



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

CRISTIANE COSTA SOUTIER

**O PROBLEMA DAS QUADRATURAS E NÚMEROS  
CONSTRUTÍVEIS:  
POSSIBILIDADES PARA O ENSINO DE GEOMETRIA E  
RELAÇÕES COM A ÁLGEBRA**

CRISTIANE COSTA SOUTIER

**O PROBLEMA DAS QUADRATURAS E NÚMEROS  
CONSTRUTÍVEIS:  
POSSIBILIDADES PARA O ENSINO DE GEOMETRIA E  
RELAÇÕES COM A ÁLGEBRA**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho.

Londrina  
2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Soutier, Cristiane Costa.

O problema das quadraturas e números construtíveis : possibilidades para o ensino de geometria e relações com a álgebra / Cristiane Costa Soutier. - Londrina, 2017.  
63 f. : il.

Orientador: Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2017.

Inclui bibliografia.

1. História da Matemática - Tese. 2. Números construtíveis - Tese. I. Carvalho, Ana Márcia Fernandes Tucci de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CRISTIANE COSTA SOUTIER

**O PROBLEMA DAS QUADRATURAS E NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS:  
POSSIBILIDADES PARA O ENSINO DE GEOMETRIA E RELAÇÕES  
COM A ÁLGEBRA**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Profa. Dra. Ana Márcia Fernandes Tucci de  
Carvalho  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

---

Prof. Dr. Júlio Faria Correa  
Universidade Federal de Santa Catarina -  
UFSC

---

Profa. Dra. Michele de Oliveira Alves  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 15 de Dezembro de 2017.

*Aos meus familiares; em especial meus pais;  
meu esposo e minhas filhas: João, Salete,  
Claudio, Ana Luisa e Emanuely.*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus por ter me dado a oportunidade de estar aqui. A todos da minha família, ao meu esposo Claudio e filhas Ana Luisa e Emanuely por acreditarem na realização deste trabalho e por tolerar minha ausência nos finais de semana durante estes anos.

Agradeço a minha orientadora professora Doutora Ana Marcia F. Tucci de Carvalho não só pela constante orientação neste trabalho, mas sobretudo pela sua amizade.

As instituições idealizadoras do Profmat sendo: Universidade Aberta do Brasil/Coordenação de Aperfeiçoamento Pessoal de Nível Superior (CAPES), Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) como também a Universidade Estadual de Londrina pela oferta do programa.

Aos professores das disciplinas do Profmat pelos conhecimentos transmitidos como também aos colegas de turma que além da amizade e apoio me proporcionaram hospedagem e muitas caronas.

A CAPES pelo apoio financeiro.

A direção do Colégio Estadual Marechal Arthur da Costa e Silva por ter permitido o desenvolvimento do trabalho e em especial os alunos que se disponibilizaram a participar da aplicação das atividades.

Aos membros da Banca Examinadora: Dr. Júlio Faria Corrêa e Dra. Michele de Oliveira Alves pelas sugestões ao trabalho.

SOUTIER, Cristiane Costa. **O problema das quadraturas e números construtíveis**: possibilidades para o ensino de geometria e relações com a álgebra. 2017. 63 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

## RESUMO

No presente trabalho o objeto matemático estudado constitui-se pelos Números Construtíveis, um assunto de destaque dentro do desenvolvimento da Álgebra e também da Geometria, sendo abordado através do problema da Quadratura do Círculo. Realizamos o estudo sistemático e formal de alguns aspectos da Álgebra e de Geometria, particularmente, estudamos os Números Construtíveis e temas correlatos como: Quadratura de Polígonos, Lúnulas, Quadratura do Círculo; além de tópicos de História da Matemática relacionados a estes. Como objeto didático-pedagógico, fazemos a elaboração, aplicação e análise de atividades de ensino-aprendizagem para alunos de Ensino Médio, cuja temática esteve relacionada a Quadraturas. Utilizamos a metodologia qualitativa, em âmbito geral, para nortear a pesquisa e, particularmente a História da Matemática e Novas Tecnologias foram empregadas como recurso metodológico para o ensino durante a aplicação das atividades. O objetivo é o estabelecimento de conexões entre o conhecimento matemático avançado e a sala de aula de matemática do Ensino Médio. Realizamos (i) o estudo da teoria formal sobre Números Construtíveis e temas correlatos como: Quadratura de Polígonos, Lúnulas, Quadratura do Círculo; além de tópicos de História da Matemática relacionados a estes. (ii) a elaboração, aplicação e análise de atividades em sala de aula de matemática de Ensino Médio, cuja temática esteve relacionada a Quadraturas. Como resultados obtidos destacamos o aprofundamento teórico no tema que possibilitou a elaboração de duas sequências de atividades: *Quadratura de Regiões Poligonais e Lúnulas de Hipócrates* que aplicamos a estudantes da terceira série do Ensino Médio, o trabalho com um pequeno grupo de alunos no contra turno permitiu uma relação mais próxima entre professor aluno.

**Palavras-chave:** Números Construtíveis. Quadratura do Círculo. História da Matemática. Geometria. Álgebra.

SOUTIER, Cristiane Costa. **The problem of quadratures and constructable numbers:** possibilities for teaching geometry and algebra relations. 2017.63 p. Dissertation (Professional Master's in Mathematics) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

### **ABSTRACT**

In this final work the object studied is constituted of Constructable Numbers that is a centerpiece theme in the area of developing Algebra and Geometry and it is approached through the problem of Square the Circle. We conducted a formal and systematic study about some aspects in the area of Algebra and Geometry, we focused our study at Constructable Numbers and correlate themes as: Square a Polygon, Lunulae, Square the circle; besides topics in History of Mathematics that are related to these. As a didactic-pedagogical object we elaborated, applied and analysed teaching-learning activities to High School students. The theme of these activities were related to Quadrature. To direct the search we used a qualitative methodology and particularly we used the History of Mathematics and New Technologies as methodological resource for teaching during the activities application. The objective is to make connections between the advanced mathematical knowledge and mathematic's classroom environment at High School. We conducted (i) the study about Constructable Numbers' theory and correlate themes as: Square a Polygon, Lunulae, Square the circle; besides topics in History of Mathematics that are related to these. (ii) the elaboration, application and analysis of the Mathematics activities from High School classroom that the theme was related to Quadrature. From the results we emphasize the theoretical study at the theme that allowed the preparation of two sequence of activities: Square Polygonal Regions and Lunulae by Hippocrates that we applied to students at the third grade at the High School . The study was made with a small group of students at the counter shift thus enabled a closer relationship between teacher and students.

**Keywords:** Constructable Numbers. Square the Circle. Mathematics History. Geometry. Algebra.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<b>Figura 1.1</b>	- Construção de $\langle P_0 \rangle$ .....	14
<b>Figura 1.2</b>	- Construção de $\sqrt{a}$ .....	25
<b>Figura 1.3</b>	- Representação geométrica da proposição 6.....	27
<b>Figura 1.4</b>	- Quadratura do círculo.....	28
<b>Figura 3.1</b>	- Quadratura do retângulo .....	38
<b>Figura 3.2</b>	- Exemplo da quadratura de um triângulo.....	39
<b>Figura 3.3</b>	- Verificação geométrica da quadratura do retângulo.....	40
<b>Figura 3.4</b>	- Quadratura direta do triângulo.....	40
<b>Figura 3.5</b>	- Transformação do Pentágono em Quadrilátero .....	41
<b>Figura 3.6</b>	- Transformação do Quadrilátero em Triângulo.....	42
<b>Figura 3.7</b>	- Retangularização do Pentágono .....	42
<b>Figura 3.8</b>	- Quadratura do Pentágono .....	42
<b>Figura 3.9</b>	- Lúnula.....	44
<b>Figura 3.10</b>	- Lado e Diagonal do Quadrado .....	45
<b>Figura 3.11</b>	- Lúnulas e catetos .....	47
<b>Figura 3.12</b>	- Exemplo de Lúnula.....	49
<b>Figura 4.1</b>	- Construção do Retângulo.....	50
<b>Figura 4.2</b>	- Quadratura do Retângulo.....	52
<b>Figura 4.3</b>	- Retangularização do Triângulo.....	53

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b> .....	10
<b>1 EXTENSÕES ALGÉBRICAS DOS RACIONAIS.</b> .....	13
1.1 NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS: DEFINIÇÕES PRELIMINARES. ....	13
1.2 OUTRAS DEFINIÇÕES .....	15
1.3 EXTENSÕES ALGÉBRICAS DOS RACIONAIS. ....	20
1.4 SOBRE NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS: RESULTADOS PRINCIPAIS. ....	23
1.5 O PORQUÊ DAS CONSTRUÇÕES COM RÉGUA NÃO-GRADUADA E COMPASSO. ....	26
<b>2 PROCEDIMENTOS DE PESQUISA</b> .....	30
2.1 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA. ....	30
2.2 INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO .....	32
2.3 A PESQUISA. ....	33
<b>3 ATIVIDADES NA SALA DE AULA DE MATEMÁTICA</b> .....	35
3.1 QUADRATURA DE REGIÕES POLIGONAIS. ....	35
3.1.1 <i>Quadratura do Retângulo.</i> .....	36
3.1.2 <i>Quadratura do Triângulo.</i> .....	38
3.1.3 <i>Quadratura do Pentágono.</i> .....	41
3.2 LÚNULAS DE HIPÓCRATES .....	43
3.2.1 <i>Lúnula: Lado e Diagonal do Quadrado.</i> .....	44
3.2.2 <i>Lúnulas e Catetos.</i> .....	46
3.2.3 <i>Lúnula</i> .....	48
<b>4 ANÁLISE DAS ATIVIDADES</b> .....	50
4.1 QUADRATURA DE REGIÕES POLIGONAIS. ....	50
4.2 LÚNULAS DE HIPÓCRATES. ....	55
4.2.1 <i>Lúnula: Lado e Diagonal do Quadrado</i> .....	55
<b>4.2.2 <i>Lúnulas e catetos</i></b> .....	56
4.3 SOBRE A UTILIZAÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA .....	57
<b>5. CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	59

**REFERÊNCIAS.....61**

**ANEXO .....62**

## INTRODUÇÃO

Em quase dez anos lecionando para turmas de Ensino Fundamental e Médio a pergunta que mais me angustia é: Por que precisamos estudar este assunto? Os conteúdos parecem não ter significado para os alunos e o desinteresse pela disciplina é perceptível. Além disso, existe certo temor como se a matemática fosse algum tipo de monstro. Contudo a situação descrita não é exclusiva.

Pesquisas apontam que a aprendizagem de matemática em nosso país está aquém do desejado. Segundo Druck (2003) alguns dados numéricos confirmam o problema:

O SAEB/2001 - Matemática revela que apenas 5,99% dos alunos do ensino médio alcançaram o nível desejado e, na 4o série do ensino fundamental, apenas 6,78%. Indica ainda uma piora (em relação ao SAEB/1999) do nível matemático de nossas crianças em 11 Estados, enquanto nos demais Estados parece não revelar alteração. Completa esse quadro o baixíssimo nível de cultura matemática cotidiana do brasileiro, que na sua maioria desconhece as quatro operações e unidades de medida. p.1.

Muitas vezes, relaciona-se o desempenho dos alunos com a formação dos professores, ou ainda, diz-se que nem “todos” podem ser “bons” em matemática.

Todos hão de concordar que Matemática também é praticada e feita pelo povo. Mas o que se vê é que o povo está, em geral, amedrontado com a Matemática, julgando-a algo reservada aos deuses ou aos gênios, que são homens próximos a deuses. (FREIRE apud D'AMBROSIO, 2013, p. 20).

Será que nós, como professores, poderíamos nos acomodar e concordar com a ideia de que somente os gênios se saíram bem nas avaliações? Enquanto isso resignamos os outros à condição de “não dignos” dos conhecimentos matemáticos, mantendo nossas tradicionais aulas de transmissão de saberes para aqueles que podem recebê-los? Segundo D'Ambrosio, o problema do baixo desempenho dos alunos em matemática pode não ser culpa deles, nem de nós, professores:

Não seria tempo de se pensar que o problema poderá estar na matemática escolar e não nos alunos e professores? Não ocorrerá a ninguém “desconfiar” que essa *Matemática* talvez esteja excluindo cidadãos de muito sucesso na vida e nas suas carreiras profissionais porque ela é obsoleta, desinteressante e inútil? (D’Ambrosio, 2013, pag. 20).

Nesta pesquisa pretendemos modificar a maneira como a matemática escolar é apresentada utilizando a História da Matemática e a informática para a exibição dos conteúdos propostos nas atividades escolares desenvolvidas. O referencial técnico aborda conceitos oriundos da Álgebra.

Sendo assim, qualquer objeto matemático poderia ser focado como relevante para o aprendizado dos alunos. Elegemos tópicos correlatos ao ensino de Álgebra e também tópicos de Geometria que foram explorados através de problemas de quadraturas; em especial o problema da quadratura do círculo. Observamos que a teoria envolvida na realização destes abrange vários itens do currículo escolar, especialmente em álgebra e números, pois estas construções podem ser tratadas como geométricas e/ou traduzidas em linguagem algébrica. Assim, os objetivos da pesquisa são os que seguem:

- i. Estudo da teoria formal sobre Números Construtíveis e temas correlatos como: Quadratura de Polígonos, Lúnulas, Quadratura do Círculo; além de tópicos de História da Matemática relacionados a estes.*
- ii. Elaboração, aplicação e análise de atividades em sala de aula de matemática de Ensino Médio, cuja temática esteja relacionada a Quadraturas.*
- iii. Estabelecimento de conexões entre o conhecimento matemático avançado e a sala de aula de matemática do Ensino Médio.*

Destacamos que deste modo pretendemos efetivar a proposta do Programa de Mestrado em Rede Nacional – Profmat conforme consta em seu Regimento, “Art. 23. A Dissertação de Mestrado versa sobre temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática do Ensino Básico e que tenham impacto na prática didática em sala de aula.” Sendo uma de nossas preocupações fazer chegar

até nosso aluno àquilo que aprendemos e compartilhar nosso “gosto” pelo estudo da Matemática.

Para o primeiro capítulo, faremos uma exposição de resultados matemáticos que nos permitem explicar a insolubilidade do problema da quadratura do círculo utilizando os instrumentos euclidianos: régua não graduada e compasso; e em seguida abordamos alguns aspectos da limitação das construções a estes instrumentos.

Veremos que embora a teoria de Álgebra discutida mostre que o problema da quadratura do círculo é impossível, a tentativa de resolver este e os demais problemas clássicos da matemática grega, a saber, duplicação do cubo e trisseção do ângulo, conduziu à discussão de vários problemas interessantes como a quadratura de Lúnulas tratada por Hipócrates de Quios, matemático da segunda metade do século quinto a. E.C. A importância deste trabalho é relatada em Roque e Carvalho (2012, p.68) como o primeiro exemplo de cálculo de áreas de figuras limitadas por linhas curvas.

No capítulo seguinte, tratamos de explorar as metodologias que foram utilizadas durante a realização da pesquisa em sala de aula, a saber: a História da Matemática e a Informática. Comentamos ainda sobre o software dinâmico Geogebra que foi apresentado aos alunos participantes do projeto.

Considerando nosso comprometimento com a qualificação do ensino da disciplina de Matemática, no terceiro capítulo apresentamos duas sequências de atividades referentes a conteúdos curriculares dos Ensinos Fundamental e Médio, produtos do estudo realizado no desenvolvimento deste trabalho.

No quarto capítulo comentamos sobre a experiência de aplicação das atividades para um grupo de dez estudantes da última série do Ensino Médio, realizada em contra turno escolar, destacando os principais resultados desta interação.

## 1 EXTENSÕES ALGÉBRICAS DOS RACIONAIS.

Este capítulo versará sobre os resultados matemáticos que tratam do tema estudado. A referência utilizada é Gonçalves (1999). O objetivo principal é mostrar que o conjunto dos números construtíveis com régua e compasso é uma extensão algébrica do conjunto dos números racionais com dimensão igual a uma potência de 2. Iniciamos definindo o conjunto dos números construtíveis.

### 1.1 NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS: DEFINIÇÕES PRELIMINARES.

**Definição 1** Seja  $P$  um subconjunto do  $\mathbb{R}^2$  contendo pelo menos dois pontos distintos. Dizemos que uma reta  $r \in \mathbb{R}^2$  é uma reta em  $P$  se  $r$  contém dois pontos distintos de  $P$ . Dizemos que uma circunferência  $c \in \mathbb{R}^2$  é uma circunferência em  $P$  se o centro de  $c$  e um ponto de  $c$  pertence a  $P$ .

**Definição 2** As operações definidas a seguir são ditas *operações elementares* em  $P$ :

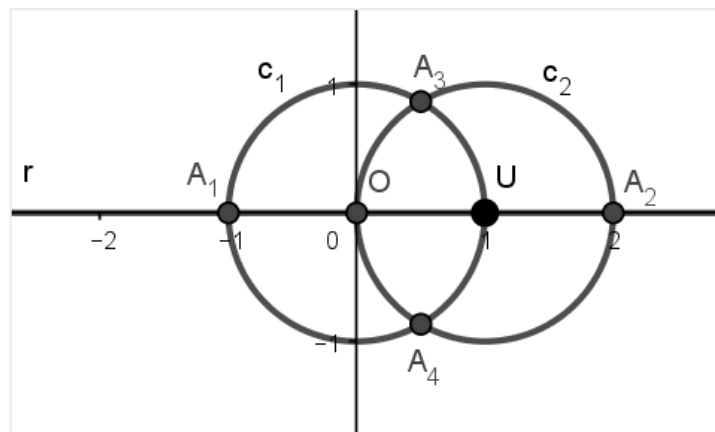
- a. Interseção de duas retas em  $P$ .
- b. Interseção de duas circunferências em  $P$ .
- c. Interseção de uma reta em  $P$  e uma circunferência em  $P$ .

**Definição 3** Um ponto  $A \in \mathbb{R}^2$  diz-se construtível a partir de  $P$  se é possível determiná-lo através de operações elementares em  $P$ . Denotaremos por  $\langle P \rangle$  o subconjunto dos pontos de  $\mathbb{R}^2$  que são construtíveis a partir de  $P$ .

De posse destas definições iniciais, podemos verificar alguns exemplos de pontos construtíveis através de operações elementares. Gostaríamos de esclarecer ao leitor que a reta e a circunferência equivalem, respectivamente, a régua não graduada e ao compasso. Como afirma Roque (2012, p. 140), para Euclides, n'Os *Elementos*, "as construções realizáveis com régua e compasso são executadas por meio de retas e círculos definidos de modo abstrato."

**Exemplo 1** Seja  $P_0 = \{0, U\}$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ , contendo dois pontos distintos:  $0 = (0,0)$ , origem do sistema cartesiano e  $U = (1,0)$ , podemos construir os pontos  $A_1 = (-1,0)$ ;  $A_2 = (2,0)$ ,  $A_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  e  $A_4 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ , através de operações elementares em  $P_0$  obtendo  $\langle P_0 \rangle = \{0, U, A_1, A_2, A_3, A_4\}$  conforme a figura 1.1:

Figura 1.1 - Construção de  $\langle P_0 \rangle$ .



Fonte: o próprio autor.

Para obtermos os pontos que pertencem a  $\langle P_0 \rangle$ , as operações realizadas foram: Construção da reta  $r$  passando por  $0$  e  $U$ ; construção da circunferência de centro  $O$  passando por  $U$  ( $c_1$ ); construção da circunferência de centro  $U$  passando por  $O$  ( $c_2$ ); interseção de  $r$  com  $c_1$ ; interseção de  $r$  com  $c_2$ ; interseções de  $c_1$  com  $c_2$ .

**Definição 4** Sejam  $O = (0,0)$ ,  $U = (1,0) \in \mathbb{R}^2$ , os seguintes conjuntos de pontos construtíveis são definidos recursivamente:

$$P_0 = \{O, U\}, P_1 = \langle P_0 \rangle, \dots, P_{n+1} = \langle P_n \rangle, \dots; \forall n \in \mathbb{N}.$$

Em particular  $P_1 = \left\{(-1,0), O, U, (2,0), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$  é o conjunto citado anteriormente. Sendo  $P_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_n$  temos que  $P_\infty$  designa todos os pontos construtíveis.

**Definição 5** Um número  $a \in \mathbb{R}$  é dito construtível se  $(a,0) \in P_\infty$ . O conjunto de números reais construtíveis será indicado por  $C_{\mathbb{R}}$ .

Para que possamos exibir outros resultados a respeito dos números Construtíveis, necessitamos de algumas definições e proposições de Álgebra que comporão a próxima seção deste capítulo.

## 1.2 OUTRAS DEFINIÇÕES .

Seja  $A$  um conjunto não vazio onde estejam definidas duas operações, chamadas de *soma* e *produto*, denotadas respectivamente por  $+$  e  $\bullet$ , da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ll} + : A \times A \rightarrow A & \text{e} \quad \bullet : A \times A \rightarrow A \\ (a,b) \rightarrow a + b & (a,b) \rightarrow a \bullet b \end{array}$$

**Definição 6** Dizemos que  $(A,+, \bullet)$  é *anel* se para quaisquer  $x, y, z \in A$ , as seis propriedades seguintes são satisfeitas:

- a. *Associatividade* da soma:  $(x + y) + z = x + (y + z)$ .
- b. Existência do *elemento neutro* para soma:  $\exists 0 \in A$ , tal que:  $x + 0 = x; \forall x \in A$
- c. Existência do *inverso aditivo*:  $\forall x \in A \exists! y \in A$ , denotado por  $y = -x$  tal que:  
 $x + y = y + x = 0$ .
- d. *Comutatividade* da soma:  $x + y = y + x$ .
- e. *Associatividade* do produto:  $(x \bullet y) \bullet z = x \bullet (y \bullet z)$
- f. *Distributividade* do produto em relação à soma:  $x \bullet (y + z) = x \bullet y + x \bullet z$ ;  
 $(x + y) \bullet z = x \bullet z + y \bullet z$ .

**Definição 7** Se um anel  $(A,+, \bullet)$  satisfaz a seguinte propriedade:

- g. Existência da *unidade*:  $\exists 1 \in A, 0 \neq 1$ , tal que  $1 \bullet x = x \bullet 1 = x; \forall x \in A$ ; dizemos que  $(A,+, \bullet)$  é *um anel com unidade*.

**Definição 8** Se um anel  $(A, +, \bullet)$  satisfaz a seguinte propriedade:

- h. *Comutatividade do produto*:  $\forall x, y \in A, x \cdot y = y \cdot x$ ; dizemos que  $(A, +, \bullet)$  é *anel comutativo*.

**Definição 9** Se um anel  $(A, +, \bullet)$  satisfaz a seguinte propriedade:

- i.  $\forall x, y \in A$ , se  $x \cdot y = 0$ , então  $x = 0$  ou  $y = 0$ . Dizemos que  $(A, +, \bullet)$  é *um anel sem divisores de zero*.

**Definição 10** Um conjunto é chamado *Domínio de Integridade* se é *anel comutativo, com unidade e sem divisores de zero*.

**Definição 11** Chama-se *corpo* a um conjunto  $K$ , munido de duas operações  $+$  e  $\cdot$  (soma e produto) definidas em  $K$ , satisfazendo as seguintes condições:

- $(a + b) + c = a + (b + c)$ ;  $\forall a, b, c \in K$ . (associatividade da soma)
- Existe  $0 \in K$ , tal que  $a + 0 = a$ ;  $\forall a \in K$ . (elemento neutro)
- Para todo  $a \in K$  existe um único  $b \in K$  tal que  $a + b = b + a = 0$ . (existência do inverso aditivo). Denotamos o inverso aditivo por  $-a$ .
- $a + b = b + a$ , quaisquer que sejam  $a, b \in K$ ; (comutatividade)
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  quaisquer que sejam  $a, b, c \in K$ . (associatividade do produto).
- Existe  $1 \in K - \{0\}$ , tal que  $1 \cdot a = a$ ; para todo  $a \in K$ . (unidade)
- A todo  $a \in K - \{0\}$  corresponde  $a^{-1} \in K - \{0\}$  com  $a \cdot a^{-1} = 1$ . (elemento inverso).
- $a \cdot b = b \cdot a$  quaisquer que sejam  $a, b \in K - \{0\}$ . (comutatividade).
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  quaisquer que sejam  $a, b, c \in K$ .

**Observações:** Um *corpo* é um *domínio de integridade* onde todo elemento  $a \in K$ ;  $a \neq 0$  possui inverso. Neste texto sempre que designarmos um conjunto por  $K$ , estaremos nos referindo a um *corpo*.

**Definição 12** Seja  $(A, +, \bullet)$  um *anel*. Dizemos que  $B$  é um *subanel* de  $A$  quando  $B$  é um subconjunto não-vazio de  $A$  e é fechado para as operações de soma e produto.

**Definição 13** Seja  $(A, +, \cdot)$  um *corpo*. Dizemos que  $B$  é um *subcorpo* de  $A$ , quando  $B$  é um subconjunto não-vazio de  $A$  e é fechado para as operações de soma e produto.

**Definição 14** Dizemos que  $p(x)$  é um *polinômio* sobre um *corpo*  $K$  em uma indeterminada  $x$  se  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$ , onde para todo  $i \in \mathbb{N}$ ;  $a_i \in K$  e existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $a_m, a_{m+1}, \dots = 0$ . Quando  $a_n \neq 0$  e para todo  $m$ ;  $m > n$  temos  $a_m = 0$ ; dizemos que  $p(x)$  tem grau  $n$  e denotamos  $\partial(p(x)) = n$ . Se o coeficiente  $a_n = 1$ ,  $p(x)$  é dito *polinômio mônico*.

**Definição 15** Um polinômio é chamado *nulo*, quando todos os coeficientes são iguais a zero, neste caso o grau não está definido. Se tivermos  $p(x) = c$ , onde  $c \in K$ ;  $p(x)$  é chamado *polinômio constante*.

**Notação 1** : Denotamos por  $k[x]$  o conjunto de todos os polinômios sobre um *corpo*  $K$  em uma indeterminada  $x$ .

**Definição 16** Sejam  $p(x)$  e  $q(x) \in K[x]$  tais que  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$  e  $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m + \dots$  temos que  $p(x) = q(x)$ , se, e somente se, para todo  $i \in \mathbb{N}$ ;  $a_i = b_i$ .

**Definição 17** Em  $K[x]$  definimos as seguintes operações:

*Soma (+)* :  $p(x) + q(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_kx^k + \dots$ , tal que  $c_i = (a_i + b_i) \in K$ .

*Produto (.)* :  $p(x) \cdot q(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_kx^k + \dots$ , tal que  $c_i = a_0 \cdot b_i + a_1 \cdot b_{i-1} + \dots + a_i \cdot b_0 \in K$ .

**Definição 18** Seja  $p(x) \in K[x]$  um polinômio não nulo e  $a \in K$ , sendo  $K$  um *corpo*. Dizemos que  $a$  é *raiz* de  $p(x)$  em  $K$  se  $p(a) = 0$ .

**Definição 19** Sejam  $f(x)$  e  $g(x) \in K[x]$ . Dizemos que  $g(x)$  divide  $f(x)$  em  $K[x]$ ,

se existe  $h(x) \in K[x]$  tal que  $f(x) = g(x).h(x)$ . Denotamos  $g(x) \mid f(x)$  em  $K[x]$  quando  $g(x)$  é divisor de  $f(x)$  em  $K[x]$ .

**Exemplo 2** Sendo  $K = \mathbb{R}$ ;  $f(x) = x^2 - x - 6$ ;  $g(x) = x + 2$ , temos que  $g(x)$  divide  $f(x)$  em  $K[x]$ , pois  $f(x) = x^2 - x - 6 = (x + 2).(x - 3)$  e  $h(x) = x - 3 \in K[x]$ .

**Definição 20** Seja  $f(x) \in K[x]$  tal que  $\partial(f(x)) \geq 1$ . Dizemos que  $f(x)$  é um polinômio *irredutível* sobre  $K$  se toda vez que para algum  $g(x), h(x) \in K[x]$ ,  $f(x) = g(x).h(x)$ , tivermos que  $g(x) = a$  ou  $h(x) = b$ , constantes em  $K[x]$ . Se  $f(x)$  não é irredutível sobre  $K$ , dizemos que  $f(x)$  é *redutível* sobre  $K$ .

**Exemplo 3** Observe o polinômio  $p(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$  que é *irredutível* sobre  $\mathbb{Q}$  e  $p(x) = x^2 - 2 \in \mathbb{R}[x]$  que é *redutível* sobre  $\mathbb{R}$ , pois:

$$p(x) = x^2 - 2 = (x + \sqrt{2}).(x - \sqrt{2}).$$

**Teorema 1 (Algoritmo da Divisão)** Sejam  $K$  um corpo,  $f(x); g(x) \in K[x]$  e  $g(x) \neq 0$ . Então, existem únicos  $q(x), r(x) \in K[x]$ , tais que  $f(x) = g(x).q(x) + r(x)$  com  $r(x) = 0$  ou  $\partial(r(x)) < \partial(g(x))$ .

*Demonstração:*

Sejam  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$  e  $g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m$ , onde  $\partial(g(x)) = m$ .

Provaremos inicialmente a existência. Se  $f(x) = 0$  basta tomarmos  $q(x) = r(x) = 0$ . Suponhamos, então que  $f(x) \neq 0$ , assim  $\partial(f(x)) = n$ . Se  $n < m$ , tomamos  $q(x) = 0$  e  $r(x) = f(x)$ .

Veremos agora o caso em que  $n \geq m$ . Seja  $f_1(x)$  o seguinte polinômio:  $f(x) = a_n b_m^{-1} x^{n-m}.g(x) + f_1(x)$  em que  $\partial f_1 < \partial f$ . Usaremos indução sobre o grau de  $f$  que sabemos ser  $n$ .

Se  $n = 0$ , então como  $n \geq m$  segue que  $m = 0$ , logo  $f(x) = a_0 \neq 0$ ;  $g(x) = b_0 \neq 0$  e teremos,  $f(x) = a_0 b_0^{-1} g(x)$ , bastando tomar  $q(x) = a_0 b_0^{-1}$  e  $r(x) = 0$ .

Como  $f_1(x) = f(x) - a_n b_m^{-1} x^{n-m} g(x)$  e  $\partial f_1(x) < \partial f(x) = n+1$ , temos pela hipótese de indução que  $\exists q_1(x), r_1(x)$  tais que  $f_1(x) = q_1(x) \cdot g(x) + r_1(x)$ , onde  $r_1(x) = 0$  ou  $\partial r_1(x) < \partial g(x)$ . Seguindo que  $f(x) = (q_1(x) + a_n b_m^{-1} x^{n-m})g(x) + r_1(x)$ , e assim basta tomar  $q(x) = q_1(x) + a_n b_m^{-1} x^{n-m}$  e  $r(x) = r_1(x)$ .

Vamos mostrar agora a unicidade, para isso, sejam:  $q_1(x); q_2(x); r_1(x)$  e  $r_2(x) \in K[x]$  tais que:

$$f(x) = g(x) \cdot q_1(x) + r_1(x) = g(x) \cdot q_2(x) + r_2(x), \quad \text{onde } r_1(x) = 0 \quad \text{ou} \\ \partial(r_i(x)) < \partial(g(x)); \quad i=1,2.$$

Daí segue que:  $(q_1(x) - q_2(x)) \cdot g(x) = r_2(x) - r_1(x)$ . Mas se  $q_1(x) \neq q_2(x)$  o grau do polinômio à esquerda da igualdade é  $\geq \partial(g(x))$  enquanto que  $\partial(r_2(x) - r_1(x)) < \partial(g(x))$ , o que nos dá uma contradição. Logo, devemos ter  $q_1(x) = q_2(x)$ , e  $r_1(x) = f(x) - q_1(x)g(x) = f(x) - q_2(x)g(x) = r_2(x)$  como queríamos.

**Definição 21** Se  $L \supset K$  é um corpo, dizemos que  $L$  é uma *extensão* de  $K$ . Denotaremos por  $L$  uma extensão de  $K$ .

**Definição 22** Seja  $L \supset K$ . Dizemos que  $a \in L$  é *algébrico* sobre  $K$ , se existe  $f(x) \in K[x] - \{0\}$  tal que  $f(a) = 0$ . Se  $a \in L$  não é *algébrico* sobre  $K$ , chamamos  $a \in L$  de *transcendente* sobre  $K$ .

Sendo o corpo  $\mathbb{R}$  dos números reais, os elementos algébricos ou transcendentos sobre  $\mathbb{R}$  são ditos apenas *algébricos* ou *transcendentes*. Podemos observar que qualquer número inteiro  $\alpha$  é *algébrico*, pois sendo  $f(x) = x - \alpha$ , temos que  $f(\alpha) = 0$ . Notemos também que todo número racional  $\beta = \frac{p}{q}$ , onde  $q \neq 0$ ,  $p, q \in \mathbb{Z}$  é *algébrico*, pois satisfaz  $f(x) = qx - p$ . Assim podemos assegurar que *todo transcendente é irracional*; apesar da recíproca não ser verdadeira, pois alguns irracionais também são algébricos, como por exemplo  $\sqrt{2}$  que satisfaz a equação  $x^2 - 2 = 0$ .

**Definição 23** Dizemos que  $L \supset K$  é uma *extensão algébrica* do corpo  $K$ , se  $\forall a \in L \supset K, a$  é algébrico sobre  $K$ .

**Definição 24** Seja  $a \in L$  algébrico sobre  $K$  e  $p(x)$  um polinômio em  $K[x]$ ; mônico e de menor grau, tal que  $p(a) = 0$ . Pela minimalidade do grau de  $p(x)$ , temos que ele é o único polinômio mônico e irredutível em  $K[x]$ ; tal que  $p(a) = 0$ ; este será denotado por  $p(x) = irr(a, K)$ .

**Definição 25** Se  $a \in L \supset K$ , definimos por  $K[a] = \{f(a) : f(x) \in K[x]\}$ .

**Exemplo 4** Considere  $\alpha = \sqrt{2} \in L$ , sendo  $L = \mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ ; mostraremos que

$$K[\alpha] = \mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

De fato, pela definição dada temos que  $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{f(\sqrt{2}) : f(x) \in \mathbb{Q}[x]\}$ . Agora se  $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ , existem, pelo algoritmo da divisão,  $q(x); r(x) \in \mathbb{Q}[x]$  tais que  $f(x) = q(x)(x^2 - 2) + r(x)$ ; onde o grau de  $r(x)$  é menor que 2, isto é:  $r(x) = a + bx$ ;  $a, b \in \mathbb{Q}$  e portanto  $f(\sqrt{2}) = r(\sqrt{2}) = a + b\sqrt{2}$ .

### 1.3 EXTENSÕES ALGÉBRICAS DOS RACIONAIS.

Para o desenvolvimento deste item, necessitamos de algumas definições e propriedades de Álgebra Linear; para maiores detalhes o leitor pode consultar Boldrini; C.; Figueiredo; W. (1986). Os outros resultados de Álgebra seguem de Gonçalves (1999).

**Definição 26** Seja  $K$  um corpo qualquer e seja  $V$  um conjunto não vazio onde está definida uma operação soma. Suponhamos também que esteja definida uma operação de elementos de  $K$  por elementos de  $V$ . Assim:

$$\begin{aligned} +: V \times V &\rightarrow V & e & \quad K \times V \rightarrow V \\ (u, v) &\rightarrow u + v & & \quad (\lambda, v) \rightarrow \lambda v \end{aligned}$$

Dizemos que  $V$  munido dessas operações é um *espaço vetorial sobre o corpo  $K$*  se as seguintes propriedades são verificadas quaisquer que sejam  $u, v, w \in V$  e  $\lambda, \mu \in K$ :

- a)  $(u + v) + w = u + (v + w)$ ;
- b) Existe  $0 \in V$ , tal que  $u + 0 = 0$ ;
- c) Existem  $x, y \in V$  tal que  $x + y = y + x = 0$ .

- d)  $u + v = v + u$ ;  
 e)  $1 \cdot v = v$  onde 1 é a unidade do corpo  $K$ .  
 f)  $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$  e  $(\mu + \lambda) \cdot u = \mu \cdot u + \lambda \cdot u$  .  
 g)  $\lambda(\mu v) = \mu(\lambda v) = (\lambda \mu) v$ .

**Exemplo 5** Observamos que  $L \supset K$  pode ser visto como espaço vetorial sobre o corpo  $K$ .

De fato, as operações :

$$\begin{aligned} +: L \times L &\rightarrow L & e & & K \times L &\rightarrow L \\ (u, v) &\rightarrow u + v & & & (\lambda, v) &\rightarrow \lambda v \end{aligned}$$

já existem, naturalmente no corpo  $L$  .

**Definição 27** Um subconjunto não vazio  $W$  de  $V$  diz-se um *subespaço vetorial* de  $V$  se as seguintes condições são satisfeitas:

- 1)  $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$ ,
- 2)  $\lambda \in K, w \in W \Rightarrow \lambda w \in W$ .

**Definição 28** Se  $v_1, \dots, v_n \in V$  dizemos que  $v_1, \dots, v_n$  são *linearmente independentes (LI)* se a equação vetorial  $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0, \alpha_i \in K$  é satisfeita apenas para os escalares  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ . Caso contrário dizemos que  $v_1, \dots, v_n$  são *linearmente dependentes (LD)*.

**Definição 29** Se  $u_1, u_2, \dots, u_r \in V$ , pode-se verificar que:

$W = \{ \sum_{i=1}^r \alpha_i u_i : \alpha_i \in K; i = 1, 2, \dots, r \}$  é um subespaço vetorial de  $V$ , o qual chamaremos de *subespaço gerado por*  $u_1, u_2, \dots, u_r$ , e será denotado por  $W = \langle u_1, u_2, \dots, u_r \rangle$ .

**Definição 30** Se um conjunto ordenado  $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$  for L.I. e tal que  $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = V$  dizemos que  $v_1, v_2, \dots, v_n$  é uma *base* de  $V$ .

**Teorema 2:** i) Todo espaço vetorial  $V$  sobre um corpo  $K$  possui uma base.

ii) Se um espaço vetorial  $V$  sobre um corpo  $K$  possui uma base com  $n$  elementos então toda base de  $V$  possui  $n$  elementos. Para a demonstração deste resultado o

leitor poderá consultar Boldrini; C.; Figueiredo; W. (1986).

**Definição 31** Se um espaço vetorial  $V$  sobre um corpo  $K$  possui uma base com  $n$  elementos, o número  $n$  é chamado de *dimensão de  $V$  sobre  $K$*  e denotamos por  $[V:K] = n$ .

**Definição 32** Seja  $K$  um corpo qualquer. Uma extensão  $L \supset K$  é chamada *finita* se  $[L:K] = n < \infty$ . Caso contrário  $L \supset K$  é chamada *extensão infinita*.

**Proposição 1:** Seja  $K$  um corpo e  $L \supset K$  uma extensão de  $K$ . Se  $L \supset K$  é extensão finita, então  $L \supset K$  é extensão algébrica.

*Demonstração:*

Seja  $K$  um corpo e  $L \supset K$  uma extensão finita de  $K$ . Suponha  $[L:K] = m < \infty$ . Seja  $a \in L$  tal que  $K[a]$  é um subespaço de  $L$ . Assim  $[K[a]:K] \leq m$ . Se  $n = [K[a]:K]$ , temos que  $1, a, \dots, a^n$  é L.D., pois  $n$  é o número máximo de elementos L.I. Logo existem escalares  $a_0, \dots, a_n$  não todos nulos tais que  $a_0 + a_1 a + \dots + a_n a^n = 0$ , o que mostra que  $a$  é algébrico sobre  $K$ .

**Proposição 2:** Seja  $K$  um corpo e  $L \supset K$  uma extensão de  $K$ . Se  $a \in L \supset K$  é um elemento algébrico sobre  $K$  e o grau do polinômio  $\text{irr}(a, K)$  é  $n$ , então  $1, a, \dots, a^{n-1}$  é uma base do espaço vetorial  $K[a]$  sobre  $K$  e  $[K[a]:K] = n < \infty$ .

*Demonstração:*

Seja  $a \in L \supset K$  um elemento algébrico sobre  $K$  tal que o grau do  $\text{irr}(a, K)$  é  $n$ . Todo elemento de  $K[a]$  pode ser escrito de modo único como combinação linear de  $1, a, \dots, a^{n-1}$  sobre  $K$ . Assim  $1, a, \dots, a^{n-1}$  é base de  $K[a]$  sobre  $K$ . Logo  $[K[a]:K] = n$ .

**Proposição 3:** Se  $M \supset L \supset K$  são corpos tais que  $[M:L]$  e  $[L:K]$  são finitos, então  $[M:K]$  é finito e  $[M:K] = [M:L][L:K]$ .

*Demonstração:*

Considere  $M \supset L \supset K$  corpos tais que  $[M:L] = r$  e  $[L:K] = s$ ,  $r, s \in \mathbb{Z}^+$  são finitos. Seja  $v_1, \dots, v_r$  uma base de  $M$  sobre  $L$ . Seja  $u_1, \dots, u_s$  uma base de  $L$  sobre  $K$ . É suficiente provar que  $\beta = \{v_i u_j : i = 1, \dots, r \text{ e } j = 1, \dots, s\}$  é uma base de  $M$  sobre  $K$ .

Sejam  $a_{ij} \in K, 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s$ . Como  $\sum_{i,j} a_{ij} v_i u_j = 0$ , então  $\sum_j a_{ij} u_j = 0$  para cada  $i = 1, \dots, r$ . Assim,  $a_{ij} = 0$ , para cada  $i = 1, \dots, r$  e  $j = 1, \dots, s$ . Logo  $\beta$  é um conjunto L.I. de  $M$  sobre  $K$ . Queremos provar que  $\beta$  é gera  $M$  sobre  $K$ . Seja  $y \in M$  qualquer. Existem  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in L$ , tal que  $y = \sum_{i=1}^r \lambda_i v_i$ . Agora vejamos que para cada  $i = 1, \dots, r$ , existem  $a_{i1}, \dots, a_{is} \in K$ , tais que  $\lambda_i = \sum_{j=1}^s a_{ij} u_j$ . Assim,  $\beta$  gera  $M$  sobre  $K$ .

Com esta proposição encerramos a exposição de resultados de Álgebra e a seguir retomamos nosso estudo sobre o conjunto dos números construtíveis, onde mostraremos inicialmente que  $C_{\mathbb{R}}$  é um subcorpo do conjunto dos números reais. Os resultados exibidos seguem de Gonçalves (1999).

#### 1.4 SOBRE NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS: RESULTADOS PRINCIPAIS.

**Proposição 4:** O conjunto dos números construtíveis é um subcorpo dos reais contendo os racionais.

*Demonstração:*

Sejam  $a, b \in C_{\mathbb{R}}$ . Sem perda de generalidade, suponha que a desigualdade  $0 < a < b$  é satisfeita. Sejam os pontos  $A = (a, 0)$  e  $B = (b, 0)$  construtíveis. Existe uma reta  $|OX| = |AB|$  tal que  $X$  é construtível. Nessas condições,  $X = (b - a, 0)$ , portanto  $b - a$  é construtível. Seja a reta  $\overline{OT}$  construtível tal que  $T = (0, 1)$ . A reta bissetriz  $r$  de  $\overline{OT}$  e  $\overline{AB}$  é construtível. Seja  $C(O, a)$  uma circunferência de centro  $O$  e raio  $a$ .  $A_1 = r \cap C(O, a)$  e  $U_1 = r \cap C(O, 1)$ . Considere o segmento de reta  $A_1 U_1$ , onde  $U = (1, 0)$ . Existe uma reta  $s$  construtível paralela a  $\overline{A_1 U_1}$  passando por  $B$ . Considere  $C = r \cap s$ . Dessa forma,  $C$  é construtível. Sabemos que a relação  $\frac{|OC|}{|OA_1|} = \frac{|OB|}{|OU|}$  é válida. Assim,  $|OC| = ab$ . Logo,  $(ab, 0) = \overline{OC} \cap C(O, |OC|)$  é construtível. Portanto,  $ab$  é construtível. Existe uma reta  $t$  construtível paralela a  $\overline{A_1 U_1}$

passando por  $U_1$ . Seja  $X = \overline{OU} \cap t$ , logo  $X$  é construtível. A relação  $\frac{|OU_1|}{|OA_1|} = \frac{|OX|}{|OU|}$  é válida. Assim,  $|OX| = 1/a$ . Portanto  $(\frac{1}{a}, 0) = C(O, |OX|) \cap \overline{OU}$  é construtível. Ou seja,  $\frac{1}{a}$  é construtível. Assim o conjunto dos construtíveis é um subcorpo dos reais. Conforme  $P_n$  foi definido,  $\mathbb{Z}$  são construtíveis. Como os construtíveis é subcorpo dos reais,  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}$  são construtíveis.

Finalmente temos condições de exibir e provar um teorema central no estudo de números construtíveis, resultado este que prova a insolubilidade do problema da quadratura do círculo por meio de régua e compasso, como veremos a seguir.

**Teorema 3 :** O conjunto dos construtíveis é uma extensão algébrica dos racionais tal que se  $a$  é construtível, então  $[\mathbb{Q}[a]:\mathbb{Q}]$  é potência de 2.

*Demonstração:*

Sejam  $A_n$  o conjunto das coordenadas de  $P_n$ ,  $K_0 = \mathbb{Q}, K_1 = \mathbb{Q}[A_1], \dots, K_n = \mathbb{Q}[A_n], \dots$ . Segue que  $A_n \subset C_{\mathbb{R}}$  e  $K_{\infty} = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n = C_{\mathbb{R}}$ .  $C_{\mathbb{R}}$  é extensão algébrica. Basta provar que  $[\mathbb{Q}[a]:\mathbb{Q}]$  é potência de 2. De fato, seja  $a \in C_{\mathbb{R}}$ . Existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $a \in K_n = \mathbb{Q}[A_n]$ . Sabemos que  $[K_n:\mathbb{Q}] = [K_n:\mathbb{Q}[a]][\mathbb{Q}[a]:\mathbb{Q}]$ . Como  $a \in K_n$ ,  $[K_n:\mathbb{Q}[a]] = 1$ . É suficiente provar que  $[K_n:\mathbb{Q}]$  é potência de 2. Provemos por indução finita. Para  $n = 0$  temos  $K_0 = \mathbb{Q}$  e  $[K_0:\mathbb{Q}] = 1$  é potência de 2. Para  $n = 1$ , temos  $K_1 = \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$  e  $[K_1:\mathbb{Q}] = 2$  é potência de 2. Suponha por indução que  $[K_{n-1}:\mathbb{Q}]$  é potência de 2. Queremos provar que  $[K_n:\mathbb{Q}]$  é potência de 2. Como  $[K_n:\mathbb{Q}] = [K_n:K_{n-1}][K_{n-1}:\mathbb{Q}]$ , é suficiente provar que  $[K_{n+1}:K_n]$  é potência de 2. Seja  $L = K_n, L_0 = K_{n-1}$ . Suponha  $A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ .  $L = L_0[A_n] = L_0[a_1, a_2, \dots, a_k]$ . Além disso,  $L_0 \subset L_1 = L_0[a_1] \subset \dots \subset L_k = L_{k-1}[a_k] = L$ . É suficiente mostrar que  $[L_i:L_{i-1}] = [L_{i-1}[\mathbb{Q}]:L_{i-1}]$  é potência de 2. Seja  $a_i \in A_n$ . Existe outra coordenada  $b_i \in A_n$ , tal que  $(a_i, b_i) \in P_n$  ou  $(b_i, a_i) \in P_n$ . Sem perda de generalidade, suponha  $(a_i, b_i) \in P_n$ .  $P_n = \langle P_{n-1} \rangle$ . Dessa forma,  $(a_i, b_i)$  é resultado de alguma operação elementar de retas ou circunferências construtíveis de  $P_{n-1}$ , isto é,  $a_i$  satisfaz alguma equação de primeiro grau ou segundo grau com coeficientes em  $K_{n-1}$ . Portanto,  $[L_i:L_{i-1}] = 1 = 2^0$  ou  $[L_i:L_{i-1}] = 2 = 2^1$ .

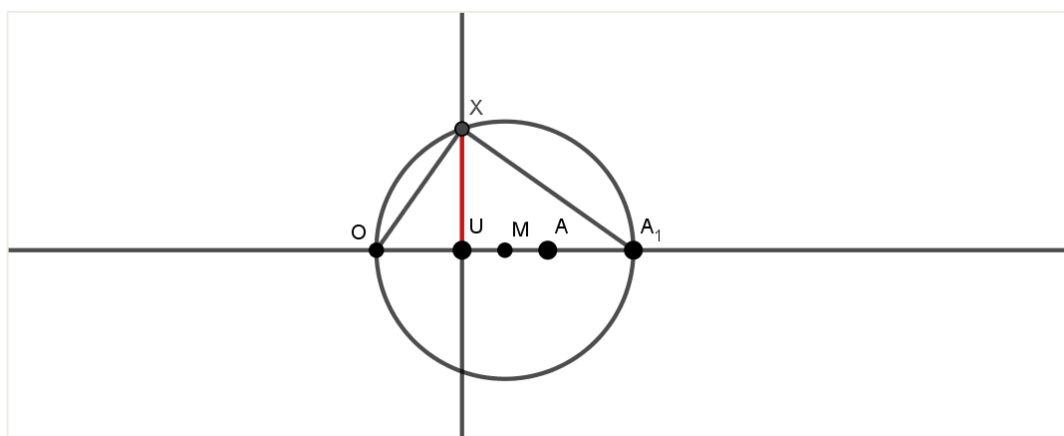
O teorema nos mostra que todo número construtível é algébrico, este fato será utilizado na demonstração da insolubilidade da quadratura do círculo.

**Proposição 5:** Se  $a \geq 0$  é um número construtível então  $\sqrt{a}$  também é construtível. Em particular  $\sqrt[i]{m}$  é construtível para todo  $i, m \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração:*

Sejam  $A(a, 0)$ ;  $A_1 = (1 + a, 0)$ . Como  $a$  é construtível temos que  $A$  e  $A_1$  também o são. Seja  $r$  a reta (construtível) perpendicular a  $\overline{OU}$  passando por  $U$ ;  $M$  o ponto médio do segmento  $\overline{OA_1}$  e  $X$  a interseção da reta  $r$  com a circunferência de centro  $M$  e raio unitário. Observe que o triângulo  $OXA_1$  é retângulo, pois está inscrito em uma semicircunferência, assim temos que os segmentos  $\overline{OU}$  e  $\overline{UA_1}$  são as projeções dos catetos do triângulo retângulo sobre a hipotenusa  $\overline{OA_1}$ , valendo então a relação  $\overline{OX}^2 = \overline{OU} \cdot \overline{UA_1}$ . O segmento  $\overline{OU}$  tem medida unitária e  $\overline{UA_1}$  mede  $a$ . Portanto  $\overline{OX} = \sqrt{a}$ .

Figura 1.2 - Construção de  $\sqrt{a}$ .



Fonte: o próprio autor.

A recíproca desta propriedade é obviamente verdadeira, ou seja, se

$\sqrt{a}$  é construtível,  $a = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a}$  também o é.

Finalmente podemos compreender porque o problema da quadratura do círculo não tem solução ao se permitir somente o uso de régua não-graduada e compasso.

**Teorema 4:** Não existe  $\alpha \in C_{\mathbb{R}}$ , tal que a área do quadrado de lado  $\alpha$  seja igual a área do círculo de raio unitário.

*Demonstração:*

Suponha que exista  $\alpha \in C_{\mathbb{R}}$ , tal que  $\alpha^2 = \pi$ . Como  $\pi$  é transcendente sobre  $\mathbb{Q}$ ; segue que  $\pi \notin C_{\mathbb{R}}$  (extensão algébrica de  $\mathbb{Q}$ ) e portanto  $\alpha \notin C_{\mathbb{R}}$ .

Para uma demonstração da transcendência do número  $\pi$ , o leitor interessado poderá consultar a obra de Figueiredo (2011) que dedica um capítulo a este resultado. A prova deste fato foi apresentada em 1882 por Lindemann, já a versão oferecida na referência indicada, é baseada em R. Moritz, com algumas adaptações. FIGUEIREDO (2011, p. 48).

## 1.5 O PORQUÊ DAS CONSTRUÇÕES COM RÉGUA NÃO-GRADUADA E COMPASSO.

Nesta seção esperamos evidenciar o fato de que a insolubilidade dos três problemas clássicos está relacionada a imposição de realizar as construções somente utilizando a régua sem graduação e o compasso. O papel das construções restritas a estes instrumentos na geometria grega é incerto à História da Matemática. No livro *Tópicos de História da Matemática*, Roque e Carvalho (2012) problematizam essa suposta imposição:

É lugar comum afirmarmos que as figuras geométricas aceitas na geometria grega deviam ser construídas com régua e compasso. De fato, isto é verdade se temos em mente as construções realizadas nos *Elementos* de Euclides. Dizer que o mesmo é verdade para toda geometria grega significa considerar que o conjunto das práticas gregas seguia o padrão estabelecido por Euclides, o que não acontecia.

As construções com régua e compasso não permitem resolver todos os problemas tratados pelos matemáticos gregos antes e depois de Euclides, os quais não se recusavam a utilizar outros métodos de construção ou a empregar outras curvas. Com o auxílio destas

curvas, foram resolvidos os problemas clássicos: a trisseção do ângulo, a quadratura do círculo e a duplicação do cubo. p. 132.

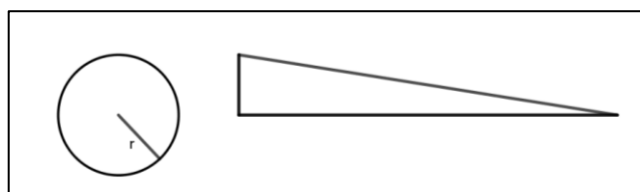
De acordo com estes autores, o período histórico de maior notoriedade dos problemas clássicos foi o final do século III a. E. C. onde havia uma grande preocupação em exhibir uma solução para estes problemas, não importando qual processo estava sendo empregado.

No livro *História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*, Tatiana Roque (2012, p. 140) comenta que “ o fato de nos *Elementos* de Euclides as construções serem realizadas por meio da régua e do compasso deu origem à crença de que essa seria uma restrição da geometria imposta pelos cânones da época”. Ela esclarece ainda que muitos autores apelam à filosofia platônica como motivo para esta restrição, alegando que Platão desprezava as construções mecânicas por encarar a reta e o círculo como figuras geométricas superiores, porém nos adverte que esta explicação está carregada de pressupostos implícitos, pois “Euclides não afirma explicitamente, em lugar nenhum de sua obra, que as construções tenham de ser efetuadas com retas e círculos. Simplesmente elas são, de fato, realizadas deste modo.” (ROQUE, T. 2012, p.141).

Para observarmos um exemplo de método distinto do euclidiano, exibiremos uma solução da quadratura do círculo, proposta por Arquimedes, matemático grego nascido no século III a. E. C. Ele faz uso também do método da exaustão para solucionar o problema. A demonstração apresentada se encontra em Roque e Carvalho ( 2012).

**Proposição 6:** *A área de um círculo é igual a um triângulo retângulo no qual um dos lados que formam o ângulo reto é igual ao raio e o outro lado que forma o ângulo reto é a circunferência deste círculo.*

Figura 1.3: Representação geométrica da proposição 6.



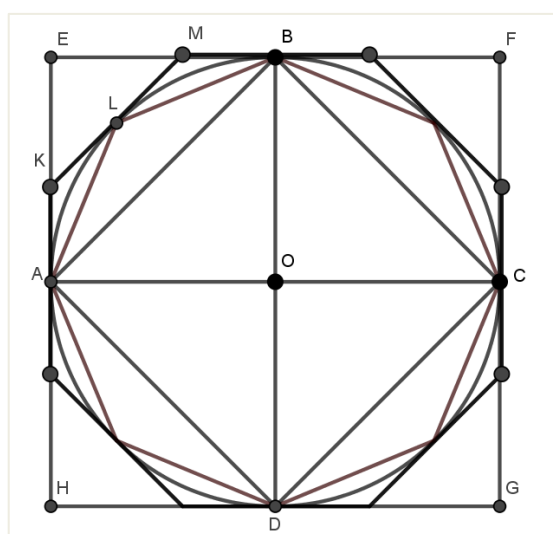
Fonte: o próprio autor.

*Demonstração:* A ideia central utilizada por Arquimedes é de aproximar a área do círculo por áreas de polígonos inscritos e circunscritos, cujos lados são duplicados sucessivamente.

Sejam  $C$  e  $T$  as áreas do círculo e do triângulo, respectivamente. Inscrevemos no círculo um quadrado, um octógono regular, e assim por diante, passando de um polígono regular inscrito de  $2^n$  lados para o de  $2^{n+1}$  lados.

Além disso, circunscrevemos ao círculo um quadrado, um octógono regular, etc., passando de um polígono regular inscrito de  $2^n$  lados para o de  $2^{n+1}$  lados. Assim conforme Figura 1.4, teremos o quadrado inicial ABCD, os lados AL e LB do octógono regular inscrito; o quadrado circunscrito original, EFGH e o octógono regular circunscrito de lado KM.

Figura 1.4: Quadratura do círculo.



Fonte: o próprio autor.

Sejam  $I_n$  e  $C_n$ ,  $n \geq 2$ , os polígonos de  $2^n$  lados, respectivamente, inscritos e circunscritos na circunferência. Mostraremos, por meio das figuras que não podemos ter  $C > T$  e  $C < T$ . O que nos dará que  $C = T$ .

Suponhamos, inicialmente, que  $C > T$ . Assim existe uma quantidade  $d$  tal que  $d = C - T > 0$ . De maneira geral, dado um polígono regular inscrito em um círculo, sua área é o produto de seu apótema por seu semi-perímetro. Aplicando este resultado ao polígono  $I_n$ , temos que sua área é igual a do triângulo retângulo de

catetos iguais, respectivamente, ao apótema e ao perímetro do polígono regular de  $2^n$  lados inscrito no círculo. Mas os apótemas e os perímetros dos polígonos inscritos são sucessivamente menores que o raio e a circunferência do círculo, isto é, menores do que os lados correspondentes do triângulo de área  $T$ , concluímos que a área de  $I_n$ , é menor que  $T$  para todo  $n$ . Assim a área de  $I_n < T < C$ .

Agora, como a área de  $I_n$  é menor que  $C$ , podemos obter uma quantidade  $k_n = C - \text{área}(I_n)$ . Usando o Lema de Euclides, observamos que quando aumentamos o número de lados do polígono esta quantidade pode ser tornada menor que qualquer quantidade dada. Logo, sendo  $n$  suficientemente grande, podemos obter  $k_n < d$ .

Mas, como  $\text{área}(I_n) < T < C$ ;  $d = C - T < C - \text{área}(I_n) = k_n$ ; obtemos uma contradição. Logo não podemos tomar  $C > T$ . Se supormos  $C < T$ , usando raciocínio análogo, teremos novamente uma contradição. O que finaliza resulta em dizer que  $C = T$ , como queríamos.

Para quadrar o círculo, basta então quadrar o triângulo retângulo que lhe é equivalente, e esta construção já era realizada pelas gregos. Aliás a quadratura de qualquer polígono já era conhecida como veremos no terceiro capítulo.

## 2 PROCEDIMENTOS DE PESQUISA

Como comentamos na introdução o ensino da disciplina de Matemática no Brasil é muitas vezes questionado: quer seja pela sociedade em geral, ao se deparar com os baixos índices alcançados pelos nossos alunos em avaliações de larga escala; quer pelos próprios estudantes quando nos sugerem que o conteúdo é desnecessário a eles.

Pretendemos, ao longo do capítulo, abordar alguns fatos que observamos ao definirmos a natureza qualitativa de nossa pesquisa, onde utilizamos a História da Matemática para coletar problemas que levaram ao desenvolvimento desta ciência e a partir deles explorar conteúdos do currículo escolar, especialmente na área de Geometria, empregando uma ferramenta tecnológica: o software *Geogebra*. Discutimos inicialmente sobre a inserção da História da Matemática na Educação Matemática.

### 2.1 HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Para Roque e Carvalho (2012) a maneira como se ensina a Matemática pode não fazer sentido para os alunos, pois esta é exibida como “algo pronto”, sem que haja uma exposição sobre aquilo que levou os matemáticos ao resultado estudado. A matemática se desenvolveu, e continua a se desenvolver, por meio de problemas e estes podem e devem ser exibidos ao ensiná-la: *“A história da Matemática pode tirar do esconderijo onde se encontram os problemas que constituem o campo de experiência do matemático”*. (ROQUE e CARVALHO, 2012, p. X).

As Diretrizes Curriculares para a Educação Básica apontam a história da Matemática como uma ferramenta capaz de conduzir o aluno a compreensão da natureza desta disciplina e sua importância para a humanidade, sendo que a abordagem histórica deve relacionar as descobertas matemáticas aos fatos sociais e políticos que a influenciaram. Comenta-se ainda que esta metodologia *“possibilita ao aluno analisar e discutir razões para aceitação de determinados fatos, raciocínios e procedimentos”*. (DCE, 2008).

Agora perguntamos: Como podemos inserir a História da Matemática no currículo? Inicialmente trazemos um alerta dado por Freudenthal e citado por D'Ambrosio: Não basta apenas a leitura das notas históricas que muitos livros didáticos trazem à margem da explicação de um novo tópico, pois muitas vezes elas são imprecisas e isoladas de seu contexto. O autor afirma que é possível fazer esta introdução de forma contextualizada, interessante e atraente, se tivermos em mente duas questões norteadoras: *“Para quem serve a História da Matemática?”* *Para que ensinar a História da Matemática?”* (FREUDENTHAL apud D'AMBROSIO 2013, p. 9).

Em resposta a primeira pergunta, D'Ambrosio comenta que é de interesse de toda a comunidade: alunos, professores e pais, e também de qualquer sujeito mesmo que não faça parte do ambiente escolar. A reflexão em relação à segunda é mais detalhada e traz variados motivos que amparam o ensino da História da Matemática:

Como mostra Struik, há um elenco de motivos para se ensinar História da Matemática. Sintetizo vários motivos nos seguintes pontos:

1. para situar a Matemática como uma manifestação cultural, assim como são manifestações culturais a linguagem, os costumes, os valores, as crenças e os hábitos;
2. para mostrar que as manifestações culturais se dão, de modo diversificado, em todos os povos e em todos os tempos;
3. para mostrar que a Matemática que se estuda nas escolas é uma das muitas formas de Matemática desenvolvidas pela humanidade;
4. para destacar que essa Matemática teve sua origem nos primórdios das civilizações e se organizou nas culturas da Antiguidade;
5. para saber que desde então a Matemática foi incorporada aos sistemas escolares das nações colonizadas, se tornou indispensável em todo o mundo em consequência do desenvolvimento científico, tecnológico e econômico, e avaliar as consequências socioculturais dessa incorporação.

(D'AMBROSIO, 2012, p. 10)

Portanto entendemos que a utilização da História da Matemática será de grande valia para aquilo que pretendemos: apresentar a Matemática em uma perspectiva diferenciada do modelo tradicional, buscando despertar o interesse de nossos alunos para o estudo desta ciência.

## 2.2 INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO

Após termos escolhido como tema das atividades os problemas de quadraturas: polígonos e lúnulas, consideramos indispensável a utilização de uma ferramenta dinâmica para as construções que deveriam ser realizadas. Elegemos o software gratuito *Geogebra* por conter todos os recursos indispensáveis a nossas necessidades. A seguir tecemos alguns comentários a respeito do uso de tecnologias para o ensino da Matemática e as possíveis consequências do uso deste recurso.

Para Borba e Penteado (2001) uma visita rápida à introdução da informática no ambiente escolar nos mostra que houve grande preocupação em relação à possibilidade de os computadores virem a substituir a figura do professor. Apesar deste temor inicial, muitos estudos mostraram que o professor continua tendo importante posição em ambientes informatizados, o que acarreta em uma responsabilidade deste estar apto a ocupar esse lugar, tendo que lidar com mudanças e atualizando sua prática constantemente.

Ao inserir a mídia computador em nossa pesquisa, concordamos com as afirmações deste autor em assegurar constantemente que não se fará comparações entre o modelo convencional e o informatizado, procurando responder questões como qual deles é melhor para o aprendizado. “procuramos focalizar nossa atenção na natureza do conteúdo que pode ser estudado num ambiente informatizado, o conhecimento produzido, a demanda para o trabalho do professor”. (BORBA e PENTEADO, 2001, p. 18).

Em relação ao trabalho do professor convém observar que este assume certa “zona de risco” ao trabalhar em um ambiente informatizado, podendo vir a perder o controle sobre sua aula em circunstâncias diversas como: problemas técnicos nas máquinas; surgimento de perguntas inesperadas, espaço físico inadequado ou que não contemple todos os alunos, entre outros.

Ao apresentarmos estes esclarecimentos pode parecer que não apoiamos o uso da informática no ambiente escolar, porém entendemos que apesar de haver empecilhos para esta abordagem, ela se faz necessária atualmente, visto que o acesso à informática deve ser visto como um direito dos estudantes, mais do

que isso, esta inserção deve ser justificada em dois pontos principais: alfabetização tecnológica e direito ao acesso.

O trabalho de Borba e Penteado (2001) traz alguns exemplos comentados de como a utilização da informática pode contribuir para modificar o tradicional modelo de aulas de matemáticas, onde se inicia com as definições e teoremas para a seguir resolver exercícios. Em um deles os autores apontam:

Deve ser destacada a dinâmica de como um problema pode remeter a outro, bem como a possibilidade de gerar conjecturas e ideias matemáticas a partir da interação entre professores, alunos e tecnologia. A experimentação se torna algo fundamental, invertendo a ordem de exposição oral da teoria, exemplos e exercícios bastante usuais no ensino tradicional, e permitindo uma nova ordem: investigação e, então, a teorização. BORBA e PENTEADO (2001, p. 41).

No estudo de Geometria a visualização dos objetos matemáticos possui demasiada importância para a compreensão dos problemas propostos, o software Geogebra facilita este processo. Segundo a descrição de sua homepage: O GeoGebra é um software de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino que reúne Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos em um único pacote fácil de se usar. Ele se tornou um líder na área de softwares de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática, por conter uma interface fácil de ser utilizada.

Atualmente existem diversos programas semelhantes a este, nossa opção pelo Geogebra deve-se especialmente a sua gratuidade. Nas atividades que proporemos aos alunos, é realizada apenas uma breve apresentação do programa e alguns de seus ícones e espera-se que os estudantes tenham condições de utilizá-lo para realizar suas tarefas.

### 2.3 A PESQUISA

Tendo realizado o estudo teórico sobre a teoria de números construtíveis e elegido a História da Matemática e a Informática como metodologias para a concretização do trabalho, elaboramos duas sequências de atividades:

*Quadratura de Regiões Poligonais e Lúnulas de Hipócrates* que aplicamos a estudantes da terceira série do Ensino Médio de uma escola da rede Estadual de Ensino. Neste local existe um laboratório de Informática, equipado com 10 computadores, que dispõe de um funcionário por 20h semanais divididas entre os três turnos.

Após obtermos autorização da direção da escola, procedemos a captação de alunos para o desenvolvimento da pesquisa. Como as turmas possuem em torno de 30 alunos, fizemos um convite em apenas uma delas, explicando que estaríamos limitados a 10 vagas. Inicialmente tivemos uma lista de 12 interessados, porém ao definirmos as datas dos encontros houveram 2 desistências por incompatibilidade de horários, restando 10 alunos. Os estudantes foram autorizados pelos responsáveis a frequentar e participar da pesquisa, sendo que os encontros foram realizados em contra turno, durante o mês de Agosto de 2017. A seguir apresentamos as sequências de atividades que foram propostas aos alunos.

### 3 ATIVIDADES NA SALA DE AULA DE MATEMÁTICA

Um dos objetivos de nossa pesquisa foi elaborar e aplicar atividades referentes ao tema estudado, fazendo com que aquilo que estudamos pudesse ser utilizado para aprimorar o trabalho docente. Sendo assim elaboramos dois conjuntos de atividades: *Quadraturas de Regiões Poligonais* e *Lúnulas de Hipócrates* que foram aplicados à alunos da 3ª série do Ensino Médio.

Utilizamos o software Geogebra para executar as construções geométricas, com o objetivo de apresentar esta ferramenta aos alunos e verificar sua facilitação no processo de ensino de Geometria, além de utilizarmos a História da Matemática para introduzir os conteúdos tratados. A seguir estaremos apresentando as atividades propostas.

#### 3.1 QUADRATURA DE REGIÕES POLIGONAIS.

Conteúdo: Geometria	
Professor: Cristiane C. Soutier.	Tempo previsto: 100 minutos
Objetivos:	<ul style="list-style-type: none"> <li>-Explorar o conceito de área de figuras planas por uma perspectiva diferenciada.</li> <li>-Utilizar o Geogebra como ferramenta de ensino da Geometria.</li> <li>- Relembrar propriedades de triângulos e utilizá-las para verificar as construções.</li> </ul>
Sugestões de Aplicação.	A construção do <i>retângulo com base e altura variáveis</i> pode ser realizada pelo professor enquanto os alunos acompanham e repetem os passos realizados, para que as ferramentas possam ser conhecidas por eles. As demais


construções podem ser realizadas diretamente pelos alunos, seguindo o roteiro descrito. A quadratura do pentágono tem o objetivo de revisar as construções anteriores.







A noção de área que temos atualmente; relacionada a uma medida numérica, é bem diferente de como os antigos geômetras a entendiam. Para eles este conceito estava relacionado a equivalências, isto é, duas figuras eram equivalentes se ocupavam a mesma porção de espaço (mesma área); assim para determinar certa área faziam-se comparações entre figuras. Por ser o quadrado a figura mais simples, teve origem o termo “quadratura”. Quadrar certa região significa construir um quadrado equivalente a ela. (ROQUE e CARVALHO, 2012, p. 89).

Um dos três problemas clássicos é exatamente a quadratura do círculo. À época destes estudos as construções eram realizadas com o uso de apenas dois objetos: régua não graduada e compasso. Vamos explorar algumas quadraturas utilizando uma ferramenta dinâmica, o Geogebra. As referências para as quadraturas dos polígonos realizadas nesta seção são: Santana (2015) e Roque e Carvalho (2012).

### 3.1.1 Quadratura do Retângulo.

#### **Construção de um retângulo de base e altura variáveis no Geogebra.**

- 1) Utilizando a ferramenta “Controle Deslizante”  clique no canto superior direito da tela; inserindo as seguintes informações: Nome: b; Intervalo: min: 0; máx: 7. Com a mesma ferramenta vamos criar um intervalo para a medida da altura do retângulo (h). Nome: h; Intervalo: min: 0; máx: 20; controle deslizante: selecione a posição vertical.

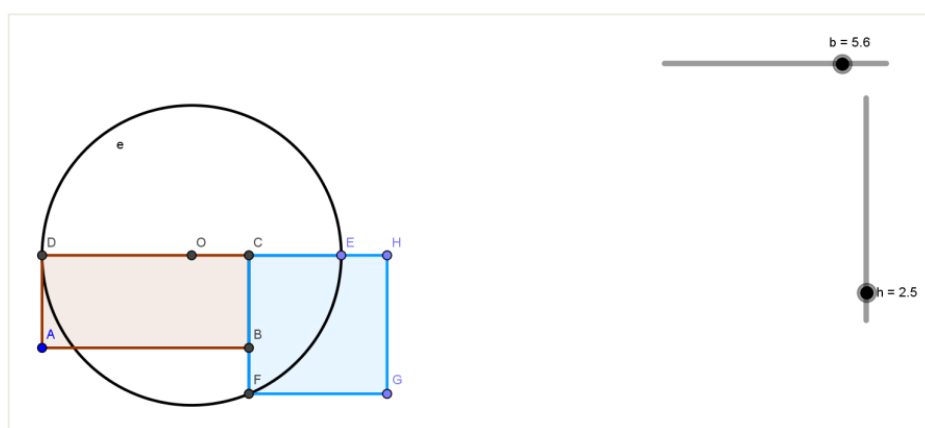
- 2) Com a ferramenta Ponto  Ponto marque o ponto A (0,-2). No campo entrada, digite B1 = (7,-2).
- 3) Selecione  Círculo dados Centro e Raio, clique sobre o ponto A, e na medida do raio digite: b. Repita o procedimento anterior com  $r = h$ ; e obtenha dois círculos centrados em A.
- 4) Construa o segmento AB1  Segmento, e marque a interseção deste segmento com o círculo de raio b  Interseção de Dois Objetos, obtendo o ponto B.
- 5) Trace duas retas perpendiculares ao segmento f, pelos pontos A e B,  Reta Perpendicular e assinale a interseção do círculo de raio h com a reta que passa por A, renomeando para ponto D. Finalmente desenhe uma reta paralela a f, passando por D e obtenha o ponto C. Oculte os círculos, as retas e o ponto B1.
- 6) Com a ferramenta Polígono  Polígono obtenha o retângulo ABCD.

### Construção da Quadratura do Retângulo.

- 1) Observe se seu retângulo não é um quadrado!
- 2) Verifique qual é o segmento maior: base ou altura? Os passos serão descritos considerando que  $\overline{AB}$  é maior que  $\overline{BC}$ . (Você pode alterar seu retângulo modificando o valor de b ou de h).
- 3) A partir do vértice C, construa um segmento de medida fixa igual a h, obtendo o ponto E. Marque o ponto médio O de  $\overline{DE}$ , e desenhe uma circunferência centrada em O de raio  $\overline{OE}$ .

- 4) Construa uma reta passando pelos vértices C e B e marque a interseção desta com a circunferência, obtendo o ponto F. O segmento  $\overline{CF}$  (de medida  $m$ ) é o lado do quadrado equivalente ao retângulo ABCD. Construa o quadrado FGHC.

Figura 3.1: Quadratura do retângulo.



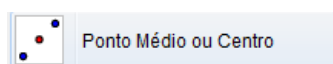
Fonte: o próprio autor.

### 3.1.2 Quadratura do Triângulo

Uma das maneiras de realizar esta construção é a partir do triângulo dado, construir um retângulo equivalente e em seguida, quadrar o retângulo, este processo inicial é chamado de retangularização do triângulo. Vejamos como podemos obter este retângulo.

#### Construção de um retângulo equivalente a um triângulo.

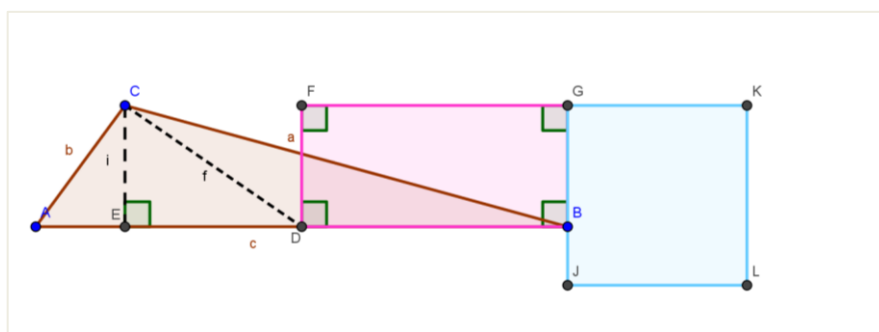
- 1) Construa um triângulo ABC de base  $\overline{AB}$ . Com a ferramenta



marque o ponto médio da base: D. Construa a reta paralela à base passando pelo vértice C e uma reta perpendicular a esta também por C. Marque a interseção da reta perpendicular com a base, ponto E e trace o segmento  $\overline{CE}$ , que é a altura em relação a base  $\overline{AB}$ .

- 2) Trace duas retas perpendiculares à base; uma pelo ponto D e outra pelo ponto B, marcando as interseções com a reta g; pontos F e G. Pelos vértices DBGF desenhe o polígono equivalente ao triângulo ABC. Para constatar que se trata de um retângulo verifique que os ângulos são retos.
- 3) Para resolver o problema inicial, basta quadrar o retângulo obtido.

Figura 3.2: Exemplo da quadratura de um triângulo.



Fonte: o próprio autor.

### Questões referentes as Quadraturas do Retângulo e Triângulo.

- 1) Atualmente nós conhecemos fórmulas para o cálculo de áreas; verifique numericamente que a construção da **quadratura do retângulo** está correta. (As medidas dos segmentos aparecem na janela do lado esquerdo da tela).

**Resposta pessoal.**

- 2) Observando a retangularização do triângulo, como você justificaria esta construção.

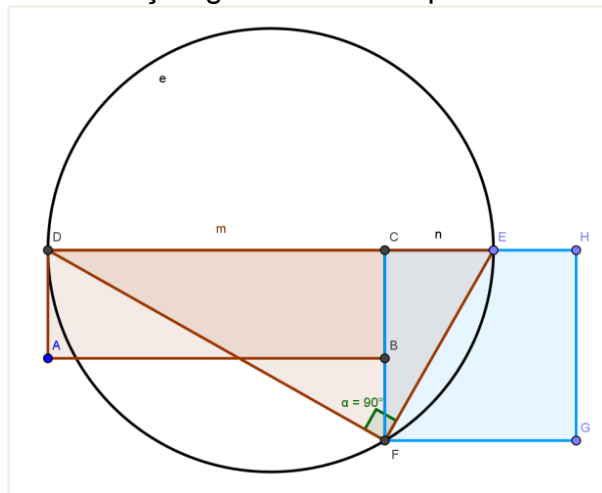
**O retângulo construído possui a mesma altura do triângulo e base igual a metade da base do triângulo.**

- 3) Uma propriedade interessante pode ser usada para justificar a primeira quadratura; juntamente com as relações métricas no triângulo retângulo: *‘Todo triângulo retângulo é inscritível em uma semicircunferência na qual a*

*hipotenusa coincide com o diâmetro*. Observe o triângulo DEF e conclua que a área do retângulo ABCD é equivalente à área do quadrado FGHC.

Basta perceber que  $m$  e  $n$  são as projeções dos catetos do triângulo retângulo DFE sobre a hipotenusa DE, ou seja,  $l^2 = m \times n$ , sendo  $l$  o segmento CF.

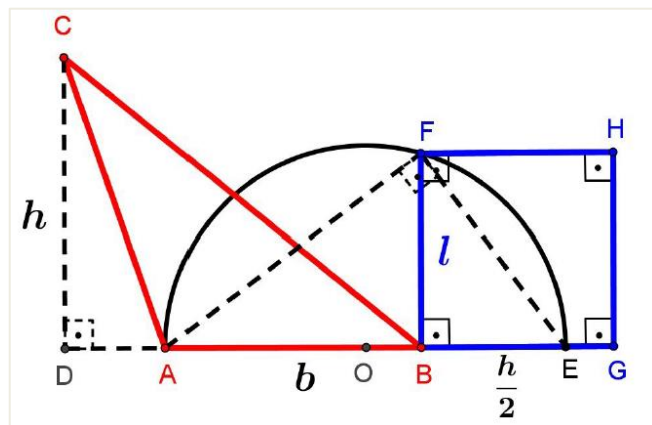
Figura 3.3: Verificação geométrica da quadratura do retângulo.



Fonte: o próprio autor.

- 4) Na figura abaixo, temos o triângulo ABC de base  $b$  e altura  $h$ , e um quadrado de lado  $l$ . Verifique se as figuras são equivalentes.

Figura 3.4 : Quadratura direta do triângulo





. Fonte: Santana (2015 p. 67)

As figuras são equivalentes, pois observando o triângulo retângulo AFE, temos que  $l^2 = b \times \frac{h}{2}$ .

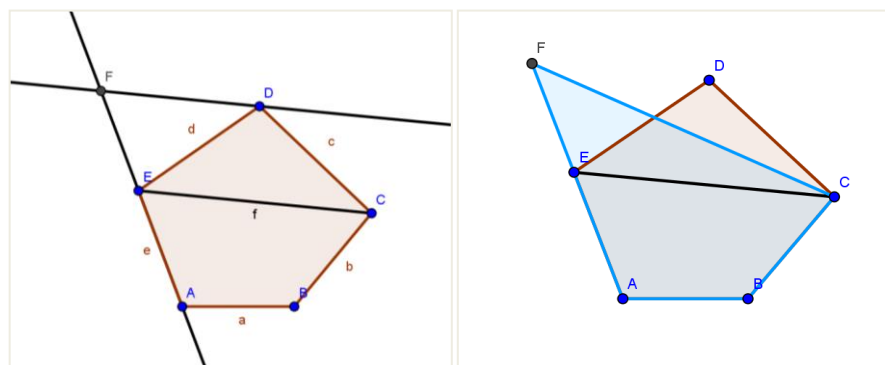
### 3.1.3 Quadratura do Pentágono.

Para esta atividade será utilizada outra propriedade dos triângulos: “A área de um triângulo não se altera quando mantemos sua base fixa e deslocamos o terceiro vértice em uma reta paralela a sua base”. O procedimento nos permitirá reduzir o pentágono a um quadrilátero de mesma área, e depois reduzir o quadrilátero a um triângulo equivalente, por fim veremos que o problema da quadratura do Pentágono pode ser reduzido ao da quadratura do triângulo.

- 1) Com a ferramenta polígono  desenhe um pentágono ABCDE.
- 2) Trace a diagonal  $\overline{EC}$  e uma reta paralela a ela passando por D. Com a ferramenta reta  prolongue  $\overline{AE}$ . Marque a interseção da reta paralela à  $\overline{EC}$  com a reta  $\overline{AE}$  obtendo o ponto F, conforme Figura 3.5. O quadrilátero ABCF é equivalente ao pentágono!

A propriedade que nos permite verificar isso é: “A área de um triângulo não se altera quando mantemos sua base fixa e deslocamos o terceiro vértice em uma reta paralela a sua base”. Observe os triângulos ECD e ECF.

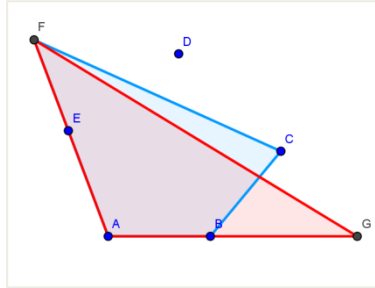
Figura 3.5: Transformação do Pentágono em Quadrilátero .



Fonte: o próprio autor.

- 3) Escolha outra diagonal e repita o processo do item 2 para obter um triângulo equivalente ao quadrilátero ABCF.

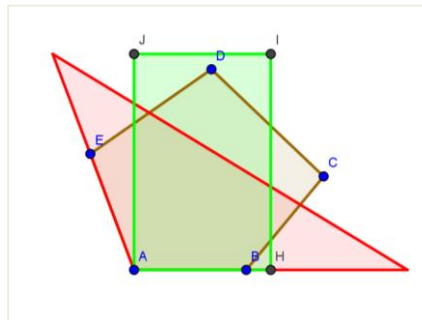
Figura 3.6: Transformação do Quadrilátero em Triângulo.



Fonte: o próprio autor.

- 4) O próximo passo é obter um retângulo equivalente ao triângulo do item anterior, conforme figura abaixo.

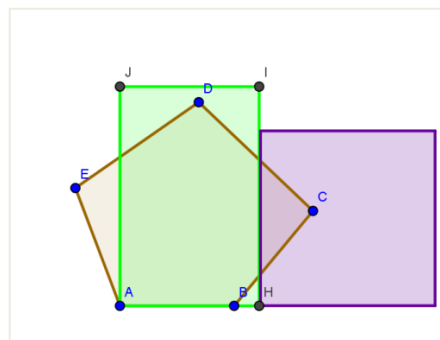
Figura 3.7: Retangularização do Pentágono.



Fonte: o próprio autor.

- 5) Para obter um quadrado equivalente ao pentágono basta quadrar o retângulo.

Figura 3.8: Quadratura do Pentágono.



Fonte: o próprio autor.

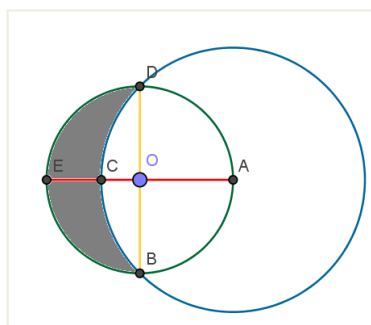
### 3.2 LÚNULAS DE HIPÓCRATES

<b>Conteúdo: Geometria</b>	
<b>Professor:</b> Cristiane C. Soutier.	<b>Tempo previsto:</b> 100 minutos
<b>Objetivos:</b>	<ul style="list-style-type: none"><li>-Explorar os cálculos de áreas de figuras curvas planas (círculo e setor circular) utilizando construções geométricas.</li><li>-Utilizar o Geogebra como ferramenta de ensino da Geometria.</li><li>- Recordar propriedades e fórmulas da geometria plana: (Diagonal, ângulos e Teorema de Pitágoras) e utilizá-las para calcular áreas de Lúnulas.</li></ul>
<b>Sugestões de Aplicação:</b>	<p>Este roteiro pode ser utilizado para uma revisão de áreas de figuras curvas planas ou como introdução ao assunto, sendo que neste último caso o professor faria a interferência após a construção da Lúnula para apresentar as fórmulas.</p> <p>Na primeira questão pode ser permitido aos alunos que façam o cálculo da área utilizando o valor numérico para a medida do lado, deixando a forma geral para as seguintes.</p>

Segundo Roque e Carvalho (2012), Hipócrates de Quios foi um geômetra grego que viveu na segunda metade do século quinto a. E. C.; época em

que os matemáticos gregos estavam interessados em solucionar os três problemas clássicos: Quadratura do círculo, Duplicação do Cubo e Trisseção do ângulo; e parece que ao estudar a quadratura do círculo, ele imaginou que se conseguisse quadrar as lúnulas isso auxiliaria na solução do problema do círculo. As *Lúnulas de Hipócrates* fornecem o primeiro exemplo de figuras limitadas por linhas curvas cujas áreas foram calculadas. Quadrar determinada região significa construir, usando régua não graduada e compasso, um quadrado com área equivalente. Uma lúnula consiste em uma figura plana delimitada por dois arcos circulares de raios diferentes, conforme Figura 3.9:

Figura 3.9: Lúnula.

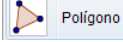
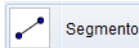


Fonte: o próprio autor.

Vamos examinar alguns exemplos do cálculo da área de lúnulas.

### 3.2.1 Lúnula: Lado e Diagonal do Quadrado.

Usando o software livre Geogebra construiremos a figura, conforme descrição:

- 1) Com a ferramenta polígono regular  selecionada marque dois pontos do plano; em seguida digite o número de vértices: 4. Aparecerá um quadrado de vértices ABCD.
- 2) Utilizando a ferramenta segmento entre dois pontos,  desenhe os segmentos  $\overline{AC}$  e  $\overline{CD}$ .



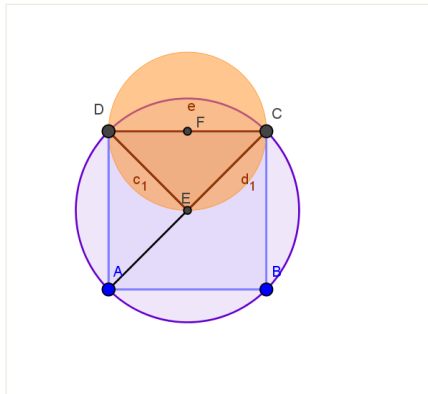
- 3) Selecione a ferramenta ponto médio  , em seguida clique sobre os pontos A e C, obtendo E e sobre C e D, obtendo F, pontos médios dos segmentos  $\overline{AC}$  e  $\overline{CD}$ .
- 4) Com a ferramenta “círculo dados centro e um de seus pontos”  selecionada, clique sobre E e A, obtendo o círculo de raio igual a metade da diagonal do quadrado.
- 5) Com a ferramenta “círculo dados centro e um de seus pontos” selecionada, clique sobre F e C, obtendo o círculo de raio igual a metade do lado do quadrado.
- 6) Terá uma figura semelhante a seguinte:

Figura 3.10: Lado e Diagonal do Quadrado.



Fonte: o próprio autor.

- 7) Calcular a área da lúnula em relação à área do quadrado.

**Solução:** Observando a figura, vemos que a área da lúnula pode ser encontrada utilizando soma e subtração de áreas: A área da lúnula é igual à área do semicírculo de raio FC menos a área do setor circular DCE, somada

com a área do triângulo DCE. Vejamos como calcular cada uma delas; indicamos:  $\overline{CD} = l$ ;

$$\text{Área do semicírculo de raio FC} = \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \pi \frac{l^2}{8}.$$

Área do setor circular DCE é igual a  $\frac{1}{4}$  do círculo maior de raio  $\overline{EC}$ , sendo que  $\overline{EC}$  é a metade da diagonal do quadrado de lado  $l$ .




$$\text{Assim: } A = \pi \cdot \left(\frac{l\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{l^2}{8}.$$

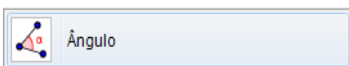
$$\text{Área do triângulo DCE: } \frac{1}{2} l \cdot \frac{l}{2} = \frac{l^2}{4}.$$

Área da lúnula =  $\pi \cdot \frac{l^2}{8} - \pi \cdot \frac{l^2}{8} + \frac{l^2}{4} = \frac{l^2}{4}$ . Portanto a área da lúnula é um quarto da área do quadrado.

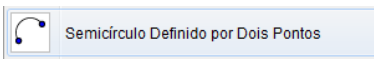
### 3.2.2 Lúnulas e Catetos

Usando o software livre Geogebra vamos construir a figura, conforme descrição:

- 1) Construir um triângulo ABE contendo um ângulo reto em E: Com a ferramenta segmento  Segmento, construa um segmento AB, de medida qualquer. Marque o ponto médio do segmento construído, e em seguida construa um círculo com centro no ponto médio (C) que passe por B. Marque um ponto D qualquer no segmento CB. Selecione a ferramenta reta perpendicular  Reta Perpendicular e clique sobre D e sobre o segmento AB, para obter a reta perpendicular.
- 2) Usando “interseção de dois objetos”  Interseção de Dois Objetos marque o ponto em que a reta intersecta o círculo (ponto E). Construa os segmentos AE e BE. Com a

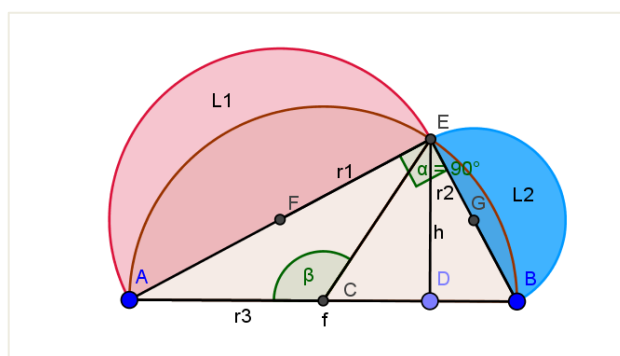
ferramenta ângulo  selecionada, clique sobre os segmentos AE e BE, verificando que o ângulo no vértice E é reto.

3) Na janela de álgebra, clique sobre a reta g para escondê-la.

4) Construa dois semicírculos,  um que passe por A e E, e o outro por E e B; formando duas lúnulas. A maior será indicada por L1 e a menor por L2.

5) Calcule a soma da área das duas lúnulas e compare com a área do triângulo ABE.

Figura 3.11: Lúnulas e catetos.



Fonte: o próprio autor.

Solução: Indicamos:  $\overline{FE} = r_1$ ;  $\overline{GE} = r_2$ ;  $\overline{AC} = r_3$ ;  $\overline{ED} = h$

$$\text{Área da lúnula 1: } A_1 = \frac{\pi}{2} \cdot (r_1)^2 - \left( \frac{\beta}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (r_3)^2 \right) + \frac{r_3 \cdot h}{2}$$

$$\text{Área da lúnula 2: } A_2 = \frac{\pi}{2} \cdot (r_2)^2 - \left( \frac{(180^\circ - \beta)}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (r_3)^2 \right) + \frac{r_3 \cdot h}{2}$$

$$A_1 + A_2 = \frac{\pi}{2} \cdot (r_1^2 + r_2^2) - \pi \cdot r_3^2 \left( \frac{\beta}{360^\circ} + \frac{(180^\circ - \beta)}{360^\circ} \right) + \left( \frac{r_3}{2} + \frac{r_3}{2} \right) \cdot h$$

Observe o triângulo FEG, retângulo em E, que nos dá a relação:  $r_1^2 + r_2^2 = r_3^2$ , pois  $\overline{FG}$  é a base média do triângulo AEB. Assim:

$$A_1 + A_2 = \frac{\pi}{2} \cdot r_3^2 - \frac{\pi}{2} \cdot r_3^2 + r_3 \cdot h;$$

$$A_1 + A_2 = r_3 \cdot h.$$

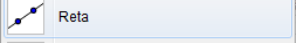
A área do triângulo ABE nas notações indicadas é  $A_{ABE} = r_3 \cdot h$ .

Verificamos assim que a soma da área das duas lúnulas é igual a área do triângulo ABE.

Nas atividades anteriores a área de cada lúnula mostrou-se equivalente ou proporcional à área de polígonos, (triângulo e quadrado). Quando estes problemas foram propostos os gregos já sabiam *quadrar* estas figuras, ou seja, as lúnulas apresentadas eram ditas *quadráveis*, porém algumas construções realizadas por Hipócrates mostraram que a área de uma lúnula pode ser proporcional a de um círculo, então neste caso, a quadratura da Lúnula dependia da solução do problema original. (Quadratura do Círculo). Agora você deverá seguir o roteiro para visualizar outro exemplo de lúnula estudada por Hipócrates.

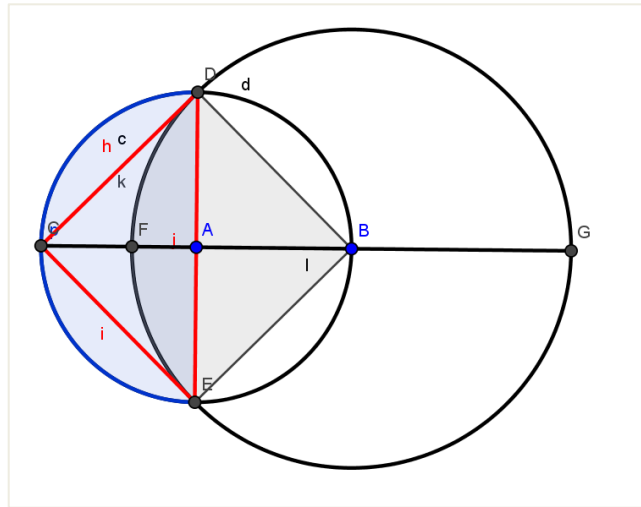
### 3.2.3 Lúnula

- 1) Construa um círculo com centro A e raio AB, de medida qualquer.

Prolongue BA. (Utilize a ferramenta  e selecione os dois pontos). Marque a interseção da reta com o círculo obtendo BC, um diâmetro da círculo.

- 2) Construa uma reta perpendicular a este diâmetro que passe por A. Marque as interseções (ponto D e E). Trace um círculo com centro em B e raio BE. Marque a interseção do novo círculo com o segmento AC. A região limitada pelos arcos EFD e ECD é uma lúnula.
- 3) Verifique que a área desta lúnula é igual à área do triângulo retângulo de vértices D, C e E.

Figura 3.12: Exemplo de Lúnula.



Fonte: o próprio autor.

Solução:

$$\text{Área da Lúnula: } A_L = \frac{\pi}{2} \cdot \overline{AD}^2 - \left( \frac{\pi}{4} \cdot \overline{BD}^2 \right) + \frac{\overline{DE}}{2} \cdot \overline{AC}.$$

Como o segmento  $\overline{BD}$  é a hipotenusa do triângulo retângulo DAB, temos que  $\overline{BD} = \overline{AD} \cdot \sqrt{2}$ . Assim:  $A_L = \frac{\pi}{2} \cdot \overline{AD}^2 - \left( \frac{\pi}{4} \cdot (\overline{AD} \cdot \sqrt{2})^2 \right) + \frac{\overline{AD}^2}{2}$ .

$$A_L = \frac{\overline{AD}^2}{2}.$$

A área do triângulo é  $\frac{\overline{AD}^2}{2}$ .

A área da Lúnula é igual à área do triângulo retângulo de vértices D, C e E.

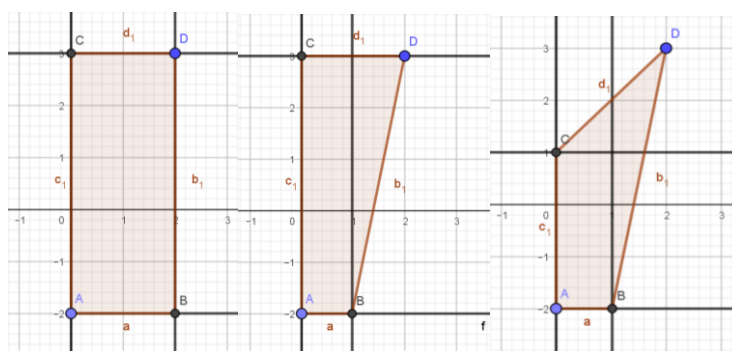
## 4 ANÁLISE DAS ATIVIDADES

Passaremos a descrever algumas situações que ocorreram durante a aplicação das atividades propostas.

### 4.1 QUADRATURA DE REGIÕES POLIGONAIS.

Inicialmente realizamos a construção de um retângulo de dimensões variáveis e esta demandou mais tempo que o previsto, pois inicialmente os alunos tiveram dificuldades em realizá-la. Em especial, ao utilizar a ferramenta “controle deslizante” eles se mostraram duvidosos, não entendendo sua necessidade; porém ao finalizarem a figura e perceberem a ampliação ou redução do retângulo conforme modificavam os valores da base  $b$  e da altura  $h$ , eles mostraram-se fascinados pela mobilidade da figura, sendo esta característica apontada como relevante também em outras atividades. Do grupo tivemos dois estudantes que não haviam realizado a construção correta e ao modificar as medidas acabaram obtendo quadriláteros que não eram retângulos, em um dos casos o ponto  $D$  foi marcado sem estar vinculado a interseção das retas  $i$  e  $j$ ; a figura abaixo ilustra a condição ocorrida:

Figura 4.1: Construção do Retângulo.



Fonte: o próprio autor.

Tendo o retângulo construído, passamos a construção de sua quadratura, nesta etapa eles já estavam adaptados ao Geogebra e encontravam facilmente as ferramentas de cada item. Ao final da proposta eles haviam encontrado o segmento, identificado por  $m$  que seria o lado do quadrado procurado e deveriam construir este. Percebemos que a maioria optou por utilizar uma

circunferência centrada em F de raio  $m$  para obter os vértices restantes.

Ao término deste item eles deveriam responder duas questões que passaremos a comentar:

- 1) “Atualmente nós conhecemos fórmulas para o cálculo de áreas; verifique numericamente que a construção da **quadratura do retângulo** está correta”.

Ao fazer a verificação das medidas indicadas pelo software, um dos estudantes observou que seu retângulo possuía base medindo 6,85 e altura 2,1 o que resulta em uma área de 14,385; já o quadrado possuía lado de medida 3,793, ou seja, área 14,386849; questionando sua construção.

*“Professora não está certo isso, onde errei?”*

Revisamos os passos da construção, verificando que foram executados corretamente. O arredondamento do programa estava configurado para três casas decimais; e na janela de álgebra o valor das áreas estava igualado a 14,385 para os dois polígonos. Em sua resposta ele utilizou uma aproximação na segunda casa decimal, considerando ambas iguais a 14,39.

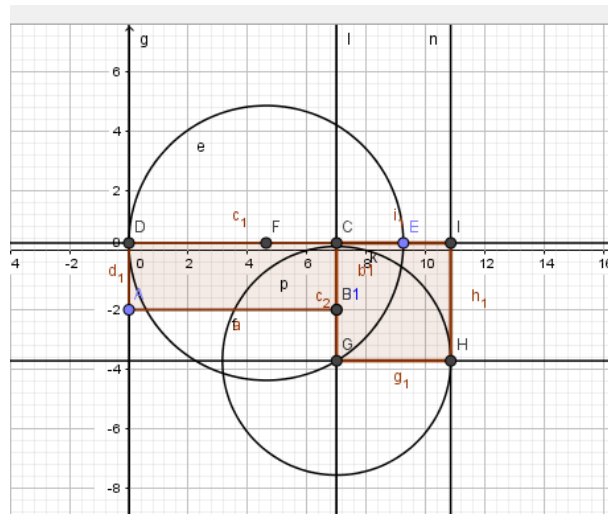
1) Atualmente nós conhecemos fórmulas para o cálculo de áreas; verifique numericamente que a construção da **quadratura do retângulo** está correta.

Retângulo:  $A_{\text{ret}} = 6,85 \times 2,1 = 14,39$

Quadrado:  $3,793 \times 3,793 = 14,39$

Em outra resolução observamos posteriormente que o “quadrado” construído estava incorreto, pois as medidas dos lados não eram iguais. Como tínhamos o arquivo utilizamos um recurso do Geogebra, chamado “protocolo de construção” que permite revisar os passos da construção, podendo constatar onde ocorreu a falha. No momento de finalizar a atividade, a aluna utilizou a ferramenta “círculo dados centro e um de seus pontos”, tendo centrado em G e realizado a abertura até, visualmente, obter C, porém o raio obtido ficou um pouco menor que a medida desejada, como pode ser visualizado na figura :

Figura 4.2: Quadratura do Retângulo.



Fonte: o próprio autor.

Fazendo a verificação numérica, foram obtidas áreas com diferença de 0,46, o que nos chamou atenção foi o fato de identificar o polígono como um quadrado e calcular sua área, sem perceber que se tratava de um retângulo.

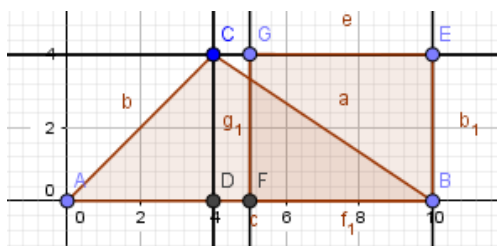
- 1) Atualmente nós conhecemos fórmulas para o cálculo de áreas; verifique numericamente que a construção da **quadratura do retângulo** está correta.

$$\text{base } 7 \times 2,25 = 15,75$$

$$\text{altura } 3,85 \times 3,97 = 15,2845$$

A retangularização do triângulo foi realizada corretamente pelos alunos, sem necessidade de interferências e ao final todos conseguiram justificar verificando que a área do retângulo construído era equivalente a do triângulo, sendo que a base do retângulo encontrado era metade da base do triângulo e as alturas coincidiam.

Figura 4.3: Retangularização do triângulo



Fonte: o próprio autor.

- 2) Observando a retangularização do triângulo, como você justificaria esta construção.

O retângulo tem o mesmo do base do triângulo e o mesmo altura

A próxima questão a ser respondida tinha como objetivo validar a construção da quadratura do retângulo.

Para que respondessem este item foi necessária uma interferência retomando as relações métricas no triângulo retângulo, em especial a que relaciona as projeções dos catetos sobre a hipotenusa com a altura relativa a esta; os alunos mostraram dificuldade em utilizar a relação na figura construída por eles, pois os segmentos estavam identificados com incógnitas diferentes, apenas dois alunos do grupo descreveram seu entendimento em relação a essa questão, os demais não responderam este item. A figura exibe uma das soluções:

- 3) “Uma propriedade interessante pode ser usada para justificar a primeira quadratura; juntamente com as relações métricas no triângulo retângulo: *‘Todo triângulo retângulo é inscritível em uma semicircunferência na qual a hipotenusa coincide com o diâmetro’*. Observe o triângulo DEF e conclua que a área do retângulo ABCD é equivalente à área do quadrado FGHC.”

Porque quando trocamos a altura do  $\Delta$ , dividimos ele em outros 2 triângulos, assim dividimos sua hip. em 2 segmentos  $m$  e  $n$ ,  $m$  corresponde a base do retângulo e  $n$  a altura dele. Se multiplicarmos  $(m \cdot n)$  obtemos a área do retângulo, porque  $m$  e  $n$  tem as mesmas medidas que a base e a altura, e a área do retângulo é  $b \cdot h$ , logo  $m \cdot n$  é a área desse retângulo, e a  $h^2$  do  $\Delta$  é igual a área do  $\square$ , pois  $h$  del tem mesma medida que o lado do quadrado.

4) Na figura abaixo, temos o triângulo ABC de base  $b$  e altura  $h$ , e um quadrado de lado  $l$ . Verifique que as figuras são equivalentes.

A finalidade da questão 4 era mostrar um processo de quadratura direta do triângulo, sem necessidade de retangularizá-lo, que se justifica também pela relação métrica entre a altura do triângulo AEF ( $l$ ) e as projeções dos catetos sobre a hipotenusa, identificados como  $b$  e  $\frac{h}{2}$ ; apesar da semelhança com a questão anterior os alunos não conseguiram verificar a equivalência entre o triângulo ABC e o quadrado BGHF.

4) Na figura abaixo, temos o triângulo ABC de base  $b$  e altura  $h$ , e um quadrado de lado  $l$ . Verifique que as figuras são equivalentes.

não pois o lado é maior que a metade da altura.

A proposta da atividade Quadratura de Regiões Poligonais continha ainda a quadratura do Pentágono. Nesta experiência de aplicação não conseguimos realizar esta construção; pois como comentamos anteriormente a primeira construção demandou mais tempo que o previsto; apesar de apresentarmos o software e suas principais ferramentas, não tínhamos um projetor disponível para fazer a construção passo a passo; acreditamos que se o tivéssemos, o tempo da atividade teria sido reduzido e teríamos conseguido realizar a quadratura do Pentágono, por isso incluímos isso na sugestão da aplicação e não aumentamos o tempo previsto para a mesma. Os alunos foram orientados quanto à possibilidade de realizarem esta construção em outro momento que tivessem disponibilidade, porém não recebemos nenhum indicativo de que o fizeram.

#### 4.2 LÚNULAS DE HIPÓCRATES.

Iniciamos fazendo a leitura do texto introdutório ao processo de quadraturas de lúnulas e em seguida os alunos foram orientados a realizar a primeira atividade, denominada *Lúnula: lado e diagonal do quadrado*.

##### 4.2.1 Lúnula: Lado e Diagonal do Quadrado

Como o grupo de estudantes já tinha conhecimento do Geogebra, não houve dificuldades em realizar a construção. Ao serem interrogados, no item 7, sobre a relação entre a área da lúnula e do quadrado, mostraram-se resistentes em tentar solucionar o problema; assim sugerimos que se reunissem em duplas para exhibir suas ideias. Após um tempo, eles começaram a perceber algumas características da figura que poderiam ajudar na solução, como o destaque dado ao setor circular DEC. Assim comentamos que poderia ser calculado usando soma e subtração de áreas. Isto é: *A área da lúnula é igual à área do semicírculo de raio FC menos a área do setor circular DCE, somada com a área do triângulo DCE*. Restando então calcular cada uma destas áreas. Tivemos em um grupo de 10 alunos, apenas duas soluções corretas. Para o desenvolvimento foi permitido atribuir

um valor numérico para o lado do quadrado, sendo que a maioria optou por supor que o lado era 4. Expomos uma das soluções apresentadas:

$A_{\square} = 4$   
 $4 \times 4 = 16$   
 A área da lúnula é  $\frac{1}{4}$  da área do quadrado.  
 $A_1 = \text{semicírculo} - \frac{1}{4}$  do círculo grande  
 $A_2 = 2\pi - (2\pi - 4)$   
 $A_L = +4$

$D = \sqrt{2L^2}$   
 $D = \sqrt{2(4)^2}$   
 $D = \sqrt{2 \cdot 16}$   
 $D = \sqrt{32}$   
 $4\sqrt{2} \leftarrow =$

Vamos examinar alguns exemplos do cálculo da área de lúnulas, vejamos o primeiro:  
 Lúnula: lado e diagonal do quadrado.  
 Usando o software livre Geogebra vamos construir a figura, conforme descrição:

- 1) Com a ferramenta polígono regular selecionada marque dois pontos do plano; em seguida digite o número de vértices: 4. Aparecerá um quadrado de vértices ABCD.
- 2) Utilizando a ferramenta segmento entre dois pontos, desenhe os segmentos  $\overline{AC}$  e  $\overline{CD}$ .
- 3) Selecione a ferramenta ponto médio, em seguida clique sobre os pontos A e C, obtendo E e sobre C e D, obtendo F, pontos médios dos segmentos  $\overline{AC}$  e  $\overline{CD}$ .
- 4) Com a ferramenta "círculo dados centro e um de seus pontos" selecionada, clique sobre E e A, obtendo o círculo de raio igual a metade da diagonal do quadrado.
- 5) Com a ferramenta "círculo dados centro e um de seus pontos" selecionada, clique sobre F e C, obtendo o círculo de raio igual a metade do lado do quadrado.
- 6) Terá uma figura semelhante a seguinte:
- 7) Calcular a área da lúnula em relação a área do quadrado.

supondo que o lado do quadrado é 4.  
 $C_g = \pi \cdot R^2$   
 $(3,14) \cdot (2\sqrt{2})^2$   
 $3,14 \cdot 4 \cdot 2$   
 $8\pi$   
 $2 \cdot \pi$   
 $\frac{8\pi}{4}$   
 $\frac{a_n}{n} = \frac{\pi \cdot n^2}{n}$   
 $a_n = \pi \cdot n$   
 $a_n = \pi \cdot 4$   
 $a_n = 4\pi$   
 $\frac{a_n}{2} = \frac{4\pi}{2}$   
 $= 2\pi$

raio do  $C_{\text{grande}}$  é  $\frac{D}{2}$   
 metade do lado do  $\Delta$  do  $\Delta_{\text{m}}$   
 $A_{\Delta} = \frac{b \cdot h}{2}$   
 $A_{\Delta} = \frac{4 \cdot 2}{2}$   
 $A_{\Delta} = \frac{8}{2} = 4$

Área da lúnula:  $(\frac{1}{4}$  do círculo grande - Área do triângulo) -  
 $A_{\Delta_m} = 4$   
 Área da lúnula  $= 2\pi - 4$

#### 4.2.2 Lúnulas e catetos

A construção das lúnulas foi realizada corretamente pelo grupo de alunos. Em relação ao cálculo das áreas não houve conclusão da atividade, pois os estudantes mostraram grande dificuldade em calcular a área dos setores circulares ACE e ECB, não tendo observado o conceito de ângulos suplementares no vértice C.

Outra dificuldade observada foi a necessidade de trabalhar com os segmentos sem utilizar medidas numéricas. Não temos soluções a apresentar, este item foi entregue em branco por todos os alunos. Durante nossa observação, percebemos que eles chegaram a fazer tentativas em rascunhos que não foram repassadas para a ficha da atividade. A proposta contém um terceiro exemplo cuja a execução não foi realizada nesta aplicação, então não temos comentários sobre tal.

#### 4.3 SOBRE A UTILIZAÇÃO DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

As atividades apresentadas nos tópicos anteriores foram pensadas a partir de nosso estudo sobre a teoria dos Números Construtíveis a qual possui diversos capítulos dentro da História da Matemática. O conhecimento desta trajetória nos permitiu apresentar os conteúdos em uma perspectiva diferenciada buscando despertar o interesse de nossos alunos para o estudo desta ciência.

Em cada uma das sequências: *Quadraturas de Polígonos e Lúnulas de Hipócrates* apresentamos um texto inicial que permitiu aos estudantes conhecer alguns aspectos históricos do conteúdo matemático que seria abordado a seguir. Notamos que apesar de algumas dificuldades apresentadas pelos alunos o entendimento deles em relação a áreas foi modificado. Durante as aulas regulares o grupo participante da pesquisa mostrou certa facilidade na visualização geométrica, mesmo na espacial, reportando ao entendimento da área como uma porção de espaço e não apenas como medida numérica.

Assim afirmamos que a maneira como a Matemática é apresentada pode contribuir para uma aprendizagem mais significativa, ou não, como comentamos na introdução a este trabalho, nas palavras de D'Ambrosio:

Não seria tempo de se pensar que o problema poderá estar na matemática escolar e não nos alunos e professores? Não ocorrerá a ninguém “desconfiar” que essa *Matemática* talvez esteja excluindo cidadãos de muito sucesso na vida e nas suas carreiras profissionais porque ela é obsoleta, desinteressante e inútil? (D'Ambrosio, 2013, pag. 20).

Entendemos que utilizar a História da Matemática para a exibição dos conteúdos mostrou-se uma ferramenta capaz de envolver os alunos nas atividades, acarretando um melhor desempenho na disciplina.

Observamos ainda que o pensar de quem elabora os questionamentos supõe sempre que a proposta será compreendida pelo seu aluno, percebemos nestas experiências a importância de verificar, mesmo que tenhamos feito com um só grupo de alunos, se aquilo que propomos tem viabilidade para a sala de aula.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, a intenção foi apresentar algumas atividades para uso em sala de aula, utilizando a História da Matemática e a informática para a exibição dos conteúdos propostos. Desta forma, buscamos explorar um tópico matemático que nos permitisse este tipo de abordagem sendo que elegemos a teoria sobre números construtíveis. Como comentamos na introdução tínhamos como objetivos principais:

*i. Estudo da teoria formal sobre Números Construtíveis e temas correlatos como: Quadratura de Polígonos, Lúnulas, Quadratura do Círculo; além de tópicos de História da Matemática relacionados a estes.*

*ii. Elaboração, aplicação e análise de atividades em sala de aula de matemática de Ensino Médio, cuja temática esteja relacionada a Quadraturas.*

*iii. Estabelecimento de conexões entre o conhecimento matemático avançado e a sala de aula de matemática do Ensino Médio.*

Estes objetivos foram alcançados durante o desenvolvimento deste trabalho.

No primeiro capítulo apresentamos toda a teoria formal sobre Números Construtíveis incluindo um resultado notável deste assunto que possibilitou a conclusão sobre a impossibilidade da quadratura do círculo utilizando apenas régua não graduada e compasso. Destacamos ainda que tentativas de resolução deste problema impulsionaram o desenvolvimento da matemática, o importante era resolver os problemas por qualquer técnica disponível. Exibimos uma destas sendo a Quadratura do Círculo realizada por Arquimedes, utilizando o método da exaustão.

Estabelecido os procedimentos metodológicos para nossa pesquisa, com o uso da História da Matemática, vimos que esta mostra-se uma ferramenta

capaz de conduzir o aluno a compreensão da natureza desta disciplina e sua importância para a humanidade. Os estudantes puderam observar que os conteúdos matemáticos estudados por eles possuem uma trajetória de desenvolvimento, muitas vezes, bem diferente do roteiro apresentado nos livros didáticos.

Também expusemos alguns comentários a respeito da utilização de novas tecnologias como auxílio ao ensino de geometria, onde a visualização dos objetos matemáticos possui demasiada importância para a compreensão dos problemas propostos.

Como nosso segundo objetivo propunha, elaboramos atividades de ensino aprendizagem relacionadas a quadraturas de polígonos e Lúnulas. Através destas ainda preenchemos o terceiro objetivo realizando a conexão entre tópicos de Álgebra e Ensino Médio. Houve dificuldades durante a elaboração como também durante a aplicação das mesmas. Apesar de ter experiência em docência, a busca por novas abordagens trouxe consigo certa insegurança.

A preocupação com o entendimento do aluno frente aos direcionamentos nas atividades foi uma constante. A condução do trabalho com um pequeno grupo de alunos no contra turno permitiu uma relação mais próxima entre professor aluno, sendo possível identificar dificuldades em conteúdos matemáticos relacionados com os problemas, por exemplo, a necessidade de utilizar valores numéricos para o cálculo da área da primeira lúnula apresentada e a falta de respostas quando exigimos o uso de álgebra.

Esperamos que as propostas de trabalho apresentadas aqui venham a ser utilizadas por outros professores podendo alcançar muitos outros estudantes em nosso país.

## Referências

BOLDRINI, C; FIGUEIREDO, W. **Álgebra linear**. 3.ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1986.

BORBA, M.de C, PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2007. 100p. Coleção Tendências em Educação Matemática.

D'AMBROSIO, U. Porque e Como Ensinar História da Matemática. **REMATEC**, Natal (RN) Ano 8, n. 12. p. 7 – 21. Jan. – Jun. 2013.

DRUCK, S. A Crise no Ensino de Matemática no Brasil. **REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA**, São Paulo, N. 53, p.1 – 5. 1º quadrimestre de 2004.

FIGUEIREDO, DG. **Números Irracionais e Transcendentes**. 3 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011. 81p. Coleção de Iniciação Científica .

GONÇALVES, A. **Introdução à Álgebra**. IMPA. 1999.

ROQUE,T. **História da Matemática - Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. 457p.

ROQUE, T; CARVALHO, JBP. **Tópicos de História da Matemática**. 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 467p. Coleção PROFMAT.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares de Matemática para os nos finais do Ensino Fundamental e para o Ensino Médio: DCE**. Curitiba: SEED, 2008.

SANTANA, E. R. **O PROBLEMA DA QUADRATURA DO CÍRCULO: UMA ABORDAGEM HISTÓRICA SOB A PERSPECTIVA ATUAL**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 74 p. 2015.

## ANEXO

### TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

**“O PROBLEMA DAS QUADRATURAS E NÚMEROS CONSTRUTÍVEIS: POSSIBILIDADES PARA O ENSINO DE GEOMETRIA E RELAÇÕES COM A ÁLGEBRA”.**

Prezado(a) Senhor(a), responsável pelo menor \_\_\_\_\_

Gostaríamos de convidar seu (sua) filho(a) a participar da pesquisa **“O Estudo de Quadraturas: De Polígonos à Hipérbole”**, realizada em **“Medianeira”**. O objetivo da pesquisa é “realizar o ensino do conteúdo matemático Áreas com uma abordagem histórica e o uso do Geogebra como ferramenta facilitadora da aprendizagem”. A sua participação é muito importante e ela se daria da seguinte forma: realizando as atividades que serão propostas em encontros semanais, no contra turno, durante o mês de Agosto. Gostaríamos de esclarecer que sua participação é totalmente voluntária, podendo você: recusar-se a participar, ou mesmo desistir a qualquer momento sem que isto acarrete qualquer ônus ou prejuízo à sua pessoa. Informamos ainda que as informações serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a sua identidade. Poderão ser coletadas gravações de áudio e/ou vídeo com a finalidade apenas de pesquisa, sendo que as mesmas não serão divulgadas por nenhum meio.

Os benefícios esperados são: Apropriação de novos conceitos matemáticos, além do conhecimento de uma ferramenta interativa: Geogebra.

Informamos que o(a) senhor(a) não pagará nem será remunerado por sua participação. Garantimos, no entanto, que todas as despesas decorrentes da pesquisa serão ressarcidas, quando devidas e decorrentes especificamente de sua participação na pesquisa. Quanto aos riscos, **acreditamos que não existem riscos de natureza física ou psíquica.**

Caso você tenha dúvidas ou necessite de maiores esclarecimentos pode nos contatar: **CRISTIANE COSTA SOUTIER, Rua Santa Catarina, 1789. Fone: (45) 3264-1902; (45) 99953-4954, Medianeira-Paraná; email: cryscosta03@hotmail.com**, ou procurar o Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da Universidade Estadual de Londrina, situado junto ao LABESC – Laboratório Escola, no Campus Universitário, telefone 3371-5455, email: [cep268@uel.br](mailto:cep268@uel.br).

Este termo deverá ser preenchido em duas vias de igual teor, sendo uma delas, devidamente preenchida e assinada entregue a você. Medianeira, 01 de Agosto de 2017.

**Pesquisador Responsável : Cristiane Costa Soutier**

RG:97379548

Telefone: (45) 99953-4954

EU, \_\_\_\_\_, CPF: \_\_\_\_\_,  
responsável pelo menor  
\_\_\_\_\_ tendo sido devidamente  
esclarecido sobre os procedimentos da pesquisa, concordo que ele (ela) participe  
**voluntariamente** da pesquisa descrita acima.

Nome do menor: \_\_\_\_\_

Assinatura do menor: \_\_\_\_\_

Assinatura do responsável: \_\_\_\_\_