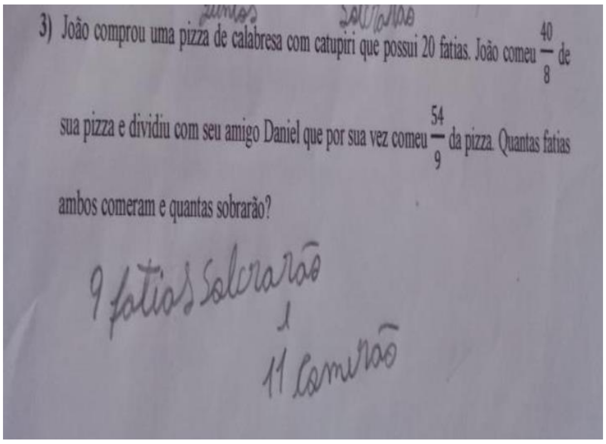
Figura 32 - Questão 3 resolvida pelo aluno A11.



Fonte: Santos e Fonseca (2019, p. 63).

Veja que o aluno não organiza os dados da questão de forma clara, contudo apresenta cálculos relacionados à resolução correta e sabe relacionar as representações fracionárias à quantidade discreta da questão.

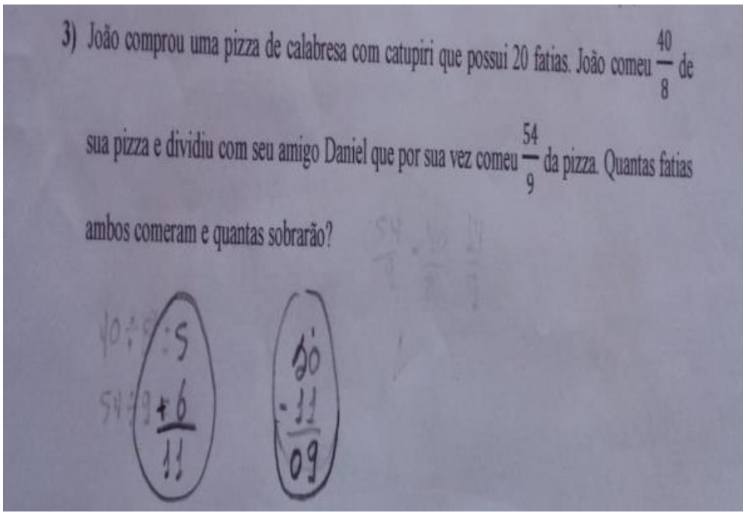
Figura 33 - Questão 3 resolvida pelo aluno A10.



Fonte: Santos e Fonseca (2019, p. 63)

Esse aluno apenas apresentou a resposta final.

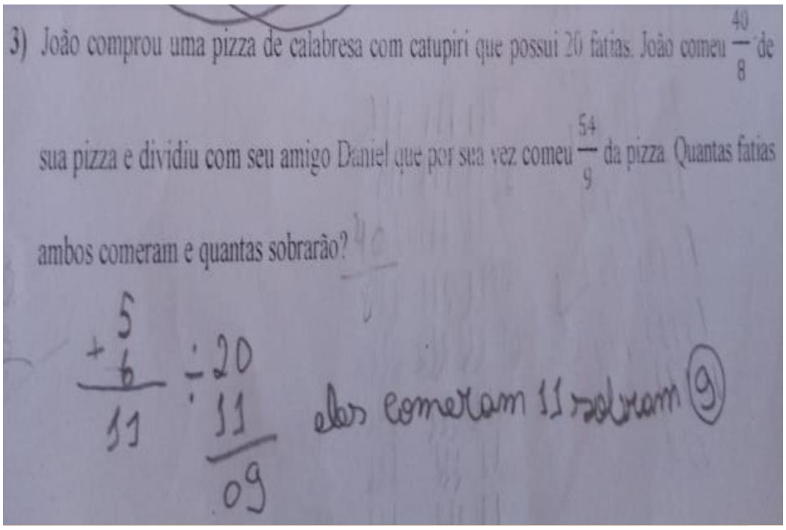
Figura 34 - Questão 3 resolvida pelo aluno A9.



Fonte: Santos e Fonseca (2019, p. 64).

Veja que o aluno apagou os cálculos referentes às representações fracionárias presentes no enunciado, mas as realiza corretamente e considera a quantidade discreta envolvida.

Figura 35 - Questão 3 resolvida pelo aluno A19.



Fonte: Santos e Fonseca (2019, p. 64)

Esse aluno apresentou os dados organizados de forma confusa, contudo soube relacionar corretamente a quantidade discreta às representações fracionárias. Todos esses estudantes mostraram dominar a fração como quociente.

Foi observado que essa questão apresenta um erro conceitual, pois considerou $\frac{40}{8} = 5$ como se fosse cinco pedaços e $\frac{54}{9} = 6$ como seis pedaços de pizza, contudo essa escrita indica que João tomou 40 partes de um inteiro dividido em oito partes e Daniel tomou 54 partes de um inteiro dividido em nove partes.

No geral, dentre as dificuldades identificadas pelas autoras, os alunos apresentam dificuldade com o conceito de fração e a noção de parte-todo.

5.5 Tenório (2019)

A monografia desenvolvida para conclusão em Licenciatura Plena em Ciências: Matemática e Física intitulada "A Mobilização De Saberes Matemáticos De Alunos Do 6º Ano Do Ensino Fundamental Por Meio De Sequências Didáticas Envolvendo O Conteúdo Frações" tinha como resumo

> Os números naturais e racionais nascem da necessidade de contar e medir. A concepção de frações surge através do povo egípcio na necessidade de divisão de terras próximas ao Nilo. Documentos normativos para a educação no Brasil falam sobre o ensino das frações, das diretrizes e metas e garantias de aprendizado de um indivíduo formado na educação básica. Como o ensino de frações se encontra presente nas primeiras turmas que compõem os Anos Finais do Ensino Fundamental, objetivamos **compreender a mobilização de conhecimentos de frações por estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental por meio de sequências didáticas.** Este trabalho trata de uma pesquisa empírica que utilizou a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau, onde o aluno é agente ativo no processo de aprendizagem enquanto o professor é apenas o mediador no decorrer deste processo ao criar condições favoráveis para isto. A teoria se encontra dividida em fases adidática (o aluno como agente ativo) e didática (o professor como agente ativo). Para realização desta pesquisa, utilizamos da Engenharia Didática proposta por Michèle Artigue, teoria empregada em pesquisas com uma fase experimental relacionadas ao sistema didático formado pelas interações entre aluno, professor e saber. Esta teoria é composta por quatro fases: análises preliminares, concepção e análise a priori, experimentação, análise a posteriori e validação. A pesquisa ocorreu com alunos da rede pública de ensino da cidade de Humaitá-AM que se dispuseram a participar com autorização de seus responsáveis, nos proporcionando, durante a experimentação, protocolos para análise. Com tais protocolos pudemos os analisar e verificar alguns conhecimentos dos participantes formados no ambiente externo à escola, bem como os estudados no âmbito da sala de aula. Com isso, chegamos à conclusão de que o ensino de frações no Ensino Fundamental encontra-se precário, afinal, os participantes da pesquisa, ao serem submetidos às sequências didáticas na fase de experimentação, não demonstraram conhecer algo sobre frações, nem relacionando-as de maneira proposital a um determinado contexto enquanto parte de algo inteiro ou natural de maneira explícita (Tenório, 2019, p. 8, grifo nosso).

A definição do conceito de fração utilizada pelo autor deriva da ideia de medir, que consiste em comparar duas grandezas da mesma natureza. Na prática, o autor aponta que o surgimento das frações se deu pela necessidade de medir terras próximas ao rio Nilo.

O autor utiliza a Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau para fundamentar a pesquisa e justifica seu uso pela automotivação e envolvimento do estudante em buscar o aprendizado de algum conceito matemático. Segundo essa teoria, o aluno ajuda a construir seu conhecimento matemático a partir dos cenários favoráveis, chamados de situações didáticas, a isso criados pelo professor.

Para desenvolver essa teoria, Brousseau partiu de seus estudos sobre o construtivismo de Piaget, que dizia que o conhecimento é inato e sua construção não ocorre no meio físico e social, mas sim na interação entre o sujeito e ambiente. Por outro lado, a TSD refere-se às maneiras que o conteúdo é apresentado ao estudante, almejando a eficácia da aprendizagem da Matemática, uma vez que essa teoria reforça tanto a autonomia discente na construção do conhecimento matemático quanto a prática docente de criar ambientes favoráveis à aprendizagem.

Essas formas de apresentação do conteúdo, segundo o autor, são chamadas de situações didáticas por Brousseau, como quando o professor propõe um problema que envolva o estudante ativamente com o ambiente a fim de instigar o aprendizado de um conteúdo. Nesse sentido, é necessário conhecer o ambiente em que o estudante está inserido. Segundo o autor, essas situações didáticas ocorrem segundo um contrato didático, que são ações essenciais, diretas ou indiretas, realizadas pelo professor, pelo estudante e considerando o conteúdo abordado.

Há duas distinções de situações para Brousseau, as situações adidáticas e as didáticas. Respectivamente, as situações adidáticas são as propostas que o estudante se apropria da investigação e busca compreendê-la individualmente a fim de significar essas informações para se tornarem um conhecimento. A TSD apresenta três tipos de situações adidáticas, a saber: ação, formulação e validação.

Na situação adidática de ação, o estudante realiza experimentos para responder à questão. Na formulação, o estudante começa a fundamentar sua resposta a partir de esquemas – o autor não define esse termo nesse documento. Na situação de validação, o estudante é capaz de escolher quais conhecimentos para chegar ao resultado e os aplica para isso.

As situações didáticas ocorrem após as adidáticas, quando o professor volta a ter controle dessa situação e concretiza a construção do conhecimento para com o aluno, uma vez que conduz a institucionalização do saber ao validar as novas formulações feitas pelos estudantes durante as situações adidáticas.

Para fundamentar a metodologia, elaboração, aplicação e análise da pesquisa, Tenório (2019) utiliza a Engenharia Didática (ED) de Michèle Artigue (1996). A ED foi desenvolvida para analisar as situações didáticas e é dividida em quatro fases: *análises preliminares, concepção e análise a priori, experimentação, análise a posteriori e validação.*

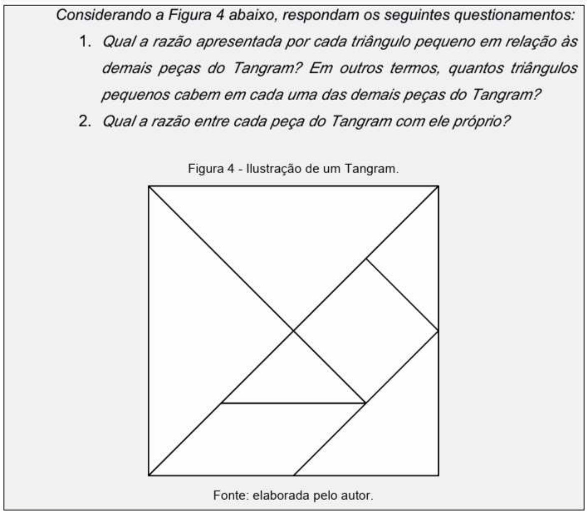
Na fase das *análises preliminares*, segundo o autor, ocorrem a mobilização dos conhecimentos epistemológico, didático e cognitivo relacionados ao objeto de análise. Na fase de *concepção e análise a priori,* são hipotetizadas as escolhas mais influentes no aprendizado do aluno e busca-se validar essas hipóteses, mas apenas na quarta fase.

Segundo Tenório (2019), na fase de *experimentação* ocorre a realização da ED com os alunos e na última fase, *análise a posteriori e validação*, ocorre o estudo dos dados coletados na terceira fase relacionando-os às hipóteses delineadas na segunda fase.

Os participantes da pesquisa foram quatro estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual do estado do Amazonas. As atividades foram desenvolvidas pelo autor concordando com a BNCC (2017), as teorias apresentadas e seu referencial bibliográfico feito na primeira fase da pesquisa.

A primeira atividade envolvia o uso de Tangran (**Figura 36**) e foi realizada por três estudantes, que puderam escolher apresentar-se como YCARO, A TURMA DA MONICA e KAIO. Para essa resolução, o autor delineou doze estratégias diferentes, as quais utilizou como base de análise das produções dos estudantes, desenvolvidas durante a fase das *análises a priori*.

Figura 36 - Questão referente à primeira situação da pesquisa.



Considerando a Figura 4 abaixo, respondam os seguintes questionamentos:

1. *Qual a razão apresentada por cada triângulo pequeno em relação às demais peças do Tangram? Em outros termos, quantos triângulos pequenos cabem em cada uma das demais peças do Tangram?*
2. *Qual a razão entre cada peça do Tangram com ele próprio?*

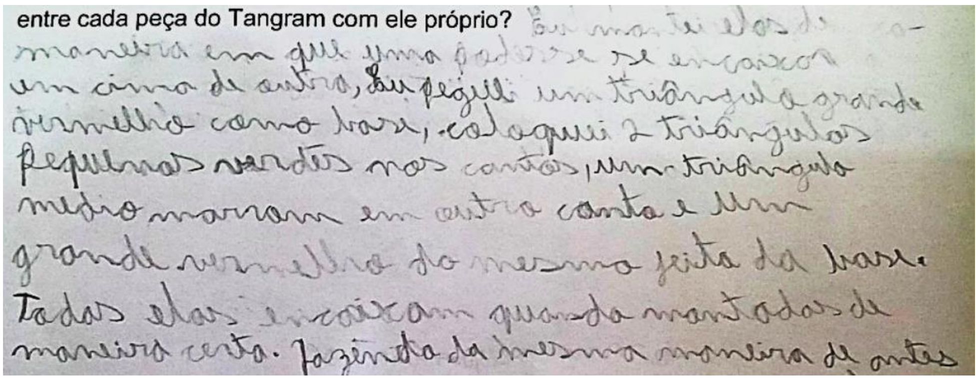
Figura 4 - Ilustração de um Tangram.

Fonte: elaborada pelo autor.

Fonte: Tenório (2019).

O autor afirmou que os estudantes apresentaram dificuldades para iniciar a resolução do problema por não estarem aptos a interpretar o que lhes foi proposto. A estratégia de YCARO para responder o item "a" foi apresentada pelo autor.

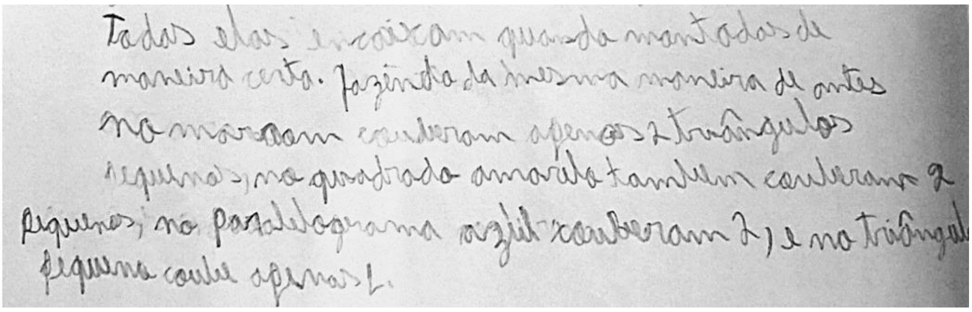
Figura 37: Resolução do item "a" da primeira questão realizada pelo estudante YCARO.



entre cada peça do Tangram com ele próprio? Eu montei elas de a-
maneira em que uma pudesse se encaixar
em cima da outra, Eu peguei um triângulo grande
vermelho como base, coloquei 2 triângulos
pequenos verdes nos cantos, um triângulo
médio marrom em outro canto e um
grande vermelho do mesmo jeito da base.
Todas elas encaixam quando montadas de
maneira certa. Fazendo da mesma maneira de antes

Fonte: Tenório (2019, p. 37).

Figura 38: Continuação da resolução de YCARO.



Fonte: Tenório (2019, p. 38).

Para ilustrar a estratégia utilizada pelo estudante, o autor apresenta a figura a seguir.

Figura 39: Estratégia do aluno YCARO ilustrada pelo autor.

Fonte: Tenório (2019, p. 38).

O autor comenta que as figuras utilizadas para sobrepor o triângulo foram corretas, contudo afirma que YCARO as posicionou de forma incorreta de acordo com as regras do Tangram, isto é, uma peça sobrepor a outra. Em relação às peças restantes, o autor afirma que o estudante mobilizou parte de algumas das estratégias sugeridas para solucionar o problema e não expressou a razão questionada no primeiro item.

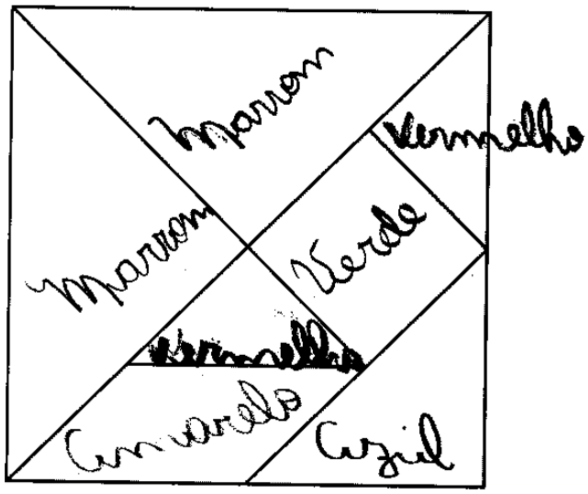
Tenório (2019) conclui que YCARO mobilizou o conceito de fração de forma intuitiva, pois segundo ele, “[...] já que o simples fato de usar as figuras sobrepondo umas às outras pode ser considerado uma noção inicial de fração”. (TENÓRIO, 2019, p. 38).

De fato, corroboramos que, ao inicialmente posicionar os triângulos menores no primeiro quadro da Figura 39, o estudante possivelmente estruturou sua estratégia na noção de que uma figura pode ser dividida em partes menores. Contudo, essa estratégia não é mantida pelo estudante quando realiza o segundo passo de posicionar o triângulo maior sobre as peças posicionadas por ele anteriormente.

Disso, em nosso entendimento não é possível afirmar que ele compreende a ação realizada, uma vez que a estrutura matemática que fundamenta a ideia de sobreposição de figuras planas é a noção de área, assunto que é posterior ao 7º ano.

A resolução da estudante A TURMA DA MONICA inicia de forma análoga à de YCARO, uma vez que também considera cores a cada peça do Tangram (Figura 41).

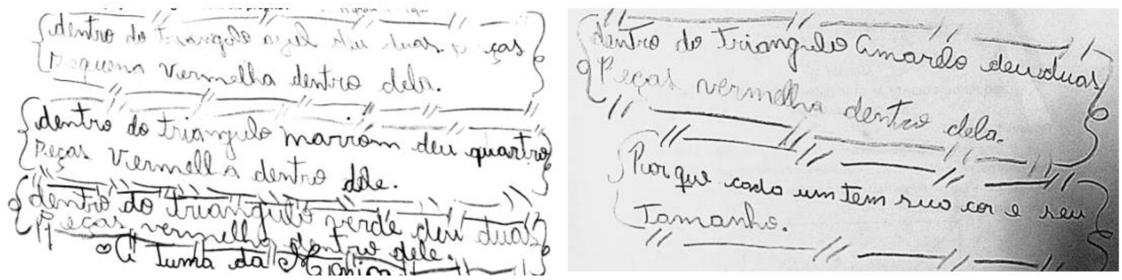
Figura 40 - Ilustração feita pela estudante A TURMA DA MONICA.



Fonte: Tenório (2019, p. 39).

A resolução do problema apresentada por A TURMA DA MONICA está a seguir.

Figura 41 - Resolução do item a apresentado por A TURMA DA MONICA.

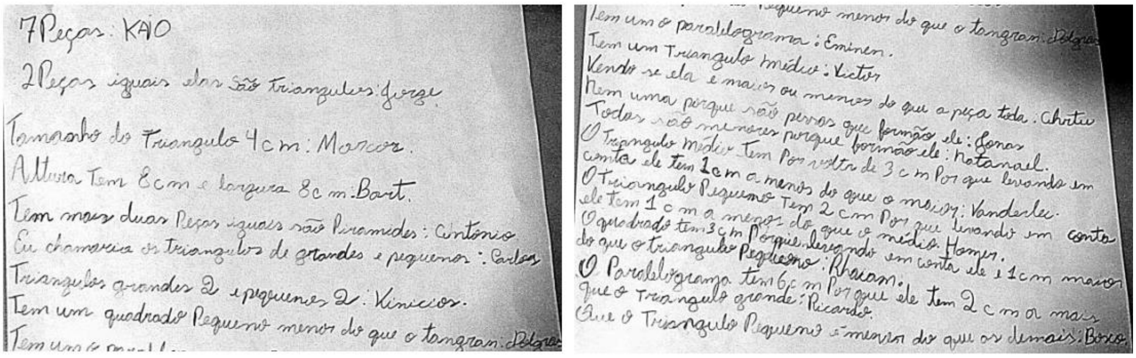


Fonte: Tenório (2019, p. 39).

O autor comenta que essa estudante também não apresentou a razão entre cada triângulo pequeno e que ao comparar as resoluções de YCARO e A TURMA DA MONICA, ele afirma que os estudantes resolveram o problema da mesma maneira, apenas diferenciam na ordem de sobreposição das peças do Tangram.

A terceira resolução feita por KAIO (Figura 42), segundo o autor, diferiu de seus colegas nesse item, pois associou, a partir da referência do tamanho de seu lápis, um valor inteiro a cada peça do Tangram.

Figura 42 - Resolução do item a pelo estudante KAIO.


7 Peças: KAIO
2 Peças iguais elas são triangulos: Jorge.
Tamanho do Triangulo 4 cm: Marcos.
Altura Tem 8 cm e largura 8 cm: Bart.
Tem mais duas Peças iguais são Piramides: Antônio
Eu chamaria os triangulos de grandes e pequenos: Carlos
Triangulos grandes 2 e pequenos 2: Vinicios.
Tem um quadrado Pequeno menor do que o tangram: Dolgras
Tem um o paralelograma: Eminen.
Tem um Triangulo médio: Victor
Vendo se ela é maior ou menor do que a peça toda.
Nem uma porque são peças que formão ele: Jonas
Todas são menores porque formão ele: Natanael.
O Triangulo médio Tem Por volta de 3 cm Por que levando em conta ele tem 1 cm a menos do que o maior: Vanderlei.
O Triangulo Pequeno Tem 2 cm Por que levando em conta ele tem 1 cm a menos do que o médio. Homer.
O quadrado tem 3 cm Porque levando em conta ele é 1 cm maior do que o triangulo Pequeno: Rhaiam.
O Paralelogramo tem 6 cm Porque ele tem 2 cm a mais que o Triangulo grande: Ricardo.
Que o Triangulo Pequeno é menor do que os demais: Bosco.

Fonte: Tenório (2019, p. 40).

Além disso, podemos ver na resolução que o estudante associa nomes próprios a cada grupo de peças e as identifica a partir de seus conhecimentos prévios em geometria. Com as peças do Tangram, o autor afirma que KAIO tentou resolver o problema comparando-as por seu tamanho e formato, elencando as características das peças, de forma que a cada ação mental que YCARO realiza a fim de comparar as peças do Tangram, ele as discrimina e nomeia cada uma com um nome próprio masculino. Ainda, essa sequência de ações realizada pelo estudante não satisfaz o problema proposto.

Como comentado anteriormente, o autor definiu algumas estratégias para comparar as peças do Tangram e as utiliza pontualmente quando afirma que KAIO apresentou traços de quatro das estratégias delineadas para análise das produções dos estudantes. É interessante nos questionarmos o porquê dessas estratégias de base para análise, uma vez que tomar um determinado caminho não indica habilidade com frações, como visto nas resoluções do item “a” desse primeiro encontro.

Da resolução de YCARO, podemos observar que há indícios da noção de partes de um inteiro quando ele afirma que todos as peças são menores que o Tangram inteiro pois essas peças o formam. Contudo, do mais não encontramos ideias que sugiram o conceito de fração, mais especificamente a noção de parte-todo.

Sobre o item “b” que questionava a razão entre cada peça do Tangram com ele próprio, o autor comenta que cada estudante respondeu de forma única.

Primeiramente, KAIO afirmou que nenhuma peça é maior que o Tangram, pois todas juntas o formam. YCARO, segundo Tenório (2019), respondeu que todas as peças se encaixam de uma certa maneira e A TURMA DA MONICA disse que "porque cada um tem a sua cor e o seu tamanho" (p. 41).

O autor comenta que as respostas de KAIO e YCARO têm base na ideia de fração. Por outro lado, o autor sugere que A TURMA DA MONICA compreendeu o termo "razão" como motivo e não fração. Ainda, Tenório afirma que nenhuma resposta satisfez às estratégias estipuladas, entretanto, pontua diretamente o fato de KAIO ter associado medidas às peças do Tangram usando seu lápis como referencial de tamanho.

O autor aponta que observou, durante a resolução da atividade, a execução do contrato didático e a fase adidática de ação, quando os participantes buscaram resolvê-la independentemente. A fase de formulação se caracteriza pela exposição das estratégias estipuladas para resolver o problema por cada estudante, e aos justificarem suas escolhas, ocorre a fase de validação da situação adidática. Após isso, Tenório reforça a importância de institucionalizar e finalizar o conteúdo abordado na atividade.

A segunda sessão refere-se a uma atividade sobre adição e subtração de frações, o que não é interessante para nossa análise. A terceira sessão abordou o conceito de fração em diversos contextos, e assim, apresentaremos nossa análise desse encontro.

Os participantes desse encontro foram dois estudantes, A TURMA DA MONICA e YCARO. A atividade abordada foi a seguinte.

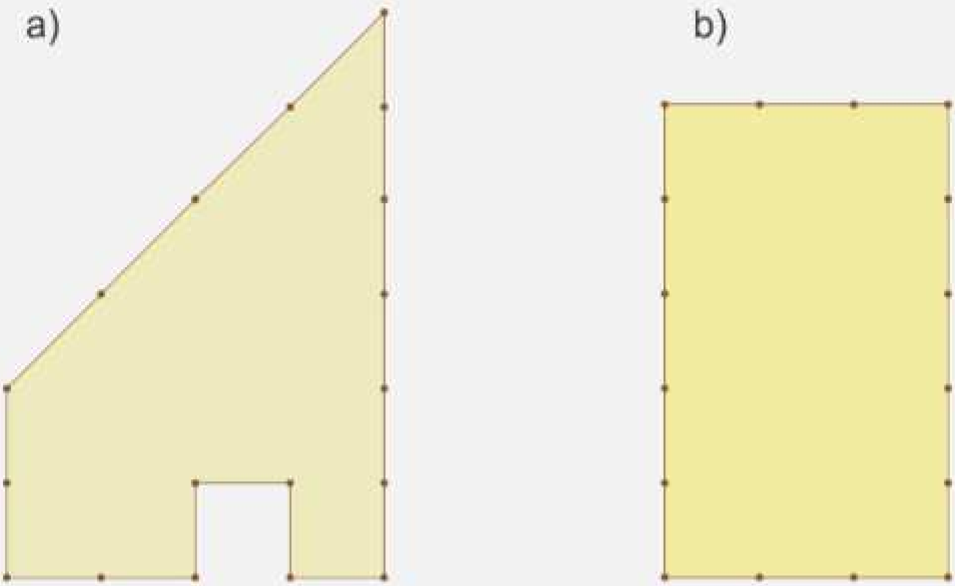
Figura 43 - Atividade abordada na terceira sessão.

Considerando a Figura 17 abaixo, responder o problema:

1. Numa terra distante de tudo entre florestas e pastagens, há uma pequena vila chamada Pedra Preta. Nela, estão sendo distribuídos os últimos lotes de terra disponíveis para as pessoas. A distribuição se dará por ordem de chegada no terreno. Aquele que chegar primeiro no lote poderá escolher tanto o local quanto o tamanho do terreno, obedecendo a condição deste não ser maior do que o terreno da juíza Beatriz.
   Alberto foi a primeira pessoa a chegar neste lote sendo assim, escolheu o seu terreno. Porém ele foi preso, pois olhando para o terreno, crê-se que ela descumpriu a condição estipulada.

A partir disso, alguns jovens foram convocados a intervir na situação para que nos digam qual dos terrenos é maior: o do morador Alberto ou o da juíza Beatriz. Considere que o terreno a) seja do morador Alberto, e o b) seja o terreno da juíza Beatriz. Nessas condições, Alberto é culpado ou inocente?

Figura 17 - Ilustração dos terrenos de Alberto (a) e de Beatriz (b).

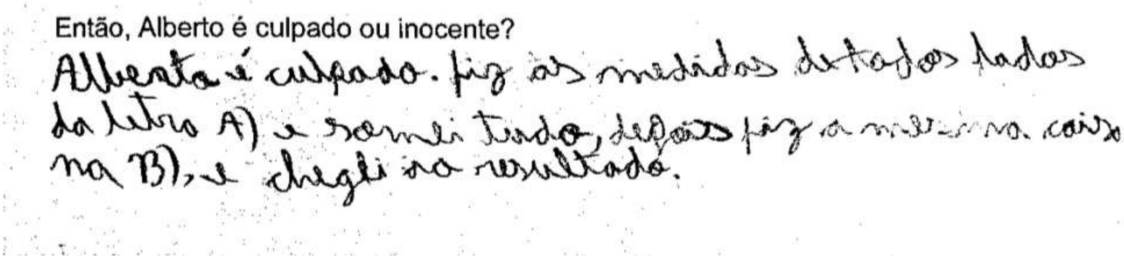


Fonte: do autor.

Fonte: Tenório (2019, p. 49-50).

Novamente, o autor define cinco possíveis estratégias utilizadas pelos estudantes. Primeiramente, ele apresenta a resolução de YCARO, que utilizou os perímetros dos terrenos a partir das marcações na figura da atividade para resolver o problema.

Figura 44 - Resolução de YCARO.


Então, Alberto é culpado ou inocente?
Alberto é culpado. fiz as medidas de todos lados da letra A) e somei tudo, depois fiz a mesma coisa na B), e chegui no resultado.

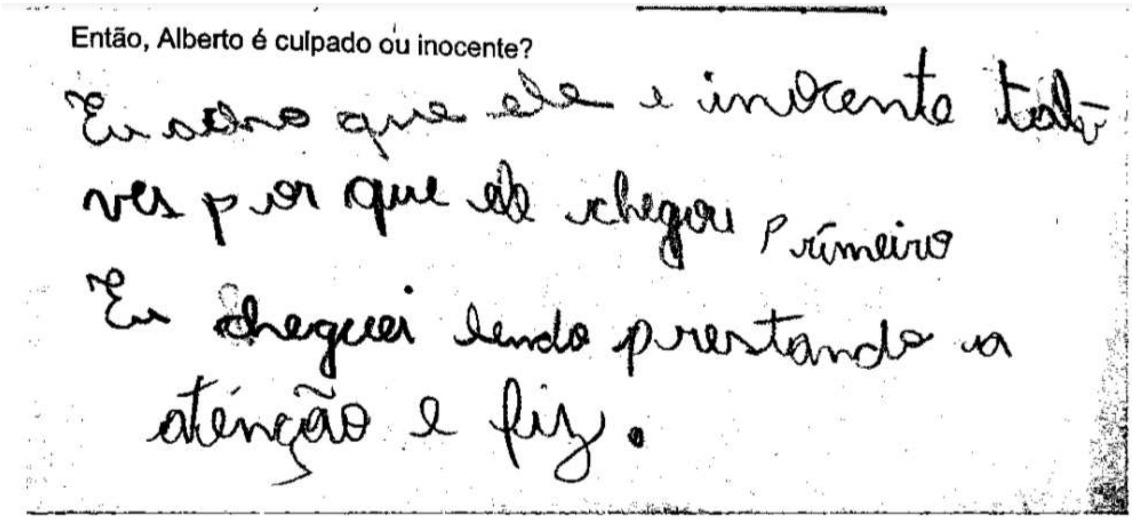
Fonte: Tenório (2019, p. 52).

O autor afirma que a referência de tamanho utilizada pelo estudante foi um caderno. Segundo ele, YCARO redesenhou as figuras que representavam os terrenos e a partir de seu lápis, como vimos na atividade do Tangram, determinou o tamanho de cada terreno. Disso, o autor afirma que o estudante concluiu que os tamanhos dos terrenos são diferentes.

A partir da resolução de YCARO, podemos apenas afirmar que ele chegou a essa conclusão pois afirmou que Alberto é culpado, contudo não apresentou justificativa referente à medida dos terrenos. Nos preocupa essa ausência, uma vez que Tenório não afirmou se estava certa ou errada essa resolução, apenas a comentou. Sobre o conceito de fração, nada é possível afirmar.

A outra resolução (Figura 45), apresentada por A TURMA DA MONICA, não concluiu sobre o culpado da questão proposta, e justifica utilizando sua opinião, e não conceitos matemáticos.

Figura 45 - Resolução da terceira atividade feita por A TURMA DA MONICA.


Então, Alberto é culpado ou inocente?

Eu acho que ele e inocente tal ves por que ele chegou Primeiro Eu cheguei lendo prestando a atenção e fiz.

Fonte: Tenório (2019, p. 52).

O autor aponta que ambos os estudantes utilizaram de estratégias distintas e “peculiares” para resolver a questão, mas que ainda buscavam um resultado. O autor afirma que observou, durante a sessão, o desenvolvimento da fase adidática da TSD (ação, formulação e validação), pois os estudantes buscaram resolver o problema e solucioná-lo, e por fazerem isso de maneiras distintas, o autor conclui que a devolução do problema e o contrato didático ocorreu. Após isso, Tenório afirma que a situação didática se concentrou em questionamentos sobre o problema proposto, e esses questionamentos conduziram os estudantes às respostas dadas.

O quarto e último problema aborda frações equivalentes e adição de frações, com e sem denominador igual. Tais conteúdos não contribuem para o resultado da nossa pesquisa, logo não analisaremos esse problema.

Para concluir, o autor afirma que as estratégias sugeridas para resolver cada problema nas *análises a priori* não foram identificadas nas produções dos estudantes, visto que eles buscaram apenas resolver os problemas a partir de seu ponto de vista, por vezes desassociado de qualquer ideia matemática.

Nas *análises a posteriori*, o autor observou que durante a resolução das atividades, nenhum estudante considerou a ideia de fração ou ao menos relacionou com isso e citou que um deles disse que estudou frações, mas não se recorda. O autor afirma que esses resultados reforçam a atual situação da educação básica pública, “[...] onde são poucos alunos da rede pública que sabem operar frações” (Tenório, 2019, p. 61).

Segundo o autor, as atividades abordadas na pesquisa eram problemas que evidenciaram os conhecimentos dos estudantes sobre frações, como é sugerido pela TSD, e não atividades de resposta única. Disso, o autor afirma que o desconhecimento dos estudantes com o tema dos problemas pode estar associado às dificuldades enfrentadas pela rede pública estadual de ensino, uma vez que sugere que o conteúdo possa não ser sido estudado pelo estudante ou ensinado por algum professor de anos interiores.

Assim, Tenório (2019) pontua que não há afirmações a fazer do conhecimento dos estudantes sobre fração, pois não relacionaram esse objeto matemático nas resoluções na fase *adidática*, o que, segundo Brousseau (1996, 2008), indica a ausência da contextualização do conceito de maneira natural, pois já está aprendido. De acordo com Tenório (2019), a conclusão obtida dos resultados refere-se à habilidade dos estudantes em resolver problemas com fração a partir de sequências didáticas.

Portanto, o autor conclui que não é possível afirmar a eficácia da TSD em relação à mobilização do conceito de fração, pois os estudantes podem estar acostumados com cálculos e respostas diretas, e não atividades que abordam o conceito de forma implícita, como as utilizadas na pesquisa. Enfim, o autor afirma que há a necessidade de reforçar a ideia de fração como parte de um todo e associar um valor numérico.

5.6 AMORIM, ETCHEVERRIA E OLIVEIRA (2019)

O artigo de Amorim, Etcheverria e Oliveira (2019) publicado no Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática intitulado “Fração com o Significado de Operador Multiplicativo: Aprendizagem e Ensino” foi escolhido antes de percebermos que as autoras se fundamentam no trabalho de Monteiro e Groenwald (2014), além de Magina e Campos (2008) e Moutinho (2005), como podemos ver no resumo a seguir

> Este texto tem como propósito **discutir o desempenho de estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental em um problema envolvendo fração com o significado de operador multiplicativo.** Para esta discussão nos apoiamos nas ideias de Moutinho (2005), Magina e Campos (2008), Monteiro e Groenwald (2014). Os dados foram coletados por meio da aplicação de um questionário a 565 estudantes do 5º ao 9º ano do Ensino Fundamental de quatro escolas públicas municipais do interior do estado de Sergipe e a seus professores de Matemática. Os resultados apontam que o índice de desempenho dos estudantes na questão do instrumento que envolveu o

> significado de fração como operador multiplicativo foi baixo, pois não alcançou o patamar de 40% e que não há um crescimento contínuo de ano para ano, apesar dos professores afirmarem trabalhar com questões semelhantes a apresentada neste estudo. Ainda, os estudantes mostraram dificuldade em identificar a fração quando o inteiro ou todo está representado num contexto discreto; e veem as frações como um conjunto de dois números inteiros separados por um traço, o que, por consequência, os impulsiona a operar com eles, somando ou multiplicando. (Amorim, Etcheverria e Oliveira, 2019, p. 1, grifo nosso)

A fundamentação teórica para analisar os resultados utilizada pelas autoras é Nunes et al. (2003), que se basearam nas ideias de Kieren (1980) sobre os diferentes significados que envolvem fração, a saber parte-todo, quociente, razão, operador e medida. Contudo, Nunes et al. (2003) reformularam os significados de Kieren (1980), os quais foram considerados para a análise das produções dos estudantes desta pesquisa, e apresentaram uma nova lista de significados de fração: parte-todo, quociente, número, operador multiplicativo e medida. Vejamos que a nova categorização exclui o significado de “razão” atribuída por Kieren (1980) e acrescenta o significado “número”.

Sobre o significado parte-todo, as autoras consideram a definição de Moutinho (2005), relacionada à “[...] ação de particionar um todo (contínuo ou discreto) em n partes iguais” (apud Amorim, Etcheverria, e Oliveira, p. 200). O significado quociente está associado às frações que excedem o limite da noção de divisão do todo por partes iguais, e refere-se à “[...] dividir 2 unidades em 3 partes iguais” enquanto o significado de parte-todo está associado à ideia de “[...] dividir uma unidade em 3 partes e tomar 2” (Amorim, Etcheverria e Oliveira, 2019, p. 200).

A fração como número está associada às representações da fração, que podem ser ordinárias ou decimais, e não estão associadas a qualquer contexto específico. Um exemplo seria a situação de apresentar a forma decimal da fração $\frac{1}{2}$. O significado de medida associa a fração a situações em que é necessário medir algo utilizando uma parte como referência de tamanho.

Por fim, as autoras trazem o significado de operador multiplicativo de fração de forma separada, pois é o foco da análise dos dados da pesquisa. Esse significado aborda a ideia de transformação, que modifica uma situação dada. Exemplos como: “que número deve multiplicar 12 para obter 8” (Amorim, Etcheverria e Oliveira, 2019) são pontuais para demonstração desse significado.

As autoras afirmam que no contexto discreto, esse significado é favorável para abordar inteiros formados por mais de uma unidade, e no contexto contínuo, favorece a ideia de transformar um segmento de reta em outro utilizando um operador multiplicativo. Ainda, elas citam Morales (2011) que aponta o direto estímulo desse significado no desenvolvimento da habilidade da multiplicação de frações.

Para resolver situações que envolvem esse significado, as autoras trazem o problema a seguir. Veja na imagem que a formatação do documento elimina todas as frações, logo em nossa leitura, tomamos o cuidado de situar os lugares que continham frações. Disso, podemos afirmar que a ausência desse objeto para nossa compreensão da resolução dessa questão não influenciou, assim assumiremos que a fração utilizada pelas autoras foi $\frac{a}{b}$.

Figura 46 - Situação abordada pelas autoras para exemplificar a resolução.

exemplo: Paulo tinha 30 figurinhas e deu a seu amigo dessas figurinhas. Com quantas figurinhas Paulo ficou?

Fonte: Amorim, Etcheverria e Oliveira (2019, p. 201).

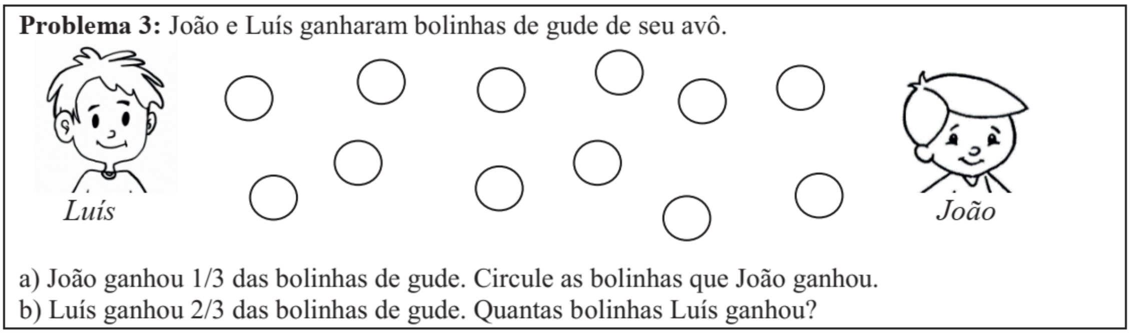
Segundo as autoras, há um estado inicial, a quantidade total de figurinhas que Paulo tinha inicialmente, uma ação a ser realizada, dar a seu amigo $\frac{a}{b}$ de suas 30 figurinhas que resulta no estado final, a quantidade de figurinhas que lhe restou. O restante depende da quantidade de figurinhas que Paulo deu a seu amigo, logo é necessário realizar esse cálculo.

A análise da pesquisa é do tipo qualitativa e para a coleta dos dados, foi aplicado um instrumento aos estudantes do 5º ao 9º ano de quatro escolas públicas municipais de Sergipe, pois segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais, o conteúdo de fração é inicialmente abordado no 4º ano. As autoras selecionaram as cidades de acordo com a quantidade populacional, duas cidades com cerca de 100 mil habitantes, uma cidade com cerca de 40 mil habitantes e uma cidade com cerca de 12 mil habitantes.

A aplicação aconteceu em abril e maio de 2017, em única sessão para cada escola. O instrumento de coleta de dados continha cinco situações-problema, que abordaram cada uma um significado de fração, respectivamente parte-todo, número, operador multiplicativo, quociente e medida, adaptados de Magina e Campos (2008).

Para a análise, as respostas foram categorizadas como “corretas”, “parcialmente corretas”, “incorretas” e “em branco”. A situação analisada é a seguinte.

Figura 47 - Situação-problema que aborda o significado operador multiplicativo.



Fonte: Amorim, Etcheverria e Oliveira (2019, p. 202).

De acordo com as autoras, esse problema é de nível médio de dificuldade, segundo a classificação de Nunes et al. (2002), e é resolvido da seguinte forma: identificamos o estado inicial, $\frac{3}{3}\ de\ 12$, a ação de transformar o estado inicial, $\frac{2}{3}\ de\ 12$, que resulta no estado final, oito bolinhas restantes.

As autoras iniciam a apresentação dos resultados obtidos com o item a comparando o desempenho dos participantes por escola. Não foram consideradas respostas “parcialmente corretas”, pois para as autoras, não havia margem para respostas parcialmente corretas para esse problema. O desempenho dos estudantes apresentado por cada escola pode ser visto na figura a seguir.

Figura 48 - Desempenho geral por escola no item a.

Escola	Correto		Incorreto		Em Branco	
	F	%	F	%	F	%
Escola 1	65	41,67	91	58,33	0	0,0
Escola 2	46	35,66	79	61,24	4	3,10
Escola 3	57	35,40	104	64,60	0	0,0
Escola 4	38	31,93	79	66,39	2	1,68
Geral	**206**	**36,46**	**353**	**62,48**	**6**	**1,06**

Fonte: Amorim, Etcheverria e Oliveira (2019, p. 202).

Podemos ver que cerca de 37% dos participantes souberam identificar que $\frac{1}{3}$ de 12 é 4, que nesse caso refere-se a 4 bolinhas pertencentes a João. Já em relação ao item b, o desempenho dos estudantes não chegou a 20%, como visto no quadro a seguir.

Figura 49 - Desempenho geral por escola no item b.

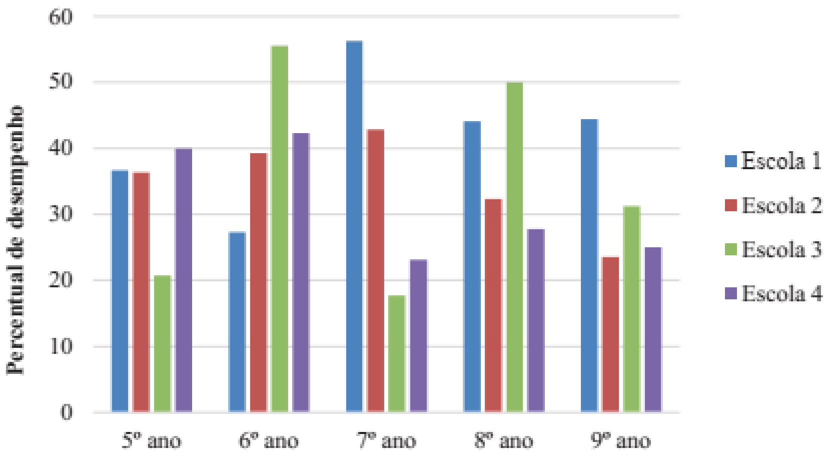
Escola	Correto		Incorreto		Em Branco	
	F	%	F	%	F	%
Escola 1	22	14,10	132	84,62	2	1,28
Escola 2	19	14,73	102	79,07	8	6,20
Escola 3	36	22,36	121	75,16	4	2,48
Escola 4	17	14,29	92	77,31	10	8,40
Geral	**94**	**16,64**	**447**	**79,11**	**24**	**4,25**

Fonte: Amorim, Etcheverria e Oliveira (2019, p. 203).

Devido a esse resultado, as autoras ainda buscaram pontuar quantos alunos teriam acertado os dois itens. Na escola 1, 21 estudantes acertaram, na escola 2 e na escola 4, essa quantidade foi a mesma, 17 estudantes e na escola 3, 35 estudantes acertaram os dois itens.

A segunda análise apresentada pelas autoras foi categorizada por ano. No item a, as autoras observaram que houve um crescimento no desempenho dos estudantes do 5º ano ao 6º ano, como foi esperado pelas autoras.

Figura 50 - Desempenho dos estudantes por ano e por escola no item a.



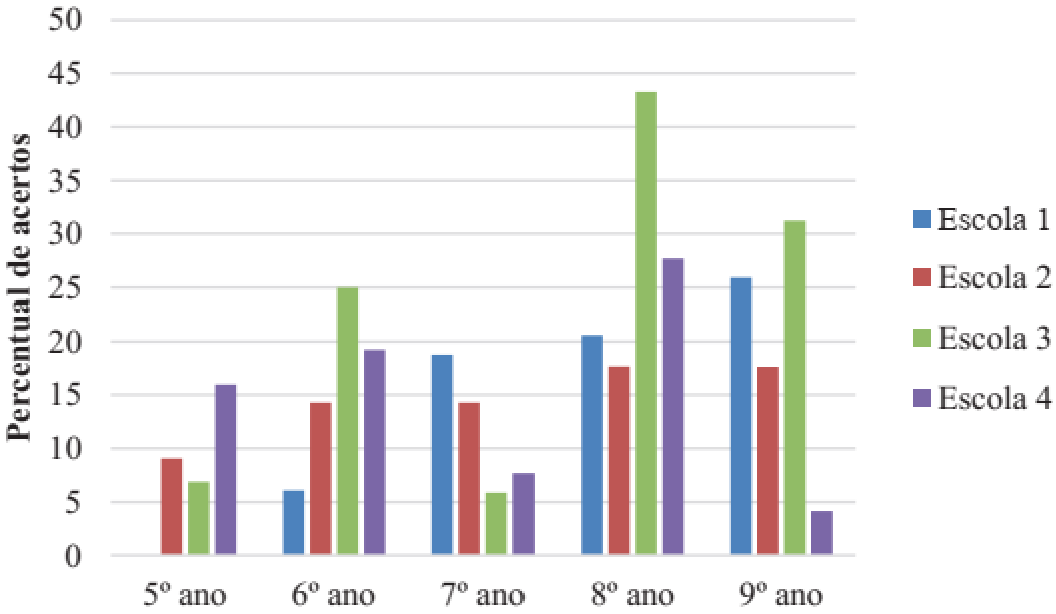
Fonte: Amorim, Etcheverria e Oliveira (2019, p. 203).

Contudo, em relação ao 6º ano para o 7º ano e do 7º ano ao 8º, houve diferenças no desempenho das escolas 1 e 2 e das escolas 3 e 4. As escolas 1 e 2 tiveram um crescimento do 6º para o 7º ano, enquanto as escolas 3 e 4 tiveram um decrescimento. Do 7º ano para o 8º ano, o desempenho dos estudantes inverteu, pois as escolas 3 e 4 tiveram um crescimento em seu desempenho e as escolas 1 e 2 tiveram um decrescimento.

Por fim, do 8º ano para o 9º ano, o desempenho dos estudantes da escola 1 se manteve e das escolas 2, 3 e 4 decresceu. No geral, não foi observado o crescimento do desempenho dos estudantes em relação ao ano escolar, o que nos preocupa, uma vez que é esperado que o estudante conheça sempre mais sobre fração ao passar dos anos.

Sobre o item b, as autoras apresentam o seguinte gráfico.

Figura 51 - Desempenho dos estudantes por ano escolar e por escola no item b.



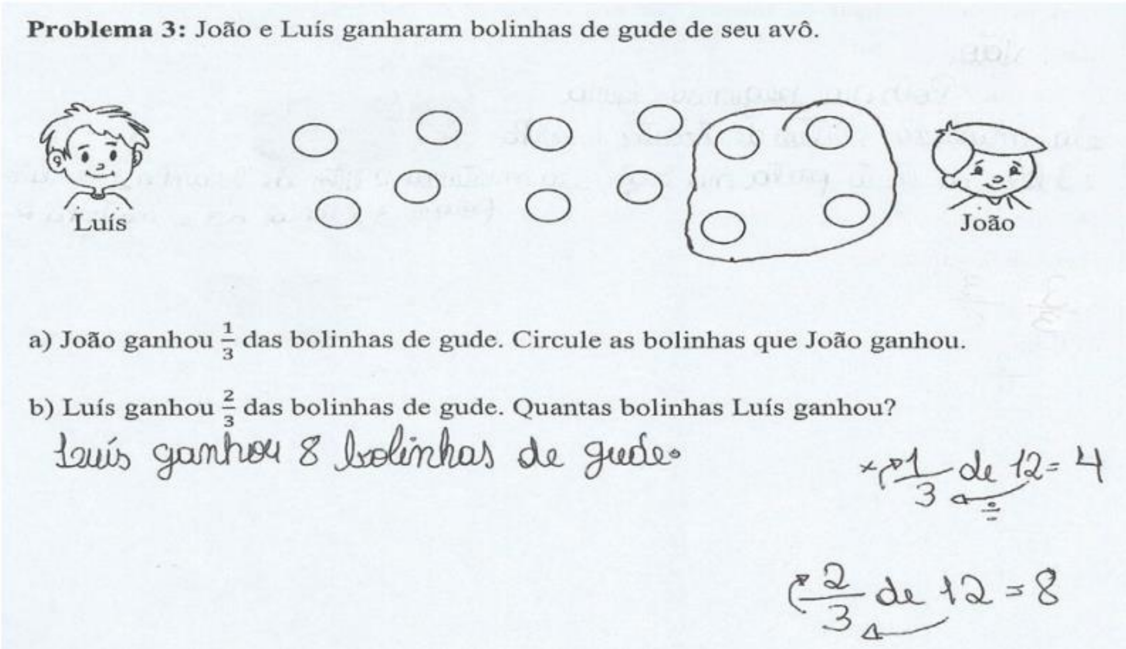
Fonte: Amorim, Etcheverria e Oliveira (2019, p. 203).

Pode ser visto que nenhuma escola chegou a 50% de desempenho, ainda, apenas as turmas de 8º ano e 9º ano da escola 3 atingiram 30% do total. As autoras ainda reforçaram que nesse item, não houve um padrão a ser observado, principalmente ao notarmos que menos de 5% dos estudantes do 9º ano da escola 4 tiveram um desempenho satisfatório.

Uma análise mais detalhada da escola 1 é feita pelas autoras, apontando que o 5º ano apresentou desempenho de 0%, pois não conheciam o conteúdo de frações, contudo é possível observar que existe um padrão de crescimento dos primeiros anos até os últimos, visto que no 9º ano, cerca de 26% dos estudantes acertaram o item b.

As análises feitas pelas autoras até o momento foram de cunho quantitativo. Agora, serão apresentadas as análises feitas das estratégias dos estudantes. As autoras apresentaram para a discussão inicialmente uma resposta correta dada por um estudante do 6º ano da escola 2.

Figura 52 - Resolução correta feita por um estudante.

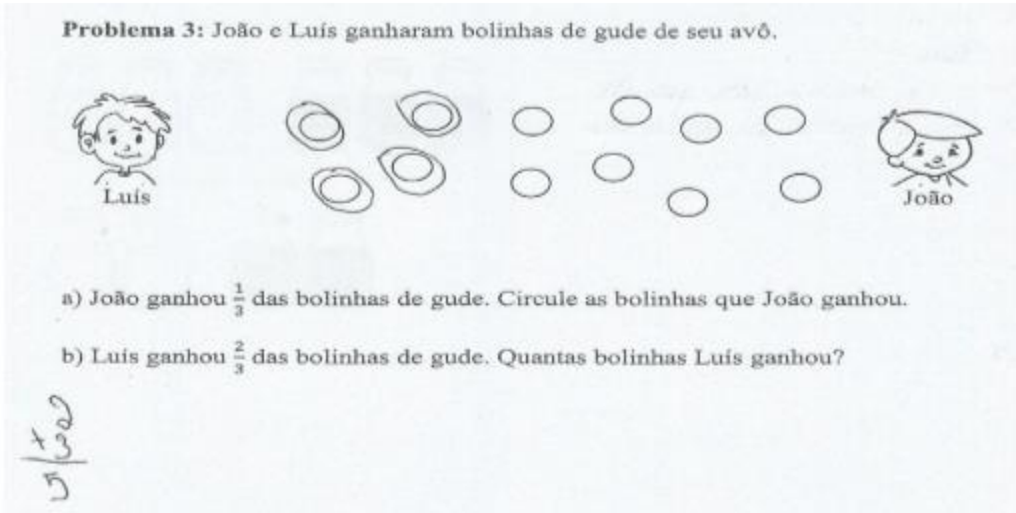


Fonte: Amorim, Etcheverria e Oliveira (2019, p. 204).

As autoras comentaram que essa estudante, uma menina de 11 anos, foi a única a apresentar uma resolução detalhando a fração como operador multiplicativo, pois realiza a multiplicação da fração com a quantidade indicada, como esperado por Campos, Magina e Nunes (2006).

Ainda, as autoras perceberam durante a análise que muitos apresentaram a resposta correta para o item a, tal como foi feito na Figura 52, porém no item b apresentaram o número “5” como resposta. As autoras foram instigadas pela ideia de que esses estudantes somaram, em cada item, o numerador com o denominador, pois no item a, 1+3 é 4 e no b, 2+3 é 5, e isso é confirmado na Figura 53.

Figura 53 - Resolução do problema feita por um estudante.

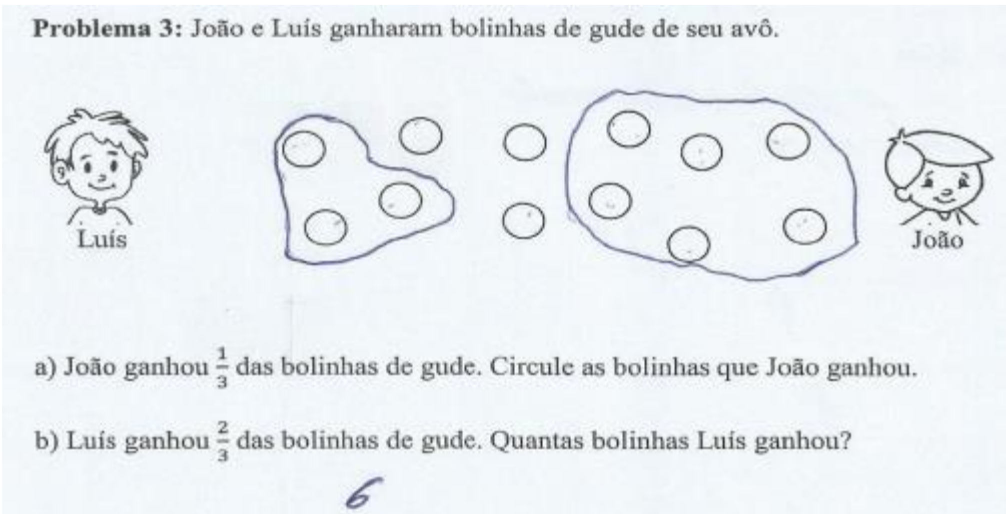


Fonte: Amorim, Etcheverria e Oliveira (2019, p. 204).

Ao fazerem essa observação, as autoras retornaram às produções buscando identificar esse padrão em outras resoluções. O resultado foi que 85 estudantes, cerca de 15% dos participantes, apresentaram essa resolução, o que refletiu na possibilidade de que os estudantes acertaram o item a por causa dessa linha de raciocínio, o que indica que eles desconhecem num grau maior o conceito de fração.

Também, as autoras observaram outro padrão de resolução. 66 estudantes apresentaram 3 e 6 como respostas, eles provavelmente multiplicaram numerador e denominador e obtiveram que 1x3 é 3 e 2x3 é 6, como visto na resolução do estudante do 9º ano da escola 3.

Figura 54 - Resolução do problema apresentada por um estudante.



Fonte: Amorim, Etcheverria e Oliveira (2019, p. 204).

Desses resultados, as autoras pontuam a dificuldade dos estudantes em reconhecer que o todo seriam as 12 bolinhas, corroborando com o que é visto em Monteiro e Groenwald (2014), os estudantes apresentam mais dificuldade com frações no contexto discreto. Também, devido às operações realizadas pelos estudantes, somar ou multiplicar os numeradores e denominadores, as autoras afirmam que as frações são vistas pelos estudantes como dois números inteiros próximos separados por um traço.

Segundo as autoras, os resultados apontam que, tanto em contextos discretos quanto em contextos contínuos, os estudantes não percebem a presença da relação parte-todo de fração, pois a resolução do problema era perceber que Luís e João detinham de todas as bolinhas, uma parte ia para Luís e o restante para João, formando o todo de 12 bolinhas.

Além disso, as autoras constataram que duas escolas não haviam introduzido o conceito de fração para os alunos, visto que nenhum aluno do 5º ano havia tido contato com esse conteúdo. Portanto, as autoras concluem que o ensino de frações deve ocorrer ao longo de todo o Ensino Fundamental, com diversas propostas a fim de contribuir para o estudante identificar a fração em qualquer situação.

5.7 CAVALLIN (2020)

Para finalizar, traremos os resultados obtidos na monografia em formato de artigo de Alan Cavallin intitulado “O conceito número fracionário da ideia parte-todo: entendimentos apresentados por alunos do 6º ano do Ensino Fundamental” que apresenta a pesquisa realizada em 2020 para o requisito de conclusão do curso de licenciatura em Matemática da Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul com o seguinte resumo

> O artigo se constitui a partir de uma pesquisa qualitativa realizada com o 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública. No desenvolvimento da pesquisa foram apresentadas aos alunos 10 questões, cuja análise possibilitou **a identificação e compreensão dos entendimentos produzidos pelos alunos acerca do Número Racional na representação fracionária, significado parte-todo**. Para análise foram organizadas duas unidades: partição de um todo em partes iguais, qual é o inteiro?; e dupla contagem: um obstáculo que precisa ser superado, considerado como aporte teórico, principalmente por Nunes; Bryant (1997), entre outros. Como resultado foi possível indicar que os estudantes muitas vezes não consideram o inteiro corretamente, ou seja, não o identificam, tanto

> para inteiro contínuo, quanto para inteiro discreto. A dupla contagem para alguns alunos pode ser identificada, pois não compreendem o número fracionário como único e com representatividade, visto apenas como dois números naturais. Percebemos o domínio de um determinado conteúdo pelos alunos, quando são contempladas situações em contextos diferentes. Nas questões proposta os alunos reconhecem o conceito apenas em determinadas situações, onde muitas vezes, aquelas onde pela escola é dada com prioridade, por exemplos representações na forma geométricas (Cavallin, 2020, p. 1, grifo nosso).

Os participantes da pesquisa foram os 24 alunos de uma turma de 6º ano de uma escola pública estadual do Ensino Fundamental de um município do Rio Grande do Sul. O instrumento de coleta de dados foi um questionário com 10 questões que foram produzidas pelo autor abordando a representação fracionária do número racional na interpretação parte-todo.

O autor assume que o número racional está ligado a uma rede de relações, construída através dos diferentes contextos em que esse número assume personalidades distintas, concordando com Confrey e Harel (1994, apud Cavallin, 2020), por isso o conhecimento deve focar nas personalidades do racional, não nas situações referentes a esses diferentes contextos.

Cavallin (2020) cita Caraça (2002) que afirma que o número racional surgiu pela necessidade de comparar grandezas, e compreende o conjunto dos racionais como o conjunto dos números inteiros acrescido do conjunto formado pelos números fracionários. A criação desse conjunto possibilitou representar a medida $\frac{m}{n}$ de um segmento a partir de um referencial, como dividir um todo em n partes iguais e tomar m partes e o quociente $\frac{m}{n}$ que representa a divisão de m por n.

Para definir o conjunto dos racionais, o autor utiliza a definição de Iezzi (2004) que considera Q o conjunto dos pares ordenados ou das frações $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e $b \neq 0$. Na fração, *a* é o numerador e *b* o denominador, e ainda, se a e b são primos entre si, ou seja, o máximo divisor comum entre eles é um, $mdc(a, b) = 1$, a fração $\frac{a}{b}$ é dita irredutível.

Cavallin (2020) considera as seis interpretações da representação fracionária do número racional, número, relação parte-todo, medida, operador multiplicativo e quociente de Nunes et al. (2003) e a interpretação razão de Brasil (1998).

O autor concentra sua análise na ideia parte-todo da representação fracionária do número racional, pois é na relação bem estabelecida entre a parte e o todo que o estudante pode construir outros conhecimentos do número racional. Ele define que "[...] o significado da relação parte-todo é a partição de um todo contínuo ou discreto, em *n* partes iguais e cada parte igual poderá ser representada como 1/n" (Cavallin, 2020, p. 5).

O instrumento de coleta de dados foi um conjunto de dez questões elaborado pelo pesquisador, que o aplicou numa turma com 24 alunos do 6º ano. As questões abordaram o conceito de número racional na representação fracionária relacionada à ideia de parte-todo.

O autor dividiu a análise do instrumento de coleta de dados em duas partes. A primeira parte, intitulada "Partição de um todo em partes iguais: Qual é o inteiro?", analisou as questões relacionadas à ideia de identificar o inteiro da fração.

A segunda parte, intitulada "Dupla contagem: um obstáculo que precisa ser superado", refere-se à dupla contagem, o procedimento de contar as partes consideradas e posicionar sobre um traço sob a quantidade total de partes iguais do inteiro (Cavallin, 2020, p. 9). O autor aponta que o método de dupla contagem dificulta a compreensão do conceito de número racional, pois não desenvolve a relação entre numerador e denominador, ou seja, não vê a fração como um número, um elemento de um conjunto numérico, pois ainda está limitado ao conjunto dos naturais.

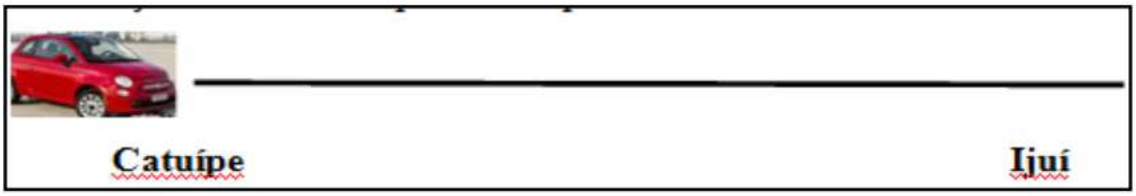
O autor utiliza a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1983a, apud Cavallin, 2020) para sustentar a proposta de apresentar diferentes situações didáticas contribuindo para o surgimento de novas ideias dos estudantes. Vergnaud define um campo conceitual como

> "[...] um conjunto de problemas e situações cujo tratamento requer conceitos de natureza distintos, procedimentos e representações de tipos diferentes, mas intimamente relacionados" (Cavallin, 2020, p. 10).

Essas situações são diversas para o mesmo conceito e que vários conceitos estão relacionados para compor uma situação, aplicadas inúmeras vezes ao longo do processo de aprendizagem. Vergnaud (1990, apud Cavallin, 2020), de acordo com o autor da pesquisa, afirmou que para constituir um conceito é necessário apresentar diversas situações abordando diversas representações simbólicas, que darão sentido ao conceito.

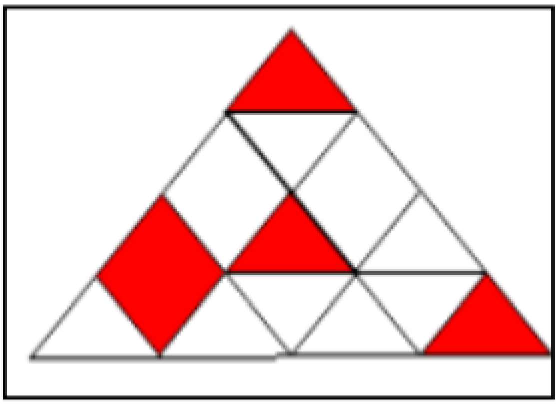
O autor afirma que o estudo de frações é iniciado pela etapa de identificação do inteiro, analisar essa quantidade como contínua ou discreta. Na pesquisa, foi abordado o inteiro contínuo através da reta numérica, gráfico de setor e figuras geométricas, como mostrado nas figuras a seguir.

Figura 55 – Situação sobre o comprimento da distância entre dois ponto que abordou o inteiro contínuo.



Fonte: Cavallin (2020).

Figura 56 – Situação sobre a relação entre parte e todo das figuras geométricas triangulo e quadrilátero que abordou o inteiro contínuo.



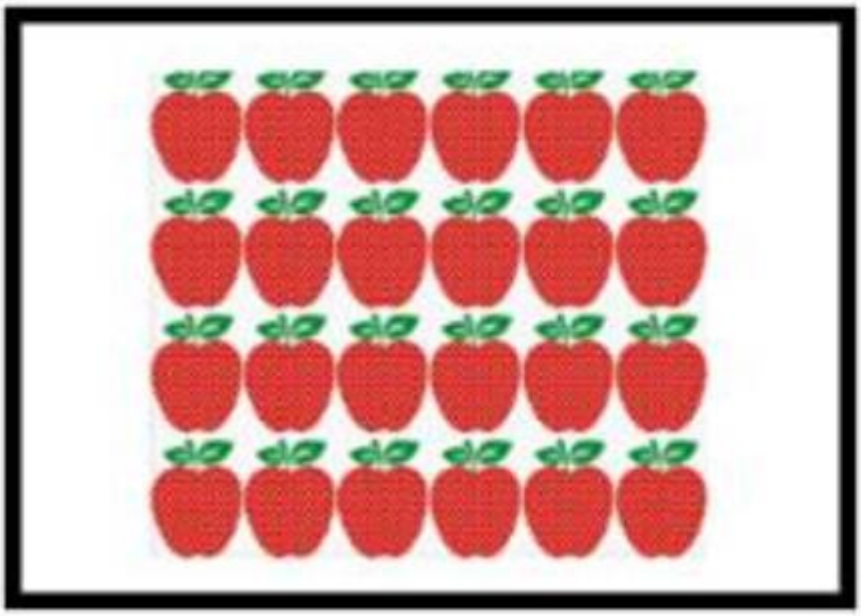
Fonte: Cavallin (2020).

Figura 57 – Situação sobre gráfico de setor que abordou o inteiro contínuo.

Fonte: Cavallin (2020, p. 11).

Para o inteiro discreto, foram trazidas as seguintes situações.

Figura 58 - Situação sobre contagem de maçãs relacionada ao inteiro discreto.



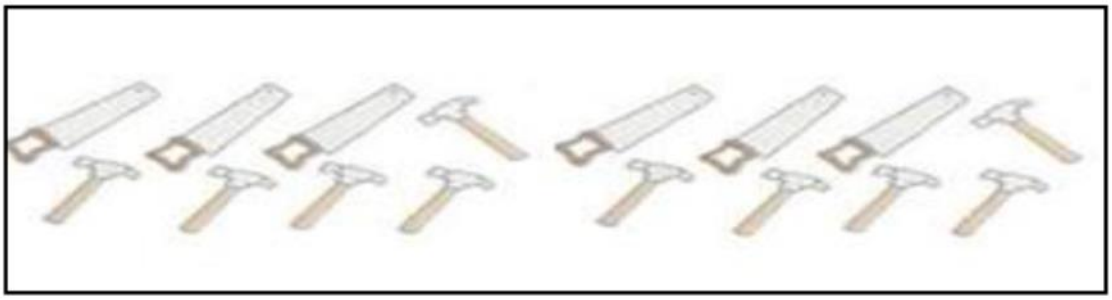
Fonte: Cavallin (2020).

Figura 59 - Situação sobre pertinência de lápis relacionada ao inteiro discreto.

No material de Maria há 10 lápis coloridos e 2 lápis pretos.

Fonte: Cavallin (2020).

Figura 60 – Situação sobre contagem das ferramentas martelo e serrote relacionada ao inteiro discreto.



Fonte: Cavallin (2020, p. 12).

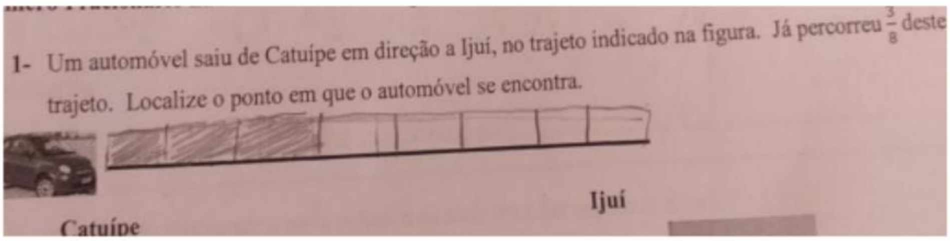
Nas questões, o autor também abordou o conceito de frações próprias e impróprias. Respectivamente, próprias são denominadas as frações cujo numerador é maior que o denominador e representam quantidades maiores que um inteiro, e impróprias as frações cujo numerador é menor que o denominador e representam um valor menor que um.

Vejamos, primeiramente, as análises referentes à primeira etapa da pesquisa, intitulada “Partição de um todo em partes iguais: qual é o inteiro?” e em seguida, as análises relacionadas à dupla contagem.

Para que seja possível compreender uma fração no subconstruto parte-todo, o autor afirma que é necessário conhecer sobre a partição de um inteiro em partes iguais. Por isso, as produções dos alunos foram analisadas buscando identificar o conhecimento deles sobre a partição de um todo, a partir das questões 1, 3, 5a e 6c.

Na questão 1, 19 dos 24 participantes apresentaram a resposta correta, dividindo o segmento de reta que seria o inteiro em oito partes e tomaria três, como mostra a Figura 61.

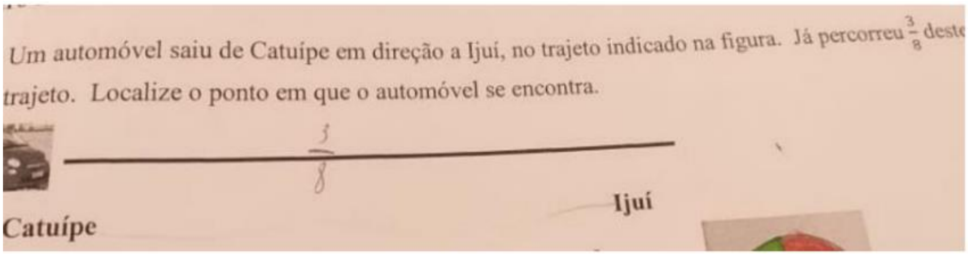
Figura 61 - Resolução da questão 1 de Cavallin (2020).



Fonte: Cavallin (2020, p. 15).

O autor sugere que essa estratégia de utilizar figuras geométricas para representar frações seja decorrente do ensino focado em manipulação de fórmulas e símbolos, exemplificado pela pesquisa de Santos (2005) que mostrou a frequente presença da representação geométrica da fração nos livros didáticos. Aqueles que não apresentaram essa resolução apenas tentaram posicionar a fração na reta sem qualquer raciocínio (Figura 62).

Figura 62 - Resolução da questão 1 de Cavallin (2020).

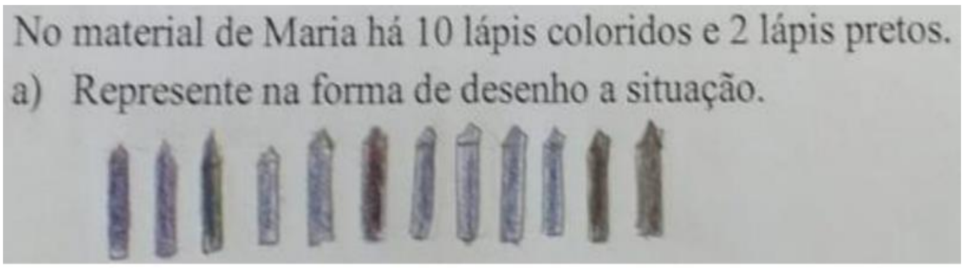


Fonte: Cavallin (2020, p. 16).

Pela resolução, é possível que o aluno posicionou a fração $\frac{3}{8}$ na região que corresponde a essa medida na reta numérica. O autor não comentou sobre isso.

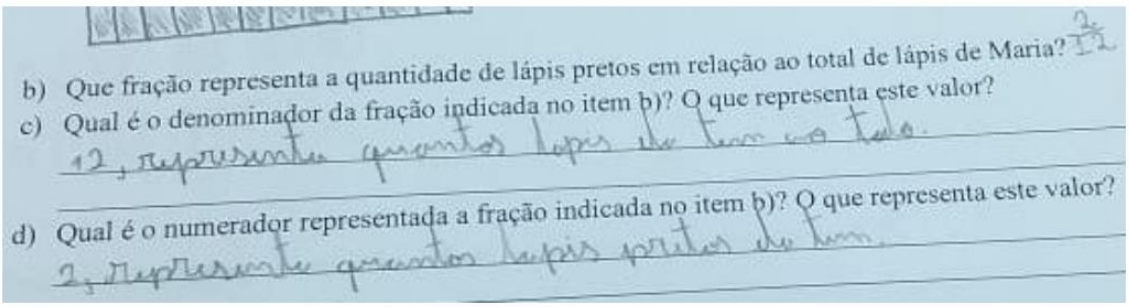
Na questão 3, o autor apontou que 14 de 24 participantes compreendem a interpretação parte-todo quando envolve uma quantidade discreta, quando o todo pode ser representado por um número inteiro, pois consideraram corretamente que o denominador da fração corresponde à quantidade total de lápis apresentada pela questão 3 e o numerador à quantidade de lápis pretos.

Figura 63 - Resolução da questão 3a de Cavallin (2020).



Fonte: Cavallin (2020).

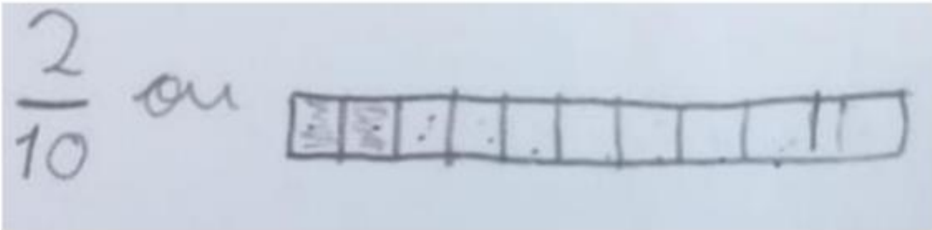
Figura 64 - Resolução das questões 3b, c e d.



Fonte: Cavallin (2020, p. 16).

Ainda, Cavallin (2020) observou que seis dos dez participantes restantes utilizaram a representação retangular da fração além da fração que respondia à questão. Como a representação retangular refere-se a quantidades contínuas, logo eles desconhecem o que são quantidades contínuas e discretas (Figura 65).

Figura 65 - Resolução da questão 3 de Cavallin (2020).

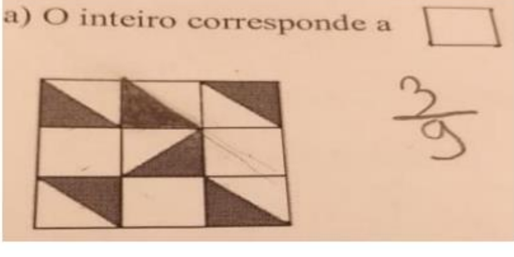


Fonte: Cavallin (2020, p. 17).

Além disso, segundo o autor, esses alunos também não dominam a ideia de inteiro, pois assumiram que o total de lápis de Maria seria a quantidade de lápis coloridos. Os quatro alunos restantes não apresentaram respostas suficientes para coleta de dados.

Na questão 5a, o autor notou falta de conhecimento dos alunos em identificar o inteiro relacionado a diferentes representações de fração a não ser o retângulo cortado em n partes, visto que apenas três alunos apresentaram a resposta correta e a maioria não soube identificar o inteiro correspondente à Figura 66, referente ao item a da questão 5. O autor sugere que o ensino pode estar causando essa lacuna de conhecimento dos estudantes, pois apresentar a interpretação parte-todo como "divida um todo em n partes e tome m partes de n" suprime detalhes importantes sugeridos por Silva (2005).

Figura 66 - Resolução da questão 5a de Cavallin (2020).

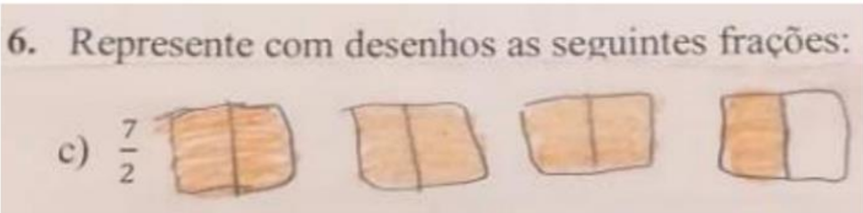


Fonte: Cavallin (2020, p. 18).

Segundo o autor, foi possível identificar quatro tipos de resposta nesse item. Além do exemplo visto na figura, alguns alunos tomaram a parte pintada como o inteiro que vale 6, outros somaram todas as partes da figura resultando num inteiro que vale 15 e por fim, outros alunos consideraram o inteiro como a união de duas partes pintadas logo resultando em 3.

Na questão 6c, 16 dos 24 alunos apresentaram conhecimento para representar frações impróprias - quando o numerador é maior que o denominador, pois souberam representar geometricamente a fração $\frac{7}{2}$ (Figura 67).

Figura 67 - Resolução da questão 6c de Cavallin (2020).



Fonte: Cavallin (2020, p. 20).

Dois dos oito alunos restantes se equivocaram e inverteram o denominador com numerador, transformando incorretamente a fração em própria e os outros 6 não apresentaram alguma resposta que satisfazia a questão. O autor afirmou que isso é decorrente da ausência de frações próprias no ensino, pois para dominar a noção de parte-todo de fração, o aluno também deve conhecer as situações que exploram a representação fracionária de uma parte maior que o todo.

No geral, o autor comenta que ora os resultados eram satisfatórios ora indicavam dificuldades dos alunos em representações diferentes das comuns, o que indica conhecimento dos alunos apenas nas representações que já foram apresentadas a eles, sem de fato mobilizarem o conceito de fração para resolver a atividade proposta. O autor aponta que esses alunos provavelmente compreenderam o significado da fração apenas com algumas situações, semelhantes às em que eles apresentaram respostas satisfatórias e por isso, em situações inéditas, eles não são capazes de retomar o conceito de fração.

O autor conclui dessas análises que o ensino de frações deve ser abordado a partir de diferentes situações, pois são muitas as abordagens e como identificado, os alunos apropriam-se apenas da representação ensinada a eles. O autor finaliza afirmando que é fundamental que o estudante tenha tido experiência com diversas situações com fração, saiba identificar o inteiro e reconheça a relação entre numerador e denominador para dominar o conceito de fração.

O autor traz Llinares et al. (1997) para defender a ideia de que o conceito de fração só pode ser dominado após um longo processo de aprendizagem do estudante, perpassando por contextos escolares e externos, e que ainda, a partir da noção de parte-todo, o aluno pode desenvolver sua ideia de fração em todos os contextos distintos em que fração está presente. Nesses contextos, o autor afirma que identificar o inteiro e as relações entre o numerador e o denominador são ações fundamentais para compreender a interpretação parte-todo de fração.

A segunda parte, intitulada “Dupla contagem: um obstáculo que precisa ser superado”, referente à dupla contagem, inicia-se aqui. O autor afirma que essa seção está relacionada à interpretação número de fração, quando a esse objeto é atribuída a ideia de valor na reta numérica ou elemento de cálculo.

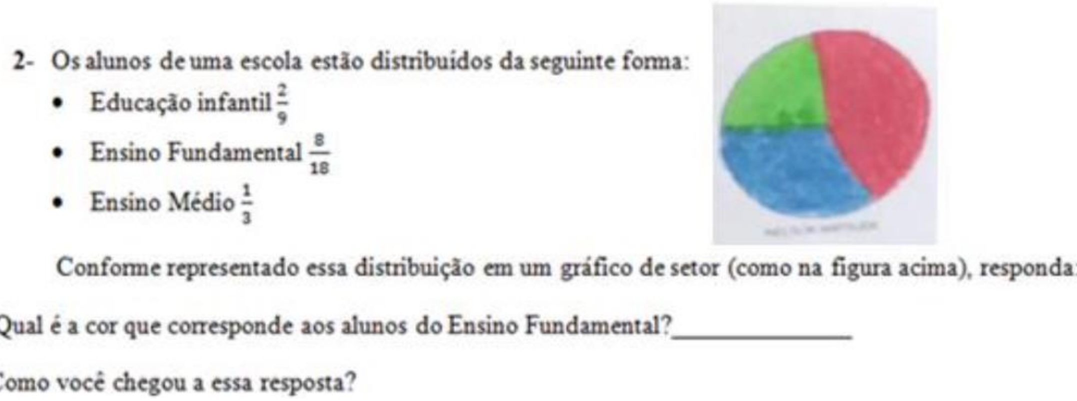
A dupla contagem, segundo o autor, infere na ideia de que o aluno não concebeu a fração como um único objeto, mas sim como dois números naturais divididos por um traço, causando obstáculos na compreensão do aluno de que a fração é um número único, representado por um elemento da forma $\frac{a}{b}$ de um conjunto numérico.

O autor aponta que essas situações dificultam o aprendizado do aluno, e por isso são definidas por Duroux (1982, apud Cavallin, 2020) como obstáculos epistemológicos. Segundo os autores, esse obstáculo epistemológico não é uma dificuldade, nem falta de conhecimento, mas sim um conhecimento do aluno que o possibilita produzir resultados num certo contexto.

O obstáculo epistemológico funciona como uma ferramenta de análise de erros, pois citando Bachelard (1938, apud Cavallin, 2020), a partir dos erros recorrentes do aluno, é possível identificar as dificuldades que ocasionam esses erros. Essa análise, segundo Cavallin (2020), faz emergir o momento que o aprendizado do estudante é interrompido por um conceito mal compreendido. O professor deve ser capaz de prever possíveis obstáculos epistemológicos sobre um conceito a ser ensinado, pois segundo o autor, a didática que considera os erros dos alunos para desenvolver seu aprendizado deve solucionar esses obstáculos.

Na questão 2a, buscava-se comparar frações a fim de encontrar seus valores correspondentes no gráfico de setor dado. Compreendemos que essa questão aborda a compreensão do conceito de fração, uma vez que se busca representar graficamente uma fração dada, logo é interessante à nossa pesquisa.

Figura 68 - Questão 2a.



2- Os alunos de uma escola estão distribuídos da seguinte forma:

- Educação infantil $\frac{2}{9}$
- Ensino Fundamental $\frac{8}{18}$
- Ensino Médio $\frac{1}{3}$

Conforme representado essa distribuição em um gráfico de setor (como na figura acima), responda:

a)Qual é a cor que corresponde aos alunos do Ensino Fundamental?______________

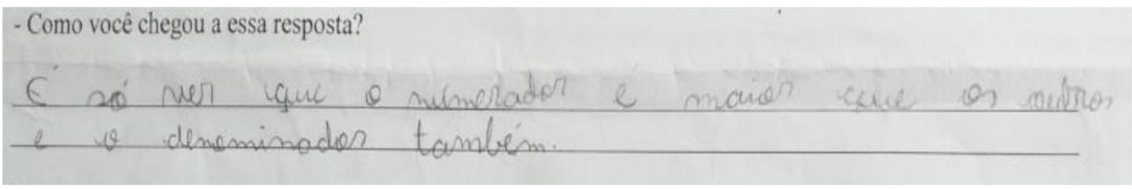
- Como você chegou a essa resposta?

Fonte: Cavallin (2020, p. 23).

Dos 24 participantes, um único aluno apresentou que a resposta seria a cor azul, justificando que "[...] o Ensino Fundamental ocupa mais que o Ensino Médio e menor que o infantil" (Cavallin, 2020, p. 24). Os 23 alunos restantes responderam que a cor que corresponde ao Ensino Fundamental é vermelha, isto é, essa porção do gráfico é representada pela fração $\frac{8}{18}$, contudo as justificativas foram distintas. 12 alunos afirmaram que a fração $\frac{8}{18}$ é a maior fração, logo representa a maior parte do gráfico, quatro alunos utilizaram o conceito de mínimo múltiplo comum e três alunos não justificaram a resposta dada.

Os quatro participantes restantes justificaram utilizando a comparação entre numerador e denominador, e segundo o autor, isso indica que esses estudantes compreendem que o numerador da fração é um número natural e o denominador outro número natural, isto é, a fração não é compreendida como um único número.

Figura 69 - Justificativa apresentada para a resposta da questão 2a.



- Como você chegou a essa resposta?

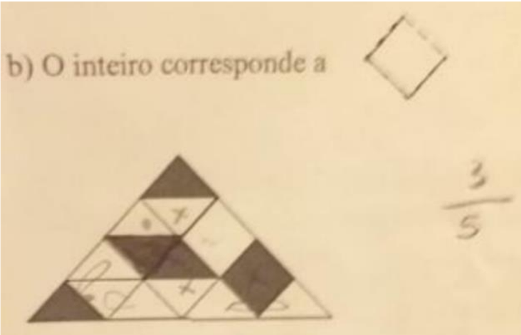
É só ver que o numerador é maior que os outros e o denominador também.

Fonte: Cavallin, (2020, p. 24).

O aluno justificou que, por comparação, a fração 8/18 é a maior pois 8 é maior que os outros numeradores e 18 é maior que os outros denominadores, o que infere a falta de domínio do conceito de fração como um número racional. O autor afirma que esses resultados são influenciados pelo método de dupla contagem, contribuindo para a omissão da relação entre numerador e denominador.

Na questão 5b, relacionada à identificação do inteiro representado pela figura, as respostas foram variadas. Segundo o autor, apenas dois dos 24 participantes apresentaram a resposta correta, dois não apresentaram resposta, nove participantes apresentaram o número relacionado ao inteiro, mas não em sua representação fracionária e seis apresentaram representações fracionárias que não satisfaziam à questão. Ainda, um aluno apresentou a fração equivalente à fração correspondente à figura, isto é, considerou que o inteiro era um triângulo pequeno correspondente à metade de um losango, que era o inteiro correto e os quatro restantes consideraram que o inteiro relacionado à figura correspondia apenas às partes pintadas e não ao todo (Figura 70), o que sugere uma aplicação incorreta do método da dupla contagem.

Figura 70 - Resolução da questão 5b de Cavallin (2020).



Fonte: Cavallin, 2020, p. 25).

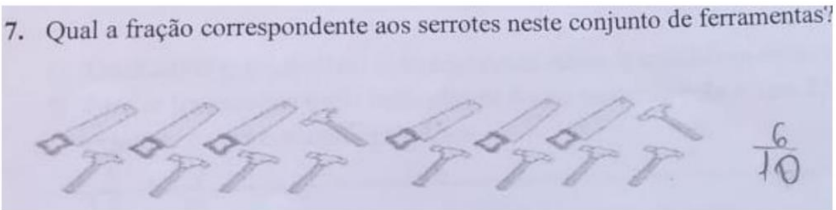
O autor afirma que, segundo Nunes e Bryant (1997, apud Cavallin, 2020), o equívoco tomado pelos alunos indica dificuldades na compreensão de um número racional na forma fracionária, uma vez que representaram a figura a partir de uma fração cujo numerador seria a quantidade de partes pintadas e as partes não pintadas o denominador, caracterizando um obstáculo epistemológico.

Segundo Cavallin (2020), a fração é frequentemente introduzida pelo professor a partir da noção de parte-todo. Se essa noção for apresentada apenas como “[...] um todo dividido em partes iguais, onde cada parte for representada como

$\frac{1}{n}$" (p. 26), o aluno tende a utilizar a dupla contagem, pois não compreendeu o processo relacionado à representação fracionária de um número racional, ocasionando erros conceituais posteriores sobre esse conceito.

Por fim, na questão 7, foi visto que 15 dos 24 alunos dominam a interpretação parte-todo relacionada a um valor discreto. Seis alunos não compreendem o todo, pois o consideram como o número de martelos e não o total de ferramentas, em particular, dois alunos assumiram que o numerador era quantidade de martelos e o denominador a de serrotes. Os três alunos restantes não apresentaram resposta satisfatória à questão.

Figura 71 - Resolução da questão 7 de Cavallin (2020).



Fonte: Cavallin (2020, p. 27).

Segundo o autor, esse aluno apresentou o método da dupla contagem e não considerou que o todo é o conjunto de todas as ferramentas, realizando um processo de dupla contagem diferente, onde o equívoco já ocorre na identificação do todo a ser comparado com uma parte.

No geral, o autor afirma que a representação de fração mais utilizada pelos alunos foi a de figura geométrica, indicando a influência do ensino no aprendizado dos alunos, pois é frequente a utilização de figuras geométricas para exemplificar frações. Dessa forma, o autor afirma que o aluno está fadado a não dominar o conceito de número racional pois foi limitado a essa representação e por desconhecer outras, só apresenta um desempenho satisfatório em atividades com representações geométricas.

Cavallin (2020) também aponta que os alunos não conhecem como identificar o inteiro relacionado à situação. Erros como conceber a parte sombreada como o numerador e a parte lisa como denominador sempre são exemplos de obstáculos epistemológicos que impedem o aluno de identificar o inteiro corretamente. Ainda, o autor afirma que foram identificadas dificuldades em relação à representação do todo envolvendo quantidades discretas. O autor também identificou que frações próprias são melhores desenvolvidas pelos alunos do que frações impróprias (ou mistas), cuja dificuldade é representá-las.

O significado parte-todo, analisado aqui, está presente no ensino básico, contudo os alunos ainda não apresentam um desempenho satisfatório com esse conteúdo, pois não sabem identificar um inteiro e não reconhecem a relação entre numerador e denominador, e isso influencia na compreensão de racional.

6 CONCLUSÃO

Faremos a seguir uma síntese dos resultados obtidos, a fim de categorizar as dificuldades dos participantes com o conceito de fração e as interpretações de fração, a relembrar medida, número, operador, parte-todo, quociente e razão. Para organizar os dados, apresentamos a seguinte tabela.

Quadro 4 - Dificuldades dos participantes com as interpretações de fração.

Dificuldade	Monteiro e Groenwald	Serafim	Silva	Santos e Fonseca	Tenório	Amorim	Cavallin
Medida		x					
Número	x	x				x	
Operador		x					
Parte-todo	x	x		x	x	x	
Quociente	x	x					
Razão					x		

Fonte: As autoras.

Vejamos que dos sete trabalhos, cinco apresentam que os estudantes não compreendem a fração como parte-todo. Segundo Kieren (1976) identificar situações parte-todo, conhecer a simbologia e a linguagem matemática e representar corretamente com uma fração uma situação parte-todo são ações que o aluno deve desempenhar, logo esse resultado nos preocupa, uma vez que é essencial compreender a fração como parte-todo para dominar o conceito de fração.

Além disso, identificamos indícios sobre o conhecimento dos estudantes a respeito das interpretações de fração. Coletamos poucas informações sobre isso, uma vez que os resultados das pesquisas escolhidas apresentaram mais sobre as dificuldades e lacunas de conhecimento que os estudantes possuem.

Quadro 5 - Informações sobre os conhecimentos identificados nas pesquisas.

Domínio	Monteiro e Groenwald	Serafim	Silva	Santos e Fonseca	Tenório	Amorim	Cavallin
Medida			x				
Número				X			x
Operador			x				
Parte-todo	x*		x				x
Quociente			x				
Razão							

Fonte: As autoras.

Em Monteiro e Groenwald (2014), não encontramos a definição do conceito de fração no corpo do texto. Foi visto que os alunos apresentaram dificuldades com frações como parte-todo na forma discreta, pois não reconheceram o inteiro corretamente. Com quantidades contínuas, houve duas situações. Os autores afirmam que a representação geométrica das quantidades contínuas é frequente nas atividades com frações em sala de aula, e por isso não houve equívocos por parte dos participantes (essa situação está representada pelo * no **Quadro 4**), porém com a representação com figuras sombreadas e não sombreadas os alunos apresentaram dificuldade.

Além disso, os alunos apresentaram dificuldade com frações como quociente, pois numa atividade que apresentava a divisão de 6 por 5, todas as alternativas selecionadas pelos estudantes apresentavam frações impróprias, cujo numerador é menor que o denominador. Daí, emerge a dificuldade de reconhecer frações próprias, frações cujo numerador é maior que o denominador. Por isso, é visto que os estudantes não compreendem a fração como número, uma vez que não reconhecem frações maiores que um inteiro, como frações mistas e frações próprias.

Em Serafim (2015), vimos que o conceito de fração utilizado foi o de Caraça (1951), que considera dois aspectos, a fração como medida, a partir da divisão de um segmento em outros, e a fração como quociente, pois a fração $\frac{a}{b}$ representa a divisão de a por b.

Os estudantes apresentaram dificuldade com a fração como parte-todo, pois não souberam identificar o inteiro em questão corretamente. Também, não compreenderam a fração como quociente, contudo devemos ressaltar que houve mais acertos envolvendo quantidades discretas que contínuas. Ainda, no contexto de fração como quociente um estudante não apresentou a notação de numerador e denominador da fração, mas como uma potência.

Houve mau desempenho em questões com frações como medida e como número, especificamente em questões que envolviam posicionar uma fração na reta numérica e apresentar a representação decimal da fração. Ademais, foi identificado que os alunos não compreendem fração como operador. A autora conclui que os participantes não dominam o conceito de fração.

Em Silva (2017), foi visto que os estudantes dominam frações como parte-todo, pois souberam identificar as partes e o todo corretamente. Além disso, mostraram dominar o contexto da fração como operador e como medida, pois souberam utilizar um referencial para medir uma quantidade desconhecida da mesma grandeza. Por fim, os estudantes apresentaram conceber o conceito de fração associado especialmente à ideia de parte-todo e quociente.

Em Santos e Fonseca (2019), não identificamos o conceito de fração assumido pelas autoras. A principal dificuldade apresentada pelos participantes da pesquisa envolveu a fração como parte-todo, pois não realizaram a partição do todo. Ainda, nessa situação, os estudantes souberam corretamente representar na forma racional os termos “um terço”, “um sexto” e “dois nonos”, mostrando dominar a fração como número. Além disso, os estudantes apresentaram conhecer a fração como quociente, pois realizaram as divisões indicadas pelas frações corretamente.

Em Tenório (2019), o conceito de fração deriva da ideia de medida. Dos resultados, foi visto que os participantes tiveram dificuldade em compreender a ideia de um todo dividido em partes iguais. Além disso, identificamos dificuldade com o termo razão, visto que um participante compreendeu o termo “razão” como motivo e não como uma comparação de quantidades. Por fim, o autor não observou, no geral, qualquer noção do conceito de fração por parte dos alunos.

Em Amorim, Etcheverria e Oliveira (2019), não fica explícito o conceito de fração utilizado. Segundo as autoras, os estudantes não concebem o conceito de fração, uma vez que para particionar $\frac{2}{3}$ de uma quantidade discreta, somaram 2 e 3 para obter 5 ou apresentaram a multiplicação 2 com 3 resultando em 6. Dessa situação, as autoras apontaram dificuldades com identificar o todo em questão e de reconhecer que uma fração é um único número, e não dois números separados por um traço, isto é, dificuldade com frações como parte-todo e número.

Cavallin (2020) utilizou a definição de Caraça (2002), tal qual Serafim (2015), que aborda fração como medida e como quociente, e de Iezzi (2004), que concebe a fração como número. Dos resultados, vimos na primeira situação, que a maioria dos estudantes apresentou conhecer a fração como parte-todo, pois reconheceu corretamente a fração do inteiro em questão como também determinou corretamente o inteiro correspondente ao denominador.

Na segunda situação de fração envolvendo figuras pintadas e não pintadas, os estudantes apresentaram dificuldades, pois não compreenderam o inteiro corretamente. Também, os estudantes apresentaram dominar o conceito de frações próprias, pois souberam representá-las geometricamente, indicando conhecimento de frações como número.

A maioria apresentou dominar a representação gráfica de uma fração, relacionada à fração como parte-todo, contudo foi visto que alguns não dominam a fração como número, pois consideraram numerador e denominador como dois números distintos, devido ao processo de dupla contagem.

No geral, vimos que os alunos apresentaram dificuldades com todas as interpretações que a fração assume, como mostraram os resultados de Monteiro e Groenwald (2014), Serafim (2015), Santos e Fonseca (2019), Tenório (2019) e Amorim, Etcheverria e Oliveira (2019).

Sobre os conhecimentos dos estudantes, identificamos em Monteiro e Groenwald (2014), Silva (2017) e Cavallin (2020) o domínio sobre a fração como parte-todo, o que segundo Kieren (1976) e Behr et al. (1983), contribui para o desenvolvimento das interpretações medida e número, uma vez que serve de base conceitual para essas interpretações.

Em Santos e Fonseca (2019) e Cavallin (2020), vimos conhecimentos por parte dos estudantes sobre a fração como número. Isso significa que o estudante domina a representação fracionária na reta numérica, de acordo com Kieren (1976, 1980) e Behr et al. (1983). Além disso, os teóricos apontam que a fração como número contribui para o desenvolvimento da noção de adição de vetores.

Vimos apenas em Silva (2017) o domínio por parte dos estudantes da fração como medida e quociente. Não foi observado em qualquer pesquisa indícios sobre o conhecimento dos estudantes a respeito da fração como razão, o que indica que esses estudantes não estão aptos a aprenderem o conceito de proporcionalidade, a comparação entre duas razões, como afirma Kieren (1976).

7 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Tivemos como objetivo dessa pesquisa verificar o que apresentam os resultados de algumas pesquisas realizadas com estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental a fim de evidenciar seus conhecimentos a respeito do conceito de fração (ordinárias ou não) e suas interpretações. Para isso, escolhemos sete pesquisas e utilizamos os estudos de Kieren (1973, 1980) e Behr et al. (1983).

A respeito do conhecimento sobre fração como parte-todo identificado em Monteiro e Groenwald (2014), devemos ressaltar que os estudantes demonstraram apenas dominar frações de quantidades contínuas quando são representadas por figuras geométricas, devido à frequência dessa representação ao longo do ensino em sala de aula. Isso é problemático, visto que Kieren (1976) aponta que a fração como parte-todo estrutura outras interpretações de fração, logo é essencial que o estudante compreenda essa interpretação.

No geral, os instrumentos de coleta de dados estavam adequados, uma ressalva a Tenório (2019), que apresentou uma situação envolvendo Tangran, cujos participantes da pesquisa apresentaram estratégias de resolução ilógicas. A atividade não estava adequada, devido aos resultados que foram obtidos. Em particular, queremos destacar um participante dessa pesquisa que associou o termo “razão”, presente no enunciado da atividade, à noção de “motivo”, o que indica desconhecimento total da fração como razão.

É interessante comentar que na primeira atividade de Cavallin (2020), a maioria dos alunos apresentou a resolução representando a fração com figuras geométricas, enquanto o enunciado do exercício considerava um segmento de reta como o inteiro. É evidente a relação bem estabelecida da fração com representações em figuras geométricas para os estudantes, como já discutido, devido à frequência que os professores abordam essa representação. Mesmo assim, em outra situação, os estudantes fizeram uso de figuras geométricas, que representam quantidades contínuas, para incorretamente representar situações de quantidades discretas.

Ademais, segundo Kieren (1976), atividades com papel quadriculado para comparar a medida de figuras semelhantes contribuem para o aprendizado da fração como operador, pois mostra a transformação de uma figura em outra. Contudo, não vimos atividades sendo desempenhadas com essa ferramenta dentre as tarefas desenvolvidas na pesquisa.

Entendemos que o ensino de frações sempre deve ser um dos tópicos centrais à preocupação dos professores que ensinam matemática, uma vez que as pesquisas mostram lacunas dos estudantes sobre esse assunto. Esse tema não é de fácil compreensão, uma vez que demanda de diversas estruturas cognitivas e conceitos prévios para sua compreensão, contudo é de fundamental importância que nossos estudantes conheçam a fração e todas suas possíveis aplicações, para que assim a fração seja vista como um objeto matemático.

8 REFERÊNCIAS

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Tradução: Reto, L. A. e Pinheiro A. Lisboa: Edições 70, 1977.

BEHR, M.J.; LESH, R.; POST. T.R e SILVER, E. A. Rational number concepts. In: LESH, R & LANDAU, M (Ed.), **Acquisition of mathematics concepts and processes**. (p.91-126) New York: Academic Press: Nova York. 1983.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Portugal: Porto Editora, 1991.

BOYER, C. B. **História da matemática.** Tradução: Gomide, E. F. Editora da Universidade Estadual de São Paulo: São Paulo – SP, 1974.

CAVALLIN, A. **O CONCEITO NÚMERO FRACIONÁRIO NA IDEIA PARTE-TODO: ENTENDIMENTOS APRESENTADOS POR ALUNOS DO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL.** Disponível em: https://bibliodigital.unijui.edu.br:8443/xmlui/handle/123456789/6528.

CORRÊA, M. L.; MEGGIOLARO, G. P.; REIS, A. Q. M. Abordagem do conteúdo de frações a partir do Programa Nacional do Livro Didático. Revista de Ensino de Ciências e Matemática, v. 10, n. 6, p. 21-38, dez. 2019. Disponível em: < http://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1993/1212>. Acesso em: 28 out. 2020.

COSTA, W. N. G. Dissertações e teses multipaper: uma breve revisão bibliográfica. In: Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática, 8, 2014, Campo Grande – MS, **Anais do VIII Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática**, Campo Grande: 2017, v. 8, n. 1 p. 269-278. Disponível em: < https://periodicos.ufms.br/index.php/sesemat/article/view/3086>. Acesso em: 28 out. 2020.

DAMICO, A. Uma investigação sobre a formação inicial de professores de matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental. Orientação: Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica. São Paulo. 2007.

DELEUZE, G. **Proust e os signos**. 2a ed. Tradução: Antonio Piquet e Roberto Machado. Editora Forense Universitária: Rio de Janeiro, 2003.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigações em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos.** Campinas: Autores Associados, p. 59-100, 2006.

HUANACO, I. C. **Números Racionales En El Antiguo Egipto**. Orientaçao: António José de Oliveira Machiavelo. Dissertação. (Mestrado em Matemática para Professores) – Faculdade de Ciencias da Universidade do Porto. Porto, 78p. 2015.

IFRAH, G. **Os Números: a história e uma grande invençã**o. 11. ed. Tradução: SENRA, S. M. F. São Paulo: Globo, 2010.

KLAUSMEIER, H. J.; GOODWIN, W. **Manual de Psicologia Educacional:** aprendizagem e capacidades humanas. (Tradução de Abreu, M. C. T. A.). São Paulo: Harper & Row, 1977.

KIEREN, T. E. On the Mathematical, Cognitive and Instructional foundations of Rational Numbers. In: LESH, R. A. (Ed.); BRADBARD, D. A. (Ed.), NUMBER E MEASUREMENT Papers from a Research Workshop. (p. 101-144) National Institution of Education. Georgia. 1976.

______The Rational Number Construct – Its Elements and Mechanisms. In: KIEREN, T. E. (Ed.), Recent Research on Number Learning. (p. 125-150) National Institution of Education Ed. Washington - D.C. 175p. 1980.

LOPES, A. J. O que Nossos Alunos Podem Estar Deixando de Aprender sobre Frações, Quando Tentamos lhes Ensinar Frações. **Bolema**, Rio Claro – SP, v. 21, n. 31, p. 1-22, dez. 2008. Disponível em: < http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/2102>. Acesso em: 28 out. 2020.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli Eliza Dalmazo Afonso de. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MASOLA, W. J.; ALLEVATO, N. S. G. Dificuldades de aprendizagem matemática: algumas reflexões. **Educação Matemática Debate**. São Paulo: 2019.

NIVEN, I. **Números: Racionais e Irracionais**. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1984.

ONUCHIC, L. R; ALLEVATO, N. S. G. As diferentes "personalidades" do número racional trabalhadas através da resolução de problemas. Bolema, Rio Claro –SP, v. 21, n. 31, p. 79 – 102, dez. 2008. Disponível em: < http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/2106>. Acesso em: 28 out. 2020.

SANTOS, M. J. B de S. **O ensino e aprendizagem das frações utilizando materiais concretos.** Orientação: Prof. Dr. Pedro Lúcio Barboza. 2014. 45 p. Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) – Curso de Matemática, Universidade Estadual da Paraíba, 2014.

SERAFIM, M. S. **O conhecimento de alunos do ensino fundamental II sobre frações.** 2015. 45f. Orientador (a): Dra. Tânia Cristina Rocha Silva Gusmão. Trabalho de Conclusão de Curso (graduação) - curso de Matemática, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, 2015.

SILVA, M. J. F., ALMOULOUD, S. A. As Operações com Números Racionais e seus Significados a partir da Concepção Parte-todo. **Revista Bolema**, v. 21, n. 31, p. 55-78, 28 dez 2008.

STANIC, G. M. A.; KILPATRICK, J. Mathematics curriculum reform in the united states: a historical perspective. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 6, n. 2, pp. 11-27, 2004.