



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

IVAN JOSE COSER

**EQUAÇÕES ALGÉBRICAS POLINOMIAIS DE 3º GRAU OU
SUPERIOR:
SOLUCIONANDO PROBLEMAS COM AUXÍLIO DE
MÉTODOS NUMÉRICOS**

Londrina
2014

IVAN JOSÉ COSER

**EQUAÇÕES ALGÉBRICAS POLINOMIAIS DE 3º GRAU OU
SUPERIOR:
SOLUCIONANDO PROBLEMAS COM AUXÍLIO DE
MÉTODOS NUMÉRICOS**

Dissertação apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Nível de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientadora: Profa Dra. Neyva Maria Lopes Romeiro.

Londrina
2014

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca
Central da Universidade Estadual de Londrina**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

C834e Coser, Ivan José.
Equações algébricas polinomiais de 3º grau ou superior: solucionando problemas com auxílio de métodos numéricos / Ivan José Coser. – Londrina, 2014.
108 f. : il.

Orientador: Neyva Maria Lopes Romeiro.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2014.
Inclui bibliografia.

1. Matemática (Ensino médio) – Estudo e ensino – Teses. 2. Álgebra – Teses. Equações – Teses. 4. Polinômios – Teses. 5. Análise numérica – Teses. I. Romeiro, Neyva Maria Lopes. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Sociedade Brasileira de Matemática. IV. Título.

CDU 51:37.02

IVAN JOSÉ COSER

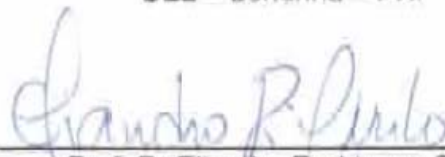
**EQUAÇÕES ALGÉBRICAS POLINOMIAIS DE 3º GRAU OU
SUPERIOR:
SOLUCIONANDO PROBLEMAS COM AUXÍLIO DE MÉTODOS
NUMÉRICOS**

Dissertação apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Nível de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Matemática.

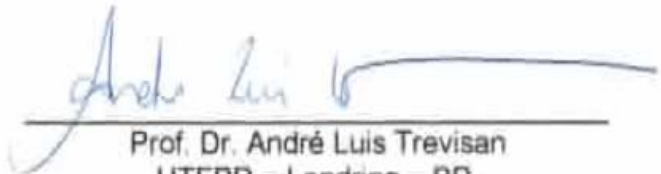
BANCA EXAMINADORA



Prof.ª Dra Neyva Maria Lopes Romeiro
UEL – Londrina – PR.



Prof. Dr Ellandro Rodrigues Cirilo
UEL – Londrina – PR.



Prof. Dr. André Luis Trevisan
UTFPR – Londrina – PR.

Londrina, 05 de fevereiro de 2014.

Dedico este trabalho primeiramente à DEUS pelas bênçãos concedidas ao longo de nossa vida, aos meus pais, minha irmã, minha esposa e meu filho; pelo incentivo, compreensão e apoio em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

À DEUS pela sua infinita bondade e pelo dom da vida permitindo, assim, a realização deste trabalho.

Agradeço à minha orientadora e professora Neyva Maria Lopes Romeiro, pelas orientações, pela paciência e amizade durante a realização desta pesquisa.

Aos professores Eliandro Rodrigues Cirilo e André Luis Trevisan, membros da banca, que apresentaram importantes contribuições para a conclusão deste trabalho.

Aos professores do PROFMAT, que, por meio de seus ensinamentos contribuíram para meu crescimento intelectual e profissional.

Aos colegas do PROFMAT com os quais convivi, meus agradecimentos pelo apoio e colaboração em todos os momentos. Em especial, aos companheiros André, Alceu, Bacarin e Chiréia.

Aos meus pais, Jenuir e Gilda, que sempre me apoiaram e incentivaram meus estudos.

À minha irmã Alessandra, a qual tenho muito amor e carinho.

À minha esposa Andréa e ao meu filho João Henrique, pela compreensão, preocupação, carinho e amor demonstrado ao longo dos anos.

À direção geral do Câmpus Apucarana da UTFPR, pelo apoio e incentivo durante o desenvolvimento do curso.

Por fim agradeço à CAPES, pelo aporte financeiro.

"A Álgebra é generosa: frequentemente ela dá mais do que se lhe pediu"

D'Alembert

COSER, Ivan José. **Equações Algébricas Polinomiais de 3º Grau ou Superior: Solucionando problemas com auxílio de métodos numéricos.** 2014.108 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo descrever uma proposta de atividades que envolvem o estudo das equações algébricas polinomiais. A ideia é descrever uma proposta de atividades para os estudantes do Ensino Médio envolvendo o conteúdo de equações algébricas polinomiais. Dessa forma, a intenção é realizar uma abordagem diferenciada das equações algébricas polinomiais de 3º grau – ou superior – a partir da resolução numérica de alguns problemas que podem ser associados às equações. Inicialmente, realizou-se um levantamento bibliográfico para reunir elementos históricos que permitem identificar o surgimento da Álgebra e, conseqüentemente, das equações. Após tal contextualização histórica descreve-se uma sequência de definições, teoremas e resultados que servem de referencial teórico para o estudo e resolução de equações algébricas polinomiais. Em destaque, apresenta-se a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra que serviu de alicerce para o surgimento de muitos outros resultados aplicáveis à resolução de equações algébricas polinomiais. Para a elaboração da proposta de atividades apresentam-se algumas regras, assim como características e informações a respeito de três métodos numéricos considerados mais elementares. Os métodos numéricos apresentados podem ser facilmente aplicados no estudo de equações algébricas polinomiais no Ensino Médio, pois não exigem conceitos e conhecimentos além desse nível de ensino. Por fim, descreve-se a proposta de trabalho contendo diversas atividades com as quais o professor de Matemática do Ensino Médio pode desenvolver um trabalho diferenciado com seus alunos, proporcionando um estudo mais completo e aprofundado das equações algébricas polinomiais. Nesse contexto, espera-se que a proposta de trabalho apresentada estimule os professores de Matemática do Ensino Médio a realizarem essa abordagem diferenciada das equações algébricas polinomiais de 3º grau ou superior, pois acredita-se que com essa abordagem ocorram reflexos positivos no processo de ensino e aprendizagem das equações e da Matemática.

Palavras-chave: Equações algébricas polinomiais. Métodos numéricos. Ensino médio.

COSER, Ivan José. **Algebraic Equations Polynomial 3rd Degree or Higher: Troubleshooting with the help of numerical methods**. 2014. 108 p. Dissertation (Professional Masters in Mathematics in National Network) – State University of Londrina, Londrina, 2014.

ABSTRACT

The following study has as a goal an activities proposal based on the study of polynomial algebraic equations. The idea is to describe a proposal of activities for high school students involving the contents of polynomial algebraic equations. The intention is to achieve a differentiated approach of polynomial algebraic equations 3rd degree - or higher - from numerical solution of some mathematical problems that can be associated with the equations. Initially, it was performed a bibliographic research to gather historical information in order to identify the emergence of Algebra and hence the equations. After this historical overview, it was described a sequence of definitions, theorems and results that were used as the theoretical referential for the study and solution of polynomial algebraic equations. Featured, the authors presented a demonstration of the Fundamental Theorem of Algebra which was the foundation for the emergence of many others applicable results to the solution of polynomial algebraic equations. For the preparation of the proposed activities were presented some rules, as well as characteristics and information about three numerical methods considered elementary. The numerical methods presented can be easily applied in the study of polynomial algebraic equations in high school, since they don't require concepts and knowledge beyond that level of education. Finally, we described the proposed work containing various activities in which the Middle School Math teacher can develop a differentiated work with their students, providing a more complete and deep study of polynomial algebraic equations. In this context, it is expected the work proposal presented encourages high school mathematics teachers to perform this differentiated approach of polynomial algebraic equations 3rd degree or higher. It is believed using this approach a positive effects can be reached in the teaching process and learning of mathematics and equations.

Keywords: Algebraic polynomial equations. Numerical methods. High school.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Tablete Babilônico	21
Figura 2 – Papiro de Rhind ou Papiro de Ahmes	22
Figura 3 – Al – Khwarizmi.....	24
Figura 4 – Círculo de centro z_0 e raio r	32
Figura 5 – Representação gráfica de $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 6x$	42
Figura 6 – Representação gráfica de $g(x) = -x^3 + x - 2$	42
Figura 7 – Representação gráfica de um polinômio de grau 3 com três raízes reais simples.....	45
Figura 8 – Representação gráfica de um polinômio de grau 4 com duas raízes reais simples e uma raiz dupla	45
Figura 9 – Representação gráfica de um polinômio de grau 3 com uma única raiz real	46
Figura 10 – Representação gráfica de um polinômio de grau 2 com duas raízes reais simples.....	46
Figura 11 – Representação gráfica de um polinômio de grau 2 que não possui raízes reais	47
Figura 12 – Representação gráfica de um polinômio de grau 5 com três raízes reais simples e raiz real dupla	47
Figura 13 – Representação gráfica de $P(x) = 1,5x^4 - 1,8x^3 - 5,2x^2 + 3,2x + 2,1$	55
Figura 14 – Interpretação geométrica do método da Bissecção	56
Figura 15 – Representação gráfica de $P(x) = -2x^3 + x^2 + 3$	58
Figura 16 – Interpretação geométrica do método da Falsa Posição	60
Figura 17 – Interpretação geométrica do método da Secante.	63
Figura 18 – Cubo de volume $V = 1$	67
Figura 19 – Cubo de volume $V = 2$	67
Figura 20 – Representação da raiz da equação $x^3 - 2 = 0$	68
Figura 21 – Trissecção do ângulo de 180°	71
Figura 22 – Representação das raízes reais da equação (48).....	73
Figura 23 – Quadrado de área = 1	76

Figura 24 – Círculo de área ≈ 1	76
Figura 25 – Representação gráfica de $x^2 - \pi$	77
Figura 26 – Representação gráfica da equação $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$	79
Figura 27 – Cartolina inicial	80
Figura 28 – Cartolina após a retirada dos quadrados de cada canto	80
Figura 29 – Representação gráfica da função $V(h) = 4h^3 - 18h^2 + 20h$	81
Figura 30 – Representação gráfica de $V(h) = 4$	82
Figura 31 – Representação gráfica de $P(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 1$	86
Figura 32 – Representação gráfica de $P(x) = x^3 - 5$	89

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Exemplos de equações algébricas e equações não algébricas	29
Quadro 2 – Exemplos de equações algébricas polinomiais	30
Quadro 3 – Coeficientes de $Q_1(x)$ e $R_1(x)$ após a deflação de $P(x)$ por $(x - 1)$	53
Quadro 4 – Coeficientes de $Q_2(x)$ e $R_2(x)$ após a deflação de $P(x)$ por $(x - 2)$	53
Quadro 5 – Coeficientes de $Q_3(x)$ e $R_3(x)$ após a deflação de $P(x)$ por $(x - 3)$	53
Quadro 6 – Aproximações da raiz real de $P(x) = -2x^3 + x^2 + 3 = 0$ contida no intervalo $[1,2]$ obtidas com auxílio do método da Bisseção e planilha eletrônica	59
Quadro 7 – Aproximações da raiz real de $P(x) = -2x^3 + x^2 + 3 = 0$ contida no intervalo $[1,2]$ obtidas com auxílio do método da Falsa Posição e planilha eletrônica.....	61
Quadro 8 – Aproximações da raiz real de contida no intervalo $[1,2]$ obtidas com auxílio do método da Secante e planilha eletrônica	64
Quadro 9 – Aproximações da solução do problema da duplicação do cubo obtidas com auxílio do método da Bisseção e a planilha eletrônica.....	68
Quadro 10 – Aproximações da raiz real da equação $V(h) = 4$ contida no intervalo $[0,1]$ obtidas com auxílio do método da Falsa Posição e a planilha eletrônica.....	83
Quadro 11 – Aproximações da raiz real da equação $V(h) = 4$ contida no intervalo $[0,1]$ obtidas com auxílio do método da Falsa Posição e a planilha eletrônica.....	83
Quadro 12 – Aproximações da raiz da equação $P(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 1 = 0$ contida no intervalo $[-1,0]$ obtidas com auxílio do método da Secante e planilha eletrônica	86
Quadro 13 – Velocidade do som na água em função da temperatura	87
Quadro 14 – Valores tabelados X e Y.....	87

Quadro 15 – Aproximações da raiz real da equação $x^3 - 5 = 0$ contida no intervalo $[1,2]$ obtidas com o método da Bisseção e a planilha eletrônica	90
---	----

LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E SÍMBOLOS

PROFMAT	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.
DCE	Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná.
Geogebra	<i>Software</i> de Geometria Dinâmica.
LibreOffice Calc	Planilha Eletrônica.
$P(x)$	Polinômio de grau n .
$P(z)$	Polinômio no plano complexo.
μ	valor mínimo de $ P(z) $.
r	raio do disco de centro z_0 .
z_0	centro do disco de raio r .
λ	$r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$
z	número complexo.
\bar{z}	conjugado de z .
ρ_p	número possível de raízes reais positivas de $P(x)$.
ρ_{neg}	número possível de raízes reais negativas de $P(x)$.
ρ_1, ρ_2	raio mínimo do círculo que contém pelo menos uma raiz de $P(x)$.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
2	CAPÍTULO I – RETROSPECTIVA HISTÓRICA	19
2.1	A HISTÓRIA DA ÁLGEBRA E DAS EQUAÇÕES	19
3	CAPÍTULO II – EQUAÇÕES ALGÉBRICAS	29
3.1	CONCEITOS TEÓRICOS	29
3.1.1	Equações Algébricas	29
3.1.2	Equações Algébricas Polinomiais	29
3.1.3	Teorema Fundamental da Álgebra	31
3.1.4	Teorema do Resto e Teorema de D’Alembert	35
3.1.5	Teorema da Decomposição	35
3.1.6	Multiplicidade de uma Raiz	39
3.1.7	Raízes Complexas, Conjugadas e suas Multiplicidades	39
3.1.8	Raízes Reais, Teorema das Raízes Racionais e Teorema de Bolzano	39
3.1.9	Relação entre Coeficientes e Raízes e Relações de Girard	48
4	CAPÍTULO III – MÉTODOS NUMÉRICOS	51
4.1	REGRA E TEOREMAS	51
4.1.1	Regra de Sinal de Descartes	51
4.1.2	Teoremas das Raízes Positivas e Teorema do Raio	52
4.2	MÉTODOS DIRETOS E INDIRETOS	55
4.3	MÉTODO DA BISSECÇÃO	56
4.4	MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO	59
4.5	MÉTODO DA SECANTE	61
5	CAPÍTULO IV - PROPOSTA DE TRABALHO	65
5.1	TRÊS PROBLEMAS GREGOS	66
5.2	PROBLEMA NA CORTE DO IMPERADOR	78
5.3	PROBLEMAS GEOMÉTRICOS	80
5.4	PROBLEMAS DE INTERPOLAÇÃO	85
5.5	ESTUDO DE RAIZES E-NÉSIMAS	88

5.6	PROBLEMAS DIVERSOS.....	91
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	94
	REFERÊNCIAS	96
	APÊNDICE	99
APÊNDICE A –	Implementação do Método da Bissecção na Planilha Libreoffice Calc.....	100
APÊNDICE B –	Implementação do Método da Falsa Posição na Planilha Libreoffice Calc	103
APÊNDICE C –	Implementação do Método da Secante na Planilha Libreoffice Calc.....	106

1 INTRODUÇÃO

O estudo das equações algébricas polinomiais inicia-se normalmente no 6º ano do Ensino Fundamental, quando os alunos têm o primeiro contato com as equações denominadas tradicionalmente de “equações do 1º grau”. Nesse momento, os estudantes começam efetivamente sua caminhada pelo mundo da Álgebra, que é o ramo da Matemática cuja finalidade é estudar a manipulação formal e rigorosa de equações, operações matemáticas, polinômios e estruturas algébricas.

Posteriormente, no último ano do Ensino Fundamental, os estudantes iniciam o trabalho com as equações algébricas polinomiais do 2º grau. Geralmente o professor de Matemática começa a abordagem desse tema partindo da questão histórica, a fim de demonstrar aos alunos como os povos antigos tratavam essas equações e quais eram os métodos utilizados na resolução desse tipo de equação.

No primeiro ano do Ensino Médio, as equações algébricas polinomiais de 1º e 2º graus aparecem novamente quando os professores de Matemática inserem, respectivamente, as funções polinomiais de 1º e 2º graus. Nesse momento, aproveita-se a introdução de novos conceitos para proporcionar aos alunos uma retomada do conceito de equações algébricas polinomiais e suas aplicações na resolução de problemas mais elaborados.

As Diretrizes Curriculares da Educação Básica – DCE recomendam para o Ensino Básico cinco grupos de conteúdos estruturantes. Entende-se por conteúdos estruturantes aqueles conhecimentos que identificam e organizam os campos de estudo da disciplina da Matemática, considerados fundamentais para compreensão desta (PARANÁ, 2008, p. 49).

No conteúdo estruturante Números e Álgebra para o Ensino Fundamental e Médio recomenda-se o estudo dos conceitos de equações, inequações e polinômios. Na Educação Básica o estudo da Álgebra deve possibilitar a construção de uma relação entre o pensamento e a linguagem, e, ainda, a linguagem algébrica deve expressar de maneira fidedigna o pensamento matemático. Pensar algebricamente é produzir significado para situações em termos

de números e operações aritméticas (igualdades e desigualdades), e com base nisso, transformar as expressões obtidas (LINS, 1997, p. 151).

Para o Ensino Fundamental, espera-se que o aluno ao estudar equações, inequações polinômios compreenda: o conceito de incógnita; realize a escrita de uma situação problema na linguagem matemática; reconheça e resolva equações numéricas e algébricas, inequações e sistemas de equações; diferencie e realize operações com monômios, binômios, trinômios e polinômios, equações quadradas, biquadradas e irracionais (PARANÁ, 2008, p. 49).

Já no Ensino Médio, há necessidade de um aprofundamento a respeito dos conceitos de equações, inequações e polinômios para que o aluno possa ampliar seus conhecimentos e com isso ser capaz de: identificar e realizar operações com polinômios; identificar e resolver equações, sistemas de equações e inequações, inclusive envolvendo logaritmos, exponenciais e modulares (PARANÁ, 2008, p. 50).

O conceito de inequações é abordado inicialmente no Ensino Fundamental, porém, mais tarde, no Ensino Médio, tal conceito acaba sendo retomado em outra perspectiva juntamente com o conceito de funções polinomiais de 1º e 2º grau. O mesmo ocorre com os conceitos de equações e polinômios que são introduzidos no Ensino Fundamental, mas reaparecem no último ano do Ensino Médio quando são desenvolvidos de forma paralela e muitas vezes superficial.

Tal abordagem paralela ocorre porque tanto os professores quanto os autores de livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio apresentam, primeiramente, o conceito de polinômios num contexto mais geral do que aquele apresentado no Ensino Fundamental, e, a partir de tal processo retoma-se o estudo das equações algébricas, focando, principalmente, a introdução das equações algébricas polinomiais de 3º grau ou superior.

O tratamento superficial muitas vezes dado ao estudo de equações algébricas, particularmente às equações algébricas polinomiais de 3º grau ou superior, é facilmente observado, uma vez que a abordagem feita por professores e autores de livros didáticos a respeito dessas equações está muito concentrada na aplicação de algumas técnicas e resultados que podem ser utilizados de forma satisfatória para um grupo restrito dessas equações, com características bem

específicas, o que limita a possibilidade de um estudo mais aprofundado e completo sobre o tema.

Outro detalhe a ser observado é a ênfase exagerada que autores de livros didáticos e professores de Matemática atribuem às equações algébricas polinomiais de 3º grau ou superior que possuem somente coeficientes inteiros ou que tenham raízes ou soluções inteiras. Essa restrição limita a possibilidade de ampliação e aprofundamento a respeito do assunto, visto que em situações do mundo real essas equações nem sempre aparecem e, dessa forma, problemas interessantes não são abordados porque exigem técnicas e métodos que não são desenvolvidos tradicionalmente no Ensino Médio.

Algumas hipóteses, baseadas em experiências acumuladas ao longo dos últimos anos atuando na Educação Básica, são elencadas para explicar o tratamento superficial dado ao ensino de equações algébricas no Ensino Médio. Entre elas, a falta de carga horária adequada para um desenvolvimento mais completo do tema; a falta de um laboratório de informática e de recursos computacionais que permitam ao professor oferecer aos seus alunos a oportunidade de conhecer, explorar e aplicar outros métodos desenvolvidos para resolução numérica de equações algébricas polinomiais de 3º grau ou superior; e, acima de tudo, a falta de oportunidade de um contato mais próximo do professor com a resolução de problemas envolvendo métodos numéricos. Esta última razão é muito evidente, principalmente porque a maioria dos professores de Matemática teve contato com métodos numéricos somente no curso de graduação e como esses conceitos não são desenvolvidos tradicionalmente no Ensino Médio, o professor acaba não se preocupando em utilizá-los, atribuindo-lhes pequena ou quase nenhuma relevância.

Outro fator que colabora para a falta de interesse demonstrada pelos professores de Matemática quanto ao emprego de métodos numéricos é a ausência de uma abordagem introdutória sobre a utilização desses métodos nos livros didáticos de Matemática que são utilizados no Ensino Médio. Pode-se observar que os autores não fazem qualquer menção sobre métodos numéricos e nem como utilizá-los na resolução de equações algébricas polinomiais.

Considerando a problemática exposta e a importância que os métodos numéricos possuem, principalmente na resolução de problemas

envolvendo equações, pretende-se desenvolver ao longo deste trabalho, uma proposta contendo uma sequência de atividades que envolvem a resolução de equações algébricas polinomiais de 3º grau ou superior com o auxílio de métodos numéricos elementares, ou seja, métodos que não exijam do aluno conhecimentos além daqueles desenvolvidos na Educação Básica. A proposta de atividades envolvendo resolução numérica de equações algébricas polinomiais de 3º grau ou superior é destinada aos alunos do Ensino Médio, e tem por objetivo proporcionar um estudo mais completo e aprofundado desse tema.

O trabalho inicia-se no Capítulo I com uma retrospectiva histórica, contendo aspectos da história da Matemática, da Álgebra e das equações. Além disso, alguns resultados importantes da Álgebra e suas implicações na resolução de equações algébricas polinomiais são apresentados no Capítulo II, enquanto no Capítulo III é feita uma apresentação de alguns métodos numéricos elementares que serão utilizados no desenvolvimento da proposta de atividades.

Na sequência, no Capítulo IV, é descrita uma série de atividades que envolvem equações algébricas polinomiais de 3º grau ou superior direcionada para os alunos do Ensino Médio. A sequência de atividades proposta também visa estimular os professores de Matemática a promover a introdução da resolução numérica de problemas que envolvam equações algébricas polinomiais de 3º grau ou superior. Para tanto, apresentam-se exemplos que demonstram como alguns métodos numéricos mais elementares podem ser aplicados na resolução de tais equações.

As atividades propostas procuram associar à resolução de equações métodos numéricos e ferramentas computacionais que permitem visualizar graficamente e identificar a solução dessas equações. Nesse trabalho será utilizado o *software* Geogebra para representar graficamente as equações e suas soluções reais. A planilha eletrônica LibreOffice Calc será usada para implementação dos métodos numéricos que serão utilizados na resolução dos exemplos propostos ao longo desse trabalho. A opção pelo *software* Geogebra e pela planilha eletrônica LibreOffice Calc justifica-se por serem ferramentas disponíveis gratuitamente aos usuários.

Ao final são apresentadas as considerações finais sobre o referido trabalho.

2 CAPÍTULO I

RETROSPECTIVA HISTÓRICA

2.1 A HISTÓRIA DA ÁLGEBRA E DAS EQUAÇÕES

Segundo Garbi (1997) ninguém sabe ao certo em qual momento a atividade Matemática teve início, mas, muitos acreditam que ela tenha surgido entre 10.000 e 50.000 anos atrás. Essa crença é motivada principalmente porque nesse período ocorreram três fatos que chamam a atenção dos estudiosos.

Em primeiro lugar, alguns registros arqueológicos apontam que houve uma revolução muito grande da espécie humana por volta de 50.000 anos atrás. Nesse sentido, objetos e ferramentas encontrados em escavações arqueológicas demonstram que o homem já apreendia de uma tecnologia que permitia realizar viagens mais longas pelo mar. Essa tese é reforçada visto que nessa época o homem chegou à Austrália, contudo isso só poderia acontecer com a construção de barcos mais resistentes e sofisticados.

Em segundo lugar, fragmentos históricos relatam que por volta de 20.000 anos atrás, estudiosos encontraram registros de desenhos de animais em cavernas da França e da Espanha indicando que o homem já estava familiarizado com as formas e a distribuição espacial.

Por último, podemos citar a Revolução Agrícola ocorrida cerca de 10.000 anos atrás. Tal revolução marcou fortemente o homem da época, pois, o mesmo teve que mudar seu estilo de vida, deixando de ser totalmente extrativista e passando a cultivar a terra para obter seu próprio sustento. Dessa forma, a mudança de hábitos obrigou o homem a repensar as formas de organização do trabalho, criação de novas técnicas de armazenagem, além de novos métodos para divisão de terras e produção.

É notável o avanço da Matemática ao longo dos séculos, assim como sua aplicação no desenvolvimento de grande parte das ciências. Poder-se-ia inferir que o conhecimento matemático é inato ao ser humano, contudo a evolução na capacidade de realizar contagens e operações, registrar informações entre outras, deve-se, principalmente, ao processo de interação do homem com o meio em que vive.

A contagem, provavelmente, foi a atividade matemática mais utilizada pelo homem antigo, mas com a evolução da humanidade, outras necessidades surgem e novas representações são necessárias. Segundo Ifrah (1998), o processo natural de contagem inicia-se na esfera concreta com a ideia de correspondência, e, com o aumento do nível de civilização da humanidade, surgem novas necessidades e novas exigências que conduzem a novas representações. A formalização, a extensão e a generalização de conceitos matemáticos, construídos ao longo dos tempos, tornam-se inevitáveis para dar continuidade à evolução da Matemática e da própria humanidade.

Caraça (2005) relata que o homem tem tendência a generalizar e estender todas as aquisições do seu pensamento seja qual for o caminho pelo qual essas aquisições se obtêm, e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações pela exploração metódica de todas as suas consequências.

As novas exigências e a tendência humana de generalizar acabaram gerando a necessidade de criação de um novo ramo da Matemática denominado de Álgebra, pois a Aritmética estava sendo exposta cada vez mais a configurações abstratas, mostrando-se insuficiente para o tratamento e a resolução de vários problemas.

O período denominado de Álgebra Antiga (1700 a.C - 1700 d.C) teve como característica principal a invenção gradual da linguagem simbólica e o estudo de métodos utilizados para resolução de equações. Nesse período, segundo Boyer (1974), a linguagem algébrica passa por três estágios: o primitivo (retórico) completamente verbal e escrito com palavras; o intermediário (sincopado), em que são adotadas algumas abreviações; e o final (simbólico) em que o poder de síntese das expressões é transmitido pelos símbolos. Boyer (1974) afirma ainda que essa seja uma divisão arbitrária do desenvolvimento da Álgebra – uma simplificação excessiva – mas serve como uma aproximação dos fatos ocorridos. Foram necessários aproximadamente três mil anos para se chegar à representação algébrica atual, demonstrando, assim, o quanto foi difícil a construção da linguagem algébrica.

Segundo Eves (2005), os babilônicos registravam seus conhecimentos em tabletas de argila cozida de tamanho variável, em escrita e numeração sexagesimal cuneiforme, como pode ser observado na Figura 1. Os babilônicos demonstravam muita habilidade na realização de cálculos e eram bons

algebristas, e, ainda, desenvolveram procedimentos algorítmicos para extração de raiz quadrada e resolviam problemas envolvendo equações quadráticas e cúbicas de forma muito eficiente.

Figura 1 – Tablete Babilônico.



Fonte: <http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/c/c2/Plimpton_322.jpg/250pxPlimpton_322.jp>.

Para os egípcios, a Matemática deveria ter um caráter mais prático, por isso, procuraram envolver a mesma na resolução de problemas relacionados à Agrimensura e à Engenharia. Segundo Eves (2005), as análises das inscrições e dos papiros demonstram a presença de métodos para a divisão e a multiplicação, emprego de frações unitárias, utilização da regra da Falsa Posição na solução de problemas, determinação da área de círculos e inúmeras aplicações da Matemática em problemas práticos. Aos egípcios é atribuída a descoberta de métodos que foram utilizados por um longo período na resolução de problemas envolvendo equações.

Um dos documentos históricos mais importantes, contendo informações a respeito da Matemática, é o Papiro de Rhind ou Papiro de Ahmes (1650 a.C), conforme Figura 2. O Papiro de Rhind encontra-se preservado até os dias de hoje e pertence ao acervo do British Museum em Londres desde 1863. Boyer (1974) ressalta que no Papiro de Rhind, pode-se encontrar um texto matemático na forma de manual contendo 85 problemas copiados de um trabalho mais antigo em escrita hierática, pelo escriba Ahmes¹. Segundo Colette (1986) alguns problemas do Papiro de Rhind tratam de situações que hoje seriam interpretadas como típicas de serem modeladas por equações lineares.

¹ Ahmes ou Aahmesu – Escriba egípcio que descreveu em escrita hierática os problemas constantes no Papiro de Rhind a partir de outro documento de 1850 a.C.

Figura 2 – Papiro de Rhind ou Papiro de Ahmes.



Fonte: <<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/rhind/images/papiro2.jpg>>.

Os gregos, dotados de extrema curiosidade intelectual, procuravam aproximar a Matemática pela Filosofia por meio da formulação de hipóteses científicas, dando origem, assim, ao método dedutivo. Nesse sentido, as relações abstratas eram tratadas pelos gregos distintamente das aplicações práticas e a ideia de número foi concretizada a partir de um segmento de reta e das operações algébricas. Ainda, as soluções de equações eram baseadas no método das proporções e na resolução de problemas envolvendo áreas.

A conquista da Grécia pelo império Romano – aproximadamente a 130 a.C – paralisou o desenvolvimento e praticamente apagou a chama da Matemática Grega, que, no entanto, ressurgiu muitos anos depois com Diofanto de Alexandria (200 - 298) por meio da introdução do estilo sincopado na Álgebra, a qual tem como característica principal a abreviação de palavras na escrita de equações. Diofanto, em sua famosa e importante obra “Arithmetica” (250 - 275), faz uma exposição sobre as equações indeterminadas – denominadas diofantinas –, descreveu também um manual de símbolos utilizado para representar incógnitas e potências.

Dessa maneira, diversos acontecimentos marcaram os primeiros séculos depois de Cristo, entre eles destacam-se a queda do Império Romano e a ascensão do Cristianismo. Nessa mesma época a Europa entra em decadência e a Matemática desenvolvida pelos árabes e hindus começa a receber destaque.

Os matemáticos indianos raramente citavam seus predecessores e exibiam incrível independência em seu trabalho com a Matemática. Segundo

Baumgart (1992), a Índia passou por diversas invasões e com isso a Matemática hindu teria sofrido influência de vários povos.

A Álgebra hindu não possuía símbolos, o que resultou em significativa influência em trabalhos posteriores. Muitos estudiosos ressaltam que os hindus eram excelentes algebristas, pois é atribuída a eles a solução de equações do 2º grau pelo método de “completar quadrados” e os primeiros métodos gerais para solução de equações indeterminadas.

Com a ascensão do Islamismo, os árabes promoveram invasões à diversas regiões. Com isso, tiveram acesso a muitas descobertas e produções científicas, principalmente do povo grego e hindu que, traduzidas para o árabe, foram preservadas durante o período da Idade Média.

Segundo Baumgart (1992), a palavra Álgebra tem origem da palavra “al jabr” e foi introduzida pelo famoso matemático Abu-Abdullah Mohammed Ibn-Musa Al-Khwarizmi² em seu livro intitulado Al-Kitab Al-jabr wa'l Muqabalah que significa, segundo alguns estudiosos, “O livro da redução e do balanceamento”.

A obra de Al-Khwarizmi foi escrita em Bagdá por volta do ano 825 e apresentava estratégias de redução e balanceamento envolvendo situações que hoje chamamos de equações de 1º grau. O termo redução estaria relacionado à possibilidade de reduzir termos semelhantes da equação, por outro lado, o termo balanceamento indicaria a possibilidade de passar os termos de uma equação de um lado para outro.

Al-Khwarizmi, Figura 3, tinha uma característica muito importante enquanto matemático, a preocupação em repassar seus ensinamentos de forma compreensível às pessoas. O trabalho desenvolvido por Al-Khwarizmi acabou influenciando de maneira significativa a Matemática na Idade Média e transformando a Álgebra na parte da Matemática que estuda as questões relativas a equações.

² Abu Abdullah Mohammed Ibn Musa Al – Khwarizmi – (780 – 850) – Matemático, astrônomo, astrólogo, geógrafo e autor persa. Nasceu na cidade Khawarizm, onde atualmente é o Urbesquistão.

Figura 3 – Al – Khwarizmi

Fonte: <<http://www.famousscientists.org/scientist-photos/al-khwarizmi.jpg>> acesso em 14/04/2013.

Além de Al-Khwarizmi, outro matemático hindu que merece destaque pelo trabalho desenvolvido em prol da Álgebra e da resolução das equações do 2º grau é Bháskara Akaria.

Bháskara Akaria (1114 - 1185), filho de astrólogos indianos, é associado à fórmula geral para resolução de equações algébricas polinomiais completas de 2º grau. Segundo Garbi (1997) esta fórmula não foi descoberta por Bháskara, conforme o próprio relatou no século 12, a mencionada fórmula, foi encontrada um século antes pelo matemático hindu Sridhara e publicada em uma obra que acabou se perdendo. Sridhara e Bháskara registraram e sistematizaram através de uma fórmula ideias que eram utilizadas anteriormente para resolver equações algébricas polinomiais de 2º grau, resolvendo um problema que angustiava os matemáticos desde os tempos mais antigos.

Na Europa, o desenvolvimento da Álgebra começou a partir da tradução para o latim de diversas publicações dos povos antigos e especialmente pela obra intitulada “Liber abaci” do matemático italiano Leonardo Fibonacci de Pisa publicado no século XII. Sua obra deu um tratamento profundo às questões de Aritmética e foi um marco para a história, pois pela primeira vez um cristão descreveu algo sobre Álgebra.

A partir de 1500 a notação simbólica da Álgebra passou por um processo de aperfeiçoamento e padronização, tornando-se estável por volta de 1700. A evolução da notação simbólica permitiu o avanço e o aprofundamento do pensamento algébrico, ao passar da solução de equações para o estudo de suas propriedades teóricas, dando origem à chamada Álgebra Moderna, presente nos dias atuais. Como assinala (JOSEPH, 1991 apud MEDEIROS; MEDEIROS, 2004, p. 549):

a transformação da Álgebra retórica para a simbólica, que marca um dos mais importantes avanços na Matemática, requereu duas importantes condições. A primeira foi o desenvolvimento de um sistema numérico posicional que permitiu escrever os números de forma concisa, trazendo, com isso, o desenvolvimento eficiente das operações. A segunda foi o aparecimento das práticas comerciais e administrativas que auxiliaram na adoção, não apenas de um sistema numérico, mas também de símbolos para representar os operadores.

A partir de 1500 muitas descobertas foram realizadas; entre elas podemos destacar aquelas que estão relacionadas com a resolução das equações e o estudo de suas propriedades teóricas.

No século XVI, Nicoló Fontana Tartaglia (1500 - 1557) descobriu uma fórmula para resolução de equações polinomiais incompletas do 3º grau, publicada em 1545 no *Ars Magna* por Girolamo Cardano (1501 - 1576) quebrando um juramento feito a Tartaglia a respeito da confiabilidade das fórmulas.

Ludovico Ferrari (1522 - 1560) resolvia equações incompletas de 4º grau. Discípulo de Cardano, Ferrari resolveu um problema que seu mestre não conseguiu resolver após diversas tentativas. O resultado obtido por Ferrari foi publicado pelo mestre Cardano no *Ars Magna* em continuidade à solução dada por Tartaglia às equações do 3º grau.

Rafael Bombelli (1526 - 1572) demonstra a insuficiência dos números reais na resolução de equações, o que leva ao desenvolvimento dos números complexos, algo extremamente importante para generalização das relações entre coeficientes e raízes de uma equação polinomial.

François Viète (1540 - 1603) foi considerado um dos maiores em sua época. Filho de um advogado, Viète foi um algebrista considerável e obteve importantes resultados no campo das equações algébricas. Utilizando substituições

trigonométricas obteve a solução para equações algébricas polinomiais de 3º grau incompletas.

No século XVII, Isaac Newton (1642 - 1727) desenvolveu o Cálculo Diferencial e Integral, e, a partir do conceito de derivadas, cria um método recursivo que pode ser aplicado na resolução de equações algébricas e não algébricas.

Mais tarde, no século XVIII, Carl Frederich Gauss (1777 - 1855) considerado por muitos estudiosos “o mais brilhante matemático que já existiu na face da Terra” enunciou e demonstrou o famoso Teorema Fundamental da Álgebra, sendo este o principal alicerce da teoria das equações algébricas.

O século XIX ficou marcado pelo surgimento de dois brilhantes matemáticos (Abel e Galois) que, mesmo com vida curta, desenvolveram diversos trabalhos e deram significativas contribuições para o desenvolvimento da Álgebra e consequentemente da Matemática.

O jovem Niels Henrik Abel³ (1802 - 1829) conseguiu comprovar o que muitos matemáticos renomados tinham a impressão: nem todas as equações algébricas polinomiais de grau maior que 4 são solúveis por meio de radicais. Outro jovem promissor, Evariste Galois⁴ (1811 - 1832) desenvolveu diversos trabalhos de alto nível a respeito de equações algébricas. A Galois é creditada a criação da Teoria dos Grupos, um importante ramo da Matemática Moderna com aplicações em Matemática, Física, Química entre outras.

O conceito de grupo é usado em Matemática e nas ciências em geral para capturar a simetria interna de uma estrutura na forma de automorfismos de grupo. Uma simetria interna está normalmente associada com alguma propriedade invariante. Um conjunto de transformações que preserva a propriedade invariante juntamente com a composição dessas transformações dá origem ao conceito de grupo de simetria. A Teoria de Galois procura compreender a simetria das equações satisfeitas pelas soluções de uma equação polinomial. Os grupos denominados solúveis desempenham papel importante na teoria.

³ Niels Henrik Abel (1802-1829), matemático norueguês de excepcional talento. Teve vida curta, envolta em misérias e tragédias. Foi um dos fundadores da Matemática Moderna, demonstrou um teorema binomial relativo às funções integrais que leva o seu nome, criador das funções elípticas, fez um estudo sistemático das funções algébricas, idealizou a teoria da convergência e demonstrou que equações algébricas de grau maior que 4 não possuem resolução algébrica.

⁴ Evariste Galois (1811-1832), brilhante matemático francês que aos 16 anos já dominava as obras de Legendre e Lagrange, obtendo todo o conhecimento da época relativo às equações algébricas. Aos 18 anos escreveu o artigo “Pesquisas sobre as equações algébricas de grau primo”; nos dois anos seguintes produziu outros escritos relativos à resolução algébrica de equações. Desenvolveu a Teoria dos Grupos e com isso introduziu novos conceitos estruturais que alteraram a natureza da Álgebra.

Pode-se ainda, no século XIX e principio do século XX, citar os trabalhos desenvolvidos pela matemática Amalie Emmy Noether (1882 - 1935) que trouxeram valiosa contribuição para o desenvolvimento da Álgebra Moderna.

Em dias atuais, a Álgebra ganha cada vez mais espaço, principalmente entre os físicos, engenheiros e matemáticos, pois diversas aplicações em Física, Computação, Engenharia e Matemática acabam utilizando conceitos como grupos, anéis, corpos, módulos entre outros.

Em Matemática, muitos problemas podem ser resolvidos de forma algébrica por meio de métodos e técnicas que o homem desenvolveu ao longo dos tempos. Porém, existem problemas geralmente associados a situações reais cuja resolução exige a aplicação de métodos numéricos. A utilização de métodos numéricos na resolução de problemas envolvendo equações algébricas polinomiais de 3º grau ou superior é uma estratégia interessante, uma vez que viabiliza uma oportunidade de aprofundamento do estudo de equações. Além disso, o emprego de métodos numéricos permite trabalhar com aproximações e isso é fundamental, já que muitas equações possuem soluções reais não racionais.

A Análise Numérica é a parte da Matemática que tem por objetivo desenvolver métodos ou algoritmos numéricos que permitem resolver problemas que podem ser representados por modelos matemáticos. A aplicação de um método numérico na resolução de um problema produz uma sequência de aproximações que pode convergir ou não para a solução exata do mesmo. Ainda, um método numérico é considerado eficiente quando produz resultados satisfatórios em termos de precisão com menor esforço computacional.

Os métodos numéricos são tão antigos quanto a civilização humana. A civilização babilônica, por exemplo, cerca de 1700 anos antes de Cristo já dispunha de algoritmos numéricos que permitiam obter aproximações com precisão de 10^{-5} para o valor da $\sqrt{2}$ (BURDEN; FAIRES, 2003, p. 44). Já os egípcios desenvolveram por volta de 1650 a.C um método que aparece ilustrado no Papiro de Rhind, chamado de “Método da Falsa Posição” e utilizado para obter aproximação das raízes de uma equação.

Na Grécia antiga, podemos destacar o trabalho desenvolvido por Arquimedes (278-212 a.C), que desenvolveu um método chamado de “Método da Exaustão”. As ideias que permeiam este método ajudaram no desenvolvimento do

Cálculo Diferencial Integral desenvolvido no século XVII por Leibinz e Newton.

O surgimento do Cálculo Diferencial e Integral foi a mola propulsora para o desenvolvimento de vários métodos numéricos que são utilizados para obtenção de soluções aproximadas de diversos tipos de problemas.

No século XX, por volta de 1940, o desenvolvimento dos métodos numéricos ganhou força, o que ocorreu, graças ao aparecimento dos primeiros computadores. O surgimento dessas máquinas permitiu o uso efetivo dos dispositivos de cálculo para resolução de problemas de diversas áreas.

3 CAPÍTULO II

EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

3.1 CONCEITOS TEÓRICOS

Nessa seção do trabalho algumas definições e teoremas importantes são apresentados, pois servem de alicerce para o estudo das equações algébricas polinomiais.

3.1.1 Equações Algébricas

Segundo Garbi (1997) as equações algébricas são definidas como sendo aquelas em que a incógnita aparece apenas submetida às chamadas operações algébricas: soma, subtração, multiplicação, divisão, potenciação inteira e radiciação. Pode-se visualizar no Quadro 1, alguns exemplos de equações algébricas e equações não algébricas.

Quadro 1 – Exemplos de equações algébricas e equações não algébricas.

Equações algébricas	Equações não algébricas
$3x - 1 = 0$	$e^x + x = 1$
$x^2 + 6x + 7 = 0$	$\cos(x) + 1 = 2x$
$\sqrt{x} + x = 2$	$x^2 + \ln(x) = 3$

Fonte: Autor.

3.1.2 Equações Algébricas Polinomiais

Segundo Iezzi (1997), uma equação algébrica é dita polinomial quando é redutível à forma $P(x) = 0$, onde $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ é um polinômio de grau n com coeficientes a_i , $i = 0, \dots, n$, e a variável x assumindo valores pertencentes ao conjunto dos números complexos. No Quadro 2 apresenta-se alguns exemplos de equações algébricas polinomiais.

Quadro 2 – Exemplos de equações algébricas polinomiais.

Equações algébricas polinomiais	
$3x^5 + x^3 + 4x + 1 = 0$	$5ix^4 + (1+i)x^2 - 5 = 0$
$0,75x^4 + 6x + 1 = 0$	$x^3 + 2ix - 3 = 0$

Fonte: Autor.

Nessa proposta de trabalho pretende-se, abordar exclusivamente, as equações algébricas polinomiais. As equações algébricas polinomiais acabam tornando-se o objeto de estudo mais abordado no Ensino Médio quando estudam-se polinômios e equações algébricas. Isso ocorre, por conta da notável proximidade existente entre os dois temas.

O foco do trabalho está centrado principalmente na localização e determinação de raízes reais de equações algébricas polinomiais de 3º grau ou superior. Geralmente os livros didáticos abordam casos muito particulares que podem ser resolvidos com o emprego de técnicas que funcionam de maneira eficiente. Aqui, o objetivo é ampliar a abordagem dada nos livros didáticos, ou seja, trabalhar com equações algébricas polinomiais, normalmente não abordadas no Ensino Médio, procurando apresentar situações envolvendo equações com coeficientes reais não inteiros e problemas com soluções reais não inteiras. Para iniciar, apresenta-se a definição de raiz de uma equação algébrica polinomial.

Um número r é raiz da equação polinomial $P(x)=0$, em que $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ se, e somente se, substituindo x por r na equação, obtemos $P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0$. Resolver uma equação algébrica polinomial significa identificar seu conjunto solução, ou seja, o subconjunto de números complexos que torna $P(x) = 0$.

A grande questão que permeia a resolução de equações algébricas polinomiais está concentrada principalmente na obtenção das suas raízes, pois, dependendo do grau do polinômio associado à equação, o trabalho de resolução pode ser consideravelmente grande.

3.1.3 Teorema Fundamental da Álgebra

O Teorema Fundamental da Álgebra é um dos resultados mais importantes que existem na Matemática e foi proposto por Gauss – em sua tese de doutorado – aos 21 anos de idade. Garbi (1997) relata que este trabalho é considerado a maior tese de doutorado em Matemática de todos os tempos.

O teorema enunciado por Gauss afirma que toda equação algébrica polinomial de grau $n \geq 1$ admite pelo menos uma raiz complexa. A demonstração desse teorema não é trivial, e Gauss, em sua genialidade, conseguiu, até o final de sua vida, apresentar ao menos três demonstrações desse teorema usando caminhos alternativos e não menos complicados.

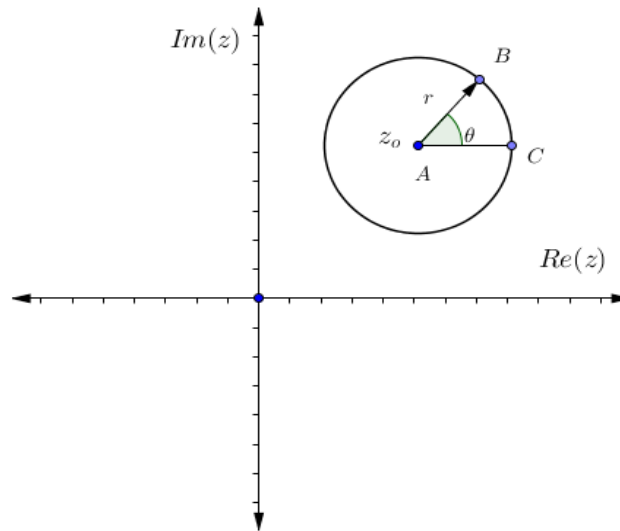
A demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra normalmente é omitida nos livros didáticos de Matemática do Ensino Médio devido à sua complexidade. Contudo, considerando a sua importância, apresenta-se nesse trabalho a demonstração proposta por Argand e modificada posteriormente por Cauchy no século XIX. O referido teorema com seu enunciado e demonstração são apresentados conforme Garbi (1997). A demonstração apresentada na sequência é considerada a mais simples das demonstrações existentes para esse teorema.

Teorema Fundamental da Álgebra: Toda equação algébrica polinomial de grau $n \geq 1$ admite pelo menos uma raiz complexa.

Demonstração: Seja o polinômio $P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ com z variando no plano complexo, logo para cada complexo z temos um $P(z)$ também complexo. Considere μ o valor mínimo atingido pelo módulo de $P(z)$ a medida que z varia. Suponhamos que o mínimo ocorrerá, quando z for igual ao complexo z_0 ou seja, $\min |P(z)| = |P(z_0)| = \mu$. Nesse caso duas alternativas podem ocorrer: $\mu > 0$ ou $\mu = 0$, já que, em se tratando do módulo, μ não pode ser negativo. Nosso objetivo é demonstrar que $\mu = 0$, já que $\mu > 0$ conduzirá a uma contradição.

Suponha por hipótese que $\mu > 0$, logo nas vizinhanças do número z_0 , ou seja, dentro de um pequeno círculo com centro z_0 e raio r , conforme Figura 4 tem-se $|P(z)| \geq \mu$, já que por hipótese μ representa o mínimo.

Figura 4 – Círculo de centro z_0 e raio r .



Fonte: Autor.

Sobre a circunferência do círculo da Figura 4 considere um ponto B tal que $z = z_0 + \lambda$, com $\lambda = r(\cos(\theta) + i\text{sen}(\theta))$, logo pode-se reescrever o polinômio $P(z)$ como segue:

$$\begin{aligned} P(z) &= P(z_0 + \lambda) = a_0(z_0 + \lambda)^n + a_1(z_0 + \lambda)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(z_0 + \lambda) + a_n \\ &= a_0 z_0^n + a_0 \binom{n}{1} z_0^{n-1} \cdot \lambda + \dots + a_0 \binom{n}{n-1} z_0 \lambda^{n-1} + a_0 \lambda^n + \dots + a_{n-1} z_0 + a_{n-1} \lambda + a_n \end{aligned} \quad (1)$$

Os primeiros termos das parcelas do desenvolvimento de $P(z_0 + \lambda)$ são $a_0(z_0)^n, a_1(z_0)^{n-1}, a_{n-1}(z_0), a_n$, além disso reduzindo os termos semelhantes das potências envolvendo λ , surgirão os monômios $b_n \lambda^n, \dots, b_2 \lambda^2, b_1 \lambda$, com coeficientes complexos. Fazendo uma reordenação dos termos tem-se:

$$\begin{aligned} P(z_0 + \lambda) &= a_0(z_0)^n + a_1(z_0)^{n-1} + \dots + a_n + b_1 \lambda + b_2 \lambda^2 + \dots + b_n \lambda^n \\ &= P(z_0) + b_1 \lambda + b_2 \lambda^2 + \dots + b_n \lambda^n \end{aligned} \quad (2)$$

Como alguns dos coeficientes b_i , podem ser nulos, em (2), denomina-se de b o primeiro coeficiente diferente de zero, b^1 o segundo e assim por diante, de modo que:

$$P(z_0 + \lambda) = P(z_0) + b\lambda^t + b^1\lambda^{t^1} + b^2\lambda^{t^2} + \dots = P(z_0) + b\lambda^t(1 + \lambda\phi) \quad (3)$$

onde t, t^1, t^2, \dots são as potências de λ nos coeficientes não nulos e ϕ uma soma de diferentes potências de λ com seus respectivos coeficientes. Dividindo ambos os lados da igualdade de (3) por $P(z_0)$, que por hipótese é não nulo, tem-se:

$$\frac{P(z_0 + \lambda)}{P(z_0)} = 1 + \frac{b}{P(z_0)} \lambda^t (1 + \lambda\phi) = 1 + q\lambda^t (1 + \lambda\phi), \quad (4)$$

com $\frac{b}{P(z_0)} = q$.

Considerando o produto $q\lambda^t$ em (4), sendo q um número complexo, o mesmo pode ser representado por $q = h[\cos(w) + isen(w)]$, onde h e w representam seu módulo e argumento, respectivamente. Igualmente tem-se $\lambda = r(\cos(\theta) + isen(\theta))$ definido no início da demonstração, logo $\lambda^t = r^t[\cos(t\theta) + isen(t\theta)]$, com r e t reais, dessa forma tem-se:

$$\begin{aligned} q\lambda^t &= h[\cos(w) + isen(w)] \cdot r^t[\cos(t\theta) + isen(t\theta)] \\ &= hr^t[\cos(w + t\theta) + isen(w + t\theta)] . \end{aligned} \quad (5)$$

Considerando agora, no interior do círculo da Figura 4, apenas os valores de z para os quais $w + t\theta = \pi$, ou seja, $\theta = \frac{\pi - w}{t}$, assim pode-se verificar o que acontece no interior do círculo quando z varia sobre um raio que forme o ângulo θ com o eixo $\text{Re}(z)$. Para z sobre tal raio, $w + t\theta = \pi$ e substituindo (5) em (4) tem-se:

$$\frac{P(z_0 + \lambda)}{P(z_0)} = 1 + hr^t [\cos(\pi) + i\sin(\pi)](1 + \lambda\phi)$$

$$\frac{P(z_0 + \lambda)}{P(z_0)} = (1 - hr^t) - hr^t\lambda\phi \quad (6)$$

onde h , r e t são números reais, λ e ϕ são números complexos.

$$\text{Sendo assim o módulo de } \frac{P(z_0 + \lambda)}{P(z_0)} \text{ é } \left| \frac{P(z_0 + \lambda)}{P(z_0)} \right| \leq |1 - hr^t| + |hr^t\lambda\phi|,$$

pois o módulo da soma ou subtração de dois números, sejam eles reais ou complexos, é sempre menor ou igual a soma dos módulos.

Considerando r suficientemente pequeno, tem-se:

$$|1 - hr^t| + |hr^t\lambda\phi| = 1 - hr^t + hr^t|\lambda||\phi| = 1 - hr^t + hr^t.r|\phi| = 1 - hr^t + hr^{t+1}|\phi|. \quad (7)$$

Reduzindo o valor de r , tanto hr^t e $hr^{t+1}|\phi|$ também diminuem, ficando tão pequenos quanto se deseja. Entretanto, a partir de certo r suficientemente pequeno, $hr^{t+1}|\phi| < hr^t$, de modo que a parcela negativa hr^t sobrepõe-se à positiva $hr^{t+1}|\phi|$ e a soma $1 - hr^t + hr^{t+1}|\phi|$ torna-se menor que 1,

permitindo escrever $\left| \frac{P(z_0 + \lambda)}{P(z_0)} \right| = \frac{|P(z_0 + \lambda)|}{|P(z_0)|} < 1$, logo:

$$|P(z_0 + \lambda)| < |P(z_0)| \text{ ou } |P(z_0 + \lambda)| < \mu. \quad (8)$$

A desigualdade em (8) é uma contradição, pois supomos que μ é o mínimo de $|P(z)|$. A causa da contradição foi supor inicialmente que $\mu > 0$, logo só resta a alternativa $\mu = 0$, significando que sempre existe um complexo z_0 tal que $P(z_0) = 0$, com $n \geq 1$, concluindo assim a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra.

3.1.4 Teorema do Resto e Teorema de D'Alembert

Além do Teorema Fundamental da Álgebra, outros resultados importantes serão enunciados para fundamentar o desenvolvimento do trabalho. Entre eles, o Teorema do Resto e o Teorema de D'Alembert enunciados a seguir, conforme lezzi (1993). As respectivas demonstrações não serão apresentadas nesse trabalho, mas podem ser encontradas em lezzi(1993).

Teorema do Resto: O resto da divisão de um polinômio $P(x)$ pelo binômio $(x - a)$ é igual ao valor numérico $P(a)$.

Teorema D'Alembert: Um polinômio $P(x)$ é divisível por $(x - a)$, se, e somente se, $x = a$ é raiz de $P(x)$.

3.1.5 Teorema da Decomposição

Quando Gauss demonstrou o Teorema Fundamental da Álgebra indiretamente outro resultado muito importante no estudo de equações algébricas polinomiais foi descoberto. Esse resultado conhecido como teorema da decomposição tem seu enunciado e demonstração apresentado segundo lezzi (1993).

Teorema da Decomposição: Seja $P(x)$ um polinômio de grau n , $n \geq 1$, dado por $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ com a_n não nulo, então, $P(x)$ pode ser decomposto em n fatores do 1º grau sob a forma:

$$P(x) = a_n (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \dots \cdot (x - r_n) \quad (9)$$

em que r_1, r_2, \dots, r_n são as raízes de $P(x)$ e a_n é o coeficiente dominante de $P(x)$. A menos da ordem dos fatores, essa decomposição é única.

Demonstração: (Existência)

Como $P(x)$ é um polinômio de grau $n \geq 1$, sabe-se pelo Teorema Fundamental da Álgebra que $P(x)$ tem ao menos uma raiz complexa r_1 , assim, $P(r_1) = 0$. Pode-se então escrever, de acordo com o Teorema de D'Alembert, $P(x)$ como sendo:

$$P(x) = (x - r_1) \cdot Q_1(x). \quad (10)$$

i) Considerando que o grau de $P(x)$ seja, $n=1$ tem-se $n-1=0$ e $Q_1(x)$ é um polinômio de grau nulo, ou seja, $Q_1(x)$ é um polinômio constante, portanto, $Q_1(x) = a_n$. Substituindo $Q_1(x) = a_n$ em (10) tem-se $P(x) = a_n(x - r_1)$ e assim o teorema estaria demonstrado.

ii) Sendo $n \geq 2$, o grau de $P(x)$, então $n-1 \geq 1$. Pelo Teorema Fundamental da Álgebra o polinômio $Q_1(x)$, isto é, $Q_1(x)$ tem ao menos uma raiz complexa r_2 . Dessa forma $Q_1(r_2) = 0$, logo pode-se escrever:

$$Q_1(x) = (x - r_2) \cdot Q_2(x). \quad (11)$$

Substituindo (11) em (10) tem-se $P(x)$ como segue:

$$P(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot Q_2(x) \quad (12)$$

onde $Q_2(x)$ é um polinômio de grau $n-2$ e coeficiente dominante a_n . Dessa forma dois casos devem ser analisados:

iii) Seja $n=2$ o grau de $P(x)$, então $n-2=0$ logo $Q_2(x) = a_n$. Substituindo $Q_2(x) = a_n$ em (12) tem-se $P(x) = a_n(x - r_1) \cdot (x - r_2)$ e assim o teorema estaria demonstrado.

iv) Por outro lado se $n \geq 3$, então $n-2 \geq 1$, logo deve-se aplicar novamente o Teorema Fundamental da Álgebra ao polinômio $Q_2(x)$, isto é, $Q_2(x)$ tem ao menos uma raiz complexa r_3 . Dessa forma $Q_2(r_3) = 0$, logo pode-se escrever:

$$Q_2(x) = (x - r_3) \cdot Q_3(x) \quad (13)$$

Substituindo (13) em (12) tem-se $P(x)$ como segue:

$$P(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) \cdot Q_3(x) \quad (14)$$

onde $Q_3(x)$ é um polinômio de grau $n - 3$ e coeficiente dominante a_n .

Repetindo o raciocínio anterior e aplicando n vezes o Teorema Fundamental da Álgebra pode-se escrever a seguinte igualdade:

$$P(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \dots \cdot (x - r_n) \cdot Q_n(x) \quad (15)$$

onde $Q_n(x)$ é um polinômio de grau 0 e coeficiente dominante a_n , portanto $Q_n = a_n$.

Demonstração (Unicidade)

Suponha por hipótese que existam duas decomposições para o polinômio $P(x)$, dadas por:

$$P_n(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n), \quad (16)$$

$$P_m(x) = a_m(x - s_1)(x - s_2)(x - s_3) \dots (x - s_m). \quad (17)$$

Efetuada o produto dos termos em (16) obtém-se $a_n x^n - a_n S_1 x^{n-1} + a_n S_2 x^{n-2} + \dots$ onde S_1, S_2, \dots, S_n são coeficientes resultantes do produto. De forma similar efetua-se o produto dos termos em (17) obtendo-se $a_m x^m - a_m T_1 x^{m-1} + a_m T_2 x^{m-2} + \dots$ onde T_1, T_2, \dots, T_n são coeficientes resultantes do produto.

Reduzindo e ordenando os termos dos dois segundos membros de (16) e (17), tem-se:

$$a_n x^n - a_n S_1 x^{n-1} + a_n S_2 x^{n-2} + \dots = a_m x^m - a_m T_1 x^{m-1} + a_m T_2 x^{m-2} + \dots \quad (18)$$

e pela definição de igualdade de polinômios pode-se deduzir $n = m$ e $a_n = a_m$.

Considerando a conclusão obtida em (18) e os termos de (16) e (17) pode-se escrever:

$$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n) = (x - s_1)(x - s_2)(x - s_3) \dots (x - s_n). \quad (19)$$

Atribuindo a x o valor de r_1 , tem-se a igualdade

$$0 = (r_1 - s_1)(r_1 - s_2)(r_1 - s_3) \dots (r_1 - s_n). \quad (20)$$

e, se o produto é nulo, um dos fatores $(r_1 - s_j)$ é nulo, organizando os fatores de (20) convenientemente é possível escrever $(r_1 = s_1)$. Assim pode-se escrever a igualdade (19) como segue:

$$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n) = (x - r_1)(x - s_2)(x - s_3) \dots (x - s_n) \quad (21)$$

e em seguida

$$(x - r_2)(x - r_3) \dots (x - r_n) = (x - s_2)(x - s_3) \dots (x - s_n) \quad (22)$$

Atribuindo a x o valor de r_2 em (22), tem-se a igualdade

$$0 = (r_2 - s_2)(r_2 - s_3) \dots (r_2 - s_n) \quad (23)$$

analogamente, se um dos fatores do produto em $r_2 - r_k$ em (23) é nulo, com uma mudança conveniente dos termos podemos obter $(r_2 = s_2)$.

Continuando esse processo obteremos $r_i = s_i$ para todo i no conjunto $\{1, 2, 3, 4, \dots, n\}$. As igualdades $m = n$, $a_n = a_m$, $r_1 = s_1$; $r_2 = s_2$; $r_3 = s_3$; \dots ; $r_n = s_n$ são a prova da unicidade da decomposição de $P(x)$.

O Teorema da Decomposição surge como consequência do Teorema Fundamental da Álgebra. Na primeira versão do Teorema Fundamental da Álgebra, Gauss acabou demonstrando indiretamente um colorário do Teorema da

Decomposição que afirma que toda equação polinomial de grau n , $n \geq 1$, admite exatamente n raízes complexas. A demonstração desse corolário é baseada na prova do Teorema da Decomposição e pode ser encontrada em lezzi (1993).

3.1.6 Multiplicidade de uma Raiz

Definição de Multiplicidade de uma Raiz: Dizemos que r é raiz de multiplicidade m , $m \geq 1$ da equação $P(x) = 0$ se e somente se $P(x) = (x - r)^m \cdot q$ onde $q(r) \neq 0$, isto é, r é raiz de multiplicidade m de $P(x) = 0$ quando o polinômio $P(x)$ é divisível por $(x - r)^m$ e não divisível por $(x - r)^{m+1}$, ou seja, a decomposição de $P(x)$ apresenta m fatores iguais ao fator $(x - r)$.

3.1.7 Raízes Complexas, Conjugadas e suas Multiplicidades

A seguir, apresentam-se os teoremas que relacionam as raízes complexas da equação polinomial de grau n de coeficientes reais com as raízes conjugadas e suas respectivas multiplicidades. A demonstração desses teoremas podem ser encontradas em lezzi (1993).

Teorema das Raízes Complexas Conjugadas: Se uma equação polinomial de grau n com coeficientes reais admite como raiz da equação o número complexo $z = a + bi$ (b não-nulo), então essa equação admite também como raiz o número $\bar{z} = a - bi$ chamado de conjugado de z .

Teorema da Multiplicidade: Se uma equação polinomial de grau n com coeficientes reais admite a raiz $z = a + bi$ (b não-nulo) com multiplicidade p , então essa equação admite a raiz $\bar{z} = a - bi$ com multiplicidade p .

3.1.8 Raízes Reais, Teorema da Raízes Racionais e Teorema de Bolzano

O objetivo principal do trabalho é explorar a determinação de raízes reais de uma equação polinomial de 3º grau ou superior. Nesse sentido, serão apresentados segundo lezzi(1993) o enunciado e demonstração do Teorema das

Raízes Racionais, que pode ser utilizado na tentativa de determinar as raízes reais racionais de uma equação polinomial de coeficientes inteiros desde que a priori a equação admita esse tipo de raiz.

Teorema das Raízes Racionais: Se uma equação polinomial $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ com $a_n \neq 0$, de coeficientes inteiros, admite uma raiz racional do tipo $\frac{r}{s}$, em que r e s são números inteiros com $s \neq 0$, $\frac{r}{s}$ é irredutível, então r é divisor de a_0 e s é divisor de a_n .

Demonstração: Se $\frac{r}{s}$ é uma raiz racional de $P(x) = 0$, então:

$$a_n \frac{r^n}{s^n} + a_{n-1} \frac{r^{n-1}}{s^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{r}{s} + a_0 = 0. \quad (24)$$

Multiplicando a equação (24) pela expressão s^n , tem-se:

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} \cdot s + \dots + a_1 r \cdot s^{n-1} + a_0 \cdot s^n = 0. \quad (25)$$

Isolando na equação (25) os termos $a_n r^n$ e $a_0 s^n$ e rearranjando os termos tem-se:

$$a_n r^n = -s(a_{n-1} r^{n-1} + a_{n-2} r^{n-2} s + \dots + a_1 r \cdot s^{n-2} + a_0 \cdot s^{n-1}) \quad (26)$$

$$a_0 s^n = -r(a_n r^{n-1} + a_{n-1} r^{n-2} \cdot s + \dots + a_1 s^{n-1}) \quad (27)$$

Os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, r, s$ são números inteiros, logo pode-se afirmar que são inteiros os números $(a_{n-1} r^{n-1} + a_{n-2} r^{n-2} s + \dots + a_1 r \cdot s^{n-2} + a_0 \cdot s^{n-1})$ e $(a_n r^{n-1} + a_{n-1} r^{n-2} \cdot s + \dots + a_1 s^{n-1})$. Sendo assim obtém-se das equações (26) e (27) as seguintes igualdades:

$$\frac{a_n r^n}{s} = -\lambda_1 \quad (28)$$

$$\frac{a_0 s^n}{r} = -\lambda_2 \quad (29)$$

com $\lambda_1 = (a_{n-1}r^{n-1} + a_{n-2}r^{n-2}s + \dots + a_1r.s^{n-2} + a_0.s^{n-1})$ e $\lambda_2 = (a_n r^{n-1} + a_{n-1}r^{n-2}.s + \dots + a_1s^{n-1})$.

A equação (28) indica que se $a_n r^n$ é divisível por s , então a_n é divisível por q , considerando que p^n e q são primos entre si. Por outro lado a equação (29) indica que se $a_0 s^n$ é divisível por r , então a_0 é divisível por p , considerando que q^n e p são primos entre si.

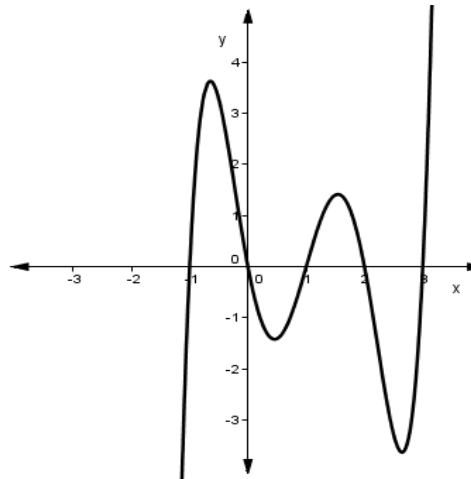
O Teorema das Raízes Racionais apresenta um resultado que permite identificar raízes reais racionais de uma equação polinomial com coeficientes inteiros desde que a equação admita esse tipo de raiz. Isso não ajuda muito, visto que, depende demasiadamente do tipo de coeficientes existentes na equação.

Diferentemente do Teorema das Raízes Racionais, um importante corolário do Teorema das Raízes Complexas Conjugadas afirma que toda equação polinomial de grau n ímpar com coeficientes reais tem pelo menos uma raiz real. Esta afirmação pode ser justificada da seguinte forma: uma função polinomial de grau ímpar com coeficientes reais possui uma quantidade par de concavidades, ou seja, se a função inicia crescendo, terminará crescendo e vice-versa. Logo, a representação gráfica dessa função interceptará o eixo horizontal, garantindo, assim, a existência de pelo menos uma raiz real para a equação polinomial.

A figura 5 representa o gráfico de $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 6x$ que possui quatro concavidades e cinco raízes reais simples, ou seja de multiplicidade 1. Observa-se facilmente que a função f inicia e termina sua representação gráfica com o mesmo comportamento, ou seja, crescendo. Tal comportamento acaba exigindo que a representação gráfica da função f intercepte o eixo horizontal em pelo menos um ponto. Na Figura 5 em particular, a representação gráfica intercepta o eixo horizontal em cinco pontos distintos. Por outro lado, a Figura 6 apresenta o gráfico da função $g(x) = -x^3 + x - 2$ que possui duas concavidades e apenas um raiz real. A representação gráfica de g inicia e termina decrescendo, dessa forma o comportamento da função g exige que sua representação gráfica intercepte o eixo horizontal pelo menos uma vez. Na Figura 6 em particular a

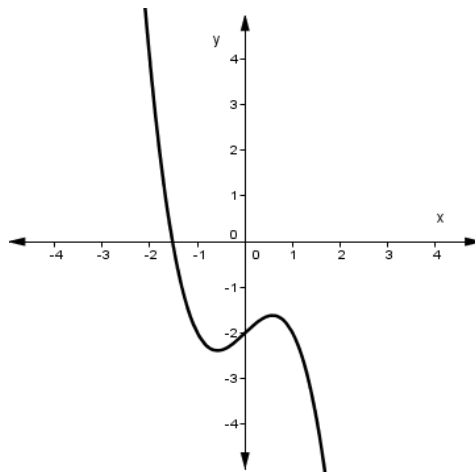
representação gráfica intercepta o eixo horizontal num ponto somente.

Figura 5 – Representação gráfica de
 $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 6x$.



Fonte: Autor.

Figura 6 – Representação gráfica de
 $g(x) = -x^3 + x - 2$.



Fonte: Autor.

Além dos resultados apresentados nas Figuras 5 e 6, outro importante resultado desenvolvido por Bernhard Bolzano (1781-1848), deduzido a partir do Teorema Fundamental da Álgebra, permite identificar se o número de raízes reais existentes em um intervalo aberto (a,b) é par ou ímpar. Antes de enunciar e demonstrar o Teorema de Bolzano segue um resultado preliminar segundo lezzi(1993).

Seja $P(x) = 0$ uma equação polinomial de coeficientes reais, com

raízes reais $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{p-1}, r_p$ e raízes complexas não reais $z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \dots, z_k, \bar{z}_k$. De acordo com o Teorema da Decomposição, o polinômio $P(x)$ pode ser escrito como:

$$P(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\dots(x - r_p) \cdot [(x - z_1)(x - \bar{z}_1)(x - z_2)(x - \bar{z}_2)\dots(x - z_k)(x - \bar{z}_k)]. \quad (30)$$

Efetando um dos produtos de duas raízes conjugadas, obtém-se:

$$(x - z_1)(x - \bar{z}_1) = (x - (a + bi))(x - (a - bi)) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = (x - a)^2 + b^2 > 0 \quad (31)$$

para todo x real.

Considere $Q(x)$ o polinômio formado pelos k fatores do tipo $(x - z_i)(x - \bar{z}_i)$ com $i = 1, 2, 3, \dots, k$.

$$Q(x) = (x - z_1)(x - \bar{z}_1)(x - z_2)(x - \bar{z}_2)\dots(x - z_k)(x - \bar{z}_k). \quad (32)$$

que assume valor positivo para todo x real. Logo podemos escrever a expressão (32) como segue: $P(x) = a_n \cdot Q(x) \cdot (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)\dots(x - r_p)$ com $Q(x) > 0$ para todo x real.

Teorema de Bolzano: Sejam $P(x) = 0$ uma equação polinomial com coeficientes reais e (a, b) um intervalo aberto, então tem-se:

- i) Se $P(a)$ e $P(b)$ tiverem o mesmo sinal, então existe um número par de raízes reais ou não existem raízes reais da equação $P(x) = 0$ no intervalo (a, b) .
- ii) Se $P(a)$ e $P(b)$ tiverem sinais opostos, então existe um número ímpar de raízes reais da equação $P(x) = 0$ no intervalo (a, b) .

A demonstração do Teorema de Bolzano apresentada aqui está conforme lezzi(1993).

Demonstração: Sejam r_i e r_e uma raiz interna e uma raiz externa ao intervalo aberto (a, b) , respectivamente, então $a < r_i < b$ e $a < b < r_e$, logo

$(a - r_i)(b - r_i) < 0$ e $(a - r_e)(b - r_e) > 0$. Considere o produto $P(a).P(b)$ definido por:

$$\begin{aligned} P(a).P(b) &= (a_n.Q(a)(a - r_1)(a - r_2)\dots(a - r_p)).(a_n.Q(b)(b - r_1)(b - r_2)\dots(b - r_p)) \\ &= a_n^2.(Q(a).Q(b)).((a - r_1)(b - r_1)).((a - r_2)(b - r_2))\dots((a - r_p)(b - r_p)). \end{aligned} \quad (33)$$

O produto $P(a).P(b)$, em (35), é um produto de $p+2$ fatores numéricos, sendo um fator $a_n^2 > 0$, um fator $Q(a).Q(b) > 0$, pois $Q(x) > 0$ para todo x real e p fatores do tipo $(a - r_m)(b - r_m)$, em que r_m é a raiz real da equação dada $P(x)=0$.

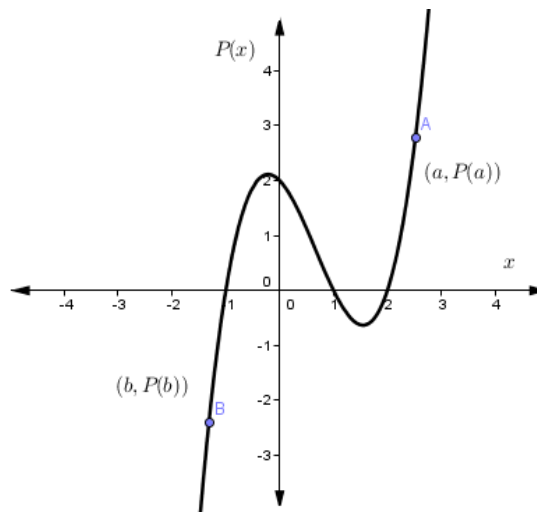
Dessa forma, os únicos fatores negativos do segundo membro da equação (35) são os fatores correspondentes às raízes de $P(x)=0$ internas ao intervalo aberto (a,b) que permitem concluir a existência de duas possibilidades:

- i) Quando $P(a)$ e $P(b)$ têm mesmo sinal, isto é, $P(a).P(b) > 0$, existe um número par de fatores negativos do tipo $(a - r_i)(b - r_i)$ e, portanto existe um número par de raízes reais da equação $P(x)=0$ que são internas ao intervalo aberto (a,b) .
- ii) Quando $P(a)$ e $P(b)$ têm sinais contrários, isto é, $P(a).P(b) < 0$, existe um número ímpar de fatores negativos do tipo $(a - r_i)(b - r_i)$ e, portanto existe um número ímpar de raízes reais da equação $P(x)=0$ internas ao intervalo aberto (a,b) .

Intuitivamente, a compreensão do Teorema de Bolzano pode ser feita observando-se os gráficos apresentados nas Figuras 7-12, respectivamente.

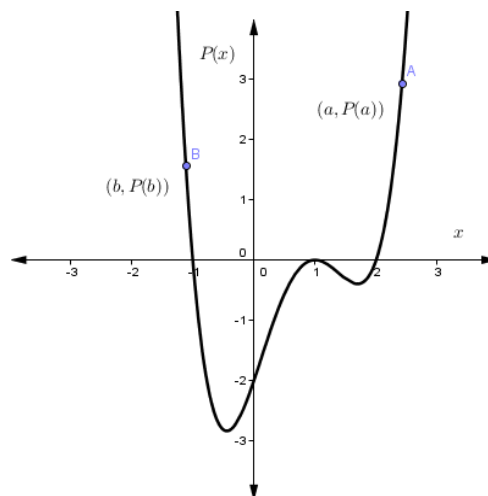
A Figura 7 apresenta o gráfico de um polinômio $P(x)$ de grau 3 que possui três raízes reais simples no intervalo aberto (a,b) com $P(a).P(b) < 0$, enquanto que, na Figura 8 tem-se a representação gráfica do polinômio $P(x)$ de grau 4 que possui duas raízes reais simples e uma raiz dupla no intervalo (a,b) considerando $P(a).P(b) > 0$.

Figura 7 – Representação gráfica de um polinômio de grau 3 com três raízes reais simples.



Fonte: Autor.

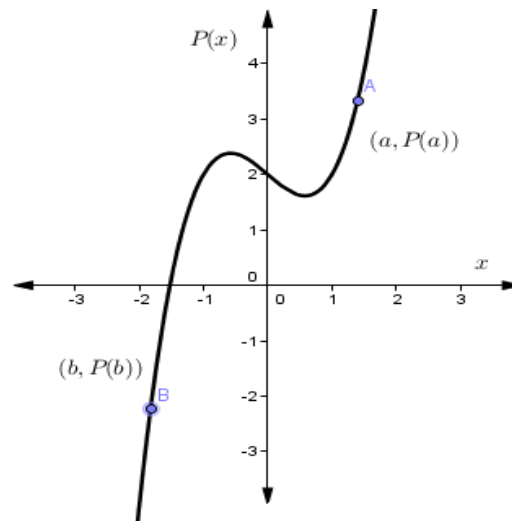
Figura 8 – Representação gráfica de um polinômio de grau 4 com duas raízes reais simples e uma raiz dupla.



Fonte: Autor.

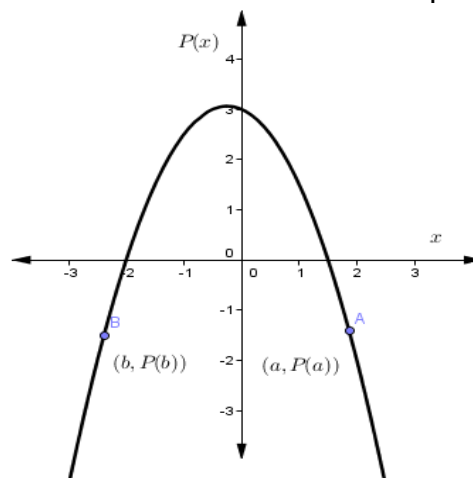
A Figura 9 apresenta a representação gráfica do polinômio $P(x)$ de grau 3 que contém uma única raiz real no intervalo aberto (a,b) com $P(a).P(b) < 0$. Já, na Figura 10 tem-se a representação gráfica de um polinômio $P(x)$ de grau 2 que contém duas raízes reais simples no intervalo (a,b) com $P(a).P(b) > 0$.

Figura 9 – Representação gráfica de um polinômio de grau 3 com uma única raiz real.



Fonte: Autor.

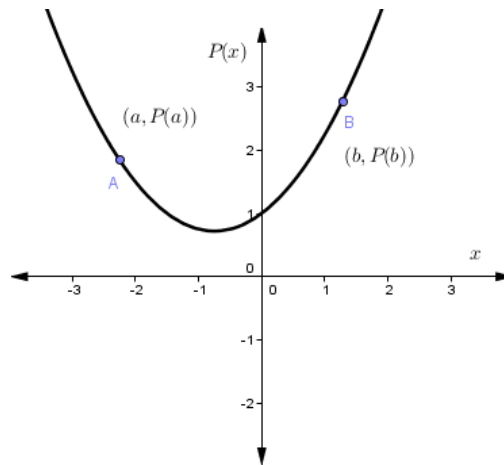
Figura 10 – Representação gráfica de um polinômio de grau 2 com duas raízes reais simples.



Fonte: Autor.

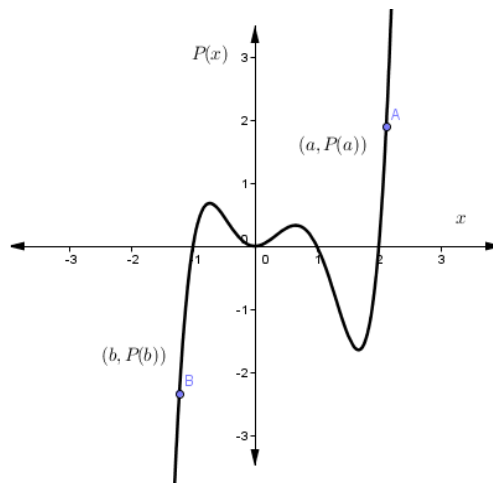
A Figura 11 ilustra o gráfico de um polinômio $P(x)$ de grau 2 que não possui raízes reais no intervalo aberto (a,b) com $P(a).P(b) > 0$, e por fim, na Figura 12 tem-se a representação gráfica de um polinômio $P(x)$ de grau 5 que contém três raízes reais simples e a raiz real dupla no intervalo (a,b) com $P(a).P(b) < 0$.

Figura 11 – Representação gráfica de um polinômio de grau 2 que não possui raízes reais.



Fonte: Autor.

Figura 1 – Representação gráfica de um polinômio de grau 5 com três raízes reais simples e raiz real dupla.



Fonte: Autor.

Considerando os gráficos apresentados nas Figuras de 7 – 12 observa-se os resultados decorrentes da aplicação do Teorema de Bolzano, ou seja, visualiza-se facilmente o comportamento do número de raízes reais num intervalo (a,b).

3.1.9 Relação entre Coeficientes e Raízes e Relações de Girard

O Teorema Fundamental da Álgebra permitiu deduzir importantes relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica polinomial em sua forma canônica. As relações mais conhecidas são as chamadas relações de Girard⁵. Estas relações são fatos que permitem deduzir diversas propriedades a respeito das raízes sem mesmo conhecê-las. A dedução das relações de Girard e quais resultados podem ser obtidos a partir dessas relações são apresentados conforme Garbi (1997).

Sendo $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ e $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{n-1}, r_n$ suas raízes, então pode-se escrever pelo Teorema da Decomposição:

$$a_0(x - r_1)(x - r_2) \dots (x - r_{n-1})(x - r_n) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n. \quad (34)$$

Quando os cálculos do lado esquerdo da igualdade dada em (34) são efetuados, tem-se termos de todos os graus possíveis na incógnita x , que decrescem de n até zero. O termo de grau máximo n ocorre quando todos os x dos binômios $(x - r_i)$ são multiplicados entre si; os termos de grau $n - 1$ ocorrem quando em $(n - 1)$ binômios os x são multiplicados entre si, e em seguida multiplicados por uma a uma das raízes r_i , salientando que o sinal do produto será negativo. Os termos de grau $n - 2$ aparecem quando em $(n - 2)$ binômios os x são multiplicados entre si, para na sequência serem multiplicados pelos vários produtos $r_i r_j$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, (com sinal positivo pois correspondem ao produto de dois números negativos), e assim por diante. Pode-se então escrever:

$$\begin{aligned} a_0 &= a_0 \\ a_1 &= -a_0(r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_{n-1} + r_n) \\ a_2 &= a_0(r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots + r_1 r_n + r_2 r_3 + r_2 r_4 + \dots + r_2 r_n + \dots + r_i r_j + \dots) \\ a_3 &= -a_0(r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \dots + r_1 r_2 r_n + \dots + r_i r_j r_k + \dots) \\ &\vdots \\ a_n &= (-1)^n (a_0 r_1 r_2 r_3 \dots r_{n-1} r_n) \end{aligned} \quad (35)$$

⁵ Albert Girard (1595 - 1632) – Matemático francês, desenvolveu trabalhos em Álgebra, Aritmética e Trigonometria. Mudou-se para Holanda por questões políticas, desenvolveu esboços do Teorema Fundamental da Álgebra e traduziu os trabalhos de Stevin.

Pelas igualdades descritas em (35) pode-se então descrever as relações de Girard, como seguem:

$$\begin{aligned}
 -\frac{a_1}{a_0} &= (r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_{n-1} + r_n) \\
 \frac{a_2}{a_0} &= (r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots + r_1 r_n + r_2 r_3 + r_2 r_4 + \dots + r_2 r_n + \dots + r_1 r_j \dots) \\
 -\frac{a_3}{a_0} &= (r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \dots + r_1 r_2 r_n + \dots + r_1 r_j r_k + \dots) \\
 &\vdots \\
 (-1)^n \frac{a_n}{a_0} &= (r_1 r_2 r_3 \dots r_{n-1} r_n)
 \end{aligned} \tag{36}$$

As relações em (37) permitem concluir que em uma equação algébrica polinomial escrita em sua forma canônica a soma das n raízes é igual ao quociente com sinal trocado entre o coeficiente do termo de grau $n-1$ e o termo de grau n . Além disso o produto das n raízes é igual ao quociente entre o termo independente a_0 e o termo a_n com sinal positivo, se n par, e com sinal negativo, se n ímpar.

Ainda, pode-se obter outra relação importante a partir do quociente entre as relações apresentadas em (36), como sendo

$$\begin{aligned}
 \frac{a_{n-1}}{a_0} &= \frac{-(r_1 r_3 r_4 \dots r_n + r_1 r_2 r_4 \dots r_n + \dots + r_2 r_3 r_4 \dots r_n + \dots)}{r_1 r_2 r_3 \dots r_{n-1} r_n} \\
 \frac{a_n}{a_0} & \\
 \frac{a_{n-1}}{a_n} &= -\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \dots + \frac{1}{r_n}\right)
 \end{aligned} \tag{37}$$

A relação em (37) significa que numa equação algébrica polinomial escrita na forma canônica o quociente entre o coeficiente do termo de primeiro grau e o termo independente é igual ao oposto da soma dos inversos das raízes da equação.

Até aqui foram relacionados definições e teoremas que são tradicionalmente utilizados no estudo de polinômios e equações algébricas no

Ensino Médio. No próximo capítulo apresentam-se alguns métodos numéricos que associados a recursos computacionais podem auxiliar os alunos na resolução de problemas que envolvem equações algébricas polinomiais de 3º grau ou superior.

4 CAPÍTULO III

MÉTODOS NUMÉRICOS

4.1 REGRA E TEOREMAS

Antes de iniciar a exposição dos métodos numéricos, com os quais pretende-se desenvolver esta proposta de atividade, apresentam-se alguns resultados que podem ser aplicados para localização das raízes de uma equação algébrica polinomial.

4.1.1 Regra de Sinal de Descartes

A regra de sinal de Descartes possibilita fazer uma investigação preliminar quanto ao possível número de raízes reais positivas ou negativas que uma equação polinomial pode apresentar.

Dado um polinômio $P(x)=0$ com coeficientes reais, o número de raízes reais positivas, (r_p) , desse polinômio não excede o número v de variações de sinal dos coeficientes. Além disso, $v - r_p$ é um número inteiro, par e não negativo.

Para fazer uma estimativa do número de raízes reais negativas, (neg) , devemos construir o polinômio $P(-x)=0$ e utilizar a regra de Descartes para raízes positivas. O exemplo 1 mostra uma aplicação da regra de Descartes.

Exemplo 1: Por meio da Regra de Sinal de Descartes determine o número possível de raízes reais positivas (r_p) e o número possível de raízes reais negativas (neg) para o polinômio $P(x) = 3x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 10x^2 + 6x + 2$.

Solução:

Primeiramente deve-se observar as possibilidades quanto ao número de raízes reais positivas de $P(x)$ analisando a variação de sinal entre os coeficientes. Considerando o polinômio $P(x) = 3x^5 - 2x^4 + 5x^3 - 10x^2 + 6x + 2$ verifica-se que ocorre um número $v = 4$ de variações de sinal, logo as seguintes situações podem ocorrer:

Se $v = 4$ então isso implica em $v - r_p = 4$, $v - r_p = 2$ ou $v - r_p = 0$, dessa forma

conclui-se que o polinômio $P(x)$ pode ter no máximo 4 raízes reais positivas, duas raízes reais positivas ou nenhuma raiz real positiva.

Agora analisa-se as possibilidades quanto ao número de raízes reais negativas de $P(x)$, para isso construir o polinômio $P(-x) = -3x^5 - 2x^4 - 5x^3 - 10x^2 - 6x + 2$. Analisando a variação de sinal entre os coeficientes, observa-se que ocorre somente uma de variação de sinal, $v = 1$, dessa forma conclui-se que $v - \text{neg} = 0$, logo $\text{neg} = 1$, ou seja, o polinômio $P(x)$ pode ter no máximo uma raiz real negativa.

4.1.2 Teoremas das Raízes Positivas e Teorema do Raio

Alguns teoremas podem auxiliar na localização das raízes de uma equação algébrica polinomial $P(x) = 0$. Apresenta-se aqui o Teorema das Raízes Positivas e o Teorema do Raio.

Teorema das Raízes Reais Positivas: Dados o polinômio $P(x)$ de coeficientes reais e um número α , tem-se $P(x) = Q(x)(x - \alpha) + R(x)$. Se os coeficientes de $Q(x)$ e R forem todos positivos ou nulos, então todas as raízes reais positivas x_i , são tais que $x_i < \alpha$.

Associado ao Teorema das Raízes Reais Positivas existe um processo chamado Cota de Laguerre-Thibault que permite encontrar os extremos ou as cotas superior e inferior do intervalo que contém as raízes reais da equação $P(x)$. A ideia consiste no seguinte: seja $P(x) = 0$ uma equação polinomial de coeficientes reais, fazendo a deflação⁶ de $P(x)$ pelos binômios $(x - 1), (x - 2), (x - 3), \dots, (x - m)$, tem-se $Q(x)$. Espera-se com o processo de deflação que $Q(x)$ tenha todos os coeficientes positivos ou nulos, com $R(x) > 0$. O número m será chamado de cota superior das raízes reais da equação $P(x) = 0$. A cota inferior será obtida realizando o mesmo estudo para o polinômio $P(-x)$.

Para proporcionar melhor compreensão do Teorema das Raízes Reais Positivas apresenta-se o exemplo 2 extraído de Cláudio e Marins (1989).

⁶ Deflação: Método utilizado para reduzir o grau do polinômio $P(x)$ quando objetiva-se localizar um intervalo que contenha as raízes reais da equação $P(x) = 0$.

Exemplo 2: Determine a cota superior para as raízes reais positivas da equação polinomial $P(x) = x^5 + x^4 - 9x^3 - x^2 + 20x - 12 = 0$.

Aplicando o Teorema das Raízes Reais Positivas e a Cota de Laguerre-Thibault pode-se determinar a cota superior desejada. Vale lembrar que o processo de deflação do polinômio $P(x)$ é desenvolvido tal como o dispositivo de Briot-Ruffini utilizado para reduzir o grau de um polinômio a partir de suas raízes. Na primeira etapa da deflação de $P(x)$ por $(x-1)$ obtém-se os coeficientes de $Q_1(x)$ e $R_1(x)$, como apresentados no Quadro 3:

Quadro 1 – Coeficientes de $Q_1(x)$ e $R_1(x)$ após a deflação de $P(x)$ por $(x-1)$.

	1	1	-9	-1	20	-12
1		1	2	-7	-8	12
$Q_1(x)$	1	2	-7	-8	12	$R_1(x) = 0$

Fonte: Autor.

Na segunda etapa tem-se a deflação de $P(x)$ por $(x-2)$ gerando os coeficientes de $Q_2(x)$ e $R_2(x)$, como apresentados no Quadro 4:

Quadro 2 – Coeficientes de $Q_2(x)$ e $R_2(x)$ após a deflação de $P(x)$ por $(x-2)$.

	1	1	-9	-1	20	-12
2		2	6	-6	-14	12
$Q_2(x)$	1	3	-3	-7	6	$R_2(x) = 0$

Fonte: Autor.

Na terceira etapa realiza-se a deflação de $P(x)$ por $(x-3)$, resultando nos coeficientes de $Q_3(x)$ e $R_3(x)$, apresentados no Quadro 5:

Quadro 3 – Coeficientes de $Q_3(x)$ e $R_3(x)$ após a deflação de $P(x)$ por $(x-3)$.

	1	1	-9	-1	20	-12
3		3	12	9	24	132
$Q_3(x)$	1	4	3	8	44	$R_3(x) = 120$

Fonte: Autor.

Como todos os coeficientes de $Q_3(x)$ e $R_3(x)$ são positivos o processo é finalizado, logo conclui-se que as raízes reais positivas de $P(x)$ são menores ou iguais a 3. Para determinar a cota inferior que limita as raízes reais negativas da equação $P(x) = 0$ procede-se de maneira análogo considerando $P(-x) = 0$.

Teorema do Raio: Seja $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ uma equação polinomial, então $P(x)$ tem pelo menos uma raiz no interior do círculo centrado na origem e de raio igual ao $\min\{\rho_1, \rho_2\}$ onde

$$\rho_1 = n \cdot \left| \frac{a_0}{a_1} \right| \text{ e } \rho_2 = \sqrt[n]{\left| \frac{a_0}{a_n} \right|}. \quad (38)$$

Para permitir melhor compreensão do Teorema do Raio apresenta-se o Exemplo 3.

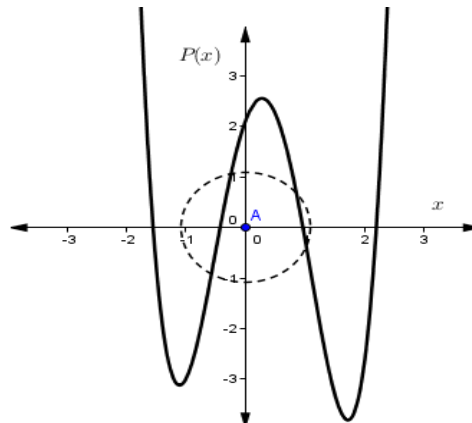
Exemplo 3: Encontre o raio do círculo centrado na origem que contem pelo menos uma raiz real ou complexa da equação $P(x) = 1,5x^4 - 1,8x^3 - 5,2x^2 + 3,2x + 2,1 = 0$.

Solução: A equação $P(x) = 1,5x^4 - 1,8x^3 - 5,2x^2 + 3,2x + 2,1$ está associada a um polinômio de grau $n = 4$, com $a_n = 1,5$, $a_1 = 3,2$, $a_0 = 2,1$. Verifica-se, a partir de (38)

que: $\rho_1 = 4 \cdot \left| \frac{2,1}{3,2} \right| \approx 2,63$ e $\rho_2 = \sqrt[4]{\left| \frac{2,1}{1,5} \right|} \approx 1,09$, onde o $\min\{\rho_1, \rho_2\} = 1,09$. O Teorema do

Raio, garante que $P(x) = 1,5x^4 - 1,8x^3 - 5,2x^2 + 3,2x + 2,1 = 0$, tem pelo menos uma raiz real ou complexa no círculo centrado na origem e raio $r \approx 1,09$. Pode-se confirmar tal resultado, observando a Figura 13.

Figura 2 – Representação gráfica de
 $P(x) = 1,5x^4 - 1,8x^3 - 5,2x^2 + 3,2x + 2,1$



Fonte: Autor.

4.2 MÉTODOS DIRETOS E INDIRETOS

Quando o objetivo é obter as raízes de uma equação polinomial pode-se utilizar métodos diretos e métodos indiretos.

Um método é considerado direto ou exato quando fornecer a solução exata, desconsiderando-se os erros provenientes do processamento do algoritmo utilizado em um sistema computacional. A fórmula de Bháskara, por exemplo, é um método direto, ou seja, por meio de um número finito de passos é possível determinar quais são as raízes reais ou complexas de uma equação algébrica polinomial de 2º grau a partir de seus coeficientes.

Um método é considerado indireto ou iterativo quando fornece uma sequência de soluções aproximadas, em que cada solução é obtida da anterior pela aplicação de um mesmo procedimento. O método indireto ou iterativo é recursivo e pode ser aplicado sucessivas vezes. Geralmente não fornece soluções exatas, mas pode gerar aproximações cada vez melhores dentro de uma faixa de erro previamente estabelecida.

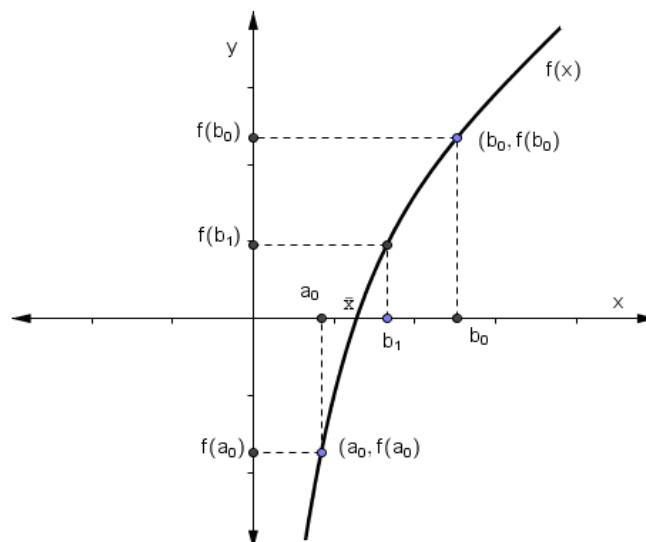
Existem diversos métodos iterativos que podem ser utilizados na obtenção dos valores aproximados das raízes reais (se existirem) de uma equação algébrica polinomial. Neste trabalho, serão abordados especificamente três métodos desse tipo: o método da Bissecção, método da Falsa Posição e o método da Secante. A escolha desses três métodos justifica-se pela não necessidade de utilização de conceitos além daqueles que são desenvolvidos na Educação Básica.

4.3 MÉTODO DA BISSECÇÃO

O método da Bissecção tem sua base no Teorema do Valor Intermediário. O referido teorema afirma que se uma função f é contínua num intervalo fechado $[a,b]$ com a condição $f(a).f(b) < 0$, então existe um valor \bar{x} tal que $f(\bar{x}) = 0$, ou seja, o intervalo deve conter pelo menos uma raiz real da função (ARENALES; DAREZZO, 2008, p. 76).

A ideia geral do método é partir de um intervalo $[a,b]$ que contenha pelo menos uma raiz real, obtido a partir de $f(a).f(b) < 0$ ou da representação gráfica de $f(x)$. As sucessivas partições do intervalo $[a,b]$ geram uma sequência de intervalos $[a_n, b_n]$ com $n = 0, 1, 2, \dots$ onde $a_0 = a$ e $b_0 = b$ e tal que $f(a_n).f(b_n) < 0$ onde cada intervalo da sequência tem amplitude igual a metade da amplitude do intervalo anterior. O critério de parada deverá ocorrer quando a amplitude do intervalo que contém a raiz for menor que o erro ou tolerância estabelecido previamente. A Figura 14 apresenta de forma mais detalhada a interpretação geométrica do método da Bissecção.

Figura 3 – Interpretação geométrica do método da Bissecção.



Fonte: Autor.

Para compreender o funcionamento do método da Bissecção pode-se observar o desenvolvimento dos cálculos considerando $f(a_0) < 0$ e $f(b_0) > 0$, conforme Figura 14. Para $i = 0$ tem-se $x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$, onde x_0 é a primeira aproximação de \bar{x} . Se $f(x_0) > 0$, toma-se $a_1 = a_0$ e $b_1 = x_0$ na próxima iteração, senão $a_1 = x_0$ e $b_1 = b_0$. Para $i = 1$ tem-se $x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$, logo x_1 é a segunda aproximação de \bar{x} . Se $f(x_1) > 0$, toma-se $a_2 = a_1$ e $b_2 = x_1$ na próxima iteração, senão $a_2 = x_1$ e $b_2 = b_1$.

Repetindo sucessivamente esse procedimento obtém-se a cada iteração um novo intervalo com amplitude igual a metade da amplitude do intervalo da iteração anterior, contendo uma aproximação cada vez próxima da raiz \bar{x} .

A aplicação sucessiva do método da Bissecção pode gerar uma sequência a_n crescente de aproximações para \bar{x} limitada superiormente por b_0 ou ainda uma sequência b_n decrescente de aproximações para \bar{x} limitada inferiormente por a_0 . Considerando que toda sequência monótona e limitada é convergente e $a_n < \bar{x} < b_n$, temos que $a = \lim_{i \rightarrow \infty} a_n = \lim_{i \rightarrow \infty} b_n = b = \bar{x}$, onde \bar{x} é a raiz da função isolada, inicialmente, no intervalo $[a, b]$.

Segundo Ruggiero e Lopes (1988) a convergência do método da Bissecção estará garantida desde que as condições exigidas pelo método sejam observadas.

O número de iterações dependerá da precisão desejada e da amplitude do intervalo que contém a raiz, quanto maior for a amplitude do intervalo e a precisão exigida maior será o número de iterações. No caso do método da Bissecção o número mínimo (n) de iterações pode ser estimado através da fórmula

$$n > \frac{\log(b - a) - \log(E)}{\log 2} - 1, \text{ sendo } a \text{ e } b \text{ os extremos do intervalo onde a raiz da função}$$

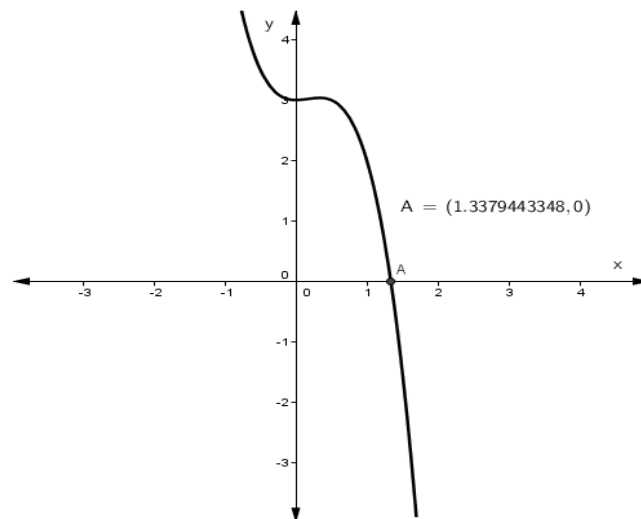
foi isolada e E a precisão desejada. No Apêndice A, apresenta-se a implementação do método da Bissecção de forma mais detalhada.

Para compreender a aplicação do método da Bissecção apresenta-se o Exemplo 4.

Exemplo 4: Encontre uma aproximação para a raiz real da equação polinomial $P(x) = -2x^3 + x^2 + 3 = 0$, localizada no intervalo $[1,2]$.

Solução: Antes de apresentar a solução aproximada da equação $P(x) = 0$ no intervalo indicado deve-se observar a dificuldade existente para obtê-la considerando os métodos diretos, mesmo assim, é interessante abordá-la no Ensino Médio, pois permitirá o uso de outros recursos e possibilitará ao aluno um estudo mais aprofundado e completo. Inicialmente representa-se graficamente $P(x) = -2x^3 + x^2 + 3$ com o auxílio do *software* Geogebra. O valor 1,3379443348 aparece como aproximação da raiz de $P(x) = 0$ com 10 casas decimais conforme Figura 15.

Figura 4 – Representação gráfica de $P(x) = -2x^3 + x^2 + 3$.



Fonte: Autor.

O Quadro 6 apresenta a sequência de aproximações para a raiz da equação polinomial $P(x) = -2x^3 + x^2 + 3 = 0$, localizada no intervalo $[1,2]$, ilustrando algumas das 31 iterações do método da Bisseção.

Quadro 4 – Aproximações da raiz real de $P(x) = -2x^3 + x^2 + 3 = 0$ contida no intervalo $[1,2]$ obtidas com auxílio do método da Bissecção e planilha eletrônica.

Sequência de aproximações da raiz real de $P(x) = -2x^3 + x^2 + 3 = 0$ contida no intervalo $[1,2]$							
n	Na	b _n	x _n	f(a _n)	f(b _n)	f(x _n)	Erro = b _n - a _n
0	1,0000000000	2,0000000000	1,5000000000	2,0000000000	-9,0000000000	-1,5000000000	1,0000000000
1	1,0000000000	1,5000000000	1,2500000000	2,0000000000	-1,5000000000	0,6562500000	0,5000000000
2	1,2500000000	1,5000000000	1,3750000000	0,6562500000	-1,5000000000	-0,3085937500	0,2500000000
3	1,2500000000	1,3750000000	1,3125000000	0,6562500000	-0,3085937500	0,2006835938	0,1250000000
5	1,3125000000	1,3437500000	1,3281250000	0,2006835938	-0,0470581055	0,0785140991	0,0312500000
9	1,3378906250	1,3398437500	1,3388671875	0,0004331321	-0,0153435469	-0,0074485000	0,0019531250
10	1,3378906250	1,3388671875	1,3383789063	0,0004331321	-0,0074485000	-0,0035060078	0,0009765625
15	1,3379211426	1,3379516602	1,3379364014	0,0001870340	-0,0000590772	0,0000639801	0,0000305176
20	1,3379440308	1,3379449844	1,3379445076	0,0000024519	-0,0000052392	-0,0000013937	0,0000009537
25	1,3379443288	1,3379443586	1,3379443437	0,0000000484	-0,0000001919	-0,0000000718	0,0000000298
28	1,3379443325	1,3379443362	1,3379443344	0,0000000184	-0,0000000117	0,0000000033	0,0000000037
29	1,3379443344	1,3379443362	1,3379443353	0,0000000033	-0,0000000117	-0,0000000042	0,0000000019
30	1,3379443344	1,3379443353	1,3379443348	0,0000000033	-0,0000000042	-0,0000000004	0,0000000009

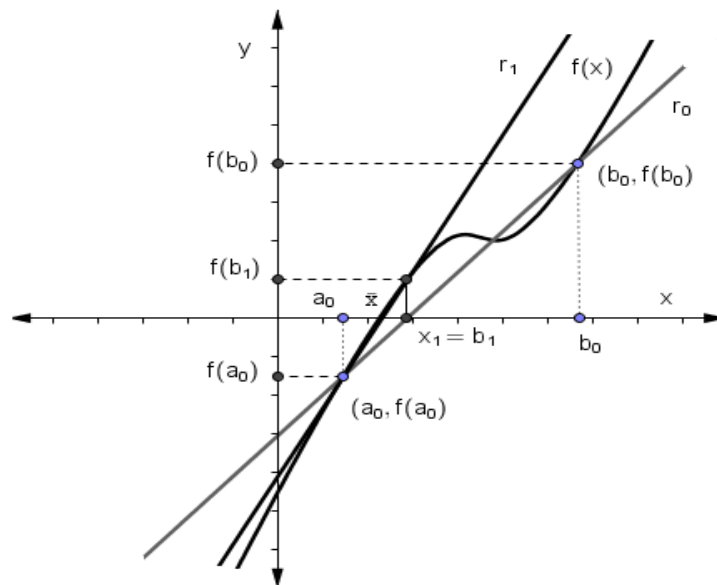
Fonte: Autor.

Verifica-se, no Quadro 6, que o método da Bissecção reproduziu resultados similares ao apresentado com o auxílio do *software* Geogebra.

4.4 MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO

O método da Falsa Posição também conhecido como *Regula Falsi* ou Regra Falsa utiliza a média aritmética ponderada na obtenção da sequência de aproximações, diferentemente do método da Bissecção, que utiliza a média aritmética simples. A ideia geométrica do método da Falsa Posição consiste em aproximar uma curva por meio de um feixe de retas que interceptam o eixo x, em pontos cada vez mais próximos da raiz procurada. A Figura 16 mostra o funcionamento do método do ponto de vista geométrico.

Figura 5 – Interpretação geométrica do método da Falsa Posição.



Fonte: Autor.

A seguir descreve-se detalhadamente o funcionamento do método da Falsa Posição com $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Inicialmente a raiz de $f(x)$ deve ser isolada num intervalo fechado $[a, b]$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Para $i = 0$, a reta r_0 que passa pelos pontos $(a_0, f(a_0))$ e $(b_0, f(b_0))$ intersecciona o eixo x no ponto x_1 cujo valor pode ser calculado pela relação

$$x_1 = \frac{a_0 \cdot f(b_0) - b_0 \cdot f(a_0)}{f(b_0) - f(a_0)}. \text{ Se } f(x_1) > 0 \text{ toma-se } a_1 = a_0 \text{ e } b_1 = x_1 \text{ na próxima iteração,}$$

caso contrário, se $f(x_1) < 0$ toma-se $a_1 = x_1$ e $b_1 = b_0$.

Para $i = 1$, a reta r_1 que passa pelos pontos $(a_0, f(a_0))$ e $(b_1, f(b_1))$ intersecciona o eixo x no ponto x_2 cujo valor pode ser calculado pela relação

$$x_2 = \frac{a_1 \cdot f(b_1) - b_1 \cdot f(a_1)}{f(b_1) - f(a_1)}. \text{ Se } f(x_2) > 0 \text{ toma-se } a_2 = a_1 \text{ e } b_2 = x_2 \text{ na próxima iteração,}$$

caso contrário, se $f(x_2) < 0$ toma-se $a_2 = x_2$ e $b_2 = b_1$.

Repetindo sucessivamente o procedimento obtém a cada iteração um novo intervalo com amplitude menor contendo uma aproximação mais próxima

da raiz \bar{x} calculada a partir da relação $x_i = \frac{a_{i-1} \cdot f(b_{i-1}) - b_{i-1} \cdot f(a_{i-1})}{f(b_{i-1}) - f(a_{i-1})}$ com $i = 1, 2, 3, \dots$

O processo iterativo será desenvolvido até o momento em que

$E \leq |f(x_n)|$, onde E é a precisão desejada. Assim como no método da Bissecção, Ruggiero e Lopes (1988) afirmam que a convergência estará garantida desde que as condições exigidas pelo método sejam observadas. No Apêndice B, apresenta-se a implementação do método da Falsa Posição de forma mais detalhada.

Para compreender a aplicação do método da Falsa Posição apresenta-se a sequência de aproximações da raiz de $P(x) = -2x^3 + x^2 + 3 = 0$ contida no intervalo $[1,2]$, ilustrando algumas das 26 iterações, conforme Quadro 7.

Quadro 5 – Aproximações da raiz real de $P(x) = -2x^3 + x^2 + 3 = 0$ contida no intervalo $[1,2]$ obtidas com auxílio do método da Falsa Posição e planilha eletrônica.

Sequência de aproximações da raiz real de $P(x) = -2x^3 + x^2 + 3 = 0$ contida no intervalo $[1,2]$							
n	a_n	$f(a_n)$	b_n	$f(b_n)$	x_n	$f(x_n)$	$\text{Erro} \leq f(x_n) $
0	1,0000000000	2,0000000000	2,0000000000	-9,0000000000	1,1818181818	1,0954169797	1,0954169797
1	1,1818181818	1,0954169797	2,0000000000	-9,0000000000	1,2705961152	0,5118769345	0,5118769345
2	1,2705961152	0,5118769345	2,0000000000	-9,0000000000	1,3098486231	0,2210799027	0,2210799027
3	1,3098486231	0,2210799027	2,0000000000	-9,0000000000	1,3263953401	0,0922047008	0,0922047008
5	1,3332264133	0,0378923173	2,0000000000	-9,0000000000	1,3360219319	0,0154776095	0,0154776095
9	1,3378148219	0,0010443621	2,0000000000	-9,0000000000	1,3378916531	0,0004248413	0,0004248413
10	1,3378916531	0,0004248413	2,0000000000	-9,0000000000	1,3379229062	0,0001728114	0,0001728114
15	1,3379437482	0,0000047303	2,0000000000	-9,0000000000	1,3379440962	0,0000019240	0,0000019240
20	1,3379443283	0,0000000527	2,0000000000	-9,0000000000	1,3379443321	0,0000000214	0,0000000214
23	1,3379443343	0,0000000035	2,0000000000	-9,0000000000	1,3379443346	0,0000000014	0,0000000014
24	1,3379443346	0,0000000014	2,0000000000	-9,0000000000	1,3379443347	0,0000000006	0,0000000006
25	1,3379443347	0,0000000006	2,0000000000	-9,0000000000	1,3379443348	0,0000000002	0,0000000002

Fonte: Autor.

Observa-se, no Quadro 7, que o método da Falsa Posição com 26 iterações reproduziu resultados similares ao apresentado com o auxílio do *software* Geogebra, assim como resultados similares ao apresentado pelo método da Bissecção, porém com um número menor de iterações.

4.5 MÉTODO DA SECANTE

Um método mais eficiente em termos de convergência é o método de Newton, também conhecido como método das Tangentes, justamente porque o

método exige o cálculo do valor numérico da função derivada de f , em um valor x_i , em cada iteração. Porém, nesse trabalho o método de Newton não será abordado pois o mesmo exige conceitos matemáticos além daqueles que são desenvolvidos normalmente no Ensino Médio. Como uma alternativa, para contornar a questão do cálculo da derivada pode-se substituir no método de Newton a derivada de f em x_i

pelo quociente de diferenças $f'(x_i) \approx \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$ onde x_i e x_{i-1} são aproximações

para a raiz \bar{x} contida num intervalo $[a,b]$. Fazendo a substituição da derivada pelo

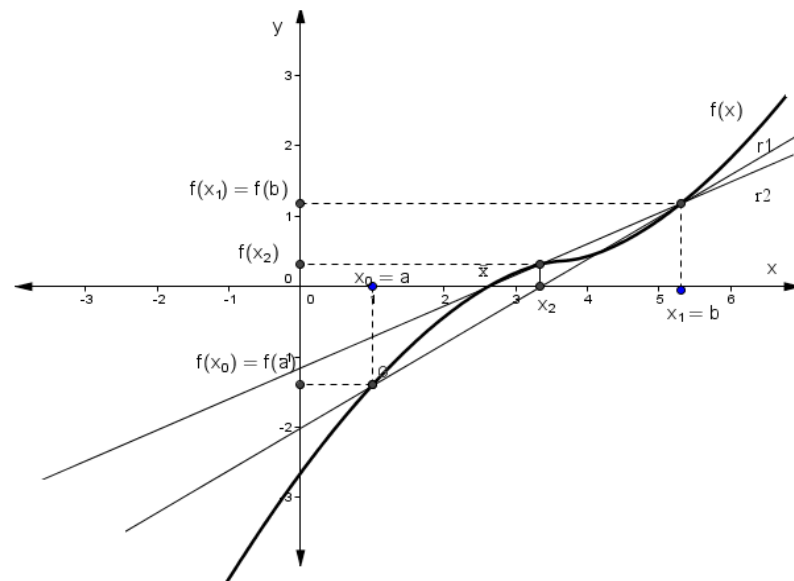
quociente de diferenças obtém-se a expressão $\varphi(x_{i+1}) = \frac{x_{i-1} \cdot f(x_i) - x_i \cdot f(x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$ que será

a fórmula de iteração do chamado de método da Secante.

No método da Secante deve-se, inicialmente, obter um intervalo fechado $[a,b]$ contendo a raiz \bar{x} . Considere x_0 e x_1 aproximações iniciais de \bar{x} , normalmente toma-se para x_0 e x_1 respectivamente os valores dos extremos do intervalo $[a,b]$. A seguir construa a reta r_1 secante ao gráfico de $f(x)$ passando pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$. A reta secante cortará o eixo x no ponto x_2 que será a primeira aproximação obtida pelo método da Secante para \bar{x} .

Para a segunda iteração considere x_1 e x_2 como aproximações de \bar{x} , construa a reta r_2 secante ao gráfico de $f(x)$ passando pelos pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$. Essa reta secante cortará o eixo x no ponto x_3 , que será a segunda aproximação para a raiz procurada. Repetindo-se o processo obtém-se a cada iteração uma nova aproximação para \bar{x} , até que o erro $E \leq |f(x_{n+1})|$ seja satisfeito. A Figura 17 mostra a interpretação geométrica do método da Secante.

Figura 6 – Interpretação geométrica do método da Secante.



Fonte: Autor.

Segundo Ruggiero e Lopes (1988) o método da Secante têm condições de convergência mais restritivas, por outro lado, esse método possui convergência mais rápida que os métodos da Bissecção e da Falsa Posição. No Apêndice C, apresenta-se a implementação do método da Secante de forma mais detalhada.

Para compreender o funcionamento do método da Secante apresenta-se no Quadro 8 a sequência de aproximações da raiz real da equação $P(x) = -2x^3 + x^2 + 3 = 0$, contida no intervalo $[1,2]$ com 7 iterações.

Quadro 6 – Aproximações da raiz real de $P(x) = -2x^3 + x^2 + 3 = 0$ contida no intervalo $[1,2]$ obtidas com auxílio do método da Secante e planilha eletrônica.

Sequência de aproximações da raiz real de $P(x) = -2x^3 + x^2 + 3 = 0$ contida no intervalo $[1,2]$.							
n	x_{n-1}	x_n	x_{n+1}	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$	$f(x_{n+1})$	Erro $\leq f(x_{n+1}) $
1	1,0000000000	2,0000000000	1,1818181818	2,0000000000	-9,0000000000	1,0954169797	1,0954169797
2	2,0000000000	1,1818181818	1,2705961152	-9,0000000000	1,0954169797	0,5118769345	0,5118769345
3	1,1818181818	1,2705961152	1,3484714500	1,0954169797	0,5118769345	-0,0856789725	-0,0856789725
4	1,2705961152	1,3484714500	1,3373055012	0,5118769345	-0,0856789725	0,0051491220	0,0051491220
5	1,3484714500	1,3373055012	1,3379385083	-0,0856789725	0,0051491220	0,0000470000	0,0000470000
6	1,3373055012	1,3379385083	1,3379443380	0,0051491220	0,0000469882	0,0000470000	0,0000470000
7	1,3379385083	1,3379443380	1,3379443348	0,0000469882	-0,0000000262	0,0000470000	0,0000470000

Fonte: Autor.

Verifica-se, no Quadro 8, que o método da Secante com 7 iterações reproduziu resultados similares ao apresentado com o auxílio do *software* Geogebra, assim como resultados similares ao apresentado pelos métodos da Bissecção e da Posição Falsa, porém com um número muito menor de iterações.

Pode-se observar que o método da Secante, em termos de iterações, convergiu mais rapidamente que os métodos da Bissecção e da Posição Falsa, porém, antes de afirmar que um método é superior a outro, deve-se avaliar, também, o tempo computacional ou tempo de execução gasto para obter o resultado procurado.

5 CAPÍTULO IV

PROPOSTA DE TRABALHO

A evolução e a expansão tecnológica da contemporaneidade exigem que os professores estejam atentos a esses avanços e procurem alternativas que permitam a diversificação do seu trabalho. Atualmente, existem muitos *softwares* gratuitos disponíveis que permitem ao professor desenvolver um trabalho dinâmico e diferenciado com possibilidade de aprofundamento maior sobre os temas.

Apesar de existirem há mais de vinte anos, os *softwares* educativos ainda não foram utilizados em todo o seu potencial na prática docente. A adoção sistemática de *softwares* educativos nas escolas é mínima. Isso se deve, em parte à carência de sistemas de qualidade e a falta de informações sobre aspectos técnicos e pedagógicos de bons sistemas existentes. (LIMA, 2006, p. 28).

Na Matemática o uso de recursos computacionais tem ocorrido com maior frequência no estudo de geometria e funções, mas vale lembrar que existem diversos tipos de *softwares* que podem ser utilizados para explorar e facilitar o estudo e a compreensão de outros conceitos, como por exemplo, os polinômios e as equações polinomiais.

Conforme exposto anteriormente, em geral, o estudo de polinômios e equações polinomiais é desenvolvido de forma paralela e superficial, já que é baseado na memorização de definições e resultados que são aplicados a partir de uma lista de passos com enfoque algébrico bem pesado. Além disso, a maioria dos exemplos e exercícios que envolvem polinômios e equações polinomiais propostos aos alunos na escola estão dissociados de uma contextualização. Ubiratan D'Ambrósio (2001, p. 76-77) expressa sua opinião a respeito da contextualização da Matemática.

Contextualizar a Matemática é essencial para todos. Afinal, como deixar de relacionar os Elementos de Euclides com o panorama cultural da Grécia Antiga? Ou a adoção da numeração indo-arábica na Europa como florescimento do mercantilismo nos séculos XIV e XV? E não se pode entender Newton descontextualizado. [...] Alguns dirão que a contextualização não é importante, que o importante é reconhecer a Matemática como a manifestação mais nobre do pensamento e da inteligência humana... e assim justificam sua importância nos currículos.

Diante do exposto, pretende-se, nesse capítulo, elaborar e descrever a proposta de atividades destinada para os alunos do Ensino Médio, contendo várias sugestões de situações-problemas envolvendo polinômios e equações algébricas polinomiais. A proposta inclui a possibilidade de uso de *softwares* na representação gráfica e uso de planilha eletrônica na resolução numérica dos problemas.

Ainda, vale ressaltar que a proposta deste trabalho poderá ser aplicada na escola se o professor tiver domínio dos métodos numéricos abordados aqui e se o ambiente escolar onde o mesmo atua oferecer condições para o desenvolvimento do trabalho.

5.1 TRÊS PROBLEMAS GREGOS

Muitos problemas do mundo real estão associados à Geometria e muitos destes podem ser modelados por meio de equações polinomiais. Nessa parte do trabalho deseja-se fazer um resgate de três problemas geométricos da Grécia Antiga. Muitas tentativas foram feitas objetivando resolver esses problemas empregando somente régua, sem graduação e compasso, porém 2000 anos depois, verificou-se que é impossível resolvê-los somente com tais instrumentos.

Problema 1 – Duplicação do Cubo

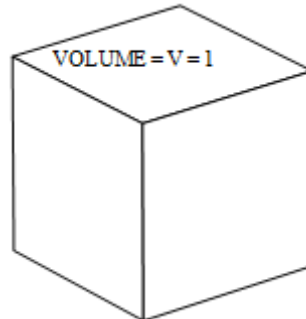
O surgimento do problema da duplicação do cubo é um pouco duvidoso. Um lenda conta que um grupo de pessoas preocupadas com uma peste que se espalhava pela região de Atenas, procurou o oráculo Apolo na cidade de Dhelpos na tentativa de encontrar uma maneira de acabar com a peste. O oráculo informou que a peste acabaria quando alguém conseguisse dobrar o volume do cubo que sustentava a estátua do deus Apolo. Os atenienses resolveram o problema dobrando a medida da aresta do cubo, mas isso acabou gerando um cubo com volume oito vezes maior que o volume original.

Courante e Robbins (2000) apresentam uma prova indireta da impossibilidade de resolução desse problema utilizando somente régua sem graduação e compasso.

Entendendo o problema: O problema da duplicação do cubo consiste em: dado um cubo de volume $V=1$ obter a medida da aresta de um novo

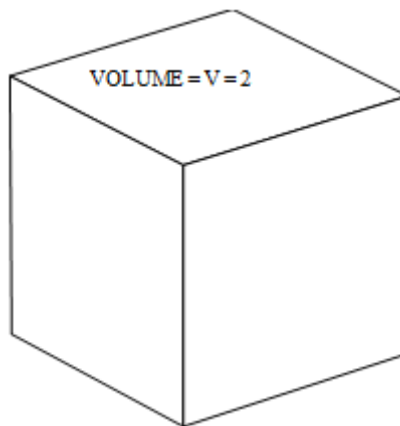
cubo de volume $V=2$ conforme figuras 18 e 19.

Figura 7 – Cubo de volume $V=1$.



Fonte: Autor.

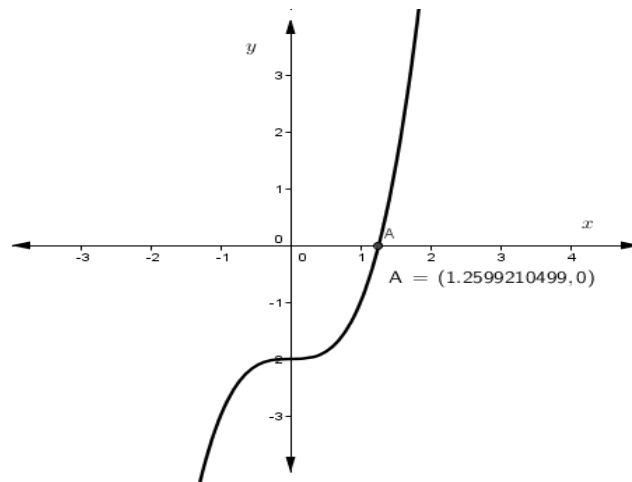
Figura 8 – Cubo de volume $V=2$.



Fonte: Autor.

Resolvendo o problema: Duplicar o cubo significa obter a medida da aresta x do cubo tal que $x^3 = 2$, ou seja, $x = \sqrt[3]{2}$, que pode ser aproximado pelo valor 1,2599210499, com dez casas decimais conforme apresentado na Figura 20 com o auxílio do *software* Geogebra.

Figura 9 – Representação da raiz da equação $x^3 - 2 = 0$.



Fonte: Autor.

No Quadro 9 apresenta-se a sequência de aproximações da raiz real da equação $x^3 - 2 = 0$ contida no intervalo $[1,2]$ gerada pela aplicação do método da Bissecção. A aproximação da raiz com dez casas decimais, como apresentado pelo *software* Geogebra na Figura 20, pode ser obtido aplicando o método da Bissecção com 29 iterações, conforme apresentado no Quadro 9.

Quadro 7 – Aproximações da solução do problema da duplicação do cubo obtidas com auxílio do método da Bissecção e a planilha eletrônica.

Sequência de aproximações para raiz real da equação $x^3 - 2 = 0$ contida no intervalo $[1,2]$							
n	a_n	b_n	x_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(x_n)$	Erro = $ b_n - a_n $
0	1,0000000000	2,0000000000	1,5000000000	-1,0000000000	6,0000000000	1,3750000000	1,0000000000
1	1,0000000000	1,5000000000	1,2500000000	-1,0000000000	1,3750000000	-0,0468750000	0,5000000000
2	1,2500000000	1,5000000000	1,3750000000	-0,0468750000	1,3750000000	0,5996093750	0,2500000000
3	1,2500000000	1,3750000000	1,3125000000	-0,0468750000	0,5996093750	0,2609863281	0,1250000000
5	1,2500000000	1,2812500000	1,2656250000	-0,0468750000	0,1033020020	0,0272865295	0,0312500000
10	1,2597656250	1,2607421875	1,2602539063	-0,0007400736	0,0039129732	0,0015855484	0,0009765625
15	1,2599182129	1,2599487305	1,2599334717	-0,0000135104	0,0001318234	0,0000591556	0,0000305176
20	1,2599201202	1,2599210739	1,2599205971	-0,0000044272	0,0000001144	-0,0000021564	0,0000009537
25	1,2599210441	1,2599210739	1,2599210590	-0,0000000275	0,0000001144	0,0000000434	0,0000000298
26	1,2599210441	1,2599210590	1,2599210516	-0,0000000275	0,0000000434	0,0000000079	0,0000000149
27	1,2599210441	1,2599210516	1,2599210478	-0,0000000275	0,0000000079	-0,0000000098	0,0000000075
28	1,2599210478	1,2599210516	1,2599210497	-0,0000000098	0,0000000079	-0,0000000009	0,0000000037

Fonte: Autor.

O problema da duplicação do cubo, resolvido acima, proporciona a criação de outras situações que podem exploradas em sala de aula, pelo professor de Matemática do Ensino Médio, articulando o uso do *software* Geogebra e os métodos numéricos associados a uma planilha eletrônica.

Atividade proposta 1 – Dado um cubo de volume $V=1$ determine a medida da aresta de um cubo de volume $V=3$.

- a) Descreva a equação para o problema proposto e resolva algebricamente.
- b) Com o auxílio do *software* Geogebra identifique o intervalo $[a,b]$ que contém a raiz real da equação descrita no item (a) apresentando o resultado da aproximação da raiz com 10 casas decimais
- c) Aplique o método da Bissecção combinado com a planilha eletrônica para obter a aproximação da raiz da equação contida no intervalo $[a,b]$ identificado no item (b).
- d) Aplique o método da Secante combinado com a planilha eletrônica para obter a aproximação da raiz da equação contida no intervalo $[a,b]$ identificado no item (b).
- e) Compare os resultados obtidos em c) e d).

Atividade proposta 2 – Considere a equação $x^3 - A = 0$ com $-8 \leq A \leq 8$.

- a) Utilize o recurso do controle deslizante e animação do *software* Geogebra para visualizar a representação gráfica de $x^3 - A = 0$ para valores distintos de A no intervalo indicado.
- b) Com o recurso indicado no item (a) determinar o intervalo que contém todas as raízes reais da equação $x^3 - A = 0$ para os valores de A com $-8 \leq A \leq 8$.
- c) Escolha um valor de A no intervalo de $[-8,8]$ e determine com o auxílio do *software* Geogebra o intervalo $[a,b]$ que contém a raiz real da equação $x^3 - A = 0$ para o valor de A escolhido. Apresente o valor da raiz aproximada com dez casas decimais com o auxílio do *software* Geogebra.
- d) Obtenha a sequência de aproximações para a raiz da equação $x^3 - A = 0$ para o valor de A escolhido em c) com o auxílio do método da Falsa Posição combinado com a planilha eletrônica.
- e) Idem d) com o auxílio do método da Secante combinado com a planilha eletrônica.
- f) Compare os resultados obtidos em (d) e (e), considerando o número de iterações

utilizadas em cada caso.

Atividade proposta 3 – Considere a equação $(x - A)^3 = 0$ com $-4 \leq A \leq 4$.

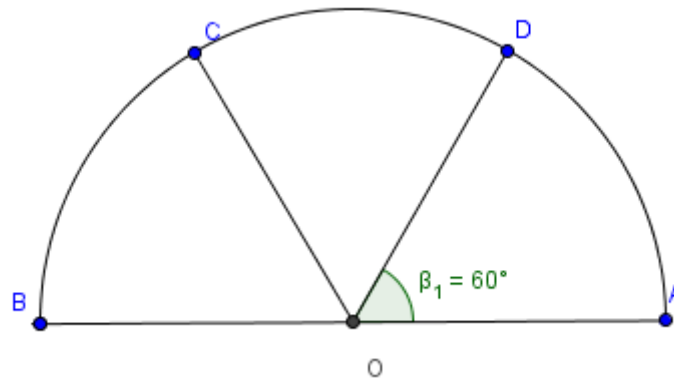
- Utilize o recurso do controle deslizante e animação do *software* Geogebra para visualizar a representação gráfica de $(x - A)^3 = 0$ para valores distintos de A no intervalo indicado.
- Com o recurso indicado no item (a) determinar o intervalo que contém todas as raízes reais da equação $(x - A)^3 = 0$ para os valores de A com $-4 \leq A \leq 4$.
- Escolha um valor de A no intervalo de $[-4,4]$ e determine com o auxílio do *software* Geogebra o intervalo $[a,b]$ que contém a raiz real da equação $(x - A)^3 = 0$ para o valor de A escolhido. Qual é a relação do valor de A com a raiz real da equação?
- Avalie a representação gráfica de $P(x) = (x - A)^3 = 0$ a medida que A varia?
- Obtenha com o auxílio do método da Bissecção e da planilha eletrônica a sequência de aproximações para a raiz de $P(x) = (x - A)^3 = 0$ para o valor de A escolhido em (c).

Problema 2 – Trisseção do ângulo

O problema da trisseção consiste em dividir, com auxílio de régua não graduada e compasso, um ângulo em três partes iguais. Esse problema pode ser resolvido para alguns ângulos notáveis como por exemplo 90° e 180° graus, porém não existe um Método que utilize somente régua não graduada e compasso que permita a trisseção de ângulos de qualquer amplitude.

Entendendo o problema: Seja β um ângulo, como dividir esse ângulo em três partes iguais? Na Figura 21 apresenta-se a trisseção do ângulo de medida $\beta = 180^\circ$ com o auxílio do *software* Geogebra. A trisseção desse ângulo é obtida facilmente construindo uma semicircunferência de centro no ponto O . Utilizando o compasso com a ponta seca no ponto A e abertura igual ao raio, marcaremos três pontos sobre a semicircunferência, sendo que o último deles será o ponto B . Ligando os pontos C e D ao centro da semircunferência teremos três ângulos de medida $\beta_1 = 60^\circ$ cada um.

Figura 10 – Trisseccção do ângulo de 180° .



Fonte: Autor.

Mas afinal, o que acaba tornando o problema da trisseccção de um ângulo insolúvel quando desejamos resolvê-lo por meio de régua não graduada e compasso?

Resolvendo o problema: Do ponto de vista algébrico a resolução do problema é definido da seguinte forma: Seja φ um ângulo tal que $\cos(\varphi) = v$, logo o problema de trisseccção do ângulo φ resume-se a encontrar $\cos(\frac{\varphi}{3})$. Para isso deve-se demonstrar que $\cos(\varphi) = 4\cos^3(\frac{\varphi}{3}) - 3\cos(\frac{\varphi}{3})$.

August de Moivre (1667 – 1754) descobriu que dado um número complexo z , qualquer potência inteira de z pode ser escrita como:

$$z^n = \rho^n (\cos(n\varphi) + i\text{isen}(n\varphi)). \quad (39)$$

onde ρ é o raio do círculo onde z está situado, φ o argumento do número complexo z e n um número inteiro. Se $\rho=1$ o círculo será unitário, logo a equação (39) poderá ser reescrita como segue:

$$(\cos(\varphi) + i\text{isen}(\varphi))^n = \cos(n\varphi) + i\text{isen}(n\varphi). \quad (40)$$

Da Álgebra elementar tem-se que:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3. \quad (41)$$

Considerando $n = 3$ em (40) e aplicando o resultado apresentado em (41), tem-se a seguinte igualdade:

$$\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi) = \cos^3(\varphi) - 3\cos(\varphi)\sin^2(\varphi) + i(3\cos^2(\varphi)\sin(\varphi) - \sin^3(\varphi)). \quad (42)$$

A igualdade obtida em (42) será verdadeira se e somente se as igualdades (43) e (44) forem verificadas:

$$\cos(3\varphi) = \cos^3(\varphi) - 3\cos(\varphi)\sin^2(\varphi) \quad (43)$$

$$\sin(3\varphi) = 3\cos^2(\varphi)\sin(\varphi) - \sin^3(\varphi). \quad (44)$$

Substituindo $\sin^2(\varphi) = 1 - \cos^2(\varphi)$ em (43) tem-se:

$$\cos(3\varphi) = \cos^3(\varphi) - 3\cos(\varphi)(1 - \cos^2(\varphi)) = 4\cos^3(\varphi) - 3\cos(\varphi). \quad (45)$$

Observando a equação (45) e fazendo a substituição de φ por $\frac{\varphi}{3}$ pode-se escrever $\cos(\varphi) = 4\cos^3(\frac{\varphi}{3}) - 3\cos(\frac{\varphi}{3})$, ou equivalentemente:

$$v = 4\cos^3(\frac{\varphi}{3}) - 3\cos(\frac{\varphi}{3}). \quad (46)$$

Considerando a equação (46) e fazendo a substituição $m = \cos(\frac{\varphi}{3})$ obtém-se a equação polinomial descrita em (47):

$$4m^3 - 3m - v = 0. \quad (47)$$

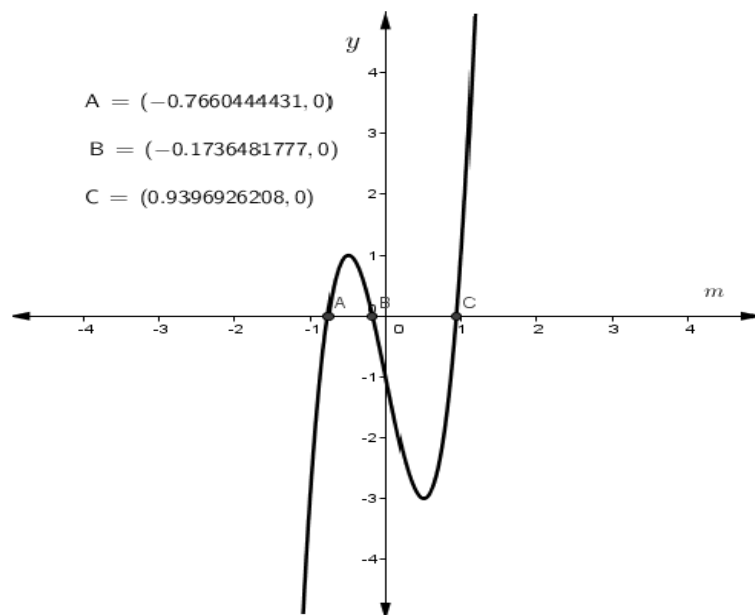
Portanto a resolução do problema da trisseção de um ângulo está vinculado a resolução de uma equação cúbica. Para compreender melhor isso

considere o ângulo $\varphi = 60^\circ$ e $\cos(\varphi) = v$, implica afirmar que em (47) $v=0,5$, resultando então que $4m^3 - 3m - 0,5 = 0$, ou equivalentemente:

$$8m^3 - 6m - 1 = 0. \quad (48)$$

A Figura 22 mostra geometricamente as três raízes reais da equação (48) e suas aproximações com dez casas decimais obtidas com o *software* Geogebra.

Figura 11 – Representação das raízes reais da equação (48).



Fonte: Autor.

Observando os resultados apresentados na Figura 22, verifica-se que somente o valor de $m=0,9396926208$ corresponde ao ângulo de 20° , que representa a terça parte do ângulo de 60° . Os demais valores de m satisfazem a equação dada em (48), porém não estão associados a ângulos que representem a terça parte do ângulo de 60° .

O problema da trissecção do ângulo permite ao professor desenvolver, junto aos alunos com o auxílio de recursos computacionais, uma análise de diversas outras situações.

Atividade proposta 4 – Considerando o problema da trissecção do ângulo:

- a) Escreva a equação cúbica associada ao problema da trissecção do ângulo considerando $\varphi = 30^\circ$. Utilizando o recurso do controle deslizante e animação do *software* Geogebra identifique graficamente todas as raízes reais da equação descrita em (a) apresentando os valores aproximados de cada uma delas com dez casas decimais.
- b) Aplique o método da Bissecção com auxílio da planilha eletrônica para obter a sequência de aproximações para a raiz real da equação obtida em (a) que esteja associada a terça parte do ângulo de 30° . (Faça iterações até que $|a_n - b_n| \leq 10^{-6}$).
- c) Aplique o método da Secante com auxílio da planilha eletrônica para obter a sequência de aproximações para a raiz real da equação obtida em (a) que esteja associada a terça parte do ângulo de 30° . (Faça iterações até que $|f(x_{n+1})| \leq 10^{-6}$).
- d) Aplique o método da Falsa Posição com auxílio da planilha eletrônica para obter a sequência de aproximações para a raiz real da equação obtida em (a) que esteja associada a terça parte do ângulo de 30° . (Faça iterações até que $|f(x_n)| \leq 10^{-6}$).
- e) Compare os resultados obtidos pelos métodos numéricos de acordo com o número de iterações e o resultado obtido no *software* Geogebra.

Atividade proposta 5 – Considere a equação polinomial $4m^3 - 3m - v = 0$ onde $v = \cos \varphi$, $-1 \leq \cos(\varphi) \leq 1$ e $0 \leq \varphi \leq 180^\circ$.

- a) Com auxílio do recurso do controle deslizante e da animação do *software* Geogebra represente geometricamente todas as raízes de $4m^3 - 3m - v = 0$ observando os resultados possíveis.
- b) Para qualquer ângulo φ a equação tem três raízes reais simples?
- c) A equação admite raízes complexas?
- d) A menor raiz real da equação ocorre quando φ mede quanto?
- e) A maior raiz real da equação ocorre quando φ mede quanto?
- f) A equação admite uma raiz real dupla para quais valores de φ ?
- g) Para qual valor de φ ocorre o máximo de $P(m) = 4m^3 - 3m - v$ no intervalo $0 \leq \varphi \leq 180^\circ$? E o valor de mínimo?
- h) Qual é o valor máximo de $P(m) = 4m^3 - 3m - v$, com $-1 \leq \cos(\varphi) \leq 1$? E o valor de mínimo?

Atividade proposta 6 – Considerando o problema da trissecção do ângulo

- a) Descreva a equação algébrica polinomial de 3º grau para a trissecção do ângulo $\varphi = 90^\circ$.
- b) Obtenha as raízes reais da equação obtida em (a) com dez casas decimais com auxílio do *software* Geogebra. Que relação existe entre as raízes reais não nulas?
- c) O fato observado em (b) ocorre para algum outro ângulo φ ?
- d) Para que valores de φ o número 0,5 é raiz da equação $P(m) = 4m^3 - 3m - v$.

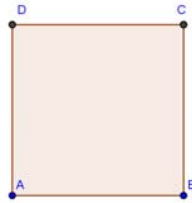
Problema 3 – Quadratura do Círculo

A quadratura do círculo significa construir com régua não graduada e compasso um quadrado com área igual à área de um círculo dado de raio unitário. Do ponto de vista algébrico devemos encontrar a medida x do lado quadrado tal que $x^2 = \pi$, ou seja $x = \sqrt{\pi}$. O valor de x a ser considerado nesse problema deve ser estritamente positivo, pois representa a medida do lado de um quadrado.

Entendendo o problema: Seja λ o círculo de raio unitário $r = 1$, como construir um quadrado de lado x , tal que $x^2 = \pi$?

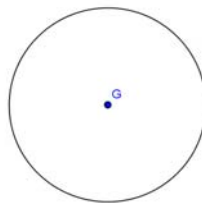
Esse problema instigou muitos matemáticos da Grécia Antiga, porém nenhum deles conseguiu obter a solução desse utilizando somente régua não graduada e compasso. No Papiro de Rhind (1650 a.C) a quadratura do círculo era usada para resolver problemas de cálculo de áreas de círculo, os quais eram resolvidos pela área de um quadrado considerando a medida x do lado do quadrado igual a $8/9$ do diâmetro do círculo dado. Em 1882 o matemático alemão Carl Louis Ferdinand Lindemann (1852 – 1939) demonstrou enfim que obter a quadratura do círculo é impossível, porque o círculo é uma figura incomensurável em π , não pode ser retificado de forma precisa. As Figuras 23 e 24 mostram o problema a ser resolvido do ponto de vista geométrico.

Figura 12 – Quadrado de área = 1.



Fonte: Autor.

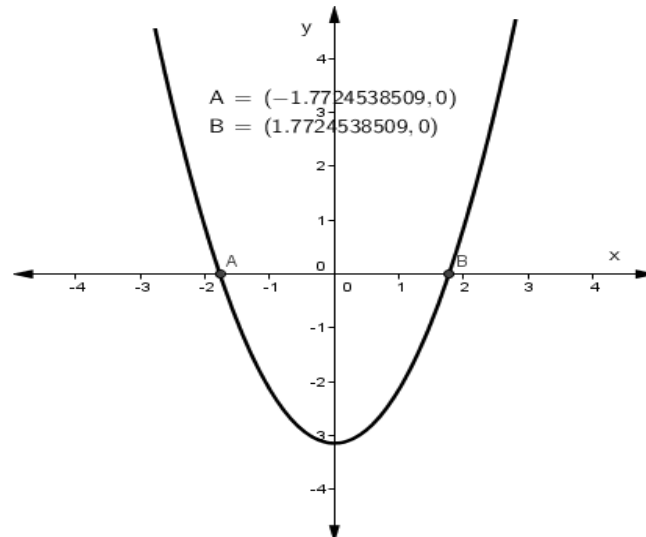
Figura 13 – Círculo de área ≈ 1 .



Fonte: Autor.

Resolvendo o problema: Realizar a quadratura de um círculo de raio unitário significa obter a medida da aresta x do quadrado tal que $x^2 - \pi = 0$, ou seja, $x = \sqrt{\pi}$. Podemos ter uma noção melhor do que esse valor representa quando visualizamos graficamente a situação. A Figura 25 mostra duas soluções reais para o problema, mas vamos considerar somente a solução real positiva $\bar{x} = 1,7724538509$ com dez casas decimais obtida com o auxílio do *software* Geogebra.

Figura 14 – Representação gráfica de $x^2 - \pi$.



Fonte: Autor.

Considerando a impossibilidade da quadratura do círculo por métodos euclidianos, fica evidente que deve-se buscar outra alternativa. Logo pode-se resolver o problema por algum método numérico. A partir desse problema o professor pode elaborar outros problemas semelhantes e promover juntamente com os alunos a resolução numérica dos mesmos com o auxílio dos métodos apresentados neste trabalho. Vale lembrar que o objetivo desta pesquisa é explorar a resolução de problemas que envolvem equações polinomiais de 3º grau ou superior, mas como o problema da quadratura do círculo é muito famoso optou-se por abordá-lo também.

Atividade proposta 7 – Considerando o problema da quadratura do círculo.

- Descreva a equação algébrica para o qual a área de um quadrado deve ser igual a área de um círculo de raio 2.
- Obtenha com dez casas decimais a medida aproximada do lado do quadrado ABCD que possui a mesma área do círculo de raio 2 com auxílio do *software* Geogebra.
- Aplique o método da Falsa Posição combinado com a planilha eletrônica para obter a aproximação da medida do lado do quadrado encontrada no item (b). (Realize 20 iterações).

d) Aplique o método da Secante combinado com a planilha eletrônica para obter a aproximação da medida do lado do quadrado encontrada no item (b). (Realize 20 iterações).

e) Compare os resultados obtidos em c) e d) com o resultado apresentado em b).

Atividade proposta 8 – Áreas equivalente.

a) Descreva a equação algébrica para o qual a área de um quadrado de lado 3 deve ser igual a área de um círculo de raio r .

b) Obtenha com dez casas decimais a medida aproximada do raio r do círculo que possui a mesma área do quadrado de lado 3 com auxílio do *software* Geogebra.

c) Aplique o método da Bissecção combinado com a planilha eletrônica para obter a aproximação da medida do raio do círculo encontrada no item (b). (Realize 20 iterações).

d) Aplique o método da Secante combinado com a planilha eletrônica para obter a aproximação da medida do raio do círculo encontrada no item (b). (Realize 20 iterações).

e) Compare os resultados obtidos em c) e d) com o resultado apresentado no item b).

5.2 PROBLEMA NA CORTE DO IMPERADOR

O desafio de John de Palermo foi resolvido em 1224 por Leonardo de Pisa durante uma competição matemática realizada na corte do imperador Frederico II. Segundo Burden e Faires (2003), Fibonacci solucionou o problema provavelmente utilizando a técnica algébrica desenvolvida por Omar Khayyam, pois o problema não tem solução geométrica de acordo com as propriedades descritas no livro 10 de Euclides.

Entendendo o problema: O desafio proposto por John de Palermo consistia em obter através dos métodos descritos por Euclides, no décimo livro, um segmento de medida x que satisfaça a equação $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$.

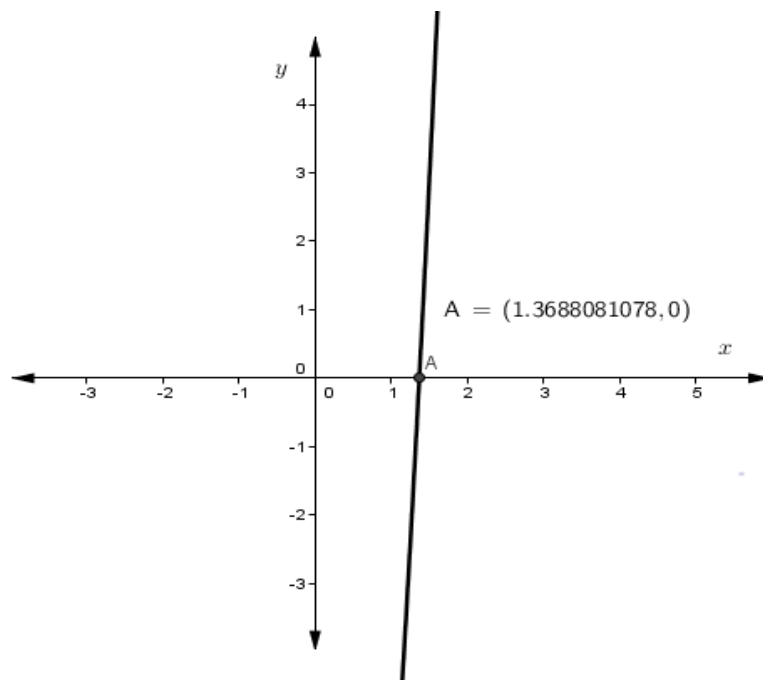
Resolvendo o problema: Considerando a impossibilidade de resolver o problema utilizando os métodos apresentados por Euclides, Fibonacci

apresentou uma solução para $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ fazendo uso de frações da base sexagesimal conforme segue:

$$1 + 22\left(\frac{1}{60}\right) + 7\left(\frac{1}{60}\right)^2 + 42\left(\frac{1}{60}\right)^3 + 33\left(\frac{1}{60}\right)^4 + 4\left(\frac{1}{60}\right)^5 + 40\left(\frac{1}{60}\right)^6. \quad (49)$$

O resultado apresentado em (49) equivale na base numérica decimal ao número 1,3688081040 com dez casas decimais. A Figura 26 apresenta a solução real da equação $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$, com o mesmo número de casas decimais, através do *software* Geogebra.

Figura 15 – Representação gráfica da equação $x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0$.



Fonte: Autor

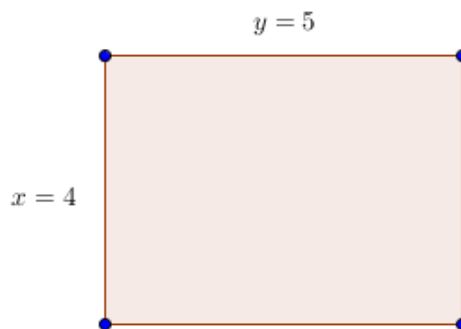
Diante da representação gráfica apresentada na Figura 26, observa-se que o resultado apresentado por Fibonacci na base sexagesimal tem uma excelente precisão, sendo oito dígitos exatos. Pode-se obter resultado similar empregando-se os métodos da Bisseção, da Posição Falsa e da Secante implementados com auxílio de planilha eletrônica, como apresentados no trabalho.

5.3 PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

A geometria oferece ao professor diversas situações que podem ser modeladas e conseqüentemente resolvidas por intermédio de equações algébricas polinomiais. A intenção é apresentar algumas situações que podem servir de estímulo para o professor, mostrando como resolvê-los com auxílio de alguns recursos computacionais disponíveis.

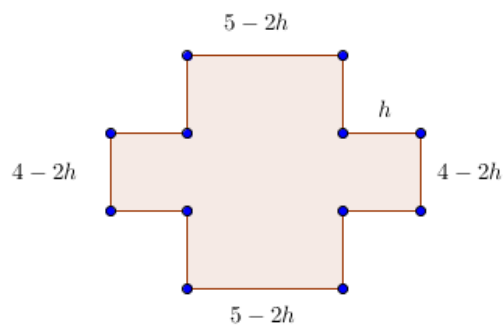
Considere uma cartolina de medidas $x=4$ de largura e $y=5$ de comprimento. Em cada canto da cartolina deve-se cortar um quadrado de lado h . As Figuras 27 e 28 apresentam a cartolina inicial e a cartolina após a retirada dos quadrados de cada canto, respectivamente. Qual deve ser a medida h para que o volume da caixa construída a partir da Figura 28 seja igual a 4?

Figura 16 – Cartolina inicial.



Fonte: Autor.

Figura 17 – Cartolina após a retirada dos quadrados de cada canto.



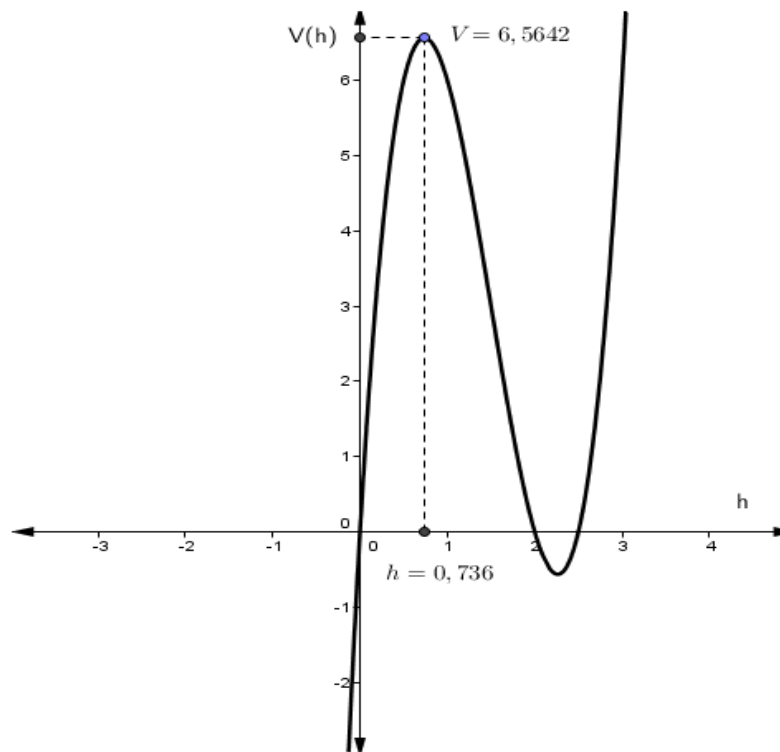
Fonte: Autor.

Entendendo o problema: Recortado em cada canto da cartolina da Figura 27 um quadrado de lado h , tem-se a Figura 28. Dobrando as partes restantes, obtém-se uma caixa sem tampa, onde o comprimento, largura e altura serão representados respectivamente pelas expressões $5 - 2h$, $4 - 2h$ e h .

O objetivo é determinar a medida h para que o volume da caixa seja igual a 4.

Resolvendo o problema: Para resolver o problema proposto deve-se identificar a equação que representa o volume da caixa obtida a partir da Figura 28. Como a caixa representa um paralelepípedo reto-retângulo, seu volume será obtido através da função $V(h) = 4h^3 - 18h^2 + 20h$, com h tal que $0 < h < 2$, já que volume nulo ou negativo não tem sentido. A Figura 29 mostra a representação gráfica da função $V(h)$, ilustrando como os valores do volume da caixa variam em relação a todos os valores de h compreendidos entre 0 e 2, pode-se ainda perceber que a caixa atingirá o volume $V=4$ para dois valores de h .

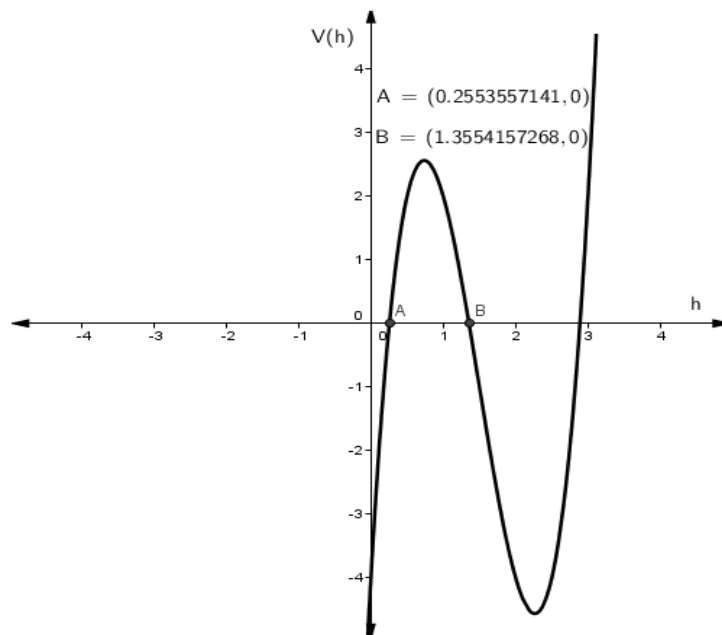
Figura 18 – Representação gráfica da função $V(h) = 4h^3 - 18h^2 + 20h$.



Fonte: Autor.

Utilizando o *software* Geogebra, conforme ilustra a Figura 30, observa-se que o problema proposto apresenta duas soluções para h no intervalo $0 < h < 2$, a saber, $h_1 = 0,2553557141$ e $h_2 = 1,3554157268$. Além disso, a Figura 30 possibilita observar a variação do volume V a medida que h varia, assim como, verificar que o volume V é máximo quando $h \approx 0,736$.

Figura 19 – Representação gráfica de $V(h) = 4$.



Fonte: Autor.

Uma outra forma para abordar e solucionar o problema proposto, refere-se à utilização dos métodos numéricos apresentados no trabalho e obter os valores aproximados de h com $0 < h < 2$ tal que $V(h) = 4$. O Quadro 10 apresenta a sequência de aproximações para o valor da raiz h pertencente ao intervalo $[0,1]$, obtidas com 19 iterações do método da Falsa Posição e a planilha eletrônica.

Quadro 8 – Aproximações da raiz real da equação $V(h) = 4$ contida no intervalo $[0,1]$ obtidas com auxílio do método da Falsa Posição e a planilha eletrônica.

Sequência de aproximações da raiz real da equação $V(h) = 4$ contida no intervalo $[0,1]$.							
n	a_n	$f(a_n)$	b_n	$f(b_n)$	x_n	$f(x_n)$	$\text{Erro} \leq f(x_n) $
0	0,0000000000	-4,0000000000	1,0000000000	2,0000000000	0,6666666667	2,5185185185	2,5185185185
1	0,0000000000	-4,0000000000	0,6666666667	2,5185185185	0,4090909091	1,4432757325	1,4432757325
2	0,0000000000	-4,0000000000	0,4090909091	1,4432757325	0,3006211180	0,4943795388	0,4943795388
3	0,0000000000	-4,0000000000	0,3006211180	0,4943795388	0,2675529429	0,1391471245	0,1391471245
5	0,0000000000	-4,0000000000	0,2585585241	0,0369664407	0,2561909076	0,0096692034	0,0096692034
6	0,0000000000	-4,0000000000	0,2561909076	0,0096692034	0,2555731105	0,0025188474	0,0025188474
10	0,0000000000	-4,0000000000	0,2553595415	0,0000443586	0,2553567097	0,0000115390	0,0000115390
15	0,0000000000	-4,0000000000	0,2553557187	0,0000000528	0,2553557153	0,0000000137	0,0000000137
17	0,0000000000	-4,0000000000	0,2553557144	0,0000000036	0,2553557142	0,0000000009	0,0000000009
18	0,0000000000	-4,0000000000	0,2553557142	0,0000000009	0,2553557141	0,0000000002	0,0000000002

Fonte: Autor.

No Quadro 11 apresenta-se a sequência de aproximações para o valor da raiz h pertencente ao intervalo $[1,2]$ com 5 iterações do método da Falsa Posição e a planilha eletrônica.

Quadro 9 – Aproximações da raiz real da equação $V(h) = 4$ contida no intervalo $[0,1]$ obtidas com auxílio do método da Falsa Posição e a planilha eletrônica.

Sequência de aproximações da raiz real da equação $V(h) = 4$ contida no intervalo $[1,2]$.							
n	a_n	$f(a_n)$	b_n	$f(b_n)$	x_n	$f(x_n)$	$\text{Erro} \leq f(x_n) $
0	1,0000000000	2,0000000000	2,0000000000	-4,0000000000	1,3333333333	0,1481481481	0,1481481481
1	1,3333333333	0,1481481481	2,0000000000	-4,0000000000	1,3571428571	-0,0116618076	0,0116618076
2	1,3333333333	0,1481481481	1,3571428571	-0,0116618076	1,3554054054	0,0000696602	0,0000696602
3	1,3554054054	0,0000696602	1,3571428571	-0,0116618076	1,3554157222	0,0000000308	0,0000000308
4	1,3554157222	0,0000000308	1,3571428571	-0,0116618076	1,3554157268	0,0000000000	0,0000000000

Fonte: Autor.

Como já observado, o problema proposto possui duas soluções, ou seja, $V(h) = 4$ será obtido, quando retirarmos da cartolina, Figura 27, um quadrado de lado $h_1 = 0,2553557141$ ou um quadrado de lado $h_2 = 1,3554157268$. Os valores de h apresentados nos Quadros 10 e 11 respectivamente são os mesmos obtidos utilizando o *software* Geogebra, Figura 30.

A geometria é uma parte da Matemática que oferece uma diversidade de problemas que oportunizam ao professor desenvolver junto aos seus alunos a prática da investigação e, associando esta prática à aplicação de recursos computacionais e métodos numéricos, o estudo da Matemática pode despertar maior interesse entre os estudantes.

Atividade proposta 9 – Uma caixa de papelão usada para embalar produtos perecíveis tem formato de um paralelepípedo reto-retângulo cujo comprimento, largura e altura são representadas respectivamente por $(3 - x)$, $(2 - x)$ e x .

- a) Descreva a equação que representa o volume desse paralelepípedo.
- b) Com o auxílio do recurso do controle deslizante do *software* Geogebra visualize o(s) valor(es) de x tais que, $0 < x < 2$, para os quais $V(x) = 3/2$.
- c) Obtenha através do método da Falsa Posição e da planilha eletrônica, a sequência de aproximações para a raiz da equação obtida em (b) contida no intervalo $[0,1]$ realizando 20 iterações.
- d) Obtenha através do método da Bissecção e da planilha eletrônica, a sequência de aproximações para a raiz da equação obtida em (b) contida no intervalo $[1,2]$ realizando 20 iterações.
- e) Qual dos métodos utilizados se aproximou melhor da solução apresentada pelo *software* Geogebra no item b).

Atividade proposta 10 - Considere um cilindro circular reto cuja raio da base e altura medem respectivamente x e $(2 - x)$.

- a) Descreva a equação para o volume do cilindro circular reto.
- b) Com o auxílio do recurso do controle deslizante do *software* Geogebra visualize o(s) valor(es) de x tais que, $0 < x < 2$, para os quais $V(x) = \pi/2$.
- c) Aplique o método da Secante combinado com a planilha eletrônica para obter a sequência de aproximações para a raiz x da equação obtida em (b) contida no intervalo $[1,2]$. (O número de iterações deve ser tal que $|f(x_{i+1})| \leq 10^{-8}$).
- d) Compare o resultado obtido pelo *software* Geogebra no item b) com o resultado obtido pelo método da Secante.

5.4 PROBLEMAS DE INTERPOLAÇÃO

A interpolação é um método utilizado para construção do polinômio aproximativo de grau menor ou igual a n que assume em $n+1$ pontos x_0, x_1, \dots, x_n os valores y_0, y_1, \dots, y_n . Existem diversos tipos de interpolação, como podemos verificar em Burden e Faires (2003). Neste trabalho, utiliza-se a interpolação de Lagrange, para obter o polinômio $P(x)$ tal que $P(x_0) = y_0, P(x_1) = y_1, \dots, P(x_n) = y_n$, cuja fórmula é definida como segue:

$$P_n(x) = y_0 * \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} + y_1 * \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} +$$

$$y_2 * \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)\dots(x_2-x_n)} + \dots + y_n * \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)(x_n-x_2)\dots(x_n-x_{n-1})} \quad (50)$$

A interpolação é uma excelente oportunidade para o professor desenvolver junto aos alunos um estudo diferenciado envolvendo equações algébricas polinomiais, pois é possível a partir de algumas informações observadas construir um polinômio que represente a situação, verificar sua representação gráfica e investigar a existência ou não de raízes reais. A seguir, apresenta-se um exemplo extraído de Lima (2006) que envolve interpolação e pode ser trabalhado facilmente com os alunos no Ensino Médio.

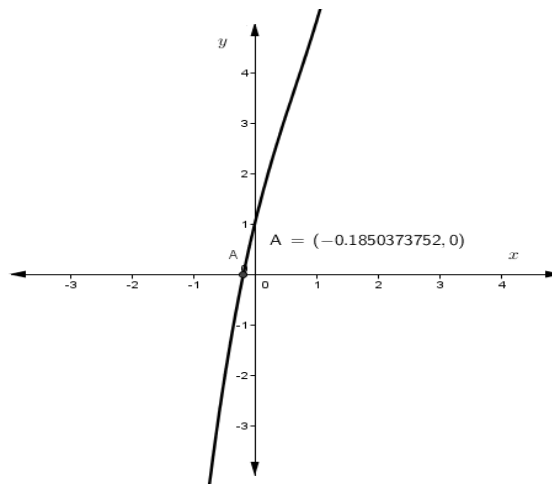
Exemplo 5: Considerando os pontos $(-1, -7)$; $(0, 1)$; $(1, 5)$; $(2, 6)$ e $(3, 25)$ determine:

- O polinômio de grau menor ou igual a quatro que passa pelos pontos utilizando a interpolação de Lagrange.
- Represente graficamente o polinômio encontrado em a) com auxílio do *software* Geogebra e identifique a única raiz real existente.
- Aplique o método da Secante combinado com a planilha eletrônica para obter a sequência de aproximações para o valor da raiz real do polinômio obtido em a) fazendo 10 iterações.

Solução:

Aplicando-se a fórmula de interpolação de Lagrange descrita em (50) obtém-se $P(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 1$. A representação gráfica de $P(x)$ assim como o valor aproximado da única raiz real são apresentadas na Figura 31.

Figura 20 – Representação gráfica de $P(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 1$.



Fonte: Autor.

O Quadro 12 apresenta a sequência de aproximações para a raiz de $P(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 1 = 0$ obtidas com 6 iterações do método da Secante e o auxílio da planilha eletrônica.

Quadro 10 – Aproximações da raiz da equação $P(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 1 = 0$ contida no intervalo $[-1,0]$ obtidas com auxílio do método da Secante e planilha eletrônica.

Sequência de aproximações da raiz real da equação $x^3 - 2x^2 + 5x + 1 = 0$, contida no intervalo $[-1,0]$.							
n	x_{n-1}	x_n	x_{n+1}	$f(x_{n-1})$	$f(x_n)$	$f(x_{n+1})$	$\text{Erro} \leq f(x_{n+1}) $
1	-1,0000000000	0,0000000000	-0,1250000000	-7,0000000000	1,0000000000	0,3417968750	0,341796875
2	0,0000000000	-0,1250000000	-0,1899109792	1,0000000000	0,3417968750	0,0285366198	0,028536620
3	-0,1250000000	-0,1899109792	-0,1849091634	0,3417968750	-0,0285366198	0,0007490826	0,000749083
4	-0,1899109792	-0,1849091634	-0,1850371021	-0,0285366198	0,0007490826	0,0000015962	0,000001596
5	-0,1849091634	-0,1850371021	-0,1850373753	0,0007490826	0,0000015962	0,0000000001	0,000000000
6	-0,1850371021	-0,1850373753	-0,1850373752	0,0000015962	-0,0000000001	0,0000000000	0,000000000

Fonte: Autor.

A única raiz real do polinômio $P(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 1$ contida no intervalo $[-1,0]$ apresentada no Quadro 12 é a mesma obtida pelo *software* Geogebra conforme Figura 31.

Atividade proposta 11 - A velocidade do som na água varia de acordo com a temperatura. Os dados constantes no Quadro 13, foram obtidos em um determinado dia no interior de uma cidade do estado de São Paulo. A partir desses dados determine:

Quadro 11 – Velocidade do som na água em função da temperatura.

Temperatura °C	Velocidade m/s	Temperatura °C	Velocidade m/s
x_0	y_0	x_0	y_0
85,0000	1,5520	104,5000	1,5370
92,0000	1,5490	110,0000	1,5300
98,6000	1,5450	114,0000	1,5280

Fonte: Autor

- Encontre o polinômio $P(x)$ de Lagrange que passa pelos pontos apresentados no Quadro 13 e represente-o graficamente com o auxílio do *software*. Obtenha com o auxílio do Geogebra a temperatura °C para que a velocidade seja de 1,541m/s.
- Obtenha através do método da Secante e da planilha eletrônica a sequência de aproximações para o valor da temperatura obtida em (b).

Atividade proposta 12 - Os dados apresentados no Quadro 14 representam a relação entre duas variáveis observadas em um laboratório de pesquisa. A partir desses dados, determine:

Quadro 12 – Valores tabelados X e Y.

Valores observados das variáveis X e Y						
X	$X_0 = 0,0000$	$X_1 = 0,0850$	$X_2 = 0,0960$	$X_3 = 0,3560$	$X_4 = 0,7850$	$X_5 = 0,9880$
Y	$Y_0 = 0,0000$	$Y_1 = 0,6550$	$Y_2 = 0,7950$	$Y_3 = 0,9250$	$Y_4 = 1,2350$	$Y_5 = 1,5450$

Fonte: Autor.

- a) Através da Interpolação de Lagrange o polinômio $P(x)$ que passa pelos cinco pontos apresentados no Quadro 14 e represente-o graficamente com o auxílio do *software* Geogebra.
- b) Com o auxílio do *software* Geogebra identifique o valor de x para que $y = 1,4157$.
- c) Obtenha através do método da Bissecção e da planilha eletrônica a sequência de aproximações para o valor de x obtido em (b).

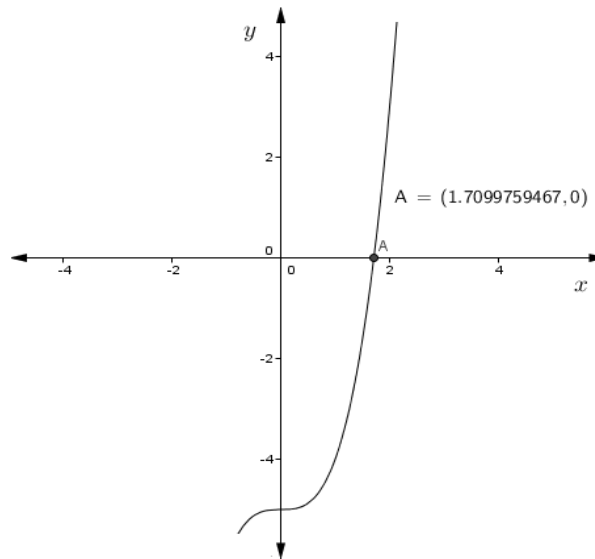
5.5 ESTUDO DE RAIZES E-NÉSIMAS

Muitas vezes, os professores de Matemática enfrentam diversas dificuldades para ensinar alguns conceitos. Isso ocorre, principalmente, porque o ensino de tais conceitos atrela-se a algum tipo de recurso que permita visualizar e compreender melhor o que representa. A raiz e-nésima é um exemplo de conceito que quando ensinado com o auxílio de algum recurso computacional pode permitir aos alunos uma verdadeira compreensão. Pode-se citar uma situação que certamente surge no cotidiano escolar quando não são utilizados recursos além do quadro e giz.

Qual é o valor de $\sqrt[3]{5}$? O que isso representa? Como obter uma aproximação desse resultado utilizando métodos numéricos e recursos computacionais acessíveis?

Entendendo o problema: Resolver o problema exposto exige a descrição da equação que deve ser resolvida para obter a solução procurada. Para o problema proposto a equação associada é $P(x) = x^3 - 5 = 0$, que pode ser representada graficamente com o auxílio do *software* Geogebra conforme apresentado na Figura 32.

Figura 21 – Representação gráfica de $P(x) = x^3 - 5$.



Fonte: Autor.

Resolvendo o problema: Observando atentamente a Figura 32 a equação $x^3 - 5 = 0$ tem raiz $x=1,7099759467$ com dez casas decimais, logo esse número representa um boa aproximação para o valor de $\sqrt[3]{5}$. No Quadro 15 apresentamos a sequência de aproximações para o valor da única raiz real da equação $P(x) = x^3 - 5 = 0$, ilustrando algumas das 22 iterações obtidas com o método da Bissecção. Nessa atividade o professor tem uma excelente oportunidade para demonstrar aos alunos o que representa $\sqrt[3]{5}$, assim como demonstrar outras situações envolvendo raízes e-ésimas proporcionando com isso maior assimilação por parte dos alunos.

Quadro 13 – Aproximações da raiz real da equação $x^3 - 5 = 0$ contida no intervalo $[1,2]$ obtidas com o método da Bissecção e a planilha eletrônica.

Sequência de aproximações da raiz real da equação $x^3 - 5 = 0$, contida no intervalo $[1,2]$.							
n	a_n	b_n	x_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(x_n)$	Erro = $ b_n - a_n $
0	1,0000000000	2,0000000000	1,5000000000	-4,0000000000	3,0000000000	-1,6250000000	1,0000000000
1	1,5000000000	2,0000000000	1,7500000000	-1,6250000000	3,0000000000	0,3593750000	0,5000000000
2	1,5000000000	1,7500000000	1,6250000000	-1,6250000000	0,3593750000	-0,7089843750	0,2500000000
3	1,6250000000	1,7500000000	1,6875000000	-0,7089843750	0,3593750000	-0,1945800781	0,1250000000
5	1,6875000000	1,7187500000	1,7031250000	-0,1945800781	0,0773620605	-0,0598564148	0,0312500000
10	1,7099609375	1,7109375000	1,7104492188	-0,0001316601	0,0084395409	0,0041527170	0,0009765625
15	1,7099609375	1,7099914551	1,7099761963	-0,0001316601	0,0001360418	0,0000021896	0,0000305176
19	1,7099742889	1,7099761963	1,7099752426	-0,0000145417	0,0000021896	-0,0000061761	0,0000019073
20	1,7099752426	1,7099761963	1,7099757195	-0,0000061761	0,0000021896	-0,0000019932	0,0000009537
21	1,7099757195	1,7099761963	1,7099759579	-0,0000019932	0,0000021896	0,0000000982	0,0000004768

Fonte: Autor.

O resultado obtido no *software* Geogebra foi $x=1,7099759467$ enquanto que pelo método da Bissecção com auxílio da planilha eletrônica obtém-se uma aproximação $x=1,7099759579$ contendo 7 dígitos de precisão.

Atividade proposta 13 - Considere a equação $x^5 - A = 0$ com $0 \leq A \leq 20$.

- Com auxílio do controle deslizante do *software* Geogebra visualize as raízes reais aproximadas para a equação $x^5 - A = 0$ de acordo com cada valor de A.
- Obtenha com auxílio do *software* Geogebra a raiz aproximada da equação $x^5 - 12 = 0$ com dez casas decimais.
- Aplique o método da Falsa Posição para obter a sequência de aproximações da raiz real da equação $x^5 - 12 = 0$. (Faça 20 iterações e compare o resultado obtido com o resultado apresentado no item b).

Atividade proposta 14 - Considere a equação $x^n - 2 = 0$.

- Com auxílio do controle deslizante do *software* Geogebra visualize o valor da raiz real da equação $x^n - 2 = 0$, para $n=3$ e $n=5$.
- Obtenha com auxílio do *software* Geogebra a raiz aproximada da equação $x^n - 2 = 0$, com dez casas decimais para cada valor de n indicado no item (a).
- Aplique o método da Bissecção e da Secante combinado com a planilha eletrônica para obter a sequência de aproximações da raiz real da equação para

cada valor de n indicado no item (a). Compare os resultados obtidos pelo *software* Geogebra com os resultados obtidos no item c.

d) O que ocorre com a expressão $x^n - 2$ a medida que n cresce indefinidamente?

5.6 PROBLEMAS DIVERSOS

Nesta parte do trabalho, descrevem-se várias atividades que podem ser utilizadas pelo professor junto aos alunos, procurando explorar e aprofundar o conceito de equações algébricas polinomiais, bem como a resolução numérica dessas equações aplicando os métodos numéricos apresentados no Capítulo III.

Atividade proposta 15 - (Adaptado de Neto (2012)).

As raízes do polinômio $P(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 6$ representam os comprimentos dos lados de um triângulo. Calcule a área do triângulo

(Sugestão: Utilize o *software* Geogebra para representar graficamente o polinômio e visualizar suas raízes).

Atividade proposta 16 - (Adaptado de Barroso et al(1987)).

A capacidade calorífica C_p (cal. $K^{-1} \cdot mol^{-1}$) da água em função da temperatura $T(K)$ é dada por: $C_p(T) = 7,219 + 2,374 \cdot 10^{-3} T + 2,67 \cdot 10^{-7} T^2$ com $300 \leq T \leq 1500$.

a) Represente graficamente $C_p(T)$ com o auxílio do *software* Geogebra.

b) Determine a temperatura T para que $C_p(T) = 10$ cal. $K^{-1} \cdot mol^{-1}$, com o auxílio do *software* Geogebra.

c) Aplique o método da Bissecção combinado com a planilha eletrônica para obter a sequência de aproximações para a solução apresentada no item b).

Atividade proposta 17 - (Adaptado de Cláudio e Marins (1989)).

Uma bóia esférica tem raio R e densidade específica ρ , ao flutuar na água, afunda x cm. O valor de x representa a solução da equação $P(x) = x^3 + 2Rx^2 - 4\rho R^3 = 0$.

a) Com o auxílio do *software* Geogebra obtenha a representação gráfica de $P(x)$ considerando $R = 3$ e $0,25 \leq \rho \leq 0,5$. (Utilize o recurso do controle deslizante).

b) Com o auxílio do *software* Geogebra obtenha a representação gráfica de $P(x)$ considerando $\rho = 0,4$ e $1 \leq R \leq 3$. (Utilize o recurso do controle deslizante).

c) Obtenha com o auxílio do *software* Geogebra o valor aproximado da única solução positiva da equação $P(x) = 0$ considerando $R = 2$ e $\rho = 0,3$, com dez casas decimais.

d) Aplique o método da Bissecção e o método da Secante para obter a sequência de aproximações da solução da equação $P(x)=0$ considerando os valores de R e ρ indicados no item (c). Compare o número de iterações utilizadas em cada método aplicado no item (d) para obter o resultado apresentado pelo *software* Geogebra no item (c)

Atividade proposta 18 - (Adaptado de Ruggiero e Lopes(1988)).

O polinômio $P(x) = x^5 - \frac{10}{7}x^3 + \frac{5}{18}x$ possui cinco raízes reais, sendo uma delas $x=0$.

a) Represente graficamente $P(x)$ com o auxílio do *software* Geogebra identificando o intervalo (a,b) que contém todas as raízes reais de $P(x)$.

b) Com o auxílio do *software* Geogebra identifique o valor das raízes reais diferentes de zero do polinômio $P(x)$.

c) Aplique o método da Falsa Posição para obter uma sequência de aproximações do valor da menor raiz real do polinômio $P(x)$.

d) Aplique o método da Bissecção para obter uma sequência de aproximações do valor da maior raiz real do polinômio $P(x)$.

e) As raízes reais não nulas de $P(x)=0$ são simétricas?

Atividade proposta 19 - Considerando $P(x) = 0,25x^3 - 2,04x^2 + 3,56x - 1,75$.

a) Represente graficamente e identifique suas raízes reais com o auxílio de $P(x)$.

b) Aplique o método da Bissecção combinado com a planilha eletrônica para obter a sequência de aproximações da raiz real de $P(x)$ contida no intervalo $[0,1]$.

c) Aplique o método da Falsa Posição combinado com a planilha eletrônica para obter a sequência de aproximações da raiz real de $P(x)$ contida no intervalo $[1,2]$.

d) Aplique o método da Secante combinado com a planilha eletrônica para obter a sequência de aproximações da raiz real de $P(x)$ contida no intervalo $[5,6]$.

Atividade proposta 20 - (Adaptado de Arenales e Darezzo(2008)).

Seja a equação $x^3 - 3Ax^2 + 4 = 0$ com $0 \leq A \leq 3$

a) Determine com auxílio do *software* Geogebra o valor de A para que a equação

tenha em $x=2$ uma raiz de multiplicidade 2.

b) Quantas raízes reais existem para a equação quando $A = 3$? Qual é o valor aproximado dessas raízes? (Utilize o *software* Geogebra).

c) A equação admite uma única raiz real quando $A = -1$? Qual é o valor aproximado dessa raiz? (Utilize o *software* Geogebra).

Atividade proposta 21 - A fórmula de Cardano (matemático italiano da época da

Renascença) definida por $x = \sqrt[3]{\frac{-b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}$ fornece as raízes

da equação do terceiro grau $x^3 + ax + b = 0$. Considere o seguinte problema: Considere um cubo de aresta x e um paralelepípedo reto retângulo cuja área da base é igual a 3 e a altura igual a x . Determine o valor de x de modo que $x^3 = 3x + 1$.

a) Represente graficamente a equação $x^3 = 3x + 1$ com auxílio do *software* Geogebra e verifique quantas raízes reais a equação possui.

b) Obtenha o valor aproximado das três raízes reais da equação com dez casas decimais com o auxílio do *software* Geogebra.

c) Aplique a fórmula de Cardano mencionada acima para obter as raízes reais da equação. O que acontece quando você aplica essa fórmula?

d) Aplique o método da Secante para obter a sequência de aproximações das raízes reais da equação $x^3 = 3x + 1$.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A proposta do presente trabalho, que sugere a resolução de equações algébricas polinomiais de 3º grau ou superior com o auxílio de métodos numéricos elementares, teve motivação nas dificuldades vivenciadas em alguns momentos da trajetória profissional frente ao ensino da Matemática.

O trabalho inicia-se com um resgate histórico que procura trazer subsídios e elementos que permitem a compreensão do surgimento das equações, assim como a sua associação às questões e necessidades do cotidiano humano no Capítulo I. O resgate histórico é importante, pois, situa o aluno na linha do tempo, permitindo que o mesmo observe que as ideias surgiram das necessidades que a raça humana teve em cada momento da história e que tais necessidades exigem também a evolução da ciência de uma maneira geral.

No Capítulo II do trabalho, procurou-se recapitular importantes definições, teoremas e resultados que são utilizados na resolução de equações algébricas polinomiais. Apresentou-se neste capítulo a demonstração de alguns teoremas, entre eles o Teorema Fundamental da Álgebra descrito por Gauss no século XVIII. Normalmente a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra não é apresentada nos livros didáticos de Matemática por conta da sua complexidade. Acredita-se que seja importante para os professores que ensinam Matemática compreenderem as ideias utilizadas por Gauss na demonstração desse teorema.

Para descrever a proposta de atividades destinada aos alunos do Ensino Médio, procurou-se no Capítulo III fazer uma pequena introdução a respeito dos métodos numéricos, descrevendo alguns resultados e métodos que podem ser aplicados na resolução de equações algébricas polinomiais de 3º grau ou superior. Nesse capítulo fez-se uma abordagem dos métodos da Bissecção, Falsa Posição e Secante que são métodos considerados elementares, pois não exigem conceitos além daqueles desenvolvidos tradicionalmente no Ensino Médio.

No Capítulo IV descreveu-se a parte principal do trabalho que objetiva apresentar aos alunos do Ensino Médio uma abordagem diferenciada das equações algébricas polinomiais de 3º grau ou superior, procurando aplicar métodos numéricos elementares associados a uma planilha eletrônica de livre acesso para

resolução dessas equações. A aplicação de métodos numéricos permite a exploração de diversas situações que não podem ser demonstradas em sala de aula pelo grande esforço computacional que exigem. A proposta sugere diversos problemas, entre eles, alguns históricos que podem ser retomados e resolvidos agora numa perspectiva numérica permitindo a melhor compreensão dos resultados obtidos.

Desde o início da elaboração deste trabalho desejou-se propor algo que pudesse auxiliar e contribuir com o ensino da Matemática. Hoje em dia, o acesso à tecnologia tem sido maior e o seu desenvolvimento exige que o professor de Matemática traga para a sala de aula novas ideias que permitam ao aluno compreender de forma mais completa os conceitos abordados. Nesse sentido, pode-se, mesmo considerando todas as dificuldades existentes nas escolas, possibilitar o acesso e o uso de recursos como calculadoras e computadores aos alunos durante as aulas de Matemática. Ressalta-se, ainda, que essa abordagem diferenciada deve ser planejada e adequada para cada situação que o professor pretenda desenvolver junto aos alunos.

REFERÊNCIAS

- ARENALES, S.; DAREZZO, A. **Cálculo Numérico** – Aprendizagem com apoio de software. São Paulo: Thomson Learning, 2008.
- BAUMGART, J. K. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula. Álgebra.** Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.
- BARROSO, L. C. et al. **Cálculo Numérico com Aplicações.** 2. ed. São Paulo: Harbra, 1987.
- BOYER, C. B. **História da Matemática.** São Paulo: Edgard Blucher, 1996.
- _____. **História da Matemática.** São Paulo: Edgard Blucher, 1974.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise Numérica.** São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.
- CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** Lisboa: Gradiva, 2005.
- CLÁUDIO, D. M.; MARINS, J. M. **Cálculo Numérico Computacional – Teoria e Prática.** São Paulo: Atlas, 1989.
- COLETTE, J. P. **Historia de las matematicas.** 2. ed. Ciudad de México: Siglo Veintiuno Editores, 1986.
- D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática.** Campinas: Papyrus, 2001. (Coleção Perspectiva em Educação Matemática).
- EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2005.
- GARBI, G. G. **O Romance das Equações Algébricas.** São Paulo: Makron Books, 1997.
- IEZZI, G. **Fundamentos da Matemática Elementar 6: Complexos, Polinômios e Equações.** São Paulo: Saraiva, 2007.
- IFRAN, G. **História Universal dos Algoritmos.** 1. ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1998.
- LIMA, J. O. **Diretrizes para a construção de softwares educacionais de apoio ao ensino de matemática.** 2006. 140f. Dissertação (Mestrado em educação em Ciências e Matemáticas) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006.
- LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio.** 9. ed. v. 1. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. Campinas: Papyrus, 1997.

MEDEIROS, C. F.; MEDEIROS, A. O Método da Falsa Posição na História e na Educação Matemática. **Ciência e Educação**, v. 10, n. 3, p. 545-557, 2004.

MUNIZ NETO, A. C. **Tópicos de Matemática Elementar 6: Polinômios**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação do Paraná. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática**. Curitiba, 2008.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico – Aspectos Teóricos e Computacionais**. São Paulo: McGraw-Hill, 1988.

Sítios da Internet Consultados

<http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/c/c2/Plimpton_322.jpg/250px-Plimpton_322.jpg> Acesso em 14/04/2013.

<<http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/rhind/images/papiro2.jpg>> Acesso em 14/04/2013.

<<http://www.famousscientists.org/scientist-photos/al-khwarizmi.jpg>> Acesso em 14/04/2013.

APÊNDICE

APÊNDICE A

Implementação do método da Bisseção na planilha LibreOffice Calc

Para facilitar a compreensão da implementação do método da Bisseção na planilha LibreOffice Calc descrevem-se com detalhes os passos utilizados para obter a sequência de aproximações da raiz real de $P(x) = -2x^2 + x^2 + 3$ contida no intervalo $[1,2]$.

1º Passo: Acessar a planilha LibreOffice Calc.



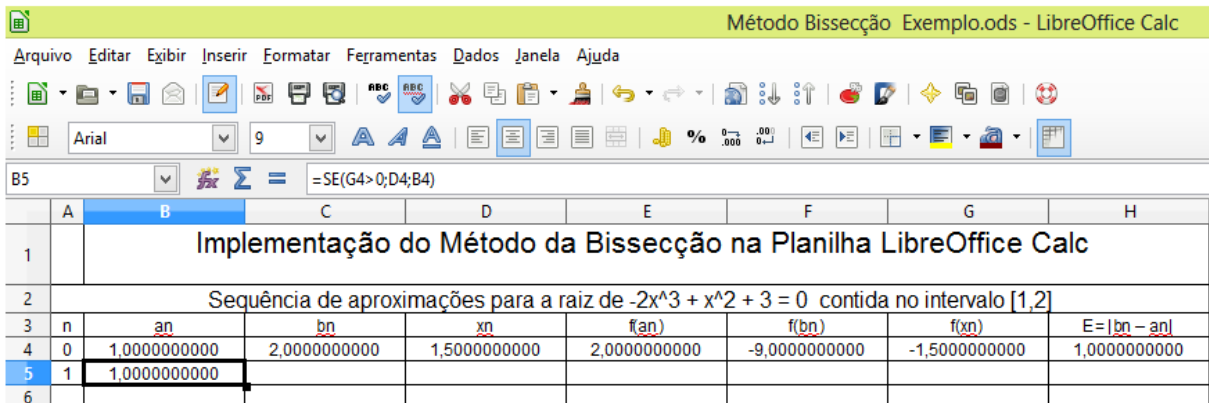
2º Passo: Selecione uma planilha e coloque as informações conforme segue:

Método Bisseção Exemplo.ods - LibreOffice Calc								
Arquivo Editar Exibir Inserir Formatar Ferramentas Dados Janela Ajuda								
M23								
A	B	C	D	E	F	G	H	
1	Implementação do Método da Bisseção na Planilha LibreOffice Calc							
2	Sequência de aproximações para a raiz de $-2x^3 + x^2 + 3 = 0$ contida no intervalo $[1,2]$							
3	n	a_n	b_n	x_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(x_n)$	$E = b_n - a_n $
4	0	1,0000000000	2,0000000000	1,5000000000	2,0000000000	-9,0000000000	-1,5000000000	1,0000000000
5								

Nas células B_4 e C_4 deve-se colocar o valor das extremidades a_0 e b_0 , respectivamente, do intervalo onde a raiz da equação está contida. Na célula D_4 calcular o valor de x_0 inserindo $= (B_4 + C_4) / 2$. Isso ocorre, porque no método da Bisseção utiliza-se a média aritmética simples entre a_n e b_n . Na célula E_4 deve-se calcular o valor de $f(a_0)$, escrevendo nessa célula $= -2(B_4)^3 + (B_4)^2 + 3$. Na célula F_4 deve-se calcular o valor de $f(b_0)$, para isso escreve-se nessa célula

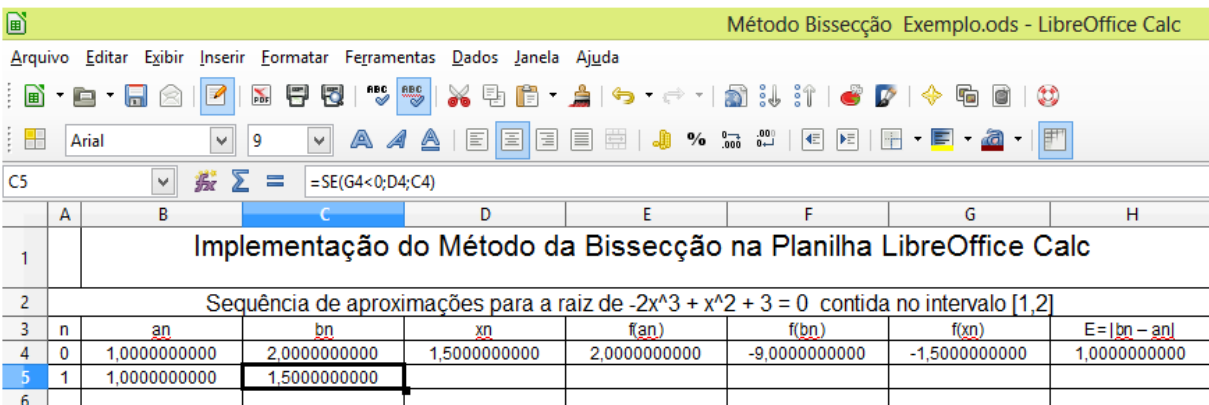
$= -2(C_4)^3 + (C_4)^2 + 3$. Em G_4 calcula-se o valor de $f(x_0)$, logo deve ser inserido nessa célula $= -2(D_4)^3 + (D_4)^2 + 3$. Para finalizar pode-se calcular em H_4 o erro obtido em cada iteração, inserindo nessa célula $= \text{abs}(C_4 - B_4)$. Para-se o processo iterativo quando o erro definido na célula H_4 for menor ou igual que o erro estabelecido previamente.

3º Passo: Na célula B_5 deve-se criar o condicional para que a planilha verifique se o valor da extremidade a_n será mantida ou alterada na próxima iteração. A condição deve ser descrita na célula B_5 como $= \text{SE}(G_4 > 0; D_4; B_4)$ conforme segue:



n	a_n	b_n	x_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(x_n)$	$E = b_n - a_n $
0	1,0000000000	2,0000000000	1,5000000000	2,0000000000	-9,0000000000	-1,5000000000	1,0000000000
1	1,0000000000						

4º Passo: Na célula C_5 deve-se criar o condicional para que a planilha verifique se o valor da extremidade b_n será mantida ou alterada na próxima iteração. A condição deve ser descrita em C_5 como $= \text{SE}(G_4 < 0; F_4; C_4)$ conforme segue:



n	a_n	b_n	x_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$f(x_n)$	$E = b_n - a_n $
0	1,0000000000	2,0000000000	1,5000000000	2,0000000000	-9,0000000000	-1,5000000000	1,0000000000
1	1,0000000000	1,5000000000					

5º Passo: Clicar na célula B₅, depois arraste o cursor do mouse no canto inferior direito até a célula B₃₄. Repita o procedimento clicando na célula C₅ e arrastando o mouse no canto inferior direito até a célula C₃₄. Repita o mesmo procedimento clicando nas células D₄, E₄, F₄, G₄ e H₄ arrastando o canto inferior direito até a célula D₃₀, E₃₀, F₃₀, G₃₀ e H₃₀ respectivamente.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Implementação do Método da Bissecção na Planilha LibreOffice Calc						
2		Sequência de aproximações para a raiz de $-2x^3 + x^2 + 3 = 0$ contida no intervalo [1,2]						
3	n	a _n	b _n	x _n	f(a _n)	f(b _n)	f(x _n)	E = b _n - a _n
4	0	1,0000000000	2,0000000000	1,5000000000	2,0000000000	-9,0000000000	-1,5000000000	1,0000000000
5	1	1,0000000000	1,5000000000	1,2500000000	2,0000000000	-1,5000000000	0,6562500000	0,5000000000
6	2	1,2500000000	1,5000000000	1,3750000000	0,6562500000	-1,5000000000	-0,3085937500	0,2500000000
7	3	1,2500000000	1,3750000000	1,3125000000	0,6562500000	-0,3085937500	0,2006835938	0,1250000000
8	4	1,3125000000	1,3750000000	1,3437500000	0,2006835938	-0,3085937500	-0,0470581055	0,0625000000
9	5	1,3125000000	1,3437500000	1,3281250000	0,2006835938	-0,0470581055	0,0785140991	0,0312500000
10	6	1,3281250000	1,3437500000	1,3359375000	0,0785140991	-0,0470581055	0,0161561966	0,0156250000
11	7	1,3359375000	1,3437500000	1,3398437500	0,0161561966	-0,0470581055	-0,0153435469	0,0078125000
12	8	1,3359375000	1,3398437500	1,3378906250	0,0161561966	-0,0153435469	0,0004331321	0,0039062500
13	9	1,3378906250	1,3398437500	1,3388671875	0,0004331321	-0,0153435469	-0,0074485000	0,0019531250
14	10	1,3378906250	1,3388671875	1,3383789063	0,0004331321	-0,0074485000	-0,0035060078	0,0009765625
15	11	1,3378906250	1,3383789063	1,3381347656	0,0004331321	-0,0035060078	-0,0015360189	0,0004882813
16	12	1,3378906250	1,3381347656	1,3380126953	0,0004331321	-0,0015360189	-0,0005513387	0,0002441406
17	13	1,3378906250	1,3380126953	1,3379516602	0,0004331321	-0,0005513387	-0,0000590772	0,0001220703
18	14	1,3378906250	1,3379516602	1,3379211426	0,0004331321	-0,0000590772	0,0001870340	0,0000610352
19	15	1,3379211426	1,3379516602	1,3379364014	0,0001870340	-0,0000590772	0,0000639801	0,0000305176
20	16	1,3379364014	1,3379516602	1,3379440308	0,0000639801	-0,0000590772	0,0000024519	0,0000152588
21	17	1,3379440308	1,3379516602	1,3379478455	0,0000024519	-0,0000590772	-0,0000283125	0,0000076294
22	18	1,3379440308	1,3379478455	1,3379459381	0,0000024519	-0,0000283125	-0,0000129303	0,0000038147
23	19	1,3379440308	1,3379459381	1,3379449844	0,0000024519	-0,0000129303	-0,0000052392	0,0000019073
24	20	1,3379440308	1,3379449844	1,3379445076	0,0000024519	-0,0000052392	-0,0000013937	0,0000009537
25	21	1,3379440308	1,3379445076	1,3379442692	0,0000024519	-0,0000013937	0,0000005291	0,0000004768
26	22	1,3379442692	1,3379445076	1,3379443884	0,0000005291	-0,0000013937	-0,0000004323	0,0000002384
27	23	1,3379442692	1,3379443884	1,3379443288	0,0000005291	-0,0000004323	0,0000000484	0,0000001192
28	24	1,3379443288	1,3379443884	1,3379443586	0,0000000484	-0,0000004323	-0,0000001919	0,0000000596
29	25	1,3379443288	1,3379443586	1,3379443437	0,0000000484	-0,0000001919	-0,0000000718	0,0000000298
30	26	1,3379443288	1,3379443437	1,3379443362	0,0000000484	-0,0000000718	-0,0000000117	0,0000000149

6º Passo: A célula D₃₀ mostra o valor aproximado da raiz de P(x) contida no intervalo [1,2]. O número de iterações dependerá da precisão que se deseja para o valor da aproximação. O resultado apresentado na célula D₃₀ difere do resultado apresentado no Capítulo III desse trabalho, porque aqui foram realizadas um número menor de iterações.

APÊNDICE B

Implementação do método da Falsa Posição na planilha LibreOffice Calc

Para facilitar a compreensão da implementação do método da Falsa Posição na planilha LibreOffice Calc descreve-se com detalhes os passos utilizados para obter a sequência de aproximações da raiz real de $P(x) = -2x^2 + x^2 + 3$ contida no intervalo $[1,2]$

1º Passo: Acessar a planilha LibreOffice Calc conforme indicado no Apêndice A.

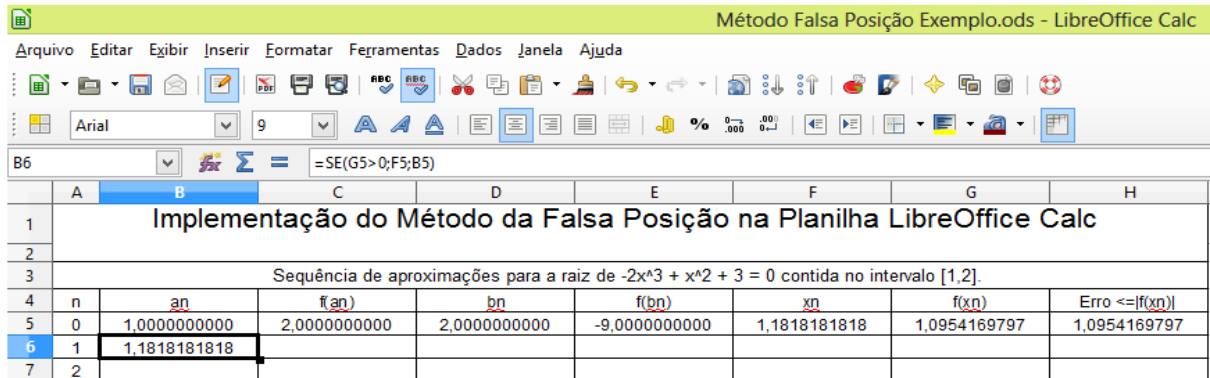
2º Passo: Selecione uma planilha e coloque as informações conforme segue:

n	a_n	$f(a_n)$	b_n	$f(b_n)$	x_n	$f(x_n)$	Erro $\leq f(x_n) $
0	1,0000000000	2,0000000000	2,0000000000	-9,0000000000	1,1818181818	1,0954169797	1,0954169797
1							
2							

Na célula B_5 deve-se colocar o valor do extremo a_0 . Na célula C_5 deve-se calcular $f(a_0)$, inserindo nessa célula $= -2(B_5)^3 + (B_5)^2 + 3$. Na célula D_5 coloca-se o valor do extremo b_0 . Para calcular o valor de $f(b_0)$ na célula E_5 deve-se inserir nessa célula $= -2(D_5)^3 + (D_5)^2 + 3$. Em F_5 calcula-se o valor de x_0 colocando nessa célula $= \frac{(B_5 * E_5 - D_5 * C_5)}{(E_5 - C_5)}$. O valor de $f(x_0)$, será obtido inserindo – se na célula $G_5 = -2(F_5)^3 + (F_5)^2 + 3$. O erro obtido em cada iteração será avaliado pelo valor de $|f(x_n)|$, assim, insere-se na célula $H_5 = |G_5|$. O critério de parada para o método da Falsa Posição será atingido quando o erro estipulado for menor ou igual que o valor de H_5 .

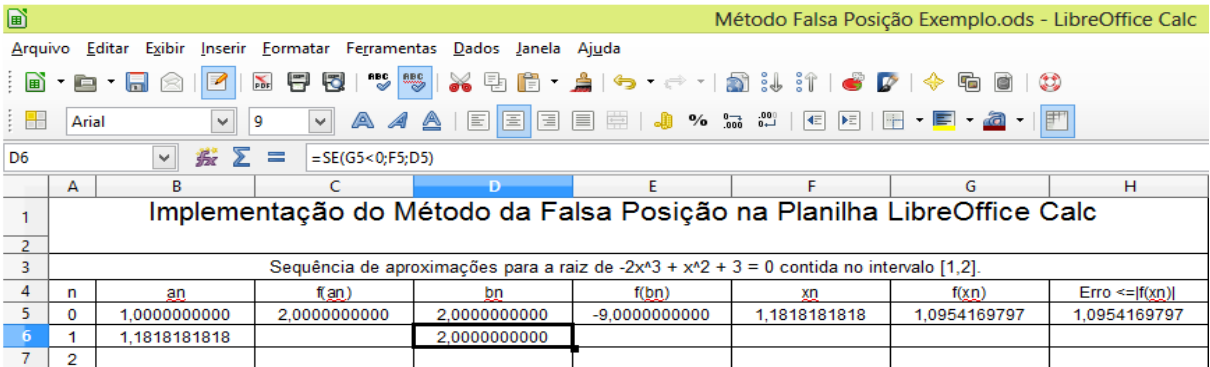
3º Passo: Na célula B_6 deve-se criar o condicional para que a planilha verifique se o valor da extremidade a_n será mantida ou alterada na próxima alteração. A

condição deve ser descrita na célula B₆ como = SE(G₅ > 0;F₅;B₅) conforme segue:



n	a _n	f(a _n)	b _n	f(b _n)	x _n	f(x _n)	Erro <= f(x _n)
0	1,0000000000	2,0000000000	2,0000000000	-9,0000000000	1,1818181818	1,0954169797	1,0954169797
1	1,1818181818						
2							

4º Passo: Na célula D₆ deve-se criar o condicional para que a planilha verifique se o valor da extremidade b_n será mantida ou alterada na próxima iteração. A condição deve ser descrita na célula D₆ como = SE(G₅ < 0;F₅;D₅) conforme segue:



n	a _n	f(a _n)	b _n	f(b _n)	x _n	f(x _n)	Erro <= f(x _n)
0	1,0000000000	2,0000000000	2,0000000000	-9,0000000000	1,1818181818	1,0954169797	1,0954169797
1	1,1818181818		2,0000000000				
2							

5º Passo: Clicar na célula B₆, depois arraste o cursor do mouse no canto inferior direito até a célula B₃₀. Repita o procedimento clicando na célula D₆ e arrastando o mouse no canto inferior direito até a célula D₃₀. Repita o mesmo procedimento clicando nas células C₅, E₅, F₅, G₅ e H₅ arrastando o canto inferior direito até a célula C₃₀, E₃₀, F₃₀, G₃₀ e H₃₀ respectivamente.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Implementação do Método da Falsa Posição na Planilha LibreOffice Calc							
2	Sequência de aproximações para a raiz de $-2x^3 + x^2 + 3 = 0$ contida no intervalo $[1,2]$.							
3	n	a_n	$f(a_n)$	b_n	$f(b_n)$	x_n	$f(x_n)$	Erro $\leq f(x_n) $
4	0	1,0000000000	2,0000000000	2,0000000000	-9,0000000000	1,1818181818	1,0954169797	1,0954169797
5	1	1,1818181818	1,0954169797	2,0000000000	-9,0000000000	1,2705961152	0,5118769345	0,5118769345
6	2	1,2705961152	0,5118769345	2,0000000000	-9,0000000000	1,3098486231	0,2210799027	0,2210799027
7	3	1,3098486231	0,2210799027	2,0000000000	-9,0000000000	1,3263953401	0,0922047008	0,0922047008
8	4	1,3263953401	0,0922047008	2,0000000000	-9,0000000000	1,3332264133	0,0378923173	0,0378923173
9	5	1,3332264133	0,0378923173	2,0000000000	-9,0000000000	1,3360219319	0,0154776095	0,0154776095
10	6	1,3360219319	0,0154776095	2,0000000000	-9,0000000000	1,3371618375	0,0063062893	0,0063062893
11	7	1,3371618375	0,0063062893	2,0000000000	-9,0000000000	1,3376259622	0,0025668612	0,0025668612
12	8	1,3376259622	0,0025668612	2,0000000000	-9,0000000000	1,3378148219	0,0010443621	0,0010443621
13	9	1,3378148219	0,0010443621	2,0000000000	-9,0000000000	1,3378916531	0,0004248413	0,0004248413
14	10	1,3378916531	0,0004248413	2,0000000000	-9,0000000000	1,3379229062	0,0001728114	0,0001728114
15	11	1,3379229062	0,0001728114	2,0000000000	-9,0000000000	1,3379356187	0,0000702921	0,0000702921
16	12	1,3379356187	0,0000702921	2,0000000000	-9,0000000000	1,3379407895	0,0000285914	0,0000285914
17	13	1,3379407895	0,0000285914	2,0000000000	-9,0000000000	1,3379428928	0,0000116295	0,0000116295
18	14	1,3379428928	0,0000116295	2,0000000000	-9,0000000000	1,3379437482	0,0000047303	0,0000047303
19	15	1,3379437482	0,0000047303	2,0000000000	-9,0000000000	1,3379440962	0,0000019240	0,0000019240
20	16	1,3379440962	0,0000019240	2,0000000000	-9,0000000000	1,3379442377	0,0000007826	0,0000007826
21	17	1,3379442377	0,0000007826	2,0000000000	-9,0000000000	1,3379442953	0,0000003183	0,0000003183
22	18	1,3379442953	0,0000003183	2,0000000000	-9,0000000000	1,3379443187	0,0000001295	0,0000001295
23	19	1,3379443187	0,0000001295	2,0000000000	-9,0000000000	1,3379443283	0,0000000527	0,0000000527
24	20	1,3379443283	0,0000000527	2,0000000000	-9,0000000000	1,3379443321	0,0000000214	0,0000000214
25	21	1,3379443321	0,0000000214	2,0000000000	-9,0000000000	1,3379443337	0,0000000087	0,0000000087
26	22	1,3379443337	0,0000000087	2,0000000000	-9,0000000000	1,3379443343	0,0000000035	0,0000000035
27	23	1,3379443343	0,0000000035	2,0000000000	-9,0000000000	1,3379443346	0,0000000014	0,0000000014
28	24	1,3379443346	0,0000000014	2,0000000000	-9,0000000000	1,3379443347	0,0000000006	0,0000000006
29	25	1,3379443347	0,0000000006	2,0000000000	-9,0000000000	1,3379443348	0,0000000002	0,0000000002
30	26	1,3379443348	0,0000000002	2,0000000000	-9,0000000000	1,3379443348	0,0000000001	0,0000000001

6º Passo: A célula F_{30} mostra o valor aproximado da raiz de $P(x)$ contida no intervalo $[1,2]$. O número de iterações dependerá da precisão que se deseja para o valor da aproximação.

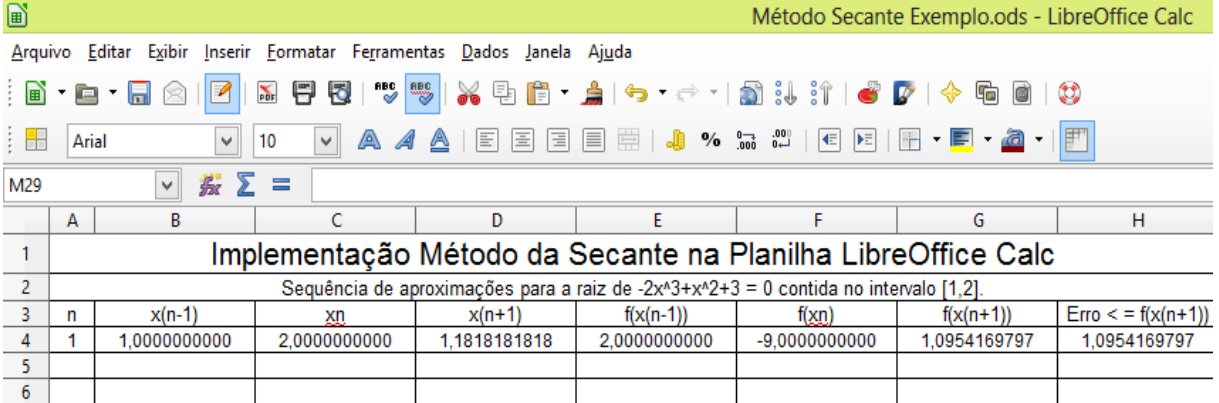
APÊNDICE C

Implementação do método da Secante na planilha LibreOffice Calc

Para facilitar a compreensão da implementação do método da Secante na planilha LibreOffice Calc descreve-se com detalhes os passos utilizados para obter a sequência de aproximações da raiz real de $P(x) = -2x^2 + x^2 + 3$ contida no intervalo $[1,2]$.

1º Passo: Acessar a planilha LibreOffice Calc conforme indicado no Apêndice A.

2º Passo: Selecione uma planilha e coloque as informações conforme segue:



Método Secante Exemplo.ods - LibreOffice Calc								
Arquivo Editar Exibir Inserir Formatar Ferramentas Dados Janela Ajuda								
Arial 10								
M29	=							
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Implementação Método da Secante na Planilha LibreOffice Calc							
2	Sequência de aproximações para a raiz de $-2x^3+x^2+3 = 0$ contida no intervalo $[1,2]$.							
3	n	$x(n-1)$	x_n	$x(n+1)$	$f(x(n-1))$	$f(x_n)$	$f(x(n+1))$	Erro $\leq f(x(n+1))$
4	1	1,0000000000	2,0000000000	1,1818181818	2,0000000000	-9,0000000000	1,0954169797	1,0954169797
5								
6								

Nas células B_4 e C_4 deve-se colocar o valor dos valores iniciais x_0 e x_1 escrevendo em B_4 a expressão = 1 e na célula C_4 escreve-se = 2. Na célula D_4 calcula-se o valor de x_2 , logo coloca-se na referida célula = $\frac{(B_4 * F_4 - C_4 * E_4)}{(F_4 - E_4)}$.

Na célula E_4 deve-se calcular o valor de $f(x_0)$ logo escreve-se nessa célula = $-2(B_4)^3 + (B_4)^2 + 3$. Respectivamente calcula-se o valor de $f(x_1)$ inserindo na célula $F_4 = -2(C_4)^3 + (C_4)^2 + 3$. Na célula G_2 calcula-se o valor de $f(x_2)$ inserindo = $-2(D_4)^3 + (D_4)^2 + 3$. Por último deve-se calcular na célula H_4 , o erro cometido em cada iteração, inserindo nessa célula = $\text{abs}(G_4)$. O critério de parada para o método da Secante será atingido quando o erro estipulado for menor ou igual que o valor de H_4 .

3º Passo: Na célula B₅ deve-se inserir o valor da célula C₄, escrevendo = C₄. Analogamente coloca-se na célula C₅ o valor da célula D₄ como segue = D₄. Nas telas abaixo são apresentadas as duas situações.

Método Secante Exemplo.ods - LibreOffice Calc

Arquivo Editar Exibir Inserir Formatar Ferramentas Dados Janela Ajuda

Arial 9

B5 =C4

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Implementação Método da Secante na Planilha LibreOffice Calc							
2	Sequência de aproximações para a raiz de $-2x^3+x^2+3 = 0$ contida no intervalo [1,2].							
3	n	x(n-1)	xn	x(n+1)	f(x(n-1))	f(xn)	f(x(n+1))	Erro <= f(x(n+1))
4	1	1,0000000000	2,0000000000	1,1818181818	2,0000000000	-9,0000000000	1,0954169797	1,0954169797
5	2	2,0000000000						
6	3							

Método Secante Exemplo.ods - LibreOffice Calc

Arquivo Editar Exibir Inserir Formatar Ferramentas Dados Janela Ajuda

Arial 9

C5 =D4

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Implementação Método da Secante na Planilha LibreOffice Calc							
2	Sequência de aproximações para a raiz de $-2x^3+x^2+3 = 0$ contida no intervalo [1,2].							
3	n	x(n-1)	xn	x(n+1)	f(x(n-1))	f(xn)	f(x(n+1))	Erro <= f(x(n+1))
4	1	1,0000000000	2,0000000000	1,1818181818	2,0000000000	-9,0000000000	1,0954169797	1,0954169797
5	2	2,0000000000	1,1818181818					
6	3							

4º Passo: Clicar na célula B₅, depois arraste o cursor do mouse no canto inferior direito até a célula B₁₀. Idem para a célula C₅ arrastando o cursor do mouse até a célula C₁₀. Repita o procedimento clicando respectivamente nas células, D₄, E₄, F₄, G₄ e H₄, arrastando o cursor do mouse no canto inferior direito até a célula, D₁₀, E₁₀, F₁₀, G₁₀ e H₁₀ respectivamente.

Método Secante Exemplo.ods - LibreOffice Calc

Arquivo Editar Exibir Inserir Formatar Ferramentas Dados Janela Ajuda

Arial 10

E21

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Implementação Método da Secante na Planilha LibreOffice Calc							
2	Sequência de aproximações para a raiz de $-2x^3+x^2+3 = 0$ contida no intervalo [1,2].							
3	n	x(n-1)	xn	x(n+1)	f(x(n-1))	f(xn)	f(x(n+1))	Erro <= f(x(n+1))
4	1	1,0000000000	2,0000000000	1,1818181818	2,0000000000	-9,0000000000	1,0954169797	1,0954169797
5	2	2,0000000000	1,1818181818	1,2705961152	-9,0000000000	1,0954169797	0,5118769345	0,5118769345
6	3	1,1818181818	1,2705961152	1,3484714500	1,0954169797	0,5118769345	-0,0856789725	-0,0856789725
7	4	1,2705961152	1,3484714500	1,3373055012	0,5118769345	-0,0856789725	0,0051491220	0,0051491220
8	5	1,3484714500	1,3373055012	1,3379385083	-0,0856789725	0,0051491220	0,0000469882	0,0000469882
9	6	1,3373055012	1,3379385083	1,3379443380	0,0051491220	0,0000469882	-0,0000000262	-0,0000000262
10	7	1,3379385083	1,3379443380	1,3379443348	0,0000469882	-0,0000000262	0,0000000000	0,0000000000

5º Passo: A célula D_{10} mostra o valor aproximado da raiz de $P(x)$ contida no intervalo $[1,2]$. O número de iterações dependerá da precisão que se deseja para o valor da aproximação. Ressalta-se que no método da Secante o critério de parada é atingido quando o erro previamente estabelecido for menor ou igual que $|f(x_{n+1})|$.