



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL de LONDRINA

---

HALLYNNEE HÉLLENN PIRES ROSSETTO

**TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM  
SOB UM OLHAR REALÍSTICO**

---

Londrina  
2016

HALLYNNEE HÉLLENN PIRES ROSSETTO

**TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM  
SOB UM OLHAR REALÍSTICO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Regina Luzia Corio de Buriasco

Londrina  
2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Rossetto, Hallynnee Héllenn Pires .

Trajectoria hipotética de aprendizagem sob um olhar realístico / Hallynnee Héllenn Pires Rossetto. - Londrina, 2016.  
105 f. : il.

Orientador: Regina Luzia Corio de Buriasco.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2016.

Inclui bibliografia.

1. Estudo e ensino - Teses. 2. Educação matemática - Teses. 3. Formação de Professores - Teses. I. Buriasco, Regina Luzia Corio de . II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

HALLYNNEE HÉLLENN PIRES ROSSETTO

**TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM  
SOB UM OLHAR REALÍSTICO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Regina Luzia  
Corio de Buriasco  
Universidade Estadual de Londrina – UEL

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Celia Maria Carolino Pires  
Universidade Federal do Mato Grosso do  
Sul - UFMS

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Edilaine Regina dos Santos  
Universidade Estadual de Londrina – UEL

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Pamela Emanuelli Alves  
Ferreira  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 18 de Fevereiro de 2016.

Com amor, aos meus PAIS.

## **AGRADECIMENTO**

A Deus, por tudo.

À minha família, por me orientar nas minhas decisões, por incentivar e apoiar a minha opção pelo estudo, pelo colo nos momentos mais difíceis, por me ensinar o valor do amor, do respeito, do carinho, enfim, por tudo.

À minha orientadora, professora, guia... por todo carinho, amizade, atenção, ensinamentos, conversas.

Às professoras Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup>. Celia Maria Carolino Pires, Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Edilaine Regina dos Santos e Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Pamela Emanuelli Alves Ferreira por terem aceitado o convite para fazer parte da minha banca. Obrigada pelas valiosas sugestões, críticas e observações a respeito do meu trabalho.

Ao GEPEMA, pelas oportunidade de aprender, pelo carinho, amizade. Em especial aqueles que estiveram mais próximos e contribuíram diretamente com o meu trabalho.

Aos meus amigos, em especial, Etiane, Márcia, Viviane, Juliana, anjos na minha vida, pela amizade, carinho, apoio, momentos de descontração, conversas.

Aos meus amigos da turma do mestrado de 2014 por todos os momentos de alegrias, parcerias, estudo.

Aos professores participantes da Oficina de Formação que tornaram possível essa investigação.

Ao CNPq pela bolsa concedida.

Todo conhecimento começa com o sonho. O sonho nada mais é que a aventura pelo mar desconhecido, em busca da terra sonhada. Mas sonhar é coisa que não se ensina, brota das profundezas do corpo, como a alegria brota das profundezas da terra. Como mestre só posso então lhe dizer uma coisa. Contem-me os seus sonhos para que sonhemos juntos.

Rubem Alves

ROSSETTO, Hallynnee Héllenn Pires. **Trajatória Hipotética de Aprendizagem sob um olhar realístico**. 2016. 105f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

## **RESUMO**

Este estudo de cunho interpretativo descreve e analisa a elaboração de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) com a intenção de conhecer como professores que ensinam matemática na Educação Básica lidam com ela. As informações foram coletadas a partir da Oficina de Análise da Produção Escrita em Tarefas de Matemática, uma das ações do Projeto Universal 483266/2012-4, com 16 professores que faziam parte do Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE. Para este estudo, acompanhou-se uma dupla desses professores. A THA, elaborada a partir do modelo de Simon (1995), foi tomada como uma oportunidade de aprendizagem sob a luz do Princípio da Orientação, um dos princípios da Educação Matemática Realística (RME). De modo geral, os docentes apresentaram estratégias e procedimentos da matemática escolar comumente trabalhada na Educação Básica. Acompanhar a elaboração da THA viabilizou identificar elementos que diferenciam a THA na direção de uma sua ampliação: a Trajetória de Ensino e Aprendizagem (TEA).

**Palavras-Chave:** Educação matemática realística. Trajetória hipotética de aprendizagem. Trajetória de ensino e aprendizagem.

ROSSETTO, Hallynnee Héllenn Pires. **Trajectory Learning Hypothetical under a realistic look**. 2016. 105p. Dissertation (Masters in Mathematics Education and Sciences) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

### **ABSTRACT**

This interpretative study describes and analyzes the development of a Hypothetical Learning Trajectory (THA) with the intention to know how Math teachers of Basic education deal with it. All the information was taken from the Writing Production Analysis in Mathematics Tasks Workshop, one of the actions of Universal Project 483266 / 2012-4, of 16 teachers who were part of the Educational Development Program - PDE. For this study were observed two of them. The THA, elaborated based on the Simon model (1995) was taken as a learning opportunity under the Guidance Principle, one of the principles of Realistic Mathematics Education (RME). In general, the teachers presented school mathematics strategies and procedures commonly crafted in Basic Education. Monitoring the development of THA enabled to identify elements that differentiate the THA in the direction of one possible expansion: the Teaching and Learning Trajectory (TEA).

**Keywords:** Realistic mathematics education. Hypothetical learning trajectory. Teaching and learning trajectory.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<b>Figura 01</b> – Ciclo de ensino de matemática .....	23
<b>Figura 02</b> – THA – pontos de vista .....	27
<b>Figura 03</b> – Resolução apresentada por P03 na Tarefa 1 .....	58
<b>Figura 04</b> – Resolução apresentada por P04 na tarefa 1 .....	59
<b>Figura 05</b> – Resolução1 da questão 1 de P03 .....	60
<b>Figura 06</b> – Resolução 2 da questão 1 de P03 .....	61
<b>Figura 07</b> – Resolução da questão 1 de P04 .....	62
<b>Figura 08</b> – Parte 1 da resolução da questão 1 de P04 .....	62
<b>Figura 09</b> – Parte 2 da resolução da questão 1 de P04 .....	63
<b>Figura 10</b> – Parte 1 da resolução da questão 2 de P03.....	64
<b>Figura 11</b> – Parte 2 da resolução da questão 2 de P03 .....	64
<b>Figura 12</b> – Parte 3 da resolução da Questão 2 de P03 .....	65
<b>Figura 13</b> – Parte 1 da resolução da Questão 2 de P04 .....	65
<b>Figura 14</b> – Parte 2 da resolução da questão 2 de P04 .....	65
<b>Figura 15</b> – Parte 1 da resolução da questão 3 de P03 .....	66
<b>Figura 16</b> – Parte 2 da resolução da Questão 3 de P03 .....	67
<b>Figura 17</b> – Parte 1 da resolução da questão 3 de P04.....	67
<b>Figura 18</b> – Parte 2 da resolução da questão 3 de P04.....	68
<b>Figura 19</b> – Parte 1 da Trajetória Hipotética de Aprendizagem de P03 .....	69
<b>Figura 20</b> – Parte 2 da Trajetória Hipotética de Aprendizagem de P03 .....	69
<b>Figura 21</b> – Parte 3 da Trajetória Hipotética de Aprendizagem de P03 .....	70
<b>Figura 22</b> – Parte 4 da Trajetória Hipotética de Aprendizagem de P03 .....	70
<b>Figura 23</b> – Parte 5 da Trajetória Hipotética de Aprendizagem de P03 .....	71
<b>Figura 24</b> – Parte 1 da Trajetória Hipotética de Aprendizagem de P04 .....	72

<b>Figura 25</b> – Parte 2 da Trajetória Hipotética de Aprendizagem de P04 .....	72
<b>Figura 26</b> – Parte 3 da Trajetória Hipotética de Aprendizagem de P04 .....	72
<b>Figura 27</b> – Parte 3 da Trajetória Hipotética de Aprendizagem de P04 .....	73
<b>Figura 28</b> – Parte 5 e 6 da Trajetória Hipotética de Aprendizagem de P04.....	74
<b>Figura 29</b> – Parte 7 da Trajetória Hipotética de Aprendizagem de P04 .....	75
<b>Figura 30</b> – Explicação das siglas e desenrolar da aula .....	79
<b>Figura 31</b> – Resolução 1 e Resolução 2 da questão 2.....	82
<b>Figura 32</b> – Resolução 1 e Resolução 2 da questão 2 .....	83
<b>Figura 33</b> – Elementos que fazem parte de uma Trajetória de Aprendizagem.....	89

## LISTA DE QUADROS

<b>Quadro 01</b> – Origem dos princípios da RME .....	20
<b>Quadro 02</b> – Resumo dos Princípios da RME.....	20
<b>Quadro 03</b> – Ações que representam os três pontos de vista da THA .....	26
<b>Quadro 04</b> – Breve relato dos encontros da oficina .....	35
<b>Quadro 05</b> – Objetivos presentes nas trajetórias de P03, P04 e na THAF Respectivamente .....	75
<b>Quadro 06</b> – Intenções presente nas trajetórias de P03 e na THAF Respectivamente .....	76
<b>Quadro 07</b> – Conteúdo presente nas trajetórias de P03, P04 e na THAF Respectivamente .....	77
<b>Quadro 08</b> – Apresentação presente nas trajetórias de P03 e na THAF Respectivamente .....	78
<b>Quadro 09</b> – Divisão presente na questão 1 nas trajetórias de P03, P04 e na THAF Respectivamente .....	79
<b>Quadro 10</b> – Questionamentos das respostas da divisão nas trajetórias de P03, P04 e na THAF respectivamente .....	80
<b>Quadro 11</b> – Diálogo 1 presente na questão 3 nas trajetórias de P03, P04 e na THAF respectivamente.....	85
<b>Quadro 12</b> – Diálogo 2 presente na questão 3 nas trajetórias de P03, P04 e na THAF respectivamente .....	86
<b>Quadro 13</b> – Diálogo 3 presente na questão 3 nas trajetórias de P03 e na THAF Respectivamente .....	86
<b>Quadro 14</b> - Características da THA.....	90
<b>Quadro 15</b> - Elementos presentes da TEA .....	92

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

RME Educação Matemática Realística

THA Trajetória Hipotética de Aprendizagem

TEA Trajetória de Ensino e Aprendizagem

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	14
<b>2</b>	<b>MOSAICO DE APOIO</b> .....	18
	TESELA 1 – DA RME .....	18
	TESELA 2 – DA TRAJETÓRIA DE APRENDIZAGEM NA PERSPECTIVA DE SIMON .....	22
	TESELA 3 – DA TRAJETÓRIA DE APRENDIZAGEM NA RME .....	28
<b>3</b>	<b>DAS OFICINAS</b> .....	34
3.1	DOS RELATOS .....	36
<b>4</b>	<b>DA DESCRIÇÃO E ANÁLISE</b> .....	52
4.1	ANÁLISE DOS ENUNCIADOS .....	52
4.1.1	A Questão 1 .....	53
4.1.2	A Questão 2 .....	54
4.1.3	A Questão 3 .....	56
4.2	A RESOLUÇÃO DAS TAREFAS .....	58
4.2.1	Questão 1 .....	60
4.2.2	Questão 2 .....	64
4.2.3	Questão 3 .....	66
4.3	ANÁLISE DA 1ª TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM .....	68
4.3.1	Trajétoria Hipotética de Aprendizagem de P03 .....	68
4.3.2	Trajétoria Hipotética de Aprendizagem de P04 .....	71
4.4	ANÁLISE DA VERSÃO FINAL DA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM .....	75
4.4.1	Os objetivos .....	75
4.4.2	Intenções .....	76
4.4.3	Conteúdo .....	77
4.4.4	Apresentação .....	78
4.4.5	Questionamentos .....	79

<b>5</b>	<b>ALGUMAS CONSIDERAÇÕES .....</b>	<b>87</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>98</b>
	<b>APÊNDICE 1 .....</b>	<b>102</b>
	<b>APÊNDICE 2 .....</b>	<b>104</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Investigar como professores que ensinam matemática na Educação Básica lidam com a construção de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem é o objetivo deste trabalho.

A vontade de trabalhar com esse tema começou em 2014 quando a professora de uma disciplina do primeiro ano do curso de Mestrado deu uma tarefa e pediu que cada aluno da disciplina construísse caminhos que os alunos da Educação Básica poderiam seguir para resolvê-la. Que dúvidas eles poderiam ter? Como seria possível lidar com essas dúvidas? por exemplo. Isso despertou muita curiosidade. Após alguns estudos e discussões com a turma e com a professora foi possível, então, descobrir que esse tipo de tarefa era um início para a construção do que é denominado Trajetória Hipotética de Aprendizagem.

Este estudo está inserido em uma das ações do Projeto Universal 483266/2012-4 intitulado "Análise da produção escrita como oportunidade para o desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática", desenvolvido com o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), na Universidade Estadual de Londrina (UEL) e na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS). O projeto tem como principal objetivo investigar potencialidades da análise da produção escrita como oportunidade para o desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática.

O Projeto Universal 483266/2012-4 iniciou suas atividades no primeiro semestre de 2013. Entre as metas do projeto está a produção de, pelo menos, duas dissertações de mestrado nos dois programas de Pós Graduação. Esta é uma delas. A segunda está sendo desenvolvida por outro participante do GEPEMA envolvendo um estudo com uma prova escrita em fases com o mesmo grupo de 16 professores de matemática, da turma de 2014 do Programa de Desenvolvimento Educacional - PDE. Esse grupo de professores participou da Oficina de Análise da Produção Escrita em Tarefas De Matemática, uma das ações do Projeto Universal 483266/2012-4, e sua

produção escrita foi analisada e dela foram recolhidas as informações para as duas dissertações. A oficina foi realizada em uma sala de aula do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina – UEL.

Ao realizar esta investigação com os professores, pretendeu-se que eles vivenciassem, em uma Oficina de Formação, uma oportunidade de aprendizagem utilizando a prática de elaborar uma Trajetória de Aprendizagem, que permitisse um espaço de debate e troca de experiência.

Na abordagem para o ensino de matemática chamada Educação Matemática Realística (RME<sup>1</sup>), para pensar o conhecimento específico de professores, é desejável que o professor possa reexaminar, refletir sobre sua produção, modificando-a sempre que considerar necessário. Esse é o caso da situação envolvida nesta investigação, que faz parte da agenda de ação adotada pelo Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática - GEPEMA<sup>2</sup>. Um dos grandes temas envolvido nos estudos realizados pelos participantes desse grupo é a análise da produção escrita presente em resoluções de tarefas (rotineiras ou não-rotineiras) de matemática, tanto de alunos como de professores.

Dando continuidade aos trabalhos desenvolvidos pelos participantes do GEPEMA acerca de análise da produção escrita, a partir da elaboração de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA), busca-se conhecer como professores que ensinam matemática na Educação Básica lidam com essa elaboração. Daí a relevância deste estudo.

Assim, neste caso, dar continuidade aos trabalhos do GEPEMA pode ser entendido no sentido de se conhecer a elaboração de uma THA assumida como oportunidade de aprendizagem sob a luz do Princípio da Orientação, um dos princípios da RME.

A elaboração das Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem se deu com base no modelo de ensino proposto por Martin Simon a partir da resolução de uma tarefa do PISA. O trabalho desenvolvido na oficina, em

---

<sup>1</sup> *Realistic Mathematics Education*.

<sup>2</sup> O GEPEMA está constituído no Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina. < <http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema>>.

alguns momentos, foi realizado individualmente, outros em duplas ou em grupos, envolvendo:

- resolução individual das tarefas apresentadas;
- discussões em duplas das resoluções individuais buscando identificar possíveis erros e suas razões;
- proposição de encaminhamento pedagógico para sua superação;
- análise do trabalho resultante pelo grupo todo.

Essa estratégia de trabalho adotada atende à perspectiva da RME adotada pelo GEPEMA.

Trabalhar com a construção de Trajetória Hipotética de Aprendizagem possibilita ao professor ter uma visão geral do que poderá desenvolver com os estudantes, retrata uma visão das tomadas de decisões do professor a respeito dos conteúdos e tarefas e permite entender como os processos de ensino e de aprendizagem podem se desenrolar durante esse trabalho. Tudo isso, pode vir a contribuir com o desenvolvimento da prática do professor.

Este estudo tem o objetivo geral de investigar como professores que ensinam matemática na Educação Básica lidam com a construção de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem. Para isso, pretende-se:

- inventariar e analisar as estratégias e procedimentos utilizados pelos professores participantes nas resoluções dos problemas que originaram as Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem.
- analisar como professores que ensinam matemática na Educação Básica lidam com os problemas (por meio das produções escritas, observações, filmagens, áudios).
- relatar, analisar e discutir as intervenções e orientações ocorridas durante o processo de elaboração de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem.

Esta dissertação está estruturada da seguinte forma:

1. Introdução,

## 2. Mosaico de apoio

Tessela 1 – da RME,

Tessela 2 – Da Trajetória de Aprendizagem na perspectiva de  
Simon,

Tessela 3 – Da Trajetória de Aprendizagem na RME,

## 3. Das oficinas,

3.1 Dos relatos,

4. Da descrição e análise,

5. Algumas Considerações

6. Referências.

## 2 MOSAICO<sup>3</sup> DE APOIO

### TESSELA<sup>4</sup> 1 – DA RME

Para o presente estudo foi escolhido como foco de investigação a elaboração de uma THA por professores de Matemática. Assume-se como hipótese de trabalho que a exploração da escrita discursiva durante o processo de elaboração oportuniza uma reflexão dos professores sobre essa experiência. Na perspectiva aqui adotada, desencadear um ambiente de aprendizagem significativo é fazer com que a reflexão sobre a experiência seja crítica e atenta ao próprio conhecimento para que o indivíduo desenvolva seu processo metacognitivo. Esse contexto experiencial faz emergir uma produção de ideias e sentidos que se pode tornar mais familiar tanto para o professor quanto para o aluno. Nesse sentido, encontra-se apoio nos princípios da RME, sobretudo no da orientação.

A RME, uma abordagem desenvolvida na Holanda para o ensino de Matemática, teve como precursor o matemático Hans Freudenthal que considera a “matemática como atividade humana”. Para esse autor, “o que os seres humanos têm de aprender não é a matemática como um sistema fechado, mas sim como uma atividade, o processo de matematização da realidade” (FREUDENTHAL, 1968, p. 7, tradução nossa<sup>5</sup>). A matemática é entendida na RME como o resultado da ação de matematizar (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010a) e, portanto, deve ser aprendida matematizando.

Matematização é organizar a realidade usando ideias e conceitos matemáticos. É a atividade de organização, segundo a qual os estudantes utilizam os conhecimentos e as habilidades adquiridas para descobrir regularidades, relações e estruturas desconhecidas (TREFFERS; GOFFREE, 1985, p. 109, tradução nossa<sup>6</sup>).

<sup>3</sup> Tomado aqui como elementos justapostos.

<sup>4</sup> Peça que compõe um mosaico.

<sup>5</sup> “*What humans have to learn is not mathematics as a closed system, but rather as an activity, the process of mathematizing reality*”.

<sup>6</sup> “[...] *mathematising is as organizing and structuring activity by which acquired knowledge and abilities are called upon to find out still unknown regularities, connections and structures*”.

Segundo Van Den Heuvel-Panhuizen (2000), a educação deve fornecer aos estudantes a oportunidade “guiada” para “reinventar” a matemática, colocando a “mão na massa”. Nessa perspectiva, os estudantes são participantes ativos no processo de ensino e aprendizagem e não meros receptores de uma matemática pronta.

Freudenthal (1991) propõe que se deve dar aos estudantes a oportunidade de serem autores do seu conhecimento por meio do que ele denomina reinvenção guiada. Nessa perspectiva, o estudante

- tem papel ativo no processo de aprendizagem;
- vai tornando-se autor e responsável pelo seu conhecimento matemático;
- desenvolve atitudes que contribuem para reflexão e interesse em novas estratégias de resolução;
- busca entender as resoluções dos outros estudantes, está atento às discussões, justifica suas estratégias (SILVA, 2015).

Para isso, no desenvolvimento do trabalho do professor na sala de aula, não faz sentido mostrar aos alunos exatamente o que eles têm de aprender. Os alunos precisam de um espaço para elaborar conhecimento, ferramentas por eles mesmos. Um requisito é que o professor deve ser capaz de antecipar entendimentos, dúvidas dos alunos para que possa interagir com eles, intervir, como parte da reinvenção guiada. É isso que indica o Princípio da Orientação.

A RME adota seis princípios e cada um reflete uma parte da sua identidade<sup>7</sup>. Alguns desses princípios estão relacionados com a aprendizagem e outros estão ligados à perspectiva de ensino, como é mostrado no Quadro 01.

---

<sup>7</sup> Conjunto de características que distinguem uma coisa e por meio das quais é possível individualizá-la (HOUAISS, 2003).

**Quadro 01** – Origem dos princípios da RME

<b>Ensino</b>	<b>Aprendizagem</b>
Princípio da Realidade Princípio do Entrelaçamento Princípio da Orientação	Princípio da Atividade Princípio da Interatividade Princípio dos Níveis

**Fonte:** A autora.

Os princípios da RME devem ser vistos como uma complexa rede de relações: cada aspecto da aprendizagem pode ser visto com cada aspecto do ensino, relacionados entre si, entrelaçados (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000). Os seis princípios são apresentados no Quadro 02.

**Quadro 02** – Resumo dos Princípios da RME

<b>Princípios</b>	<b>Características</b>
(1) Da Atividade	<ul style="list-style-type: none"> <li>- refere-se à interpretação da matemática como atividade humana (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010);</li> <li>- aprender é uma atividade construtiva (NES, 2009);</li> <li>- as produções dos estudantes são utilizadas para a construção de conceitos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000)</li> </ul>
(2) Da Realidade	<ul style="list-style-type: none"> <li>- a RME tem a função de tornar os alunos capazes de aplicar/utilizar matemática (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010);</li> <li>- o processo de matematização ocorre a partir da exploração de contextos ricos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010);</li> <li>- fenômenos da realidade devem ser organizados por meio da matemática (NES, 2009);</li> <li>- é importante o uso de contextos reais que sejam significativos e naturais ao aluno como ponto de partida para a sua aprendizagem (WIDJAJA; HECK, 2003).</li> </ul>
(3) De Níveis	<ul style="list-style-type: none"> <li>- os alunos passam por vários níveis de compreensão (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010);</li> <li>- os alunos iniciam com seus procedimentos informais e por meio da matematização progressiva e esquematizações avançam para a construção de modelos mais formais (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010);</li> <li>- os modelos passam de "modelo de" para "modelo para" (STREEFLAND, 1991).</li> </ul>

<p>(4) Do Entrelaçamento</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- os domínios matemáticos, como geometria, número, medição e manipulação de dados não são considerados capítulos curriculares isolados, mas fortemente integrados (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010);</li> <li>- os alunos devem desenvolver uma visão integrada da matemática, bem como uma flexibilidade para se conectar a diferentes subdomínios e/ou a outras disciplinas (WIDJAJA; HECK, 2003);</li> <li>- a resolução de problemas de contexto ricos significa muitas vezes que se tem de aplicar uma ampla gama de ferramentas matemáticas e entendimentos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000);</li> <li>- a força do princípio do entrelaçamento é que traz coerência para o currículo. Esse princípio refere-se não só aos diferentes domínios de matemática, mas também podem ser encontradas dentro deles (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000).</li> </ul>
<p>(5) Da Interatividade</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- a aprendizagem matemática não é apenas uma atividade pessoal, mas também uma atividade social (VAN DEN HEUVELPANHUIZEN, 2010);</li> <li>- os alunos devem ter oportunidades para compartilhar suas estratégias e invenções entre si (VAN DEN HEUVELPANHUIZEN, 2010);</li> <li>- a interação entre alunos e professores é uma parte essencial na RME porque a discussão e a colaboração oportunizam a reflexão sobre o trabalho (WIDJAJA; HECK, 2003).</li> </ul>
<p>(6) De Orientação</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- os estudantes devem contar com uma oportunidade "guiada" para "reinventar" a matemática (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010);</li> <li>- o ensino e os programas devem basear-se num conjunto coerente de trajetória de ensino-aprendizagem a longo prazo (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010);</li> <li>- os alunos precisam de espaço para construir conhecimentos matemáticos e ferramentas por si só. Para alcançar isso, os professores têm de proporcionar aos alunos um ambiente de aprendizagem em que esse processo de construção possa surgir (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000).</li> </ul>

**Fonte:** FERREIRA, 2013, p. 38.

O princípio que mais nos interessa neste trabalho é o Princípio da Orientação, que está relacionado às trajetórias de ensino e aprendizagem, foco deste trabalho. Vale ressaltar, entretanto, que não é

possível pensar em trajetórias de ensino e aprendizagem na perspectiva da RME sem considerar os seis princípios e suas relações.

## **TESSELA 2 – DA TRAJETÓRIA DE APRENDIZAGEM NA PERSPECTIVA DE SIMON**

Em 1995, o pesquisador americano Martin Simon publicou o artigo *Reconstructing mathematics pedagogy from a Constructivist Perspective*<sup>8</sup> no qual apresenta uma experiência de ensino e discute a tensão criativa entre os objetivos dos professores para o ensino e a responsabilidade de ser sensível ao pensamento matemático dos estudantes (SIMON, 1995).

Para o autor, é um desafio a tarefa de reconstrução de uma “Pedagogia da Matemática”. O termo “pedagogia” destina-se a significar todas as contribuições para a educação matemática dos estudantes na sala de aula: o trabalho multifacetado do professor, o currículo a ser construído e o desenvolvimento de materiais de ensino (SIMON, 1995).

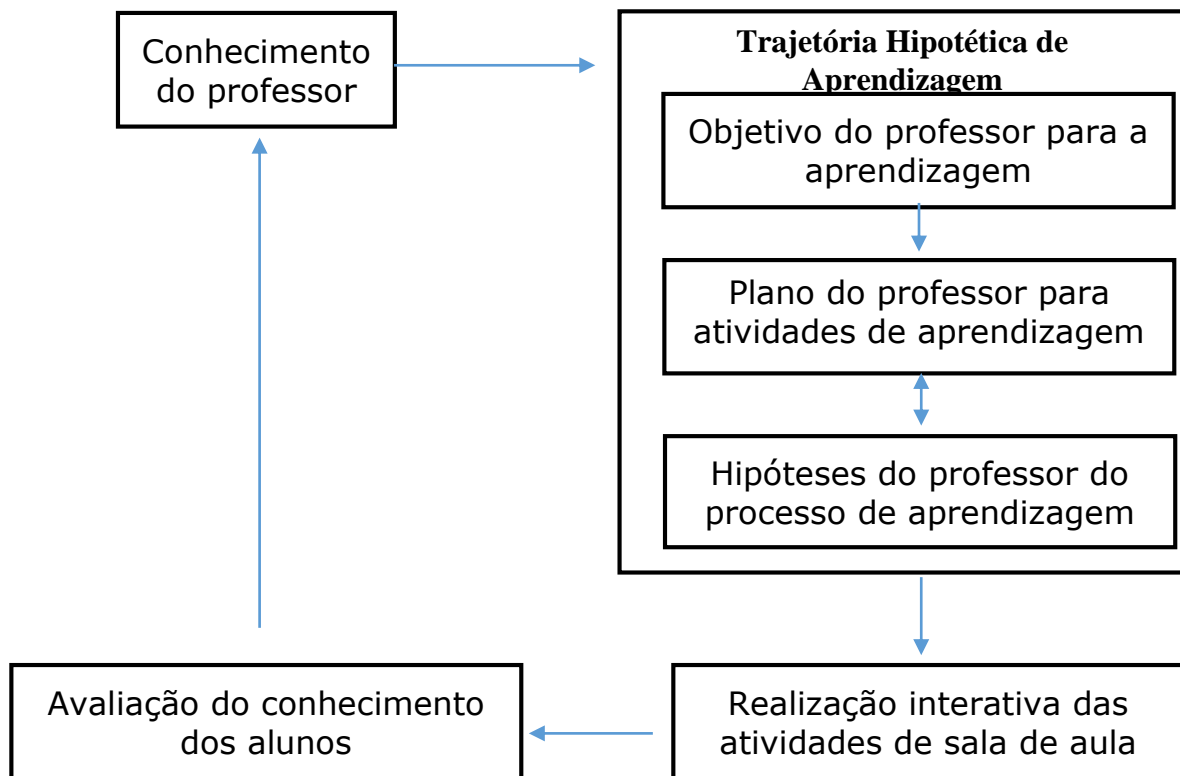
Em suas experiências com alunos, Simon (1995) questionava-se:

“Como poderia entender o pensamento daqueles estudantes e como poderia trabalhar com eles para verificar se seriam capazes de desenvolver raciocínios mais poderosos?” O autor conclui que, nessas experiências com alunos, ficou bem nítida a relação entre o projeto de atividades do professor e a consideração do pensamento que os alunos podem trazer em sua participação nessas atividades – e que conduzem à formulação da idéia de trajetórias hipotéticas de aprendizagem (*apud* PIRES, 2009, p. 154).

Preocupado em estabelecer as inter-relações entre os conhecimentos do professor, seu pensamento, reflexões e tomada de atitudes, Simon desenvolveu o Ciclo de Ensino de Matemática (Figura 1) e, como parte deste modelo, introduziu a noção de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem – THA (SIMON, 1995).

---

<sup>8</sup> SIMON, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 26, n. 2, pp. 114-145.

**Figura 01** - Ciclo de ensino de matemática

**Fonte:** SIMON, 1995, p. 136, tradução nossa.

O Ciclo de Ensino de Matemática retrata uma visão das tomadas de decisões do professor a respeito dos conteúdos e das tarefas (SIMON, 1995). O pensamento/entendimento dos estudantes tem lugar central na estruturação e implementação das atividades de ensino, e a avaliação do conhecimento do aluno pode trazer ajustes a respeito de qualquer conhecimento do professor. Isso possibilita uma nova ou uma modificada Trajetória Hipotética de Aprendizagem – THA<sup>9</sup> (ANGIOLIN, 2009).

Eu uso o termo "trajetória hipotética de aprendizagem" tanto para me referir à previsão do professor como para a trajetória que possibilitará a aprendizagem. É hipotética, porque a verdadeira trajetória de aprendizagem não é cognoscível de antecedência. Isso caracteriza uma expectativa. A aprendizagem individual dos estudantes ocorre de forma

<sup>9</sup> A partir deste momento, a sigla THA será utilizada no lugar de Trajetória Hipotética de Aprendizagem.

idiossincrática, embora muitas vezes em trajetos semelhantes (SIMON, 1995, p. 135, tradução nossa<sup>10</sup>).

Para explicar melhor o termo, Simon propõe uma analogia:

[...] considere que você tenha decidido viajar ao redor do mundo para visitar, na sequência, lugares que você nunca tinha visto. Ir para a França, depois Havaí, depois Inglaterra, sem uma série de itinerário a seguir. Antes, você adquire conhecimento relevante para planejar sua possível jornada. Você faz um plano. Você pode inicialmente planejar toda a viagem ou uma única parte dela. Você estabelece sua viagem de acordo com seu plano. No entanto, você deve fazer constantes ajustes, por causa das condições que irá encontrar. Você continua a adquirir conhecimento sobre a viagem e sobre as regiões que você deseja visitar. Você muda seus planos a respeito da sequência do seu destino. Você modifica o tamanho e a natureza de sua visita, de acordo com o resultado da interação com as pessoas no decorrer do caminho. Você adiciona destinos à sua viagem que não eram de seu conhecimento. O caminho que você utilizará para viajar é sua "trajetória". O caminho que você antecipa em algum ponto é a sua "trajetória hipotética" (SIMON, 1995, p. 136-137, tradução nossa<sup>11</sup>).

Desse modo, por mais que o planejamento seja detalhado, podem ocorrer imprevistos que exijam novas decisões para a continuidade da viagem. Algo semelhante ocorre com a THA, mesmo que o professor desenvolva um plano para sala de aula, ele poderá ser repensado, modificado, pois as interações professor e aluno e as observações do

---

<sup>10</sup> "[...] I use the term "hypothetical learning trajectory" to refer to the teacher's prediction as to the path by which learning might proceed. It is hypothetical because the actual learning trajectory is not knowable in advance. It characterizes an expected tendency. Individual student's learning proceeds along idiosyncratic, although often similar, paths".

<sup>11</sup> [...]. Consider that you have decided to sail around the world in order to visit places that you have never seen. One does not do this randomly (e.g., go to France, then Hawaii, then England), but neither is there one set itinerary to follow. Rather, you acquire as much knowledge relevant to planning your journey as possible. You then make a plan. You may initially plan the whole trip or only part of it. You set out sailing according to your plan. However, you must constantly adjust because of the conditions that you encounter. You continue to acquire knowledge about sailing, about the current conditions, and about the areas that you wish to visit. You change your plans with respect to the order of your destinations. You modify the length and nature of your visits as a result of interactions with people along the way. You add destinations that prior to your trip were unknown to you. The path that you travel is your "trajectory." The path that you anticipate at any point in time is your "hypothetical trajectory."

professor fazem com que isso ocorra. Essa modificação da THA não ocorre somente durante o planejamento entre as aulas, pois

o professor está continuamente empenhado em ajustar a trajetória de aprendizado que ele “hipotetizou” [...]. [...] alterações e modificações podem ser feitas em um ou todos os três componentes da trajetória hipotética de aprendizagem: a meta, as atividades, ou o processo hipotético de aprendizagem (SIMON, 1995, p. 138, tradução nossa<sup>12</sup>).

A THA, uma alternativa para o professor em sala de aula, é constituída por três componentes:

1. o objetivo do professor com direções definidas para a aprendizagem de seus alunos;
2. as atividades de ensino;
3. o processamento hipotético de aprendizagem (uma suposição de como o pensamento e o entendimento dos alunos serão colocados em ação no contexto de aprendizagem das atividades) (SIMON, 1995, p. 136, tradução nossa<sup>13</sup>).

Por um lado, as possíveis perguntas e dúvidas previstas na elaboração da THA podem permitir ao professor maior segurança no gerenciamento da elaboração da proposta. Por outro lado, durante o desenvolvimento da THA em sala de aula, as perguntas e dúvidas previstas ou não na elaboração da THA podem permitir ao professor maior segurança no gerenciamento da execução da proposta. Ao relatar as hipóteses, professores podem utilizar diálogos hipotéticos com os alunos para prever perguntas que possam levar os alunos a refletirem, pensarem a respeito da tarefa.

---

<sup>12</sup> *“The teacher is continually engaged in adjusting the learning trajectory that he has hypothesized [...]. [...] modification, changes may be made at any or all of the three components of the hypothetical learning trajectory: the goal, the activities, or the hypothetical learning process”.*

<sup>13</sup> *“The hypothetical learning trajectory is made up of three components: the learning goal that defines the direction, the learning activities, and the hypothetical learning process - a prediction of how the student's thinking and understanding will evolve in the context of the learning activities”.*

A proposta de THA enfatiza a importância da relação entre a meta pretendida com o raciocínio das intenções/decisões de ensino e a hipótese desse percurso da aprendizagem. Para Simon (1995), há uma relação simbiótica entre o desenvolvimento de uma THA e o desenvolvimento das tarefas de aprendizagem: a origem das ideias para a elaboração das tarefas de aprendizagem depende das hipóteses do professor a respeito do desenvolvimento do pensamento e da aprendizagem dos alunos.

É possível olhar para a THA sob três pontos de vista: da elaboração (planejamento), da execução (processo) e para depois da execução (replanejamento), como apresentado no Quadro 03.

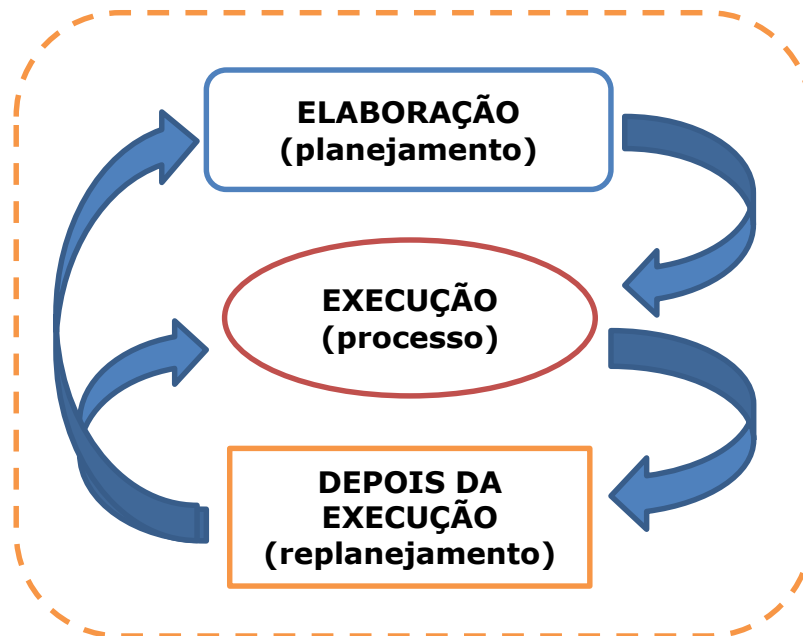
**Quadro 03** – Ações que representam os três pontos de vista da THA

<p><b>ELABORAÇÃO (planejamento)</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• as tomadas de decisões do professor a respeito dos conteúdos e das tarefas;</li> <li>• previsão do professor sobre a trajetória que possibilitará a aprendizagem;</li> <li>• diálogos hipotéticos entre professor e alunos;</li> <li>• previsão de perguntas que podem levar os alunos a refletirem, pensarem a respeito da tarefa.</li> <li>• previsão de perguntas que podem levar os alunos a refletirem, pensarem a respeito da tarefa.</li> </ul>
<p><b>EXECUÇÃO (processo)</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• o pensamento/ entendimento dos estudantes tem lugar central na estruturação e implementação das tarefas de ensino;</li> <li>• podem ocorrer imprevistos que exijam novas decisões para a continuidade do trabalho;</li> <li>• o professor está continuamente empenhado em ajustar a trajetória de aprendizado que ele "hipotetizou";</li> <li>• alterações e modificações podem ser feitas em um ou todos os três componentes da trajetória hipotética de aprendizagem;</li> <li>• os estudantes também fazem perguntas, e o professor que encaminha a THA a partir das possíveis dúvidas e perguntas deles.</li> </ul>
<p><b>DEPOIS DA EXECUÇÃO (replanejamento)</b></p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• a avaliação do conhecimento do aluno pode trazer ajustes a respeito de qualquer conhecimento do professor;</li> <li>• o plano para sala de aula, poderá ser repensado, modificado, pois as interações professor – aluno e as observações do professor podem fazer com que isso ocorra.</li> </ul>

**Fonte:** A autora.

É possível observar que algumas ações descritas no momento da elaboração (planejamento) também podem ser observadas no momento da execução (processo) e vice-versa. Pode-se observar isso na ação de prever perguntas que levam os alunos a refletir, pensar a respeito da tarefa. No Quadro 03, essa ação aparece no momento da elaboração (planejamento), mas poderia ser pensada na execução (processo), pois é importante que o professor faça perguntas que auxiliem os estudantes na resolução da tarefa.

**Figura 02** - THA – pontos de vista



**Fonte:** A autora.

Simon e Tzur (2004, p. 93, tradução nossa<sup>14</sup>) apresentam características de uma THA inseridas no ciclo de ensino de Matemática:

1. A construção de uma THA é baseada na compreensão do conhecimento atual dos estudantes envolvidos.
2. Uma THA é um veículo para o planejamento da aprendizagem de conceitos matemáticos específicos.

<sup>14</sup> "1. Generation of an HLT is based on understanding of the current knowledge of the students involved. 2. An HLT is a vehicle for planning learning of particular mathematical concepts. 3. Mathematical tasks provide tools for promoting learning of particular mathematical concepts and are, therefore, a key part of the instructional process. 4. Because of the hypothetical and inherently uncertain nature of this process, the teacher is regularly involved in modifying every aspect of the HLT.

3. Tarefas matemáticas proporcionam ferramentas para promover a aprendizagem de determinados conceitos matemáticos e, assim, são uma parte fundamental do processo de ensino.
4. Devido à natureza hipotética e inerentemente incerta deste processo, o professor está frequentemente envolvido na modificação de todos os aspectos da THA.

### **TESSELA 3 – DA TRAJETÓRIA DE APRENDIZAGEM NA RME**

No âmbito da RME, alguns autores (DE LANGE, 1999; GRAVEMEIJER e DOORMAN, 1999; GRAVEMEIJER e TERWEL, 2000; AMERON, 2002; KWON, 2002; BAKKER, DOORMAN e DRIJVERS, 2003; GRAVEMEIJER, 2004; VAN DEN AKKER, 2006; GRAVEMEIJER, 2007) utilizam a denominação THA, mas outras denominações também podem ser encontradas, tais como Trajetória de Aprendizagem, em Drijvers (2001), Doorman (2002), Keijzer (2004), Sembiring (2008), Gravemeijer e Doorman (2009); e Trajetória de Ensino-Aprendizagem, em Van Den Heuvel-Panhuizen (2000a, 2000b, 2001a, 2001b, 2003a, 2003b, 2005a, 2005b, 2010, 2012), Van Den Heuvel-Panhuizen et al, (2009) e Doorman (2007).

Elaborar uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem – TEA<sup>15</sup> dá oportunidade aos professores de tentarem antecipar mentalmente atividades nas quais os estudantes se envolvem quando participam das tarefas propostas e de considerarem se essas atividades estão relacionadas com os objetivos definidos (GRAVEMEIJER, 2004, 2007). O professor imagina uma possível trajetória que o estudante percorrerá até chegar à solução de uma tarefa, essa antecipação envolve as reações dos estudantes (AMERON, 2002) e, mais, deve levar em conta a situação atual da sala de aula e os seus próprios objetivos (GRAVEMEIJER e TERWEL, 2000).

No que diz respeito ao papel do professor, além de ter a função de orientar o processo de aprendizagem dos estudantes (VAN DEN

---

<sup>15</sup> Neste trabalho a sigla TEA será utilizada para se referir à Trajetória de Ensino e Aprendizagem.

HEUVEL-PANHUIZEN, 2000), deve criar ambientes que oportunizem discussões, que levem os estudantes a refletir, considerar situações próximas, e, ainda, planejar todas essas ações. O professor, quando planeja suas aulas, já está delineando um caminho, uma trajetória que pretende seguir com os estudantes (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010).

Para Van den Heuvel-Panhuizen (2000b, 2001a, 2001b, 2002), uma trajetória de ensino e aprendizagem é uma descrição de caminhos que podem ser percorridos, não apenas, no processo de aprendizagem, mas também no de ensino. Há que ter um entrelaçamento entre estes três aspectos

- uma **trajetória de aprendizagem** que dá uma visão geral do processo de aprendizagem dos estudantes;
- uma **trajetória de ensino**, contendo indicações didáticas para o ensino e de como articular-se com o processo de aprendizagem;
- um **esquema dos conteúdos**, indicando quais os elementos centrais do currículo matemático devem ser ensinados (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2002 p., grifos nossos).

De modo geral, o primeiro aspecto diz respeito aos hipotéticos caminhos que os estudantes podem seguir para a aprendizagem. O professor pode partir de diferentes estratégias de resolução que imagina que os estudantes utilizarão. Pode basear suas hipóteses em experiências anteriores de aulas do mesmo conteúdo ou, ainda, em experiências de outros professores e pesquisadores que abordaram os mesmos assuntos (SILVA, 2015).

O segundo aspecto, trajetória de ensino, é uma descrição dos “passos iniciais que o professor seguirá para trabalhar com os conteúdos propostos, possíveis encaminhamentos a partir do tipo de estratégias que os estudantes podem usar” (SILVA, 2015, p. 58), descrição das tarefas a serem trabalhadas e dos objetivos pretendidos (SANTOS, 2014).

O terceiro e último aspecto diz respeito aos conteúdos do currículo que o professor espera trabalhar em sala de aula e que “não compõem uma lista rígida do que será trabalhado em sala, mas

possibilidades de trabalho a partir das tarefas” (SILVA, 2015, p. 58). Os estudantes não necessariamente utilizarão os conteúdos listados pelo professor, eles podem utilizar estratégias que possibilitem o trabalho com outros conteúdos (SILVA, 2015).

Uma trajetória de ensino e aprendizagem não deve ser considerada como um regime passo a passo, estritamente linear, nem como um livro de receita. Deve ser vista de forma mais ampla e levar em conta:

- os processos individuais de aprendizagem dos estudantes;
- as descontinuidades no processo de aprendizagem, já que, às vezes, os estudantes apresentam progressos e, em outras, podem ter recaídas;
- o fato de os estudantes serem capazes de aprender, simultaneamente, múltiplas habilidades e que diferentes conceitos podem se desenvolver ao mesmo tempo, tanto dentro como fora da área de matemática;
- diferenças que podem aparecer no processo de aprendizagem na escola como resultado das diferenças de situações de aprendizagem fora da escola;
- os diferentes níveis de domínio de certas habilidades que os estudantes possuem (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010, p. 28, tradução nossa<sup>16</sup>).

Utilizar trajetórias de ensino e aprendizagem implica que o trabalho com as tarefas tenha uma perspectiva longitudinal, ou seja, o trabalho com as tarefas não se limita a resolvê-las e discutir as resoluções, compreende, também, exploração dos conteúdos matemáticos envolvidos, nas diferentes estratégias e possibilidades de matematização a partir das resoluções dos alunos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000).

O principal objetivo de uma TEA é a possibilidade de o professor ter, por meio de uma descrição, uma visão geral do que poderá desenvolver com os estudantes. A trajetória de ensino e aprendizagem

---

<sup>16</sup> "- los singularidad de los procesos de aprendizaje de cada alumno; - las descontinuidades em los procesos de aprendizaje, ya que a veces los niños progresan a saltos y otras veces pueden tener recaídas; - el hecho de q ellos alunos son capaces de aprender múltiples habilidades simultáneamente y que diferentes conceptos pueden estar en desarrollo al mismo tiempo, tanto dentro como fuera del área de matemáticas; - las diferencias que pueden aparecer em el proceso de aprendizaje em la escuela como resultado de disparidades em situaciones de aprendizaje fuera da escuela; - los diferentes niveles de dominio de ciertas habilidades que los niños poseen".

serve como um guia, dá uma visão geral dos processos de ensino e aprendizagem e fornece aos professores um "mapa educacional mental", que pode ajudá-los a tomar decisões didáticas (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000a, 2001a, 2002). Eis algumas características da trajetória de ensino e aprendizagem.

- Em primeiro lugar, a trajetória é mais do que uma coleção das metas a serem atingidas para todas as diferentes séries. Ao invés de uma lista de habilidades isoladas, a trajetória torna claro como as habilidades são construídas em conexão umas com as outras. Ela mostra o que está vindo mais cedo e o que virá mais tarde. Em outras palavras, a característica mais importante da trajetória de ensino-aprendizagem é a sua perspectiva longitudinal.
- Uma segunda característica é a sua dupla perspectiva: a de metas a serem atingidas e a do quadro de referência do professor. As trajetórias de ensino e aprendizagem não apenas descrevem os pontos de referência na aprendizagem dos alunos que podem ser reconhecidos em rota, mas também retratam as principais atividades no ensino que levam a esses pontos de referência.
- A terceira característica é a sua coerência inerente, baseada na distinção de níveis. A descrição deixa claro que o que é aprendido em um estágio é compreendido e executado em um nível mais elevado em uma fase seguinte. Um padrão recorrente de transições interligadas para um nível superior forma o elemento de ligação na trajetória. É essa característica de níveis dos processos de aprendizagem, que também é um elemento constitutivo da abordagem holandesa para a educação matemática, que traz coerência longitudinal para a trajetória de ensino e aprendizagem. Outra implicação crucial desta característica de níveis é que os alunos podem compreender algo em diferentes níveis. Em outras palavras, eles podem trabalhar nos mesmos problemas sem estar no mesmo nível de compreensão. A distinção de níveis de compreensão, que podem ter aparências diferentes para diferentes subdomínios dentro de todo o domínio de números, é muito proveitosa para trabalhar no progresso da compreensão das crianças. Isso oferece pontos de apoio para estimular esse progresso.
- O quarto atributo das trajetórias de ensino e aprendizagem é o novo formato de descrição escolhido. A descrição não é uma simples lista de habilidades e conhecimentos para serem alcançados, nem uma formulação rigorosa dos parâmetros comportamentais que podem ser testados diretamente. Em vez disso, o esboço de uma descrição narrativa, completada com muitos exemplos, é dado no desenvolvimento contínuo que ocorre no processo de ensino e aprendizagem (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2003a, p.4).

Ao elaborar as trajetórias, o professor pensa em diferentes resoluções que os estudantes podem apresentar ao lidar com uma tarefa (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2001b). Ele tenta prever, levanta conjecturas a respeito do que pode ocorrer em sala de aula e de como ele pode agir frente a isso. A descrição da TEA proporciona uma visão da situação em que a classe se encontra (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2001b, 2010).

Na maioria das vezes, as aulas na perspectiva da RME acontecem em pequenos grupos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000a, 2000b, 2005b) e é respeitado o nível de compreensão dos alunos, que podem trabalhar nos mesmos problemas sem estar no mesmo nível de compreensão, cada um seguindo seu caminho de aprendizagem (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000a, 2000b, 2005b).

Uma aula na perspectiva da RME apresenta algumas características:

- a maneira como o ambiente escolar é organizado tende a proporcionar maior interação entre os estudantes, permitindo que eles participem ativamente da aula e é comum trabalharem em grupos;
- é frequente as aulas serem “barulhentas”, com conversas, discussões e debates por parte dos alunos;
- a troca de informações entre aluno e aluno e aluno e professor é constante;
- o professor tem o papel de guia durante as aulas, fazendo os encaminhamentos necessários para que os alunos continuem trabalhando;
- é possível que diferentes alunos estejam trabalhando em diferentes soluções para os problemas, pois os conteúdos não são trabalhados de forma estanque (OLIVEIRA, 2014, p. 47).

Para explorar as resoluções que os estudantes apresentam, o professor pode convidar regularmente as crianças para apresentar suas ideias e soluções, para discuti-las com a classe e relacioná-las umas com as outras (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2001b). Esse procedimento coloca as soluções propostas à disposição de todo o grupo, o que cria possibilidades de progresso (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, p. 25-26,

2010). Isso só pode funcionar bem se o professor tiver uma visão clara da trajetória de aprendizagem e souber em que momento certas ideias e soluções podem ser esperadas.

A descrição da trajetória de ensino e aprendizagem aponta não só onde o estudante deve chegar, mas também o longo caminho que seguirá até chegar lá (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010). Esse caminho não é o mesmo para cada estudante, pois, cada um segue seu caminho de aprendizagem (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000a, 2000b, 2001b, 2005b).

Trabalhar com trajetórias de ensino e aprendizagem não implica em construir uma sequência de passos que serão rigidamente seguidos pelo professor ou pelos estudantes, até porque não há garantia de que seguirão o mesmo caminho na mesma velocidade no desenvolvimento da trajetória de aprendizagem, ou de que os conteúdos previstos pelo professor serão trabalhados pelos estudantes (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000; BAKKER; DOORMAN; DRIJVERS, 2003).

### **3 DAS OFICINAS**

A pesquisa é de natureza qualitativa, na qual houve uma interação entre o pesquisador e a situação estudada, dado o interesse em compreender as maneiras particulares com que os sujeitos da pesquisa interpretam as situações vividas e as relações em que estão envolvidos. Esse tipo de pesquisa enfatiza o processo e não os resultados finais, porque, mais do que testar teorias, interessa-se em buscar novas formas de entender a realidade.

As informações para o desenvolvimento desta pesquisa foram coletadas em uma oficina do Projeto Universal realizada no período de agosto a dezembro de 2014. Essa oficina foi desenvolvida para trabalhar na formação continuada de professores que ensinam matemática.

Participaram da oficina 16 professores de Matemática da Educação Básica que faziam parte do Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE; três professoras do Departamento de Matemática da UEL, ministrantes da oficina; três mestrandos do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática – PECEM da UEL aqui denominados colaboradores da oficina; um aluno da graduação que desenvolvia seu projeto de iniciação científica.

Para traçar um perfil dos participantes da oficina, foi elaborado um questionário, e as informações obtidas estão organizadas no Apêndice 2.

Para o trabalho com as trajetórias, os 16 participantes formaram duplas e cada uma elaborou uma THA. Para este estudo foi analisada a trajetória elaborada por uma dupla (P03 e P04), selecionada por conveniência, que decidiu que cada componente faria a sua THA para, depois de discutidas e refinado o olhar, elaborarem a versão final da THA, agora sim em dupla. As outras duplas decidiram fazer uma única trajetória.

Em alguns momentos, as tarefas do trabalho desenvolvido na oficina eram realizadas individualmente, outras, em duplas ou em grupos, envolvendo:

- resolução individual das tarefas apresentadas;
- discussões em duplas das resoluções individuais buscando identificar possíveis erros e suas razões, para depois, propor encaminhamentos pedagógicos para sua superação;
- análise do trabalho resultante do grupo todo.

Os encontros (oito) ficaram agendados para as terças-feiras, das 14h às 17h, de agosto a dezembro de 2014.

Para este estudo utilizou-se apenas o trabalho com THA. Assim, serão relatados apenas os cinco encontros, 4º, 5º, 6º, 7º, e 8º, nos quais o tema foi abordado (Quadro 04). Em cada um desses encontros, o primeiro momento (antes do intervalo) foi destinado ao desenvolvimento do trabalho com uma Prova em Fases. O segundo momento (depois do intervalo) foi utilizado para a elaboração das Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem.

**Quadro 04** – Breve relato dos encontros da oficina

<b>Encontros</b>	<b>Data</b>	<b>Relato sucinto dos encontros</b>
1º	19/08/15	Apresentação do Projeto Universal, realização do contrato didático. Oficina de resolução de problemas.
2º	02/09/15	Análise e discussão de uma tarefa. Elaboração do relatório do encontro anterior. Aplicação da Prova em Fases.
3º	16/09/15	Simpósio do GEPEMA
4º	30/09/15	Aplicação da Prova em Fases. Início do trabalho com a Trajetória Hipotética de Aprendizagem: resolução da tarefa que desencadeou a trajetória.
5º	14/10/15	Aplicação da Prova em Fases. Apresentação da Trajetória Hipotética de Aprendizagem na perspectiva de Simon (1995).
6º	04/11/15	Aplicação da Prova em Fases. Continuidade com o trabalho da elaboração das trajetórias: compartilhamento das escritas, estratégias e

		procedimentos utilizados e outros pontos importantes para o desenvolvimento da trajetória.
7º	11/11/15	Aplicação da Prova em Fases. Retomada do desenvolvimentos das Trajetórias. Esse dia foi utilizado para finalizar as trajetórias, puderam refinar a escrita e ligar as ideias feitas por cada um.
8º	25/11	Aplicação da Prova em Fases. Troca de informação entre os colegas em relação à Prova em Fases. Os professores responderam a um questionário. Houve uma discussão coletiva para expor as impressões, opiniões e sugestões do trabalho com a Prova em Fases e a Trajetória Hipotética de Aprendizagem. Por fim, uma sistematização do trabalho.

**Fonte:** A autora.

### 3.1 DOS RELATOS

Os relatos apresentados a seguir foram feitos com base nas gravações (áudio e vídeo) dos cinco encontros, no caderno de campo da pesquisadora e no caderno das professoras (P03 e P04).

#### **Relato 1**

O 4º encontro aconteceu no dia 30/09/2014. O primeiro momento foi destinado à discussão da Prova em Fases, como em todos os outros encontros. Após o intervalo, M1<sup>17</sup> disse que seria desenvolvido um trabalho com Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem e em duplas. Pediu que os professores conversassem e decidissem as duplas. Todos começaram a conversar ao mesmo tempo. P04<sup>18</sup> perguntou se nos encontros seguintes as duplas seriam as mesmas, e M1 respondeu que sim. Um dos professores perguntou se podia começar o trabalho sozinho e, no próximo encontro, fazer dupla com o professor que faltara e M1 respondeu que sim. Em seguida, M1 perguntou se o grupo preferia que ela escolhesse

<sup>17</sup> M1 e M2 são as ministrantes da oficina.

<sup>18</sup> P03 e P04 são as professoras que foram acompanhadas para este trabalho durante a elaboração das trajetórias.

as duplas. Os professores quase em coro responderam que não, e ela continuou a orientação.

Na RME “a maneira como o ambiente escolar é organizado tende a proporcionar maior interação entre os estudantes, permitindo que eles participem ativamente da aula e é comum trabalharem em grupos; é frequente as aulas serem “barulhentas”, com conversas, discussões e debates por parte dos alunos” (OLIVEIRA, 2014, p. 47).

Com as duplas formadas, M2 propôs que os professores estudassem o texto sobre THA, já enviado por *e-mail*, para que, no seminário desse assunto que a pesquisadora<sup>19</sup> iria apresentar no próximo encontro, pudessem tirar dúvidas e discutir o que é uma trajetória, suas características e outros pontos importantes para que os professores comesçassem a elaborar o conceito de THA utilizando a estratégia de construir uma.

Nesse momento da oficina, M2 propõe que os professores primeiro estudem o texto para que depois fosse discutido. É importante que o professor seja um orientador no processo de aprendizagem, não dê a resposta pronta. Seria mais cômodo para os alunos (aqui professores participantes da oficina) receberem, naquele momento, o que é uma trajetória, suas características e outros pontos considerados importantes. Para a RME, no que diz respeito ao papel do professor, além de ter a função de orientar o processo de aprendizagem dos estudantes (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000), deve também criar ambientes motivadores, gerar discussões que levem os estudantes a refletir, considerar situações próximas, e, ainda, planejar todas essas ações.

Em seguida, M2 entregou uma tarefa<sup>20</sup> a cada dupla que seria o disparador para a construção da THA. Para esse encontro, pediu que os professores, em dupla, resolvessem de várias formas possíveis, destrinchassem, tirassem o máximo de informações da tarefa, pois isso os ajudaria no momento em que fossem construir a THA. A distribuição das tarefas foi arbitrária e cada dupla ficou com uma tarefa diferente.

Nesse momento a tarefa é um disparador para a elaboração da THA e de acordo com Mendes (2014), tarefa é o trabalho que o professor propõe na sala de aula e que constitui o ponto de partida para o desenvolvimento da atividade matemática do aluno.

<sup>19</sup> A pesquisadora era uma das participantes da oficina e atuou como colaboradora.

<sup>20</sup> Optou-se por utilizar uma questão do PISA por já ter sido validada.

M2 solicitou também que os professores deixassem tudo que escrevessem e todas as resoluções no caderno, pois a trajetória só seria digitalizada depois que estivesse pronta. A ideia é que, no final da oficina, apresentem a trajetória em forma de um artigo, como uma proposta de aula para uma possível produção de um livro digital com todas as trajetórias, ou uma publicação em revistas.

O professor não é mais aquele que valida o conhecimento, mas é um guia. Seja pela maneira com que seleciona as tarefas, inicia e encaminha as discussões e as construções matemáticas dos estudantes (GRAVEMEIJER, 1994).

Nesse encontro, os professores não começaram a construção das trajetórias. Foi um momento de familiarização e exploração da tarefa. A primeira orientação foi que resolvessem no caderno de tantas formas quanto conseguissem. A segunda era que levantassem quais conteúdos poderiam ser explorados.

Espera-se que as tarefas suscitem o maior número de resoluções distintas possível, para serem exploradas pelo professor, que promove uma discussão entre os estudantes, destacando as diferenças entre os conteúdos matemáticos subjacentes às resoluções (SILVA, 2015).

M1 orientou os professores a criar um esquema para que pudessem diferenciar as resoluções, pois essas diferentes resoluções poderiam compor a trajetória. Pediu que eles não apagassem as resoluções, caso estivessem incorretas, e deixassem-nas no caderno. Disse que eles poderiam considerar alguma resolução como padrão e pensassem que outro tipo de resolução os alunos poderiam fazer, que dúvida poderiam ter, etc..

Os professores começaram a resolver a tarefa. Alguns fizeram individualmente para depois compararem as resoluções, outros resolveram em dupla, outros resolveram separadamente e conversando entre eles, isso ficou a cargo de cada dupla.

De acordo com o princípio da interatividade, os alunos devem ter oportunidades para compartilhar suas estratégias e invenções entre si (VAN DEN HEUVELPANHUIZEN, 2010). A interação entre alunos e professores é uma parte essencial na RME porque a discussão e a colaboração oportunizam a reflexão sobre o trabalho (WIDJAJA; HECK, 2003).

Passados uns trinta minutos, M2 perguntou se eles já haviam terminado de resolver a tarefa. As respostas foram diversas: P03: "Não não, não terminamos ainda não; P04: "Ainda falta o último, tem três no nosso: questão 1, questão 2 e questão 3"; professores: "Ah, estamos quase terminando" "Falta mais um". Foi dado mais um tempo para os professores terminarem.

Ameron aponta como função do professor o "estabelecimento de normas sociais e matemáticas claras e um ambiente propício de aprendizagem, estimulando e orientando os processos de aprendizagem e mantendo os estudantes envolvidos" (AMERON, 2002, p. 160, tradução nossa<sup>49</sup>).

Algumas duplas terminaram antes que outras e começaram a conversar, atrapalhando as que ainda não haviam terminado. M1 chamou a atenção do grupo e pediu que fizessem silêncio para que os demais terminassem a tarefa.

Terminado o tempo de resolver a tarefa, M1 pediu que, para o encontro seguinte, eles estudassem

- o texto, enviado por *e-mail*, a respeito de Trajetória Hipotética de Aprendizagem e uma monografia, que enviaria, cujo tema também é uma trajetória;
- os objetivos da tarefa, utilizando o Caderno de Expectativas de Aprendizagem<sup>21</sup>;
- o conteúdo envolvido na tarefa, ainda que já soubessem.

De acordo com o princípio da orientação, os alunos precisam de espaço para construir conhecimentos matemáticos e ferramentas por si só. Para alcançar isso, os professores têm de proporcionar aos alunos um ambiente de aprendizagem em que esse processo de construção possa surgir (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000).

## **Relato 2**

---

<sup>21</sup> Caderno de Expectativas de Aprendizagem foi elaborado em 2011 pelo Departamento de Educação Básica (DEB) da Secretaria de Estado da Educação (SEED/PR). Disponível em [www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/caderno\\_expectativas.pdf](http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/caderno_expectativas.pdf)

O 5º encontro aconteceu no dia 14/10/2014. Após o intervalo, M1 separou os professores em grupo. Cada grupo foi composto por duas duplas que seriam acompanhadas por um colaborador ou ministrante durante todo o desenvolvimento da oficina de THA. O objetivo de acompanhar as duplas era observar como os professores lidavam com as tarefas e como se deu o desenvolvimento das Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem.

A atitude do professor de interagir com pequenos grupos, considerando cada estudante individualmente, ou seja, levando em conta características particulares, pode adiantar sua aprendizagem por meio de perguntas e tarefas escolhidas criteriosamente (CIANI, 2012, p. 66).

Com os grupos formados, M1 disse que a pesquisadora faria uma breve apresentação da Trajetória Hipotética de Aprendizagem – THA. Lembrou-os de que, em outro momento, já haviam participado de um curso em que o tema THA fora abordado, para isso, na apresentação, haveria coisas repetidas e coisas novas e disse que poderiam fazer perguntas.

Na RME esse papel do professor muda. Ele atua como interlocutor dos alunos, sendo mediador das discussões e debates em sala de aula. É importante destacar que, embora o professor não tenha o papel de detentor do conhecimento, ele deve, sim, ter domínio do conhecimento matemático envolvido nas situações por ele selecionadas.

A pesquisadora iniciou a apresentação explicando cada palavra que compunha o nome THA, ou seja, o que é trajetória, o que é hipotética e o que é aprendizagem, com base no dicionário Houaiss (2009). Disse que THA, de acordo com Simon (1995), é um caminho a ser percorrido que contém hipóteses, conjecturas para construção do conhecimento. Van den Heuvel-Panhuizen, uma das autoras da RME, utiliza Trajetória de Ensino e Aprendizagem, que é a descrição de caminhos que podem ser percorridos no processo de ensino e aprendizagem. Discutiu-se quais componentes fazem parte de uma THA de acordo com Simon (1995), e, por fim, foi apresentado aos professores um exemplo de uma THA.

Terminada a apresentação, M1 disse que os professores haviam tomado contato com a tarefa, a que resolveram e que, além de compartilharem suas resoluções, iam começar a elaborar a trajetória.

Para Oliveira (2014), fazem parte de uma trajetória as tarefas e essas podem ser elaboradas pelo professor ou até mesmo adaptadas de livros didáticos.

Em seguida, M1 perguntou aos professores o que era primordial para a elaboração das trajetórias. Um deles respondeu que eram os objetivos. Ela orientou que eles escrevessem pelo menos os objetivos, o conteúdo ou os conteúdos, indicassem para qual ano escolar a trajetória seria desenvolvida, qual a previsão da quantidade de aulas e, se quisessem, as intenções.

Ainda que o professor elenque conteúdos que direcionarão a aula, estes não compõem uma lista rígida do que será trabalhado em sala de aula, mas possibilidades de trabalho a partir das tarefas. Desse modo, os estudantes podem utilizar estratégias que possibilitam o trabalho com outros conteúdos além daqueles que o professor listou; ainda que os estudantes as usem, cabe ao professor explorar os conteúdos matemáticos a partir dos encaminhamentos dado pelos estudantes.

Relembrou ainda, que, de acordo com Simon (1995), a trajetória pode ter mais de uma tarefa, mas a construída por eles teria apenas uma, o mais completa possível; que deveriam explorar diferentes resoluções, tabelas, gráficos, desenhos, o importante é que ficasse bem articulada.

Além das tarefas, uma trajetória contém uma antecipação das atividades mentais dos estudantes, buscando uma "previsão" do que podem fazer a partir de cada uma das tarefas e dos possíveis questionamentos do professor (SILVA, 2015, p, 58).

Os professores começaram a conversar e a discutir as resoluções das tarefas e a proposta de elaboração da Trajetória Hipotética de Aprendizagem acompanhados por um ministrante ou colaborador.

Ao poderem analisar e discutir suas produções, os alunos passam a ter oportunidades para compartilhar estratégias e "invenções" uns com os outros, o que pode auxiliá-los a perceber que existem outras estratégias para resolver um mesmo problema, além de terem "ideias" para aprimorarem as suas próprias estratégias (VAN DEN HEUVELPANHUIZEN, 2000).

Nesse dia, os professores ficaram até o final do encontro trabalhando nas tarefas, discutindo as resoluções, as estratégias e os procedimentos utilizados, entre outros pontos importantes para o desenvolvimento da trajetória.

M2 disse que, no próximo encontro, trabalhariam da mesma forma que no encontro anterior: antes do intervalo, com Prova em Fases e, depois, com Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem.

### **Relato 3**

O 6º encontro aconteceu no dia 04/11/2014. Após o intervalo os grupos deram continuidade à construção das Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem acompanhados pelo ministrante e um colaborador. A elaboração das trajetórias, nesse momento, foi individual e algumas duplas conversaram a respeito dessa elaboração. No encontro anterior, eles puderam compartilhar suas escritas discutindo as resoluções, as estratégias e os procedimentos utilizados, entre outros pontos importantes para o desenvolvimento da trajetória.

Uma trajetória de ensino pode ser configurada descrevendo passos iniciais que o professor seguirá para trabalhar com os conteúdos propostos, encaminhamentos possíveis a partir de cada tipo de estratégias que os estudantes podem usar, tarefas que lhes serão apresentadas, materiais que serão utilizados.

Houve duplas que continuaram nas discussões das resoluções da tarefa: uma dupla porque um dos integrantes faltara ao encontro anterior, outra porque não tinham terminado a resolução. Para a elaboração, algumas duplas começaram a escrever os itens que fazem parte do desenvolvimento da trajetória: o (os) conteúdos, o (os) objetivos, a (as) intenções, como será organizada a sala, a previsão da quantidade de aulas e para que ano escolar a trajetória seria destinada.

Ao elaborar uma trajetória de ensino e aprendizagem, o professor elenca conteúdos que espera que sejam trabalhados em sala de aula, e que direcionarão a escolha de tarefas e alguns encaminhamentos. Para a escolha das tarefas, deve levar em consideração o princípio do entrelaçamento e o uso de problemas de contexto.

M1 pediu atenção e que os professores parassem o que estavam fazendo. Disse que queria ouvir de cada dupla o que já haviam feito das trajetórias e se sentiam que a elaboração estava “fluindo” bem ou não. Lembrou que havia mais dois encontros e que, no último, os cadernos seriam entregues para M1 e M2 e que a trajetória teria que estar pronta até lá.

Doorman (2002) sugere que constantemente o professor retome a reflexão a respeito do que se está trabalhando. Nesse momento, M1 pede que cada dupla fale a respeito de como está a elaboração da trajetória. Por meio de perguntas e condução de discussões, o professor guia os estudantes (SILVA, 2015).

Um professor perguntou se era para deixar a trajetória no caderno ou impressa, e foi orientado que, inicialmente, no caderno, mas depois deveria ser organizada e digitada para ser entregue. Em outro momento, os cadernos poderiam ser devolvidos caso eles quisessem, e poderiam aplicar a trajetória na sala de aula.

A primeira dupla disse que havia feito bastante coisa, pois a elaboração da trajetória ia “de encontro” com a produção didático-pedagógica que eles estavam fazendo. M1 pediu licença para fazer uma correção e disse que “vai de encontro” indica embate e que o correto seria dizer “vai ao encontro”, no sentido de estar em acordo.

M1 perguntou o que eles apresentaram na trajetória, e responderam que elencaram os conteúdos, objetivos, a tarefa que será trabalhada, o encaminhamento metodológico, possíveis resoluções e a sistematização. M1 disse que, na sistematização, poderiam colocar algumas definições, pois, ao trabalhar com resoluções de problema, é necessário, em algum momento, lidar com o conteúdo, e não apenas resolver o problema. Ela perguntou para uma dupla se havia algo novo na elaboração da trajetória e uma delas respondeu que o novo é o fato de que o problema estar resolvido não basta. Ele deve ser comentado a partir do momento em que foi resolvido.

Uma segunda dupla disse que a tarefa ficara mais clara depois que terminaram a resolução. Resolveram de quatro formas diferentes e apresentaram os objetivos e o conteúdo. O próximo passo seria começar a descrição da trajetória.

Uma terceira dupla disse que as resoluções foram finalizadas contendo os conteúdos, os objetivos e as intenções, e que o próximo passo seria começar a fazer os procedimentos. M1 perguntou se havia alguma dúvida para desenvolver a trajetória e uma das integrantes respondeu que teve dificuldade na resolução da tarefa.

Ainda que a RME ressalte a importância da comunicação das resoluções entre estudantes que resolvem tarefas em diferentes níveis, "isso não significa que a turma toda está procedendo coletivamente e que todo estudante está seguindo o mesmo caminho e alcançando o mesmo nível de desenvolvimento no mesmo momento" (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000, p. 9)

As integrantes da quarta dupla informaram que conseguiram terminar as resoluções com a listagem dos conteúdos, dos objetivos e das intenções e que agora estavam iniciando a descrição da trajetória. M1 perguntou o que a dupla já descreveria nesse início da trajetória e responderam que estavam bem no início da "atividade" e que só descreveram que era para resolver o "exercício" em dupla. M1 chamou a atenção para os termos que a professora havia utilizado, pois, para um mesmo objeto, ela utilizava tarefa, atividade e exercício, e a própria professora se corrigiu dizendo que o correto é tarefa. M1 perguntou: Por que é tarefa? E um dos professores respondeu que era por ser uma proposição. Perguntou ainda o que diferia problema de tarefa. Um deles respondeu que o que é problema para um pode não ser para o outro. Disse que todo o grupo estava em atividade desde o momento que colocara o pé na sala de aula, e que atividade é mais ampla, é o processo. A tarefa é a proposição, e há tarefa que pode não resultar em um problema. Um exercício é um tipo de tarefa que não é necessariamente um problema. O problema vai depender da relação que o sujeito estabelece com a proposição da tarefa. A atividade é um processo mais amplo que abarca muitas outras coisas que não só a resolução da tarefa.

Uma das professoras da dupla disse que estavam começando a descrever as possíveis resoluções. M1 perguntou o que seria sistematizado na tarefa, e a professora respondeu que pretendiam sistematizar a sequência de Fibonacci.

Fazem parte de uma trajetória as tarefas utilizadas em sala de aula para que os conteúdos do currículo possam ser trabalhados. Tais tarefas podem ser elaboradas pelo professor ou até mesmo adaptadas de livros didáticos. Além das tarefas, uma trajetória contém uma antecipação das atividades mentais dos estudantes, buscando uma "previsão" do que podem fazer a partir de cada uma das tarefas e dos possíveis questionamentos do professor (SILVA, 2015, p. 58).

A dupla seguinte disse que haviam elencado os conteúdos, os objetivos e estavam no desenvolvimento, mas que precisavam estruturar melhor. M1 perguntou se elas levantaram as possíveis resoluções e elas responderam que sim. Perguntaram para M1 e M2 como colocavam na trajetória as diferentes resoluções, se tinham que ficar separadas ou no meio da trajetória. M1 respondeu que a escolha era da dupla, mas que deveria haver um padrão. Se colocassem a resolução 1 e quisessem discutir, isso deveria ser feito para as outras resoluções. Uma das professoras disse que trabalhar com trajetória era novo, e diferente. M1 perguntou qual era o conteúdo principal da tarefa, e as professoras ficaram pensativas. M1 disse que era possível trabalhar diversos conteúdos como Múltiplos, Divisores, Números Primos e que, em algum momento, eles poderiam ser sistematizados.

Para Van den Heuvel-Panhuizen (2000), perspectiva longitudinal em relação às tarefas refere-se a um trabalho mais extenso com tarefas, não se limitando em resolvê-las e discutir as resoluções, mas na exploração dos diferentes conteúdos matemáticos envolvidos, nas diferentes estratégias e possibilidades de matematização a partir das resoluções (SILVA, 2015, p. 60).

Foi perguntado a M1 em qual momento da trajetória entrariam as perguntas, e ela respondeu que podia ser após os alunos resolverem a tarefa ou em um momento que elas achassem mais adequado.

A forma como o professor encaminha tais discussões tem um tom questionador, sempre levando os alunos a refletir sobre suas próprias falas. Estimular os questionamentos por parte dos alunos também tem função essencial, pois, para cada pergunta, há uma reflexão e isso também é interesse da RME, formar

cidadãos capazes de refletir e tomar decisões de forma consciente e coerente relativas a suas próprias vidas (OLIVEIRA, 2014).

A outra dupla disse que elencara os objetivos, os conteúdos, o encaminhamento metodológico, a forma que seria resolvido, quais estratégias, apresentou e discutiu a resolução 1, o levantamento das perguntas, questionamentos, e foi feita a sistematização dos conteúdos que a tarefa suscitou. M1 disse que responder o que aprendeu com a tarefa podia ser acrescentado nas considerações. Ela perguntou para o grupo todo: Porque na sala de aula não são apresentadas diferentes resoluções? Uma professora respondeu que na sala começava direto com a definição do conteúdo, e trabalhava em cima daquilo. M1 disse que os problemas que o professor apresenta para os alunos, depois de trabalhar um determinado conteúdo, deixam explícito que o assunto do problema é o conteúdo que ele acabou de trabalhar.

O ambiente escolar é interativo. Os estudantes, ainda que construtores do próprio conhecimento, são solicitados a todo momento a compartilharem suas reflexões (explicações, justificativas, conjecturas), produções com os demais alunos, apresentando, muitas vezes, diferentes estratégias, reflexões e ideias em diversos níveis. Destacamos a importância de essas informações serem articuladas pelo professor e utilizadas por ele visando proporcionar um ambiente de aprendizagem produtivo baseado na atividade dos alunos. Professor e aluno trabalham em parceria construindo um ambiente de interação social (OLIVEIRA, 2014, p. 50-51).

P04 disse que era uma tarefa com três questões, e que elas resolveram separadas e de formas diferentes. A construção da trajetória foi feita com base na resolução de cada uma, por isso elas ficaram diferentes, tanto as perguntas quanto as resoluções. Agora o passo seguinte seria casar as duas trajetórias. M1 perguntou o que elas aprenderam até esse momento. P03 respondeu que aprendera a escrever uma trajetória, mas que era muito “doído”. P04 aprendera a colocar no papel o que geralmente é feito no ato. M2 perguntou se havia diferença em colocar no papel e ela respondeu que colocar no papel fazia pensar sobre isso, que ajudara a prestar mais atenção e a levantar outras possibilidades. M1 disse que construir trajetórias é uma maneira de aprender a fazer perguntas.

As integrantes da última dupla disseram que fora parecido com a penúltima dupla, pois resolveram separadas a tarefa e de forma diferente, que elencaram os conteúdos, os objetivos, as intenções. Uma das integrantes disse que o próximo passo seria fazer perguntas e que pensou em como o aluno resolveria sem ir direto para a fórmula.

Cada aluno segue seu próprio trajeto de aprendizagem, mas lhe é dada a oportunidade de partilhar suas estratégias e descobertas com outros; mas, ainda assim, as crianças continuam a ser consideradas como indivíduos, e, por conseguinte, é feita a adaptação a cada um (proposta de problemas cujas resoluções podem ser de diferentes níveis) (CIANI, 2012, p. 34).

O encontro foi finalizado com a última dupla apresentando suas impressões a respeito da construção das trajetórias.

#### **Relato 4**

O 7º encontro aconteceu no dia 11/11/2014. Os professores, nos grupos, retomaram o desenvolvimento das Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem.

Alguns já haviam finalizado as trajetórias, outros finalizaram no encontro. Os professores tiveram um bom tempo para trabalhar na finalização das trajetórias. Houve duplas que foram discutindo os itens presentes em trajetórias individuais, observando o que faltava e o que precisava ser melhorado, outras conversaram a respeito do que haviam feito no encontro anterior. Esse foi um momento em que os professores, nas suas duplas, puderam refinar a escrita e ligar as ideias de cada um para construir sua versão final da Trajetória Hipotética de Aprendizagem.

Aos aprendizes devem-se propor tarefas, fazer questionamentos de modo que, por meio de suas respostas, sejam elas escritas ou faladas, atividades como esquematizar a situação real utilizando meios matemáticos, formular e visualizar um problema de diferentes formas, descobrir relações e regularidades possam ser observadas (OLIVEIRA, 2014, p. 44).

Para finalizar o encontro, M1 pediu que os professores parassem de fazer o que estavam fazendo e prestassem atenção nas orientações que ela daria. Orientou que os professores finalizassem as Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem e trouxessem-nas impressas no encontro seguinte. Caso não conseguissem digitar as fórmulas, ou um esquema de desenho apresentado na resolução, poderiam “escanear” e colocar como imagem na versão final da trajetória.

Na Educação Matemática Realística, o professor tem papel fundamental, não como detentor e transmissor de conhecimento, mas como alguém que auxilia o aluno, o sujeito principal, no processo de aprendizagem (OLIVEIRA, 2014, p. 49).

Houve uma discussão a respeito da data do próximo encontro e ficou decidido que a data prevista era 25/11, mas, caso os professores tivessem curso, passaria para o dia 27/11.

M2 pediu que todos fizessem um relatório detalhando as impressões que tiveram com a oficina a respeito de todos os momentos: o desenvolvimento, a condução de cada participante, dos ministrantes e dos colaboradores, a aplicação da Prova em Fases, a elaboração da Trajetória Hipotética de Aprendizagem, as dificuldades, os sentimentos que tiveram, as provocações que sentiram, enfim tudo que achassem relevante. Disse que os professores não precisavam ter medo de serem sinceros, pois não ficariam olhando para quem disse o que, mas sim para o que foi dito; que essas impressões seriam importantes, pois iriam servir para olhar para a formação do professor, fazer mudanças e adequações nos objetos de aprendizagem, como mote para outras e futuras intervenções, e também que poderiam auxiliar no diálogo entre a universidade e a escola.

Os participantes perguntaram a M1 e M2 se era preciso colocar introdução e considerações finais na trajetória. M1 disse que era importante, mas não obrigatório. Acrescentou que poderia ser colocado como uma apresentação informando que o trabalho fora realizado em uma oficina na Universidade Estadual de Londrina; o número de professores; que a proposta inicial era que elaborassem uma Trajetória Hipotética de

Aprendizagem baseada nos pressupostos teóricos do Simon (1995); que foi desenvolvida com base na Resolução de Problemas.

A elaboração de trajetórias para os processos de ensino e de aprendizagem de matemática por si já proporciona ao professor o pensar em diferentes resoluções que os alunos podem apresentar quando do trabalho com uma tarefa, que eles podem entender algo em níveis diferentes (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2001b), em como ele poderá explorar tais resoluções e de que modo poderá auxiliar os alunos na relação entre as suas estratégias informais de resolução, relacionadas a uma "realidade", e um conhecimento matemático mais formal (SANTOS, 2014, p. 37).

M1 disse, ainda, que uma das intenções era que as trajetórias fossem modeladas para futura publicação e que, assim que todas as trajetórias fossem encaminhadas por *e-mail*, M1 ou M2 faria um arquivo com todas as trajetórias e as encaminharia para todo o grupo.

### **Relato 5**

O 8º encontro aconteceu no dia 25/11/2014. Nesse dia, os professores trouxeram as Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem prontas. M1 disse que, além de impressa, a versão final da trajetória deveria ser enviada por *e-mail* o quanto antes.

Em seguida, entregou aos professores um questionário (Apêndice 1) e pediu que respondessem. Assim que terminaram de responder o questionário, M1 disse que faria uma rodada de discussões para fazer o encerramento da oficina, de como foi trabalhar com Prova em Fases e Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem, por fim uma sistematização do trabalho. Sugeriu que cada um, quando quisesse falar, erguesse a mão e falasse na sua vez, e que poderiam concordar e discordar do que o colega dissesse.

Iniciou-se a discussão, e os professores apresentaram algumas impressões, assim resumidas:

- gostaram muito e queriam mais tempo para fazer algumas alterações.

- foi a primeira vez que trabalharam com trajetória e gostaram, pois puderam aprender muito.

Os alunos devem ter oportunidades para compartilhar suas estratégias e invenções com outros alunos (VAN DEN HEUVELPANHUIZEN, 2010). Nesse caso, os alunos são os professores participantes da oficina. Além das estratégias, tiveram oportunidade de compartilhar suas impressões, opiniões e sugestões.

M1 disse que ela não ensinou conteúdo matemático, mas o fato de terem de pesquisar determinados conteúdos fez com que pudessem aprender e refinar o olhar para o conteúdo. Disse, ainda, que esse é um dos papéis do professor de matemática: ser um guia, um oportunizador.

- outra professora disse que não é de imediato que o aluno dá a resposta para a pergunta feita, é preciso tempo para que ele pense na tarefa proposta.

É papel do professor fazer questionamentos que levem os alunos a pensar e a refletir a tarefa. As ações que serão tomadas pelo professor também fazem parte de uma trajetória de ensino e aprendizagem (GRAVEMEIJER; TERWEL, 2000; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2001).

- “Tenho meu planejamento, e determinado conteúdo. Planejo pensando como vou dar aula para que o aluno compreenda esse conteúdo. Penso que já fazemos uma minitrajecória, não tão detalhada, mas na cabeça. O fato de escrever ajuda a levantar mais hipóteses”.

Uma trajetória de ensino pode ser configurada descrevendo passos iniciais que o professor seguirá para trabalhar com os conteúdos propostos, encaminhamentos possíveis a partir de cada tipo de estratégias que os estudantes podem usar, tarefas que lhes serão apresentadas, materiais que serão utilizados (SILVA, 2015, p. 58).

M1 disse que a trajetória é uma forma de experienciar caminhos que ainda não foram traçados, e um deles é como elaborar uma pergunta, outro é como trabalhar diferentes registros em uma mesma

questão. Salientou que essa primeira trajetória não serviria apenas para aquele conteúdo específico, mas que daria base para outros.

- P03 disse que foi muito importante a discussão entre os colegas e a troca de informações, cada um dizendo como fez. “Esse é um momento em que podem aprender e ajudar o colega. Há uma troca de experiências”.

A interação entre alunos e professores é uma parte essencial na RME porque a discussão e a colaboração oportunizam a reflexão sobre o trabalho (WIDJAJA; HECK, 2003), podendo propor novos encaminhamentos e sugestões. Ainda mais, os alunos devem ter oportunidades para compartilhar suas estratégias e invenções com outros alunos (VAN DEN HEUVELPANHUIZEN, 2010).

## 4 DA DESCRIÇÃO E ANÁLISE

Nesta investigação apresentamos uma análise da produção escrita de professores encontrada em uma tarefa de Matemática e busca-se conhecer como professores que ensinam matemática na Educação Básica lidam com essa tarefa.

Neste capítulo, para a tarefa analisada, buscamos apresentar uma análise dos enunciados (separando-os em frases); como foram resolvidas as tarefas, como foram interpretadas; a análise da 1ª versão da Trajetória Hipotética de Aprendizagem e a análise da versão final da Trajetória Hipotética de Aprendizagem.

### 4.1 ANÁLISE DOS ENUNCIADOS

Neste tópico, separamos cada frase do enunciado para explicitar as informações contidas na tarefa. Depois, por meio de uma interpretação da produção escrita dos professores, buscamos conhecer as conexões que fizeram entre as informações contidas nas frases e o modo como interpretaram a tarefa.

A tarefa contém três questões.

#### **TAREFA**

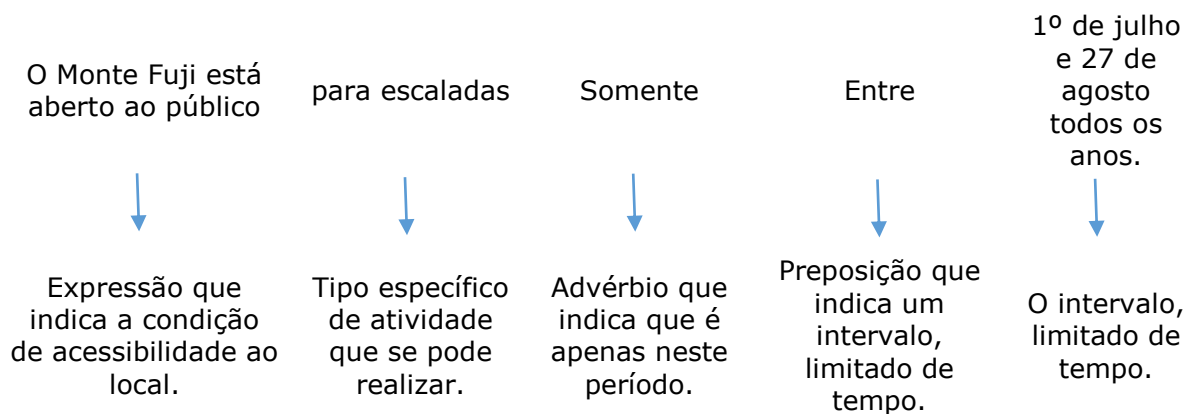
Questão 1: O Monte Fuji está aberto ao público para escaladas somente entre 1º de julho e 27 de agosto, todos os anos. Cerca de 200 000 pessoas escalam o Monte Fuji nesse período. Em média, aproximadamente quantas pessoas escalam o Monte Fuji por dia?

Questão 2: A trilha Gotemba, que leva até o alto do Monte Fuji, tem cerca de 9 quilômetros (km) de comprimento. Os caminhantes precisam retornar da caminhada de 18 km até às 8h da noite. Toshi calcula que ele pode caminhar uma média de 1,5 km por hora, montanha acima, e, montanha abaixo, o dobro dessa velocidade. Essas velocidades incluem pausa para refeições e descanso. Usando as velocidades calculadas por Toshi, qual é o último horário no qual ele pode iniciar sua caminhada de modo que ele possa estar de volta até às 8h da noite?

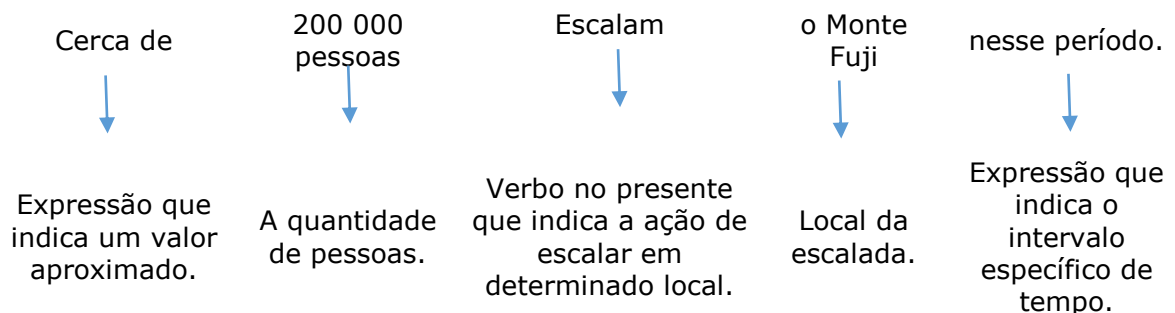
**Questão 3:** Toshi usou um pedômetro para contar seus passos ao longo da trilha Gotemba. O pedômetro mostrou que ele havia dado 22 500 passos montanha acima. Calcule o comprimento médio dos passos de Toshi em sua caminhada de 9 km na trilha Gotemba, montanha acima. Dê sua resposta em centímetros (cm).

#### 4.1.1 A Questão 1

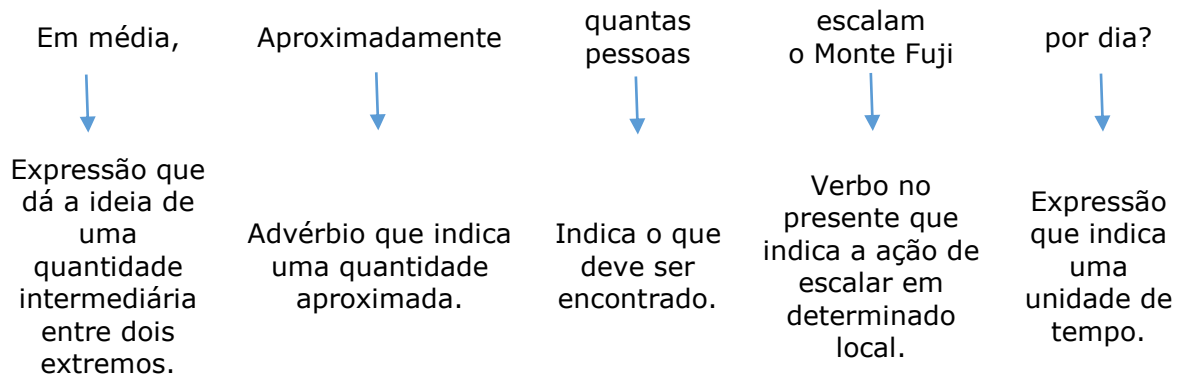
O Monte Fuji está aberto ao público para escaladas somente entre 1º de julho e 27 de agosto, todos os anos. Cerca de 200 000 pessoas escalam o Monte Fuji nesse período. Em média, aproximadamente quantas pessoas escalam o Monte Fuji por dia?



A 1ª frase da Questão 1 informa o intervalo limitado de tempo em que o Monte Fuji fica aberto ao público.



Nessa 2ª frase, temos a quantidade aproximada de pessoas que escalam o Monte Fuji, naquele período específico de tempo.

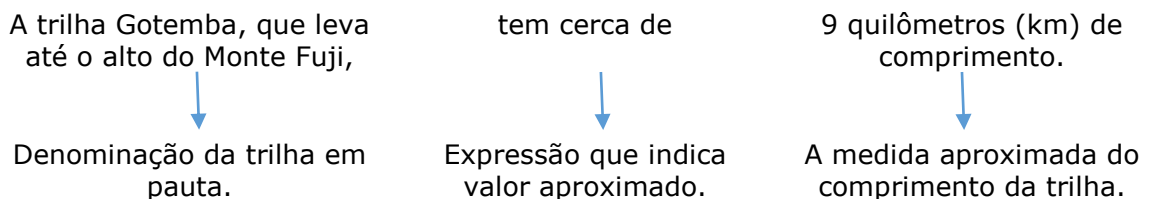


A 3ª frase indica o que é desconhecido na tarefa, aquilo que deve ser apresentado como resposta à questão, por meio das informações contidas nas duas frases anteriores.

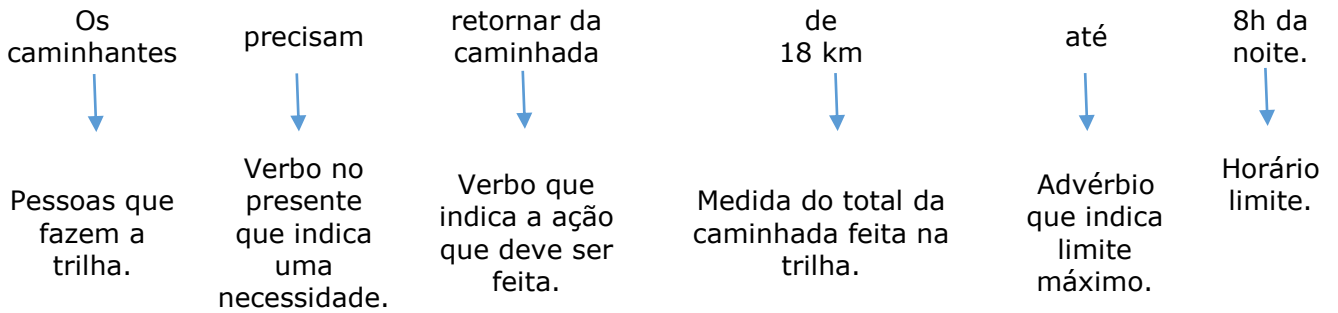
As duas primeiras frases contêm informações que devem ser relacionadas entre si para que a questão possa ser resolvida. A terceira frase indica o que é desconhecido e que deve ser encontrado.

#### 4.1.2 A Questão 2

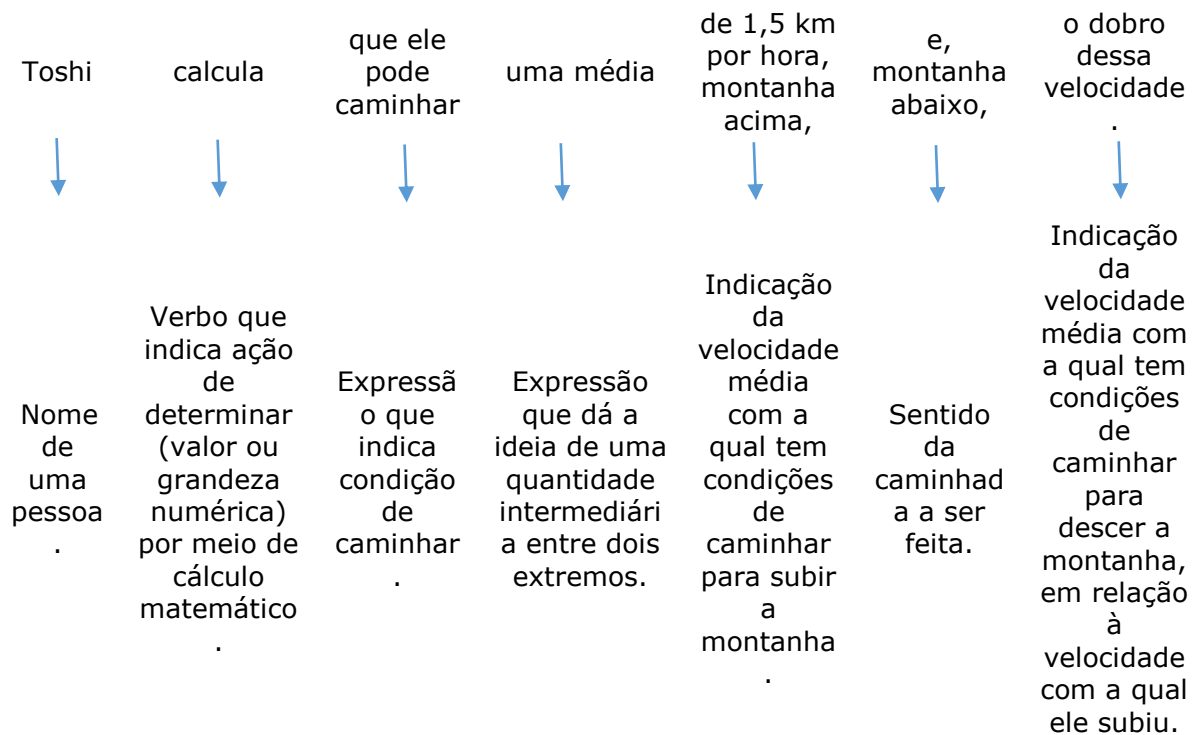
A trilha Gotemba, que leva até o alto do Monte Fuji, tem cerca de 9 quilômetros (km) de comprimento. Os caminhantes precisam retornar da caminhada de 18 km até às 8h da noite. Toshi calcula que ele pode caminhar uma média de 1,5 km por hora, montanha acima, e, montanha abaixo, o dobro dessa velocidade. Essas velocidades incluem pausa para refeições e descanso. Usando as velocidades calculadas por Toshi, qual é o último horário no qual ele pode iniciar sua caminhada de modo que ele possa estar de volta até às 8h da noite?



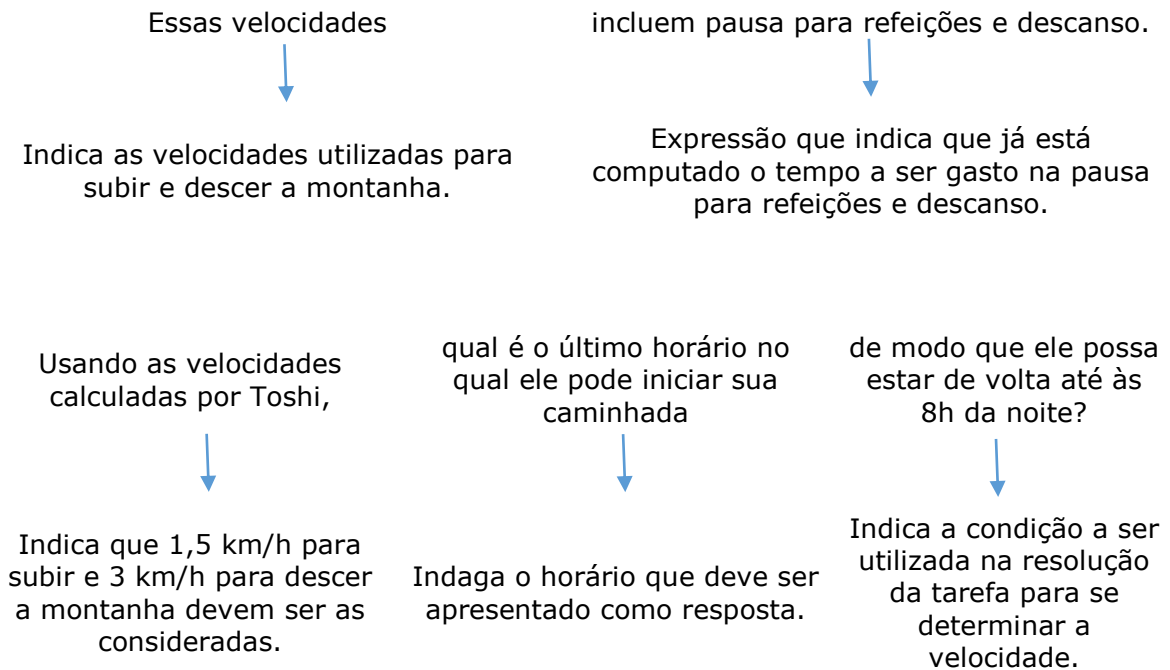
A 1ª frase da Questão 2 informa a medida aproximada do comprimento da trilha Gotemba.



A 2ª frase indica que, ao realizar a caminhada, os caminhantes necessitam voltar até às 20 horas e que a trilha tem 18 quilômetros.



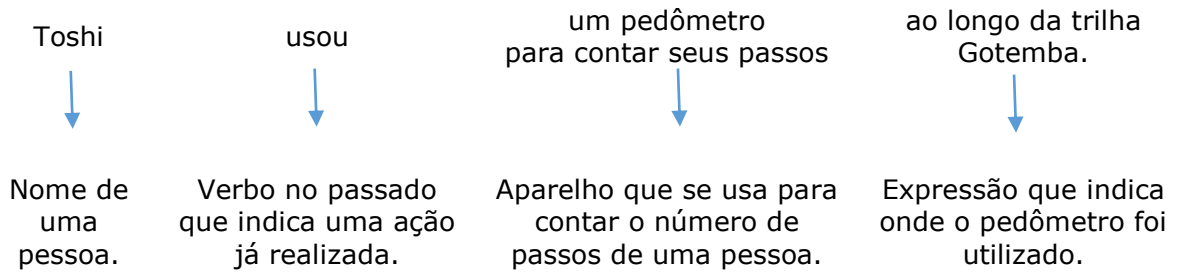
A 3ª frase mostra que as velocidades, para subir e descer a trilha, são diferentes.



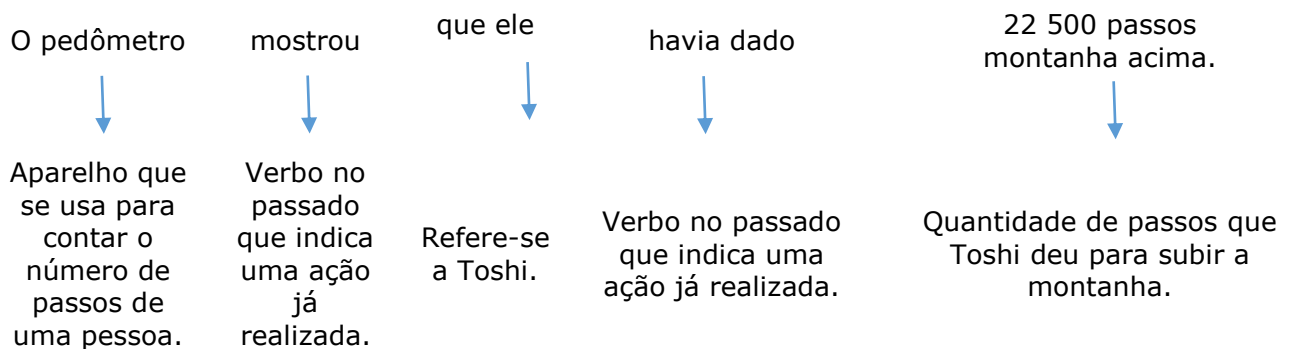
A 4ª frase indica o que é desconhecido na tarefa, aquilo que, por meio das informações contidas nas frases anteriores, deve apresentar como resposta à questão. O desconhecido, nesse caso, é o último horário em que Toshi pode iniciar a caminhada, com a condição de que volte até as 20 horas.

#### 4.1.3 A Questão 3

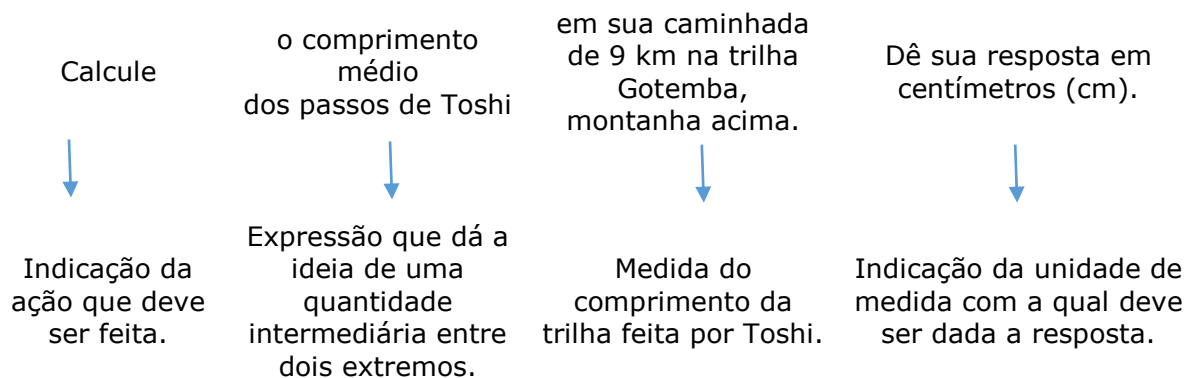
Toshi usou um pedômetro para contar seus passos ao longo da trilha Gotemba. O pedômetro mostrou que ele havia dado 22 500 passos montanha acima. Calcule o comprimento médio dos passos de Toshi em sua caminhada de 9 km na trilha Gotemba, montanha acima. Dê sua resposta em centímetros (cm).



A 1ª frase informa uma ação realizada em um local por uma pessoa. Essa ação foi a de contar seus passos utilizando um aparelho, o pedômetro.



A 2ª frase indica o resultado da ação realizada na 1ª frase. Nesse caso, que Toshi deu 22.500 passos para subir a montanha.



A 3ª frase indica o que é desconhecido na tarefa, aquilo que, por meio das informações contidas nas duas frases anteriores, deve apresentar como resposta à questão. Nesse caso, o desconhecido é o comprimento médio dos passos de Toshi para subir a montanha.

## 4.2 A RESOLUÇÃO DAS TAREFAS

Neste 2º tópico, apresenta-se a resolução das tarefas feita pelos professores, um inventário das estratégias e procedimentos utilizados nas resoluções da tarefa e uma análise dessas estratégias e procedimentos.

Consideramos que esse tópico auxilia a cumprir dois objetivos “inventariar e analisar as estratégias e procedimentos utilizados pelos professores participantes, nas resoluções dos problemas que originaram as Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem” e “analisar como professores que ensinam matemática na Educação Básica lidam com os problemas (por meio das produções escritas, observações, filmagens, áudios)”.

A estratégia é entendida como “o que”, qual instrumental será utilizado para resolver a tarefa. Considerando, por exemplo, uma pessoa que, ao ler uma tarefa, entende que, para resolvê-la, precisa utilizar um sistema de equações do primeiro grau, essa seria a estratégia selecionada. O procedimento é o “como” a estratégia será desenvolvida. Considerando, por exemplo, que a estratégia utilizada foi sistema de equação do primeiro grau e que esse foi resolvido pelo método da adição, esse é o procedimento.

As figuras 03 e 04 apresentam as resoluções completas da tarefa 1 de P03 e P04, respectivamente. É importante, pois, no momento da análise das estratégias e dos procedimentos, que essa resolução seja particionada.

**Figura 03** - Resolução apresentada por P03 na Tarefa 1

Resolução ①

$$\begin{aligned} 12/07 - 31107 &= 58 \text{ pessoas} \\ 12/08 - 27108 & \end{aligned}$$

aproximadamente 3429 pessoas

$$\begin{array}{r} 31107 \\ + 27108 \\ \hline 58215 \\ - 58 \\ \hline 58157 \\ \div 17 \\ \hline 3421,2 \end{array}$$

Resolução 2

$200.000 / 56$   
 $3571$  aprox.

entre  
 $1^{\circ} / 07$  e  $27 / 08$   
 não entra

Questão 2 -  $9\text{km} = 18\text{km}$  até  $8\text{h}$ .  
 $1,5\text{km/h}$  ↑ subindo  
 $3,0\text{km/h}$  ↓ descendo

<u>pl subia</u>		<u>pl descer = 3km pl hora</u>
1 hora = 1,5 Km		1 hora = 3km
2 ——— 3,0		2 ——— 6
3 ——— 4,5	↑	3 ——— 9
4 ——— 6,0		
5 ——— 7,5		
6 ——— 9,0		

$6\text{h} + 3\text{h} = 9\text{horas}$ .

- 20 horas  
 $9\text{horas}$   
11 horas da manhã.

Questão 3  
 $22500$  passos ↑  
 $9\text{km} = 9000\text{m} = 900.000\text{cm}$

$\frac{900.000}{22500} = 40$   
 40 cm cada passo

Fonte: Caderno de P03

Figura 04 - Resolução apresentada por P04 na tarefa 1

Questão 1 - Resolução 1.

entre  $1^{\circ}$  julho e  $27$  agosto, ou seja,  
 $2$  julho a  $26$  agosto =  $56$  dias

$200.000 \div 56 = 3571,42 \approx 3571$  pessoas

30/08  
34  
Encontros

Questão 2 - Resolução 1.

Trilha = 9 km de comprimento =  $9.000\text{m}$

Torhi  $\rightarrow 1,5\text{ km/h}$   $\uparrow$  acima  
 $3\text{ km/h}$   $\downarrow$  abaixo

$8\text{h} \rightarrow 15\text{ km}$   $9\uparrow$   $3\downarrow$   
 $7\text{h} \rightarrow 15\text{ km}$   $3$   
 $6\text{h} \rightarrow 12\text{ km}$   $3$   
 $5\text{h} \rightarrow 9\text{ km}$   $3$   
 $4\text{h} \rightarrow 7,5\text{ km}$   $3$   
 $3\text{h} \rightarrow 6\text{ km}$   
 $2\text{h} \rightarrow 4,5\text{ km}$   
 $1\text{h} \rightarrow 3\text{ km}$   
 $12\text{h} \rightarrow 15\text{ km}$   
 $11\text{h} \rightarrow 15\text{ km}$

R: 11h da manhã

Questão 3

22.500 passos acima

9 km = 9000m = 90000 cm

$$\begin{array}{r} 900.000 \text{ } | \text{ } 22.500 \\ \underline{9000} \phantom{00} \\ 0000 \end{array}$$

40cm cada passo

Fonte: Caderno de P04

#### 4.2.1 Questão 1

Ao analisar a resolução da Questão 1 (Figura 05), observa-se que P03 utiliza como estratégia uma divisão do número de pessoas pela quantidade de dias em que o Monte Fuji ficou aberto. Entende-se que ele compreende que a divisão é a estratégia que resolve o problema. Em uma 1ª resolução (Figura 05) P03, considera que o monte ficará aberto para visitação durante 58 dias. Ao efetuar a divisão de  $200.000 \div 58$  obt m 3448,2. Em seguida faz o arredondamento para 3449 e d  indicativo de que essa é a resposta.

Figura 05 – Resolu o1 da questão 1.1 de P03

Resolu o 1

$14107 - 31107 = 58 \text{ dias}$   
 $12108 - 27108$

aproximadamente 3449 pessoas

$$\begin{array}{r} 200000 \text{ } | \text{ } 58 \\ \underline{344} \phantom{00} \\ 0260 \phantom{00} \\ \underline{232} \phantom{00} \\ 0280 \phantom{00} \\ \underline{232} \phantom{00} \\ 0460 \phantom{00} \\ \underline{460} \phantom{00} \\ 0000 \end{array}$$

3448,2

Fonte: Caderno de P03

Como considerou o primeiro e último dia de visitação, P03 dá a entender que compreende “entre” como um intervalo limitado de tempo, incluídos os extremos. Por conseguinte, toma 58 dias como o período de tempo.

Usou a divisão (ideia de distribuição em partes iguais) de 200000 por 58 para saber quantas pessoas escalaram o monte em cada dia, obtendo o resultado 3448,2.

P03 desconsiderou o 2 da parte decimal e aumentou em 1 a unidade, possivelmente porque entende que um número que representa uma quantidade de pessoas é um elemento do conjunto dos números naturais. Responde, então, que são aproximadamente 3449 pessoas.

Em uma 2ª resolução (Figura 06), P03 considera a divisão como estratégia para resolver o problema, mas desconsidera os dias que estão nos extremos do intervalo, obtendo 56 dias. Realiza a divisão (ideia de distribuição em partes iguais)  $200000 \div 56$ , obtendo o resultado aproximado de 3571.

**Figura 06** – Resolução 2 da questão 1 de P03

Resolução 2

$$\begin{array}{r} 200.000 \overline{) 56} \\ \underline{3571} \end{array}$$

3571 aprox.

entre  
J=107 e 2710  
não entra

**Fonte:** Caderno de P03

Como P03 realizou a divisão  $200000 \div 56$ , obtendo o resultado 3571, entende-se que ele queria saber quantas pessoas escalaram o monte em cada dia (ideia de distribuição em partes iguais). Ao descartar o primeiro e último dia de visitação, infere-se que P03 compreende “entre” como um intervalo limitado de tempo, excluídos os extremos. Por conseguinte, considera que o período de tempo é de 56 dias.

Ao analisar a resolução da Questão 1 (Figura 07), observa-se que P04 utiliza como estratégia uma divisão do número de pessoas que escala o monte pela quantidade de dias que o monte ficou aberto. Pode-se

inferir que ele compreende que a divisão é a estratégia que resolve o problema.

**Figura 07** – Resolução da questão 1 de P04

Questão 1 - Resolução 1.

entre 1º julho e 27 agosto, ou seja, 2 julho a 26 agosto = 56 dias

$$200.000 \div 56 = 3.571,42 \approx 3.571 \text{ pessoas}$$

**Fonte:** Caderno de P04

De acordo com o enunciado do problema, para resolvê-lo, é preciso, antes de desenvolver a estratégia escolhida, obter a quantidade de dias em que o Monte Fuji ficou aberto. Ao analisar parte da resolução de P04 (Figura 08), entende-se que ele desconsidera os dias que estão nos extremos do intervalo, obtendo assim 56 dias.

**Figura 08** – Parte 1 da resolução da questão 1 de P04

entre 1º julho e 27 agosto, ou seja, 2 julho a 26 agosto = 56 dias

**Fonte:** Caderno de P04

Ao descartar o primeiro e último dia de visitação, P04 d a a entender que compreende "entre" como um intervalo limitado de tempo, excluídos os extremos. Por conseguinte, considera que o período de tempo   de 56 dias.

Como já havia encontrado a quantidade de dias que o monte fica aberto ao público, P04 realiza a divisão  $200.000 \div 56$  obtendo o resultado 3.571,42. Arredonda o resultado da divisão para 3.571 e deixa indicado como possível resposta (Figura 09).

**Figura 09** – Parte 2 da resolução da questão 1 de P04

$$200.000 \div 56 = 3.571,42 \approx \underline{\underline{3.572 \text{ pessoas}}}$$

**Fonte:** Caderno de P04

P04 usou a divisão (ideia de distribuição em partes iguais) de 200000 por 56 para saber quantas pessoas escalaram o monte em cada dia, obtendo o resultado 3.571,42. P04 desconsiderou o 42 da parte decimal e aumentou em 1 a unidade, possivelmente porque entende que um número que representa uma quantidade de pessoas é um elemento do conjunto dos números naturais.

Caso tivesse utilizado a regra do arredondamento, a resposta seria 3571, pois, com a regra do arredondamento, se o algarismo a ser eliminado for maior ou igual a cinco, acrescentamos uma unidade ao primeiro algarismo que está situado à sua esquerda. Se o algarismo a ser eliminado for menor que cinco, devemos manter inalterado o algarismo da esquerda. Nesse caso, o algarismo a ser eliminado é menor que cinco e o número não é alterado.

Entende-se que a regra do arredondamento não se aplicaria, pois, se multiplica  $3571 \times 56$ , obtém-se 199976, deixando de fora 24 pessoas, mas, como é média, e o problema diz que é aproximadamente, é aceitável.

Como P04 arredondou para cima, 3572, teria 32 pessoas a mais escalando o monte. Essa também pode ser uma resposta aceitável, uma vez que, no enunciado, aparece a indicação de um resultado aproximado. Isso pode ser visto em dois trechos do enunciado: “cerca de” – que é uma expressão que indica valor aproximado - e “aproximadamente” – advérbio que indica uma quantidade aproximada.

### 4.2.2 Questão 2

Entende-se que P03 seleciona informações da 1ª e da 2ª frase da questão 2, pois apresenta em sua resolução a medida aproximada do comprimento da trilha (9 km) e a medida total da caminhada até as 8h da noite (18km até 8h) (Figura 10). Interpretou também a 3ª frase, pois indica as velocidades médias com as quais Toshi tem condições de caminhar para subir e descer a montanha (Figura 10).

**Figura 10** –Parte 1 da resolução da questão 2 de P03

9km - 18km até 8h  
 1,5km/h ↑ subindo  
 3,0 km/h ↓ descendo

Fonte: Caderno de P03

Apresenta um esquema (Figura 11) com duas colunas: uma relacionando a velocidade com a hora que Toshi levará para subir a montanha, e a outra relacionando a velocidade com a hora que ele levará para descer a montanha. Na 1ª coluna, a cada 1 hora aumenta 1,5 km obtendo o tempo de 6 horas gasto para subir. Na descida, a cada 1 hora aumenta 3 km, gastando 3 horas para descer. Efetua a soma do tempo gasto na subida (6h) com o tempo gasto na descida (3h), encontrando um tempo total de 9 horas.

**Figura 11** –Parte 2 da resolução da questão 2 de P03

1 hora = 1,5 km	pl descida = 3km pl hora
2 ————— 3,0	1 hora = 3km
3 ————— 4,5	2 ————— 6
4 ————— 6,0	3 ————— 9
5 ————— 7,5	
6 ————— 9,0	
<u>6h</u>	<u>3h</u>
+ = 9 horas.	

Fonte: Caderno de P03

Depois de encontrado o tempo que Toshi levará para realizar a caminhada, P03 realiza a subtração 20-9 (Figura 12), obtendo como resultado 11 horas da manhã.

**Figura 12** –Parte 3 da resolução da Questão 2 de P03

$$\begin{array}{r} 20 \text{ horas} \\ - 9 \text{ horas} \\ \hline 11 \text{ horas da manhã} \end{array}$$

**Fonte:** Caderno de P03

Entende-se que P03 considera 20 horas como as 8 horas, limite proposto no problema para o fechamento do monte.

P04 utiliza como estratégia um esquema retroativo que relaciona as horas com os quilômetros percorridos como mostra a Figura 10. Ao selecionar a medida aproximada do comprimento da trilha e a indicação das velocidades médias com as quais Toshi tem condições de caminhar para subir e descer a montanha (Figura 13), entende-se que P04 interpretou a 1ª e a 3ª frase da Questão 2.

**Figura 13** –Parte 1 da resolução da Questão 2 de P04

trilha = 9 km de comprimento = 9.000 m

Toshi → 1,5 km/h ↑ acima

3 km/h ↓ abaixo

**Fonte:** Caderno de P04

Com base no esquema construído (Figura 14), entende-se que P04 seleciona as três últimas informações da 2ª frase e a última informação da 5ª frase para iniciar o esquema, pois parte da informação de que Toshi deve voltar da caminhada de 18 km até às 8h da noite. Em seguida, utiliza as velocidades calculadas por Toshi, 1,5 km/h para subir e 3 km/h para descer, para descobrir qual deve ser o último horário em que se pode iniciar a caminhada.

**Figura 14** – Parte 2 da resolução da questão 2 de P04

8h	→	18 km	} 3	9↑ 9↓
7h	→	15 km		
6h	→	12 km		
5h	→	9 km	} 3	9 km
4h	→	7.5 km		
3h	→	6 km		
2h	→	4.5 km	} 3	
1h	→	3 km		
12h	→	1.5 km		
11h	→	1.5 km		

R: ( 11 h da manhã )

**Fonte:** Caderno de P04

### 4.2.3 Questão 3

P03 utiliza como estratégia uma divisão (ideia de distribuição em partes iguais) do comprimento da trilha pela quantidade de passos que Toshi deu ao percorrer a trilha. Entende-se que P03, assim como P04, seleciona a última informação da 2ª frase e as duas últimas informações da 3ª frase da Questão 3, pois apresenta em sua resolução a quantidade de passos que Toshi deu para subir a montanha (22.500 passos acima) e a medida do comprimento da trilha (9km), respectivamente (Figura 15).

**Figura 15** –Parte 1 da resolução da questão 3 de P03

$$22500 \text{ passos } \uparrow$$

$$9\text{km} = 9000 \text{ m} = 900.000 \text{ cm}$$

**Fonte:** Caderno de P03

A medida do comprimento da trilha é de 9 km, mas P03, assim como P04, realiza uma conversão de unidade, pois é pedido na 3ª frase da questão, que a unidade de medida para a resposta deve ser em centímetros. Logo, P03 converte 9km em 900.000 cm.

Em seguida realiza a divisão (ideia de distribuição em partes iguais)  $900.000 \div 22.500$  (Figura 16), obtendo 40 cm como resultado. Indica o resultado com um balão.

**Figura 16** – Parte 2 da resolução da Questão 3 de P03

Handwritten work showing a division problem:  $900.000 \div 22.500$ . The result is 40, which is circled in a cloud-like shape with the text "40 cm cada passo" written inside.

**Fonte:** Caderno de P03

P03 usou a divisão (ideia de distribuição em partes iguais) de 900000 por 22500 para saber o comprimento de cada passo de Toshi, obtendo 40 cm como resultado.

Como estratégia, o professor P04 faz uma divisão (ideia de distribuição em partes iguais) do comprimento da trilha pela quantidade de passos que Toshi deu ao percorrê-la.

Entende-se que P04 seleciona a última informação da 2ª frase e as duas últimas informações da 3ª frase da Questão 3, pois apresenta em sua resolução a quantidade de passos que Toshi deu para subir a montanha (22.500 passos acima) e a medida do comprimento da trilha (9km), respectivamente (Figura 17).

**Figura 17** – Parte 1 da resolução da questão 3 de P04

Handwritten notes in a box:   
 \* 22.500 passos acima  
 9 km = 9.000 m = 900.000 cm

**Fonte:** Caderno de P04

Após selecionar as informações, P04 realiza a divisão (ideia de distribuição em partes iguais) de  $900.000 \div 22.500$  (Figura 18) para

saber o comprimento de cada passo obtendo como resultado 40 cm, que deixa indicado como possível resposta.

**Figura 18** –Parte 2 da resolução da questão 3 de P04

$$\begin{array}{r|l} 900.000 & 22.500 \\ \hline 9000 & \\ \hline 0000 & \end{array} \quad \underline{40\text{cm}} \text{ cada passo}$$

**Fonte:** Caderno de P04

### 4.3 ANÁLISE DA 1ª TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM

No 3º tópico, o olhar é para a 1ª trajetória elaborada pelos professores, que foi elaborada a partir da tarefa proposta. Algumas duplas optaram por realizá-la em conjunto, outras não. P03 e P04, a dupla acompanhada durante a elaboração da trajetória, realizaram separadas suas trajetórias, logo tínhamos duas primeiras trajetórias para analisar. Depois de elaborarem individualmente, P03 e P04 conversaram a respeito do que haviam feito, decidiram refinar a escrita, ligando as ideias feitas por cada uma, e construíram a versão final da Trajetória Hipotética de Aprendizagem. A decisão em olhar para as primeiras versões da trajetória e para a versão final da trajetória foi apenas porque essas trajetórias já tinham sido construídas. Por isso, apresentam-se as duas análises, da trajetória hipotética de P03 e da trajetória hipotética de P04.

#### 4.3.1 Trajetória Hipotética de Aprendizagem de P03

O professor P03 inicia sua trajetória apresentando os conteúdos estruturantes e específicos, os objetivos, e suas intenções. Em seguida diz como será organizada a sala, faz a previsão da quantidade de aulas e indica para que ano escolar a trajetória será destinada. Faz uma breve apresentação da tarefa para situar o leitor depois começa a desenvolver a trajetória.

Analisando a produção escrita de P03, observa-se que ele inicia a trajetória com o aluno fazendo uma pergunta ao professor (Figura 19).

**Figura 19** – Parte 1 da Trajetória Hipotética de Aprendizagem de P03

Aluno (A) = Professor os dias 1º/07 e 27/08 contam?

Professor (P) = O que é estar entre?

(A) = É ficar no meio!

(P) = Então qual a sua contagem?

(A) = 56 dias.

(P) = Como podemos calcular em médias, qtas pessoas escalam por dia?

É papel do professor<sup>22</sup> fazer questionamentos que levem os alunos a pensar e a refletir a respeito do problema. O professor não dá uma resposta pronta. O professor não é mais visto como aquele que valida o conhecimento, mas como um guia (GRAVEMEIJER, 1994).

**Fonte:** Caderno de P03

Ao elaborar a trajetória, é importante que o professor leve o estudante a pensar e questionar sua resposta, problematizar o que ele fez, e P03 faz isso em sua trajetória (Figura 20).

**Figura 20** – Parte 2 da Trajetória Hipotética de Aprendizagem de P03

(A) = Pego o total de (pov) pessoas e divido pelos 56 dias.

Resultado:  $200.000 \div 56 \approx 3.571,4$

(P) = Como assim 3.571,4 pessoas? Como é isto?

(A) = Ué, foi o que deu na conta!

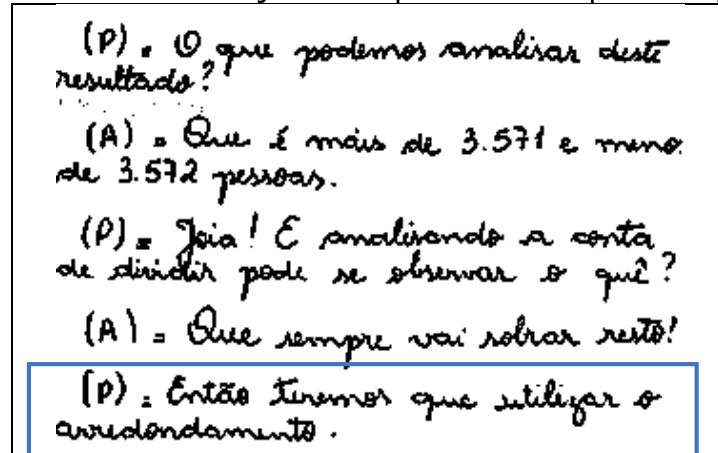
O professor leva o aluno a pensar e questionar sua resposta.

**Fonte:** Caderno de P03

<sup>22</sup> Para diferenciar os indivíduos nesse momento da análise, utilizarei P03 e P04 para os professores participantes da pesquisa que elaboraram as Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem, o termo "professor" refere-se a todos os professores que fazem/farão Trajetórias de Ensino e Aprendizagem.

Há um momento na trajetória em que P03 deixa de fazer questionamentos e responde a pergunta diretamente. Isso acontece no trecho selecionado da Figura 21.

**Figura 21** – Parte 3 da Trajetória Hipotética de Aprendizagem de P03



**Fonte:** Caderno de P03

Ao analisar essa parte da trajetória (Figura 21) entende-se que P03 poderia ter dado outro encaminhamento para a trajetória, por exemplo, ter questionado o estudante sobre qual seria o próximo passo, para que o estudante pensasse e refletisse na resposta encontrada. Isso vai ao encontro do que propõe Van Den Heuvel-Panhuizen (2010), que o professor deve criar ambientes motivadores, gerar discussões que levem os estudantes a refletir, considerar situações próximas e, ainda, planejar todas essas ações.

É desejável que o professor intervenha não somente no momento em que o estudante termina a resolução da tarefa, mas também durante o processo. Isso acontece na trajetória de P03 (Figura 22).

**Figura 22** – Parte 4 da Trajetória Hipotética de Aprendizagem de P03

Para descer:  
Cada hora desce 3km. Então:

1 hora	=	3km
2 "	=	6km
3 "	=	<u>9km</u> (desceu)

+ 6 h de subida  
3 h de descida  
9 h de caminhada.

(P) = Babaz! Você encontrou as horas gastas para subir e descer. Mas que horas tem que começar a caminhada?

Mais que observar, é desejável que o professor intervenha, aproveite todas as situações emergentes ou propostas num contexto de sala de aula, fazendo delas o veículo por meio do qual ensina e oportuniza a aprendizagem aos seus estudantes (MENDES, 2014). Ainda, como está posto no princípio da interatividade a interação entre alunos e professores é uma parte essencial na RME porque a discussão e a colaboração oportunizam a reflexão sobre o trabalho. (WIDJAJA; HECK, 2003 apud FERREIRA, 2013).

**Fonte:** Caderno de P03

Ao observar a Figura 23, entende-se que P03 trata o professor como orientador. O professor não dá a resposta pronta, o aluno precisa buscá-la.

**Figura 23** – Parte 5 da Trajetória Hipotética de Aprendizagem de P03

(A) = O que é um pedômetro?

(P) = Procure no dicionário o significado de pedômetro.

O estudante pergunta ao professor, mas esse responde que o estudante deve ir procurar a resposta.

**Fonte:** Caderno de P03

P03 finaliza a trajetória (Figura 24).

**Figura 24** – Parte 6 da Trajetória Hipotética de Aprendizagem de P03

(P) = Jôia! Portanto na conversão de unidade de comprimento usamos a tabela de conversão ou múltiplos e submúltiplos de 10.

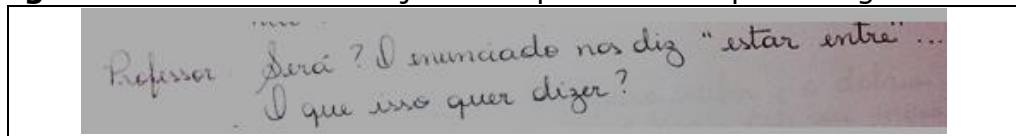
**Fonte:** Caderno de P03

#### 4.3.2 Trajetória Hipotética de Aprendizagem de P04

O professor P04 inicia sua trajetória apresentando os conteúdos e os objetivos que tem com a tarefa proposta. Em seguida diz como será organizada a sala, a previsão da quantidade de aulas e para que ano a trajetória será destinada. Faz uma breve apresentação da tarefa para situar o leitor. Feito isso, começa a desenvolver a trajetória.

É papel do professor fazer questionamentos que levem os alunos a pensarem e a refletirem na tarefa, isso acontece na trajetória de P04 (Figura 24).

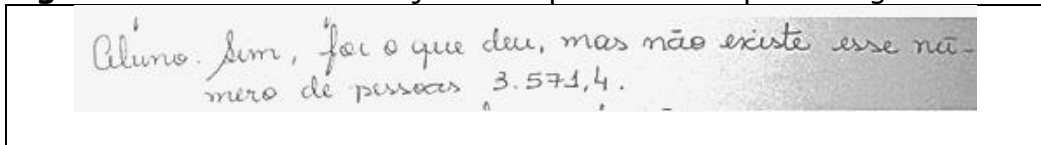
**Figura 24** – Parte 1 da Trajetória Hipotética de Aprendizagem de P04



**Fonte:** Caderno de P04

Ao desenvolver a trajetória é importante que os estudantes façam perguntas, pois a partir dessas possíveis dúvidas, o professor pode encaminhar a trajetória (Figura 25).

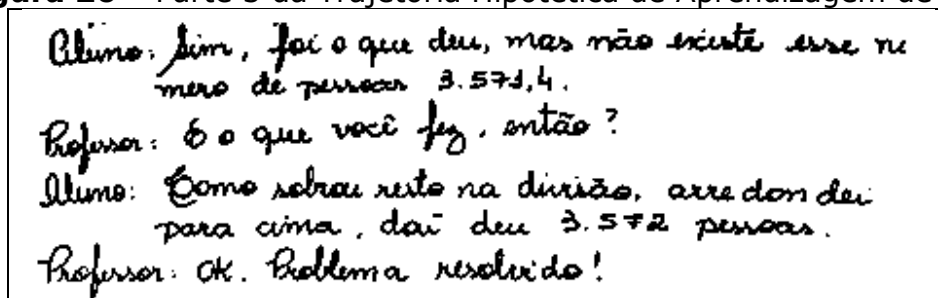
**Figura 25** – Parte 2 da Trajetória Hipotética de Aprendizagem de P04



**Fonte:** Caderno de P04

Ainda que o estudante questione, participe das discussões, nesse momento da trajetória P04 finaliza a tarefa (Figura 26).

**Figura 26** – Parte 3 da Trajetória Hipotética de Aprendizagem de P04



**Fonte:** Caderno de P04

Entende-se que P04 reconhece a importância de o estudante comunicar oralmente sua resolução ao professor como mostra a Figura 27.

**Figura 27** – Parte 3 da Trajetória Hipotética de Aprendizagem de P04

Aluno: Como ele anda 1,5 km para subir e o dobro para descer, então são 3 km. Ele vai mais rápido.

Pensei assim... Comecei do horário final que são 8 horas da noite ou 20h.

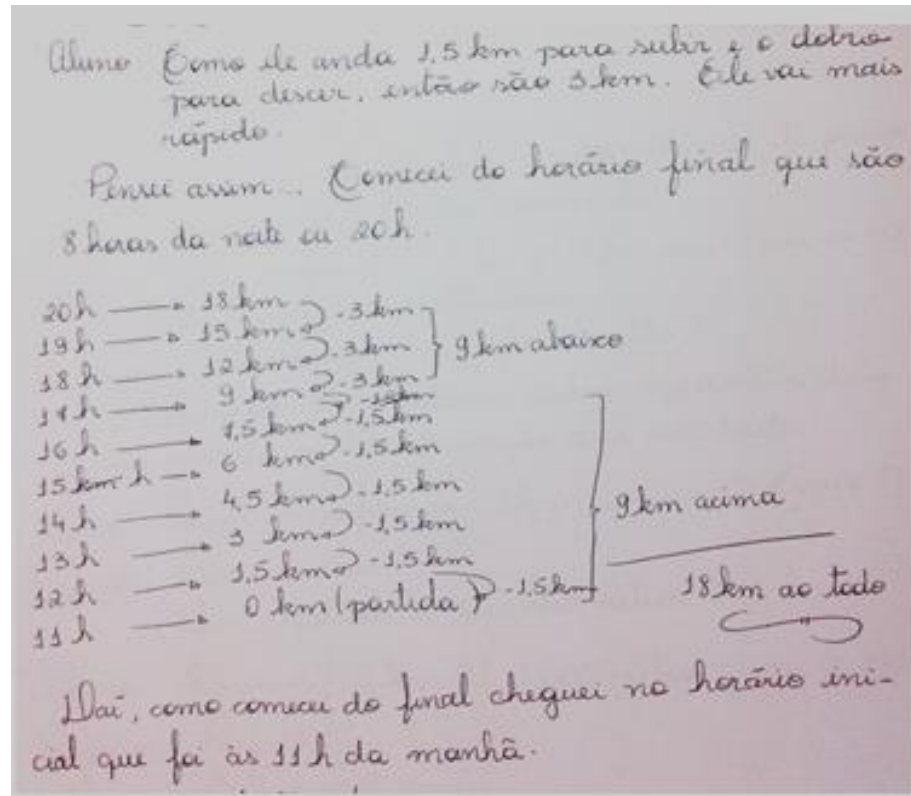
20h	→	18 km	→	-3 km	}	9 km abaixo
19h	→	15 km	→	-3 km		
18h	→	12 km	→	-3 km		
17h	→	9 km	→	-3 km	}	9 km acima
16h	→	7,5 km	→	-1,5 km		
15h	→	6 km	→	-1,5 km		
14h	→	4,5 km	→	-1,5 km	}	18 km ao todo
13h	→	3 km	→	-1,5 km		
12h	→	1,5 km	→	-1,5 km		
11h	→	0 km (partida)	→	-1,5 km		

Dai, como comecei do final cheguei no horário inicial que foi às 11h da manhã.

Professor: Muito Bem!

O estudante conta como fez para resolver o problema. Os alunos precisam de espaço para construir conhecimentos matemáticos e ferramentas por si só (FERREIRA, 2013). Para alcançar isso, os professores têm de proporcionar aos alunos um ambiente de aprendizagem em que esse processo de construção possa surgir (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000).

**Fonte:** Caderno de P04



Analisando a trajetória de P04, observa-se que o professor leva em consideração a estratégia escolhida pelo estudante ainda que esta não resolva a tarefa. Isso acontece no trecho marcado na Figura 28.

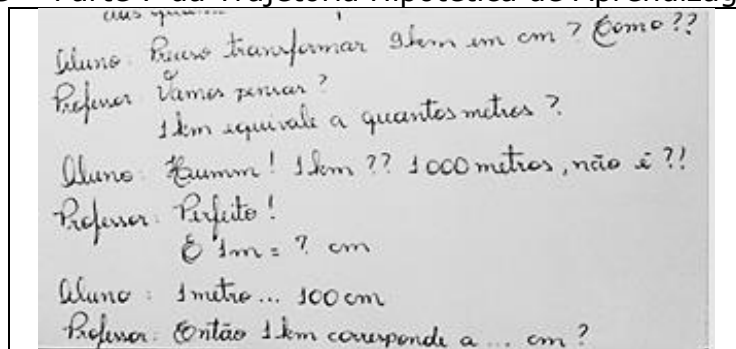
**Figura 28** – Parte 5 e 6 da Trajetória Hipotética de Aprendizagem de P04

<p>Professora: Então, como podemos calcular esse comprimento?</p> <p>Aluno: Primeiro, se é comprimento médio. Vou dividir.</p> <p>Professora: Dividir como?</p> <p>Aluno: A distância de 9 km pelo número de passos.</p> <p>Professora: Muito Bem. Então vamos lá.</p>	<p>A tarefa indica a unidade de medida com a qual deve ser dada a resposta, em cm. Logo o professor deixa o aluno resolver o problema, até que ele perceba que a resposta que será encontrada não responde o problema, ou que no decorrer da resolução ele perceba que o enunciado pede outra indicação de unidade de medida.</p>
<p>Professora: Muito Bem. Então vamos lá.</p> <p>Aluno: Mas, professora!?? A questão quer que a resposta esteja em centímetros.</p> <p>Professora: Isso mesmo. O que fazer então?</p>	

Fonte: Caderno de P04

A orientação da tarefa é por meio de questionamentos. É importante que “a troca de informações entre aluno e aluno e, aluno e professor seja constante” e que “o professor seja um guia durante as aulas, fazendo os encaminhamentos necessários para que os alunos continuem trabalhando” (OLIVEIRA, 2014, p. 47). É possível perceber isso no diálogo a seguir (Figura 29).

**Figura 29** – Parte 7 da Trajetória Hipotética de Aprendizagem de P04



**Fonte:** Caderno de P04

#### 4.4 ANÁLISE DA VERSÃO FINAL DA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM

Neste tópico é apresentada a análise da versão final da Trajetória Hipotética de Aprendizagem – THAF<sup>23</sup> elaborada, em conjunto, pelos professores P03 e P04. A partir da construção da trajetória de cada um, eles se juntaram e fizeram a versão final da trajetória.

##### 4.4.1 Os objetivos

**Quadro 05** – Objetivos presentes nas trajetórias de P03, P04 e na THAF respectivamente

<sup>23</sup> Utilizarei THAF para versão final da Trajetória Hipotética de Aprendizagem.

P03	<p><b>Objetivos:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>* Ler e interpretar o problema;</li> <li>* Reconhecer as operações propostas através do enunciado do problema;</li> <li>* Realizar adequadamente as operações;</li> </ul>
P04	<p><b>Objetivos:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Ler e interpretar problemas</li> <li>• Reconhecer as operações na resolução dos problemas</li> </ul>
THAF	<p>Essa tarefa tem por objetivos:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• ler e interpretar o problema</li> <li>• reconhecer as operações propostas através do enunciado do problema</li> <li>• realizar adequadamente as operações.</li> </ul>

**Fonte:** Caderno de P03 e P04

Ao observar os objetivos (Quadro 05), pode-se perceber que, na trajetória de P03 e na THAF, aparecem os mesmos objetivos. Na trajetória de P04, porém, o terceiro objetivo, "Realizar adequadamente as operações", não está presente.

#### 4.4.2 Intenções

As intenções presentes nas trajetórias analisadas estão postas no Quadro 06.

**Quadro 06** – Intenções presente nas trajetórias de P03 e na THAF respectivamente

P03	<p><b>Intenções</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>* O aluno deve saber utilizar as conversões de medidas de comprimento para auxiliá-lo na resolução da questão ③.</li> <li>* O aluno deve perceber a necessidade de arredondamento na questão ④.</li> </ul>
P04	

THAF	<p>Intenções da professora:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• que o aluno saiba utilizar as conversões de medidas de comprimento para auxiliar na resolução da questão 3.</li> <li>• que o aluno perceba a necessidade do arredondamento na questão 1.</li> </ul>
------	--

**Fonte:** Caderno de P03 e P04

Observa-se que, no Quadro 06, o item intenções não está presente na trajetória de P04, mas estão presentes na trajetória de P03 e na THAF ainda que escritas com palavras diferentes, são as mesmas. Com isso, infere-se que P03 e P04 entendem que é importante o item intenções estar presente em uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem, pois é uma maneira de mostrar o que o professor pretende fazer, qual seu propósito com a tarefa.

#### 4.4.3 Conteúdo

Com relação ao conteúdo, na trajetória de P04, só aparecem Números e Operações, além de não diferenciar os conteúdos estruturantes dos específicos. Na trajetória de P03, há o conteúdo estruturante e o específico, como mostra no Quadro 07. Na THAF também aparecem conteúdos estruturantes e específicos, mas os conteúdos específicos Proporcionalidade e Regra de Três não foram mais considerados.

**Quadro 07** – Conteúdo presente nas trajetórias de P03, P04 e na THAF respectivamente

P03	<p><u>Conteúdo</u></p> <p>Estruturante: Números e Operações.</p> <p>Específico: Operações fundamentais, Medidas de comprimento; Proporcionalidade Regra de três Razão e proporção.</p>
P04	<p>Conteúdos: Números e Operações</p>

THAF	Conteúdos:
	Estruturante: Números e Operações
	Específico: Operações Fundamentais
	Medidas de Comprimento
	Razão e Proporção

**Fonte:** Caderno de P03 e P04

#### 4.4.4 Apresentação

Ao analisar o item apresentação nas trajetórias, observa-se que, na THAF, esse item aparece de forma diferente da trajetória de P03, já que P04 não coloca apresentação em sua trajetória. Entende-se que a apresentação é uma forma de situar o leitor e dar informações relevantes da tarefa.

**Quadro 08** – Apresentação presente nas trajetórias de P03 e na THAF respectivamente

P03	<i>O problema do Monte Fuji é uma tarefa simples, desde que o aluno leia atentamente o enunciado de cada questão. Envolve somente os conteúdos das operações fundamentais e conversão de medidas de comprimento.</i>
P04	
THAF	<p><b>Apresentação:</b></p> <p>A tarefa poderá ser aplicada para alunos do 6º ao 8º anos durante 2 aulas. Estes serão divididos em duplas e receberão uma cópia da tarefa para a resolução das três questões propostas. A professora fará questionamentos que visem a melhor condução da atividade.</p>

**Fonte:** Caderno de P03 e P04

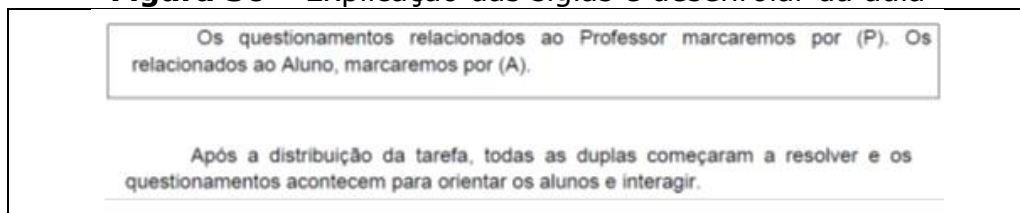
Ao observar o Quadro 08, nota-se que, em sua trajetória, P03 escreve que a tarefa é simples e envolve dois conteúdos. Na THAF, o que aparece na apresentação é a quantidade de aulas que serão utilizadas para desenvolver a trajetória, para que ano escolar poderá ser aplicada, como a sala será organizada e, ainda, como será o desenrolar da tarefa.

#### 4.4.5 Questionamentos

Para esse item, buscou-se analisar frase a frase das trajetórias. Na análise da frase 1, foram observadas a frase 1 da trajetória de P03, a frase 1 da trajetória de P04 e a frase 1 da THAF. Isso foi feito para saber quais aspectos foram considerados e quais não foram considerados na THAF.

Antes de iniciar os questionamentos aparece na THAF uma explicação das siglas que vão usar para diferenciar professor e aluno e de como será o desenrolar da aula (Figura 30). Isso, não está presente nas trajetórias de P03 e P04.

**Figura 30** – Explicação das siglas e desenrolar da aula



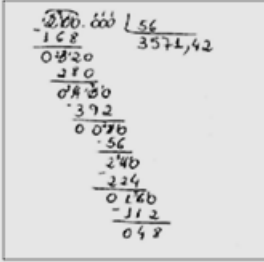
**Fonte:** Caderno de P03 e P04

Ao observar as cinco primeiras frases da Questão 2 nas três trajetórias de P03, P04 e THAF, entende-se que não houve mudança de uma trajetória para outra, mas sim um refinamento na escrita e uma ligação entre o que fizeram nas duas trajetórias individuais (P03 e P04).

A próxima etapa na trajetória é o aluno fazer a divisão do número de pessoas que escalam o monte pela quantidade de dias que este fica aberto. P03 apenas indica a divisão, P04 faz a divisão etapa por etapa e, na THAF, apresentam a divisão (Quadro 09).

**Quadro 09** – Divisão presente na questão 1 nas trajetórias de P03, P04 e na THAF respectivamente

P03	<i>Redução: <math>200.000 \div 56 \approx 3.571,4</math></i>
-----	--

P04	$  \begin{array}{r}  200.000 \\  - 161.000 \\  \hline  039.000 \\  - 21.000 \\  \hline  04.000 \\  - 3.920 \\  \hline  0080 \\  - 56 \\  \hline  240 \\  - 224 \\  \hline  016  \end{array}  $ $  \begin{array}{r}  3000 + 500 + 10 + 1 \\  \hline  3571,4 \approx 3572 \text{ pessoas}  \end{array}  $
THAF	<p>RESOLUÇÃO:</p>  $  \begin{array}{r}  200.000 \overline{) 56} \\  - 168 \\  \hline  0320 \\  - 280 \\  \hline  0480 \\  - 392 \\  \hline  0096 \\  - 56 \\  \hline  240 \\  - 224 \\  \hline  0160 \\  - 112 \\  \hline  048  \end{array}  $

**Fonte:** Caderno de P03 e P04

Nesse momento, caso o estudante fizesse como P03, seria importante o professor questioná-lo para que pensasse e refletisse a respeito de sua resolução. Poderia questioná-lo: “Como você conseguiu chegar a esse resultado?” e/ou “Como você resolveria essa divisão?”. O professor deve ser um guia, e os estudantes devem contar com uma oportunidade “guiada” para “reinventar” a matemática (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010).

Após feita a divisão e dado o resultado, P03, P04 e THAF questionam o aluno quanto à resposta dada. É importante que o professor faça questionamentos, leve o estudante a pensar e questionar sua resposta. Isso acontece na trajetória de P03: faz outros questionamentos, e entende-se que isso leva o aluno a refletir a respeito da resposta dada, isto é, que um número que representa uma quantidade de pessoas é um número natural, e, como não existe meia pessoa, o arredondamento deve ser feito para o maior. Isso também aconteceu na THAF (Quadro 10).

**Quadro 10**– Questionamentos das respostas da divisão nas trajetórias de P03, P04 e na THAF respectivamente

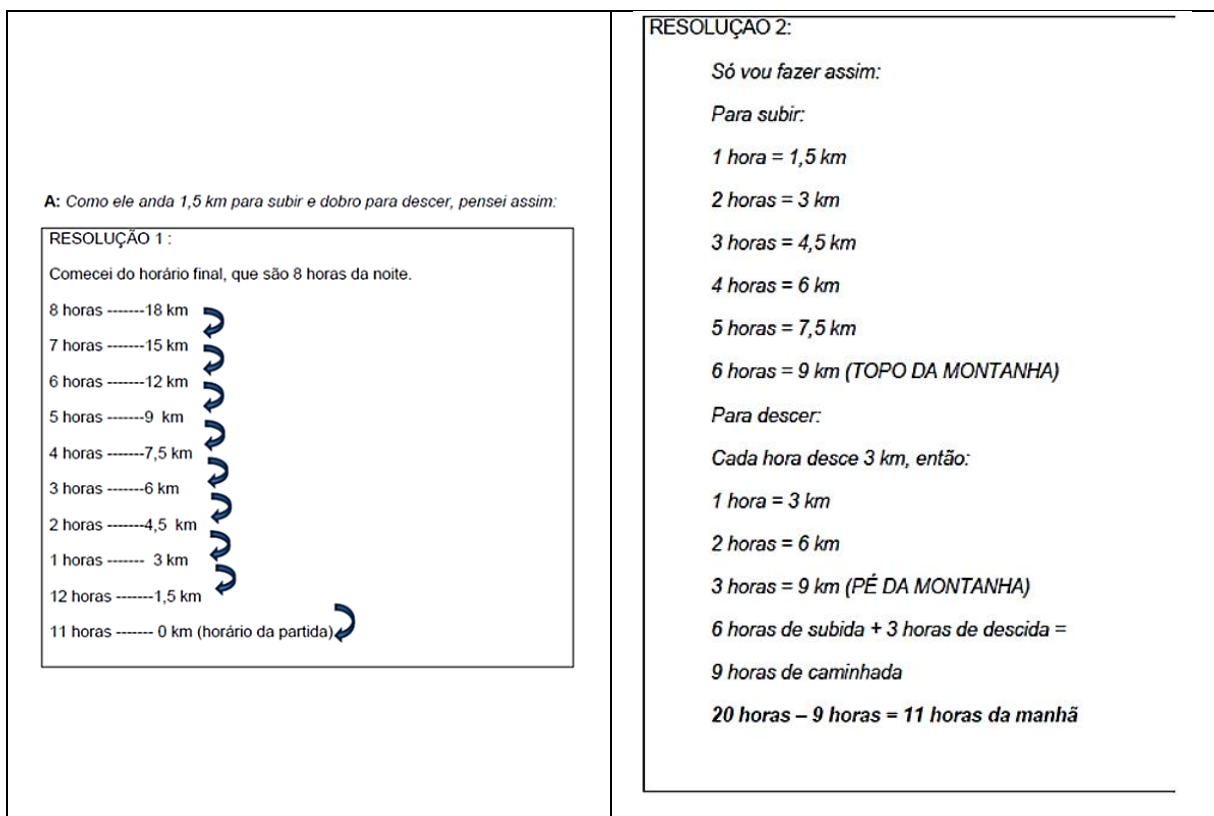
P03	<p>(P) = Como assim 3.571,4 pessoas? Como é isto?</p> <p>(A) = Ué, foi o que deu na conta!</p> <p>(P) = O que podemos analisar deste resultado?</p> <p>(A) = Que é mais de 3.571 e menos de 3.572 pessoas.</p> <p>(P) = Já! E analisando a conta de dividir pode se observar o quê?</p> <p>(A) = Que sempre vai sobrar resto!</p> <p>(P) = Então teremos que utilizar o arredondamento.</p> <p>(A) = Para mais ou para menos?</p> <p>(P) = Você é quem tem que saber!</p> <p>(A) = Por quê?</p> <p>(P) = Porque vai depender de cada tarefa, cada situação problema, o que é que está sendo analisado!</p> <p>(A) = Han... Neste caso que é pessoas tem que ser para mais, porque não existe meia pessoa. A resposta vai ser 3572 (pess) pessoas por dia.</p> <p>(P) = Muito bom!</p>
P04	<p>Professora: Qual foi o resultado? 3.571,4 pessoas?</p> <p>Aluno: Sim, foi o que deu, mas não existe esse número de pessoas 3.571,4.</p> <p>Professora: É o que você fez, então?</p> <p>Aluno: Como sobrou resto na divisão, arredondei para cima, daí deu 3.572 pessoas.</p> <p>Professora: Ok. Problema resolvido!</p>
THAF	<p>P: Como assim? 3571,4 pessoas??? Como é isto?? Existe esse número de pessoas?</p> <p>A: Ah!!! Não mesmo... É mais de 3571 e menos de 3572 pessoas.</p> <p>P: Então, como podemos resolver essa questão? Por que isso aconteceu?</p> <p>A: É porque nessa conta de dividir, sempre vai sobrar resto!</p> <p>P: Então teremos que utilizar o arredondamento.</p> <p>A: Pra mais ou pra menos?</p> <p>P: Você é quem tem que saber.</p> <p>A: Por que?</p> <p>P: Porque vai depender de cada tarefa, cada situação problema e o que está sendo analisado.</p> <p>A: Ah!! Neste caso que são pessoas, tem que ser para mais, porque não existe meia pessoa. A resposta é 3.572 pessoas por dia.</p> <p>P: Muito bom!!</p>

**Fonte:** Caderno de P03 e P04

Analisando no Quadro 10, a THAF, entende-se que o professor poderia ter dado outro encaminhamento para a trajetória e não dizer: "Então teremos que utilizar o arredondamento". O professor poderia, por exemplo, ter questionado o estudante sobre qual seria o próximo passo, para que este pensasse e refletisse acerca da resposta encontrada. O professor deve gerar discussões que levem os alunos a refletir na resposta (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010).

Ao analisar a Questão 2, vê-se que, na THAF, aparece um pouco das duas trajetórias individuais (P03 e P04), pois nela estão as duas resoluções (Resolução 1 e Resolução 2), de P04 e P03, respectivamente. Isso vai ao encontro do que propõe Van Den Heuvel-Panhuizen (2001b) de que, para elaborar as trajetórias, o professor pensa em diferentes resoluções que os estudantes podem apresentar ao lidar com uma tarefa.

**Figura 31** – Resolução 1 e Resolução 2 da questão 2



**Fonte:** Caderno de P03 e P04

Observando a Figura 31, nota-se que o aluno começa contando como fez para resolver o problema, e isso acontece nas duas resoluções, nos momentos: "Como ele anda 1,5 km para subir e o dobro da velocidade para descer, pensei assim:" e "Só vou fazer assim:". De acordo com Ferreira (2013), os estudantes precisam de espaço para construir conhecimentos matemáticos e ferramentas por si só. Para alcançar isso, os professores têm de proporcionar aos alunos um ambiente de aprendizagem em que esse processo de construção possa surgir (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000). Para a RME, é possível que diferentes alunos estejam trabalhando em diferentes soluções para os problemas, pois os conteúdos não são trabalhados de forma estanque (OLIVEIRA, 2014, p. 47), e isso acontece nessa parte da tarefa. Ainda, o trabalho com as tarefas não se limita em resolvê-las e discutir as resoluções, compreende também a exploração das diferentes estratégias e possibilidades de matematização a partir das resoluções dos alunos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000).

Ainda analisando a Questão 2, observa-se que P03 e P04 descartam da THAF alguns questionamentos que aparecem em suas trajetórias (Figura 32).

**Figura 32** – Resolução 1 e Resolução 2 da questão 2

Resolução 1	Resolução 2
<p>Aluno: Como ele anda 1,5 km para subir e o dobro para descer, então são 3 km. Ele vai mais rápido.</p> <p>Pensei assim... Comecei do horário final que são 8 horas da noite ou 20h.</p> <p>20h → 18 km } -3 km  19h → 15 km } -3 km } 9 km abaixo  18h → 12 km } -3 km  17h → 9 km } -3 km  16h → 7,5 km } -1,5 km  15 km h → 6 km } -1,5 km  14h → 4,5 km } -1,5 km  13h → 3 km } -1,5 km  12h → 1,5 km } -1,5 km  11h → 0 km (partida) } -1,5 km</p> <p>18 km ao todo</p> <p>Daí, como comecei do final cheguei no horário inicial que foi às 11h da manhã.</p> <p>Referer: Muito Bem!</p>	<p>Resolução 2</p>

Questão 2:

(A) = só vou fazer assim:

Resolução: 1 hora = 1,5 Km.  
 2 " = 3  
 3 " = 4,5  
 4 " = 6  
 5 " = 7,5  
 6 " = 9 → subir!

Para descer:  
 Cada hora desce 3km. Então:

1 hora = 3km  
 2 " = 6km  
 3 " = 9km desceu!

+ 6 h de subida  
3 h de descida  
 9 h de caminhada.

(P) = Puleza! Você encontrou as horas gastas para subir e descer. Mas que horas tem que começar a caminhada?

(A) = Os 8 da noite não são 20 horas?

(P) = sim!

(A) = Então  $20 - 9 = 11$  horas da manhã.

**Fonte:** Caderno de P03 e P04

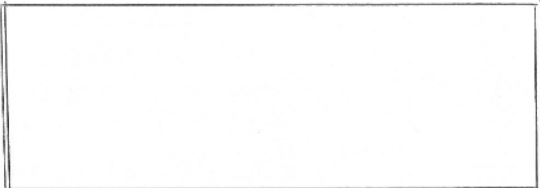
Ao analisar a Questão 3, nas trajetórias de P03 e P04, o aluno pergunta o que é um pedômetro e o professor pede para ele procurar em um dicionário o significado, mas não especifica qual dicionário. Em ambas as trajetórias, o aluno diz que achou o significado, mas P03 e P04 não o apresentam. Na THAF, o aluno também pergunta o que é um pedômetro, e o professor novamente, pede para ele procurar o significado no dicionário, a diferença está no fato de o aluno dizer: "Ah sim eu trouxe o meu. Vou procurar" (Quadro 11). Isso não é comum nas aulas de hoje.

Para a RME é importante que haja essa troca de informações entre aluno e professor, e entre aluno e aluno. O fato de o professor não dar a resposta pronta "força" o estudante a buscá-la.

Essa foi a estratégia escolhida pelo professor, mas ele poderia escolher outra: dar a resposta pronta. Para a RME, o professor pode partir de diferentes estratégias de resolução que imagina que os estudantes

utilizarão. Isso não servirá apenas para essa tarefa, poderá auxiliá-lo em outras.

**Quadro 11** – Diálogo 1 presente na questão 3 nas trajetórias de P03, P04 e na THAF respectivamente

P03	<p>Aluno: Pedômetro? O que é isso??</p> <p>Professor: Que tal procurarmos no dicionário?</p> <p>Aluno: achei, professor!</p> <p>(A) = O que é um pedômetro?</p> <p>(P) = Procure no dicionário o significado de pedômetro.</p> <p>(A) = achei!</p> 
P04	<p>Aluno: Pedômetro? O que é isso??</p> <p>Professor: Que tal procurarmos no dicionário?</p> <p>Aluno: Achei, professora!</p>
HAF	<p>TT</p> <p>A: Professora, o que é um pedômetro?</p> <p>P: Que tal procurarmos a definição no dicionário?</p> <p>A: Ah sim eu trouxe o meu. Vou procurar...</p> <p>Pedômetro: aparelho para contar os passos de quem anda, ou para medir ocidade da marcha<sup>4</sup>.</p>

**Fonte:** Caderno de P03 e P04

Na segunda parte do diálogo (Quadro 12), é possível observar que, em P04 e na THAF, o professor já pergunta como o aluno pode calcular o comprimento da trilha para saber o tamanho dos passos de Toshi. P03 faz diferente em sua trajetória: "Muito bem. E agora o que é preciso fazer?". P03 deixa o aluno decidir qual será o próximo passo e se é preciso, ou não, utilizar a definição de pedômetro para resolução da tarefa.

**Quadro 12** – Diálogo 2 presente na questão 3 nas trajetórias de P03, P04 e na THAF respectivamente

P03	(P) = Muito bem. E agora o que é preciso fazer?
P04	Professora: Então, como podemos calcular esse comprimento?
THAF	P: Muito bem, então como podemos calcular esse comprimento?

**Fonte:** Caderno de P03 e P04

No último momento das trajetórias (P03, P04 e THAF), pode-se analisar que P03 e a THAF apresentam uma sistematização do conteúdo matemático suscitado pela tarefa.

**Quadro 13** – Diálogo 3 presente na questão 3 nas trajetórias de P03 e na THAF respectivamente

P03	(P) = Já! Portanto na conversão de unidade de comprimento usamos a tabela de conversão ou múltiplos e submúltiplos de 10. Definição: - (do livro)							
P04								
THAF	<p>Nesse momento os alunos podem apresentar dúvidas em relação a essa transformação. Assim é interessante dar uma pausa para relembrar esse conteúdo explicar no quadro para que todos tirem suas dúvidas.</p> <p>A tabela de conversão pode ser utilizada:</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>km</td> <td>hm</td> <td>dam</td> <td>m</td> <td>dm</td> <td>cm</td> <td>mm</td> </tr> </table> <p>Como também a transformação pela multiplicação:</p> <p>1 km = 1.000 m 1 m = 100 cm 1 km = 100.000 cm</p>	km	hm	dam	m	dm	cm	mm
km	hm	dam	m	dm	cm	mm		

**Fonte:** Caderno de P03 e P04

## 5 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Neste trabalho tínhamos o interesse em conhecer como professores que ensinam matemática na Educação Básica lidam com a elaboração de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem. Esse interesse decorria da continuidade dos trabalhos desenvolvidos pelos participantes do GEPEMA, no tema análise da produção escrita, e atender aos objetivos do Projeto Universal.

Na RME, em relação ao conhecimento específico, é desejável que o professor possa reexaminar, refletir sobre sua produção, modificando-a sempre que considerar necessário. Ao utilizar a prática de elaborar uma Trajetória de Aprendizagem, em uma Oficina de Formação, acredita-se que os professores tiveram um espaço de debate e troca de experiências, para o GEPEMA, entendido como oportunidade de aprendizagem.

O objetivo foi investigar como professores que ensinam matemática na Educação Básica lidam com a construção de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem. Três objetivos específicos nortearam a pesquisa:

- inventariar e analisar as estratégias e procedimentos utilizados pelos professores participantes nas resoluções dos problemas que originaram as Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem;
- analisar como professores que ensinam matemática na Educação Básica lidam com os problemas (por meio das produções escritas, observações, filmagens, áudios);
- relatar, analisar e discutir as intervenções e orientações ocorridas durante o processo de elaboração de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem.

Em relação ao primeiro e ao segundo objetivo específico, entendemos que os professores apresentam estratégias e procedimentos

baseados na matemática escolar que é comumente trabalhada na Educação Básica e, também, mostram conhecer conteúdos matemáticos úteis para a resolução das questões analisadas.

Ao analisarmos a Questão 1, a escolha da estratégia é a mesma para ambos os professores, apenas P03 realiza uma segunda resolução. Na Questão 2, P03 constrói um esquema com duas colunas e P04, um esquema retroativo. P04 seleciona mais informações da tarefa do que P03. Para a Questão 3, os professores utilizam a mesma estratégia. Ao lidarem com a tarefa, apresentam características semelhantes aos processos nos quais os estudantes também se envolvem.

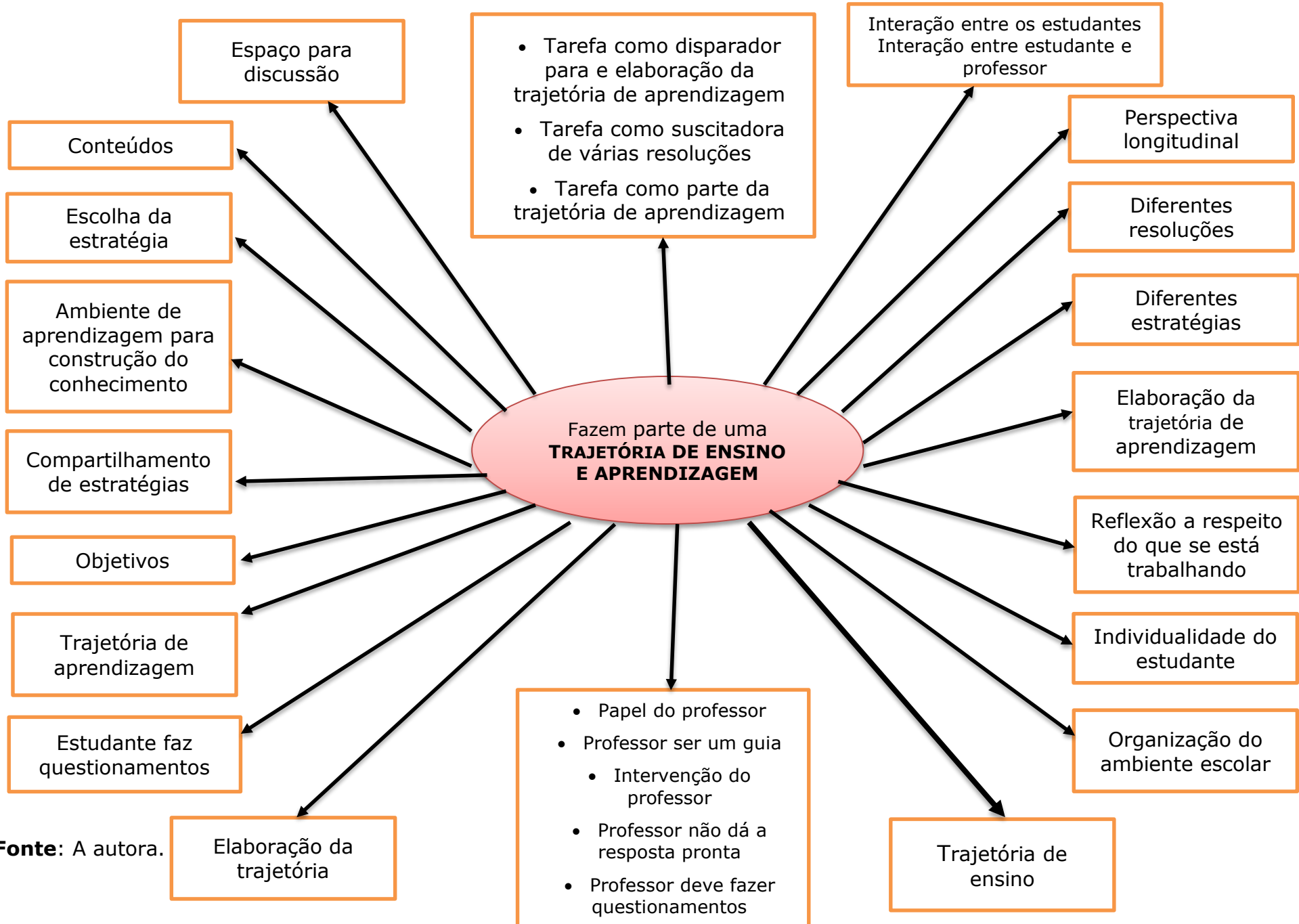
Quanto aos relatos da oficina, foi possível perceber que, em alguns momentos, os professores se comportam como alunos: na resolução das tarefas; nas discussões, pois vários queriam falar ao mesmo tempo; ao terminarem a tarefa, ficavam conversando. Mas, foi possível perceber um comprometimento dos professores nos encontros da oficina, na resolução da tarefa, na elaboração da trajetória, na participação das discussões, enfim, durante todo o processo.

O trabalho em grupo é importante, pois pode proporcionar maior interação entre os envolvidos, auxiliar a troca de ideias, informações, conversas, discussões, debates, argumentação dessas ideias. Essa estratégia de trabalho atende a perspectiva da RME adotada pelo GEPEMA.

Ao olharmos para a resolução da tarefa, verificamos que houve momentos de discussões das estratégias e procedimentos utilizados, entre outros pontos importantes para o desenvolvimento da trajetória. Pôde-se notar empenho e entusiasmo dos professores.

Nos relatos da oficina, nas trajetórias de P03, P04 e na versão final da trajetória, ao olhar com os óculos da RME, pôde-se observar alguns elementos importantes, que entendemos, que fazem parte e podem estar presentes na elaboração de uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem. Logo, a Figura 33 apresenta uma nossa configuração para a elaboração de uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem.

**Figura 33** – Elementos que fazem parte de uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem



Fonte: A autora.

Os quadros a seguir apresentam resumidamente características da THA e da TEA.

**Quadro 14 - Características da THA**

	<b>Características</b>
O QUE É	<p>Uma trajetória hipotética de aprendizagem é um constructo teórico que consiste em estabelecer os objetivos para a aprendizagem dos estudantes, as tarefas matemáticas em que eles se envolverão e as hipóteses do professor do processo de aprendizagem dos estudantes.</p> <p>Uma trajetória hipotética de aprendizagem é um planejamento (programa) bem detalhado do caminho, ou caminhos, da aprendizagem do estudante. O professor estabelece objetivos que quer que o estudante alcance, seleciona tarefas que farão que esses objetivos sejam alcançados e, por fim, hipotetiza como o estudante desenvolverá a tarefa para atingir os objetivos. Essas hipóteses são variadas e podem ser modificadas.</p>
CONSTITUIÇÃO/ COMPONENTES	<p>A THA é constituída por três componentes:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• o objetivo do professor com direções definidas para a aprendizagem de seus alunos;</li> <li>• as atividades de ensino;</li> <li>• o processamento hipotético de aprendizagem (uma suposição de como o pensamento e o entendimento dos alunos serão colocados em ação no contexto de aprendizagem das atividades) (SIMON, 1995, p. 136).</li> </ul>
ELABORAÇÃO	<p>As possíveis perguntas e dúvidas previstas na elaboração da THA podem permitir ao professor maior segurança no gerenciamento da elaboração da proposta.</p>
MODIFICAÇÃO DA TRAJETÓRIA	<p>Há possibilidade de uma nova ou uma modificada Trajetória Hipotética de Aprendizagem. Por mais que o planejamento seja detalhado, podem ocorrer imprevistos que exijam novas decisões. Mesmo que o professor desenvolva um plano para sala de aula, ele poderá ser repensado, modificado, pois as interações professor – aluno e as observações do professor fazem com que isso ocorra.</p> <p>A modificação da THA não ocorre somente durante o planejamento entre as aulas, o professor está continuamente empenhado em ajustar a trajetória de aprendizado que ele “hipotetizou” [...]. [...]</p>

	alterações e modificações podem ser feitas em um ou todos os três componentes da trajetória hipotética de aprendizagem: a meta, as atividades, ou o processo hipotético de aprendizagem (SIMON, 1995, p. 138).
ESTUDANTE	O pensamento/entendimento dos estudantes tem lugar central na estruturação e implementação das atividades de ensino (ANGIOLIN, 2009).
HIPÓTESES	<p>Ao relatar as hipóteses, professores podem utilizar diálogos hipotéticos com os alunos, para prever perguntas que possam levar os alunos a refletirem, pensarem a respeito da tarefa.</p> <p>A proposta de THA enfatiza a importância da relação entre a meta pretendida com o raciocínio das intenções/decisões de ensino e a hipótese desse percurso da aprendizagem.</p>
DESENVOLVIMENTO	<p>Durante o desenvolvimento da THA em sala de aula, as perguntas e dúvidas previstas ou não na elaboração da THA podem permitir ao professor maior segurança no gerenciamento da execução da proposta.</p> <p>Analogia com a viagem: considere que você tenha decidido viajar ao redor do mundo para visitar, na sequência, lugares que você nunca tinha visto. Ir para a França, depois Havaí, depois Inglaterra, sem uma série de itinerário a seguir. Antes, você adquire conhecimento relevante para planejar sua possível jornada. Você faz um plano. Você pode inicialmente planejar toda a viagem ou uma única parte dela. Você estabelece sua viagem de acordo com seu plano. No entanto, você deve fazer constantes ajustes, por causa das condições que irá encontrar. Você continua a adquirir conhecimento sobre a viagem e sobre as regiões que você deseja visitar. Você muda seus planos a respeito da sequência do seu destino. Você modifica o tamanho e a natureza de sua visita, de acordo com o resultado da interação com as pessoas no decorrer do caminho. Você adiciona os destinos à sua viagem e que não eram de seu conhecimento. O caminho que você utilizará para viajar é sua "trajetória". O caminho que você antecipa em algum ponto é a sua "trajetória hipotética" (SIMON, 1995, p. 136-137).</p>
PLANEJAMENTO	Olhar para a THA sob três pontos de vista: da elaboração (planejamento), da execução (processo) e para depois da execução (replanejamento).
AVALIAÇÃO	A avaliação do conhecimento do aluno pode trazer ajustes a respeito de qualquer conhecimento do professor (ANGIOLIN, 2009).

CARACTERÍSTICAS	<p>Características de uma THA:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• A construção de uma THA é baseada na compreensão do conhecimento atual dos estudantes envolvidos.</li> <li>• Uma THA é um veículo para o planejamento da aprendizagem de conceitos matemáticos específicos.</li> <li>• Tarefas matemáticas proporcionam ferramentas para promover a aprendizagem de determinados conceitos matemáticos e, assim, são uma parte fundamental do processo de ensino.</li> <li>• Devido à natureza hipotética e inerentemente incerta deste processo, o professor está regularmente frequentemente envolvido na modificação de todos os aspectos da THA (SIMON E TZUR, 2004, p. 93).</li> </ul>
-----------------	---

Fonte: A autora.

### Quadro 15 - Características da TEA

	Características
O QUE É	<p>Uma trajetória de ensino e aprendizagem é uma descrição de caminhos que podem ser percorridos pelos estudantes e contém: a elaboração da trajetória de aprendizagem que diz respeito ao processo de aprendizagem do estudante, a trajetória de ensino que contém orientações didáticas e indicações de elementos do currículo (Conteúdos). O ambiente escolar deve ser organizado em um ambiente de aprendizagem para construção do conhecimento. O professor como uma guia, como interventor do processo de aprendizagem, não deve dar a resposta pronta para o estudante, deve fazer questionamentos. As tarefas devem ser o disparador para a elaboração da trajetória de aprendizagem, suscitar várias resoluções e ter uma perspectiva longitudinal. Deve ser respeitada a individualidade dos estudantes. Deve haver momentos e espaço para discussões. Deve haver interação entre estudante e estudante e entre estudante e professor. É preciso que os estudantes façam questionamentos, compartilhem as diferentes estratégias e resoluções, reflitam a respeito do que estão trabalhando.</p>
CONSTITUIÇÃO/ COMPONENTES	<p>A TEA é constituída por:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• uma <b>trajetória de aprendizagem</b> que dá uma visão geral do processo de aprendizagem dos estudantes;</li> <li>• uma <b>trajetória de ensino</b>, contendo indicações didáticas para o ensino e de como articular-se com o processo de aprendizagem;</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• um <b>esquema dos conteúdos</b>, indicando quais elementos centrais do currículo matemático devem ser ensinados (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2002 p., grifos nossos).</li> </ul>
ELABORAÇÃO	Elaborar uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem – TEA dá oportunidade de os professores tentarem antecipar mentalmente atividades nas quais os estudantes se envolvem quando participam das tarefas propostas, e de considerarem se essas atividades estão relacionadas com os objetivos definidos (GRAVEMEIJER, 2004, 2007).
MODIFICAÇÃO DA TRAJETÓRIA	<p>Uma trajetória de ensino e aprendizagem não deve ser considerada como um regime passo a passo, estritamente linear, nem como um livro de receita. Deve ser vista de forma mais ampla e levar em conta:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• os processos individuais de aprendizagem dos estudantes;</li> <li>• as descontinuidades no processo de aprendizagem, já que, às vezes, os estudantes apresentam progressos e, em outras, podem ter recaídas;</li> <li>• o fato de os estudantes serem capazes de aprender, ao mesmo tempo, múltiplas habilidades e que diferentes conceitos podem se desenvolver ao mesmo tempo, tanto dentro como fora da área de matemática;</li> <li>• diferenças que podem aparecer no processo de aprendizagem na escola, como resultado das diferenças de situações de aprendizagem fora da escola;</li> <li>• os diferentes níveis de domínio de certas habilidades que os estudantes possuem (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010, p. 28, tradução nossa).</li> </ul> <p>Trabalhar com trajetórias de ensino e aprendizagem não implica em construir uma sequência de passos que serão rigidamente seguidos pelo professor ou pelos estudantes, até porque não há garantia de que seguirão o mesmo caminho na mesma velocidade no desenvolvimento da trajetória de aprendizagem, ou de que os conteúdos previstos pelo professor serão trabalhados pelos estudantes (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000; BAKKER; DOORMAN; DRIJVERS, 2003).</p>
ESTUDANTE	Os estudantes não, necessariamente, utilizarão os conteúdos listados pelo professor, eles podem utilizar estratégias que possibilitem o trabalho com outros conteúdos (SILVA, 2015).
OBJETIVO	O principal objetivo de uma TEA é a possibilidade de o professor ter, por meio de uma descrição, uma visão geral do que poderá desenvolver com os estudantes.
HIPÓTESES	Pode basear suas hipóteses em experiências anteriores de aulas do mesmo conteúdo ou ainda em experiências de outros professores e pesquisadores que abordaram os mesmos assuntos (SILVA, 2015).

	<p>O professor imagina mentalmente uma possível trajetória que o estudante percorrerá até chegar à solução de uma tarefa, essa antecipação envolve as reações dos estudantes (AMERON, 2002), e mais, deve levar em conta a situação atual da sala de aula e os seus próprios objetivos (GRAVEMEIJER e TERWEL, 2000)</p>
DESENVOLVIMENTO	<p>Trajectoria de aprendizagem diz respeito aos hipotéticos caminhos que os estudantes podem seguir para a aprendizagem. O professor pode partir de diferentes estratégias de resolução que imagina que os estudantes utilizarão.</p> <p>Trajectoria de ensino é uma descrição dos “passos iniciais que o professor seguirá para trabalhar com os conteúdos propostos, possíveis encaminhamentos a partir do tipo de estratégias que os estudantes podem usar” (SILVA, 2015, p. 58), descrição das tarefas a serem trabalhadas e dos objetivos pretendidos (SANTOS, 2014).</p> <p>O esquema de conteúdos diz respeito aos conteúdos do currículo que o professor espera trabalhar em sala de aula. Eles “não compõem uma lista rígida do que será trabalhado em sala, mas possibilidades de trabalho a partir das tarefas” (SILVA, 2015, p. 58).</p>
PLANEJAMENTO	<p>O professor, quando planeja suas aulas, já está delineando um caminho, uma trajetória que pretende seguir com os estudantes (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2010).</p>
CARACTERÍSTICAS	<p>Algumas características da trajetória de ensino e aprendizagem são:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• em primeiro lugar, a trajetória é mais do que uma coleção das metas a serem atingidas para todas as diferentes séries. Em vez de uma lista de habilidades isoladas, a trajetória torna claro como as habilidades são construídas em conexão umas com as outras. Ela mostra o que está vindo mais cedo e o que virá mais tarde. Em outras palavras, a característica mais importante da trajetória de ensino e aprendizagem é a sua perspectiva longitudinal.</li> <li>• uma segunda característica é a sua dupla perspectiva: a de metas a serem atingidas e a do quadro de referência do professor. As trajetórias de ensino e aprendizagem não apenas descrevem os pontos de referência na aprendizagem dos alunos que podem ser reconhecidos em rota, mas também retrata as principais atividades no ensino que levam a esses pontos de referência.</li> <li>• a terceira característica é a sua coerência inerente, baseada na distinção de níveis. A descrição deixa claro que o que é aprendido em um estágio é compreendido e executado em um nível mais elevado em uma fase seguinte. Um padrão recorrente de transições interligadas para um nível superior forma o elemento de ligação na trajetória. É essa característica de níveis dos</li> </ul>

	<p>processos de aprendizagem, que também é um elemento constitutivo da abordagem holandesa para a educação matemática, que traz coerência longitudinal para a trajetória de ensino e aprendizagem. Outra implicação crucial dessa característica de níveis é que os alunos podem compreender algo em diferentes níveis. Em outras palavras, eles podem trabalhar nos mesmos problemas sem estar no mesmo nível de compreensão. A distinção de níveis de compreensão, que podem ter aparências diferentes para diferentes subdomínios dentro de todo o domínio de números, é muito proveitosa para trabalhar no progresso da compreensão das crianças. Isso oferece pontos de apoio para estimular esse progresso.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>o quarto atributo da trajetória de ensino e aprendizagem é o novo formato de descrição escolhido para ele. A descrição não é uma simples lista de habilidades e conhecimentos para serem alcançados, nem uma formulação rigorosa dos parâmetros comportamentais que podem ser testados diretamente. Em vez disso, o esboço de uma descrição narrativa, completada com muitos exemplos, é dado no desenvolvimento contínuo que ocorre no processo de ensino e aprendizagem (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2003a, p.4).</li> </ul>
<p>PAPEL DO PROFESSOR</p>	<p>O professor, além de ter a função de orientar o processo de aprendizagem dos estudantes (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000) deve criar ambientes que oportunizem discussões, que levem os estudantes a refletir, considerar situações próximas e, ainda, planejar todas essas ações.</p>
<p>DIFERENTES RESOLUÇÕES</p>	<p>Ao elaborar as trajetórias, o professor pensa em diferentes resoluções que os estudantes podem apresentar ao lidar com uma tarefa (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2001b). Ele tenta prever, levanta conjecturas a respeito do que pode ocorrer em sala de aula e de como ele pode agir frente a isso. A descrição da TEA proporciona uma visão da situação em que a classe se encontra (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2001b, 2010).</p>
<p>TRABALHO COM TAREFAS</p>	<p>Utilizar trajetórias de ensino e aprendizagem implica que o trabalho com as tarefas tenha uma perspectiva longitudinal, ou seja, o trabalho com as tarefas não se limita a resolvê-las e discutir as resoluções, mas explora os diferentes conteúdos matemáticos envolvidos, as diferentes estratégias e possibilidades de matematização a partir das resoluções dos alunos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000).</p>
<p>DESCRIÇÃO DA TRAJETÓRIA</p>	<p>A descrição da trajetória de ensino e aprendizagem aponta não só onde o estudante deve chegar, mas também o longo caminho que seguirá até chegar lá (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, p. 29, 2010). Esse caminho não é o mesmo para cada estudante, pois cada um segue seu caminho de aprendizagem (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000a, 2000b, 2001b, 2005b).</p>

VISÃO GERAL DOS PROCESSOS	A trajetória de ensino e aprendizagem serve como um guia, dá uma visão geral dos processos de ensino e aprendizagem e fornece aos professores um "mapa educacional mental", que pode ajudá-los a tomar decisões didáticas (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000a, 2001a, 2002).
DINÂMICA DA AULA	<p>Na maioria das vezes, as aulas na perspectiva da RME acontecem em pequenos grupos (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000a, 2000b, 2005b).</p> <p>Uma aula na perspectiva da RME apresenta algumas características:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• a maneira como o ambiente escolar é organizado tende a proporcionar maior interação entre os estudantes, permitindo que eles participem ativamente da aula, e é comum trabalharem em grupos;</li> <li>• é frequente as aulas serem "barulhentas", com conversas, discussões e debates por parte dos alunos;</li> <li>• a troca de informações entre aluno e aluno e entre aluno e professor é constante;</li> <li>• o professor tem o papel de guia durante as aulas, fazendo os encaminhamentos necessários para que os alunos continuem trabalhando;</li> <li>• é possível que diferentes alunos estejam trabalhando em diferentes soluções para os problemas, pois os conteúdos não são trabalhados de forma estanque (OLIVEIRA, 2014, p. 47).</li> </ul>
DIFERENTES NÍVEIS DE COMPREENSÃO	É respeitado o nível de compreensão de cada aluno, que pode trabalhar nos mesmos problemas sem estar no mesmo nível de compreensão, cada um seguindo seu caminho de aprendizagem (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2000a, 2000b, 2005b).
EXPLORANDO RESOLUÇÕES	Para explorar as resoluções que os estudantes apresentam, o professor pode convidar regularmente as crianças para apresentar suas ideias e soluções, para discuti-las com a classe e relacioná-las umas com as outras (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 2001b). Esse procedimento coloca as soluções propostas à disposição de todo o grupo, o que cria possibilidades de progresso (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, p. 25-26, 2010).

Fonte: A autora.

Ao observarmos o quadro, é possível identificar elementos que não estão presentes na THA, como o objetivo da THA, o papel do professor, diferentes resoluções, trabalho com tarefas, descrição da trajetória, visão geral dos processos, dinâmica da aula, diferentes níveis de compreensão, explorando resoluções. Na TEA, o que não está presente é a avaliação. Há mais elementos para serem considerados na elaboração de uma Trajetória de Ensino e Aprendizagem.

Esperamos que este trabalho possa servir como suporte para futuras investigações a respeito de análise da produção escrita e contribuir para que professores que ensinam matemática na Educação Básica incluam nas suas práticas a elaboração de Trajetórias de Aprendizagem como instrumento que possibilita ao professor ter uma visão geral do que poderá desenvolver com os estudantes, auxilia a tomadas de decisões do professor a respeito dos conteúdos e tarefas, como os processos de ensino e de aprendizagem podem se desenrolar durante esse trabalho.

Esse é apenas **um** mosaico que construímos, entre outros que podem ser feitos, a partir de um estudo da RME. Outra pessoa, com outro olhar, pode construir um outro mosaico.

## REFERÊNCIAS

AMERON, B. A. V. **Reinvention of early algebra**: developmental research on the transition from arithmetic to algebra [S.l.]: [s.n.] - Tekst. - Proefschrift Universiteit Utrecht, 2002.

ANGIOLIN, A. G. **Trajetórias hipotéticas de aprendizagem sobre funções exponenciais**. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2009. Disponível em: <[www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/alexandra\\_garrote\\_angiolin.pdf](http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/alexandra_garrote_angiolin.pdf)> . Acesso em: 08/05/15.

BAKKER, A.; DOORMAN, M.; DRIJVERS, P. **Design research on how IT may support the development of symbols and meaning in mathematics education**, 2003.

BURIASCO, R. L. C. de. **Análise da produção escrita como oportunidade para o desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática**. Brasília: CNPq, 2012.

DE LANGE, J. **Framework for classroom assessment in mathematics**. Madison: WCER, 1999.

DOORMAN, M. How to guide students? A reinvention course on modeling motion. In: LIN, F. L. (Eds.), **Common sense in Mathematics Education**, Taipei, Taiwan: National Taiwan Normal University, p. 97-114, 2002.

DOORMAN, Michiel et al. Problem solving as a challenge for mathematics education in The Netherlands. **ZDM**, v. 39, n. 5-6, p. 405-418, 2007.

DRIJVERS, P. The concept of parameter in a computer algebra environment. In: **PME CONFERENCE**. 2001. p. 2-385.

FERREIRA, P. E. A. **Enunciados de tarefas de matemática**: um estudo sob a perspectiva da Educação Matemática Realística. 2013, 121f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2013.

FREUDENTHAL, H. Why to teach mathematics so as to be useful. **Educational Studies in Mathematics**. Holanda, v. 1, n. 1-2, p. 3-8, 1968.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting Mathematics Education**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

GRAVEMEIJER, K.; DOORMAN, M. **Context problems in realistic mathematics education**: a calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, v. 39, n. 1, p. 111-129, jan. 1999.

GRAVEMEIJER, K.; TERWEL, J. Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. **Journal of Curriculum Studies**, v. 32, n. 6, p. 777-796, nov-dez. 2000.

GRAVEMEIJER, Koeno. **Creating opportunities for students to reinvent mathematics**. ICME 10, 2004.

GRAVEMEIJER, K. Emergent modeling and iterative processes of design and improvement in mathematics education. In: APEC - Tsukuba International Conference III, Tokyo Kanazawa and Kyoto, Japão, 2007. **Proceedings...** Disponível em: <[http://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2008/index\\_en.php](http://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2008/index_en.php)>. Acesso em: 25/05/15.

KEIJZER, R.; VAN GALEN, F.; OOSTERWALL, L. **Reinvention revisited**: learning and teaching decimals as an example. Paper presented at the ICME 10, 2004.

KWON, O. N. Conceptualizing the realistic mathematics education approach in the teaching and learning of ordinary differential equations. **Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level. Hersonissos**. Greece. University of Crete, 2002.

OLIVEIRA, Rodrigo Camarinho de. **Matematização**: estudo de um processo. 2014. 62f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

PIRES, C. M. C. Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações de Martin Simon. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 11, n. 1, p. 145 – 166, 1o quadrimestre 2009.

SANTOS, Edilaine Regina dos. **Análise da produção escrita em matemática**: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino. 2014. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2014.

SEMBIRING, R. K.; HADI, S.; DOLK, M. Reforming mathematics learning in Indonesian classrooms through RME. **ZDM**, v. 40, n. 6, p. 927-939, 2008.

SILVA, G. S.E. Uma configuração da reinvenção guiada. 2015. 94f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2015.

SIMON, M. A. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. **Journal for Research in Mathematics Education**, vol. 26, n. 2, pp. 114-145. 1995.

SIMON, M. A. e TZUR, R. Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, vol. 6, n. 2, pp. 91-104, 2004.

TREFFERS, A.; GOFREE, F. **Rational analysis of realistic mathematics education – the wiskobas program**. 1985. Disponível em: <<https://docs.google.com/file/d/0B4o6aVujDKNpY1dQSTBqNEo4b1E/edit>>. Acesso em: 21/05/15.

VAN DEN AKKER, J. et al. (Ed.). **Educational design research**. Routledge, 2006.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. **Assessment and realistic mathematics education**. Utrecht: CD-β Press/Freudenthal Institute, Utrecht University, 1996.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. **Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9**. Utrecht: Utrecht University, 2000a. CD-ROM

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. **Realistic Mathematics Education: work in progress**. In: F.L. Lin (ed.), *Common Sense in Mathematics Education. Proceedings of The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education, 2000b*, Taipei, Taiwan, National Taiwan Normal University, Taipei, Taiwan, pp. 1–42. Disponível em: <<http://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/literatuur/4966.pdf>>. Acesso em: 28/04/15.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. A learning-teaching trajectory as a hold for teaching primary-school mathematics in the Netherlands. In: **Didactics of Mathematics and Informatics in Education. 5th Panhellenic Conference with International Participation**. 2001a. p. 21-39.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. **Children learn mathematics: a learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school**. Groningen, The Netherlands: Wolters Noordhoff, 2001b.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. Guides for didactical decision making in primary school mathematics education: the focus on the content domain of estimation. *Skriftserie for Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplaeringen*, 1, 139-152, 2003a.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. The didactical use of models in Realistic Mathematics Education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. **Educational Studies in Mathematics**, v. 54, n.1, p. 09-35, nov. 2003b.

VAN HEUVEL-PANHUIZEN, M. Can scientific research answer the 'what' question of mathematics education?. **Cambridge Journal of Education**, v. 35, n. 1, p. 35-53, 2005a.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja; WIJERS, Monica. Mathematics standards and curricula in the Netherlands. **ZDM**, v. 37, n. 4, p. 287-307, 2005b.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. (org.). **Los niños aprenden matemáticas**. México: Correo del maestro: La vasija, 2010a.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. Reform under attack – Forty Years of Working on Better Mathematics Education thrown on the Scrapheap? No Way! In: SPARROW, Len; KISSANE, Barry; HURST, Chris (Eds.). **Proceedings of the 33th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia**. Fremantle: MERGA, 2010b.

## **APÊNDICE 1**

**Questionário - Projeto Universal**

1. Em que ano você concluiu a sua formação inicial (graduação)?
2. Você fez Licenciatura Plena ou Curta?
3. A sua formação inicial é específica da área de matemática?
4. Há quantos anos você atua como professor(a) de matemática na Educação Básica?
5. Você leciona outras disciplinas? Se sim, quais?
  - a. Qual material de apoio que você utiliza com frequência para preparar as suas aulas? ( ) livro didático ( ) artigos de revistas ( ) material da internet ( ) livros paradidáticos ( ) vídeo aulas ( ) outro. Qual?
6. Quando você está preparando as suas aulas e surgem dúvidas relacionadas a alguns conteúdos matemáticos, qual atitude toma para sanar estas dúvidas?
7. Você costuma ler com frequência artigos de revistas da área de ensino? \_\_\_\_\_ Quais? \_\_\_\_\_ Você possui artigos publicados em revistas? \_\_\_\_\_
8. Para realizar as atividades deste curso você precisou estudar algum conteúdo matemático? \_\_\_\_\_ Qual(is)? \_\_\_\_\_
9. Qual foi a sua maior dificuldade ou seu maior desafio na realização das atividades deste curso?
10. Você já conhecia ou já trabalhou com a Prova em Fases?
11. Você já tinha ouvido falar de Trajetória Hipotética de Aprendizagem?
12. Você pretende trabalhar com Trajetória Hipotética de Aprendizagem nas suas aulas? Por que?
13. Você pretende utilizar a Prova em Fases nas suas aulas? Por que?
14. Se achar pertinente, deixe um comentário de esclarecimento sobre as respostas dadas anteriormente?

## **APÊNDICE 2**

**Quadro 01** – Perfil dos participantes da Oficina.

<b>Ano de conclusão da Graduação</b>	<b>Tempo de atuação na Educação Básica (anos)</b>	<b>Formação Inicial Específica</b>
1998	21	Fisioterapia, Matemática e Pedagogia
1997	19	Licenciatura Plena em Matemática
1997	16	Ciências com Habilitação em Matemática
1998	15	Matemática
1995	20	Matemática
1990	12	Matemática
1991	17	Administração de Empresas e Formação Pedagógica
2000	10	Licenciatura em Ciências com Habilitação em Matemática
1991	15	Não respondeu
1999	14	Matemática
1989	24	Licenciatura em Ciências com Habilitação em Matemática
1989	17	Matemática
2004	9	Magistério – Ensino Médio e Pedagogia
1994	20	Ciências com Habilitação em Matemática
1989	21	Ciências com Habilitação em Matemática
1991	20	Não respondeu

Fonte: A autora