



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

DIEGO NOGUERA

**EMARANHAMENTO DE DOIS MODOS DE CAMPO NUMA
CAVIDADE ÓPTICA POR INTERAÇÃO COM ÁTOMOS DE
TRÊS NÍVEIS**

DIEGO NOGUERA

**EMARANHAMENTO DE DOIS MODOS DE CAMPO NUMA
CAVIDADE ÓPTICA POR INTERAÇÃO COM ÁTOMOS DE
TRÊS NÍVEIS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dra. Santosh Shelly Sharma.

Londrina
2014

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da
Universidade Estadual de Londrina**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

M152e Maciel, Diego Gilberto Noguera.

Emaranhamento de dois modos de campo numa cavidade óptica por interação com átomos de três níveis / Diego Gilberto Noguera Maciel. – Londrina, 2014. 104 f. : il.

Orientador: Santosh Shelly Sharma.

Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2014.

Inclui bibliografia.

1. Teoria de campos (Física) – Teses. 2. Mecânica quântica – Teses. 3. Teoria quântica de campos – Teses. 4. Lasers – Teses. 5. Campos eletromagnéticos – Teses. I. Sharma, Santosh Shelly. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

CDU 530.145

DIEGO NOGUERA

**EMARANHAMENTO DE DOIS MODOS DE CAMPO NUMA CAVIDADE
ÓPTICA POR INTERAÇÃO COM ÁTOMOS DE TRÊS NÍVEIS**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Profa. Dra. Santosh Shelly
Sharma
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Prof. Dr. Renato Moreira Angelo
Universidade Federal do Paraná – UFPR

Prof. Dr. Manuel Simões Filho
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Londrina, 12 de Dezembro de 2014.

AGRADECIMENTOS

À Professora Dra. Santosh Shelly Sharma, pela orientação

À CAPES, pelo apoio e suporte financeiro.

NOGUERA, Diego. **Emaranhamento de dois modos de campo numa cavidade óptica por interação com átomos de três níveis**. 2014. 104 f. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

RESUMO

Neste trabalho estuda-se o emaranhamento entre dois modos de campo de uma cavidade por interação com átomos de três níveis. Apresenta-se uma análise da dinâmica de um sistema de átomos de três níveis interagindo com dois campos de laser e dois modos de uma cavidade. São considerados um átomo no caso sem perda de coerência (causada pelo decaimento espontâneo) e N átomos no caso com perda de coerência. Analisa-se o emaranhamento entre os modos de campo quantizado da cavidade usando a soma de variâncias dos operadores tipo EPR para os dois casos. Para o caso sem perda de coerência, estuda-se o valor médio do campo elétrico na cavidade. Usando a negatividade é estudada a transferência de emaranhamento. Para o caso com perda de coerência, mostra-se que nas condições estacionárias da soma das variâncias dos operadores tipo EPR, é possível aproximar-se do estado maximamente emaranhado para variáveis contínuas pela manipulação dos campos de laser e o uso de cavidades de alta qualidade.

Palavras-chave: Emaranhamento. Átomo de três níveis. Cavidade óptica.

NOGUERA, Diego. **Entanglement of two field modes in an optical cavity by interaction with three-level atoms**. 2014. 104 p. Dissertation (Master's Degree Dissertation) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

ABSTRACT

In this work we study the entanglement of the fields in an optical cavity by interaction with three-level atoms. The system consist in N three-level atoms interacting with two laser fields and two field modes of a cavity. We consider only one atom for the case without loss of coherence (by spontaneous decay) and N atoms for the case with loss of coherence. The entanglement of the fields in the cavity is analized with the criterion of the sum of EPR-like operators for both cases. For the case without lost of coherence, we study the mean value of the electric field. Using the negativity we study the transference of entanglement. For the case with loss of coherence, it is shown that is possible to approach the maximally entangled state for continuous variables by changing the intensity of the laser beams and using a high quality cavity.

Keywords: Entanglement. Three level atom. Optical cavity.

LISTA DE FIGURAS

2.1	Diagrama dum átomo de três níveis interagindo com campos de laser de frequências de Rabi Ω_1 e Ω_2 . As dessintonias para cada laser são Δ_1 e Δ_2 . As constantes de decaimento para as transições $ 2\rangle \rightarrow 1\rangle$ e $ 3\rangle \rightarrow 2\rangle$ são dadas por γ_1 e γ_2	34
3.1	Átomo de três níveis interagindo com dois campos de laser de frequências de Rabi Ω_1 e Ω_2 . A taxa de decaimento para a transição $ 3\rangle \rightarrow 1\rangle$ é γ_1 , a taxa de decaimento para $ 3\rangle \rightarrow 2\rangle$ é γ_2 . A dessintonia entre a frequência do modo de campo quantizado ν_1 e a frequência da transição $ 1\rangle - 3\rangle$ é δ_1 , a dessintonia entre a frequência do modo de campo quantizado ν_2 e a frequência da transição $ 1\rangle - 3\rangle$ é δ_2	46
3.2	$V(T)$ em função do parâmetro adimensional T para os valores da razão $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{5}{10}$, $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{7}{10}$, e $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{9}{10}$	60
3.3	Soma de variâncias $V(T, \Omega_1/\Omega_0)$ como função de T e Ω_1/Ω_0	61
3.4	Valor médio do campo elétrico $\langle E \rangle / E_0$ em função do parâmetro adimensional T para os valores da razão $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{5}{10}$, $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{7}{10}$, e $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{9}{10}$	62
3.5	Valor médio do quadrado do campo elétrico $\langle E^2 \rangle / E_0^2$ em função do parâmetro adimensional T para os valores da taxa $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{5}{10}$, $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{7}{10}$, e $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{9}{10}$	63
3.6	Quadrado da negatividade $[N_G^A]^2$ em função do parâmetro $T = gt$ para os valores da taxa $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{5}{10}$, $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{7}{10}$, e $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{9}{10}$	64
3.7	Quadrado da negatividade $[N_G^c]^2$ em função do parâmetro $T = gt$ para os valores da taxa $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{5}{10}$, $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{7}{10}$, e $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{9}{10}$	66
4.1	$V(t)$ para o estado inicial $ 00\rangle$, considerando as razões $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{5}{10}$, $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{7}{10}$, e $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{9}{10}$, e as constantes $g^2N = 10\gamma^2$ e $\kappa = 0,01\gamma$	83
4.2	$V(t)$ para o estado inicial $S(r) 00\rangle$, considerando as razões $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{1}{2}$, $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{7}{10}$, e $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{9}{10}$, e as constantes $g^2N = 10\gamma^2$ e $\kappa = 0,01\gamma$	84
4.3	$V_{estacionario}$ para os valores das constantes $g^2N = 0,5\gamma^2$, $\kappa = 0,1\gamma$, $\kappa = 0,01\gamma$ e $\kappa = 0,001\gamma$	88
4.4	$V_{estacionario}$ para os valores das constantes $g^2N = 10\gamma^2$, $\kappa = 0,1\gamma$, $\kappa = 0,01\gamma$ e $\kappa = 0,001\gamma$	89

LISTA DE TABELAS

4.1	$t_{\chi=0,05}$ para as razões $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{1}{2}$, $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{7}{10}$, e $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{9}{10}$	86
4.2	$t_{\chi=0,05}$ para $g^2N = 1\gamma^2$, $g^2N = 5\gamma^2$, $g^2N = 10\gamma^2$ e $g^2N = 100\gamma^2$	86
4.3	$t_{\chi=0,05}$ para $\kappa = 0, 1\gamma$, $\kappa = 0, 01\gamma$, e $\kappa = 0, 001\gamma$	87

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	CONCEITOS BÁSICOS	16
2.1	Quantização do campo eletromagnético	16
2.2	Operadores de campo comprimido	21
2.3	Interação entre átomos e campo eletromagnético	23
2.3.1	Transição entre dois níveis atômicos por interação com um laser	23
2.3.2	Interação entre um átomo de dois níveis e um modo do campo de uma cavidade	25
2.4	Evolução de um sistema quântico aberto	27
2.4.1	Equação mestra	27
2.4.2	Transparência eletromagneticamente induzida	33
2.5	Teoria do Emaranhamento	37
2.5.1	Decomposição de Schmidt	37
2.5.2	Critério de Peres-Horodecki	38
2.5.3	Pureza e entropia linear	39
2.5.4	Negatividade Global	40
2.5.5	Emaranhamento para variáveis contínuas	40
2.6	Critério de emaranhamento dos modos de campo da cavidade	42
3	DINÂMICA DO SISTEMA SEM DISSIPACÃO	45
3.1	O sistema	45
3.2	Operador de evolução unitária	50
3.2.1	Operador de evolução unitária para o sistema com a razão $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} < 1$	50
3.3	Emaranhamento entre os modos de campo quantizado da cavidade	54
3.4	Estado inicial atômico $ \varphi\rangle = 3\rangle$	58
3.4.1	Cálculo da soma de variâncias dos operadores tipo EPR	59
3.4.2	Campo elétrico na cavidade	61
3.4.3	Cálculo da negatividade global	63
4	DINÂMICA DO SISTEMA COM DISSIPACÃO	68
4.1	Equação mestra para o sistema	68
4.1.1	Equação mestra para o operador de estado dos modos de campo da cavidade	71
4.1.2	Aproximação das soluções quase-estacionárias	73

4.2	Emaranhamento entre dois modos de campo quantizado da cavidade	78
4.2.1	Cálculo da soma das variâncias $V(t)$	78
4.2.2	Evolução temporal do emaranhamento	82
4.2.3	Solução estacionária para $V(t)$	84
4.3	Viabilidade experimental	89
5	CONCLUSÕES	91
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	93
	APÊNDICES	96
	APÊNDICE A - Operador de evolução unitária. Caso 2: $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} > 1$	96
	APÊNDICE B - Operadores no espaço associado aos modos de campo quantizado da cavidade	100
	APÊNDICE C - Operadores $\tilde{\rho}_{kk'}^{(j)} = \langle k_j \tilde{\rho} k'_j \rangle$	101
	APÊNDICE D - Operadores densidade dos subsistemas	103

1 INTRODUÇÃO

O emaranhamento é um dos fenômenos mais interessantes da mecânica quântica. Foi estudado já nos inícios desta teoria, por exemplo, no trabalho apresentado por Schrödinger (SCHRÖDINGER, 1935) [13], e também no artigo apresentado por Einstein (EINSTEIN; PODOLSKY; ROSEN, 1935) [14]. O estado puro de um sistema quântico pode ser representado por um vetor que pertence a um espaço de Hilbert. Existem casos onde o vetor de estado do sistema não pode ser escrito como um produto tensorial dos vetores de estado dos subsistemas, diz-se então que os subsistemas estão emaranhados (NIELSEN; CHUANG, 2000, p.96). Dois sistemas (ou subsistemas de um estado puro) emaranhados possuem uma correlação entre eles. Nas últimas décadas o estudo do emaranhamento ganhou um novo interesse a partir da proposta de um simulador quântico universal feita por Feynman (FEYNMAN, 1982) [15] e do computador quântico universal proposto por Deutsch (DEUTSH, 1985) [16]. Muitas possíveis aplicações do emaranhamento foram estudadas a partir desse momento, como por exemplo, o código denso, que é utilizado para comunicar dois bits clássicos operando de forma unitária sobre um qubit (BENNETT; WIESNER, 1992) [17]. Outro exemplo de uma possível aplicação do emaranhamento é a teleportação quântica, onde um estado quântico desconhecido $|\phi\rangle$, pode ser destruído e posteriormente reconstruído a partir de informação puramente clássica e das correlações quânticas entre duas partículas de spin $1/2$ num estado singlete (BENNETT et al., 1993) [18].

Existem diversos sistemas físicos que podem ser usados para o processamento quântico de informação. Usando-se eletrodinâmica quântica em cavidades, a computação quântica pode ser implementada colocando-se átomos individuais numa cavidade óptica. Pelo acoplamento dipolar com os campos da cavidade, os átomos interagem com os fótons da cavidade. Usando-se cavidades de alta qualidade aumenta-se a oportunidade dos átomos de interagir antes de escapar, o acoplamento é melhorado, e a evolução causada pela interação átomo-cavidade pode dominar sobre os processos de decaimento (SCHMIDT et al., 2000, p.134) [37]. A computação quântica usando íons aprisionados pode ser implementada esfriando íons numa armadilha linear até que sua energia cinética seja muito menor que a contribuição energética do spin. Interagindo com campos de laser, as portas quânticas que estão constituídas por pares, tripletos ou subconjuntos de íons, podem ser preparados acoplando íons através de um movimento quantizado coletivo, como na referência (CIRAC; ZOLLER, 1995) [38] ou (TURCHETTE et al., 1998) [19]. A computação quântica via ressonância magnética nuclear pode ser implementada usando-se ensembles de moléculas inicialmente no estado térmico. Os estados de spin moleculares são usados como qubits e as operações sobre eles são aplicadas usando campos magnéticos (GERSHENFELD; CHUANG, 1997).

Em caso de que sejam utilizadas cavidades ópticas, a interação entre um meio atômico e o campo eletromagnético proporciona as ferramentas para o controle de um sistema quântico, além disso permitem também a geração de estados emaranhados. Quando os átomos são colocados numa cavidade óptica, eles interagem com um ou dois modos normais da cavidade, isto permite usar o meio atômico como intermediário para controlar a dinâmica do sistema (MÜCKE et al., 2010) [28], e gerar estados emaranhados (BLAIS et al., 2004) [20]. Além de usar a interação entre os átomos e o campo eletromagnético para poucos átomos e fótons, podemos também considerar sistemas de variáveis contínuas (BRAUSTEIN; VAN LOOCK, 2005) [21]. Aplicar campos de laser num meio atômico que interage com a cavidade pode gerar efeitos não lineares como é discutido no trabalho (IMAMOĞLU et al., 1997) [22].

No caso em que um sistema composto $A + B$ seja considerado como um sistema fechado, sua evolução temporal será unitária. Pelos postulados da mecânica quântica sabemos que a evolução temporal de um vetor de estado $|\psi(t)\rangle$ para um sistema fechado está dada pela equação de Schrödinger. Da equação de Schrödinger pode ser obtido um operador unitário $U(t, t_0)$ que transforma um estado inicial $|t_0\rangle$ em um estado $|\psi(t)\rangle$ para o tempo t , por isso a evolução de um sistema fechado é conhecida como evolução unitária. A evolução temporal de um estado misto pode ser descrita pela atuação do operador $U(t, t_0)$ sobre o operador densidade inicial do sistema $\rho(t_0)$. A dinâmica do subsistema A será obtida pelo traço parcial nos graus de liberdade do subsistema B . A evolução temporal do subsistema A em geral não é unitária (AUDRETSCH; 2007, p. 273) [34]. A dinâmica de um estado de campo quantizado da cavidade é representada pelo traço parcial nos estados atômicos da matriz densidade do sistema meio atômico-cavidade.

Isolar completamente o sistema meio atômico-cavidade não é possível, então, considerar fechado o sistema meio atômico-cavidade é uma aproximação. Quando a interação com o ambiente deixa de ser desprezível, o estado do sistema meio atômico-cavidade é obtido fazendo o traço parcial nos estados do ambiente do sistema meio atômico-cavidade-ambiente (BREUER; PETRUCCIONE, 2002, p.115) [6]. A interação dos modos de campo do ambiente com os átomos gera o decaimento dos níveis de energia atômicos. Esse decaimento é ocasionado pela emissão espontânea, que consiste na transição do átomo do estado excitado para o estado fundamental emitindo um fóton que é adicionado a um dos modos de campo do ambiente (GRIENER, 1998, p.31) [9]. A reflexão dos espelhos numa cavidade óptica não é perfeita, isto induz uma perda de fótons dos modos da cavidade pela interação com os modos de campo do ambiente. A razão de decaimento pelo vazamento esta dada pelo quociente entre a frequência do modo da cavidade e o fator de qualidade (YAMAMOTO; IMAMOGLU, 1999, p.151) [39]. Levando em conta os decaimentos do meio atômico e a cavidade, o sistema meio atômico-cavidade tem que ser tratado como um sistema aberto. As interações entre o ambiente e sistema meio atômico-cavidade geram correlações entre eles. Depois de fazer o traço parcial

nos estados do ambiente, alguns conjuntos de estados mostram propriedades estáveis enquanto as estações superposições entre esses estados são destruídas ao longo do tempo. Esta destruição dos termos de coerência da matriz densidade induzida pelo ambiente é conhecida como decoerência (BREUER; PETRUCCIONE, 2002, p.219) [6]. A decoerência é frequentemente utilizada para explicar o motivo pelo qual superposições de sistemas macroscópicos em geral não são observadas (NIELSEN; CHUANG, 2000, p.387) [10]. Como consequência da decoerência causada pela dissipação, os termos de população da matriz densidade do sistema atingem valores estacionários. Na presença da decoerência a evolução do sistema $S = A + B$ acoplado a o ambiente R não é unitária. Um método para tratar este tipo de evolução é lembrando que para obter o operador densidade do sistema podemos fazer o traço nos estados do ambiente R do operador densidade do sistema total $S + R$. Isto é equivalente a definir uma função entre o espaço dos operadores densidade de $S + R$ e o espaço dos operadores densidade de S , esta função é conhecida como operação quântica \mathcal{E} . Uma operação quântica pode ser definida exigindo que cumpra três propriedades: ter traço entre zero e um, ser completamente positiva e linear convexa (NIELSEN; CHUANG, 2000, p.367) [10]. Quando as escalas de tempo características de decaimento das funções de correlação do ambiente são muito menores do que as escalas de tempo características da evolução do sistema S , então podemos utilizar uma aproximação markoviana. Neste caso a dinâmica do sistema pode ser descrita pela equação diferencial conhecida como equação de Lindblad (BREUER; PETRUCCIONE, 2002, p.123) [6], que corresponde a uma evolução não unitária.

Um estado emaranhado de variáveis contínuas para dois modos de uma cavidade óptica ressonante pode ser gerado por métodos como a conversão paramétrica descendente (OU; et al., 1992) [23], ou pela geração de emaranhamento em um laser de batimento quântico de dois modos (IKRAM; LI; ZUBAIRY, 2007) [35]. Os termos de população da matriz densidade do sistema atingem valores estacionários como consequência da perda de coerência causada pela dissipação. Isso é usado para a geração de estados emaranhados de variáveis contínuas em trabalhos como (LI; HU, 2009) [24], (CHENG et al., 2008) [27] ou (PIELAWA et al., 2007) [36]. Nestes trabalhos o emaranhamento entre os modos da cavidade é estudado nas condições estacionárias assintóticas. Um problema importante na implementação experimental destes tipos de técnicas é preparação do estado inicial do sistema. Um sistema muito interessante onde não se tem o problema da preparação de um estado inicial específico é o sistema proposto por (CHENG; HU; ZHONG, 2009) [2], onde se estuda o emaranhamento tipo EPR via interações ressonantes não lineares melhoradas por transparência eletromagneticamente induzida. Quando a dinâmica do sistema de interesse é conhecida precisamos de algum critério que possa determinar se há emaranhamento. Para variáveis discretas pode ser usado o critério de Peres-Horodecki (HORODECKI, 1997) [1] que permite definir a negatividade global (VIDAL; WERNER, 2002) [25]. Para variáveis contínuas temos o critério proposto por (DUAN et al., 2000) [3] assim como uma generalização do critério de Peres-Horodecki (SIMON, 2000) [26]

para estados gaussianos.

O objetivo principal deste trabalho é o estudo dos estados emaranhados de fótons numa cavidade óptica por interação com um meio atômico. O trabalho está estruturado da forma seguinte: No capítulo 2 serão apresentados os conceitos básicos necessários para o estudo da interação entre os átomos e o campo eletromagnético, o emaranhamento bipartido e a análise do emaranhamento. No capítulo 3 será estudado um sistema formado por N átomos de três níveis interagindo com dois modos de campo quantizado de uma cavidade e dois campos de lasers. Como os fótons não interagem entre eles, os átomos atuam como agentes intermediários para o controle do sistema usando lasers. Os estados $|1\rangle$ e $|2\rangle$ estão acoplados entre eles em forma ressonante por um campo de laser de frequência de Rabi Ω_1 . O estado $|2\rangle$ está acoplado em forma ressonante com o estado excitado $|3\rangle$ por outro campo de laser de frequência de Rabi Ω_2 . Dois modos de campo da cavidade associados aos operadores aniquilação \hat{a}_1 e \hat{a}_2 são gerados numa transição $|1\rangle \rightarrow |3\rangle$, sem os lasers o sistema seria reduzido a um sistema de dois níveis $|1\rangle, |3\rangle$. Será obtida uma expressão que descreva a dinâmica sem dissipação para o caso em que temos um único átomo na cavidade. Usando o critério proposto por Duan (DUAN et al., 2000) [3], que consiste em uma desigualdade que contém a soma das variâncias de dois operadores tipo EPR, será analisado o comportamento do emaranhamento entre os fótons de campo quantizado da cavidade. Usando a negatividade global será estudada a transferência de emaranhamento entre o sistema átomo-modos de campo, assim como o emaranhamento entre modo de campo comprimido e o resto do sistema átomo-modos de campo. No capítulo 4 apresentamos uma expressão que descreva dinâmica do sistema quando os efeitos dos decaimentos espontâneos não podem ser desprezados. Nesse caso, a evolução temporal do sistema não é unitária. Usando o critério proposto por Duan (DUAN et al., 2000) [3] analisamos o emaranhamento, entre os modos de campo quantizado. Para o caso com dissipação será analisado o emaranhamento entre os estados dos fótons de dois modos quantizados da cavidade para as soluções estacionárias assintóticas das variâncias de um par específico de operadores (que são utilizados no critério de Duan [3]). Este trabalho começa com o estudo do artigo (CHENG; HU; ZHONG, 2009) [2], estudamos também a evolução unitária e as soluções para um tempo t arbitrário das variâncias dos operadores tipo EPR para a evolução não unitária. Discutiremos brevemente a viabilidade experimental do modelo. No capítulo 5 serão apresentadas as considerações finais.

2 CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo apresentaremos os conceitos básicos necessários para o estudo da interação entre os átomos e o campo eletromagnético, tais como a quantização do campo eletromagnético, os operadores de campo comprimido, a transição entre dois níveis atômicos por interação com um campo de laser, e a interação entre um átomo de dois níveis e um modo do campo de uma cavidade. Para descrever a dinâmica de um sistema que possui decaimento dos níveis de energia atômicos e decaimento dos modos da cavidade será apresentada a equação mestra markoviana que descreve a evolução de um sistema quântico aberto. Será estudado também um caso particular onde se apresenta o fenômeno da transparência eletromagneticamente induzida, com o propósito de apresentar um exemplo de como as propriedades do meio atômico podem ser controladas usando campos de lasers. Finalmente serão apresentados os conceitos de emaranhamento e a teoria básica do emaranhamento bipartido. Como o emaranhamento entre os modos de campo quantizado da cavidade pode envolver as variáveis contínuas, apresentamos um critério de Duan (DUAN et al., 2000) [3] para detectar o emaranhamento dos estados gaussianos. Fazendo uso deste critério será escrita uma função $V(t)$ que represente o emaranhamento em função do tempo.

2.1 QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Em muitos casos a radiação eletromagnética não pode ser tratada em forma clássica, um bom exemplo é o efeito fotoelétrico. Para este e outros casos onde os efeitos quânticos não podem ser desprezados precisamos quantizar o campo eletromagnético. Nesta seção discutiremos a quantização do campo eletromagnético no caso particular em que o campo esteja confinado num volume finito. Neste caso o campo eletromagnético pode ser descrito em termos dos modos normais de campo, o que facilita o processo de quantização. Seguindo o procedimento encontrado em (GREINER, 1998, p. 5) [9], as equações de Maxwell sem fontes são

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (2.1d)$$

O campo elétrico \mathbf{E} e o campo magnético \mathbf{B} podem ser expressos em termos do potencial vetor \mathbf{A} e o potencial escalar φ , da seguinte forma

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \varphi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.2)$$

Usando as equações de Maxwell e o gauge de Coulomb,

$$\varphi = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.3)$$

obtemos a equação de onda para o potencial vetor,

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}. \quad (2.4)$$

Confinando o campo eletromagnético numa caixa cubica de volume L^3 . As condições de fronteira sobre \mathbf{A} são

$$\mathbf{A}(L, y, z, t) = \mathbf{A}(0, y, z, t), \quad (2.5a)$$

$$\mathbf{A}(x, L, y, t) = \mathbf{A}(x, 0, y, t), \quad (2.5b)$$

$$\mathbf{A}(x, y, L, t) = \mathbf{A}(x, y, 0, t). \quad (2.5c)$$

Para os modos normais todos a graus de liberdade oscilam com a mesma frequência, logo

$$\mathbf{A}(x, y, z, t) = \mathbf{A}(x, y, z) e^{i\omega t}, \quad (2.6)$$

e usando as expressões (2.4) e (2.6),

$$\left(\Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \mathbf{A}(x, y, z) = 0, \quad (2.7)$$

a solução normal é dada por

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}\sigma} = N_k \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}\sigma} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (\sigma = 1, 2), \quad (2.8)$$

onde

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega_{\perp}^2}{c^2}, \quad (2.9)$$

or $\omega_k = c^2 \omega^2$, o fator de normalização N_k será determinado posteriormente. Os vetores de polarização $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}1}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}2}$ são perpendiculares ao vetor de onda \mathbf{k} , isto é,

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}\sigma} \cdot \mathbf{k} = 0. \quad (2.10)$$

Os vetores de polarização são dois vetores linearmente independentes ortogonais entre si, isto é,

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}\sigma} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}\sigma'} = \delta_{\sigma\sigma'}. \quad (2.11)$$

O vetor de onda \mathbf{k} têm a forma

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) = \frac{2\pi}{L} \{n_1, n_2, n_3\}, \quad n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}, \quad (2.12)$$

onde n_i são números inteiros.

A solução mais geral para o campo \mathbf{A} é uma superposição de todos os modos normais. Esta superposição é igual a uma série de Fourier:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k} \in \{\mathbf{k} | k_z > 0\}} \sum_{\sigma=1,2} [a_{\mathbf{k}\sigma}(t) \mathbf{A}_{\mathbf{k}\sigma}(\mathbf{x}) + a_{\mathbf{k}\sigma}^*(t) \mathbf{A}_{\mathbf{k}\sigma}^*(\mathbf{x})], \quad (2.13)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k} \in \{\mathbf{k} | k_z > 0\}} \sum_{\sigma=1,2} N_k \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}\sigma} (a_{\mathbf{k}\sigma}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{k}\sigma}^*(t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}). \quad (2.14)$$

Usando (2.4) obtemos

$$\sum_{\mathbf{k} \in \{\mathbf{k} | k_z > 0\}} \sum_{\sigma=1,2} N_k \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}\sigma} \left[\left(-k^2 a_{\mathbf{k}\sigma}(t) - \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} a_{\mathbf{k}\sigma}(t) \right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right] + H.c. = 0, \quad (2.15)$$

de onde podemos deduzir

$$\frac{d^2}{dt^2} a_{\mathbf{k}\sigma}(t) + \omega_k^2 a_{\mathbf{k}\sigma}(t) = 0. \quad (2.16)$$

Esta equação diferencial têm solução

$$a_{\mathbf{k}\sigma}(t) = a_{\mathbf{k}\sigma}^{(1)}(0) e^{-i\omega_k t} + a_{\mathbf{k}\sigma}^{(2)}(0) e^{i\omega_k t}, \quad (2.17)$$

então de (2.14) obtemos

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k} \in \{\mathbf{k} | k_z > 0\}} \sum_{\sigma=1,2} N_k \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}\sigma} \left[a_{\mathbf{k}\sigma}^{(1)}(0) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_k t)} + a_{\mathbf{k}\sigma}^{(2)}(0) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \omega_k t)} \right] + H.c. \quad (2.18)$$

Redefinindo as constantes livres como,

$$\begin{aligned} a_{\mathbf{k}\sigma}^{(1)}(0) &= a_{\mathbf{k}\sigma}(0) \\ a_{\mathbf{k}\sigma}^{(2)}(0) &= -(-1)^\sigma a_{-\mathbf{k}\sigma}^*(0) \end{aligned} \quad (2.19)$$

o campo \mathbf{A} será

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k} \in \{|\mathbf{k}|k_z > 0\}} \sum_{\sigma=1,2} N_k \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}\sigma} \left[a_{\mathbf{k}\sigma}(0) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_k t)} - (-1)^\sigma a_{-\mathbf{k}\sigma}(0) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \omega_k t)} \right] + H.c., \quad (2.20)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k} \in \{|\mathbf{k}|k_z > 0\}} \sum_{\sigma=1,2} N_k \left[\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}\sigma} a_{\mathbf{k}\sigma}(0) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \omega_k t)} + \boldsymbol{\varepsilon}_{-\mathbf{k}\sigma} a_{-\mathbf{k}\sigma}(0) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + \omega_k t)} \right] + H.c., \quad (2.21)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k} \in \{|\mathbf{k}|k_z > 0\}} \sum_{\sigma=1,2} N_k \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}\sigma} a_{\mathbf{k}\sigma}(t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + H.c. \quad (2.22)$$

Da eletrodinâmica clássica (GREINER, 1999, p. 257) [11], a energia do campo eletromagnético é dada por,

$$H = \frac{1}{8\pi} \int_{L^3} d^3x (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2), \quad (2.23)$$

$$H = \frac{1}{8\pi} \int_{L^3} d^3x \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}^*) \right]. \quad (2.24)$$

Usando (2.22) obtemos,

$$\int_{L^3} \frac{d^3x}{8\pi c^2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \sigma, \sigma'} g_k \int_{L^3} (a_{\mathbf{k}\sigma} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - a_{\mathbf{k}\sigma}^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}) (a_{\mathbf{k}'\sigma'} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} - a_{\mathbf{k}'\sigma'}^* e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}}), \quad (2.25)$$

onde

$$g_k = \frac{\omega_k \omega_{k'}}{8\pi c^2} N_k N_{k'} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}'\sigma'}. \quad (2.26)$$

Usando as relações,

$$\int_{L^3} d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} = L^3 \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (2.27a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}\sigma'} = \delta_{\sigma\sigma'}, \quad (2.27b)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{-\mathbf{k}\sigma'} = -(-1)^\sigma \delta_{\sigma\sigma'}, \quad (2.27c)$$

da equação (2.25) obtemos

$$\int_{L^3} \frac{d^3x}{8\pi c^2} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \frac{\omega_k^3}{8\pi c^2} N_k^2 L^3 (a_{\mathbf{k}\sigma} a_{\mathbf{k}\sigma}^* + (-1)^\sigma a_{\mathbf{k}\sigma} a_{-\mathbf{k}\sigma}) + H.c. \quad (2.28)$$

Em forma análoga [9] do cálculo da segunda linha de (2.24) obtemos

$$\int_{L^3} \frac{d^3x}{8\pi} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}^*) = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \frac{\omega_k^3}{8\pi c^2} N_k^2 L^3 (a_{\mathbf{k}\sigma} a_{\mathbf{k}\sigma}^* - (-1)^\sigma a_{\mathbf{k}\sigma} a_{-\mathbf{k}\sigma}) + H.c. \quad (2.29)$$

A soma de (2.28) e (2.29) é

$$H = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \frac{\omega_k^3}{8\pi c^2} N_k^2 L^3 (a_{\mathbf{k}\sigma} a_{\mathbf{k}\sigma}^* + a_{\mathbf{k}\sigma}^* a_{\mathbf{k}\sigma}). \quad (2.30)$$

Escolhendo a constante de normalização dos modos normais como

$$N_k = \sqrt{\frac{2\pi \hbar c^2}{L^3 \omega_k}}, \quad (2.31)$$

a energia do campo eletromagnético é

$$H = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \frac{\hbar \omega_k}{2} (a_{\mathbf{k}\sigma} a_{\mathbf{k}\sigma}^* + a_{\mathbf{k}\sigma}^* a_{\mathbf{k}\sigma}) \quad (2.32)$$

Agora introduziremos a quantização. O Hamiltoniano H do campo eletromagnético e os coeficientes $a_{\mathbf{k}\sigma}$ e $a_{\mathbf{k}\sigma}^*$ se convertem em operadores, a partir de agora $\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^*$ será $\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger$, e serão exigidas as condições

$$\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k}'\sigma'}^\dagger - \hat{a}_{\mathbf{k}'\sigma'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\sigma\sigma'}, \quad (2.33a)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} a_{\mathbf{k}'\sigma'} - \hat{a}_{\mathbf{k}'\sigma'} \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} = 0, \quad (2.33b)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'\sigma'}^\dagger - \hat{a}_{\mathbf{k}'\sigma'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger = 0. \quad (2.33c)$$

Sob essas condições o operador Hamiltoniano \hat{H} pode ser escrito como

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \frac{\hbar \omega_k}{2} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} + \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \right), \quad (2.34)$$

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \hbar \omega_k \left(\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.35)$$

Das equações de Heisenberg,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} = [\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}, \hat{H}], \quad (2.36)$$

obtemos o operador de campo elétrico,

$$\hat{\mathbf{E}} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \hat{\mathbf{A}}}{\partial t} = \frac{i}{c} \sum_{\mathbf{k}, \sigma} N_k \omega_k \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{k}\sigma} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right). \quad (2.37)$$

Com as equações (2.35) e (2.37) podemos descrever o campo eletromagnético quantizado no caso particular em que o campo esteja confinado num volume finito.

2.2 OPERADORES DE CAMPO COMPRIMIDO

Alguns tratamentos teóricos de um modelo que trabalhe com campos quantizados são mais simples definindo um novo conjunto de operadores bosônicos conhecidos como operadores de campo comprimido, como acontece no caso do amplificador paramétrico degenerado (GARDINER; ZOLLER, 1999, p. 324)[12].

O operador de compressão de um modo é definido como

$$\hat{S}(\xi) = \exp \left(\frac{1}{2} \xi^* \hat{a} \hat{a} - \frac{1}{2} \xi \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \right), \quad (2.38)$$

onde $\xi = r e^{i\theta}$ é um numero complexo arbitrário. O operador de compressão têm a propriedade

$$\hat{S}^\dagger(\xi) = \hat{S}^{-1}(\xi) = \hat{S}(-\xi). \quad (2.39)$$

Uma aplicação direta da fórmula

$$e^{\hat{A} \hat{B} e^{-\hat{A}}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots, \quad (2.40)$$

leva às seguintes transformações unitárias sobre os operadores de criação e aniquilação:

$$\hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a} \hat{S}(\xi) = \hat{a} \cosh r - \hat{a}^\dagger e^{i\theta} \sinh r, \quad (2.41a)$$

$$\hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a}^\dagger \hat{S}(\xi) = \hat{a}^\dagger \cosh r - \hat{a} e^{-i\theta} \sinh r, \quad (2.41b)$$

e podemos definir os operadores de criação e aniquilação do campo comprimido como

$$\hat{b} = \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a} \hat{S}(\xi), \quad \hat{b}^\dagger = \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a}^\dagger \hat{S}(\xi). \quad (2.42)$$

A ação do operador de compressão $\hat{S}(\xi)$ sobre as quadraturas do campo $\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)$ e $\hat{p} = \frac{-i}{\sqrt{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$ é

$$\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{x}\hat{S}(\xi) = \hat{x}e^{-r}, \quad (2.43a)$$

$$\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{p}\hat{S}(\xi) = \hat{p}e^r, \quad (2.43b)$$

e podemos definir as quadraturas do campo comprimido como,

$$\hat{x}' = \hat{x}e^{-r}, \quad \hat{p}' = \hat{p}e^r. \quad (2.44)$$

Um estado comprimido $|\xi\rangle$ é obtido pela atuação sobre o estado do vácuo do operador de compressão $\hat{S}(\xi)$,

$$|\xi\rangle = \hat{S}(\xi)|0\rangle, \quad (2.45)$$

este estado também é conhecido como o estado do vácuo comprimido.

O operador de compressão de dois modos é definido como,

$$\hat{S}(\xi) = \exp\left(\frac{1}{2}\xi^*\hat{a}_1\hat{a}_2 - \frac{1}{2}\xi\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger\right), \quad (2.46)$$

onde $\xi = re^{i\theta}$ é um número complexo arbitrário. O operador de compressão de dois modos tem a propriedade,

$$\hat{S}^\dagger(\xi) = \hat{S}^{-1}(\xi) = \hat{S}(-\xi). \quad (2.47)$$

Uma aplicação direta da fórmula,

$$e^{\hat{A}\hat{B}}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots, \quad (2.48)$$

leva às seguintes transformações unitárias sobre os operadores de criação e aniquilação,

$$\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{a}_1\hat{S}(\xi) = \hat{a}_1 \cosh r - \hat{a}_2^\dagger e^{i\theta} \sinh r, \quad (2.49a)$$

$$\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{a}_1^\dagger\hat{S}(\xi) = \hat{a}_1^\dagger \cosh r - \hat{a}_2 e^{-i\theta} \sinh r, \quad (2.49b)$$

$$\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{a}_2\hat{S}(\xi) = \hat{a}_2 \cosh r - \hat{a}_1^\dagger e^{i\theta} \sinh r, \quad (2.49c)$$

$$\hat{S}^\dagger(\xi)\hat{a}_2^\dagger\hat{S}(\xi) = \hat{a}_2^\dagger \cosh r - \hat{a}_1 e^{-i\theta} \sinh r, \quad (2.49d)$$

e podemos definir os operadores de criação e aniquilação do campo comprimido como,

$$\hat{b}_l = \hat{S}^\dagger(\xi)\hat{a}_l\hat{S}(\xi), \quad \hat{b}_l^\dagger = \hat{S}^\dagger(\xi)\hat{a}_l^\dagger\hat{S}(\xi). \quad (2.50)$$

Um estado comprimido de dois modos $|\xi\rangle$ é obtido pela atuação do operador de compressão de dois modos $\hat{S}(\xi)$ sobre o estado do vácuo de dois modos $|0, 0\rangle$:

$$|\xi\rangle = \hat{S}(\xi) |0, 0\rangle, \quad (2.51)$$

onde a decomposição de Schmidt na base padrão de Fock é,

$$|\xi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\tanh r)^n}{\cosh r} |n, n\rangle. \quad (2.52)$$

Este estado também é conhecido como estado do vácuo comprimido de dois modos.

2.3 INTERAÇÃO ENTRE ÁTOMOS E CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Nesta seção estudaremos a interação entre o meio atômico e campo eletromagnético, primeiro para o caso da interação do meio atômico com um campo de laser, e depois para a interação entre o meio atômico e um modo de campo de uma cavidade óptica.

2.3.1 Transição entre dois níveis atômicos por interação com um laser

Sejam $|e\rangle$ e $|g\rangle$ os estados excitado e fundamental de um átomo de dois níveis. Para o Hamiltoniano livre do átomo \hat{H}_0 temos que

$$\hat{H}_0 |e\rangle = \hbar\omega_e |e\rangle, \quad \hat{H}_0 |g\rangle = \hbar\omega_g |g\rangle. \quad (2.53)$$

Usando a relação $\mathbb{I} = |e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|$ é possível escrever \hat{H}_0 como

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_e |e\rangle\langle e| + \hbar\omega_g |g\rangle\langle g|. \quad (2.54)$$

Como o campo de laser é muito intenso ele pode ser tratado como um campo externo. Quando o comprimento de onda do campo elétrico é muito maior do que o tamanho do átomo é possível usar a aproximação dipolar (BALLENTINE, 1998, p.358) [8] para representar a interação entre o átomo e o campo,

$$\hat{H}_I = -\hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{E}}(\hat{\mathbf{r}}_0, t), \quad (2.55)$$

onde $\hat{\mathbf{D}} = e\hat{\mathbf{r}}$ e $\hat{\mathbf{r}}_0$ é a posição do núcleo atômico. Fazendo $\hat{\mathbf{r}}_0 = 0$ (núcleo atômico na origem) e considerando que o campo elétrico está linearmente polarizado ao longo da direção x,

$$\hat{H}_I = -\hat{D}\hat{E}(t), \quad (2.56)$$

$$\hat{H}_I = (|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|)(-\hat{D})(|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|)\hat{E}(t). \quad (2.57)$$

Por considerações de paridade $\langle e|\hat{D}|e\rangle = \langle g|\hat{D}|g\rangle = 0$, então considerando $\hat{E}(t) = E(t)\mathbb{I}$ temos que

$$\hat{H}_I = -\hat{D}_{eg}E(t)|e\rangle\langle g| - \hat{D}_{ge}E(t)|g\rangle\langle e|. \quad (2.58)$$

Para um campo de amplitude E_0 e frequência ν temos que $E(t) = E_0 \cos(\nu t)$, então

$$\hat{H}_I = \hbar\Omega_R \cos(\nu t)|e\rangle\langle g| + \hbar\Omega_R^* \cos(\nu t)|g\rangle\langle e|, \quad (2.59)$$

onde a frequência de Rabi é definida como

$$\Omega_R = -\frac{E_0\langle e|\hat{D}|g\rangle}{\hbar}. \quad (2.60)$$

Logo temos que

$$\hat{H}_I = \frac{\hbar}{2}\Omega_R e^{i\nu t}|e\rangle\langle g| + \frac{\hbar}{2}\Omega_R e^{-i\nu t}|g\rangle\langle e| + \frac{\hbar}{2}\Omega_R^* e^{i\nu t}|e\rangle\langle g| + \frac{\hbar}{2}\Omega_R^* e^{-i\nu t}|g\rangle\langle e| \quad (2.61)$$

onde $\Omega_R = \frac{D_{eg}E_0}{\hbar}$ é a frequência de Rabi. Escrevendo H_I na representação da interação, obtemos que

$$\hat{H}'_I = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t\right]\hat{H}_I \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t\right], \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}'_I = & \frac{\hbar}{2}\Omega_R e^{i(\nu+\omega)t}|e\rangle\langle g| + \frac{\hbar}{2}\Omega_R e^{-i(\nu-\omega)t}|g\rangle\langle e| \\ & + \frac{\hbar}{2}\Omega_R^* e^{i(\nu-\omega)t}|e\rangle\langle g| + \frac{\hbar}{2}\Omega_R^* e^{-i(\nu+\omega)t}|g\rangle\langle e|, \end{aligned} \quad (2.63)$$

onde $\omega = \omega_e - \omega_g$. Quando a frequência ν é muito próxima da frequência ω os termos com os fatores $e^{i(\nu+\omega)t}$ e $e^{-i(\nu+\omega)t}$ oscilam muito rapidamente em relação aos outros termos, neste caso é possível aplicar a aproximação da onda girante (SCULLY; ZUBAIRY, 1997, p.152) [5] onde esses termos são desprezados. Segue que

$$\hat{H}'_I \approx \frac{\hbar}{2}\Omega_R e^{-i(\nu-\omega)t} |g\rangle \langle e| + \frac{\hbar}{2}\Omega_R^* e^{i(\nu-\omega)t} |e\rangle \langle g|. \quad (2.64)$$

Aplicando a transformação $\hat{H}_I = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}'_I t\right] \hat{H}_I \exp\left[\frac{i}{\hbar}\hat{H}'_I t\right]$ obtemos

$$\hat{H}_I = \frac{\hbar}{2}\Omega_R e^{-i\nu t} |g\rangle \langle e| + \frac{\hbar}{2}\Omega_R^* e^{i\nu t} |e\rangle \langle g|. \quad (2.65)$$

Para um meio atômico formado por N átomos independentes é possível generalizar (2.65):

$$\hat{H}_I = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\hbar}{2}\Omega_R e^{-i\nu t} |g^{(j)}\rangle \langle e^{(j)}| + \frac{\hbar}{2}\Omega_R^* e^{i\nu t} |e^{(j)}\rangle \langle g^{(j)}| \right), \quad (2.66)$$

onde a equação (2.66) descreve o hamiltoniano de interação entre um campo de laser e um meio atômico formado por N átomos que não interagem entre si.

2.3.2 Interação entre um átomo de dois níveis e um modo do campo de uma cavidade

O campo eletromagnético em uma cavidade óptica pode ser considerado como um campo eletromagnético confinado em um volume finito, então podemos tratar o campo eletromagnético neste caso usando a equação (2.37). Sejam $|e\rangle$ e $|g\rangle$ os estados excitado e fundamental de um átomo de dois níveis. Para o Hamiltoniano livre do átomo \hat{H}_0^{atom} temos que

$$\hat{H}_0^{atom} = \hbar\omega_e |e\rangle \langle e| + \hbar\omega_g |g\rangle \langle g|. \quad (2.67)$$

Usando (2.35) podemos definir o Hamiltoniano livre do campo \hat{H}_0^{campo} . A constante $\frac{1}{2}$ pode ser eliminada porque só agrega um fator de fase mais não muda a dinâmica, logo

$$\hat{H}_0^{campo} = \hbar\nu\hat{a}^\dagger\hat{a}. \quad (2.68)$$

O Hamiltoniano livre do sistema \hat{H}_0 é

$$\hat{H}_0 = \hat{H}_0^{atom} + \hat{H}_0^{campo}. \quad (2.69)$$

Usando (2.37) podemos escrever o campo elétrico para um modo da cavidade:

$$\hat{\mathbf{E}} = i\varepsilon E_0 (\hat{a} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - \hat{a}^\dagger e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}), \quad (2.70)$$

onde $E_0 = \frac{N\nu}{c}$ é a amplitude do campo. Considerando o núcleo atômico na origem obtemos

$$\hat{\mathbf{E}} = i\varepsilon E_0 (\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \quad (2.71)$$

Usando a aproximação dipolar para representar a interação entre o átomo e o campo, obtemos

$$\hat{H}_I = -\hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{E}}(t), \quad (2.72)$$

$$\hat{H}_I = \hbar g(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) |e\rangle \langle g| - \hbar g^*(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) |g\rangle \langle e|, \quad (2.73)$$

onde $g = -\frac{i}{\hbar}(\langle e| \hat{\mathbf{D}} |g\rangle \cdot \boldsymbol{\varepsilon})E_0$ para o vetor de polarização $\boldsymbol{\varepsilon}$. Logo

$$\hat{H}_I = \hbar g |e\rangle \langle g| - \hbar g \hat{a}^\dagger |e\rangle \langle g| - \hbar g^* \hat{a} |g\rangle \langle e| + \hbar g^* \hat{a}^\dagger |g\rangle \langle e|. \quad (2.74)$$

Usando as relações

$$e^{i\nu\hat{a}^\dagger\hat{a}t}\hat{a}e^{-i\nu\hat{a}^\dagger\hat{a}t} = e^{-i\nu t}\hat{a}, \quad (2.75a)$$

$$e^{i\nu\hat{a}^\dagger\hat{a}t}\hat{a}^\dagger e^{-i\nu\hat{a}^\dagger\hat{a}t} = e^{i\nu t}\hat{a}^\dagger, \quad (2.75b)$$

para escrever \hat{H}_I na representação da interação,

$$\hat{H}'_I = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0t\right]\hat{H}_I\exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0t\right], \quad (2.76)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \hat{H}'_I = \hbar g \hat{a} |e\rangle \langle g| e^{-i(\nu-\omega)t} - \hbar g \hat{a}^\dagger |e\rangle \langle g| e^{i(\nu+\omega)t} - \hbar g^* \hat{a} |g\rangle \langle e| e^{-i(\nu+\omega)t} \\ + \hbar g^* \hat{a}^\dagger |g\rangle \langle e| e^{i(\nu-\omega)t}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

onde $\omega = \omega_e - \omega_g$. Quando a frequência ν é muito próxima a frequência ω os termos com os fatores $e^{i(\nu+\omega)t}$ e $e^{-i(\nu+\omega)t}$ oscilam muito rapidamente em relação aos outros termos. Neste caso é possível aplicar a aproximação da onda girante onde esses termos são desprezados:

$$\hat{H}'_I \approx \hbar g \hat{a} |e\rangle \langle g| e^{-i(\nu-\omega)t} + \hbar g^* \hat{a}^\dagger |g\rangle \langle e| e^{i(\nu-\omega)t}. \quad (2.78)$$

$$\hat{H}'_I = \hbar g \hat{a} |e\rangle \langle g| e^{-i\delta t} + \hbar g^* \hat{a} |g\rangle \langle e| e^{i\delta t}, \quad (2.79)$$

onde $\delta = \nu - \omega$. Aplicando a transformação $\hat{H}_I = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}'_0t\right]\hat{H}_I\exp\left[\frac{i}{\hbar}\hat{H}'_0t\right]$ obtemos

$$\hat{H}_I = \hbar g \hat{a} |e\rangle \langle g| + \hbar g \hat{a} |g\rangle \langle e|. \quad (2.80)$$

Para um meio atômico formado por N átomos independentes é possível generalizar (2.80):

$$\hat{H}_I = \sum_{j=1}^N (\hbar g \hat{a} |e^{(j)}\rangle \langle g^{(j)}| + \hbar g \hat{a} |g^{(j)}\rangle \langle e^{(j)}|). \quad (2.81)$$

onde a equação (2.81) descreve o hamiltoniano de interação entre um modo de campo da cavidade e um meio atômico formado por N átomos que não interagem entre eles.

2.4 EVOLUÇÃO DE UM SISTEMA QUÂNTICO ABERTO

Para descrever a dinâmica de um sistema que possui decaimento nos níveis de energia atômicos e nos modos da cavidade será apresentada a equação mestra markoviana [6] que descreve a evolução de um sistema quântico aberto. Logo será estudado o fenômeno da transparência eletromagneticamente induzida com o propósito de dar um exemplo de como um meio atômico pode ser controlado usando campos de lasers.

2.4.1 Equação mestra

Um sistema aberto é um sistema quântico S que está acoplado a outro sistema B chamado de ambiente. O sistema combinado $S + B$ poder ser considerado fechado. A dinâmica do subsistema S muda pela dinâmica interna e pela interação com o ambiente, então a evolução do estado do subsistema S não pode ser representada por uma evolução unitária. O espaço de Hilbert do sistema S estará representado por \mathcal{H}_S , espaço de Hilbert do ambiente B estará representado por \mathcal{H}_B e o espaço de Hilbert do sistema total $S + B$ estará representado por $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_B$, então o Hamiltoniano \hat{H} do sistema total é,

$$\hat{H} = \hat{H}_S \otimes \hat{\mathbb{1}}_B + \hat{\mathbb{1}}_S \otimes \hat{H}_B + \hat{H}_I, \quad (2.82)$$

onde \hat{H}_S é o Hamiltoniano do sistema S , \hat{H}_B é o Hamiltoniano do ambiente, $\hat{\mathbb{1}}_S$ é o operador identidade do sistema S , $\hat{\mathbb{1}}_B$ é o operador identidade do ambiente e \hat{H}_I é o Hamiltoniano de interação entre o sistema S e o ambiente.

Para descrever a evolução temporal de S usaremos os métodos apresentados em (BREUER; PETRUCCIONE, 2002, p.115) [6]. Considerando que o sistema total esta representado pela matriz densidade $\hat{\rho}$, o sistema S estará representado por

$$\hat{\rho}_S = \text{Tr}_B \hat{\rho}, \quad (2.83)$$

$$\hat{\rho}_S = \text{Tr}_S \{ \hat{U}(t, t_0) \hat{\rho}(t_0) \hat{U}^\dagger(t, t_0) \}, \quad (2.84)$$

onde $\hat{U}(t, t_0)$ é o operador de evolução temporal para o sistema total. A derivada temporal de $\hat{\rho}_S$ pode ser obtida fazendo o traço parcial sobre o ambiente na equação de Liouville-von Neumann

para o sistema total,

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S = -i\text{Tr}_S[\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)]. \quad (2.85)$$

Considerando que o estado inicial do sistema total $S + B$ é $\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_S(0) \otimes \hat{\rho}_B$ onde $\hat{\rho}_S(0)$ é o estado do sistema S e $\hat{\rho}_B$ é um estado de referência do ambiente. A transformação que descreve a mudança de $\hat{\rho}_S(0)$ para $\hat{\rho}_S(t)$ é,

$$\hat{\rho}_S(0) \mapsto \hat{\rho}_S(t) = V(t)\hat{\rho}_S(0) \equiv \{\hat{U}(t, 0)[\hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_B]\hat{U}^\dagger(t, 0)\}. \quad (2.86)$$

Sendo $\mathcal{S}(\mathcal{H}_S)$ o espaço dos operadores densidade do sistema S , mantendo o tempo t e o estado $\hat{\rho}_B$ fixos, a relação (2.86) descreve o mapa,

$$V(t) : \mathcal{S}(\mathcal{H}_S) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{H}_S), \quad (2.87)$$

o qual é conhecido como mapa dinâmico. Usando a base ortonormal $\{|\varphi_\alpha\rangle\} \in \mathcal{H}_B$ podemos escrever

$$\hat{\rho}_B = \sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} |\varphi_{\alpha}\rangle \langle \varphi_{\alpha}|, \quad (2.88)$$

onde $\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} = 1$. De (2.86) obtemos,

$$\hat{\rho}_S(t) = V(t)\hat{\rho}_S = \sum_{\alpha, \beta} \hat{W}_{\alpha\beta}(t)\hat{\rho}_S\hat{W}_{\alpha\beta}^\dagger(t), \quad (2.89)$$

onde os operadores $\hat{W}_{\alpha\beta} \in \mathcal{H}_S$ são

$$\hat{W}_{\alpha\beta}(t) = \sqrt{\lambda_{\beta}} \langle \varphi_{\alpha}| \hat{U}(t, 0) |\varphi_{\beta}\rangle. \quad (2.90)$$

Os operadores $\hat{W}_{\alpha\beta} \in \mathcal{H}_S$ possuem a propriedade

$$\sum_{\alpha, \beta} \hat{W}_{\alpha\beta}(t)\hat{W}_{\alpha\beta}^\dagger(t) = \hat{\mathbb{I}}_S, \quad (2.91)$$

da qual é possível deduzir,

$$\text{Tr}_S\{V(t)\hat{\rho}_S\} = \text{Tr}_S\{\hat{\rho}_S(t)\} = 1, \quad (2.92)$$

então o mapeio dinâmico $V(t)$ representa uma operação quântica linear, convexa, completamente positiva e que preserva o traço. Para descrever a evolução de $\hat{\rho}_S$ usamos a família paramétrica $\{V(t)|t \geq 0\}$ com a propriedade de semigrupo,

$$V(t_1)V(t_2) = V(t_1 + t_2), \quad t_1, t_2 \geq 0. \quad (2.93)$$

Esta propriedade pode ser usada quando a escala de tempo de decaimento das funções de correlação do ambiente é muito menor que a escala de tempo característica da evolução do sistema S . Podemos representar $V(t)$ usando o gerador de grupo \mathcal{L} :

$$V(t) = \exp(\mathcal{L}t), \quad (2.94)$$

e então obtemos a equação

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_S(t) = \mathcal{L}\hat{\rho}_S(t). \quad (2.95)$$

Como \mathcal{L} é um super operador temos que construir o seu espaço de Liouville. Se o espaço de Hilbert \mathcal{H}_S têm dimensão $\dim\mathcal{H}_S = N$, a base do espaço de Liouville terá dimensão N^2 , sua base será o conjunto ortonormal de operadores $\{\hat{F}_i\}$ (para $i = 1, 2, \dots, N^2$) para os quais,

$$(\hat{F}_i, \hat{F}_j) \equiv \text{Tr}_S\{\hat{F}_i^\dagger \hat{F}_j\} = \delta_{ij}. \quad (2.96)$$

Um dos operadores de base será escolhido como $\hat{F}_{N^2} = N^{-\frac{1}{2}}\hat{\mathbb{1}}_S$ e os outros com traço nulo $\text{Tr}_S\hat{F}_i = 0$ (para $i = 1, 2, \dots, N^2 - 1$). Usando a relação de completeza nos operadores (2.90) obtemos,

$$\hat{W}_{\alpha\beta}(t) = \sum_{i=1}^{N^2} \hat{F}_i(\hat{F}_i, \hat{W}_{\alpha\beta}(t)). \quad (2.97)$$

Usando (2.89) podemos escrever $V(t)$ como

$$V(t)\hat{\rho}_S = \sum_{i,j=1}^{N^2} c_{ij}\hat{F}_i\hat{\rho}_S\hat{F}_j^\dagger, \quad (2.98)$$

onde,

$$c_{ij}(t) = \sum_{\alpha\beta} (\hat{F}_i, \hat{W}_{\alpha\beta}(t))(\hat{F}_j, \hat{W}_{\alpha\beta}(t))^*. \quad (2.99)$$

Para o vetor complexo $\hat{v} = \sum_i v_i \hat{F}_i$ de dimensão N^2 que pertence ao espaço de Liouville (\hat{v} é um operador que atua no espaço \mathcal{H}_S) temos que

$$\sum_{ij} c_{ij}v_i^*v_j = \sum_{\alpha\beta} \left| \left(\sum_i v_i \hat{F}_i, \hat{W}_{\alpha\beta}(t) \right) \right|^2 \geq 0, \quad (2.100)$$

o que mostra que a matriz de coeficientes $c = (c_{ij})$ é Hermitiana e positiva.

Usando (2.94) e (2.98) podemos escrever

$$\mathcal{L}\hat{\rho}_S = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{1}{\varepsilon} \{V(\varepsilon)\hat{\rho}_S - \hat{\rho}_S\}, \quad (2.101)$$

$$\mathcal{L}\hat{\rho}_S = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{N} \frac{c_{N^2 N^2}(\varepsilon) - N}{\varepsilon} \hat{\rho}_S + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N^2-1} \left(\frac{c_{iN^2}(\varepsilon)}{\varepsilon} \hat{F}_i \hat{\rho}_S + \frac{c_{N^2 i}(\varepsilon)}{\varepsilon} \hat{\rho}_S \hat{F}_i^\dagger \right) + \sum_{i,j=1}^{N^2-1} \frac{c_{ij}(\varepsilon)}{\varepsilon} \hat{F}_i \hat{\rho}_S \hat{F}_j^\dagger \right\}, \quad (2.102)$$

onde os coeficiente a_{ij} são

$$a_{N^2 N^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{c_{N^2 N^2}(\varepsilon) - N}{\varepsilon}, \quad (2.103a)$$

$$a_{iN^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{c_{iN^2}(\varepsilon)}{\varepsilon}, \quad (2.103b)$$

$$a_{ij} = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \frac{c_{ij}(\varepsilon)}{\varepsilon}. \quad (2.103c)$$

Introduzindo as quantidades

$$\hat{F} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N^2-1} a_{iN^2} \hat{F}_i, \quad (2.104)$$

$$\hat{G} = \frac{1}{2N} a_{N^2 N^2} \hat{\mathbb{I}}_S + \frac{1}{2} (\hat{F}^\dagger + \hat{F}), \quad (2.105)$$

e o operador

$$\hat{H} = \frac{1}{2i} (\hat{F}^\dagger - \hat{F}) \quad (2.106)$$

podemos escrever

$$\mathcal{L}\hat{\rho}_S = -i[\hat{H}, \hat{\rho}_S] + \left\{ \hat{G}, \hat{\rho}_S \right\} + \sum_{i,j=1}^{N^2-1} a_{ij} \hat{F}_i \hat{\rho}_S \hat{F}_j^\dagger. \quad (2.107)$$

Como o semi grupo preserva o traço

$$0 = \text{Tr}_S \{ \mathcal{L}\hat{\rho}_S \} = \text{Tr}_S \left\{ \left(2\hat{G} + \sum_{i,j=1}^{N^2-1} a_{ij} \hat{F}_j^\dagger \hat{F}_i \right) \hat{\rho}_S \right\}, \quad (2.108)$$

então

$$\hat{G} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N^2-1} a_{ij} \hat{F}_j^\dagger \hat{F}_i. \quad (2.109)$$

De (2.107) podemos escrever

$$\mathcal{L}\hat{\rho}_S = -i[\hat{H}, \hat{\rho}_S] + \sum_{i,j=1}^{N^2-1} a_{ij} \left(\hat{F}_i \hat{\rho}_S \hat{F}_j^\dagger - \frac{1}{2} \{ \hat{F}_j^\dagger \hat{F}_i, \hat{\rho}_S \} \right). \quad (2.110)$$

Como a matriz $a = (a_{ij})$ é positiva ela pode ser diagonalizada usando a transformação unitária u ,

$$uau^\dagger = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_{N^2-1} \end{bmatrix}, \quad (2.111)$$

onde os autovalores γ_k são não negativos. Introduzindo um novo conjunto de operadores $\{\hat{A}_k\}$,

$$\hat{F}_i = \sum_{k=1}^{N^2-1} u_{ki} \hat{A}_k, \quad (2.112)$$

podemos escrever (2.110) na forma diagonal,

$$\mathcal{L}\hat{\rho}_S = -i[\hat{H}, \hat{\rho}_S] + \sum_{k=1}^{N^2-1} \frac{\gamma_k}{2} \left(2\hat{A}_k \hat{\rho}_S \hat{A}_k^\dagger - \hat{A}_k^\dagger \hat{A}_k \hat{\rho}_S - \hat{\rho}_S \hat{A}_k^\dagger \hat{A}_k \right). \quad (2.113)$$

Finalmente a equação mestra pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_S(t) = -i[\hat{H}, \hat{\rho}_S(t)] + \mathcal{D}(\hat{\rho}_S(t)), \quad (2.114)$$

onde $-i[\hat{H}, \hat{\rho}_S(t)]$ representa a parte unitária da evolução do sistema S . A equação (2.114) é conhecida como a equação de Lindblad e representa a forma mais geral de uma equação mestra markoviana. O operador

$$\mathcal{D}(\hat{\rho}_S(t)) = \sum_{k=1}^{N^2-1} \frac{\gamma_k}{2} \left(2\hat{A}_k \hat{\rho}_S \hat{A}_k^\dagger - \hat{A}_k^\dagger \hat{A}_k \hat{\rho}_S - \hat{\rho}_S \hat{A}_k^\dagger \hat{A}_k \right), \quad (2.115)$$

é responsável pela evolução não unitária do sistema S e representa as perdas de energia. O

operador $\mathcal{D}(\hat{\rho}_S(t))$ pode ser representado como a soma dos operadores,

$$\mathcal{L}_k \hat{\rho}_S(t) = \frac{\gamma_k}{2} \left(2\hat{A}_k \hat{\rho}_S \hat{A}_k^\dagger - \hat{A}_k^\dagger \hat{A}_k \hat{\rho}_S - \hat{\rho}_S \hat{A}_k^\dagger \hat{A}_k \right), \quad (2.116)$$

deixando a equação mestra na forma,

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho}_S(t) = -i[\hat{H}, \hat{\rho}_S(t)] + \sum_k \mathcal{L}_k \hat{\rho}_S(t), \quad (2.117)$$

ou simplesmente escrevendo a matriz densidade do sistema como $\hat{\rho}$ em lugar de $\hat{\rho}_S$,

$$\frac{d}{dt} \hat{\rho} = -i[\hat{H}, \hat{\rho}] + \sum_k \mathcal{L}_k \hat{\rho}. \quad (2.118)$$

Equação mestra para um reservatório em equilíbrio termodinâmico

Quando o sistema está acoplado a um reservatório em equilíbrio termodinâmico, o operador densidade reduzido do ambiente é dado por

$$\hat{\rho}_R = \prod_k \left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar\nu_k}{k_B T}\right) \right] \exp\left(-\frac{\hbar\nu_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k}{k_B T}\right), \quad (2.119)$$

onde \hat{a}_k é o operador aniquilação associado ao modo de campo do ambiente de frequência ν_k , k_B é a constante de Boltzman e T é a temperatura.

A forma dos operadores $\mathcal{L}_k \hat{\rho}$ para o decaimento dos níveis atômicos $|j\rangle \rightarrow |k\rangle$ quando o sistema está acoplado a um reservatório em equilíbrio termodinâmico é (SCULLY; ZUBAIRY, 1997, p.252) [5],

$$\mathcal{L}_k \hat{\rho} = \frac{\gamma_k}{2} (2\hat{\sigma}_{kj} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{jk} - \hat{\sigma}_{jk} \hat{\sigma}_{kj} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{\sigma}_{jk} \hat{\sigma}_{kj}), \quad (2.120)$$

onde $\hat{\sigma}_{jk} = |j\rangle \langle k|$ e γ_k é a constante de decaimento associada ao decaimento $|j\rangle \rightarrow |k\rangle$, ela é dada por

$$\gamma_k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\omega_{jk}^3 \langle j | \hat{D} | k \rangle^2}{3\hbar c^3}. \quad (2.121)$$

A forma dos operadores $\mathcal{L}_l \hat{\rho}$ para o decaimento dos modos de uma cavidade óptica quando o sistema está acoplado a um reservatório em equilíbrio termodinâmico é (SCULLY; ZUBAIRY, 1997, p.255) [5],

$$\mathcal{L}_l \hat{\rho} = \frac{\kappa_l}{2} (2\hat{a}_l \hat{\rho} \hat{a}_l^\dagger - \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l), \quad (2.122)$$

onde κ_l é a constante de decaimento para a cavidade associada ao modo \hat{a}_l , ela é dada por

$$\kappa_l = \frac{\nu_l}{Q}, \quad (2.123)$$

onde Q é o fator de qualidade da cavidade e ν_l é a frequência angular da transição promovida pelo modo de campo da cavidade associado ao operador de aniquilação \hat{a}_l .

As equações (2.120) e (2.122) têm a mesma forma na representação de Schrödinger e na representação da interação, o que pode ser facilmente comprovado aplicando na equação mestra (2.118) a transformação $\exp\left[\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t\right]$ que relaciona o operador densidade na representação de Schrödinger $\hat{\rho}^S$ com o operador densidade na representação da interação $\hat{\rho}^I$,

$$\hat{\rho}^I = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t\right] \hat{\rho}^S \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0 t\right], \quad (2.124)$$

onde \hat{H}_0 é o operador

$$\hat{H}_0 = \sum_j \hbar\omega_j \hat{\sigma}_{jj} + \sum_l \hbar\nu_l \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l. \quad (2.125)$$

As quantidades $\{\hbar\omega_j\}_{j=1}^n$ representam as energias dos níveis atômicos $\{|j\rangle\}_{j=1}^n$, e as quantidades $\{\hbar\nu_l\}_{l=1}^m$ representam as energias dos modos da cavidade $\{\hat{a}_l\}_{l=1}^m$.

2.4.2 Transparência eletromagneticamente induzida

Nesta seção será apresentado um sistema quântico aberto onde estudaremos o fenômeno da transparência eletromagneticamente induzida com o propósito de dar um exemplo de como um meio atômico pode ser controlado usando campos de lasers, o tratamento será similar a exemplo dado em (SCULLY; ZUBAIRY, 1997, p.225) [5].

O sistema está formado por um átomo de três níveis, onde os níveis $|1\rangle$ e $|2\rangle$ estão acoplados por o campo de laser de frequência ν_1 , sua frequência de Rabi (definida em (2.60)) é Ω_1 . Um campo forte de frequência ν_2 de outro laser é responsável pelo acoplamento entre os estados $|2\rangle$ e $|3\rangle$, sua frequência de Rabi é Ω_2 . A intensidade do laser de frequência ν_1 é muito menor que a intensidade do laser de frequência ν_2 . As constantes de decaimento para $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$ e $|3\rangle \rightarrow |2\rangle$ estão dadas por γ_1 e γ_2 , onde as dessintonias são $\Delta_1 = (\omega_2 - \omega_1) - \nu_1$ e $\Delta_2 = (\omega_3 - \omega_2) - \nu_2$:

O Hamiltoniano do sistema na representação de Schrödinger, é dada por

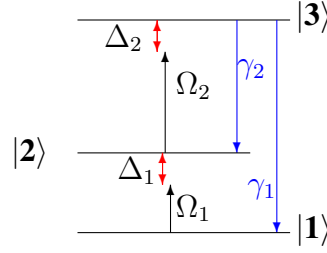


Figura 2.1: Diagrama dum átomo de três níveis interagindo com campos de laser de frequências de Rabi Ω_1 e Ω_2 . As dessintonias para cada laser são Δ_1 e Δ_2 . As constantes de decaimento para as transições $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$ e $|3\rangle \rightarrow |2\rangle$ são dadas por γ_1 e γ_2

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hbar\omega_1 |1\rangle \langle 1| + \hbar\omega_2 |2\rangle \langle 2| + \hbar\omega_3 |3\rangle \langle 3| \\ &+ \frac{\hbar}{2}\Omega_1(e^{-i\nu_1 t} |2\rangle \langle 1| + e^{i\nu_1 t} |1\rangle \langle 2|) \\ &+ \frac{\hbar}{2}\Omega_2(e^{-i\nu_2 t} |3\rangle \langle 2| + e^{i\nu_2 t} |2\rangle \langle 3|). \end{aligned} \quad (2.126)$$

Definindo o operador \hat{A} como (PAULISH et al., 2014) [4],

$$\hat{A} = \hbar\omega_1 |1\rangle \langle 1| + \hbar(\omega_1 + \nu_1) |2\rangle \langle 2| + \hbar(\omega_1 + \nu_1 + \nu_2) |3\rangle \langle 3|, \quad (2.127)$$

é possível escrever o Hamiltoniano numa nova representação (referencial girante) usando a transformação,

$$\hat{\tilde{H}} = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\hat{A}t\right] (\hat{H} - \hat{A}) \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{A}t\right]. \quad (2.128)$$

A representação matricial de $\hat{\tilde{H}}$ é dada por

$$\hat{\tilde{H}} = \hbar \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\Omega_1 & 0 \\ \frac{1}{2}\Omega_1 & \Delta_1 & \frac{1}{2}\Omega_2 \\ 0 & \frac{1}{2}\Omega_2 & \Delta_1 + \Delta_2 \end{bmatrix}. \quad (2.129)$$

A equação mestra (2.118) na representação de Schrödinger é

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{\tilde{H}}, \hat{\rho}] + \mathcal{L}_a\hat{\rho}. \quad (2.130)$$

O termo $\mathcal{L}_a\hat{\rho}$ representa o decaimento dos níveis atômicos. Usando (2.120) temos que,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_a\hat{\rho} &= \frac{\gamma_1}{2}(2\hat{\sigma}_{13}\hat{\rho}\hat{\sigma}_{31} - \hat{\sigma}_{31}\hat{\sigma}_{13}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}_{31}\hat{\sigma}_{13}) \\ &+ \frac{\gamma_2}{2}(2\hat{\sigma}_{23}\hat{\rho}\hat{\sigma}_{32} - \hat{\sigma}_{32}\hat{\sigma}_{23}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}_{32}\hat{\sigma}_{23}). \end{aligned} \quad (2.131)$$

Usando a transformação,

$$\widetilde{\mathcal{L}}_a \hat{\rho} = \exp \left[\frac{i}{\hbar} \hat{A} t \right] \mathcal{L}_a \hat{\rho} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \hat{A} t \right], \quad (2.132)$$

podemos escrever

$$\widetilde{\mathcal{L}}_a \hat{\rho} = \hbar \begin{bmatrix} \gamma_1 \tilde{\rho}_{33} & 0 & -\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) \tilde{\rho}_{13} \\ 0 & \gamma_2 \tilde{\rho}_{33} & -\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) \tilde{\rho}_{23} \\ -\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) \tilde{\rho}_{31} & -\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) \tilde{\rho}_{32} & -(\gamma_1 + \gamma_2) \tilde{\rho}_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.133)$$

onde $\tilde{\rho}$, é definido como,

$$\tilde{\rho} = \exp \left[\frac{i}{\hbar} \hat{A} t \right] \hat{\rho} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \hat{A} t \right]. \quad (2.134)$$

A equação mestra na nova representação (referencial girante) é,

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [\tilde{H}, \tilde{\rho}] + \widetilde{\mathcal{L}}_a \tilde{\rho}. \quad (2.135)$$

As derivadas temporais dos termos de coerência da matriz densidade são,

$$\dot{\tilde{\rho}}_{12} = -\frac{i}{2} \Omega_1 \tilde{\rho}_{22} + \frac{i}{2} \Omega_1 \tilde{\rho}_{11} + i \Delta_1 \tilde{\rho}_{12} + \frac{i}{2} \Omega_2 \tilde{\rho}_{13}, \quad (2.136)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{13} = -\frac{i}{2} \Omega_1 \tilde{\rho}_{23} + \frac{i}{2} \Omega_2 \tilde{\rho}_{12} + \left[-\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) + i(\Delta_1 + \Delta_2) \right] \tilde{\rho}_{13}, \quad (2.137)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{23} = -\frac{i}{2} \Omega_1 \tilde{\rho}_{13} - \frac{i}{2} \Omega_2 \tilde{\rho}_{33} + \frac{i}{2} \Omega_2 \tilde{\rho}_{22} + \left[-\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) + i \Delta_2 \right] \tilde{\rho}_{23}. \quad (2.138)$$

Podemos escrever as componentes $\tilde{\rho}_{jk}$ da matriz densidade como,

$$\tilde{\rho}_{jk} = \tilde{\rho}_{jk}^{(0)} + \tilde{\rho}_{jk}^{(1)} + \tilde{\rho}_{jk}^{(2)} + \dots, \quad (2.139)$$

onde $\tilde{\rho}_{jk}^{(0)}$ é um termo de ordem zero em Ω_1 , $\tilde{\rho}_{jk}^{(1)}$ é um termo de ordem um em Ω_1 , $\tilde{\rho}_{jk}^{(2)}$ é um termo de ordem dois em Ω_1 e assim por diante. Como a intensidade do laser de frequência ν_1 é muito menor que a intensidade do laser de frequência ν_2 podemos aproximar as equações usando elementos da matriz densidade de primeira ordem em Ω_1 . Se o átomo está inicialmente no estado $|1\rangle$,

$$\rho_{11}^{(0)} = 1, \quad \rho_{22}^{(0)} = \rho_{33}^{(0)} = \rho_{23}^{(0)} = 0, \quad (2.140)$$

então obtemos,

$$\dot{\tilde{\rho}}_{12} = i\Delta_1\tilde{\rho}_{12} + \frac{i}{2}\Omega_2\tilde{\rho}_{13} + \frac{i}{2}\Omega_1, \quad (2.141)$$

$$\dot{\tilde{\rho}}_{13} = \frac{i}{2}\Omega_2\tilde{\rho}_{12} + \left[-\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) + i(\Delta_1 + \Delta_2) \right] \tilde{\rho}_{13}. \quad (2.142)$$

Escrevendo as equações anteriores em forma matricial, obtemos

$$\dot{R} = -MR + B, \quad (2.143)$$

onde

$$R = \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{12} \\ \tilde{\rho}_{13} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{i}{2}\Omega_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.144)$$

$$M = \begin{bmatrix} i\Delta_1 & \frac{i}{2}\Omega_2 \\ \frac{i}{2}\Omega_2 & -\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) + i(\Delta_1 + \Delta_2) \end{bmatrix}. \quad (2.145)$$

Integrando obtemos,

$$R(t) = \int_{-\infty}^t e^{-M(t-t')} B dt' = M^{-1}B. \quad (2.146)$$

A componente $\tilde{\rho}_{12}$ da matriz densidade é

$$\tilde{\rho}_{12} = \frac{\frac{1}{2}\Omega_1 \left[-\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) + i(\Delta_1 + \Delta_2) \right]}{-\frac{\Delta_1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) + i \left[\Delta_1(\Delta_1 + \Delta_2) - \frac{\Omega_2^2}{4} \right]}. \quad (2.147)$$

Fazendo a transformação $\rho_{12} = e^{-\frac{i}{\hbar}At}\tilde{\rho}_{12}e^{\frac{i}{\hbar}At}$ para escrever o elemento de matriz não diagonal na representação de Schrödinger,

$$\rho_{12} = \frac{\frac{1}{2}\Omega_1 e^{i\nu_1 t} \left[-\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) + i(\Delta_1 + \Delta_2) \right]}{-\frac{\Delta_1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) + i \left[\Delta_1(\Delta_1 + \Delta_2) - \frac{\Omega_2^2}{4} \right]}, \quad (2.148)$$

$$\rho_{12} = \frac{\Omega_1 e^{i\nu_1 t}}{2Z} \left(\left\{ \frac{\Delta_1}{4}(\gamma_1 + \gamma_2)^2 + (\Delta_1 + \Delta_2) \left[\Delta_1(\Delta_1 + \Delta_2) - \frac{\Omega_2^2}{4} \right] \right\} + i \left\{ -\frac{\Delta_1}{2}(\Delta_1 + \Delta_2)(\gamma_1 + \gamma_2) + \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) \left[\Delta_1(\Delta_1 + \Delta_2) - \frac{\Omega_2^2}{4} \right] \right\} \right), \quad (2.149)$$

onde,

$$Z = \frac{\Delta_1^2}{4}(\gamma_1 + \gamma_2)^2 + \left[\Delta_1(\Delta_1 + \Delta_2) - \frac{\Omega_2^2}{4} \right]^2. \quad (2.150)$$

Fazendo $\Delta_1 = 0$ obtemos,

$$\rho_{12} = - \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_2^2} \right) e^{i\nu_1 t} \left[\Delta_2 + \frac{i}{2}(\gamma_1 + \gamma_2) \right], \quad (2.151)$$

como $\Omega_2 \gg \Omega_1$ o valor de $\hat{\rho}_{12}$ é muito pequeno, isso faz que a probabilidade de transição de $|1\rangle$ para $|2\rangle$ seja muito pequena, então o meio atômico não absorve fótons com frequências muito próximas a $\omega_2 - \omega_1$, podemos dizer que o meio é transparente para a luz dessas frequências.

2.5 TEORIA DO EMARANHAMENTO

Nesta seção apresentaremos os conceitos básicos para o estudo do emaranhamento. Primeiro serão definidos os conceitos de emaranhamento para estados puros, e depois para estados mistura. Posteriormente serão apresentados diferentes critérios para a detecção e a quantificação do emaranhamento. Finalmente, será estudado um critério para se detectar o emaranhamento em estados gaussianos.

Estado puro emaranhado

Um estado puro $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ é separável quando ele pode ser escrito como um estado produto,

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\varphi\rangle, \quad (2.152)$$

onde $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_1$ e $|\varphi\rangle \in \mathcal{H}_2$. Caso contrário, se diz que o estado é emaranhado.

Estado misto emaranhado

Um estado misto $\hat{\rho} \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ é separável quando dado o conjunto de números reais não negativos $\{p_k\}$ é possível escrever,

$$\hat{\rho} = \sum_k p_k (\hat{\pi}_k \otimes \hat{\varrho}_k), \quad (2.153)$$

onde $\sum_k p_k = 1$, $\{\hat{\pi}_k\} \in \mathcal{H}_1$ e $\{\hat{\varrho}_k\} \in \mathcal{H}_2$. Caso contrário, se diz que o estado é emaranhado.

2.5.1 Decomposição de Schmidt

Se o sistema composto AB está representado pelo estado puro $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, então existe um conjunto ortogonal de estados puros $\{|\phi_k\rangle\} \in \mathcal{H}_A$ e um conjunto ortogonal de estados puros

$\{|\varphi_k\rangle\} \in \mathcal{H}_B$ para os quais,

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^d \lambda_k |\phi_k\rangle |\varphi_k\rangle, \quad (2.154)$$

onde o conjunto de números reais não negativos $\{\lambda_k\}$ cumpre com a condição $\sum_k \lambda_k = 1$.

A expressão (2.154) recebe o nome de decomposição de Schmidt. Os números λ_k são conhecidos como coeficientes de Schmidt, a quantidade d de coeficientes de Schmidt diferentes de zero é chamada de número de Schmidt.

As matrizes densidade para os sistemas A e B obtidas a partir de (2.154) são,

$$\hat{\rho}_A = \sum_{k=1}^d \lambda_k^2 |\phi_k\rangle \langle \phi_k|, \quad (2.155a)$$

$$\hat{\rho}_B = \sum_{k=1}^d \lambda_k^2 |\varphi_k\rangle \langle \varphi_k|, \quad (2.155b)$$

$\hat{\rho}_A$ e $\hat{\rho}_B$ possuem os mesmos autovalores.

No caso particular onde o número de Schmidt $d = 1$, usando (2.154) e a condição $\sum_k \lambda_k = 1$ temos que a decomposição de Schmidt será $|\psi\rangle = |\phi_k\rangle |\varphi_k\rangle$ (o estado é separável), as matrizes densidade para os sistemas A e B serão $\hat{\rho}_A = |\phi_k\rangle \langle \phi_k|$ e $\hat{\rho}_B = |\varphi_k\rangle \langle \varphi_k|$.

Quando um sistema bipartido é representado por um estado puro $|\psi\rangle$ e o número de Schmidt é maior do que um ($d > 1$) o estado é emaranhado, neste caso os sistemas A e B estarão descritos por estados mistos.

2.5.2 Critério de Peres-Horodecki

Em 1996 Asher Peres propôs um critério baseado na positividade das transpostas parciais (PERES, 1996) [32]. No mesmo ano foi provado que o critério é uma condição necessária e suficiente para matrizes densidade de 2×2 e 2×3 (HORODECKI, 1996) [33].

A matriz densidade para um sistema composto $A_1 A_2$ num estado separável é

$$\hat{\rho}^{A_1 A_2} = \sum_i p_i \hat{\rho}_i^{A_1} \otimes \hat{\rho}_i^{A_2}, \quad (2.156)$$

sua transposta parcial em relação a A_1 , é dada por

$$(\hat{\rho}^{A_1 A_2})^{T_{A_1}} = \sum_i p_i (\hat{\rho}_i^{A_1})^T \otimes \rho_i^{A_2}, \quad (2.157)$$

onde a transposta parcial cumpre a condição

$$\langle i_1 i_2 | (\hat{\rho}^{A_1 A_2})^{T_{A_1}} | j_1 j_2 \rangle = \langle j_1 i_2 | \hat{\rho}^{A_1 A_2} | i_1 i_2 \rangle. \quad (2.158)$$

A transposta parcial de uma matriz não negativa é também não negativa. Como a transposta parcial não altera o valor do traço temos que $(\hat{\rho}_i^{A_1})^T$ é uma matriz densidade, logo $(\hat{\rho}^{A_1 A_2})^{T_{A_1}}$ é também uma matriz densidade e não pode ter autovalores negativos.

Se a transposta parcial de uma matriz densidade para um sistema bipartido têm autovalores negativos o estado é emaranhado. O critério foi generalizado por (HORODECKI, 1997) [1] para uma matriz densidade $N \times N$ onde $N \geq 3$, neste caso a condição é necessária mas não suficiente.

2.5.3 Pureza e entropia linear

A quantidade de informação contida num estado quântico é quanta certeza temos na predição de um resultado de uma medida feita no estado (PERES, 1995) [31]. Antes de uma medição só podemos prever as probabilidades p_1, \dots, p_N associadas a N resultados possíveis. Logo após a medição, um desses resultados será obtido e teremos certeza de qual é o estado do sistema. A quantificação dependera do processo de preparação e das medições escolhidas que são associadas às probabilidades $\{p_k\}$. Se para qualquer medição temos completa ignorância, para um sistema num espaço de Hilbert de N dimensões teremos que $p_k = \frac{1}{N}$, então o estado será maximante misto,

$$\hat{\rho} = \frac{1}{N} \mathbb{I}_N. \quad (2.159)$$

O caso oposto é um estado quântico puro $\hat{\rho} = |\psi\rangle \langle \psi|$, esse estado contém à máxima informação possível que poderíamos ter a nossa disposição na preparação do sistema. Como $\text{Tr} \hat{\rho}^2 = 1$ para um estado puro, e $\text{Tr} \hat{\rho}^2 < 1$ para um estado misto, podemos definir a pureza μ de um estado $\hat{\rho}$ como,

$$\mu(\hat{\rho}) = \text{Tr} \hat{\rho}^2. \quad (2.160)$$

Para estados que pertencem a um espaço de Hilbert de dimensão $\dim \mathcal{H} = d$, a entropia linear S_L é definida como,

$$S_L(\hat{\rho}) = \frac{d}{d-1} (1 - \text{Tr} \hat{\rho}^2). \quad (2.161)$$

Esta quantidade caracteriza a nossa ignorância antes de fazer uma medição sobre $\hat{\rho}$.

Quando um sistema bipartido é representado por um estado puro o emaranhamento pode ser quantificado calculando-se a entropia linear da matriz densidade de uma das partes.

2.5.4 Negatividade Global

Usando como base o critério de Peres-Horodecki, existe um método para quantificar o emaranhamento entre sistemas bipartidos (VIDAL; WERNER, 2002) [25].

Seja $\hat{\rho} \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$ a matriz densidade de um sistema composto, onde \mathcal{H}_m representa o espaço de Hilbert do m -ésimo subsistema de dimensão d_m . Usando a base formada por $|i_1 i_2 \cdots i_N\rangle$ (onde i_m vai de 0 até $d_m - 1$) é possível calcular a transposta parcial em relação ao p -ésimo sistema $\hat{\rho}_G^{T_p}$ usando a condição

$$\langle i_1 i_2 \cdots i_N | \hat{\rho}_G^{T_p} | j_1 j_2 \cdots j_N \rangle = \langle i_1 i_2 \cdots j_p \cdots i_2 | \hat{\rho} | j_1 j_2 \cdots i_p \cdots j_N \rangle. \quad (2.162)$$

O traço da norma da matriz densidade $\|\hat{\rho}\|_1$ é definido como

$$\|\hat{\rho}\|_1 = \text{Tr} \left[\sqrt{\hat{\rho}^\dagger \hat{\rho}} \right]. \quad (2.163)$$

A negatividade global N_G^p é definida como,

$$N_G^p = \frac{1}{d_p - 1} \left(\|\hat{\rho}_G^{T_p}\|_1 - 1 \right), \quad (2.164)$$

a negatividade global mede o emaranhamento do subsistema p com o complemento num sistema bipartido. A negatividade global diz quanto $\hat{\rho}_G^{T_p}$ falha em cumprir com o critério de Peres. O critério é válido para estados mistos, para uma matriz densidade $N \times N$ onde $N \geq 3$ a condição é necessária mas não suficiente, isto quer dizer que neste caso, mesmo para $N_G^p = 0$ o sistema poderia estar emaranhado.

2.5.5 Emaranhamento para variáveis contínuas

Um sistema de variáveis contínuas formado por dois modos do campo eletromagnético pode ser representado por uma matriz densidade que pertence ao espaço produto $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ dos espaços de Fock \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 , este sistema pode ser representado também por uma distribuição de quase-probabilidade. Um estado gaussiano de dois modos é aquele que possui uma função de Wigner χ (GARDINER; ZOLLER, 1999, p.119) [12]

$$\chi(\lambda_1, \lambda_2) = \exp \left[-\frac{1}{2} (\lambda_1^I, \lambda_1^R, \lambda_2^I, \lambda_2^R) M (\lambda_1^I, \lambda_1^R, \lambda_2^I, \lambda_2^R)^T, \right] \quad (2.165)$$

onde $\lambda_j = \lambda_j^R + i\lambda_j^I$ são parâmetros que determinam o estado gaussiano. Um estado gaussiano de dois modos pode ser representado pela matriz simétrica real 4×4 conhecida como matriz de covariância M ,

$$M = \begin{bmatrix} G_1 & C \\ C^T & G_2 \end{bmatrix}, \quad (2.166)$$

onde G_1 , G_2 e C são matrizes reais 2×2 . Usando transformações locais unitárias e lineares de Bogoliubov (LLUBO) é possível escrever a matriz de covariância na forma padrão I,

$$M_s^I = \begin{bmatrix} n & 0 & c & 0 \\ 0 & n & 0 & c' \\ c & 0 & m & 0 \\ 0 & c' & 0 & m \end{bmatrix}, \quad (2.167)$$

ou na forma padrão II,

$$M_s^I = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 & c_2 \\ c_1 & 0 & m_1 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad (2.168)$$

onde $n, m \geq 1$ e,

$$\frac{n_1 - 1}{m_1 - 1} = \frac{n_2 - 1}{m_2 - 1}, \quad (2.169a)$$

$$|c_1| - |c_2| = \sqrt{(n_1 - 1)(m_1 - 1)} - \sqrt{(n_2 - 1)(m_2 - 1)}. \quad (2.169b)$$

Considerando as quadraturas do campo \hat{x}_j e \hat{p}_j , em (DUAN; et al., 2000) [3] é provado que os operadores \hat{u} e \hat{v} satisfazem as seguintes relações

$$\hat{u} = a_0 \hat{x}_1 - \frac{c_1}{|c_1|} \frac{1}{a_0} \hat{x}_2, \quad (2.170a)$$

$$\hat{v} = a_0 \hat{p}_1 - \frac{c_2}{|c_2|} \frac{1}{a_0} \hat{p}_2, \quad (2.170b)$$

onde os operadores \hat{u} e \hat{v} são conhecidos como operadores tipo EPR. Para um estado gaussiano ρ de dois modos na forma padrão II satisfazem a condição,

$$\langle (\Delta \hat{u})^2 \rangle_\rho + \langle (\Delta \hat{v})^2 \rangle_\rho \geq a_0^2 + \frac{1}{a_0^2}, \quad (2.171)$$

somente quando o estado é separável. Considerando o caso particular

$$\hat{u} = \hat{x}_1 - \hat{x}_2, \quad (2.172a)$$

$$\hat{v} = \hat{p}_1 - \hat{p}_2, \quad (2.172b)$$

podemos dizer que o estado é emaranhado quando

$$\langle (\Delta \hat{u})^2 \rangle_\rho + \langle (\Delta \hat{v})^2 \rangle_\rho \leq 2. \quad (2.173)$$

Usando o critério (2.173) será possível determinar se um estado gaussiano de dois modos é emaranhado.

2.6 CRITÉRIO DE EMARANHAMENTO DOS MODOS DE CAMPO DA CAVIDADE

Como foi exposto em (2.5.5) usando o critério proposto por Duan [3], dois modos de uma cavidade estão emaranhados se a soma das variâncias de dois operadores tipo EPR $\hat{u} = \hat{x}_1 - \hat{x}_2$ e $\hat{v} = \hat{p}_1 + \hat{p}_2$ satisfazem a desigualdade,

$$\langle (\Delta \hat{u})^2 \rangle_\rho + \langle (\Delta \hat{v})^2 \rangle_\rho < 2, \quad (2.174)$$

onde as quadraturas do campo são dadas por,

$$\hat{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger), \quad \hat{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger), \quad (2.175)$$

$$\hat{p}_1 = \frac{-i}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger), \quad \hat{p}_2 = \frac{-i}{\sqrt{2}}(\hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger). \quad (2.176)$$

A variância de um operador A é definida como,

$$\langle (\Delta \hat{A})^2 \rangle = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2. \quad (2.177)$$

Então podemos escrever (2.174) como,

$$V = \langle \hat{u}^2 \rangle - \langle \hat{u} \rangle^2 + \langle \hat{v}^2 \rangle - \langle \hat{v} \rangle^2, \quad (2.178)$$

onde,

$$\begin{aligned}
\langle \hat{u}^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left[\langle \hat{a}_1 \hat{a}_1 \rangle + \langle \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger \rangle + \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle + \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1^\dagger \rangle \right. \\
&\quad - 2 \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle - 2 \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \rangle - 2 \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \rangle - 2 \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \rangle \\
&\quad \left. + \langle \hat{a}_2 \hat{a}_2 \rangle + \langle \hat{a}_2 \hat{a}_2^\dagger \rangle + \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \rangle + \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2^\dagger \rangle \right], \tag{2.179}
\end{aligned}$$

$$\langle \hat{u} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\langle \hat{a}_1 \rangle + \langle \hat{a}_1^\dagger \rangle - \langle \hat{a}_2 \rangle - \langle \hat{a}_2^\dagger \rangle \right], \tag{2.180}$$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{v}^2 \rangle &= -\frac{1}{2} \left[\langle \hat{a}_1 \hat{a}_1 \rangle - \langle \hat{a}_1 \hat{a}_1^\dagger \rangle - \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle + \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1^\dagger \rangle \right. \\
&\quad + 2 \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle - 2 \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \rangle - 2 \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 \rangle + 2 \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \rangle \\
&\quad \left. + \langle \hat{a}_2 \hat{a}_2 \rangle - \langle \hat{a}_2 \hat{a}_2^\dagger \rangle - \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \rangle + \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2^\dagger \rangle \right], \tag{2.181}
\end{aligned}$$

$$\langle \hat{v} \rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}} \left[\langle \hat{a}_1 \rangle - \langle \hat{a}_1^\dagger \rangle + \langle \hat{a}_2 \rangle - \langle \hat{a}_2^\dagger \rangle \right]. \tag{2.182}$$

Em termos dos operadores de criação e aniquilação dos modos de campo quantizado, a soma de variâncias V pode ser expressa como,

$$\begin{aligned}
V &= 2 \left[1 + \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \rangle + \langle \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \rangle - \langle \hat{a}_1 \hat{a}_2 \rangle - \langle \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \rangle - \langle \hat{a}_1^\dagger \rangle \langle \hat{a}_1 \rangle \right. \\
&\quad \left. - \langle \hat{a}_2^\dagger \rangle \langle \hat{a}_2 \rangle + \langle \hat{a}_1 \rangle \langle \hat{a}_2 \rangle + \langle \hat{a}_1^\dagger \rangle \langle \hat{a}_2^\dagger \rangle \right]. \tag{2.183}
\end{aligned}$$

Como os operadores de criação e aniquilação dos modos de campo quantizado podem ser escritos usando os operadores de campo comprimido (2.50), a soma de variâncias V pode ser expressa em função dos operadores de campo comprimido,

$$\begin{aligned}
V &= 2e^{-2r} \left[1 + \langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 \rangle + \langle \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 \rangle - \langle \hat{b}_1 \hat{b}_2 \rangle - \langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger \rangle \right. \\
&\quad \left. - \langle \hat{b}_1^\dagger \rangle \langle \hat{b}_1 \rangle - \langle \hat{b}_2^\dagger \rangle \langle \hat{b}_2 \rangle + \langle \hat{b}_1 \rangle \langle \hat{b}_2 \rangle + \langle \hat{b}_1^\dagger \rangle \langle \hat{b}_2^\dagger \rangle \right]. \tag{2.184}
\end{aligned}$$

Usando o critério (2.173) a soma de variâncias V pode ser usada para detectar a presença de emaranhamento. Outras propriedades importantes podem ser escritas em termos dos operadores do campo comprimido, por exemplo o campo elétrico (2.71)

$$E = iE_{01} \left(\hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger \right) + iE_{02} \left(\hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger \right), \tag{2.185}$$

onde,

$$E_{0l} = \frac{N_l \nu_l}{c}, \quad N_l = \sqrt{\frac{2\pi \hbar c^2}{L^3 \nu_l}}, \quad (2.186)$$

e o quadrado do campo elétrico,

$$E^2 = E_{01}^2 \left(1 + 2\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_1 \hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1^\dagger \right) + E_{02}^2 \left(1 + 2\hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_2 \hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2^\dagger \right) + E_{01} E_{02} \left(\hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_1 \hat{a}_2 - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \right), \quad (2.187)$$

que pode ser utilizado para calcular a intensidade do campo eletromagnético dos modos da cavidade. Definindo as quantidades

$$E'_{01} = E_{01} \cosh r - E_{02} \sinh r, \quad (2.188a)$$

$$E'_{02} = E_{02} \cosh r - E_{01} \sinh r, \quad (2.188b)$$

podemos escrever o campo elétrico em termos dos operadores de campo comprimido,

$$E = iE'_{01} \left(\hat{b}_1 - \hat{b}_1^\dagger \right) + iE'_{02} \left(\hat{b}_2 - \hat{b}_2^\dagger \right), \quad (2.189)$$

assim como o quadrado do campo elétrico,

$$E^2 = (E'_{01})^2 \left(1 + 2\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 - \hat{b}_1 \hat{b}_1 - \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1^\dagger \right) + (E'_{02})^2 \left(1 + 2\hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 - \hat{b}_2 \hat{b}_2 - \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2^\dagger \right) + E'_{01} E'_{02} \left(\hat{b}_1 \hat{b}_2^\dagger + \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2 - \hat{b}_1 \hat{b}_2 - \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger \right). \quad (2.190)$$

Com a expressão obtida em (2.174) estudaremos o emaranhamento entre os modos de campo quantizado da cavidade. Com as expressões obtidas em (2.189) e (2.190) estudaremos o comportamento do campo elétrico dos modos da cavidade.

3 DINÂMICA DO SISTEMA SEM DISSIPACÃO

O objetivo principal deste trabalho é examinar o emaranhamento entre dois modos de campo quantizado numa cavidade através da interação com átomos de três níveis. Como os fótons não interagem entre si os átomos atuam como agentes intermediários na geração de emaranhamento. Se inicialmente os fótons e átomos se encontram em um estado separável, a interação entre os fótons e os átomos gera emaranhamento entre os átomos e os modos de campo. Se inicialmente os fótons e átomos se encontram em um estado emaranhado, a interação entre os fótons e os átomos diminui o emaranhamento, isto é causado pela transferência de emaranhamento. Consideraremos primeiro a evolução unitária de um estado do sistema composto átomo-modos de campo quantizado da cavidade. Posteriormente no capítulo 4, consideraremos a evolução não unitária de um sistema composto formado por N átomos de três níveis e dois modos de campo quantizado. Para simplificar o estudo da dinâmica do sistema átomo-modos de campo, será aplicada uma transformação unitária que leva o sistema da representação de interação para a representação dos estados atômicos vestidos. Eliminando os termos que oscilam rapidamente será obtida uma expressão analítica do operador Hamiltoniano que não depende explicitamente do tempo. Os operadores de aniquilação associados aos modos de campo quantizado da cavidade serão substituídos pelos operadores de campo comprimido de dois modos para facilitar o tratamento analítico. A partir do Hamiltoniano independente do tempo para um átomo será calculado o operador de evolução temporal. Uma expressão analítica do vetor de estado para o sistema num tempo arbitrário será obtida aplicando-se o operador de evolução temporal num estado inicial do sistema. Usando a expressão da soma de variâncias $V(t)$ definida no capítulo 2 e o traço nos estados atômicos da matriz densidade, será analisado o comportamento do emaranhamento entre os fótons de campo quantizado da cavidade. Usando a negatividade global será estudada a transferência de emaranhamento entre o sistema átomo-modos de campo, assim como o emaranhamento entre cada modo de campo comprimido e o resto do sistema átomo-modos de campo.

3.1 O SISTEMA

O sistema consiste de um conjunto de N -átomos independentes de três níveis em uma cavidade óptica de dois modos de campo quantizado. Os estados $|1\rangle$ e $|2\rangle$ são estados metaestáveis que estão acoplados em forma ressonante por um campo de laser de frequência de Rabi Ω_1 . O estado $|2\rangle$ está acoplado em forma ressonante com o estado excitado $|3\rangle$ por outro campo de laser de frequência de Rabi Ω_2 . Dois modos do campo quantizado da cavidade (com operadores aniquilação \hat{a}_1 e \hat{a}_2) são gerados numa transição dipolar permitida $|1\rangle - |3\rangle$. O acoplamento entre os estados $|1\rangle$ e $|3\rangle$ pela interação com os modos de campo quantizado não

é ressonante. O estado excitado $|3\rangle$ pode decair espontaneamente para o estado $|1\rangle$ com razão de decaimento γ_1 , ou para o estado $|2\rangle$ com razão de decaimento γ_2 .

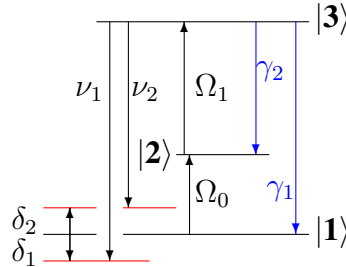


Figura 3.1: Átomo de três níveis interagindo com dois campos de laser de frequências de Rabi Ω_1 e Ω_2 . A taxa de decaimento para a transição $|3\rangle \rightarrow |1\rangle$ é γ_1 , a taxa de decaimento para $|3\rangle \rightarrow |2\rangle$ é γ_2 . A dessintonia entre a frequência do modo de campo quantizado ν_1 e a frequência da transição $|1\rangle - |3\rangle$ é δ_1 , a dessintonia entre a frequência do modo de campo quantizado ν_2 e a frequência da transição $|1\rangle - |3\rangle$ é δ_2 .

O Hamiltoniano do sistema na representação da interação é,

$$\hat{H}_I = \hat{H}_L + \hat{H}_{cav}, \quad (3.1)$$

onde a interação com os campos dos lasers é dada por,

$$\hat{H}_L = \sum_{j=1}^N \left[\frac{\hbar}{2} \Omega_0 \left(\hat{\sigma}_{12}^{(j)} + \hat{\sigma}_{21}^{(j)} \right) + \frac{\hbar}{2} \Omega_1 \left(\hat{\sigma}_{23}^{(j)} + \hat{\sigma}_{32}^{(j)} \right) \right], \quad (3.2)$$

e a interação com os modos de campo quantizado da cavidade é dada por,

$$\hat{H}_{cav} = \sum_{j=1}^N \sum_{l=1,2} h g_l \left(\hat{\sigma}_{31}^{(j)} \hat{a}_l e^{-i\delta_l t} + \hat{a}_l^\dagger \hat{\sigma}_{13}^{(j)} e^{i\delta_l t} \right). \quad (3.3)$$

Os autovalores do operador \hat{H}_L que representa a interação com os campos de laser são,

$$\lambda_+ = \frac{\hbar}{2} \Omega_R, \quad \lambda_0 = 0, \quad \lambda_- = -\frac{\hbar}{2} \Omega_R, \quad (3.4)$$

onde $\Omega_R = \sqrt{\Omega_0^2 + \Omega_1^2}$. Os autovetores de \hat{H}_L são chamados de estados atômicos vestidos e têm a forma,

$$|+_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \theta |1_j\rangle + |2_j\rangle + \sin \theta |3_j\rangle), \quad (3.5a)$$

$$|0_j\rangle = -\sin \theta |1_j\rangle + \cos \theta |3_j\rangle, \quad (3.5b)$$

$$|-_j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \theta |1_j\rangle - |2_j\rangle + \sin \theta |3_j\rangle), \quad (3.5c)$$

onde $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0} \right)$. Na base dos estados atômicos vestidos o Hamiltoniano \hat{H}_L têm a forma diagonal,

$$\hat{H}_L = \sum_{j=1}^N \frac{\hbar}{2} \Omega_R \left(\hat{\sigma}_{++}^{(j)} - \hat{\sigma}_{--}^{(j)} \right). \quad (3.6)$$

O Hamiltoniano (3.3) de interação com os modos de campo quantizado da cavidade pode ser escrito como,

$$\hat{H}_{cav} = \sum_{j=1}^N \hat{H}_{cav}^{(j)}, \quad (3.7)$$

onde o operador $\hat{H}_{cav}^{(j)}$ têm a forma,

$$\hat{H}_{cav}^{(j)} = \sum_{l=1,2} h g_l \left(\hat{\sigma}_{31}^{(j)} \hat{a}_l e^{-i\delta_l t} + \hat{a}_l^\dagger \hat{\sigma}_{13}^{(j)} e^{i\delta_l t} \right). \quad (3.8)$$

Escrevendo o operador $\hat{H}_{cav}^{(j)}$ (3.8) na base dos estados atômicos vestidos obtemos a sua representação matricial,

$$\hat{H}_{cav}^{(j)} = \hbar \begin{bmatrix} \frac{\hat{A}(t) \cos \theta \sin \theta}{2} & \frac{\hat{A}^\dagger(t) \cos^2 \theta}{\sqrt{2}} & \frac{\hat{A}(t) \cos \theta \sin \theta}{2} \\ \frac{\hat{A}(t) \cos^2 \theta}{\sqrt{2}} & -\hat{A}(t) \cos \theta \sin \theta & \frac{\hat{A}(t) \cos^2 \theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{\hat{A}(t) \cos \theta \sin \theta}{2} & \frac{\hat{A}^\dagger(t) \cos^2 \theta}{\sqrt{2}} & \frac{\hat{A}(t) \cos \theta \sin \theta}{2} \end{bmatrix} + \hbar \begin{bmatrix} \frac{\hat{A}^\dagger(t) \cos \theta \sin \theta}{2} & \frac{-\hat{A}(t) \sin^2 \theta}{\sqrt{2}} & \frac{\hat{A}^\dagger(t) \cos \theta \sin \theta}{2} \\ \frac{-\hat{A}^\dagger(t) \sin^2 \theta}{\sqrt{2}} & -\hat{A}^\dagger(t) \cos \theta \sin \theta & \frac{-\hat{A}^\dagger(t) \sin^2 \theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{\hat{A}^\dagger(t) \cos \theta \sin \theta}{2} & \frac{-\hat{A}(t) \sin^2 \theta}{\sqrt{2}} & \frac{\hat{A}^\dagger(t) \cos \theta \sin \theta}{2} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

onde o operador $\hat{A}(t)$ é dado por,

$$\hat{A}(t) = g_1 \hat{a}_1 e^{-i\delta_1 t} + g_2 \hat{a}_2 e^{-i\delta_2 t}. \quad (3.10)$$

Para obter uma expressão do operador Hamiltoniano \hat{H}_I que não dependa do tempo vamos escrever (3.1) na representação dos estados atômicos vestidos usando a transformação unitária $\exp\left(i\hat{H}_L t/\hbar\right)$,

$$\tilde{\hat{H}}_I = \exp\left[\frac{i}{\hbar}\hat{H}_L t\right] (\hat{H}_I - \hat{H}_L) \exp\left[-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_L t\right]. \quad (3.11)$$

Assumindo que os modos de campo da cavidade possuem dessintonias de,

$$\delta_1 = -\delta_2 = \frac{1}{2}\Omega_R, \quad (3.12)$$

e desprezando os termos que oscilam rapidamente (SCULLY; ZUBAIRY, 1997, p.152) [5],

$$\begin{aligned} \tilde{\hat{H}}_I &= \frac{\hbar g \cos^2 \theta}{\sqrt{2}} \sum_{j=1}^N \left(\hat{a}_2^\dagger \hat{\sigma}_{+0}^{(j)} + \hat{\sigma}_{0+}^{(j)} \hat{a}_2 + \hat{\sigma}_{0-}^{(j)} \hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger \hat{\sigma}_{-0}^{(j)} \right) \\ &\quad - \frac{\hbar g \sin^2 \theta}{\sqrt{2}} \sum_{j=1}^N \left(\hat{\sigma}_{+0}^{(j)} \hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger \hat{\sigma}_{0+}^{(j)} + \hat{\sigma}_{-0}^{(j)} \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{\sigma}_{0-}^{(j)} \right), \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde estamos assumindo que a constante de acoplamento g_1 entre o átomo e o modo de campo quantizado \hat{a}_1 , e a constante de acoplamento g_2 entre o átomo e o modo de campo quantizado \hat{a}_2 são iguais $g_1 = g_2 = g$.

Para $\Omega_1 < \Omega_0$, temos que $r = \operatorname{arctanh}(\tan^2 \theta)$, o Hamiltoniano $\tilde{\hat{H}}_I$ para $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} < 1$ será

$$\begin{aligned} \tilde{\hat{H}}_I &= \sum_{j=1}^N \hbar g_a \left[(\hat{a}_2^\dagger \cosh r - \hat{a}_1 \sinh r) \hat{\sigma}_{+0}^{(j)} + \hat{\sigma}_{0+}^{(j)} (\hat{a}_2 \cosh r - \hat{a}_1^\dagger \sinh r) \right. \\ &\quad \left. + \hat{\sigma}_{0-}^{(j)} (\hat{a}_1 \cosh r - \hat{a}_2^\dagger \sinh r) + (\hat{a}_1^\dagger \cosh r - \hat{a}_2 \sinh r) \hat{\sigma}_{-0}^{(j)} \right], \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\hat{H}}_I &= \hbar g_a \cosh r \sum_{j=1}^N \left(\hat{a}_2^\dagger \hat{\sigma}_{+0}^{(j)} + \hat{\sigma}_{0+}^{(j)} \hat{a}_2 + \hat{\sigma}_{0-}^{(j)} \hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger \hat{\sigma}_{-0}^{(j)} \right) \\ &\quad - \hbar g_a \sinh r \sum_{j=1}^N \left(\hat{\sigma}_{+0}^{(j)} \hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger \hat{\sigma}_{0+}^{(j)} + \hat{\sigma}_{-0}^{(j)} \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{\sigma}_{0-}^{(j)} \right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde $g_a = g\sqrt{\frac{1}{2}\cos(2\theta)}$.

Para $\Omega_1 > \Omega_0$, temos que $r = \operatorname{arctanh}(\tan^{-2} \theta)$, o Hamiltoniano \tilde{H}_I para $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} > 1$ será

$$\begin{aligned} \tilde{H}_I = \sum_{j=1}^N \hbar g_a \left[\hat{\sigma}_{+0}^{(j)} (\hat{a}_1 \cosh r - \hat{a}_2^\dagger \sinh r) + (\hat{a}_1^\dagger \cosh r - \hat{a}_2 \sinh r) \hat{\sigma}_{0+}^{(j)} \right. \\ \left. + \hat{\sigma}_{-0}^{(j)} (\hat{a}_2 \cosh r - \hat{a}_1^\dagger \sinh r) + (\hat{a}_2^\dagger \cosh r - \hat{a}_1 \sinh r) \hat{\sigma}_{0-}^{(j)} \right], \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_I = \hbar g_a \cosh r \sum_{j=1}^N \left(\hat{\sigma}_{+0}^{(j)} \hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger \hat{\sigma}_{0+}^{(j)} + \hat{\sigma}_{-0}^{(j)} \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{\sigma}_{0-}^{(j)} \right) \\ - \hbar g_a \sinh r \sum_{j=1}^N \left(\hat{a}_2^\dagger \hat{\sigma}_{+0}^{(j)} + \hat{\sigma}_{0+}^{(j)} \hat{a}_2 + \hat{\sigma}_{-0}^{(j)} \hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger \hat{\sigma}_{0-}^{(j)} \right), \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde $g_b = -g \sqrt{\frac{1}{2} \cos(2\theta)}$.

Usando o operador de dois modos do campo comprimido,

$$\hat{S}(r) = \exp \left(r \hat{a}_1 \hat{a}_2 - r \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \right), \quad r \in \mathbb{R}, \quad (3.18)$$

e aplicando a transformação $\hat{b}_l = S^\dagger(r) \hat{a}_l S(r)$ obtemos

$$\hat{b}_1 = \hat{a}_1 \cosh r - \hat{a}_2^\dagger \sinh r, \quad (3.19a)$$

$$\hat{b}_2 = \hat{a}_2 \cosh r - \hat{a}_1^\dagger \sinh r. \quad (3.19b)$$

Com esse novo par de operadores bosônicos é possível escrever o Hamiltoniano \tilde{H}_I para $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} < 1$ como

$$\tilde{H}_I = \hbar g_a \sum_{j=1}^N \left(\hat{b}_2^\dagger \hat{\sigma}_{+0}^{(j)} + \hat{\sigma}_{0+}^{(j)} \hat{b}_2 + \hat{\sigma}_{-0}^{(j)} \hat{b}_1 + \hat{b}_1^\dagger \hat{\sigma}_{-0}^{(j)} \right). \quad (3.20)$$

O Hamiltoniano \tilde{H}_I para $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} > 1$ será

$$\tilde{H}_I = \hbar g_b \sum_{j=1}^N \left(\hat{\sigma}_{+0}^{(j)} \hat{b}_1 + \hat{b}_1^\dagger \hat{\sigma}_{0+}^{(j)} + \hat{\sigma}_{-0}^{(j)} \hat{b}_2 + \hat{b}_2^\dagger \hat{\sigma}_{0-}^{(j)} \right). \quad (3.21)$$

Podemos ver que os hamiltonianos obtidos (3.20) e (3.21) são independentes do tempo, o que facilita a análise da evolução temporal do sistema.

3.2 OPERADOR DE EVOLUÇÃO UNITÁRIA

Consideraremos agora o caso em que o sistema não tem dissipação. Basicamente a razão de decaimento espontâneo γ dos estados do átomo e a razão de decaimento espontâneo κ dos estados dos fótons de campo quantizado da cavidade serão considerados nulos ($\gamma = \kappa = 0$). Para esta aproximação a evolução temporal do sistema será unitária. Como o Hamiltoniano do sistema na representação dos estados vestidos não depende do tempo o operador de evolução temporal tem a forma $\exp(-i\tilde{H}_I t/\hbar)$. Será utilizada a base produto $|j\rangle |n_1, n_2\rangle$ ($j = +, 0, -$) entre a base dos estados atômicos vestidos (3.5) e a base formada pelos autoestados $|n_1, n_2\rangle$ dos operadores $\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1$ e $\hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2$. Na base produto formada pelos estados $|j\rangle |n_1, n_2\rangle$, os Hamiltonianos (3.20) e (3.21) apresentam uma estrutura simples que facilita o cálculo do operador de evolução temporal. Da aplicação do operador de evolução temporal sobre um estado inicial será obtida uma expressão analítica para o vetor de estado do sistema num tempo $t > 0$ arbitrário.

3.2.1 Operador de evolução unitária para o sistema com a razão $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} < 1$

Para obter a representação matricial do operador Hamiltoniano (3.20) para um átomo consideraremos as possíveis transições para escrever \tilde{H}_I numa estrutura de blocos. O Hamiltoniano para um átomo é dado por
O Hamiltoniano para um átomo é dado por:

$$\tilde{H}_I = \hbar g_a (\hat{b}_2^\dagger \hat{\sigma}_{+0} + \hat{\sigma}_{0+} \hat{b}_2 + \hat{\sigma}_{0-} \hat{b}_1 + \hat{b}_1^\dagger \hat{\sigma}_{-0}). \quad (3.22)$$

Considerando o estado $|00\rangle_r = S(r) |00\rangle$, podemos usar os operadores criação de campo comprimido para construir os vetores

$$|n_1 n_2\rangle_r = \frac{(\hat{b}_2^\dagger)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{(\hat{b}_1^\dagger)^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} |00\rangle_r. \quad (3.23)$$

Por simplicidade será omitido o índice r , então $|n_1 n_2\rangle_r \equiv |n_1 n_2\rangle$. O operador \tilde{H}_I pode ser representado em forma matricial usando a base produto formada pelos vetores $|k\rangle |n_1 n_2\rangle$ onde $k = +, 0, -$.

Como $\langle k', n'_1, n'_2 | \tilde{H}_I | k, n_1, n_2 \rangle \neq 0$ só para os estados $|+, n_1, n_2 + 1\rangle$, $|0, n_1, n_2\rangle$ e $|-, n_1 + 1, n_2\rangle$, temos que

$$\begin{aligned} \tilde{H}_I = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} & (\hbar g_a \sqrt{n_2 + 1} |+, n_1, n_2 + 1\rangle \langle 0, n_1, n_2| \\ & + \hbar g_a \sqrt{n_2 + 1} |0, n_1, n_2\rangle \langle +, n_1, n_2 + 1| \\ & + \hbar g_a \sqrt{n_1 + 1} |0, n_1, n_2\rangle \langle -, n_1 + 1, n_2| \\ & + \hbar g_a \sqrt{n_1 + 1} |-, n_1 + 1, n_2\rangle \langle 0, n_1, n_2|). \end{aligned} \quad (3.24)$$

A representação matricial do operador \tilde{H}_I é dada por

$$\tilde{H}_I = \begin{bmatrix} \tilde{H}_I(0,0) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \tilde{H}_I(1,0) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \tilde{H}_I(0,1) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{H}_I(1,1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

onde as matrizes $\tilde{H}_I(n_1, n_2)$ são definidas da forma

$$\tilde{H}_I(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} 0 & \hbar g_a \sqrt{n_2 + 1} & 0 \\ \hbar g_a \sqrt{n_2 + 1} & 0 & \hbar g_a \sqrt{n_1 + 1} \\ 0 & \hbar g_a \sqrt{n_1 + 1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

Para determinar a evolução unitária de um átomo faremos uso da estrutura de blocos da matriz Hamiltoniana (3.25), como a matriz Hamiltoniana não depende explicitamente do tempo é possível escrever a matriz que representa o operador de evolução temporal na forma,

$$\tilde{U}(t) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \tilde{H}_I t \right] \quad (3.27)$$

a estrutura de blocos permite calcular cada bloco da matriz $\tilde{U}(t)$ de forma separada,

$$\tilde{U}(n_1, n_2, t) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \tilde{H}_I(n_1, n_2) t \right]. \quad (3.28)$$

Os autovalores de $\tilde{H}_I(n_1, n_2)$ (3.26) são

$$\lambda_{1,2,3}(n_1, n_2) = \hbar g_a \{ -\sqrt{2 + n_1 + n_2}, 0, \sqrt{2 + n_1 + n_2} \}, \quad (3.29)$$

e os autovetores têm a forma

$$|\lambda_1(n_1, n_2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(2+n_1+n_2)}} \begin{bmatrix} \sqrt{1+n_2} \\ -\sqrt{2+n_1+n_2} \\ \sqrt{1+n_1} \end{bmatrix}, \quad (3.30)$$

$$|\lambda_2(n_1, n_2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2+n_1+n_2}} \begin{bmatrix} -\sqrt{1+n_1} \\ 0 \\ \sqrt{1+n_2} \end{bmatrix}, \quad (3.31)$$

$$|\lambda_3(n_1, n_2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(2+n_1+n_2)}} \begin{bmatrix} \sqrt{1+n_2} \\ \sqrt{2+n_1+n_2} \\ \sqrt{1+n_1} \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

É possível agora calcular cada bloco (3.28) da matriz $\tilde{U}_I(t)$ na base dos autovetores (3.30), (3.31) e (3.32). Definindo $\tau = g_a(\sqrt{2+n_1+n_2})t$, obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{U}_I(n_1, n_2, \tau) = e^{i\tau} & |\lambda_1(n_1, n_2)\rangle \langle \lambda_1(n_1, n_2)| + |\lambda_2(n_1, n_2)\rangle \langle \lambda_2(n_1, n_2)| \\ & + e^{-i\tau} |\lambda_3(n_1, n_2)\rangle \langle \lambda_3(n_1, n_2)|. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Escrevendo o resultado anterior na representação matricial

$$\tilde{U}_I(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} V'_1 & V'_2 & V'_3 \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

onde,

$$V'_1 = \begin{bmatrix} \frac{(n_2+1)}{(2+n_1+n_2)} \cos \tau + \frac{(n_1+1)}{(2+n_1+n_2)} \\ -i \frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{2+n_1+n_2}} \sin \tau \\ \frac{\sqrt{n_1+1} \sqrt{n_2+1}}{(2+n_1+n_2)} (\cos \tau - 1) \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

$$V'_2 = \begin{bmatrix} -i \frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{2+n_1+n_2}} \sin \tau \\ \cos \tau \\ -i \frac{\sqrt{n_1+1}}{\sqrt{2+n_1+n_2}} \sin \tau \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

$$V'_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{n_1+1}\sqrt{n_2+1}}{(2+n_1+n_2)}(\cos \tau - 1) \\ -i \frac{\sqrt{n_1+1}}{\sqrt{2+n_1+n_2}} \sin \tau \\ \frac{(n_1+1)}{(2+n_1+n_2)} \cos \tau + \frac{(n_2+1)}{(2+n_1+n_2)} \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

O vetor de estado inicial $|\tilde{\psi}(0)\rangle$ será,

$$|\tilde{\psi}(0)\rangle = \sum_j \sum_{n_1, n_2} |j, n_1, n_2\rangle \langle j, n_1, n_2 | \tilde{\psi}(0)\rangle, \quad (3.38)$$

onde $j = +, 0, -$. Os vetores da base produto que evoluem no tempo são $|+, n_1, n_2 + 1\rangle$, $|0, n_1, n_2\rangle$, $|-, n_1 + 1, n_2\rangle$. Podemos então escrever o vetor de estado inicial,

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}(0)\rangle = \sum_k |k\rangle \langle k | \tilde{\psi}(0)\rangle + \sum_{n_1, n_2} \langle +, n_1, n_2 + 1 | \tilde{\psi}(0)\rangle |+, n_1, n_2 + 1\rangle \\ + \sum_{n_1, n_2} \langle 0, n_1, n_2 | \tilde{\psi}(0)\rangle |0, n_1, n_2\rangle \\ + \sum_{n_1, n_2} \langle -, n_1 + 1, n_2 | \tilde{\psi}(0)\rangle |-, n_1 + 1, n_2\rangle, \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde os estados $|k\rangle$ são todos aqueles estados da base produto que não evoluem no tempo.

O vetor de estado para um tempo t é,

$$|\tilde{\psi}(\tau)\rangle = \tilde{U}_I |\tilde{\psi}(0)\rangle. \quad (3.40)$$

Como os estados $|k\rangle$ não evoluem no tempo temos que $\tilde{U}_I |k\rangle = |k\rangle$, então,

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}(\tau)\rangle = \sum_k |k\rangle \langle k | \tilde{\psi}(0)\rangle + \sum_{n_1, n_2} \langle +, n_1, n_2 + 1 | \tilde{\psi}(\tau)\rangle |+, n_1, n_2 + 1\rangle \\ + \sum_{n_1, n_2} \langle 0, n_1, n_2 | \tilde{\psi}(\tau)\rangle |0, n_1, n_2\rangle \\ + \sum_{n_1, n_2} \langle -, n_1 + 1, n_2 | \tilde{\psi}(\tau)\rangle |-, n_1 + 1, n_2\rangle, \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde,

$$\begin{aligned}
\langle +, n_1, n_2 + 1 | \tilde{\psi}(\tau) \rangle &= \langle +, n_1, n_2 + 1 | \tilde{\psi}(0) \rangle \left[\frac{(n_2 + 1)}{(2 + n_1 + n_2)} \cos \tau + \frac{(n_1 + 1)}{(2 + n_1 + n_2)} \right] \\
&\quad + \langle 0, n_1, n_2 | \tilde{\psi}(0) \rangle (-i) \frac{\sqrt{n_2 + 1}}{\sqrt{2 + n_1 + n_2}} \sin \tau \\
&\quad + \langle -, n_1 + 1, n_2 | \tilde{\psi}(0) \rangle \frac{\sqrt{n_1 + 1} \sqrt{n_2 + 1}}{(2 + n_1 + n_2)} (\cos \tau - 1),
\end{aligned} \tag{3.42}$$

$$\begin{aligned}
\langle 0, n_1, n_2 | \tilde{\psi}(\tau) \rangle &= \langle +, n_1, n_2 + 1 | \tilde{\psi}(0) \rangle (-i) \frac{\sqrt{n_2 + 1}}{\sqrt{2 + n_1 + n_2}} \sin \tau \\
&\quad + \langle 0, n_1, n_2 | \tilde{\psi}(0) \rangle \cos \tau \\
&\quad + \langle -, n_1 + 1, n_2 | \tilde{\psi}(0) \rangle (-i) \frac{\sqrt{n_1 + 1}}{\sqrt{2 + n_1 + n_2}} \sin \tau,
\end{aligned} \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned}
\langle -, n_1 + 1, n_2 | \tilde{\psi}(\tau) \rangle &= \langle +, n_1, n_2 + 1 | \tilde{\psi}(0) \rangle \frac{\sqrt{n_1 + 1} \sqrt{n_2 + 1}}{(2 + n_1 + n_2)} (\cos \tau - 1) \\
&\quad + \langle 0, n_1, n_2 | \tilde{\psi}(0) \rangle (-i) \frac{\sqrt{n_1 + 1}}{\sqrt{2 + n_1 + n_2}} \sin \tau \\
&\quad + \langle -, n_1 + 1, n_2 | \tilde{\psi}(0) \rangle \left[\frac{(n_1 + 1)}{(2 + n_1 + n_2)} \cos \tau + \frac{(n_2 + 1)}{(2 + n_1 + n_2)} \right].
\end{aligned} \tag{3.44}$$

lembrando que $\tau = g_a \sqrt{2 + n_1 + n_2} t$. O estado (3.41) representa o sistema para um tempo arbitrário t , esta expressão é possível estudar a dinâmica do emaranhamento entre dois modos de campo quantizado no sistema para o caso $\Omega_1/\Omega_0 < 1$. O operador de evolução unitária para o sistema com a razão $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} > 1$ é apresentado no apêndice A.

3.3 EMARANHAMENTO ENTRE OS MODOS DE CAMPO QUANTIZADO DA CAVIDADE

Nesta seção estudaremos a dinâmica do emaranhamento entre dois modos de campo quantizado para o sistema sem dissipação onde para um átomo. O estado inicial do sistema é um estado separável,

$$|\psi(0)\rangle = |\varphi\rangle [S(r) |00\rangle], \tag{3.45}$$

onde $|\varphi\rangle$ representa um estado geral do átomo e $S(r) |00\rangle$ o estado do vácuo comprimido para os modos da cavidade. O estado inicial atômico é,

$$|\varphi\rangle = c_1 |1\rangle + c_2 |2\rangle + c_3 |3\rangle, \quad (3.46)$$

que também pode ser escrito na base dos estados atômicos vestidos,

$$|\varphi\rangle = \alpha_+ |+\rangle + \alpha_- |-\rangle + \alpha_0 |0\rangle. \quad (3.47)$$

O estado do vácuo comprimido $S(r) |00\rangle$ é representado da forma $|00\rangle$ por simplicidade lembrando sempre que trabalharemos com estados comprimidos, então o estado inicial é,

$$|\psi(0)\rangle = |\varphi\rangle |00\rangle. \quad (3.48)$$

Aplicando a transformação unitária $\exp\left[-\frac{i}{\hbar}H_L t\right]$ para escrever o estado do sistema na representação dos estados atômicos vestidos,

$$|\tilde{\psi}(0)\rangle = |\psi(0)\rangle = |\varphi\rangle |00\rangle, \quad (3.49)$$

$$|\tilde{\psi}(0)\rangle = |\psi(0)\rangle = \alpha_+ | +00\rangle + \alpha_- | -00\rangle + \alpha_0 |000\rangle. \quad (3.50)$$

Com o estado inicial (3.50) na representação dos estados atômicos vestidos, usando (3.41) podemos obter o vetor que representa o estado do sistema para um parâmetro τ ,

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}(\tau)\rangle = & \alpha_+ | +00\rangle + \alpha_- | -00\rangle + \alpha_0 \cos \tau |000\rangle \\ & - \frac{i}{\sqrt{2}} \alpha_0 \sin \tau (| +01\rangle + | -10\rangle), \end{aligned} \quad (3.51)$$

onde o parâmetro τ é definido em relação ao parâmetro temporal t na forma $\tau = \sqrt{2}g_a t$. A matriz densidade na representação dos estados atômicos vestidos será,

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}(\tau) = & -\frac{i}{\sqrt{2}}\alpha_0 \sin \tau (|+01\rangle + |-10\rangle) (\alpha_+^* \langle +00| + \alpha_-^* \langle -00| + \alpha_0^* \cos \tau \langle 000|) \\
& + \frac{1}{2}|\alpha_0|^2 \sin^2 \tau (|+01\rangle + |-10\rangle) (\langle +01| + \langle -10|) \\
& + \alpha_+ | +00\rangle (\alpha_+^* \langle +00| + \alpha_-^* \langle -00| + \alpha_0^* \cos \tau \langle 000|) \\
& + \frac{i}{\sqrt{2}}\alpha_+ \alpha_0^* \sin \tau | +00\rangle (\langle +01| + \langle -10|) \\
& + \alpha_- | -00\rangle (\alpha_+^* \langle +00| + \alpha_-^* \langle -00| + \alpha_0^* \cos \tau \langle 000|) \\
& + \frac{i}{\sqrt{2}}\alpha_- \alpha_0^* \sin \tau | -00\rangle (\langle +01| + \langle -10|) \\
& + \alpha_0 \cos \tau | 000\rangle (\alpha_+^* \langle +00| + \alpha_-^* \langle -00| + \alpha_0^* \cos \tau \langle 000|) \\
& + \frac{i}{\sqrt{2}}|\alpha_0|^2 \cos \tau \sin \tau | 000\rangle (\langle +01| + \langle -10|).
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Para obter o operador densidade que representa o estado dos modos de campo quantizado da cavidade para um tempo t temos que fazer o traço parcial nos estados do átomo do operador densidade:

$$\tilde{\rho}_c(\tau) = \text{Tr}_{\text{atom}}[\rho(\tau)]. \tag{3.53}$$

O operador densidade $\tilde{\rho}_c(\tau)$ têm a forma

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_c(\tau) = & \frac{i}{\sqrt{2}} \sin \tau (\alpha_+ \alpha_0^* |00\rangle \langle 01| - \alpha_+^* \alpha_0 |01\rangle \langle 00| \\
& + \alpha_- \alpha_0^* |00\rangle \langle 10| - \alpha_-^* \alpha_0 |10\rangle \langle 00|) \\
& + (|\alpha_+|^2 + |\alpha_-|^2 + |\alpha_0|^2 \cos^2 \tau) |00\rangle \langle 00| \\
& + \frac{1}{2}|\alpha_0|^2 \sin^2 \tau (|01\rangle \langle 01| + |10\rangle \langle 10|).
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Fazendo uso da expressão (3.54) podemos calcular a soma das variâncias $V(t)$ da forma em que foi definida em (2.184). Os valores médios dos operadores de campo comprimido que precisamos calcular são

$$\text{Tr} [\hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 \tilde{\rho}_c(\tau)] = [\hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 \tilde{\rho}_c(\tau)] = \frac{1}{2}|\alpha_0|^2 \sin^2 \tau, \quad \text{Tr} [\hat{b}_1 \hat{b}_2 \tilde{\rho}_c(\tau)] = 0, \tag{3.55}$$

$$\text{Tr} [\hat{b}_1 \tilde{\rho}_c(\tau)] = -\frac{i}{\sqrt{2}}\alpha_-^* \alpha_0 \sin \tau, \quad \text{Tr} [\hat{b}_2 \tilde{\rho}_c(\tau)] = -\frac{i}{\sqrt{2}}\alpha_+^* \alpha_0 \sin \tau. \tag{3.56}$$

$$\text{Tr} \left[\hat{b}_1 \hat{b}_1 \tilde{\rho}_c(\tau) \right] = \text{Tr} \left[\hat{b}_2 \hat{b}_2 \tilde{\rho}_c(\tau) \right] = \text{Tr} \left[\hat{b}_1 \hat{b}_2^\dagger \tilde{\rho}_c(\tau) \right] = 0, \quad (3.57)$$

Usando (3.55-3.56) a soma de variâncias $V(t)$ têm a expressão analítica,

$$V(\tau) = 2e^{-2r} [1 + A \sin^2 \tau], \quad (3.58)$$

onde a quantidade A é da forma,

$$A = \frac{1}{2} |\alpha_0|^2 (1 + |\alpha_0|^2) - \text{Re} \{ \alpha_0^2 \alpha_+^* \alpha_-^* \}. \quad (3.59)$$

A quantidade A também pode ser escrita em função dos coeficientes c_j , parâmetro

$$\begin{aligned} A = & \frac{1}{2} (-c_1^* \sin \theta + c_3^* \cos \theta) (-c_1 \sin \theta + c_3 \cos \theta) \\ & + \frac{1}{2} (-c_1^* \sin \theta + c_3^* \cos \theta)^2 (-c_1 \sin \theta + c_3 \cos \theta)^2 \\ & - \text{Re} \left\{ (-c_1 \sin \theta + c_3 \cos \theta)^2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \right. \\ & \left. \times \frac{1}{\sqrt{2}} [(c_1^* \cos \theta + c_3^* \sin \theta)^2 - (c_2^*)^2] \right\}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

onde $|c_j|^2$ (para $j = 1, 2, 3$) representa a probabilidade de encontrar o átomo no estado inicial $|j\rangle$, e $\theta = \tan^{-1}(\Omega_1/\Omega_0)$.

O estado inicial para a cavidade é o estado do vácuo comprimido, um estado emaranhado para o qual o emaranhamento depende do parâmetro de compressão r . Lembrando que $\tau = \sqrt{2}g_a t$, podemos ver em (3.58) que o emaranhamento têm um comportamento cíclico, vai diminuir até um valor mínimo para $t = \pi 2^{-1/2} g_a^{-1}$, o valor mínimo da soma das variâncias $V(\tau)$ depende da amplitude A .

Para calcular $\langle E \rangle$ usamos a definição (2.189) e os valores (3.55), (3.56) e (3.57) para obter

$$\langle E \rangle = iE'_{01} \left(\langle \hat{b}_1 \rangle - \langle \hat{b}_1^\dagger \rangle \right) + iE'_{02} \left(\langle \hat{b}_2 \rangle - \langle \hat{b}_2^\dagger \rangle \right). \quad (3.61)$$

Então para o estado inicial (3.54) $\langle E \rangle$ têm a expressão analítica

$$\langle E \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} G \sin \tau, \quad (3.62)$$

onde a quantidade G têm a forma

$$G = E'_{0_1} (\alpha_-^* \alpha_0 + \alpha_- \alpha_0^*) + E'_{0_2} (\alpha_+^* \alpha_0 + \alpha_+ \alpha_0^*). \quad (3.63)$$

A quantidade G também pode ser escrita em função dos coeficientes c_j :

$$G = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_{0_1} \cosh r - E_{0_2} \sinh r) \operatorname{Re} \{ (c_1 \cos \theta + c_3 \sin \theta - c_2)^* (-c_1 \sin \theta + c_3 \cos \theta) \} \\ + \frac{1}{\sqrt{2}} (E_{0_2} \cosh r - E_{0_1} \sinh r) \operatorname{Re} \{ (c_1 \cos \theta + c_3 \sin \theta + c_2)^* (-c_1 \sin \theta + c_3 \cos \theta) \}, \quad (3.64)$$

onde $|c_j|^2$ (para $j = 1, 2, 3$) representa a probabilidade de encontrar o átomo no estado inicial $|j\rangle$, $r = \tanh^{-1}(\tanh^2 \theta)$, $\theta = \tan^{-1}(\Omega_1/\Omega_0)$. As quantidades E_{0_1} e E_{0_2} representam as amplitudes iniciais para os campos elétricos dos modos de campo quantizado da cavidade.

Para calcular $\langle E^2 \rangle$ usamos a definição (2.190) e os valores (3.55), (3.56) e (3.57) para obter,

$$\langle E^2 \rangle = E'_{0_1} E'_{0_2} \left(\langle \hat{b}_1 \hat{b}_2^\dagger \rangle + \langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2 \rangle - \langle \hat{b}_1 \hat{b}_2 \rangle - \langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger \rangle \right) \\ + (E'_{0_1})^2 \left(1 + 2 \langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 \rangle - \langle \hat{b}_1 \hat{b}_1 \rangle - \langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1^\dagger \rangle \right) \\ + (E'_{0_2})^2 \left(1 + 2 \langle \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 \rangle - \langle \hat{b}_2 \hat{b}_2 \rangle - \langle \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2^\dagger \rangle \right) \quad (3.65)$$

então para o estado inicial (3.54) $\langle E^2 \rangle$ têm a expressão analítica,,

$$\langle E^2 \rangle = ((E'_{0_1})^2 + (E'_{0_2})^2) (1 + |\alpha_0|^2 \sin^2 \tau). \quad (3.66)$$

A quantidade $|\alpha_0|^2$ também pode ser escrita em função dos coeficientes c_j ,

$$|\alpha_0|^2 = (-c_1 \sin \theta + c_3 \cos \theta)^* (-c_1 \sin \theta + c_3 \cos \theta), \quad (3.67)$$

onde $|c_j|^2$ (para $j = 1, 2, 3$) representa a probabilidade de encontrar o átomo no estado inicial $|j\rangle$.

Como para a soma das variâncias $V(\tau)$ podemos dizer que o efeito dos campos de laser é modificar a amplitude máxima de $E(\tau)$ e $E^2(\tau)$.

3.4 ESTADO INICIAL ATÔMICO $|\varphi\rangle = |3\rangle$

O estado inicial do átomo foi considerado como um estado geral na seção anterior. Vamos considerar agora o estado inicial para o átomo como o estado excitado $|3\rangle$. O estado inicial

para o sistema átomo-modos da cavidade é o estado separável $|3\rangle S(r) |00\rangle$. Usando este estado inicial serão estudados: o emaranhamento entre modos de campo quantizado da cavidade, o valor médio do campo elétrico e o quadrado do campo elétrico na cavidade, o emaranhamento entre o sistema átomo-modos da cavidade, e o emaranhamento entre cada modo de campo comprimido da cavidade e o resto do sistema.

3.4.1 Cálculo da soma de variâncias dos operadores tipo EPR

Usando a expressão (3.58) onde $c_1 = c_2 = 0$ e $c_3 = 1$, a soma de variância $V(t)$ é da forma,

$$V(T, \theta) = 2 \exp(-2 \tanh^{-1}(\tan^2 \theta)) \left[1 + \cos^4 \theta \left(\sin [(\cos 2\theta)^{1/2} T] \right)^2 \right], \quad (3.68)$$

onde $T = gt$ e $\theta = \tan^{-1}(\Omega_1/\Omega_0)$, considerando o tempo t em unidades de g^{-1} o parâmetro T é adimensional.

No gráfico (3.2) podemos observar que para um valor fixo da razão Ω_1/Ω_0 a soma das variâncias $V(T)$ têm um comportamento periódico, indo até um valor máximo $V(T_{\max})$ para $T_{\max} = (n + 1/2)\pi(\cos 2\theta)^{-1/2}$ e voltando para o valor inicial para $(n + 1)\pi(\cos 2\theta)^{-1/2}$ (para $n = 0, 1, 2, \dots$). Como o valor da soma de variâncias $V(T)$ aumenta em relação ao valor inicial, então existe uma transferência de emaranhamento para o átomo. O período aumenta quando a razão Ω_1/Ω_0 aumenta e o valor máximo $V(T_{\max})$ da soma de variâncias diminui, o que significa que a transferência de emaranhamento para o átomo é menor.

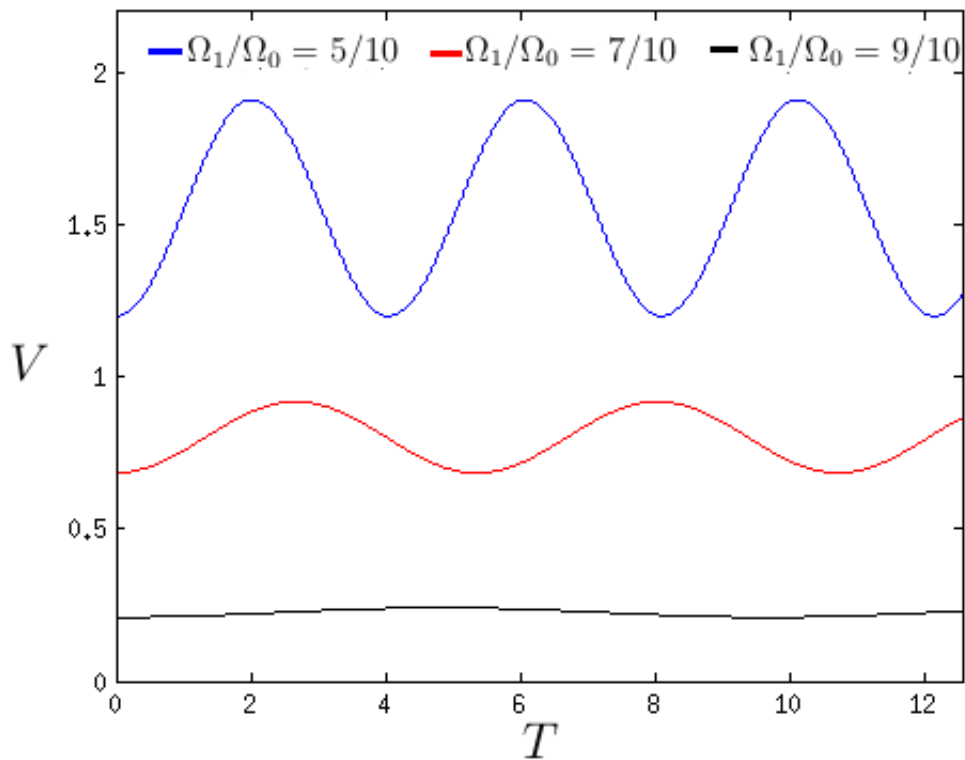


Figura 3.2: $V(T)$ em função do parâmetro adimensional T para os valores da razão $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{5}{10}$, $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{7}{10}$, e $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{9}{10}$.

No gráfico (3.3) é apresentada a soma de variâncias $V(T, \theta)$ para todos os valores possíveis da razão Ω_1/Ω_0 (onde $\theta = \tan^{-1}(\Omega_1/\Omega_0)$).

Para um valor de Ω_1/Ω_0 abaixo de 4,9 o sistema apresentará morte súbita de emaranhamento, quando $\Omega_1/\Omega_0 \rightarrow 0$ o emaranhamento entre os modos de campo quantizado desaparece completamente.

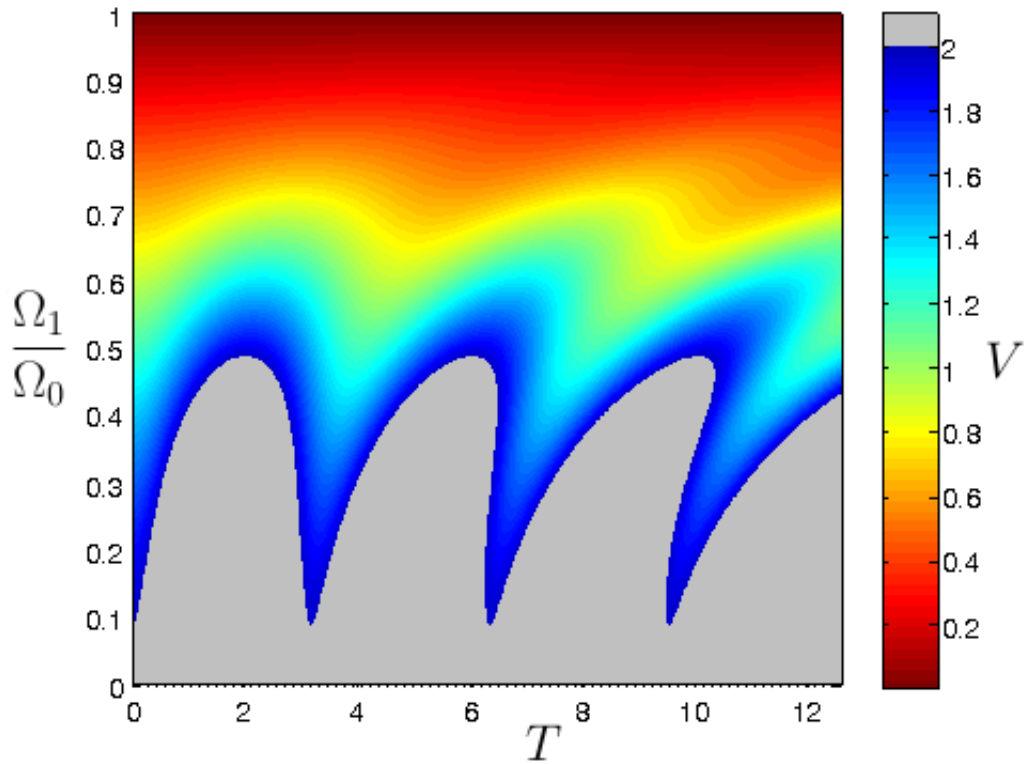


Figura 3.3: Soma de variâncias $V(T, \Omega_1/\Omega_0)$ como função de T e Ω_1/Ω_0 .

3.4.2 Campo elétrico na cavidade

Usando a expressão (3.62) onde $c_1 = c_2 = 0$ e $c_3 = 1$, o valor médio do campo elétrico $\langle E \rangle$ é da forma,

$$\langle E \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \exp \left[-\tanh^{-1}(\tan^2 \theta) \right] \sin \theta \cos \theta \sin \left[(\cos 2\theta)^{1/2} T \right] E_0, \quad (3.69)$$

onde $T = gt$, $\theta = \tan^{-1}(\Omega_1/\Omega_0)$ e $\langle E \rangle$ está em unidades de E_0 .

No gráfico (3.4) podemos observar que para um valor fixo da razão Ω_1/Ω_0 o valor médio do campo elétrico $\langle E \rangle$ têm um comportamento periódico, indo até uma amplitude máxima $|\langle E(T_{\max}) \rangle|$ para $T_{\max} = (n + 1/2)\pi(\cos 2\theta)^{-1/2}$ (onde $n = 0, 1, 2, \dots$), e voltando logo para o valor inicial. O período aumenta quando a razão Ω_1/Ω_0 aumenta e o valor $|\langle E(T_{\max}) \rangle|$ diminui.

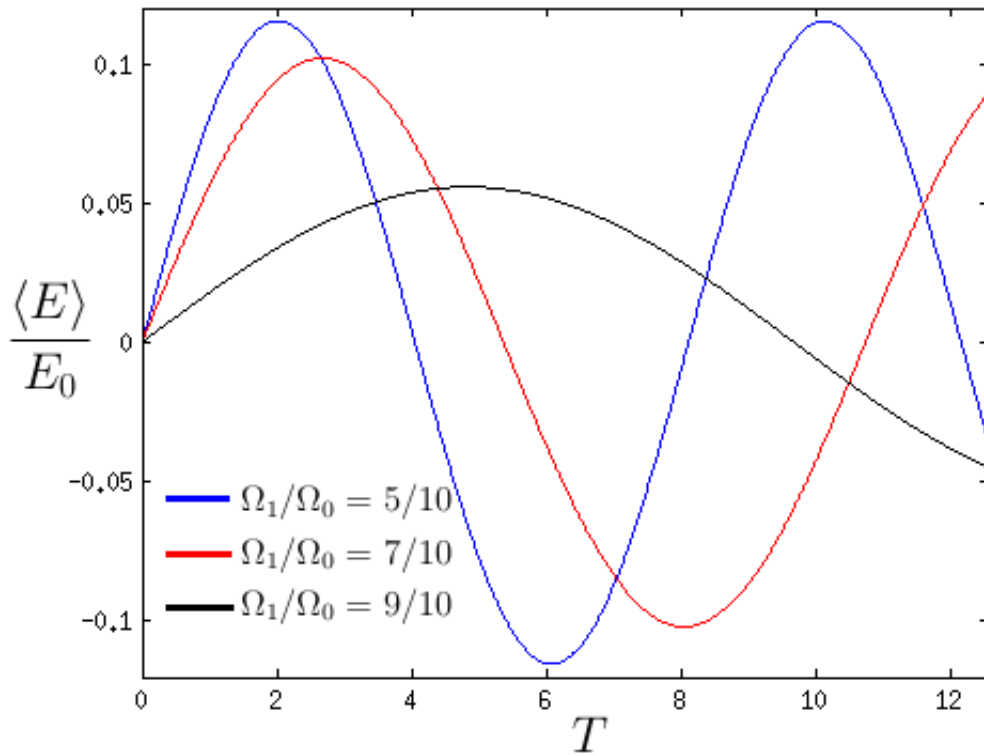


Figura 3.4: Valor médio do campo elétrico $\langle E \rangle / E_0$ em função do parâmetro adimensional T para os valores da razão $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{5}{10}$, $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{7}{10}$, e $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{9}{10}$.

Usando a expressão (3.66) onde $c_1 = c_2 = 0$ e $c_3 = 1$, o valor médio do quadrado do campo elétrico $\langle E^2 \rangle$ é da forma,

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{2} \exp[-2 \tanh^{-1}(\tan^2 \theta)] \left(1 + \cos^2 \theta \left(\sin [(\cos 2\theta)^{1/2} T] \right)^2 \right) E_0^2, \quad (3.70)$$

onde $T = gt$, $\theta = \tan^{-1}(\Omega_1/\Omega_0)$ e $\langle E \rangle$ está em unidades de E_0^2 .

No gráfico (3.5) podemos observar que para um valor fixo da razão Ω_1/Ω_0 o valor médio do quadrado do campo elétrico $\langle E^2 \rangle$ têm um comportamento periódico, indo até uma amplitude máxima $|\langle E^2(T_{\max}) \rangle|$ para $T_{\max} = (n + 1/2)\pi(\cos 2\theta)^{-1/2}$ (onde $n = 0, 1, 2, \dots$), e voltando logo para o valor inicial. O período aumenta quando a razão Ω_1/Ω_0 aumenta e o valor $|\langle E^2(T_{\max}) \rangle|$ diminui, como resultado temos que quando o estado inicial para os modos de campo quantizado da cavidade se aproxima para um estado tipo EPR a intensidade do campo elétrico vai para zero.

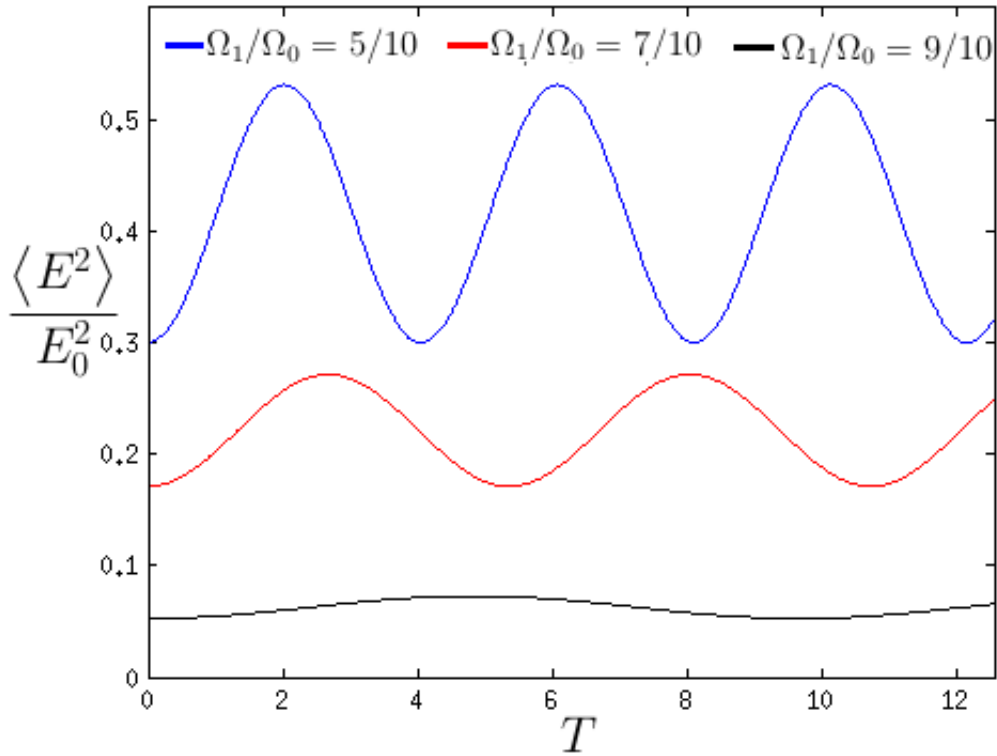


Figura 3.5: Valor médio do quadrado do campo elétrico $\langle E^2 \rangle / E_0^2$ em função do parâmetro adimensional T para os valores da taxa $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{5}{10}$, $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{7}{10}$, e $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{9}{10}$.

3.4.3 Cálculo da negatividade global

Usando os resultados do apêndice D podemos escrever o operador densidade para o estado do átomo na forma

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_A(\tau) = & \frac{1}{2} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta \sin^2 \tau) (|+\rangle \langle +| + |-\rangle \langle -|) + \cos^2 \theta \cos^2 \tau |0\rangle \langle 0| \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \cos \theta \cos \tau (|+\rangle \langle 0| + |0\rangle \langle +| + |-\rangle \langle 0| + |0\rangle \langle -|) \\ & + \frac{1}{2} \sin^2 \theta (|+\rangle \langle -| + |-\rangle \langle +|), \end{aligned} \quad (3.71)$$

onde $T = gt$, $\theta = \tan^{-1}(\Omega_1/\Omega_0)$.

Considerando a negatividade N_G^A entre o átomo e o resto do sistema, podemos escrever a expressão analítica,

$$[N_G^A]^2 = \frac{3}{2} ([\text{Tr} \tilde{\rho}_A(\tau)]^2 - \text{Tr} [\tilde{\rho}_A^2(\tau)]), \quad (3.72)$$

$$[N_G^A]^2 = \frac{3}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\sin^2 \theta + \cos^2 \theta \left(\sin \left[(\cos 2\theta)^{1/2} T \right] \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \sin^4 \theta \right. \\ \left. - \left[2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \cos^4 \theta \right] \left(\cos \left[(\cos 2\theta)^{1/2} T \right] \right)^2 \right\} \quad (3.73)$$

No gráfico (3.6) podemos ver que o quadrado da negatividade N_G^A em função do parâmetro $T = gt$ têm o mesmo período que a soma de variância no gráfico (3.2) para um valor fixo da razão Ω_1/Ω_0 . Quando o emaranhamento entre o átomo e o resto do sistema aumenta o emaranhamento entre os modos de campo quantizado da cavidade diminui.

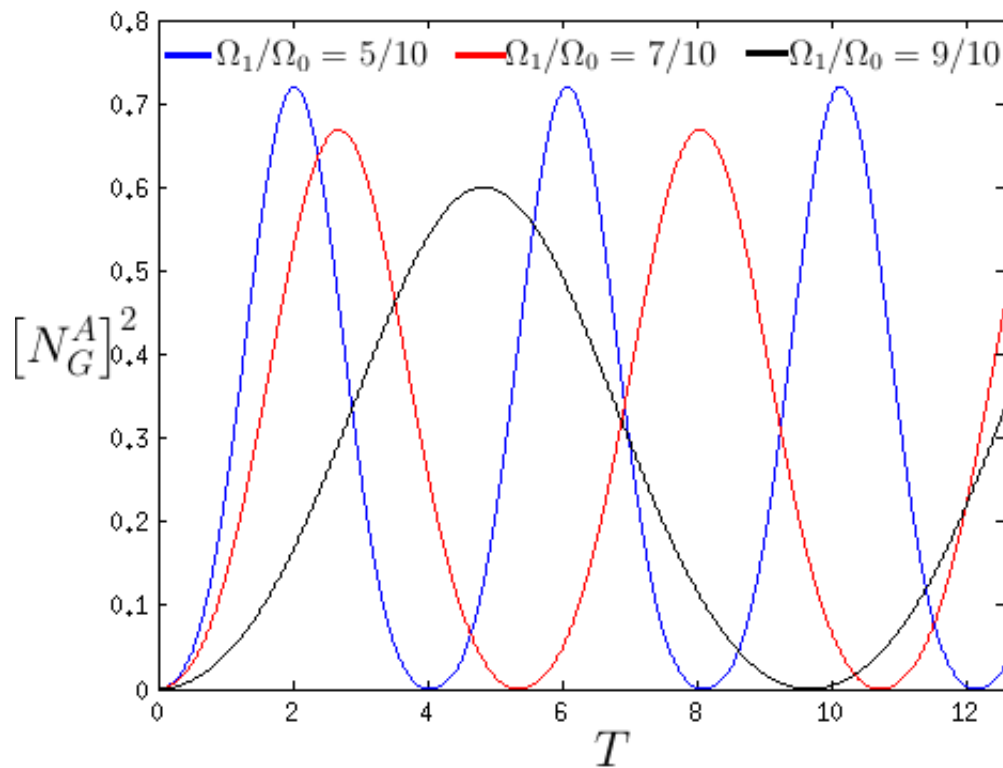


Figura 3.6: Quadrado da negatividade $[N_G^A]^2$ em função do parâmetro $T = gt$ para os valores da taxa $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{5}{10}$, $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{7}{10}$, e $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{9}{10}$.

Usando os resultados do apêndice D podemos escrever os operadores densidade para o estados dos modos de campo quantizado na forma,

$$\tilde{\rho}_{c_1}(\tau) = \tilde{\rho}_{c_2}(\tau) = \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta \sin^2 \tau \right) |0\rangle \langle 0| + \frac{1}{2} \cos^2 \theta \sin^2 \tau |1\rangle \langle 1| \\ + \frac{i}{\sqrt{2}} \sin^2 \theta \sin \tau |0\rangle \langle 1| - \frac{i}{\sqrt{2}} \sin^2 \theta \sin \tau |1\rangle \langle 0| \quad (3.74)$$

onde $T = gt$, $\theta = \tan^{-1}(\Omega_1/\Omega_0)$.

Considerando a negatividade $N_G^{c_1}$ entre o modo de campo comprimido 1 com o resto do sistema, e a negatividade $N_G^{c_2}$ entre o modo de campo comprimido 2 com o resto do sistema, podemos escrever a expressão analítica,

$$[N_G^{c_j}]^2 = 2 \left([\text{Tr} \tilde{\rho}_{c_j}(\tau)]^2 - \text{Tr} [\tilde{\rho}_{c_j}^2(\tau)] \right), \quad (3.75)$$

$$[N_G^{c_j}]^2 = \frac{3}{2} \left\{ 1 - \left[1 + \frac{1}{2} \cos^2 \theta (\sin [(\cos 2\theta)^{1/2} T])^2 \right]^2 - \sin^4 \theta (\sin [(\cos 2\theta)^{1/2} T])^2 - \frac{1}{4} \cos^4 \theta (\sin [(\cos 2\theta)^{1/2} T])^4 \right\} \quad (3.76)$$

No gráfico (3.7) podemos ver que o quadrado da negatividade $N_G^{c_j}$ em função do parâmetro $T = gt$ têm o mesmo período que a soma de variâncias no gráfico (3.2) para um valor fixo da razão Ω_1/Ω_0 . Quando o emaranhamento entre um dos modos de campo quantizado da cavidade e o resto do sistema aumenta o emaranhamento entre os modos de campo quantizado da cavidade diminui.

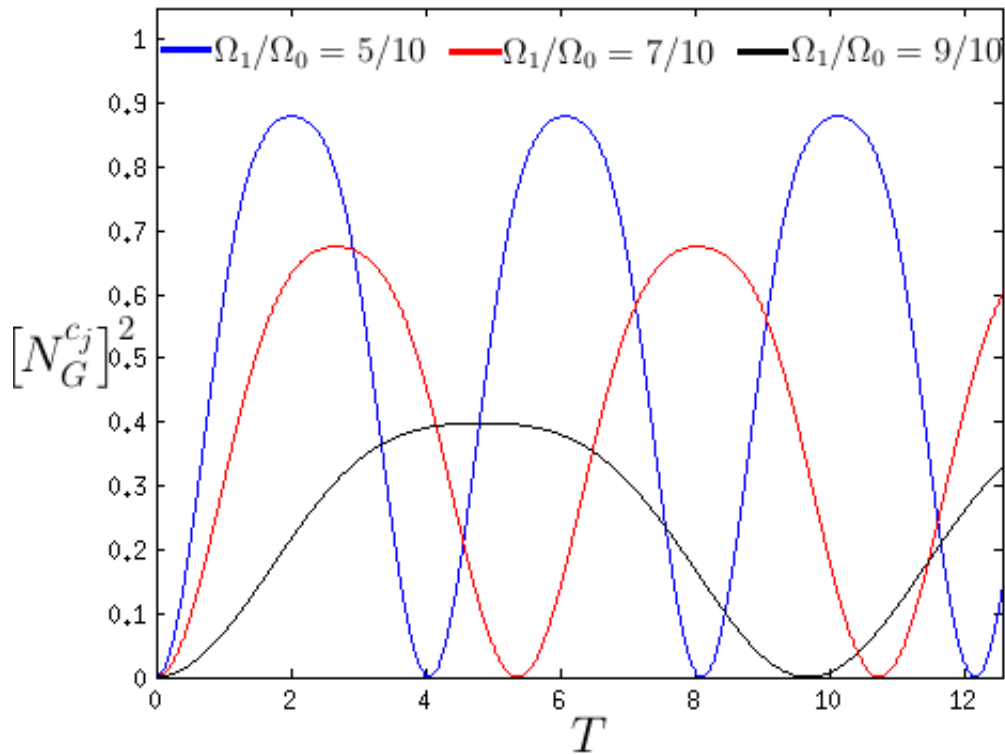


Figura 3.7: Quadrado da negatividade $[N_G^{c_j}]^2$ em função do parâmetro $T = gt$ para os valores da taxa $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{5}{10}$, $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{7}{10}$, e $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{9}{10}$.

Nesta seção foi estudado o emaranhamento entre os modos de campo quantizado da cavidade assim como o emaranhamento entre o sistema átomo-modos da cavidade. No gráfico (3.2) vemos como o átomo no estado inicial $|3\rangle$ e os modos de campo quantizado da cavidade no estado inicial $S(r)|00\rangle$ (vácuo comprimido de dois modos) o emaranhamento dos modos de campo quantizado da cavidade têm um comportamento periódico alcançando um valor mínimo e voltando para o valor inicial logo de um período. No gráfico (3.3) é possível observar que para alguns valores da razão Ω_1/Ω_0 o emaranhamento entre os modos de campo quantizado da cavidade pode desaparecer por um intervalo de tempo finito. No gráfico (3.4) vemos como a amplitude do valor médio do campo elétrico diminui quando a razão Ω_1/Ω_0 vai para 1. No gráfico (3.5) observamos como a amplitude do valor médio do quadrado do campo elétrico diminui quando a razão Ω_1/Ω_0 vai para 1, como resultado temos que quando o estado inicial para os modos de campo quantizado da cavidade se aproxima para um estado tipo EPR a intensidade do campo elétrico vai para zero. No gráfico (3.6) vemos como que quando o emaranhamento entre o átomo e o resto do sistema aumenta o emaranhamento entre os modos de campo quantizado da cavidade diminui. No gráfico (3.7) vemos como quando o emaranhamento entre um dos modos de campo comprimido da cavidade e o resto do sistema aumenta o emaranhamento entre os modos de campo quantizado da cavidade diminui, isto corresponde a uma transferência de emaranhamento, podemos observar também que os estados associados a

cada modo do campo comprimido do estado inicial são separáveis.

4 DINÂMICA DO SISTEMA COM DISSIPAÇÃO

A evolução temporal do sistema apresentado na seção (3.1) foi estudada considerando-se uma evolução unitária. A interação com o ambiente causa o decaimento dos níveis de energia atômicos e dos estados dos fótons de campo quantizado da cavidade. Quando os efeitos desses decaimentos não podem ser desprezados, a evolução temporal do sistema será não unitária. Neste capítulo estudaremos a evolução do sistema apresentado na seção (3.1) na presença de decaimento espontâneo dos níveis de energia atômicos e dos estados dos fótons de campo quantizado da cavidade a partir da equação mestra Markoviana. Fazendo o traço parcial nos estados atômicos da equação mestra é possível obter a equação que descreve a evolução temporal dos modos da cavidade. A expressão analítica da equação mestra para a cavidade é simplificada tratando os campos da cavidade linearmente e usando as soluções estacionárias para os operadores de campo do tipo $\tilde{\rho}_{jk}$, onde $j, k = +, 0, -$. Integrando as equações dos valores médios das quadraturas e fazendo uso do critério proposto por Duan (DUAN et al., 2000) [3], será escrita uma expressão $V(t)$ que represente o emaranhamento em função do tempo. Analisamos o comportamento do emaranhamento para a solução estacionária da soma de variâncias. Finalmente será discutida a viabilidade experimental do sistema apresentado neste trabalho.

4.1 EQUAÇÃO MESTRA PARA O SISTEMA

Para descrever a evolução temporal do sistema apresentado na seção (3.1) usamos a equação mestra (2.118) na representação de interação,

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}_I, \hat{\rho}] + \mathcal{L}_a \hat{\rho} + \mathcal{L}_c \hat{\rho}. \quad (4.1)$$

O operador Hamiltoniano \hat{H}_I (3.1) na representação de interação definido no capítulo 3 têm a forma

$$\hat{H}_I = \hat{H}_L + \hat{H}_{cav}, \quad (4.2)$$

onde o operador \hat{H}_L (3.2) representa a interação dos átomos com os lasers, e o operador \hat{H}_{cav} (3.3) representa a interação dos átomos com os modos de campo quantizado da cavidade.

O primeiro termo no lado direito da equação mestra (4.1) descreve a evolução unitária do sistema e pode ser associado à equação de Von Neumann-Liouville,

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}], \quad (4.3)$$

que seria usada para descrever a evolução unitária do operador densidade $\hat{\rho}$ de um sistema fechado com operador Hamiltoniano \hat{H} .

O termo $\mathcal{L}_a \hat{\rho}$ no lado direito da equação mestra (4.1) descreve a perda de coerência devido ao decaimento espontâneo dos níveis de energia atômicos é definido pela equação (2.120), têm a forma

$$\mathcal{L}_a \hat{\rho} = \sum_{l=1,2} \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_l}{2} \left(2\hat{\sigma}_{l3}^{(j)} \hat{\rho} \hat{\sigma}_{3l}^{(j)} - \hat{\sigma}_{3l}^{(j)} \hat{\sigma}_{l3}^{(j)} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{\sigma}_{3l}^{(j)} \hat{\sigma}_{l3}^{(j)} \right), \quad (4.4)$$

onde γ_1 é a taxa de decaimento do nível $|3\rangle$ para o nível $|1\rangle$ de energia e γ_2 é a taxa de decaimento do nível $|3\rangle$ para o nível $|2\rangle$ de energia.

O termo $\mathcal{L}_c \hat{\rho}$ da equação mestra (4.1) descreve o efeito de perda de fótons pela interação com o ambiente, é definido pela equação (2.122) que têm a forma

$$\mathcal{L}_c \hat{\rho} = \sum_{l=1,2} \frac{\kappa_l}{2} \left(2\hat{a}_l \hat{\rho} \hat{a}_l^\dagger - \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l \right), \quad (4.5)$$

onde κ_1 é a razão de decaimento do modo de campo quantizado da cavidade associado ao operador de aniquilação \hat{a}_1 e κ_2 é a razão de decaimento do modo de campo quantizado da cavidade associado ao operador de aniquilação \hat{a}_2 .

Como o Hamiltoniano (3.20) está na representação dos estados atômicos vestidos temos que escrever a equação mestra na mesma representação. O operador $\exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}_L t\right)$ transforma o operador de estado ρ para

$$\tilde{\rho} = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}_L t\right) \hat{\rho} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_L t\right), \quad (4.6)$$

e obtemos o operador densidade na representação dos estados atômicos vestidos. Fazendo atuar o operador $\exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}_L t\right)$ sobre o operador $\mathcal{L}_a \hat{\rho}$ (4.4) da seguinte forma:

$$\widetilde{\mathcal{L}_a \hat{\rho}} = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}_L t\right) \mathcal{L}_a \hat{\rho} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_L t\right), \quad (4.7)$$

obtemos a forma desse operador na representação dos estados atômicos vestidos. Fazendo atuar o operador $\exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}_L t\right)$ sobre a operador $\mathcal{L}_c \hat{\rho}$ (4.5) da seguinte forma:

$$\widetilde{\mathcal{L}_c \hat{\rho}} = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \hat{H}_L t\right) \mathcal{L}_c \hat{\rho} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_L t\right) \quad (4.8)$$

obtemos a forma desse operador na representação dos estados atômicos vestidos. Usando as expressões (4.6), (4.7) e (4.8) podemos escrever a equação mestra (4.1) na representação dos estados atômicos vestidos como

$$\frac{\partial}{\partial t} \widetilde{\rho} = -\frac{i}{\hbar} \left[\widetilde{H}_I, \widetilde{\rho} \right] + \widetilde{\mathcal{L}}_a \rho + \widetilde{\mathcal{L}}_c \rho. \quad (4.9)$$

Para obter a equação mestra que descreve a dinâmica dos modos de campo quantizado da cavidade precisamos fazer o traço sobre os estados atômicos.

Usando o Hamiltoniano (3.20) podemos escrever o primeiro termo da equação mestra (4.9) em função dos operadores $\hat{\sigma}_{kk'}^{(j)} = |k_j\rangle \langle k'_j|$ ($k, k' = +, 0, -$) e dos operadores de campo comprimido (3.19) para os modos de campo quantizado da cavidade na forma

$$-\frac{i}{\hbar} [\widetilde{H}_I, \widetilde{\rho}] = \sum_{j=1}^N \left[-ig_a (\hat{b}_2^\dagger \hat{\sigma}_{+0}^{(j)} \widetilde{\rho} - \widetilde{\rho} \hat{b}_2^\dagger \hat{\sigma}_{+0}^{(j)}) - ig_a (\hat{\sigma}_{0+}^{(j)} \hat{b}_2 \widetilde{\rho} - \widetilde{\rho} \hat{\sigma}_{0+}^{(j)} \hat{b}_2) \right. \\ \left. - ig_a (\hat{\sigma}_{0-}^{(j)} \hat{b}_1 \widetilde{\rho} - \widetilde{\rho} \hat{\sigma}_{0-}^{(j)} \hat{b}_1) - ig_a (\hat{b}_1^\dagger \hat{\sigma}_{-0}^{(j)} \widetilde{\rho} - \widetilde{\rho} \hat{b}_1^\dagger \hat{\sigma}_{-0}^{(j)}) \right]. \quad (4.10)$$

O termo (4.7) que descreve o decaimento dos estados atômicos pode ser escrito em função dos operadores $\hat{\sigma}_{kk'}^{(j)} = |k_j\rangle \langle k'_j|$ ($k, k' = +, 0, -$) e dos operadores de campo comprimido (3.19) como

$$\widetilde{\mathcal{L}}_a \hat{\rho} = \sum_{k, k'} e^{\frac{-i}{\hbar} (E_k - E_{k'}) t} \langle k_j | \mathcal{L}_a \hat{\rho} | k'_j \rangle |k_j\rangle \langle k'_j|, \quad (4.11)$$

$$\widetilde{\mathcal{L}}_a \hat{\rho} = \sum_{k, k'} \sum_{j=1}^N e^{\frac{-i}{\hbar} (E_k - E_{k'}) t} \gamma \left(\langle k_j | 1^{(j)} \rangle \langle 3^{(j)} | \hat{\rho} | 3^{(j)} \rangle \langle 1^{(j)} | k'_j \rangle \right. \\ \left. + \langle k_j | 2^{(j)} \rangle \langle 3^{(j)} | \hat{\rho} | 3^{(j)} \rangle \langle 2^{(j)} | k'_j \rangle - \langle k_j | 3^{(j)} \rangle \langle 3^{(j)} | \hat{\rho} | k'_j \rangle \right. \\ \left. - \langle k_j | \hat{\rho} | 3^{(j)} \rangle \langle 3^{(j)} | k'_j \rangle \right) |k_j\rangle \langle k'_j|, \quad (4.12)$$

onde as expressões analíticas para os operadores na equação (4.12) estão no apêndice B.

O termo (4.8) que descreve o decaimento dos modos de campo quantizado da cavidade pode ser escrito em função dos operadores $\hat{\sigma}_{kk'}^{(j)} = |k_j\rangle \langle k'_j|$ ($k, k' = +, 0, -$) e dos operadores de campo comprimido (3.19) como

$$\widetilde{\mathcal{L}}_c \hat{\rho} = \exp \left[\frac{i}{\hbar} \hat{H}_L t \right] \mathcal{L}_c \hat{\rho} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_L t \right], \quad (4.13)$$

$$\widetilde{\mathcal{L}}_c \hat{\rho} = \frac{\kappa}{2} \left(2\hat{a}_1 \widetilde{\rho} \hat{a}_1^\dagger - \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \widetilde{\rho} - \widetilde{\rho} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 \right) + \frac{\kappa}{2} \left(2\hat{a}_2 \widetilde{\rho} \hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \widetilde{\rho} - \widetilde{\rho} \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \right). \quad (4.14)$$

Usando a relação entre os operadores aniquilação dos modos de campo quantizado e os opera-

dores de campo comprimido,

$$\begin{aligned}\hat{a}_1 &= \hat{b}_1 \cosh r + \hat{b}_2^\dagger \sinh r, \\ \hat{a}_2 &= \hat{b}_2 \cosh r + \hat{b}_1^\dagger \sinh r,\end{aligned}\tag{4.15}$$

podemos escrever (4.14) na forma

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{L}}_c \hat{\rho} &= \sum_{l=1,2} \frac{\kappa}{2} \left[N_0 (\hat{b}_l^\dagger \hat{\rho} \hat{b}_l - \hat{b}_l \hat{b}_l^\dagger \hat{\rho}) + (N_0 + 1) (\hat{b}_l \hat{\rho} \hat{b}_l^\dagger - \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l \hat{\rho}) \right] \\ &\quad + \kappa M (\hat{b}_1 \hat{\rho} \hat{b}_2 + \hat{b}_2 \hat{\rho} \hat{b}_1 - \hat{b}_1 \hat{b}_2 \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{b}_1 \hat{b}_2) \\ &+ \sum_{l=1,2} \frac{\kappa}{2} \left[N_0 (\hat{b}_l^\dagger \hat{\rho} \hat{b}_l - \hat{\rho} \hat{b}_l \hat{b}_l^\dagger) + (N_0 + 1) (\hat{b}_l \hat{\rho} \hat{b}_l^\dagger - \hat{\rho} \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l) \right] \\ &\quad + \kappa M (\hat{b}_1^\dagger \hat{\rho} \hat{b}_2^\dagger + \hat{b}_2^\dagger \hat{\rho} \hat{b}_1^\dagger - \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger)\end{aligned}\tag{4.16}$$

onde $M = \sinh r \cosh r$ e $N_0 = \sinh^2 r$. Usando (4.9), (4.10), (4.11) e (4.16) obtemos a equação mestra

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho} &= \sum_{j=1}^N \left[-ig_a (\hat{b}_2^\dagger \hat{\sigma}_{+0}^{(j)} \tilde{\rho} - \tilde{\rho} \hat{b}_2^\dagger \hat{\sigma}_{+0}^{(j)}) - ig_a (\hat{\sigma}_{0+}^{(j)} \hat{b}_2 \tilde{\rho} - \tilde{\rho} \hat{\sigma}_{0+}^{(j)} \hat{b}_2) \right. \\ &\quad \left. - ig_a (\hat{\sigma}_{0-}^{(j)} \hat{b}_1 \tilde{\rho} - \tilde{\rho} \hat{\sigma}_{0-}^{(j)} \hat{b}_1) - ig_a (\hat{b}_1^\dagger \hat{\sigma}_{-0}^{(j)} \tilde{\rho} - \tilde{\rho} \hat{b}_1^\dagger \hat{\sigma}_{-0}^{(j)}) \right] \\ &\quad + \sum_{k,k'} \left(\widetilde{\mathcal{L}}_a \hat{\rho} \right)_{kk'} |k_j\rangle \langle k'_j| \\ &+ \sum_{l=1,2} \frac{\kappa}{2} \left[N_0 (\hat{b}_l^\dagger \hat{\rho} \hat{b}_l - \hat{b}_l \hat{b}_l^\dagger \hat{\rho}) + (N_0 + 1) (\hat{b}_l \hat{\rho} \hat{b}_l^\dagger - \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l \hat{\rho}) \right] \\ &\quad + \kappa M (\hat{b}_1 \hat{\rho} \hat{b}_2 + \hat{b}_2 \hat{\rho} \hat{b}_1 - \hat{b}_1 \hat{b}_2 \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{b}_1 \hat{b}_2) \\ &+ \sum_{l=1,2} \frac{\kappa}{2} \left[N_0 (\hat{b}_l^\dagger \hat{\rho} \hat{b}_l - \hat{\rho} \hat{b}_l \hat{b}_l^\dagger) + (N_0 + 1) (\hat{b}_l \hat{\rho} \hat{b}_l^\dagger - \hat{\rho} \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l) \right] \\ &\quad + \kappa M (\hat{b}_1^\dagger \hat{\rho} \hat{b}_2^\dagger + \hat{b}_2^\dagger \hat{\rho} \hat{b}_1^\dagger - \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger).\end{aligned}\tag{4.17}$$

A equação (4.17) representa a evolução temporal do sistema conjunto formado pela cavidade e o meio atômico para o caso $\Omega_1/\Omega_0 < 1$.

4.1.1 Equação mestra para o operador de estado dos modos de campo da cavidade

Para poder obter uma expressão do operador de estado para a cavidade temos que fazer o traço parcial do operador densidade sobre os estados atômicos,

$$\tilde{\rho}_c = \text{Tr}_{\text{atom}} \tilde{\rho}.\tag{4.18}$$

Fazendo o traço parcial da equação mestra (4.17) sobre os estados atômicos obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_c = -\frac{i}{\hbar} \text{Tr}_{\text{atom}} [\tilde{H}_I, \tilde{\rho}] + \text{Tr}_{\text{atom}} (\widetilde{\mathcal{L}}_a \hat{\rho}) + \text{Tr}_{\text{atom}} (\widetilde{\mathcal{L}}_c \hat{\rho}). \quad (4.19)$$

O traço parcial sobre os estados do átomo de (4.10) é da forma,

$$-\frac{i}{\hbar} \text{Tr}_{\text{atom}} [\tilde{H}_I, \tilde{\rho}] = \sum_{j=1}^N \left(-ig_a [\hat{b}_2^\dagger, \tilde{\rho}_{0+}^{(j)}] - ig_a [\hat{b}_2, \tilde{\rho}_{+0}^{(j)}] \right. \\ \left. - ig_a [\hat{b}_1, \tilde{\rho}_{-0}^{(j)}] - ig_a [\hat{b}_1^\dagger, \tilde{\rho}_{0-}^{(j)}] \right). \quad (4.20)$$

O traço parcial sobre os estados do átomo do operador (4.12) associado ao decaimento dos estados atômicos é da forma

$$\text{Tr}_{\text{atom}} (\widetilde{\mathcal{L}}_a \hat{\rho}) = \sum_{j=1}^N \langle +^{(j)} | \widetilde{\mathcal{L}}_a \hat{\rho} | +^{(j)} \rangle + \sum_{j=1}^N \langle 0^{(j)} | \widetilde{\mathcal{L}}_a \hat{\rho} | 0^{(j)} \rangle \\ + \sum_{j=1}^N \langle -^{(j)} | \widetilde{\mathcal{L}}_a \hat{\rho} | -^{(j)} \rangle. \quad (4.21)$$

Na base dos estados atômicos vestidos obtemos,

$$\text{Tr}_{\text{atom}} (\widetilde{\mathcal{L}}_a \hat{\rho}) = \sum_{j=1}^N [(|\langle +^{(j)} | 1^{(j)} \rangle|^2 + |\langle 0^{(j)} | 1^{(j)} \rangle|^2 + |\langle -^{(j)} | 1^{(j)} \rangle|^2) \langle 3^{(j)} | \hat{\rho} | 3^{(j)} \rangle \\ + (|\langle +^{(j)} | 2^{(j)} \rangle|^2 + |\langle 0^{(j)} | 2^{(j)} \rangle|^2 + |\langle -^{(j)} | 2^{(j)} \rangle|^2) \langle 3^{(j)} | \hat{\rho} | 3^{(j)} \rangle \\ - \langle +^{(j)} | 3^{(j)} \rangle \langle 3^{(j)} | \hat{\rho} | +^{(j)} \rangle - \langle 0^{(j)} | 3^{(j)} \rangle \langle 3^{(j)} | \hat{\rho} | 0^{(j)} \rangle \\ - \langle -^{(j)} | 3^{(j)} \rangle \langle 3^{(j)} | \hat{\rho} | -^{(j)} \rangle - \langle +^{(j)} | \hat{\rho} | 3^{(j)} \rangle \langle 3^{(j)} | +^{(j)} \rangle \\ - \langle 0^{(j)} | \hat{\rho} | 3^{(j)} \rangle \langle 3^{(j)} | 0^{(j)} \rangle - \langle -^{(j)} | \hat{\rho} | 3^{(j)} \rangle \langle 3^{(j)} | -^{(j)} \rangle].$$

Usando a lista de operadores do apêndice B e eliminando os termos que oscilam rapidamente obtemos a expressão analítica

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\text{atom}} \left(\widetilde{\mathcal{L}_a \hat{\rho}} \right) &\approx \sum_{j=1}^N \left[\sin^2 \theta (\tilde{\rho}_{++}^{(j)} + \tilde{\rho}_{++}^{(j)}) + 2 \cos^2 \theta \tilde{\rho}_{00}^{(j)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin^2 \theta}{2} (\tilde{\rho}_{++} + \tilde{\rho}_{++}^{(j)}) - \cos^2 \theta \tilde{\rho}_{00}^{(j)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin^2 \theta}{2} (\tilde{\rho}_{++}^{(j)} + \tilde{\rho}_{++}^{(j)}) - \cos^2 \theta \tilde{\rho}_{00}^{(j)} \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

O traço parcial nos estados do átomo do operador (4.16) associado ao decaimento dos estados dos modos de campo quantizado da cavidade é da forma

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\text{atom}} \left(\widetilde{\mathcal{L}_c \hat{\rho}} \right) &= \sum_{l=1,2} \frac{\kappa}{2} \left[N_0 (\hat{b}_l^\dagger \tilde{\rho}_c \hat{b}_l - \hat{b}_l \hat{b}_l^\dagger \tilde{\rho}_c) + (N_0 + 1) (\hat{b}_l \tilde{\rho}_c \hat{b}_l^\dagger - \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l \tilde{\rho}_c) \right] \\ &\quad + \kappa M (\hat{b}_1 \tilde{\rho}_c \hat{b}_2 + \hat{b}_2 \tilde{\rho}_c \hat{b}_1 - \hat{b}_1 \hat{b}_2 \tilde{\rho}_c - \tilde{\rho}_c \hat{b}_1 \hat{b}_2) + H.c. \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde $M = \sinh r \cosh r$ and $N_0 = \sinh^2 r$. De (4.20), (4.22) e (4.23) obtemos a equação mestra para a cavidade

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_c &= \sum_{j=1}^N \left(-ig_a [\hat{b}_2^\dagger, \tilde{\rho}_{0+}^{(j)}] - ig_a [\hat{b}_2, \tilde{\rho}_{+0}^{(j)}] - ig_a [\hat{b}_1, \tilde{\rho}_{-0}^{(j)}] - ig_a [\hat{b}_1^\dagger, \tilde{\rho}_{0-}^{(j)}] \right) \\ &\quad + \sum_{l=1,2} \frac{\kappa}{2} \left[N_0 (\hat{b}_l^\dagger \tilde{\rho}_c \hat{b}_l - \hat{b}_l \hat{b}_l^\dagger \tilde{\rho}_c) + (N_0 + 1) (\hat{b}_l \tilde{\rho}_c \hat{b}_l^\dagger - \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l \tilde{\rho}_c) \right] \\ &\quad + \kappa M (\hat{b}_1 \tilde{\rho}_c \hat{b}_2 + \hat{b}_2 \tilde{\rho}_c \hat{b}_1 - \hat{b}_1 \hat{b}_2 \tilde{\rho}_c - \tilde{\rho}_c \hat{b}_1 \hat{b}_2) \\ &\quad + \sum_{l=1,2} \frac{\kappa}{2} \left[N_0 (\hat{b}_l^\dagger \tilde{\rho}_c \hat{b}_l - \tilde{\rho}_c \hat{b}_l \hat{b}_l^\dagger) + (N_0 + 1) (\hat{b}_l \tilde{\rho}_c \hat{b}_l^\dagger - \tilde{\rho}_c \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l) \right] \\ &\quad + \kappa M (\hat{b}_1^\dagger \tilde{\rho}_c \hat{b}_2^\dagger + \hat{b}_2^\dagger \tilde{\rho}_c \hat{b}_1^\dagger - \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger \tilde{\rho}_c - \tilde{\rho}_c \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger). \end{aligned} \quad (4.24)$$

A expressão (4.24) descreve a evolução temporal do operador densidade para a cavidade. Para poder fazer uma análise do emaranhamento entre os modos da cavidade, os operadores $\tilde{\rho}_{k0}^{(j)}$ terão que ser expressos em termos dos operadores de campo comprimido e de $\tilde{\rho}_c$.

4.1.2 Aproximação das soluções quase-estacionárias

Como (4.24) depende dos operadores $\tilde{\rho}_{kk'}^{(j)} = \langle k_j | \tilde{\rho} | k'_j \rangle$ (onde $j = 1, 2, \dots, N$) é preciso escrever estes operadores em função do operador $\tilde{\rho}_c$ para obter a equação mestra dos modos da cavidade. Dos elementos de matriz da equação mestra (4.1),

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{kk'}^{(j)} = -\frac{i}{\hbar} \langle k_j | [\tilde{H}_I, \tilde{\rho}] | k'_j \rangle + \langle k_j | \left(\widetilde{\mathcal{L}_a \hat{\rho}} \right) | k'_j \rangle + \langle k_j | \left(\widetilde{\mathcal{L}_c \hat{\rho}} \right) | k'_j \rangle, \quad (4.25)$$

é possível obter as derivadas dos operadores $\tilde{\rho}_{kk'}$. Por exemplo para $k = k' = +$ temos a equação

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{++}^{(j)} = & -ig_a(\hat{b}_2^\dagger \tilde{\rho}_{0+}^{(j)} - \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} \hat{b}_2) + \gamma \left\{ \frac{(\cos^2 \theta + 1)}{2} \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \left(\tilde{\rho}_{++}^{(j)} + e^{i\Omega_R t} \tilde{\rho}_{-+}^{(j)} \right. \right. \right. \\
& + e^{-i\Omega_R t} \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} + \tilde{\rho}_{--}^{(j)} \Big) + \cos^2 \theta \tilde{\rho}_{00}^{(j)} + \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{2}} \left(e^{-\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} \right. \\
& \left. \left. \left. + e^{\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{-0}^{(j)} + e^{\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{0+}^{(j)} + e^{-\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} \right) \right] \\
& - \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \left[\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \left(\tilde{\rho}_{++}^{(j)} + e^{i\Omega_R t} \tilde{\rho}_{-+}^{(j)} \right) + \cos \theta e^{\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{0+}^{(j)} \right] \\
& \left. - \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \left[\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \left(\tilde{\rho}_{++}^{(j)} + e^{-i\Omega_R t} \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} \right) + \cos \theta e^{-\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} \right] \right\} \\
& + \sum_{l=1,2} \frac{\kappa}{2} \left[N_0(\hat{b}_l^\dagger \tilde{\rho}_{++}^{(j)} \hat{b}_l - \tilde{\rho}_{++}^{(j)} \hat{b}_l \hat{b}_l^\dagger) + (N_0 + 1)(\hat{b}_l \tilde{\rho}_{++}^{(j)} \hat{b}_l^\dagger - \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l \tilde{\rho}_{++}^{(j)}) \right] \\
& + \kappa M(\hat{b}_1 \tilde{\rho}_{++}^{(j)} \hat{b}_2 + \hat{b}_2 \tilde{\rho}_{++}^{(j)} \hat{b}_1 - \hat{b}_1 \hat{b}_2 \tilde{\rho}_{++}^{(j)} - \tilde{\rho}_{++}^{(j)} \hat{b}_1 \hat{b}_2) \\
& + \left\{ \sum_{l=1,2} \frac{\kappa}{2} \left[N_0(\hat{b}_l^\dagger \tilde{\rho}_{++}^{(j)} \hat{b}_l - \tilde{\rho}_{++}^{(j)} \hat{b}_l \hat{b}_l^\dagger) + (N_0 + 1)(\hat{b}_l \tilde{\rho}_{++}^{(j)} \hat{b}_l^\dagger - \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l \tilde{\rho}_{++}^{(j)}) \right] \right. \\
& \left. + \kappa M(\hat{b}_1 \tilde{\rho}_{++}^{(j)} \hat{b}_2 + \hat{b}_2 \tilde{\rho}_{++}^{(j)} \hat{b}_1 - \hat{b}_1 \hat{b}_2 \tilde{\rho}_{++}^{(j)} - \tilde{\rho}_{++}^{(j)} \hat{b}_1 \hat{b}_2) \right\}^\dagger, \tag{4.26}
\end{aligned}$$

onde as expressões analíticas dos operadores $\tilde{\rho}_{kk'}^{(j)} = \langle k_j | \tilde{\rho} | k'_j \rangle$ (onde $j = 1, 2, \dots, N$) estão no apêndice C.

Eliminando os termos que oscilam rapidamente na expansão (4.26) e tratando os campos linearmente obtemos,

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{++}^{(j)} = -ig_a \hat{b}_2^\dagger \tilde{\rho}_{0+}^{(j)} + ig_a \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} \hat{b}_2 + f \tilde{\rho}_{++}^{(j)} + \alpha \tilde{\rho}_{--}^{(j)} + \beta \tilde{\rho}_{00}^{(j)}, \tag{4.27}$$

seguindo o mesmo procedimento obtemos as equações para os operadores restantes,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{00}^{(j)} = & -ig_a \hat{b}_2 \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} - ig_a \hat{b}_1 \tilde{\rho}_{-0}^{(j)} + ig_a \tilde{\rho}_{0+}^{(j)} \hat{b}_2^\dagger + ig_a \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} \hat{b}_1^\dagger + f_2 \tilde{\rho}_{00}^{(j)} \\
& + \gamma \frac{\sin^4 \theta}{2} \tilde{\rho}_{++}^{(j)} + \gamma \frac{\sin^4 \theta}{2} \tilde{\rho}_{--}^{(j)}, \tag{4.28}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{--}^{(j)} = -ig_a \hat{b}_1^\dagger \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} + ig_a \tilde{\rho}_{-0}^{(j)} \hat{b}_1 + f \tilde{\rho}_{--}^{(j)} + \alpha \tilde{\rho}_{++}^{(j)} + \beta \tilde{\rho}_{00}^{(j)}, \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} = & -ig_a \hat{b}_2^\dagger \tilde{\rho}_{00} + ig_a \tilde{\rho}_{++}^{(j)} \hat{b}_2^\dagger + ig_a \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} \hat{b}_1^\dagger + f_3 \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} \\ & + \gamma \frac{\cos \theta \sin \theta}{\sqrt{2}} \tilde{\rho}_{0-}^{(j)}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} = & -ig_a \hat{b}_2 \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} - ig_a \hat{b}_1 \tilde{\rho}_{--}^{(j)} + ig_a \tilde{\rho}_{00}^{(j)} \hat{b}_1 + f_3 \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} \\ & + \gamma \frac{\cos \theta \sin \theta}{\sqrt{2}} \tilde{\rho}_{+0}^{(j)}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} = -ig_a \hat{b}_2^\dagger \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} + ig_a \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} \hat{b}_1 + f_4 \tilde{\rho}_{+-}^{(j)}, \quad (4.32)$$

onde foram usadas as constantes definidas na forma

$$\begin{aligned} f &= \gamma \left[\frac{(\cos^2 \theta + 1) \sin^2 \theta}{4} - \sin^2 \theta \right], & f_4 &= -\gamma \sin^2 \theta (\sin^2 \theta + 1), \\ f_2 &= \gamma \cos^2 \theta (\sin^2 \theta - 2), & \alpha &= \gamma \frac{(\cos^2 \theta + 1) \sin^2 \theta}{4}, \\ f_3 &= \gamma \left[\frac{\cos \theta \sin \theta}{\sqrt{2}} - \frac{\sin^2 \theta}{2} - \cos^2 \theta \right], & \beta &= \gamma \frac{(\cos^2 \theta + 1) \cos^2 \theta}{2}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Usando a equação para $\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{+++}^{(j)}$,

$$e^{-ft} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{+++}^{(j)} - f e^{-ft} \tilde{\rho}_{+++}^{(j)} = -ig_a \hat{b}_2^\dagger e^{-ft} \tilde{\rho}_{0+}^{(j)} + ig_a e^{-ft} \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} \hat{b}_2 + \alpha e^{-ft} \tilde{\rho}_{--}^{(j)} + \beta e^{-ft} \tilde{\rho}_{00}^{(j)}, \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-ft} \tilde{\rho}_{+++}^{(j)} \right) = -ig_a \hat{b}_2^\dagger e^{-ft} \tilde{\rho}_{0+}^{(j)} + ig_a e^{-ft} \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} \hat{b}_2 + \alpha e^{-ft} \tilde{\rho}_{--}^{(j)} + \beta e^{-ft} \tilde{\rho}_{00}^{(j)}. \quad (4.35)$$

Integrando por partes (4.35), obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{ct'} \tilde{\rho}_{kk'}^{(j)} dt' &= \frac{1}{c} e^{ct} \tilde{\rho}_{kk'}^{(j)} + \frac{(-1)}{c^2} e^{ct} \dot{\tilde{\rho}}_{kk'}^{(j)} + \frac{1}{c^3} e^{ct} \ddot{\tilde{\rho}}_{kk'}^{(j)} + \dots \\ &+ \frac{1}{c} \tilde{\rho}_{kk'}^{(j)}(0) + \frac{(-1)}{c^2} \dot{\tilde{\rho}}_{kk'}^{(j)} \Big|_{t=0} + \dots \end{aligned} \quad (4.36)$$

Considerando as soluções estacionárias podemos eliminar todos os termos que contenham uma derivada, então a integral será

$$\int_0^t e^{ct'} \tilde{\rho}_{kk'}^{(j)} dt' \approx \frac{1}{c} e^{ct} \tilde{\rho}_{kk'}^{(j)} + \frac{1}{c} \tilde{\rho}_{kk'}^{(j)}(0) \quad (4.37)$$

e a solução de (4.35) será

$$\tilde{\rho}_{++}^{(j)} = -ig_a \hat{b}_2^\dagger \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{0+}^{(j)} \\ -f \end{bmatrix} + ig_a \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} \\ -f \end{bmatrix} \hat{b}_2 + \alpha \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{--}^{(j)} \\ -f \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{00}^{(j)} \\ -f \end{bmatrix} + \text{const.} e^{ft}. \quad (4.38)$$

Com este processo é possível obter as soluções para os operadores $\tilde{\rho}_{kk'}^{(j)}$ no limite $t \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{++}^{(j)} = & -ig_a \hat{b}_2^\dagger \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{0+}^{(j)} \\ -f \end{bmatrix} + ig_a \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} \\ -f \end{bmatrix} \hat{b}_2 + \gamma \frac{(\cos^2 \theta + 1) \sin^2 \theta}{4} \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{--}^{(j)} \\ -f \end{bmatrix} \\ & + \gamma \frac{(\cos^2 \theta + 1) \cos^2 \theta}{2} \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{00}^{(j)} \\ -f \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{00}^{(j)} = & -ig_a \hat{b}_2 \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} \\ -f_2 \end{bmatrix} - ig_a \hat{b}_1 \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{-0}^{(j)} \\ -f_2 \end{bmatrix} + ig_a \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{0+}^{(j)} \\ -f_2 \end{bmatrix} \hat{b}_2^\dagger + ig_a \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} \\ -f_2 \end{bmatrix} \hat{b}_1^\dagger \\ & + \gamma \frac{\sin^4 \theta}{2} \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{--}^{(j)} \\ -f_2 \end{bmatrix} + \gamma \frac{\sin^4 \theta}{2} \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{00}^{(j)} \\ -f_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{--}^{(j)} = & -ig_a \hat{b}_1^\dagger \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} \\ -f \end{bmatrix} + ig_a \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{-0}^{(j)} \\ -f \end{bmatrix} \hat{b}_1 + \gamma \frac{(\cos^2 \theta + 1) \sin^2 \theta}{4} \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{++}^{(j)} \\ -f \end{bmatrix} \\ & + \gamma \frac{(\cos^2 \theta + 1) \cos^2 \theta}{2} \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{00}^{(j)} \\ -f \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} = & -ig_a \hat{b}_2^\dagger \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{00}^{(j)} \\ -f_3 \end{bmatrix} - ig_a \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{++}^{(j)} \\ -f_3 \end{bmatrix} \hat{b}_2^\dagger + ig_a \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} \\ -f_3 \end{bmatrix} \hat{b}_1^\dagger \\ & + \gamma \frac{\cos \theta \sin \theta}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} \\ -f_3 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} = & -ig_a \hat{b}_2 \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} \\ -f_3 \end{bmatrix} - ig_a \hat{b}_1 \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{--}^{(j)} \\ -f_3 \end{bmatrix} + ig_a \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{00}^{(j)} \\ -f_3 \end{bmatrix} \hat{b}_1 \\ & + \gamma \frac{\cos \theta \sin \theta}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} \\ -f_3 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\tilde{\rho}_{+-}^{(j)} = -ig_a \hat{b}_2^\dagger \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} \\ -f_4 \end{bmatrix} + ig_a \begin{bmatrix} \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} \\ -f_4 \end{bmatrix} \hat{b}_1. \quad (4.44)$$

As soluções estacionárias $\langle \tilde{\rho}_{kk'}^s \rangle$ em ausência dos campos da cavidade ($g_a = 0$) são

$$\langle \tilde{\rho}_{++}^s \rangle = \langle \tilde{\rho}_{--}^s \rangle = \frac{\cos^2 \theta + \cos^4 \theta}{1 + 3 \cos^4 \theta}, \quad (4.45a)$$

$$\langle \tilde{\rho}_{00}^s \rangle = \frac{\sin^4 \theta}{1 + 3 \cos^4 \theta}, \quad (4.45b)$$

$$\langle \tilde{\rho}_{+-}^s \rangle = 0. \quad (4.45c)$$

Como as variáveis atômicas variam mais rapidamente que os campos da cavidade é possível expressar $\tilde{\rho}_{kk'}$ ($k, k' = +, 0, -$) em termos de $\tilde{\rho}_c$, \hat{b}_1 e \hat{b}_2 , a partir das soluções quase-estacionárias para as equações acopladas (4.39), (4.40), (4.41), (4.42), (4.43), (4.44). Usando as aproximações (ZOU, 2013) [7] $\tilde{\rho}_{kk} \approx \langle \tilde{\rho}_{kk}^s \rangle \tilde{\rho}_c$ ($k = +, 0, -$) e $\langle \tilde{\rho}_{+-}^s \rangle \approx 0$ obtemos a equação mestra para os modos da cavidade em função do operador $\tilde{\rho}_c$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\rho}_c = \frac{1}{2} \sum_{l=1,2} \left[(A + \kappa N_0) (\hat{b}_l^\dagger \tilde{\rho}_c \hat{b}_l - \hat{b}_l \hat{b}_l^\dagger \tilde{\rho}_c) + (B + \kappa(N_0 + 1)) (\hat{b}_l \tilde{\rho}_c \hat{b}_l^\dagger - \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l \tilde{\rho}_c) \right] \\ + (\kappa M + C) (\hat{b}_1 \tilde{\rho}_c \hat{b}_2 + \hat{b}_2 \tilde{\rho}_c \hat{b}_1) - (\kappa M + D_1) \tilde{\rho}_c \hat{b}_1 \hat{b}_2 \\ - (\kappa M + D_2) \hat{b}_1 \hat{b}_2 \tilde{\rho}_c + H.c. \end{aligned} \quad (4.46)$$

onde foram usadas as constantes

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} \cos^2 \theta (1 + \sin^2 \theta), & C &= \frac{g_a^2 N \gamma_c (\langle \tilde{\rho}_{++}^s \rangle + \langle \tilde{\rho}_{00}^s \rangle)}{\Gamma^2 - \gamma_c^2}, \\ \gamma_c &= \frac{\gamma}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta, & D_1 &= \frac{2g_a^2 N \gamma_c \langle \tilde{\rho}_{00}^s \rangle}{\Gamma^2 - \gamma_c^2}, \\ A &= \frac{2g_a^2 N \Gamma \langle \tilde{\rho}_{00}^s \rangle}{\Gamma^2 - \gamma_c^2}, & D_2 &= \frac{2g_a^2 N \gamma_c \langle \tilde{\rho}_{++}^s \rangle}{\Gamma^2 - \gamma_c^2}, \\ B &= \frac{2g_a^2 N \Gamma \langle \tilde{\rho}_{++}^s \rangle}{\Gamma^2 - \gamma_c^2}, \end{aligned} \quad (4.47)$$

A expressão (4.46) descreve a evolução temporal do operador densidade para a cavidade em termos dos operadores de campo comprimido, de $\tilde{\rho}_c$ e das constantes (4.78). Ela pode ser usada para estudar a dinâmica de emaranhamento entre dois modos de campo quantizado da cavidade.

4.2 EMARANHAMENTO ENTRE DOIS MODOS DE CAMPO QUANTIZADO DA CAVIDADE

Nesta seção o emaranhamento entre dois modos de campo quantizado sera determinado aplicando o critério (2.174) para o sistema com dissipação onde o meio atômico esta composto por N átomos.

4.2.1 Cálculo da soma das variâncias $V(t)$

Usando a equação mestra (4.46) para os modos de campo quantizado da cavidade e a relação $\frac{d}{dt} \langle \hat{X} \rangle = \text{Tr} \left(\frac{d\tilde{\rho}}{dt} X \right)$ para os operadores de campo \hat{X} podemos escrever,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \langle \hat{X} \rangle &= \frac{1}{2}(A + \kappa N_0) \text{Tr} \left[\hat{b}_1^\dagger \tilde{\rho}_c \hat{b}_1 \hat{X} - \hat{b}_1 \hat{b}_1^\dagger \tilde{\rho}_c \hat{X} + \hat{b}_2^\dagger \tilde{\rho}_c \hat{b}_2 \hat{X} - \hat{b}_2 \hat{b}_2^\dagger \tilde{\rho}_c \hat{X} \right. \\
&\quad \left. + \hat{b}_1^\dagger \tilde{\rho}_c \hat{b}_1 \hat{X} - \tilde{\rho}_c \hat{b}_1 \hat{b}_1^\dagger \hat{X} + \hat{b}_2^\dagger \tilde{\rho}_c \hat{b}_2 \hat{X} - \tilde{\rho}_c \hat{b}_2 \hat{b}_2^\dagger \hat{X} \right] \\
&+ \frac{1}{2}[B + \kappa(N_0 + 1)] \text{Tr} \left[\hat{b}_1 \tilde{\rho}_c \hat{b}_1^\dagger \hat{X} - \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 \tilde{\rho}_c \hat{X} + \hat{b}_2 \tilde{\rho}_c \hat{b}_2^\dagger \hat{X} - \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 \tilde{\rho}_c \hat{X} \right. \\
&\quad \left. + \hat{b}_1 \tilde{\rho}_c \hat{b}_1^\dagger \hat{X} - \tilde{\rho}_c \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 \hat{X} + \hat{b}_2 \tilde{\rho}_c \hat{b}_2^\dagger \hat{X} - \tilde{\rho}_c \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 \hat{X} \right] \\
&+ \kappa M \text{Tr} \left[\hat{b}_1 \tilde{\rho}_c \hat{b}_2 \hat{X} + \hat{b}_2 \tilde{\rho}_c \hat{b}_1 \hat{X} - \tilde{\rho}_c \hat{b}_1 \hat{b}_2 \hat{X} - \hat{b}_1 \hat{b}_2 \tilde{\rho}_c \hat{X} \right. \\
&\quad \left. + \hat{b}_2^\dagger \tilde{\rho}_c \hat{b}_1^\dagger \hat{X} + \hat{b}_1^\dagger \tilde{\rho}_c \hat{b}_2^\dagger \hat{X} - \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger \tilde{\rho}_c \hat{X} - \tilde{\rho}_c \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger \hat{X} \right] \\
&+ D_1 \text{Tr} \left[\frac{1}{2} \hat{b}_1 \tilde{\rho}_c \hat{b}_2 \hat{X} + \frac{1}{2} \hat{b}_2 \tilde{\rho}_c \hat{b}_1 \hat{X} - \tilde{\rho}_c \hat{b}_1 \hat{b}_2 \hat{X} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \hat{b}_2^\dagger \tilde{\rho}_c \hat{b}_1^\dagger \hat{X} + \frac{1}{2} \hat{b}_1^\dagger \tilde{\rho}_c \hat{b}_2^\dagger \hat{X} - \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger \tilde{\rho}_c \hat{X} \right] \\
&+ D_2 \text{Tr} \left[\frac{1}{2} \hat{b}_1 \tilde{\rho}_c \hat{b}_2 \hat{X} + \frac{1}{2} \hat{b}_2 \tilde{\rho}_c \hat{b}_1 \hat{X} - \hat{b}_1 \hat{b}_2 \tilde{\rho}_c \hat{X} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \hat{b}_2^\dagger \tilde{\rho}_c \hat{b}_1^\dagger \hat{X} + \frac{1}{2} \hat{b}_1^\dagger \tilde{\rho}_c \hat{b}_2^\dagger \hat{X} - \tilde{\rho}_c \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger \hat{X} \right].
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Usando as relações de comutação dos operadores de campo bosônico e usando a propriedade cíclica do traço parcial na equação (4.48) obtemos o seguinte conjunto de equações

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{b}_1 \rangle = \frac{1}{2}(A - B - \kappa) \langle \hat{b}_1 \rangle + \frac{1}{2}(-D_1 + D_2) \langle \hat{b}_2^\dagger \rangle, \tag{4.49}$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{b}_2 \rangle = \frac{1}{2}(A - B - \kappa) \langle \hat{b}_2 \rangle + \frac{1}{2}(-D_1 + D_2) \langle \hat{b}_1^\dagger \rangle, \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 \rangle &= (A - B - \kappa) \langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 \rangle + \frac{1}{2}(-D_1 + D_2) \langle \hat{b}_1 \hat{b}_2 \rangle \\ &+ \frac{1}{2}(-D_1 + D_2) \langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger \rangle + (A + \kappa N_0), \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 \rangle &= (A - B - \kappa) \langle \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 \rangle + \frac{1}{2}(-D_1 + D_2) \langle \hat{b}_1 \hat{b}_2 \rangle \\ &+ \frac{1}{2}(-D_1 + D_2) \langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger \rangle + (A + \kappa N_0), \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \hat{b}_1 \hat{b}_2 \rangle &= (A - B - \kappa) \langle \hat{b}_1 \hat{b}_2 \rangle + \frac{1}{2}(-D_1 + D_2) \langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 \rangle \\ &+ \frac{1}{2}(-D_1 + D_2) \langle \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 \rangle - (\kappa M + D_1). \end{aligned} \quad (4.53)$$

Fazendo combinações lineares das equações (4.49), (4.50), (4.51), (4.52) e (4.53) e seus complexos conjugados obtemos o seguinte conjunto de equações:

$$\frac{d}{dt} \left(\langle \hat{b}_1^\dagger \rangle - \langle \hat{b}_2 \rangle \right) = \frac{1}{2} (\xi - \eta) \left(\langle \hat{b}_1^\dagger \rangle - \langle \hat{b}_2 \rangle \right) \quad (4.54)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\langle \hat{b}_1 \rangle + \langle \hat{b}_2^\dagger \rangle \right) = \frac{1}{2} (\xi + \eta) \left(\langle \hat{b}_1 \rangle + \langle \hat{b}_2^\dagger \rangle \right) \quad (4.55)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 \rangle - \langle \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 \rangle \right) = \xi \left(\langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 \rangle - \langle \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 \rangle \right), \quad (4.56)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\langle \hat{b}_1 \hat{b}_1 \rangle - \langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger \rangle \right) = \xi \left(\langle \hat{b}_1 \hat{b}_2 \rangle - \langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger \rangle \right), \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 \rangle + \langle \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 \rangle + \langle \hat{b}_1 \hat{b}_2 \rangle + \langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger \rangle \right) &= (\xi + \eta) \left(\langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 \rangle + \langle \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 \rangle + \langle \hat{b}_1 \hat{b}_2 \rangle \right. \\ &\left. + \langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger \rangle \right) + 2(\zeta - \vartheta), \end{aligned} \quad (4.58)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 \rangle + \langle \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 \rangle - \langle \hat{b}_1 \hat{b}_2 \rangle - \langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger \rangle \right) &= (\xi - \eta) \left(\langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 \rangle + \langle \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 \rangle - \langle \hat{b}_1 \hat{b}_2 \rangle \right. \\ &\left. - \langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger \rangle \right) + 2(\zeta + \vartheta), \end{aligned} \quad (4.59)$$

onde foram usadas as constantes

$$\begin{aligned}\xi &= A - B - \kappa, & \zeta &= A + \kappa N_0, \\ \eta &= -D_1 + D_2, & \vartheta &= \kappa M + D_1.\end{aligned}\quad (4.60)$$

Para poder integrar as equações precisamos das condições iniciais, as quais podem ser obtidas do estado inicial $|\phi_c(0)\rangle$ para os modos de campo quantizado da cavidade, definidas na forma:

$$\begin{aligned}\langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 \rangle_0 &= \langle \phi_c(0) | \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 | \phi_c(0) \rangle, & \langle \hat{b}_1 \rangle_0 &= \langle \phi_c(0) | \hat{b}_1 | \phi_c(0) \rangle, \\ \langle \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 \rangle_0 &= \langle \phi_c(0) | \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 | \phi_c(0) \rangle, & \langle \hat{b}_2 \rangle_0 &= \langle \phi_c(0) | \hat{b}_2 | \phi_c(0) \rangle. \\ \langle \hat{b}_1 \hat{b}_2 \rangle_0 &= \langle \phi_c(0) | \hat{b}_1 \hat{b}_2 | \phi_c(0) \rangle,\end{aligned}\quad (4.61)$$

Usando as condições iniciais (4.61) é possível integrar as equações (4.54), (4.55), (4.56), (4.57), (4.58) e (4.59) diretamente e obter:

$$\langle \hat{b}_1^\dagger \rangle - \langle \hat{b}_2 \rangle = e^{\frac{1}{2}(\xi - \eta)t} \left(\langle \hat{b}_1^\dagger \rangle_0 - \langle \hat{b}_2 \rangle_0 \right) \quad (4.62)$$

$$\langle \hat{b}_1 \rangle + \langle \hat{b}_2^\dagger \rangle = e^{\frac{1}{2}(\xi + \eta)t} \left(\langle \hat{b}_1 \rangle_0 + \langle \hat{b}_2^\dagger \rangle_0 \right) \quad (4.63)$$

$$\langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 \rangle - \langle \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 \rangle = e^{\xi t} \left(\langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 \rangle_0 - \langle \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 \rangle_0 \right), \quad (4.64)$$

$$\langle \hat{b}_1 \hat{b}_2 \rangle - \langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger \rangle = e^{\xi t} \left(\langle \hat{b}_1 \hat{b}_2 \rangle_0 - \langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger \rangle_0 \right), \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned}\langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 \rangle + \langle \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 \rangle + \langle \hat{b}_1 \hat{b}_2 \rangle + \langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger \rangle &= e^{(\xi + \eta)t} \left(\langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 \rangle_0 + \langle \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 \rangle_0 \right. \\ &\quad \left. + \langle \hat{b}_1 \hat{b}_2 \rangle_0 + \langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger \rangle_0 \right) \\ &\quad + \frac{2(\zeta - \vartheta)}{\xi + \eta} - \frac{2(\zeta - \vartheta)}{\xi + \eta},\end{aligned}\quad (4.66)$$

$$\begin{aligned}\langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 \rangle + \langle \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 \rangle - \langle \hat{b}_1 \hat{b}_2 \rangle - \langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger \rangle &= e^{(\xi - \eta)t} \left(\langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 \rangle_0 + \langle \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 \rangle_0 \right. \\ &\quad \left. - \langle \hat{b}_1 \hat{b}_2 \rangle_0 - \langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger \rangle_0 \right) \\ &\quad + \frac{2(\zeta + \vartheta)}{\xi - \eta} - \frac{2(\zeta + \vartheta)}{\xi - \eta}.\end{aligned}\quad (4.67)$$

Das equações (4.62) e (4.63) obtemos

$$\langle \hat{b}_1 \rangle = e^{\frac{1}{2}\xi t} \left\{ \langle \hat{b}_1 \rangle_0 \cosh \left(\frac{\eta t}{2} \right) + \langle \hat{b}_2^\dagger \rangle_0 \sinh \left(\frac{\eta t}{2} \right) \right\} \quad (4.68)$$

$$\langle \hat{b}_2 \rangle = e^{\frac{1}{2}\xi t} \left\{ \langle \hat{b}_1^\dagger \rangle_0 \sinh \left(\frac{\eta t}{2} \right) + \langle \hat{b}_2 \rangle_0 \cosh \left(\frac{\eta t}{2} \right) \right\} \quad (4.69)$$

A quantidade V pode ser calculada usando as equações (4.67), (4.68) e (4.69):

$$V(t) = 2e^{-2r} \left\{ 1 - \frac{2(\zeta + \vartheta)}{\xi - \eta} + e^{(\xi - \eta)t} \left(\beta(0) + \frac{2(\zeta + \vartheta)}{\xi - \eta} \right) \right\}, \quad (4.70)$$

onde,

$$\begin{aligned} \beta(0) = & \langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 \rangle_0 + \langle \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 \rangle_0 - \langle \hat{b}_1 \hat{b}_2 \rangle_0 - \langle \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_2^\dagger \rangle_0 \\ & - \langle \hat{b}_1^\dagger \rangle_0 \langle \hat{b}_1 \rangle_0 - \langle \hat{b}_2^\dagger \rangle_0 \langle \hat{b}_2 \rangle_0 \\ & + \langle \hat{b}_1 \rangle_0 \langle \hat{b}_2 \rangle_0 + \langle \hat{b}_1^\dagger \rangle_0 \langle \hat{b}_2^\dagger \rangle_0 \end{aligned} \quad (4.71)$$

Usando as constantes definidas em (4.78) e (4.60) podemos escrever

$$\xi = \left[\frac{2g_a^2 N \Gamma}{\Gamma^2 - \gamma_c^2} \right] \left(\frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{1 + 3 \cos^4 \theta} \right) - \kappa, \quad (4.72a)$$

$$\eta = - \left[\frac{2g_a^2 N \gamma_c}{\Gamma^2 - \gamma_c^2} \right] \left(\frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{1 + 3 \cos^4 \theta} \right), \quad (4.72b)$$

$$\zeta = \left[\frac{2g_a^2 N \Gamma}{\Gamma^2 - \gamma_c^2} \right] \left(\frac{\sin^4 \theta}{1 + 3 \cos^4 \theta} \right) + \kappa \sinh^2 r, \quad (4.72c)$$

$$\vartheta = \left[\frac{2g_a^2 N \gamma_c}{\Gamma^2 - \gamma_c^2} \right] \left(\frac{\sin^4 \theta}{1 + 3 \cos^4 \theta} \right) - \kappa \sinh r \cosh r, \quad (4.72d)$$

onde,

$$\Gamma = \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} \cos^2 \theta (1 + \sin^2 \theta), \quad (4.73a)$$

$$\gamma_c = \frac{\gamma}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta. \quad (4.73b)$$

Considerando o critério (2.173), a equação (4.70) pode ser usada para analisar o emaranhamento do sistema.

4.2.2 Evolução temporal do emaranhamento

Com a expressão (4.70) que descreve a soma das variâncias $V(t)$ podemos estudar a evolução temporal do emaranhamento entre os modos da cavidade escolhendo estados iniciais particulares.

Considerando o estado inicial para a cavidade $\rho_c(0) = |00\rangle\langle 00|$ a equação (4.70) se reduz a

$$V(t) = 2e^{-2r} \left\{ 1 - \frac{2(\zeta + \vartheta)}{\xi - \eta} + e^{(\xi - \eta)t} \left(2\sinh r(\sinh r + \cosh r) + \frac{2(\zeta + \vartheta)}{\xi - \eta} \right) \right\}. \quad (4.74)$$

Para poder estudar numericamente a expressão (4.74) vamos escrever todas as quantidades que tenham unidades de frequência em unidades de γ , o parâmetro t estará dado em unidades de γ^{-1} . Consideraremos $g^2 N = 10\gamma^2$ de modo que variando o número de átomos N o sistema permanecerá no acoplamento fraco. Para que a aproximação da onda girante seja válida,

$$\frac{g^2}{\kappa\gamma} \ll 1, \quad (4.75)$$

a constante de decaimento dos modos da cavidade será $\kappa = 0,001\gamma$. Na figura (4.1) a linha azul representa a soma das variâncias $V(t)$ para $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{5}{10}$, a linha vermelha representa a soma das variâncias $V(t)$ para $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{7}{10}$ e a linha preta representa a soma das variâncias $V(t)$ para $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{9}{10}$. Para valores grandes de t a linha azul vai para um valor assintótico de $V \approx 1,2709$ e a linha vermelha vai para um valor assintótico de $V \approx 0,8373$.

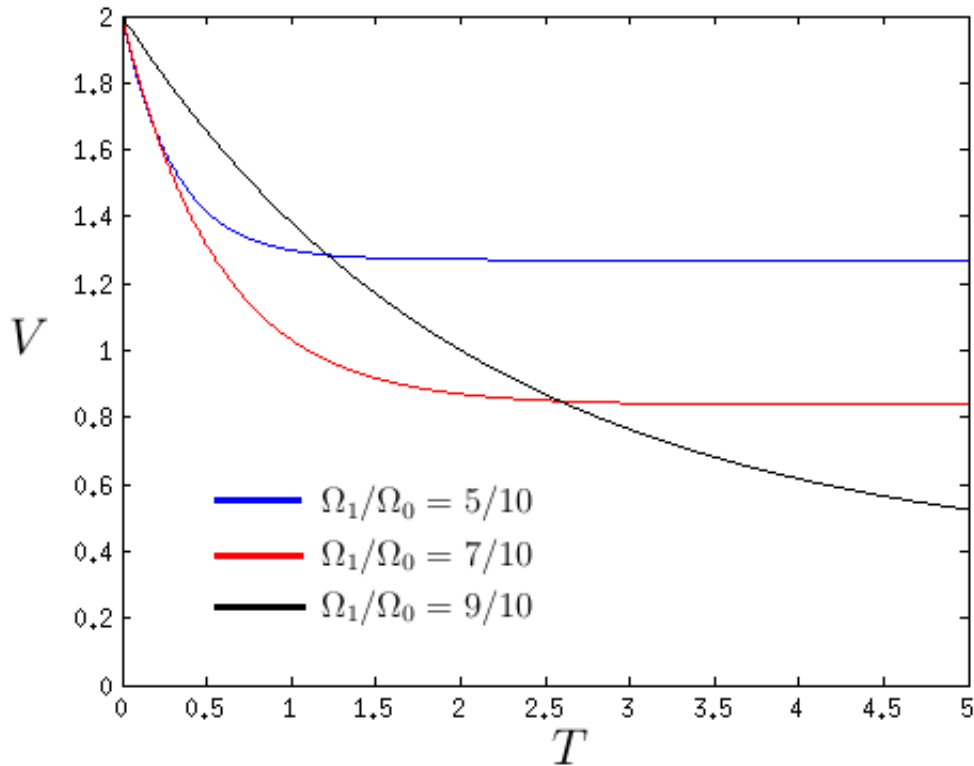


Figura 4.1: $V(t)$ para o estado inicial $|00\rangle$, considerando as razões $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{5}{10}$, $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{7}{10}$, e $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{9}{10}$, e as constantes $g^2 N = 10\gamma^2$ e $\kappa = 0,01\gamma$.

Considerando o estado inicial para a cavidade $\rho_c(0) = S(r) |00\rangle \langle 00| S^\dagger(r)$, a equação (4.70) é da forma

$$V = 2e^{-2r} \left[1 - \frac{2(\zeta + \vartheta)}{\xi - \eta} + e^{(\xi - \eta)t} \left(\frac{2(\zeta + \vartheta)}{\xi - \eta} \right) \right]. \quad (4.76)$$

Consideraremos uma constante de acoplamento $g^2 N = 10\gamma^2$ e a constante de decaimento dos modos da cavidade será $\kappa = 0,001\gamma$. Na figura (4.2) a linha azul representa a soma das variâncias $V(t)$ para $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{5}{10}$, a linha vermelha representa a soma das variâncias $V(t)$ para $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{7}{10}$ e a linha preta representa a soma das variâncias $V(t)$ para $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{9}{10}$. Para valores grandes de t a linha azul vai para um valor assintótico de $V \approx 1,2709$ e a linha vermelha vai para um valor assintótico de $V \approx 0,8373$.

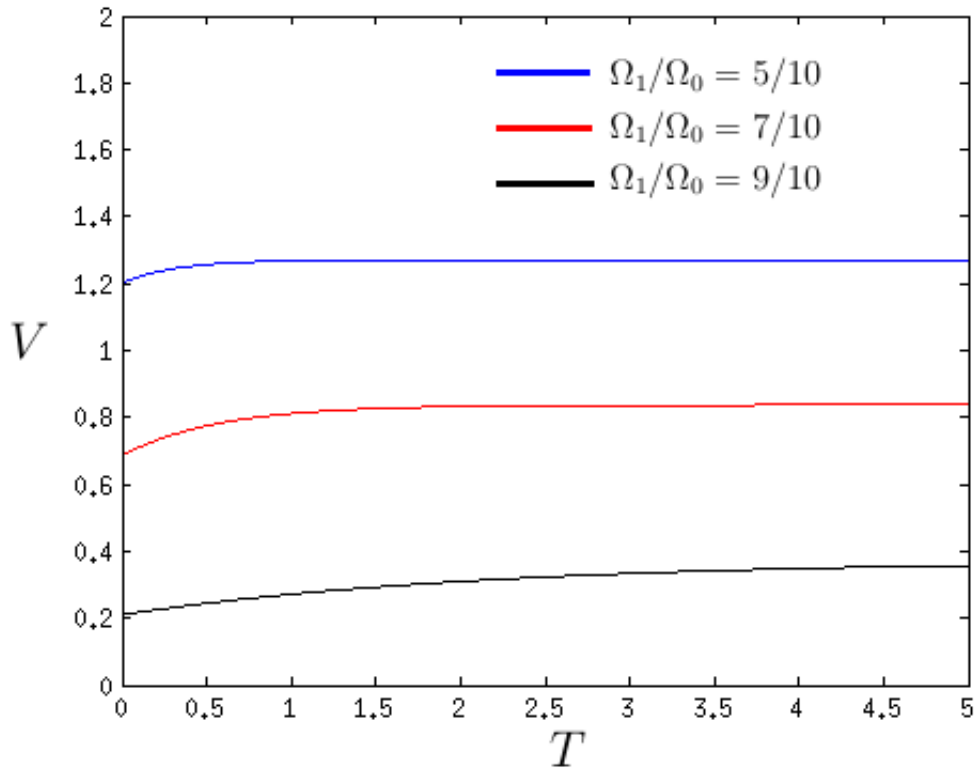


Figura 4.2: $V(t)$ para o estado inicial $S(r) |00\rangle$, considerando as razões $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{1}{2}$, $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{7}{10}$, e $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{9}{10}$, e as constantes $g^2 N = 10\gamma^2$ e $\kappa = 0,01\gamma$.

O critério proposto por Duan[3] é válido para estados gaussianos, mas é possível observar nos dois casos que para os mesmos valores dos parâmetros Ω_1/Ω_0 , $g^2 N$, γ e κ o valor da soma das variâncias $V(t)$ vai para um valor assintótico determinado.

4.2.3 Solução estacionária para $V(t)$

Como existe dissipação no sistema é possível também a presença de soluções estacionárias assintóticas para a soma das variâncias $V(t)$. Os resultados na seção (4.2.2) sugerem que existe uma solução estacionária assintótica. Como o critério (2.173) é válido só para estados gaussianos ele constitui uma forte restrição na aplicabilidade prática deste critério no estudo do emaranhamento dos modos da cavidade. Se a soma das variâncias $V(t)$ possui uma solução estacionária assintótica então para um tempo suficientemente grande obteríamos um resultado específico que não dependeria do estado inicial, só dos parâmetros como Ω_1 , Ω_2 , γ , etc; neste caso o critério (2.173) poderia ser estendido.

As equações (4.49)-(4.53) formam um conjunto de equações diferenciais acopladas de primeira ordem. Um conjunto de equações diferenciais acopladas de primeira ordem do tipo

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}, \quad \text{onde } A = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N1} & \cdots & A_{NN} \end{bmatrix},$$

terão soluções estacionárias assintóticas só no caso de que a parte real para cada autovalor de A seja um número negativo. Como essas equações foram integradas na seção (4.2.1) o que precisamos fazer é analisar a soma das variâncias $V(t)$. A expressão (4.70) terá soluções estacionárias assintóticas se $\xi - \eta < 0$ por causa do termo exponencial $e^{(\xi-\eta)t}$. Usando (4.72) obtemos,

$$\xi - \eta = \left[\frac{2g_a^2 N(\Gamma + \gamma_c)}{\Gamma^2 - \gamma_c^2} \right] \left(\frac{1 - 3\cos^2 \theta}{1 + 3\cos^4 \theta} \right) - \kappa. \quad (4.77)$$

As constantes Γ e γ_c foram definidas em (4.78), onde

$$\Gamma = \frac{\gamma}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} \cos^2 \theta, \quad (4.78a)$$

$$\gamma_c = \frac{\gamma}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \quad (4.78b)$$

então $\Gamma > 0$, $\gamma_c > 0$ e $\Gamma^2 - \gamma_c^2 > 0$. Estamos estudando o caso $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} < 1$. Sabemos que $\tan \theta = \frac{\Omega_1}{\Omega_0}$, logo temos que $1 - 3\cos^2 \theta < 0$ no intervalo $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} \in [0, 1]$. Finalmente $\xi - \eta < 0$ e (4.70) têm solução estacionária no limite $t \rightarrow \infty$, qual seja

$$V = 2e^{-2r} \left[1 - \frac{2(\zeta + \vartheta)}{\xi - \eta} \right]. \quad (4.79)$$

$$V = 2e^{-2r} \left[1 - \frac{2 \left[\frac{2g_a^2 N(\Gamma + \gamma_c)}{\Gamma^2 - \gamma_c^2} \right] \left(\frac{\sin^4 \theta}{1 + 3\cos^4 \theta} \right) + 2\kappa \sinh r (\sinh r - \cosh r)}{\left[\frac{2g_a^2 N(\Gamma + \gamma_c)}{\Gamma^2 - \gamma_c^2} \right] \left(\frac{1 - 3\cos^2 \theta}{1 + 3\cos^4 \theta} \right) - \kappa} \right]. \quad (4.80)$$

Sabemos agora que a expressão (4.70) para a soma das variâncias $V(t)$ possui a solução estacionária assintótica V (4.79). Em trabalhos como (MÜCKE et al., 2010) [28] um feixe de átomos é enviado para a cavidade de modo que ele permanece um tempo t suficientemente longo para interagir com a cavidade, o feixe é enviado de tal forma que pelo menos N átomos estão sempre na cavidade, neste tipo configuração experimental é importante conhecer o tempo que demora a soma das variâncias $V(t)$ em se aproximar o suficiente para V . Para dar uma definição mais clara da expressão “se aproximar o suficiente” vamos considerar a expressão

$$\chi = \frac{V(t) - V}{V}. \quad (4.81)$$

A quantidade χ indica o quão afastado está o valor da soma das variâncias $V(t)$ do valor de V , por exemplo $\chi = 0,1$ disse que $V(t) - V$ é de 10% do valor de V , o tempo t_χ que o sistema demora em alcançar um determinado valor de χ é,

$$t_\chi = \frac{-1}{(\xi - \eta)} \ln \left[\frac{\beta(0) + \frac{2(\zeta + \vartheta)}{\xi - \eta}}{\chi \left(1 - \frac{2(\zeta + \vartheta)}{\xi - \eta} \right)} \right]. \quad (4.82)$$

Usando a expressão (4.82) é possível dar uma melhor interpretação da figura (4.1). Considerando o estado do vácuo como estado inicial, para $g = \frac{1}{2}\gamma$, $N = 40$ e $\kappa = 0,01\gamma$ da equação (4.82) obtemos os resultados mostrados na tabela 4.1

Tabela 4.1: $t_{\chi=0,05}$ para as razões $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{1}{2}$, $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{7}{10}$, e $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{9}{10}$

Ω_1/Ω_0	$t_{0,05}$
50/100	$0,7610\gamma^{-1}$
70/100	$1,8722\gamma^{-1}$
90/100	$9,4262\gamma^{-1}$

Podemos ver que para $\Omega_1/\Omega_0 \rightarrow 1$ temos que t_χ será maior e o valor V será menor, ou seja, para um menor valor de V (maior emaranhamento) o tempo t_χ será maior.

Considerando o estado do vácuo como estado inicial, para $\Omega_1/\Omega_0 = 90/100$ e $\kappa = 0,01\gamma$ da equação (4.82) obtemos os resultados mostrados na tabela 4.2

Tabela 4.2: $t_{\chi=0,05}$ para $g^2N = 1\gamma^2$, $g^2N = 5\gamma^2$, $g^2N = 10\gamma^2$ e $g^2N = 100\gamma^2$

g^2N	$t_{0,05}$
1	$66,77501\gamma^{-1}$
5	$18,0201\gamma^{-1}$
10	$9,4262\gamma^{-1}$
100	$0,9839\gamma^{-1}$

Observa-se que o tempo t_χ será menor aumentando o número de átomos dentro da cavidade.

Considerando o estado do vácuo como estado inicial, para $\Omega_1/\Omega_0 = 90/100$ e $g^2N = 10\gamma^2$ da equação (4.82) obtemos os resultados mostrados na tabela 4.3

Tabela 4.3: $t_{\chi=0,05}$ para $\kappa = 0,1\gamma$, $\kappa = 0,01\gamma$, e $\kappa = 0,001\gamma$

κ	$t_{0,05}$
0,1	$0,6775\gamma^{-1}$
0,01	$9,4262\gamma^{-1}$
0,001	$9,8394\gamma^{-1}$

Fica claro que diminuindo as dissipação da cavidade o tempo t_{χ} será maior.

Quando a soma das variâncias $V(t)$ alcança o valor estacionário assintótico V o emaranhamento dos modos da cavidade estará relacionado razão Ω_1/Ω_0 . Lembrando que $r = \text{arc tanh} \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0} \right)$ e $\theta = \text{arc tan} \left(\frac{\Omega_1}{\Omega_0} \right)$ faremos um gráfico de V para $g = \frac{1}{2}\gamma$ usando três valores para o coeficiente de decaimento da cavidade: $\kappa = 0,1\gamma$, $\kappa = 0,01\gamma$ e $\kappa = 0,001\gamma$, no gráfico (4.3) $N = 2$ e no gráfico (4.4) $N = 40$,

No gráfico (4.3) para $g^2N = 0,5\gamma^2$ a linha azul representa V para $\kappa = 0,1$ onde o valor mínimo é $V_{\min} \approx 1,45$ para $\Omega_1/\Omega_0 \approx 0,68$, a linha vermelha representa V para $\kappa = 0,01$ onde o valor mínimo é $V_{\min} \approx 0,79$ para $\Omega_1/\Omega_0 \approx 0,85$, a linha preta representa V para $\kappa = 0,001$ onde o valor mínimo é $V_{\min} \approx 0,34$ para $\Omega_1/\Omega_0 \approx 0,95$.

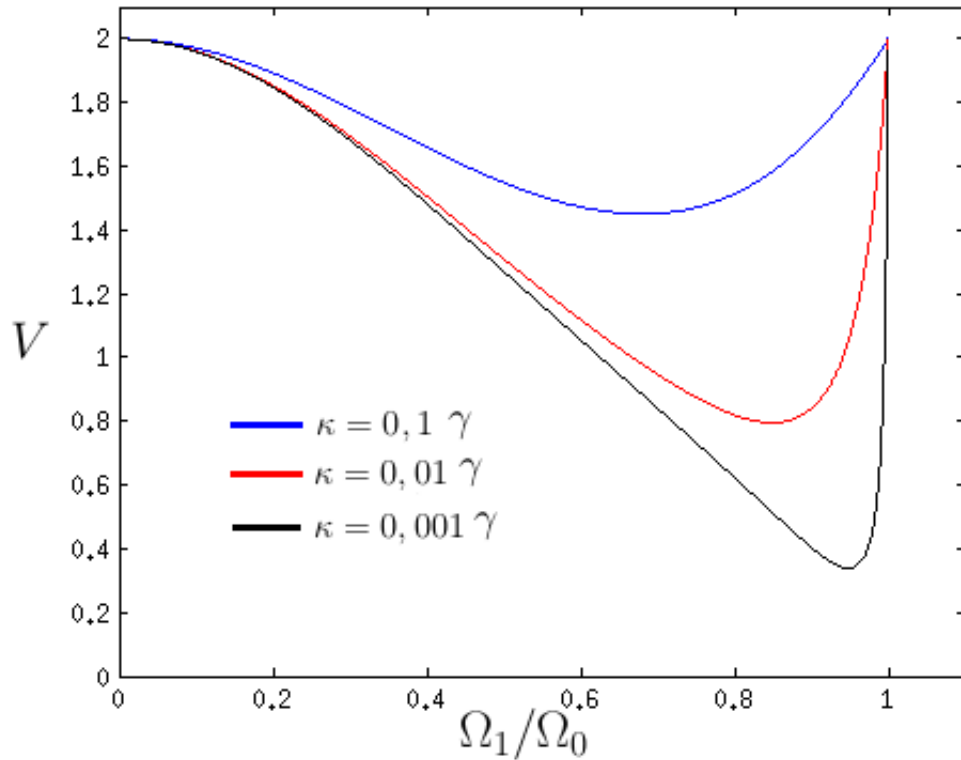


Figura 4.3: $V_{\text{estacionario}}$ para os valores das constantes $g^2N = 0,5\gamma^2$, $\kappa = 0,1\gamma$, $\kappa = 0,01\gamma$ e $\kappa = 0,001\gamma$.

No gráfico (4.4) para $g^2N = 10\gamma^2$ a linha azul representa V para $\kappa = 0,1$ onde o valor mínimo é $V_{\min} \approx 0,63$ para $\Omega_1/\Omega_0 \approx 0,89$, a linha vermelha representa V para $\kappa = 0,01$ onde o valor mínimo é $V_{\min} \approx 0,25$ para $\Omega_1/\Omega_0 \approx 0,96$, a linha preta representa V para $\kappa = 0,001$ onde o valor mínimo é $V_{\min} \approx 0,087$ para $\Omega_1/\Omega_0 \approx 0,985$.

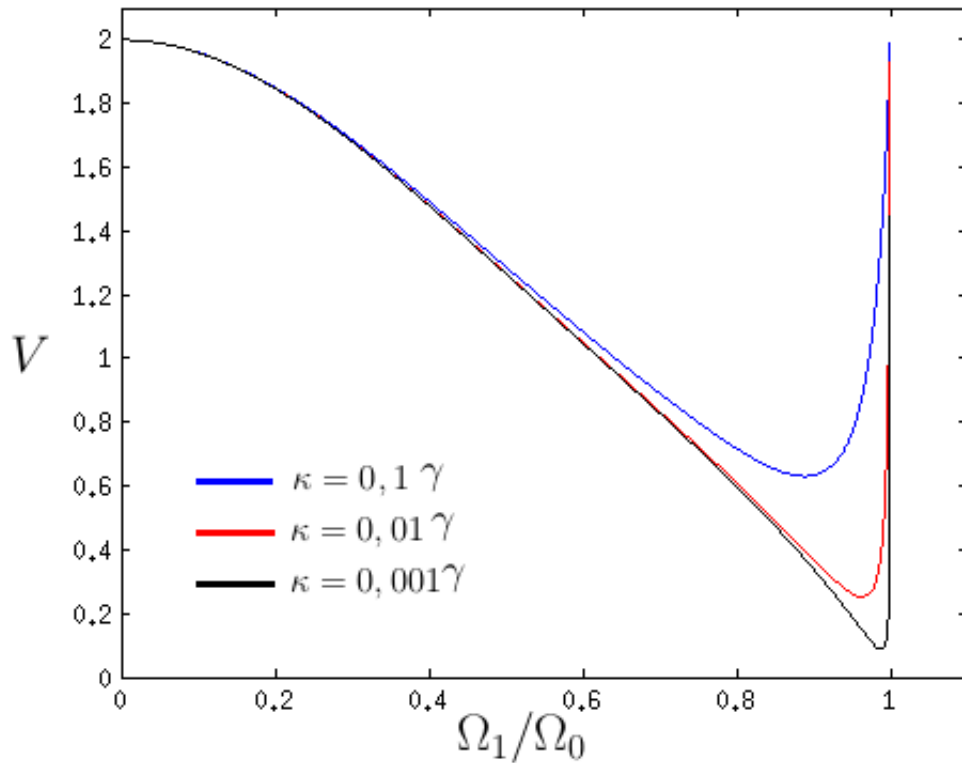


Figura 4.4: $V_{estacionario}$ para os valores das constantes $g^2N = 10\gamma^2$, $\kappa = 0,1\gamma$, $\kappa = 0,01\gamma$ e $\kappa = 0,001\gamma$.

Dos gráficos (4.3) e (4.4) vemos que quando N aumenta e κ diminui o valor de V diminui, aumentando os valores de N e κ o valor mínimo de V vai para 0 quando $\Omega_1/\Omega_0 \rightarrow 1$. Isto quer dizer que o emaranhamento máximo para variáveis contínuas pode ser aproximado na cavidade de dois modos aumentando o número dos átomos N , aumentando a qualidade da cavidade (diminuindo κ) e ajustando as intensidades dos lasers para que $\Omega_1/\Omega_0 \rightarrow 1$. Como este resultado é obtido para a solução assintoticamente estacionária da soma das variâncias $V(t)$ podemos nos aproximar ao estado maximamente emaranhado para variáveis contínuas sem importar o estado inicial dos modos da cavidade.

4.3 VIABILIDADE EXPERIMENTAL

Finalmente vamos discutir brevemente a viabilidade experimental do modelo escolhendo um meio atômico apropriado e considerando as constantes apropriadas.

Um candidato possível de um sistema de três níveis formado por um estado excitado e dois estados metaestáveis são os estados $|3\rangle = |5\hat{p}_{3/2}, F = 2\rangle$, $|1\rangle = |5S_{1/2}, F = 1\rangle$, $|2\rangle = |5S_{1/2}, F = 2\rangle$, dos átomos de ^{87}Rb . O decaimento do estado excitado $|3\rangle$ é dado por $\gamma_1 + \gamma_2 = 2\pi \times 5,9 \text{ MHz}$ ($\gamma_1 \approx \gamma_2$). Para diminuir o valor de κ podem se utilizadas cavidades de alta

qualidade (HAROCHE; BRUNE; RAIMOND, 1991) [30].

Para o sistema sem dissipação seria preciso que a dinâmica da cavidade pudesse ser descrita de forma acurada pelo traço parcial dos estados do átomo da equação de Von Neumann-Liouville para o sistema formado pelo meio atômico e a cavidade. Como foi visto no capítulo 3, na presença de dissipação a evolução é dada pela soma do traço parcial nos estados do átomo da equação de Von Neumann-Liouville, o traço parcial nos estados do átomo do dissipador para o decaimento atômico e traço parcial nos estados do dissipador para o decaimento dos modos da cavidade,

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_c = -\frac{i}{\hbar} \text{Tr}_{\text{atom}} [\tilde{H}_I, \tilde{\rho}] + \text{Tr}_{\text{atom}} (\widetilde{\mathcal{L}}_a \rho) + \text{Tr}_{\text{atom}} (\widetilde{\mathcal{L}}_c \rho). \quad (4.83)$$

Como foi mostrado no capítulo 3, $\text{Tr}_{\text{atom}} (\widetilde{\mathcal{L}}_a \rho) = 0$. Então só $\text{Tr}_{\text{atom}} (\widetilde{\mathcal{L}}_c \rho)$ precisa ser desprezado, isto é possível para valores pequenos de κ , o que pode ser logrado usando cavidades de alta qualidade. O problema que surge neste caso, é que para grandes valores de N o sistema vai rapidamente para a solução estacionária assintótica, como é possível comprovar usando (4.82). Logo a melhor opção é considerar a dinâmica sem dissipação para um meio atômico formado por um átomo, como foi feito no capítulo 3. Como foi visto na seção (4.2.3), o número de átomos N no parâmetro $g^2 N$ é modificado para trabalhar sempre no acoplamento fraco, de forma que a aproximação da onda girante seja válida, então fixar o número de átomos $N = 1$ pode levar o sistema para o acoplamento forte quando são usados valores pequenos de κ . Por esta razão, para determinar a validade experimental do modelo sem dissipação é preciso estudar o sistema com outras aproximações, tais como a aproximação secular (LI; TAN; MACOVEI, 2007) [29], ou pelo uso de equações mestras projetivas (BREUER; PETRUCCIONE, 2002, p.115) [6].

5 CONCLUSÕES

O objetivo principal deste trabalho foi examinar o emaranhamento entre dois modos de campo quantizado numa cavidade a traves da interação com átomos de três níveis. O sistema escolhido para este estudo foi o sistema formado por N átomos de três níveis interagindo com dois campos de laser e dois modos de campo quantizado de uma cavidade. Os estados $|1\rangle$ e $|2\rangle$ estão acoplados ressonantemente por um laser de frequência de Rabi Ω_0 e os estados $|2\rangle$ e $|3\rangle$ estão acoplados ressonantemente por um laser de frequência de Rabi Ω_1 . O estado excitado $|3\rangle$ e o estado fundamental $|1\rangle$ estão acoplados por dois modos de uma cavidade com dessintonias δ e $-\delta$. Foram aplicadas transformações unitárias sobre o operador Hamiltoniano (3.1) e a aproximação da onda girante para obter um operador Hamiltoniano independente do tempo (3.15). A partir do Hamiltoniano que não depende explicitamente do tempo (3.20) foi construído o vetor de estado do sistema (3.41) para descrever a evolução unitária de um único átomo na cavidade. O Hamiltoniano (3.20) foi usado também para construir a equação mestre na forma de Lindblad do sistema (4.17) na presença de decaimento nos níveis atômicos e nos modos da cavidade. Depois de fazer o traço parcial nos estados atômicos da equação mestre (4.17) e tratar linearmente os campos da cavidade, foi obtida a equação que descreve a evolução temporal dos modos da cavidade (4.46), considerando as soluções estacionárias para os operadores de campo do tipo $\tilde{\rho}_{jk}$.

Foi obtida uma expressão analítica para a soma de variâncias $V(t)$ (3.58), para a evolução unitária no caso em que só um átomo esteja na cavidade considerando o estado inicial separável $|\varphi\rangle \otimes [S(r)|00\rangle]$. No gráfico (3.2) vemos como o estado inicial $|\varphi\rangle \otimes [S(r)|00\rangle]$. Para os modos de campo quantizado da cavidade no estado inicial o emaranhamento dos modos de campo quantizado da cavidade têm um comportamento periódico alcançando um valor mínimo e voltando para o valor inicial depois de um período. No gráfico (3.3) é possível observar que para alguns valores da razão Ω_1/Ω_0 o emaranhamento entre os modos de campo quantizado da cavidade pode desaparecer por um intervalo de tempo finito. No gráfico (3.4) vemos como a amplitude do valor médio do campo elétrico diminui quando a razão Ω_1/Ω_0 vai para 1. No gráfico (3.5) observamos como a amplitude do valor médio do quadrado do campo elétrico diminui quando a razão Ω_1/Ω_0 vai para 1. Como resultado temos que quando o estado inicial para os modos de campo quantizado da cavidade se aproxima para um estado tipo EPR a intensidade do campo elétrico vai para zero. No gráfico (3.6) vemos que quando o emaranhamento entre o átomo e o resto do sistema aumenta, o emaranhamento entre os modos de campo quantizado da cavidade diminui. No gráfico (3.7) vemos como quando o emaranhamento entre um dos modos de campo comprimido da cavidade e o resto do sistema aumenta o emaranhamento entre os modos de campo quantizado da cavidade diminui. Isto corresponde a uma transferência de emaranhamento. Podemos observar também que os estados associados a cada modo do campo

comprimido do estado inicial são separáveis.

Foi obtida uma expressão analítica para a soma de variâncias $V(t)$ (4.70) para a evolução não unitária dos modos da cavidade para um meio formado por N átomos, considerando o estado inicial geral $\tilde{\rho}_c(0)$ para a cavidade. No estudo do comportamento de nosso sistema foram considerados os estado iniciais para os modos de campo da cavidade $\tilde{\rho}_c(0) = |00\rangle\langle 00|$ (o estado vácuo de dois modos) e $\tilde{\rho}_c(0) = S(r)|00\rangle\langle 00|S^\dagger(r)$ (o estado do vácuo comprimido de dois modos). Para os cálculos numéricos foram usados os seguintes parâmetros, as razões entre as amplitudes de Rabi $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{5}{10}$, $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{7}{10}$, e $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} = \frac{9}{10}$, o produto entre o quadrado do parâmetro de acoplamento e o número de átomos $g^2N = 10\gamma^2$, os parâmetros de decaimento para a cavidade $\kappa = 0,01\gamma$ e $\kappa = 0,01\gamma$. A maioria das soluções vai para um valor assintoticamente estacionário em um tempo menor que $5\gamma^{-1}$ como pode ser visto nos gráficos (4.1) e (4.2). Foi estudada a solução assintoticamente estacionária de soma de variâncias $V(t)$ para o caso $\Omega_1/\Omega_0 < 1$. Neste caso mostrou-se que a solução estacionária sempre existe e o sistema vai para um valor estacionário V (4.79) quando $t \rightarrow \infty$. Como a solução assintoticamente estacionária não depende das condições iniciais, o critério proposto por (DUAN et al., 2000) [3] pode ser utilizado para o estudo do emaranhamento mesmo no caso que o estado inicial não seja um estado gaussiano. Da definição da fração χ (4.81) foi calculado o tempo t_χ , que diz quanto tempo demora para a soma de variâncias $V(t)$ se aproximar de um valor que possa ser considerado próximo a V . Com a expressão (4.82) foi mostrado que um aumento do número de átomos no meio assim como uma diminuição do parâmetro κ fazem que a soma de variâncias $V(t)$ se aproxime mais rapidamente ao valor assintoticamente estacionário V . Da análise da expressão (4.70) se mostrou que o valor assintoticamente estacionário V vai para 0 quando $\Omega_1/\Omega_0 \rightarrow 1$. Isto quer dizer que o emaranhamento máximo para variáveis contínuas pode ser aproximado na cavidade de dois modos aumentando o número dos átomos N , aumentando a qualidade da cavidade (diminuindo κ) e ajustando as intensidades dos lasers para que $\Omega_1/\Omega_0 \rightarrow 1$. Como este resultado é obtido para a solução assintoticamente estacionária da soma de variâncias $V(t)$, podemos nos aproximar do estado maximamente emaranhado para variáveis contínuas independentemente do estado inicial dos modos da cavidade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] HORODECKI, Pawel. Separability criterion and inseparable mixed states with positive partial transposition. *Phys. Lett. A* 232, 333 (1997)
- [2] CHENG, Guanling; HU, Xiangming; ZHONG, Wenxue. Einstein-Podolsky-Rosen entanglement via nonlinear processes enhanced by electromagnetically induced transparency. *J. Phys. B: Mol. Opt. Phys.* 42, 195503 (2009)
- [3] DUAN, Lu-Ming; GIEDKE, Géza; CIRAC, Juan; ZOLLER, Peter. Inseparability Criterion for Continuous Variable Systems. *Phys. Rev. Lett.* 84, 2722 (2000)
- [4] PAULISH, Vanessa; HAN, Rui; NG, Hui Khoon; ENGLERT, Berthod-Georg. Beyond adiabatic elimination: A hierarchy of approximations for multi-photon processes. *Eur. Phys. J. Plus* 129, 12 (2014)
- [5] SCULLY, Marlan; ZUBAIRY, Muhammad. *Quantum Optics*. Cambridge: Cambridge University Press (1997)
- [6] BREUER, Heinz; PETRUCCIONE, Francesco. *The Theory of Open Quantum Systems*. Oxford: Oxford University Press (2002)
- [7] ZOU, Jinhua. *Entanglement of three cavity fields via resonant interactions with dressed three-level atoms*. arXiv:1311.2172 [quant-ph] (2013)
- [8] BALLENTINE, Leslie. *Quantum Mechanics: A Modern Development*. Singapore: World Scientific Publishing (1998)
- [9] GREINER, Walter. *Quantum Mechanics Special Chapters*. Berlin: Springer-Verlag (1998)
- [10] NIELSEN, Michael; CHUANG, Isaac. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge: Cambridge University Press (2000)
- [11] GREINER, Walter. *Classical Electrodynamics*. New York: Springer-Verlag (1998)
- [12] GARDINER, Crispin; ZOLLER, Peter. *Quantum Noise*. Berlin: Springer-Verlag (1999)
- [13] SCHRÖDINGER, Erwin. Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik. *Naturwissenschaften* (1935)
- [14] EISNTEIN, Albert; PODOLSKY, Boris; ROSEN, Nathan. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?. *Phys. Rev.* 47, 777 (1935)
- [15] FEYNMAN, Richard. "Simulating Physics with Computers". *International Journal of Theoretical Physics* 21, 467 (1982)

- [16] DEUTSH, David. Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer. *Proceedings of the Royal Society A* 400, 1818 (1985)
- [17] BENNETT, Charles; WIESNER, Stephen. Communication via one- and two particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states. *Phys. Rev. Lett.* 69, 2881 (1992)
- [18] BENNETT, Charles; BRASSARD, Gilles; CRÉSPEAU, Claude; JOZSA, Richard; WOTHERS, William. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Phys. Rev. Lett.* 70, 1895 (1993)
- [19] TURCHETTE, Quentin; WOOD, Christopher; KING, Ben; MYATT, Chris; LEIFRIED, Dietrich; ITANO, Wayne; MONROE, Christopher; WINELAND, David. Deterministic Entanglement of Two Trapped Ion. *Phys. Rev. Lett.* 81, 3631 (1998)
- [20] BLAIS, Alexandre; HUANG, Ren-Shou; WALLRAFF, Andreas; GIRVIN, Steven; SCHÖLKOPF, Robert. Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture for quantum computation. *Phys. Rev. A* 69, 062320 (2004)
- [21] BRAUSTEIN, Samuel; VAN LOOCK, Peter. Quantum information with continuous variables. *Rev. Mod. Phys.* 77, 513 (2005)
- [22] IMAMOĞLU, Ataç; SCHMIDT, Helmut; WOODS, Gareth; DEUTSCH, M. Strongly Interacting Photons in a Nonlinear Cavity. *Phys. Rev. Lett.* 79, 1467 (1997)
- [23] OU, Zhe-Yu; PEREIRA, Sylvania; KIMBLE, H. Jeffrey; PENG, K. Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox for continuous variables. *Phys. Rev. Lett.* 68, 3663 (1992)
- [24] LI, Jingyan; HU, Xiangming. Enhancement of quantum correlations between Rabi sidebands via dressed population transfer. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 42, 055501 (2009)
- [25] VIDAL, Guifre; WERNER, Reinhard. A computable measure of entanglement. *Phys. Rev. A* 65, 032314 (2002)
- [26] SIMON, Ralph. Peres-Horodecki Separability Criterion for Continuous Variable Systems. *Phys. Rev. Lett.* 84, 2726 (2000)
- [27] CHENG, Guanling; CIRAC, ZOLLER, 1995 HU, Xiangming; ZHONG, Wenxue; LI, Qian. Two-channel interaction of squeeze-transformed modes with dressed atoms: Entanglement enhancement in four-wave mixing in three-level systems. *Phys. Rev. A* 78, 033811 (2008)
- [28] MÜCKE, Martin; FIGUEROA, Eden; BOCHMANN, Joerg; MURR, Carolin; RITTER, Sthephan; VILLAS-BOAS, Celso; REMPE, Gerhard. Electromagnetically induced transparency with single atoms in a cavity. *Nature* 465, 755 (2010)

- [29] LI, Gao-xiang; TAN, Hua-Tang; MACOVEI, Mihai. Enhancement of entanglement for two-mode fields generated from four-wave mixing with the help of the auxiliary atomic transition. *Phys. Rev. A* 76, 053827 (2007)
- [30] HAROCHE, Serge; BRUNE, Michael; RAIMOND, Jean-Michael. Trapping Atoms by the Vacuum Field in a Cavity. *Europhys. Lett.* 14, 19 (1991)
- [31] PERES, Asher. *Quantum Theory: Concepts and Methods*. New York: Kluwer Academic Publishers (1995)
- [32] PERES, Asher. Separability Criterion for Density Matrices. *Phys. Rev. Lett.* 77, 1413 (1996)
- [33] HORODECKI, Michal; HORODECKI, Pawel; HORODECKI, Ryszard. Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions. *Phys. Lett. A* 223, 1 (1996)
- [34] AUDRETSCH, Jürgen. *Entangled Systems: New Directions in Quantum Physics*. Weinheim: WILEY-VHC Verlag (2007)
- [35] IKRAM, Manzoor; LI, Gao-xiang; ZUBAIRY, M. Suhail. Entanglement generation in a two-mode quantum beat laser. *Phys. Rev. A* 76, 042317 (2007)
- [36] PIELAWA, Susanne; MORIGI, Giovanna; VITALI, David; DAVIDOVICH, Luiz. Generation of Einstein-Podolsky-Rosen-Entangled Radiation through an Atomic Reservoir. *Phys. Rev. Lett.* 98, 240401 (2007)
- [37] SCHMIDT, F; NÄGERL, H; LEIBFRIED, D; BLATT, R; BRUNE, M; RAIMOND, J; HAROCHE, S. "Cavity QED-Experiments for Quantum Information: Trapped Ions and Atoms in Cavities", in *The Physics of Quantum Information*. Berlin: Springer (2000)
- [38] CIRAC, Juan; ZOLLER, Peter. Quantum Computations with Cold Trapped Ions. *Phys. Rev. Lett.* 74, 4091 (1995)
- [39] YAMAMOTO, Yoshihisa; IMAMOĞLU, Ataç. *Mesoscopic quantum optics*. New York: John Wiley & Sons (1999)

APÊNDICES

APÊNDICE A - OPERADOR DE EVOLUÇÃO UNITÁRIA. CASO 2: $\frac{\Omega_1}{\Omega_0} > 1$

Para obter a representação matricial do operador Hamiltoniano (3.21) para um átomo ($N=1$) consideraremos as possíveis transições para escrever \tilde{H}_I numa estrutura de blocos. O Hamiltoniano para um átomo é dado por:

$$\tilde{H}_I = \hbar g_b \hat{\sigma}_{+0} \hat{b}_1 + \hat{b}_1^\dagger \hat{\sigma}_{0+} + \hat{\sigma}_{-0} \hat{b}_2 + \hat{b}_2^\dagger \hat{\sigma}_{0-}. \quad (5.1)$$

Considerando o estado $|00\rangle_r = S(r) |00\rangle$, podemos usar os operadores criação de campo comprimido para construir os vetores

$$|n_1 n_2\rangle_r = \frac{(\hat{b}_2^\dagger)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{(\hat{b}_1^\dagger)^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} |00\rangle_r. \quad (5.2)$$

Por simplicidade será omitido o índice r , então $|n_1 n_2\rangle_r \equiv |n_1 n_2\rangle$. O operador \tilde{H}_I pode ser representado em forma matricial usando a base produto formada pelos vetores $|k\rangle |n_1 n_2\rangle$ onde $k = +, 0, -$.

Como $\langle k', n'_1, n'_2 | \tilde{H}_I | k, n_1, n_2 \rangle \neq 0$ só para os estados $|+, n_1, n_2 + 1\rangle$, $|0, n_1 + 1, n_2 + 1\rangle$ e $|-, n_1 + 1, n_2\rangle$, temos que

$$\begin{aligned} \tilde{H}_I = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} & (\hbar g_b \sqrt{n_2 + 1} |+, n_1, n_2 + 1\rangle \langle 0, n_1 + 1, n_2 + 1| \\ & + \hbar g_b \sqrt{n_2 + 1} |0, n_1 + 1, n_2 + 1\rangle \langle +, n_1, n_2 + 1| \\ & + \hbar g_b \sqrt{n_1 + 1} |0, n_1 + 1, n_2 + 1\rangle \langle -, n_1 + 1, n_2| \\ & + \hbar g_b \sqrt{n_1 + 1} |-, n_1 + 1, n_2\rangle \langle 0, n_1 + 1, n_2 + 1|). \end{aligned} \quad (5.3)$$

A representação matricial do operador \tilde{H}_I é dada por

$$\tilde{H}_I = \begin{bmatrix} \tilde{H}_I(0,0) & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \tilde{H}_I(1,0) & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \tilde{H}_I(0,1) & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{H}_I(1,1) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

onde as matrizes $\tilde{H}_I(n_1, n_2)$ são definidas da forma

$$\tilde{H}_I(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} 0 & \hbar g_b \sqrt{n_1 + 1} & 0 \\ \hbar g_b \sqrt{n_1 + 1} & 0 & \hbar g_b \sqrt{n_2 + 1} \\ 0 & \hbar g_b \sqrt{n_2 + 1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Para determinar a evolução unitária de um átomo faremos uso da estrutura de blocos da matriz Hamiltoniana (5.4), como a matriz Hamiltoniana não depende explicitamente do tempo é possível escrever a matriz que representa o operador de evolução temporal na forma,

$$\tilde{U}(t) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \tilde{H}_I t \right] \quad (5.6)$$

a estrutura de blocos permite calcular cada bloco da matriz $\tilde{U}(t)$ de forma separada,

$$\tilde{U}(n_1, n_2, t) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \tilde{H}_I(n_1, n_2) t \right]. \quad (5.7)$$

Os autovalores de $\tilde{H}_I(n_1, n_2)$ (5.5) são,

$$\lambda_{1,2,3}(n_1, n_2) = \hbar g_a \{ -\sqrt{2 + n_1 + n_2}, 0, \sqrt{2 + n_1 + n_2} \}, \quad (5.8)$$

os autovetores tem a forma,

$$|\lambda_1(n_1, n_2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(2 + n_1 + n_2)}} \begin{bmatrix} \sqrt{1 + n_1} \\ -\sqrt{2 + n_1 + n_2} \\ \sqrt{1 + n_2} \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

$$|\lambda_2(n_1, n_2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2 + n_1 + n_2}} \begin{bmatrix} -\sqrt{1 + n_2} \\ 0 \\ \sqrt{1 + n_1} \end{bmatrix}, \quad (5.10)$$

$$|\lambda_3(n_1, n_2)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(2 + n_1 + n_2)}} \begin{bmatrix} \sqrt{1 + n_1} \\ \sqrt{2 + n_1 + n_2} \\ \sqrt{1 + n_2} \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

É possível agora calcular cada bloco (5.7) da matriz $\tilde{U}_I(t)$ na base dos autovetores (5.9), (5.10) e (5.11). Definindo $\tau = g_b(\sqrt{2 + n_1 + n_2})t$, obtemos,

$$\begin{aligned} \tilde{U}_I(n_1, n_2, \tau) = e^{i\tau} |\lambda_1(n_1, n_2)\rangle \langle \lambda_1(n_1, n_2)| + |\lambda_2(n_1, n_2)\rangle \langle \lambda_2(n_1, n_2)| \\ + e^{-i\tau} |\lambda_3(n_3, n_2)\rangle \langle \lambda_3(n_1, n_2)|, \end{aligned} \quad (5.12)$$

escrevendo o resultado anterior na representação matricial

$$\tilde{U}_I(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} V'_1 & V'_2 & V'_3 \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

onde,

$$V'_1 = \begin{bmatrix} \frac{(n_1 + 1)}{(2 + n_1 + n_2)} \cos \tau + \frac{(n_2 + 1)}{(2 + n_1 + n_2)} \\ -i \frac{\sqrt{n_1 + 1}}{\sqrt{2 + n_1 + n_2}} \sin \tau \\ \frac{\sqrt{n_1 + 1} \sqrt{n_2 + 1}}{(2 + n_1 + n_2)} (\cos \tau - 1) \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

$$V'_2 = \begin{bmatrix} -i \frac{\sqrt{n_1 + 1}}{\sqrt{2 + n_1 + n_2}} \sin \tau \\ \cos \tau \\ -i \frac{\sqrt{n_2 + 1}}{\sqrt{2 + n_1 + n_2}} \sin \tau \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

$$V'_3 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{n_1 + 1} \sqrt{n_2 + 1}}{(2 + n_1 + n_2)} (\cos \tau - 1) \\ -i \frac{\sqrt{n_2 + 1}}{\sqrt{2 + n_1 + n_2}} \sin \tau \\ \frac{(n_2 + 1)}{(2 + n_1 + n_2)} \cos \tau + \frac{(n_1 + 1)}{(2 + n_1 + n_2)} \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

O vetor de estado inicial $|\tilde{\psi}(0)\rangle$ será,

$$|\tilde{\psi}(0)\rangle = \sum_j \sum_{n_1, n_2} |j, n_1, n_2\rangle \langle j, n_1, n_2 | \tilde{\psi}(0)\rangle, \quad (5.17)$$

onde $j = +, 0, -$. Os vetores da base produto que evoluem no tempo são $|+, n_1, n_2 + 1\rangle$, $|0, n_1 + 1, n_2 + 1\rangle$, $|-, n_1 + 1, n_2\rangle$. Podemos então escrever o vetor de estado inicial,

$$\begin{aligned}
|\tilde{\psi}(0)\rangle &= \sum_k |k\rangle \langle k| \tilde{\psi}(0)\rangle + \sum_{n_1, n_2} \langle +, n_1, n_2 + 1 | \tilde{\psi}(0)\rangle |+, n_1, n_2 + 1\rangle \\
&\quad + \sum_{n_1, n_2} \langle 0, n_1 + 1, n_2 + 1 | \tilde{\psi}(0)\rangle |0, n_1 + 1, n_2 + 1\rangle \\
&\quad + \sum_{n_1, n_2} \langle -, n_1 + 1, n_2 | \tilde{\psi}(0)\rangle |-, n_1 + 1, n_2\rangle,
\end{aligned} \tag{5.18}$$

onde os estados $|k\rangle$ são todos aqueles estados da base produto que não evoluem no tempo.

O vetor de estado para um tempo t é,

$$|\tilde{\psi}(\tau)\rangle = \tilde{U}_I |\tilde{\psi}(0)\rangle, \tag{5.19}$$

como os estados $|k\rangle$ não evoluem no tempo temos que $\tilde{U}_I |k\rangle = |k\rangle$, então,

$$\begin{aligned}
|\tilde{\psi}(\tau)\rangle &= \sum_k |k\rangle \langle k| \tilde{\psi}(0)\rangle + \sum_{n_1, n_2} \langle +, n_1, n_2 + 1 | \tilde{\psi}(\tau)\rangle |+, n_1, n_2 + 1\rangle \\
&\quad + \sum_{n_1, n_2} \langle 0, n_1 + 1, n_2 + 1 | \tilde{\psi}(\tau)\rangle |0, n_1 + 1, n_2 + 1\rangle \\
&\quad + \sum_{n_1, n_2} \langle -, n_1 + 1, n_2 | \tilde{\psi}(\tau)\rangle |-, n_1 + 1, n_2\rangle,
\end{aligned} \tag{5.20}$$

onde,

$$\begin{aligned}
\langle +, n_1, n_2 + 1 | \tilde{\psi}(\tau)\rangle &= \langle +, n_1, n_2 + 1 | \tilde{\psi}(0)\rangle \left[\frac{(n_1 + 1)}{(2 + n_1 + n_2)} \cos \tau + \frac{(n_2 + 1)}{(2 + n_1 + n_2)} \right] \\
&\quad + \langle 0, n_1 + 1, n_2 + 1 | \tilde{\psi}(0)\rangle (-i) \frac{\sqrt{n_1 + 1}}{\sqrt{2 + n_1 + n_2}} \sin \tau \\
&\quad + \langle -, n_1 + 1, n_2 | \tilde{\psi}(0)\rangle \frac{\sqrt{n_1 + 1} \sqrt{n_2 + 1}}{(2 + n_1 + n_2)} (\cos \tau - 1)
\end{aligned} \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned}
\langle 0, n_1 + 1, n_2 + 1 | \tilde{\psi}(\tau)\rangle &= \langle +, n_1, n_2 + 1 | \tilde{\psi}(0)\rangle (-i) \frac{\sqrt{n_1 + 1}}{\sqrt{2 + n_1 + n_2}} \sin \tau \\
&\quad + \langle 0, n_1 + 1, n_2 + 1 | \tilde{\psi}(0)\rangle \cos \tau \\
&\quad + \langle -, n_1 + 1, n_2 | \tilde{\psi}(0)\rangle (-i) \frac{\sqrt{n_2 + 1}}{\sqrt{2 + n_1 + n_2}} \sin \tau
\end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned}
\langle -, n_1 + 1, n_2 | \tilde{\psi}(\tau) \rangle &= \langle +, n_1, n_2 + 1 | \tilde{\psi}(0) \rangle \frac{\sqrt{n_1 + 1} \sqrt{n_2 + 1}}{(2 + n_1 + n_2)} (\cos \tau - 1) \\
&\quad + \langle 0, n_1 + 1, n_2 + 1 | \tilde{\psi}(0) \rangle (-i) \frac{\sqrt{n_2 + 1}}{\sqrt{2 + n_1 + n_2}} \sin \tau \\
&\quad + \langle -, n_1 + 1, n_2 | \tilde{\psi}(0) \rangle \left[\frac{(n_2 + 1)}{(2 + n_1 + n_2)} \cos \tau + \frac{(n_1 + 1)}{(2 + n_1 + n_2)} \right]
\end{aligned} \tag{5.23}$$

lembrando que $\tau = g_b(\sqrt{2 + n_1 + n_2})t$. O estado (5.20) representa o sistema para um tempo arbitrário t , esta expressão é possível estudar a dinâmica do emaranhamento entre dois modos de campo quantizado no sistema para o caso $\Omega_1/\Omega_0 > 1$.

APÊNDICE B - OPERADORES NO ESPAÇO ASSOCIADO AOS MODOS DE CAMPO QUANTIZADO DA CAVIDADE

Os operadores $\langle 3^{(j)} | \hat{\rho} | 3^{(j)} \rangle$, $\langle 3^{(j)} | \hat{\rho} | k^{(j)} \rangle$ e $\langle k^{(j)} | \hat{\rho} | 3^{(j)} \rangle$ (onde $k = +, -, 0$) que atuam no espaço de Hilbert associado aos modos de campo quantizado da cavidade tem a forma,

$$\begin{aligned}
\langle 3^{(j)} | \hat{\rho} | 3^{(j)} \rangle &= \frac{\sin^2 \theta}{2} \left(\tilde{\rho}_{++}^{(j)} + e^{i\Omega_R t} \tilde{\rho}_{-+}^{(j)} + e^{-i\Omega_R t} \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} + \tilde{\rho}_{--}^{(j)} \right) + \cos^2 \theta \tilde{\rho}_{00}^{(j)} \\
&\quad + \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{2}} \left(e^{-\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} + e^{\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{-0}^{(j)} + e^{\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{0+}^{(j)} + e^{-\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} \right),
\end{aligned} \tag{5.24}$$

$$\langle 3^{(j)} | \hat{\rho} | +^{(j)} \rangle = \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \left(\tilde{\rho}_{++}^{(j)} + e^{i\Omega_R t} \tilde{\rho}_{-+}^{(j)} \right) + \cos \theta e^{\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{0+}^{(j)}, \tag{5.25a}$$

$$\langle +^{(j)} | \hat{\rho} | 3^{(j)} \rangle = \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \left(\tilde{\rho}_{++}^{(j)} + e^{-i\Omega_R t} \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} \right) + \cos \theta e^{-\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{+0}^{(j)}, \tag{5.25b}$$

$$\langle 3^{(j)} | \hat{\rho} | 0^{(j)} \rangle = \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \left(e^{-\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} + e^{\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{-0}^{(j)} \right) + \cos \theta \tilde{\rho}_{00}^{(j)}, \tag{5.25c}$$

$$\langle 0^{(j)} | \hat{\rho} | 3^{(j)} \rangle = \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \left(e^{\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{0+}^{(j)} + e^{-\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} \right) + \cos \theta \tilde{\rho}_{00}^{(j)}, \tag{5.25d}$$

$$\langle 3^{(j)} | \hat{\rho} | -^{(j)} \rangle = \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\Omega_R t} \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} + \tilde{\rho}_{--}^{(j)} \right) + \cos \theta e^{-\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{0-}^{(j)}, \tag{5.25e}$$

$$\langle -^{(j)} | \hat{\rho} | 3^{(j)} \rangle = \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \left(e^{i\Omega_R t} \tilde{\rho}_{-+}^{(j)} + \tilde{\rho}_{--}^{(j)} \right) + \cos \theta e^{\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{-0}^{(j)}. \tag{5.25f}$$

onde $\Omega_R = \sqrt{\Omega_0^2 + \Omega_1^2}$.

APÊNDICE C - OPERADORES $\tilde{\rho}_{kk'}^{(j)} = \langle k_j | \tilde{\rho} | k'_j \rangle$

As derivadas temporais dos operadores $\tilde{\rho}_{kk'}^{(j)} = \langle k_j | \tilde{\rho} | k'_j \rangle$ (onde $j = 1, 2, \dots, N$ e $k = +, -, 0$) tem a forma,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{00}^{(j)} = & -ig_a(\hat{b}_2 \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} + \hat{b}_1 \tilde{\rho}_{-0}^{(j)} - \tilde{\rho}_{0+}^{(j)} \hat{b}_2^\dagger - \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} \hat{b}_1^\dagger) + \gamma \left\{ \sin^2 \theta \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \left(\tilde{\rho}_{++}^{(j)} + e^{i\Omega_R t} \tilde{\rho}_{-+}^{(j)} \right. \right. \right. \\
& + e^{-i\Omega_R t} \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} + \tilde{\rho}_{--}^{(j)} \left. \left. \left. + \cos^2 \theta \tilde{\rho}_{00}^{(j)} + \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{2}} \left(e^{-\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} \right. \right. \right. \right. \\
& + e^{\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{-0}^{(j)} + e^{\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{0+}^{(j)} + e^{-\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} \left. \left. \left. \right] \right. \right. \\
& - \cos \theta \left[\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \left(e^{-\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} + e^{\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{-0}^{(j)} \right) + \cos \theta \tilde{\rho}_{00}^{(j)} \right] \\
& \left. \left. - \cos \theta \left[\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \left(e^{\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{0+}^{(j)} + e^{-\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} \right) + \cos \theta \tilde{\rho}_{00}^{(j)} \right] \right\} \right. \\
& + \sum_{l=1,2} \frac{\kappa}{2} \left[N_0 (\hat{b}_l^\dagger \tilde{\rho}_{00}^{(j)} \hat{b}_l - \tilde{\rho}_{00}^{(j)} \hat{b}_l \hat{b}_l^\dagger) + (N_0 + 1) (\hat{b}_l \tilde{\rho}_{00}^{(j)} \hat{b}_l^\dagger - \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l \tilde{\rho}_{00}^{(j)}) \right] \\
& + \kappa M (\hat{b}_1 \tilde{\rho}_{00}^{(j)} \hat{b}_2 + \hat{b}_2 \tilde{\rho}_{00}^{(j)} \hat{b}_1 - \hat{b}_1 \hat{b}_2 \tilde{\rho}_{00}^{(j)} - \tilde{\rho}_{00}^{(j)} \hat{b}_1 \hat{b}_2) \\
& + \left\{ \sum_{l=1,2} \frac{\kappa}{2} \left[N_0 (\hat{b}_l^\dagger \tilde{\rho}_{00}^{(j)} \hat{b}_l - \tilde{\rho}_{00}^{(j)} \hat{b}_l \hat{b}_l^\dagger) + (N_0 + 1) (\hat{b}_l \tilde{\rho}_{00}^{(j)} \hat{b}_l^\dagger - \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l \tilde{\rho}_{00}^{(j)}) \right] \right. \\
& \left. + \kappa M (\hat{b}_1 \tilde{\rho}_{00}^{(j)} \hat{b}_2 + \hat{b}_2 \tilde{\rho}_{00}^{(j)} \hat{b}_1 - \hat{b}_1 \hat{b}_2 \tilde{\rho}_{00}^{(j)} - \tilde{\rho}_{00}^{(j)} \hat{b}_1 \hat{b}_2) \right\}^\dagger, \tag{5.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{--}^{(j)} = & -ig_a(\hat{b}_1^\dagger \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} - \tilde{\rho}_{-0}^{(j)} \hat{b}_1) + \gamma \left\{ \frac{(\cos^2 \theta + 1)}{2} \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \left(\tilde{\rho}_{++}^{(j)} + e^{i\Omega_R t} \tilde{\rho}_{-+}^{(j)} \right. \right. \right. \\
& + e^{-i\Omega_R t} \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} + \tilde{\rho}_{--}^{(j)} \left. \left. \left. + \cos^2 \theta \tilde{\rho}_{00}^{(j)} + \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{2}} \left(e^{-\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} \right. \right. \right. \right. \\
& + e^{\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{-0}^{(j)} + e^{\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{0+}^{(j)} + e^{-\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} \left. \left. \left. \right] \right. \right. \\
& - \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \left[\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\Omega_R t} \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} + \tilde{\rho}_{--}^{(j)} \right) + \cos \theta e^{-\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} \right] \\
& \left. \left. - \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \left[\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \left(e^{i\Omega_R t} \tilde{\rho}_{-+}^{(j)} + \tilde{\rho}_{--}^{(j)} \right) + \cos \theta e^{\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{-0}^{(j)} \right] \right\} \tag{5.27} \\
& + \sum_{l=1,2} \frac{\kappa}{2} \left[N_0 (\hat{b}_l^\dagger \tilde{\rho}_{--}^{(j)} \hat{b}_l - \tilde{\rho}_{--}^{(j)} \hat{b}_l \hat{b}_l^\dagger) + (N_0 + 1) (\hat{b}_l \tilde{\rho}_{--}^{(j)} \hat{b}_l^\dagger - \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l \tilde{\rho}_{--}^{(j)}) \right] \\
& + \kappa M (\hat{b}_1 \tilde{\rho}_{--}^{(j)} \hat{b}_2 + \hat{b}_2 \tilde{\rho}_{--}^{(j)} \hat{b}_1 - \hat{b}_1 \hat{b}_2 \tilde{\rho}_{--}^{(j)} - \tilde{\rho}_{--}^{(j)} \hat{b}_1 \hat{b}_2) \\
& + \left\{ \sum_{l=1,2} \frac{\kappa}{2} \left[N_0 (\hat{b}_l^\dagger \tilde{\rho}_{--}^{(j)} \hat{b}_l - \tilde{\rho}_{--}^{(j)} \hat{b}_l \hat{b}_l^\dagger) + (N_0 + 1) (\hat{b}_l \tilde{\rho}_{--}^{(j)} \hat{b}_l^\dagger - \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l \tilde{\rho}_{--}^{(j)}) \right] \right. \\
& \left. + \kappa M (\hat{b}_1 \tilde{\rho}_{--}^{(j)} \hat{b}_2 + \hat{b}_2 \tilde{\rho}_{--}^{(j)} \hat{b}_1 - \hat{b}_1 \hat{b}_2 \tilde{\rho}_{--}^{(j)} - \tilde{\rho}_{--}^{(j)} \hat{b}_1 \hat{b}_2) \right\}^\dagger,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} = & -ig_a(\hat{b}_2^\dagger \tilde{\rho}_{00}^{(j)} - \tilde{\rho}_{++}^{(j)} \hat{b}_2^\dagger - \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} \hat{b}_1^\dagger) + \gamma \left\{ -\frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{2}} \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \left(e^{\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{++}^{(j)} \right. \right. \right. \\
& + e^{\frac{3i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{-+}^{(j)} + e^{-\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} + e^{\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{--}^{(j)} \left. \left. \left. + \cos^2 \theta e^{\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{00}^{(j)} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{2}} \left(\tilde{\rho}_{+0}^{(j)} + e^{i\Omega_R t} \tilde{\rho}_{-0}^{(j)} e^{i\Omega_R t} \tilde{\rho}_{0+}^{(j)} + \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} \right) \right] \right. \\
& \left. - \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \left[\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \left(\tilde{\rho}_{+0}^{(j)} + e^{i\Omega_R t} \tilde{\rho}_{-0}^{(j)} \right) + \cos \theta e^{\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{00}^{(j)} \right] \right. \\
& \left. - \cos \theta \left[\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \left(e^{\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{++}^{(j)} + e^{-\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} \right) + \cos \theta \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} \right] \right\} \quad (5.28) \\
& + \sum_{l=1,2} \frac{\kappa}{2} \left[N_0 (\hat{b}_l^\dagger \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} \hat{b}_l - \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} \hat{b}_l \hat{b}_l^\dagger) + (N_0 + 1) (\hat{b}_l \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} \hat{b}_l^\dagger - \hat{b}_l^\dagger \tilde{\rho}_{+0}^{(j)}) \right] \\
& + \kappa M (\hat{b}_1 \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} \hat{b}_2 + \hat{b}_2 \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} \hat{b}_1 - \hat{b}_1 \hat{b}_2 \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} - \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} \hat{b}_1 \hat{b}_2) \\
& + \left\{ \sum_{l=1,2} \frac{\kappa}{2} \left[N_0 (\hat{b}_l^\dagger \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} \hat{b}_l - \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} \hat{b}_l \hat{b}_l^\dagger) + (N_0 + 1) (\hat{b}_l \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} \hat{b}_l^\dagger - \hat{b}_l^\dagger \tilde{\rho}_{+0}^{(j)}) \right] \right. \\
& \left. + \kappa M (\hat{b}_1 \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} \hat{b}_2 + \hat{b}_2 \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} \hat{b}_1 - \hat{b}_1 \hat{b}_2 \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} - \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} \hat{b}_1 \hat{b}_2) \right\}^\dagger,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} = & -ig_a(\hat{b}_2 \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} + \hat{b}_1 \tilde{\rho}_{--}^{(j)} - \tilde{\rho}_{00}^{(j)} \hat{b}_1) + \gamma \left\{ -\frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{2}} \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \left(e^{\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{++}^{(j)} \right. \right. \right. \\
& + e^{\frac{3i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{-+}^{(j)} + e^{-\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} + e^{\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{--}^{(j)} \left. \left. \left. + \cos^2 \theta e^{\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{00}^{(j)} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{2}} \left(\tilde{\rho}_{+0}^{(j)} + e^{i\Omega_R t} \tilde{\rho}_{-0}^{(j)} + e^{i\Omega_R t} \tilde{\rho}_{0+}^{(j)} + \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} \right) \right] \right. \\
& \left. - \cos \theta \left[\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \left(e^{-\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} + e^{\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{--}^{(j)} \right) + \cos \theta \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} \right] \right. \\
& \left. - \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \left[\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \left(e^{i\Omega_R t} \tilde{\rho}_{0+}^{(j)} + \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} \right) + \cos \theta e^{\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{00}^{(j)} \right] \right\} \quad (5.29) \\
& + \sum_{l=1,2} \frac{\kappa}{2} \left[N_0 (\hat{b}_l^\dagger \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} \hat{b}_l - \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} \hat{b}_l \hat{b}_l^\dagger) + (N_0 + 1) (\hat{b}_l \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} \hat{b}_l^\dagger - \hat{b}_l^\dagger \tilde{\rho}_{0-}^{(j)}) \right] \\
& + \kappa M (\hat{b}_1 \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} \hat{b}_2 + \hat{b}_2 \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} \hat{b}_1 - \hat{b}_1 \hat{b}_2 \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} - \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} \hat{b}_1 \hat{b}_2) \\
& + \left\{ \sum_{l=1,2} \frac{\kappa}{2} \left[N_0 (\hat{b}_l^\dagger \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} \hat{b}_l - \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} \hat{b}_l \hat{b}_l^\dagger) + (N_0 + 1) (\hat{b}_l \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} \hat{b}_l^\dagger - \hat{b}_l^\dagger \tilde{\rho}_{0-}^{(j)}) \right] \right. \\
& \left. + \kappa M (\hat{b}_1 \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} \hat{b}_2 + \hat{b}_2 \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} \hat{b}_1 - \hat{b}_1 \hat{b}_2 \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} - \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} \hat{b}_1 \hat{b}_2) \right\}^\dagger,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} = & -ig_a(\hat{b}_2^\dagger \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} - \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} \hat{b}_1) + \gamma \left\{ -\frac{\sin^2 \theta}{2} \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \left(e^{i\Omega_R t} \tilde{\rho}_{++}^{(j)} + e^{2i\Omega_R t} \tilde{\rho}_{-+}^{(j)} + \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} \right. \right. \right. \\
& + e^{i\Omega_R t} \tilde{\rho}_{--}^{(j)} \left. \left. \left. + \cos^2 \theta e^{i\Omega_R t} \tilde{\rho}_{00}^{(j)} + \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{2}} \left(e^{\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} + e^{\frac{3i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + e^{\frac{3i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{0+}^{(j)} + e^{\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} \right) \right] \right. \\
& - \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \left[\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \left(\tilde{\rho}_{+-}^{(j)} + e^{i\Omega_R t} \tilde{\rho}_{--}^{(j)} \right) + \cos \theta e^{\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{0-}^{(j)} \right] \\
& \left. - \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \left[\frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} \left(e^{i\Omega_R t} \tilde{\rho}_{++}^{(j)} + \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} \right) + \cos \theta e^{\frac{i}{2}\Omega_R t} \tilde{\rho}_{+0}^{(j)} \right] \right\} \\
& + \sum_{l=1,2} \frac{\kappa}{2} \left[N_0 (\hat{b}_l^\dagger \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} \hat{b}_l - \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} \hat{b}_l \hat{b}_l^\dagger) + (N_0 + 1) (\hat{b}_l \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} \hat{b}_l^\dagger - \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l \tilde{\rho}_{+-}^{(j)}) \right] \\
& + \kappa M (\hat{b}_1 \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} \hat{b}_2 + \hat{b}_2 \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} \hat{b}_1 - \hat{b}_1 \hat{b}_2 \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} - \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} \hat{b}_1 \hat{b}_2) \\
& + \left\{ \sum_{l=1,2} \frac{\kappa}{2} \left[N_0 (\hat{b}_l^\dagger \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} \hat{b}_l - \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} \hat{b}_l \hat{b}_l^\dagger) + (N_0 + 1) (\hat{b}_l \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} \hat{b}_l^\dagger - \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l \tilde{\rho}_{+-}^{(j)}) \right] \right. \\
& \left. + \kappa M (\hat{b}_1 \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} \hat{b}_2 + \hat{b}_2 \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} \hat{b}_1 - \hat{b}_1 \hat{b}_2 \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} - \tilde{\rho}_{+-}^{(j)} \hat{b}_1 \hat{b}_2) \right\}^\dagger.
\end{aligned} \tag{5.30}$$

APÊNDICE D - OPERADORES DENSIDADE DOS SUBSISTEMAS

O operador $\tilde{\rho}_A(\tau)$ que descreve o estado do átomo é obtido fazendo o traço sobre os estados dos modos de campo comprimido da cavidade,

$$\tilde{\rho}_A(\tau) = \text{Tr} [\tilde{\rho}], \tag{5.31}$$

onde $\tilde{\rho}$ é o operador (3.52) que representa o estado do sistema átomo-modos de campo. O operador $\tilde{\rho}_A(\tau)$ tem a forma,

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_A(\tau) = & \left(|\alpha_+|^2 + \frac{1}{2} |\alpha_0|^2 \sin^2 \tau \right) |+\rangle \langle +| + \left(|\alpha_-|^2 + \frac{1}{2} |\alpha_0|^2 \sin^2 \tau \right) |-\rangle \langle -| \\
& + |\alpha_0|^2 \cos^2 \tau |0\rangle \langle 0| + \alpha_+ \alpha_-^* |+\rangle \langle -| + \alpha_- \alpha_+^* |-\rangle \langle +| \\
& + \alpha_+ \alpha_0^* \cos \tau |+\rangle \langle 0| + \alpha_0 \alpha_+^* \cos \tau |0\rangle \langle +| \\
& + \alpha_- \alpha_0^* \cos \tau |-\rangle \langle 0| + \alpha_0 \alpha_-^* \cos \tau |0\rangle \langle -|
\end{aligned} \tag{5.32}$$

O operador $\tilde{\rho}_A(\tau)$ que descreve o estado do modo de campo comprimido j (onde $j=1,2$) é obtido fazendo o traço sobre os estados do outro modo de campo comprimido,

$$\tilde{\rho}_{c_1}(\tau) = \text{Tr} [\tilde{\rho}_c(\tau)], \tag{5.33}$$

onde $\tilde{\rho}_c(\tau)$ é o operador (3.54) que representa o estado dos modos de campo campo comprimido. O operador $\tilde{\rho}_{c_1}(\tau)$ tem a forma,

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{c_1}(\tau) = \tilde{\rho}_{c_2}(\tau) = & \left(1 - \frac{1}{2}|\alpha_0|^2 \sin^2 \tau \right) |0\rangle \langle 0| + \frac{1}{2}|\alpha_0|^2 \sin^2 \tau |1\rangle \langle 1| \\ & + \frac{i}{\sqrt{2}}\alpha_+\alpha_0^* \sin \tau |0\rangle \langle 1| - \frac{i}{\sqrt{2}}\alpha_0\alpha_+^* \sin \tau |1\rangle \langle 0| \end{aligned} \quad (5.34)$$