Universidade Estadual de Londrina

VAGNER CAMPEÃO

PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL:

UMA PROPOSTA DE APLICATIVO

Londrina
2020

VAGNER CAMPEÃO

PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL:

UMA PROPOSTA DE APLICATIVO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT-SBM) da Universidade Estadual de Londrina para à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Túlio Oliveira de Carvalho

Londrina
2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

C193p Campeão, Vagner.

Pensamento algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental : uma proposta de aplicativo / Vagner Campeão. - Londrina, 2020.
52 f. : il.

Orientador: Túlio Oliveira de Carvalho.
Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2020.
Inclui bibliografia.

1. Álgebra - Tese. 2. Ensino fundamental - Tese. 3. Jogos em educação matemática - Tese. I. Carvalho, Túlio Oliveira de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDU 51

VAGNER CAMPEÃO

PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL:

UMA PROPOSTA DE APLICATIVO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT-SBM) da Universidade Estadual de Londrina para à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Orientador: Prof. Dr. Túlio Oliveira de Carvalho
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Profª. Drª. Angela Marta Pereira Das Dores Savioli
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Profª. Drª. Magna Natalia Marin Pires
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 25 de agosto de 2020.

Dedico este trabalho a todos os professores que se empenham incansavelmente para uma educação melhor. Nossa missão é nobre, embora árdua.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por oportunizar forças para persistir nessa caminhada, lutar contra os desafios impostos pela vida e pela proteção nas longas viagens de Ourinhos - SP a Londrina – PR.

À minha mãe, Sra. Ilda Ribeiro Campeão (*in memorian*) que nunca mediu esforços para me oferecer uma boa educação e jamais deixou de me apoiar nos meus sonhos, inclusive este. Aqui estão os resultados dos seus esforços. Minha eterna gratidão.

À minha família e, principalmente, aos amigos que exerceram a função de incentivadores e que, quando desistir parecia ser a única decisão, somaram esforços para que eu desse continuidade e conclusão dessa meta.

Às amizades que nasceram durante o curso. Em especial à Rosinéia Farias pela parceria e apoio, sem os quais tornaria os momentos intensos do curso mais difíceis.

A todo corpo docente da Universidade Estadual de Londrina do curso PROFMAT.

Agradeço o professor Dr. Túlio Oliveira de Carvalho por aceitar o convite de orientar este trabalho, pela leveza nos momentos de orientação, pela paciência no longo tempo de espera e por compartilhar comigo um pouco do seu grande conhecimento.

À CAPES pelo apoio financeiro.

CAMPEÃO, Vagner. **Pensamento algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental:** uma proposta de aplicativo. 2020. 52 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

RESUMO

Este trabalho traz uma proposta para o desenvolvimento do pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental com o uso do aplicativo Algebrizar aliado à estratégia de Investigação Matemática, alinhado às competências e habilidades da Base Nacional Comum Curricular – BNCC. Tem como objetivo apresentar tal aplicativo e de que forma ele pode auxiliar os professores na tarefa de levar os alunos a alcançar as habilidades em álgebra, explorando algumas tarefas e atividades nele contidas. A partir da reflexão sobre o atual cenário do ensino da álgebra, é fundamental que esta seja inserida nos anos iniciais da escolaridade, evidentemente sem o formalismo simbólico e rigor algébrico, mas por meio da condução de diálogos, levantamento de hipóteses, testes, formulação de conjecturas que visam promover a generalização, percepção de regularidade e variação, ou seja, o pensamento algébrico. As situações lúdicas, essenciais nos anos iniciais, são atendidas por meio do uso do aplicativo Algebrizar que possui o formato de um jogo, guiando o aluno por meio de trilhas e pontuações. Pautando-se na Investigação Matemática, o aplicativo incentiva a participação nos momentos de reflexão, uma vez que dentro do próprio jogo o aluno precisa refletir e responder a algumas questões criadas com a intenção de promover um momento de diálogo e discussão em sala, situação que será conduzida pelo professor durante a investigação.

Palavras-chave: Pensamento algébrico. Anos iniciais do ensino fundamental. Investigação matemática. Cultura digital.

CAMPEÃO, Vagner. **Algebraic thinking in the Early Years of Elementary School:** an applet project. 2020. 52 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

ABSTRACT

This work brings a proposal for the development of algebraic thinking in the Early Years of Elementary Education with the use of the Algebrizar applet combined with Mathematical Investigation strategy, aligned with the competencies and skills of the Base Nacional Comum Curricular - BNCC. It aims to present this applet and how it can assist teachers to guide students on reaching algebra skills, exploring some tasks and activities contained in it. Following some reflections on the current scenario of algebra teaching, it is essential that it be inserted in the early years of schooling, evidently without the symbolic formalism and algebraic rigor, but with the establishment of conversation, in order for the students to get the ability of raising hypotheses, tests, formulating conjectures that aim to promote generalization, perception of regularity and variation, that is, algebraic thinking. The playful situations, which are also essential in the early years, are met through the use of the Algebrizar application, which has the format of a game, guiding the student through trails and scores. Built upon the strategy of Mathematical Investigation, it encourages participation in moments of reflection, since within the game itself the student needs to reflect and answer some questions created with the intention of promoting a moment of dialogue and discussion in the classroom, a situation that will be finalized by the teacher during the investigation.

Keywords: Algebraic thinking. Early years of elementary school. Mathematical investigation. Digital culture.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 Os diversos tipos de tarefas em termo de grau e abertura (Fonte: PONTE, 2003, p. 5) 31
Figura 2 Tela de cadastro de professor (Fonte: do autor) 38
Figura 3 Tela de cadastro de alunos (Fonte: do autor) 39
Figura 4 Tela de opções dos professores (Fonte: do autor) 40
Figura 5 Tela de opções de alunos (Fonte: do autor) 40

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 Momentos na realização de uma atividade (Fonte: PONTE, BROCARDO, OLIVEIRA, 2009, p. 20)..31

Tabela 2 Ações da Investigação Matemática com o uso do aplicativo algebrizar e mediação do professor (Fonte: do autor) 42

Tabela 3 Jornadas e trilhas do jogo Algebrizar (Fonte: do autor)..................52

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
CNE	Conselho Nacional de Educação
ESE	Escola Superior de Educação
IDEB	Índice de Desenvolvimento da Educação Básica
LDB	Lei de Diretrizes e Bases
MEC	Ministério da Educação
NCTM	*National Council of Teachers of Mathematics*
PFCM	Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1º e 2º Ciclos do Ensino Básico
PHP	*Personal Home Page*
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
PNE	Plano Nacional de Educação

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO...11

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E ASPECTOS METODOLÓGICOS 14

2 DEFINIÇÕES MATEMÁTICAS FORMAIS 33

3 O APLICATIVO ALGEBRIZAR..36

CONCLUSÃO...45

REFERÊNCIAS 46

APÊNDICE 49

INTRODUÇÃO

Por meio da observação constante da natureza é que o homem construiu a Matemática ao longo dos séculos, analisando o seu cotidiano e considerando problemas afetos à sua sobrevivência. Da necessidade de soluções, foram sistematizados registros, análises e estudos que enfim levaram a uma linguagem com símbolos próprios. Hoje, essa linguagem é sistematizada através de conteúdos didáticos dispostos em currículos nas escolas ministrados por professores, com cargas horárias e roteiros definidos na disciplina de Matemática.

A ação pedagógica no campo da matemática não tem sido satisfatória nos últimos anos quando observamos os índices oficiais tais como o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) apontando 71% de insuficiência na disciplina (BRASIL, 2017) e 72° de um total de 79 países no Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) (BRASIL, 2018). Percebe-se a desmotivação e até mesmo a desvalorização desta disciplina, por muitas vezes sendo considerada muito difícil e para poucos. Isso se intensifica quando os temas da Álgebra são tratados, nos quais os alunos precisam lidar com o formalismo matemático e com símbolos. Nesse estudo, a fundamentação teórica traz a situação crítica que se encontra o ensino da álgebra na Educação Básica. Por muito tempo, a álgebra era inserida nos últimos anos do Ensino Fundamental. Estudos recentes apontam que esse campo da matemática poderia ser tratado nos anos iniciais do Ensino Fundamental recorrendo ao desenvolvimento do pensamento algébrico para, posteriormente, estar preparado para a semeadura da linguagem algébrica.

É nesta vertente que este estudo propõe o uso do aplicativo Algebrizar, aliado à Metodologia de Investigação Matemática, fazendo reflexão ao desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental alinhado à Base Nacional Comum Curricular (BNCC) por meio das suas habilidades e competências do campo da álgebra. São objetivos:

- entender a situação atual do ensino da álgebra nas escolas, recorrendo à história da matemática e à história do ensino da álgebra;
- compreender as demandas de aprendizagem dos anos iniciais do Ensino Fundamental, 1° ao 5° ano, pautadas nas competências e habilidades da BNCC;
- explorar estudos a respeito do pensamento algébrico como requisito

para a linguagem algébrica;

- propor a Metodologia de Investigação Matemática aliada ao uso das tecnologias, como forma de alcançar o pensamento algébrico, já que este requer diálogo e trocas;
- considerar as demandas da Cultura Digital a serem inseridas no ensino brasileiro;
- propor as tarefas e modos de uso do aplicativo Algebrizar, criado com a intenção prioritária de desenvolver o pensamento algébrico por meio de discussões e levantamento de hipóteses.

O advento da BNCC traz a Álgebra como uma Unidade Temática em Matemática e o foco sobre o pensamento algébrico ganha espaço nesse cenário. Por esse motivo este estudo é dirigido para professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

A concepção do aplicativo, bem como as ferramentas escolhidas para o seu desenvolvimento são fruto da experiência de produção de softwares do autor desta pesquisa e todas as atividades e demandas pedagógicas promovidas pelo mesmo são provenientes do seu trabalho em sala de aula com alunos da faixa etária à qual o aplicativo se destina.

No Capítulo 1, expõe-se o norte dado pelo atual documento que organiza a Educação Básica, a BNCC, juntamente com os recortes históricos de seu surgimento, sendo especificados as habilidades que guiam esta proposta, um estudo do cenário da educação da álgebra, também pautado na sua história, na história da Matemática e em um conjunto de referências da Educação Matemática à respeito do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade. Ainda neste capítulo a Metodologia de Investigação Matemática, segundo Ponte (2003), será apresentada e fundamentada como estratégia para as aulas, bem como uma breve discussão sobre a competência da Cultura Digital presente na BNCC.

No Capítulo 2, as definições matemáticas dos conteúdos que serão exploradas nas aulas de matemáticas do 1° ano ao 5° ano serão apresentadas. Trazemos estas informações para dar segurança do rigor ao professor que se interessar pela proposta. Desde já, ressaltamos que este formalismo não é indicado para ser usado nas aulas dos anos iniciais.

O Capítulo 3 traz a descrição do desenvolvimento do aplicativo, que tem papel de incentivador, explorador e lúdico, desde a escolha da plataforma de desenvolvimento até a proposta de uso em sala de aula, aliando com as práticas de

Investigação Matemática, conduzindo as atividades para os princípios do pensamento algébrico.

No capítulo final são apresentadas as conclusões deste trabalho.

O estudo do pensamento algébrico sempre esteve presente no percurso desta pesquisa. Na busca de entendimento, autores como Nacarato e Custódio (2018), Santos e Savioli (2010) e Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) fundamentam e definem este pensamento, enquanto Britt e Iwin (2011) e Blanton e Kaput (2011) apresentam exemplos de projetos que introduziram o pensamento algébrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Para uma compreensão mais ampla, recorre-se à história da Matemática para entender a introdução da álgebra nas escolas, por meio de estudos de Eves (2011) e Roque e Carvalho (2012), bem como definições deste campo da matemática.

Ainda na trajetória da pesquisa, nos primeiros meses de 2020, uma situação atípica acomete toda a população: a pandemia do novo *Coronavírus* provocou o fechamento de todas as escolas, dando início à educação remota. Usar a tecnologia através do lançamento de um aplicativo para promover o pensamento algébrico conclui a metodologia empenhada no desenvolvimento deste estudo. Norteada pela BNCC e pela competência da Cultura Digital, a ferramenta pode ser usada tanto em sala de aula quanto fora dela, coadunando-se com o cenário atual, no qual encontros presenciais estão suspensos.

1. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E ASPECTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, é exposta uma leitura da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), principalmente no que concerne ao ensino de Álgebra nos anos iniciais. A fundamentação teórica e metodológica se constrói recorrendo-se a autores com contribuições nos aspectos que se mostraram importantes para a proposta da dissertação.

Miguel, Fiorentini e Miorim (1992, p. 40), quando tratam do ensino da álgebra no decorrer do tempo, relatam que ele esteve associado à memorização de fórmulas, ou mesmo de regras mecânicas que solucionam expressões algébricas sem aplicabilidade e sentido. Miguel, Fiorentini e Miorim (1992, p. 40), no ensino da matemática na Educação Básica, a álgebra foi inserida nos currículos de forma isolada e sem ligação as demais áreas que já se estudavam: geometria e aritmética. O ensino era de caráter mecânico, reprodutivo e sem clareza. Os autores afirmam:

> “o modo como a maioria dos professores ainda trabalha a álgebra – de forma mecânica e automatizada, dissociada de qualquer significação social e lógica, enfatizando simplesmente a memorização e a manipulação de regras, macetes, símbolos e expressões – tal como ocorria há várias décadas, mostra que seu ensino não tem recebido a devida atenção.”(FIORENTINI, et al, 1992, p. 40)

Nacarato e Custódio (2018, p. 13) citam que é comum que o conceito de equação seja introduzido no sétimo ano do Ensino Fundamental sem que o aluno tenha conhecido os símbolos e a linguagem algébrica. A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), que será abordada adiante, traz uma preocupação maior no tocante ao ensino da álgebra nos anos iniciais.

Squalli (apud NACARATO e CUSTÓDIO, 2018, p. 14) preconiza a organização da álgebra em três componentes indissociáveis: a construção de modelos algébricos, as manipulações (seguindo regras pré-definidas), e a aplicação de estruturas e procedimentos.

Semelhantemente, Borralho e Barbosa (2009, p. 4) citam a entrada conturbada da álgebra nos currículos escolares, no advento da Matemática Moderna, e que seu ensino desconexo tem causado repúdio nos alunos desde então. A resistência observada nos alunos quando o assunto é álgebra, principalmente por causa de sua linguagem, terá aqui uma proposta para ser contornada.

A palavra álgebra, com origem no nome do matemático muçulmano *al-*

Khwarizmi, tem por definição do dicionário *Houaiss*: "parte da matemática elementar que generaliza a aritmética, introduzindo variáveis que representam os números" (HOUAISS, *online*). Essa definição faz relação, e talvez uma divisão, entre os ramos da aritmética e da álgebra, sendo essa última caracterizada pela generalização.

Teles (2004, p. 2) estabelece uma conexão entre os estudos da aritmética e da álgebra. Segundo o autor, a álgebra consiste em leis com propriedades (comutatividade, associatividade, distributividade, elemento neutro, entre outras) e a aritmética, um ramo da álgebra do estudo da divisibilidade dos números.

Segundo Teles (2004, p. 3), a álgebra é um conjunto de afirmações que caminham na produção de um significado em termos de números e operações aritméticas. É usada para expressar fatos genéricos, utilizando símbolos e códigos próprios manipuláveis, sendo essa uma de suas principais características, exigindo esforço, entendimento do uso de símbolos com vistas ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Souza e Diniz (apud TELES, 2004, p.3) concluem que o que fortemente diferencia a álgebra da aritmética são os objetivos. O da aritmética está na resposta única e numérica e o da álgebra é uma resposta geral afirmável para vários valores numéricos.

Voltando às definições do dicionário *Houaiss*, álgebra também é referida como "ciência matemática cuja finalidade principal consiste em, simplificando e resolvendo por meio de fórmulas problemas nos quais as grandezas são representadas por símbolos, generalizar os resultados dos mesmos" (HOUAISS, *online*). Nessa definição o dicionário cita a generalização e o uso de fórmulas para resolução de problemas.

Teles (2004, p. 9) relata que para compreender generalizações é preciso que o estudante esteja seguro a respeito das operações aritméticas e tenha domínio delas. Caso o estudante não o tenha, a concepção das operações algébricas será fortemente comprometida, levando a concluir que muitas vezes, a dificuldade não está na álgebra, mas sim em conceitos aritméticos ainda não corrigidos, que apenas persistem em um novo contexto.

Recorremos à História da Matemática para entender a influência da linguagem simbólica na construção da álgebra como um campo do conhecimento matemático. Pode-se dizer que a *linguagem*, hoje considerada imprescindível, teve sua construção iniciada na matemática de Diofanto no século III com uso de símbolos para representar ideias e justificativas, construção que se consolidou com Viète no século XVI com o advento de diversos símbolos para a linguagem algébrica.

Atribuir a algum dos grandes matemáticos da história o título de “pai da álgebra” seria uma ação equivocada, segundo Roque e Carvalho (2012, p. 193). Os autores afirmam que houve avanços em diversos momentos da história e em diferentes partes do globo para que chegássemos ao que hoje entendemos por álgebra.

> Será Diofanto, se usarmos a definição A para álgebra. al-Khwarizmi, com a definição B; Cardano com a C; e, finalmente, Viète, no sentido D. Ou seja, podemos concluir que alcunhas deste tipo são inúteis para a história da matemática (ROQUE e CARVALHO, 2012, p. 193).

Para compreender a trajetória da álgebra e os avanços nesse campo, Nesselmann (apud Eves, 1995, p. 206) divide em três estágios o desenvolvimento da notação algébrica ao longo da história, quais sejam, a álgebra retórica, a sincopada e a simbólica.

Primeiro se tem a álgebra retórica em que os argumentos da resolução de um problema são escritos em prosa pura, sem abreviações ou símbolos específicos. A seguir vem a álgebra sincopada em que se adotam abreviações para algumas das quantidades e operações que se repetem mais frequentemente. Finalmente chega-se ao último estágio, o da álgebra simbólica, em que as resoluções se expressam numa espécie de taquigrafia matemática formada de símbolos que aparentemente nada tem a ver com os entes que representam.

O papiro Rhind (ou Ahmes) é um texto matemático na forma de manual prático que contém 85 problemas, copiados em escrita hierática [1] pelo escriba Ahmes de um trabalho mais antigo (EVES, 1995, p. 69). Por volta de 1600 a.C. a questão da variável (que pode assumir um valor numérico ou um conjunto de valores numéricos possíveis) era representado pela palavra *montão*. Observa-se, nesse caso, os primeiros sinais da álgebra. Teles (2004, p. 6) cita um dos problemas: “Um montão, sua metade, seus dois terços, todos juntos são 26. Diga-me: Qual é a quantidade?” Este problema era resolvido de um modo muito engenhoso utilizando a regra da falsa posição. Tratava-se da “Álgebra Retórica”.

Struik (apud Teles, 2004, p. 6) cita que a passagem da álgebra retórica para a sincopada ganha significado na matemática de Diofanto de Alexandria. Em 400 a.C. ele foi o primeiro matemático a fazer uso de símbolos algébricos no sentido de abreviar

---

1 A mais antiga forma de escrita cursiva que é derivada da escrita hieroglífica usada pelos sacerdotes (EVES, 1995, p. 31)

a representação de problemas e operações numéricas.

Já em 300 a.C, Euclides de Alexandria, com sua preocupação com o ensino, publicou os Elementos, um conjunto de treze livros, dois deles dedicados à álgebra. Em sua obra preocupou-se exclusivamente com as representações numéricas desconhecidas por meio de figuras geométricas, usando apenas régua não graduada e compasso (STRUIK, apud TELES, 2004,p. 6).

No século VIII, o matemático muçulmano mais conhecido foi *al-Khwarizmi* (origem das palavras algoritmo e algarismo). Roque e Carvalho (2012, p. 198) dizem que após apropriarem-se do saber matemático grego, os árabes expandiram esse conhecimento produzindo métodos sistemáticos e empenharam-se em generalizá-los. Em suma, palavras como al jabr (restauração) e al muqabalah (balanceamento) são algumas das definições comuns nos métodos usados para soluções de equações de forma sincopada. Outras eram jidhr (raiz ou coisa); adad (número dado qualquer, o que hoje temos por constante) e mal (tesouro) designada para representar o quadrado de uma quantidade desconhecida (ROQUE e CARVALHO, 2012, p. 199).

É importante ressaltar que, apesar de toda a contribuição dos árabes no sentido da construção da álgebra e de soluções generalizadoras, não houve o uso dos simbolismos conhecidos e usados até hoje. Tal circunstância histórica pode causar estranheza: diante de toda a evolução da matemática, os recursos simbólicos usados, principalmente na álgebra, possuem pouco mais de 400 anos (EVES, 1995, p. 206).

O uso de símbolos para substituir palavras se disseminou de forma paulatina, principalmente a partir do século XVI e da Europa. As notações para as operações: +, –, x e ÷, bem como o = e √, são exemplos que fizeram parte do percurso para chegar à representação de uma equação totalmente através de símbolos, como temos hoje. Viète, no século XVI, introduziu o uso de letras para representar valores indeterminados ou que representam uma faixa de valores com determinadas características, além de ser o pioneiro na representação de equações (EVES, 1995, p. 309).

Concluindo os recortes na história da matemática com foco na álgebra, Descartes, no século XVI, introduziu a representação de potências com o uso de expoentes da forma que temos hoje.

Foram muitos anos ao longo da história para chegarmos à representação algébrica que temos hoje e tal qual como é ensinada. Como brevemente descrevemos, o percurso começa na linguagem retórica através do uso de argumentos, passando pela sincopada, já com o uso de abreviações e procedimentos e a simbólica, como é hoje. Ainda no campo da história, para entender melhor como a álgebra foi inserida nas escolas, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 83) traçam a história do ensino da álgebra, separando-a em três concepções.

Linguístico-pragmática: desde o século XIX até metade do século XX, a álgebra foi apenas um instrumento de resolução de problemas. Eram procedimentos mecânicos representados pelos transformismos algébricos[2] e isso era considerado suficiente para que o aluno adquirisse a capacidade de solucionar problemas matemáticos.

Fundamentalista-estrutural: a álgebra passa a ser a base de todos os outros campos da matemática. Tal concepção requereu que as estruturas e propriedades das operações, que justificam o transformismo algébrico, fossem ensinadas, acreditando que a partir daí o aluno teria aptidão para transpor esta habilidade a qualquer novo contexto que surgisse.

Fundamentalista-analógica: Há um retorno da álgebra como instrumento para a resolução de problemas, o que lhe atribui um valor prático, mas sem descartar a sua fundamentação, só que dessa vez recorrendo à geometria, ou seja, as justificativas das identidades algébricas pautaram-se em demonstrações geométricas, acreditando-se que a "álgebra geométrica" era didaticamente superior à abordagem simbólica.

De ambas estas histórias, da álgebra e do ensino da álgebra, percebe-se a evolução e as mudanças de concepções ao longo do tempo. Que motivos teríamos, portanto, para acreditar que o ensino da álgebra não requer preparo e desenvolvimento prévio para o seu estudo propriamente dito?

A intenção de modificar o atual cenário do ensino da álgebra nas escolas brasileiras se mostra presente em estudos e em regulamentos recentes, nos quais foram aprovadas mudanças na organização dos currículos. Atualmente, o documento norteador dos currículos no Brasil é a BNCC - Base Nacional Comum Curricular. Esse documento tem âmbito nacional e estabelece diretrizes para a educação nacional nas escolas públicas e privadas em caráter normativo. Ele se organiza nas etapas de

2 Transformismo algébrico, segundo os autores, refere-se à manipulação dos termos de uma expressão, com regras válidas, para a obtenção de outra expressão equivalente.

ensino: educação infantil, Ensino Fundamental de nível I, Ensino Fundamental de nível II e Ensino Médio. A BNCC parte de critérios para que haja, de forma igualitária, o alcance das metas independente do contexto em que o aluno possa estar inserido (econômico, cultural ou social). Em suma, tal documento elenca conhecimentos indispensáveis aos quais os alunos precisam ter acesso.

Dado o seu alcance, bem como sua efetiva importância na construção de currículos e por extensão na composição do plano de aula do professor, tendo efeito direto em sua metodologia e ações para a aprendizagem dos alunos, cabe neste momento uma breve descrição do seu surgimento.

A proposta de construção da BNCC teve início com a promulgação da Constituição de 1988. Nela é iniciada a obrigatoriedade da existência de um documento que norteie toda a Educação Básica no país.

> Art. 210. Serão fixados conteúdos mínimos para o Ensino Fundamental, de maneira a assegurar formação básica comum e respeito aos valores culturais e artísticos, nacionais e regionais. (BRASIL, 1988).

Para esclarecer valores, concepções e finalidades da educação, assim como atribuição dos professores e referências para caminhos das instituições de ensino, foi promulgada a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) em 1996. Neste documento o termo base nacional já se apresenta de forma clara.

> Art. 26 - Os currículos do Ensino Fundamental e médio devem ter uma base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar, por uma parte diversificada, exigida pelas características regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e da clientela. (BRASIL, 1996).

Os esforços no sentido de estabelecer diretrizes para a educação, principalmente a Educação Básica, continuam. Em 1997, 1998 e 2000 os Parâmetros Curriculares Nacionais surgem como forma de auxiliar as equipes escolares na criação de currículos.

Uma vez prevista na Constituição e nas Leis de Diretrizes e Bases da Educação, um conselho é reunido para debater a criação da BNCC, 22 anos depois, em 2010.

Mudanças na Educação Básica do país continuam a ocorrer, tais como o aumento de oito para nove anos do Ensino Fundamental e a criação de diretrizes curriculares nacionais. Em 2014, uma lei regulamenta o Plano Nacional de Educação – PNE, que estabelece, em suma, 20 metas para a educação do país, dentre elas, a criação da BNCC. Em 2015 é iniciada uma longa caminhada para a sua elaboração, envolvendo, de início, assessores e especialistas em comissões de trabalho e é criada a primeira versão deste documento.

Em 2016, estudos e discussões acontecem em todo o país para a edição da BNCC, em níveis estaduais e municipais em um processo colaborativo. Somente em 2017 a primeira versão final é lançada, entregue ao MEC – Ministério da Educação e para o CNE – Conselho Nacional de Educação e homologada pelo Ministério da Educação. Vale ressaltar que neste ano este documento passa a ser oficial para todo o território nacional.

Desde então esforços para sua implementação vêm sendo feitos, tanto na formação de docentes quanto na sua institucionalização, uma vez que este documento pretende ter o efeito de padronização, igualdade do acesso ao conhecimento e de elencar aprendizagens essenciais, ainda que respeitando as características regionais.

É importante ressaltar que a BNCC está pautada em *competências.* O documento indica, em linhas gerais, como os estudantes podem alcançá-las. O conceito de competência é definido como a “mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana” (Brasil, 2017, p. 8). Há, nesse sentido, um novo cenário: uma educação que prevê a formação completa do aluno, chamada de educação integral: almeja-se um ser social, intelectual, emocional, cultural e fisicamente competente.

> Reconhece, assim, que a Educação Básica deve visar à formação e ao desenvolvimento humano global, o que implica compreender a complexidade e a não linearidade desse desenvolvimento, rompendo com visões reducionistas que privilegiam ou a dimensão intelectual (cognitiva) ou a dimensão afetiva. (Brasil, 2017, p. 14)

Esta pesquisa visa implementar o uso de aplicativo e propor o pensamento algébrico já nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, para que quando a álgebra (com o seu simbolismo e abstrações) for inserida por volta do 7º e 8º anos do Ensino Fundamental não cause tantos impactos.

Os anos iniciais do Ensino Fundamental compreendem do 1º ao 5º ano, de 6 a 10 anos de idade. Nesta fase, segundo a BNCC, valorizam-se as situações lúdicas de aprendizagem com progressiva sistematização dessas experiências. Nesta etapa também se inicia a assimilação de novas formas de relação com o mundo, quando a criança experimenta o desenvolvimento das relações consigo mesma e com os outros.

> A afirmação de sua identidade em relação ao coletivo no qual se inserem resulta em formas mais ativas de se relacionarem com esse coletivo e com as normas que regem as relações entre as pessoas dentro e fora da escola, pelo reconhecimento de suas potencialidades e pelo acolhimento e pela valorização das diferenças. (Brasil, 2017, p. 58)

É nesse fortalecimento de relações que se inicia o desenvolvimento da oralidade, os processos de percepção, a compreensão e a representação, tão importantes para o sistema de escrita alfabética e até mesmo dos signos matemáticos. A BNCC deixa claro também que a progressão da aprendizagem ocorre com a consolidação das aprendizagens anteriores e pela ampliação das práticas.

Como em todas as áreas, na Matemática a BNCC estabelece competências específicas para serem atingidas durante o Ensino Fundamental. Dentre as oito competências específicas, destacamos neste texto duas competências que estão mais diretamente relacionadas ao ensino da álgebra:

> Competência 5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
> Competência 6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados). (Brasil, 2017, p. 267)

Na quinta competência, a modelagem e a validação de estratégias dependem, além de outras, do uso da unidade temática álgebra (assim descrita no documento) que se torna uma linguagem rica em generalizações e análise de dados. Na sexta competência, expressar respostas e sintetizar conclusões usando registros e linguagem matemática requer algum domínio de expressões algébricas.

Nos anos iniciais o foco da matemática está na sua compreensão, ou seja, na apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado as aplicações. Esses significados estão relacionados às conexões que os alunos fazem com outras áreas do conhecimento e a matemática. A BNCC relata que a matemática nos anos iniciais não deve se restringir apenas às quatro operações durante todo o seu curso, embora estas sejam muito importantes. É necessário, além das operações, a habilidade de realizar algoritmos, cálculos mentais, fazer estimativas, usar calculadoras, *softwares* computacionais, levando sempre à reflexão e a sistematização, para que, então, se inicie um processo de formalização da matemática.

Na BNCC, a grande área Matemática é organizada em cinco unidades temáticas: "Números e Operações", "Geometria", "Álgebra", "Grandezas e Medidas" e "Probabilidade e Estatística". A Álgebra aparece como novidade para os professores dos anos iniciais, anteriormente, era vista somente nos anos finais do Ensino Fundamental até o Ensino Médio.

É válido destacar que a presença da álgebra já nos primeiros anos não requer o formalismo e a representações simbólicas, por mais simples que sejam, em especial nessa etapa, essa unidade temática restringe-se a ideias de regularidades, generalizações de padrões e propriedades da igualdade, sendo, por exemplo, esta última definida da seguinte forma:

> A relação de equivalência pode ter seu início com atividades simples, envolvendo a igualdade, como reconhecer que se 2 + 3 = 5 e 5 = 4 + 1, então 2 + 3 = 4 + 1. Atividades como essa contribuem para a compreensão de que o sinal de igualdade não é apenas a indicação de uma operação a ser feita. (Brasil, 2017, p. 270).

Carmo (1974, p. 106) diz que a razão fundamental para que a Matemática esteja no ensino básico é o fato de ela nos servir como instrumento para entender e atuar no mundo que nos cerca. Enfatiza, principalmente, a solução de problemas hipotéticos vindos de problemas do mundo real. Carmo defende que o formalismo matemático e o rigor de sua linguagem podem frear a aprendizagem. Ele diz: "Não há nenhuma razão de se esperar que o fato de explicitar verbalmente os mecanismos básicos do pensamento ajude no seu desenvolvimento operacional" (CARMO, 1974, p.109). Interpretamos "mecanismos básicos" como as demonstrações e o rigor formal de sua apresentação.

A BNCC afirma que a matemática é necessária para todos os alunos, uma vez que é grande sua aplicação na sociedade contemporânea, indo ao encontro com a afirmação feita por Carmo (1974, p. 106).

Sob essa premissa, a BNCC ainda diz que a educação matemática no Ensino Fundamental deve desenvolver o letramento matemático, ou seja, a capacidade individual de formular, empregar e interpretar a matemática em diversos contextos. Quando estes objetivos são atingidos, a matemática estimula a investigação e torna-se prazerosa.

As habilidades na BNCC são essenciais para que sejam alcançadas as competências específicas de matemática. Em especial nos anos iniciais do Ensino Fundamental, e que servem de norte para o desenvolvimento desta pesquisa, elas são descritas ano a ano. Em resumo, estas habilidades consistem em reconhecer padrões e regularidades de sequências, estabelecer relações de igualdade e equivalência e compreender a proporcionalidade de grandezas. Nos cinco primeiros anos do Ensino Fundamental propõe-se que isto ocorra com suave aumento do nível de dificuldade.

A álgebra é trazida como um elemento de um tipo de pensamento: o pensamento algébrico, que, segundo a BNCC (2017, p. 270), é “essencial para utilizar modelos matemáticos na compreensão, representação e análise de relações quantitativas de grandezas e estruturas matemáticas”. Dentre algumas habilidades, prevê que o aluno seja capaz de identificar regularidades, padrões em sequências numéricas e não numéricas, estabelecer leis que expressem relações entre grandezas, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas. Em outras palavras:

> Essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações. (Brasil, 2017, p. 270).

Após exporem vários exemplos de problemas, matemáticos e físicos, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) defendem que o pensamento algébrico se caracteriza pela “percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização.'' (p. 87, op.cit) Concluem assim que a construção do pensamento algébrico não se realiza de modo isolado, mas em articulação com os campos da matemática e com outras áreas de conhecimento. (FIORENTINI, MIORIM E MIGUEL, 1993, p. 87).

Distinguindo a álgebra do pensamento algébrico, Nacarato e Custódio (2018, p. 14) caracterizam este último como sendo as habilidades que possibilitam o uso desses componentes, chamando de pensamento analítico o que faz o aluno ser capaz de generalizar, abstrair relações e manipular a linguagem algébrica. Defendem, portanto, que para constituir o pensamento algébrico é preciso tempo, o que pressupõe que isso deva ocorrer já no início da escolarização e gradativamente tornando-se mais complexo.

Semelhantemente Borralho e Barbosa (2009, p. 4) citam a necessidade do trabalho do desenvolvimento do pensamento algébrico logo nos primeiros anos de escolaridade. Arcavi (apud BORRALHO e BARBOSA, 2009, p. 3), por sua vez traz um ponto de vista de que o pensamento algébrico está relacionado a capacidade de aplicação de generalidade, variabilidade e estrutura.

Há exemplos que mostram ser viável a proposta de iniciar a álgebra já nos anos iniciais. A Equipe do Programa de Formação Contínua de Professores do 1° e 2° Ciclos do Ensino Básico – PFCM da Escola Superior de Educação – ESE de Setúbal (2011, p. 3) defende que o pensamento algébrico deve ser iniciado já nos primeiros anos de escolaridade. Descreve como exemplo o símbolo de igual como uma relação. Para os alunos, da pré-escola até os oito primeiros anos de escolaridade, o sinal de igual assume o papel de "faz", ou seja, 4 + 6 = 10. O igual é o comando para operar 4 + 6. Afirmam que a compreensão desta forma interfere nas concepções algébricas posteriores. Mas no entendimento mais maduro, os autores afirmam que o símbolo da igualdade, "=", deve ser visto como uma relação. Exemplos de atividades são oferecidas para que o professor auxilie o aluno a entender o sentido mais amplo do igual, tais como: 4 + 6 = 5 + 5; 4 – 1 = 2 é uma mentira; 8 = 6 + 2. Dessa forma começam a decompor os números mantendo o equilíbrio e a verdade da igualdade em questão, lidando em segundo plano com "equações" numéricas, auxiliando no desenvolvimento do pensamento algébrico.

Isso não requer a princípio o formalismo simbólico e operações com variáveis (como também previsto na BNCC) e, se abordado precocemente, a compreensão e aceitação dos alunos dessa área da matemática pode ocorrer de forma natural.

Também defendendo essa mesma vertente, Santos e Savioli (2010, p. 61) destacam o documento do NCTM - *National Council of Teachers of Mathematics* que diz que o ensino da álgebra deve ser contemplado nos primeiros anos de escolarização, pois na infância o reconhecimento de padrões é desenvolvido. Identificar padrões, em suma, é identificar relações de generalização por meio de atividades de exploração, e à medida que desenvolvem o poder de generalização, constroem o pensamento algébrico.

Kieran (*apud* Santos e Savioli, 2010, p. 61) ao fazer a análise das dificuldades presentes nos alunos para aprender álgebra, notou um equívoco de significado que os alunos dão ao sinal de igual, não associando o seu sentido de equivalência e que persiste por todo o Ensino Fundamental. A dificuldade maior está em relacionar as expressões simbólicas com seus significados.

Diante dessa premissa, Carpenter *et al.* (apud Santos e Savioli, 2010, p. 62) conclui que os alunos podem aprender aritmética de forma eficaz dando-lhes base para o pensamento algébrico já nos anos iniciais, e que apesar disso não é necessário que os alunos lidem com o simbolismo formal matemático. O autor defende que, a partir de situações aritméticas, os alunos chegam a expressões formalizadas e generalizadas a fim de trabalhar com regularidades numéricas, alcançando o pensamento algébrico sem que, necessariamente, tenham que lidar com regras e manipulações simbólicas.

Na busca por uma definição refinada de generalização, Britt e Irwin (2011, p. 138) fazem a seguinte consideração:

> "the algebraic generalization of a pattern rests on the noticing of a local commonality that is then generalized to all terms of the sequence and serves as a warrant to build expressions of elements of the sequence that remains beyond the perceptual field" [3]

Afirmam que encarar o fim da aritmética quando se inicia a álgebra é um equívoco e uma visão empobrecida da matemática da escola primária. A álgebra permite que a aritmética seja realizada e defendem que a inclusão precoce de símbolos é uma ferramenta valiosa para o desenvolvimento do pensamento algébrico (BRITT e IRWIN, 2011).

Detalhando um estudo realizado na Nova Zelândia, no projeto "*The New Zealand Numeracy*", os alunos são incentivados a criar e a experimentar uma variedade de estratégias operacionais em aritmética. Uma aplicação bem-sucedida de tais estratégias exigiu uma consciência da generalidade, ilustrando assim o pensamento algébrico. Os autores também relatam o trabalho realizado na formação dos profissionais educadores para que o ato de efetivar uma generalização e o desenvolvimento do pensamento algébrico fosse rotina nas aulas de matemática. Deve-se oferecer aos alunos caminhos para que desenvolvam o pensamento

3 Tradução: A generalização algébrica de um padrão baseia-se na observação de algo em comum que é então estendido para todos os termos de uma sequência e serve como um comando para construir expressões de elementos de tal sequência que vão além do campo de percepção. (BRITT e IRWIN, 2011, p. 138, tradução nossa)

algébrico, por exemplo o de expor suas conjecturas em relação a um conjunto de números de uma sequência, antes que a introdução formal da álgebra seja dada.

Blanton e Kaput (2011, p. 9) abordam a capacidade das crianças de usar símbolos e criar estruturas generalizadas. O estudo mostra a preocupação de que a matemática ensinada hoje deve ser repensada. Os alunos, logo nos primeiros anos devem ser direcionados a uma matemática da álgebra precoce (aprender álgebra logo nos primeiros anos), entender a estrutura, a generalidade e não somente serem expostos a casos particulares. Ademais, este deve ser um processo contínuo e iniciado tão cedo quanto possível.

O pensamento funcional é trabalhado somente no Ensino Médio, quando uma grandeza se altera em função de outra, e dado a grande importância desse conteúdo o que impede que o pensamento funcional seja já desenvolvido em anos escolares anteriores? Os estudantes das séries fundamentais, segundo Blanton e Kaput (2011, p. 9), mostram que já conseguem fazer relações entre números e objetos, além de expressar essas ideias em forma de símbolos. Fazer correspondência de quantidade, organizar dados e expressar variações de quantidades é passo inicial para o pensamento funcional.

A introdução do simbolismo nos anos iniciais causa controvérsias. Elementar para o estudo da álgebra, o símbolo é a transição da linguagem natural para o formalismo matemático. Blanton e Kaput (2011, p. 12) interpretam que os alunos já fazem uso do simbolismo sem que essencialmente o compreendam. Um exemplo dado foi quando a professora pergunta aos alunos se podia construir em uma tabela um título de coluna “pessoas” e outra de “apertos de mãos”. Um aluno interrompe-a sugerindo que refizesse o título como “p” para pessoas e “a” para apertos de mãos. Percebe-se que o conceito de variável e uso de símbolo está presente, ainda que no seu estágio inicial. Nesse exemplo, o uso das letras se dá para representar objetos e não assumem o sentido de variável, mas o importante destacar é que foi dada oportunidade para que o aluno exprima o uso de representações simbólicas, mesmo que na sua forma mais básica, e isso permite o preparo cognitivo para explorar regularidades e relações de variáveis nas séries seguintes.

Entre diversos exemplos, como o de generalizar o número de olhos de uma quantidade crescente de cães, dado pela expressão $2n$, em que n é o número de cães, ou na forma verbal dita pelos alunos: “dobrar a quantidade de cães resulta na quantidade de olhos”, os autores afirmam que o pensamento funcional deve ser rotina para qualquer exploração matemática, visto que estes alunos estarão melhor preparados para o pensar matemático quando comparado a alunos que passaram seis ou sete anos desenvolvendo somente habilidades aritméticas.

Após discussões sobre mudanças nos currículos, rotinas e hábitos dos docentes, Blanton e Kaput (2011, p. 21) tratam da cultura e a prática de ensino que se deve ter em sala para o melhor desenvolvimento do pensamento algébrico. Estabelecer relações e dar espaço para discussões e conjecturas são formas de construir esse conhecimento. Esse espaço, segundo os autores, consiste muitas vezes no professor apresentar um discurso algébrico, ou generalizador, considerando as observações dos alunos em momentos de diálogo que devem ser criados. Blanton e Kaput (2011, p. 21) citam que isso faz que a sala se torne um ambiente *sociomatemático* (um ambiente de comunicação e trocas entre professores e alunos), no qual se a prática de conjecturar, argumentar e generalizar torna-se presente.

Ainda no que tange às relações, tão essencial nesta etapa de ensino, ampliam-se as experiências de comunicação. Aqui, o ato de comunicar e se expressar em matemática, principalmente nos primeiros anos do ensino, tem destaque, dado sua elevada importância. No documento formulado pelo NCTM, afirma-se que a comunicação é parte essencial da educação matemática. “Quando os estudantes são desafiados a pensar e raciocinar sobre matemática e comunicar os resultados de seus pensamentos para outros de forma oral ou escrita, eles aprendem a ser claros e convincentes”. (NCTM, 2000, p. 60). O mesmo estudo também indica que a apropriação dos conceitos matemáticos ocorre por meio das trocas de acertos e erros, entre professores e alunos e entre alunos.

Nessa mesma linha, Smole e Diniz (2019), afirmam que a conexão com o conhecimento ocorre com o uso da fala, quando esta é oportunizada nas aulas, pois ela conecta a linguagem, o conhecimento, as experiências e as experiências de outros alunos com a matemática. “É preciso promover a comunicação pedindo aos alunos que esclareçam e justifiquem suas respostas, que reajam frente às ideias dos outros e que considerem pontos de vista alternativos.”

Nacarato e Custódio (2018, p. 74) caracterizam essa comunicação como trocas entre alunos e professores. Cabe ao professor possibilitar situações para estas trocas, através de sua mediação, e isso só ocorre através de um planejamento de tarefas, configurando o ambiente em sala de aula que a favoreça.

As pesquisas que abordam o ensino de matemática, de modo geral, elencam a comunicação como fator essencial para a apropriação dos conhecimentos matemáticos, através do ouvir o outro, do compartilhar experiências, inclusive do erro. A própria BNCC já prevê ambientes que favoreçam tais trocas nos anos iniciais do ensino básico, principalmente.

Para clareza da função do aplicativo, enquanto recurso tecnológico neste trabalho, recorre-se, novamente, à BNCC para tornar clara uma competência geral do Ensino Fundamental, a Cultura Digital, que servirá de subsídio para justificar a metodologia:

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BRASIL, 2017, p. 9)

Desse texto não resta dúvida que a educação deste século precisa, mais do que nunca, aliar-se às tecnologias, já que vivemos em um mundo repleto de inovações promovidas por elas. São inúmeras as pesquisas que apontam que a escola precisa aliar-se a esses recursos para uma aprendizagem mais efetiva.

A BNCC cita que o advento da cultura digital trouxe mudanças na sociedade. Com o fácil acesso ao computador, telefone, celular e *tablet* os jovens têm se tornado elemento principal nessa cultura, de modo que a interação social midiática os tem envolvido e de forma cada vez mais rápida. (BRASIL, 2017, p. 61)

Ainda sobre essas mudanças na forma de interação entre as pessoas, percebe-se a influência no funcionamento da sociedade, no mundo do trabalho e, por consequência, o que impacta nas novas gerações. “É preciso garantir aos jovens aprendizagens para atuar em uma sociedade em constante mudança, prepará-los para profissões que ainda não existem” (BRASIL, 2017, p. 473).

Na competência Cultura Digital, o texto traz a diretriz de que, além de consumir essa tecnologia, é preciso tornar os alunos competentes em produzi-la, ao passo que também prevê que o aluno a compreenda de forma crítica, significativa, reflexiva e ética. Em outras palavras, as tecnologias na educação devem ir além do seu uso, chegando à produção e compreensão.

Partindo dessa premissa, a escola atualiza-se em um novo papel.

> É importante que a instituição escolar preserve seu compromisso de estimular a reflexão e a análise aprofundada e contribua para o desenvolvimento, no estudante, de uma atitude crítica em relação ao conteúdo e à multiplicidade de ofertas midiáticas e digitais. (BRASIL, 2017, p. 61)

O mundo digital tem conduzido à sociedade ao imediatismo de respostas e a um quadro de informações passageiras, o que leva a análise superficiais, segundo a BNCC (BRASIL, 2017, p. 61). Portanto, a escola deve ressignificar os modos de comunicação e as linguagens para que, então, “eduque para usos mais democráticos das tecnologias e para a participação consciente na cultura digital”. É desta forma de significar a presença e o uso das tecnologias na educação que a escola pode, conforme a BNCC (BRASIL, 2017, p.61), “promover situações de aprendizagem, a interação e o compartilhamento de significados entre professores e estudantes”.

Considerando os benefícios que a cultura digital traz, ao promover um ambiente satisfatório de aprendizagem, e que é papel da escola, em uma educação contemporânea, fomentar a compreensão, produção e uso das tecnologias, propomos relacionar o pensamento algébrico ao *pensamento computacional*.

Barcelos e Silveira (2012, p. 6) fazem uma comparação entre as habilidades necessárias para o pensamento computacional e o pensamento matemático. Na questão da simbologia, bastante evidente na álgebra, espera-se que os alunos dominem e compreendam os códigos da linguagem matemática algébrica. O pensamento computacional na BNCC é definido como:

> Envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos; (Brasil, 2017, p. 475)

Barcelos e Silveira (2012) relacionam o pensamento computacional com a matemática na busca de tendências do seu uso: a articulação dos símbolos, identificação de padrões e construção de modelos representativos.

Wing (apud Barcelos e Silveira, 2012, p. 4) agrupam o pensamento computacional sob as seguintes características:

- *Conceituar ao invés de programar*: consiste em subdividir um determinado problema em outros menores.
- *Habilidade fundamental e não utilitária*: não se resume em algo mecânico, mas algo que permite a solução de problemas diversos.
- *Maneira como as pessoas pensam*: o pensamento computacional refere-se a uma forma de tratar o problema com vistas a solucioná-lo.
- *Gerar ideias e não artefatos*: não consiste em produzir softwares como produto final, mas sim estabelecer rotina para solução de problemas.

A leitura e interpretação da linguagem matemática simbólica já é uma das habilidades esperadas, conforme a BNCC. Sendo assim, pensar na solução de um problema na linguagem algorítmica, essencial no pensamento computacional, definida como forma de solucionar problemas em procedimentos, assemelha-se à linguagem algébrica, já que, além de outros, usa-se variáveis e o conceito de generalização. (BARCELOS e SILVEIRA, 2012, p. 6)

Lembremos a definição de algoritmo trazida pela BNCC: “Um algoritmo é uma sequência finita de procedimentos que permite resolver um determinado problema.” (Brasil, 2017, p. 271). E: “Outra habilidade relativa à álgebra que mantém estreita relação com o pensamento computacional é a identificação de padrões para se estabelecer generalizações, propriedades e algoritmos”. (Brasil, 2017, p. 271)

Barcelos e Silveira (2012, p. 8), citam que a modelagem matemática e a busca de representar modelos que estabeleçam explicações concretas sem ambiguidade também está vinculada ao pensamento computacional. Softwares e ferramentas existentes possuem a intenção de analisar dados e permitir que alunos explorem e testem modelos para determinados fenômenos (por exemplo, o de contágio de uma doença).

Sendo a Cultura Digital intrínseca à educação e o pensamento computacional uma estratégia para atingir o pensamento matemático algébrico, resta estabelecer uma estratégia para o alcance da aprendizagem e que se cumpra as habilidades em álgebra nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Considerando o propósito de criar e manter um ambiente de trocas, diálogos para o desenvolvimento do pensamento e da linguagem, a Metodologia de Investigação Matemática se coloca como uma escolha natural: “Afinal, quem investiga está a procurar aprender e quem aprende pode ter muito interesse em investigar” (PONTE, 2003, p. 1)

Ponte (2003, p. 1) diz que não deveríamos separar o aprender do investigar. Ele ainda pontua que o “investigar” não é mais do que procurar conhecer e encontrar soluções para os problemas que surgem e ainda a eleva à capacidade de primeira importância para os cidadãos e, portanto, deve estar presente na escola. Na definição do “aprender”, especificamente em matemática, seu estudo diz que é

> O desenvolvimento integrado e harmonioso de um conjunto de competências e capacidades, que envolvem conhecimento de factos específicos, domínio de processos, mas também capacidade de raciocínio e de usar esses

> conhecimentos e processos em situações concretas, resolvendo problemas, empregando ideias e conceitos matemáticos para lidar com situações das mais diversas, de modo crítico e reflexivo. (PONTE, 2003, p. 3)

Aqui vale especificar como é uma atividade de investigação matemática. Para isso Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 20) descrevem momentos dentro desse tipo de atividade, que constam no quadro 01:

Exploração e formulação de questões	Reconhecer uma situação problemática, explorar a situação problemática e formular questões
Conjecturas	Organizar dados e formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	Realizar testes e refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	Justificar uma conjectura e avaliar o raciocínio ou resultado do raciocínio

Tabela 1 - Momentos na realização de uma atividade (Fonte: PONTE, BROCARDO, OLIVEIRA, 2009, p. 20)

Ponte (2003, p. 5) distingue um "problema" e uma "investigação" matemáticos, embora ambos tenham definições próximas.

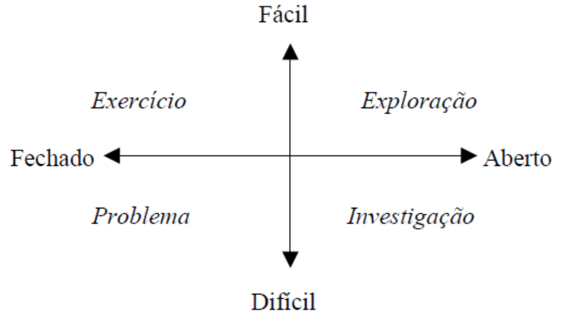

Figura 1 - Os diversos tipos de tarefas em termo de grau e abertura (Fonte: PONTE, 2003, p. 5)

É válido observar as diferenças entre situações que são caracterizadas por problemas das de investigação, nota-se que quando a classificação está relacionada ao grau de dificuldade, figurado acima como fácil e difícil, Ponte (2003, p. 5) esclarece que o ponto de partida que está no aluno é diferente entre eles, tornando-se difícil a distinção entre atividades de exploração e de investigação. Em particular, é consequência da heterogeneidade do conhecimento prévio que atividades com estas características são abertas.

Ponte (2003, p. 21) admite que essa metodologia, embora enriquecedora na questão da aprendizagem, não resolve todos os problemas da educação matemática, e que, também, não é baseada em opiniões e sim na racionalidade e que isso deve ser levado em conta na produção de propostas com essa linha de ação.

> Investigar não resulta de se conhecer a aplicar umas tantas técnicas de recolha de dados, sejam questionários ou entrevistas, e de fazer uma análise estatística ou de conteúdo. Pelo contrário, investigar pressupõe sobretudo uma atitude, uma vontade de perceber, uma capacidade para interrogar, uma disponibilidade para ver as coisas de outro modo e para pôr em causa aquilo que parecia certo. Investigar envolve sobretudo três actividades: estudar, conversar e escrever. (PONTE, 2003, p. 21)

Ponte, Oliveira e Cunha (1995, p. 2) consideram que o ato de investigar em matemática deve considerar que uma atividade deva englobar a identificação de questões, a formulação, o teste e a prova de conjecturas, a argumentação, a reflexão e a avaliação do próprio trabalho.

Dado o contexto histórico do ensino da matemática e das concepções que o fundamentam, os autores citados preocupam-se com a álgebra no ensino regular, visto que a sua abordagem tardia pode causar falhas na aprendizagem deste campo da matemática. Há, portanto, uma preocupação de que o ensino da álgebra já aconteça nos anos iniciais do Ensino Fundamental, sem a recomendação de que haja o formalismo simbólico das representações algébricas e fazendo uso do pensamento algébrico, que em suma, requer o diálogo e a interação, além da criação de um ambiente matemático propício para a discussão de conjecturas, testes e levantamento de hipóteses, momentos tais que o símbolo, a ideia de generalidade e regularidade podem dar espaço para uma cognição que torne o aluno preparado para a álgebra, tal como ela deve acontecer nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. O uso do pensamento computacional como estratégia para encarar situações matemáticas, aliado ao uso das tecnologias e no que tange ao ambiente sociomatemático que deve ser proporcionado pelo professor, reforçam que a comunicação na aprendizagem de matemática é essencial, o que justifica o uso da metodologia de investigação matemática aliada à tecnologia. Deste ponto, os autores defendem que as atividades de investigação matemática promovem oportunidades de explorar conceitos matemáticos importantes, desenvolvem a capacidade de encaminhar processos matemáticos e possibilita a inclusão de alunos com diferentes graus de aprendizagem, respeitando seus ritmos.

2. DEFINIÇÕES MATEMÁTICAS FORMAIS

Uma vez alvo desta proposta, o desenvolvimento do pensamento algébrico já nos anos iniciais, com o intuito de que os resultados do ensino da álgebra nos anos finais, como comumente acontece, ocorra de forma satisfatória e produtiva, é necessário fazermos o registro de certas definições formais academicamente aceitas que são base para tópicos de destaque da álgebra. Vale ressaltar que o rigor aqui usado não é aconselhável (nem prudente, conforme a BNCC) de ser exposto e aplicado aos alunos do Ensino Fundamental, no entanto conhecê-los é condição para que esteja claro o que será ensinado.

Definimos o conceito de igualdade, sequências, e termos relacionados à divisão de inteiros, justificado pelos objetos de conhecimento e habilidades, já descritas no primeiro capítulo da Base Nacional Comum Curricular, voltadas para os anos iniciais do Ensino Fundamental.

De acordo com Lima (2013, p. 12), no livro "Números e Funções Reais", temos a seguinte definição de igualdade: "Uma coisa só é igual a si própria. Quando escrevemos $a = b$, isso significa que a e b são símbolos (distintos) usados para designar o mesmo objeto."

A relação de igualdade goza de três propriedades. Sendo a, b e $c \in \mathbb{R}$, temos que: a *reflexividade:* $a = a$; a *simetria*: se $a = b$, então $b = a$; e a *transitividade:* se $a = b$ e $b = c$, então $a = c$.

Para definir matematicamente sequências, limitando-se ao Ensino Fundamental dos anos iniciais, é necessário recorrermos à definição do conjunto dos números naturais, funções e, somente depois, sequências.

> Números são entes abstratos, desenvolvidos pelo homem como modelos que permitem contar e medir, portanto avaliar as diferentes quantidades de uma grandeza. Número é o resultado da comparação entre uma grandeza e a unidade. (LIMA, 2013, p. 20)

O conjunto numérico infinito usado no nível mais elementar é o conjunto dos números naturais, representado por $\mathbb{N}$. A definição deste conjunto, dada a seguir, foi elaborada originalmente pelo matemático Peano. Dado $a \in \mathbb{N}$, seu sucessor $s(a) = a + 1$ também é um elemento de $\mathbb{N}$. De Lima (2013, p. 23)

i. Todo número natural tem um único sucessor;
ii. Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes;

iii. Existe um único número natural, chamado um, e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro;

iv. Seja X um subconjunto de números naturais (isto é, $X \subset \mathbb{N}$). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de cada elemento de X ainda pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

Dados $a, b \in \mathbb{N}$, dizemos que $a < b$, lê-se “a é menor do que b”, quando existe um número natural c tal que $a + c = b$.

Com a noção de conjunto, é possível enunciar a definição de função: dados os conjuntos X, Y, uma função f: $X \rightarrow Y$ (uma função de X em Y) é uma regra (ou conjunto de instruções) que diz como associar a cada elemento $x \in X$ um elemento único $y = f(x) \in Y$. A igualdade da definição é lida da seguinte forma: “y igual a f de x”. O conjunto X chama-se domínio e Y é o contradomínio da função f. Para cada $x \in X$ o elemento $f(x) \in Y$ chama-se imagem de x pela função f no ponto $x \in X$ (LIMA, 2013, p. 36).

Uma sequência numérica infinita nada mais é do que uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Existem sequências que apresentam alguma regularidade na progressão de cada elemento para o seguinte. Por exemplo, a sequência numérica (2, 4, 6, 8, 10,…), formada pelos números pares, pode ser definida pela função $f(n) = 2n$, com $n \in \mathbb{N}$. Desta forma, qualquer elemento desta sequência pode ser descrito pela expressão $2n$, com $n \in \mathbb{N}$.

As regularidades de sequências infinitas são fruto da generalização de observações de *sequências finitas*, que são de fato objeto do ensino nos anos iniciais. Sendo $I_n = \{1,2,\ldots,n\}$ o conjunto dos primeiros n números naturais, uma sequência finita é uma função com domínio em I_n.

Baseamo-nos em Hefez (2014, p. 46) para as definições relacionadas à divisibilidade. Dados dois números naturais a e b, dizemos que a *divide* b, escrevendo a|b, quando existir $c \in N$ tal que $b = ca$. Nesse caso, dizemos também que a é um *divisor* ou um *fator* de b ou, ainda, que b é um *múltiplo* de a ou que b é *divisível* por a.

Desta definição decorre que múltiplo é um produto qualquer entre uma quantidade e um natural. Por outro lado, um divisor é um natural que divide outro em partes inteiras e iguais. Por exemplo, alguns dos múltiplos de 5 são 5, 10, 15, 90, 100. Os divisores de 16 são 1, 2, 4, 8 e 16.

Quando um natural a não divide b, a divisão de b por a deixa um resto menor do que b, que é um número natural. Com isto, o conjunto de restos possíveis na divisão de um número natural a, variável, por um número natural b, fixo, é {0, 1, 2, 3, ..., b –

1}. Salientamos que 0 indica a situação em que a é múltiplo de b. Por exemplo, os possíveis restos na divisão por 7 são 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Dois naturais distintos podem deixar restos iguais quando divididos por um mesmo natural. Este é o caso 8 e 13, que quando divididos por 5, deixam resto 3.

3. O APLICATIVO ALGEBRIZAR

Para o cumprimento da proposta desse estudo, um aplicativo foi criado na intenção de mediar o trabalho do professor nos momentos de investigação. Tal metodologia requer o diálogo e a participação sistemática dos alunos, que devem propor soluções, conjecturar e questionar. Frente ao desafio dos educadores de promover a participação de todos os estudantes, o aplicativo tem também o papel de incentivador promovendo, além disso, o uso da tecnologia nas práticas pedagógicas com o fim de exercer o protagonismo e a autonomia dos alunos na própria aprendizagem.

O aplicativo de nome *Algebrizar* é uma coletânea de problemas fundamentada nas habilidades e competências da BNCC em formato de jogo, guiando o aluno na aquisição de conceitos e reflexões sobre regularidade, variação e generalização, principalmente no estudo de sequências, padrões e igualdades. Na sua função enquanto um jogo, o Algebrizar tem a proposta de monitorar o desempenho dos alunos no entendimento dos conceitos, que são previamente trabalhados pelos professores. Como uma ferramenta pedagógica, sua proposta visa estimular o pensamento algébrico que, antecedendo a linguagem algébrica, requer diálogo, discussão, levantamento de hipóteses e conclusões individuais ou coletivas.

Relatamos, a seguir, como a produção do aplicativo se deu para uma melhor compreensão da sua relação com o pensamento algébrico e dos benefícios do seu uso quando aliado à investigação matemática.

Uma vez que o foco da proposta são os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, o aplicativo precisava ter uma característica lúdica (cores, imagens e sons), fragmentada e progressiva (fases, pontuações e telas), o que exigia um produto que estivesse em constante interação com o aluno durante o seu uso. Para atingir essa demanda o aplicativo faz uso de três plataformas: *Kodular*, *phpMyAdmin* e páginas *PHP.* Tais plataformas justificam-se pelo seu código aberto e de uso livre.

O Kodular é um ambiente de desenvolvimento de aplicativos para celulares *Android* em forma de blocos encaixáveis e programáveis. Sua plataforma é aberta e de uso livre, tem a intenção de disseminar a criação de programas para leigos ou de conhecimentos avançados, o que justifica sua escolha.

O “phpMyAdmin” é um banco de dados, local onde ficarão as informações sobre pontuação, nível de desempenho dos alunos, cadastros de usuários e as observações feitas pelos alunos durante o seu uso. O que motiva a escolha dessa plataforma é que as informações não ficarão armazenadas no celular do usuário, portanto podem ser alteradas com o tempo. Por exemplo, as perguntas motivadoras que garantirão o momento de investigação podem ser modificadas quando tornarem-se obsoletas sem que haja a necessidade de instalar novamente o aplicativo ou fazer uma atualização.

As páginas PHP constituem uma linguagem de programação voltada para o desenvolvimento de páginas web. No aplicativo, seu uso é intercalado com o processamento do celular. Informações como pontuação, questionamentos, observações e desempenho que estarão fora do celular do usuário são processadas nestas páginas.

Outra ferramenta usada na produção do jogo é o de reconhecimento de fala e conversão em texto (e de texto em voz) nativo nos celulares, uma ferramenta da empresa *Google*[4]. Na intenção de preservar a característica de fala, simulando um ambiente de conversa, o jogo anuncia as fases pelas quais o aluno vai passar, dá explicação às regras da atividade e felicita as conquistas. Por outro lado, quando é exigido do aluno uma resposta ou um comentário, esse momento também é de conversa, ou seja, o aluno fala e através dessa ferramenta e o áudio é convertido em texto.

Com esse conjunto de plataformas e ferramentas de produção, o aplicativo *Algebrizar* pode ser instalado em um celular ou *tablet*, cujo sistema operacional seja Android e o seu uso exige uma conexão com a internet.

Durante a produção, algumas dificuldades foram enfrentadas. Erros de processamento dos blocos lógicos de programação, que causavam lentidão de processamento, são comuns quando há a necessidade de produção e uso de listas aleatórias, utilizadas na produção das atividades com sequências e padrões. Gerar sequências aleatórias possui o benefício de as atividades não serem sempre as mesmas ou repetidas para os alunos, logo é possível jogar novamente e promover

---

4 A empresa, atualmente, é proprietária do sistema operacional Android usado em celulares ou tablets. Logo, as ferramentas do aparelho usadas no aplicativo são gerenciadas pela Google (por exemplo, o uso do microfone)

certa diversidade de problemas, o que favorece um momento de investigação mais rico.

As imagens e os efeitos sonoros contidos no jogo foram retiradas do *Portal Domínio Público*[5] e do *Pixabay*[6]. Ambos os portais oferecem conteúdo aberto e de uso livre. Outros desenhos que caracterizam a jogabilidade (iniciar, voltar, avançar, sair, concluir etc.) foram de autoria.

A ferramenta encontra-se disponível na loja de aplicativos do Google para download. Utilizando o aplicativo *Play Store*[7], deve-se procurar pelo jogo Algebrizar. Sua licença de uso é gratuita.

A usabilidade do Algebrizar segue por meio de cadastros simples. O professor é o usuário que guiará o fluxo do jogo. Inicialmente, o professor precisa fazer o seu cadastro:

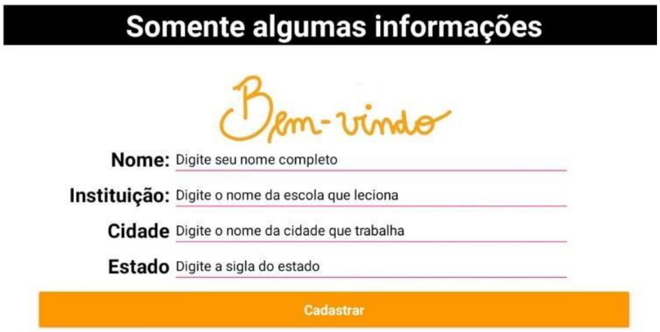

Figura 2 - Tela de cadastro de professor (Fonte: do autor)

Trata-se de uma coleta simples de informações. O jogo não exige e-mail nem confirmação do usuário, pois considera-se que não há a necessidade de segurança de dados, uma vez que a finalidade do aplicativo é educacional e não faz uso de informações sigilosas e nem pessoais. Ao final de um cadastro, os futuros acessos dos professores serão realizados através de códigos numéricos e estes serão informados no ato do cadastro.

5 Portal do governo brasileiro criado com a intenção de promover a disseminação de obras que já se encontram em domínio público, conforme a legislação. Acessível em: http://www.dominiopublico.gov.br

6 Comunidade internacional de compartilhamento de imagens e vídeos com licença gratuita, sem a necessidade de permissão para o uso. Acessível em: https://pixabay.com/

7 Aplicativo de propriedade da empresa Google responsável pelo repositório de jogos e aplicativos do sistema Android, local onde está disponível o jogo Algebrizar.

Em seguida, os professores precisam cadastrar suas salas e vincular os seus alunos a elas. Esta ação gerará os códigos numéricos dos alunos, que passarão a ser usuários do aplicativo (deverão ser informados os nomes dos alunos e as salas em que estudam).

Figura 3 - Tela de cadastro de alunos (Fonte: do autor)

Os professores deverão divulgar aos alunos os códigos de acesso para o início do jogo, que estarão em sua posse após os cadastros. Os filtros de acessos, através de códigos de usuários tornam-se necessários para que o professor faça o acompanhamento do desempenho dos alunos nas atividades propostas, bem como observar os comentários deixados por eles nos momentos de reflexão, fazendo a identificação dos alunos e suas ações, situação que não é possível em aplicativos de jogos usuais, sem cadastros prévios.

É função do professor também liberar as habilidades que ele deseja permitir que os alunos joguem. Neste caso, ele pode permitir ou bloquear fases do jogo conforme seu objetivo e usar esta ferramenta durante o ano nos momentos em que desejar propor o trabalho com a álgebra, sem que as propostas do jogo se esgotem logo de início.

Para o professor, as opções disponíveis estão representadas na imagem abaixo:

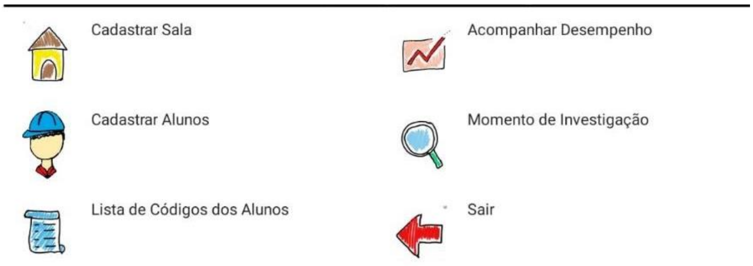

Figura 4 – Tela de opções dos professores (Fonte: do autor)

Os alunos ingressarão no jogo através do código de acesso fornecido pelo seu professor e, diante das habilidades liberadas pelo mesmo, iniciarão as atividades. A imagem a seguir descreve as opções disponíveis para os alunos:

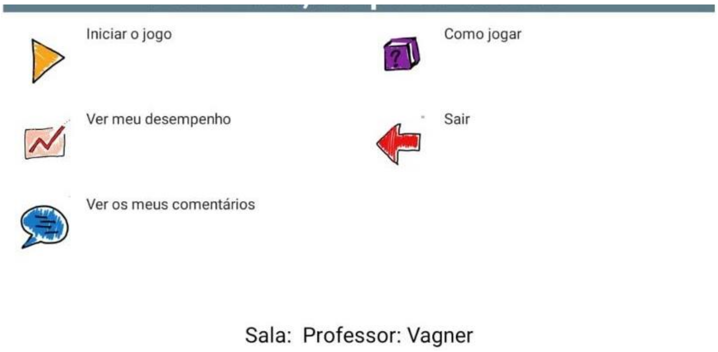

Figura 5 - Tela de opções de alunos (Fonte: do autor)

A jogabilidade do Algebrizar segue um roteiro dividido em fases, denominadas *jornadas* e *trilhas*. A proposta do jogo está diretamente ligada às habilidades de Matemática da unidade temática Álgebra descritas na BNCC. Cada jornada representa uma habilidade e as trilhas representam o caminho que o aluno seguirá no jogo para finalizar esta jornada, em outras palavras, para alcançar a habilidade.

Em cada trilha haverá uma série de problemas que explorarão os conceitos por trás das habilidades, os alunos só avançam para a próxima trilha ao alcançar 250 pontos, quantidade razoável para permanecer na trilha e explorar as tarefas propostas. Ao final de cada trilha o aluno é levado para uma seção de investigação, momento em que se depara com uma pergunta motivadora que o leva a fazer conclusões, observações, análises e conjecturas, não havendo respostas certas ou erradas. Por fim, quando todas as trilhas forem concluídas a jornada é dada como finalizada.

Baseado no planejamento do professor e na realidade local em que se encontra, o jogo pode ser usado dentro da sala de aula como também em casa, adequando-se ao seu objetivo. Entretanto, o uso do Algebrizar nas aulas não pode estar limitado à realização destas atividades na tela de um celular. Nesse sentido trata-se apenas de uma coletânea de problemas, o que não basta para alcançar o pensamento algébrico. Há, portanto, uma proposta pedagógica desta ferramenta que será explorada a seguir.

Na subdivisão de uma proposta de investigação matemática, conforme Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), o aplicativo encaminhará parte desse processo, promovendo momentos de exploração, contato com diversas situações e problemas para resolver, seguido de um momento para refletir, organizar e fazer conjecturas. No caso específico da álgebra, esses momentos levam o aluno a pensar de forma generalizada, além de reconhecer padrões e analisar variações de quantidades.

Em posse desses levantamentos o professor deve analisar cada resposta com a intenção de agrupar os diferentes níveis de alcance da habilidade e criar um ambiente de diálogo e discussão com essas observações realizadas durante o jogo, validando e invalidando, por meio de testes. Neste ambiente, refinar um argumento válido, justificar os posicionamentos e avaliar as conjecturas que os alunos formularam e concluíram se torna possível. Vale ressaltar a função mediadora do professor, pois todos os alunos que participam do jogo tiveram a reflexão que foi fornecida durante as trilhas. É importante incluir suas observações na investigação. Ainda na posição de mediador, o professor, para alcançar o objetivo de encaminhar um pensamento algébrico, que foi facilitado pelo uso do jogo, faz uso da questão que iniciou a investigação (contida no aplicativo) chegando em conclusões generalizadas, promovendo o uso simplificado de símbolos, reconhecendo com o grupo a variação que determinada grandeza pode possuir e verificar padrões e regularidades. O quadro a seguir demonstra a síntese do processo de investigação proposto:

Exploração	Realização das tarefas, baseadas nas habilidades da BNCC, através do jogo Algebrizar, conquistando pontos e vencendo as trilhas.
Conjecturas	Momento de reflexão no Algebrizar com uma pergunta motivadora em que o aluno é levado concluir regras ou levantar hipóteses sobre determinada situação tratadas no momento de exploração.
Testes e reformulação	Com as respostas em mãos o professor precisa agrupar e analisar os níveis de comentários e promover um momento de diálogo e trocas na sala, encaminhando a turma para uma conclusão colaborativa (reformular se for o caso) promovendo o pensamento algébrico.
Justificação e avaliação	Analisar a conclusão a que chegaram, fazendo uma avaliação de todo o processo e observando os resultados que o raciocínio levou.

Tabela 2 - Ações da Investigação Matemática com o uso do aplicativo Algebrizar e mediação do professor (Fonte: do autor)

Para exemplificar o conceito do aplicativo, abordaremos a jornada um do quarto do ano do Ensino Fundamental, intitulada "A ordem dos múltiplos". Essa jornada possui três trilhas que levarão o aluno a identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural.

A primeira trilha é chamada "Observe as mudanças" e tem o objetivo de fazer o aluno observar o comportamento de uma sequência quando se altera o padrão que a forma. Ela é caracterizada por uma situação onde o aluno escolhe um número natural qualquer e digita-o para formar sequências. Ao gerá-la, os primeiros vinte múltiplos deste número (inclusive o zero) se apresentarão em forma de sequência podendo ainda ser estendida por mais vinte outros múltiplos, pressionando o botão disponível. É interessante que nessa trilha o aluno não se limite aos números costumeiros (um, dois e três, por exemplo), justamente para conferir uma sequência de números com padrão de formação incomum ou múltiplos de um número. A cada formação de sequências o aluno aumenta seus pontos para concluir esta trilha. Finalizados os 250 pontos desta trilha o aluno será parabenizado e encaminhado para a tela de reflexão das seguintes perguntas:

- Existe algum número que esteja em todas as sequências?

- Todos os números geram sequências com números diferentes?
- Será que existe alguma sequência composta por todos os números?

A trilha dois, “Completando sequências”, possui o objetivo de completar sequências através da regra de formação dada. De forma inversa à trilha um, nesta etapa o aluno precisa seguir a regra de formação da sequência apontando quais termos faltam. Os números que geram as sequências são aleatórios (entre 1 e 100) e podem iniciar por qualquer termo (não necessariamente do zero). As três primeiras sequências dadas terão o seu padrão de formação identificado (por exemplo, múltiplos de 2, múltiplos de 7), enquanto as demais exigirão estratégias dos alunos para identificar e completar. Em todas as sequências o aluno terá três lacunas para preencher e ir pontuando até 250, momento em que será levado para as seguintes reflexões:

- Como você faz para encontrar um número em uma sequência de múltiplos?
- Você é capaz de descobrir qualquer um?

Para encerrar essa jornada, a trilha três, “Observe com atenção”, cujo objetivo é adquirir uma noção mais consolidada de um padrão em sequências, leva o aluno a refletir sobre as características dos números que compõe uma sequência. Espera-se que identifique que os números múltiplos de dois são todos pares, que os múltiplos de dez são terminados em zero e que os múltiplos de seis todos constam nas tabuadas do número dois e três. A cada noção adquirida de características comuns a pontuação vai aumentando até a pontuação máxima e, novamente, para a reflexão.

- Que características os múltiplos de 5 tem em comum?
- E os múltiplos de 4?
- E os de 11? (escreva no seu caderno para observar)

Após as três trilhas a jornada é finalizada e então o momento de investigação deve ser finalizado junto com o professor que terá em mãos todas as observações feitas pelos seus alunos. É importante que cada trilha tenha um momento de discussão e trocas em sala e que o professor separe os levantamentos feitos por nível de entendimento. As perguntas dessa trilha, por exemplo, levam o aluno a um pensamento generalizador, principalmente por se tratar de sequências, logo é necessário testar hipóteses levantadas, explorar as respostas, construírem justificativas e avaliarem.

É importante dar destaque ao espaço destinado para os professores para *feedbacks* das questões de investigação no aplicativo. Nessa tela os professores podem enviar sugestões de novas questões ou reformulações. Trata-se de um movimento colaborativo, o que faz o aplicativo estar em permanente construção, trazendo ainda a possibilidade de evoluir sua aplicabilidade em sala com o uso dos professores a quem o aplicativo se destina.

CONCLUSÃO

No sentido da fundamentação, do uso da linguagem matemática e das demonstrações o curso de Mestrado em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, mostra-se deveras importante, pois subsidia e reforça os conhecimentos matemáticos dos professores e eleva-os a um grau de entendimento mais amplo, promovendo, então, uma reflexão sobre como ensinar e mostrando-se importante para o desenvolvimento desta pesquisa.

A Matemática, por possuir sua própria simbologia e representações, exige muitas vezes um elevado grau de abstração. Careceria sentido iniciar a linguagem algébrica no Ensino Fundamental, por volta do 7° e 8° anos, sem que o aluno tenha os princípios do pensamento que lhe poderão garantir o domínio desta linguagem.

É acreditando na importância de iniciar a Álgebra nos primeiros anos de aprendizagem, a fim de minimizar as grandes dificuldades encontradas pelos professores e alunos quando iniciam assuntos como equações ou produtos notáveis, que esta proposta destina uma prática docente que promova o desenvolvimento do pensamento algébrico. Generalizar, identificar padrões, usar símbolos e perceber variação não são alcançadas somente por meio dos problemas neste estudo, portanto o diálogo e o ambiente sociomatemático que promova trocas de ideias é requisito para a exploração da álgebra, principalmente nessa etapa de ensino em que a criança experimenta o desenvolvimento das relações consigo e com os outros, o que torna a Investigação Matemática ideal para esse objetivo.

Com o jogo, pretendemos valorizar situações lúdicas de forma a incentivar a participação dos alunos diante de questionamentos que servirão de subsídio para a Investigação Matemática, que traz em seu bojo o questionamento, o levantamento e a formulação de hipóteses e, mediados pelos professores, a conclusão.

Durante a produção do aplicativo pensamos na formulação de problemas ligados as habilidades contidas na BNCC, que são priorizadas pelas trilhas em um caminho pelo qual o aluno explora e percorre para dominar tal habilidade, seguido de um momento de reflexão e elaboração de conjectura, justamente por isso, aconselhamos os professores que priorizem os momentos de testes e avaliação, analisando detidamente as observações deixadas pelos alunos durante o jogo, pois elas serão as norteadoras da investigação em sala.

REFERÊNCIAS

BARCELOS, T.S; SILVEIRA, I. F. **Pensamento Computacional e Educação Matemática: Relações para o Ensino de Computação na Educação Básica**. 32° Congresso Sociedade Brasileira de Computação – UFPR - Universidade Federal do Paraná - PR.

BLANTON, M; KAPUT, J. **Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades.** Advances in Mathematics Education. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011

BORRALHO, Antônio; BARBOSA, Elsa. **Pensamento algébrico e exploração de padrões**. APM – Associação dos Professores de Matemática. Disponível em: < http://www.apm.pt/files/_Cd_Borralho_Barbosa_4a5752d698ac2.pdf > Acesso em: 28/11/2016.

BRASIL. Constituição. Constituição da República Federativa do Brasil de 1988. Brasília, DF: Presidência da República. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Constituicao/ Constituiçao.htm. Acesso em: 10 mar. 2020.

BRASIL. Lei nº 9.394 de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da Educação nacional. Disponível em: www.planalto.gov.br/ccivil_03/LEIS/l9394.htm. Acesso em: 10 mar. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. Base nacional comum curricular. Brasília: MEC/SEB, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br Acesso em: 10 mar. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. Histórico da BNCC. Brasília: MEC/SEB, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/historico. Acesso em: 10 mar. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação – INEP **Relatório Brasil no PISA 2018 – Versão preliminar**. Brasília: INEP / Ministério da Educação, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação – INEP **Resumo técnico. Resultados do índice do desenvolvimento da Educação Básica**. Brasília: INEP / Ministério da Educação, 2017.

BRITT, Murray S.; IRWIN, Kathryn C. **Algebric Thinking with and whitout Algebraic Representation: A Pathway for Learning.** Advances in Mathematics Education. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011.

CARMO, Manfredo Perdigão do. **Considerações sobre o ensino de Matemática**. Bol. Soc. Bras. Mat. **v. 5**, pp. 105-112 1974.

Equipe do PFCM da ESE de Setúbal. **Pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade**. Programa de Formação Contínua em Matemática para

Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico 2010 – 2011.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**; Tradução de Domingues, Hygino H. Ed. 5. Campinas. Editora Unicamp, 2011.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria A; MIGUEL, Antônio. **Contribuição para um repensar ... a Educação Algébrica Elementar**. Pro-Posições. Campinas, 1993.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. Rio de Janeiro. Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.

HOUAISS. Dicionário eletrônico Houaiss da língua portuguesa. Disponível em: <https://houaiss.uol.com.br/>. Acesso em: 03 abr. 2020.

LIMA, Elon Lages. **Números e Funções Reais**. Rio de Janeiro. Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.

LIMA, José Roberto de Campos; BIANCHINI, Bárbara Lutaif. **A álgebra e o pensamento algébrico na proposta de Base Nacional Curricular Comum para os anos iniciais do Ensino Fundamental.** Revista de Produção Discente da Educação Matemática. Ed 1. São Paulo. 2017.

MIGUEL, Antônio; FIORENTINI, Dário; MIORIM, Maria A; **Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo?** Pro-Posições. Campinas, 1992.

MOURA, Anna R. Lanner; SOUZA, Maria do Camos de. **Dando movimento ao pensamento algébrico**. ZETETIKÉ – Cempem – FE – Unicamp SP – v. 16 – n. 30 – jul./dez. – 2008.

NACARATO, Adair M.; CUSTÓDIO, Iris A. **O desenvolvimento do pensamento algébrico na Educação Básica: compartilhando propostas de sala de aula com o professor que ensina (ensinará) matemática**. Brasília. Sociedade Brasileira de Educação Matemática. 2018.

NCTM – National Council of Teachers of Mathematics. **Principles and Standars for School Matematics**. 2000.

PONTE, J. P. **Investigar, ensinar e aprender**. In: Actas do ProfMat 2003. (CDROM, pp.25-39). Lisboa: APM, 2003.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H.; CUNHA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. In: Actas do ProfMat 1995 (p. 161 a 167), Lisboa: APM, 1995.

ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João Bosco P. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro. Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

SANTOS, Gefferson Luiz. SAVIOLI, Angela Marta Pereira das Dores. **Como**

professores e alunos do Ensino Médio lidam com conteúdo algébricos em sua produção escrita. Educação Matemática em Revista – RS. Ano 2010 número 11 v.1 p. 59 a 72.

SMOLE, Kátia S; DINIZ, Maria I; **Comunicação em matemática: instrumento de ensino e aprendizagem**. Disponível em: https://mathema.com.br/artigos/comunicacao-em-matematica-instrumento-de-ensino-e-aprendizagem/ Acesso em: 31 mar. 2020.

TELES, Rosinalda Aurora de Melo. **A aritmética e álgebra na matemática escolar**. Anais do VIII ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática - Minicurso GT 2 – Educação Matemática nas Séries Finais do Ensino Fundamental.

APÊNDICE

Ano	Habilidade na BNCC	Jornada	Trilhas	Objetivo
1º	EF01MA09 – Organizar e ordenar objetos familiares ou representações por figuras, por meio de atributos, tais como cor, forma e medida.	Cada coisa no seu lugar	01 – Separando itens por características	Reconhecer características em figuras e diferenciá-las separando em grupos
			02 – Ordenação de sequências	Organizar elementos conforme o tamanho das imagens
			03 – Reconhecendo elementos nas sequências	Observar uma sequência de imagens e apontar a que se difere da característica predominante
			04 – Identificando padrões de repetição	Analisar sequências de imagens e perceber padrões de repetição, apontando os próximos elementos da sequência
1°	EF01MA10 – Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão, os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras.	Contar para organizar	01 – Sequências incompletas - por características dos elementos	Identificar a regra de formação de uma sequência de imagens e apontar o elemento ausente
			02 – Contando objetos	Contar quantidade de objetos dispostos em sequências, trocando as figuras pelos símbolos numéricos que a quantifica, sem identificar o padrão.
			03 – Sequências incompletas – recorrer a elementos anteriores (números)	Identificar a regra de formação da sequência recursiva e completar o elemento ausente.
2°	EF02MA09 – Construir sequências de números naturais em ordem crescente ou decrescente a partir de um número qualquer, utilizando uma regularidade estabelecida.	Regras são regras	01 – Sequências repetitivas	Identificar o padrão de sequências repetitivas
			02 – Sequências recursivas	Identificar o padrão de sequências recursivas
			03 – Monte sua própria sequência	A partir de um número e padrão selecionado, construir sua própria sequência.
2°	EF02MA10 – Descrever um padrão (ou regularidade) de	Hora de escrever	01 – Construções de sequências	Montar sequências através de um comando na linguagem verbal

	sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos.		02 – Diga o padrão	Expressar, na linguagem verbal, a regra de formação da sequência
3°	EF03MA09 – Identificar regularidades em sequências ordenadas de números naturais, resultantes da realização de adições ou subtrações sucessivas, por um mesmo número, descrever uma regra de formação da sequência e determinar elementos faltantes ou seguintes.	Números obedientes	01 – Observe as mudanças	Observar o comportamento de uma sequência quando se altera o padrão que a forma (adição e subtração)
			02 – Completando sequências	Completar sequências através da regra de formação dada (com operações)
			03 – Diga o padrão	Expressar, na linguagem verbal, a regra de formação da sequência (com operações)
3°	EF03MA11 – Compreender a ideia de igualdade para escrever diferentes sentenças de adições ou de subtrações de dois números naturais que resultem na mesma soma ou diferença.	O uso da igualdade	01 – Apontar os iguais	Explorar o conceito da palavra igual formando relações entre as imagens
			02 – A igualdade nos números	Operar os números, somando ou subtraindo, a fim de conseguir uma igualdade
4°	EF04MA11 – Identificar regularidades em sequências numéricas compostas por múltiplos de um número natural.	A ordem dos múltiplos	01 – Observe as mudanças	Observar o comportamento de uma sequência quando se altera o padrão que a forma (multiplicação)
			02 – Completando sequências	Completar sequências através da regra de formação dada (com operações)
			03 – Observe com atenção	Adquirir uma noção mais consolidada de um padrão em sequências
4°	EF04MA12 – Reconhecer, por meio de investigações, que há grupos de números naturais para os quais as divisões por um	Os restos são úteis	01 – Reconhecendo o resto em uma divisão	Identificar o resto no processo de divisão
			02 - Os restos de um número	Concluir a quantidade possíveis de restos de qualquer número

	determinado número resultam em restos iguais, identificando regularidades.		03 – Números diferentes, restos iguais	Perceber que números diferentes deixam restos iguais e observá-los em uma sequência
4°	EF04MA13 – Reconhecer, por meio de investigações, utilizando a calculadora quando necessário, as relações inversas entre as operações de adição e de subtração e de multiplicação e de divisão, para aplicá-las na resolução de problemas.	Todas operações	01 – Relação entre a adição e a subtração	Identificar a operação inversa na tentativa de encontrar o número que falta
			02 – Relação entre a multiplicação e divisão	Identificar a operação inversa na tentativa de encontrar o número que falta
4°	EF04MA14 – Reconhecer e mostrar, por meio de exemplos, que a relação de igualdade existente entre dois termos permanece quando se adiciona ou se subtrai um mesmo número a cada um desses termos.	Igual é igual!	01 – Construindo igualdades	Montar relações de igualdade usando números e operações que desejar
			02 – Igualdade e desigualdade	Modificar livremente os membros de uma relação desigual entre operações, a fim de tornar essa relação uma igualdade
5°	EF05MA10 – Concluir, por meio de investigações, que a relação de igualdade existente entre dois membros permanece ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir cada um desses membros por um mesmo número, para construir a noção de equivalência.	Igual para sempre	01 – Construindo igualdades	Montar relações de igualdade usando números e operações que desejar (com multiplicação e divisão)
			02 – Igualdade e desigualdade	Modificar livremente os membros de uma relação desigual entre operações, a fim de tornar essa relação uma igualdade
5°	EF05MA11 – Resolver e elaborar problemas cuja conversão em sentença matemática seja uma igualdade com uma operação em que um dos termos é desconhecido.	Palavras em números	01 – Explorando situações problemas	Converter a linguagem verbal de uma situação problema em uma igualdade e apontar o termo desconhecido

5°	EF05MA12 – Resolver problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta entre duas grandezas, para associar a quantidade de um produto ao valor a pagar, alterar as quantidades de ingredientes de receitas, ampliar ou reduzir escala em mapas, entre outros.	Um pouco mais de problemas	01 – Calculadora de proporção	Observar o comportamento das grandezas proporcionais quando se altera uma de suas quantidades
			02 – Reconhecendo proporcionalidades	Operar corretamente para encontrar o valor proporcional em uma situação dada
5°	EF05MA13 – Resolver problemas envolvendo a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, tais como dividir uma quantidade em duas partes, de modo que uma seja o dobro da outra, com compreensão da ideia de razão entre as partes e delas com o todo.	Tem para todos	01 – Separando quantidades por partes e agrupar de forma desigual	Observar o fracionamento de uma quantidade e distribuí-los de forma desigual
			02 – Situações problemas	Reconhecer que a soma das partes totaliza a quantidade inicialmente fornecida. Converter a situação problema em linguagem matemática.

Tabela 3 - Jornadas e trilhas do jogo Algebrizar (Fonte: do autor)