



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

MARIA NATALIA RODRIGUES GUTIERREZ

**ESTABILIDADE COM TAXA RACIONAL PARA UM  
SISTEMA DE BRESSE**

---

Londrina  
2022

MARIA NATALIA RODRIGUES GUTIERREZ

**ESTABILIDADE COM TAXA RACIONAL PARA UM  
SISTEMA DE BRESSE**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Nunes Monteiro

Londrina  
2022

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

G984e Gutierrez, Maria Natalia Rodrigues.  
Estabilidade com taxa racional para um sistema de Bresse / Maria Natalia Rodrigues Gutierrez. - Londrina, 2022.  
110 f. : il.

Orientador: Rodrigo Nunes Monteiro.  
Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2022.  
Inclui bibliografia.

1. Equações diferenciais parciais - Tese. 2. Estabilidade exponencial - Tese. 3. Estabilidade com taxa racional - Tese. I. Monteiro, Rodrigo Nunes. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

CDU 51

MARIA NATALIA RODRIGUES GUTIERREZ

**ESTABILIDADE COM TAXA RACIONAL PARA UM  
SISTEMA DE BRESSE**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Nunes Monteiro  
Universidade Estadual de Londrina – UEL

---

Profa. Dra. Michele de Oliveira Alves  
Universidade Estadual de Londrina – UEL

---

Prof. Dr. To Fu Ma  
Universidade de Brasília – UnB

Londrina, 31 de marco de 2022.

*Dedico este trabalho aos meus pais, que sempre me apoiaram.*

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente gostaria de expressar minha profunda gratidão a Deus, por sempre estar ao meu lado me protegendo, iluminando e concedendo uma força suficiente para lutar e assim conseguir superar todos os obstáculos do meu caminho, pois sem essa força divina, não seria possível a realização de nenhuma conquista.

Agradeço especialmente aos meus pais por sempre ter me aconselhado, apoiado e incentivado em todos os momentos da minha vida. Obrigada, pelo esforço que fizeram durante esses anos para que eu pudesse enfrentar cada obstáculo e assim conseguir chegar na concretização de mais um sonho.

Gostaria de expressar minha sincera gratidão ao meu orientador Professor Doutor Rodrigo Nunes Monteiro por ter acreditado e confiado em mim. Sua orientação, dedicação, paciência e amizade foram fundamentais não apenas para o desenvolvimento deste trabalho, mas também ao longo do curso. Por tudo isso, serei eternamente grata.

Agradeço meus professores da graduação e do PGMAC, que com muita dedicação e paciência, não somente ensinaram-me o conteúdo programado, mas também o sentido das palavras amizade e respeito.

Em especial, meus agradecimentos a Professora Doutora Michele de Oliveira Alves da Universidade Estadual de Londrina e o Professor Doutor To Fu Ma da Universidade de Brasília, membros da banca examinadora, pela disponibilidade, atenção e sugestões que foram essenciais para a conclusão deste trabalho.

Não poderia deixar de agradecer aos amigos que fiz durante os anos da graduação e do PGMAC, obrigada pela amizade, atenção e por ter me auxiliado em muitos momentos.

Enfim, a todos aqueles que contribuíram para este trabalho, o meu muito obrigado.

*"A matemática é o alfabeto no qual Deus escreveu o universo." (Galileu Galilei)*

GUTIERREZ, Maria Natalia Rodrigues. **Estabilidade com taxa racional para um sistema de Bresse**. 2022. 110. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2022.

## RESUMO

Neste trabalho consideramos o sistema de Bresse com dissipação friccional atuando somente no ângulo de rotação da seção transversal. Mostramos mediante teoria de semigrupos de operadores lineares a existência e unicidade da solução deste sistema, também estudamos o comportamento assintótico de tal solução, no qual concluímos que quando as velocidades de propagação das ondas são iguais, a solução do sistema possui decaimento exponencial. Caso contrário, a solução decai para zero com taxa racional.

**Palavras-chave:** sistema de Bresse; semigrupos de operadores lineares; desigualdade de observabilidade; estabilidade exponencial; estabilidade com taxa racional.

GUTIERREZ, Maria Natalia Rodrigues. **Stability with rational rate for a Bresse system.** 2022. 110. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2022.

### ABSTRACT

In this work, we consider the Bresse system with frictional dissipation acting only on the angle of rotation of the cross-section. We show through the semigroups theory of linear operators the existence and uniqueness of the solution of this system, we also study the asymptotic behavior of such a solution, in which we conclude that when the propagation speeds of the waves are equal, the solution of the system has exponential decay. Otherwise, the solution decays to zero at a rational rate.

**Keywords:** Bresse system; semigroups of linear operators; observability inequality; exponential stability; stability with rational rate.

## LISTA DE FIGURAS

1.1	Arco circular (Fonte: Ver [5], página 482). . . . .	15
3.1	Gráfico da função $s_1$ . (Fonte: Elaborada pela autora). . . . .	56
3.2	Gráfico das funções $s_1$ e $s_2$ . (Fonte: Elaborada pela autora). . . . .	59
3.3	Gráfico das funções $s_1, s_2$ e $s_3$ . (Fonte: Elaborada pela autora.) . . . . .	67

## LISTA DE TABELAS

4.1	Comparação entre resultados obtidos neste trabalho e os encontrados na literatura sobre estabilidade com taxa racional. . . . .	108
-----	---	-----

## LISTA DE ABREVIACOES E NOTACOES

(DT)	Desigualdade Triangular
(DCS)	Desigualdade de Cauchy Schwartz
(DP)	Desigualdade de Poincaré
(DY)	Desigualdade de Young
$\top$	transposta do vetor
$C_p$	constante de Poincaré
$L^p(\Omega)$	espaço das funções $u$ mensuráveis definidas em $\Omega$ com valores em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ tais que $ u ^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em $\Omega$
$\ \cdot\ _{L^p(\Omega)}$	norma em $L^p(\Omega)$
$H^m(\Omega)$	espaço das funções $u \in L^2(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^2(\Omega)$ para todo $ \alpha  \leq m$
$\ \cdot\ _{H^m(\Omega)}$	norma em $H^m(\Omega)$
$C_0^\infty(\Omega)$	espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em $\Omega$
$H_0^m(\Omega)$	fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$
$\ \cdot\ _{H_0^m(\Omega)}$	norma em $H_0^m(\Omega)$
$\mathcal{L}(X)$	espaço dos operadores lineares contínuos em $X$
$\ \cdot\ _{\mathcal{L}(X)}$	norma em $\mathcal{L}(X)$
$L^p(0, T; H)$	espaço das funções mensuráveis $u : [0, T] \rightarrow X$ e que $\ u(t)\ _H \in L^p(0, T)$
$C^0([0, T]; X)$	espaço das funções contínuas $u : [0, T] \rightarrow X$ e que $\ u(t)\ _X \in C^0([0, T])$
$\text{med}(\Omega)$	medida n-dimensional de Lebesgue do conjunto $\Omega$
$D(\mathcal{A})$	domínio do operador $\mathcal{A}$
$\rho(\mathcal{A})$	conjunto resolvente do operador $\mathcal{A}$
$\text{Re}(\mathcal{A})$	conjunto real do operador $\mathcal{A}$
$\text{Im}(\mathcal{A})$	conjunto imagem do operador $\mathcal{A}$

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>PRELIMINARES</b>	<b>19</b>
2.1	ANÁLISE FUNCIONAL . . . . .	19
2.2	ESPAÇOS $L^p(\Omega)$ . . . . .	20
2.2.1	Propriedades adicionais dos espaços $L^p(\Omega)$ . . . . .	22
2.3	ESPAÇOS DE SOBOLEV UNIDIMENSIONAIS . . . . .	23
2.3.1	Imersões nos espaços de Sobolev $W^{1,p}(I)$ . . . . .	25
2.3.2	Os espaços $W_0^{1,p}(I)$ . . . . .	27
2.3.3	O espaço de Sobolev $W^{m,p}(I)$ . . . . .	28
2.4	SEMIGRUPOS DE OPERADORES LINEARES . . . . .	30
<b>3</b>	<b>SISTEMA DE BRESSE COM UMA DISSIPACÃO FRICCIONAL</b>	<b>33</b>
3.1	FORMULAÇÃO DO SEMIGRUPO . . . . .	33
3.1.1	Espaço de Fase . . . . .	33
3.1.2	Problema de Cauchy . . . . .	35
3.1.3	Domínio do Operador $\mathcal{A}$ . . . . .	36
3.1.4	Norma do Espaço $\mathcal{H}$ . . . . .	37
3.1.5	Equivalências de Normas . . . . .	40
3.2	EXISTÊNCIA E UNICIDADE . . . . .	43
3.3	ESTABILIDADE . . . . .	52
3.3.1	Estimativas Locais . . . . .	54
3.3.2	Desigualdade de Observabilidade . . . . .	89
3.3.3	Estimativas Globais . . . . .	103
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>108</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>109</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A motivação para a realização do presente trabalho se deve a pesquisa e aos resultados obtidos por Boussouira, Rivera e Almeida Júnior em [5]. Como consequência dessa referência, nosso principal objetivo será estudar o comportamento assintótico das soluções do sistemas de Bresse (também chamado problema do arco circular) e obter melhores taxas de decaimento.

Sendo assim, considere uma viga fina arqueada de raio  $R$  e comprimento  $L$  em sua posição de equilíbrio, constituída de material linear elástico isotrópico, ou seja, é um material no qual as suas propriedades mecânicas e térmicas são as mesmas em todas as direções e quando se encontram sujeitos à ação de forças externas tende a retornar à forma original. Além disso, segundo a referência [13] podemos dizer que o movimento da viga é modelado pelas seguintes equações de movimento

$$\rho_1 \varphi_{tt} - Q_x - lN = F_1 \quad \text{em} \quad (0, L) \times (0, \infty), \quad (1.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - M_x + Q = F_2 \quad \text{em} \quad (0, L) \times (0, \infty), \quad (1.2)$$

$$\rho_1 w_{tt} - N_x + lQ = F_3 \quad \text{em} \quad (0, L) \times (0, \infty), \quad (1.3)$$

no qual  $t$  denota a variável temporal e  $x$  a variável espacial. As funções  $\varphi = \varphi(t, x)$ ,  $w = w(t, x)$  e  $\psi = \psi(t, x)$  descrevem, respectivamente, as oscilações vertical, longitudinal e o ângulo de rotação da seção transversal. Além disso, consideremos

$$N = k_0(w_x - l\varphi), \quad Q = k(\varphi_x + lw + \psi) \quad \text{e} \quad M = b\psi_x, \quad (1.4)$$

sendo  $N$  a força axial, isto é, qualquer força que atua diretamente no eixo central da viga,  $Q$  a força de atrito, ou seja, é a força que se opõe ao movimento da viga e  $M$  o momento fletor gerado por cargas aplicadas transversalmente ao eixo longitudinal, produzindo esforço que tende a curvar o eixo longitudinal, provocando tensões normais de tração e compressão na estrutura. Além disso, denotamos por

$$\rho_1 = \rho A, \quad \rho_2 = \rho I, \quad k_0 = EA, \quad k = k'GA, \quad b = EI, \quad l = R^{-1},$$

em que  $\rho$  representa a densidade do material,  $E$  o módulo de elasticidade,  $G$  o módulo de cisalhamento,  $k'$  o fator de corte,  $A$  representa a área da seção transversal,  $I$  o segundo momento de área da seção transversal,  $R$  o raio de curvatura e por fim denotamos  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$  como forças externas. A seguir, apresentaremos na Figura 1.1 uma breve noção geométrica das variáveis  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $w$  presentes no sistema

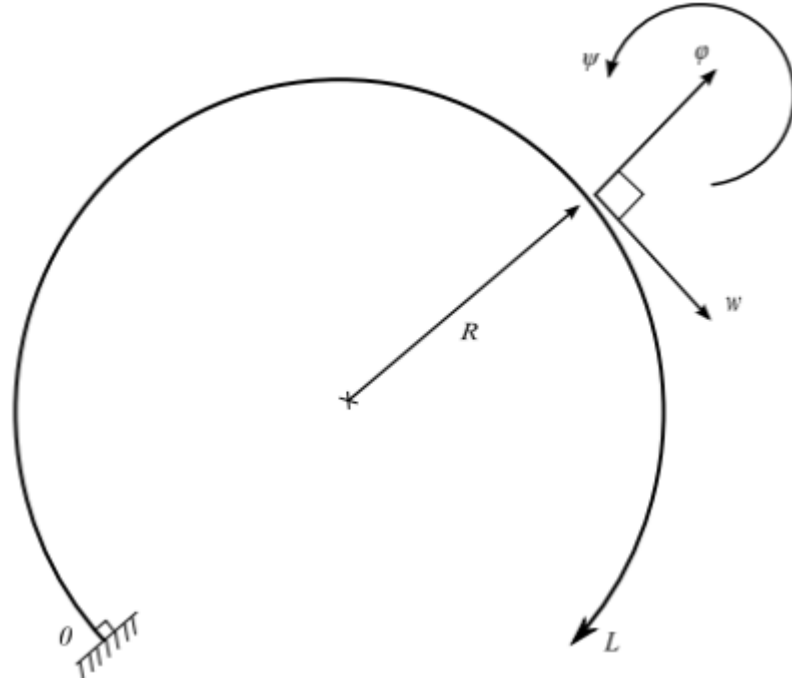


Figura 1.1: Arco circular (Fonte: Ver [5], página 482).

Deste modo, substituindo (1.4) em (1.1), (1.2) e (1.3), obtemos o seguinte sistema de Bresse

$$\begin{aligned} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) &= F_1 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) &= F_2 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) &= F_3 \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty). \end{aligned}$$

Diante de um vasto número de referências que podemos encontrar na literatura sobre sistema de Bresse, apresentaremos aqui algumas referências para o modelo com diferentes mecanismos dissipativos. Inicialmente com respeito ao mecanismo dissipativo da termoelasticidade, podemos citar o trabalho de Liu e Rao [15] em que os autores estudaram um sistema de Bresse com dois mecanismos dissipativos termoelásticos distintos, mais precisamente mostraram o sistema com uma dissipação atuando no deslocamento longitudinal e vertical e outra dissipação atuando no ângulo de rotação da seção transversal, ou seja,  $F_1 = -l\alpha\theta_1$ ,  $F_2 = -\alpha\theta_{3x}$  e  $F_3 = -\alpha\theta_{1x}$ , sendo  $\theta_1$  e  $\theta_3$  diferenças de temperaturas nos quais satisfazem as seguintes equações

$$\begin{aligned} \rho c \theta_{1t} &= \theta_{1xx} - \alpha T_0 (w_{xt} - l\varphi_t) \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \\ \rho c \theta_{3t} &= \theta_{3xx} - \alpha T_0 \psi_{xt} \quad \text{em } (0, L) \times (0, \infty), \end{aligned}$$

em que  $\rho, c, \alpha, T_0$  e  $l$  são constantes positivas. Além disso, os autores provaram que quando as velocidades das ondas dos deslocamentos vertical e longitudinal são iguais, ou seja, quando  $E = G$ , a solução decai exponencialmente, do ponto de vista matemático temos um resultado relevante, porém do ponto de vista físico as velocidades de propagação das ondas são sempre

diferentes e ainda observaram que quando as velocidades das ondas dos deslocamentos vertical e longitudinal são diferentes, ou seja, quando  $E \neq G$ , as soluções possui decaimento polinomial dependendo das condições de fronteira.

Outros trabalhos em que esses resultados também podem ser vistos são Fatori e Rivera [11] e Lima e Sare [14]. Em [11] os autores estudaram um sistema de Bresse com um único mecanismo de dissipação termoelástico, mais especificamente os autores consideraram um sistema com uma dissipação atuando no ângulo de rotação na seção transversal, ou seja,  $F_1 = F_3 = 0$  e  $F_2 = -\gamma\theta_x$ , em que  $\gamma$  é uma constante positiva e  $\theta$  é a diferença de temperatura no qual satisfaz a seguinte equação

$$\theta_t - k_1\theta_{xx} + m\psi_{xt} = 0 \quad \text{em} \quad (0, L) \times (0, \infty),$$

sendo  $k_1$  e  $m$  constantes positivas. Além disso, os autores mostraram que existe estabilidade exponencial se, e somente se, a propagação das ondas são iguais, ou seja,

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{k}{b} \quad \text{e} \quad k = k_0.$$

No entanto, mostraram que, em geral, o sistema não é exponencialmente estável, em outras palavras o sistema possui taxa racional. Em [14] os autores apresentaram um sistema de Bresse termoelástico modelado pelas Leis de Fourier e Cattaneo com mecanismo dissipativo presente em duas equações, mais precisamente os autores consideraram um sistema dissipativo atuando nos deslocamentos vertical e longitudinal, ou seja,  $F_1 = -l\gamma\theta$ ,  $F_2 = 0$  e  $F_3 = -\gamma\theta_x$ , sendo  $\gamma$  constante positiva e  $\theta$  a diferença de temperatura satisfazendo as seguintes equações

$$\begin{aligned} \theta_t + k_1q_x + m(w_{xt} - l\varphi_t) &= 0 \quad \text{em} \quad (0, L) \times (0, \infty), \\ \tau q_t + \delta q + \theta_x &= 0 \quad \text{em} \quad (0, L) \times (0, \infty), \end{aligned}$$

em que  $k_1$ ,  $m$  e  $\delta$  são constantes positivas,  $\tau \geq 0$  e  $q$  o fluxo de calor, no qual os autores provaram que quando

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{k}{b} \quad \text{e} \quad (k_0 - k) \left( \tau - \frac{k_1\rho_1}{k} \right) + \tau\gamma m = 0,$$

a solução do sistema decairá exponencialmente. Caso contrário, mostraram que o sistema não possui decaimento exponencial, mas sim, com taxa racional.

Agora com respeito a dissipação friccional, podemos mencionar o trabalho de Santos e Almeida Júnior em [21], os autores estudaram o sistema de Bresse com dissipação friccional presentes em todas as equações, especificamente mostraram o sistema com dissipações atuando nas oscilações vertical, longitudinal e no ângulo de rotação da seção transversal, ou seja,  $F_1 = -\gamma_1\varphi_t$ ,  $F_2 = -\gamma_2\psi_t$  e  $F_3 = -\gamma_3w_t$ , sendo  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  e  $\gamma_3$  constantes positivas. Além disso, os autores provaram que sempre existe decaimento exponencial da solução independente da

relação entre os coeficientes e também apresentaram cálculos numéricos para comprovar os resultados teóricos obtidos nessa referência.

Outros trabalhos em que esses resultados também podem ser vistos são Boussouira, Rivera e Almeida Júnior [5], Alves, Fatori, Jorge Silva e Monteiro [2] e Wehbe e Youssef [22]. Em [5] os autores determinaram um sistema de Bresse com dissipação presente em uma única equação, mais precisamente os autores consideraram um sistema com uma dissipação atuando no ângulo de rotação da seção transversal, ou seja,  $F_1 = F_3 = 0$  e  $F_2 = -\gamma\psi_t$ , sendo  $\gamma$  uma constante positiva e também mostraram que este mecanismo de dissipação é suficiente para estabilizar exponencialmente todo o sistema desde que as velocidades de propagação das ondas coincidam, ou seja, quando

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{k}{b} \quad \text{e} \quad k = k_0.$$

Do contrário, o sistema possui estabilidade com taxa racional. Em [2] os autores analisaram o sistema de Bresse com duas dissipações friccionais, especificamente apresentaram o sistema de Bresse com uma dissipação atuando no deslocamento vertical e outra dissipação atuando no ângulo de rotação da seção transversal, isto é,  $F_1 = -\gamma_1\varphi_t$ ,  $F_2 = -\gamma_2\psi_t$  e  $F_3 = 0$ , sendo  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  constantes positivas e ainda observaram que se as velocidades de propagação das ondas são as mesmas, ou seja, quando  $k = k_0$ , o sistema é exponencialmente estável, no entanto quando  $k \neq k_0$  a solução do sistema decai com taxa racional para zero. Em [22] os autores apresentaram um sistema de Bresse com duas dissipações distribuídas localmente, especificamente os autores determinaram um sistema com uma dissipação atuando no ângulo de rotação na seção transversal e outra dissipação atuando no deslocamento longitudinal, ou seja,  $F_1 = 0$ ,  $F_2 = -a_1(x)\psi_t$  e  $F_3 = -a_2(x)w_t$ , no qual as funções contínuas positivas  $a_j(x)$ ,  $j = 1, 2$ , satisfazem a seguinte condição

$$a_j(x) \geq a_0 > 0 \quad \text{para cada} \quad x \in (0, c) \cup (d, L), 0 < c < d < L.$$

Os autores obtiveram condições suficientes para que a estabilidade exponencial da solução do modelo exista. Mais precisamente, o sistema é exponencialmente estável quando

$$\frac{Gh}{\rho_1} = \frac{EI}{\rho_2}.$$

Porém para o caso em que

$$\frac{Gh}{\rho_1} \neq \frac{EI}{\rho_2},$$

o sistema possui decaimento polinomial.

Com o propósito de alcançar os objetivos, este trabalho será estruturado da seguinte forma: no Capítulo 2 apresentaremos alguns resultados de Análise Funcional, espaços de Sobolev e semigrupos de operadores lineares, nos quais indicaremos as referências que podemos

encontrar os enunciados e demonstrações. Esses resultados serão de extrema revelância para o desenvolvimento do capítulo subsequente. Dentre esses resultados, se destacam o Teorema de Lax-Milgram (Teorema 2.8) e o Teorema de Lumer-Phillips (Teorema 2.45) para garantir a existência e unicidade da solução do sistema de Bresse. Além disso, outros dois resultados fundamentais para a conclusão desse trabalho, isto é, a obtenção das estabilidades exponencial e com taxa racional, serão o Teorema de Prüss (Teorema 2.48) e o Teorema de Borichev-Tomilov (Teorema 2.51), respectivamente. No Capítulo 3, estudaremos o sistema de Bresse com dissipação friccional em uma de suas equações, mais precisamente, mostraremos o sistema com dissipação atuando no ângulo de rotação na seção transversal, ou seja,  $F_1 = F_3 = 0$  e  $F_2 = -\gamma\psi_t$ . Para esse modelo apresentaremos inicialmente a formulação do semigrupo associado ao sistema de Bresse dissipativo, em seguida garantiremos a existência e unicidade da solução e por fim estudaremos o comportamento assintótico do modelo. Para isso, consideremos os seguintes números

$$\chi := |k_0 - k| \text{ e } \chi_0 := \left| \rho_2 - \frac{b}{k}\rho_1 \right|,$$

no qual veremos futuramente que a solução encontrada para o caso em que  $\chi = \chi_0 = 0$ , isto é, se as velocidades de propagação das ondas forem iguais, a solução decai exponencialmente para zero. Já para os demais casos observaremos posteriormente que as soluções encontradas decaem para zero com taxa racional. Além disso, Boussouira, Rivera e Almeida Júnior [5] encontraram para o caso em que  $\chi = 0$  e  $\chi_0 \neq 0$  a taxa de decaimento

$$\frac{1}{t^{\frac{1}{3}-\varepsilon}},$$

no qual  $\varepsilon > 0$ . Já para os casos em que  $\chi \neq 0$  e  $\chi_0 = 0$  ou  $\chi_0 \neq 0$  obtiveram a taxa de decaimento

$$\frac{1}{t^{\frac{1}{6}-\varepsilon}},$$

sendo  $\varepsilon > 0$ , vale ressaltar ainda que neste trabalho conseguiremos melhorar essas taxas de decaimento, visto que a taxa de decaimento que encontraremos aqui para o caso  $\chi = 0$  e  $\chi_0 \neq 0$  será

$$\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}},$$

e para os casos em que  $\chi \neq 0$  e  $\chi_0 = 0$  ou  $\chi_0 \neq 0$  a taxa de decaimento que obteremos será

$$\frac{1}{t^{\frac{1}{4}}}.$$

Em vista desses resultados, devemos primeiro provar o Teorema da Desigualdade de Observabilidade, que será de extrema importância para encontrar tais resultados e além disso por meio desse teorema poderemos concluir que as taxas independem das condições de fronteira.

## 2 PRELIMINARES

Este capítulo tem como finalidade exibir principais notações e resultados que serão essenciais no decorrer deste trabalho. Para isso, apresentaremos alguns conceitos fundamentais de análise funcional, espaços  $L^p(\Omega)$  e espaços de Sobolev unidimensionais, além de resultados básicos da teoria de semigrupos de operadores lineares.

### 2.1 ANÁLISE FUNCIONAL

Nesta seção definiremos e apresentaremos alguns resultados de análise funcional, nos quais para obter maiores detalhes, consultar [12], [6] e [7].

**Definição 2.1. (Espaço Normado).** *Um espaço normado  $X$  é um espaço vetorial com uma norma definida. Uma norma num espaço vetorial (real ou complexo)  $X$  é uma função de valores reais em  $X$ , cujo valor em um vetor  $x \in X$  é dado por  $\|x\|_X$  e que satisfaz as seguintes propriedades*

$$(N1) \quad \|x\|_X \geq 0,$$

$$(N2) \quad \|x\|_X = 0 \text{ se, e somente se, } x = 0,$$

$$(N3) \quad \|\alpha x\|_X = |\alpha| \|x\|_X,$$

$$(N4) \quad \|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X,$$

com  $x$  e  $y$  vetores arbitrários em  $X$  e  $\alpha$  qualquer escalar no corpo.

**Definição 2.2. (Espaços de Banach).** *Um espaço de Banach é um espaço vetorial normado completo, isto é, um espaço vetorial normado no qual toda sequência de Cauchy é convergente.*

**Definição 2.3. (Forma sesquilinear).** *Sejam  $X$  e  $Y$  dois  $\mathbb{K}$ -espaços vetoriais. Dizemos que a aplicação  $a : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$  de forma sesquilinear em  $X \times Y$  quando a satisfaz as seguintes condições*

$$(i) \quad a(x + y, z) = a(x, z) + a(y, z), \quad \forall x, y \in X, \quad \forall z \in Y,$$

$$(ii) \quad a(x, y + z) = a(x, y) + a(x, z), \quad \forall x \in X, \quad \forall y, z \in Y,$$

$$(iii) \quad a(cx, y) = ca(x, y), \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y, \quad \forall c \in \mathbb{K},$$

$$(iv) \quad a(x, cy) = \bar{c}a(x, y), \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y, \quad \forall c \in \mathbb{K}.$$

No caso  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $a$  é chamada de forma bilinear.

**Definição 2.4. (Continuidade de uma forma sesquilinear).** *Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços vetoriais normados e  $a : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$  uma forma sesquilinear. Dizemos que  $a$  é contínua (limitada) quando existe uma constante  $C > 0$  tal que  $|a(x, y)| \leq C \|x\|_X \|y\|_Y$ , para todo par  $(x, y) \in X \times Y$ .*

**Definição 2.5. (Coercividade de uma forma sesquilinear).** *Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços vetoriais normados e  $a : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$  uma forma sesquilinear. Dizemos que  $a$  é coerciva quando existe uma constante  $C > 0$  tal que  $\operatorname{Re}(a(x, x)) \geq C \|x\|_X^2$ , para todo  $x \in X$ .*

**Definição 2.6. (Norma proveniente do produto interno).** *Sejam  $X$  um espaço vetorial e  $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$  um produto interno em  $X \times X$ . Diz-se que a norma definida por  $\|x\|_X = \sqrt{\langle x, x \rangle_X}$  provém do (ou é induzida pelo) produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ .*

**Definição 2.7. (Espaços de Hilbert).** *Um espaço vetorial com produto interno é dito um espaço de Hilbert se for completo em relação à norma induzida pelo produto interno. No que se segue,  $\mathcal{H}$  sempre denotará um espaço de Hilbert.*

**Teorema 2.8. (Lax-Milgram).** *Sejam  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert real (complexo) e uma forma bilinear (sesquilinear) contínua e coerciva  $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K}$ . Então para todo funcional linear (antilinear)  $f$  limitado, existe um único  $x \in \mathcal{H}$  tal que  $a(x, y) = (f, y)$ , para todo  $y \in \mathcal{H}$ .*

**Demonstração.** Para o caso real, ver [6], Corolário 5.8, página 140. Para o caso complexo, ver [16], Corolário 6.6.2, página 595.  $\square$

## 2.2 ESPAÇOS $L^p(\Omega)$

Nesta seção vamos descrever as notações, definições e apresentar alguns resultados de espaços  $L^p(\Omega)$  que serão utilizadas no decorrer deste trabalho, sendo que para obter mais detalhes, consultar [6] e [7].

**Definição 2.9. (Espaços  $L^p(\Omega)$ ).** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto e  $0 < p < \infty$ . Seja  $\mathcal{L}^p(\Omega)$  o conjunto de todas as funções mensuráveis  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $|f|^p$  é integrável (no sentido de Lebesgue) em  $\Omega$ , ou seja,*

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é mensurável e } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

*Dizemos que duas funções  $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega)$  são equivalentes ( $f \sim g$ ), se  $f = g$  q.s. (quase sempre) em  $\Omega$ . Indicaremos por  $L^p(\Omega)$  o conjunto*

$$L^p(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega) / \sim.$$

*Para  $p = \infty$  definimos*

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é limitada q.s. em } \Omega \}.$$

**Observação 1.** Os elementos do conjunto  $L^p(\Omega)$  são classes de equivalência de funções em  $\mathcal{L}^p(\Omega)$ . No entanto, é mais apropriado considerar esses elementos como sendo funções. Deste modo, podemos escrever  $f \in L^p(\Omega)$  no lugar de  $[f] \in L^p(\Omega)$ .

**Observação 2.** Temos que

(i) Se  $0 < p < \infty$ , então  $L^p(\Omega)$  é um espaço vetorial.

(ii) O conjunto  $L^\infty(\Omega)$  é um espaço vetorial.

(iii) Seja  $f \in L^p(\Omega)$ ,  $0 < p \leq \infty$ . Denotamos a norma em  $L^p(\Omega)$  por

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < \infty.$$

(iv) Seja  $f \in L^\infty(\Omega)$ . Denotamos a norma em  $L^\infty(\Omega)$  por

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess}|f(x)| = \inf \{C > 0 \mid |f(x)| \leq C \text{ q.s. em } \Omega\}.$$

Assim, para mostrarmos que uma determinada função mensurável  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  pertence ao espaço  $L^p(\Omega)$ , basta verificarmos que  $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$ .

(v) Se  $f \in L^\infty(\Omega)$ , então  $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$  para quase todo  $x \in \Omega$ .

**Definição 2.10.** *Sejam  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função*

(a)  *$f$  é dita ser convexa se dados dois pontos  $(x_1, f(x_1))$ ,  $(x_2, f(x_2))$  com  $x_1 < x_2$ , o segmento que une estes pontos está acima do gráfico de  $f$ ,*

(b)  *$f$  é dita côncava se o mesmo segmento está abaixo do gráfico de  $f$ .*

**Observação 3.** Se  $f$  é uma função côncava, então para todo  $x_1, x_2 \in I$  e  $\lambda, \mu > 0$  tais que  $\lambda + \mu = 1$  temos

$$f(\lambda x_1 + \mu x_2) \geq \lambda f(x_1) + \mu f(x_2).$$

**Definição 2.11.** *Seja  $1 \leq p \leq \infty$  e por  $q$  denotamos o expoente conjugado de  $p$  que é um número real*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

**Proposição 2.12. (Desigualdade de Young).** *Dados  $a, b \geq 0$ ,  $1 < p, q < \infty$  expoentes conjugados, isto é, tais que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Então,*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad (a, b > 0).$$

**Demonstração.** Ver [10], página 622, Seção B.2. □

Uma variação da Desigualdade de Young que será muito utilizada neste trabalho é dada pelo seguinte lema

**Lema 2.13. (Desigualdade de Young com  $\varepsilon$ ).** *Dados  $a, b \geq 0$ ,  $1 < p, q < \infty$  expoentes conjugados, isto é, tais que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  e  $\varepsilon > 0$ , então existe uma constante  $C_\varepsilon > 0$  tal que*

$$ab \leq \varepsilon a^p + C_\varepsilon b^q, \quad \text{no qual} \quad C_\varepsilon = \frac{(\varepsilon p)^{-\frac{q}{p}}}{q}.$$

**Demonstração.** Ver página 622 de [10], Seção B.2.  $\square$

**Proposição 2.14. (Desigualdade de Hölder).** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto e sejam  $p$  e  $q$  expoentes conjugados,  $1 \leq p \leq \infty$ . Se  $f \in L^p(\Omega)$  e  $g \in L^q(\Omega)$ , então  $fg \in L^1(\Omega)$  e*

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

**Demonstração.** Ver Teorema 4.6 em [6], página 92, Capítulo 4, Seção 4.2.  $\square$

**Teorema 2.15. (Fischer- Riesz).**  *$L^p(\Omega)$  é um espaço de Banach para qualquer  $p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .*

**Demonstração.** Ver Teorema 4.8, seção 4.2, páginas 93 e 94, Capítulo 4 em [6].  $\square$

**Observação 4.** O Teorema 2.15 nos diz que os espaços  $L^p(\Omega)$  são espaços de Banach quando  $1 \leq p \leq \infty$ . Em particular, quando  $p = 2$  o espaço  $L^2(\Omega)$  é um espaço de Hilbert com produto interno

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \Rightarrow \langle f, f \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx = \|f\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Se  $p \neq 2$  então  $L^p(\Omega)$  não são espaços de Hilbert.

### 2.2.1 Propriedades adicionais dos espaços $L^p(\Omega)$ .

Nesta subseção temos o objetivo de apresentar mais notações, definições e resultados dos espaços  $L^p(\Omega)$ .

**Definição 2.16.** *Dizemos que o conjunto  $X$  está imerso continuamente em  $Y$  se  $X \subseteq Y$  e aplicação inclusão*

$$\begin{aligned} i : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto i(x) = x, \end{aligned}$$

é contínua, ou seja, se existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\|x\|_Y = \|i(x)\|_Y \leq C \|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

Neste caso, escrevemos  $X \hookrightarrow Y$ .

**Definição 2.17.** *Uma função  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mensurável é dita **localmente integrável** se*

$$\int_K f(x)dx < \infty, \quad \forall K \text{ subconjunto compacto de } \Omega.$$

Indicaremos por  $L^p_{loc}(\Omega)$  o conjunto de todas as funções mensuráveis  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $|f|^p$  é localmente integrável, ou seja,

$$L^p_{loc}(\Omega) = \left\{ f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é mensurável e } \int_K |f(x)|^p dx < \infty, \quad \forall K \subset \Omega \text{ compacto} \right\},$$

e ainda

$$L_{loc}^{\infty}(\Omega) = \{f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é mensurável e } f \in L^{\infty}(\Omega), \forall K \subset \Omega \text{ compacto}\}.$$

**Definição 2.18.** *Seja  $\Omega$  um aberto do  $\mathbb{R}^n$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. O suporte de  $f$  é conjunto*

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}}^{\Omega}.$$

Denotaremos por

$$C_0(\Omega) = \{f \in C(\Omega) \mid \text{supp}(f) \text{ é compacto}\}.$$

**Definição 2.19.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto então definimos*

$$C^{\infty}(\Omega) = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(\Omega),$$

no qual

$$C^k(\Omega) = \{f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ k-vezes continuamente diferenciável}\}.$$

Também definimos o

$$C_0^{\infty}(\Omega) = C^{\infty}(\Omega) \cap C_0(\Omega).$$

Note que

$$C_0^{\infty}(\Omega) = C^{\infty}(\Omega) \cap C_0(\Omega) \subset C_0(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

**Teorema 2.20.** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto do  $\mathbb{R}$  e  $1 \leq p < \infty$  então  $C_0^{\infty}(\Omega)$  é denso em  $L^p(\Omega)$ .*

**Demonstração.** Ver Corolário 4.23 em [6], páginas 109 e 110, Capítulo 4. □

### 2.3 ESPAÇOS DE SOBOLEV UNIDIMENSIONAIS

Nesta seção definiremos e apresentaremos alguns resultados de espaços de Sobolev unidimensionais. Para maiores detalhes, consultar [6] e [7].

**Definição 2.21. (Espaços  $W^{1,p}(I)$ ).** *Considere  $I = (a, b)$  com  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$  e  $p \in \mathbb{R}$  com  $1 \leq p \leq \infty$ . O espaço de Sobolev  $W^{1,p}(I)$  é definido por*

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u : I \rightarrow \mathbb{R} \mid u \in L^p(I) \text{ e } \exists g \in L^p(I) \text{ com } \int_I u\varphi' dx = - \int_I g\varphi dx, \forall \varphi \in C_0^1(I) \right\}.$$

Em particular, quando  $p = 2$  denotaremos  $W^{1,2}(I) = H^1(I)$ , ou seja,

$$H^1(I) = \left\{ u : I \rightarrow \mathbb{R} \mid u \in L^2(I) \text{ e } \exists g \in L^2(I) \text{ com } \int_I u\varphi' dx = - \int_I g\varphi dx, \forall \varphi \in C_0^1(I) \right\}.$$

**Observação 5.** Temos que

(a) Se  $u \in W^{1,p}(I)$ , então a função  $g$  é chamada de derivada fraca de  $u$  em  $W^{1,p}(I)$  e vamos usar notação  $u' = g$ . Se  $g$  é derivada fraca de  $u$ , então

$$\int_I u\varphi' dx = - \int_I g\varphi dx = - \int_I u'\varphi dx.$$

(b) A derivada fraca, quando existe, é única a menos de um conjunto de medida nula. Para ver isso, vamos usar o seguinte: sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto e  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ . Se

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0(\Omega),$$

então  $u = 0$  quase sempre em  $\Omega$ .

(c) Se  $u \in C^1(I) \cap L^p(I)$  e  $u' \in L^p(I)$ , então  $u \in W^{1,p}(I)$  é derivada usual  $u'$  coincide com a derivada fraca  $g$  da função  $u$ .

(d) Se  $I$  é um intervalo limitado, então valem as seguintes inclusões

$$C^1(\bar{I}) \subset W^{1,p}(I) \text{ e } C^1_0(I) \subset W^{1,p}(I).$$

**Observação 6.** O espaço  $W^{1,p}(I)$  é munido da norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} = \|u\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p(I)},$$

ou ainda, se  $1 < p < \infty$ , com a norma equivalente

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} = (\|u\|_{L^p(I)}^p + \|u'\|_{L^p(I)}^p)^{\frac{1}{p}}.$$

As duas normas definidas acima são equivalentes.

**Observação 7.** Quando  $p = 2$ , o espaço  $H^1(I) = W^{1,2}(I)$  é um espaço com produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H^1(I)} = \langle u, v \rangle_{L^2(I)} + \langle u', v' \rangle_{L^2(I)},$$

e com a norma associada

$$\|u\|_{H^1(I)} = (\|u\|_{L^2(I)}^2 + \|u'\|_{L^2(I)}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

**Teorema 2.22.** O espaço  $W^{1,p}(I)$  é um espaço de Banach para  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Demonstração.** Ver Proposição 8.1, páginas 203 e 204 em [6], Capítulo 8, Seção 8.2.  $\square$

**Observação 8.** Se  $p = 2$  então  $H^1(I) = W^{1,2}(I)$  é um espaço de Hilbert.

**Lema 2.23. (Du Bois-Reymond).** Seja  $u \in L^1_{loc}(I)$  tal que

$$\int_I u(x)\phi(x) dx = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(I),$$

então  $u = 0$  quase sempre em  $I$ .

**Demonstração.** Ver [8]. □

**Proposição 2.24. (Imersão).** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo limitado. Então, as seguintes inclusões são compactas (e, conseqüentemente, contínuas)*

(a)  $i : (H^2, \|\cdot\|_{H^2}) \rightarrow (H^1, \|\cdot\|_{H^1}),$

(b)  $i : (H^1, \|\cdot\|_{H^1}) \rightarrow (C(\bar{I}), \|\cdot\|_{L^\infty}).$

**Demonstração.** Ver [1], Teorema 6.3. □

**Lema 2.25.** *Seja  $g \in L^1_{loc}(I)$ . Para algum  $y_0 \in I$ , considere*

$$v(x) = \int_{y_0}^x g(t)dt, x \in I.$$

Então,  $v \in C(I)$  e

$$\int_I v(x)\varphi'(x)dx = - \int_I g(x)\varphi(x)dx, \forall \varphi \in C_0^1(I).$$

**Demonstração.** Ver página 205, Lema 8.2, Capítulo 8 em [6], Seção 8.2. □

**Teorema 2.26.** *Seja  $u \in W^{1,p}(I)$ , com  $1 \leq p \leq \infty$ . Então, existe uma função  $\tilde{u} \in C(\bar{I})$  tal que  $u = \tilde{u}$  quase sempre em  $I$  e*

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt,$$

quaisquer que sejam  $x, y \in I$ .

**Demonstração.** Ver Capítulo 8 de [6], Teorema 8.2, página 206. □

**Observação 9.** A função  $\tilde{u}$  do Teorema 2.26 é chamada de representante contínuo da função  $u \in W^{1,p}(I)$ , uma vez que  $u = \tilde{u}$  quase sempre em  $I$ , ou seja,  $\tilde{u}$  pertence a classe de equivalência da função  $u$ .

### 2.3.1 Imersões nos espaços de Sobolev $W^{1,p}(I)$

Nesta subseção observaremos definições e resultados sobre imersões nos espaços de Sobolev  $W^{1,p}(I)$ , nos quais para obter maiores detalhes, consultar [9], [6] e [7].

**Definição 2.27.** *Sejam  $X, Y$  espaços vetoriais normados com  $X \subseteq Y$ . Dizemos que  $X$  está imerso continuamente em  $Y$  se o operador inclusão*

$$i : X \rightarrow Y$$

$$x \mapsto i(x) = x,$$

é contínuo, isto é, se existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\|x\|_Y = \|i(x)\|_Y \leq C \|x\|_X, \forall x \in X.$$

Neste caso escrevemos  $X \hookrightarrow Y$ .

Dizemos que a imersão de  $X$  em  $Y$  é compacta se  $X \hookrightarrow Y$  e o operador inclusão  $i : X \rightarrow Y$  é compacto.

**Proposição 2.28.** *Seja  $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$  um operador linear em um espaço  $\mathcal{H}$  tal que  $\rho(\mathcal{A}) \neq \emptyset$  e seja  $X_1 := (D(\mathcal{A}), \|\cdot\|_{\mathcal{A}})$ . Então, as seguintes afirmações são equivalentes*

- (i) o operador  $\mathcal{A}$  possui resolvente compacto,
- (ii) a aplicação canônica  $X_1 \hookrightarrow X$  é compacta.

**Demonstração.** Ver [9], página 107, Proposição 5.8. □

**Corolário 2.29.** *Se o operador  $\mathcal{A}$  tem resolvente compacto, então  $\sigma(\mathcal{A})$  é formado apenas por autovalores de  $\mathcal{A}$ .*

**Demonstração.** Ver [9], página 162, Corolário 1.15. □

**Proposição 2.30.** *Seja  $u \in L^p(\mathbb{R})$  com  $1 < p < \infty$ . As seguintes propriedades são equivalentes*

(a)  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ .

(b) Existe uma constante  $C > 0$  tal que

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C|h|, \forall h \in \mathbb{R},$$

sendo  $C = \|u'\|_{L^p(\mathbb{R})}$  e  $(\tau_h u)(x) = u(x + h)$ .

**Demonstração.** Ver [6], seção 8.2, Proposição 8.5, páginas 208 e 209. □

**Teorema 2.31. (Densidade).** *Seja  $u \in W^{1,p}(I)$  com  $1 \leq p < \infty$ . Então existe uma sequência  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{R})$  tal que  $u_n|_I \rightarrow u$  em  $W^{1,p}(I)$ , ou seja,  $u|_I; u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  é denso em  $W^{1,p}(I)$  (porém não podemos dizer que  $C_0^\infty(I)$  é denso em  $W^{1,p}(I)$  quando  $I \subsetneq \mathbb{R}$ ).*

**Demonstração.** Páginas 127, 128 e 129, Teorema VIII.6 de [7]. □

**Teorema 2.32. (Imersões de Sobolev).** *Temos que*

(a)  $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ , para todo  $1 \leq p \leq \infty$ , com inclusão contínua, ou seja, existe uma constante  $c = c(\text{med}(I))$ ,  $\text{med}(I) \leq \infty$ , tal que  $\|u\|_{L^\infty(I)} \leq c \|u\|_{W^{1,p}(I)}$ , para todo  $u \in W^{1,p}(I)$ .

(b) Se  $I$  é limitado ( $\text{med}(I) < \infty$ ) então  $W^{1,p}(I) \subset C(\bar{I})$  para todo  $1 < p \leq \infty$ , com inclusão compacta.

(c) Se  $I$  é limitado ( $\text{med}(I) < \infty$ ) então  $W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$ , para todo  $1 \leq q < \infty$ , no qual  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , com inclusão compacta.

**Demonstração.** Ver Teorema 8.8, páginas 212, 213 e 214 em [6]. □

**Corolário 2.33. (Derivação do produto).** *Sejam  $u, v \in W^{1,p}(I)$  com  $1 \leq p \leq \infty$ . Então,*

(a)  $uv \in W^{1,p}(I)$  e  $(uv)' = u'v + uv'$ .

(b) *Vale a seguinte fórmula*

$$\int_y^x u'(s)v(s)ds = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x u(s)v'(s)ds.$$

**Demonstração.** Ver [6], Corolário 8.10, página 215. □

### 2.3.2 Os espaços $W_0^{1,p}(I)$

Nesta subsecção vamos definir e enunciar alguns resultados sobre espaços  $W_0^{1,p}(I)$ . Para obter mais detalhes, consultar [10] e [6].

**Definição 2.34.** *Seja  $1 \leq p < \infty$ . O espaço  $W_0^{1,p}(I)$  é por definição*

$$W_0^{1,p}(I) = \overline{C_0^1(I)}^{W^{1,p}(I)}.$$

*Se  $p = 2$ , então*

$$W_0^{1,2}(I) = H_0^1(I) = \overline{C_0^1(I)}^{H^1(I)}.$$

**Observação 10.** Os espaços  $W_0^{1,p}(I)$ ,  $1 \leq p < \infty$  são espaços vetoriais e normados com norma de  $W^{1,p}(I)$ .

**Teorema 2.35.** *Seja  $u \in W^{1,p}(I)$ . Então,  $u \in W_0^{1,p}(I)$  se, e somente se,  $u = 0$  em  $\partial I$ .*

**Demonstração.** Ver [10] página 259, 260 e 261, Teorema 2. □

**Observação 11.** Do Teorema 2.35, temos que  $W_0^{1,p}(I) = \{u \in W^{1,p}(I); u = 0 \text{ em } \partial I\}$ .

**Teorema 2.36. (Desigualdade de Poincaré).** *Se  $I$  é um intervalo limitado ( $\text{med}(I) < \infty$ ). Então existe uma constante  $c = c(\text{med}(I)) > 0$  tal que*

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq c \|u'\|_{L^p(I)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I).$$

**Demonstração.** Ver Proposição 8.13, Capítulo 8, Seção 8.3, página 218 em [6]. □

**Observação 12.** Se  $\text{med}(I) < \infty$  então o espaço  $W_0^{1,p}(I)$  é normado com a seguinte norma

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(I)} = \|u'\|_{L^p(I)}.$$

**Observação 13.** Se  $p = 2$  então  $H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$  e  $H_0^1(I)$  é um espaço de Hilbert com produto interno

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1(I)} = \int_I v'(x)u'(x)dx,$$

e este induz a seguinte norma (equivalente a norma  $\|u\|_{W_0^{1,p}(I)} = \|u'\|_{L^p(I)}$ )

$$\|u\|_{H_0^1(I)} = \langle u, u \rangle_{H_0^1(I)} = \int_I (u'(x))^2 dx = \|u'\|_{L^2(I)}^2.$$

### 2.3.3 O espaço de Sobolev $W^{m,p}(I)$

Nesta seção definiremos e apresentaremos resultados referentes ao espaço de Sobolev  $W^{m,p}(I)$ .

**Definição 2.37. (Espaço  $W^{m,p}(I)$ ).** Sejam  $m \geq 1$  e  $1 \leq p \leq \infty$ . O espaço  $W^{m,p}(I)$ ,  $I \subset \mathbb{R}$ , é definido por

$$W^{m,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I) \left| \begin{array}{l} \text{existem } g_1, g_2, \dots, g_m \in L^p(I) \text{ satisfazendo} \\ \int_I u D^j \varphi dx = (-1)^j \int_I g_j \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I), \quad \forall j = 1, \dots, m \end{array} \right. \right\}.$$

**Nota.** A função  $g_j$ ,  $j = 1, \dots, m$  é chamada de **derivada fraca** de ordem  $j$  de  $u \in W^{m,p}(I)$ . Usamos também as seguintes notações

$$g_1 = u', g_2 = u'', \dots, g_m = u^{(m)},$$

e assim

$$W^{m,p}(I) = \{u \in L^p(I), u', u'', \dots, u^{(m)} \in L^p(I)\}.$$

Caso  $m = 2$ , temos

$$W^{2,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I) \left| \begin{array}{l} \text{existem } g_1, g_2 \in L^p(I) \text{ satisfazendo} \\ \int_I u D^j \varphi dx = (-1)^j \int_I g_j \varphi dx, \quad j = 1, 2 \end{array} \right. \right\}.$$

**Observação 14.** Temos que

(a) O espaço  $W^{m,p}(I)$  é um espaço vetorial normado com norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(I)} = \|u\|_{L^p(I)} + \sum_{j=1}^m \|u^{(j)}\|_{L^p(I)},$$

para todo  $u \in W^{m,p}(I)$ .

(b) O caso particular em que  $p = 2$ , definamos  $H^m(I) = W^{m,2}(I)$ . Neste caso,  $H^m(I)$  é um

espaço de Hilbert com o seguinte produto interno

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle_{H^m(I)} &= \langle u, v \rangle_{L^2(I)} + \langle u', v' \rangle_{L^2(I)} + \langle u'', v'' \rangle_{L^2(I)} + \dots + \langle u^{(m)}, v^{(m)} \rangle_{L^2(I)} \\ &= \langle u, v \rangle_{L^2} + \sum_{j=1}^m \langle u^{(j)}, v^{(j)} \rangle_{L^2(I)},\end{aligned}$$

para todos  $u, v \in H^m(I)$ .

**Teorema 2.38. (Imersões de Sobolev.)** *Temos que*

(a)  $W^{m,p}(I) \subset L^\infty(I)$ , para todo  $1 \leq p \leq \infty$  e todo  $1 \leq m$ , com inclusão contínua, ou seja, existe uma constante  $c = c(\text{med}(I))$ ,  $\text{med}(I) \leq \infty$  tal que  $\|u\|_{L^\infty(I)} \leq c \|u\|_{W^{m,p}(I)}$ , para todo  $u \in W^{m,p}(I)$ .

(b) Se  $I$  é limitado então  $W^{m,p}(I) \subset C^{m-1}(\bar{I})$  para todo  $1 < p \leq \infty$  e todo  $1 \leq m$  com inclusão compacta e inclusão contínua para todo  $1 \leq p \leq \infty$  e todo  $1 \leq m$ .

(c) Se  $I$  é limitado então  $W^{m,1}(I) \subset L^q(I)$  para todo  $1 \leq q < \infty$  e todo  $1 \leq m$ , no qual  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , com inclusão compacta.

**Demonstração.** Consequência do Teorema 2.32. □

**Definição 2.39.** *Sejam  $m \geq 2$  e  $1 \leq p < \infty$ . O espaço  $W_0^{m,p}(I)$  é definido como*

$$W_0^{m,p}(I) = \overline{C_0^m(I)}^{W^{m,p}(I)} \subset W^{m,p}(I).$$

No caso  $p = 2$  denota-se também

$$W_0^{m,2}(I) = \overline{C_0^m(I)}^{W^{m,2}(I)} = H_0^m(I).$$

Podemos mostrar que

$$W_0^{m,p} = \{u \in W^{m,p}(I) \mid u = u' = u'' = \dots = u^{(m)} = 0 \text{ em } \partial I\}.$$

**Observação 15.** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  limitado, então existe  $C = C(I) > 0$  tal que*

$$\|u\|_{W^{m,p}(I)} \leq C \|u^{(m)}\|_{L^p(I)}, \forall u \in W_0^{m,p}(I), m \geq 2.$$

**Lema 2.40.** *Seja  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  e uma função  $f \in C^1[a, b]$  arbitrária. Então,*

$$\text{Re} \int_a^b f u \bar{u}_x dx = \frac{1}{2} f |u|^2 \Big|_a^b - \frac{1}{2} \int_a^b f' |u|^2 dx,$$

para toda  $u \in H^1(I)$ .

**Demonstração.** Utilizando integração por partes, podemos obter

$$\int_a^b f u \bar{u}_x dx = f |u|^2 \Big|_a^b - \int_a^b f' |u|^2 dx - \int_a^b f u_x \bar{u} dx. \quad (2.1)$$

Assim, reorganizando e reagrupando de maneira conveniente (2.1), obtemos

$$\int_a^b f(u\bar{u}_x + u_x\bar{u})dx = f|u|^2 \Big|_a^b - \int_a^b f'|u|^2 dx. \quad (2.2)$$

No entanto sabemos que para todos  $v, w \in \mathbb{C}$  temos que  $\operatorname{Re}(v\bar{w}) = \operatorname{Re}(w\bar{v})$ , assim, tomando a parte real de (2.2), temos

$$2 \operatorname{Re} \int_a^b f u \bar{u}_x dx = f|u|^2 \Big|_a^b - \int_a^b f'|u|^2 dx. \quad (2.3)$$

Além disso, multiplicando ambos os membros de (2.3) por  $\frac{1}{2}$ , obtemos

$$\operatorname{Re} \int_a^b f u \bar{u}_x dx = \frac{1}{2} f|u|^2 \Big|_a^b - \frac{1}{2} \int_a^b f'|u|^2 dx. \quad \square$$

## 2.4 SEMIGRUPOS DE OPERADORES LINEARES

Nesta seção, mostraremos algumas definições e resultados provenientes da teoria geral de semigrupos de operadores lineares, nos quais para maiores detalhes, consultar [17], [19], [18] e [4].

**Definição 2.41.** Uma família  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  de operadores lineares e limitados definida sobre um espaço de Banach  $X$  é chamada de **semigrupo de operadores lineares limitados** (ou simplesmente **semigrupo**) quando

- (i)  $S(0) = I$  (Operador Identidade em  $X$ ).
- (ii)  $S(t + s) = S(t)S(s)$ , para cada  $t, s \geq 0$ .

Além disso, diz-se que  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  é um **semigrupo de classe  $C^0$**  (ou simplesmente  **$C^0$ -semigrupo**) se além dos itens acima tivermos que

- (iii)  $\lim_{t \rightarrow 0} S(t)x = x$ , para todo  $x \in X$ .

**Definição 2.42.** Um operador  $\mathcal{A}$  é chamado de **gerador infinitesimal** de um semigrupo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  quando  $\mathcal{A}$  é definido como

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ x \in X \mid \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe em } X \right\},$$

e para cada  $x \in D(\mathcal{A})$  temos

$$\mathcal{A}x = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}.$$

As vezes diz-se também que o semigrupo  $S(t)$  é **gerado** por  $\mathcal{A}$  e é denotado por  $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ .

Note também que o domínio  $D(\mathcal{A})$  do operador  $\mathcal{A}$  pode ser reescrito como

$$D(\mathcal{A}) = \{x \in X \mid \mathcal{A}x \in X\}.$$

**Teorema 2.43.** *Seja  $\mathcal{A}$  um gerador infinitesimal de um  $C^0$ -semigrupo de contrações  $S(t) := e^{t\mathcal{A}}$  em um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Então, dado  $\mathbf{U}_0 \in D(\mathcal{A})$  existe uma única função*

$$\mathbf{U} \in C^1([0, +\infty); \mathcal{H}) \cap C([0, +\infty); D(\mathcal{A})),$$

satisfazendo o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{U}_t = \mathcal{A}\mathbf{U}, \\ \mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0. \end{cases}$$

Além disso, a solução é dada por  $\mathbf{U}(t) = S(t)\mathbf{U}_0$ .

**Demonstração.** Ver [6], Teorema 7.4, páginas 185 e 186. □

**Definição 2.44. (Operador dissipativo).** *Seja  $\mathcal{H}$  um espaço de Hilbert. Dizemos que um operador  $\mathcal{A}$  é dissipativo se*

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}u, u \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0, \quad \text{para todo } u \in \mathcal{H}.$$

**Teorema 2.45. (Lumner-Phillips).** *Seja  $\mathcal{A}$  um operador linear com domínio denso em um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  tais que*

(i) *Se  $\mathcal{A}$  é dissipativo e existe  $\lambda$  tal que  $\operatorname{Im}(\lambda I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$ , então  $\mathcal{A}$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo  $C^0$  de contrações.*

(ii) *Se  $\mathcal{A}$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe  $C^0$  de contrações sobre o espaço  $\mathcal{H}$ , então  $\operatorname{Im}(\lambda I - \mathcal{A}) = \mathcal{H}$ , para todo  $\lambda > 0$  e  $\mathcal{A}$  é um operador dissipativo.*

**Demonstração.** Ver [17], páginas 14 e 15, Teorema 4.3. □

O próximo resultado será de extrema importância para a obtenção da prova da existência e unicidade da solução do sistema deste trabalho, pois estabelece quais são as condições para que um operador linear seja o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe  $C^0$  de contrações.

**Teorema 2.46.** *Seja  $\mathcal{A}$  um operador linear, dissipativo e com domínio denso. Se  $0 \in \rho(\mathcal{A})$ , então  $\mathcal{A}$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe  $C^0$  de contrações.*

**Demonstração.** Ver [19], Teorema 2.12.3, página 91. □

A seguir, apresentaremos o Teorema de Prüss e o Teorema de Borichev e Tomilov, os quais estabelecem condições necessárias e suficientes para garantir que um semigrupo de classe  $C^0$  de contrações possuem estabilidade exponencial ou com taxa racional.

**Definição 2.47.** Um semigrupo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  é dito ser **exponencialmente estável** se existem constantes positivas  $C$  e  $\kappa$  tais que

$$\|S(t)\mathbf{U}_0\|_{\mathcal{H}} \leq Ce^{-\kappa t} \|\mathbf{U}_0\|_{\mathcal{H}}, \text{ para todo } t \geq 0.$$

**Teorema 2.48. (Prüss).** Seja  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  um semigrupo de classe  $C^0$  de contrações sobre um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Então,  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  é exponencialmente estável se, e somente se, valem as duas condições

$$\varrho(\mathcal{A}) \supseteq \{i\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R}, \quad (2.4)$$

$$\limsup_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty. \quad (2.5)$$

**Demonstração.** Ver [18]. □

**Definição 2.49.** Um semigrupo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  **decai com taxa racional** se existe constante positiva  $C$  e  $\kappa \in (0, 1)$  tais que

$$\|S(t)\mathbf{U}_0\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^\kappa} \|\mathbf{U}_0\|_{D(\mathcal{A})}, \text{ para todo } \mathbf{U}_0 \in D(\mathcal{A}).$$

**Definição 2.50.** Escrevemos

$$f = O(g), \text{ quando } \lambda \rightarrow \lambda_0,$$

desde que existe uma constante positiva  $C > 0$  tal que

$$|f(\lambda)| \leq C|g(\lambda)|,$$

para todo  $\lambda$  suficientemente perto de  $\lambda_0$ .

**Teorema 2.51. (Borichev-Tomilov).** Seja  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  um semigrupo de classe  $C^0$  limitado sobre um espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  com gerador infinitesimal  $\mathcal{A}$ , tal que,  $i\mathbb{R} \subset \varrho(\mathcal{A})$ . Então para uma constante  $\alpha > 0$  fixada, as seguintes condições são equivalentes

$$\|R(\lambda, \mathcal{A})\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = O(|\lambda|^{-\alpha}), \quad |\lambda| \rightarrow \infty, \quad (2.6)$$

$$\|S(t)(-\mathcal{A})^{-\alpha}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = O(t^{-1}), \quad t \rightarrow \infty, \quad (2.7)$$

$$\|S(t)(-\mathcal{A})^{-\alpha}x\|_{\mathcal{H}} = o(t^{-1}), \quad t \rightarrow \infty, \quad x \in \mathcal{H}, \quad (2.8)$$

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = O(t^{-\frac{1}{\alpha}}), \quad t \rightarrow \infty, \quad (2.9)$$

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}x\|_{\mathcal{H}} = o(t^{-\frac{1}{\alpha}}), \quad t \rightarrow \infty, \quad x \in \mathcal{H}. \quad (2.10)$$

**Demonstração.** Ver Teorema 2.4. em [4], páginas 459, 460 e 461. □

### 3 SISTEMA DE BRESSE COM UMA DISSIPACÃO FRICCIONAL

Em sentido amplo, o objetivo deste capítulo é estudar a existência, unicidade e o comportamento assintótico de soluções para o sistema de Bresse. Para isso, consideremos o seguinte sistema de Bresse com dissipação friccional no ângulo de rotação da seção transversal.

$$\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (3.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\psi_t = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (3.2)$$

$$\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = 0 \quad \text{em } (0, \infty) \times (0, L). \quad (3.3)$$

Como premissa, considera-se as seguintes condições iniciais

$$\varphi(0, \cdot) = \varphi_0, \varphi_t(0, \cdot) = \varphi_1, \psi(0, \cdot) = \psi_0, \psi_t(0, \cdot) = \psi_1, w(0, \cdot) = w_0, w_t(0, \cdot) = w_1, \quad (3.4)$$

e as condições de fronteira

$$\varphi(t, 0) = \varphi(t, L) = \psi(t, 0) = \psi(t, L) = w(t, 0) = w(t, L) = 0 \quad \text{em } t \in (0, \infty). \quad (3.5)$$

A partir dessas informações, esse capítulo terá a seguinte estruturação. Inicialmente, estudaremos na Seção 3.1, a formulação do semigrupo associado ao problema. Em seguida, na Seção 3.2, mostraremos a existência e unicidade da solução do sistema. E por fim, provaremos na Seção 3.3 a estabilidade para o semigrupo associado.

#### 3.1 FORMULAÇÃO DO SEMIGRUPPO

Essa seção tem como finalidade apresentar a formulação do semigrupo associado ao sistema de Bresse dissipativo.

##### 3.1.1 Espaço de Fase

O objetivo dessa subseção é determinar o espaço de fase, ou seja, o espaço no qual estão definidas as soluções do problema (3.1)-(3.5). Com este propósito iremos estudar as propriedades do funcional energia associado ao sistema (3.1)-(3.5). Para isso, provaremos o próximo resultado e salientamos aqui que a sua demonstração até o presente o momento é puramente informal.

**Proposição 3.1.** *A energia associada ao sistema (3.1)-(3.5) é dada pelo funcional  $E(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  definido por*

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_1 w_t^2 + b\psi_x^2 + k(\varphi_x + \psi + lw)^2 + k_0(w_x - l\varphi)^2) dx. \quad (3.6)$$

Além disso, o funcional satisfaz

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\gamma \int_0^L \psi_t^2 dx.$$

**Demonstração.** Multiplicando (3.1) por  $\varphi_t$  e integrando sobre o intervalo  $(0, L)$ , encontramos

$$\rho_1 \int_0^L \varphi_{tt} \varphi_t dx - \underbrace{k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)_x \varphi_t dx}_{:=T_1} - k_0 l \int_0^L (w_x - l\varphi) \varphi_t dx = 0.$$

Deste modo, integrando por partes o termo  $T_1$  e usando o fato de que os termos da fronteira se anulam, obtemos

$$\frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \varphi_t^2 dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \varphi_{tx} dx - k_0 l \int_0^L (w_x - l\varphi) \varphi_t dx = 0. \quad (3.7)$$

Agora, multiplicando (3.2) por  $\psi_t$ , integrando no intervalo  $(0, L)$  e reorganizando de forma adequada a igualdade encontrada, temos

$$\rho_2 \int_0^L \psi_{tt} \psi_t dx - \underbrace{b \int_0^L \psi_{xx} \psi_t dx}_{:=T_2} + k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \psi_t dx = -\gamma \int_0^L \psi_t^2 dx.$$

Desta forma, integrando por partes o termo  $T_2$  e utilizando o fato que os termos da fronteira se anulam, segue que

$$\frac{\rho_2}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_t^2 dx + \frac{b}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L \psi_x^2 dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \psi_t dx = -\gamma \int_0^L \psi_t^2 dx. \quad (3.8)$$

Por fim, multiplicando (3.3) por  $w_t$  e integrando sobre o intervalo  $(0, L)$ , obtemos

$$\rho_1 \int_0^L w_{tt} w_t dx - \underbrace{k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi)_x w_t dx}_{:=T_3} + kl \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) w_t dx = 0.$$

Dessa maneira, integrando por partes o termo  $T_3$  e usando o fato que os termos da fronteira se anulam, temos

$$\frac{\rho_1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L w_t^2 dx + k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi) w_{tx} dx + kl \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) w_t dx = 0. \quad (3.9)$$

Somando (3.7), (3.8) e (3.9), encontramos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \int_0^L (\rho_1 \varphi_t^2 + \rho_2 \psi_t^2 + \rho_1 w_t^2 + b \psi_x^2 + k(\varphi_x + \psi + lw)^2 + k_0(w_x - l\varphi)^2) dx \right] = -\gamma \int_0^L \psi_t^2 dx.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\gamma \int_0^L \psi_t^2 dx \leq 0,$$

ou seja, o sistema é dissipativo.  $\square$

**Observação 16.** Motivados pela Proposição 3.1 iremos determinar o espaço de fase  $\mathcal{H}$ . Encontrar tal espaço será o mesmo que determinar o espaço no qual a função  $E(t)$  faz sentido.

Deste modo, por meio do funcional energia dado em (3.6) se observa que, para estabelecer sua boa definição, devem cumprir as seguintes regularidades

$$\varphi \in H_0^1(0, L); \varphi_t \in L^2(0, L); \psi \in H_0^1(0, L); \psi_t \in L^2(0, L); w \in H_0^1(0, L); w_t \in L^2(0, L).$$

Portanto, vamos considerar o seguinte espaço de fase

$$\mathcal{H} = H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L). \quad (3.10)$$

### 3.1.2 Problema de Cauchy

Nessa subseção vamos reescrever o problema (3.1)-(3.5) como um problema de valor inicial de primeira ordem. Com esse propósito, considere  $\mathbf{U} = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, w, w_t)^\top$ . Vamos denotar por  $\varphi_t = \Phi$ ,  $\psi_t = \Psi$  e  $w_t = W$ . Então,  $\mathbf{U}$  satisfaz o seguinte sistema

$$\begin{cases} \mathbf{U}_t = \mathcal{A}\mathbf{U}, \\ \mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0, \end{cases}$$

sendo  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  o operador definido por

$$\mathcal{A}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \Phi \\ \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw)_x + \frac{k_0 l}{\rho_1}(w_x - l\varphi) \\ \Psi \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + lw) - \frac{\gamma}{\rho_2}\Psi \\ W \\ \frac{k_0}{\rho_1}(w_x - l\varphi)_x - \frac{kl}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{U}(0) = \begin{pmatrix} \varphi(0, \cdot) \\ \Phi(0, \cdot) \\ \psi(0, \cdot) \\ \Psi(0, \cdot) \\ w(0, \cdot) \\ W(0, \cdot) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \psi_0 \\ \psi_1 \\ w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_0.$$

### 3.1.3 Domínio do Operador $\mathcal{A}$

Uma vez que determinamos o espaço de fase  $\mathcal{H}$ , podemos definir o domínio do operador  $\mathcal{A}$ .

**Proposição 3.2.** *Seja  $\mathbf{U} = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)^\top \in \mathcal{H}$ . Então, o domínio do operador  $\mathcal{A}$  é definido por*

$$D(\mathcal{A}) = \{ \mathbf{U} \in \mathcal{H} \mid \varphi, \psi, w \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L), \Phi, \Psi, W \in H_0^1(0, L) \}.$$

**Demonstração.** Lembremos que

$$D(\mathcal{A}) = \{ \mathbf{U} \in \mathcal{H} \mid \mathcal{A}\mathbf{U} \in \mathcal{H} \}.$$

Para  $\mathcal{A}\mathbf{U}$  pertencer ao espaço  $\mathcal{H}$ , devemos ter

$$\begin{aligned} \Phi, \Psi, W &\in H_0^1(0, L), \\ \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw)_x + \frac{k_0 l}{\rho_1}(w_x - l\varphi) &\in L^2(0, L), \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + lw) - \frac{\gamma}{\rho_2}\Psi &\in L^2(0, L), \\ \frac{k_0}{\rho_1}(w_x - l\varphi)_x - \frac{kl}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw) &\in L^2(0, L). \end{aligned}$$

Note que,

$$\frac{k}{\rho_1}\varphi_{xx} = \underbrace{\left( \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw)_x + \frac{k_0 l}{\rho_1}(w_x - l\varphi) \right)}_{\in L^2(0, L)} - \underbrace{\frac{k}{\rho_1}(\psi + lw)_x}_{\in L^2(0, L)} - \underbrace{\frac{k_0 l}{\rho_1}(w_x - l\varphi)}_{\in L^2(0, L)}$$

$$\Rightarrow \varphi_{xx} \in L^2(0, L),$$

$$\frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} = \underbrace{\left( \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + lw) - \frac{\gamma}{\rho_2}\Psi \right)}_{\in L^2(0, L)} + \underbrace{\frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + lw)}_{\in L^2(0, L)} + \underbrace{\frac{\gamma}{\rho_2}\Psi}_{\in L^2(0, L)}$$

$$\Rightarrow \psi_{xx} \in L^2(0, L),$$

$$\frac{k_0}{\rho_1}w_{xx} = \underbrace{\left( \frac{k_0}{\rho_1}(w_x - l\varphi)_x - \frac{kl}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw) \right)}_{\in L^2(0, L)} + \underbrace{\frac{k_0 l}{\rho_1}\varphi_x}_{\in L^2(0, L)} + \underbrace{\frac{kl}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw)}_{\in L^2(0, L)}$$

$$\Rightarrow w_{xx} \in L^2(0, L).$$

Deste modo,  $\varphi, \psi, w \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)$ . Portanto,

$$D(\mathcal{A}) = \{\mathbf{U} \in \mathcal{H} \mid \varphi, \psi, w \in H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L), \Phi, \Psi, W \in H_0^1(0, L)\}. \quad \square$$

### 3.1.4 Norma do Espaço $\mathcal{H}$ .

Considere  $\mathbf{U} = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)^\top, \mathbf{U}^* = (\varphi^*, \Phi^*, \psi^*, \Psi^*, w^*, W^*)^\top \in \mathcal{H}$ . No espaço  $\mathcal{H}$ , podemos definir o seguinte produto

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{U}, \mathbf{U}^* \rangle_{\mathcal{H}} &= \rho_1 \int_0^L \Phi \overline{\Phi^*} dx + \rho_2 \int_0^L \Psi \overline{\Psi^*} dx + \rho_1 \int_0^L W \overline{W^*} dx + b \int_0^L \psi_x \overline{\psi_x^*} dx \\ &\quad + k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{(w_x^* - l\varphi^*)} dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(\varphi_x^* + \psi^* + lw^*)} dx. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Este produto induz a seguinte aplicação  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K}$ , definida por

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 &= \langle \mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \rho_1 \|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2 \|\Psi\|_{L^2}^2 + \rho_1 \|W\|_{L^2}^2 + b \|\psi_x\|_{L^2}^2 + k \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 \\ &\quad + k_0 \|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (3.12)$$

O nosso próximo objetivo é mostrar que a aplicação  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K}$  dada em (3.12) é de fato uma norma.

**Lema 3.3.** *A aplicação  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K}$  definida em (3.12) é uma norma.*

**Demonstração.** Para provarmos que a aplicação  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{K}$  é uma norma, devemos analisar as quatro propriedades da definição de norma, ou seja, para todo  $\mathbf{U}, \mathbf{U}^* \in \mathcal{H}$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ , vale as seguintes condições

- (i)  $\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \geq 0$ ,
- (ii)  $\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} = 0$  se, e somente se,  $\mathbf{U} = 0$ ,
- (iii)  $\|\lambda \mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} = |\lambda| \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}$ ,
- (iv)  $\|\mathbf{U} + \mathbf{U}^*\|_{\mathcal{H}} \leq \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} + \|\mathbf{U}^*\|_{\mathcal{H}}$ .

**Prova de (i).**

Seja  $\mathbf{U} \in \mathcal{H}$ , por meio da igualdade (3.12) e da definição de norma em  $L^2(0, L)$ , temos  $\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \geq 0$ .

**Prova de (ii).**

Seja  $\mathbf{U} \in \mathcal{H}$  tal que  $\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} = 0$ . Deste modo, segue de (3.12) que

$$\Phi = \Psi = W = \varphi_x + \psi + lw = w_x - l\varphi = \psi_x = 0. \quad (3.13)$$

Uma vez que  $\psi_x = 0$ , temos que para toda função  $\mu \in C_0^\infty$ , integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L \psi(x)\mu_x(x)dx &= \psi(x)\mu(x) \Big|_0^L - \int_0^L \psi_x(x)\mu(x)dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Então, por meio do Lema 2.23, existe uma constante  $C \in \mathbb{R}$  tal que  $\psi = C$ . Como  $\psi \in H_0^1(0, L)$  então  $\psi(L) = \psi(0) = 0$ . Segue da Proposição 2.24 item (ii) que  $\psi$  é contínua no intervalo limitado  $[0, L]$ , isso quer dizer que se  $\psi$  é constante, temos que  $\psi = 0$ .

Além disso, por meio de (3.13) e do fato de  $\psi = 0$ , obtemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \varphi_x + lw = 0, & (3.14a) \\ w_x - l\varphi = 0. & (3.14b) \end{cases}$$

Uma consequência do sistema (3.14) em que  $\varphi \in H_0^1(0, L)$  é o problema de valor de contorno dado por

$$\begin{cases} \varphi_{xx} + l^2\varphi = 0, & (3.15a) \\ \varphi(0) = \varphi(L) = 0. & (3.15b) \end{cases}$$

Sabemos que  $\varphi \in C^2(0, L)$  é a solução do sistema (3.15) dada por

$$\varphi(x) = \alpha_1 \text{sen}(lx) + \alpha_2 \text{cos}(lx), \text{ para quaisquer } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}. \quad (3.16)$$

Uma vez que  $\varphi(0) = 0$  e tomando  $x = 0$  na função (3.16), obtemos  $\alpha_2 = 0$ . Substituindo tal resultado em (3.16), obtemos

$$\varphi(x) = \alpha_1 \text{sen}(lx). \quad (3.17)$$

Além disso, derivando (3.17) em relação a variável  $x$ , substituindo em (3.14a) e reorganizando de forma adequada, encontramos

$$w(x) = -\alpha_1 \text{cos}(lx). \quad (3.18)$$

No caso em que  $w \in H_0^1(0, L)$ , temos  $w(0) = 0$ , então tomando  $x = 0$  em (3.18) e igualando tais resultados, concluímos  $\alpha_1 = 0$ .

Assim, por meio de (3.16) e o fato de  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ , temos que  $\varphi = 0$ , conseqüentemente  $\varphi_x = 0$ . Deste modo, substituindo esse resultado em (3.14a), obtemos  $w = 0$ . Logo,  $\varphi = \psi = w = 0$ . Portanto, podemos concluir que  $\mathbf{U} = 0$ .

Por outro lado, seja  $\mathbf{U} \in \mathcal{H}$  tal que  $\mathbf{U} = 0$ . Sendo assim,  $\varphi = \psi = w = \Phi = \Psi = W = 0$ . Por consequência,  $\varphi_x = \psi_x = w_x = 0$ . Substituindo tais resultados em (3.12), temos  $\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 = 0$ .

Portanto,  $\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} = 0$ .

**Prova de (iii).**

Seja  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{U} \in \mathcal{H}$ . Deste modo,

$$\begin{aligned}
\|\lambda \mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 &= \rho_1 \|\lambda \Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2 \|\lambda \Psi\|_{L^2}^2 + \rho_1 \|\lambda W\|_{L^2}^2 + b \|\lambda \psi_x\|_{L^2}^2 + k \|\lambda(\varphi_x + \psi + lw)\|_{L^2}^2 \\
&\quad + k_0 \|\lambda(w_x - l\varphi)\|_{L^2}^2 \\
&= \rho_1 |\lambda|^2 \|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2 |\lambda|^2 \|\Psi\|_{L^2}^2 + \rho_1 |\lambda|^2 \|W\|_{L^2}^2 + b |\lambda|^2 \|\psi_x\|_{L^2}^2 + k |\lambda|^2 \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 \\
&\quad + k_0 |\lambda|^2 \|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 \\
&= |\lambda|^2 (\rho_1 \|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2 \|\Psi\|_{L^2}^2 + \rho_1 \|W\|_{L^2}^2 + b \|\psi_x\|_{L^2}^2 + k \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + k_0 \|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2) \\
&= |\lambda|^2 \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Logo,  $\|\lambda \mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 = |\lambda|^2 \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2$ . Portanto,  $\|\lambda \mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} = |\lambda| \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}$ , para quaisquer  $\lambda \in \mathbb{R}$  e  $\mathbf{U} \in \mathcal{H}$ .

**Prova de (iv).**

Sejam  $\mathbf{U}, \mathbf{U}^* \in \mathcal{H}$ , por meio da Desigualdade Triangular (**DT**), obtemos

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{U} + \mathbf{U}^*\|_{\mathcal{H}}^2 &\stackrel{\text{DT}}{\leq} \rho_1 (\|\Phi\|_{L^2}^2 + \|\Phi^*\|_{L^2}^2) + \rho_2 (\|\Psi\|_{L^2}^2 + \|\Psi^*\|_{L^2}^2) + \rho_1 (\|W\|_{L^2}^2 + \|W^*\|_{L^2}^2) \\
&\quad + b (\|\psi_x\|_{L^2}^2 + \|\psi_x^*\|_{L^2}^2) + k (\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + \|\varphi_x^* + \psi^* + lw^*\|_{L^2}^2) \\
&\quad + k_0 (\|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + \|w_x^* - l\varphi^*\|_{L^2}^2).
\end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{U} + \mathbf{U}^*\|_{\mathcal{H}} &\leq \sqrt{\rho_1 \|\Phi\|_{L^2}^2} + \sqrt{\rho_1 \|\Phi^*\|_{L^2}^2} + \sqrt{\rho_2 \|\Psi\|_{L^2}^2} + \sqrt{\rho_2 \|\Psi^*\|_{L^2}^2} + \sqrt{\rho_1 \|W\|_{L^2}^2} + \sqrt{\rho_1 \|W^*\|_{L^2}^2} \\
&\quad + \sqrt{b \|\psi_x\|_{L^2}^2} + \sqrt{b \|\psi_x^*\|_{L^2}^2} + \sqrt{k \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2} + \sqrt{k \|\varphi_x^* + \psi^* + lw^*\|_{L^2}^2} \\
&\quad + \sqrt{k_0 \|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2} + \sqrt{k_0 \|w_x^* - l\varphi^*\|_{L^2}^2} \\
&= \left( \sqrt{\rho_1} \|\Phi\|_{L^2} + \sqrt{\rho_2} \|\Psi\|_{L^2} + \sqrt{\rho_1} \|W\|_{L^2} + \sqrt{b} \|\psi_x\|_{L^2} + \sqrt{k} \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2} \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{k_0} \|w_x - l\varphi\|_{L^2} \right) + \left( \sqrt{\rho_1} \|\Phi^*\|_{L^2} + \sqrt{\rho_2} \|\Psi^*\|_{L^2} + \sqrt{\rho_1} \|W^*\|_{L^2} + \sqrt{b} \|\psi_x^*\|_{L^2} \right. \\
&\quad \left. + \sqrt{k} \|\varphi_x^* + \psi^* + lw^*\|_{L^2} + \sqrt{k_0} \|w_x^* - l\varphi^*\|_{L^2} \right) \\
&\leq \left( \rho_1 \|\Phi\|_{L^2} + \rho_2 \|\Psi\|_{L^2} + \rho_1 \|W\|_{L^2} + k \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2} + k_0 \|w_x - l\varphi\|_{L^2} + b \|\psi_x\|_{L^2} \right) \\
&\quad + \left( \rho_1 \|\Phi^*\|_{L^2} + \rho_2 \|\Psi^*\|_{L^2} + \rho_1 \|W^*\|_{L^2} + k \|\varphi_x^* + \psi^* + lw^*\|_{L^2} + k_0 \|w_x^* - l\varphi^*\|_{L^2} \right. \\
&\quad \left. + b \|\psi_x^*\|_{L^2} \right) \\
&= \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} + \|\mathbf{U}^*\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Portanto,  $\|\mathbf{U} + \mathbf{U}^*\|_{\mathcal{H}} \leq \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} + \|\mathbf{U}^*\|_{\mathcal{H}}$ , para quaisquer  $\mathbf{U}, \mathbf{U}^* \in \mathcal{H}$ .

Uma vez que as propriedades **(i)**, **(ii)**, **(iii)** e **(iv)** foram satisfeitas, podemos concluir que a aplicação definida em (3.12) é de fato uma norma.  $\square$

### 3.1.5 Equivalências de Normas

Nessa subseção mostraremos que a norma dada em (3.12) é equivalente a norma usual do espaço  $\mathcal{H}$

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|\Phi\|_{L^2}^2 + \|\psi_x\|_{L^2}^2 + \|\Psi\|_{L^2}^2 + \|w_x\|_{L^2}^2 + \|W\|_{L^2}^2. \quad (3.19)$$

Para isto, provaremos o próximo resultado que será de extrema importância para tal objetivo. A sua demonstração é baseada na referência [3].

**Lema 3.4.** *Sejam  $(\varphi, \psi, w) \in H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$ , então existe uma constante positiva  $C$ , tal que*

$$k \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + k_0 \|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + b \|\psi_x\|_{L^2}^2 \leq C (\|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|\psi_x\|_{L^2}^2 + \|w_x\|_{L^2}^2), \quad (3.20)$$

$$\|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|\psi_x\|_{L^2}^2 + \|w_x\|_{L^2}^2 \leq C (k \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + k_0 \|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + b \|\psi_x\|_{L^2}^2). \quad (3.21)$$

**Demonstração.** Considerando as desigualdades Triangular **(DT)** e de Poincaré **(DP)**, obtemos

$$\begin{aligned} k \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 &\stackrel{\mathbf{DT}}{\leq} k (\|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|\psi\|_{L^2}^2 + l^2 \|w\|_{L^2}^2) \\ &= k \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + k \|\psi\|_{L^2}^2 + kl^2 \|w\|_{L^2}^2 \\ &\stackrel{\mathbf{DP}}{\leq} k \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + kC_p \|\psi_x\|_{L^2}^2 + kl^2 C_p \|w_x\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Além disso, segue das desigualdades Triangular **(DT)** e de Poincaré **(DP)** que

$$\begin{aligned} k_0 \|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 &\stackrel{\mathbf{DT}}{\leq} k_0 (\|w_x\|_{L^2}^2 + l^2 \|\varphi\|_{L^2}^2) \\ &= k_0 \|w_x\|_{L^2}^2 + k_0 l^2 \|\varphi\|_{L^2}^2 \\ &\stackrel{\mathbf{DP}}{\leq} k_0 \|w_x\|_{L^2}^2 + k_0 l^2 C_p \|\varphi_x\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Assim, somando as desigualdades (3.22) e (3.23), encontramos

$$\begin{aligned} k \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + k_0 \|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 &\leq (k + k_0 l^2 C_p) \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + k C_p \|\psi_x\|_{L^2}^2 \\ &\quad + (kl^2 C_p + k_0) \|w_x\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Deste modo, somando o termo  $b \|\psi_x\|_{L^2}^2$  em ambos os membros da Desigualdade (3.24), pode-

mos obter

$$\begin{aligned} k \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + k_0 \|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + b \|\psi_x\|_{L^2}^2 &\leq (k + k_0 l^2 C_p) \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + (k C_p + b) \|\psi_x\|_{L^2}^2 \\ &\quad + (kl^2 C_p + k_0) \|w_x\|_{L^2}^2 \\ &\leq C (\|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|\psi_x\|_{L^2}^2 + \|w_x\|_{L^2}^2), \end{aligned}$$

sendo  $C = \max \{k + k_0 l^2 C_p, k C_p + b, kl^2 C_p + k_0\} > 0$ , pois  $k, k_0, b, l, C_p$  são constantes positivas.

Logo, vale a Desigualdade (3.20).

Agora resta apenas mostrar que vale (3.21). Para isso, a demonstração será feita mediante argumentos de contradição.

Suponha que a Desigualdade (3.21) não é verdadeira. Assim, para todo  $n \in \mathbb{N}$  existe uma sequência  $\{(\varphi_n, \psi_n, w_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  em  $H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$ , tal que

$$\begin{aligned} \|\varphi_{n,x}\|_{L^2}^2 + \|\psi_{n,x}\|_{L^2}^2 + \|w_{n,x}\|_{L^2}^2 &> n (k \|\varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n\|_{L^2}^2 + k_0 \|w_{n,x} - l\varphi_n\|_{L^2}^2 \\ &\quad + b \|\psi_{n,x}\|_{L^2}^2). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Assim, sem perda de generalidade normalizando a sequência  $\{(\varphi_n, \psi_n, w_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , podemos obter

$$\|\varphi_{n,x}\|_{L^2}^2 + \|\psi_{n,x}\|_{L^2}^2 + \|w_{n,x}\|_{L^2}^2 = 1. \quad (3.26)$$

Deste modo, substituindo (3.26) na Desigualdade (3.25) e reorganizando de maneira conveniente a desigualdade encontrada, obtemos

$$k \|\varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n\|_{L^2}^2 + k_0 \|w_{n,x} - l\varphi_n\|_{L^2}^2 + b \|\psi_{n,x}\|_{L^2}^2 < \frac{1}{n}. \quad (3.27)$$

Sendo assim, por meio da Desigualdade (3.26), sabemos que a sequência  $\{(\varphi_n, \psi_n, w_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  é limitada em  $H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$ . Uma vez que temos a inclusão  $H_0^1(0, L) \hookrightarrow L^2(0, L)$  compacta, podemos dizer que existe  $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$  um conjunto infinito, tal que a sequência  $\{(\varphi_n, \psi_n, w_n)\}_{n \in \mathbb{N}_1}$  converge forte em  $L^2(0, L) \times L^2(0, L) \times L^2(0, L)$ . Além disso, sabemos pela Desigualdade (3.27) que

$$\psi_{n,x} \rightarrow 0 \text{ forte em } L^2(0, L). \quad (3.28)$$

Assim, utilizando a Desigualdade de Poincaré, temos que

$$\psi_n \rightarrow 0 \text{ forte em } H_0^1(0, L).$$

Agora, considere  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  e  $w_n \rightarrow w$  forte em  $L^2(0, L)$ .

Desta forma, segue da Desigualdade (3.27) que

$$\varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n \rightarrow 0 \text{ forte em } L^2(0, L).$$

Além disso, somando e subtraindo termo  $lw$  em  $\varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n$ , encontramos

$$\varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n = \varphi_{n,x} + \psi_n + l(w_n - w) + lw.$$

Sob essa informações, podemos obter

$$\varphi_{n,x} + \psi_n + l(w_n - w) + lw \rightarrow 0 \text{ forte em } L^2(0, L).$$

Como sabemos que  $w_n \rightarrow w$  e  $\psi_n \rightarrow 0$ , resultamos

$$\varphi_{n,x} \rightarrow -lw \text{ forte em } L^2(0, L). \quad (3.29)$$

Desta forma, a sequência  $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}_1}$  é de Cauchy em  $H_0^1(0, L)$ , então existe uma função  $\phi \in H_0^1(0, L)$  tal que  $\varphi_n \rightarrow \phi$  em  $H_0^1(0, L)$ , em consequência  $\varphi_n \rightarrow \phi$  em  $L^2(0, L)$ . Assim, pela unicidade do limite temos  $\varphi = \phi$ , ou seja,  $\varphi \in H_0^1(0, L)$ .

Além disso, de (3.29), concluímos que

$$\varphi_x + lw = 0 \text{ quase sempre em } x \in (0, L). \quad (3.30)$$

Do mesmo modo, a partir da Desigualdade (3.27), temos que

$$w_{n,x} - l\varphi_n \rightarrow 0 \text{ forte em } L^2(0, L).$$

Além disso, somando e subtraindo o termo  $l\varphi$  em  $w_{n,x} - l\varphi_n$ , encontramos

$$w_{n,x} - l\varphi_n = w_{n,x} - l(\varphi_n - \varphi) - l\varphi.$$

Sob tais resultados, obtemos

$$w_{n,x} - l(\varphi_n - \varphi) - l\varphi \rightarrow 0 \text{ forte em } L^2(0, L).$$

Como  $\varphi_n \rightarrow \varphi$  forte em  $L^2(0, L)$ , podemos concluir

$$w_{n,x} \rightarrow l\varphi \text{ forte em } L^2(0, L). \quad (3.31)$$

Deste modo, a sequência  $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}_1}$  é de Cauchy em  $H_0^1(0, L)$ , então existe uma função  $\omega \in H_0^1(0, L)$  tal que  $w_n \rightarrow \omega$  em  $H_0^1(0, L)$ , o que implica  $w_n \rightarrow \omega$  em  $L^2(0, L)$ . Assim, utilizando a unicidade do limite temos que  $w = \omega$ , isto é,  $w \in H_0^1(0, L)$ .

Então, de (3.31) segue

$$w_x - l\varphi = 0 \text{ quase sempre em } x \in (0, L). \quad (3.32)$$

Assim, a solução das igualdades (3.30) e (3.32) é análoga a do sistema (3.14), nos quais obtemos  $\varphi = w = 0$ .

Portanto, por meio de (3.28), (3.29) e (3.31) segue que  $(\varphi_{n,x}, \psi_{n,x}, w_{n,x}) \rightarrow (0, 0, 0)$ , contadizando assim (3.26).

Concluimos, então que existe uma constante positiva  $C$  que satisfaz (3.21).  $\square$

**Corolário 3.5.** *As normas  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$  e  $|\cdot|_{\mathcal{H}}$  dadas em (3.12) e (3.19), respectivamente, são equivalentes.*

**Demonstração.** Consequência imediata do Lema 3.4.  $\square$

**Observação 17.** Uma vez que mostramos no Corolário 3.5 a equivalência das normas e sabemos que o espaço de fase  $\mathcal{H}$  é um espaço de Hilbert, pois todos os espaços que constitui o espaço de fase  $\mathcal{H}$  são espaços de Hilbert, segue que  $\mathcal{H}$  é um espaço de Hilbert com produto interno dado em (3.11).

## 3.2 EXISTÊNCIA E UNICIDADE

Essa seção tem como objetivo mostrar mediante teoria de semigrupos, a existência e unicidade de solução para o sistema (3.1)-(3.5). Com essa finalidade apresentaremos o próximo resultado.

**Teorema 3.6.** *O operador  $\mathcal{A}$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe  $C^0$  de contrações sobre o espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$ .*

**Demonstração.** Para provar que o operador  $\mathcal{A}$  gera um semigrupo de classe  $C^0$  de contrações, utilizaremos o Teorema 2.46. Para isso, devemos satisfazer as seguintes condições

- (a)  $D(\mathcal{A})$  é denso em  $\mathcal{H}$ ,
- (b)  $\mathcal{A}$  é um operador dissipativo,
- (c)  $0 \in \varrho(\mathcal{A})$ , sendo  $\varrho(\mathcal{A})$  o conjunto resolvente do operador  $\mathcal{A}$ .

**Prova de (a).**

Lembremos que

$$C_0^\infty(0, L) \subset H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L) \subset H_0^1(0, L).$$

Então,

$$\underbrace{C_0^\infty(0, L)}_{=H_0^1(0, L)} \overset{H_0^1(0, L)}{\subset} \overline{H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)} \overset{H_0^1(0, L)}{\subset} \underbrace{H_0^1(0, L)}_{=H_0^1(0, L)},$$

pois  $H_0^1(0, L)$  é um espaço de Banach, em particular é fechado e  $\overline{C_0^\infty(0, L)}^{H_0^1(0, L)} = H_0^1(0, L)$ . Logo,

$$\overline{H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)}^{H_0^1(0, L)} = H_0^1(0, L). \quad (3.33)$$

Além disso, sabemos que

$$C_0^\infty(0, L) \subset H_0^1(0, L) \subset L^2(0, L).$$

Segue que,

$$\underbrace{\overline{C_0^\infty(0, L)}^{L^2(0, L)}}_{=L^2(0, L)} \subset \overline{H_0^1(0, L)}^{L^2(0, L)} \subset \underbrace{\overline{L^2(0, L)}^{L^2(0, L)}}_{=L^2(0, L)},$$

pois  $L^2(0, L)$  é fechado e  $\overline{C_0^\infty(0, L)}^{L^2(0, L)} = L^2(0, L)$ .

Logo,

$$\overline{H_0^1(0, L)}^{L^2(0, L)} = L^2(0, L). \quad (3.34)$$

Por meio de (3.33) e (3.34), obtemos

$$\begin{aligned} \overline{D(\mathcal{A})}^{\mathcal{H}} &= \overline{H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)}^{H_0^1(0, L)} \times \overline{H_0^1(0, L)}^{L^2(0, L)} \times \overline{H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)}^{H_0^1(0, L)} \\ &\quad \times \overline{H_0^1(0, L)}^{L^2(0, L)} \times \overline{H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L)}^{H_0^1(0, L)} \times \overline{H_0^1(0, L)}^{L^2(0, L)} \\ &= H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \times H_0^1(0, L) \times L^2(0, L) \\ &= \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Portanto,  $D(\mathcal{A})$  é denso em  $\mathcal{H}$ .

### Prova de (b).

Como  $\mathcal{H}$  é um espaço de Hilbert, para provar que o operador  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  é dissipativo, basta mostrar que

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}\mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0, \text{ para todo } \mathbf{U} \in D(\mathcal{A}).$$

De fato, seja  $\mathbf{U} = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)^\top \in D(\mathcal{A})$ . Deste modo,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}\mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle_{\mathcal{H}} &= k \underbrace{\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)_x \overline{\Phi} dx}_{:=T_4} + k_0 l \int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{\Phi} dx + b \underbrace{\int_0^L \psi_{xx} \overline{\Psi} dx}_{:=T_5} - k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{\Psi} dx \\ &\quad - \gamma \int_0^L |\Psi|^2 dx + k_0 \underbrace{\int_0^L (w_x - l\varphi)_x \overline{W} dx}_{:=T_6} - kl \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{W} dx + b \int_0^L \Psi_x \overline{\psi_x} dx \\ &\quad + k \int_0^L \Phi_x \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx + k \int_0^L \Psi \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx + kl \int_0^L W \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx \\ &\quad + k_0 \int_0^L W_x \overline{(w_x - l\varphi)} dx - k_0 l \int_0^L \Phi \overline{(w_x - l\varphi)} dx. \end{aligned}$$

Além disso, integrando por partes os termos  $T_4, T_5$  e  $T_6$  e usando o fato que os termos da fronteira se anulam, segue que

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}\mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle_{\mathcal{H}} &= -k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{\Phi}_x dx + k_0 l \int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{\Phi} dx - b \int_0^L \psi_x \overline{\Psi}_x dx - k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{\Psi} dx \\
&\quad - \gamma \int_0^L |\Psi|^2 dx - k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{W}_x dx - kl \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{W} dx + b \int_0^L \psi_x \overline{\Psi}_x dx \\
&\quad + k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{\Phi}_x dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{\Psi} dx + kl \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{W} dx \\
&\quad + k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{W}_x dx - k_0 l \int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{\Phi} dx.
\end{aligned}$$

Dessa forma, cancelando os termos  $T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{11}$  e  $T_{12}$  e tomando a parte real de tal igualdade encontrada, obtemos

$$\operatorname{Re} \langle \mathcal{A}\mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle_{\mathcal{H}} = \operatorname{Re} \left( -\gamma \int_0^L |\Psi|^2 dx \right) = -\gamma \int_0^L |\Psi|^2 dx \leq 0. \quad (3.35)$$

Portanto, o operador  $\mathcal{A}$  é dissipativo.

### Prova de (c).

Lembremos que

$$\varrho(\mathcal{A}) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda I - \mathcal{A} \text{ é invertível e } (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \text{ é limitado} \}.$$

Vamos provar que  $0 \in \varrho(\mathcal{A})$ . Para isso, devemos mostrar que  $-\mathcal{A}^{-1}$  existe e  $-\mathcal{A}^{-1}$  é limitado.

1º) Para provarmos que o operador  $\mathcal{A}$  é invertível, basta mostrar que para toda função  $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^\top \in \mathcal{H}$ , existe uma única solução  $\mathbf{U} = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)^\top \in D(\mathcal{A})$  tal que  $\mathcal{A}\mathbf{U} = -\mathbf{F}$ , ou seja,

$$\mathcal{A}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \Phi \\ \frac{k}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw)_x + \frac{k_0 l}{\rho_1}(w_x - l\varphi) \\ \Psi \\ \frac{b}{\rho_2}\psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2}(\varphi_x + \psi + lw) - \frac{\gamma}{\rho_2}\Psi \\ W \\ \frac{k_0}{\rho_1}(w_x - l\varphi)_x - \frac{kl}{\rho_1}(\varphi_x + \psi + lw) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1 \\ -f_2 \\ -f_3 \\ -f_4 \\ -f_5 \\ -f_6 \end{pmatrix} = -\mathbf{F}.$$

Sendo assim, podemos considerar

$$\Phi = -f_1 \in H_0^1(0, L), \quad \Psi = -f_3 \in H_0^1(0, L) \text{ e } W = -f_5 \in H_0^1(0, L). \quad (3.36)$$

Resta apenas mostrar que existem  $\varphi, \psi, w \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)$  satisfazendo as seguintes equações

$$k(\varphi_x + \psi + lw)_x + k_0 l(w_x - l\varphi) = -\rho_1 f_2, \quad (3.37)$$

$$b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi + lw) = -\rho_2 f_4 + \gamma \Psi, \quad (3.38)$$

$$k_0(w_x - l\varphi)_x - kl(\varphi_x + \psi + lw) = -\rho_1 f_6. \quad (3.39)$$

Agora nosso objetivo é encontrar a equação variacional relacionada as equações (3.37), (3.38) e (3.39).

Considere o seguinte espaço de Hilbert  $\mathcal{V} = H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L) \times H_0^1(0, L)$ , munido da norma usual

$$|(\varphi, \psi, w)|_{\mathcal{V}}^2 = \|\varphi\|_{H_0^1}^2 + \|\psi\|_{H_0^1}^2 + \|w\|_{H_0^1}^2 = \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|\psi_x\|_{L^2}^2 + \|w_x\|_{L^2}^2. \quad (3.40)$$

**Afirmção.** Para toda terna  $(\varphi^*, \psi^*, w^*) \in \mathcal{V}$ , existe uma única terna  $(\varphi, \psi, w) \in \mathcal{V}$  satisfazendo a equação variacional

$$\begin{aligned} & k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(\varphi_x^* + \psi^* + lw^*)} dx + k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{(w_x^* - l\varphi^*)} dx + b \int_0^L \psi_x \overline{\psi_x^*} dx \\ & = \rho_1 \int_0^L f_2 \overline{\varphi^*} dx + \int_0^L (\rho_2 f_4 - \gamma f_3) \overline{\psi^*} dx + \rho_1 \int_0^L f_6 \overline{w^*} dx. \end{aligned} \quad (3.41)$$

De fato, definamos a forma sesquilinear  $a[\cdot, \cdot] : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$  por

$$\begin{aligned} a[(\varphi, \psi, w), (\varphi^*, \psi^*, w^*)] & = k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(\varphi_x^* + \psi^* + lw^*)} dx \\ & + k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{(w_x^* - l\varphi^*)} dx + b \int_0^L \psi_x \overline{\psi_x^*} dx. \end{aligned} \quad (3.42)$$

e considere o funcional linear  $\Lambda : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{C}$ , dado por

$$\Lambda((\varphi^*, \psi^*, w^*)) = \rho_1 \int_0^L f_2 \overline{\varphi^*} dx + \int_0^L (\rho_2 f_4 - \gamma f_3) \overline{\psi^*} dx + \rho_1 \int_0^L f_6 \overline{w^*} dx. \quad (3.43)$$

Então, a forma sesquilinear  $a[\cdot, \cdot]$  e o funcional linear  $\Lambda$  satisfazem as hipóteses do Teorema 2.8.

Com efeito,

(i)  $a[\cdot, \cdot]$  é contínua.

De fato, por meio das desigualdades Triangular (**DT**), Cauchy-Schwarz (**DCS**) e Poincaré (**DP**),

obtemos

$$\begin{aligned}
& |a[(\varphi, \psi, w), (\varphi^*, \psi^*, w^*)]| \\
& \stackrel{\mathbf{DT}}{\leq} \left| k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(\varphi_x^* + \psi^* + lw^*)} dx \right| + \left| k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{(w_x^* - l\varphi^*)} dx \right| + \left| b \int_0^L \psi_x \overline{\psi_x^*} dx \right| \\
& \stackrel{\mathbf{DCS}}{\stackrel{\mathbf{DT}}{\leq}} k (\|\varphi_x\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^2} + l\|w\|_{L^2}) (\|\varphi_x^*\|_{L^2} + \|\psi^*\|_{L^2} + l\|w^*\|_{L^2}) + k_0 (\|w_x\|_{L^2} + l\|\varphi\|_{L^2}) \\
& \quad (\|w_x^*\|_{L^2} + l\|\varphi^*\|_{L^2}) + b \|\psi_x\|_{L^2} \|\psi_x^*\|_{L^2} \\
& \stackrel{\mathbf{DP}}{\leq} C (\|\varphi_x\|_{L^2} \|\varphi_x^*\|_{L^2} + \|\varphi_x\|_{L^2} \|\psi_x^*\|_{L^2} + \|\varphi_x\|_{L^2} \|w_x^*\|_{L^2} + \|\psi_x\|_{L^2} \|\varphi_x^*\|_{L^2} + \|\psi_x\|_{L^2} \|\psi_x^*\|_{L^2} \\
& \quad + \|\psi_x\|_{L^2} \|w_x^*\|_{L^2} + \|w_x\|_{L^2} \|\varphi_x^*\|_{L^2} + \|w_x\|_{L^2} \|\psi_x^*\|_{L^2} + \|w_x\|_{L^2} \|w_x^*\|_{L^2}) \\
& = C (\|\varphi_x\|_{L^2} + \|\psi_x\|_{L^2} + \|w_x\|_{L^2}) (\|\varphi_x^*\|_{L^2} + \|\psi_x^*\|_{L^2} + \|w_x^*\|_{L^2}) \\
& = C |(\varphi, \psi, w)|_{\mathcal{V}} |(\varphi^*, \psi^*, w^*)|_{\mathcal{V}}.
\end{aligned}$$

Portanto,  $a[\cdot, \cdot]$  é contínua.

(ii)  $a[\cdot, \cdot]$  é coerciva.

De fato, segue do Lema 3.1 Desigualdade (3.21) que

$$\begin{aligned}
|(\varphi, \psi, w)|_{\mathcal{V}}^2 &= \|\varphi_x\|_{L^2}^2 + \|\psi_x\|_{L^2}^2 + \|w_x\|_{L^2}^2 \\
&\leq C (k \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + k_0 \|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + b \|\psi_x\|_{L^2}^2) \\
&= Ca[(\varphi, \psi, w), (\varphi, \psi, w)].
\end{aligned}$$

Logo,

$$a[(\varphi, \psi, w), (\varphi, \psi, w)] \geq \frac{1}{C} |(\varphi, \psi, w)|_{\mathcal{V}}^2,$$

sendo  $C$  uma constante positiva. Portanto,  $a[\cdot, \cdot]$  é coerciva.

(iii)  $\Lambda$  é limitado.

Seja  $(\varphi^*, \psi^*, w^*) \in \mathcal{V}$ , por meio das desigualdades Triangular (**DT**), Cauchy-Schwarz (**DCS**) e Poincaré (**DP**), obtemos

$$\begin{aligned}
|\Lambda((\varphi^*, \psi^*, w^*))| &\stackrel{\mathbf{DT}}{\leq} \left| \rho_1 \int_0^L f_2 \overline{\varphi^*} dx \right| + \left| \int_0^L (\rho_2 f_4 - \gamma f_3) \overline{\psi^*} dx \right| + \left| \rho_1 \int_0^L f_6 \overline{w^*} dx \right| \\
&\stackrel{\mathbf{DCS}}{\leq} \rho_1 \|f_2\|_{L^2} \|\varphi^*\|_{L^2} + \|\rho_2 f_4 - \gamma f_3\|_{L^2} \|\psi^*\|_{L^2} + \rho_1 \|f_6\|_{L^2} \|w^*\|_{L^2} \\
&\stackrel{\mathbf{DP}}{\leq} \rho_1 C_p \|f_2\|_{L^2} \|\varphi_x^*\|_{L^2} + C_p \|\rho_2 f_4 - \gamma f_3\|_{L^2} \|\psi_x^*\|_{L^2} + \rho_1 C_p \|f_6\|_{L^2} \|w_x^*\|_{L^2} \\
&\leq C (\|\varphi_x^*\|_{L^2} + \|\psi_x^*\|_{L^2} + \|w_x^*\|_{L^2}) \\
&= C |(\varphi^*, \psi^*, w^*)|_{\mathcal{V}},
\end{aligned}$$

no qual  $C = \max \{ \rho_1 C_p \|f_2\|_{L^2}, C_p \|\rho_2 f_4 - \gamma f_3\|_{L^2}, \rho_1 C_p \|f_6\|_{L^2} \} > 0$ . Portanto, o funcional

linear  $\Lambda$  é limitado.

Concluimos por meio do Teorema 2.8 que, para toda terna  $(\varphi^*, \psi^*, w^*) \in \mathcal{V}$ , existe uma única terna  $(\varphi, \psi, w) \in \mathcal{V}$ , tal que

$$a[(\varphi, \psi, w), (\varphi^*, \psi^*, w^*)] = \Lambda(\varphi^*, \psi^*, w^*), \quad (3.44)$$

em que a forma sesquilinear  $a[\cdot, \cdot]$  e o funcional linear  $\Lambda$  são dados em (3.42) e (3.43). Portanto, vale a afirmação dada em (3.41).

Resta apenas mostrar que de fato,  $(\varphi, \psi, w) \in [H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)]^3$  e satisfazem (3.37), (3.38) e (3.39).

De fato, considere  $\varphi^* \in C_0^\infty(0, L)$  uma função arbitrária e  $\psi^* = w^* = 0$  em (3.41), obtemos

$$k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{\varphi_x^*} dx - k_0 l \int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{\varphi^*} dx = \rho_1 \int_0^L f_2 \overline{\varphi^*} dx. \quad (3.45)$$

Deste modo, reorganizando e reagrupando de forma conveniente (3.45), encontramos

$$k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{\varphi_x^*} dx = - \int_0^L [-k_0 l (w_x - l\varphi) - \rho_1 f_2] \overline{\varphi^*} dx.$$

Segue da definição de derivada fraca que

$$k(\varphi_x + \psi + lw)_x = -k_0 l (w_x - l\varphi) - \rho_1 f_2, \quad \text{em } L^2(0, L). \quad (3.46)$$

Então, (3.37) é satisfeita. Além disso, reorganizando de maneira adequada (3.46), concluimos

$$\varphi_{xx} = \frac{1}{k} [-k\psi_x - klw_x - k_0 l (w_x - l\varphi) - \rho_1 f_2], \quad \text{em } L^2(0, L).$$

Logo,  $\varphi$  também pertence a  $H^2(0, L)$ . Portanto  $\varphi \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)$ .

Agora, considere  $\psi^* \in C_0^\infty(0, L)$  uma função arbitrária e  $\varphi^* = w^* = 0$  em (3.41), segue que

$$k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{\psi^*} dx + b \int_0^L \psi_x \overline{\psi_x^*} dx = \int_0^L (\rho_2 f_4 - \gamma f_3) \overline{\psi^*} dx. \quad (3.47)$$

Desta forma, reorganizando e reagrupando de forma apropriada (3.47), temos

$$b \int_0^L \psi_x \overline{\psi_x^*} dx = - \int_0^L [k(\varphi_x + \psi + lw) - (\rho_2 f_4 - \gamma f_3)] \overline{\psi^*} dx.$$

Por meio da definição de derivada fraca, obtemos

$$b\psi_{xx} = k(\varphi_x + \psi + lw) - (\rho_2 f_4 - \gamma f_3) \quad \text{em } L^2(0, L). \quad (3.48)$$

Então, (3.38) é satisfeita. Além disso, reorganizando de maneira conveniente (3.48), podemos obter

$$\psi_{xx} = \frac{1}{b}[k(\varphi_x + \psi + lw) - (\rho_2 f_4 - \gamma f_3)] \text{ em } L^2(0, L).$$

Logo,  $\psi$  também pertence a  $H^2(0, L)$ . Portanto,  $\psi \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)$ .

Por fim, considere  $w^* \in C_0^\infty(0, L)$  uma função arbitrária e  $\varphi^* = \psi^* = 0$  em (3.41), obtemos

$$kl \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)\overline{w^*} dx + k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{w_x^*} dx = \rho_1 \int_0^L f_6 \overline{w^*} dx. \quad (3.49)$$

Dessa maneira, reorganizando e reagrupando de forma adequada (3.49), podemos concluir

$$k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi)\overline{w_x^*} dx = - \int_0^L [kl(\varphi_x + \psi + lw) - \rho_1 f_6]\overline{w^*} dx.$$

Segue da definição de derivada fraca que

$$k_0(w_x - l\varphi)_x = kl(\varphi_x + \psi + lw) - \rho_1 f_6. \quad (3.50)$$

Então, (3.39) é satisfeita. Além disso, reorganizando de forma apropriada (3.50), encontramos

$$w_{xx} = \frac{1}{k_0}[k_0 l \varphi_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) - \rho_1 f_6] \text{ em } L^2(0, L).$$

Logo,  $w$  também pertence a  $H^2(0, L)$ . Portanto,  $w \in H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)$ .

Concluimos então que existe uma única terna  $(\varphi, \psi, w) \in [H_0^1(0, L) \cap H^2(0, L)]^3$ , satisfazendo (3.37), (3.38) e (3.39).

Portanto, existe uma única solução  $\mathbf{U} = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W) \in D(\mathcal{A})$  tal que  $\mathcal{A}\mathbf{U} = -\mathbf{F}$ , o que prova que o operador  $\mathcal{A}^{-1}$  existe.

**2º)** Vamos mostrar que o operador  $\mathcal{A}^{-1}$  é limitado, ou seja, existe  $C > 0$  tal que  $\|\mathcal{A}^{-1}\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2$ , para todo  $\mathbf{F} \in \mathcal{H}$ .

Seja  $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^\top \in \mathcal{H}$ , então existe um único  $\mathbf{U} \in D(\mathcal{A})$ , tal que  $\mathcal{A}\mathbf{U} = -\mathbf{F}$ , ou seja,

$$\Phi = -f_1, \quad (3.51)$$

$$k(\varphi_x + \psi + lw)_x + k_0 l(w_x - l\varphi) = -\rho_1 f_2, \quad (3.52)$$

$$\Psi = -f_3, \quad (3.53)$$

$$b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi + lw) = -\rho_2 f_4 + \gamma\Psi, \quad (3.54)$$

$$W = -f_5, \quad (3.55)$$

$$k_0(w_x - l\varphi)_x - kl(\varphi_x + \psi + lw) = -\rho_1 f_6. \quad (3.56)$$

Assim, multiplicando (3.52), (3.54) e (3.56) por  $\bar{\varphi}$ ,  $\bar{\psi}$  e  $\bar{w}$ , respectivamente e integrando sobre o intervalo  $[0, L]$ , obtemos

$$\underbrace{k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw)_x \bar{\varphi} dx + k_0 l \int_0^L (w_x - l\varphi) \bar{\varphi} dx}_{:=T_{13}} = -\rho_1 \int_0^L f_2 \bar{\varphi} dx, \quad (3.57)$$

$$\underbrace{b \int_0^L \psi_{xx} \bar{\psi} dx - k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\psi} dx}_{:=T_{14}} = - \int_0^L (\rho_2 f_4 + \gamma \Psi) \bar{\psi} dx, \quad (3.58)$$

$$\underbrace{k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi)_x \bar{w} dx - kl \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \bar{w} dx}_{:=T_{15}} = -\rho_1 \int_0^L f_6 \bar{w} dx. \quad (3.59)$$

Dessa forma, somando membro a membro as (3.57), (3.58) e (3.59), integrando por partes os termos  $T_{13}$ ,  $T_{14}$  e  $T_{15}$ , utilizando o fato que os termos da fronteira se anulam e multiplicando por  $(-1)$  em ambos os lados da igualdade encontrada, podemos concluir

$$k \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}^2 + k_0 \|w_x - l\varphi\|_{L^2}^2 + b \|\psi_x\|_{L^2}^2 = \rho_1 \int_0^L f_2 \bar{\varphi} dx + \int_0^L (\rho_2 f_4 \bar{\psi} - \gamma \Psi \bar{\psi}) dx + \rho_1 \int_0^L f_6 \bar{w} dx. \quad (3.60)$$

Sendo assim, somando  $\rho_1 \|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2 \|\Psi\|_{L^2}^2 + \rho_1 \|W\|_{L^2}^2$  em ambos os membros de (3.60) e usando (3.12), temos

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 = \rho_1 \|\Phi\|_{L^2}^2 + \rho_2 \|\Psi\|_{L^2}^2 + \rho_1 \|W\|_{L^2}^2 + \rho_1 \int_0^L f_2 \bar{\varphi} dx + \int_0^L (\rho_2 f_4 \bar{\psi} - \gamma \Psi \bar{\psi}) dx + \rho_1 \int_0^L f_6 \bar{w} dx.$$

Segue de (3.51), (3.53) e (3.55) que

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 = \rho_1 \|f_1\|_{L^2}^2 + \rho_2 \|f_3\|_{L^2}^2 + \rho_1 \|f_5\|_{L^2}^2 + \rho_1 \int_0^L f_2 \bar{\varphi} dx + \int_0^L (\rho_2 f_4 \bar{\psi} + \gamma f_3 \bar{\psi}) dx + \rho_1 \int_0^L f_6 \bar{w} dx.$$

Além disso, por meio da Desigualdade de Cauchy-Schwartz, obtemos

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \rho_1 \|f_1\|_{L^2}^2 + \rho_2 \|f_3\|_{L^2}^2 + \rho_1 \|f_5\|_{L^2}^2 + \rho_1 \|f_2\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} + \rho_2 \|f_4\|_{L^2} \|\psi\|_{L^2} + \gamma \|f_3\|_{L^2} \|\psi\|_{L^2} + \rho_1 \|f_6\|_{L^2} \|w\|_{L^2}.$$

Assim, pela Desigualdade de Poincaré, concluímos

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \rho_1 C_p \|f_{1,x}\|_{L^2}^2 + \rho_2 C_p \|f_{3,x}\|_{L^2}^2 + \rho_1 C_p \|f_{5,x}\|_{L^2}^2 + \rho_1 C_p \|f_2\|_{L^2} \|\varphi_x\|_{L^2} + \rho_2 C_p \|f_4\|_{L^2} \|\psi_x\|_{L^2} + \gamma C_p \|f_{3,x}\|_{L^2} \|\psi_x\|_{L^2} + \rho_1 C_p \|f_6\|_{L^2} \|w_x\|_{L^2},$$

ou seja, existe  $C_1 = \max\{\rho_1 C_p, \rho_2 C_p, \gamma C_p\} > 0$ , pois  $\rho_1, \rho_2, \gamma, C_p$  são constantes positivas,

tais que

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_1 \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_1 \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}.$$

Como sabemos pelo Corolário 3.5 que as normas  $\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}$  e  $\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}$  são equivalentes, então temos

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_1 \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_1 \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}.$$

Desta forma, segue da Desigualdade de Young que

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_1 \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \varepsilon C_1 \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_1 C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (3.61)$$

Tomando  $\varepsilon = \frac{1}{2C_1} > 0$ , obtemos

$$C_\varepsilon = \left( \frac{1}{2C_1} \cdot 2 \right)^{-\frac{2}{2}} \cdot 2^{-1} = \left( \frac{1}{C_1} \right)^{-1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{C_1}{2} > 0.$$

Sendo assim, substituindo  $\varepsilon = \frac{1}{2C_1}$  e  $C_\varepsilon = \frac{C_1}{2}$  em (3.61), encontramos

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_1 \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C_1^2}{2} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (3.62)$$

Deste modo, reorganizando de maneira conveniente (3.62), resultamos

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_1(2 + C_1) \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Logo,

$$\|\mathcal{A}^{-1}\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2, \forall \mathbf{F} \in \mathcal{H},$$

no qual  $C = C_1(2 + C_1) > 0$ .

Portanto,  $\mathcal{A}^{-1}$  é limitado, concluindo assim a prova de que  $0 \in \rho(\mathcal{A})$ .

Por (a), (b) e (c) podemos utilizar o Teorema 2.46 e concluir que o operador  $\mathcal{A}$  gera um semi-grupo de classe  $C^0$  de contrações.  $\square$

**Teorema 3.7.** *Suponhamos que os dados iniciais  $\mathbf{U}_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1)^\top \in D(\mathcal{A})$ , então existe uma única solução  $\mathbf{U} = (\varphi, \varphi_t, \psi, \psi_t, w, w_t)^\top$  para o sistema (3.1)-(3.5) satisfazendo*

$$\mathbf{U} \in C([0, \infty); D(\mathcal{A})) \cap C^1([0, \infty); \mathcal{H}).$$

**Demonstração.** Consequência imediata do Teorema 2.43.  $\square$

### 3.3 ESTABILIDADE

Essa seção tem como objetivo apresentar o comportamento assintótico da solução  $\mathbf{U}(t) = e^{\mathcal{A}t}\mathbf{U}_0$  para o sistema (3.1)-(3.5). Com esse propósito, consideremos

$$\chi := |k_0 - k| \text{ e } \chi_0 := \left| \rho_2 - \frac{b}{k} \rho_1 \right|.$$

Verificaremos mais adiante que a solução encontrada para o caso em que  $\chi = \chi_0 = 0$  possui decaimento exponencial, já para os demais casos analisaremos mais adiante que as soluções encontradas tem decaimento com taxa racional. Para isso, provaremos o próximo resultado com o propósito de mostrar que todo o eixo imaginário está contido no resolvente do operador  $\mathcal{A}$ . Como veremos a seguir esse resultado não depende de  $\chi$  e  $\chi_0$ . Na subseção 3.3.3 mostraremos as condições (2.5) e (2.6) sobre o operador resolvente.

**Lema 3.8.** *Sejam  $i\mathbb{R}$  o conjunto definido por  $\{i\lambda \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$  e  $\varrho(\mathcal{A})$  conjunto resolvente do operador  $\mathcal{A}$ . Então  $i\mathbb{R} \subseteq \varrho(\mathcal{A})$ .*

**Demonstração.** Pelo Teorema 2.32 item (iii) temos que as inclusões  $H^2(0, L) \hookrightarrow H^1(0, L) \hookrightarrow L^2(0, L)$  são compactas e além disso sabemos que as inclusões  $H^2(0, L) \cap H_0^1(0, L) \hookrightarrow H_0^1(0, L)$  e  $H_0^1(0, L) \hookrightarrow L^2(0, L)$  também são compactas, assim podemos dizer mediante tais resultados que cada espaço do produto cartesiano do domínio do operador  $\mathcal{A}$  tem inclusão compacta no respectivo espaço de fase  $\mathcal{H}$ , conseqüentemente a inclusão  $D(\mathcal{A}) \hookrightarrow \mathcal{H}$  é compacta.

Além disso, segue da Proposição 2.28 item (i) que o conjunto  $\varrho(\mathcal{A})$  é compacto. Deste modo, podemos utilizar o Corolário 2.29 e concluir que o complementar do conjunto resolvente do operador  $\mathcal{A}$ , definido por  $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \varrho(\mathcal{A})$  é formado apenas por autovalores de  $\mathcal{A}$ .

Mediante tais informações, vamos supor por absurdo que  $i\mathbb{R} \not\subseteq \varrho(\mathcal{A})$ , ou seja, podemos dizer que existe  $\beta \in \mathbb{R} - \{0\}$ , tal que  $i\beta \notin \varrho(\mathcal{A})$ , em conseqüência temos que  $i\beta \in \sigma(\mathcal{A})$ . Assim, pelo observado acima  $i\beta$  é um autovalor do operador  $\mathcal{A}$ , então existe um autovetor  $\mathbf{U} = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)^\top \in D(\mathcal{A})$ , satisfazendo a equação resolvente

$$i\beta\mathbf{U} - \mathcal{A}\mathbf{U} = 0. \quad (3.63)$$

Desta forma, tomando o produto interno em  $\mathcal{H}$  de (3.63) por  $\mathbf{U}$ , encontramos

$$i\beta \|\mathbf{U}\|_{L^2}^2 - \langle \mathcal{A}\mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle_{\mathcal{H}} = 0. \quad (3.64)$$

Além disso, sabemos que tomar a parte real de (3.64) é o mesmo que tomar a parte real do produto interno  $\langle -\mathcal{A}\mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle_{\mathcal{H}}$ . Assim, segue de (3.35) que

$$-\text{Re} \langle \mathcal{A}\mathbf{U}, \mathbf{U} \rangle_{\mathcal{H}} = \gamma \|\Psi\|_{L^2}^2. \quad (3.65)$$

Sob tais resultados, podemos obter

$$\gamma \|\Psi\|_{L^2}^2 = 0,$$

sendo  $\gamma$  uma constante positiva, segue que  $\Psi = 0$ .

Agora, reescrevendo (3.63) por meio de suas componentes, obtemos

$$i\beta\varphi - \Phi = 0, \quad (3.66)$$

$$i\beta\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0l(w_x - l\varphi) = 0, \quad (3.67)$$

$$i\beta\psi - \Psi = 0, \quad (3.68)$$

$$i\beta\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\Psi = 0, \quad (3.69)$$

$$i\beta w - W = 0, \quad (3.70)$$

$$i\beta\rho_1W - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = 0. \quad (3.71)$$

Como  $\Psi = 0$ , podemos substituir em (3.68) e obter  $\psi = 0$ , conseqüentemente  $\psi_{xx} = 0$ . Assim, substituindo esses resultados no sistema (3.66)-(3.71), encontramos

$$i\beta\varphi - \Phi = 0, \quad (3.72)$$

$$i\beta\rho_1\Phi - k(\varphi_x + lw)_x - k_0l(w_x - l\varphi) = 0, \quad (3.73)$$

$$k(\varphi_x + lw) = 0, \quad (3.74)$$

$$i\beta w - W = 0, \quad (3.75)$$

$$i\beta\rho_1W - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + lw) = 0. \quad (3.76)$$

De (3.74), temos que

$$\varphi_x + lw = 0, \quad (3.77)$$

visto que  $k > 0$ , em conseqüência  $(\varphi_x + lw)_x = 0$ , substituindo tais resultados em (3.73) e (3.76), obtemos

$$i\beta\rho_1\Phi - k_0l(w_x - l\varphi) = 0, \quad (3.78)$$

$$i\beta\rho_1W - k_0(w_x - l\varphi)_x = 0. \quad (3.79)$$

Assim, derivando (3.78) em relação a variável  $x$ , multiplicando ambos os lados de (3.79) por  $l$  e igualando tais resultados, podemos concluir

$$i\beta\rho_1\Phi_x = i\beta\rho_1lW. \quad (3.80)$$

Deste modo, por meio de (3.72) e (3.75), temos que

$$\Phi_x = i\beta\varphi_x \quad \text{e} \quad W = i\beta w,$$

respectivamente, substituindo tais resultados em (3.80) e multiplicando ambos os lados da igualdade encontrada por  $-\frac{1}{\beta^2 \rho_1}$ , podemos obter

$$\varphi_x = lw. \quad (3.81)$$

Além disso, segue de (3.77) que

$$\varphi_x = -lw. \quad (3.82)$$

Por meio de (3.81), (3.82) e  $l$  uma constante positiva, concluímos que

$$w = 0, \quad (3.83)$$

segue imediatamente de (3.75) que  $W = 0$ .

Desta forma, segue (3.77) e (3.83) que  $\varphi_x = 0$ . Assim, pela Desigualdade de Poincaré podemos concluir que  $\varphi = 0$ , conseqüentemente de (3.72) temos que  $\Phi = 0$ .

Logo,  $\varphi = \Phi = \psi = \Psi = w = W = 0$ , isto é,  $\mathbf{U} = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)^\top = (0, 0, 0, 0, 0, 0)^\top$  o que é um absurdo, pois  $\mathbf{U}$  é autovetor de  $\mathcal{A}$ .

Portanto,  $i\mathbb{R} \subseteq \varrho(\mathcal{A})$ . □

### 3.3.1 Estimativas Locais

O objetivo dessa subseção é determinar estimativas locais para a solução da equação resolvente.

Motivados pelo Lema 3.8, temos que para todo  $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)^\top \in \mathcal{H}$ , existe  $\mathbf{U} = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)^\top \in D(\mathcal{A})$ , solução da equação resolvente

$$i\beta\mathbf{U} - \mathcal{A}\mathbf{U} = \mathbf{F}. \quad (3.84)$$

Deste modo, reescrevendo (3.84) em termos de suas componentes, encontramos o seguinte sistema de equações

$$i\beta\varphi - \Phi = f_1, \quad (3.85)$$

$$i\beta\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0l(w_x - l\varphi) = \rho_1f_2, \quad (3.86)$$

$$i\beta\psi - \Psi = f_3, \quad (3.87)$$

$$i\beta\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\Psi = \rho_2f_4, \quad (3.88)$$

$$i\beta w - W = f_5, \quad (3.89)$$

$$i\beta\rho_1W - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = \rho_1f_6. \quad (3.90)$$

**Lema 3.9.** *Sejam  $\mathbf{F} \in \mathcal{H}$  e  $\mathbf{U} \in D(\mathcal{A})$ , sendo  $\mathbf{U}$  a solução do sistema (3.85)-(3.90), então existe uma constante positiva  $C$ , tal que*

$$\|\Psi\|_{L^2}^2 \leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}.$$

**Demonstração.** Considere o produto interno em  $\mathcal{H}$  de (3.84) com  $\mathbf{U}$  e tomando a parte real, obtemos

$$\gamma \|\Psi\|_{L_2}^2 \leq \operatorname{Re} \langle \mathbf{F}, \mathbf{U} \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Além disso, pela Desigualdade de Cauchy-Schwartz, temos

$$\|\Psi\|_{L_2}^2 \leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}},$$

em que  $C = \frac{1}{\gamma} > 0$ . □

**Corolário 3.10.** *Sejam  $\mathbf{F} \in \mathcal{H}$  e  $\mathbf{U} \in D(\mathcal{A})$ , sendo  $\mathbf{U}$  a solução do sistema (3.85)-(3.90), então existe uma constante positiva  $C$ , tal que*

$$\int_{L_1}^{L_2} |\Psi|^2 dx \leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}},$$

no qual o intervalo  $(L_1, L_2) \subset (0, L)$ .

**Demonstração.** A demonstração é uma consequência imediata do Lema 3.9. □

A partir de agora nosso objetivo é encontrar estimativas locais para os termos da norma de  $\mathbf{U} \in \mathcal{H}$ . Afim de obter tais estimativas, usaremos funções de corte, no qual vale ressaltar que as funções de corte serão utilizadas com o objetivo de evitar termos pontuais provenientes da integração por partes e com isso, podemos concluir que cada resultado independe de quaisquer condições de fronteira. Com esse propósito, consideremos  $L_0 \in (0, L)$ ,  $\delta > 0$  e a função  $s_1 \in C^2(0, L)$ , satisfazendo as seguintes propriedades

$$\operatorname{supp}(s_1) \subset (L_0 - \delta, L_0 + \delta) \subset (0, L), \quad 0 \leq s_1(x) \leq 1, \quad \forall x \in (0, L),$$

e

$$s_1(x) = 1, \forall x \in \left[ L_0 - \frac{\delta}{2}, L_0 + \frac{\delta}{2} \right].$$

A seguir, mostraremos um exemplo genérico para este tipo de função

$$s_1(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L_0 - \delta, \\ e^{\frac{1}{(x-(L_0-\frac{\delta}{2}))^2-1}} e, & L_0 - \delta \leq x \leq L_0 - \frac{\delta}{2}, \\ 1, & L_0 - \frac{\delta}{2} \leq x \leq L_0 + \frac{\delta}{2}, \\ e^{\frac{1}{(x-(L_0+\frac{\delta}{2}))^2-1}} e, & L_0 + \frac{\delta}{2} \leq x \leq L_0 + \delta, \\ 0, & L_0 + \delta \leq x \leq L. \end{cases}$$

Para termos uma noção gráfica do comportamento da função  $s_1$ , devemos atribuir valores para  $L$ ,  $L_0$  e  $\delta$ . Sendo assim, tomando  $L := 6$ ,  $L_0 := 3$  e  $\delta := 2$ , segue que

$$s_1(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ e^{\frac{1}{(x-2)^2-1}} e, & 1 \leq x \leq 2, \\ 1, & 2 \leq x \leq 4, \\ e^{\frac{1}{(x-4)^2-1}} e, & 4 \leq x \leq 5, \\ 0, & 5 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

Por meio da Figura 4.1 temos uma idéia sobre a representação gráfica da função  $s_1$ .

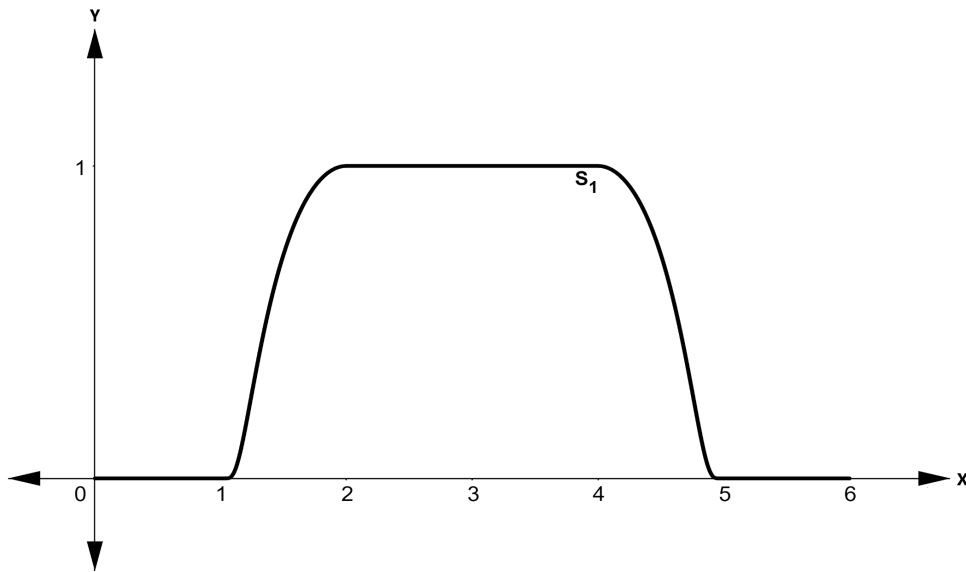


Figura 3.1: Gráfico da função  $s_1$ . (Fonte: Elaborada pela autora).

**Lema 3.11.** *Sejam  $\mathbf{F} \in \mathcal{H}$  e  $\mathbf{U} \in D(\mathcal{A})$ , sendo  $\mathbf{U}$  a solução do sistema (3.85)-(3.90), então existe uma constante positiva  $C$ , tal que*

$$\int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s_1 |\psi_x|^2 dx \leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\Psi\|_{L^2}, \quad (3.91)$$

no qual  $|\beta| \geq \beta_0 > 1$ .

**Demonstração.** Multiplicando (3.88) por  $s_1 \bar{\psi}$  e integrando sobre o intervalo  $(0, L)$ , obtemos

$$i\beta \rho_2 \int_0^L s_1 \Psi \bar{\psi} dx - b \underbrace{\int_0^L s_1 \psi_{xx} \bar{\psi} dx}_{:=T_{16}} + k \int_0^L s_1 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\psi} dx + \gamma \int_0^L s_1 \Psi \bar{\psi} dx = \rho_2 \int_0^L s_1 f_4 \bar{\psi} dx.$$

Deste modo, integrando por partes o termo  $T_{16}$ , segue que

$$i\beta \rho_2 \int_0^L s_1 \Psi \bar{\psi} dx + b \int_0^L s_1' \psi_x \bar{\psi} dx + b \int_0^L s_1 |\psi_x|^2 dx + k \int_0^L s_1 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\psi} dx + \gamma \int_0^L s_1 \Psi \bar{\psi} dx = \rho_2 \int_0^L s_1 f_4 \bar{\psi} dx. \quad (3.92)$$

Dessa forma, reorganizando de maneira conveniente os termos de (3.92), além disso sabemos por meio de (3.87) que

$$\psi = \frac{\Psi}{i\beta} + \frac{f_3}{i\beta},$$

então substituindo esse resultado na igualdade reorganizada e multiplicando ambos os membros da tal igualdade encontrada por  $\frac{1}{b}$ , podemos obter

$$\begin{aligned} \int_0^L s_1 |\psi_x|^2 dx &= \frac{\rho_2}{b} \int_0^L s_1 |\Psi|^2 dx + \frac{\rho_2}{b} \int_0^L s_1 \Psi \bar{f}_3 dx + \frac{1}{i\beta} \int_0^L s_1' \psi_x \bar{\Psi} dx + \frac{1}{i\beta} \int_0^L s_1' \psi_x \bar{f}_3 dx \\ &+ \frac{k}{i\beta b} \int_0^L s_1 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\Psi} dx + \frac{k}{i\beta b} \int_0^L s_1 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{f}_3 dx \\ &+ \frac{\gamma}{i\beta b} \int_0^L s_1 |\Psi|^2 dx + \frac{\gamma}{i\beta b} \int_0^L s_1 \Psi \bar{f}_3 dx + \frac{\rho_2}{b} \int_0^L s_1 f_4 \bar{\psi} dx. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Sendo assim, tomando o módulo de (3.93), pelas desigualdades Triangular (**DT**), de Cauchy-Schwartz (**DCS**), de Poincaré (**DP**) e pelo fato da função  $s_1$  ser limitada, podemos concluir

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^L s_1 |\psi_x|^2 dx \right| \\ &\stackrel{\text{DT}}{\leq} \left| \frac{\rho_2}{b} \int_0^L s_1 |\Psi|^2 dx \right| + \left| \frac{\rho_2}{b} \int_0^L s_1 \Psi \bar{f}_3 dx \right| + \left| \frac{1}{i\beta} \int_0^L s_1' \psi_x \bar{\Psi} dx \right| + \left| \frac{1}{i\beta} \int_0^L s_1' \psi_x \bar{f}_3 dx \right| \\ &+ \left| \frac{k}{i\beta b} \int_0^L s_1 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{f}_3 dx \right| + \left| \frac{\gamma}{i\beta b} \int_0^L s_1 |\Psi|^2 dx \right| + \left| \frac{\gamma}{i\beta b} \int_0^L s_1 \Psi \bar{f}_3 dx \right| + \left| \frac{\rho_2}{b} \int_0^L s_1 f_4 \bar{\psi} dx \right| \\ &\stackrel{\text{DCS}}{\leq} \frac{\rho_2}{b} \|s_1\|_{C[0,L]} \|\Psi\|_{L^2}^2 + \frac{\rho_2}{b} \|s_1\|_{C[0,L]} \|\Psi\|_{L^2} \|f_3\|_{L^2} + \frac{1}{|\beta|} \|s_1'\|_{C[0,L]} \|\psi_x\|_{L^2} \|\Psi\|_{L^2} \\ &+ \frac{1}{|\beta|} \|s_1'\|_{C[0,L]} \|\psi_x\|_{L^2} \|f_3\|_{L^2} + \frac{k}{|\beta|b} \|s_1\|_{C[0,L]} \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2} \|f_3\|_{L^2} \\ &+ \frac{\gamma}{|\beta|b} \|s_1\|_{C[0,L]} \|\Psi\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma}{|\beta|b} \|s_1\|_{C[0,L]} \|\Psi\|_{L^2} \|f_3\|_{L^2} + \frac{\rho_2}{b} \|s_1\|_{C[0,L]} \|f_4\|_{L^2} \|\psi\|_{L^2} \\ &\stackrel{\text{DP}}{\leq} \underbrace{\frac{\rho_2}{b} \|s_1\|_{C[0,L]} \|\Psi\|_{L^2}^2}_{\leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}} + \underbrace{\frac{\rho_2}{b} C_p \|s_1\|_{C[0,L]} \|\Psi\|_{L^2} \|f_{3,x}\|_{L^2}}_{\leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}} + \underbrace{\frac{1}{|\beta|} \|s_1'\|_{C[0,L]} \|\psi_x\|_{L^2} \|\Psi\|_{L^2}}_{\leq \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\Psi\|_{L^2}} \\ &+ \underbrace{\frac{1}{|\beta|} C_p \|s_1'\|_{C[0,L]} \|\psi_x\|_{L^2} \|f_{3,x}\|_{L^2}}_{\leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}} + \underbrace{\frac{k}{|\beta|b} C_p \|s_1\|_{C[0,L]} \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2} \|f_{3,x}\|_{L^2}}_{\leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}} \\ &+ \underbrace{\frac{\gamma}{|\beta|b} \|s_1\|_{C[0,L]} \|\Psi\|_{L^2}^2}_{\leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}} + \underbrace{\frac{\gamma}{|\beta|b} C_p \|s_1\|_{C[0,L]} \|\Psi\|_{L^2} \|f_{3,x}\|_{L^2}}_{\leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}} + \underbrace{\frac{\rho_2}{b} C_p \|s_1\|_{C[0,L]} \|f_4\|_{L^2} \|\psi_x\|_{L^2}}_{\leq C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}} \\ &\leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\Psi\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Como sabemos que  $\text{supp } s_1 \subset (L_0 - \delta, L_0 + \delta)$ , concluímos que a Desigualdade (3.91) é válida.  $\square$

**Corolário 3.12.** *Sejam  $\mathbf{F} \in \mathcal{H}$  e  $\mathbf{U} \in D(\mathcal{A})$ , sendo  $\mathbf{U}$  a solução do sistema (3.85)-(3.90), então existe uma constante positiva  $C$ , tal que*

$$\int_{L_0 - \frac{\delta}{4}}^{L_0 + \frac{\delta}{4}} s_1 |\psi_x|^2 dx \leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\Psi\|_{L^2},$$

no qual  $|\beta| \geq \beta_0 > 1$ .

**Demonstração.** A Demonstração decore diretamente do Lema 3.11. □

Para as próximas estimativas, considere uma função  $s_2 \in C^2(0, L)$  satisfazendo as seguintes propriedades

$$\text{supp}s_2 \subset \left( L_0 - \frac{\delta}{2}, L_0 + \frac{\delta}{2} \right) \subset (0, L), \quad 0 \leq s_2(x) \leq 1, \quad x \in (0, L),$$

e

$$s_2(x) = 1 \quad \text{para} \quad x \in \left[ L_0 - \frac{\delta}{3}, L_0 + \frac{\delta}{3} \right].$$

A seguir, mostraremos um exemplo genérico para este tipo de função

$$s_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L_0 - \frac{\delta}{2}, \\ e^{\frac{1}{(3(x - (L_0 - \frac{\delta}{3})))^2 - 1}} e, & L_0 - \frac{\delta}{2} \leq x \leq L_0 - \frac{\delta}{3}, \\ 1, & L_0 - \frac{\delta}{3} \leq x \leq L_0 + \frac{\delta}{3}, \\ e^{\frac{1}{(3(x - (L_0 + \frac{\delta}{3})))^2 - 1}} e, & L_0 + \frac{\delta}{3} \leq x \leq L_0 + \frac{\delta}{2}, \\ 0, & L_0 + \frac{\delta}{2} \leq x \leq L. \end{cases}$$

Para termos uma noção gráfica do comportamento da função  $s_2$ , devemos atribuir valores para  $L$ ,  $L_0$  e  $\delta$ . Sendo assim, tomando  $L := 6$ ,  $L_0 := 3$  e  $\delta := 2$ , segue que

$$s_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 2, \\ e^{\frac{1}{(3(x-7))^2 - 1}} e, & 2 \leq x \leq \frac{7}{3}, \\ 1, & \frac{7}{3} \leq x \leq \frac{11}{3}, \\ e^{\frac{1}{(3(x-11))^2 - 1}} e, & \frac{11}{3} \leq x \leq 4, \\ 0, & 4 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

Então, por meio da Figura 4.2 temos uma noção sobre a representação gráfica da função  $s_2$ .

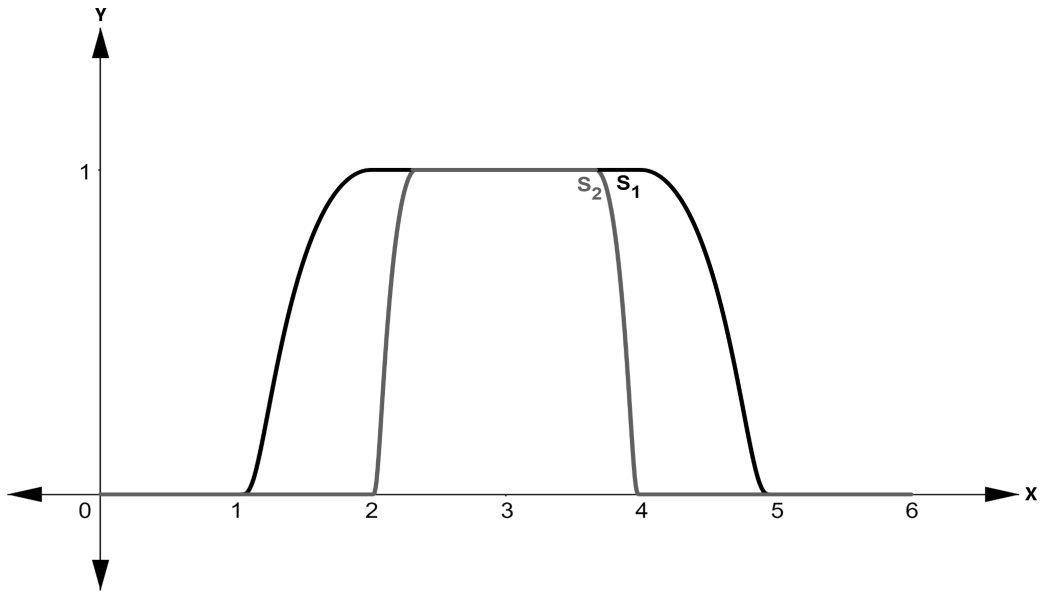


Figura 3.2: Gráfico das funções  $s_1$  e  $s_2$ . (Fonte: Elaborada pela autora).

**Lema 3.13.** *Sejam  $\mathbf{F} \in \mathcal{H}$  e  $\mathbf{U} \in D(\mathcal{A})$ , sendo  $\mathbf{U}$  a solução do sistema (3.85)-(3.90), então existe uma constante positiva  $C$ , tal que*

$$\int_{L_0 - \frac{\delta}{2}}^{L_0 + \frac{\delta}{2}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \leq C |\beta|^2 \chi_0^2 \|\Psi\|_{L^2}^2 + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + C \|\Psi\|_{L^2} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}, \quad (3.94)$$

no qual  $|\beta| \geq \beta_0 > 1$ .

**Demonstração.** Multiplicando (3.88) por  $s_2 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)}$ , integrando sobre o intervalo  $(0, L)$  e reorganizando os termos da igualdade encontrada de forma adequada, obtemos

$$\begin{aligned} k \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx &= -i\beta\rho_2 \int_0^L s_2 \Psi \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx + \underbrace{b \int_0^L s_2 \psi_{xx} \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx}_{:=T_{17}} \\ &\quad - \gamma \int_0^L s_2 \Psi \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx + \rho_2 \int_0^L s_2 f_4 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx. \end{aligned}$$

Deste modo, integrando por partes o termo  $T_{17}$ , segue que

$$\begin{aligned} k \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx &= -i\beta\rho_2 \int_0^L s_2 \Psi \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx - b \int_0^L s_2' \psi_x \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx - \underbrace{b \int_0^L s_2 \psi_x \overline{(\varphi_x + \psi + lw)_x} dx}_{:=T_{18}} \\ &\quad - \gamma \int_0^L s_2 \Psi \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx + \rho_2 \int_0^L s_2 f_4 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx. \end{aligned}$$

Dessa forma, segue de (3.86) que

$$(\varphi_x + \psi + lw)_x = \frac{1}{k} [i\beta\rho_1 \Phi - k_0 l (w_x - l\varphi) - \rho_1 f_2],$$

então substituindo tal resultado no termo  $T_{18}$ , reorganizando de maneira apropriada os termos e multiplicando por  $\frac{1}{k}$  ambos os membros da igualdade encontrada, podemos obter

$$\begin{aligned}
& \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \\
&= -\frac{i\beta}{k} \rho_2 \int_0^L s_2 \overline{\Psi(\varphi_x + \psi + lw)} dx - \frac{b}{k} \int_0^L s_2' \psi_x \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx + \frac{b}{k^2} i\beta \rho_1 \int_0^L s_2 \psi_x \overline{\Phi} dx \\
&+ \underbrace{\frac{b}{k^2} k_0 l \int_0^L s_2 \psi_x \overline{(w_x - l\varphi)} dx}_{:=T_{19}} + \frac{b}{k^2} \rho_1 \int_0^L s_2 \psi_x \overline{f_2} dx - \frac{\gamma}{k} \int_0^L s_2 \overline{\Psi(\varphi_x + \psi + lw)} dx \\
&+ \frac{\rho_2}{k} \int_0^L s_2 f_4 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx.
\end{aligned}$$

Sendo assim, integrando por partes o termo  $T_{19}$ , temos

$$\begin{aligned}
& \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \\
&= -\frac{i\beta}{k} \rho_2 \int_0^L s_2 \overline{\Psi(\varphi_x + \psi + lw)} dx - \frac{b}{k} \int_0^L s_2' \psi_x \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx + \frac{b}{k^2} i\beta \rho_1 \int_0^L s_2 \psi_x \overline{\Phi} dx \\
&- \frac{b}{k^2} k_0 l \int_0^L s_2' \psi \overline{(w_x - l\varphi)} dx - \underbrace{\frac{b}{k^2} k_0 l \int_0^L s_2 \psi \overline{(w_x - l\varphi)_x} dx}_{:=T_{20}} + \frac{b}{k^2} \rho_1 \int_0^L s_2 \psi_x \overline{f_2} dx \\
&- \frac{\gamma}{k} \int_0^L s_2 \overline{\Psi(\varphi_x + \psi + lw)} dx + \frac{\rho_2}{k} \int_0^L s_2 f_4 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx.
\end{aligned}$$

Além disso, por meio de (3.90), temos que

$$(w_x - l\varphi)_x = \frac{1}{k_0} [i\beta \rho_1 W + kl(\varphi_x + \psi + lw) - \rho_1 f_6],$$

assim substituindo tal resultado no termo  $T_{20}$  e reorganizando de maneira conveniente os termos, encontramos

$$\begin{aligned}
& \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \\
&= -\underbrace{\frac{i\beta}{k} \rho_2 \int_0^L s_2 \overline{\Psi(\varphi_x + \psi + lw)} dx}_{:=T_{21}} - \frac{b}{k} \int_0^L s_2' \psi_x \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx + \frac{b}{k^2} i\beta \rho_1 \int_0^L s_2 \psi_x \overline{\Phi} dx \\
&- \frac{b}{k^2} k_0 l \int_0^L s_2' \psi \overline{(w_x - l\varphi)} dx + \frac{b}{k^2} i\beta l \rho_1 \int_0^L s_2 \psi \overline{W} dx - \frac{bl^2}{k} \int_0^L s_2 \psi \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx \\
&+ \frac{b}{k^2} l \rho_1 \int_0^L s_2 \psi \overline{f_6} dx + \frac{b}{k^2} \rho_1 \int_0^L s_2 \psi_x \overline{f_2} dx - \frac{\gamma}{k} \int_0^L s_2 \overline{\Psi(\varphi_x + \psi + lw)} dx \\
&+ \frac{\rho_2}{k} \int_0^L s_2 f_4 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx.
\end{aligned}$$

Assim, segue de (3.85), (3.87) e (3.89) que

$$\varphi_x = \frac{\Phi_x}{i\beta} + \frac{f_{1,x}}{i\beta}, \quad \psi = \frac{\Psi}{i\beta} + \frac{f_3}{i\beta} \quad \text{e} \quad w = \frac{W}{i\beta} + \frac{f_5}{i\beta},$$

respectivamente, consequentemente substituindo nesta devida ordem tais resultados no termo  $T_{21}$ , obtemos

$$\begin{aligned} & \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \\ &= \frac{\rho_2}{k} \int_0^L s_2 \overline{\Psi(\Phi_x + f_{1,x} + \Psi + f_3 + lW + lf_5)} dx - \frac{b}{k} \int_0^L s_2' \psi_x \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx \\ &+ \frac{b}{k^2} i\beta \rho_1 \int_0^L s_2 \psi_x \overline{\Phi} dx - \frac{b}{k^2} k_0 l \int_0^L s_2' \psi \overline{(w_x - l\varphi)} dx + \frac{b}{k^2} i\beta l \rho_1 \int_0^L s_2 \psi \overline{W} dx \\ &- \frac{bl^2}{k} \int_0^L s_2 \psi \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx + \frac{b}{k^2} l \rho_1 \int_0^L s_2 \psi \overline{f_6} dx + \frac{b}{k^2} \rho_1 \int_0^L s_2 \psi_x \overline{f_2} dx \\ &- \frac{\gamma}{k} \int_0^L s_2 \overline{\Psi(\varphi_x + \psi + lw)} dx + \frac{\rho_2}{k} \int_0^L s_2 f_4 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Deste modo, derivando (3.87) em relação a variável  $x$ , temos

$$\psi_x = \frac{\Psi_x}{i\beta} + \frac{f_{3,x}}{i\beta},$$

assim substituindo esse resultado em (3.95), podemos obter

$$\begin{aligned} & \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \\ &= \frac{\rho_2}{k} \int_0^L s_2 \overline{\Psi \Phi_x} dx + \frac{\rho_2}{k} \int_0^L s_2 \overline{\Psi f_{1,x}} dx + \frac{\rho_2}{k} \int_0^L s_2 |\Psi|^2 dx + \frac{\rho_2}{k} \int_0^L s_2 \overline{\Psi f_3} dx + \underbrace{\frac{\rho_2 l}{k} \int_0^L s_2 \overline{\Psi W} dx}_{:=T_{22}} \\ &+ \frac{\rho_2 l}{k} \int_0^L s_2 \overline{\Psi f_5} dx - \underbrace{\frac{b}{ki\beta} \int_0^L s_2' \Psi_x \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx}_{:=T_{23}} - \frac{b}{ki\beta} \int_0^L s_2' f_{3,x} \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx \\ &+ \underbrace{\frac{b}{k^2} \rho_1 \int_0^L s_2 \Psi_x \overline{\Phi} dx}_{:=T_{24}} + \frac{b}{k^2} \rho_1 \int_0^L s_2 f_{3,x} \overline{\Phi} dx - \frac{b}{k^2 i\beta} k_0 l \int_0^L s_2' \Psi \overline{(w_x - l\varphi)} dx \\ &- \frac{b}{k^2 i\beta} k_0 l \int_0^L s_2' f_3 \overline{(w_x - l\varphi)} dx + \underbrace{\frac{b}{k^2} l \rho_1 \int_0^L s_2 \Psi \overline{W} dx + \frac{b}{k^2} l \rho_1 \int_0^L s_2 f_3 \overline{W} dx}_{:=T_{25}} \\ &- \frac{bl^2}{ki\beta} \int_0^L s_2 \overline{\Psi(\varphi_x + \psi + lw)} dx - \frac{bl^2}{ki\beta} \int_0^L s_2 f_3 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx + \frac{b}{k^2} l \rho_1 \int_0^L s_2 \psi \overline{f_6} dx \\ &+ \frac{b}{k^2} \rho_1 \int_0^L s_2 \psi_x \overline{f_2} dx - \frac{\gamma}{k} \int_0^L s_2 \overline{\Psi(\varphi_x + \psi + lw)} dx + \frac{\rho_2}{k} \int_0^L s_2 f_4 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx. \end{aligned}$$

Desta forma, reagrupando os termos  $T_{22}$  e  $T_{25}$ , integrando por partes os termos  $T_{23}$  e  $T_{24}$  e rea-

grupando os termos da igualdade encontrada de forma conveniente, concluímos

$$\begin{aligned}
& \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \\
&= \underbrace{\frac{1}{k} \left( \rho_2 - \frac{b}{k} \rho_1 \right) \int_0^L s_2 \Psi \overline{\Phi_x} dx}_{:=T_{26}} + \frac{\rho_2}{k} \int_0^L s_2 \Psi \overline{f_{1,x}} dx + \frac{\rho_2}{k} \int_0^L s_2 |\Psi|^2 dx + \frac{\rho_2}{k} \int_0^L s_2 \Psi \overline{f_3} dx \\
&+ \frac{1}{k} l \left( \rho_2 + \frac{b}{k} \rho_1 \right) \int_0^L s_2 \Psi \overline{W} dx + \frac{\rho_2 l}{k} \int_0^L s_2 \Psi \overline{f_5} dx + \frac{b}{ki\beta} \int_0^L s_2'' \Psi (\overline{\varphi_x + \psi + lw}) dx \\
&+ \underbrace{\frac{b}{ki\beta} \int_0^L s_2' \Psi (\overline{\varphi_x + \psi + lw})_x dx}_{:=T_{27}} - \frac{b}{ki\beta} \int_0^L s_2' f_{3,x} (\overline{\varphi_x + \psi + lw}) dx - \frac{b}{k^2} \rho_1 \int_0^L s_2' \Psi \overline{\Phi} dx \\
&+ \frac{b}{k^2} \rho_1 \int_0^L s_2 f_{3,x} \overline{\Phi} dx - \frac{b}{k^2 i\beta} k_0 l \int_0^L s_2' \Psi (\overline{w_x - l\varphi}) dx - \frac{b}{k^2 i\beta} k_0 l \int_0^L s_2' f_3 (\overline{w_x - l\varphi}) dx \\
&+ \frac{b}{k^2} l \rho_1 \int_0^L s_2 f_3 \overline{W} dx - \frac{bl^2}{ki\beta} \int_0^L s_2 \Psi (\overline{\varphi_x + \psi + lw}) dx - \frac{bl^2}{ki\beta} \int_0^L s_2 f_3 (\overline{\varphi_x + \psi + lw}) dx \\
&+ \frac{b}{k^2} l \rho_1 \int_0^L s_2 \psi \overline{f_6} dx + \frac{b}{k^2} \rho_1 \int_0^L s_2 \psi_x \overline{f_2} dx - \frac{\gamma}{k} \int_0^L s_2 \Psi (\overline{\varphi_x + \psi + lw}) dx \\
&+ \frac{\rho_2}{k} \int_0^L s_2 f_4 (\overline{\varphi_x + \psi + lw}) dx.
\end{aligned}$$

Deste modo, derivando (3.85) em relação a variável  $x$ , temos que  $\Phi_x = i\beta\varphi_x - f_{1,x}$  e segue de (3.86) que

$$(\varphi_x + \psi + lw)_x = \frac{1}{k} [i\beta\rho_1\Phi - k_0l(w_x - l\varphi) - \rho_1f_2],$$

assim substituindo tais resultados nos termos  $T_{26}$  e  $T_{27}$ , respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \\
&= -\frac{i\beta}{k} \left( \rho_2 - \frac{b}{k} \rho_1 \right) \int_0^L s_2 \Psi \overline{\varphi_x} dx - \frac{1}{k} \left( \rho_2 - \frac{b}{k} \rho_1 \right) \int_0^L s_2 \Psi \overline{f_{1,x}} dx + \frac{\rho_2}{k} \int_0^L s_2 \Psi \overline{f_{1,x}} dx \\
&+ \frac{\rho_2}{k} \int_0^L s_2 |\Psi|^2 dx + \frac{\rho_2}{k} \int_0^L s_2 \Psi \overline{f_3} dx + \frac{1}{k} l \left( \rho_2 + \frac{b}{k} \rho_1 \right) \int_0^L s_2 \Psi \overline{W} dx + \frac{\rho_2 l}{k} \int_0^L s_2 \Psi \overline{f_5} dx \\
&+ \frac{b}{ki\beta} \int_0^L s_2'' \Psi (\overline{\varphi_x + \psi + lw}) dx - \frac{b}{k^2} \rho_1 \int_0^L s_2' \Psi \overline{\Phi} dx - \frac{b}{k^2 i\beta} k_0 l \int_0^L s_2' \Psi (\overline{w_x - l\varphi}) dx \\
&- \frac{b}{k^2 i\beta} \rho_1 \int_0^L s_2' \Psi \overline{f_2} dx - \frac{b}{ki\beta} \int_0^L s_2' f_{3,x} (\overline{\varphi_x + \psi + lw}) dx - \frac{b}{k^2} \rho_1 \int_0^L s_2' \Psi \overline{\Phi} dx + \frac{b}{k^2} \rho_1 \int_0^L s_2 f_{3,x} \overline{\Phi} dx \\
&- \frac{b}{k^2 i\beta} k_0 l \int_0^L s_2' \Psi (\overline{w_x - l\varphi}) dx - \frac{b}{k^2 i\beta} k_0 l \int_0^L s_2' f_3 (\overline{w_x - l\varphi}) dx + \frac{b}{k^2} l \rho_1 \int_0^L s_2 f_3 \overline{W} dx \\
&- \frac{bl^2}{ki\beta} \int_0^L s_2 \Psi (\overline{\varphi_x + \psi + lw}) dx - \frac{bl^2}{ki\beta} \int_0^L s_2 f_3 (\overline{\varphi_x + \psi + lw}) dx + \frac{b}{k^2} l \rho_1 \int_0^L s_2 \psi \overline{f_6} dx \\
&+ \frac{b}{k^2} \rho_1 \int_0^L s_2 \psi_x \overline{f_2} dx - \frac{\gamma}{k} \int_0^L s_2 \Psi (\overline{\varphi_x + \psi + lw}) dx + \frac{\rho_2}{k} \int_0^L s_2 f_4 (\overline{\varphi_x + \psi + lw}) dx. \quad (3.96)
\end{aligned}$$

Além disso, somando e subtraindo o termo

$$\frac{i\beta}{k} \left( \rho_2 - \frac{b}{k} \rho_1 \right) \int_0^L s_2 \Psi \overline{(\psi + lw)} dx,$$

em (3.96), reagrupando e reorganizando de maneira conveniente os termos da igualdade encontrada, podemos obter

$$\begin{aligned} & \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \\ &= -\frac{i\beta}{k} \left( \rho_2 - \frac{b}{k} \rho_1 \right) \int_0^L s_2 \Psi \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx + \underbrace{\frac{i\beta}{k} \left( \rho_2 - \frac{b}{k} \rho_1 \right) \int_0^L s_2 \Psi \bar{\psi} dx}_{:=T_{28}} \\ & \quad + \underbrace{\frac{i\beta}{k} l \left( \rho_2 - \frac{b}{k} \rho_1 \right) \int_0^L s_2 \Psi \bar{w} dx}_{:=T_{29}} - \frac{1}{k} \left( \rho_2 - \frac{b}{k} \rho_1 \right) \int_0^L s_2 \Psi \overline{f_{1,x}} dx + \frac{\rho_2}{k} \int_0^L s_2 \Psi \overline{f_{1,x}} dx \\ & \quad + \frac{\rho_2}{k} \int_0^L s_2 |\Psi|^2 dx + \frac{\rho_2}{k} \int_0^L s_2 \Psi \overline{f_3} dx + \frac{1}{k} l \left( \rho_2 + \frac{b}{k} \rho_1 \right) \int_0^L s_2 \Psi \overline{W} dx + \frac{\rho_2 l}{k} \int_0^L s_2 \Psi \overline{f_5} dx \\ & \quad + \frac{b}{ki\beta} \int_0^L s_2'' \Psi \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx - \frac{b}{k^2} \rho_1 \int_0^L s_2' \Psi \overline{\Phi} dx - \frac{b}{k^2 i\beta} k_0 l \int_0^L s_2' \Psi \overline{(w_x - l\varphi)} dx \\ & \quad - \frac{b}{k^2 i\beta} \rho_1 \int_0^L s_2' \Psi \overline{f_2} dx - \frac{b}{ki\beta} \int_0^L s_2' f_{3,x} \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx - \frac{b}{k^2} \rho_1 \int_0^L s_2' \Psi \overline{\Phi} dx + \frac{b}{k^2} \rho_1 \int_0^L s_2 f_{3,x} \overline{\Phi} dx \\ & \quad - \frac{b}{k^2 i\beta} k_0 l \int_0^L s_2' \Psi \overline{(w_x - l\varphi)} dx - \frac{b}{k^2 i\beta} k_0 l \int_0^L s_2' f_3 \overline{(w_x - l\varphi)} dx + \frac{b}{k^2} l \rho_1 \int_0^L s_2 f_3 \overline{W} dx \\ & \quad - \frac{bl^2}{ki\beta} \int_0^L s_2 \Psi \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx - \frac{bl^2}{ki\beta} \int_0^L s_2 f_3 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx + \frac{b}{k^2} l \rho_1 \int_0^L s_2 \psi \overline{f_6} dx \\ & \quad + \frac{b}{k^2} \rho_1 \int_0^L s_2 \psi_x \overline{f_2} dx - \frac{\gamma}{k} \int_0^L s_2 \Psi \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx + \frac{\rho_2}{k} \int_0^L s_2 f_4 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx. \quad (3.97) \end{aligned}$$

Assim, segue de (3.85) e (3.89) que

$$\psi = \frac{\Psi}{i\beta} + \frac{f_3}{i\beta} \quad \text{e} \quad w = \frac{W}{i\beta} + \frac{f_5}{i\beta},$$

respectivamente, então substituindo esses resultados nos termos  $T_{28}$  e  $T_{29}$  e reagrupando termos de (3.97), obtemos

$$\begin{aligned}
& \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \\
&= -\frac{i\beta}{k} \left( \rho_2 - \frac{b}{k} \rho_1 \right) \int_0^L s_2 \overline{\Psi(\varphi_x + \psi + lw)} dx + \frac{b}{k^2} \rho_1 \int_0^L s_2 |\Psi|^2 dx + \frac{b}{k^2} \rho_1 \int_0^L s_2 \overline{\Psi f_3} dx \\
&+ 2 \frac{b}{k^2} \rho_1 l \int_0^L s_2 \overline{\Psi W} dx + \frac{b}{k^2} \rho_1 l \int_0^L s_2 \overline{\Psi f_5} dx + \frac{b}{k^2} \rho_1 \int_0^L s_2 \overline{\Psi f_{1,x}} dx + \frac{b}{ki\beta} \int_0^L s_2'' \overline{\Psi(\varphi_x + \psi + lw)} dx \\
&- 2 \frac{b}{k^2} \rho_1 \int_0^L s_2' \overline{\Psi \Phi} dx - 2 \frac{b}{k^2 i\beta} k_0 l \int_0^L s_2' \overline{\Psi(w_x - l\varphi)} dx - \frac{b}{k^2 i\beta} \rho_1 \int_0^L s_2' \overline{\Psi f_2} dx \\
&- \frac{b}{ki\beta} \int_0^L s_2' f_{3,x} \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx + \frac{b}{k^2} \rho_1 \int_0^L s_2 f_{3,x} \overline{\Phi} dx - \frac{b}{k^2 i\beta} k_0 l \int_0^L s_2' f_3 \overline{(w_x - l\varphi)} dx \\
&+ \frac{b}{k^2} l \rho_1 \int_0^L s_2 f_3 \overline{W} dx - \frac{bl^2}{ki\beta} \int_0^L s_2 \overline{\Psi(\varphi_x + \psi + lw)} dx - \frac{bl^2}{ki\beta} \int_0^L s_2 f_3 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx \\
&+ \frac{b}{k^2} l \rho_1 \int_0^L s_2 \overline{\psi f_6} dx + \frac{b}{k^2} \rho_1 \int_0^L s_2 \overline{\psi_x f_2} dx - \frac{\gamma}{k} \int_0^L s_2 \overline{\Psi(\varphi_x + \psi + lw)} dx \\
&+ \frac{\rho_2}{k} \int_0^L s_2 f_4 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx. \tag{3.98}
\end{aligned}$$

Deste modo, tomando o módulo de (3.98) e pela Desigualdade Triangular (**DT**), temos

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right| \\
&\stackrel{\text{DT}}{\leq} \left| -\frac{i\beta}{k} \left( \rho_2 - \frac{b}{k} \rho_1 \right) \int_0^L s_2 \overline{\Psi(\varphi_x + \psi + lw)} dx \right| + \left| \frac{b}{k^2} \rho_1 \int_0^L s_2 |\Psi|^2 dx \right| + \left| \frac{b}{k^2} \rho_1 \int_0^L s_2 \overline{\Psi f_3} dx \right| \\
&+ \left| 2 \frac{b}{k^2} \rho_1 l \int_0^L s_2 \overline{\Psi W} dx \right| + \left| \frac{b}{k^2} \rho_1 l \int_0^L s_2 \overline{\Psi f_5} dx \right| + \left| \frac{b}{k^2} \rho_1 \int_0^L s_2 \overline{\Psi f_{1,x}} dx \right| \\
&+ \left| \frac{b}{ki\beta} \int_0^L s_2'' \overline{\Psi(\varphi_x + \psi + lw)} dx \right| + \left| -2 \frac{b}{k^2} \rho_1 \int_0^L s_2' \overline{\Psi \Phi} dx \right| + \left| -2 \frac{b}{k^2 i\beta} k_0 l \int_0^L s_2' \overline{\Psi(w_x - l\varphi)} dx \right| \\
&+ \left| -\frac{b}{k^2 i\beta} \rho_1 \int_0^L s_2' \overline{\Psi f_2} dx \right| + \left| -\frac{b}{ki\beta} \int_0^L s_2' f_{3,x} \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx \right| + \left| \frac{b}{k^2} \rho_1 \int_0^L s_2 f_{3,x} \overline{\Phi} dx \right| \\
&+ \left| -\frac{b}{k^2 i\beta} k_0 l \int_0^L s_2' f_3 \overline{(w_x - l\varphi)} dx \right| + \left| \frac{b}{k^2} l \rho_1 \int_0^L s_2 f_3 \overline{W} dx \right| + \left| -\frac{bl^2}{ki\beta} \int_0^L s_2 \overline{\Psi(\varphi_x + \psi + lw)} dx \right| \\
&+ \left| -\frac{bl^2}{ki\beta} \int_0^L s_2 f_3 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx \right| + \left| \frac{b}{k^2} l \rho_1 \int_0^L s_2 \overline{\psi f_6} dx \right| + \left| \frac{b}{k^2} \rho_1 \int_0^L s_2 \overline{\psi_x f_2} dx \right| \\
&+ \left| -\frac{\gamma}{k} \int_0^L s_2 \overline{\Psi(\varphi_x + \psi + lw)} dx \right| + \left| \frac{\rho_2}{k} \int_0^L s_2 f_4 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx \right|.
\end{aligned}$$

Além disso, por meio da Desigualdade de Cauchy-Schwartz (**DCS**) e de Poincaré (**DP**), pode-

mos obter

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right| \\
& \stackrel{\text{DCS}}{\leq} \underbrace{\frac{1}{k} |\beta| \chi_0 \|s_2\|_{C[0,L]} \|\Psi\|_{L^2} \left( \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}}_{\leq C |\beta| \chi_0 \|\Psi\|_{L^2} \left( \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}} + \underbrace{\frac{b}{k^2} \rho_1 \|s_2\|_{C[0,L]} \|\Psi\|_{L^2}^2}_{\leq C \|\Psi\|_{L^2}^2} \\
& + \underbrace{\frac{b}{k^2} \rho_1 C_p \|s_2\|_{C[0,L]} \|\Psi\|_{L^2} \|f_{3,x}\|_{L^2}}_{\leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}} + \underbrace{2 \frac{b}{k^2} \rho_1 l \|s_2\|_{C[0,L]} \|\Psi\|_{L^2} \|W\|_{L^2}}_{\leq C \|\Psi\|_{L^2} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}} \\
& + \underbrace{\frac{b}{k^2} \rho_1 l C_p \|s_2\|_{C[0,L]} \|\Psi\|_{L^2} \|f_{5,x}\|_{L^2}}_{\leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}} + \underbrace{\frac{b}{k^2} \rho_1 \|s_2\|_{C[0,L]} \|\Psi\|_{L^2} \|f_{1,x}\|_{L^2}}_{\leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}} \\
& + \underbrace{\frac{b}{k|\beta|} \|s_2''\|_{C[0,L]} \|\Psi\|_{L^2} \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}}_{\leq \frac{C}{|\beta|} \|\Psi\|_{L^2} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}} + \underbrace{2 \frac{b}{k^2} \rho_1 \|s_2'\|_{C[0,L]} \|\Psi\|_{L^2} \|\Phi\|_{L^2}}_{\leq C \|\Psi\|_{L^2} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}} \\
& + \underbrace{2 \frac{b}{k^2|\beta|} k_0 l \|s_2'\|_{C[0,L]} \|\Psi\|_{L^2} \|w_x - l\varphi\|_{L^2}}_{\leq \frac{C}{|\beta|} \|\Psi\|_{L^2} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}} + \underbrace{\frac{b}{k^2|\beta|} \rho_1 \|s_2'\|_{C[0,L]} \|\Psi\|_{L^2} \|f_2\|_{L^2}}_{\leq \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}} \\
& + \underbrace{\frac{b}{k|\beta|} \|s_2'\|_{C[0,L]} \|f_{3,x}\|_{L^2} \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}}_{\leq \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}} + \underbrace{\frac{b}{k^2} \rho_1 \|s_2\|_{C[0,L]} \|f_{3,x}\|_{L^2} \|\Phi\|_{L^2}}_{\leq C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}} \\
& + \underbrace{\frac{b}{k^2|\beta|} k_0 l C_p \|s_2'\|_{C[0,L]} \|f_{3,x}\|_{L^2} \|w_x - l\varphi\|_{L^2}}_{\leq \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}} + \underbrace{\frac{b}{k^2} l \rho_1 C_p \|s_2\|_{C[0,L]} \|f_{3,x}\|_{L^2} \|W\|_{L^2}}_{\leq C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}} \\
& + \underbrace{\frac{bl^2}{k|\beta|} \|s_2\|_{C[0,L]} \|\Psi\|_{L^2} \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}}_{\leq \frac{C}{|\beta|} \|\Psi\|_{L^2} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}} + \underbrace{\frac{bl^2}{k|\beta|} C_p \|s_2\|_{C[0,L]} \|f_{3,x}\|_{L^2} \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}}_{\leq \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}} \\
& + \underbrace{\frac{b}{k^2} l \rho_1 \|s_2\|_{C[0,L]} \|\psi\|_{L^2} \|f_6\|_{L^2}}_{\leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}} + \underbrace{\frac{b}{k^2} \rho_1 \|s_2\|_{C[0,L]} \|\psi_x\|_{L^2} \|f_2\|_{L^2}}_{\leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}} \\
& + \underbrace{\frac{\gamma}{k} \|s_2\|_{C[0,L]} \|\Psi\|_{L^2} \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}}_{\leq C \|\Psi\|_{L^2} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}} + \underbrace{\frac{\rho_2}{k} \|s_2\|_{C[0,L]} \|f_4\|_{L^2} \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2}}_{\leq C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}}.
\end{aligned}$$

Dessa forma, como sabemos que  $|\beta| > 1$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx & \leq C |\beta| \chi_0 \|\Psi\|_{L^2} \underbrace{\left( \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}}_{:=T_{30}} + C \|\Psi\|_{L^2}^2 \\
& + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + C \|\Psi\|_{L^2} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Assim, usando a Desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$  no termo  $T_{30}$ , existe uma constante positiva  $C_\varepsilon$ , tal que

$$\int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \leq \varepsilon \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx + C_\varepsilon |\beta|^2 \chi_0^2 \|\Psi\|_{L^2}^2 + C \|\Psi\|_{L^2}^2 + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + C \|\Psi\|_{L^2} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.99)$$

Deste modo, reagrupando e reorganizando os termos de (3.99) de forma conveniente, obtemos

$$(1 - \varepsilon) \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \leq C_\varepsilon |\beta|^2 \chi_0^2 \|\Psi\|_{L^2}^2 + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + C \|\Psi\|_{L^2} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}.$$

Sendo assim, tomando  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , temos

$$\int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \leq C |\beta|^2 \chi_0^2 \|\Psi\|_{L^2}^2 + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + C \|\Psi\|_{L^2} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}.$$

Como sabemos que  $\text{supp}s_2 \subset (L_0 - \frac{\delta}{2}, L_0 + \frac{\delta}{2})$ , temos que a Desigualdade (3.94) é verdadeira.  $\square$

**Corolário 3.14.** *Sejam  $\mathbf{F} \in \mathcal{H}$  e  $\mathbf{U} \in D(\mathcal{A})$ , sendo  $\mathbf{U}$  a solução do sistema (3.85)-(3.90), então existe uma constante positiva  $C$ , tal que*

$$\int_{L_0 - \frac{\delta}{4}}^{L_0 + \frac{\delta}{4}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \leq C |\beta|^2 \chi_0^2 \|\Psi\|_{L^2}^2 + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + C \|\Psi\|_{L^2} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}},$$

no qual  $|\beta| \geq \beta_0 > 1$ .

**Demonstração.** Consequência imediata do Lema 3.13.  $\square$

Por fim, considere uma função  $s_3 \in C^2(0, L)$  que satisfaz

$$\text{supp}s_3 \subset \left( L_0 - \frac{\delta}{3}, L_0 + \frac{\delta}{3} \right) \subset (0, L), \quad 0 \leq s_3(x) \leq 1, \quad x \in (0, L),$$

e

$$s_3(x) = 1 \quad \text{para} \quad x \in \left[ L_0 - \frac{\delta}{4}, L_0 + \frac{\delta}{4} \right].$$

A seguir, mostraremos um exemplo genérico para este tipo de função

$$s_3(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L_0 - \frac{\delta}{3}, \\ e^{\frac{1}{(4(x - (L_0 - \frac{\delta}{4})))^2 - 1}} e, & L_0 - \frac{\delta}{3} \leq x \leq L_0 - \frac{\delta}{4}, \\ 1, & L_0 - \frac{\delta}{4} \leq x \leq L_0 + \frac{\delta}{4}, \\ e^{\frac{1}{(4(x - (L_0 + \frac{\delta}{4})))^2 - 1}} e, & L_0 + \frac{\delta}{4} \leq x \leq L_0 + \frac{\delta}{3}, \\ 0, & L_0 + \frac{\delta}{3} \leq x \leq L. \end{cases}$$

Para termos uma noção gráfica do comportamento da função  $s_2$ , devemos atribuir valores para  $L$ ,  $L_0$  e  $\delta$ . Sendo assim, tomando  $L := 6$ ,  $L_0 := 3$  e  $\delta := 2$ , segue que

$$s_3(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{7}{3}, \\ e^{\frac{1}{(4x-10)^2-1}} e, & \frac{7}{3} \leq x \leq \frac{5}{2}, \\ 1, & \frac{5}{2} \leq x \leq \frac{7}{2}, \\ e^{\frac{1}{(4x-14)^2-1}} e, & \frac{7}{2} \leq x \leq \frac{11}{3}, \\ 0, & \frac{11}{3} \leq x \leq 6. \end{cases}$$

Assim, por meio da Figura 4.3 temos a representação gráfica da função  $s_3$ .

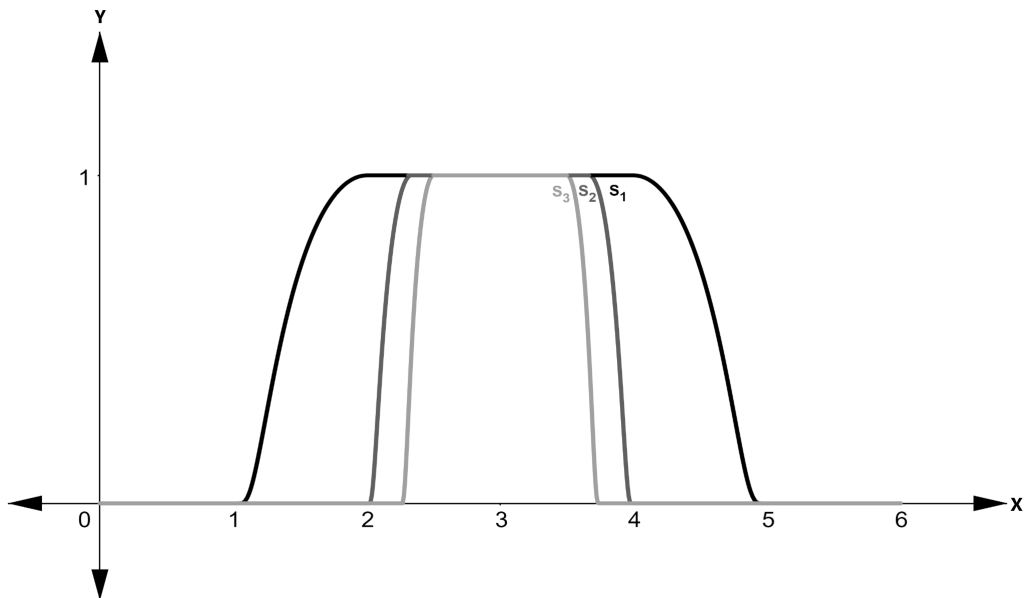


Figura 3.3: Gráfico das funções  $s_1$ ,  $s_2$  e  $s_3$ . (Fonte: Elaborada pela autora.)

**Lema 3.15.** *Sejam  $\mathbf{F} \in \mathcal{H}$  e  $\mathbf{U} \in D(\mathcal{A})$ , sendo  $\mathbf{U}$  a solução do sistema (3.85)-(3.90), então existe uma constante positiva  $C$ , tal que*

$$\begin{aligned} & \int_{L_0-\frac{\delta}{3}}^{L_0+\frac{\delta}{3}} s_3 |\Phi|^2 dx \\ & \leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|} \left( \int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} + C \int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \\ & \quad + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\Psi\|_{L^2} + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned} \quad (3.100)$$

no qual  $|\beta| \geq \beta_0 > 1$ .

**Demonstração.** Multiplicando (3.86) por  $s_3\bar{\varphi}$ , e integrando sobre o intervalo  $(0, L)$ , segue que

$$\underbrace{i\beta\rho_1 \int_0^L s_3\Phi\bar{\varphi}dx}_{:=T_{31}} - \underbrace{k \int_0^L s_3(\varphi_x + \psi + lw)_x\bar{\varphi}dx - k_0l \int_0^L s_3(w_x - l\varphi)\bar{\varphi}dx}_{:=T_{32}} = \rho_1 \int_0^L s_3f_2\bar{\varphi}dx.$$

Deste modo, sabemos por meio de (3.85) que

$$\varphi = \frac{\Phi}{i\beta} + \frac{f_1}{i\beta},$$

assim substituindo esse resultado no termo  $T_{31}$ , integrando por partes o termo  $T_{32}$ , reorganizando os termos da igualdade encontrada e multiplicando ambos os lados por  $(-1)$ , podemos obter

$$\begin{aligned} \rho_1 \int_0^L s_3|\Phi|^2 dx &= -\rho_1 \int_0^L s_3f_2\bar{\varphi} dx - \rho_1 \int_0^L s_3\Phi\bar{f}_1 dx + k \int_0^L s_3'(\varphi_x + \psi + lw)\bar{\varphi} dx \\ &\quad + k \int_0^L s_3(\varphi_x + \psi + lw)\bar{\varphi}_x dx - k_0l \int_0^L s_3(w_x - l\varphi)\bar{\varphi} dx. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Agora, analisaremos separadamente cada parcela de (3.101). Para isso, considere

$$P_1 = -\rho_1 \int_0^L s_3f_2\bar{\varphi} dx - \rho_1 \int_0^L s_3\Phi\bar{f}_1 dx, \quad (3.102)$$

$$P_2 = k \int_0^L s_3'(\varphi_x + \psi + lw)\bar{\varphi} dx, \quad (3.103)$$

$$P_3 = k \int_0^L s_3(\varphi_x + \psi + lw)\bar{\varphi}_x dx - k_0l \int_0^L s_3(w_x - l\varphi)\bar{\varphi} dx. \quad (3.104)$$

Logo, substituindo (3.102), (3.103) e (3.104) em (3.101), obtemos

$$\rho_1 \int_0^L s_3|\Phi|^2 dx = P_1 + P_2 + P_3. \quad (3.105)$$

### (I) Parcela $P_1$ .

Desta forma, tomando o módulo de (3.102), utilizando as desigualdades Triangular (**DT**), de Cauchy-Schwartz (**DCS**) e de Poincaré (**DP**), temos que

$$\begin{aligned} |P_1| &\stackrel{\text{DT}}{\leq} \left| -\rho_1 \int_0^L s_3 f_2 \bar{\varphi} dx \right| + \left| -\rho_1 \int_0^L s_3 \Phi \bar{f}_1 dx \right| \\ &\stackrel{\text{DCS}}{\leq} \rho_1 \|s_3\|_{C[0,L]} \|f_2\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} + \rho_1 \|s_3\|_{C[0,L]} \|\Phi\|_{L^2} \|f_1\|_{L^2} \\ &\stackrel{\text{DP}}{\leq} \underbrace{\rho_1 C_p \|s_3\|_{C[0,L]} \|f_2\|_{L^2} \|\varphi_x\|_{L^2}}_{\leq C\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}} + \underbrace{\rho_1 C_p \|s_3\|_{C[0,L]} \|\Phi\|_{L^2} \|f_{1,x}\|_{L^2}}_{\leq C\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}\|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}} \\ &\leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$|P_1| \leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}, \quad (3.106)$$

no qual  $C$  é uma constante positiva.

**(II) Parcela  $P_2$ .**

De fato, segue de (3.85) que

$$\varphi = \frac{\Phi}{i\beta} + \frac{f_1}{i\beta},$$

então substituindo tal resultado em (3.103) e reorganizando de forma adequada a igualdade encontrada, podemos obter

$$P_2 = -\frac{k}{i\beta} \int_0^L s'_3(\varphi_x + \psi + lw) \overline{\Phi} dx - \frac{k}{i\beta} \int_0^L s'_3(\varphi_x + \psi + lw) \overline{f_1} dx. \quad (3.107)$$

Desta forma, tomando o módulo de (3.107), segue das desigualdades Triangular **(DT)**, de Cauchy-Schwartz **(DCS)** e de Poincaré **(DP)** que

$$\begin{aligned} |P_2| &\stackrel{\mathbf{DT}}{\leq} \left| -\frac{k}{i\beta} \int_0^L s'_3(\varphi_x + \psi + lw) \overline{\Phi} dx \right| + \left| -\frac{k}{i\beta} \int_0^L s'_3(\varphi_x + \psi + lw) \overline{f_1} dx \right| \\ &\leq \frac{k}{|\beta|} \int_0^L |s'_3(\varphi_x + \psi + lw) \overline{\Phi}| dx + \frac{k}{|\beta|} \int_0^L |s'_3(\varphi_x + \psi + lw) \overline{f_1}| dx \\ &\leq \frac{k}{|\beta|} \int_{L_0 - \frac{\delta}{3}}^{L_0 + \frac{\delta}{3}} |s'_3| |\varphi_x + \psi + lw| |\Phi| dx + \frac{k}{|\beta|} \int_0^L |s'_3| |\varphi_x + \psi + lw| |f_1| dx \\ &\leq \frac{k}{|\beta|} \|s'_3\|_{C[0,L]} \int_{L_0 - \frac{\delta}{3}}^{L_0 + \frac{\delta}{3}} 1 \cdot |\varphi_x + \psi + lw| |\Phi| dx + \frac{k}{|\beta|} \int_0^L |s'_3| |\varphi_x + \psi + lw| |f_1| dx \\ &= \frac{k}{|\beta|} \|s'_3\|_{C[0,L]} \int_{L_0 - \frac{\delta}{3}}^{L_0 + \frac{\delta}{3}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw| |\Phi| dx + \frac{k}{|\beta|} \int_0^L |s'_3| |\varphi_x + \psi + lw| |f_1| dx \\ &\leq \frac{k}{|\beta|} \|s'_3\|_{C[0,L]} \int_0^L \sqrt{s_2} |\varphi_x + \psi + lw| \sqrt{s_2} |\Phi| dx + \frac{k}{|\beta|} \int_0^L |s'_3| |\varphi_x + \psi + lw| |f_1| dx \\ &\stackrel{\mathbf{DCS}}{\leq} \frac{k}{|\beta|} \|s'_3\|_{C[0,L]} \underbrace{\left( \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\Phi\|_{L^2}}_{\leq \frac{C}{|\beta|} \left( \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}} + \frac{k}{|\beta|} C_p \|s'_3\|_{C[0,L]} \underbrace{\|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2} \|f_{1,x}\|_{L^2}}_{\leq \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}} \\ &\leq \frac{C}{|\beta|} \left( \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$|P_2| \leq \frac{C}{|\beta|} \left( \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}, \quad (3.108)$$

em que  $C$  é uma constante positiva.

### (III) Parcela $P_3$ .

Deste modo, somando e subtraindo o termo

$$\frac{k}{\rho_1} \int_0^L s_3(\varphi_x + \psi + lw) \overline{(\psi + lw)} dx,$$

em (3.104), reagrupando e reorganizando de forma conveniente os termos da igualdade encontrada, obtemos

$$\begin{aligned} P_3 &= \frac{k}{\rho_1} \int_0^L s_3 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx - \frac{k}{\rho_1} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{\psi} dx - \frac{kl}{\rho_1} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{w} dx \\ &\quad - \frac{k_0 l}{\rho_1} \int_0^L s_3 (w_x - l\varphi) \overline{\varphi} dx. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Além disso, segue de (3.66), (3.68) e (3.70) que

$$\varphi = \frac{\Phi}{i\beta} + \frac{f_1}{i\beta}, \quad \psi = \frac{\Psi}{i\beta} + \frac{f_3}{i\beta} \quad \text{e} \quad w = \frac{W}{i\beta} + \frac{f_5}{i\beta},$$

respectivamente, então substituindo esses resultados em (3.109), encontramos

$$\begin{aligned} P_3 &= \frac{k}{\rho_1} \int_0^L s_3 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx + \frac{k}{\rho_1 i\beta} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{\Psi} dx + \frac{k}{\rho_1 i\beta} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{f_3} dx \\ &\quad + \frac{kl}{\rho_1 i\beta} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{W} dx + \frac{kl}{\rho_1 i\beta} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{f_5} dx \\ &\quad + \frac{k_0 l}{\rho_1 i\beta} \int_0^L s_3 (w_x - l\varphi) \overline{\Phi} dx + \frac{k_0 l}{\rho_1 i\beta} \int_0^L s_3 (w_x - l\varphi) \overline{f_1} dx. \end{aligned}$$

Desta forma, tomando o módulo e pela Desigualdade Triangular (**DT**), obtemos

$$\begin{aligned} |P_3| &\stackrel{\text{DT}}{\leq} \left| \frac{k}{\rho_1} \int_0^L s_3 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right| + \left| \frac{k}{\rho_1 i\beta} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{\Psi} dx \right| + \left| \frac{k}{\rho_1 i\beta} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{f_3} dx \right| \\ &\quad + \left| \frac{kl}{\rho_1 i\beta} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{W} dx \right| + \left| \frac{kl}{\rho_1 i\beta} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{f_5} dx \right| \\ &\quad + \left| \frac{k_0 l}{\rho_1 i\beta} \int_0^L s_3 (w_x - l\varphi) \overline{\Phi} dx \right| + \left| \frac{k_0 l}{\rho_1 i\beta} \int_0^L s_3 (w_x - l\varphi) \overline{f_1} dx \right|. \end{aligned}$$

Como  $\text{supp}s_3 \subset (L_0 - \frac{\delta}{3}, L_0 + \frac{\delta}{3})$ , concluimos

$$\begin{aligned}
|P_3| &\leq \frac{k}{\rho_1} \int_{L_0 - \frac{\delta}{3}}^{L_0 + \frac{\delta}{3}} |s_3| |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx + \frac{k}{\rho_1|\beta|} \int_0^L |s_3| |\varphi_x + \psi + lw| |\Psi| dx \\
&+ \frac{k}{\rho_1|\beta|} \int_0^L |s_3| |\varphi_x + \psi + lw| |f_3| dx + \frac{kl}{\rho_1|\beta|} \int_{L_0 - \frac{\delta}{3}}^{L_0 + \frac{\delta}{3}} |s_3| |\varphi_x + \psi + lw| |W| dx \\
&+ \frac{kl}{\rho_1|\beta|} \int_0^L |s_3| |\varphi_x + \psi + lw| |f_5| dx + \frac{k_0l}{\rho_1|\beta|} \int_0^L |s_3| |w_x - l\varphi| |\Phi| dx \\
&+ \frac{k_0l}{\rho_1|\beta|} \int_0^L |s_3| |w_x - l\varphi| |f_1| dx \\
&\leq \frac{k}{\rho_1} \|s_3\|_{C[0,L]} \int_{L_0 - \frac{\delta}{3}}^{L_0 + \frac{\delta}{3}} 1 \cdot |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx + \frac{k}{\rho_1|\beta|} \int_0^L |s_3| |\varphi_x + \psi + lw| |\Psi| dx \\
&+ \frac{k}{\rho_1|\beta|} \int_0^L |s_3| |\varphi_x + \psi + lw| |f_3| dx + \frac{kl}{\rho_1|\beta|} \|s_3\|_{C[0,L]} \int_{L_0 - \frac{\delta}{3}}^{L_0 + \frac{\delta}{3}} 1 \cdot |\varphi_x + \psi + lw| |W| dx \\
&+ \frac{kl}{\rho_1|\beta|} \int_0^L |s_3| |\varphi_x + \psi + lw| |f_5| dx + \frac{k_0l}{\rho_1|\beta|} \int_0^L |s_3| |w_x - l\varphi| |\Phi| dx \\
&+ \frac{k_0l}{\rho_1|\beta|} \int_0^L |s_3| |w_x - l\varphi| |f_1| dx \\
&= \frac{k}{\rho_1} \|s_3\|_{C[0,L]} \int_{L_0 - \frac{\delta}{3}}^{L_0 + \frac{\delta}{3}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx + \frac{k}{\rho_1|\beta|} \int_0^L |s_3| |\varphi_x + \psi + lw| |\Psi| dx \\
&+ \frac{k}{\rho_1|\beta|} \int_0^L |s_3| |\varphi_x + \psi + lw| |f_3| dx + \frac{kl}{\rho_1|\beta|} \|s_3\|_{C[0,L]} \int_{L_0 - \frac{\delta}{3}}^{L_0 + \frac{\delta}{3}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw| |W| dx \\
&+ \frac{kl}{\rho_1|\beta|} \int_0^L |s_3| |\varphi_x + \psi + lw| |f_5| dx + \frac{k_0l}{\rho_1|\beta|} \int_0^L |s_3| |w_x - l\varphi| |\Phi| dx \\
&+ \frac{k_0l}{\rho_1|\beta|} \int_0^L |s_3| |w_x - l\varphi| |f_1| dx \\
&\leq \frac{k}{\rho_1} \|s_3\|_{C[0,L]} \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx + \frac{k}{\rho_1|\beta|} \int_0^L |s_3| |\varphi_x + \psi + lw| |\Psi| dx \\
&+ \frac{k}{\rho_1|\beta|} \int_0^L |s_3| |\varphi_x + \psi + lw| |f_3| dx + \frac{kl}{\rho_1|\beta|} \|s_3\|_{C[0,L]} \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw| |W| dx \\
&+ \frac{kl}{\rho_1|\beta|} \int_0^L |s_3| |\varphi_x + \psi + lw| |f_5| dx + \frac{k_0l}{\rho_1|\beta|} \int_0^L |s_3| |w_x - l\varphi| |\Phi| dx \\
&+ \frac{k_0l}{\rho_1|\beta|} \int_0^L |s_3| |w_x - l\varphi| |f_1| dx \\
&= \frac{k}{\rho_1} \|s_3\|_{C[0,L]} \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx + \frac{k}{\rho_1|\beta|} \int_0^L |s_3| |\varphi_x + \psi + lw| |\Psi| dx \\
&+ \frac{k}{\rho_1|\beta|} \int_0^L |s_3| |\varphi_x + \psi + lw| |f_3| dx + \frac{kl}{\rho_1|\beta|} \|s_3\|_{C[0,L]} \int_0^L \sqrt{s_2} |\varphi_x + \psi + lw| \sqrt{s_2} |W| dx \\
&+ \frac{kl}{\rho_1|\beta|} \int_0^L |s_3| |\varphi_x + \psi + lw| |f_5| dx + \frac{k_0l}{\rho_1|\beta|} \int_0^L |s_3| |w_x - l\varphi| |\Phi| dx \\
&+ \frac{k_0l}{\rho_1|\beta|} \int_0^L |s_3| |w_x - l\varphi| |f_1| dx.
\end{aligned}$$

Além disso, pelas desigualdades de Cauchy-Schwartz (**DCS**) e de Poincaré (**DP**), podemos obter

$$\begin{aligned}
|P_3| &\stackrel{\text{DCS}}{\stackrel{\text{DP}}{\leq}} \underbrace{\frac{k}{\rho_1} \|s_3\|_{C[0,L]} \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx}_{\leq C \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx} + \underbrace{\frac{k}{\rho_1 |\beta|} \|s_3\|_{C[0,L]} \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2} \|\Psi\|_{L^2}}_{\leq \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\Psi\|_{L^2}} \\
&\quad + \underbrace{\frac{k}{\rho_1 |\beta|} C_p \|s_3\|_{C[0,L]} \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2} \|f_{3,x}\|_{L^2}}_{\leq \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}} + \underbrace{\frac{kl}{\rho_1 |\beta|} \|s_3\|_{C[0,L]} \left( \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|W\|_{L^2}}_{\leq \frac{C}{|\beta|} \left( \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}} \\
&\quad + \underbrace{\frac{kl}{\rho_1 |\beta|} C_p \|s_3\|_{C[0,L]} \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2} \|f_{5,x}\|_{L^2}}_{\leq \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}} + \underbrace{\frac{k_0 l}{\rho_1 |\beta|} \|s_3\|_{C[0,L]} \|w_x - l\varphi\|_{L^2} \|\Phi\|_{L^2}}_{\leq \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2} \\
&\quad + \underbrace{\frac{k_0 l}{\rho_1 |\beta|} C_p \|s_3\|_{C[0,L]} \|s_2\|_{C[0,L]} \|w_x - l\varphi\|_{L^2} \|f_{1,x}\|_{L^2}}_{\leq \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}} \\
&\leq C \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\Psi\|_{L^2} + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} \\
&\quad + \frac{C}{|\beta|} \left( \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|P_3| &\leq C \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\Psi\|_{L^2} + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} \\
&\quad + \frac{C}{|\beta|} \left( \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2, \quad (3.110)
\end{aligned}$$

sendo  $C$  uma constante positiva.

Deste modo, substituindo (3.106), (3.108) e (3.110) em (3.105), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^L s_3 |\Phi|^2 dx &\leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|} \left( \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \\
&\quad + C \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\Psi\|_{L^2} + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Mas, como sabemos que  $\text{supp}s_2 \subset (L_0 - \frac{\delta}{2}, L_0 + \frac{\delta}{2})$  e  $\text{supp}s_3 \subset (L_0 - \frac{\delta}{3}, L_0 + \frac{\delta}{3})$ , segue que vale a Desigualdade (3.100).  $\square$

**Corolário 3.16.** *Sejam  $\mathbf{F} \in \mathcal{H}$  e  $\mathbf{U} \in D(\mathcal{A})$ , sendo  $\mathbf{U}$  a solução do sistema (3.85)-(3.90),*

então existe uma constante positiva  $C$ , tal que

$$\begin{aligned} \int_{L_0 - \frac{\delta}{4}}^{L_0 + \frac{\delta}{4}} s_3 |\Phi|^2 dx &\leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|} \left( \int_{L_0 - \frac{\delta}{2}}^{L_0 + \frac{\delta}{2}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \\ &+ C \int_{L_0 - \frac{\delta}{2}}^{L_0 + \frac{\delta}{2}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\Psi\|_{L^2} + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned}$$

no qual  $|\beta| \geq \beta_0 > 1$ .

**Demonstração.** A demonstração decorre imediatamente do Lema 3.15.  $\square$

**Lema 3.17.** Sejam  $\mathbf{F} \in \mathcal{H}$  e  $\mathbf{U} \in D(\mathcal{A})$ , sendo  $\mathbf{U}$  a solução do sistema (3.85)-(3.90), então existe uma constante positiva  $C$ , tal que

$$\begin{aligned} &\int_{L_0 - \frac{\delta}{3}}^{L_0 + \frac{\delta}{3}} s_3 |w_x - l\varphi|^2 dx + \int_{L_0 - \frac{\delta}{3}}^{L_0 + \frac{\delta}{3}} s_3 |W|^2 dx \\ &\leq C|\beta|\chi \left( \int_{L_0 - \frac{\delta}{2}}^{L_0 + \frac{\delta}{2}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + C \|\Psi\|_{L^2} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \\ &+ \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C \left( \int_{L_0 - \frac{\delta}{2}}^{L_0 + \frac{\delta}{2}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|^2} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &+ \frac{C}{|\beta|^2} \int_{L_0 - \frac{\delta}{3}}^{L_0 + \frac{\delta}{3}} s_3 |\Phi|^2 dx + C \int_{L_0 - \frac{\delta}{2}}^{L_0 + \frac{\delta}{2}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx, \end{aligned} \quad (3.111)$$

no qual  $|\beta| \geq \beta_0 > 1$ .

**Demonstração.** Multiplicando (3.90) por  $\left(\frac{k_0 l}{\rho_1} s_3 \bar{w}\right)$  e integrando no intervalo  $(0, L)$ , obtemos

$$i\beta k_0 l \int_0^L s_3 W \bar{w} dx - \underbrace{\frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3 (w_x - l\varphi)_x \bar{w} dx}_{:=T_{33}} + \frac{k k_0 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{w} dx = k_0 l \int_0^L s_3 f_6 \bar{w} dx.$$

Assim, integrando por partes o termo  $T_{33}$ , temos que

$$\begin{aligned} &i\beta k_0 l \int_0^L s_3 W \bar{w} dx + \frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3' (w_x - l\varphi) \bar{w} dx + \frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3 (w_x - l\varphi) \bar{w}_x dx \\ &+ \frac{k k_0 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{w} dx = k_0 l \int_0^L s_3 f_6 \bar{w} dx. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Além disso, somando e subtraindo o termo

$$\frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3 (w_x - l\varphi) \bar{l\varphi} dx,$$

em (3.112), reagrupando e reorganizando de maneira conveniente os termos da igualdade encontrada, podemos obter

$$\begin{aligned} & \frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3 |w_x - l\varphi|^2 dx \\ &= -i\beta k_0 l \int_0^L s_2 W \bar{w} dx - \underbrace{\frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3' (w_x - l\varphi) \bar{w} dx}_{:=T_{34}} - \underbrace{\frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3 (w_x - l\varphi) \bar{l}\varphi dx}_{:=T_{35}} \\ & \quad - \frac{k k_0 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{w} dx + k_0 l \int_0^L s_3 f_6 \bar{w} dx. \end{aligned}$$

Deste modo, reorganizando de forma adequada os termos  $T_{34}$  e  $T_{35}$ , podemos concluir

$$\begin{aligned} & \frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3 |w_x - l\varphi|^2 dx \\ &= -i\beta k_0 l \int_0^L s_2 W \bar{w} dx - \frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3' w_x \bar{w} dx + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3' \varphi \bar{w} dx - \underbrace{\frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3 w_x \bar{\varphi} dx}_{:=T_{36}} + \frac{k_0^2 l^3}{\rho_1} \int_0^L s_3 |\varphi|^2 dx \\ & \quad - \frac{k l^2 k_0}{\rho_1} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{w} dx + k_0 l \int_0^L s_3 f_6 \bar{w} dx. \end{aligned}$$

Sendo assim, integrando por partes o termo  $T_{36}$ , encontramos

$$\begin{aligned} & \frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3 |w_x - l\varphi|^2 dx \\ &= -i\beta k_0 l \int_0^L s_2 W \bar{w} dx - \frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3' w_x \bar{w} dx + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3' \varphi \bar{w} dx + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3' w \bar{\varphi} dx \\ & \quad + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3 w \bar{\varphi}_x dx + \frac{k_0^2 l^3}{\rho_1} \int_0^L s_3 |\varphi|^2 dx - \frac{k l^2 k_0}{\rho_1} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{w} dx \\ & \quad + k_0 l \int_0^L s_3 f_6 \bar{w} dx. \end{aligned} \tag{3.113}$$

Além disso, somando e subtraindo o termo

$$\frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3 w \overline{(\psi + lw)} dx,$$

em (3.113) e reagrupando de forma apropriada os termos da igualdade encontrada, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3 |w_x - l\varphi|^2 dx \\ &= \underbrace{-i\beta k_0 l \int_0^L s_3 W \bar{w} dx}_{:=T_{37}} - \frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3' w_x \bar{w} dx + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3' \varphi \bar{w} dx + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3' w \bar{\varphi} dx \\ & \quad + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3 w \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx - \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3 w \overline{(\psi + lw)} dx + \frac{k_0^2 l^3}{\rho_1} \int_0^L s_3 |\varphi|^2 dx \\ & \quad - \frac{k l^2 k_0}{\rho_1} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{w} dx + k_0 l \int_0^L s_3 f_6 \bar{w} dx. \end{aligned}$$

Dessa forma, por meio de (3.89), temos que

$$w = \frac{W}{i\beta} + \frac{f_5}{i\beta},$$

assim substituindo tal resultado no termo  $T_{37}$  e reorganizando de maneira apropriada a igualdade encontrada, podemos obter

$$\begin{aligned} & \frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3 |w_x - l\varphi|^2 dx \\ &= \underbrace{k_0 l \int_0^L s_3 W \overline{W} dx}_{:=T_{38}} + k_0 l \int_0^L s_3 W \overline{f_5} dx - \frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3' w_x \overline{w} dx + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3' \varphi \overline{w} dx + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3' w \overline{\varphi} dx \\ &+ \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3 w \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx - \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3 w \overline{(\psi + lw)} dx + \frac{k_0^2 l^3}{\rho_1} \int_0^L s_3 |\varphi|^2 dx \\ &- \frac{k l^2 k_0}{\rho_1} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{w} dx + k_0 l \int_0^L s_3 f_6 \overline{w} dx. \end{aligned}$$

Novamente por meio de (3.89) sabemos que  $W = i\beta w - f_5$ , então substituindo esse resultado no termo  $T_{38}$  e reorganizando de maneira conveniente, encontramos

$$\begin{aligned} & \frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3 |w_x - l\varphi|^2 dx \\ &= i\beta k_0 l \int_0^L s_3 w \overline{W} dx - k_0 l \int_0^L s_3 f_5 \overline{W} dx + k_0 l \int_0^L s_3 W \overline{f_5} dx - \frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3' w_x \overline{w} dx + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3' \varphi \overline{w} dx \\ &+ \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3' w \overline{\varphi} dx + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3 w \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx - \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3 w \overline{(\psi + lw)} dx + \frac{k_0^2 l^3}{\rho_1} \int_0^L s_3 |\varphi|^2 dx \\ &- \frac{k l^2 k_0}{\rho_1} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{w} dx + k_0 l \int_0^L s_3 f_6 \overline{w} dx. \end{aligned} \quad (3.114)$$

Assim, somando e subtraindo o termo

$$i\beta k_0 \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi) \overline{W} dx,$$

em (3.114), reagrupando e reorganizando forma adequada a igualdade encontrada, podemos obter

$$\begin{aligned} & \frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3 |w_x - l\varphi|^2 dx \\ &= i\beta k_0 \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{W} dx - \underbrace{i\beta k_0 \int_0^L s_3 \varphi_x \overline{W} dx}_{:=T_{39}} - \underbrace{i\beta k_0 \int_0^L s_3 \psi \overline{W} dx}_{:=T_{40}} - k_0 l \int_0^L s_3 f_5 \overline{W} dx \\ &+ k_0 l \int_0^L s_3 W \overline{f_5} dx - \frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3' w_x \overline{w} dx + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3' \varphi \overline{w} dx + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3' w \overline{\varphi} dx \\ &+ \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3 w \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx - \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3 w \overline{(\psi + lw)} dx + \frac{k_0^2 l^3}{\rho_1} \int_0^L s_3 |\varphi|^2 dx \\ &- \frac{k l^2 k_0}{\rho_1} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{w} dx + k_0 l \int_0^L s_3 f_6 \overline{w} dx. \end{aligned}$$

Dessa maneira, segue de (3.85) e (3.87) que

$$\varphi_x = \frac{\Phi_x}{i\beta} + \frac{f_{1,x}}{i\beta} \quad \text{e} \quad \psi = \frac{\Psi}{i\beta} + \frac{f_3}{i\beta},$$

respectivamente, substituindo tais resultados nos termos  $T_{39}$  e  $T_{40}$  e reorganizando de forma apropriada, podemos concluir

$$\begin{aligned} & \frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3 |w_x - l\varphi|^2 dx \\ &= i\beta k_0 \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{W} dx - k_0 \int_0^L s_3 \Phi_x \overline{W} dx - k_0 \int_0^L s_3 f_{1,x} \overline{W} dx - k_0 \int_0^L s_3 \Psi \overline{W} dx \\ & \quad - k_0 \int_0^L s_3 f_3 \overline{W} dx - k_0 l \int_0^L s_3 f_5 \overline{W} dx + k_0 l \int_0^L s_3 W \overline{f_5} dx - \frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3' w_x \overline{w} dx + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3' \varphi \overline{w} dx \\ & \quad + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3' w \overline{\varphi} dx + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3 w \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx - \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3 w \overline{(\psi + lw)} dx \\ & \quad + \frac{k_0^2 l^3}{\rho_1} \int_0^L s_3 |\varphi|^2 dx - \frac{kl^2 k_0}{\rho_1} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{w} dx + k_0 l \int_0^L s_3 f_6 \overline{w} dx. \quad (3.115) \end{aligned}$$

Por outro lado, derivando (3.86) em relação a variável  $x$ , multiplicando por  $\frac{k_0}{\rho_1} s_3 \overline{w}$  e integrando sobre o intervalo  $(0, L)$ , obtemos

$$i\beta k_0 \int_0^L s_3 \Phi_x \overline{w} dx - \frac{kk_0}{\rho_1} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw)_{xx} \overline{w} dx - \underbrace{\frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3 (w_x - l\varphi)_x \overline{w} dx}_{:=T_{41}} = k_0 \int_0^L s_3 f_{2,x} \overline{w} dx.$$

Além disso, segue de (3.90) que

$$(w_x - l\varphi)_x = \frac{1}{k_0} [i\beta \rho_1 W + kl(\varphi_x + \psi + lw) - \rho_1 f_6],$$

assim substituindo tal resultado no termo  $T_{41}$  e reorganizando de maneira apropriada a igualdade encontrada, segue que

$$\begin{aligned} & \underbrace{-i\beta k_0 l \int_0^L s_3 W \overline{w} dx}_{:=T_{42}} \\ &= \underbrace{-i\beta k_0 \int_0^L s_3 \Phi_x \overline{w} dx}_{:=T_{43}} + \underbrace{\frac{kk_0}{\rho_1} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw)_{xx} \overline{w} dx}_{:=T_{44}} + \frac{k_0 kl^2}{\rho_1} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{w} dx \\ & \quad - k_0 l \int_0^L s_3 f_6 \overline{w} dx + \underbrace{k_0 \int_0^L s_3 f_{2,x} \overline{w} dx}_{:=T_{45}}. \end{aligned}$$

Deste modo, por meio de (3.89), temos que

$$w = \frac{W}{i\beta} + \frac{f_5}{i\beta},$$

então substituindo tal resultado no termo  $T_{42}$ ,  $T_{43}$ , reorganizando de forma adequada esses termos, integrando por partes os termos  $T_{44}$  e  $T_{45}$  e reorganizando os termos da igualdade encontrada, podemos obter

$$\begin{aligned}
& k_0 l \int_0^L s_3 |W|^2 dx \\
&= k_0 \int_0^L s_3 \Phi_x \bar{W} dx + k_0 \int_0^L s_3 \Phi_x \bar{f}_5 dx - \underbrace{\frac{k k_0}{\rho_1} \int_0^L s_3' (\varphi_x + \psi + lw)_x \bar{w} dx}_{:=T_{46}} - \underbrace{\frac{k k_0}{\rho_1} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw)_x \bar{w}_x dx}_{:=T_{47}} \\
&\quad + \frac{k_0 k l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{w} dx - k_0 l \int_0^L s_3 f_6 \bar{w} dx - k_0 \int_0^L s_3' f_2 \bar{w} dx - k_0 \int_0^L s_3 f_2 \bar{w}_x dx \\
&\quad - k_0 l \int_0^L s_3 W \bar{f}_5 dx.
\end{aligned}$$

Dessa forma, integrando por partes os termos  $T_{46}$  e  $T_{47}$  e reagrupando os termos da igualdade encontrada, temos

$$\begin{aligned}
& k_0 l \int_0^L s_3 |W|^2 dx \\
&= k_0 \int_0^L s_3 \Phi_x \bar{W} dx + k_0 \int_0^L s_3 \Phi_x \bar{f}_5 dx + \frac{k k_0}{\rho_1} \int_0^L s_3'' (\varphi_x + \psi + lw) \bar{w} dx + 2 \frac{k k_0}{\rho_1} \int_0^L s_3' (\varphi_x + \psi + lw) \bar{w}_x dx \\
&\quad + \frac{k k_0}{\rho_1} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{w}_{xx} dx + \frac{k_0 k l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{w} dx - k_0 l \int_0^L s_3 f_6 \bar{w} dx \\
&\quad - k_0 \int_0^L s_3' f_2 \bar{w} dx - k_0 \int_0^L s_3 f_2 \bar{w}_x dx - k_0 l \int_0^L s_3 W \bar{f}_5 dx. \tag{3.116}
\end{aligned}$$

Sendo assim, somando e subtraindo o termo

$$\frac{k k_0}{\rho_1} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{l} \varphi_x dx,$$

em (3.116) e reorganizando os termos igualdade encontrada de maneira conveniente, concluímos

$$\begin{aligned}
& k_0 l \int_0^L s_3 |W|^2 dx \\
&= k_0 \int_0^L s_3 \Phi_x \bar{W} dx + k_0 \int_0^L s_3 \Phi_x \bar{f}_5 dx + \frac{k k_0}{\rho_1} \int_0^L s_3'' (\varphi_x + \psi + lw) \bar{w} dx + 2 \frac{k k_0}{\rho_1} \int_0^L s_3' (\varphi_x + \psi + lw) \bar{w}_x dx \\
&\quad + \underbrace{\frac{k k_0}{\rho_1} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) (\bar{w}_x - \bar{l} \varphi_x) dx}_{:=T_{48}} + \frac{k k_0}{\rho_1} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{l} \varphi_x dx \\
&\quad + \frac{k_0 k l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{w} dx - k_0 l \int_0^L s_3 f_6 \bar{w} dx - k_0 \int_0^L s_3' f_2 \bar{w} dx - k_0 \int_0^L s_3 f_2 \bar{w}_x dx \\
&\quad - k_0 l \int_0^L s_3 W \bar{f}_5 dx.
\end{aligned}$$

Além disso, segue de (3.90) que

$$(w_x - l\varphi)_x = \frac{1}{k_0} [i\beta\rho_1 W + kl(\varphi_x + \psi + lw) - \rho_1 f_6],$$

assim substituindo no termo  $T_{48}$  e reorganizando os termos da igualdade encontrada de forma adequada, obtemos

$$\begin{aligned} & k_0 l \int_0^L s_3 |W|^2 dx \\ &= k_0 \int_0^L s_3 \Phi_x \bar{W} dx + k_0 \int_0^L s_3 \Phi_x \bar{f}_5 dx + \frac{kk_0}{\rho_1} \int_0^L s_3'' (\varphi_x + \psi + lw) \bar{w} dx + 2 \frac{kk_0}{\rho_1} \int_0^L s_3' (\varphi_x + \psi + lw) \bar{w}_x dx \\ &\quad - i\beta k \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{W} dx + \frac{k^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx - k \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{f}_6 dx \\ &\quad + \frac{kk_0 l}{\rho_1} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\varphi}_x dx + \frac{k_0 k l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{w} dx - k_0 l \int_0^L s_3 f_6 \bar{w} dx \\ &\quad - k_0 \int_0^L s_3' f_2 \bar{w} dx - k_0 \int_0^L s_3 f_2 \bar{w}_x dx - k_0 l \int_0^L s_3 W \bar{f}_5 dx. \end{aligned} \quad (3.117)$$

Deste modo, somando (3.115) e (3.117), podemos concluir

$$\begin{aligned} & \frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3 |w_x - l\varphi|^2 dx + k_0 l \int_0^L s_3 |W|^2 dx \\ &= i\beta k_0 \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{W} dx - k_0 \int_0^L s_3 \Phi_x \bar{W} dx - k_0 \int_0^L s_3 f_{1,x} \bar{W} dx - k_0 \int_0^L s_3 \Psi \bar{W} dx \\ &\quad - k_0 \int_0^L s_3 f_3 \bar{W} dx - k_0 l \int_0^L s_3 f_5 \bar{W} dx + k_0 l \int_0^L s_3 W \bar{f}_5 dx - \frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3' w_x \bar{w} dx \\ &\quad + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3' \varphi \bar{w} dx + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3' w \bar{\varphi} dx + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3 w (\varphi_x + \psi + lw) dx \\ &\quad - \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3 w (\psi + lw) dx + \frac{k_0^2 l^3}{\rho_1} \int_0^L s_3 |\varphi|^2 dx - \frac{kl^2 k_0}{\rho_1} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{w} dx \\ &\quad + k_0 l \int_0^L s_3 f_6 \bar{w} dx + k_0 \int_0^L s_3 \Phi_x \bar{W} dx + k_0 \int_0^L s_3 \Phi_x \bar{f}_5 dx + \frac{kk_0}{\rho_1} \int_0^L s_3'' (\varphi_x + \psi + lw) \bar{w} dx \\ &\quad + 2 \frac{kk_0}{\rho_1} \int_0^L s_3' (\varphi_x + \psi + lw) \bar{w}_x dx - i\beta k \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{W} dx \\ &\quad + \frac{k^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx - k \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{f}_6 dx + \frac{kk_0 l}{\rho_1} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\varphi}_x dx \\ &\quad + \frac{k_0 k l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{w} dx - k_0 l \int_0^L s_3 f_6 \bar{w} dx - k_0 \int_0^L s_3' f_2 \bar{w} dx - k_0 \int_0^L s_3 f_2 \bar{w}_x dx \\ &\quad - k_0 l \int_0^L s_3 W \bar{f}_5 dx. \end{aligned}$$

Desta maneira, cancelando os termos  $T_{49}$ ,  $T_{50}$ ,  $T_{51}$  e  $T_{52}$ , podemos obter

$$\begin{aligned}
& \frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3 |w_x - l\varphi|^2 dx + k_0 l \int_0^L s_3 |W|^2 dx \\
&= (\beta k_0 - i\beta k) \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{W} dx - k_0 \int_0^L s_3 f_{1,x} \overline{W} dx - k_0 \int_0^L s_3 \Psi \overline{W} dx - k_0 \int_0^L s_3 f_3 \overline{W} dx \\
&\quad - k_0 l \int_0^L s_3 f_5 \overline{W} dx - \underbrace{\frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3' w_x \overline{w} dx}_{:=T_{53}} + \underbrace{\frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3' \varphi \overline{w} dx}_{:=T_{54}} + \underbrace{\frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3' w \overline{\varphi} dx}_{:=T_{55}} \\
&\quad + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3 w (\overline{\varphi_x + \psi + lw}) dx - \underbrace{\frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3 w (\overline{\psi + lw}) dx}_{:=T_{56}} + \underbrace{\frac{k_0^2 l^3}{\rho_1} \int_0^L s_3 |\varphi|^2 dx}_{:=T_{57}} + k_0 \int_0^L s_3 \Phi_x \overline{f_5} dx \\
&\quad + \frac{kk_0}{\rho_1} \int_0^L s_3'' (\varphi_x + \psi + lw) \overline{w} dx + 2 \frac{kk_0}{\rho_1} \int_0^L s_3' (\varphi_x + \psi + lw) \overline{w_x} dx + \frac{k^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \\
&\quad - k \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{f_6} dx + \frac{kk_0 l}{\rho_1} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{\varphi_x} dx - k_0 \int_0^L s_3' f_2 \overline{w} dx - k_0 \int_0^L s_3 f_2 \overline{w_x} dx.
\end{aligned}$$

Por meio de (3.85), (3.87) e (3.89), sabemos que

$$\varphi = \frac{\Phi}{i\beta} + \frac{f_1}{i\beta}, \quad \psi = \frac{\Psi}{i\beta} + \frac{f_3}{i\beta} \quad \text{e} \quad w = \frac{W}{i\beta} + \frac{f_5}{i\beta},$$

respectivamente, assim substituindo tais resultados na  $T_{53}$ ,  $T_{54}$ ,  $T_{55}$ ,  $T_{56}$  e  $T_{57}$ , concluímos

$$\begin{aligned}
& \frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3 |w_x - l\varphi|^2 dx + k_0 l \int_0^L s_3 |W|^2 dx \\
&= (\beta k_0 - i\beta k) \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{W} dx - k_0 \int_0^L s_3 f_{1,x} \overline{W} dx - k_0 \int_0^L s_3 \Psi \overline{W} dx \\
&\quad - k_0 \int_0^L s_3 f_3 \overline{W} dx - k_0 l \int_0^L s_3 f_5 \overline{W} dx + \frac{k_0^2 l}{\rho_1 i\beta} \int_0^L s_3' w_x \overline{W} dx + \frac{k_0^2 l}{\rho_1 i\beta} \int_0^L s_3' w_x \overline{f_5} dx \\
&\quad - \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 i\beta} \int_0^L s_3' \varphi \overline{W} dx - \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 i\beta} \int_0^L s_3' \varphi \overline{f_5} dx - \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 i\beta} \int_0^L s_3' w \overline{\Phi} dx - \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 i\beta} \int_0^L s_3' w \overline{f_1} dx \\
&\quad + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3 w (\overline{\varphi_x + \psi + lw}) dx + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 i\beta} \int_0^L s_3 w \overline{\Psi} dx + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 i\beta} \int_0^L s_3 w \overline{f_3} dx \\
&\quad - \frac{k_0^2 l^3}{\rho_1 |\beta|^2} \int_0^L s_3 |W|^2 dx - \frac{k_0^2 l^3}{\rho_1 |\beta|^2} \int_0^L s_3 |f_5|^2 dx + \frac{k_0^2 l^3}{\rho_1 |\beta|^2} \int_0^L s_3 |\Phi|^2 dx + \frac{k_0^2 l^3}{\rho_1 |\beta|^2} \int_0^L s_3 |f_1|^2 dx \\
&\quad + k_0 \int_0^L s_3 \Phi_x \overline{f_5} dx + \frac{kk_0}{\rho_1} \int_0^L s_3'' (\varphi_x + \psi + lw) \overline{w} dx + 2 \frac{kk_0}{\rho_1} \int_0^L s_3' (\varphi_x + \psi + lw) \overline{w_x} dx \\
&\quad + \frac{k^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx - k \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{f_6} dx + \frac{kk_0 l}{\rho_1} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{\varphi_x} dx \\
&\quad - k_0 \int_0^L s_3' f_2 \overline{w} dx - k_0 \int_0^L s_3 f_2 \overline{w_x} dx. \tag{3.118}
\end{aligned}$$

Deste modo, tomando o módulo e pela Desigualdade Triangular (**DT**), temos

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3 |w_x - l\varphi|^2 dx + k_0 l \int_0^L s_3 |W|^2 dx \right| \\
\stackrel{\text{DT}}{\leq} & \left| i\beta(k_0 - k) \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{W} dx \right| + \left| -k_0 \int_0^L s_3 f_{1,x} \overline{W} dx \right| + \left| -k_0 \int_0^L s_3 \Psi \overline{W} dx \right| \\
& + \left| -k_0 \int_0^L s_3 f_3 \overline{W} dx \right| + \left| -k_0 l \int_0^L s_3 f_5 \overline{W} dx \right| + \left| \frac{k_0^2 l}{\rho_1 i\beta} \int_0^L s'_3 w_x \overline{W} dx \right| + \left| \frac{k_0^2 l}{\rho_1 i\beta} \int_0^L s'_3 w_x \overline{f_5} dx \right| \\
& + \left| -\frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 i\beta} \int_0^L s'_3 \varphi \overline{W} dx \right| + \left| -\frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 i\beta} \int_0^L s'_3 \varphi \overline{f_5} dx \right| + \left| -\frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 i\beta} \int_0^L s'_3 w \overline{\Phi} dx \right| + \left| -\frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 i\beta} \int_0^L s'_3 w \overline{f_1} dx \right| \\
& + \left| \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_0^L s_3 w (\overline{\varphi_x + \psi + lw}) dx \right| + \left| \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 i\beta} \int_0^L s_3 w \overline{\Psi} dx \right| + \left| \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 i\beta} \int_0^L s_3 w \overline{f_3} dx \right| \\
& + \left| -\frac{k_0^2 l^3}{\rho_1 |\beta|^2} \int_0^L s_3 |W|^2 dx \right| + \left| -\frac{k_0^2 l^3}{\rho_1 |\beta|^2} \int_0^L s_3 |f_5|^2 dx \right| + \left| \frac{k_0^2 l^3}{\rho_1 |\beta|^2} \int_0^L s_3 |\Phi|^2 dx \right| + \left| \frac{k_0^2 l^3}{\rho_1 |\beta|^2} \int_0^L s_3 |f_1|^2 dx \right| \\
& + \left| k_0 \int_0^L s_3 \Phi_x \overline{f_5} dx \right| + \left| \frac{kk_0}{\rho_1} \int_0^L s_3'' (\varphi_x + \psi + lw) \overline{w} dx \right| + \left| 2 \frac{kk_0}{\rho_1} \int_0^L s'_3 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{w_x} dx \right| \\
& + \left| \frac{k^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right| + \left| -k \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{f_6} dx \right| \\
& + \left| \frac{kk_0 l}{\rho_1} \int_0^L s_3 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{\varphi_x} dx \right| + \left| -k_0 \int_0^L s'_3 f_2 \overline{w} dx \right| + \left| -k_0 \int_0^L s_3 f_2 \overline{w_x} dx \right|.
\end{aligned}$$

Como sabemos que  $\text{supp}_{s_3} \subset (L_0 - \frac{\delta}{3}, L_0 + \frac{\delta}{3})$ , obtemos

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3 |w_x - l\varphi|^2 dx + k_0 l \int_0^L s_3 |W|^2 dx \right| \\
\leq & |\beta| \chi \int_{L_0 - \frac{\delta}{3}}^{L_0 + \frac{\delta}{3}} |s_3| |\varphi_x + \psi + lw| |W| dx + k_0 \int_0^L |s_3| |f_{1,x}| |W| dx + k_0 \int_0^L |s_3| |\Psi| |W| dx \\
& + k_0 \int_0^L |s_3| |f_3| |W| dx + k_0 l \int_0^L |s_3| |f_5| |W| dx + \frac{k_0^2 l}{\rho_1 |\beta|} \int_0^L |s'_3| |w_x| |W| dx + \frac{k_0^2 l}{\rho_1 |\beta|} \int_0^L |s'_3| |w_x| |f_5| dx \\
& + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 |\beta|} \int_0^L |s'_3| |\varphi| |W| dx + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 |\beta|} \int_0^L |s'_3| |\varphi| |f_5| dx + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 |\beta|} \int_0^L |s'_3| |w| |\Phi| dx + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 |\beta|} \int_0^L |s'_3| |w| |f_1| dx \\
& + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \int_{L_0 - \frac{\delta}{3}}^{L_0 + \frac{\delta}{3}} |s_3| |w| |\varphi_x + \psi + lw| dx + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 |\beta|} \int_0^L |s_3| |w| |\Psi| dx + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 |\beta|} \int_0^L |s_3| |w| |f_3| dx \\
& + \frac{k_0^2 l^3}{\rho_1 |\beta|^2} \int_0^L |s_3| |W|^2 dx + \frac{k_0^2 l^3}{\rho_1 |\beta|^2} \int_0^L |s_3| |f_5|^2 dx + \frac{k_0^2 l^3}{\rho_1 |\beta|^2} \int_0^L |s_3| |\Phi|^2 dx + \frac{k_0^2 l^3}{\rho_1 |\beta|^2} \int_0^L |s_3| |f_1|^2 dx \\
& + k_0 \int_0^L |s_3| |\Phi_x| |f_5| dx + \frac{kk_0}{\rho_1} \int_{L_0 - \frac{\delta}{3}}^{L_0 + \frac{\delta}{3}} |s_3''| |\varphi_x + \psi + lw| |w| dx + 2 \frac{kk_0}{\rho_1} \int_{L_0 - \frac{\delta}{3}}^{L_0 + \frac{\delta}{3}} |s_3'| |\varphi_x + \psi + lw| |w_x| dx \\
& + \frac{k^2 l}{\rho_1} \int_{L_0 - \frac{\delta}{3}}^{L_0 + \frac{\delta}{3}} |s_3| |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx + k \int_0^L |s_3| |\varphi_x + \psi + lw| |f_6| dx \\
& + \frac{kk_0 l}{\rho_1} \int_{L_0 - \frac{\delta}{3}}^{L_0 + \frac{\delta}{3}} |s_3| |\varphi_x + \psi + lw| |\varphi_x| dx + k_0 \int_0^L |s_3'| |f_2| |w| dx + k_0 \int_0^L |s_3| |f_2| |w_x| dx.
\end{aligned}$$

Em consequência,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3 |w_x - l\varphi|^2 dx + k_0 l \int_0^L s_3 |W|^2 dx \right| \\
& \leq |\beta| \chi \|s_3\|_{C[0,L]} \int_{L_0 - \frac{\delta}{3}}^{L_0 + \frac{\delta}{3}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw| |W| dx + k_0 \int_0^L |s_3| |f_{1,x}| |W| dx + k_0 \int_0^L |s_3| |\Psi| |W| dx \\
& \quad + k_0 \int_0^L |s_3| |f_3| |W| dx + k_0 l \int_0^L |s_3| |f_5| |W| dx + \frac{k_0^2 l}{\rho_1 |\beta|} \int_0^L |s'_3| |w_x| |W| dx \\
& \quad + \frac{k_0^2 l}{\rho_1 |\beta|} \int_0^L |s'_3| |w_x| |f_5| dx + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 |\beta|} \int_0^L |s'_3| |\varphi| |W| dx + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 |\beta|} \int_0^L |s'_3| |\varphi| |f_5| dx \\
& \quad + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 |\beta|} \int_0^L |s'_3| |w| |\Phi| dx + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 |\beta|} \int_0^L |s'_3| |w| |f_1| dx + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \|s_3\|_{C[0,L]} \int_{L_0 - \frac{\delta}{3}}^{L_0 + \frac{\delta}{3}} s_2 |w| |\varphi_x + \psi + lw| dx \\
& \quad + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 |\beta|} \int_0^L |s_3| |w| |\Psi| dx + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 |\beta|} \int_0^L |s_3| |w| |f_3| dx + \frac{k_0^2 l^3}{\rho_1 |\beta|^2} \int_0^L |s_3| |W|^2 dx \\
& \quad + \frac{k_0^2 l^3}{\rho_1 |\beta|^2} \int_0^L |s_3| |f_5|^2 dx + \frac{k_0^2 l^3}{\rho_1 |\beta|^2} \int_0^L |s_3| |\Phi|^2 dx + \frac{k_0^2 l^3}{\rho_1 |\beta|^2} \int_0^L |s_3| |f_1|^2 dx + k_0 \int_0^L |s_3| |\Phi_x| |f_5| dx \\
& \quad + \frac{k k_0}{\rho_1} \|s_3''\|_{C[0,L]} \int_{L_0 - \frac{\delta}{3}}^{L_0 + \frac{\delta}{3}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw| |w| dx + 2 \frac{k k_0}{\rho_1} \|s_3'\|_{C[0,L]} \int_{L_0 - \frac{\delta}{3}}^{L_0 + \frac{\delta}{3}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw| |w_x| dx \\
& \quad + \frac{k^2 l}{\rho_1} \|s_3\|_{C[0,L]} \int_{L_0 - \frac{\delta}{3}}^{L_0 + \frac{\delta}{3}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx + k \int_0^L |s_3| |\varphi_x + \psi + lw| |f_6| dx \\
& \quad + \frac{k k_0 l}{\rho_1} \|s_3\|_{C[0,L]} \int_{L_0 - \frac{\delta}{3}}^{L_0 + \frac{\delta}{3}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw| |\varphi_x| dx + k_0 \int_0^L |s'_3| |f_2| |w| dx + k_0 \int_0^L |s_3| |f_2| |w_x| dx \\
& \leq |\beta| \chi \|s_3\|_{C[0,L]} \int_0^L \sqrt{s_2} |\varphi_x + \psi + lw| \sqrt{s_2} |W| dx + k_0 \int_0^L |s_3| |f_{1,x}| |W| dx + k_0 \int_0^L |s_3| |\Psi| |W| dx \\
& \quad + k_0 \int_0^L |s_3| |f_3| |W| dx + k_0 l \int_0^L |s_3| |f_5| |W| dx + \frac{k_0^2 l}{\rho_1 |\beta|} \int_0^L |s'_3| |w_x| |W| dx + \frac{k_0^2 l}{\rho_1 |\beta|} \int_0^L |s'_3| |w_x| |f_5| dx \\
& \quad + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 |\beta|} \int_0^L |s'_3| |\varphi| |W| dx + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 |\beta|} \int_0^L |s'_3| |\varphi| |f_5| dx + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 |\beta|} \int_0^L |s'_3| |w| |\Phi| dx + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 |\beta|} \int_0^L |s'_3| |w| |f_1| dx \\
& \quad + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} \|s_3\|_{C[0,L]} \int_0^L \sqrt{s_2} |w| \sqrt{s_2} |\varphi_x + \psi + lw| dx + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 |\beta|} \int_0^L |s_3| |w| |\Psi| dx \\
& \quad + \frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 |\beta|} \int_0^L |s_3| |w| |f_3| dx + \frac{k_0^2 l^3}{\rho_1 |\beta|^2} \int_0^L |s_3| |W|^2 dx + \frac{k_0^2 l^3}{\rho_1 |\beta|^2} \int_0^L |s_3| |f_5|^2 dx + \frac{k_0^2 l^3}{\rho_1 |\beta|^2} \int_0^L |s_3| |\Phi|^2 dx \\
& \quad + \frac{k_0^2 l^3}{\rho_1 |\beta|^2} \int_0^L |s_3| |f_1|^2 dx + k_0 \int_0^L |s_3| |\Phi_x| |f_5| dx + \frac{k k_0}{\rho_1} \|s_3''\|_{C[0,L]} \int_0^L \sqrt{s_2} |\varphi_x + \psi + lw| \sqrt{s_2} |w| dx \\
& \quad + 2 \frac{k k_0}{\rho_1} \|s_3'\|_{C[0,L]} \int_0^L \sqrt{s_2} |\varphi_x + \psi + lw| \sqrt{s_2} |w_x| dx + \frac{k^2 l}{\rho_1} \|s_3\|_{C[0,L]} \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \\
& \quad + k \int_0^L |s_3| |\varphi_x + \psi + lw| |f_6| dx + \frac{k k_0 l}{\rho_1} \|s_3\|_{C[0,L]} \int_0^L \sqrt{s_2} |\varphi_x + \psi + lw| \sqrt{s_2} |\varphi_x| dx \\
& \quad + k_0 \int_0^L |s'_3| |f_2| |w| dx + k_0 \int_0^L |s_3| |f_2| |w_x| dx.
\end{aligned}$$

Deste modo, usando a Desigualdade de Cauchy-Schwartz (**DCS**) e de Poincaré (**DP**), temos

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3 |w_x - l\varphi|^2 dx + k_0 l \int_0^L s_3 |W|^2 dx \right| \\
& \stackrel{\text{DCS}}{\leq} \underbrace{|\beta| \chi \|s_3\|_{C[0,L]} \left( \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|W\|_{L^2}}_{\leq C |\beta| \chi \left( \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}} + \underbrace{k_0 \|s_3\|_{C[0,L]} \|f_{1,x}\|_{L^2} \|W\|_{L^2}}_{\leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}} \\
& \stackrel{\text{DP}}{\leq} \underbrace{k_0 \|s_3\|_{C[0,L]} \|\Psi\|_{L^2} \|W\|_{L^2}}_{\leq C \|\Psi\|_{L^2} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}} + \underbrace{k_0 C_p \|s_3\|_{C[0,L]} \|f_{3,x}\|_{L^2} \|W\|_{L^2}}_{\leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}} + \underbrace{k_0 l C_p \|s_3\|_{C[0,L]} \|f_{5,x}\|_{L^2} \|W\|_{L^2}}_{\leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}} \\
& + \underbrace{\frac{k_0^2 l}{\rho_1 |\beta|} \|s'_3\|_{C[0,L]} \|w_x\|_{L^2} \|W\|_{L^2}}_{\leq \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2} + \underbrace{\frac{k_0^2 l}{\rho_1 |\beta|} C_p \|s'_3\|_{C[0,L]} \|w_x\|_{L^2} \|f_{5,x}\|_{L^2}}_{\leq \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}} + \underbrace{\frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 |\beta|} C_p \|s'_3\|_{C[0,L]} \|\varphi_x\|_{L^2} \|W\|_{L^2}}_{\leq \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2} \\
& + \underbrace{\frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 |\beta|} C_p \|s'_3\|_{C[0,L]} \|\varphi_x\|_{L^2} \|f_{5,x}\|_{L^2}}_{\leq \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}} + \underbrace{\frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 |\beta|} C_p \|s'_3\|_{C[0,L]} \|w_x\|_{L^2} \|\Phi\|_{L^2}}_{\leq \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2} \\
& + \underbrace{\frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 |\beta|} C_p \|s'_3\|_{C[0,L]} \|w_x\|_{L^2} \|f_{1,x}\|_{L^2}}_{\leq \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}} + \underbrace{\frac{k_0^2 l^2}{\rho_1} C_p \|s_3\|_{C[0,L]} \|w_x\|_{L^2} \left( \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}}_{\leq C \left( \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}} \\
& + \underbrace{\frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 |\beta|} C_p \|s_3\|_{C[0,L]} \|w_x\|_{L^2} \|\Psi\|_{L^2}}_{\leq \frac{C}{|\beta|} \|\Psi\|_{L^2} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}} + \underbrace{\frac{k_0^2 l^2}{\rho_1 |\beta|} C_p \|s_3\|_{C[0,L]} \|w_x\|_{L^2} \|f_{3,x}\|_{L^2}}_{\leq \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}} + \underbrace{\frac{k_0^2 l^3}{\rho_1 |\beta|^2} \int_0^L s_3 |W|^2 dx}_{\leq \frac{C}{|\beta|^2} \int_0^L s_3 |W|^2 dx} \\
& + \underbrace{\frac{k_0^2 l^3}{\rho_1 |\beta|^2} C_p \|s_3\|_{C[0,L]} \|f_{5,x}\|_{L^2}^2}_{\leq \frac{C}{|\beta|^2} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2} + \underbrace{\frac{k_0^2 l^3}{\rho_1 |\beta|^2} \int_0^L s_3 |\Phi|^2 dx}_{\leq \frac{C}{|\beta|^2} \int_0^L s_3 |\Phi|^2 dx} + \underbrace{\frac{k_0^2 l^3}{\rho_1 |\beta|^2} C_p \|s_3\|_{C[0,L]} \|f_{1,x}\|_{L^2}^2}_{\leq \frac{C}{|\beta|^2} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2} \\
& + \underbrace{k_0 C_p \|s_3\|_{C[0,L]} \|\Phi\|_{L^2} \|f_{5,x}\|_{L^2}}_{\leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}} + \underbrace{\frac{k k_0}{\rho_1} C_p \|s'_3\|_{C[0,L]} \left( \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|w_x\|_{L^2}}_{\leq C \left( \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}} \\
& + \underbrace{2 \frac{k k_0}{\rho_1} \|s'_3\|_{C[0,L]} \left( \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|w_x\|_{L^2}}_{\leq C \left( \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}} + \underbrace{\frac{k^2 l}{\rho_1} \|s_3\|_{C[0,L]} \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx}_{\leq C \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx} \\
& + \underbrace{k C_p \|s_3\|_{C[0,L]} \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2} \|f_{6,x}\|_{L^2}}_{\leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}} + \underbrace{\frac{k k_0 l}{\rho_1} \|s_3\|_{C[0,L]} \left( \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\varphi_x\|_{L^2}}_{\leq C \left( \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}} \\
& + \underbrace{k_0 C_p \|s'_3\|_{C[0,L]} \|f_2\|_{L^2} \|w_x\|_{L^2}}_{\leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}} + \underbrace{k_0 \|s_3\|_{C[0,L]} \|f_2\|_{L^2} \|w_x\|_{L^2}}_{\leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& \frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3 |w_x - l\varphi|^2 dx + k_0 l \int_0^L s_3 |W|^2 dx \\
& \leq C |\beta| \chi \left( \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + C \|\Psi\|_{L^2} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 \\
& \quad + C \left( \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|^2} \int_0^L s_3 |W|^2 dx + \frac{C}{|\beta|^2} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|^2} \int_0^L s_3 |\Phi|^2 dx \\
& \quad + C \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx. \tag{3.119}
\end{aligned}$$

Assim, reorganizando os termos de (3.119), podemos obter

$$\begin{aligned}
& \frac{k_0^2 l}{\rho_1} \int_0^L s_3 |w_x - l\varphi|^2 dx + \left( k_0 l - \frac{C}{|\beta|^2} \right) \int_0^L s_3 |W|^2 dx \\
& \leq C |\beta| \chi \left( \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + C \|\Psi\|_{L^2} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 \\
& \quad + C \left( \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|^2} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|^2} \int_0^L s_3 |\Phi|^2 dx \\
& \quad + C \int_0^L s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx.
\end{aligned}$$

Como sabemos que  $\text{supp } s_2 \subset (L_0 + \frac{\delta}{2}, L_0 + \frac{\delta}{2})$  e  $\text{supp } s_3 \subset (L_0 - \frac{\delta}{3}, L_0 + \frac{\delta}{3})$ , podemos concluir que a Desigualdade (3.111) é válida.  $\square$

**Corolário 3.18.** *Sejam  $\mathbf{F} \in \mathcal{H}$  e  $\mathbf{U} \in D(\mathcal{A})$ , sendo  $\mathbf{U}$  a solução do sistema (3.85)-(3.90), então existe uma constante positiva  $C$ , tal que*

$$\begin{aligned}
& \int_{L_0 - \frac{\delta}{4}}^{L_0 + \frac{\delta}{4}} s_3 |w_x - l\varphi|^2 dx + \int_{L_0 - \frac{\delta}{4}}^{L_0 + \frac{\delta}{4}} s_3 |W|^2 dx \\
& \leq C |\beta| \chi \left( \int_{L_0 - \frac{\delta}{2}}^{L_0 + \frac{\delta}{2}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + C \|\Psi\|_{L^2} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 \\
& \quad + C \left( \int_{L_0 - \frac{\delta}{2}}^{L_0 + \frac{\delta}{2}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|^2} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|^2} \int_{L_0 - \frac{\delta}{3}}^{L_0 + \frac{\delta}{3}} s_3 |\Phi|^2 dx \\
& \quad + C \int_{L_0 - \frac{\delta}{2}}^{L_0 + \frac{\delta}{2}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx,
\end{aligned}$$

no qual  $|\beta| \geq \beta_0 > 1$ .

**Demonstração.** O resultado é uma consequência imediata do Lema 3.17.  $\square$

**Notação.** Para os resultados a seguir usaremos

$$\int_{L_0-\frac{\delta}{4}}^{L_0+\frac{\delta}{4}} E_{\mathbf{U}}(x) dx = \int_{L_0-\frac{\delta}{4}}^{L_0+\frac{\delta}{4}} (|\Phi|^2 + |\Psi|^2 + |W|^2 + |\psi_x|^2 + |\varphi_x + \psi + lw|^2 + |w_x - l\varphi|^2) dx.$$

**Corolário 3.19.** Sejam  $\mathbf{F} \in \mathcal{H}$  e  $\mathbf{U} \in D(\mathcal{A})$ , sendo  $\mathbf{U}$  a solução do sistema (3.85)-(3.90). Se  $\chi = \chi_0 = 0$  então, para todo  $\varepsilon > 0$  existe uma constante positiva  $C_\varepsilon$ , tal que

$$\int_{L_0-\frac{\delta}{4}}^{L_0+\frac{\delta}{4}} E_{\mathbf{U}}(x) dx \leq \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2, \quad (3.120)$$

no qual  $|\beta| \geq \beta_0 > 1$ .

**Demonstração.** Seja  $\varepsilon > 0$  arbitrário. Suponha que  $\chi = \chi_0 = 0$ , e ainda utilizando as propriedades das funções  $s_1, s_2$  e  $s_3$ , devemos analisar

(I) Substituindo o Lema 3.13 no Corolário 3.16, usando o fato de  $\chi_0 = 0$  e utilizando a Desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$  na desigualdade encontrada, existe uma constante positiva  $C_\varepsilon$ , tal que

$$\int_{L_0-\frac{\delta}{4}}^{L_0+\frac{\delta}{4}} s_3 |\Phi|^2 dx \leq \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \underbrace{C_\varepsilon \int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx}_{:=T_{58}} + \underbrace{C_\varepsilon \|\Psi\|_{L^2}^2}_{:=T_{59}} + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Assim, substituindo o Lema 3.13, usando o fato de  $\chi_0 = 0$  no termo  $T_{58}$ , substituindo o Lema 3.9 no termo  $T_{59}$  e utilizando a Desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$  na desigualdade encontrada, existe uma constante positiva  $C_\varepsilon$ , tal que

$$\int_{L_0-\frac{\delta}{4}}^{L_0+\frac{\delta}{4}} s_3 |\Phi|^2 dx \leq \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \underbrace{C_\varepsilon \|\Psi\|_{L^2}^2}_{:=T_{60}} + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Deste modo, substituindo o Lema 3.9 no termo  $T_{60}$  e usando a Desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$  na desigualdade encontrada, existe uma constante positiva  $C_\varepsilon$ , tal que

$$\int_{L_0-\frac{\delta}{4}}^{L_0+\frac{\delta}{4}} s_3 |\Phi|^2 dx \leq \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2.$$

(II) Do mesmo modo, usando no Corolário 3.10 a Desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$ , existe uma constante positiva  $C_\varepsilon$ , tal que

$$\int_{L_0-\frac{\delta}{4}}^{L_0+\frac{\delta}{4}} |\Psi|^2 dx \leq \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2.$$

(III) Da mesma maneira, utilizando a Desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$  no Corolário 3.12,

existe uma constante positiva  $C_\varepsilon$ , tal que

$$\int_{L_0-\frac{\delta}{4}}^{L_0+\frac{\delta}{4}} s_1 |\psi_x|^2 dx \leq \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \underbrace{C_\varepsilon \|\Psi\|_{L^2}^2}_{:=T_{61}}.$$

Além disso, substituindo o Lema 3.9 no termo  $T_{61}$  e utilizando a Desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$  na desigualdade encontrada, existe uma constante positiva  $C_\varepsilon$ , tal que

$$\int_{L_0-\frac{\delta}{4}}^{L_0+\frac{\delta}{4}} s_1 |\psi_x|^2 dx \leq \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2.$$

(IV) De modo igual, usando a Desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$  no Corolário 3.14, e o fato de  $\chi_0 = 0$ , existe uma constante positiva  $C_\varepsilon$ , tal que

$$\int_{L_0-\frac{\delta}{4}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \leq \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \underbrace{C_\varepsilon \|\Psi\|_{L^2}^2}_{:=T_{62}}.$$

Além disso, substituindo o Lema 3.9 no termo  $T_{62}$  e usando a Desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$  na desigualdade encontrada, existe uma constante positiva  $C_\varepsilon$ , tal que

$$\int_{L_0-\frac{\delta}{4}}^{L_0+\frac{\delta}{4}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \leq \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2.$$

(V) Finalmente, usando o fato de  $\chi = \chi_0 = 0$ , substituindo o Lema 3.15 e o Lema 3.13 no Corolário 3.18, podemos concluir

$$\begin{aligned} & \int_{L_0-\frac{\delta}{4}}^{L_0+\frac{\delta}{4}} s_3 |w_x - l\varphi|^2 dx + \int_{L_0-\frac{\delta}{4}}^{L_0+\frac{\delta}{4}} s_3 |W|^2 dx \\ & \leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + C \|\Psi\|_{L^2} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C \left( \int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \\ & \quad + \frac{C}{|\beta|^2} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + C \underbrace{\int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx}_{:=T_{63}}. \end{aligned}$$

Dessa maneira, substituindo o Lema 3.13 no termo  $T_{63}$ , usando o fato de  $\chi_0 = 0$  e utilizando a Desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$  na desigualdade encontrada, existe uma constante positiva  $C_\varepsilon$ , tal que

$$\begin{aligned} & \int_{L_0-\frac{\delta}{4}}^{L_0+\frac{\delta}{4}} s_3 |w_x - l\varphi|^2 dx + \int_{L_0-\frac{\delta}{4}}^{L_0+\frac{\delta}{4}} s_3 |W|^2 dx \\ & \leq \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \underbrace{C \|\Psi\|_{L^2}^2}_{:=T_{64}} + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C \underbrace{\int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx}_{:=T_{65}}. \end{aligned}$$

Deste modo, substituindo o Lema 3.9 e o Lema 3.13 nos termos  $T_{64}$  e  $T_{65}$ , respectivamente, usando o fato  $\chi_0 = 0$  e utilizando a Desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$  na desigualdade encontrada, existe uma constante positiva  $C_\varepsilon$ , tal que

$$\int_{L_0 - \frac{\delta}{4}}^{L_0 + \frac{\delta}{4}} s_3 |w_x - l\varphi|^2 dx + \int_{L_0 - \frac{\delta}{4}}^{L_0 + \frac{\delta}{4}} s_3 |W|^2 dx \leq \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + \underbrace{C \|\Psi\|_{L^2}^2}_{:=T_{66}}.$$

Dessa forma, substituindo o Lema 3.9 no termo  $T_{66}$ , usando a Desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$  na desigualdade encontrada, existe uma constante positiva  $C_\varepsilon$ , tal que

$$\int_{L_0 - \frac{\delta}{4}}^{L_0 + \frac{\delta}{4}} s_3 |w_x - l\varphi|^2 dx + \int_{L_0 - \frac{\delta}{4}}^{L_0 + \frac{\delta}{4}} s_3 |W|^2 dx \leq \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Por (I), (II), (III), (IV) e (V), temos que a Desigualdade (3.120) é válida.  $\square$

**Corolário 3.20.** *Sejam  $\mathbf{F} \in \mathcal{H}$  e  $\mathbf{U} \in D(\mathcal{A})$ , sendo  $\mathbf{U}$  a solução do sistema (3.85)-(3.90). Se  $\chi = 0$  e  $\chi_0 \neq 0$ , então para todo  $\varepsilon > 0$ , existe uma constante positiva  $C_\varepsilon$ , tal que*

$$\int_{L_0 - \frac{\delta}{4}}^{L_0 + \frac{\delta}{4}} E_{\mathbf{U}}(x) dx \leq \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon |\beta|^4 \chi_0^4 \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2, \quad (3.121)$$

no qual  $|\beta| \geq \beta_0 > 1$ .

**Demonstração.** Seja  $\varepsilon > 0$  arbitrário. Suponhamos que  $\chi = 0$  e  $\chi_0 \neq 0$ , observe que pelo Corolário 3.19, resta apenas estimar o termo em que  $\chi_0 \neq 0$ , ou seja, o termo

$$C|\beta|^2 \chi_0^2 \|\Psi\|_{L^2}^2. \quad (3.122)$$

Deste modo, substituindo o Lema 3.9 e utilizando a Desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$ , existe uma constante positiva  $C_\varepsilon$ , tal que

$$C|\beta|^2 \chi_0^2 \|\Psi\|_{L^2}^2 \leq \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon |\beta|^4 \chi_0^4 \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Logo, a Desigualdade (3.121) é válida.  $\square$

**Corolário 3.21.** *Sejam  $\mathbf{F} \in \mathcal{H}$  e  $\mathbf{U} \in D(\mathcal{A})$ , sendo  $\mathbf{U}$  a solução do sistema (3.85)-(3.90). Se  $\chi \neq 0$  e  $\chi_0 = 0$ , então para todo  $\varepsilon > 0$ , existe uma constante positiva  $C_\varepsilon$ , tal que*

$$\int_{L_0 - \frac{\delta}{4}}^{L_0 + \frac{\delta}{4}} E_{\mathbf{U}}(x) dx \leq \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon |\beta|^8 \chi^8 \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2, \quad (3.123)$$

no qual  $|\beta| \geq \beta_0 > 1$ .

**Demonstração.** Seja  $\varepsilon > 0$  arbitrário. Suponhamos que  $\chi \neq 0$  e  $\chi_0 = 0$ , observe que pelo

Corolário 3.19, resta apenas estimar o termo em que  $\chi \neq 0$ , ou seja, o seguinte termo

$$C|\beta|\chi \left( \int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}.$$

Para isso, usaremos as propriedades da função  $s_2$ . Deste modo, utilizando a Desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$ , existe uma constante positiva  $C_\varepsilon$ , tal que

$$C|\beta|\chi \left( \int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \leq \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + \underbrace{C_\varepsilon |\beta|^2 \chi^2 \int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx}_{:=T_{67}}.$$

Além disso, substituindo o Lema 3.13 no termo  $T_{67}$ , usando o fato de  $\chi_0 = 0$  e utilizando a Desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$  na desigualdade encontrada, existe uma constante positiva  $C_\varepsilon$ , tal que

$$C|\beta|\chi \left( \int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \leq \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C|\beta|^4 \chi^4 \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \underbrace{C_\varepsilon |\beta|^4 \chi^4 \|\Psi\|_{L^2}^2}_{:=T_{68}}.$$

Sendo assim, substituindo o Lema 3.9 no termo  $T_{68}$  e usando a Desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$  na desigualdade encontrada, existe uma constante positiva  $C_\varepsilon$ , tal que

$$\begin{aligned} C|\beta|\chi \left( \int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} &\leq \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C|\beta|^4 \chi^4 \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon |\beta|^8 \chi^8 \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &\leq \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon |\beta|^8 \chi^8 \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Logo, a Desigualdade (3.123) é verdadeira.  $\square$

**Corolário 3.22.** *Sejam  $\mathbf{F} \in \mathcal{H}$  e  $\mathbf{U} \in D(\mathcal{A})$ , sendo  $\mathbf{U}$  a solução do sistema (3.85)-(3.90). Se  $\chi \neq \chi_0 \neq 0$ , então para todo  $\varepsilon > 0$ , existe uma constante positiva  $C_\varepsilon$ , tal que*

$$\int_{L_0-\frac{\delta}{4}}^{L_0+\frac{\delta}{4}} E_{\mathbf{U}}(x) dx \leq \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon |\beta|^8 \chi^8 \chi_0^8 \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2, \quad (3.124)$$

no qual  $|\beta| \geq \beta_0 > 1$ .

**Demonstração.** Seja  $\varepsilon > 0$  arbitrário. Suponha que  $\chi \neq \chi_0 \neq 0$ , observe que pelo Corolário 3.19, a estimativa do termo em que  $\chi_0 \neq 0$  no Corolário 3.20, resta apenas mostrar o termo

$$C|\beta|\chi \left( \int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.125)$$

Para isso, usaremos as propriedades da função  $s_2$ .

Desta maneira, usando a Desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$ , em (3.125), existe uma constante positiva  $C_\varepsilon$ , tal que

$$C|\beta|\chi \left( \int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \leq \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + \underbrace{C_\varepsilon |\beta|^2 \chi^2 \int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx}_{:=T_{69}}.$$

Além disso, substituindo o Lema 3.13 no termo  $T_{69}$ , obtemos

$$C|\beta|\chi \left( \int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \leq \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + \underbrace{C|\beta|^4 \chi^2 \chi_0^2 \|\Psi\|_{L^2}^2}_{:=T_{70}} + C|\beta|^2 \chi^2 \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + C|\beta|^2 \chi^2 \|\Psi\|_{L^2} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}.$$

Assim, substituindo o Lema 3.9 no termo  $T_{70}$  e usando a Desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$  na desigualdade encontrada, existe uma constante positiva  $C_\varepsilon$ , tal que

$$C|\beta|\chi \left( \int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \leq \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon |\beta|^8 \chi^8 \chi_0^8 \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon |\beta|^4 \chi^4 \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \underbrace{C_\varepsilon |\beta|^4 \chi^4 \|\Psi\|_{L^2}^2}_{:=T_{71}}.$$

Deste modo, substituindo o Lema 3.9 no termo  $T_{71}$  e usando a Desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$  na desigualdade encontrada, existe uma constante positiva  $C_\varepsilon$ , tal que

$$C|\beta|\chi \left( \int_{L_0-\frac{\delta}{2}}^{L_0+\frac{\delta}{2}} s_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \leq \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon |\beta|^8 \chi^8 \chi_0^8 \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon |\beta|^4 \chi^4 \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon |\beta|^8 \chi^8 \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon |\beta|^8 \chi^8 \chi_0^8 \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Logo, vale a Desigualdade (3.124).  $\square$

Motivados pelos Corolários 3.19, 3.20, 3.21 e 3.22, apresentaremos o próximo resultado.

**Teorema 3.23.** *Sejam  $\mathbf{F} \in \mathcal{H}$  e  $\mathbf{U} \in D(\mathcal{A})$ , sendo  $\mathbf{U}$  a solução do sistema (3.85)-(3.90), então para todo  $\varepsilon > 0$ , existe uma constante positiva  $C_\varepsilon$ , tal que*

$$\int_{L_0-\frac{\delta}{4}}^{L_0+\frac{\delta}{4}} E_{\mathbf{U}}(x) dx \leq \begin{cases} \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2, & \text{se } \chi = \chi_0 = 0, \quad (3.126a) \\ \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon |\beta|^4 \chi_0^4 \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2, & \text{se } \chi = 0 \text{ e } \chi_0 \neq 0, \quad (3.126b) \\ \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon |\beta|^8 \chi^8 \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2, & \text{se } \chi \neq 0 \text{ e } \chi_0 = 0, \quad (3.126c) \\ \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon |\beta|^8 \chi^8 \chi_0^8 \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2, & \text{se } \chi \neq 0 \text{ e } \chi_0 \neq 0, \quad (3.126d) \end{cases}$$

no qual  $|\beta| \geq \beta_0 > 1$ .

**Demonstração.** A demonstração é uma consequência imediata dos corolários 3.19, 3.20, 3.21 e 3.22.  $\square$

### 3.3.2 Desigualdade de Observabilidade

O objetivo dessa seção é apresentar duas desigualdades, nos quais são denominadas "Desigualdade de Observabilidade". A demonstração desse resultado é inspirado na demonstração do Lema 3.2 encontrado na referência [20].

**Notação.** Sejam  $a_1$  e  $a_2$  tais que  $0 \leq a_1 < a_2 \leq L$  e além disso, para  $j = 1, 2$ , vamos considerar a seguinte notação

$$E_{\mathbf{U}}(a_j) = |\Psi(a_j)|^2 + |\psi_x(a_j)|^2 + |(\varphi_x + \psi + lw)(a_j)|^2 + |\Phi(a_j)|^2 + |(w_x - l\varphi)(a_j)|^2 + |W(a_j)|^2.$$

Mediante os resultados anteriores provaremos o próximo teorema que será fundamental para obtermos a prova dos resultados principais desse trabalho, pois uma vez que foram obtidas as estimativas locais, podemos utilizar o Teorema da Desigualdade de Observabilidade, para estender essas estimativas para todo o intervalo  $(0, L)$ .

**Teorema 3.24. (Desigualdade de Observabilidade).** *Seja  $\mathbf{U} = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)^\top$  uma solução regular de (3.85)-(3.90) e sejam  $0 \leq a_1 < a_2 \leq L$  quaisquer. Então, existe uma constantes positivas  $C_1$  e  $C_2$  tal que, para  $j = 1, 2$ ,*

$$E_{\mathbf{U}}(a_j) \leq C_1 \int_{a_1}^{a_2} E_{\mathbf{U}}(x) dx + \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2, \quad (3.127)$$

$$\int_{a_1}^{a_2} E_{\mathbf{U}}(x) dx \leq C_2 E_{\mathbf{U}}(a_j) + \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (3.128)$$

**Demonstração.** Considere uma função fixada  $r_1 \in C^1[a_1, a_2]$ . Além disso, multiplicando (3.88) por  $br_1\bar{\psi}_x$  e integrando no intervalo  $(a_1, a_2)$ , obtemos

$$\underbrace{i\beta\rho_2b \int_{a_1}^{a_2} r_1 \Psi \bar{\psi}_x dx}_{:=T_{72}} - \underbrace{b^2 \int_{a_1}^{a_2} r_1 \psi_{xx} \bar{\psi}_x dx}_{:=T_{73}} + \underbrace{kb \int_{a_1}^{a_2} r_1 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\psi}_x dx}_{:=T_{74}} + \gamma b \int_{a_1}^{a_2} r_1 \Psi \bar{\psi}_x dx = \rho_2 b \int_{a_1}^{a_2} r_1 f_4 \bar{\psi}_x dx. \quad (3.129)$$

Agora, vamos analisar separadamente cada termo destacado

#### (I) Termo $T_{72}$ .

Deste modo, tomando a parte real do termo  $T_{72}$ , além disso derivando (3.87) em relação a variável  $x$ , temos

$$\psi_x = \frac{\Psi_x}{i\beta} + \frac{f_{3,x}}{i\beta},$$

e usando o Lema 2.40, podemos obter

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} T_{72} &= \operatorname{Re} \left\{ i\beta \rho_2 b \int_{a_1}^{a_2} r_1 \Psi \overline{\psi_x} dx \right\} \\
&= \operatorname{Re} \left\{ i\beta \rho_2 b \int_{a_1}^{a_2} r_1 \Psi \left( \frac{\Psi_x}{i\beta} + \frac{f_{3,x}}{i\beta} \right) dx \right\} \\
&= -\operatorname{Re} \left\{ \rho_2 b \int_{a_1}^{a_2} r_1 \Psi \overline{\Psi_x} dx + \rho_2 b \int_{a_1}^{a_2} r_1 \Psi \overline{f_{3,x}} dx \right\} \\
&= -\frac{1}{2} \rho_2 b r_1 |\Psi|^2 \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2} \rho_2 b \int_{a_1}^{a_2} r_1' |\Psi|^2 dx - \operatorname{Re} \left\{ \rho_2 b \int_{a_1}^{a_2} r_1 \Psi \overline{f_{3,x}} dx \right\}. \quad (3.130)
\end{aligned}$$

**(II) Termo  $T_{73}$ .**

Sendo assim, considerando a parte real do termo  $T_{73}$  e utilizando o Lema 2.40, obtemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} T_{73} &= -\operatorname{Re} \left\{ b^2 \int_{a_1}^{a_2} r_1 \psi_{xx} \overline{\psi_x} dx \right\} \\
&= -\frac{1}{2} b^2 r_1 |\psi_x|^2 \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2} b^2 \int_{a_1}^{a_2} r_1' |\psi_x|^2 dx. \quad (3.131)
\end{aligned}$$

**(III) Termo  $T_{74}$ .**

Assim, utilizando integração por partes, podemos concluir

$$\begin{aligned}
T_{74} &= kbr_1 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{\psi} \Big|_{a_1}^{a_2} - \underbrace{kb \int_{a_1}^{a_2} r_1' (\varphi_x + \psi + lw) \overline{\psi} dx}_{:=T_{74.1}} \\
&\quad - \underbrace{kb \int_{a_1}^{a_2} r_1 (\varphi_x + \psi + lw)_x \overline{\psi} dx}_{:=T_{74.2}}. \quad (3.132)
\end{aligned}$$

Observando separadamente os termos

**(i) Termo  $T_{74.1}$ .**

Dessa forma, sabemos por meio de (3.87) que

$$\psi = \frac{\Psi}{i\beta} + \frac{f_3}{i\beta},$$

então substituindo no termo  $T_{74.1}$ , reorganizando de maneira adequada a igualdade encontrada e tomando a parte real de tal igualdade, obtemos

$$\operatorname{Re} T_{74.1} = \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\beta} kb \int_{a_1}^{a_2} r_1' (\varphi_x + \psi + lw) \overline{\Psi} dx + \frac{1}{\beta} kb \int_{a_1}^{a_2} r_1' (\varphi_x + \psi + lw) \overline{f_3} dx \right\}. \quad (3.133)$$

**(ii) Termo  $T_{74.2}$ .**

Desta maneira, segue de (3.86) e (3.88) que

$$-(\varphi_x + \psi + lw)_x = \frac{1}{k} [\rho_1 f_2 - i\beta \rho_1 \Phi + k_0 l (w_x - l\varphi)] \quad \text{e} \quad \psi = \frac{\Psi}{i\beta} + \frac{f_3}{i\beta},$$

respectivamente, assim substituindo tais resultados no termo  $T_{74.2}$ , reorganizando de maneira conveniente a igualdade encontrada e tomando a parte real de tal igualdade, segue que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} T_{74.2} = & \operatorname{Re} \left\{ \rho_1 b \int_{a_1}^{a_2} r_1 f_2 \bar{\psi} dx + \rho_1 b \int_{a_1}^{a_2} r_1 \Phi \bar{\Psi} dx + \rho_1 b \int_{a_1}^{a_2} r_1 \Phi \bar{f}_3 dx \right\} \\ & - \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\beta} k_0 l b \int_{a_1}^{a_2} r_1 (w_x - l\varphi) \bar{\Psi} dx + \frac{1}{\beta} k_0 l b \int_{a_1}^{a_2} r_1 (w_x - l\varphi) \bar{f}_3 dx \right\}. \end{aligned} \quad (3.134)$$

Deste modo, tomando a parte real de (3.132), obtemos

$$\operatorname{Re} T_{74} = \operatorname{Re} \left\{ k b r_1 (\varphi_x + \psi + l w) \bar{\psi} \Big|_{a_1}^{a_2} \right\} + \operatorname{Re} T_{74.1} + \operatorname{Re} T_{74.2}. \quad (3.135)$$

Assim, substituindo (3.133) e (3.134) em (3.135), podemos obter

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} T_{74} = & \operatorname{Re} \left\{ k b r_1 (\varphi_x + \psi + l w) \bar{\psi} \Big|_{a_1}^{a_2} \right\} + \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\beta} b k \int_{a_1}^{a_2} r_1' (\varphi_x + \psi + l w) \bar{\Psi} dx \right\} \\ & + \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\beta} b k \int_{a_1}^{a_2} r_1' (\varphi_x + \psi + l w) \bar{f}_3 dx \right\} + \operatorname{Re} \left\{ \rho_1 b \int_{a_1}^{a_2} r_1 f_2 \bar{\psi} dx \right\} \\ & + \operatorname{Re} \left\{ \rho_1 b \int_{a_1}^{a_2} r_1 \Phi \bar{\Psi} dx + \rho_1 b \int_{a_1}^{a_2} r_1 \Phi \bar{f}_3 dx \right\} - \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\beta} k_0 l b \int_{a_1}^{a_2} r_1 (w_x - l\varphi) \bar{\Psi} dx \right\} \\ & - \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\beta} k_0 l b \int_{a_1}^{a_2} r_1 (w_x - l\varphi) \bar{f}_3 dx \right\}. \end{aligned} \quad (3.136)$$

Então, tomando a parte real de (3.129), em seguida substituindo (3.130), (3.131), (3.136), reagrupando e reorganizando os termos da igualdade encontrada de forma apropriada, temos

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} (\rho_2 b r_1 |\Psi|^2 + b^2 r_1 |\psi_x|^2) \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} (\rho_2 b r_1' |\Psi|^2 + b^2 r_1' |\psi_x|^2) dx \\ = & \operatorname{Re} \left\{ \rho_2 b \int_{a_1}^{a_2} r_1 \overline{\Psi f_{3,x}} dx - k b r_1 (\varphi_x + \psi + l w) \bar{\psi} \Big|_{a_1}^{a_2} \right\} - \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\beta} b k \int_{a_1}^{a_2} r_1' (\varphi_x + \psi + l w) \bar{\Psi} dx \right\} \\ & - \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\beta} b k \int_{a_1}^{a_2} r_1' (\varphi_x + \psi + l w) \bar{f}_3 dx \right\} - \operatorname{Re} \left\{ \rho_1 b \int_{a_1}^{a_2} r_1 f_2 \bar{\psi} dx + \rho_1 b \int_{a_1}^{a_2} r_1 \Phi \bar{\Psi} dx \right\} \\ & - \operatorname{Re} \left\{ \rho_1 b \int_{a_1}^{a_2} r_1 \Phi \bar{f}_3 dx \right\} + \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\beta} k_0 l b \int_{a_1}^{a_2} r_1 (w_x - l\varphi) \bar{\Psi} dx + \frac{1}{\beta} k_0 l b \int_{a_1}^{a_2} r_1 (w_x - l\varphi) \bar{f}_3 dx \right\} \\ & - \operatorname{Re} \left\{ \gamma b \int_{a_1}^{a_2} r_1 \Psi \bar{\psi}_x dx - \rho_2 b \int_{a_1}^{a_2} r_1 f_4 \bar{\psi}_x dx \right\}. \end{aligned} \quad (3.137)$$

Agora, considere uma outra função fixada  $r_2 \in C^1[a_1, a_2]$ . Além disso, multiplicando (3.86) por  $k r_2 \overline{(\varphi_x + \psi + l w)}$  e integrando sobre o intervalo  $(a_1, a_2)$ , podemos obter

$$\begin{aligned} & \underbrace{i \beta \rho_1 k \int_{a_1}^{a_2} r_2 \Phi \overline{(\varphi_x + \psi + l w)} dx}_{:=T_{75}} - \underbrace{k^2 \int_{a_1}^{a_2} r_2 (\varphi_x + \psi + l w)_x \overline{(\varphi_x + \psi + l w)} dx}_{:=T_{76}} \\ & - k_0 l k \int_{a_1}^{a_2} r_2 (w_x - l\varphi) \overline{(\varphi_x + \psi + l w)} dx = \rho_1 k \int_{a_1}^{a_2} r_2 f_2 \overline{(\varphi_x + \psi + l w)} dx. \end{aligned} \quad (3.138)$$

Agora, verificaremos separadamente cada termo destacado de (3.138).

**(IV) Termo  $T_{75}$ .**

Deste modo, considerando a parte real do termo  $T_{75}$ , além disso por meio de (3.85), (3.87) e (3.89), temos que

$$\varphi_x = \frac{\Phi_x}{i\beta} + \frac{f_{1,x}}{i\beta}, \quad \psi = \frac{\Psi}{i\beta} + \frac{f_3}{i\beta} \quad \text{e} \quad w = \frac{W}{i\beta} + \frac{f_5}{i\beta},$$

respectivamente, reorganizando de forma adequada a igualdade encontrada e utilizando o Lema 2.40, concluimos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} T_{75} = & -\frac{1}{2} \rho_1 k r_2 |\Phi|^2 \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2} \rho_1 k \int_{a_1}^{a_2} r_2' |\Phi|^2 dx - \operatorname{Re} \left\{ \rho_1 k \int_{a_1}^{a_2} r_2 \Phi \overline{(f_{1,x} + f_3 + lf_5)} dx \right\} \\ & - \operatorname{Re} \left\{ \rho_1 k \int_{a_1}^{a_2} r_2 \Phi \overline{(\Psi + lW)} dx \right\}. \end{aligned} \quad (3.139)$$

**(V) Termo  $T_{76}$ .**

Desta forma, tomando a parte real do termo  $T_{76}$  e utilizando o Lema 2.40, obtemos

$$\operatorname{Re} T_{76} = -\frac{1}{2} k^2 r_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2} k^2 \int_{a_1}^{a_2} r_2' |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx. \quad (3.140)$$

Então, considerando a parte real de (3.138), substituindo (3.139), (3.140) e reorganizando os termos da igualdade encontrada de forma conveniente, podemos concluir

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} (k^2 r_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 + \rho_1 k r_2 |\Phi|^2) \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} (k^2 r_2' |\varphi_x + \psi + lw|^2 + \rho_1 k r_2' |\Phi|^2) dx \\ & = \operatorname{Re} \left\{ \rho_1 k \int_{a_1}^{a_2} r_2 f_2 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx + \rho_1 k \int_{a_1}^{a_2} r_2 \Phi \overline{(f_{1,x} + f_3 + lf_5)} dx \right\} \\ & + \operatorname{Re} \left\{ \rho_1 k \int_{a_1}^{a_2} r_2 \Phi \overline{(\Psi + lW)} dx + k_0 k l \int_{a_1}^{a_2} r_2 (w_x - l\varphi) \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx \right\}. \end{aligned} \quad (3.141)$$

Por fim, fixamos uma função  $r_3 \in C^1[a_1, a_2]$ , além disso multiplicando (3.90) por  $k_0 r_3 \overline{(w_x - l\varphi)}$  e integrando sobre o intervalo  $(a_1, a_2)$ , temos que

$$\begin{aligned} & \underbrace{i\beta \rho_1 k_0 \int_{a_1}^{a_2} r_3 w \overline{(w_x - l\varphi)} dx}_{:=T_{77}} - \underbrace{k_0^2 \int_{a_1}^{a_2} r_3 (w_x - l\varphi)_x \overline{(w_x - l\varphi)} dx}_{:=T_{78}} \\ & + k l k_0 \int_{a_1}^{a_2} r_3 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(w_x - l\varphi)} dx = \rho_1 k_0 \int_{a_1}^{a_2} r_3 f_6 \overline{(w_x - l\varphi)} dx. \end{aligned} \quad (3.142)$$

Agora, vamos observar de maneira separada cada termo destacado em (3.142)

**(VI) Termo  $T_{77}$ .**

Deste modo, tomando a parte real do termo  $T_{77}$ , por meio de (3.89) e (3.85), temos que

$$w_x = \frac{W_x}{i\beta} + \frac{f_{5,x}}{i\beta} \quad \text{e} \quad \varphi = \frac{\Phi}{i\beta} + \frac{f_1}{i\beta},$$

respectivamente, reorganizando de forma conveniente a igualdade encontrada e utilizando o Lema 2.40, obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} T_{77} = & -\frac{1}{2} \rho_1 k_0 r_3 |W|^2 \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2} \rho_1 k_0 \int_{a_1}^{a_2} r_3' |W|^2 dx + \operatorname{Re} \left\{ \rho_1 k_0 l \int_{a_1}^{a_2} r_3 W \bar{\Phi} dx \right\} \\ & - \operatorname{Re} \left\{ \rho_1 k_0 \int_{a_1}^{a_2} r_3 W \overline{(f_{5,x} - lf_1)} dx \right\}. \end{aligned} \quad (3.143)$$

**(VII) Termo  $T_{78}$ .**

Desta forma, tomando a parte real do termo  $T_{78}$  e usando o Lema 2.40, segue que

$$\operatorname{Re} T_{78} = -\frac{1}{2} k_0^2 r_3 |w_x - l\varphi|^2 \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2} k_0^2 \int_{a_1}^{a_2} r_3' |w_x - l\varphi|^2 dx. \quad (3.144)$$

Então, substituindo (3.143), (3.144) em (3.142) e reorganizando os termos da igualdade encontrada de forma apropriada, podemos concluir

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} (k_0^2 r_3 |w_x - l\varphi|^2 + \rho_1 k_0 r_3 |W|^2) \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{2} \int_{a_1}^{a_2} (k_0^2 r_3' |w_x - l\varphi|^2 + \rho_1 k_0 r_3' |W|^2) dx \\ & = \operatorname{Re} \left\{ \rho_1 k_0 \int_{a_1}^{a_2} r_3 W \overline{f_{5,x}} dx - \rho_1 k_0 l \int_{a_1}^{a_2} r_3 W \bar{\Phi} dx - \rho_1 k_0 l \int_{a_1}^{a_2} r_3 W \bar{f}_1 dx \right\} \\ & - \operatorname{Re} \left\{ k k_0 l \int_{a_1}^{a_2} r_3 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(w_x - l\varphi)} dx - \rho_1 k_0 \int_{a_1}^{a_2} r_3 f_6 \overline{(w_x - l\varphi)} dx \right\}. \end{aligned} \quad (3.145)$$

Logo, reagrupando e reorganizando de maneira conveniente (3.137), (3.141), (3.145) e multiplicando ambos os lados da igualdade encontrada por 2, obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{a_1}^{a_2} (\rho_2 b r_1' |\Psi|^2 + b^2 r_1' |\psi_x|^2 + k^2 r_2' |\varphi_x + \psi + lw|^2 + \rho_1 k r_2' |\Phi|^2 + k_0^2 r_3' |w_x - l\varphi|^2 + \rho_1 k_0 r_3' |W|^2) dx \\ & = (\rho_2 b r_1 |\Psi|^2 + b^2 r_1 |\psi_x|^2 + k^2 r_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 + \rho_1 k r_2 |\Phi|^2 + k_0^2 r_3 |w_x - l\varphi|^2 + \rho_1 k_0 r_3 |W|^2) \Big|_{a_1}^{a_2} \\ & + T_{79} + T_{80} + T_{81} + T_{82} + T_{83}, \end{aligned} \quad (3.146)$$

para quaisquer  $r_1, r_2, r_3 \in C^1[a_1, a_2]$ , sendo

$$\begin{aligned} T_{79} = & -2 \operatorname{Re} \left\{ k b r_1 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\psi} \Big|_{a_1}^{a_2} \right\}, \\ T_{80} = & 2 \operatorname{Re} \left\{ \rho_1 \int_{a_1}^{a_2} (k r_2 - b r_1) \Phi \bar{\Psi} dx + \rho_1 l \int_{a_1}^{a_2} (k r_2 - k_0 r_3) W \bar{\Phi} dx \right\}, \\ T_{81} = & -2 \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\beta} k b \int_{a_1}^{a_2} r_1' (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\Psi} dx - \frac{1}{\beta} k_0 l b \int_{a_1}^{a_2} r_1 (w_x - l\varphi) \bar{\Psi} dx \right\} \\ & - 2 \operatorname{Re} \left\{ \gamma b \int_{a_1}^{a_2} r_1 \Psi \bar{\psi}_x dx \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{82} &= -2 \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{\beta} kb \int_{a_1}^{a_2} r_1' (\varphi_x + \psi + lw) \overline{f_3} dx - \frac{1}{\beta} k_0 lb \int_{a_1}^{a_2} r_1 (w_x - l\varphi) \overline{f_3} dx \right\} \\
&\quad + 2 \operatorname{Re} \left\{ \rho_2 b \int_{a_1}^{a_2} r_1 f_4 \overline{\psi_x} dx + \rho_2 b \int_{a_1}^{a_2} r_1 \Psi \overline{f_{3,x}} dx - \rho_1 k \int_{a_1}^{a_2} r_2 \Phi \overline{f_3} dx \right\} \\
&\quad - 2 \operatorname{Re} \left\{ \rho_1 b \int_{a_1}^{a_2} r_1 f_2 \overline{\psi} dx - \rho_1 k \int_{a_1}^{a_2} r_2 f_2 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx \right\} \\
&\quad + 2 \operatorname{Re} \left\{ \rho_1 k \int_{a_1}^{a_2} r_2 \Phi \overline{(f_{1,x} + f_3 + f_5)} dx + \rho_1 k_0 \int_{a_1}^{a_2} r_3 f_6 \overline{(w_x - l\varphi)} dx \right\} \\
&\quad + 2 \operatorname{Re} \left\{ \rho_1 k_0 \int_{a_1}^{a_2} r_3 W \overline{(f_{5,x} - lf_1)} dx \right\}, \\
T_{83} &= 2 \operatorname{Re} \left\{ l \int_{a_1}^{a_2} k k_0 (r_2 - r_3) (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(w_x - l\varphi)} dx \right\}.
\end{aligned}$$

Sendo assim, estamos aptos à demonstrar (3.127) e (3.128) para os casos em que  $j = 1, 2$ . Para isso, analizaremos separadamente os dois casos

**1º Caso: Prova de (3.127) e (3.128) para o caso em que  $j = 2$ .**

Com efeito, considere as funções  $r_1, r_2, r_3 \in C^1[a_1, a_2]$ , tais que

$$br_1(x) = kr_2(x) = k_0 r_3(x) = \int_{a_1}^x e^{ns} ds, \quad (3.147)$$

para todo  $x \in [a_1, a_2]$  e  $n \in \mathbb{N}$ , o qual será definido mais adiante. Agora observaremos cada parcela

**(I) Termo  $T_{79}$ .**

Desta forma, por meio de (3.87), temos que

$$\psi = \frac{\Psi}{i\beta} + \frac{f_3}{i\beta},$$

utilizando as desigualdades Triangular **(DT)**, de Young **(DY)**, segue de (3.147) que  $r_1(a_1) = 0$  e pela inclusão contínua  $H^1(a_1, a_2) \hookrightarrow L^\infty(a_1, a_2)$ , podemos obter

$$\begin{aligned}
|T_{79}| &= \left| 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{i\beta} kb r_1 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{\Psi} \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{i\beta} kb r_1 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{f_3} \Big|_{a_1}^{a_2} \right\} \right| \\
&\stackrel{\mathbf{DT}}{\leq} \frac{2}{|\beta|} kb (|r_1(a_2)| |(\varphi_x + \psi + lw)(a_2)| |\Psi(a_2)| - \underbrace{|r_1(a_1)|}_{=0} |(\varphi_x + \psi + lw)(a_1)| |\Psi(a_1)|) \\
&\quad + \frac{2}{|\beta|} kb (|r_1(a_2)| |(\varphi_x + \psi + lw)(a_2)| |f_3(a_2)| - \underbrace{|r_1(a_1)|}_{=0} |(\varphi_x + \psi + lw)(a_1)| |f_3(a_1)|) \\
&\leq \frac{2}{|\beta|} kb \|r_1\|_{C^1[a_1, a_2]} |(\varphi_x + \psi + lw)(a_2)| (|\Psi(a_2)| + |f_3(a_2)|) \\
&\stackrel{\mathbf{DY}}{\leq} \frac{1}{|\beta|} kb \|r_1\|_{C^1[a_1, a_2]} (|(\varphi_x + \psi + lw)(a_2)|^2 + |\Psi(a_2)|^2 + C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2) \\
&\leq \frac{C}{|\beta|} |(\varphi_x + \psi + lw)(a_2)|^2 + \frac{C}{|\beta|} |\Psi(a_2)|^2 + C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$|T_{79}| \leq \frac{C}{|\beta|} |(\varphi_x + \psi + lw)(a_2)|^2 + \frac{C}{|\beta|} |\Psi(a_2)|^2 + C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2, \quad (3.148)$$

no qual a constante positiva  $C$  depende de  $n$ .

**(II) Termo  $T_{80}$ .**

Sendo assim, por (3.147), obtemos

$$T_{80} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \rho_1 \int_{a_1}^{a_2} \underbrace{(kr_2 - br_1)}_{=0} \Phi \bar{\Psi} dx + \rho_1 l \int_{a_1}^{a_2} \underbrace{(kr_2 - k_0 r_3)}_{=0} W \bar{\Phi} dx \right\} = 0.$$

Logo,

$$T_{80} = 0. \quad (3.149)$$

**(III) Termo  $T_{81}$ .**

Deste modo, tomando o módulo do termo  $T_{81}$ , utilizando as desigualdades Triangular (**DT**) e de Cauchy-Schwartz (**DCS**), podemos obter

$$\begin{aligned} |T_{81}| &\stackrel{\mathbf{DT}}{\leq} \left| -\frac{2}{\beta} kb \int_{a_1}^{a_2} r_1' (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\Psi} dx \right| + \left| \frac{2}{\beta} k_0 lb \int_{a_1}^{a_2} r_1 (w_x - l\varphi) \bar{\Psi} dx \right| + \left| -2\gamma b \int_{a_1}^{a_2} r_1 \Psi \bar{\psi}_x dx \right| \\ &\stackrel{\mathbf{DCS}}{\leq} \underbrace{\frac{2}{|\beta|} kb \|r_1'\|_{C^1[a_1, a_2]} \|\varphi_x + \psi + lw\|_{L^2} \|\Psi\|_{L^2}}_{\leq \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\Psi\|_{L^2}} + \underbrace{\frac{2}{|\beta|} k_0 lb \|r_1\|_{C^1[a_1, a_2]} \|w_x - l\varphi\|_{L^2} \|\Psi\|_{L^2}}_{\leq \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\Psi\|_{L^2}} \\ &\quad + \underbrace{2\gamma b \|r_1\|_{C^1[a_1, a_2]} \|\Psi\|_{L^2} \|\psi_x\|_{L^2}}_{\leq C \|\Psi\|_{L^2} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}} \\ &\leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\Psi\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$|T_{81}| \leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\Psi\|_{L^2}, \quad (3.150)$$

em que  $C$  é uma constante positiva que depende de  $n$ .

**(IV) Termo  $T_{82}$ .**

Dessa maneira, tomando o módulo do termo  $T_{82}$  e usando Desigualdade Triangular (**DT**), obtemos

$$\begin{aligned} |T_{82}| &\stackrel{\mathbf{DT}}{\leq} \left| -\frac{2}{\beta} bk \int_{a_1}^{a_2} r_1' (\varphi_x + \psi + lw) \bar{f}_3 dx \right| + \left| \frac{2}{\beta} k_0 lb \int_{a_1}^{a_2} r_1 (w_x - l\varphi) \bar{f}_3 dx \right| + \left| 2\rho_2 b \int_{a_1}^{a_2} r_1 f_4 \bar{\psi}_x dx \right| \\ &\quad + \left| 2\rho_2 b \int_{a_1}^{a_2} r_1 \Psi \bar{f}_{3,x} dx \right| + \left| -2\rho_1 k \int_{a_1}^{a_2} r_2 \Phi \bar{f}_3 dx \right| + \left| -2\rho_1 b \int_{a_1}^{a_2} r_1 f_2 \bar{\psi} dx \right| \\ &\quad + \left| 2\rho_1 k \int_{a_1}^{a_2} r_2 f_2 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx \right| + \left| 2\rho_1 k \int_{a_1}^{a_2} r_2 \Phi \overline{(f_{1,x} + f_3 + f_5)} dx \right| \\ &\quad + \left| 2\rho_1 k_0 \int_{a_1}^{a_2} r_3 f_6 \overline{(w_x - l\varphi)} dx \right| + \left| 2\rho_1 k_0 \int_{a_1}^{a_2} r_3 W \overline{(f_{5,x} - lf_1)} dx \right| \\ &\leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$|T_{82}| \leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}, \quad (3.151)$$

sendo  $C$  uma constante positiva que depende de  $n$ .

**(V) Termo  $T_{83}$ .**

Observe que, de (3.147), temos que

$$\begin{aligned} (r_2 - r_3)(x) &= \frac{1}{k} \int_{a_1}^x e^{ns} ds - \frac{1}{k_0} \int_{a_1}^x e^{ns} ds \\ &= \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k_0} \right) \frac{e^{nx}}{n} \Big|_{a_1}^x \\ &= \frac{k_0 - k}{k_0 k} \left( \frac{e^{nx} - e^{na_1}}{n} \right). \end{aligned} \quad (3.152)$$

Assim, multiplicando ambos os lados de (3.152) por  $(k_0 k l)$ , podemos obter

$$(k_0 k l)(r_2 - r_3)(x) = l(k_0 - k) \left( \frac{e^{nx} - e^{na_1}}{n} \right).$$

Deste modo, usando a Desigualdade de Young (**DY**), obtemos

$$\begin{aligned} |T_{83}| &= \left| 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{a_1}^{a_2} k k_0 l (r_2 - r_3) (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(w_x - l\varphi)} dx \right\} \right| \\ &= \left| 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{a_1}^{a_2} l(k_0 - k) \left( \frac{e^{nx} - e^{na_1}}{n} \right) (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(w_x - l\varphi)} dx \right\} \right| \\ &\leq \left| 2 \int_{a_1}^{a_2} l(k_0 - k) \left( \frac{e^{nx} - e^{na_1}}{n} \right) (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(w_x - l\varphi)} dx \right| \\ &\stackrel{\text{DY}}{\leq} \frac{l|k_0 - k|}{n} \int_{a_1}^{a_2} e^{nx} (|\varphi_x + \psi + lw|^2 + |w_x - l\varphi|^2) dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$|T_{83}| \leq \frac{l|k_0 - k|}{n} \int_{a_1}^{a_2} e^{nx} (|\varphi_x + \psi + lw|^2 + |w_x - l\varphi|^2) dx. \quad (3.153)$$

Então, substituindo (3.148), (3.149), (3.150), (3.151) e (3.153) em (3.146), concluímos

$$\begin{aligned} &\int_{a_1}^{a_2} (\rho_2 b r_1' |\Psi|^2 + b^2 r_1' |\psi_x|^2 + k^2 r_2' |\varphi_x + \psi + lw|^2 + \rho_1 k r_2' |\Phi|^2 + k_0^2 r_3' |w_x - l\varphi|^2) dx \\ &+ \int_{a_1}^{a_2} (\rho_1 k_0 r_3' |W|^2) dx \leq (\rho_2 b r_1 |\Psi|^2 + b^2 r_1 |\psi_x|^2 + k^2 r_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 + \rho_1 k r_2 |\Phi|^2) \Big|_{a_1}^{a_2} \\ &+ (k_0^2 r_3 |w_x - l\varphi|^2 + \rho_1 k_0 r_3 |W|^2) \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{C}{|\beta|} |(\varphi_x + \psi + lw)(a_2)|^2 + \frac{C}{|\beta|} |\Psi(a_2)|^2 + C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &+ C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\Psi\|_{L^2} + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + \frac{l|k_0 - k|}{n} \int_{a_1}^{a_2} e^{nx} (|\varphi_x + \psi + lw|^2 + |w_x - l\varphi|^2) dx. \end{aligned}$$

Além disso, por meio de (3.147), temos que  $br'_1 = kr'_2 = k_0r'_3 = e^{nx}$ , segue que

$$\begin{aligned} & \int_{a_1}^{a_2} (\rho_2 e^{nx} |\Psi|^2 + b e^{nx} |\psi_x|^2 + k e^{nx} |\varphi_x + \psi + lw|^2 + \rho_1 e^{nx} |\Phi|^2 + k_0 e^{nx} |w_x - l\varphi|^2) dx \\ & + \int_{a_1}^{a_2} (\rho_1 e^{nx} |W|^2) dx \leq (\rho_2 br_1 |\Psi|^2 + b^2 r_1 |\psi_x|^2 + k^2 r_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 + \rho_1 kr_2 |\Phi|^2) \Big|_{a_1}^{a_2} \\ & + (k_0^2 r_3 |w_x - l\varphi|^2 + \rho_1 k_0 r_3 |W|^2) \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{C}{|\beta|} |(\varphi_x + \psi + lw)(a_2)|^2 + \frac{C}{|\beta|} |\Psi(a_2)|^2 + C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 \\ & + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\Psi\|_{L^2} + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + \frac{l|k_0 - k|}{n} \int_{a_1}^{a_2} e^{nx} (|\varphi_x + \psi + lw|^2 + |w_x - l\varphi|^2) dx. \end{aligned}$$

Sejam  $C_3 = \min \{\rho_1, \rho_2, b, k, k_0\} > 0$  e  $C > 0$ , então

$$\begin{aligned} C_3 \int_{a_1}^{a_2} e^{nx} (|\Psi|^2 + |\psi_x|^2 + |\varphi_x + \psi + lw|^2 + |\Phi|^2 + |w_x - l\varphi|^2 + |W|^2) dx & \leq CE_{\mathbf{U}}(a_2) + C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 \\ & + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\Psi\|_{L^2} + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + \frac{l|k_0 - k|}{n} \int_{a_1}^{a_2} e^{nx} (|\varphi_x + \psi + lw|^2 + |w_x - l\varphi|^2) dx. \end{aligned}$$

Agora a partir desse momento a constante positiva  $C$  não depende mais de um  $n \in \mathbb{N}$  arbitrário, pois fixando  $n = n_0 \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, no qual  $n_0$  satisfaça a seguinte desigualdade

$$C_3 - \frac{l|k_0 - k|}{n_0} > 0,$$

então, existe uma constante positiva  $C$  que depende do  $n_0$  fixado, tal que

$$C e^{n_0 a_1} \int_{a_1}^{a_2} E_{\mathbf{U}}(x) dx \leq CE_{\mathbf{U}}(a_2) + C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \underbrace{C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\Psi\|_{L^2}}_{:=T_{84}} + \underbrace{C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}}_{:=T_{85}}.$$

Desta forma, usando a Desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$ , nos termos  $T_{84}$  e  $T_{85}$ , existe  $C > 0$ , tal que

$$C e^{n_0 a_1} \int_{a_1}^{a_2} E_{\mathbf{U}}(x) dx \leq CE_{\mathbf{U}}(a_2) + \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_{\varepsilon} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \underbrace{C_{\varepsilon} \|\Psi\|_{L^2}^2}_{:=T_{86}}.$$

Desta maneira, substituindo o Lema 3.9 no termo  $T_{86}$  e usando a Desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$  na desigualdade encontrada, existe uma constante positiva  $C_{\varepsilon}$ , tal que

$$C e^{n_0 a_1} \int_{a_1}^{a_2} E_{\mathbf{U}}(x) dx \leq CE_{\mathbf{U}}(a_2) + \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_{\varepsilon} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Logo, a Desigualdade (3.128) é válida para o caso em que  $j = 2$ .

Agora, vamos provar (3.127) para o caso em que  $j = 2$ . Para isto, devemos reorganizar de maneira adequada os termos de (3.146), tomar o módulo, usar a Desigualdade Triangular (**DT**)

e substituir (3.148), (3.149), (3.150), (3.151) e (3.153), assim encontramos

$$\begin{aligned}
& \left( \rho_2 b r_1 |\Psi|^2 + b^2 r_1 |\psi_x|^2 + k^2 r_2 |\varphi_x + \psi + l w|^2 + \rho_1 k r_2 |\Phi|^2 + k_0^2 r_3 |w_x - l \varphi|^2 + \rho_1 k_0 r_3 |W|^2 \right) \Big|_{a_1}^{a_2} \\
& \leq \int_{a_1}^{a_2} (\rho_2 b r_1' |\Psi|^2 + b^2 r_1' |\psi_x|^2 + k^2 r_2' |\varphi_x + \psi + l w|^2 + \rho_1 k r_2' |\Phi|^2 + k_0^2 r_3' |w_x - l \varphi|^2 + \rho_1 k_0 r_3' |W|^2) dx \\
& + \frac{C}{|\beta|} |(\varphi_x + \psi + l w)(a_2)|^2 + \frac{C}{|\beta|} |\Psi(a_2)|^2 + C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\Psi\|_{L^2} + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} \\
& + \frac{l|k_0 - k|}{n} \int_{a_1}^{a_2} e^{nx} (|\varphi_x + \psi + l w|^2 + |w_x - l \varphi|^2) dx.
\end{aligned}$$

Deste modo, segue de (3.147) que  $br_1' = kr_2' = k_0r_3' = e^{nx}$  e  $r_1(a_1) = r_2(a_1) = r_3(a_1) = 0$ , reagrupando e reorganizando de maneira conveniente a desigualdade encontrada, podemos obter

$$\begin{aligned}
& \left( \rho_2 b r_1(a_2) - \frac{C}{|\beta|} \right) |\Psi(a_2)|^2 + b^2 r_1(a_2) |\psi_x(a_2)|^2 + \left( k^2 r_2(a_2) - \frac{C}{|\beta|} \right) |(\varphi_x + \psi + l w)(a_2)|^2 \\
& + \rho_1 k r_2(a_2) |\Phi(a_2)|^2 + k_0^2 r_3(a_2) |(w_x - l \varphi)(a_2)|^2 + \rho_1 k_0 r_3(a_2) |W(a_2)|^2 \leq \int_{a_1}^{a_2} \rho_2 e^{nx} |\Psi|^2 dx \\
& + \int_{a_1}^{a_2} (b e^{nx} |\psi_x|^2 + k e^{nx} |\varphi_x + \psi + l w|^2 + \rho_1 e^{nx} |\Phi|^2 + k_0 e^{nx} |w_x - l \varphi|^2 + \rho_1 e^{nx} |W|^2) dx + C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 \\
& + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\Psi\|_{L^2} + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + \frac{l|k_0 - k|}{n} \int_{a_1}^{a_2} e^{nx} (|\varphi_x + \psi + l w|^2 + |w_x - l \varphi|^2) dx.
\end{aligned}$$

Tomando  $|\beta|$  suficientemente grande e considere  $n \in \mathbb{N}$  fixado, então existe uma constante positiva  $C$  que não depende de  $n$  fixado, tal que

$$CE_{\mathbf{U}}(a_2) \leq C \int_{a_1}^{a_2} E_{\mathbf{U}}(x) dx + C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \underbrace{C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\Psi\|_{L^2}}_{:=T_{87}} + \underbrace{C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}}_{:=T_{88}}.$$

Dessa forma, utilizando a Desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$  nos termos  $T_{87}$  e  $T_{88}$ , existe uma constante positiva  $C_\varepsilon$ , tal que

$$CE_{\mathbf{U}}(a_2) \leq C \int_{a_1}^{a_2} E_{\mathbf{U}}(x) dx + \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \underbrace{C_\varepsilon \|\Psi\|_{L^2}^2}_{:=T_{89}}.$$

Assim, substituindo o Lema 3.9 no termo  $T_{89}$  e usando a Desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$  na desigualdade encontrada, existe uma constante positiva  $C_\varepsilon$ , tal que

$$CE_{\mathbf{U}}(a_2) \leq C \int_{a_1}^{a_2} E_{\mathbf{U}}(x) dx + \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Logo, vale a Desigualdade (3.127) para o caso em que  $j = 2$ .

**2º Caso: Prova das equações (3.127) e (3.128) para o caso em que  $j = 1$ .**

Com efeito, considere  $r_1, r_2, r_3 \in C^1[a_1, a_2]$ , tais que

$$br_1(x) = kr_2(x) = k_0r_3(x) = - \int_x^{a_2} e^{-ms} ds, \quad (3.154)$$

para todo  $x \in [a_1, a_2]$  e  $m \in \mathbb{N}$  a ser determinado posteriormente. Seguindo de forma análoga ao caso  $j = 2$ , as estimativas (3.127) e (3.128) podem também ser provada para o caso  $j = 1$ . Para isso, devemos analisar

**(I) Termo  $T_{79}$ .**

Desta forma, sabemos por meio de (3.87) que

$$\psi = \frac{\Psi}{i\beta} + \frac{f_3}{i\beta},$$

pelas desigualdades Triangular **(DT)**, de Young **(DY)** e pela inclusão contínua  $H^1(a_1, a_2) \hookrightarrow L^\infty(a_1, a_2)$ , podemos obter

$$\begin{aligned} |T_{79}| &= \left| 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{i\beta} k b r_1 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\Psi} \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{1}{i\beta} k b r_1 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{f}_3 \Big|_{a_1}^{a_2} \right\} \right| \\ &\stackrel{\mathbf{DT}}{\leq} \frac{2}{|\beta|} k b \underbrace{(|r_1(a_2)|)}_{=0} |(\varphi_x + \psi + lw)(a_2)| |\Psi(a_2)| - |r_1(a_1)| |(\varphi_x + \psi + lw)(a_1)| |\Psi(a_1)| \\ &\quad + \frac{2}{|\beta|} k b \underbrace{(|r_1(a_2)|)}_{=0} |(\varphi_x + \psi + lw)(a_2)| |f_3(a_2)| - |r_1(a_1)| |(\varphi_x + \psi + lw)(a_1)| |f_3(a_1)| \\ &\leq - \frac{2}{|\beta|} k b \|r_1\|_{C^1[a_1, a_2]} |(\varphi_x + \psi + lw)(a_1)| (|\Psi(a_1)| + |f_3(a_1)|) \\ &\leq \frac{2}{|\beta|} k b \|r_1\|_{C^1[a_1, a_2]} |(\varphi_x + \psi + lw)(a_1)| (|\Psi(a_1)| + |f_3(a_1)|) \\ &\stackrel{\mathbf{DY}}{\leq} \frac{1}{|\beta|} k b \|r_1\|_{C^1[a_1, a_2]} (|(\varphi_x + \psi + lw)(a_1)|^2 + |\Psi(a_1)|^2 + C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2) \\ &\leq \frac{C}{|\beta|} |(\varphi_x + \psi + lw)(a_1)|^2 + \frac{C}{|\beta|} |\Psi(a_1)|^2 + C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$|T_{79}| \leq \frac{C}{|\beta|} |(\varphi_x + \psi + lw)(a_1)|^2 + \frac{C}{|\beta|} |\Psi(a_1)|^2 + C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2, \quad (3.155)$$

no qual a constante positiva  $C$  depende de  $m$ .

**(II) Termos  $T_{80}$ ,  $T_{81}$  e  $T_{82}$ .**

Note que, as provas dos termos  $T_{80}$ ,  $T_{81}$  e  $T_{82}$  para o caso em que  $j = 1$  é análoga para o caso

em que  $j = 2$ , ou seja,

$$T_{80} = 0, \quad |T_{81}| \leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\Psi\|_{L^2} \quad \text{e} \quad |T_{82}| \leq C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}, \quad (3.156)$$

sendo  $C$  uma constante positiva que depende de  $m$ .

### (III) Termo $T_{83}$ .

Note que, de (3.154), temos que

$$\begin{aligned} (r_2 - r_3)(x) &= -\frac{1}{k} \int_x^{a_2} e^{-ms} ds + \frac{1}{k_0} \int_x^{a_2} e^{-ms} ds \\ &= \left( -\frac{1}{k} + \frac{1}{k_0} \right) \left( -\frac{e^{-ms}}{m} \right) \Big|_x^{a_2} \\ &= \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k_0} \right) \frac{e^{-ms}}{m} \Big|_x^{a_2} \\ &= \frac{k_0 - k}{k_0 k} \left( \frac{e^{-ma_2} - e^{-mx}}{m} \right). \end{aligned} \quad (3.157)$$

Desta forma, multiplicando ambos os lados de (3.157) por  $(k_0 k l)$ , obtemos

$$(k_0 k l)(r_2 - r_3)(x) = l(k_0 - k) \left( \frac{e^{-ma_2} - e^{-mx}}{m} \right).$$

Desta maneira, utilizando a Desigualdade de Young (**DY**), podemos concluir

$$\begin{aligned} |T_{83}| &= \left| 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{a_1}^{a_2} k k_0 l (r_2 - r_3) (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(w_x - l\varphi)} dx \right\} \right| \\ &= \left| 2 \operatorname{Re} \left\{ \int_{a_1}^{a_2} l(k_0 - k) \left( \frac{e^{-ma_2} - e^{-mx}}{m} \right) (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(w_x - l\varphi)} dx \right\} \right| \\ &\leq \left| 2 \int_{a_1}^{a_2} l(k_0 - k) \left( \frac{e^{-ma_2} - e^{-mx}}{m} \right) (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(w_x - l\varphi)} dx \right| \\ &\leq \frac{2l}{m} \int_{a_1}^{a_2} |k_0 - k| (e^{-mx}) |\varphi_x + \psi + lw| |w_x - l\varphi| dx \\ &= \frac{2l|k_0 - k|}{m} \int_{a_1}^{a_2} e^{-mx} |\varphi_x + \psi + lw| |w_x - l\varphi| dx \\ &\stackrel{\text{DY}}{\leq} \frac{l|k_0 - k|}{m} \int_{a_1}^{a_2} e^{-mx} (|\varphi_x + \psi + lw|^2 + |w_x - l\varphi|^2) dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$|T_{83}| \leq \frac{l|k_0 - k|}{m} \int_{a_1}^{a_2} e^{-mx} (|\varphi_x + \psi + lw|^2 + |w_x - l\varphi|^2) dx. \quad (3.158)$$

Deste modo, substituindo (3.155), (3.156) e (3.158) em (3.146), podemos obter

$$\begin{aligned} & \int_{a_1}^{a_2} (\rho_2 b r_1' |\Psi|^2 + b^2 r_1' |\psi_x|^2 + k^2 r_2' |\varphi_x + \psi + lw|^2 + \rho_1 k r_2' |\Phi|^2 + k_0^2 r_3' |w_x - l\varphi|^2) dx \\ & + \int_{a_1}^{a_2} (\rho_1 k_0 r_3' |W|^2) dx \leq (\rho_2 b r_1 |\Psi|^2 + b^2 r_1 |\psi_x|^2 + k^2 r_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 + \rho_1 k r_2 |\Phi|^2) \Big|_{a_1}^{a_2} \\ & + (k_0^2 r_3 |w_x - l\varphi|^2 + \rho_1 k_0 r_3 |W|^2) \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{C}{|\beta|} |(\varphi_x + \psi + lw)(a_1)|^2 + \frac{C}{|\beta|} |\Psi(a_1)|^2 + C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 \\ & + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\Psi\|_{L^2} + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + \frac{l|k_0 - k|}{m} \int_{a_1}^{a_2} e^{-mx} (|\varphi_x + \psi + lw|^2 + |w_x - l\varphi|^2) dx. \end{aligned}$$

Sendo assim, sabemos por meio de (3.154) que  $br_1' = kr_2' = k_0r_3' = e^{-mx}$ , podemos concluir

$$\begin{aligned} & \int_{a_1}^{a_2} (\rho_2 e^{-mx} |\Psi|^2 + b e^{-mx} |\psi_x|^2 + k e^{-mx} |\varphi_x + \psi + lw|^2 + \rho_1 e^{-mx} |\Phi|^2 + k_0 e^{-mx} |w_x - l\varphi|^2) dx \\ & + \int_{a_1}^{a_2} (\rho_1 e^{-mx} |W|^2) dx \leq (\rho_2 b r_1 |\Psi|^2 + b^2 r_1 |\psi_x|^2 + k^2 r_2 |\varphi_x + \psi + lw|^2 + \rho_1 k r_2 |\Phi|^2) \Big|_{a_1}^{a_2} \\ & + (k_0^2 r_3 |w_x - l\varphi|^2 + \rho_1 k_0 r_3 |W|^2) \Big|_{a_1}^{a_2} + \frac{C}{|\beta|} |(\varphi_x + \psi + lw)(a_1)|^2 + \frac{C}{|\beta|} |\Psi(a_1)|^2 + C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 \\ & + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\Psi\|_{L^2} + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + \frac{l|k_0 - k|}{m} \int_{a_1}^{a_2} e^{-mx} (|\varphi_x + \psi + lw|^2 + |w_x - l\varphi|^2) dx. \end{aligned}$$

Sejam  $C_4 = \min\{\rho_1, \rho_2, b, k, k_0\} > 0$  e  $C > 0$ , então

$$\begin{aligned} C_4 \int_{a_1}^{a_2} e^{-mx} (|\Psi|^2 + |\psi_x|^2 + |\varphi_x + \psi + lw|^2 + |\Phi|^2 + |w_x - l\varphi|^2 + |W|^2) dx & \leq C E_{\mathbf{U}}(a_1) \\ + C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\Psi\|_{L^2} + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + \frac{l|k_0 - k|}{m} \int_{a_1}^{a_2} e^{-mx} |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \\ + \frac{l|k_0 - k|}{m} \int_{a_1}^{a_2} e^{-mx} |w_x - l\varphi|^2 dx. \end{aligned}$$

A partir desse momento a constante positiva  $C$  não depende mais de um  $m \in \mathbb{N}$  arbitrário, pois fixando  $m = m_0 \in \mathbb{N}$  suficientemente grande, no qual  $m_0$  satisfaça a seguinte condição

$$C_4 - \frac{l|k_0 - k|}{m_0} > 0,$$

temos que existe uma constante positiva  $C$  que depende do  $m_0$  fixado, tal que

$$C e^{m_0 a_2} \int_{a_1}^{a_2} E_{\mathbf{U}}(x) dx \leq C E_{\mathbf{U}}(a_1) + C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \underbrace{C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\Psi\|_{L^2}}_{:=T_{90}} + \underbrace{C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}}_{:=T_{91}}.$$

Desta maneira, utilizando a Desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$ , nos termos  $T_{90}$  e  $T_{91}$ , existe

$C > 0$ , tal que

$$C e^{m_0 a_2} \int_{a_1}^{a_2} E_U(x) dx \leq C E_U(a_1) + \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \underbrace{C \|\Psi\|_{L^2}^2}_{:=T_{92}}.$$

Deste modo, substituindo o Lema 3.9 no termo  $T_{92}$  e utilizando a Desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$  na desigualdade encontrada, existe uma constante positiva  $C_\varepsilon$ , tal que

$$C e^{m_0 a_2} \int_{a_1}^{a_2} E_U(x) dx \leq C E_U(a_1) + \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Logo, a Desigualdade (3.128) é verdadeira para o caso em que  $j = 1$ .

Por fim, vamos provar (3.127) para o caso em que  $j = 1$ . Para isso, precisamos reorganizar de maneira conveniente os termos de (3.146), tomar o módulo, usar a Desigualdade Triangular **(DT)** e substituir (3.155), (3.156) e (3.158), assim determinamos

$$\begin{aligned} & \left( \rho_2 b r_1 |\Psi|^2 + b^2 r_1 |\psi_x|^2 + k^2 r_2 |\varphi_x + \psi + l w|^2 + \rho_1 k r_2 |\Phi|^2 + k_0^2 r_3 |w_x - l \varphi|^2 + \rho_1 k_0 r_3 |W|^2 \right) \Big|_{a_1}^{a_2} \\ & \leq \int_{a_1}^{a_2} (\rho_2 b r_1' |\Psi|^2 + b^2 r_1' |\psi_x|^2 + k^2 r_2' |\varphi_x + \psi + l w|^2 + \rho_1 k r_2' |\Phi|^2 + k_0^2 r_3' |w_x - l \varphi|^2 + \rho_1 k_0 r_3' |W|^2) dx \\ & + \frac{C}{|\beta|} |(\varphi_x + \psi + l w)(a_1)|^2 + \frac{C}{|\beta|} |\Psi(a_1)|^2 + C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\Psi\|_{L^2} + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} \\ & + \frac{l|k_0 - k|}{m} \int_{a_1}^{a_2} e^{-mx} (|\varphi_x + \psi + l w|^2 + |w_x - l \varphi|^2) dx. \end{aligned}$$

Dessa forma, por meio de (3.147), segue que  $b r_1' = k r_2' = k_0 r_3' = e^{-mx}$ ,  $r_1(a_2) = r_2(a_2) = r_3(a_2) = 0$ , reagrupando e reorganizando de maneira conveniente a desigualdade encontrada, concluímos

$$\begin{aligned} & \left( \rho_2 b r_1(a_1) - \frac{C}{|\beta|} \right) |\Psi(a_1)|^2 + b^2 r_1(a_1) |\psi_x(a_1)|^2 + \left( k^2 r_2(a_1) - \frac{C}{|\beta|} \right) |(\varphi_x + \psi + l w)(a_1)|^2 \\ & + \rho_1 k r_2(a_1) |\Phi(a_1)|^2 + k_0^2 r_3(a_1) |w_x - l \varphi(a_1)|^2 + \rho_1 k_0 r_3(a_1) |W(a_1)|^2 \leq \int_{a_1}^{a_2} \rho_2 e^{-mx} |\Psi|^2 dx \\ & + \int_{a_1}^{a_2} (b e^{-mx} |\psi_x|^2 + k e^{-mx} |\varphi_x + \psi + l w|^2 + \rho_1 e^{-mx} |\Phi|^2 + k_0 e^{-mx} |w_x - l \varphi|^2 + \rho_1 e^{-mx} |W|^2) dx \\ & + C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\Psi\|_{L^2} + C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} + \frac{l|k_0 - k|}{m} \int_{a_1}^{a_2} e^{-mx} (|\varphi_x + \psi + l w|^2 + |w_x - l \varphi|^2) dx. \end{aligned}$$

Tomando  $|\beta|$  suficientemente grande e considere  $n \in \mathbb{N}$  fixado, então existe uma constante positiva  $C$  que não depende de  $n$  fixado, tal que

$$C E_U(a_1) \leq C \int_{a_1}^{a_2} E_U(x) dx + C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \underbrace{C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\Psi\|_{L^2}}_{:=T_{93}} + \underbrace{C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}}_{:=T_{94}}.$$

Deste modo, utilizando a Desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$  nos termos  $T_{93}$  e  $T_{94}$ , existe uma constante positiva  $C_\varepsilon$ , tal que

$$CE_{\mathbf{U}}(a_1) \leq C \int_{a_1}^{a_2} E_{\mathbf{U}}(x)dx + \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \underbrace{C \|\Psi\|_{L^2}^2}_{:=T_{95}}.$$

Assim, substituindo o Lema 3.9 no termo  $T_{95}$  e usando a Desigualdade de Young com  $\varepsilon > 0$  na desigualdade encontrada, existe uma constante positiva  $C_\varepsilon$ , tal que

$$CE_{\mathbf{U}}(a_1) \leq C \int_{a_1}^{a_2} E_{\mathbf{U}}(x)dx + \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Logo, vale a Desigualdade (3.127) para o caso em que  $j = 1$ .

Portanto, provamos as desigualdades (3.128) e (3.127) para todo  $j = 1, 2$ .  $\square$

### 3.3.3 Estimativas Globais

O objetivo dessa subseção é encontrar estimativas para todo intervalo  $(0, L)$ .

**Lema 3.25.** *Seja  $\mathbf{U} = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)^\top$  uma solução regular do sistema (3.85)-(3.90), existe uma constante positiva  $C$ , tal que*

$$\int_0^L E_{\mathbf{U}}(x)dx \leq \begin{cases} \varepsilon C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2, & \text{se } \chi = \chi_0 = 0, & (3.159a) \\ \varepsilon C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon |\beta|^4 \chi_0^4 \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2, & \text{se } \chi = 0 \text{ e } \chi_0 \neq 0, & (3.159b) \\ \varepsilon C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon |\beta|^8 \chi^8 \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2, & \text{se } \chi \neq 0 \text{ e } \chi_0 = 0, & (3.159c) \\ \varepsilon C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon |\beta|^8 \chi^8 \chi_0^8 \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2, & \text{se } \chi \neq 0 \text{ e } \chi_0 \neq 0. & (3.159d) \end{cases}$$

**Demonstração.** Segue de (3.127), em particular para o subintervalo  $(L_0 - \frac{\delta}{4}, L_0 + \frac{\delta}{4})$ , que

$$E_{\mathbf{U}}(a_j) \leq C_1 \int_{L_0 - \frac{\delta}{4}}^{L_0 + \frac{\delta}{4}} E_{\mathbf{U}}(x)dx + \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2, \quad j = 1, 2. \quad (3.160)$$

Primeiramente estimamos a integral da função sobre o intervalo  $(0, L_0 - \frac{\delta}{4}]$ . Deste modo, por meio de (3.128) com  $a_1 = 0$  e  $a_2 = L_0 - \frac{\delta}{4}$  e (3.160) com  $j = 2$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^{L_0 - \frac{\delta}{4}} E_{\mathbf{U}}(x) dx &\leq C_2 E_{\mathbf{U}}(a_2) + \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\leq C_2 \left( C_1 \int_{L_0 - \frac{\delta}{4}}^{L_0 + \frac{\delta}{4}} E_{\mathbf{U}}(x) dx + \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 \right) + \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&= C_2 C_1 \int_{L_0 - \frac{\delta}{4}}^{L_0 + \frac{\delta}{4}} E_{\mathbf{U}}(x) dx + C_2 \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_2 C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&= C_2 C_1 \int_{L_0 - \frac{\delta}{4}}^{L_0 + \frac{\delta}{4}} E_{\mathbf{U}}(x) dx + (C_2 + 1) \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^{L_0 - \frac{\delta}{4}} E_{\mathbf{U}}(x) dx \leq C_2 C_1 \int_{L_0 - \frac{\delta}{4}}^{L_0 + \frac{\delta}{4}} E_{\mathbf{U}}(x) dx + (C_2 + 1) \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (3.161)$$

Agora vamos estimar a integral da função no intervalo  $[L_0 + \frac{\delta}{4}, L)$ . Desta forma, segue de (3.128) com  $a_1 = L_0 + \frac{\delta}{4}$  e  $a_2 = L$  e (3.160) com  $j = 1$  que

$$\begin{aligned}
\int_{L_0 + \frac{\delta}{4}}^L E_{\mathbf{U}}(x) dx &\leq C_2 E_{\mathbf{U}}(a_1) + \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\leq C_2 \left( C_1 \int_{L_0 - \frac{\delta}{4}}^{L_0 + \frac{\delta}{4}} E_{\mathbf{U}}(x) dx + \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 \right) + \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&= C_2 C_1 \int_{L_0 - \frac{\delta}{4}}^{L_0 + \frac{\delta}{4}} E_{\mathbf{U}}(x) dx + C_2 \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_2 C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&= C_2 C_1 \int_{L_0 - \frac{\delta}{4}}^{L_0 + \frac{\delta}{4}} E_{\mathbf{U}}(x) dx + (C_2 + 1) \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{L_0 + \frac{\delta}{4}}^L E_{\mathbf{U}}(x) dx \leq C_2 C_1 \int_{L_0 - \frac{\delta}{4}}^{L_0 + \frac{\delta}{4}} E_{\mathbf{U}}(x) dx + (C_2 + 1) \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (3.162)$$

Portanto, somando (3.161) e (3.162), podemos concluir

$$\begin{aligned}
\int_0^L E_{\mathbf{U}}(x) dx &= \int_0^{L_0 - \frac{\delta}{4}} E_{\mathbf{U}}(x) dx + \int_{L_0 - \frac{\delta}{4}}^{L_0 + \frac{\delta}{4}} E_{\mathbf{U}}(x) dx + \int_{L_0 + \frac{\delta}{4}}^L E_{\mathbf{U}}(x) dx \\
&\leq C_2 C_1 \int_{L_0 - \frac{\delta}{4}}^{L_0 + \frac{\delta}{4}} E_{\mathbf{U}}(x) dx + (C_2 + 1) \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \int_{L_0 - \frac{\delta}{4}}^{L_0 + \frac{\delta}{4}} E_{\mathbf{U}}(x) dx \\
&\quad + C_2 C_1 \int_{L_0 - \frac{\delta}{4}}^{L_0 + \frac{\delta}{4}} E_{\mathbf{U}}(x) dx + (C_2 + 1) \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&= (2 C_2 C_1 + 1) \int_{L_0 - \frac{\delta}{4}}^{L_0 + \frac{\delta}{4}} E_{\mathbf{U}}(x) dx + 2 (C_2 + 1) \varepsilon \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Logo, existe uma constante positiva  $C$ , tal que

$$\int_0^L E_{\mathbf{U}}(x) dx \leq C \int_{L_0 - \frac{\delta}{4}}^{L_0 + \frac{\delta}{4}} E_{\mathbf{U}}(x) dx + \varepsilon C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2.$$

A conclusão segue das desigualdades do Teorema 3.23.  $\square$

**Corolário 3.26.** *Dado  $\varepsilon > 0$ , existe uma constante positiva  $C$  tais que as seguintes desigualdades são verdadeiras*

$$\|(i\beta I_d - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \begin{cases} C, & \text{se } \chi = \chi_0 = 0, & (3.163a) \\ C|\beta|^2 \chi_0^2, & \text{se } \chi = 0 \text{ e } \chi_0 \neq 0, & (3.163b) \\ C|\beta|^4 \chi^4, & \text{se } \chi \neq 0 \text{ e } \chi_0 = 0, & (3.163c) \\ C|\beta|^4 \chi^4 \chi_0^4, & \text{se } \chi \neq 0 \text{ e } \chi_0 \neq 0. & (3.163d) \end{cases}$$

**Demonstração.** Devemos analisar separadamente cada estimativa

**1º Caso: Prova da estimativa encontrada para o caso em que  $\chi = \chi_0 = 0$ .**

Deste modo, por meio de (3.159a), podemos obter

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C \int_0^L E_{\mathbf{U}}(x) dx \\ &\leq \varepsilon C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned} \quad (3.164)$$

sendo  $C$  uma constante positiva.

Assim, reorganizando e reagrupando de maneira conveniente (3.164), obtemos

$$\left(1 - \varepsilon C - \frac{C}{|\beta|}\right) \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Tomando  $\varepsilon$  suficientemente pequeno e  $|\beta|$  suficientemente grande, concluímos que

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Uma vez que sabemos que  $\mathbf{U} \in D(\mathcal{A})$  é a única solução da equação resolvente, segue que para alguma constante positiva  $C$ , temos

$$\|(i\beta I_d - \mathcal{A})^{-1} \mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} \leq C \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}.$$

Logo,

$$\|(i\beta I_d - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \sup_{\substack{\mathbf{F} \in \mathcal{H}, \\ \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}=1}} \{ \|(i\beta I_d - \mathcal{A})^{-1} \mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} \} \leq C,$$

para alguma constante positiva  $C$ .

**2º Caso: Prova da estimativa encontrada para o caso em que  $\chi = 0$  e  $\chi_0 \neq 0$ .**

Desta forma, segue de (3.159b) que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq C \int_0^L E_{\mathbf{U}}(x) dx \\ &\leq \varepsilon C \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon |\beta|^4 \chi_0^4 \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2, \end{aligned} \quad (3.165)$$

no qual  $C$  é uma constante positiva.

Sendo assim, reorganizando e reagrupando de maneira adequada (3.165), temos

$$\left(1 - \varepsilon C - \frac{C}{|\beta|}\right) \|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C_\varepsilon |\beta|^4 \chi_0^4 \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Tomando  $\varepsilon$  suficientemente pequeno e  $|\beta|$  suficientemente grande, podemos obter

$$\|\mathbf{U}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C |\beta|^4 \chi_0^4 \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Como sabemos que  $\mathbf{U} \in D(\mathcal{A})$  é a única solução da equação resolvente, segue que para alguma constante positiva  $C$ , obtemos

$$\|(i\beta I_d - \mathcal{A})^{-1} \mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} \leq C |\beta|^2 \chi_0^2 \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}.$$

Logo,

$$\|(i\beta I_d - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \sup_{\substack{\mathbf{F} \in \mathcal{H}, \\ \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}=1}} \{ \|(i\beta I_d - \mathcal{A})^{-1} \mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} \} \leq C |\beta|^2 \chi_0^2,$$

para alguma constante positiva  $C$ .

**3º e 4º Caso: Prova da estimativa encontrada para o caso em que  $\chi \neq 0$  e  $\chi_0 = 0$  ou para o caso em que  $\chi \neq 0$  e  $\chi_0 \neq 0$ .**

A prova de ambos os casos é análoga ao 2º caso.  $\square$

**Teorema 3.27.** *Seja  $\mathbf{U}_0 = (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1)^\top \in D(\mathcal{A})$ . Então, para o caso em que  $\chi = \chi_0 = 0$ , existem constantes positivas  $C$  e  $\kappa$ , tais que*

$$\|S(t)\mathbf{U}_0\|_{\mathcal{H}} \leq C e^{-\kappa t} \|\mathbf{U}_0\|_{\mathcal{H}}, \quad t \rightarrow \infty,$$

em outras palavras, o semigrupo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  associado ao sistema (3.1)-(3.5) é exponencial-

mente estável. Já para os demais casos, existe uma constante positiva  $C$ , tal que

$$\|S(t)\mathbf{U}_0\|_{\mathcal{H}} \leq \begin{cases} \frac{C}{t^{\frac{1}{2}}} \|\mathbf{U}_0\|_{D(\mathcal{A})}, & t \rightarrow \infty \text{ se } \chi = 0 \text{ e } \chi_0 \neq 0, & (3.166a) \\ \frac{C}{t^{\frac{1}{4}}} \|\mathbf{U}_0\|_{D(\mathcal{A})}, & t \rightarrow \infty \text{ se } \chi \neq 0 \text{ e } \chi_0 = 0, & (3.166b) \\ \frac{C}{t^{\frac{1}{4}}} \|\mathbf{U}_0\|_{D(\mathcal{A})}, & t \rightarrow \infty \text{ se } \chi \neq 0 \text{ e } \chi_0 \neq 0, & (3.166c) \end{cases}$$

isso significa que, o semigrupo  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  associado ao sistema (3.1)-(3.5) decai para zero com taxa racional.

**Demonstração.** Primeiramente mostraremos que a solução da estimativa encontrada para o caso em que  $\chi = \chi_0 = 0$  possui decaimento exponencial.

Deste modo, por meio do Lema 3.8 e da estimativa (3.163a), podemos aplicar o Teorema 2.48 e concluir que o sistema (3.1)-(3.5) é exponencialmente estável.

Agora, resta apenas provar que as soluções das estimativas encontradas nos demais casos tem decaimento com taxa racional.

Desta forma, por meio do Lema 3.8 e das estimativas (3.163b), (3.163c) e (3.163d) conseguimos aplicar o Teorema 2.51 e obter

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = O(t^{-\frac{1}{\vartheta}}), \quad t \rightarrow \infty,$$

sendo

$$\begin{cases} \vartheta = 2 & \text{se } \chi = 0 \text{ e } \chi_0 \neq 0, \\ \vartheta = 4 & \text{se } \chi \neq 0 \text{ e } \chi_0 = 0, \\ \vartheta = 4 & \text{se } \chi \neq 0 \text{ e } \chi_0 \neq 0. \end{cases}$$

Então,

$$\|S(t)\mathcal{A}^{-1}\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{\vartheta}}} \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}}, \quad \mathbf{F} \in \mathcal{H},$$

para alguma constante positiva  $C$ .

Como  $0 \in \varrho(\mathcal{A})$ , temos que o operador  $\mathcal{A}$  é bijetor, então existe  $\mathbf{U}_0 \in D(\mathcal{A})$ , tal que,  $\mathcal{A}\mathbf{U}_0 = \mathbf{F}$ , sendo assim temos

$$\begin{aligned} \|S(t)\mathbf{U}_0\|_{\mathcal{H}} &\leq \frac{C}{t^{\frac{1}{\vartheta}}} \|\mathcal{A}\mathbf{U}_0\|_{\mathcal{H}} \\ &\leq \frac{C}{t^{\frac{1}{\vartheta}}} \|\mathbf{U}_0\|_{D(\mathcal{A})}. \end{aligned}$$

Portanto, nesses casos a solução decai para zero com taxa racional.  $\square$

## 4 CONCLUSÃO

Neste trabalho consideramos o sistema de Bresse com mecanismo dissipativo do tipo friccional presente apenas na equação do ângulo de rotação da seção transversal, sendo que o principal objetivo alcançado foi juntamente com o Teorema da Desigualdade de Observabilidade mostrar que o sistema é exponencialmente estável quando  $\chi = \chi_0 = 0$ . Caso contrário, concluímos que o sistema possui estabilidade com taxa racional. Além disso, tendo em vista os resultados encontrados neste trabalho, podemos dizer que conseguimos melhorar os resultados obtidos por Boussouira, Rivera e Almeida Júnior em [5] e como consequência final dos resultados e das pesquisas realizadas neste trabalho apresentaremos a Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Comparação entre resultados obtidos neste trabalho e os encontrados na literatura sobre estabilidade com taxa racional.

Referência	Condição de Fronteira	Relação do Coeficiente	Taxa
Trabalho Atual		$\chi = 0$ e $\chi_0 \neq 0$	$\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$
		$\chi \neq 0$ e $\chi_0 = 0$	$\frac{1}{t^{\frac{1}{4}}}$
		$\chi \neq 0$ e $\chi_0 \neq 0$	$\frac{1}{t^{\frac{1}{4}}}$
[15]	Dirichlet-Neumann	$E \neq G$	$\left(\frac{\ln t}{t}\right)^{\frac{1}{4}} \ln t$
	Dirichlet		$\left(\frac{\ln t}{t}\right)^{\frac{1}{8}} \ln t$
[11]		$\chi = 0$ e $\chi_0 \neq 0$	$\frac{1}{t^{\frac{1}{3}-\varepsilon}}$
		$\chi \neq 0$ e $\chi_0 = 0$	$\frac{1}{t^{\frac{1}{6}-\varepsilon}}$
		$\chi \neq 0$ e $\chi_0 \neq 0$	$\frac{1}{t^{\frac{1}{6}-\varepsilon}}$
[14]		$\chi_0 \neq 0$ e $\tau = 0$	$\frac{1}{t^{\frac{1}{16}}}$
		$\chi \neq 0, \chi_0 = 0$ e $\tau = 0$	$\frac{1}{t^{\frac{1}{4}}}$
		$\chi_0 \neq 0$ e $\tau > 0$	$\frac{1}{t^{\frac{1}{32}}}$
		$\chi \neq 0, \chi_0 = 0$ e $\tau > 0$	$\frac{1}{t^{\frac{1}{8}}}$
		$\chi = 0, \chi_0 = 0$ e $\tau > 0$	$\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$
[5]	Dirichlet	$\chi = 0$ e $\chi_0 \neq 0$	$\frac{1}{t^{\frac{1}{3}-\varepsilon}}$
		$\chi \neq 0$ e $\chi_0 = 0$	$\frac{1}{t^{\frac{1}{6}-\varepsilon}}$
		$\chi \neq 0$ e $\chi_0 \neq 0$	$\frac{1}{t^{\frac{1}{6}-\varepsilon}}$
[2]		$\chi \neq 0$	$t^{-\frac{1}{2}}$
[22]		$\frac{Gh}{\rho_1} \neq \frac{EI}{\rho_2}$	$\frac{\ln t}{t^{\frac{1}{2}}} \ln t$

Fonte: Elaborada pela autora.

## REFERÊNCIAS

- [1] ADAMS, R. A., AND FOURNIER, J. J. F. *Sobolev Spaces*, vol. 140. Elsevier, 2003.
- [2] ALVES, M. O., FATORI, L. H., JORGE SILVA, M. A., AND MONTEIRO, R. N. Stability and optimality of decay rate for a weakly dissipative Bresse system. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 38, 5 (2014), 898–908.
- [3] BENAÏSSA, A., MILOUDI, M., AND MOKHTARI, M. Global existence and energy decay of solutions to a Bresse system with delay terms. *Comment. Math. Univ. Carolin.* 56, 2 (2015), 169–186.
- [4] BORICHEV, A., AND TOMILOV, Y. Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups. *Mathematische Annalen* 347, 2 (2010), 455–478.
- [5] BOUSSOUIRA, F., RIVERA, J. M., AND ALMEIDA JÚNIOR, D. S. Stability to weak dissipative Bresse system. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 374, 2 (2011), 481–498.
- [6] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [7] BREZIS, H. *Analyse Fonctionnelle Théorie et Applications*. Masson, Paris, 1983.
- [8] CAVALCANTI, M. M., AND CAVALCANTI, V. N. D. *Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev*. Eduem, Maringá, 2009.
- [9] ENGEL, K. J., AND NAGEL, R. *A Short Course on Operator Semigroups*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [10] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*, vol. 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [11] FATORI, L. H., AND RIVERA, J. E. M. Rates of decay to weak thermoelastic Bresse system. *IMA Journal of Applied Mathematics* 75, 6 (2010), 881–904.
- [12] KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*, vol. 1. Wiley New York, 1978.
- [13] LAGNESE, J. E., LEUGERIN, G., AND SCHMIDT, E. J. P. G. Modelling of dynamic networks of thin thermoelastic beams. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 16, 5 (1993), 327–358.

- [14] LIMA, P. R., AND SARE, H. D. F. Stability of thermoelastic Bresse systems. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP* 70, 3 (2019), 1–33.
- [15] LIU, Z., AND RAO, B. Energy decay rate of the thermoelastic Bresse system. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP* 60, 1 (2009), 54–69.
- [16] ODEN, J. T., AND DEMKOWICZ, L. *Applied Functional Analysis*. Chapman and Hall/CRC, 2010.
- [17] PAZY, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer, New York, 1983.
- [18] PRÜSS, J. On the spectrum of  $C_0$ -semigroups. *Transactions of the American Mathematical Society* 284, 2 (1984), 847–857.
- [19] RIVERA, J. E. M. *Estabilização de Semigrupos & Aplicações*. Série de Métodos Matemáticos, Rio de Janeiro, 2008.
- [20] RIVERA, J. E. M., AND ÁVILA, A. I. Rates of decay to non homogeneous Timoshenko model with tip body. *Journal of Differential Equations* 258, 10 (2015), 3468–3490.
- [21] SANTOS, M. L., AND JÚNIOR, D. S. A. Numerical exponential decay to dissipative Bresse system. *Journal of Applied Mathematics* 2010 (2010), 1–17.
- [22] WEHBE, A., AND YOUSSEF, W. Exponential and polynomial stability of an elastic Bresse system with two locally distributed feedbacks. *Journal of Mathematical Physics* 51, 10 (2010), 1–17.