Universidade Estadual de Londrina

HENRIQUE CRISTIANO THOMAS DE SOUZA

UM OLHAR SOBRE O *FAZER* MODELAGEM MATEMÁTICA À LUZ DA FILOSOFIA DE WITTGENSTEIN

Londrina
2018

HENRIQUE CRISTIANO THOMAS DE SOUZA

UM OLHAR SOBRE O *FAZER* MODELAGEM MATEMÁTICA À LUZ DA FILOSOFIA DE WITTGENSTEIN

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida.

Londrina
2018

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Souza, Henrique Cristiano Thomas de .
Um olhar sobre o *fazer* modelagem matemática à luz da filosofia de Wittgenstein / Henrique Cristiano Thomas de Souza. - Londrina, 2018.
209 f.

Orientador: Lourdes Maria Werle de Almeida.
Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, , 2018.
Inclui bibliografia.

1. Educação Matemática - Tese. 2. Modelagem Matemática - Tese. 3. Seguir Regras - Tese. 4. Tecnologias Digitais - Tese. I. Almeida, Lourdes Maria Werle de . II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. . III. Título.

HENRIQUE CRISTIANO THOMAS DE SOUZA

UM OLHAR SOBRE O *FAZER* MODELAGEM MATEMÁTICA À LUZ DA FILOSOFIA DE WITTGENSTEIN

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

_____

Orientador: Profª. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina - UEL

_____

Profª. Dra. Leônia Gabardo Negrelli
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

_____

Profª. Dra. Michele Regiane Dias Veronez
Universidade Estadual Do Paraná - Unespar

_____

Profª. Dra. Adriana Helena Borssoi
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR

_____

Prof.ª Dra. Elizabeth Gomes Souza
Universidade Federal do Pará - UFPA

Londrina, 24 de julho de 2018.

AGRADECIMENTOS

Quando nos engajamos numa empreitada como o doutorado, nunca caminhamos sozinhos, muitas pessoas nos acompanham, apoiam e incentivam. Portanto, nesse momento busco colocar em palavras todo agradecimento que sinto por cada uma delas.

Agradeço à minha família que mesmo de longe sempre esteve me apoiando nessa caminhada. Aos meus pais Nelci e Antonio, que na simplicidade de um pedreiro e de uma servente de colégio sempre me ensinaram que na educação encontraria uma forma de crescer profissionalmente e como pessoa, me apoiaram e incentivaram a buscar, mesmo longe de casa, esse caminho. Aos meus irmãos Cristian e Nayara, que eu os inspire ou tenha inspirado a correr atrás dos seus sonhos, mostrando que para alcançá-los basta

empenho e trabalho duro. Ao meu sobrinho Alex Felipe, espero ter contribuído para um futuro com uma educação melhor.

Agradeço à minha noiva e sempre companheira Andréia. Seu amor e apoio foram fundamentais para que eu concretizasse esse sonho. Mesmo em dias difíceis dessa caminhada você esteve ao meu lado, em momentos que eu não acreditava ser capaz de prosseguir você me incentivou a continuar. Você é a pessoa mais incrível que conheci na minha vida, te admiro muito! E aos seus pais, Arlete e Sérgio, e às suas irmãs, Carolina e Ana, que são minha segunda família e também me apoiaram muito nessa empreitada.

À minha orientadora Lourdes Maria Werle de Almeida, agradeço por todo conhecimento que compartilhou nesses quatro anos de convívio intenso, os carregarei por toda minha vida. Agradeço pela paciência e compreensão nas discussões e orientações. Agradeço, enfim, pelo confiança em mim depositada.

Aos amigos do GRUPEMMAT, pelo apoio, conversas e discussões. Compartilhei momentos de conhecimento, ensinei e aprendi, momentos de descontração e angústia, e também compartilhamos sonhos e realizações. Com cada um de vocês conheci um “mundo” diferente, o que me fez ampliar meus horizontes e melhorar como pessoa. À Camila, minha irmã de orientação, agradeço por todo companheirismo, amizade, apoio e conhecimento. À Daiany agradeço pela amizade e todo suporte que me deu nesse período final do doutorado. À Cíntia, que sempre esteve com as portas de sua casa aberta para mim. Ao Leandro agradeço pelo companheirismo e apoio no período que morei em Londrina, abrindo as portas de sua casa. À Adriana, Ademir, Ana Paula, Ângela, Ariel, Barbara, Bianca, Dirceu, Emerson, Gustavo, Jeferson Takeo, Karina, Letícia, Tânia Camila e Thiago, agradeço por todo momento que compartilhamos.

Às professoras Elizabeth Gomes Souza, Leônia Gabardo Negrelli, Michele Regiane Dias Veronez, Adriana Helena Borssoi e ao professor Rodrigo Dalla Vecchia componentes da banca, pelas valiosas considerações no exame de qualificação e na defesa. Suas contribuições tornaram meu trabalho melhor. Um agradecimento especial à professora Leônia que aceitou que eu realizasse a coleta de dados da pesquisa em sua turma, sua participação nesse processo acrescentou muito à pesquisa.

À Michele agradeço por sua presença em todo caminho de minha formação acadêmica. Agradeço por ter me apresentado à Modelagem Matemática, ter me incentivado a prosseguir na minha formação e à sua amizade.

Às professoras Regina Luzia Corio de Buriasco e Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino agradeço pelos conhecimentos compartilhados nas disciplinas que cursei durante o doutorado.

Aos meus queridos amigos Mauro e Luciane, agradeço, além da amizade sincera e cumplicidade, os momentos de descontração em que a saúde mental é revitalizada. Vocês são pessoas em que me espelho e inspiro para sempre ser uma pessoa melhor.

Aos meus amigos Everton, Felipe e Gabriele, que compartilharam comigo essa etapa da vida acadêmica, cada um em sua especialidade e momento, mas, que sempre estiveram torcendo um pelo outro e apoiando no que era possível.

Agradeço a todos os amigos que de forma direta ou indireta participaram dessa caminhada.

SOUZA, Henrique Cristiano Thomas. **Um olhar sobre o *fazer* Modelagem Matemática à luz da filosofia de Wittgenstein**. 2018. 208 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

RESUMO

Nessa pesquisa investigamos como se dá o *seguir regras* no *fazer* Modelagem Matemática no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática que *utilizam* recursos das tecnologias digitais. Para realizar essa investigação nos embasamos na filosofia madura de Ludwig Wittgenstein, principalmente no que se refere à ideia de *seguir regras*. No caminho de construção dos aspectos teóricos da Modelagem Matemática e da filosofia wittgensteiniana, determinamos as ações ligadas ao *seguir regras* no *fazer* Modelagem Matemática. Os dados empíricos, coletados no contexto de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública, são divididos em dois grupos: as atividades do 1° e 2° momentos de familiarização dos alunos com atividades de modelagem matemática, em que descrevemos as ações de *treinamento da regra*; e, as atividades do 3° momento de familiarização dos alunos com atividades de modelagem matemática, que são objeto da análise específica, em que realizamos uma descrição interpretativa das ações dos alunos que podem indicar o *seguir regras* e dos *usos* que fazem dos recursos das tecnologias digitais. Como resultados da análise global, inferimos que: i) as ações dos alunos que convergem para o *seguir regras* identificadas na análise específica são contempladas nos *treinamentos das regras*; ii) nas ações que divergem no *seguir regras* os alunos não participaram integralmente dos *treinamentos da regra*; iii) o *uso* dos recursos das tecnologias digitais, em todas suas funções, esteve presente em diferentes fases de desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, auxiliando nas ações de *treinamento da regra* e nas ações do *seguir regras*. Como uma reflexão final identificamos que o *seguir regras* se dá numa dinâmica em torno da *regra*: *treinamento da regra-hábito de seguir regras-seguir a regra*.

Palavras-chave: Educação Matemática. Modelagem Matemática. Treinamento. Seguir Regras. Tecnologias Digitais.

SOUZA, Henrique C. T. **A look about the *to do* Mathematical Modelling based on Wittgenstein's philosophy**. 2018. 208 p. Thesis (Doctoral Degree in Teaching of Sciences and Mathematics Education) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

ABSTRACT

On this research, we explored how happens the *following rules* on *to do* Mathematical Modelling on the activities development of the mathematical modelling that *use* the resources of digital technologies. To do that investigation, we were based on the mature philosophy of Ludwig Wittgenstein, which refers, mostly, to the idea of *following rules*. At the construction of the theoretical aspects of Mathematical Modelling and Wittgenstein's philosophy, we set the actions linked to *following rules* on *to do* Math Modelling. The empirical data, collected on the context on Degree in Mathematics of a public university, are divided in two groups: the activity of the 1st and 2nd familiarization moment of students with mathematical modelling activities, which we describe the actions of *rules training*; and, the 3rd moment activities of students familiarization with math modelling, that are object of specific reviews, in which we did an interpretive description of students action that may denote the *following rules* and the *uses* they make of the resources of digital technologies. As results of global reviews, we verify that: i) the students actions converge to *following rules* identified on specific reviews are contemplated on *rules training*; ii) on the actions that diverge on the *following rules*, the students didn't take part fully of the *rule training*; iii) the *use* of digital technologies resources, in all your functions, were present in different phases of the development of mathematical modelling activities, helping in the *training rules* actions and the proper actions of *following rules*. As a final reflection, we found out that the *following rules* happens on a dynamic around the *rule*: *training rule-habit of following rules-following the rule*.

Keywords: Mathematics Education. Mathematical Modelling. Training. Following Rules. Digital Technologies.

Aos meus pais Nelci e Antonio que
sempre me incentivaram e me apoiaram
a buscar na educação o meu caminho.

Lista de Figuras

Figura 1: Cadeira 27
Figura 2: Ciclos de Modelagem analisados em Ferri (2006) 50
Figura 3: Publicações brasileiras sobre Modelagem Matemática (1992-2012) 52
Figura 4: Esquema de uma atividade de Modelagem para Almeida, Silva e Vertuan (2012)..... 55
Figura 5: Fases da Modelagem Matemática para Almeida, Silva e Vertuan (2012)..... 55
Figura 6: Ciclo de Modelagem com adição do modelo computacional 61
Figura 7: Ciclo de Modelagem com adição de influência das Tecnologias digitais 62
Figura 8: Adaptação do Esquema de Modelagem Matemática de Almeida, Silva e Vertuan (2012) 66
Figura 9: Histograma construído na atividade 1.1 87
Figura 10: Anotação no quadro da sala de aula combinando as próximas ações para a atividade do 3° momento 124
Figura 11: Endereços eletrônicos da inteiração inicial da atividade 3.1 abertos no email de A3 125
Figura 12: Consumo de energia elétrica da casa de um dos alunos de D1 utilizada para a atividade 3.1 126
Figura 13: Primeiro direcionamento de D1 para a formulação do problema da atividade 3.1.. 128
Figura 14: Primeira anotação realizada por D1 do problema da atividade 3.1 129
Figura 15: Tabela com o consumo de energia elétrica 132
Figura 16: Tentativa de obter no GeoGebra uma função que descreve o comportamento do consumo de energia elétrica em relação ao mês..... 132
Figura 17: Fornecer o consumo mensal médio de energia elétrica 133
Figura 18: Primeiros modelos construídos por D1 para a atividade 3.1 140
Figura 19: primeira formulação do problema da Atividade 3.3 realizada por A5..... 155
Figura 20: modalidades de skate presentes nos jogos olímpicos – primeira coleta de dados realizada por D3 na Atividade 3.3..... 158
Figura 21: dados do projeto de construção do caixote – Atividade 3.3 159
Figura 22: projetos de pista de skate modalidade street acrescentados por A5 ao planejamento da atividade 3.3 160
Figura 23: dados coletados referentes as dimensões da quadra – Atividade 3.3..... 162
Figura 24: dados iniciais coletados referentes aos preços dos materiais de construção – Atividade 3.3 162
Figura 25: dimensões dos obstáculos savana e corrimão – coleta de dados da atividade 3.3 ... 164
Figura 26: indicação de D3 para a resolução da Atividade 3.3 175
Figura 27: projeto da pista de skate modalidade street construído por A5 – Atividade 3.3..... 175
Figura 28: reinterpretação do esquema de modelagem de Almeida, Silva e Vertuan (2012) com a inclusão do *uso* dos recursos das tecnologias digitais realizados por D1 na atividade 3.1 198
Figura 29: reinterpretação do esquema de modelagem de Almeida, Silva e Vertuan (2012) com a inclusão do *uso* dos recursos das tecnologias digitais realizados por D3 na atividade 3.3 199
Figura 30: dinâmica do *seguir regras* no *fazer* Modelagem Matemática 200

Lista de Quadros

Quadro 1: dinâmica de desenvolvimento das atividades de modelagem matemática 77
Quadro 2: Enunciado e Informações da atividade 1.1 82
Quadro 3: treinamento referente a identificação da situação Inicial Problemática da Atividade 1.1 84
Quadro 4: Parte I da Resolução da Atividade 1.1 84
Quadro 5: Problema da Atividade 1.1 86
Quadro 6: Simplificação dos dados da Atividade 1.1 86
Quadro 7: Parte II da Resolução da Atividade 1.1 87
Quadro 8: Parte III da Resolução da Atividade 1.1 88
Quadro 9: Instruções para a metavalidação da Atividade 1.1 89
Quadro 10: Treinamentos realizados na atividade 1.1 89
Quadro 11: Enunciados e Informações da Atividade 1.2 90
Quadro 12: O Problema conduz a Modelagem – Atividade 1.2 91
Quadro 13: Resolução da atividade 1.2 92
Quadro 14: Resolução Alternativa/validação da Atividade 1.2 95
Quadro 15 : Treinamentos realizados na atividade 1.2 97
Quadro 16: Informações e Problema da Atividade 2.1 99
Quadro 17: Resolução de D2 para a atividade 2.1 103
Quadro 18 : Treinamentos realizados na atividade 2.1 107
Quadro 19: Informações entregues aos alunos na Atividade 2.2 109
Quadro 20: desenvolvimento da Atividade 2.2 realizada pelos alunos de D1 116
Quadro 21: desenvolvimento da Atividade 2.2 realizada pelos alunos de D3 117
Quadro 22 : Treinamentos realizados na atividade 2.2 120
Quadro 23: Possibilidades de problemática para a atividade 3.1 122
Quadro 24: Discussões para a escolha da problemática da atividade 3.1 123
Quadro 25: Problemática escolhida por D1 para a Atividade 3.1 123
Quadro 26: Orientação do professor/pesquisador em relação à problemática escolhida por D1 para a atividade 3.1 125
Quadro 27: Inteiração inicial para com o tema da atividade 3.1 125
Quadro 28: Indicação de um direcionamento de D1 para um problema específico na atividade 3.1 126
Quadro 29: Dados específicos coletados por D1 para a atividade 3.1 127
Quadro 30: Confirmação de D1 do direcionamento para o problema da atividade 3.1 129
Quadro 31: Primeiro direcionamento de D1 no relatório para o problema da atividade 3.1 129
Quadro 32: Especificando a essência do problema da atividade 3.1 129
Quadro 33: Problema formulado por D1 para a atividade 3.1 130
Quadro 34: Discussão de D1 sobre a simplificação referente aos aspectos a serem considerados na atividade 3.1 131
Quadro 35: Simplificação de D1 considerando a média de alguns parâmetros 131
Quadro 36: Primeira hipótese formulada por D1 na atividade 3.1 134
Quadro 37: Discussão sobre a primeira hipótese formulada por D1 na atividade 3.1 134
Quadro 38: Segunda hipótese formulada por D1 na atividade 3.1 135
Quadro 39: Explicação de D1 à segunda hipótese formulada na atividade 3.1 135
Quadro 40: Terceira hipótese formulada por D1 na atividade 3.1 136
Quadro 41: Informações que fundamentam a terceira hipótese de D1 para a atividade 3.1 – Parte I 136

Quadro 42: Informações que fundamentam a terceira hipótese de D1 para a atividade 3.1 – Parte II 137
Quadro 43: Quarta hipótese formulada por D1 na atividade 3.1 137
Quadro 44: Definição da variável independente na atividade 3.1 138
Quadro 45: Discussão sobre a definição da variável independente na atividade 3.1 138
Quadro 46: Demais variáveis definidas por D1 na atividade 3.1 139
Quadro 47: Primeiros direcionamentos à D1 para o modelo da atividade 3.1 140
Quadro 48: Discussão sobre o Modelo construído por D1 para a atividade 3.1 141
Quadro 49: Construção do modelo realizada por D1 para a atividade 3.1 142
Quadro 50: Controles deslizantes criados por D1 para responder ao problema da atividade 3.1 144
Quadro 51: Resposta dada por D1 ao problema da atividade 3.1 145
Quadro 52: Validação utilizada por D1 e não incorporada ao relatório da atividade 3.1 146
Quadro 53: Opção por não incorporar a validação utilizada por D1 e não incorporada ao relatório da atividade 3.1 147
Quadro 54: Validação realizada por D1 para a atividade 3.1 147
Quadro 55: Interpretação dos resultados da atividade 3.1 148
Quadro 56: Interpretação dos resultados da atividade 3.1 durante a comunicação de D1 148
Quadro 57: resumo das ações de D1 relacionadas ao *seguir regras* do *fazer* Modelagem Matemática na Atividade 3.1 149
Quadro 58: Possibilidades de problemática para a atividade 3.2 151
Quadro 59: Discussões para a escolha da problemática da atividade 3.1 151
Quadro 60: Discussão sobre o encaminhamento da situação-inicial problemática escolhida por D3 para a atividade 3.3 153
Quadro 61: Confirmação de A5 ao direcionamento para o problema da atividade 3.3 154
Quadro 62: Dúvidas de A5 sobre a formulação do problema da Atividade 3.3 154
Quadro 63: Discussão sobre o primeiro problema formulado por A5 para a atividade 3.3 155
Quadro 64: encaminhamento da situação-inicial problemática da atividade 3.3 156
Quadro 65: Orientação do professor/pesquisador em relação à coleta de dados da atividade 3.3 157
Quadro 66: Questionamentos do professor/pesquisador sobre o andamento da coleta de dados da Atividade 3.3 157
Quadro 67: Confirmação de D3 do direcionamento para o problema da atividade 3.1 159
Quadro 68: ainda faltam dados a serem coletados Na atividade 3.3 – parte I 160
Quadro 69: ainda faltam dados a serem coletados na atividade 3.3 – parte II 161
Quadro 70: dados coletados referentes aos preços dos materiais de construção – apresentados no relatório da Atividade 3.3 163
Quadro 71: dados coletados referentes aos preços dos materiais de construção – apresentados no relatório da Atividade 3.3 166
Quadro 72: Orientação do professor/pesquisador para A5 realizar uma simplificação em relação as medidas da pista de skate – atividade 3.3 166
Quadro 73: opção pelas dimensões da quadra de esportes – Atividade 3.3 167
Quadro 74: Explicação sobre a opção pelas dimensões da quadra de esportes – atividade 3.3 167
Quadro 75: Explicação sobre a simplificação dos preços dos materiais de construção – atividade 3.3 167
Quadro 76: novos valores para o custo dos materiais de construção – Atividade 3.3 168
Quadro 77: primeira hipótese formulada por D3 para a Atividade 3.3 169
Quadro 78: argumentos que justificam a primeira hipótese formulada por D3 para a atividade 3.3 169

Quadro 79: segunda hipótese formulada por D3 para a Atividade 3.3 170
Quadro 80: essa é uma hipótese para a atividade 3.3 170
Quadro 81: explicação sobre a terceira hipótese formulada por D3 para a atividade 3.3 171
Quadro 82: terceira hipótese formulada por D3 para a Atividade 3.3 171
Quadro 83: quarta hipótese formulada por D3 para a Atividade 3.3 (?) 171
Quadro 84: definição de variáveis nas equações de cálculo da quantidade de materiais de construção? – Atividade 3.3 172
Quadro 85: definição de variáveis para o modelo de custo de construção – Atividade 3.3 173
Quadro 86: modelos de cálculo de materiais necessários para a construção dos obstáculos da pista de skate – atividade 3.3 176
Quadro 87: quantidade dos demais materiais necessários para a construção dos obstáculos da pista de skate – atividade 3.3 177
Quadro 88: modelo do custo total de construção – atividade 3.3 177
Quadro 89: cálculo da resposta para o problema da atividade 3.3 178
Quadro 90: "Validação das variáveis" – Atividade 3.3 179
Quadro 91: resumo das ações de D3 relacionadas ao *seguir regras* do *fazer* Modelagem Matemática na Atividade 3.3 180
Quadro 92: o *treinamento* realizado para as ações do *seguir regras* de D1 182
Quadro 93: o *treinamento* realizado para as ações do *seguir regras* de D3 184
Quadro 94: treinamentos para a coleta de dados 189
Quadro 95: treinamentos para a seleção de variáveis 191
Quadro 96: treinamentos para a construção do modelo 192
Quadro 97: treinamentos para apresentar uma solução para o problema 194
Quadro 98: treinamentos para analisar a resposta em relação à Matemática e em relação ao Problema 195
Quadro 99: *usos* dos recursos das tecnologias digitais realizados nos desenvolvimento das atividades da pesquisa empírica 197

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO 14

2. O *SEGUIR REGRAS* NA PERSPECTIVA DE LUDWIG WITTGENSTEIN 24

2.1. A FILOSOFIA DE LUDWIG WITTGENSTEIN: ALGUMAS IDEIAS GERAIS 24
2.2. A IDEIA DE SEGUIR REGRAS 33
2.2.1. A constituição de regras *33*
2.2.2. Ensinar a seguir regras *37*
2.2.3. Seguir uma regra e seus desdobramentos *40*
2.3. SINTETIZANDO A IDEIA DE SEGUIR REGRAS 44

3. MODELAGEM MATEMÁTICA 46

3.1. A MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA 47
3.2. UMA PROPOSTA DO FAZER MODELAGEM MATEMÁTICA 54
3.3. O USO DE RECURSOS DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS NO FAZER MODELAGEM MATEMÁTICA 57

4. O *SEGUIR REGRAS* NO *FAZER* MODELAGEM MATEMÁTICA 65

5. ASPECTOS METODOLÓGICOS 73

5.1. A COLETA DE DADOS 73
5.2. DELINEAMENTOS METODOLÓGICOS 78

6. DESCRIÇÃO E ANÁLISE ESPECÍFICA DAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA DESENVOLVIDAS 81

6.1. ATIVIDADES DA FASE DE TREINAMENTO 81
6.1.1. Atividades do primeiro momento *81*
6.1.1.1 Atividade 1.1: Avaliações dos vídeos de um canal do youtube 81
6.1.1.2 Atividade 1.2: Dengue no Estado do Paraná 90
6.1.2. Aula Teórica *98*
6.1.3. Atividades do segundo momento *99*
6.1.3.1 Atividade 2.1: Uma árvore por habitante 99
6.1.3.2 Atividade 2.2: Cesta Básica na cidade de Curitiba 108
6.2. AS ATIVIDADES DO 3° MOMENTO E O SEGUIR REGRAS 121
6.2.1. O seguir regras da dupla 1 (D1): Atividade 3.1 – Energia Solar *122*
6.2.2. O seguir regras da dupla 3 (D3): Atividade 3.3 – Pista de Skate *150*

7. RESULTADOS E DISCUSSÃO 182

REFERÊNCIAS 203

1. INTRODUÇÃO

Pesquisar sobre Modelagem Matemática no contexto da Educação Matemática é o desafio que me conduziu até o delineamento dessa pesquisa. Desde minha primeira experiência com a pesquisa, durante a graduação, mais especificamente no desenvolvimento do trabalho de conclusão de curso (TCC), investigar aspectos referentes à Modelagem Matemática se tornou um fio condutor na minha vida acadêmica.

No mestrado desenvolvi uma pesquisa (SOUZA, 2013) que pode ser caracterizada como uma meta-pesquisa sobre Modelagem Matemática. Observando que existem diferentes formas de entender a Modelagem Matemática e também de definir como se configura uma atividade de modelagem, investiguei a existência de pontos em comum entre essas formas de compreender a Modelagem Matemática. Pautando as argumentações em pressupostos do filósofo austríaco Ludwig Wittgenstein foi possível relacionar esses pontos em comum com a ideia de *semelhanças de família*.

Nessa primeira experiência de pesquisa envolvendo a filosofia wittgensteiniana leituras como Vilela (2007), Knijnik et al. (2012), Veiga-Neto e Lopes (2007) e Gottschalk (2008) foram importantes para entender ideias fundamentais dessa filosofia, como *jogos de linguagem*, *uso*, *formas de vida* e, especificamente, *semelhanças de família*.

A aproximação entre a Modelagem Matemática e a filosofia madura de Wittgenstein – principalmente as ideias discutidas no Investigações Filosóficas (WITTGENSTEIN, 2000) – ocorrida em minha dissertação, aguçou meu interesse em pesquisar quais relações poderiam ser estabelecidas entre essas duas áreas de pesquisa.

Ingressando no doutorado encontrei no GRUPEMMAT (Grupo de Pesquisa sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática) – grupo de pesquisa que é vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PECEM) da Universidade Estadual de Londrina (UEL) – um ambiente em que poderia avançar no entendimento de possíveis relações entre Modelagem Matemática e a perspectiva wittgensteiniana de linguagem.

As discussões e leituras realizadas no GRUPEMMAT foram fundamentais no aprofundamento dos pressupostos wittgensteinianos. Textos como Miguel (2014),

Gottschalk (2014) e Almeida (2014) nos conduziram no aprofundamento de ideias como *uso*, *formas de vida*, *gramática*; referente ao contexto filosófico em que Wittgenstein construiu seus pressupostos. Leituras como Dummett (1959), Amaral (2002), Moreno (2003) e Izmirli (2013) me guiam no entendimento do cenário filosófico em que esses pressupostos wittgensteinianos atuam.

Além dos estudos referentes à filosofia wittgensteiniana, o GRUPEMMAT é reconhecido por realizar pesquisas sobre Modelagem Matemática relacionadas a outras teorias. Esse aspecto não é exclusividade do GRUPEMMAT, mas, pode-se dizer que é uma marca da pesquisa nacional sobre Modelagem Matemática. Nesse sentido, também pude vivenciar e ter contato com pesquisas que relacionam Modelagem Matemática com a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (VERTUAN, 2007; e VERTUAN, 2013), com a Semiótica de Charles Sander Peirce (SILVA, 2008; e SILVA, 2013), com a Semiótica de Peirce e Heinz Steinbring (VERONEZ, 2013), com a Aprendizagem Significativa (POSTAL, 2009; SILVA, 2011; BURAK e ARAGÃO, 2012; FIGUEIREDO, 2013; BORSSOI, 2013; e SILVA, 2018), com a Fenomenologia (KLÜBER, 2012; e BRITO, 2018), entre outras.

Conforme aumentava minha familiarização com os temas Modelagem Matemática e filosofia wittgensteiniana desenvolvi alguns trabalhos. Diferentes aspectos relacionados a essas linhas de pesquisa foram discutidos e serviram como embasamento nesses trabalhos.

Numa primeira investida em Dias e Souza (2014), e posteriormente em Dias e Souza (2016), investiguei as semelhanças de família na forma como alguns autores compreendem e definem modelo matemático. Em Oliveira, Souza e Almeida (2015) analisamos, a partir de um olhar wittgensteiniano, alguns esquemas de modelagem buscando observar como os autores compreendiam a relação entre Matemática e realidade nesses esquemas. Já em Souza, Oliveira e Almeida (2016), com foco específico na Modelagem Matemática, propomos uma atividade de modelagem que se caracteriza numa forma específica de realizar modelagem denominada por Niss (2015) de modelagem prescritiva. Encerrando esses estudos intermediários, em Souza, Oliveira e

Almeida (2017) investigamos como se deu o *seguir regras* em uma atividade de modelagem. Este último já indicando o direcionamento que estávamos[1] seguindo.

Estes trabalhos, além de comunicarem para a comunidade alguns resultados obtidos nas duas linhas de pesquisa, nos ajudaram a organizar e compreender as ideias relacionadas a elas, auxiliando-nos a identificar quais delas teriam potencial para serem fonte de investigação, indicando um caminho para a realização dessa tese de doutorado.

Observando os trabalhos por nós comunicados nesse período de doutoramento, é perceptível que nos debruçamos em diferentes ideias referentes à filosofia wittgensteiniana, identificação de *semelhanças de família*, análise da relação entre Matemática e realidade e também o *seguir regras*, foram temas recorrentes. Mesmo que alguns temas fossem recorrentes nos estudos que foram publicados, as ideias da filosofia wittgensteiniana exigem que estejamos engajados nela de forma integrada, logo, em todo esse processo nenhuma das ideias foi deixada em segundo plano, mas, algumas delas necessitaram de mais afinco em seus aprofundamentos, em especial podemos evidenciar as ideias de *formas de vida* e *terapia filosófica*.

Nossos estudos e investigações envolvendo Modelagem Matemática com a filosofia wittgensteiniana não foram realizados isolados do contexto de pesquisa em que estamos inseridos. As pesquisas desenvolvidas no GRUPEMMAT[2] nos auxiliam a determinarmos um caminho a ser explorado nessa pesquisa. A aproximação da Modelagem Matemática com a filosofia wittgensteiniana ainda é recente, os resultados de pesquisa não são muito amplos, por isso devemos entender que aspectos ainda necessitam de investigação. Nesse sentido, apresentamos brevemente as pesquisas já desenvolvidas no GRUPEMMAT que investigaram essa aproximação.

Em nível de mestrado temos as pesquisas de Oliveira (2011) e Tortola (2012).

A autora realiza, em Oliveira (2011), "uma análise epistemológica dos modelos de crescimento populacional com vistas a identificar práticas sociais e matemáticas que influenciaram o processo de desenvolvimento de modelos de crescimento populacional em diferentes épocas e contextos" (p.16). Nessa análise a filosofia wittgensteiniana é utilizada para mostrar que "no ensino e na aprendizagem da Matemática, as matemáticas

[1] A partir desse ponto utilizamos a primeira pessoa do plural, pois, o caminho deixa de ser apenas do autor dessa tese e passa ser do autor guiado pela sua orientadora.
[2] Nos restringiremos as pesquisas à nível de mestrado e doutorado.

se constituem em diferentes práticas sociais" (OLIVEIRA, 2011, p.38) e que o "papel do professor seria o de ensinar significados a partir do seu uso" (idem).

A inserção da filosofia wittgensteiniana no trabalho de Oliveira (2011) se mostrou tímida, entretanto, é necessário entender que essa foi uma das primeiras aproximações realizadas dessa filosofia com a Modelagem Matemática, ou seja, uma das primeiras pesquisas em nível de mestrado nessas linhas de pesquisa. A autora está atualmente desenvolvendo sua pesquisa de doutoramento e nela está utilizando a filosofia wittgensteiniana, com maior evidência as ideias de *terapia* e a formação de *significados* matemáticos, isso no contexto do Ensino Tecnológico.

Tortola (2012) investigou os diferentes *usos* da linguagem que alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental utilizam no desenvolvimento de atividades de modelagem. O autor evidenciou que esses alunos utilizam diferentes registros de representação e que esses registros apresentam *semelhanças de família* entre si.

Já em nível de doutoramento, em Tortola (2016), o autor obteve como resultado que atividades de modelagem matemática realizadas por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental se moldam em três configurações diferentes. Para chegar nesse resultado o autor utilizou ideias da filosofia wittgensteiniana, dentre as quais as que ganham mais destaque são *treinamento* e *usos* da linguagem. A pesquisa apresentada em Tortola (2016) evidencia-se por seu contexto, os anos iniciais do Ensino Fundamental, em que não há muitas pesquisas, contribuindo assim para a expansão da linha de pesquisa, como também pela forma de utilização da filosofia wittgensteiniana.

A pesquisa mais recente produzida no GRUPEMMAT – nessas duas linhas de pesquisa – foi apresentada em Palharini (2017). A autora define três categorias *a posteriori* que emergem dos *usos* da linguagem e dos procedimentos matemáticos utilizados em atividades de modelagem matemática realizadas por alunos do Ensino Superior. O foco da autora nessa pesquisa está na Matemática, logo, as categorias também dizem respeito à Matemática. Nesse sentido, as ideias da filosofia wittgensteiniana utilizadas pela autora em suas análises são as considerações feitas por Wittgenstein sobre a Matemática e as que ganharam mais destaque nas categorias foram: *usos*, *proposições* e *regras*. Assim como em Tortola (2016), mas com foco específico nos aspectos da Matemática, algumas ideias da filosofia wittgensteiniana também se notabilizam mais que outras ao observarmos os resultados apresentados pela autora, mas, ela as utiliza com base numa compreensão global dessas ideias.

Algumas pesquisas realizadas em outros ambientes de pesquisa que não o GRUPEMMAT também nos indicam caminhos já explorados na relação Modelagem Matemática e filosofia wittgensteiniana. A seguir apresentamos aquelas que mais estiveram presentes em nosso delineamento.

Em Oliveira (2010) o autor investiga a produção de sentido que os alunos fazem na inteiração entre si e com o professor em projetos de modelagem matemática. Como resultado suas

> análises apontam para possibilidades de produção de ambientes de aprendizagem apropriados para transitar um padrão de comunicação que desempenhe sua função primordial em situação de ensino-aprendizagem: a comunicação através da linguagem ou dos jogos de linguagem (OLIVEIRA, 2010, p.8).

Em Quartieri (2012), a autora analisou a questão do interesse na(s) forma(s) de vida escolar. Para isso analisou as teses e dissertações brasileiras sobre Modelagem Matemática de 1987 a 2009, disponíveis no portal da CAPES, das quais emergiram três enunciados relativos ao interesse:

> o uso da Modelagem Matemática na(s) forma(s) de vida escolar requer que se tome como ponto de partida para o processo pedagógico temas de interesse do aluno; o uso da Modelagem Matemática na(s) forma(s) de vida escolar torna o aluno interessado e, como consequência, corresponsável por sua aprendizagem; o uso da Modelagem Matemática na(s) forma(s) de vida escolar suscita o interesse do aluno pela matemática escolar (QUARTIERI, 2012, p.7).

A partir desses enunciados a autora conclui que para o discurso da Modelagem Matemática o aluno se interessa por resolver problemas de sua realidade, e o professor pode utilizar essa liberdade de escolha do tema por parte dos alunos para torná-los corresponsáveis por sua aprendizagem.

Em Souza (2012), a autora investigou contribuições teóricas que a filosofia wittgensteiniana pode trazer para a Modelagem Matemática. Um dos resultados apontados pela autora é que como a Matemática (escolar) ganha contornos normativos sob o ponto de vista wittgensteiniano, nessa perspectiva a Modelagem Matemática poderia ser designada como *uma maneira de organizar situações empíricas*. Estendendo os pressupostos wittgensteiniano às ideias de Anna Sfard [3] sobre a aprendizagem matemática, a autora conclui que a aprendizagem matemática seria uma *delimitação*

[3] Pesquisadora da área de Psicologia em Educação Matemática.

discursiva em relação à produção discursiva historicamente estabelecida, ou seja, a matemática escolar. Nesse sentido, a Modelagem Matemática como organizadora das situações empíricas apresenta potencial para contemplar a aprendizagem da matemática escolar.

Podemos observar que a ideia de *uso* foi muito explorada nas pesquisas desenvolvidas que tratam da aproximação entre Modelagem Matemática e a filosofia wittgensteiniana. São investigados o *uso* da linguagem no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática (OLIVEIRA, 2012; TORTOLA, 2012; TORTOLA, 2016; e PALHARINI, 2017), e o *uso* da Matemática e seus procedimentos (OLIVEIRA, 2011; e PALHARINI, 2017). Nelas a Modelagem Matemática é tratada como uma forma de ensinar Matemática.

O *uso* da Modelagem Matemática como objeto de pesquisa ganha destaque nos estudos teóricos, em Quartieri (2012) como uma abordagem de ensino, e em Sousa (2012) como forma de promover aprendizagem matemática.

As *regras* são abordadas em Palharini (2017) e em Tortola (2016). Na primeira, a ideia é relacionada às *regras* da Matemática, na segunda, o *treinamento das regras* é relacionado à linguagem para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Considerando os resultados das pesquisas, há indicações de que o *seguir regras*[4] é temática da filosofia de Wittgenstein que ainda requer investigação.

Nesse sentido, debruçamos nossos esforços de estudo sobre as *regras*, *treinamento* (da regra) e *seguir regras* em Wittgenstein. Em McCullagh (2002, p.83), o autor debate a relação entre *regra* e *prática* na filosofia de Wittgenstein, argumentando que "seguir uma regra é participar de uma prática". Sousa (2013) se refere ao entendimento da gênese e funcionamento da *regra*, indicando aspectos primordiais quando se olha para o *seguir regras*. Sobre a forma como as *regras* devem ser ensinadas, as discussões apresentadas em Gottschalk (2010) são esclarecedoras e sua crítica às metodologias construtivistas enaltece o papel do *treinamento* no aprendizado – das *regras*. Esses estudos nos auxiliaram a compreender as ideias de Wittgenstein especialmente aquelas apresentadas na sua obra mais reconhecida na comunidade

[4] Para investigar o *seguir regras* é necessário ter consciência que a filosofia wittgensteiniana é uma atitude e todas suas ideias estão interligadas, ou seja, não são dissociáveis.

científica: Investigações Filosóficas (WITTGENSTEIN, 2000). Além desta, também nos debruçamos sobre os escritos das Observações Filosóficas (WITTGENSTEIN, 2005), do Da Certeza (WITTGENSTEIN, 2003) e das Observações sobre os Fundamentos da Matemática (WITTGENSTEIN, 1987).

Nossa caminhada nos leva a um campo de interesse específico entre as ideias de Wittgenstein, e desse local de inferência surge nossa primeira investida de investigação dessa pesquisa: *investigar o seguir regras*.

Todavia, é preciso ponderar que *seguir regras* é uma temática relevante para compreensões relativas ao *fazer* Modelagem Matemática, bem como ao ensino e à aprendizagem desse *fazer* em contextos educacionais. Assim, acrescento à pesquisa o que denominamos de segunda investida: *investigar o fazer Modelagem Matemática*.

O *fazer* Modelagem Matemática está aqui associado ao desenvolver atividades de modelagem matemática; desenvolver que é julgado quando relacionado a um modo específico de fazer uma atividade de modelagem matemática. Conforme é apontado no levantamento realizado em Souza (2013) o fazer uma atividade de modelagem matemática possui diferentes propostas, logo, para investigá-lo é necessário determinar qual proposta do fazer Modelagem Matemática será nosso critério de adequação – a proposta considerada nessa pesquisa toma como base as ideias apresentadas em Almeida, Silva e Vertuan (2012).

Ao conjugar as duas investidas de investigação, a filosofia de Wittgenstein e a Modelagem Matemática, entendemos que investigar o *fazer* Modelagem Matemática está relacionado a investigar o *seguir as regras* de uma proposta do *fazer* uma atividade de modelagem matemática. Portanto, sinergicamente essas investidas podem ser determinadas como: *investigar o seguir regras do fazer Modelagem Matemática*.

Uma especificidade acrescentada em nossa investigação é a utilização das tecnologias digitais[5]. De fato a relevância do uso das tecnologias digitais tem sido discutida na literatura (SOARES e BORBA, 2014; BORSSOI e ALMEIDA, 2015; GREEFRATH e SILLER, 2017; GREEFRATH, HERTLEIF e SILLER, 2018), e três autores são referência ao discutirmos a inserção de tecnologias (digitais) à atividade humana, discussão necessária e anterior à relação entre tecnologias digitais e Modelagem

[5] Utilizaremos o termo tecnologias digitais para nos referirmos às tecnologias computacionais, como computador, celular, tablet, etc., aos software, sejam eles específicos de matemática ou não, e também àquilo que é possível ser obtido com acesso à internet, como sites de busca, sites de vídeos, etc.

Matemática: Tikhomirov (1972) entende que as tecnologias digitais reorganizam a atividade humana, não a substituem, nem a complementam; Levy (1993) sugere que essa inserção transforma nosso modo de organização e transmissão da informação e consequentemente dos conteúdos associados a essas informações; e, complementarmente Kenski (2003) evidencia que as tecnologias digitais associadas a atividade humana propiciam novas percepções e sensibilidades sem excluir àquelas oriundas da escrita e da oralidade. Relacionando essas ideias entendemos que inserir o uso de recursos das tecnologias digitais em nossas atividades as altera, reorganiza e abre novas possibilidades.

Se relacionarmos essa inferência ao fazer Modelagem Matemática, podemos conjecturar que ao inserirmos o uso de recursos das tecnologias digitais no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, isso alterará, reorganizará e propiciará novas possibilidades ao desenvolvimento dessas atividades de modelagem matemática, ou seja, modificará a forma de desenvolver atividades de modelagem matemática.

Nessa pesquisa, organizamos a dinâmica de atividades de maneira que os recursos das tecnologias digitais estivessem sempre disponíveis e os alunos pudessem utilizá-los ao desenvolverem as atividades. Assim, a prática da Modelagem Matemática aqui já é reorganizada, ou seja, não buscamos investigar uma possível reorganização, pois, como podemos observar nos resultados de pesquisas (MALHEIROS, 2008; DALLA VECCHIA, 2012; SOARES, 2012; BORSSOI, 2013) essa reorganização já ocorre nesses casos. Nosso interesse está em identificar como é realizado o uso dos recursos das tecnologias digitais no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Acrescentamos essa especificidade às duas primeiras investidas de investigação, delimitamos nosso campo de investigação na pesquisa, e, então, definimos a questão a ser investigada nesta pesquisa:

Como se dá o seguir regras no fazer Modelagem Matemática em atividades de modelagem desenvolvidas utilizando recursos das tecnologias digitais?

Percebemos aproximações entre a região de investigação proposta em nosso objetivo de pesquisa e algumas pesquisas que tratam de Modelagem Matemática em conjunto com a filosofia wittgensteiniana, mas, também, diferenças que determinam suas especificidades. Por exemplo, em Palharini (2017) a autora realiza sua investigação no

Ensino Superior, assim como propomos, mas, seu foco de estudo foi na Matemática e não na Modelagem Matemática; e em Tortola (2016) o autor tem como objetivo olhar para a Modelagem Matemática, mas, sua investigação ocorre no Ensino Fundamental.

O conceito de *regras* ou de *seguir regras* também está envolvido de forma direta ou indireta nessas pesquisas, contudo, assim como em nossa empreitada investigativa perpassamos por diversas ideias dessa filosofa, essas pesquisas as utilizam, mas, não como objeto específico de investigação. Outro aspecto referente ao *seguir regras*, ou aplicar *regras* – seja aliado à Modelagem Matemática ou à outra linha de pesquisa, por exemplo, como em Sousa Neto (2016) – é que este *seguir regras* está aliado às *regras* da Matemática, ou seja, as investigações existentes não são focadas no *seguir regras* do fazer Modelagem Matemática.

Considerando todos esses aspectos, nosso objetivo de pesquisa inquere um lugar ainda não explorado na pesquisa que envolve Modelagem Matemática, com a especificidade do uso dos recursos das tecnologias digitais, em conjunto com a filosofia wittgensteiniana.

Assim, para alcançarmos nosso objetivo nessa pesquisa, discutimos aspectos da Filosofia de Wittgenstein, aspectos da Modelagem Matemática, e analisamos dados empíricos, seguindo a estrutura do relatório de pesquisa conforme apresentamos a seguir. Nesse primeiro capítulo introdutório apresentamos o objetivo de pesquisa e suas justificativas, bem como, estruturamos o relatório de pesquisa.

No segundo capítulo apresentamos os aspectos da filosofia wittgensteiniana. Na primeira seção apresentamos uma contextualização geral das ideias de Wittgenstein, discutindo ideias como *jogos de linguagem, formas de vida*, *semelhanças de família*, *gramática*, *terapia*, entre outras. Damos atenção especial aquelas que serão necessárias para a discussão das *regras*, tópico que é foco da segunda seção do referido capítulo.

No capítulo 3 os aspectos referentes à Modelagem Matemática na Educação Matemática são evidenciados. Para tal, as discussões envolvendo esses aspectos são abordadas em três momentos. Primeiramente, aspectos gerais da Modelagem Matemática como linha de pesquisa da Educação Matemática são discutidos, alguns pontos que consideramos fundamentais às pesquisas nessa linha são apontados. No segundo momento, abordamos um aspecto específico a nosso objetivo de pesquisa, discutimos uma proposta do *fazer* Modelagem Matemática que está ancorada na obra de Almeida,

Silva e Vertuan (2012). Finalizando o capítulo abordamos o uso das tecnologias digitais na Modelagem Matemática, apresentando os *usos* específicos que os recursos das tecnologias digitais ganham no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

No capítulo 4 relacionamos as ideias da filosofia wittgensteiniana com a proposta do *fazer* Modelagem Matemática. Elencamos as ações que indicam o *seguir regras* do *fazer* Modelagem Matemática.

No capítulo 5 discutimos os aspectos metodológicos da pesquisa. Primeiramente apresentamos os aspectos relacionados à coleta de dados. Posteriormente determinamos os delineamentos que guiam as análises dos dados empíricos.

No capítulo 6 realizamos as análises específicas, descrevendo a partir das ações dos alunos no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática o *seguir regras* do *fazer* Modelagem Matemática.

No sétimo e último capítulo realizamos a análise global, que busca elucidar o fazer Modelagem Matemática a partir da análise do *seguir regras* do *fazer* Modelagem Matemática realizada na análise específica. Apresentamos também nossas reflexões sobre os resultados obtidos e possíveis desdobramentos. As referências bibliográficas utilizadas no relatório de pesquisa o finalizam.

2. O *SEGUIR REGRAS* NA PERSPECTIVA DE LUDWIG WITTGENSTEIN

Neste capítulo buscamos elucidar a ideia do *seguir regras* que está inserida nos pressupostos do filósofo austríaco Ludwig Wittgenstein, no período conhecido como virada linguística. Para tal, dividimos o capítulo em três partes. Na primeira contextualizamos a obra filosófica de Wittgenstein, ou seja, apresentamos um panorama geral sobre sua filosofia. Na segunda parte do capítulo tratamos especificamente da ideia de *seguir regras*. Na terceira parte, na seção final do capítulo, sintetizamos as discussões.

2.1. A filosofia de Ludwig Wittgenstein: algumas ideias gerais

Ludwig Josef Johann Wittgenstein nasceu em Viena, na Áustria, no ano de 1889. Em 1906 iniciou seus estudos na escola Techinsche Hochschule de Berlim. Em 1908 iniciou sua vida acadêmica ao ingressar na Universidade de Manchester com a pretensão de estudar engenharia aeronáutica, entretanto, influenciado por Gottlob Frege se inscreveu no curso de Bertrand Russell no Trinity College, em Cambridge.

Esses dois últimos filósofos foram de grande importância na primeira fase da filosofia de Wittgenstein; essa fase foi marcada pela sua única publicação em vida, no ano de 1921, o livro intitulado "Tratactus Logico-Philosophicus" (TLF[6]). De acordo com Glock (1998, p.23), Frege e Russell inventaram a lógica formal moderna, alterando o panorama da filosofia do século XX. A influência que a lógica formal tem no Tractatus[7] é notada em suas páginas:

> A filosofia não é ciência da natureza.
> (A palavra "filosofia" deve denotar alguma coisa que se coloca acima ou abaixo mas não ao lado das ciências naturais.) (WITTGENSTEIN, TLF, 1968, 4.111)
> A finalidade da filosofia é o esclarecimento lógico dos pensamentos.
> A filosofia não é teoria mas atividade.
> Uma obra filosófica consiste essencialmente em comentários.

[6] Usaremos abreviaturas dos títulos dos livros de Wittgenstein nas citações para facilitar a identificação da obra utilizada.
[7] Daqui em diante no intuito de deixar a leitura mais fluida usaremos Tractatus para nos referirmos ao livro Tractatus Logico-Philosophicus.

> A filosofia não resulta em "proposições filosóficas" mas em tornar claras as proposições.
> A filosofia deve tomar os pensamentos que, por assim dizer, são vagos e obscuros e torná-los claros e bem delimitados (WITTGENSTEIN, TLF, 1968, 4.112).

Como podemos observar o autor descreve o papel da filosofia, no caso da lógica formal, como esclarecedora e organizadora do empírico, ou seja, no Tratactus Wittgenstein exprime que o sentido de uma proposição pode ser esclarecido através de uma análise lógica, ou ainda, que para cada palavra que compõe uma proposição existe uma referência que contém logicamente seu sentido. Nesse contexto, existe uma essência que está além da linguagem e que é representada por ela, assim, a análise lógica pode elucidá-la.

O Tractatus teve seu esboço produzido enquanto Wittgenstein batalhava na I Guerra Mundial entre os anos de 1914 e 1919. Após voltar da guerra assumiu o cargo de professor numa escola primária de Viena, lá lecionou até o ano de 1926, passando a trabalhar como jardineiro num monastério até o ano de 1929. Nesse período, mesmo com a publicação do Tractatus em 1921, Wittgenstein se afastou da filosofia. Sua reaproximação com a filosofia foi lenta. Em 1923 recebeu a visita de Frank Ramsey, um matemático que se aprofundou nos estudos e interpretações do Tractatus, as discussões que tiveram levaram a alterações no Tractatus, publicadas no ano de 1933. Essa interação entre os dois aproximou Wittgenstein do círculo de Viena, do qual não participava das reuniões semanais, mas reunia-se com um pequeno grupo.

Aproximando-se novamente da filosofia, Wittgenstein decide retornar para a Universidade de Cambridge em 1929, recebendo seu título de doutor pela publicação do Tractatus. No ano seguinte, 1930, começa a lecionar em Cambridge ficando no cargo até o ano de 1947. Nesse intervalo de tempo foi motorista de ambulância do exército inglês durante a II Guerra Mundial, entre os anos de 1939 e 1945.

Conforme pontua Izmirli (2013), o período em que lecionou em Cambridge é de suma importância para a filosofia posterior e intermediária de Wittgenstein. Segundo o autor, no período denominado de intermediário na filosofia de Wittgenstein, muitos aspectos marcantes do que caracteriza o período posterior de sua filosofia começaram a ser discutidos pelo autor, isso em palestras, notas de aulas e anotações feitas pelo autor. Do acumulado dos escritos de Wittgenstein cerca de metade deles, no período entre 1929 e 1944, tematizaram a filosofia da matemática e foram organizados em alguns livros –

publicados postumamente – dos quais podemos destacar as “Observações sobre os Fundamentos da Matemática” (OFM), a “Gramática Filosófica” (GF), as “Observações Filosóficas” (OF) e o “Da Certeza” (DC). Tais obras foram construídas a partir das anotações e falas de Wittgenstein e sua organização é responsabilidade de seus ex-alunos e seguidores, ou seja, Wittgenstein não estruturou suas ideias para que se tornassem livros.

Depois de demitir-se da Universidade de Cambridge passou seus dias alternando entre a Irlanda, Oxford e Cambridge, até falecer no ano de 1951. Nesse último período de vida Wittgenstein estruturou suas ideias, com sua autorização seus escritos foram publicados postumamente em 1953 (GLOCK, 1998, p.34), na obra intitulada então de “Investigações Filosóficas” (IF).

Como o próprio Wittgenstein coloca no prefácio das Investigações Filosóficas – “nas páginas que seguem publico pensamentos, sedimentos de investigações filosóficas que me ocuparam nos últimos dezesseis anos” (WITTGENSTEIN, 2000, IF, p.25) – as ideias que estão nas Investigações Filosóficas foram pensamentos e “repensamentos” que ocuparam o autor por muitos anos, mostrando assim a ligação do que está nas Investigações Filosóficas e daquilo que se encontra nas publicações do período intermediário.

Essa breve “biografia” situa temporalmente e socialmente o contexto das ideias de Wittgenstein, e nos guia no entendimento de sua filosofia madura – que engloba tanto a fase intermediária e posterior de suas obras –, que é a “fundação” na qual nos baseamos nessa pesquisa.

Segundo Moreno (2003, p.94) a postura que Wittgenstein tem em seu projeto filosófico é a “preocupação em esclarecer e explicitar as diversas formas de constituição do sentido de nossa experiência que conduzem às diversas formas da objetividade”. Tal atitude pode ser observada tanto em sua abordagem lógica formal do Tratactus quanto no seu projeto terapêutico de descrição gramatical da sua filosofia madura, o que as difere é exatamente a abordagem dada pelo filósofo em cada um dos casos. Enquanto no Tractatus Wittgenstein propõe uma análise lógica que busca encontrar o sentido de uma proposição fora da linguagem e possui caráter de referência, na filosofia madura ele busca o sentido de uma proposição no *uso* que é feito dela, retirando assim a ideia referencial, tudo que existe o é por estar constituído na linguagem.

Por exemplo, na Figura 1 temos a imagem de uma cadeira. Para a abordagem proposta no Tractatus reconhecemos que é uma cadeira na imagem porque existe uma referência para cadeira, uma ideia essencial de cadeira, que acessamos e utilizamos para dizer que é uma cadeira. Na abordagem madura, reconhecemos uma cadeira nessa imagem porque no contexto em que estamos inseridos fazemos *uso* da palavra cadeira para representar alguns objetos que tem certas características que são em certa proximidade semelhantes.

Figura 1: Cadeira

Fonte: Imagem da Internet

Como argumenta Moreno (2003, p.120) “apenas a descrição dos usos será, segundo Wittgenstein, suficiente, além de ser necessária, para mostrar a natureza convencional e linguística das dificuldades filosóficas e das teses expostas dogmaticamente pelos filósofos como solução”. A filosofia madura de Wittgenstein busca então uma cura para as confusões filosóficas:

> a tarefa *curativa* da filosofia, tal como a concebe e pratica Wittgenstein após o Tractatus, consiste em *mostrar* [...] ou *exibir* para o olhar, as finalidades e o funcionamento das palavras nos diversos contextos de suas aplicações, o que é realizado através da descrição dos seus usos (MORENO, 2003, p.120).

A *terapia* proposta por Wittgenstein vem acompanhada da ideia do autor de que o papel da filosofia não é fornecer fundamentos, mas sim procurar identificar e desfazer as confusões criadas pelos próprios fundamentos. Os fundamentos devem ser assim reconhecidos pelo seu caráter *convencional*.

> A terapia procura eliminar apenas a interpretação dogmática a respeito dos fundamentos, e *não propor* novos fundamentos; e isso, ela pretende

> ser capaz de fazer através do esclarecimento na natureza linguística e convencional do que, em cada caso, é considerado o fundamento (MORENO, 2003, p.115).

A *terapia* das descrições dos *usos* é a atitude filosófica que Wittgenstein tem em sua filosofia madura. Tal atitude está conduzida por algumas ideias que guiam esse olhar filosófico. Buscamos discutir na continuação dessa seção as ideias de *jogos de linguagem*, *formas de vida* e *semelhanças de família*, que são centrais nessa atitude filosófica adotada pelo autor.

É notório nas Investigações Filosóficas – também nas obras da fase intermediária –, muito pelo projeto filosófico de não apresentar novos fundamentos, que as ideias são apresentadas através de aforismos e de "diálogos" de Wittgenstein com um interlocutor que sempre o questiona sobre os fundamentos referenciais essencialistas da linguagem. Desta maneira o autor não se utiliza de definições, é por intermédio dos aforismos, exemplos e "diálogos" que o leitor vai construindo as ideias apresentadas por ele. Sobre isso Vilela (2007) argumenta que

> nas *Investigações Filosóficas*, Wittgenstein se vale, dentre outras coisas, de exemplos diversos e da descrição de situações variadas de usos de uma mesma palavra com o propósito de relativizar os fundamentos da significação, ou seja, pela descrição de nossas práticas linguísticas pode-se observar um conjunto variado de *jogos de linguagem* (VILELA, 2007, p.143).

As obras que compõe a filosofia madura de Wittgenstein são muito passíveis de diferentes interpretações. Como efeito disso, muito do que se utiliza e conhece das ideias de Wittgenstein – principalmente em sua filosofia madura – é oriunda de seus comentadores.

Nesse sentido, quando buscamos elucidar as ideias da filosofia madura de Wittgenstein, como *jogos de linguagem*, *formas de vida* e *semelhanças de família*, não buscamos definições ou fundamentos, mas, apresentamos discussões que o próprio Wittgenstein propõe sobre essas ideias e também nos pautamos nas interpretações realizadas por seus comentadores referentes a essas ideais.

Wittgenstein apresenta no §2 das Investigações Filosóficas uma *práxis* do uso da linguagem, na qual o construtor A interage com o seu ajudante B. Nela A grita as palavras e B traz o material correspondente. Posteriormente ele comenta:

> Na *práxis* do uso da linguagem (2), um parceiro enuncia as palavras, o outro age de acordo com elas; na lição de linguagem, porém, encontrar-

> se-á este processo: o que aprende *denomina* os objetos. Isto é, fala a palavra, quando o professor aponta para a pedra. – Sim, encontrar-se-á aqui o exercício ainda mais simples: o aluno repete a palavra que o professor pronuncia – ambos os processos de linguagem semelhantes.
> Podemos também imaginar que todo o processo do uso das palavras em (2) é um daqueles jogos por meio dos quais crianças aprendem sua língua materna. Chamarei esses jogos de "jogos de linguagem", e falarei muitas vezes de uma linguagem primitiva como de um jogo de linguagem.
> E poder-se-iam chamar também de jogos de linguagem os processos de denominação das pedras e da repetição da palavra pronunciada. Pense os vários usos das palavras ao se brincar de roda.
> Chamarei também de "jogos de linguagem" o conjunto da linguagem e das atividades com as quais está interligada (WITTGENSTEIN, 2000, IF, §7). (Sublinhado nosso)

Podemos observar do que Wittgenstein expõe nesse parágrafo que a ideia de *jogos de linguagem* é bastante ampla, abrangendo tudo que está ligado à linguagem, pois, para o autor tudo que existe é linguagem. "O termo 'jogo de linguagem' deve aqui salientar que o falar da linguagem é uma parte de uma atividade ou de uma forma de vida" (WITTGENSTEIN, 2000, §23) – a ideia de *formas de vida* é discutida mais à frente.

Não existe apenas um jogo de linguagem, há uma multiplicidade de jogos de linguagem; não enxergar essa multiplicidade de jogos de linguagem pode nos levar a um caminho sem saída (WITTGENSTEIN, 2000, §24). Na busca por tentar elucidar a multiplicidade de jogos de linguagem chega um ponto em que Wittgenstein faz com que seu(s) interlocutor(es) se sinta(m) incomodado(s) com sua atitude, principalmente quando esse(s) interlocutor(es) carrega a noção Tractatiana do autor. Aproveitando-se dessa "intervenção" mais acalorada do(s) interlocutor(es), Wittgenstein aproveita para inserir uma ideia base do seu projeto.

> Aqui encontramos a grande questão que está por trás de todas essas considerações. Pois poderiam objetar-me: "Você simplifica tudo! Você fala de todas as espécies de jogos de linguagem possíveis, mas em nenhum momento disse o que é o essencial do jogo de linguagem, e portanto da própria linguagem. O que é comum a todos esses processos e os torna linguagem ou partes da linguagem. Você se dispensa justamente da parte da investigação que outrora lhe proporcionara as maiores dores de cabeça, a saber, aquela concernente à *forma geral da proposição* e da linguagem".
> E isso é verdade. – Em vez de indicar algo que é comum a tudo aquilo que chamamos de linguagem, digo que não há coisa comum a esses fenômenos, em virtude da qual empregamos para todos a mesma palavra, – mas sim que estão *aparentadas* uns com os outros de muitos modos diferentes. E por causa desse parentesco ou desses parentescos, chamamo-los todos de "linguagens" (WITTGENSTEIN, 2000, IF, §65). (sublinhado nosso)

Nesse parágrafo Wittgenstein mostra de forma explícita sua mudança de atitude para com seu projeto filosófico, para o qual deixa de lado a busca pelo essencial de uma proposição e passa a descrever os usos que dela são feitos, pois, a ideia de *jogos de linguagem* surge a partir do momento em que Wittgenstein "concebe a linguagem não mais com as marcas da universalidade, perfeição e ordem, como se preexistisse às ações humanas" (KNIJNIK et al., 2012, p.29). Salzano (2004, p.380) ao analisar o §65 das Investigações Filosóficas explica que "pode-se considerar que, os jogos de linguagem são anteriores as suas *regras*[8], o único critério para o uso da palavra é, em última análise, o jogo de linguagem global no qual ele exerce um papel, ou seja, o único critério é o uso da palavra". No contexto do projeto filosófico wittgensteiniano o *uso* possui duas características importantes.

> Por um lado, os usos que fazemos das palavras estão diretamente vinculados às circunstâncias das situações em que aplicamos a linguagem, e, por outro lado, uma vez fixados em hábitos conceituais, os usos passam a organizar os conteúdos que emergem dessas mesmas situações, ganhando autonomia, i.e., *regulando* as possibilidades e *constituindo* os conteúdos em objetos (MORENO, 2003, p.117).

Esse apontamento feito em Moreno (2003) indica a centralidade do *uso* nas ideias de Wittgenstein. O uso pode num primeiro momento ser contextual, ou seja, o *uso* da palavra vai estar associado à situação da aplicação da linguagem, como também, o *uso* sendo habitual se torna convencional, ganhando autonomia e assim regulando o agir.

Ao observarmos diferentes jogos podemos ter o impulso de procurar identificar a essência que liga esses jogos. Contudo, como indica Knijinik et al. (2012, p. 31) os "diferentes jogos não possuem uma essência invariável que os mantenha completamente incomunicáveis uns dos outros, nem uma propriedade comum a todos eles, mas algumas analogias ou parentescos". Essa não existência de algo essencial a todos os jogos é indicada por Wittgenstein no §65 das Investigações Filosóficas, primeiro momento nessa obra em que o autor lança luz sobre a ideia de *semelhanças de família*.

Na continuidade das discussões do §65, Wittgenstein fala sobre essa ideia, buscando elucidar como ela está contextualizada em seu projeto filosófico. Primeiramente pede ao interlocutor: "Considere, por exemplo, os processos que chamamos de 'jogos'. Refiro-me a jogos de tabuleiro, de cartas, de bola, torneios desportivos etc. O que é comum a todos eles?" (WITTGENSTEIN, 2000, IF, §66); o

[8] Elucidaremos a ideia de *regra* em especial o *seguir regras* na próxima seção deste capítulo.

interlocutor responderia que deve haver algo comum a eles senão não os chamariam de jogos, porém, Wittgenstein o convida a refletir se há mesmo algo comum aos jogos. Apresentando alguns exemplos mostra ao interlocutor que cada jogo tem características diferentes, que vez sim, vez não, se aparentam jogo a jogo. E completa:

> assim podemos percorrer muitos, muitos outros grupos de jogos e ver semelhanças surgirem e desaparecerem.
> E tal é o resultado desta consideração: vemos uma rede complicada de semelhanças, que se envolvem e se cruzam mutuamente. Semelhanças de conjunto e de pormenor (WITTGENSTEIN, 2000, IF, §66).

> Como explicaríamos a alguém o que é um jogo? Creio que lhe descreveríamos *jogos*, e poderíamos acrescentar à descrição: "isto *e outras coisa semelhantes* chamamos de 'jogos'". E nós próprios sabemos mais? (WITTGENSTEIN, 2000, IF, §69)

Desestabilizada a certeza do interlocutor de que deva haver algo comum para que lhes chamemos de jogos, Wittgenstein, então, introduz a ideia que descreve esses parentescos entre os jogos e, assim, fazem com que os identifiquemos como tais.

> Não posso caracterizar melhor essas semelhanças do que com a expressão "semelhanças de família"; pois assim se envolvem e se cruzam as diferentes semelhanças que existem entre os membros de uma família: estrutura, traços fisionômicos, cor dos olhos, o andar, o temperamento etc., etc. – E digo: os "jogos" formam uma família (WITTGENSTEIN, 2000, IF, §67).

> Reconhecemos que aquilo que chamamos de "frase", "linguagem", não é a unidade formal que me represento, mas a família de estruturas mais ou menos aparentadas entre si" (WITTGENSTEIN, 2000, IF, §108)

Em Veiga-Neto e Lopes (2007), os autores nos indicam um caminho para que percebamos estar diante de semelhanças de família, uma forma de identificá-las:

> está-se diante de um caso de semelhanças de família quando aquilo que une os elementos que colocamos sob uma determinada classe não é necessariamente algum atributo comum a todos os elementos da classe. O que os une — a ponto de que nos autorizamos a colocá-los sob um mesmo guarda-chuva, isso é, dentro de uma mesma classe— é uma rede complexa de semelhanças que se entrecruzam ao acaso, sem obedecer a um padrão uniforme (VEIGA-NETO; LOPES, 2007, p.30).

Outra ideia que guia as discussões de Wittgenstein na sua filosofia madura, em especial nas Investigações Filosóficas, é a de *formas de vida*. Tal ideia é pouco discutida pelo autor, aparecendo meia dúzia de vezes na obra, mas gerando um grande número de interpretações (GLOCK, 1998, p.174). O próprio Glock (1998) interpreta que o "uso que Wittgenstein faz do termo enfatiza [...] o entrelaçamento entre cultura, visão de mundo e

linguagem" (p.173), e complementa que, segundo sua forma de perceber as ideias de Wittgenstein, "*uma* forma de vida é uma formação cultural ou social, a totalidade das atividades comunitárias em que estão imersos os nossos jogos de linguagem" (p.174).

Moreno (2003) discute que não existem entidades extralinguísticas para que possamos falar sobre elas, pois, podemos preencher a lacuna de sua existência através da linguagem. Entretanto se tais entidades existissem "será preciso que novas formas de vida venham a integrá-las à linguagem criando conceitos novos, introduzindo critérios para sua identificação, ou melhor, construindo novos sentidos de objetos", sendo que "criação de novos usos e de novos conceitos não será uma função das entidades, mas das formas de vida, de suas convenções" (MORENO, 2003, p.118). Nesse sentido, podemos observar que as *formas de vida*, constituídas na natureza humana – natureza social e não biológica (GLOCK, 1998) –, são a base para as nossas práticas linguísticas e nelas é que concordamos ou discordamos em nossos jogos de linguagem.

> "Assim, pois, você diz que o acordo entre os homens decide o que é correto e o que é falso?" – Correto e falso é o que os homens *dizem*; e na *linguagem* os homens estão de acordo. Não é um acordo sobre as opiniões, mas sobre formas de vida (WITTGENSTEIN, 2000, IF, §241).

Sobre essas bases é que Wittgenstein constrói sua filosofia, caracterizada como uma *descrição gramatical*. A *gramática* deve ser entendida no sentido que Wittgenstein a propõe. Para Glock (1998, p.193), Wittgenstein – já na sua filosofia madura – utiliza o termo *gramática* para designar tanto as *regras* constitutivas da linguagem, quanto a investigação ou organização filosófica dessas *regras*.

A *descrição gramatical* está, então, relacionada a discutir as *regras* de nossa gramática. A *gramática* não é mais aquela essencial da lógica, que busca *regras* gerais, é constituída nos *jogos de linguagem*, que estão inseridos em *formas de vida*, onde as *regras* são constituídas no *uso*[9]. Isso é corroborado em Moreno (2003) quando o autor discute a *gramática* de Wittgenstein e sinaliza a sua autonomia.

> Todavia, por ser autônoma a gramática, assim como os sentidos engendrados pelos usos das palavras, a própria ordem das causas empíricas pode ser incorporada à gramática pela linguagem, através dos usos: novos *sentidos* serão constituídos quando forem assimiladas novas regiões da empiria às convenções linguísticas sob a forma de *regras* – padrões, normas e critérios de identificação – para o uso das palavras e aplicação dos conceitos (MORENO, 2003, p.121).

[9] Elucidaremos isso com mais detalhes na próxima seção.

Disso, quando se fala de *gramática* no contexto da filosofia de Wittgenstein temos que entender que se trata de uma gramática contextualizada, ou seja, as *regras* são consolidadas nos usos que fazemos das proposições em um certo *jogo de linguagem*, numa certa *forma vida*. A ideia de *gramática* na filosofia de Wittgenstein vai muito além do que é necessário explorar nesse trabalho, leituras como Glock (1998) e Moreno (2003) podem esclarecer mais sobre o tema.

Como nosso objetivo é buscarmos evidências sobre o *seguir regras*, entendemos que a contextualização das ideias que Wittgenstein discutiu em seu período posterior e intermediário que fizemos até este ponto é suficiente para embasar nossa investigação do *seguir regras*.

2.2. A ideia de seguir regras

Nessa seção buscamos elucidar – sem a intenção de exaurir as discussões – o *seguir regras* no contexto da filosofia madura de Wittgenstein. Como discutimos na primeira seção desse capítulo, esta segunda fase da filosofia de Wittgenstein tem como ícone os escritos do Investigações Filosóficas (WITTGENSTEIN, 2000), mas, em suas obras do período intermediário as ideias que permeiam essa filosofia já estavam sendo discutidas por Wittgenstein.

Uma das ideias da filosofia madura de Wittgenstein que ganhou destaque no período intermediário de sua obra é a ideia de *regra*. Nesse sentido, as discussões dessa seção englobam além do exposto pelo autor nas Investigações Filosóficas, escritos das obras intermediárias de Wittgenstein e também interpretações de seus comentadores.

Para delimitarmos os aspectos sobre o *seguir regras*, dividimos a seção em três subseções. Cada uma delas trata de um aspecto específico que compõe a ideia do *seguir regras*, desde a constituição das *regras* até os desdobramentos do *seguir regras*.

2.2.1. A constituição de regras

Seguindo a interpretação que Sousa (2013) faz das ideias apresentadas por Wittgenstein no livro “Da Certeza” (DC), compreendemos que nesta obra Wittgenstein

> discute a dinâmica de formação de proposições empregadas amplamente pela comunidade, distinguindo entre proposições que

> cristalizam-se e passam a valer como certezas (*regras*), e proposições que ainda estão em processo de sedimentação e validação (SOUSA, 2013, p. 296).

Para as primeiras proposições Wittgenstein utiliza-se da denominação *proposições gramaticais*, já para as do segundo tipo o autor faz uso do termo *proposições empíricas*.

Deste modo, compreendemos que para Wittgenstein as *proposições gramaticais* são em sua gênese *proposições empíricas* que ao passarem por um processo de sedimentação e validação se tornam *proposições gramaticais*, e assim ganhando caráter de *regras*. É sobre esse processo de validação das *proposições empíricas*, ou seja, da formação das *proposições gramaticais* e seu status de *regra*, que discorremos nesta seção.

Porém, antes de partirmos para essa investigação é necessário nos atentarmos para o que o próprio Wittgenstein fala sobre a não essencialidade desse processo.

> Pode-se imaginar que algumas proposições, que têm a forma de proposições empíricas, se solidificam e funcionam como um canal para proposições empíricas que não estão solidificadas e fluem; esta relação muda com o tempo, de modo que as proposições que fluem se solidificam e as sólidas se fluidificam (WITTGENSTEIN, 2003, DC, §96).

> A mitologia pode se converter novamente em algo fluido, o leito do rio dos pensamentos pode se deslocar. Mas distingo entre a agitação da água no leito do rio e o deslocamento deste último, tanto quanto não existe uma distinção clara entre uma e outra coisa (WITTGENSTEIN, 2003, DC, §97).

Assim, se por um lado uma *proposição empírica*, se torna *proposição gramatical* e ganha status de *regra*, por outro lado esta última pode novamente se converter em algo fluido e sob o qual se solidificam novos pensamentos.

Uma *proposição gramatical* é gramatical num certo contexto, em um *jogo de linguagem* específico, num conjunto determinado de *formas de vida*. Ela se constituiu gramatical por estar inserida neste contexto, pois, se essa mesma proposição estivesse inserida em outro contexto, em outro *jogo de linguagem* e *forma de vida*, poderia não ser validada.

Para Wittgenstein o que difere uma *proposição empírica* de uma *proposição gramatical* é o *uso*, ou seja, é como as proposições são empregadas. Desse modo se o *uso* depende do contexto, isto é, dos *jogos de linguagem* e *formas de vida* em que se

empregam as proposições, a gramaticidade ou empiria de uma proposição dependerá exclusivamente do uso que for feito dela em cada contexto.

Por esse argumento, Wittgenstein é acusado, muitas vezes, de relativista. Entretanto, o que Wittgenstein parece firmar nessa argumentação é que para cada contexto – *jogo de linguagem* inserido em uma *forma de vida* – existem *proposições fundacionais*, certezas, que formam um "núcleo duro de proposições que permanecem sólidas e não admitem mais dúvidas" (SOUSA, 2013, p. 304) – Se esgotei as justificações, então atingi a rocha dura e minha pá entortou. Estou então inclinado a dizer: "é assim que eu ajo" (WITTGENSTEIN, 2000, IF, §217).

Esse núcleo, essa rocha, é composto de proposições das quais não temos por que duvidar de sua certeza. Para Wittgenstein (2003, DC, §155), é falta de compreensão do seu significado ou "demência" duvidar dessas proposições. Proposições como "a terra existe", "existem outras pessoas além de eu na terra", "eu tenho um corpo", etc., são exemplos desse tipo de proposições fundacionais. Por isso

> o fundacionalismo wittgensteiniano tem um caráter coerentista e naturalista, pois funda o conhecimento em certezas irrefletidas (naturais), que por sua vez servem de suporte para a formulação de proposições empíricas que devem obedecer ao princípio da coerência sistêmica. Este processo é natural e espontâneo, sem racionalização elaborada (SOUSA, 2013, p. 303).

Mas como essas proposições fundacionais participam do processo de formação de *proposições gramaticais* e de *regras*? Primeiramente as proposições fundacionais tem a mesma função que as *proposições gramaticais*, poderíamos dizer que elas são proposições do mesmo tipo, pois, moldam o nosso modo de agir, são parâmetros para a ação. Elas se distanciam em papel quando as fundacionais são *proposições gramaticais*, que além de terem passado pelo processo de validação e convenção, já se cristalizaram como proposições indubitáveis para o contexto na qual foram constituídas gramaticais.

O processo de validação de *proposições empíricas* é algo natural, acontece na prática, como já comentamos é o uso que lhe faz gramatical, ou seja, para uma *proposição empírica* se tornar gramatical depende de como ocorre o seu uso. Mas, um único indivíduo não determina o uso de uma proposição, então, esse uso será constituído socialmente no interior de um *jogo de linguagem* específico, isto é, esse uso será convencionado nesse jogo de linguagem. Como o caráter de uma proposição pode mudar

de acordo com o contexto em que está sendo utilizada, isso pode sugerir uma certa vagueza para a ideia de *regra*, entretanto, isso

> é o resultado da íntima ligação que a linguagem mantém com nossas ações e suas circunstâncias contextuais: variações nas circunstâncias acarretam mudanças de finalidades e expectativas quanto aos usos dos conceitos, às formas de organizar os conteúdos da experiência (MORENO, 2003, p.117).

Novamente a discussão de que as ideais de Wittgenstein teriam certo relativismo põem-se ao chão, pois, para àquela determinada gramática, constituída num específico *jogo de linguagem*, inserido numa *forma de vida*, a *regra* não é relativa, sua vagueza ou relatividade pode ser discutida quando essas circunstâncias forem alteradas. Como afirma Palharini (2017, p.61) "*regras* são advindas de acordos, convenções firmadas por determinada comunidade e que se cristalizam sob a forma de *regras*".

Sobre a relação do *uso* com a formação de *regras*, Moreno (2003, p.116), explica que o "conceito de uso diz respeito às finalidades e ao funcionamento das palavras em situações de sua aplicação, e as *regras* que podem daí ser formuladas, não são prescritivas, mas, apenas, *regras* indicativas de uma direção geral". Podemos perceber aqui a nuance entre o que é solidificado e o que corre no leito do rio em relação as *regras*. Existem *proposições gramaticais* que regem nosso modo de agir –

> há *regras* prescritivas e exatas, mas apenas como o resultado de uma deliberação prévia quando do início do jogo que se quer jogar, quando se pretende delimitar de maneira precisa as formas de aplicação das palavras, seu uso, ou melhor, delimitar precisamente a significação conceitual em questão (MORENO, 2003, p.116).

– enquanto há *regras* que ainda não estão cristalizadas e surgem durante o jogo, no *uso* que é feito das palavras – proposições – indicando um caminho a ser seguido. As *regras* que surgem *a priori* do jogo, e delimitam-no, são o eixo, o fulcro, a fundação, enquanto que àquelas que surgem na prática do jogar ainda são fluídas e se movimentam em torno do fulcro, contudo, podem se tornar solidificadas, *proposições gramaticais* se para aquele jogo de linguagem forem convencionadas dessa maneira.

Neste contexto, uma *proposição empírica* surge – é cunhada – a partir do núcleo duro das *proposições gramaticais* – que regem nossa forma de agir –, é testada empiricamente, é utilizada, é aceita socialmente pelos membros que compõe o *jogo de linguagem* específico, e assim, se torna convencionalmente gramatical e passa a servir como *regra* para esse contexto específico.

> Um significado de uma palavra é uma forma de utilizá-la. Porque é o que aprendemos quando a palavra se incorpora a nossa linguagem pela primeira vez (WITTGENSTEIN, 2003, DC, §61).
>
> A criança aprende a crer em muitas coisas. Isto é, aprende por exemplo a atuar de acordo com estas crenças pouco a pouco, se forma um sistema com as coisas que crê e, em tal sistema, alguns elementos se mantém imutáveis e firmes, enquanto outros são mais ou menos móveis. O que se mantém firme o faz não porque intrinsicamente seja obvio ou convincente, senão porque se sustenta no que o rodeia (WITTGENSTEIN, 2003, DC, §144).
>
> Para que um homem se equivoque, deve se julgar de acordo com a humanidade (WITTGENSTEIN, 2003, DC, §156).
>
> Contudo, a fundamentação, a justificação da evidencia tem um limite; - mas o limite não está em que certas proposições nos pareçam verdadeiras de forma imediata, como se fosse uma espécie de ver nossa parte; ao contrário, é nossa atuação que se encontra na base do jogo de linguagem (WITTGENSTEIN, 2003, DC, §204).

Dessa sequência de argumentos fornecidos por Wittgenstein interpretamos que num primeiro momento a palavra é significada a partir de seu *uso*, um uso que se assemelha mais a uma crença. Conforme esse conjunto de crenças vai recebendo sustentação no seu contexto de uso, se torna convencional e assim sua fundamentação e justificação estão atreladas a esse contexto, não por ser evidentemente verdadeira, mas, por seu *uso* no *jogo de linguagem* específico. Como afirma Moreno (2003, p.118-119) "assimilados pragmaticamente à *linguagem*, os conteúdos tornam-se *regras* linguísticas, ou melhor, normas para a aplicação de palavras".

2.2.2. Ensinar a seguir regras

Moreno (2003) interpretando as ideias de Wittgenstein afirma que "pensar é meramente saber aplicar *regras* e normas – o que supõe a capacidade prévia de aprender tanto as *regras* e normas quanto suas aplicações, o que supõe, finalmente, a possibilidade de ensiná-las" (p.130). Essa interpretação de Moreno (2003) trata de três pontos relevantes à nossa discussão sobre o seguir regras: 1- pensar é aplicar *regras* (*seguir regras*); 2- é possível aprender as *regras* e suas aplicações, ou seja, aprender a *seguir regras*; e, 3- é possível ensinar as *regras*. Os dois primeiros trataremos nas próximas seções e o terceiro é nosso foco nessa seção.

Se há possibilidades de ensinar as *regras*, então, precisamos identificar como esse ensino de regras é orientado segundo as ideias da filosofia madura de Wittgenstein.

Moreno (2003) continuando a discussão da citação acima nos indica uma interpretação do como ensinar *regras*:

> ensinar *regras*, normas e suas aplicações significa, meramente, fornecer instruções, prestar esclarecimentos, lançar mão de técnicas pedagógicas, fazer perguntas e julgar as respostas a respeito das associações convencionais de sentido erigidas em *regras* e normas, e de suas aplicações (MORENO, 2003, p.130).

> [...] não se aprende uma linguagem através de explicações – uma vez que não há limites para o encadeamento entre elas –, mas por treino e adestramento (MORENO, 2005, p.287).

Encontramos nessa interpretação a forma como Wittgenstein entende o ensino, por meio do treinamento: "O ensino da linguagem não é aqui nenhuma explicação, mas sim um treinamento" (WITTGENSTEIN, 2000, IF, §5); "Toda explicação tem seu fundamento no treino" (WITTGENSTEIN, 1981, §419, apud GOTTSCHALK, 2008, p.91). Treinamento não tem o mesmo uso do que normalmente se encontra nas concepções de ensino, como afirma Tortola (2016, p.81) não é "um treino na perspectiva do behaviorismo de Skinner, de estímulo-resposta, mas um treino que podemos interpretar como uma formação".

Nos primeiros parágrafos das Investigações Filosóficas, Wittgenstein tece críticas à perspectiva agostiniana de linguagem na qual existe uma relação biunívoca entre palavra e objeto. Mesmo sendo contrário a ela, o autor não exclui a relação associativa entre palavra e objeto, contestando que essa seja a única forma de relacionar a linguagem e o mundo, contudo, sendo a mais simples. É parte importante do treinamento do aprendiz apontar para objetos, dirigir sua atenção para eles enquanto proferimos uma palavra e mostramos a ela suas formas (TORTOLA, 2016, p.81). A isso "quero chamar de 'ensino ostensivo de palavras'" (WITTGENSTEIN, 2000, IF, §6). Como afirmam Oliveira e Silveira (2016, p.282) os gestos ostensivos – interpretados aqui como parte do ensino ostensivo – "na filosofia do segundo Wittgenstein podem servir tanto ao processo de nomeação puramente referencial, na forma de ensino ostensivo, quanto na definição ostensiva do nome, ou ainda à pergunta pelo sentido".

Nesse sentido, quando indicamos "isto é uma cadeira" estamos ensinando ostensivamente – ou treinando ostensivamente como afirma Dummett (1959) – uma forma de uso da palavra cadeira, estamos mostrando uma *regra* de utilização de cadeira, *regra* essa que está constituída na gramática de um jogo de linguagem específico de uma determinada forma de vida.

Esse é um dos aspectos relacionados ao treinamento. Isso pode ser observado no exemplo de jogo de linguagem, que citamos na seção 2.1, entre um construtor A e seu ajudante B.

> A executa a construção de um edifício com pedras apropriadas; estão à mão cubos, colunas, lajotas e vigas. B passa-lhe as pedras, e na sequência em que A precisa delas. Para esta finalidade, servem-se de uma linguagem constituída das palavras "cubo", "colunas", "lajotas", "vigas". A grita essas palavras; – B traz as pedras que aprendeu a trazer ao ouvir esse chamado. – Conceba isso como linguagem totalmente primitiva (WITTGENSTEIN, 2000, IF, §2).

Nesse jogo do construtor com seu ajudante as palavras são usadas na sua forma mais primitiva, os "jogadores" têm acesso a uma forma de uso das palavras envolvidas no jogo. A crítica de Wittgenstein à concepção de linguagem agostiniana e sua proposta de *cura* pela terapia da descrição gramatical vêm, nesse sentido, expandir o acesso dos "jogadores" a diferentes formas de *uso* da palavra, não somente pela relação associativa entre palavra e objeto. "Os *jogos de linguagem* servem, pois, como meio de regulação e os padrões de correção são as *regras* da gramática" (TORTOLA, 2016, p.83).

Além de ensino ostensivo é necessário que o aprendiz seja apresentado a, ou vivencie, diferentes formas de *uso* de uma *regra*, pois, "Wittgenstein nos mostra que o significado de uma palavra vai se tornando mais e mais complexo conforme seus usos vão se diferenciando" (GOTTSCHALK, 2008, p.87), sendo assim treinado e perceba nesses diferentes *usos* a sua constituição.

Esse tipo de treinamento por utilização da *regra* aparece, por exemplo, durante os aforismos do Investigações Filosóficas, não a partir de definições, mas, pelo *uso* que Wittgenstein faz da palavra *treinamento*. Ao discutir as *regras* das fórmulas algébricas, relaciona diferentes empregos dessas fórmulas com diferentes treinamentos de suas *regras*: "Podemos, por outro lado, contrapor diferentes espécies de fórmulas e diferentes espécies de emprego das mesmas (diferentes espécies de treinamento)" (WITTGENSTEIN, 2000, IF, §189). Ao discutir o significado da palavra predição em dois *jogos de linguagem* distintos: "Entre estes dois jogos de linguagem há um parentesco evidente, e também uma diferença fundamental. Em ambos, poder-se-iam chamar as palavras pronunciadas de predição. Mas compare o treinamento que leva à primeira, com o treinamento que leva à segunda!" (WITTGENSTEIN, 2000, IF, §630).

Então, quando falamos de treinamento no contexto da filosofia de Wittgenstein, temos que ter em mente esses dois aspectos. Treinar significa ensinar ostensivamente uma

regra, tanto quanto inserir o aprendiz em diferentes usos da *regra*, ou seja, mostrar aplicações da *regra* em diferentes jogos de linguagem.

2.2.3. Seguir uma regra e seus desdobramentos

Na seção anterior citamos que existem dois tipos de *regras*, aquelas *a priori* do jogo e aquelas que surgem na prática do jogo. A estas *regras* chamamos de *regras prescritivas* e *regras descritivas*, respectivamente. O *seguir uma regra* que discutimos está relacionado ao agir de certa maneira, ou seja, ter sua prática *prescrita*. Nesse sentido, para estarmos seguindo uma *regra* é necessário que a *regra* seja uma *regra prescritiva*, pois, para que uma *regra* tome para si status de *proposição gramatical* ela necessita delimitar nossa ação para com o jogo de linguagem, não surge *a posteriori* de sua prática.

Tomemos um exemplo de um jogo de futsal. Para que seja jogado corretamente é necessário que sejam respeitadas suas *regras prescritivas*, tais como: são cinco jogadores, um goleiro e quatro na linha; o goleiro só pode pegar a bola com a mão dentro da área; os laterais e escanteios devem ser cobrados com o pé; etc. Mas, não existem *regras* que prescrevam a velocidade e a força com que a bola deva ser chutada, nem a que altura, nem que aspectos físicos uma pessoa deve ter para poder jogar futsal; entretanto, se a prática do futsal for realizada em uma quadra coberta e com altura do teto baixa, dessa prática uma *regra descritiva* que pode surgir, é que a bola não pode ser chutada tão alto, pois, pode ficar presa na estrutura do telhado da quadra. Essa *regra* provavelmente não irá se tornar uma *proposição gramatical* para a prática global do futsal, mas para aquele ambiente, para aquela prática, servirá como *regra*.

Logo, quando nos referirmos ao *seguir regras* estamos falando de *regras prescritivas*. Isso porque para o contexto de nossa investigação não nos objetiva olhar para a constituição de *regras descritivas*, mas, como se pratica algo estruturado para determinado contexto. Delimitado nosso foco nas *regras prescritivas*, vamos a discussão do aprender a *regras*, ou seja, *seguir uma regra*.

Em “Da Certeza” Wittgenstein argumenta:

> O que é “aprender uma *regra*”? – Isto.
> O que é “cometer um erro ao aplica-la”? – Isto. E o que ela aponta é algo determinado.
> A prática de usar a *regra* mostra também o que é um erro em sua utilização.

> Quando alguém se convenceu, diz: "Sim, o cálculo está correto", mas não inferiu de seu próprio estado de certeza. Um estado de coisas não se segue da própria certeza.
> A certeza é, *por assim dizer*, um tom no qual se constata como são as coisas; mas, do tom não se segue que algo esteja justificado (WITTGENSTEIN, DC, 2003, §28, §29 e §30).

Aí está uma das premissas mais evidenciadas nas ideias de Wittgenstein, o *uso* de uma palavra é que lhe dá sentido, ou seja, é na prática que se conhece a sua utilização "correta" ou não. Nesse sentido é na prática, no *uso*, que se sabe que está seguindo "corretamente" uma *regra*.

Nas Observações sobre os Fundamentos da Matemática, Wittgenstein nos responde sobre o seguir *regras*: "Como foi dito, em que consiste seguir corretamente uma *regra*, é algo que não pode ser descrito com maior proximidade do que descrevendo a aprendizagem do 'proceder segundo uma *regra*'" (WITTGENSTEIN, 1987, OFM, VII, §26).

Ao tratar especificamente das *regras* da matemática Wittgenstein fala o seguinte:

> Se reivindicar de uma *regra* que se seguiu que não pode ter havido um erro neste cálculo, a reposta seria que tal coisa não aprendemos por meio de uma *regra*, senão aprendendo a calcular.
> Temos chegado a conhecer a *essência* do cálculo ao aprender a calcular. Mas, nesse caso, não é possível descrever como nos convencemos da fidelidade de um cálculo? Por suposto que sim! Mas nele não intervém *regra* alguma. – O mais importante é: a *regra* não é necessária. Nada nos falta. Calculamos de acordo com uma *regra*, isso é tudo (WITTGENSTEIN, DC, 2003, §44, §45 e §46).

Esses parágrafos em um primeiro momento podem dar a impressão de que Wittgenstein exclui a *regra* do jogo de calcular, mas, quando diz que "a *regra* não é necessária" podemos interpretar pela condução de suas ideias que não há necessidade de que quem calcula tenha ciência da *regra*, pois, como Wittgenstein discute "*acreditar* seguir a regra não é seguir a regra" (WITTGENSTEIN, 2000, IF, §202). Ao final dos parágrafos ele reafirma "calculamos de acordo com uma *regra*, isso é tudo", ou seja, quem segue a *regra* age de acordo com a *regra*. Isso pode ser relacionado ao treinamento, pois, quando Wittgenstein afirma "não aprendemos por meio de uma regra, senão aprendendo a calcular", podemos remeter a afirmação ao *treinamento* por utilização da *regra*, é na experiência de utilizar a *regra* que se aprende a *regra* (*segue a regra*).

Nesse sentido, o aprender a *regra*, o *seguir a regra*, está relacionado a prática, a ação daquele que pratica: "a aprendizagem de uma *regra* está associada ao *agir de acordo*

com a regra" (PALHARINI, 2017, p.72), compreender uma *regra* é seguir uma *regra*, saber aplicá-la (SILVEIRA e SILVA, 2013), é no uso que aprendemos as *regras* (SILVEIRA e TEIXEIRA JUNIOR, 2015, p.217). Nas Observações[10], Wittgenstein indica aspectos do seguir *regras*:

> seguir uma *regra* é um jogo de linguagem determinado. Como pode descreve-lo? Quando dizemos que ele compreendeu a descrição? Fazemos tal e tal coisa; se ele responde, então, de tal e tal modo, é que entendeu o jogo (WITTGENSTEIN, 1987, OFM, VII, §52).

Como afirmam Silveira e Silva (2016, p.477) "o critério para como a *regra* é significada depende da prática comunitária de sua aplicação, da forma como convencionamos e fomos ensinados a usá-la. Daí decorre sabermos o que fazer quando aplicamos uma *regra*".

> O que chamamos 'seguir uma regra' é algo que apenas *uma* pessoa pudesse fazer apenas *uma vez* na vida? – E isto é, naturalmente, uma anotação sobre a *gramática* da expressão 'seguir a regra'.
> Não pode ser que apenas uma pessoa tenha, uma única vez, seguido uma regra. Não é possível que apenas uma única vez tenha sido feita uma comunicação, dada ou compreendida uma ordem, etc. – Seguir uma regra, fazer uma comunicação, dar uma ordem, jogar uma partida de xadrez são *hábitos* (costumes, instituições) (WITTGENSTEIN, 2000, IF, §199).

Se quisermos, então, saber se estamos seguindo uma *regra*, ou, reconhecer que alguém está seguindo uma *regra*, devemos observar sua prática, a forma como a *regra* é aplicada. Se fomos treinados a agir de "tal e tal modo" frente a uma *regra*, estamos seguindo a *regra* se agirmos de "tal e tal maneira".

Seguir uma regra pode gerar alguns desdobramentos, algumas consequências para àquele que as segue. Jesus (2002, p.38), por exemplo, indica que "participar de certos jogos de linguagem implica aceitar certas *regras*. Se se rejeita a *regra* se está rejeitando o jogo como é entendido e jogado pelos outros". Nesse sentido, participar de um jogo de linguagem é aceitar e seguir as *regras* do jogo.

Seguir essas *regras* segundo Moreno (2003) interfere também em nosso modo de ver o mundo, considerando que a gramática para Wittgenstein é um conjunto de usos que fazemos de uma palavra em um determinado sistema de *regras*.

> Nosso modo de acesso aos conteúdos da experiência é realizado, segundo Wittgenstein, através desses sistemas complexos de *regras*

[10] Para simplificar a leitura em alguns momentos nos referiremos as "Observações sobre os Fundamentos da Matemática" como Obervações.

> conceituais, o que significa, na verdade, que a própria experiência resulta de uma construção simbólica de natureza linguística (MORENO, 2003, p.116).

Os desdobramentos do seguir *regras* vão para além da inserção em um jogo de linguagem e da interferência em nosso modo de ver o mundo, *seguir regras* está relacionado a *compreensão* das *regras* e do jogo de linguagem que elas constituem. No complemento do §52 das Observações, Wittgenstein nos dá indícios dessa relação.

> E esse 'tal e tal coisa' e 'de tal e tal modo' não contém nenhum "e assim sucessivamente". – Ou: se eu usar na descrição um "e assim sucessivamente" e se me perguntasse o que ele significa, teria que explicá-lo novamente mediante uma enumeração de exemplos; ou talvez mediante um gesto. E consideraria, então, um sinal de compreensão que ele, por exemplo, repetira o gesto com expressão de inteligência na cara, e que atuara de tal e tal modo em casos concretos (WITTGENSTEIN, 1987, OFM, VII, §52) (sublinhado nosso).

Gottschalk (2008, p.92) ao interpretar essas ideias de Wittgenstein afirma que "compreender não é um processo mental, mas ser capaz de seguir uma *regra*, ou seja, é dominar uma técnica". Isso é explicitado por Wittgenstein nas Investigações Filosóficas: "Compreender uma frase significa compreender uma linguagem. Compreender uma linguagem significa dominar uma técnica" (WITTGENSTEIN, 2000, IF, §199); também em Silveira e Silva (2016, p.478) quando os autores afirmam que "compreender algo é ter o domínio de técnicas de uso da linguagem" e "compreender os diferentes empregos de uma palavra depende do domínio de suas *regras* de uso, notar os aspectos em uma figura depende do domínio de técnicas" (SILVA e SILVEIRA, 2014, p.25). E o que seria *técnica* na perspectiva wittgensteiniana: "Técnica aqui no sentido de um 'saber-fazer', do domínio do uso de *regras*. Quando dizemos 'Eu sei...', estamos dizendo algo semelhante a 'Eu posso...' ou 'Sou capaz de...' ou ainda 'Eu compreendo' (SILVEIRA e SILVA, 2016, p.478).

Nessa interpretação *compreender*, *aprender* e *saber*, relacionados ao aspecto de dominar uma técnica, são considerados sinônimos. Observamos este aspecto ao mergulharmos nas ideias e nos usos que Wittgenstein faz delas em sua filosofia madura.

Este saber, compreender, relacionado ao *seguir regras* é constituído convencionalmente em dado contexto: "Quando um homem diz que *sabe* alguma coisa, deve ser algo que, de acordo com o juízo geral, se encontra em situação de saber" (WITTGENSTEIN, 2003, DC, §555). Como discutido, aquilo que se produz no juízo geral, o que é convencionado, são as proposições gramaticais, as *regras prescritivas*,

nesse sentido Gottschalk (2008, p.87) explana que “aprender é estar disposto a *comparar* seu modo usual de empregar certa imagem com *outro*”.

Interpretamos, então, que seguir uma *regra* é compreender esta *regra*, aprender esta *regra*. Compreender uma *regra* é compreender as proposições de que as *regras* tratam. Assim, é necessário *seguir a regra* para compreender essas proposições gramaticais.

2.3. Sintetizando a ideia de *seguir regras*

Wittgenstein contesta a lógica formal ao procurar significações da linguagem por meio de uma linguagem ideal ancorada em entidades extralinguísticas. Nesse sentido, é possível interpretar que Wittgenstein contesta a dicotomia linguagem-objeto em que há algo extralinguístico, consequentemente contesta também as relações causais. Isso implicaria em nossa pesquisa na relação causal *treinamento-seguir regras*.

Por exemplo, no §81 do Investigações Filosóficas, Wittgenstein contesta nosso impulso em comparar o uso feito da linguagem com nossos jogos de linguagem específico e suas regras fixas: “que nós, notadamente em filosofia, *comparamos* frequentemente o uso das palavras com jogos, como cálculos segundo regras fixas, mas não podemos dizer que quem usa a linguagem *deva* jogar tal jogo” (WITTGENSTEIN, 2000, IF, §81). Nesse parágrafo o autor exprime que não é dever de alguém jogar um jogo de linguagem específico, mas, esse argumento é construído por ele no contexto de contrapor uma linguagem ideal, isso no sentido de que haveria um uso ideal da palavra e que todos deveriam utilizá-la dessa maneira.

No §206, também do Investigações Filosóficas, Wittgenstein indica em um primeiro momento essa relação causal entre *treinamento-seguir regra*, mas, logo em seguida inicia e desenvolve questionamentos que podem refutá-la:

> seguir uma regra é análogo a: seguir uma ordem. Somos treinados para isto e reagimos de um determinado modo. Mas que aconteceria se uma pessoa reagisse *desse modo* e uma outra *de outro modo* a uma ordem ao treinamento? Quem tem razão? (WITTGENSTEIN, 2000, IF, §206).

Esse tipo de argumentação aparece em outros pontos nos quais o autor parece indicar uma caracterização do *seguir regras* e logo em seguida questiona a sua própria afirmação. Devemos, no entanto, interpretar que esses argumentos, assim como o do §81,

estão na contestação de uma linguagem ideal em que deveríamos em todos os nossos jogos de linguagem usar as palavras segundo as *regras* de uma linguagem ideal.

Quando levamos em consideração que não há uma linguagem ideal constituída a partir de referenciais extralinguísticos e direcionamos nosso olhar para jogos de linguagem específicos, como os constituídos no processo de ensino e aprendizagem de sala de aula, recaímos sobre outros argumentos e interpretações como os apresentados na seção 2.2.

Nesse contexto, o interesse é observar o *seguir regras* de um jogo de linguagem específico, que é constituído por suas *regras prescritivas*. De acordo com os argumentos e interpretações apresentadas podemos observar o seguir regras na ação da pessoa, no agir de "tal e tal maneira", e o ensino para agir de "tal e tal maneira" ocorre por treinamento, seja ostensivo ou por vivências de utilização da *regra*. Disso, o *seguir regras* não seria uma consequência causal do *treinamento*, mas, o *treinamento* visaria o *seguir regras*.

Com base nesses aspectos entendemos que para aprender algo é necessário compreendermos a *proposição gramatical* – ou proposições gramaticais – que compõe um determinado *jogo de linguagem*. Ou seja, compreender está associado a *seguir as regras* das proposições gramaticais.

Para seguir *regras* precisamos agir de acordo com elas, ou seja, é na prática, na sua aplicação que observamos se a *regra* está sendo utilizada corretamente. O critério de correção para a aplicabilidade de uma *regra* está relacionado ao treinamento recebido por meio de ensino ostensivo e da vivência de aplicação da *regra* em diferentes jogos de linguagem.

Seguir regras é uma prática, um processo, ou ainda uma dinâmica. É a partir dessas interpretações da constituição das *regras*, do *treinamento das regras*, do *seguir regras* e dos seus desdobramentos que conduzimos essa pesquisa.

3. MODELAGEM MATEMÁTICA

As proposições de nossa linguagem compõem *jogos de linguagem* específicos. Estes que por sua vez estão inseridos em determinadas *formas de vida*. Esses *jogos de linguagem* possuem *proposições empíricas* e *proposições gramaticais* que na dinâmica convencional da gramática desse *jogo de linguagem* constituem as *regras* que normatizam nossa ação quando jogamos esse jogo.

A Modelagem Matemática como área de pesquisa no contexto da Educação Matemática pode ser interpretada como um *jogo de linguagem*, pois, foi sendo estruturada e possui *regras* que normatizam a ação daqueles que jogam o jogo da pesquisa em Modelagem Matemática. Assim como, possui *regras* de ação para seu desenvolvimento no processo de ensino e aprendizagem.

Nesse contexto, para discutirmos aspectos relacionados ao *jogo de linguagem* Modelagem Matemática na Educação Matemática, apresentamos neste capítulo as ideias que fundamentam nossa pesquisa, bem como as que fundamentaram nossa prática de Modelagem Matemática na coleta de dados empíricos.

Para isso, primeiramente fazemos um levantamento do contexto de fundamentação da Modelagem Matemática na Educação Matemática, tanto internacional, quanto nacional. Nessa seção buscamos apresentar alguns aspectos relacionados ao *jogo de linguagem* mais amplo da pesquisa em Modelagem Matemática, que formam o "fulcro" para as pesquisas da área.

Posteriormente, apresentamos a proposta do *fazer* Modelagem Matemática, que pode ser interpretada como um *jogo de linguagem* específico relacionado a prática de desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em sala de aula. Consideramos essa proposta de fazer Modelagem Matemática no desenvolvimento dessa pesquisa para definir quais são as *regras* do *fazer* Modelagem Matemática a serem seguidas.

Finalizamos o capítulo discutindo sobre o uso de recursos das tecnologias digitais no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, relacionando esse uso aos aspectos referentes ao *jogo de linguagem* da prática de desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

3.1. A Modelagem Matemática na Educação Matemática

A Modelagem Matemática é oriunda originalmente da Matemática Aplicada, como uma metodologia de pesquisa. Na Educação Matemática tem sua ascensão internacional a partir da década de 1980. Em Pollak (1979), o autor indica a potencialidade das aplicações da matemática no ensino de Matemática. Entre as quatro formas de aplicações da matemática que o autor elenca está a Modelagem Matemática, sendo assim, uma das – senão a – primeiras propostas de utilização da modelagem como forma de ensinar Matemática.

Essa publicação de Henry Pollak já indica que uma das principais características da Modelagem Matemática é a aplicação da Matemática no Resto do Mundo – termo utilizado pelo autor para designar "todas as outras disciplinas do esforço humano, bem como a vida cotidiana" (POLLAK, 1979, p.234) –, como podemos observar na seguinte afirmativa do autor: "É justo dizer que nenhuma área da atividade humana é atualmente imune de raciocínio quantitativo ou modelagem matemática" (POLLAK, 1979, p.235).

No ano de 1983, ocorreu a primeira edição do ICTMA (International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications), conferência internacional que reúne pesquisadores que abordam a Modelagem Matemática e Aplicações no ensino de Matemática. O evento, consolidado e referência na pesquisa em Modelagem Matemática, teve sua 18ª edição realizada em julho de 2017.

Na década de 90 já com a pesquisa em Modelagem Matemática na Educação Matemática com maior difusão, publicações com grande abrangência surgiram, dentre as quais, uma que ganhou muito destaque internacional – influenciando também muito da pesquisa brasileira – é Blum e Niss (1991). Desta publicação destacamos alguns pontos que repercutiram e influenciaram fortemente a pesquisa na área.

Ao discutirem noções básicas tais como "problema" e "resolução de problemas", "modelo" e "modelagem", "aplicação", "aplicando" e "matemática aplicada" (BLUM; NISS, 1991, p.37), os autores afirmam que é necessário diferenciarmos os modelos matemáticos em dois tipos: *modelos normativos e modelos descritivos*.

> Se itens econômicos, por exemplo, como juros ou impostos são considerados, matemática serve particularmente para estabelecer certas normas envolvendo julgamentos de valor. Aqui é uma questão de modelos *normativos*. Se fenômenos físicos, por exemplo, como os

> movimentos planetários ou a decadência radioativa são considerados, a matemática serve principalmente para descrever e explicar a respectiva situação. Aqui é uma questão de modelos *descritivos* (BLUM; NISS, 1991, p.39).

Posteriormente, levando em consideração essa diferenciação feita em Blum e Niss (1991), Niss (2015) defendeu a diferenciação entre *modelagem prescritiva* e *modelagem descritiva*. O autor explica que afasta o foco da diferenciação do modelo e considera o processo de modelagem como um todo, substituindo 'normativo' por 'prescritivo' (SOUZA; OLIVEIRA; ALMEIDA, 2016, p.3).

Conforme o autor,

> a finalidade dessa modelagem[11] não é primordialmente a familiarização com alguma parte existente do mundo, que é um domínio extra matemático, mas projetar, prescrever, organizar ou estruturar alguns de seus aspectos [...] Na modelagem prescritiva o objetivo final é preparar o caminho para tomar medidas com base em decisões que resultem certo tipo de considerações matemáticas, em outras palavras, para "transformar o mundo" ao invés de apenas "compreender o mundo" (NISS, 2015, p.69).

Ao interpretarem as ideias apresentadas por Niss (2015) em relação a modelagem descritiva, Souza, Oliveira e Almeida (2016) afirmam que a

> compreensão e familiarização do mundo está relacionada com a modelagem descritiva. Este tipo de modelagem busca compreender e descrever o fenômeno na forma em que ele se apresenta [...] utilizar alguma representação matemática para substituir alguma característica específica deste fenômeno (SOUZA; OLIVEIRA; ALMEIDA, 2016, p.4).

Outra grande contribuição dada pelos autores em Blum e Niss (1991) é a categorização em possíveis abordagens da Modelagem Matemática – e aplicações – na sala de aula. Foram identificadas pelos autores seis possíveis diferentes abordagens:

> *(A1) A abordagem da separação*. Em vez de incluir o trabalho de modelagem e aplicações nos cursos ordinários de matemática, tais atividades são cultivadas em separado, em cursos especialmente dedicados a elas (BLUM; NISS, 1991, p.60).
> *(A2) A abordagem do duplo-compartimento*. O programa de matemática é dividido em duas partes. A primeira parte é composta por um curso usual de matemática "pura", enquanto o outra lida com um ou mais itens "aplicados", utilizando a matemática estabelecida na primeira parte ou anteriormente (BLUM; NISS, 1991, p.60).
> *(A3) A abordagem das ilhas*. O programa de matemática é dividido em vários segmentos cada um organizado de acordo com a abordagem do duplo-compartimento. Isto significa que um programa de matemática

[11] Modelagem prescritiva.

> "pura" é interrompido por "ilhas" de trabalho aplicacionais, baseando-se na matemática desenvolvida no período anterior (BLUM; NISS, 1991, p.60).
> *(A4) A abordagem mista*. Frequentemente no ensino de matemática, elementos de aplicações e modelagem são invocados para auxiliar a introdução de conceitos matemáticos, etc. Inversamente, os conceitos, métodos e resultados matemáticos recentemente desenvolvidos são utilizados em situações de aplicação e modelagem sempre que possível. Nesta abordagem, a matemática a ser envolvida em aplicações e atividades de modelagem é mais ou menos pré-determinada (BLUM; NISS, 1991, p.61).
> *(A5) A abordagem da matemática curricular integrada*. Aqui, os problemas, sejam eles matemáticos ou aplicacionais, chegam em primeiro lugar e a matemática para lidar com eles é procurada e desenvolvida posteriormente. Em princípio, a única restrição é que os problemas considerados levem a uma matemática que é relevante e tratável na matemática curricular (BLUM; NISS, 1991, p.61).
> *(A6) A abordagem da interdisciplinaridade integrada*. Essa abordagem é em grande parte semelhante à (A5), mas difere da mesma, pois ela opera com uma integração total entre atividades matemáticas e extra matemáticas dentro de um quadro interdisciplinar onde a "matemática" não está organizada como um assunto separado (BLUM; NISS, 1991, p.61).

Essa categorização orientou e ainda orienta a comunidade no que tange a localização das suas práticas e suas pesquisas sobre a prática da Modelagem Matemática em sala de aula.

Além do como desenvolver a Modelagem Matemática em sala de aula, a comunidade também se preocupou em localizar suas pesquisas em relação a como entendem a própria Modelagem Matemática. Em Kaiser e Sriraman (2006) os autores categorizam as perspectivas de Modelagem Matemática que identificaram – principalmente – nas publicações da revista ZDM (Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik). A seguir elencamos essas perspectivas, bem como seus objetivos centrais conforme elencados por Kaiser e Sriraman (2006, p.304).

i) Modelagem **Realística** ou aplicada – Objetivos pragmáticos-utilitários, isto é, resolver problemas do mundo real, compreensão do mundo real, promoção de competências de modelagem.
ii) Modelagem **Contextual** – Relação-sujeito e objetivos psicológicos, por exemplo, resolver problemas de palavras.
iii) Modelagem **Educacional** – Objetivos pedagógicos e disciplinares:
    a) Modelagem **Didática** – Estruturação dos processos de aprendizagem e sua promoção;

b) Modelagem **Conceitual** – Introdução e desenvolvimento de conceitos.

iv) **Modelagem Sócio-crítica** – Objetivos pedagógicos, como a compreensão crítica do mundo ao redor.

v) Modelagem **Epistemológica** ou teórica – Objetivos teoricamente orientados, isto é, promoção do desenvolvimento teórico.

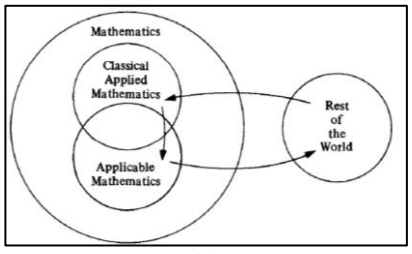
vi) Modelagem **Cognitiva**[12] – Objetivos de pesquisa (a) e Objetivos psicológicos (b):

a) análise de processos cognitivos que ocorrem nos processos de modelagem e compreensão desses processos cognitivos;

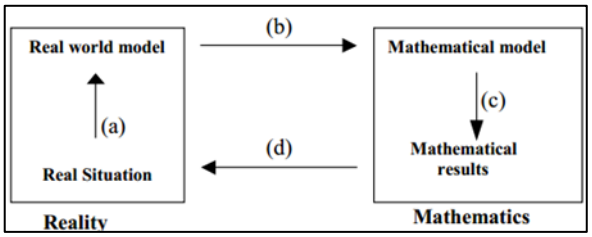
b) promoção de processos de pensamento matemáticos usando modelos como imagens mentais ou mesmo imagens físicas ou enfatizando modelagem como processo mental, como abstração ou generalização.

Para representar e ilustrar propostas de Modelagem Matemática muitos autores se utilizam dos ciclos de modelagem. Ferri (2006), por exemplo, analisou de um ponto de vista cognitivo as diferenciações teóricas e empíricas encontradas em alguns ciclos de modelagem consagrados na literatura internacional – principalmente no que tange as publicações de língua inglesa e alemã. Entre os ciclos analisados pela autora estão o proposto por Pollak (1979) (Figura 2a), o utilizado por Kaiser (1995) e Blum (1996) (Figura 2b), e também o ciclo proposto por Blum e Leiss (2006) (Figura 2c).

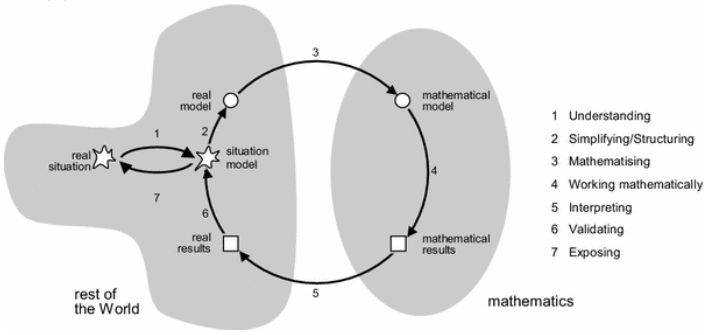
FIGURA 2: CICLOS DE MODELAGEM ANALISADOS EM FERRI (2006)



(a)



(b)



(c)

Fonte: Ferri (2006)

[12] Os autores a identificam como uma **meta-perspectiva.**

Em Galbraith (2012) o autor apresenta um estudo em que argumenta que, de maneira geral, a Modelagem Matemática pode ser abordada em sala de aula em duas versões: *Modelagem como Veículo* e *Modelagem como Conteúdo*. De forma sintetizada, podemos entender que na versão de modelagem como veículo o objetivo com as atividades de modelagem é ensinar matemática, ou seja, a modelagem é um veículo para o ensino de matemática, enquanto que na versão de modelagem como conteúdo o objetivo é que com as atividades de modelagem se aprenda a fazer – o que é, como funciona, etc. – modelagem, ou seja, a modelagem é o próprio conteúdo.

Publicações como Mass (2006) e os artigos que compõe a Parte V "Modelling Competency: Teaching, Learning and Assessing Competencies" do livro do ICTMA 14 (KAISER et al., 2011), ganharam muito destaque na últimas décadas por apresentarem estudos sobre competências em Modelagem Matemática.

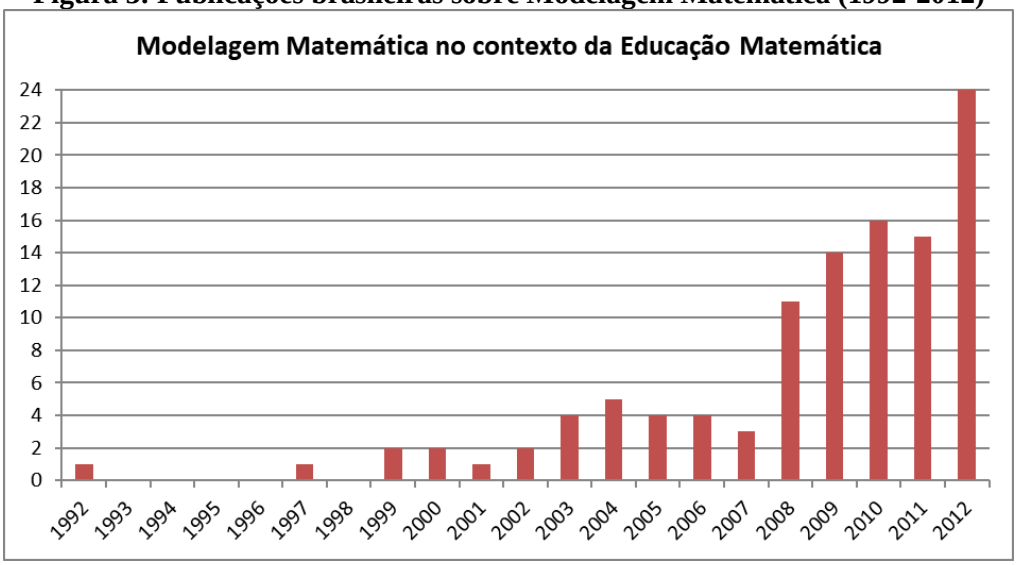
Consideramos essa breve contextualização da pesquisa em Modelagem Matemática no cenário internacional suficiente para apresentar alguns aspectos mais gerais que transitam no *jogo de linguagem* da pesquisa e da prática em Modelagem Matemática na Educação Matemática. A seguir apresentamos aspectos desse *jogo de linguagem* específicos da pesquisa nacional na área.

Segundo Burak (2004, p.1) a "Modelagem Matemática no Brasil começou a ser trabalhada, na década de 1980 na Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP – com um grupo de professores, em Biomatemática, coordenados pelo Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi – IMECC", mas, no caráter da Educação Matemática "a Modelagem Matemática teve início com os cursos de especialização para professores, em 1983, na Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Guarapuava - FAFIG, hoje Universidade Estadual do Centro-Oeste – UNICENTRO" (BURAK, 2004, p.1).

A área ganhou muitos adeptos na década de 1990 e em 1999 ocorreu a primeira CNMEM (Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática), que teve sua 10ª edição em novembro de 2017, evidenciando a consolidação desta conferência no meio acadêmico.

Como apresentamos em Souza (2013) – Figura 3 – a consolidação da área resultou, a partir dos anos 2000, num considerável número de publicações em periódicos e livros que tratam de Modelagem Matemática no contexto da Educação Matemática.

Figura 3: Publicações brasileiras sobre Modelagem Matemática (1992-2012)



Fonte: Souza (2013, p.46)

Com maior visibilidade da área, consequentemente com o maior interesse decorrente do aumento no número de pesquisadores e publicações, a Modelagem Matemática na Educação Matemática brasileira foi ganhando corpo e tornando-se consolidada. Muitos pesquisadores[13] decidiram então compilar suas ideias e pesquisas em livros que tratassem especificamente de Modelagem Matemática no contexto da Educação Matemática[14].

Nesse universo de publicações, resultantes de pesquisas e estudos, diferentes formas de conceber a Modelagem Matemática foram propostas pelos pesquisadores, cada uma concebida em um determinado contexto. Muitas pesquisas foram desenvolvidas para investigar os desdobramentos da utilização da Modelagem Matemática em diferentes níveis de ensino, algo que propiciou a combinação de diversas teorias com a Modelagem Matemática. Conforme discutimos na introdução, esse é um aspecto particular da pesquisa nacional, e como apresentamos, foram realizadas pesquisas envolvendo

[13] Grande parte deles filiados ao Grupo de Trabalho de Modelagem Matemática, GT10, criado pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática no ano de 2001 como o objetivo de auxiliar na articulação e colaboração dos pesquisadores brasileiros.

[14] Entre os mais clássicos estão o "Modelagem matemática no ensino" (BIEMBENGUT; HEIN, 2000), "Ensino-aprendizagem com modelagem matemática" (BASSANEZI, 2002), "Modelagem matemática na educação matemática brasileira: pesquisas e práticas educacionais" (BARBOSA; CALDEIRA; ARAÚJO, 2007), "Modelagem matemática: uma perspectiva para a educação básica" (BRANDT; BURAK; KLÜBER, 2010) e "Práticas de modelagem matemática na educação matemática: relatos de experiências e propostas pedagógicas" (ALMEIDA; ARAÚJO; BISOGNIN, 2011). E dos mais atuais podemos citar " Modelagem em educação matemática" (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2011), "Modelagem Matemática em Foco" (ALMEIDA; SILVA, 2014) e "Modelagem Matemática: teoria e prática" (BASSANEZI, 2015).

Fenomenologia, Registros de Representação Semiótica, Semiótica Peirceana, Aprendizagem Significativa, Filosofia Wittgensteiniana, entre outras.

Dentre as formas de conceber a Modelagem Matemática na literatura nacional as propostas por Rodney Bassanezi, Jonei Barbosa, Dionísio Burak e Lourdes Almeida podem ser evidenciadas como as que ganharam mais adeptos e destaque. Apresentamos a seguir cada proposta dessa, exceto a de Lourdes Almeida, pois, tal proposta compõe a forma de *fazer* Modelagem Matemática que utilizamos em nossa pesquisa, e será abordada na próxima seção deste capítulo.

Em seu icônico trabalho Barbosa (2004), o autor explana que "Modelagem, para mim, é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade" (p.75). Visão está que é reiterada em outra obra do autor, Barbosa (2006), reconhecida internacionalmente – analisada, por exemplo, em Kaiser e Sriraman (2006). Indo além, o autor propõe sua visão como uma nova escola de pensamento em Modelagem, chamada sócio-crítica.

Pioneiro nos estudos de Modelagem Matemática na Educação Matemática, em seu livro – um dos primeiros a ser publicado e um dos mais importantes e citados até hoje – Bassanezi (2011, p. 24) entende que a Modelagem Matemática é, essencialmente, "a arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual". Mais recentemente, em Bassanezi (2015), o autor atualiza sua visão e explica que "a modelagem é o processo de criação de modelos em que estão definidas as estratégias de ação do indivíduo sobre a realidade, mais especificamente sobre a *sua realidade*, carregada de interpretações subjetivas próprias de cada modelador" (BASSANEZI, 2015, p.15), e complementa que "a modelagem matemática é simplesmente uma estratégia utilizada para obtermos alguma explicação ou entendimento de determinadas situações reais" (BASSANEZI, 2015, p.15), e nesse processo "selecionamos os argumentos considerados essenciais e procuramos uma formalização artificial (*modelo matemático*) que contemple as relações que envolvem tais argumentos" (BASSANEZI, 2015, p.15-16).

Na proposta apresentada em Burak (2004, p.2) o autor explica que adota a concepção de Modelagem Matemática em sala de aula enquanto uma alternativa metodológica para o Ensino de Matemática. Em Burak (2010, p.35), ao citar sua tese de doutoramento, o autor explica que "a Modelagem Matemática constitui-se em um

conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir em paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões".

Cada uma dessas formas de conceber a Modelagem Matemática pode ser interpretada como um *jogo de linguagem* específico, forjado em determina *forma de vida*. Assim como os jogos de tabuleiro, possuem *semelhanças de família* entre si – como discutimos em Souza (2013) – se aproximando e distanciando de acordo com o aspecto observado.

Jogos de linguagem, possuem uma gramática e *regras* específicas. Nesse sentido, discutimos na sequência a gramática do *jogo de linguagem* específico do *fazer* Modelagem Matemática que guiou o desenvolvimento das atividades da coleta de dados empíricos, e que guiarão nossas análises.

3.2. Uma proposta do *fazer* Modelagem Matemática

Nessa seção apresentamos a proposta do *fazer* Modelagem Matemática que assumimos nessa pesquisa. Tal proposta segue orientações de Almeida, Silva e Vertuan (2012), principalmente ao que está evidenciado nos capítulos 1 e 2 da obra[15].

Seguindo Almeida e Brito (2005) entendemos a Modelagem Matemática como uma alternativa pedagógica na qual fazemos uma abordagem, por meio da matemática, de uma situação-problema não essencialmente matemática. Porém, no contexto dessa pesquisa, levamos como pano de fundo a concepção proposta em Almeida e Brito (2005), mas, nos pautamos nos pressupostos apresentados em Almeida, Silva e Vertuan (2012), que também estão em confluência com a concepção de Modelagem Matemática de Almeida e Brito (2005).

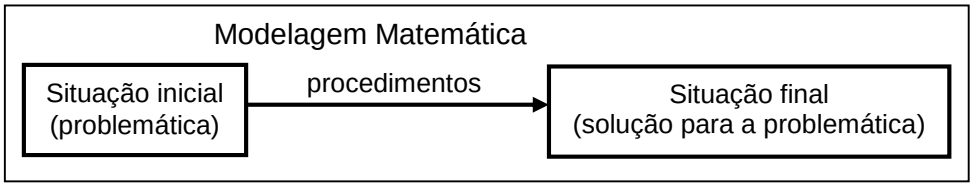
Para Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.12)

> "uma atividade de Modelagem Matemática pode ser descrita em termos de uma situação inicial (problemática), de uma situação final desejada (que representa uma solução para a situação inicial) e de um conjunto de procedimentos e conceitos necessários para passar da situação inicial para a situação final.

[15] O ciclo de modelagem que relaciona as fases da Modelagem Matemática e as ações cognitivas dos alunos apresentado ao final do capítulo 1 de Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.19) não foi utilizado, pois, como ações cognitivas não são consideradas na filosofia wittgensteiniana, haveria conflito se as utilizássemos no nosso entendimento de *fazer* Modelagem Matemática.

Essa forma de compreender uma atividade de Modelagem Matemática é sintetizada pelos autores através de um esquema (Figura 4).

FIGURA 4: ESQUEMA DE UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM PARA ALMEIDA, SILVA E VERTUAN (2012)



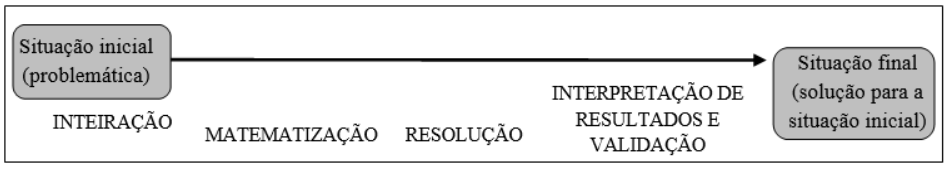
Fonte: ALMEIDA, SILVA e VERTUAN (2012, p.12)

A essa situação inicial problemática os autores chamam de situação-problema, enquanto que à situação final desejada há associação de uma representação matemática, um modelo matemático.

Sobre o modelo matemático, Almeida, Silva e Vertuan (2012) explicam que o usamos "para representar, explicar e 'tornar presentes' situações que queremos analisar usando matemática" (p.13). Nesse sentido, os autores definem um modelo matemático como "um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema" (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p.13).

Almeida, Silva e Vertuan (2012) afirmam para a configuração, estruturação e resolução de uma situação-problema, no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática são necessários um conjunto de procedimentos, que é nomeado pelos autores de fases, sejam elas: inteiração, matematização, resolução, interpretação de resultados e validação. Nesse sentido, o esquema da Figura 4 é retomado e atualizado com a incorporação dessas fases (Figura 5).

FIGURA 5: FASES DA MODELAGEM MATEMÁTICA PARA ALMEIDA, SILVA E VERTUAN (2012)



Fonte: ALMEIDA, SILVA e VERTUAN (2012, p.15)

Cada fase desse esquema de Modelagem Matemática é descrita pelos autores (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 15-16) da seguinte maneira:

- **Inteiração**: “representa um primeiro contato com uma situação-problema que se pretende estudar [...] cercar-se de informações sobre a situação por meio da coleta de dados [...] conduz a formulação do problema e a definição de metas para sua resolução”;
- **Matematização**: “é caracterizada por [...] esses processos de transição de linguagens, de visualização e de uso de símbolos para realizar descrições matemáticas. Essas descrições são realizadas a partir de formulação de hipóteses, seleção de variáveis e simplificações”; (sublinhado nosso)
- **Resolução**: “consiste na construção do modelo matemático com a finalidade de descrever a situação [...] responder às perguntas formuladas sobre o problema a ser investigado na situação”;
- **Interpretação de Resultados e Validação**: “implica na análise de uma resposta para o problema [...] constitui um processo avaliativo [...] e implicada uma validação da representação matemática associada ao problema, considerando tanto os procedimentos matemáticos quanto a adequação da representação para a situação”.

Cabe ressaltar que essas fases não devem ser interpretadas como algo rígido, pois, como afirmam os autores:

> ainda que essas fases constituam procedimentos necessários para a realização de uma atividade de Modelagem Matemática, elas podem não decorrer de forma linear, e constantes movimentos de “ida e vinda” entre essas fases caracterizam a dinamicidade da atividade (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p.15-16).

Nesse sentido, as fases são necessárias, caracterizam e estruturam uma atividade de modelagem matemática, mas, não precisam ocorrer de forma linear, como se fossem engessadas.

Na fase de matematização grifamos a ação da formulação de hipóteses, pois, a hipótese é uma ideia muito discutida e muitas vezes confusa para quem realiza Modelagem Matemática. Nesse sentido, sentimos a necessidade de buscarmos uma elucidação do que seria uma hipótese. Para tal, nos pautamos na discussão realizada em Almeida, Palharini e Tortola (2015), na qual os autores investigam como a formulação de hipóteses interfere na Modelagem Matemática.

> A observação do fenômeno e a identificação de um problema a ser solucionado geram hipóteses cujo papel é incorporar na modelagem matemática características relevantes do problema na visão do modelador, e ao mesmo tempo, orientar o encaminhamento da atividade, seja nas estratégias de resolução, seja no uso da matemática,

> seja na construção de modelos para o fenômeno em estudo (ALMEIDA; PALHARINI; TORTOLA, 2015, p.11).

Segundo os autores a formulação de hipóteses possui algumas características. Uma delas é a capacidade de poder incorporar informações da situação-problema que não constam nos dados coletados na inteiração e que para o modelador são relevantes. Outra é a orientação do encaminhamento da atividade, pois, as hipóteses podem indicar desde a estratégia de resolução até que "matemática" pode ser utilizada para a construção do modelo.

Nesse sentido, Almeida, Palharini e Tortola (2015, p.11-12) evidenciam que "em uma atividade de modelagem matemática, uma hipótese não é como um enunciado que só pode ser comprovado, examinado, verificado, indiretamente através de suas consequências", nem tampouco "uma explicação provisória de um fenômeno devendo ser provada pela experimentação", mas, "tem características de uma suposição bem fundamentada".

Como também é evidenciado por Almeida, Palharini e Tortola (2015), as hipóteses geradas direcionam o desenvolvimento da Modelagem Matemática, e a fase de interpretação e validação do modelo podem balizar o funcionamento das hipóteses geradas. Disso, se a validação do modelo e a análise da resposta da situação-problema mostrar que o resultado obtido não é adequado, as hipóteses podem ser revistas e modificadas.

O nosso entendimento de *fazer* Modelagem Matemática está pautado na caracterização aqui delineada. São as fases de desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática propostas por Almeida, Silva e Vertuan (2012) que direcionam o *fazer* Modelagem Matemática nessa pesquisa. Com base nesse *jogo de linguagem* do *fazer* Modelagem Matemática é que delineamos – capítulo 4 – as *regras* do fazer Modelagem Matemática para as quais os alunos receberam *treinamento* no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática na coleta de dados.

3.3. O uso de recursos das Tecnologias Digitais no *fazer* Modelagem Matemática

Nessa seção apresentamos os fundamentos que nos guiam na utilização de recursos das tecnologias digitais no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Algumas pesquisas que tratam da utilização das tecnologias digitais na Modelagem Matemática apresentam resultados importantes. A seguir apresentamos algumas dessas pesquisas que ganharam destaque na comunidade científica da área, buscando evidenciar a função que esses recursos tecnológicos digitais desempenharam no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática.

Em Malheiros (2004), a autora conclui, após analisar um acumulado de dados empíricos de atividades que envolviam além das tecnologias digitais a Modelagem Matemática, recolhidos entre 1993 e 2002, que "a utilização de conteúdos matemáticos juntamente com as TIC podem ser um ponto positivo quando utilizados em um ambiente onde a Modelagem é utilizada como estratégia pedagógica" (p.155). Das conclusões apresentadas pela autora nessa pesquisa, foi possível percebermos que além de os alunos utilizarem as calculadoras gráficas, já que tinham acesso aos recursos computacionais, as utilizavam para a coleta de dados, tabulação de dados e construção e análise de gráficos.

Ainda em Malheiros (2004), a autora põe em evidência uma das atividades que analisou, na qual o tema para a atividade é escolhido pelos alunos a partir da grande visibilidade que este tinha na mídia digital. Nesse caso, o recurso tecnológico de acesso à internet influenciou a decisão dos alunos na escolha do tema da atividade de modelagem.

Essa função das tecnologias digitais é apontado também em Borba (2009, p.463): "A internet realmente aumenta as possibilidades de modelagem, pois permite a ampla gama de temas aos quais os alunos podem manifestar interesse".

Na pesquisa apresentada em Santos (2008) o autor investiga como os alunos utilizam o computador nas atividades de modelagem matemática, e uma de suas conclusões é que "a Modelagem Matemática emerge como uma alternativa pedagógica que pode contribuir para a introdução do computador nos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática" (SANTOS, 2008, p.147). Essa afirmação do autor pauta-se na utilização que os alunos fizeram de alguns software no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, nos quais os alunos construíram diferentes representações dos objetos matemáticos envolvidos nas atividades, podendo, além de visualizar esses objetos matemáticos de diferentes formas, manipular esses objetos matemáticos e também simular situações de alteração nessas representações.

Em Soares (2012), a autora investiga o papel do software *Modellus*[16] no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. A autora propõe uma "nova" forma de fazer Modelagem Matemática, a Análise de Modelos, na qual "se propõe o estudo de um modelo matemático para algum fenômeno de outra área científica ou do dia-a-dia como ponto de partida de uma disciplina ou da discussão de um conceito matemático" (SOARES, 2012, p. 133). A autora conclui, através da análise de uma experiência com alunos de um curso de Ciências Biológicas, que a utilização do software *Modellus* propiciou, pela possibilidade da representação gráfica, simulação e manipulação, que os alunos tivessem acesso a modelos matemáticos para os quais não teriam ferramentas matemáticas suficientes para acessarem com as ferramentas da escrita ou oralidade.

Em Dalla Vecchia (2012) o autor realiza uma investigação envolvendo alunos da Licenciatura em Matemática que participaram de um curso de extensão "Construção de Jogos Eletrônicos", um contexto que envolvia os alunos com a Modelagem Matemática na realidade do mundo cibernético. Os software utilizados nesse curso foram o Scratch[17] e o Studio 3Ds Max[18]. A partir de suas análises o autor entende que

> existe um campo potencial que permite compreender que a MM, no campo da Educação Matemática, se mostra como sendo **um processo dinâmico e pedagógico de construção de modelos sustentados por ideias matemáticas que se referem e visam encaminhar problemas de qualquer dimensão abrangida pela realidade** (DALLA VECCHIA, 2012, p. 218).

Nessa perspectiva, o autor evidencia que o tipo de linguagem utilizada para determinar o problema conduz a respostas específicas, ampliando o leque de possibilidades para encontrar soluções (DALLA VECCHIA, 2012, p. 219). Para o autor, as dimensões da realidade abrangidas pelo mundo cibernético, obtido pela utilização das

[16] O *Modellus* é um software livre e grátis. É um ambiente computacional que permite a construção e simulação de modelos de fenômenos físicos, químicos e matemáticos utilizando equações matemáticas que representam esses fenômenos.

[17] O Scratch é um software livre e grátis desenvolvido no MIT. (Massachusetts Institute of Technology). Este constitui-se como uma linguagem de programação visual e permite ao usuário construir interativamente suas próprias histórias, animações, jogos, simuladores, ambientes visuais de aprendizagem, músicas e arte.

[18] "O Studio 3Ds Max é um software de computação gráfica que tem como principal funcionalidade a construção de objetos em 3D, que podem ser manuseados e modificados das mais diversas maneiras. Acrescenta-se a essa qualificação uma gama de recursos que permite texturizações, animações, edições de materiais, edição de efeitos climáticos e físicos. Por essas características, esse software é utilizado na construção de jogos eletrônicos e na criação de animações amadoras e profissionais" (DALLA VECCHIA, 2012, p.31).

tecnologias digitais, “também podem contribuir para que tanto o problema quanto sua solução se mostrem de outros modos, uma vez que as atualizações desse espaço, em termos de espacialidade e temporalidade, se apresentam qualitativamente distintas” (idem).

Borssoi (2013), investiga a influência das tecnologias digitais em atividades de modelagem matemática na constituição de aprendizagem significativa. Um aspecto da utilização de recursos das tecnologias digitais em especial pode ser evidenciado quando observamos o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática analisadas pela autora, o recurso de videoanálise.

Esse recurso consiste da gravação de um vídeo, relacionada a algum elemento que se pretende utilizar na atividade, e a análise desse vídeo em algum software de videoanálise – no caso de Borssoi (2013) o *Tracker* – que identifica elementos de acordo com os parâmetros determinados pelo modelador; para a autora “o recurso de videoanálise foi um importante elemento mediador das discussões e definições que promoveram as atividades de modelagem” (BORSSOI, 2013, p.149). No uso que os alunos fizeram desse recurso nas atividades analisadas na pesquisa, a função “foi gerar dados, a partir dos quais as outras fases da modelagem foram pensadas” (BORSSOI, 2013, p.150).

Em Malheiros (2008) a autora passa a investigar a elaboração de projetos de modelagem totalmente à distância, online, em ambiente virtual de aprendizagem. Uma inserção total nas tecnologias digitais, na qual toda a inteiração ocorre através dos recursos computacionais e da internet. Segundo a autora “projetar em Modelagem a distância é diferente, pois o fazer Modelagem se torna diferente, ou seja, a investigação, discussão, análise, experimentação, dentre outros fatores presentes no ato de se fazer Modelagem mudam” (MALHEIROS, 2008, p.150), logo, nessa investigação os recursos das tecnologias digitais estavam presentes, direta ou indiretamente, durante todo o desenvolvimento das atividades.

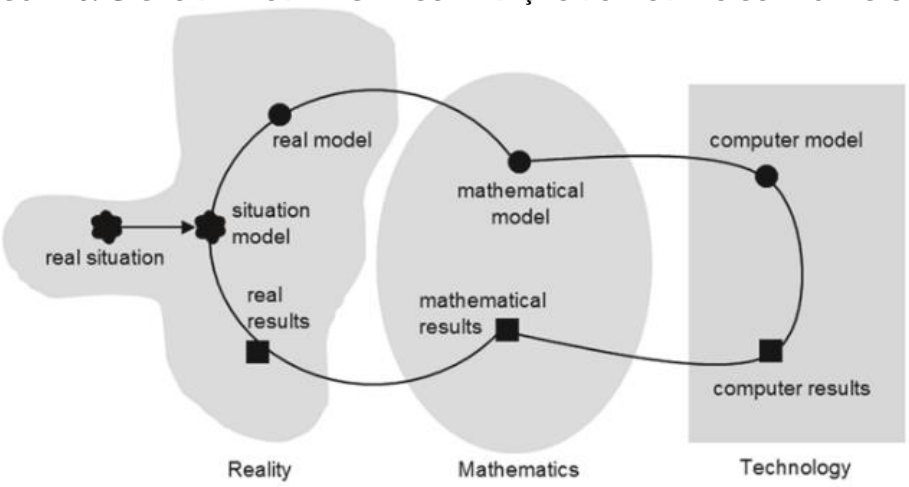
Podemos observar pelos resultados obtidos nas pesquisas citadas, que os recursos das tecnologias digitais podem ser utilizados em diferentes momentos das atividades de modelagem matemática, e para cada momento podem apresentar diferentes funções. Mesmo que as tecnologias digitais estivessem envolvidas no desenvolvimento das atividades de modelagem, o objetivo das pesquisas não era analisar e elencar os usos que seus recursos tiveram nesse desenvolvimento. Nesse sentido, encontramos em

Greefrath (2011) uma pesquisa que descreve os *usos* que as tecnologias digitais desempenham quando entremeadas ao desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

> Uma ideia importante do uso de ferramentas digitais em matemática e especialmente nas aulas de modelagem é o fato de que as ferramentas numéricas, gráficas e simbólicas, integradas à computadores e calculadoras modernas fornecem novas formas de aprender e entender Matemática (GREEFRATH, 2011, p.303).

Levando em consideração o ciclo de modelagem apresentado em Blum e Leiss (2006) (Figura 2c), Greefrath (2011) pontua algo crucial em suas ideias. O autor explica que geralmente as tecnologias digitais são inseridas na etapa do modelo matemático como auxílio para se obter os resultados matemáticos, criando assim apenas um apêndice no ciclo de modelagem. O autor ilustra essa inserção das tecnologias digitais através de um apêndice no ciclo de modelagem de Blum e Leiss (2006) – Figura 6.

FIGURA 6: CICLO DE MODELAGEM COM ADIÇÃO DO MODELO COMPUTACIONAL



Fonte: (GREEFRATH, 2011, p.302)

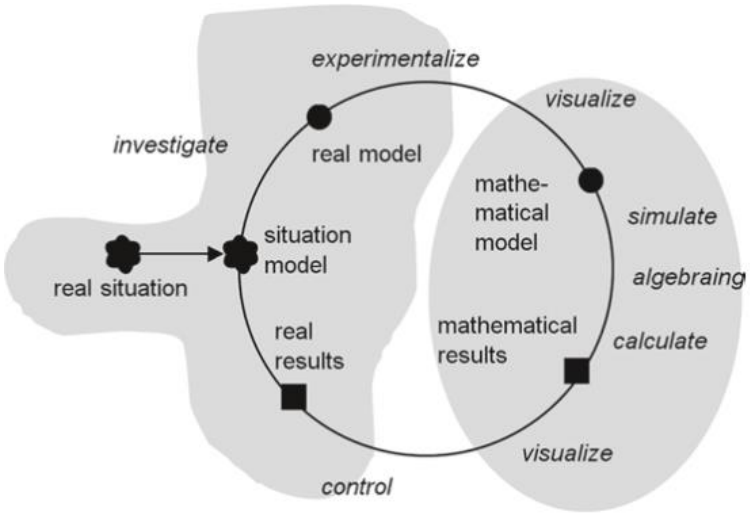
Nessa interpretação as tecnologias digitais são utilizadas em uma atividade de modelagem matemática na construção do modelo e na obtenção dos resultados matemáticos, ou seja, o modelador transportaria o modelo matemático obtido para uma ferramenta digital, dali obteria informações, análises e resultados, que seriam novamente traduzidas para a linguagem estritamente escrita e/ou oral.

Greefrath (2011) evidencia que essa visão é muito simplista para a gama de possibilidades que a inserção das tecnologias digitais pode oferecer para o fazer modelagem e pondera que o uso das tecnologias digitais "não só cria um apêndice importante para o ciclo de modelagem, mas também influencia cada parte do ciclo"

(GREEFRATH 2011, p. 302). Para o autor "as diferentes funções das ferramentas digitais nas aulas de matemática são importantes para a modelagem de problemas em diferentes fases do ciclo de modelagem" (idem).

Nesse sentido o autor propõe que o ciclo de modelagem seja complementado com as funções da inserção das tecnologias digitais – Figura 7.

FIGURA 7: CICLO DE MODELAGEM COM ADIÇÃO DE INFLUÊNCIA DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS



Fonte: (GREEFRATH, 2011, p.303)

Nesse ciclo de modelagem proposto por Greefrath (2011) o autor evidencia oito funções que as tecnologias digitais podem ser utilizadas em uma atividade de modelagem matemática: *investigação*, *experimentação*, *visualização*, *simulação*, *algebrização*, *calculação*, *visualização* e *controle*.

As tecnologias digitais podem ser utilizadas para a *investigação*, na qual o modelador utiliza-se das ferramentas digitais para a coleta de dados, ou seja, para inteirar-se da situação-problema. Essa coleta pode ocorrer pela recolha de informações da internet, como apresentado em Malheiros (2004), também através de gravação de vídeo – como em Borssoi (2013) – ou áudio, ou ainda, utilizando-se de aparelhos para medição, etc.

Já, na função de *experimentação*, "alguém pode transformar com a ajuda de um software de geometria dinâmica ou de uma planilha uma situação real em um modelo geométrico ou numérico" (GREEFRATH, 2011, p.301). O autor complementa que uma atividade muito semelhante à experimentação é a *simulação*. Nela as tecnologias digitais podem ser utilizadas para realizar experimentos caso o modelo matemático seja

demasiado complexo ou se o comportamento do modelo quiser ser observado pelo modelador.

> A simulação por computador permite que uma pessoa explore modelos mais complexos e em maior número do que se estivesse reduzido aos recursos de sua imagística mental e de sua memória de curto prazo, mesmo se reforçadas por este auxiliar por demais estático que é o papel. (LÉVY, 1993, p.125-126).

> A manipulação dos parâmetros e a simulação de todas as circunstâncias possíveis dão ao usuário do programa uma espécie de intuição sobre as relações de causa e efeito presentes no modelo. Ele adquire um conhecimento por simulação do sistema modelado, que não se assemelha nem a um conhecimento teórico, nem a uma experiência prática, nem ao acúmulo de uma tradição oral" (LÉVY, 1993, p.122).

Na função de *visualização*, por exemplo, "dados podem ser representados com a ajuda de um sistema de álgebra computacional ou uma ferramenta de estatística em um sistema de coordenadas" (GREEFRATH, 2011, p.302), fornecendo assim ferramentas para observar certos aspectos que poderiam não ser notados. Em momentos posteriores em que os resultados já estiverem sido obtidos as tecnologias digitais podem servir para a *visualização* destes.

Greefrath (2011, p.301) evidencia que na função de *calculação* um "uso comum de ferramentas digitais, particularmente sistemas algébricos computacionais, é o cálculo de resultados numéricos ou algébricos, que não podem ser alcançados pelos estudantes sem estas ferramentas ou não em tempo apropriado" ou porque ainda não os aprendeu. "Pertence também ao setor de cálculos com ferramentas digitais a missão de encontrar representações algébricas que se adequem aos dados" (GREEFRATH, 2011, p.302), a função denominada *algebrização*, que caracteriza-se pelo fato de que os dados da situação-problema são inseridos em ferramentas computacionais específicas e estas fornecem uma representação algébrica.

Sobre a função *controle*, o autor evidencia:

> ferramentas digitais podem suportar processos de controle, por exemplo, quando operam com modelos funcionais discretos. Assim, o modelo matemático pode ser numericamente controlado. No entanto, é apenas um controle gráfico com a ajuda do gráfico e dos dados reais ou – em outros casos – também é concebível um controle algébrico (GREEFRATH, 2011, p.302).

É nesse sentido que compreendemos que os recursos das tecnologias digitais podem ser usados em atividades de modelagem matemática, podendo estar presentes em

todo o seu desenvolvimento seja para investigação e recolhimento dos dados, simulação, cálculos ou visualização.

4. O *SEGUIR REGRAS* NO *FAZER* MODELAGEM MATEMÁTICA

Nesse capítulo definimos as *regras* para o *fazer* Modelagem Matemática que estamos considerando na pesquisa. Para tal, associamos as ideais sobre *regras* apresentadas no capítulo 2 com a proposta de *fazer* Modelagem Matemática apresentada no capítulo 3.

Na primeira seção do capítulo 3 apresentamos algumas ideias que balizam a pesquisa e a prática de Modelagem Matemática no contexto da Educação Matemática. Podemos interpretar sob o ponto vista wittgensteiniano que essas ideias – em conjunto com outras tantas – integram o *jogo de linguagem* da Modelagem Matemática na Educação Matemática. Esse conjunto de ideias representa para esse *jogo de linguagem* o "leito sedimentado do rio", as proposições gramaticais, pelo qual as proposições empíricas "fluem". Essas ideias normatizam nossa forma de agir no que se refere à Modelagem Matemática.

Discutimos também em 3.1 que existem diferentes formas de propor e conceber a Modelagem Matemática, consequentemente, de propor e conceber o *fazer* Modelagem Matemática, cada uma delas podendo ser interpretada como um *jogo de linguagem* específico da Modelagem Matemática. Como apontado em Souza (2013) essas concepções foram constituídas em diferentes contextos e possuem *semelhanças de família* entre si. Nesse sentido, o contexto de desenvolvimento da Modelagem Matemática direciona a opção por uma delas.

O direcionamento para a proposta do *fazer* Modelagem Matemática pela qual optamos nessa pesquisa é oriundo de nossa orientação em pesquisa. Orientados por essa proposta conduzimos nossa pesquisa e prática com Modelagem Matemática nos últimos anos. Tal proposta está pautada na concepção de Lourdes Almeida, especificamente como é apresentada em Almeida, Silva e Vertuan (2012), pois, essa publicação é utilizada para o *treinamento* das *regras* do *fazer* Modelagem Matemática durante o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática da coleta de dados empíricos.

Tal proposta foi construída na *gramática* da pesquisa em Modelagem Matemática, ancorada em conceitos bem fundamentados e se "solidificou no leito do rio" da pesquisa em Modelagem Matemática.

Nessa proposta os autores evidenciam que uma atividade de modelagem matemática é constituída por uma situação-inicial problemática e de uma situação final, em que são necessários alguns procedimentos para se chegar de uma a outra. Esses procedimentos são denominados pelos autores de fases. Na descrição dessas fases os autores elencam alguns procedimentos específicos que são atrelados a essas fases, interpretamos tais procedimentos como subfases. Incluindo essas subfases ao esquema da Figura 5, propomos sua releitura (Figura 8).

FIGURA 8: ADAPTAÇÃO DO ESQUEMA DE MODELAGEM MATEMÁTICA DE ALMEIDA, SILVA E VERTUAN (2012)

Fonte: O autor (2018)

Como discutimos em 3.2, essas fases – incluindo também as subfases – são necessárias para caracterizar e estruturar o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, mas, não necessariamente devem ser seguidas linearmente, as "idas e vindas" entre elas fazem parte da dinâmica de uma atividade de modelagem.

Como detalharemos mais nos aspectos metodológicos da coleta de dados, essa característica das fases da Modelagem Matemática propostas em Almeida, Silva e Vertuan (2012) foi abordada com os alunos que desenvolveram as atividades da coleta de dados. Na discussão desses aspectos apresentamos[19] essas fases e subfases da seguinte maneira:

- Situação Inicial
- Inteiração
  - Coleta de dados
  - Formulação do Problema

[19] Como a não rigidez dessas fases foi discutida com os alunos, acreditamos que tal apresentação não interferiu no *treinamento* em seu *treinamento* no que se refere a estruturação de uma atividade de modelagem matemática.

- Matematização
  - Simplificação
  - Formulação de Hipóteses
  - Seleção das Variáveis
- Resolução
  - Construção do Modelo
  - Responder o problema
- Interpretação e Validação
  - Análise da resposta em relação a Matemática
  - Análise da resposta em relação ao Problema
- Situação Final

É com base nessa estrutura de desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática que as *regras* do *fazer* Modelagem Matemática estão constituídas nesse *jogo de linguagem*.

De acordo com o que discutimos sobre a ideia de *seguir regras,* observar o *seguir regras* não é olhar para as *regras,* mas, para o agir segundo as *regras,* olhamos para a prática, para as ações, se age "de tal e tal maneira". Nesse sentido, para olharmos sobre o *seguir regras,* observamos as ações dos alunos frente ao *treinamento* recebido para agir segundo essa forma de *fazer* Modelagem Matemática.

Disso, tomando como base as fases propostas em Almeida, Silva e Vertuan (2012), elencamos as ações que devem ser observadas e que indicam o *seguir regras* do *fazer* Modelagem Matemática.

À Situação Inicial associamos a ação de Identificar uma situação-inicial problemática, pois, esta ação é o pontapé inicial que desencadeará a atividade de Modelagem Matemática. A situação inicial "tem como característica essencial a possibilidade de abarcar a cotidianidade ou a relação com aspectos externos à Matemática" (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p.15)[20]. Nesse sentido, a ação de *identificar uma situação-problema* deve levar em consideração, pelos menos, esses aspectos.

Na fase de Inteiração podemos pontuar duas ações que os alunos devem realizar no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática: a ação de Coletar dados e ação de Formular o problema. A coleta de dados deve ser coerente à problemática da situação-inicial e os dados devem ser suficientes para a construção do modelo. O

[20] Sublinhado nosso.

problema formulado delimitará a região de inquérito da problemática inicial e direcionará o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

Para a fase de Matematização são necessárias ações que delimitam o alcance da atividade de modelagem matemática na descrição da realidade envolvida na situação-inicial. A esta fase associamos três ações: de Realizar simplificações, de Formular hipóteses e de Selecionar variáveis. Essas ações delimitam que aspectos da realidade serão considerados na atividade como também indicam o conteúdo da Matemática que normatizará essa realidade.

Na fase de Resolução, com o conteúdo da Matemática que será utilizado na atividade, as proposições gramaticais desse conteúdo serão aplicadas aos elementos da situação-inicial problemática para Construir o modelo que a descreve e também para Apresentar uma solução para o problema.

Cabe aqui uma discussão sob o ponto de vista wittgensteiniano. A Matemática para Wittgenstein tem função normativa e não descritiva. Logo, quando a Matemática é utilizada na fase de resolução, entendemos que ela tem a função de normatizar situações de natureza empírica, como afirmam Souza e Barbosa (2014). Ela é utilizada para descrever a situação-inicial, mas, essa descrição não pode falsificar a Matemática utilizada, caso ela não se adeque à descrição, ao contrário, serão os aspectos da realidade, as simplificações, hipóteses e variáveis que serão questionadas. A Matemática nessa ótica normatiza a forma como a situação será abordada.

Na fase de Interpretação e Validação duas ações são necessárias: a de Analisar a resposta em relação à Matemática e de Analisar a resposta em relação ao Problema. Na análise em relação à Matemática, o modelador verifica se a resposta obtida está correta, ou seja, se as regras do conteúdo da Matemática envolvida foram utilizadas corretamente, podendo utilizar de outras formas para obter a resposta e comparar ambas, por exemplo; a construção do modelo também pode ser verificada. Já na análise em relação ao problema, o modelador verifica se a resposta está adequada ao problema, se os aspectos coletados da, e constituídos a partir da, situação-inicial foram adequados e suficientes, e se há coerência da resposta obtida para com a situação problematizada.

À Situação final não iremos associar nenhuma ação específica, pois, entendemos que ela é construída a partir das demais ações realizadas durante o desenvolvimento da

atividade de modelagem matemática. Para nós, caracterizar uma situação final é chegar ao final do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

Inserindo essas ações as fases e subfases de uma atividade de modelagem matemática propostas por Almeida, Silva e Vertuan (2012), obtemos nosso guia no que diz respeito a forma de agir para caracterizar e estruturar o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática:

- Identificar uma situação-inicial problemática
- Na fase de Inteiração:
  - Coletar dados
  - Formular o Problema
- Na fase de Matematização:
  - Realizar Simplificações
  - Formular Hipóteses
  - Selecionar Variáveis
- Na fase de Resolução:
  - Construir o Modelo
  - Apresentar uma solução para o problema
- Interpretação e Validação
  - Analisar a resposta em relação à Matemática
  - Analisar a resposta em relação ao Problema

Nosso olhar é direcionado para essas ações ao descrevermos o *seguir regras* no *fazer* Modelagem Matemática.

No desenvolvimento de atividades de modelagem matemática estas ações podem: i) ser indicadas aos alunos pelo professor de modo que as decisões se concentram fortemente no professor; ii) ser realizadas em conjunto pelo professor e alunos e as decisões são compartilhadas entre estes dois agentes da atividade de modelagem matemática; iii) ser realizadas exclusivamente pelos alunos, cabendo ao professor apenas a orientação quando solicitado.

Considerando esta configuração do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, para os interesses dessa pesquisa, as atividades podem ser caracterizadas em duas fases: o *treinamento das regras* da Modelagem Matemática e o *seguir regras* no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Antes de discutir quando uma ação está relacionada ao *treinamento da regra* e quando está relacionada ao *seguir a regra*, precisamos entender como foi organizada a

dinâmica de desenvolvimento das atividades de modelagem, em conformidade com estas fases.

A dinâmica foi organizada seguindo os momentos de familiarização propostos em Almeida e Dias (2004). Segundo as autoras, a introdução de atividades de modelagem matemática em sala de aula pode ocorrer de maneira gradativa, proporcionando aos alunos uma familiarização gradativa com atividades dessa natureza. Nesse sentido, de acordo com o momento de familiarização em que a atividade é proposta e desenvolvida, os alunos têm maior ou menor autonomia para com o *seguir regras* no *fazer* Modelagem Matemática.

As autoras propõem que essa familiarização se dê em três momentos.

1º momento:

> [...] são abordadas, com todos os alunos, situações em que estão em estudo a dedução, a análise e a utilização de um modelo matemático, a partir de uma situação problema já estabelecida e apresentada pelo professor; neste momento, a formulação de hipóteses e a investigação do problema, que resulta na dedução do modelo, são realizadas em conjunto com todos os alunos e o professor (ALMEIDA; DIAS, 2004, p. 25).

2º momento:

> [...] uma situação problema já reconhecida, juntamente com um conjunto de informações, pode ser sugerida pelo professor à classe, e os alunos, divididos em grupos, realizam a formulação das hipóteses simplificadoras e a dedução do modelo durante a investigação e, a seguir, validam o modelo encontrado (ALMEIDA; DIAS, 2004, p. 25).

3º momento:

> [...] os alunos, distribuídos em grupos, são incentivados a conduzirem um processo de Modelagem, a partir de um problema escolhido por eles, devidamente assessorados pelo professor (ALMEIDA; DIAS, 2004, p. 25).

Seguindo esse delineamento podemos relacionar as ações dos alunos com cada um desses momentos. No 1° momento as ações do professor – em nosso caso do professor/pesquisador – estarão mais evidentes nas fases iniciais da atividade de modelagem, como a identificação de uma situação-inicial problemática, a coleta de dados e a formulação do problema, e nas demais fases as ações são conjuntas entre professor e alunos. Entretanto, ainda as decisões se concentram no professor.

No 2° momento as ações iniciais da atividade de modelagem matemática ainda são realizadas pelo professor, mas, este, de acordo com o contexto da atividade, tem menos domínio sobre as ações das demais fases, assim, os alunos tomam decisões autônomas em algumas fases do desenvolvimento da atividade. De maneira geral, as ações do professor indicam o que o aluno deve fazer e como deve fazê-lo neste 2° momento de familiarização.

No 3° momento cabe aos alunos o desenvolvimento de cada uma das fases da atividade de modelagem matemática, enquanto o professor atua como orientador e colaborador, quando solicitado pelos alunos.

De maneira geral as ações realizadas no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática seguem essa dinâmica para cada um dos momentos. Contudo, o contexto em que as atividades são desenvolvidas pode interferir nessa dinâmica e uma ou outra ação pode se sobressair.

Como discutimos, para Wittgenstein o ensino ocorre por meio do *treinamento*: "O ensino da linguagem não é aqui nenhuma explicação, mas sim um treinamento" (WITTGENSTEIN, 2000, IF, §5). O *treinamento* quando inserido em sala de aula se evidencia quando as ações do professor são predominantes.

Quando são realizadas ações conjuntas entre professor e alunos, a ação do professor indica *treinamento da regra*, mas, seguindo o discutido por Wittgenstein, se há prática da *regra*, se o aluno realiza determinada ação no *fazer* Modelagem Matemática, então, ele também *segue a regra*. Contudo, interpretamos que o *seguir a regra* indicado pela ação dos alunos nesse caso, ocorre na fase de *treinamento* realizada pelo professor e não como uma ação autônoma dos alunos. Assim, nos casos de ações conjuntas entre professor e alunos, a ação principal é do professor e está relacionada ao *treinamento da regra*.

Levando em consideração a dinâmica com que as atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas e esta caracterização de *treinamento* realizada por Wittgenstein, apontamos que, na pesquisa, configura-se como *treinamento* as atividades do 1° e 2° momentos de familiarização dos alunos com a Modelagem Matemática. O

seguir regras é observado no 3° momento de familiarização em que as ações dos alunos ganham autonomia[21] no *fazer* Modelagem Matemática.

A pesquisa empírica segue esse encaminhamento, as atividades desenvolvidas nos 1° e 2° momentos de familiarização têm a finalidade de *treinamento* referente as *regras* no *fazer* Modelagem Matemática, para que no 3° momento pudessem utilizá-las de forma autônoma.

[21] No *jogo de linguagem* dos momentos de familiarização com a Modelagem Matemática proposto em Almeida e Dias (2004) a autonomia dos alunos se refere a ações realizadas pelos alunos sem o auxílio do professor ou ações em que o professor participa como orientador ou como modelador juntamente com os alunos, ou seja, ações em que não se configure o *treinamento*.

5. ASPECTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo apresentamos os aspectos metodológicos referentes ao encaminhamento da pesquisa. Na primeira seção apresentamos os aspectos referentes à coleta de dados, buscando retratar o contexto em que as atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas, bem como, descrevendo o planejamento realizado em conjunto com a professora regente da disciplina em que os dados foram coletados. Na segunda seção discutimos os delineamentos metodológicos que serão considerados nas análises dos dados empíricos.

5.1. A coleta de dados

A coleta de dados empíricos foi realizada durante o 1° semestre letivo do ano de 2017 na turma S83 da disciplina MA75E-Modelagem Matemática no Ensino, oferecida no 5° período do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Tecnológica Federal do Paraná do câmpus Curitiba. A disciplina foi ministrada na oportunidade pela Profª Drª Leônia Gabardo Negrelli, professora do Departamento Acadêmico de Matemática dessa Instituição.

O contato com a professora regente da disciplina ocorreu no semestre anterior à coleta de dados. A partir do primeiro contato a professora regente nos forneceu informações sobre o contexto do curso em que a disciplina era ofertada e o provável perfil dos alunos que poderiam se matricular nela.

Como a disciplina era ofertada no 5° período da Licenciatura em Matemática as disciplinas de Cálculo Integral – em que os conteúdos referentes a integração são estudados – e de Estatística e Probabilidade não teriam sido cursadas pelos alunos da disciplina de Modelagem Matemática no Ensino – exceto se algum dos alunos fizesse adiantamento dessas disciplinas ou tivesse cursado em outra instituição.

Nesse sentido, as atividades foram planejadas considerando as especificidades da turma. As situações-problema propostas foram escolhidas de acordo com esse contexto e contaram com a aprovação da professora regente da turma, que levou em consideração o programa da disciplina.

Considerando as necessidades da pesquisa, apresentadas pelo pesquisador, e também o programa da disciplina, a professora regente construiu um cronograma inicial e forneceu ao pesquisador para que ele propusesse possíveis datas em que as atividades de modelagem matemática referentes a coleta de dados empíricos da pesquisa fossem desenvolvidas. O plano de aulas da disciplina foi determinado a partir dessa dinâmica. Evidenciamos a colaboração da professora regente em adequar as necessidades da pesquisa com o programa da disciplina, podemos afirmar que ocorreu um trabalho colaborativo de modo que tanto os objetivos da disciplina como os da pesquisa foram alcançados.

Considerando o objetivo da pesquisa, alinhado com o programa da disciplina, nas atividades desenvolvidas na coleta de dados a Modelagem Matemática foi abordada em sua versão como conteúdo na perspectiva apresentada em Galbraith (2012), pois, o objetivo principal do desenvolvimento das atividades é ensinar o *fazer* Modelagem Matemática.

Fazendo uma interpretação das abordagens apresentadas por Blum e Niss (1991), na qual substituímos a Matemática como conteúdo pela Modelagem Matemática como conteúdo, podemos dizer que a Modelagem Matemática teve uma *abordagem mista*, visto que aspectos trabalhados nas atividades de modelagem matemática da coleta de dados eram utilizados pela professora regente nas outras atividades da disciplina e aspectos trabalhados nas outras atividades da disciplina eram utilizados pelos alunos no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática da coleta de dados.

As aulas da disciplina eram ministradas no período matutino com 4 horas/aula semanais, divididas em duas horas/aula ministradas nas terças-feiras e duas horas/aula nas quartas-feiras. A disciplina contava com 7 alunos matriculados, entretanto apenas 6 alunos frequentaram a disciplina regularmente. No decorrer do relatório de pesquisa nos referimos aos alunos como A1, A2, A3, A4, A5 e A6. Para a realização desta pesquisa os alunos foram organizados em três duplas, visando o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática. Nos referimos às duplas como D1, D2 e D3. As duplas eram assim constituídas: D1 alunos A2 e A3; D2 alunos A1 e A4; e, D3 alunos A5 e A6.

Considerando essa configuração das aulas da disciplina, dos alunos da turma, e a especificidade em nossa pesquisa de que as atividades de modelagem matemática da coleta de dados seriam desenvolvidas com o uso de recursos das tecnologias digitais, foi necessário determinar um local e recursos adequados para que isso fosse possível.

O local determinado foi o Laboratório de Informática do Departamento de Matemática (LIMAT). Para adequar as nossas necessidades aos recursos do laboratório contamos com a colaboração da equipe responsável por ele – ressaltamos a disponibilidade e atenção que nos foi dada pela equipe do laboratório para que as necessidades da pesquisa fossem atendidas.

Tivemos duas demandas em relação aos recursos do laboratório, uma relacionada ao desenvolvimento das atividades de modelagem matemática e a outra específica da coleta de dados.

Relacionado ao desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, tivemos que nos certificar que teríamos disponíveis 1 computador para cada aluno matriculado na disciplina caso fosse necessário o uso individual, ou, no mínimo 3 computadores para que cada dupla utilizasse uma máquina. Isso parecia algo simples, mas, como o LIMAT sofreria uma reconfiguração total das máquinas no semestre seguinte, os computadores disponíveis não apresentavam a capacidade esperada. Os recursos de software necessários para o desenvolvimento das atividades também influenciaram nesse aspecto, pois, necessitávamos de máquinas que pudessem rodar software do tipo "office", como de planilhas e texto, também software matemáticos, como o GeoGebra e Curve, por exemplo. Felizmente conseguimos máquinas mais do que suficientes que atendiam essas necessidades.

Ainda tínhamos a demanda relacionada à coleta de dados. Para observar aspectos do uso dos recursos das tecnologias digitais no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, optamos em capturar a tela dos computadores utilizados pelos alunos. Para isso utilizamos o Gravador de Tela online Grátis Apowersoft[22]. Esse gravador de tela está disponível gratuitamente e possui a capacidade de capturar a tela do computador e, com o auxílio de um microfone externo, a voz de quem o utiliza, criando um arquivo em nuvem que só pode ser salvo posteriormente à finalização da gravação. Nesse sentido, necessitávamos de máquinas que tivessem acesso estável à internet e que a entrada de microfone estivesse em pleno funcionamento. Conseguimos um total de 8 máquinas que satisfaziam simultaneamente essas necessidades e as anteriores.

Ainda em relação ao uso do LIMAT, tínhamos a questão dos horários, pois, além dos horários em que as aulas da disciplina eram ministradas, necessitávamos de um longo

[22] Disponível em https://www.apowersoft.com.br/gravador-de-tela-gratis.

horário de salvamento dos arquivos criados pelas capturas de tela. Em média cada máquina necessitava de 1h e 30min para salvamento do arquivo, e para não sobrecarregar a rede era possível salvar no máximo os arquivos de duas máquinas simultaneamente. Com a colaboração da equipe do LIMAT e de alguns professores da instituição, conseguimos ter essa demanda atendida.

Além das capturas de tela dos computadores utilizados pelos alunos no desenvolvimento das atividades de modelagem matemática e do material escrito produzido por eles em algumas das atividades, utilizamos mais dois recursos para a coleta de dados: a gravação de vídeo feita por uma câmera, na qual alunos, professora e pesquisador estavam enquadrados; e, gravação de áudio obtida por um gravador de voz que ficava sempre com o pesquisador.

Nossa participação em sala de aula se deu como Professor/Pesquisador, no sentido atribuído por Campos e Araújo (2015). Nessa perspectiva o pesquisador participa ativamente do desenvolvimento das atividades que constituem a pesquisa e sua atuação é dividida, em certos momentos o papel de pesquisador ganha destaque e em outros é o papel de professor que o faz.

A dinâmica das atividades foi planejada segundo os três momentos de Almeida e Dias (2004). Cada dupla de alunos desenvolveu cinco atividades de modelagem matemática. Quatro destas atividades foram propostas pelo professor/pesquisador, duas planejadas para o 1° momento – Atividade 1.1 e Atividade 1.2 – e duas para 2° momento – Atividade 2.1 e Atividade 2.2 –, e uma atividade no 3° momento, proposta e desenvolvida por cada uma das duplas de alunos – Atividade 3.1, Atividade 3.2 e Atividade 3.3.

Na última aula destinada ao desenvolvimento da Atividade 1.2, por outro motivo profissional extraordinário a professora regente, e por motivo pessoal o professor/pesquisador não estiveram presentes, sendo as atividades da aula conduzidas por uma professora substituta. Importante ressaltar que a professora substituta tinha familiaridade com a atividade, bem como, tem experiência com Modelagem Matemática e também com a Matemática utilizada para a finalização da atividade.

Na aula da disciplina ministrada entre o desenvolvimento das atividades 1.2 e 2.1 foi realizada o estudo e discussão do capítulo 1 de Almeida, Silva e Vertuan (2012). Caracteriza-se assim um dos momentos de *treinamento ostensivo* das *regras* no *fazer*

Modelagem Matemática. Nas atividades 2.1, 2.2, 3.1, 3.2 e 3.3 as duplas de alunos fizeram apresentação de suas atividades para todos os alunos da disciplina e o professor/pesquisador fez comentários e apontamentos sobre os desenvolvimentos e organização dos relatórios das atividades, aproveitando esse momento para orientar os alunos sobre alguns aspectos das *regras* no *fazer* Modelagem Matemática.

No quadro 1 apresentamos de forma sintética a dinâmica do desenvolvimento das atividades que constituem a pesquisa empírica desenvolvida.

QUADRO 1: DINÂMICA DE DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Aulas	Atividade(s) desenvolvida(s)	Alunos presentes	Dupla responsável	Momento de familiarização
Aula 1	Atividade 1.1 -Avaliação dos vídeos de um canal do youtube	A1, A2, A3, A4, A5, A6[23]	D1, D2, D3	1° momento *fase de treinamento*
Aula 2	Atividade 1.1 – Avaliação dos vídeos de um canal do youtube	A1, A2, A3, A4, A5	D1, D2, D3	1° momento *fase de treinamento*
Aula 3	Atividade 1.2 – Dengue no estado do Paraná	A1, A2, A3, A4	D1, D2	1° momento *fase de treinamento*
Aula 4	Atividade 1.2 – Dengue no estado do Paraná	A1, A2, A3, A4, A5, A6	D1, D2, D3	1° momento *fase de treinamento*
Aula 5 (Professora substituta)	Atividade 1.2 – Dengue no estado do Paraná	A2, A3, A5	D1, D2, D3	1° momento *fase de treinamento*
Aula 6	Estudo teórico	A1, A2, A3, A4, A5	Professora regente e Professor/pesquisador	Treinamento ostensivo
Aula 7	Atividade 2.1 – Uma árvore por habitante	A1, A2, A3, A4, A5	D1, D2, D3	2° momento *fase de treinamento*
Aula 8	Atividade 2.1 – Uma árvore por habitante	A1, A2, A3, A4, A5	D1, D2, D3	2° momento *fase de treinamento*
Aula 9	Atividade 2.1 – Uma árvore por habitante	A1, A2, A3, A4, A5, A6	D1, D2, D3	2° momento *fase de treinamento*
Aula 10	Atividade 2.2 – Cesta Básica	A1, A2, A3, A4, A5, A6	D1, D2, D3	2° momento *fase de treinamento*
Aula 11	Atividade 2.2 – Cesta Básica	A1, A2, A3, A4, A5, A6	D1, D2, D3	2° momento *fase de treinamento*
Aula 12	Atividade 2.2 – Cesta Básica	A1, A2, A3, A4, A5	D1, D2, D3	2° momento *fase de treinamento*
Aula 13	Atividade 3.1 – Energia Solar	A1, A2, A3, A4, A5, A6	D1	3° momento *seguir regras*
	Atividade 3.2 – Urina em Piscinas		D2	
	Atividade 3.3 – Pista de Skate		D3	
Aula 14	Atividade 3.1 – Energia Solar	A1, A2, A3, A4, A5	D1	3° momento *seguir regras*
	Atividade 3.2 – Urina em Piscinas		D2	
	Atividade 3.3 – Pista de Skate		D3	
Aula 15	Atividade 3.1 – Energia Solar	A1, A2, A3, A4	D1	3° momento *seguir regras*
	Atividade 3.2 – Urina em Piscinas		D2	
Aula 16 (Contra turno)	Atividade 3.1 – Energia Solar	A2, A3, A5	D1	3° momento *seguir regras*
	Atividade 3.3 – Pista de Skate		D3	
Aula 17 (Contra turno)	Atividade 3.2 – Urina em Piscinas	A1, A4	D2	3° momento *seguir regras*
Aula 18	Atividade 3.1 – Energia Solar		D1	3° momento

[23] A6 compareceu à aula no segundo horário.

	Atividade 3.2 – Urina em Piscinas	A1, A2, A3, A4, A5	D2	*seguir regras*
	Atividade 3.3 – Pista de Skate		D3	
Aula 19	Atividade 3.1 – Energia Solar	A1, A2, A3, A4, A5, A6	D1	3° momento *seguir regras*
	Atividade 3.2 – Urina em Piscinas		D2	
	Atividade 3.3 – Pista de Skate		D3	

Fonte: O autor.

5.2. Delineamentos Metodológicos

Levando em consideração o desenvolvimento da pesquisa empírica, o processo de coleta de dados bem como a análise dos dados coletados, caracterizamos essa pesquisa como qualitativa e interpretativa.

A pesquisa é qualitativa no sentido atribuído por Bogdan e Biklen (1994), já que abarca características apresentadas pelos autores: 1- a fonte direta de dados é o ambiente natural; 2- a investigação é descritiva; 3- o interesse é pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos; 4- a análise dos dados é realizada de forma indutiva; e, 5- o significado tem importância vital. Por ser qualitativa a pesquisa passa

> a ser concebida como uma trajetória circular em torno do que se deseja compreender, não se preocupando única e/ou aprioristicamente com princípios, leis e generalizações, mas voltando o olhar à qualidade, aos elementos que sejam significativos para o observador-investigador (GARNICA, 1997, p. 111).

É interpretativa no sentido apontado por Moreira (1997, p. 92), pois, preocupa-se com o significado e as interpretações do evento investigado, foi conduzida com uma observação participante intensa e longa do contexto escolar, seguido de uma extensa reflexão sobre o observado. Dessa reflexão se desenvolve um minucioso exame do ponto de vista interpretativo do próprio pesquisador, embasado em suas fontes teóricas – em nosso caso, a filosofia de Wittgenstein – e nas formas culturalmente apreendidas de ver o mundo. A investigação interpretativa pretende conhecer a realidade como é vista pelos que nela atuam diretamente, sendo que o investigador também deve usar o seu próprio ponto de vista para analisar os dados (PONTE, 2006, p.15).

Seguindo o que indicam Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (2004) no que se refere aos resultados qualitativos, nessa pesquisa visamos descrever e compreender o que está ocorrendo numa dada situação, ancorados na observação de comportamentos que não são predeterminados, sendo observados e relatados da forma como ocorrem.

Considerando, então, nossa questão de investigação, que está relacionado ao como se dá o *seguir regras* no *fazer* Modelagem Matemática em atividades de modelagem que utilizam recursos das tecnologias digitais, entendemos que é necessário realizar a análise dos dados empíricos em duas partes: uma análise específica e uma análise global.

As ações do professor/pesquisador referentes ao *treinamento da regra* no desenvolvimento das atividades do 1° momento – Atividades 1.1 e 1.2 – e do 2° momento – Atividades 2.1 e 2.2, são descritas anteriormente à análise específica. Nessa descrição evidenciamos o desenvolvimento da atividade e as ações de treinamento realizadas nesse desenvolvimento, também identificamos o tipo de treinamento e a localização desse desenvolvimento nas aulas direcionadas à realização das atividades de coleta de dados empíricos.

Na análise específica, apresentada no capítulo 6, o foco está voltado para a descrição e interpretação das ações que estão ligadas ao *seguir regras* no *fazer* Modelagem Matemática. Para isso nos embasamos nas ações elencadas no capítulo 4, que estão ligadas a proposta para o *fazer* Modelagem Matemática apresentada em Almeida, Silva e Vertuan (2012).

De acordo com Vertuan (2013, p. 240), quando cita Alves-Mazzotti e Gewandsznajder (2004): "As pesquisas qualitativas constituem-se em estudos descritivo-explicativos, uma vez que têm como objetivo, primeiro, descrever, identificar e explicar determinados fenômenos e, em seguida, estabelecer compreensão sobre o significativo dessa produção no contexto da área de pesquisa".

Nesse sentido, descrevemos as ações do *seguir regras* no *fazer* Modelagem Matemática realizadas no desenvolvimento das atividades do 3° momento. Na tese analisaremos as atividades desenvolvidas por D1 e D3, respectivamente Atividade 3.1 e Atividade 3.3. Esta opção levou em consideração dois aspectos: i) a quantidade de dados coletados para a pesquisa e a característica do movimento analito impossibilitou a utilização de todos os dados; ii) as duplas escolhidas apresentaram comportamentos distintos para com o desenvolvimento das atividades, vislumbrando-nos uma riqueza de cenários analisados.

Em cada atividade descrevemos as ações relacionadas a cada *regra* do *fazer* Modelagem Matemática elencadas no capítulo 4. A nossa interpretação do *seguir regras*

é realizada para cada *regra*, na qual apresentamos, entremeados às descrições, os argumentos e fundamentos que indicam que houve o *seguir regras* para a ação descrita.

Para sintetizar os resultados da análise do *seguir regras* no *fazer* Modelagem Matemática, apresentamos ao final das descrições de cada atividade um quadro resumo em que são indicadas a *regra*, a ação realizada e o resultado do *seguir regras*.

Ainda na análise específica descrevemos como ocorreu o *uso* dos recursos das tecnologias digitais nas ações realizadas no *seguir a regra*. Para tal, identificamos em quais das funções elencadas por Greefrath (2011) o *uso* dos recursos das tecnologias digitais se encaixa e como esse uso influenciou na realização da ação no *fazer* Modelagem Matemática.

A partir dos resultados obtidos na análise específica, realizamos a análise global que será apresentada no capítulo 7. Nela, realizamos reflexões sobre os aspectos do *treinamento da regra* e do *seguir regras* no *fazer* Modelagem Matemática obtidos na análise específica, principalmente no que se refere aos desdobramentos do *seguir regras* discutidos em 2.2.3.

Buscamos identificar na análise global como as ações de *treinamento da regra* realizadas no desenvolvimento das atividades dos 1° e 2° momentos de familiarização podem influenciar o *seguir regras* no desenvolvimento das atividades do 3° momento. Para isso, procuramos identificar possíveis pontos de convergência ou divergência nas ações de *treinamento da regra* e nas ações do *seguir regras*. Os quadros resumos nos auxiliam a identificar as possíveis relações dessas ações.

Ainda na análise global apresentamos nossas reflexões sobre como o *uso* dos recursos das tecnologias digitais esteve presente no *fazer* Modelagem Matemática. Também são discutidos aspectos referentes à Modelagem Matemática.

Esses são os delineamentos metodológicos em que pautamos nossas análises dos dados empíricos realizadas e apresentadas nos próximos capítulos.

6. DESCRIÇÃO E ANÁLISE ESPECÍFICA DAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA DESENVOLVIDAS

Esse capítulo está dividido em duas partes. Na primeira parte descrevemos as atividades da fase de *treinamento* e na segunda parte realizamos as análises específicas do *seguir regras*.

Na fase de treinamento descrevemos o desenvolvimento das atividades 1.1, 1.2, 2.1 e 2.2, do 1° e 2° momentos de familiarização dos alunos com atividades de modelagem matemática. Enfatizamos as ações de *treinamento* realizadas no desenvolvimento dessas atividades, sejam elas de *ensino ostensivo* ou por *uso das regras* em diferentes contextos.

Na análise específica descrevemos as ações realizadas nas atividades 3.1 e 3.3, desenvolvidas no terceiro momento de familiarização. Essas ações são analisadas de acordo com a descrição das *regras* do *fazer* Modelagem Matemática e da adequação do *uso* da *regra* no *jogo de linguagem* específico de cada atividade desenvolvida.

6.1. Atividades da fase de treinamento

Nesta seção descrevemos cada uma das atividades desenvolvidas pelos alunos no 1° e 2° momentos de familiarização propostos por Almeida e Dias (2004). Nessa descrição enfatizamos as ações de *treinamento* realizadas no desenvolvimento dessas atividades.

6.1.1. Atividades do primeiro momento

6.1.1.1 Atividade 1.1: Avaliações dos vídeos de um canal do youtube

Essa atividade foi o primeiro contato direto do professor/pesquisador com a turma no que diz respeito a realização de atividades de modelagem, visto que já havia acompanhado aulas anteriores da turma. Nesse sentido, a atividade foi realizada praticamente em sua totalidade com a orientação direta do professor/pesquisador, ou seja,

a atividade foi conduzida pelo professor/pesquisador que realizava perguntas e propunha reflexões enquanto a atividade era realizada em conjunto.

Para dar início a atividade os alunos receberam de forma impressa e por arquivo digital o enunciado e informações preparadas pelo professor/pesquisador (Quadro 2). A atividade é uma adaptação da atividade proposta em Souza, Oliveira e Almeida (2016).

QUADRO 2: ENUNCIADO E INFORMAÇÕES DA ATIVIDADE 1.1

Avaliações dos vídeos de um canal do youtube

O youtube é um site em que os usuários criam canais em que podem postar vídeos variados. Nos últimos cinco anos a audiência dos canais do youtube Brasil teve um aumento gigantesco, os dez canais com mais inscritos tem de 8 a 16 milhões de inscritos[24]. Os canais do youtube podem se tornar colaboradores da plataforma, com isso anúncios são inseridos ao início ou durante os vídeos o que gera certa renda para esses canais. A renda gerada para os canais colaboradores do youtube é calculada pelo número de visualizações que os vídeos do canal recebem, mas o valor pago pelas visualizações varia de acordo com o engajamento que o canal possui. O engajamento de um canal depende de alguns fatores, mas entre os principais estão o número de avaliações e compartilhamentos que o vídeo recebe. Nesse sentido, um canal que pretende ter um bom engajamento necessita se preocupar com o número de avaliações que seus vídeos recebem, compreender se os vídeos estão sendo avaliados de acordo com o número de visualizações que recebem, pois, nem todo usuário que visualiza um vídeo faz avaliação do mesmo.
Nesse contexto, resolvemos investigar[25] o número de avaliações que os vídeos de um canal do youtube recebem em relação ao número de visualizações. Pegamos o canal Porta dos Fundos como exemplo, pois é o canal com o segundo maior número de inscritos no youtubeBr e que foi o primeiro a ultrapassar a barreira dos 10 milhões de inscritos.

Tabela 1: Dados dos vídeos do canal Porta dos Fundos no segundo semestre do ano de 2016

Data de Publicação	Título	Visualizações	Avaliações	Likes	Unlikes	Url
02/07/2016	Murphy	2533882	144186	139212	4974	https://youtu.be/h6MVgp5qSf8
04/07/2016	Farmácia	2803132	153267	151263	2004	https://youtu.be/TiUK8oyKY70
07/07/2016	Zoeira	2765376	138415	129639	8776	https://youtu.be/9UcIRNYYeEc
09/07/2016	Histérica	2474966	128248	125524	2724	https://youtu.be/vqZRwb1divE
11/07/2016	Brinco	3456296	178263	175402	2861	https://youtu.be/HFKLSelZF6M
14/07/2016	Sommelier	2115234	106594	101811	4783	https://youtu.be/2kebmLSMKEM
16/07/2016	Obrigado, Jesus	3112804	218800	174658	44142	https://youtu.be/HHiv59exorc
18/07/2016	Empréstimo	2210412	112532	109256	3276	https://youtu.be/jnxE1t6JDIg
21/07/2016	Cotidiano	2235004	130947	126818	4129	https://youtu.be/Boev9n9CNLg
23/07/2016	Pra Ontem	2271126	124003	119718	4285	https://youtu.be/6m2W-lxGceM
25/07/2016	Imagina	2213309	139123	134086	5037	https://youtu.be/PgAFgSefmLM
28/07/2016	Satanás	3672133	180878	160960	19918	https://youtu.be/FAv0L8WFNqo
30/07/2016	Eles só pensam nisso	3407484	217641	213751	3890	https://youtu.be/KlqDFbIgRr0
01/08/2016	Posto Ipiranga	3248959	171543	167241	4302	https://youtu.be/OkW9idYB7Fo
04/08/2016	Belize	2903800	132247	130169	2078	https://youtu.be/G3Tjv8Oflms
06/08/2016	Boa Sorte	3888333	180821	166228	14593	https://youtu.be/fH4S9DTsq6M
08/08/2016	Pontual	2382358	146677	142604	4073	https://youtu.be/PSA7QwRMV7o
11/08/2016	Antidoping	2830195	138316	135725	2591	https://youtu.be/qsQmYcWT_NM
13/08/2016	Natação	2677167	158198	154213	3985	https://youtu.be/nFX7Sm9VA-I
15/08/2016	Hipismo	4217338	206643	200727	5916	https://youtu.be/hwBcY-BDeWk
18/08/2016	Badminton	2467186	130802	127438	3364	https://youtu.be/-iIorTpwLJI
20/08/2016	Anabolizante	2873251	134082	129429	4653	https://youtu.be/K4jgUiYpLjc
22/08/2106	Opinião	2049331	109850	104794	5056	https://youtu.be/nkxWCC9VvjU
25/08/2016	Record	3527549	174736	171094	3642	https://youtu.be/Qu3wC1YidGI
27/08/2016	Fim de Festa	2954680	138224	134911	3313	https://youtu.be/4kkreoNH_-g
29/08/2016	Whatsapp	4831178	229452	222796	6656	https://youtu.be/gGYD7f6ImAw
01/09/2016	Terrorismo	2695265	140560	135248	5312	https://youtu.be/oGixUd6jjs4

[24] http://top10mais.org/top-10-maiores-canais-brasileiros-do-youtube/
[25] Dados recolhidos no dia 20/01/2017.

03/09/2016	Javali	2559746	132110	128978	3132	https://youtu.be/VjUKCK-hYHE
05/09/2016	O Mundo Tá Chato	4316325	235531	220506	15025	https://youtu.be/KP4wBBZRCio
08/09/2016	Programa	2624184	158652	154146	4506	https://youtu.be/nsN8dShxrIk
10/09/2016	Pero Vaz	1982876	118126	112991	5135	https://youtu.be/g1XBDunN6b8
12/09/2016	Busão	3459565	166985	163765	3220	https://youtu.be/AqQ902lR29I
15/09/2016	Finesse	1890546	106530	100657	5873	https://youtu.be/EYx2KKWob7E
17/09/2016	Pessoa Amada	1874697	95975	91817	4158	https://youtu.be/mOcWKdnPMAc
19/09/2016	Desculpa	2145673	140189	134833	5356	https://youtu.be/d_n3QCrv5ic
22/09/2016	Milk Shake	5360468	270330	262340	7990	https://youtu.be/NAWQ5WQJrJg
24/09/2016	Teatro	2239102	150413	145789	4624	https://youtu.be/NFKODoxq5qw
26/09/2016	O Povo Fala	2203292	147554	143502	4052	https://youtu.be/W_AXdf1KbuQ
29/09/2016	Merchan	1973460	127674	123620	4054	https://youtu.be/67fEv37XV-Q
01/10/2016	Campanha Política	2374791	130512	126301	4211	https://youtu.be/z6Jee1IFJf0
03/10/2016	Teste de Elenco	1766235	119696	116533	3163	https://youtu.be/yYdoFP86tSw
06/10/2016	CPI	1630688	145799	141800	3999	https://youtu.be/USWY_okqBGk
08/10/2016	Céu Católico	3989348	259041	188192	70849	https://youtu.be/rGvuPnHvUIc
10/10/2016	Mamãe	2120143	133623	127049	6574	https://youtu.be/5rPLrTZxxeo
13/10/2016	Internet	1851837	148119	137104	11015	https://youtu.be/KaWCbggrvJg
15/10/2016	Cancelamento do Plano	1782242	107715	104430	3285	https://youtu.be/z1DkdvEkGpQ
17/10/2016	Chapeuzinho	2041951	154864	150008	4856	https://youtu.be/mk0uPRSWRN0
20/10/2016	Arte Cubista	1462955	96394	91874	4520	https://youtu.be/kxethi3ufcM
22/10/2016	Você sabe do que eu tô falando	1912013	128722	124580	4142	https://youtu.be/MSH-FA5O6wo
24/10/2016	Peraí	2070227	137140	134826	2314	https://youtu.be/qsasFv7xzX0
27/10/2016	Missa	2415452	152614	125240	27374	https://youtu.be/HdNEqPB8ZFU
29/10/2016	Cartão	2098518	132096	128811	3285	https://youtu.be/_Jd2Gl7mCAU
31/10/2016	Nulo	1890676	127361	124641	2720	https://youtu.be/R6r0x0CTTBo
03/11/2016	Vício	1793044	113211	107804	5407	https://youtu.be/aai4r5y8bAo
05/11/2016	Acode	1608388	110549	105844	4705	https://youtu.be/fg2hUOF5H0o
07/11/2016	Bagagem	2275281	121663	117569	4094	https://youtu.be/q2nDsh7xrtE
10/11/2016	Novas Medidas	1648036	103523	100490	3033	https://youtu.be/rQCPwmtJofM
12/11/2016	Criação	3554578	200607	181518	19089	https://youtu.be/YTlQ_2SaQmM
14/11/2016	Tática de Venda	1964252	115879	108527	7352	https://youtu.be/Fa8yA6zX4YU
17/11/2016	Necessidades Básicas	1931666	123578	120067	3511	https://youtu.be/PPcIYJw9y4g
19/11/2016	Pensador	1889863	96424	92356	4068	https://youtu.be/oAP-DKrNRWw
21/11/2016	Não Acredito	2067051	121956	114821	7135	https://youtu.be/YUslh4ag8Mo
24/11/2016	Uma Saída Para a Crise	1605396	116079	112272	3807	https://youtu.be/DJwFgvrWeqA
26/11/2016	Detalhes	1547339	102303	86528	15775	https://youtu.be/IkKe4d6XwsQ
28/11/2016	Novo Pornô	2976129	128019	122578	5441	https://youtu.be/9fmkx70D7ww
01/12/2016	Futuro	1885033	105296	102066	3230	https://youtu.be/_eqw7u49hdg
03/12/2016	Amigo Secreto na Cadeia	3826553	208844	205614	3230	https://youtu.be/nhZ-sdPVIBw
05/12/2016	Jura	2258694	159890	155287	4603	https://youtu.be/dss5OdptIO0
08/12/2016	Odebrecht	2284614	120994	118357	2637	https://youtu.be/6icSjyj5lTk
10/12/2016	Confere	1865727	113566	102653	10913	https://youtu.be/Rl2GJdd0ucg
12/12/2016	Aprovação	1566338	115734	113715	2019	https://youtu.be/L3svcthSDe8
15/12/2016	Necessidades	1592789	102015	97081	4934	https://youtu.be/ZGhNO7jzJMk
17/12/2016	Discutindo a Relação	1758082	107947	105553	2394	https://youtu.be/-jXQmEfUTrk
19/12/2016	Reis Magia	1804375	113855	101652	12203	https://youtu.be/_7iZF0wwA5c
22/12/2016	De onde vêm os bebês	1695141	118352	103541	14811	https://youtu.be/ri2ZIdGMx7E
24/12/2016	Aniversário de Jesus	1981174	119326	102377	16949	https://youtu.be/cw6zL-1s7-8
26/12/2016	Disse Jesus	1746563	134232	123196	11036	https://youtu.be/QDQhUJMqefI
29/12/2016	Lava-Jato	1366652	94787	90455	4332	https://youtu.be/Ep831CIwJ4I
31/12/2016	Cinco Minutinhos	2283632	130460	124048	6412	https://youtu.be/hkT_lCgKYSI

Fonte: O autor.

A primeira ação de *treinamento* acontece quando o professor/pesquisador explica para a turma sua proximidade para com o tema da atividade (Quadro 3).

QUADRO 3: TREINAMENTO REFERENTE A IDENTIFICAÇÃO DA SITUAÇÃO INICIAL PROBLEMÁTICA DA ATIVIDADE 1.1

Professor/Pesquisador (PP): Então,..., eu....faz uns dois anos, três anos, que [...] a gente acabava utilizando só o youtube e netflix, [...] assisto mais o youtube na TV do que outra coisa mesmo.

Fonte: Transcrição de gravação de vídeo.

Foram discutidos alguns aspectos da situação-inicial, os alunos acessam os vídeos descritos na tabela 1 dos dados – os links foram disponibilizados pelo professor/pesquisador para que os alunos tivessem acesso as fontes dos dados, *treinamento* por *uso da regra* – e da observação das estatísticas desses vídeos se chegou a uma conclusão conjunta de que as visualizações e avaliações sempre estão mudando porque sempre vai ter alguém assistindo e avaliando os vídeos, dessa maneira era necessário relativizar os dados, conforme indica o Quadro 4.

QUADRO 4: PARTE I DA RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 1.1

Na tabela 2 apresentamos o percentual de avaliações em relação ao número de visualizações de cada vídeo da tabela 1. O cálculo do percentual foi realizado utilizando-se o modelo $P = 100\left(\frac{A}{V}\right)$, em que: $P = percentual\ de\ avaliações\ em\ relação\ ao\ número\ de\ visualizações$; $V = número\ de\ visualizações\ do\ vídeo$; $A = número\ de\ avaliações\ recebidas\ pelo\ vídeo$.

Tabela 2: Percentual de avaliações em relação as visualizações

Título	Visualizações	Avaliações	Percentual de avaliações
Murphy	2533882	144186	5,69%
Farmácia	2803132	153267	5,47%
Zoeira	2765376	138415	5,01%
Histérica	2474966	128248	5,18%
Brinco	3456296	178263	5,16%
Sommelier	2115234	106594	5,04%
Obrigado, Jesus	3112804	218800	7,03%
Empréstimo	2210412	112532	5,09%
Cotidiano	2235004	130947	5,86%
Pra Ontem	2271126	124003	5,46%
Imagina	2213309	139123	6,29%
Satanás	3672133	180878	4,93%
Eles só pensam nisso	3407484	217641	6,39%
Posto Ipiranga	3248959	171543	5,28%
Belize	2903800	132247	4,55%
Boa Sorte	3888333	180821	4,65%
Pontual	2382358	146677	6,16%
Antidoping	2830195	138316	4,89%
Natação	2677167	158198	5,91%
Hipismo	4217338	206643	4,90%
Badminton	2467186	130802	5,30%
Anabolizante	2873251	134082	4,67%
Opinião	2049331	109850	5,36%
Record	3527549	174736	4,95%
Fim de Festa	2954680	138224	4,68%

Whatsapp	4831178	229452	4,75%	
Terrorismo	2695265	140560	5,22%	
Javali	2559746	132110	5,16%	
O Mundo Tá Chato	4316325	235531	5,46%	
Programa	2624184	158652	6,05%	
Pero Vaz	1982876	118126	5,96%	
Busão	3459565	166985	4,83%	
Finesse	1890546	106530	5,63%	
Pessoa Amada	1874697	95975	5,12%	
Desculpa	2145673	140189	6,53%	
Milk Shake	5360468	270330	5,04%	
Teatro	2239102	150413	6,72%	
O Povo Fala	2203292	147554	6,70%	
Merchan	1973460	127674	6,47%	
Campanha Política	2374791	130512	5,50%	
Teste de Elenco	1766235	119696	6,78%	
CPI	1630688	145799	8,94%	
Céu Católico	3989348	259041	6,49%	
Mamãe	2120143	133623	6,30%	
Internet	1851837	148119	8,00%	
Cancelamento do Plano	1782242	107715	6,04%	
Chapeuzinho	2041951	154864	7,58%	
Arte Cubista	1462955	96394	6,59%	
Você sabe do que eu tô falando	1912013	128722	6,73%	
Peraí	2070227	137140	6,62%	
Missa	2415452	152614	6,32%	
Cartão	2098518	132096	6,29%	
Nulo	1890676	127361	6,74%	
Vício	1793044	113211	6,31%	
Acode	1608388	110549	6,87%	
Bagagem	2275281	121663	5,35%	
Novas Medidas	1648036	103523	6,28%	
Criação	3554578	200607	5,64%	
Tática de Venda	1964252	115879	5,90%	
Necessidades Básicas	1931666	123578	6,40%	
Pensador	1889863	96424	5,10%	
Não Acredito	2067051	121956	5,90%	
Uma Saída Para a Crise	1605396	116079	7,23%	
Detalhes	1547339	102303	6,61%	
Novo Pornô	2976129	128019	4,30%	
Futuro	1885033	105296	5,59%	
Amigo Secreto na Cadeia	3826553	208844	5,46%	
Jura	2258694	159890	7,08%	
Odebrecht	2284614	120994	5,30%	
Confere	1865727	113566	6,09%	
Aprovação	1566338	115734	7,39%	
Necessidades	1592789	102015	6,40%	
Discutindo a Relação	1758082	107947	6,14%	
Reis Magia	1804375	113855	6,31%	
De onde vêm os bebês	1695141	118352	6,98%	
Aniversário de Jesus	1981174	119326	6,02%	
Disse Jesus	1746563	134232	7,69%	
Lava-Jato	1366652	94787	6,94%	
Cinco Minutinhos	2283632	130460	5,71%	

Fonte: O autor.

Nessa relativização dos dados ocorreu a primeira seleção de variáveis no modelo de cálculo do percentual. O professor/pesquisador realiza um *treinamento ostensivo* referente à definição da variável P, que a variável deve ser definida considerando a característica do que ela representa: ***PP****: P! Então o que é P? [..] P como está aqui é uma razão, mas, a gente quer que ele seja [...] uma porcentagem, né.*

O software Excel é utilizado para calcular as porcentagens, e como alguns alunos não sabiam utilizar o professor/pesquisador os ensina a fazer. Durante essa ação de ensino ele evidencia que escrever um modelo no papel e no software envolve linguagens diferentes, as regras são diferentes.

Depois desses cálculos o professor/pesquisador propôs o problema específico para ser resolvido pelos alunos (Quadro 5).

QUADRO 5: PROBLEMA DA ATIVIDADE 1.1

Problema: Realizada essa investigação dos dados até este ponto, podemos agora delimitar um Problema Específico a ser respondido. Como contextualizado anteriormente o interesse do canal é saber numericamente como seus vídeos vêm sendo avaliados. Nesse sentido propomos o seguinte problema: *De que maneira podemos medir o grau de satisfação dos usuários nas avaliações dos vídeos deste canal?*

Fonte: O autor.

O professor/pesquisador busca conduzir os alunos pelo "mesmo caminho" que percorreu na formulação do problema, caracterizando *treinamento* por *uso* da *regra* em que mostra que o problema foi formulado a partir de algumas reflexões sobre a situação-inicial e de seus dados.

Outro treinamento, mas com caráter de *ensino ostensivo,* realizado pelo professor/pesquisador diz respeito à simplificação realizada para a formulação do problema (Quadro 6).

QUADRO 6: SIMPLIFICAÇÃO DOS DADOS DA ATIVIDADE 1.1

PP: Isso na Modelagem, [...] tipo, deixar os likes e deslikes por enquanto de lado é fazer uma... uma... simplificação dos dados, certo? Então, a gente tem uma quantidade de dados a gente vai simplificar eles e não vai trabalhar com... com os likes e deslikes, só com o número total que é o número total de avaliações, certo?

Fonte: Transcrição de gravação de vídeo.

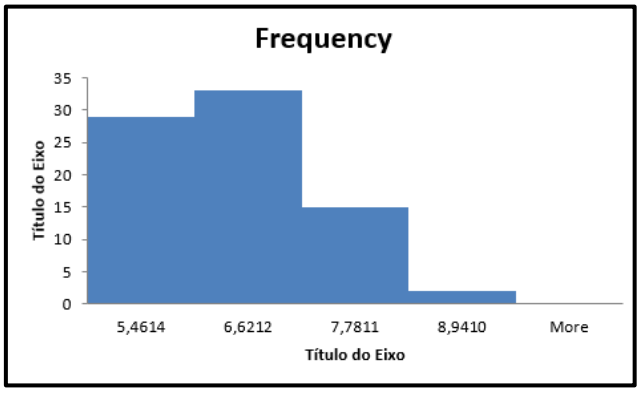
Para medir o grau de satisfação nas avaliações dos vídeos foi concluído que era necessário criar uma medida, uma categorização. Para construir essa categorização era necessário agrupar os dados e assim as categorias emergiriam. Para agrupar os dados optou-se pelo gráfico de colunas, mais especificamente pelo Histograma. Essa foi a

primeira hipótese formulada na atividade, que foi determinada por meio da condução do professor/pesquisador, caracterizando *treinamento* por *utilização da regra*.

Os dados das tabelas 1 e 2 da atividade estavam organizados no Excel, logo, a construção do histograma também foi realizada nesse software. Contudo, os alunos não sabiam realizar essa construção no software, então, o professor/pesquisador juntamente com a professora regente mostraram como realizá-la.

Na construção do histograma foi necessário realizar mais uma hipótese, pois, a partir da condução do professor/pesquisador – *treinamento* por *uso da regra* –, notou-se que a primeira resolução realizada, considerando o número de intervalos calculados a partir da fórmula de Sturgues, resultou em um histograma com oito intervalos, o que resultaria numa categorização com muitos itens e ainda a localização das medidas de tendência central nesses intervalos foram consideradas inadequadas. Nesse sentido, foi formulada a hipótese de mudar o número de intervalos para 4.

FIGURA 9: HISTOGRAMA CONSTRUÍDO NA ATIVIDADE 1.1



Fonte: O autor.

A partir do histograma com 4 intervalos foi determinada a categorização (Quadro 7). Durante a categorização as variáveis referentes as categorias foram selecionadas, ação realizada em conjunto, caracterizando *treinamento* por *utilização* da *regra*.

QUADRO 7: PARTE II DA RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 1.1

Categorizamos o percentual do número de avaliações em relação ao número de visualizações da seguinte maneira: $INSATISFATÓRIO \rightarrow I = [0; 5{,}46\%]$ $SATISFATÓRIO \rightarrow S = (5{,}46\%, 6{,}62\%]$ $BEM\ SATISFATÓRIO \rightarrow B = (6{,}62\%, 7{,}78\%]$ $MUITO\ SATISFATÓRIO \rightarrow M = (7{,}78\%, 100\%]$

Fonte: O autor.

Foi o professor/pesquisador quem conduziu a determinação de que no segundo intervalo do histograma o grau de satisfação do número de avaliações em relação ao

número de visualizações foi considerado satisfatório, pois, chamou atenção para o fato das medidas de tendência central estarem inseridas nele. Ação relacionada tanto à construção do modelo da categorização, quanto a solucionar o problema, caracterizando-a como *treinamento* por *utilização da regra*.

A partir da categorização se chegou à resposta ao problema proposto.

QUADRO 8: PARTE III DA RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 1.1

Respondendo ao problema: Tendo $A = número\ de\ avaliações\ do\ vídeo$, $V = número\ de\ visualizações\ do\ vídeo$, se o percentual do número de avaliações em relação ao número de visualizações, $P = 100\left(\frac{A}{V}\right)$, pertencer ao intervalo $S = (5{,}46\%, 6{,}62\%]$, o número de avaliações do vídeo será considerado *SATISFATÓRIO*.

Fonte: O autor.

O professor/pesquisador orienta os alunos para o fato de que o problema formulado indica um caminho de investigação e que os procedimentos propostos e realizados durante o desenvolvimento da atividade devem sempre visar a solução para esse problema.

Como apresentado em Souza, Oliveira e Almeida (2016) essa atividade possui características de uma modelagem prescritiva, logo, não é possível realizar a validação direta, neste caso, será possível uma meta-validação e crítica dos resultados. Os autores propõem que os seguintes pontos sejam considerados:

1. Consequências dos resultados de modelagem para o discurso sobre as questões abordadas pelo esforço de modelagem: O conteúdo dos vídeos que não se enquadram nos intervalos S e B podem ser verificados pelo canal analisado, com o intuito de identificar os motivos de terem um número Insatisfatório de avaliações ou evidenciar os que tem um número Muito Satisfatório de avaliações;

2. Comparar e contrastar o modelo obtido com alternativas reais ou potenciais do modelo: Realizar uma análise do envolvimento (neste caso, pela análise da relação entre visualização e curtidas) de cada vídeo é relevante, pois permite entender o quanto o público aceita o conteúdo do vídeo. Neste caso, é possível tentar compreender, especificamente, o conteúdo que um vídeo tinha que outros não tinham, reforçando nos próximos vídeos ações que geram mais engajamento;

3. Considerar o impacto dos requisitos ou desejos alterados para a modelagem e os seus resultados: Os critérios de determinação das categorias podem ser questionados

ou as consequências para a situação-problema, caso a categorização tivesse sido construída de outra maneira.

Considerando esses 3 pontos, o professor/pesquisador orientou os alunos que fizessem uma reflexão sobre o resultado da modelagem para a situação investigada (Quadro 9).

QUADRO 9: INSTRUÇÕES PARA A METAVALIDAÇÃO DA ATIVIDADE 1.1

PP: [...] Quero que vocês façam mais uma coisa: [...] pensar sobre a modelagem que a gente fez, dos pontos que ela pode servir para o canal, por exemplo. Vamos pensar assim, que impacto que tem para a realidade do problema. [...] A gente fez a modelagem [...] fez ali uma categorização, certo. Vamos pensar que isso seja agora um grau de que o canal vai seguir [...] um vídeo que saiu depois disso, ele vai e faz esse cálculo da avaliação em relação ao percentual, né, o que ele vai interferir essa nossa categorização, essa nossa modelagem, vai... vai.... resultar no que para o problema? Certo. Então vocês façam isso [...] O que o modelo interfere na situação inicial. [...] essa nossa modelagem, esse modelo que a gente preparou aqui da categorização, como que ele vai interferir, pontos ele vai interferir. [...] O que ele pode interferir na situação inicial. Ah então... se fosse uma diferente categorização... reflita um pouco sobre o problema, sobre a situação e o resultado da modelagem, ok.

Fonte: Transcrição de gravação vídeo e áudio e capturas de tela.

As ações de *treinamento* estiveram presentes durante todo o desenvolvimento da atividade, no quadro 10 apresentamos de forma sintética esses *treinamentos*.

QUADRO 10: TREINAMENTOS REALIZADOS NA ATIVIDADE 1.1

***Regra* do *fazer* Modelagem Matemática**	**Desenvolvimento da atividade**	**Ação de treinamento realizadas pelo professor/pesquisador**	***Uso* dos recursos das tecnologias digitais**	**Tipo de treinamento**	**Aula**
Identificar uma situação-inicial problemática	Discutir aspectos da situação inicial-inicial	Explicar para a turma sua proximidade para com o tema da atividade	*Investigação*: situação oriunda do site de vídeos youtube	Uso da regra	Aula 1
Coletar Dados	Acessar os vídeos do canal para verificar o número de visualizações e avaliações	Disponibilizar o link dos vídeos, para os alunos terem acesso as fontes dos dados	*Investigação*: dados coletados diretamente do youtube	Uso da regra	Aula 1
Formular o Problema	Discutir aspectos da situação-inicial envolvidas na formulação do problema	Conduzir os alunos pelo "mesmo caminho" que percorreu na formulação do problema		Uso da regra	Aula 1
Realizar Simplificações	Desconsiderar o número de likes e unlikes, considerando apenas o número de visualizações e avaliações	Explicar que essa ação se caracteriza como uma simplificação	*Calculação*: utilizar o Excel para calcular o percentual	Ensino Ostensivo	Aula 1
Formular Hipóteses	Agrupar os dados utilizando um Histograma, para criar uma categorização	Conduzir discussões sobre a necessidade de criar uma categorização e de que como agrupar os dados		Uso da regra	Aula 1
	Diminuir o número de intervalos do Histograma	Explicar para os alunos que o número de intervalos era muito grande e que as medidas de tendência central não se localizavam no intervalo com maior frequência	*Visualização*: observar o gráfico Histograma construído no Excel	Uso da regra	Aula 2
Selecionar Variáveis	Definição da variável P no modelo de cálculo do percentual do número de avaliações em relação ao número de visualizações	Explicar para os alunos que a variável deve ser definida considerando a característica do que ela representa		Ensino Ostensivo	Aula 1
	Definir as variáveis da categorização	Conduzir a discussão sobre as variáveis da categorização		Uso da regra	Aula 2

Construir o Modelo	Construir o Histograma utilizando o software Excel	Ensinar os alunos a utilizar as ferramentas do software Excel para construir o Histograma	*Experimentação*: construir o Histograma utilizando o Excel	Ensino Ostensivo	Aula 2
	Identificar o segundo intervalo do Histograma como Satisfatório	Conduzir a discussão de que o segundo intervalo do Histograma apresentava a maior frequência e as medidas de tendência central estavam nele localizadas	*Visualização*: observar a posição das medidas de tendência central nos intervalos do Histograma	Uso da regra	Aula 2
Apresentar uma solução para o problema	Identificar o segundo intervalo do Histograma como Satisfatório	Conduzir a discussão de que o segundo intervalo do Histograma apresentava a maior frequência e as medidas de tendência central estavam nele localizadas	*Calculação*: utilizar o Excel para determinar o valor das medidas de tendência central dos dados	Uso da regra	Aula 2
Analisar a resposta em relação à Matemática	Realização de metavalidação e crítica dos resultados	Orientar os alunos a refletirem sobre o resultado da modelagem para a situação investigada		Uso da regra	Aula 2
Analisar a resposta em relação ao Problema					

Fonte: O autor.

6.1.1.2 Atividade 1.2: Dengue no Estado do Paraná

Nessa atividade novamente foi entregue aos alunos o material impresso e o arquivo com o enunciado e informações para a realização da atividade.

QUADRO 11: ENUNCIADOS E INFORMAÇÕES DA ATIVIDADE 1.2

Dengue no Estado do Paraná

A Dengue é uma doença causada por um vírus transmitido pela picada do mosquito *Aedes Aegypti*. Há mais de cinco anos vem ocorrendo uma epidemia por todo território nacional, incluindo o estado do Paraná. Está epidemia traz grande preocupação à população e para os órgãos competentes, tanto que a Secretaria de Saúde do Estado do Paraná (SESA/PR) dispõe um site[26] totalmente destinado a informações sobre a doença. As campanhas de combate ao "mosquito da dengue" são constantes e uma vacina já foi desenvolvida.

O SESA/PR também publica periodicamente o Boletim da Dengue, no qual apresenta um panorama geral sobre os casos de dengue no Estado do Paraná. Abaixo está apresentada uma tabela com os casos de dengue confirmados no Estado do Paraná, considerando o período entre Agosto de 2016 (contando a partir de 10/08/2016) e Julho de 2017[27].

Tabela 1: **Casos de dengue no Estado do Paraná**

Nº do Informe no período	**Período (semana/ano)**	**Dia da atualização**	**Número total de casos no Paraná**
1	31/2016 a 32/2016	16/08/2016	0
2	31/2016 a 33/2016	23/08/2016	1
3	31/2016 a 34/2016	30/08/2016	10
4	31/2016 a 35/2016	06/09/2016	
5	31/2016 a 36/2016	13/09/2016	27
6	31/2016 a 37/2016	20/09/2016	39
7	31/2016 a 38/2016	27/09/2016	60
8	31/2016 a 39/2016	04/10/2016	77
9	31/2016 a 40/2016	11/10/2016	90
10	31/2016 a 41/2016	18/10/2016	108
11	31/2016 a 42/2016	25/10/2016	108

[26] http://www.dengue.pr.gov.br/

[27] Ver relatórios completos: http://www.dengue.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=28.

12	31/2016 a 43/2016	01/11/2016	110
13	31/2016 a 44/2016	08/11/2016	141
14	31/2016 a 46/2016	22/11/2016	174
15	31/2016 a 47/2016	29/11/2016	217
16	31/2016 a 48/2016	06/12/2016	280
17	31/2016 a 49/2016	13/12/2016	298
18	31/2016 a 50/2016	20/12/2016	319
19	31/2016 a 51/2016	23/12/2016	326
20	31/2016 a 01/2017	10/01/2017	366
21	31/2016 a 02/2017	17/01/2017	403
22	31/2016 a 03/2017	24/01/2017	439

Tomando como base os dados da tabela investigue: "Quantos casos de dengue serão confirmados no Estado do Paraná pelo Boletim da Dengue do SESA/PR ao final do período?"

Fonte: O autor.

O professor/pesquisador explica seu envolvimento com o tema, evidenciando pontos que o levaram a identificá-lo como uma problemática, caracterizando a primeira ação de *treinamento* nessa atividade, no caso por *uso da regra*: *PP: Então, até ano passado eu morava em Londrina. Lá, até por causa do calor, é bem maior a incidência de casos e... eu morava num bairro um pouco mais afastado lá e passava uma vez por mês no mínimo o Agente Sanitário [...] é uma coisa assim que preocupa*.

Outro treinamento por *uso* da *regra* realizado na atividade se refere à coleta de dados e à simplificação. O professor/pesquisador pede que os alunos acessem em seus computadores os boletins do SESA/PR, explica as informações contidas nos boletins e indica quais dessas informações utilizou na coleta de dados apresentada no quadro 11.

O professor/pesquisador explica que o problema formulado conduz a resolução da atividade (Quadro 12).

QUADRO 12: O PROBLEMA CONDUZ A MODELAGEM – ATIVIDADE 1.2

PP: Agora, então, parte importante dessa atividade que é o problema. Então, lembram da atividade anterior que eu sempre estava frisando o problema? Por quê? Por que é esse aqui... é esse problema que vai conduzir a nossa investigação

Fonte: Transcrição de gravação de vídeo.

Indicando um *treinamento ostensivo*, pois, evidencia uma das características da formulação do problema, que é direcionar a investigação da atividade de modelagem matemática para uma especificidade da situação da qual ainda falta compreensão (Almeida, Silva e Vertuan, p.15).

A partir do problema cada dupla desenvolveu a atividade, mas, guiados pelas orientações do professor/pesquisador. De maneira geral as resoluções convergiram para

o mesmo desenvolvimento. Nesse sentido, apresentamos no quadro 13 uma resolução para a atividade que as resume.

QUADRO 13: RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 1.2

Primeiramente é possível observar que os boletins são em sua maioria atualizados semanalmente ou a cada sete dias, entretanto não acontece em todos os casos (por exemplo entre os informes 13 e 14, e entre os informes 19 e 20), logo, sentimos a necessário de criar um outro parâmetro para o tempo percorrido. Nesse sentido, acrescentamos a partir da hipótese 1 (H1) uma coluna com os dias percorridos a partir de 16/08/2016 na tabela 1.

H1: O tempo considerado em cada informe será contabilizado em dias percorridos a partir de 16/08/2016.

Tabela 2: **Casos de dengue no Estado do Paraná em dias**

Nº do Informe no período	Período (semana/ano)	Dia da atualização	Dias percorridos a partir de 16/08/2016	Número total de casos no Paraná
1	31/2016 a 32/2016	16/08/2016	0	0
2	31/2016 a 33/2016	23/08/2016	7	1
3	31/2016 a 34/2016	30/08/2016	14	10
4	31/2016 a 35/2016	06/09/2016	21	
5	31/2016 a 36/2016	13/09/2016	28	27
6	31/2016 a 37/2016	20/09/2016	35	39
7	31/2016 a 38/2016	27/09/2016	42	60
8	31/2016 a 39/2016	04/10/2016	49	77
9	31/2016 a 40/2016	11/10/2016	56	90
10	31/2016 a 41/2016	18/10/2016	63	108
11	31/2016 a 42/2016	25/10/2016	70	108
12	31/2016 a 43/2016	01/11/2016	77	110
13	31/2016 a 44/2016	08/11/2016	84	141
14	31/2016 a 46/2016	22/11/2016	98	174
15	31/2016 a 47/2016	29/11/2016	105	217
16	31/2016 a 48/2016	06/12/2016	112	280
17	31/2016 a 49/2016	13/12/2016	119	298
18	31/2016 a 50/2016	20/12/2016	126	319
19	31/2016 a 51/2016	23/12/2016	129	326
20	31/2016 a 01/2017	10/01/2017	147	366
21	31/2016 a 02/2017	17/01/2017	154	403
22	31/2016 a 03/2017	24/01/2017	161	439

A partir desse ponto partimos para a resolução do problema: "Quantos casos de dengue serão confirmados no Estado do Paraná pelo Boletim da Dengue do SESA/PR ao final do período?"

Nos perguntamos agora: qual é o final do período? Seguindo H1 a pergunta seria: qual o final do período em dias percorridos a partir de 16/08/2015? Para responder a pergunta observamos o histórico[28] dos boletins do SESA/PR e observamos que os períodos em geral são de um ano, dessa maneira propomos a segunda hipótese:

H2: o final do período será percorrido um ano, ou seja, 365 dias.

Passamos a determinação de uma relação matemática que represente a situação apresentada. Neste ponto podemos ter dois caminhos, não necessariamente disjuntos. Num primeiro momento podemos utilizar o software Excel para observarmos o comportamento dos pontos. Mas que pontos? Necessitamos determinar que variáveis iremos considerar.

Variáveis:

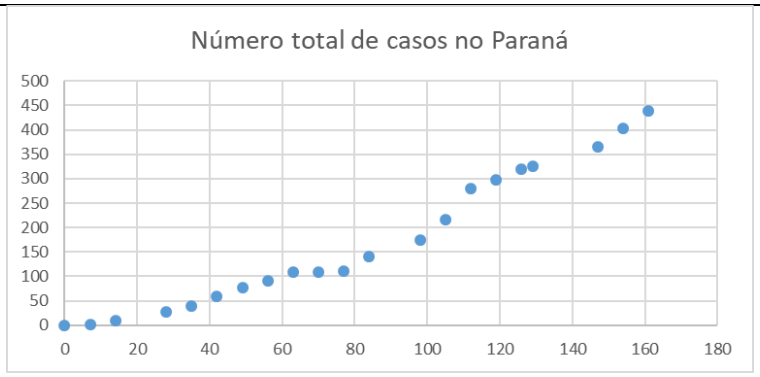
$t \rightarrow tempo\ em\ dias\ percorridos\ a\ partir\ de\ 16/08/2016$

$C(t) \rightarrow casos\ de\ dengue\ no\ tempo\ t$

Seguindo, inserimos no software uma coluna com os dias percorridos a partir de 16/08/2016 e outra com o número de casos equivalente a cada um dos dias, e a partir desses dados construímos o gráfico de dispersão.

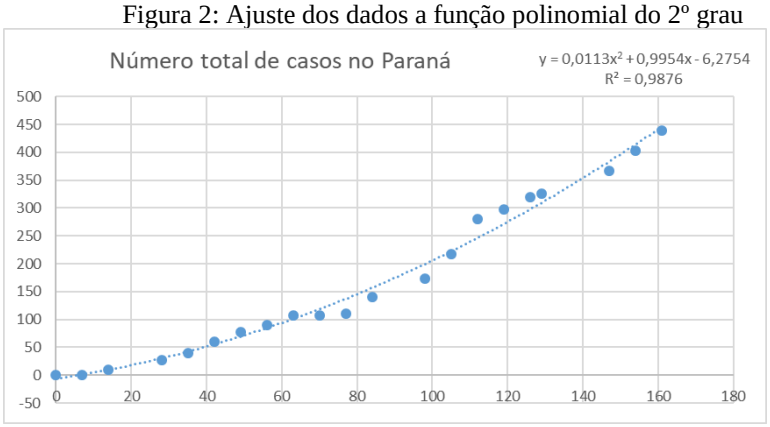
Figura 1: Gráfico de dispersão

[28] http://www.dengue.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=3



Ainda utilizando o software podemos utilizar a ferramenta "Inserir linha de tendência" para observar o comportamento dos dados segundo uma função. Para nosso caso a função que melhor se ajustou aos dados foi a polinomial do 2º grau.

Figura 2: Ajuste dos dados a função polinomial do 2º grau



O modelo obtido colocado sobre as variáveis do nosso problema é $C(t) = 0{,}0113t^2 + 0{,}9954t - 6{,}2754$. Para respondermos ao problema aplicamos $t = 365$ no modelo:

$$C(365) = 0{,}0113(365)^2 + 0{,}9954(365) - 6{,}2754$$
$$C(365) = 1505{,}4425 + 363{,}321 - 6{,}2754$$
$$C(365) = 1862{,}488$$

O resultado seria de 1862,488 casos de dengue confirmados ao final de 365 dias, entretanto, não existe 0,488 caso de dengue, logo, teremos que propor uma terceira hipótese:

H3: Como os casos de dengue são representados por quantidades inteiras, consideraremos todo número de casos com valores decimais arredondado para cima.

Nesse sentido obtemos a resposta de 1863 casos de dengue confirmados no estado do Paraná após o período de agosto de 2016 a julho de 2017.

Fonte: O autor.

Para a formulação da primeira hipótese o professor/pesquisador explica que considerações como essa são denominadas de hipóteses em uma atividade de modelagem matemática, caracterizando um *treinamento* por *ensino ostensivo* dessa *regra*: *PP: mas esses 7 dias depende de começar em algum dia. [...] isso é uma hipótese que vocês estão levando. [...] Não é uma informação, é uma coisa que vocês estão considerando*.

Também relacionado a essa primeira hipótese o professor/pesquisador pede que os alunos comuniquem no relatório da atividade como chegaram na determinação do dia informado na hipótese. Isso vai ao encontro das características da hipótese evidenciadas

em Almeida, Palharini e Tortola (2015), de ser uma "suposição bem fundamentada", assim, caracterizando mais uma ação de *treinamento* da *regra* por *ensino ostensivo*.

A necessidade de se definir um valor exato para o período analisado na segunda hipótese foi uma orientação dada pelo professor/pesquisador. Como essa informação não estava nos dados coletados, essa ação do professor/pesquisador se caracteriza como um *treinamento* por *uso da regra* no que se refere ao aspecto ressaltado em Almeida, Palharini e Tortola (2015) de incorporar por meio da formulação de hipóteses informações da situação que não estão disponíveis nos dados coletados.

Na formulação da terceira hipótese o professor/pesquisador explica que o arredondamento deve levar consideração o contexto da atividade e que isso deve ser evidenciado como uma hipótese, bem como sua fundamentação: *"PP: Número de casos vai ter que ser um número inteiro, então, isso vai ter que ir como uma hipótese também. [...] Pensa assim, se tiver 0,1 pessoa com dengue eu tenho 1 pessoa com dengue [...] Então, é arredondamento pra cima"*. Caracterizando novamente um *treinamento da regra* por *ensino ostensivo*.

Na definição das variáveis dessa atividade, o professor/pesquisador explica que a natureza das variáveis deve ser considerada: índice dos boletins é uma variável discreta e semanas, dias, tempo, é uma variável contínua. Uma ação que indica um *treinamento* por *uso da regra* referente ao aspecto de que as características das variáveis selecionadas devem ser consideradas.

O professor/pesquisador também evidencia que é necessário sempre definir as variáveis antes de construir o modelo: *"PP: Então, é bom sempre vocês também definirem as variáveis [...] tal letra, tal incógnita vai ser isso, tal incógnita vai ser aquilo"*; caracterizando mais um *treinamento ostensivo* da *regra*.

Quando os alunos fazem o ajuste de curva no gráfico de dispersão o professor/pesquisador dá a seguinte orientação: *"PP: Não é só a adaptação desses pontos com a tendência [...] é a adaptação da situação desses pontos com a tendência"*. Essa orientação é realizada no sentido de *treinar ostensivamente* os alunos para o fato de que na construção do modelo não são apenas os aspectos matemáticos que devem ser considerados, é necessário que a tendência seja coerente com os dados de número de casos, no caso da Atividade 1.2.

As soluções são produzidas por cada dupla de forma independente e comunicadas no relatório da atividade. Assim, o *treinamento* por *uso* da *regra*, nesse caso, se caracteriza pela experiência em apresentar uma solução para o problema em uma atividade diferente.

A interpretação e validação dessa atividade foi apresentada aos alunos na Aula 5. Nela foi discutida uma resolução alternativa que mostra a matemática que o software utiliza para determinar o ajuste de curva (Quadro 14). Se caracteriza como um *treinamento ostensivo* das *regras* da matemática envolvidas na construção do modelo, e também na necessidade de validar os procedimentos matemáticos utilizados nessa construção.

QUADRO 14: RESOLUÇÃO ALTERNATIVA/VALIDAÇÃO DA ATIVIDADE 1.2

Outro modo de resolver esse problema é utilizando o conceito de mínimos quadrados para funções polinomiais. Observando o comportamento do gráfico de dispersão da figura 1 podemos determinar que esse comportamento pode ser descrito por uma função polinomial do 2º grau do tipo $f(x) = ax^0 + bx^1 + cx^2$ ou na forma matricial (se $f(x) = y$) $[x^0 \quad x^1 \quad x^2] \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = [y]$. Para um número n de pontos a representação matricial dessa função pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x_1^0 & x_1^1 & x_1^2 \\ x_2^0 & x_2^1 & x_2^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^0 & x_n^1 & x_n^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Se $A = \begin{bmatrix} x_1^0 & x_1^1 & x_1^2 \\ x_2^0 & x_2^1 & x_2^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^0 & x_n^1 & x_n^2 \end{bmatrix}$; $X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$, então podemos escrever $A \cdot X = Y$.

Para resolver esse sistema e encontrar os coeficientes a, b e c devemos multiplicar a equação pela matriz transposta de A:

$$A^T \cdot A \cdot X = A^T \cdot Y$$

Como em nosso problema temos 21 pontos diferentes, vamos utilizar o software GeoGebra para realizar as operações com as matrizes.

Para isso começamos por exibir a Janela Planilha e inserir colunas com os valores para construir as matrizes. Iniciamos com a matriz A; note que nela a primeira coluna são os valores de x elevado a potência 0, que resultará sempre em 1, logo, na primeira coluna colocamos todos os valores como 1; na segunda coluna colocamos os valores de x que para nosso caso são os dias percorridos a partir de 16/08/2016; e na terceira coluna faça os valores da segunda coluna elevado ao quadrado. Para criar a matriz A selecione os dados das três colunas e clique com o botão direito do mouse, selecione a opção criar matriz. O resultado na janela de álgebra será a matriz1.

matriz1 =

1	0	0
1	7	49
1	14	196
1	28	784
1	35	1225
1	42	1764
1	49	2401
1	56	3136
1	63	3969
1	70	4900
1	77	5929
1	84	7056
1	98	9604
1	105	11025
1	112	12544
1	119	14161
1	126	15876
1	129	16641
1	147	21609
1	154	23716
1	161	25921

Para criar a matriz Y, iremos colocar na quarta coluna os valores de y, que no nosso caso são os casos de dengue no PR, e daí repetimos o procedimento para a matriz anterior. O resultado na janela de álgebra será a matriz 2.

$$\text{matriz2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 10 \\ 27 \\ 39 \\ 60 \\ 77 \\ 90 \\ 108 \\ 108 \\ 110 \\ 141 \\ 174 \\ 217 \\ 280 \\ 298 \\ 319 \\ 326 \\ 366 \\ 403 \\ 439 \end{pmatrix}$$

Para determinar a matriz transposta de A utilizamos no campo entrada o comando "MatrizTransposta[matriz1]". O resultado na janela de álgebra será a matriz3.

$$\text{matriz3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 14 & 28 & 35 & 42 & 49 & 56 & 63 & 70 & 77 & 84 & 98 & 105 & 112 & 119 & 126 & 129 & 147 & 154 & 161 \\ 0 & 49 & 196 & 784 & 1225 & 1764 & 2401 & 3136 & 3969 & 4900 & 5929 & 7056 & 9604 & 11025 & 12544 & 14161 & 15876 & 16641 & 21609 & 23716 & 25921 \end{pmatrix}$$

Tendo construído as matrizes A, Y e A^T, passamos aos cálculos de $A^T \cdot A$ e $A^T \cdot Y$. Para isso basta escrever no campo entrada o comando "$matriz3 * matriz1$" e depois "$matriz3 * matriz2$", os resultados na janela de álgebra serão matriz4 e matriz5.

$$\text{matriz4} = \begin{pmatrix} 21 & 1676 & 182506 \\ 1676 & 182506 & 22415588 \\ 182506 & 22415588 & 2947509562 \end{pmatrix}$$

$$\text{matriz5} = \begin{pmatrix} 3593 \\ 423729 \\ 54379837 \end{pmatrix}$$

Nesse ponto chegamos que $A^T \cdot A$ e $A^T \cdot Y$ equivale a

$$\begin{bmatrix} 16 & 1676 & 182506 \\ 1676 & 182506 & 22415588 \\ 182506 & 22415588 & 2947509562 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3593 \\ 423729 \\ 54379837 \end{bmatrix}$$

que pode ser resolvido montando-se a matriz aumentada e escalonando-a. Para isso colocamos na quinta, sexta e sétima coluna os valores da matriz4 e na oitava coluna os valores da matriz5, selecionamos os dados dessas colunas e criamos uma nova matriz, que resultará na janela de álgebra a matriz6.

$$\text{matriz6} = \begin{pmatrix} 21 & 1676 & 182506 & 3593 \\ 1676 & 182506 & 22415588 & 423729 \\ 182506 & 22415588 & 2947509562 & 54379837 \end{pmatrix}$$

Para escaloná-la utilizamos no campo de entrada o comando "MatrizEscalonada[matriz6]", obtendo a matriz7.

$$\text{matriz7} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6.2754 \\ 0 & 1 & 0 & 0.9954 \\ 0 & 0 & 1 & 0.0113 \end{pmatrix}$$

De onde temos $a = -6{,}2754$, $b = 0{,}9954$ e $c = 0{,}0113$, aplicando na forma geral da função $f(x) = -6{,}2754 + 0{,}9954x + 0{,}0113x^2$, ou, ainda, colocando nas variáveis definidas para nosso problema $C(t) = -6{,}2754 + 0{,}9954t + 0{,}0113t^2$. Mesmo modelo fornecido pelo Excel na forma de resolução anterior.

Fonte: O autor.

No quadro 15 apresentamos de forma sintética as ações de *treinamento* realizadas durante o desenvolvimento da atividade.

QUADRO 15 : TREINAMENTOS REALIZADOS NA ATIVIDADE 1.2

***Regra* do *fazer* Modelagem Matemática**	**Desenvolvimento da atividade**	**Ação de treinamento realizada**	**Uso dos recursos das tecnologias digitais**	**Tipo de treinamento**	**Aula**
Identificar uma situação-inicial problemática	Discutir aspectos da situação inicial-inicial	O professor/pesquisador explica seu envolvimento com o tema, evidenciando pontos que o levaram a identificá-lo como uma problemática		Uso da regra	Aula 3
Coletar Dados	Acessar os boletins do SESA/PR e observar as informações neles contidas	O professor/pesquisador explica as informações contidas nos boletins e indica quais dessas informações utilizou na coleta de dados	*Investigação*: os dados são coletados dos boletins da dengue disponíveis no site do SESA/PR	Uso da regra	Aula 3
Formular o Problema	Entender o problema proposto	O professor/pesquisador evidencia que a formulação do problema direciona a investigação da atividade de modelagem matemática para uma especificidade da situação		Ensino Ostensivo	Aula 3
Realizar Simplificações	Acessar os boletins do SESA/PR e observar quais informações neles contidas foram consideradas para a coleta de dados	O professor/pesquisador explica as informações contidas nos boletins e indica quais dessas informações utilizou na coleta de dados	*Investigação*: acessar as informações dos boletins da dengue disponíveis no site do SESA/PR	Uso da regra	Aula 3
Formular Hipóteses	Determinar o dia inicial do período dos boletins na primeira hipótese	O professor/pesquisador explica que considerações como essa são denominadas de hipóteses em uma atividade de modelagem matemática	*Investigação*: D1 acessa um site da internet que fornece os dias referentes as semanas do ano para determinar o dia inicial do período; D2 e D3 acessam o primeiro boletim da dengue do período para determinar o dia inicial do período	Ensino Ostensivo	Aula 3
	Comunicar no relatório da atividade como chegaram na determinação do dia informado na primeira hipótese	O professor/pesquisador evidencia que uma hipótese deve ser fundamentada		Ensino Ostensivo	Aula 3
	Definir na segunda hipótese um valor exato para o período analisado	O professor/pesquisador orienta a necessidade de se definir um valor exato pata o período analisado: incorporar por meio da formulação de hipóteses informações da situação que não estão disponíveis nos dados coletados	*Investigação*: acessar os boletins dos períodos anteriores para verificar o intervalo dos períodos	Uso da regra	Aula 4
	Na terceira hipótese arredondar para cima o valor obtido na resposta	O professor/pesquisador explica que o arredondamento deve levar consideração o contexto da atividade e que isso deve ser evidenciado como uma hipótese, bem como sua fundamentação		Ensino Ostensivo	Aula 4
Selecionar Variáveis	Definir a variável independente como tempo em dias	O professor/pesquisador explica que a natureza das variáveis deve ser considerada	*Visualização*: utilizar o Excel para organizar os dados dos boletins e visualizar que o período dos boletins não era simétrico	Uso da regra	Aula 4
	Especificar o que cada variável representa	O professor/pesquisador evidencia que é necessário sempre definir as variáveis antes de construir o modelo		Ensino Ostensivo	Aula 4
Construir o Modelo	Construir o modelo no software Excel utilizando ajuste de curva	O professor/pesquisador orienta os alunos que na construção do modelo não são apenas os aspectos matemáticos que devem ser considerados, é necessário que a tendência seja coerente com a situação	*Experimentação*: utilizar o Excel para representar os dados em um gráfico de dispersão *Algebrização*: utilizar o ajuste de curvas do Excel	Ensino Ostensivo	Aula 4

			para obter um modelo algébrico		
Apresentar uma solução para o problema	Utilizar o modelo para calcular a resposta. Apresentar uma solução para o problema.	Os alunos vivenciam a apresentação de uma solução para o problema em uma atividade diferente	*Calculação*: D1 e D3 utilizam o GeoGebra, D2 utiliza o Excel, para calcular o resultado numérico da solução do problema	Uso da regra	Aula 4
Analisar a resposta em relação à Matemática	Discutir e entender a validação apresentada	A professora substituta conduz a apresentação de uma resolução alternativa que mostra a matemática que o software utiliza para determinar o ajuste de curva	*Calculação*: utilizar o GeoGebra para realizar as operações com matrizes da resolução alternativa	Ensino Ostensivo	Aula 5
Analisar a resposta em relação ao Problema					

Fonte: O autor.

6.1.2. Aula Teórica

Entre o desenvolvimento da Atividade 1.2 do 1° momento e da Atividade 2.1 do 2° momento, se realizou uma aula teórica em que foi discutido o capítulo 1 de Almeida, Silva e Vertuan (2012).

Para realizar essa discussão os alunos da turma fizeram a leitura prévia do capítulo e a professora regente e o professor/pesquisador discutiram cada aspecto tratado pelos autores nesse capítulo.

A ênfase do professor/pesquisador foi em evidenciar a caracterização de uma atividade de modelagem matemática apresentada pelos autores, bem como, detalhar as fases da Modelagem Matemática que estão envolvidas nessa caracterização.

Também foram realizadas relações entre essas fases de uma atividade de Modelagem Matemática e as ações realizadas no desenvolvimento das atividades do 1° momento, Atividade 1.1 e Atividade 1.2.

Essas discussões se caracterizam como ações de *treinamento ostensivo* das *regras* do *fazer* Modelagem Matemática, visto, que apresentam essas regras de forma oficial, a partir da literatura especializada, e detalha o papel de cada *regra* no desenvolvimento de uma atividade de modelagem.

6.1.3. Atividades do segundo momento

6.1.3.1 Atividade 2.1: Uma árvore por habitante

Para esta atividade foi entregue aos alunos o arquivo digital com as informações da atividade (Quadro 16).

QUADRO 16: INFORMAÇÕES E PROBLEMA DA ATIVIDADE 2.1

Atividade: Arborização em Curitiba

Com a correria que nossos dias têm sido na última década acabamos esquecendo de refletir sobre nossa qualidade de vida. Por qualidade de vida não estamos nos referindo a salário, posses, escolarização, etc., estamos falando de viver em um ambiente com qualidade para o nosso corpo. Será que nossa cidade, nosso bairro, possui essa qualidade? Para responder a essa pergunta teríamos que analisar diversos fatores, tais como: qualidade do ar, saneamento básico, ruídos, etc. Entretanto vamos focar em um deles numa primeira reflexão. *Será que nossa cidade tem árvores suficientes?*

Abaixo apresentamos uma reportagem que trata do assunto.

Uma árvore por habitante, a recomendação mínima da OMS para as cidades[29]

Campina Grande, na Paraíba, tem como meta uma proporção de duas árvores por habitante. Já Nova York conseguiu plantar 1 milhão de árvores em oito anos. Entenda a diferença que esses números fazem na qualidade de vida dos centros urbanos

23/03/2016

Fabiane Ziolla Menezes, com informações de Katia Brembatti e Guilherme Storck

Já reparou quantas árvores há na sua rua ou bairro? Esse fator é importante para a qualidade de vida nos centros urbanos. A quantidade mínima preconizada pela Organização Mundial da Saúde (OMS) é de 12 m² de área verde[30] por habitante, e a ideal é de 36 m², cerca de três árvores, por morador. No mundo, a referência é Estocolmo: são 86 metros quadrados de área verde por habitante. Em teoria, quanto mais verde a cidade, melhor a qualidade do ar que se respira e mais agradáveis são a paisagem e o clima – as sombras criadas pelas copas, a umidade gerada pela vegetação em geral e a quantidade maior de área permeável são características que ajudam nesses aspectos (leia outras vantagens abaixo). Mas não basta ter quantidade. É preciso planejar muito bem onde e como se planta.

Talvez a cidade brasileira com a meta mais ousada hoje seja Campina Grande. A cidade do estado da Paraíba tem como objetivo fazer com que a cidade chegue a marca de duas árvores por habitante. Por ora, Campina Grande tem 0,08 árvore por morador, ou um déficit de 671 mil árvores em relação ao mínimo da OMS. Ainda nesta semana, cerca de 100 mudas de plantas típicas da região foram distribuídas para esse fim. As ações têm participação e orientação da Universidade Estadual da Paraíba (UEPB).

Tamanho não é necessariamente um impeditivo para uma cidade atingir metas de arborização. A megalópole Nova York, com seus mais de oito milhões de habitantes, conseguiu cumprir a meta de

[29] http://www.gazetadopovo.com.br/vida-e-cidadania/futuro-das-cidades/uma-arvore-por-habitante-a-recomendacao-minima-da-oms-para-as-cidades-622ch9afm4rimh3ol1w9j8ikn

[30] De acordo com o Art. 8º, § 1º, da Resolução CONAMA Nº 369/2006, considera-se área verde de domínio público "o espaço de domínio público que desempenhe função ecológica, paisagística e recreativa, propiciando a melhoria da qualidade estética, funcional e ambiental da cidade, sendo dotado de vegetação e espaços livres de impermeabilização". As áreas verdes urbanas são consideradas como o conjunto de áreas intraurbanas que apresentam cobertura vegetal, arbórea (nativa e introduzida), arbustiva ou rasteira (gramíneas) e que contribuem de modo significativo para a qualidade de vida e o equilíbrio ambiental nas cidades. Essas áreas verdes estão presentes numa enorme variedade de situações: em áreas públicas; em áreas de preservação permanente (APP); nos canteiros centrais; nas praças, parques, florestas e unidades de conservação (UC) urbanas; nos jardins institucionais; e nos terrenos públicos não edificados. Exemplos de áreas verdes urbanas: praças; parques urbanos; parques fluviais; parque balneário e esportivo; jardim botânico; jardim zoológico; alguns tipos de cemitérios; faixas de ligação entre áreas verdes. Fonte: http://www.mma.gov.br/cidades-sustentaveis/areas-verdes-urbanas/parques-e-%C3%A1reas-verdes

plantar 1 milhão de árvores em novembro 2015, dois anos antes do previsto lá em 2007, pelo projeto MillionTreeNYC, lançado pelo ex-prefeito Michael Bloomberg.

O projeto nova-iorquino focou principalmente áreas públicas e de convivência, como parques, calçadas e jardins, e contou com orientação para que as espécies plantadas fossem as corretas. Daqui para frente, porém, o desafio é cuidar do que foi plantado. Atualmente, a manutenção das árvores custa US$ 6,1 milhões anuais à prefeitura de Nova York. Para amenizar os custos, a cidade planeja uma nova campanha, batizada de "Ame uma árvore", para incentivar a população "a cuidar do que plantou".
Em Curitiba, a 5.ª grande cidade do país mais arborizada, segundo o Censo de 2010, 23 dos 75 bairros têm menos do que o mínimo recomendado pela OMS. Entre eles estão Batel e Água Verde, por exemplo. Já os bairros mais verdes da capital paranaense são aqueles que ficam no extremo Oeste da cidade, como São João, Lamenha Pequena, Augusta e Riviera.

Mais do que quantidade de áreas verdes, porém, a engenheira agrônoma e diretora de produção vegetal da Secretaria de Meio Ambiente de Curitiba, Erica Mielke, defende que a arborização de uma cidade precisa ser bem planejada. "A arborização é algo de longo prazo, por isso o olhar técnico é tão importante. Quando alguém planta uma árvore por conta [própria], dificilmente consegue ver como ela ficará daqui quatro ou cinco anos(...)".
Ela também lembra que, de tempos em tempos, a escala da cidade muda. "Árvores que há anos eram vistas como adequadas para a paisagem de Curitiba, não são mais. As calçadas estão mais estreitas, os prédios mais altos, e assim por diante". Por isso, Erica não recomenda que os cidadãos saiam por aí plantando árvores. O conselho, é ligar para o 156, o serviço de atendimento ao cidadão da prefeitura. "As demandas serão enviadas até nós e serão avaliadas. Se atendido o pedido de plantio de uma árvore, por exemplo, o cidadão terá gastado apenas um telefonema". Todos os meses, segundo a diretora, a prefeitura planta uma média de mil mudas na cidade, seja por demanda da população ou por iniciativa da própria do Executivo municipal. "Recentemente, por exemplo, começamos o replantio de vegetação na Linha Verde. Foi uma necessidade que nós mesmos identificamos e estamos atendendo."

Relevância

Entenda porque as áreas verdes são tão importantes nos centros urbanos:

Ar

As árvores são importantes filtros no ar das cidades. Além disso, elas fazem retenção de pó e de micro-organismos. Também reduzem a velocidade dos ventos e diminuem o nível de ruídos (poluição sonora).

Clima

As concentrações arbóreas contribuem para equilibrar as temperaturas: elas absorvem parte dos raios solares, evitando que esquente demais, e também não liberam toda a umidade do solo, para que haja frescor.

Solo

A falta de vegetação está ligada a consequências mais drásticas em enchentes e deslizamentos de terra, além de erosão. As árvores regulam os ciclos hídricos, como garantia de que não faltará água.

Visual

Está provado que o ser humano se sente melhor em áreas naturais. As concentrações vegetais conferem beleza cênica ao local, provocando conforto visual.

Diversidade

Só continua nascendo flor no jardim e frutos na horta porque há polinização, a maior parte feita por abelhas. Há um ciclo natural que não pode ser rompido para que a vida renasça. Além disso, as áreas arbóreas servem de abrigo para a fauna.

Área verde no quintal

Amplie o mapa para perceber a distribuição geográfica e buscar os espaços vegetais (áreas com mais de 500 m^2 de copa de árvore) existentes no seu bairro.

A reportagem nos traz alguns dados interessantes, por exemplo que Curitiba tem mais área verde por habitante do que o mínimo recomendado pela OMS, mas não atinge o ideal também recomendado pela OMS. Outro dado é em relação aos bairros de Curitiba, "23 dos 75 bairros têm menos do que o mínimo recomendado pela OMS". Nesse contexto podemos nos perguntar: *Qual o índice de área verde por habitante nos bairros de Curitiba?*

Fonte: O autor.

O professor/pesquisador explica que a identificação dessa situação-inicial problemática foi influenciada pela reportagem que apresenta informações sobre a quantidade de área verde na cidade de Curitiba. Isso caracteriza um *treinamento* por *uso da regra*, visto que aproxima a situação da cotidianidade dos alunos ao localizar a discussão na cidade Curitiba, local em que moram, estudam e/ou trabalham.

Quando o professor/pesquisador afirma "*estudar todos os bairros de Curitiba, 75, acho que vai ser... improvável, né (!?) pra não dizer impossível, mas, a gente pode [...] estudar um bairro, cada um"* indica uma simplificação do problema. O *treinamento* por *uso da regra*, nesse caso, é mostrar que podem ser realizadas simplificações também na formulação do problema.

Nesse sentido, cada dupla direcionou o problema formulado para um bairro da cidade. Ao propor isso o professor/pesquisador evidencia uma característica da

formulação do problema, ele deve ser plausível para o contexto em que será resolvido, nesse caso, não seria coerente propor que os alunos determinassem o índice de área verde de todos os bairros, pois, isso exigiria um tempo não disponível para a desenvolvimento da atividade.

As duplas tiveram que coletar dados sobre os bairros investigados. Os alunos tiveram certa autonomia nessa ação, no sentido em que foram eles que acessaram e organizaram os dados. O professor/pesquisador explicou como encontrar as informações geopolíticas dos bairros nos sites oficiais da prefeitura de Curitiba. Assim, os alunos tiveram a experiência de selecionar as informações das fontes. Indicando uma ação de *treinamento* por *utilização* da *regra*, em que os alunos tiveram que selecionar os dados de uma variedade de informações fornecidas pela fonte.

Uma das informações encontradas na coleta de dados foi o índice de área verde de cada bairro já pronto. Nesse ponto o professor/pesquisador propõe que eles, a partir das imagens de satélite do bairro, identifiquem as áreas verdes e calculem o índice de área verde por habitante e comparem com o valor pronto encontrado.

Ao selecionar as áreas verdes dos bairros o professor/pesquisador explica *ostensivamente* que é uma simplificação dizer quais áreas do bairro serão consideradas áreas verdes.

O professor/pesquisador também orienta que os alunos escolham algumas áreas verdes do bairro, e explica *ostensivamente* que essa escolha deve ser evidenciada no relatório como uma hipótese.

As áreas verdes identificadas eram geometricamente irregulares, então, foi necessário utilizar o Cálculo Diferencial e Integral para calculá-las. Para isso, utilizaram o software GeoGebra para determinar ajustes polinomiais que descreviam as áreas escolhidas.

O professor/pesquisador ensinou o passo a passo de como construir esses ajustes polinomiais no GeoGebra. Cada dupla aplicou esse passo a passo para as áreas selecionadas em seus bairros.

Mesmo o professor/pesquisador tendo ensinado como funcionam as ferramentas do software GeoGebra, no momento de aplicar em um contexto diferente, não fizeram da forma mais adequada, então, o professor/pesquisador tem que intervir e mostrar como

realizar essa aplicação. Isso ressalta a necessidade de que se vivencie diferentes *usos* da *regra*.

Com o ajuste polinomial finalizado, o professor/pesquisador ensina como determinar no GeoGebra o valor da integral para a função determinada. Mas, o professor/pesquisador explica que para que o valor calculado para integral represente a área verde é necessário determinar uma proporção entre a escala do mapa e a escala do software GeoGebra. Como a escala seria diferente em cada uma das resoluções, seria considerada uma hipótese. Nesse caso, a hipótese acrescenta informações que não constam nos dados coletados (ALMEIDA, PALHARINI e TORTOLA, 2015). Caracterizando um *treinamento ostensivo dessa regra*.

Com a área verde do bairro calculada, o próximo passo foi construir o modelo para o cálculo do índice de área verde por habitante. Nesse ponto foi necessário definir as variáveis que seriam utilizadas nesse modelo. O professor/pesquisador teve que intervir *ostensivamente* para que os alunos percebessem a necessidade de definir as variáveis, pois, estavam realizando os cálculos diretamente com os valores, sem especificar o que cada valor representava.

Com o modelo construído os alunos calculam o índice de área verde do bairro que investigaram e apresentam uma resposta para o problema. Assim, o *treinamento* por *uso da regra*, nesse caso, se caracteriza pela experiência em apresentar uma solução para o problema em uma atividade diferente. A dupla 3, não finalizou os cálculos e a apresentação de uma resposta para o problema, indicando que enviariam essas etapas prontas com o relatório final da atividade, entretanto, eles não entregaram a versão finalizada do relatório.

No quadro 17 apresentamos a resolução de D2 que exemplifica esse desenvolvimento.

QUADRO 17: RESOLUÇÃO DE D2 PARA A ATIVIDADE 2.1

RELATÓRIO

SITUAÇÃO INICIAL

A atividade de modelagem proposta parte do pressuposto de qualidade vida avaliada pela distribuição de área verde em determinado bairro da cidade de Curitiba.

Diante dessa reflexão podemos formular as seguintes questões:

- Será que nossa cidade tem árvores Suficientes?
- Qual o índice de área verde por habitante nos bairros de Curitiba?

Figura 1: bairro Santa Cândida, Curitiba PR

INTEIRAÇÃO

Informações

- Leitura e definição do que se caracteriza como área verde (segundo o CONAMA)
- Leitura de artigo referente a definição de parâmetros que estabelecem a recomendação mínima de área verde segundo a Organização Mundial da Saúde OMS para cidades.
- Consulta à página do IPPUC para determinação da área do bairro considerada e sua população.

Definição do problema

Avaliar se a região do bairro Santa Cândida da cidade de Curitiba atende à quantidade mínima preconizada pela Organização Mundial da Saúde (OMS) de área verde por habitante. A quantidade mínima preconizada é de 12 m^2 por habitante, e a ideal é de 36 m^2 por habitante.

MATEMATIZAÇÃO E RESOLUÇÃO

Definição das variáveis

Variável independente: Área (m^2) da região do bairro escolhida.
Variável dependente: Área (m^2) do bairro arborizado em relação aos habitantes.

Utilização do software Geogebra para cálculo da região arborizada da área do bairro considerada através determinação de pontos distribuídos pelo perímetro das regiões geométricas, e plotagem de polinômio.

Etapa das resolução

- Selecionamos duas áreas do bairro do Santa Candida demonstrados na figura 2 e Figura 3 para mensurar a região verde da área.

Figura 2: Região 1 delimitada do bairro Santa Cândida

Figura 3: Região 2 delimitada do bairro Santa Cândida

- Através da ferramenta Google Maps, salvamos o arquivo e importamos a imagem para o Geogebra.
- No Geogebra criamos uma série de pontos para determinar os limites da região a ser calculada.
- Afigura da região ficou dividida em duas partes pelos eixos coordenados (tanto na Figura 1 e Figura 2).
- Plotagem das regiões geométricas e os polinômios que mais se adequavam com a área delimitada pera região.
- Conversão das unidades de área do Geogebra para a unidade de áreas em m^2.
- Cálculo da soma das duas regiões do bairro do Santa Cândida (área total).
- Determinação do índice de área verde do bairro do Santa Cândida pela divisão da área total da região pelo número de habitantes.

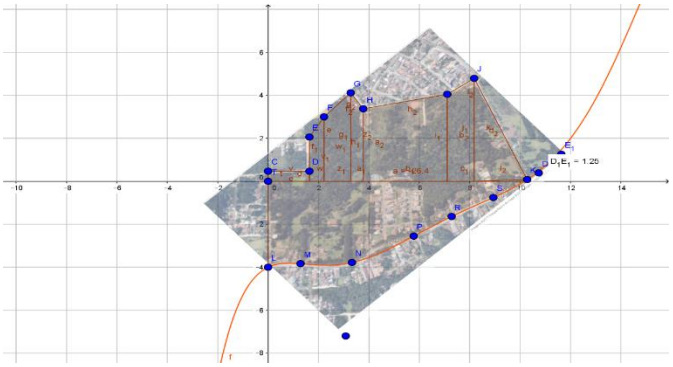


Figura 4: Plotagem geométrica e polinomial da região 1

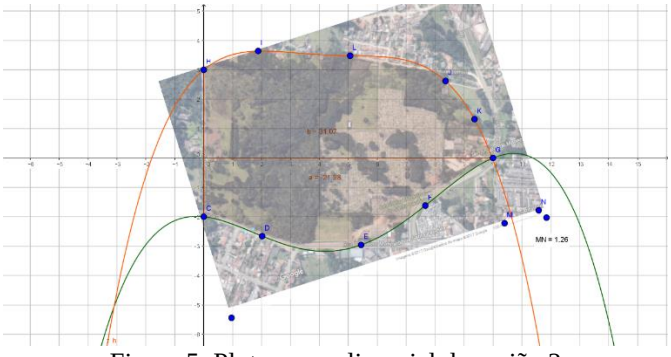


Figura 5: Plotagem polinomial da região 2

- Na parte superior foram estabelecidas figuras poligonais para o cálculo da área. Já na parte inferior foi criada uma função poligonal através de uma lista de pontos.
- A área total foi calculada como a soma contida de todas as regiões poligonais. A área calculada na região 1 foi de 56,51 u^2. (unidade de área) e na região 2 foi de 53,05u^2.
- Foi mensurada a distância na região 1 da escala entre os pontos $D_1E_1 = 1{,}25$ u.
- Foi mensurada a distância na região 2 da escala entre os pontos MN = 1,26 u.

MATEMATIZAÇÃO

Para tal desenvolvimento, utilizaremos os caracteres $A_1, A_2, A_v, N_{hab}, I$, como Área da região 1, Área da região 2, Área verde e Número de Habitantes do bairro Santa Cândida e Índice de área verde do mesmo bairro, respectivamente.

Definição da medida de uma unidade de área e conversão de unidades:

1) *Área da região 1 (A_1):*

a) *Conversão da unidade de área no Geogebra (u^2) para metros quadrados (m^2), com base na escalas do mesmo programa e do Google Earth (100m):*

$$(1{,}25\ u)^2 \rightarrow (100\ m)^2$$

$$\frac{1{,}25^2 u}{1{,}25^2} = \frac{10^4 m^2}{1{,}25^2}$$

$$u^2 = 0{,}64\ x\ 10^4$$

$$u^2 = 6400\ m^2$$

b) *Conversão da área total obtida no Geogebra para metros quadrados (m^2):*

A Área da região 1 calculada no Geogebra, obtida atrvés do resultados *a* e *b (Notação do Geogebra)*, é igual a:

a = Integral[f, x(H), x(G)] = $-26{,}4\ u^2$

b = Área[pol1] + Área[pol2] + Área[pol3] + Área[pol4] + Área[pol5] + Área[pol6] + Área[pol7] = 30 u^2

$$A_1 = b - a = 30 - (-26{,}4) = 56{,}81\ u^2$$

Portanto, a área da região 1, no Geogebra, através dos cálculos, resultou em $56{,}81\ u^2$.

Como parte do objetivo do modelo, devemos converter as respectivas unidades de área, isto é, de u^2 para m^2:

$$A_1 = 56{,}28\ x\ 6400\ m^2 = 360.192 m^2$$

2) *Área da região 2 (A_2):*

a) *Conversão da unidade de área no Geogebra (u^2) para metros quadrados (m^2), com base na escalas do mesmo programa e do Google Earth (100m):*

$$(1{,}26\ u)^2 \rightarrow (100\ m)^2$$

$$\frac{1{,}26^2 u}{1{,}26^2} = \frac{10^4 m^2}{1{,}26^2}$$

$$u^2 = 0{,}63\ x\ 10^4$$

$$u^2 = 6300\ m^2$$

b) *Conversão da área total obtida no Geogebra para metros quadrados (m^2):*

A Área da região 2 calculada no Geogebra, obtida através do resultados *a* e *b (Notação do Geogebra)*, é igual a:

a = Integral[h, x(H), x(G)] = 31,07 u^2

b = Integral[f, x(C), x(G)] = - 21,98 u^2

$$A_2 = b - a = 31{,}07 - (-21{,}98) = 53{,}05\ u^2$$

Portanto, a área da região 2, no Geogebra, através dos cálculos, resultou em $53{,}05 u^2$.

Como parte do objetivo do modelo, devemos converter as respectivas unidades de área, isto é, de u^2 para m^2:

$$A_2 = 53{,}05\ x\ 6300 = 334.215\ m^2$$

3) *Área verde (A_v)*:

Somando as áreas da Região 1 (Figura 4) e Região 2 (Figura 5), obtemos o resultado da Área verde (A_v), que é calculada por:

$$\boldsymbol{A_v} = A_1 + A_2 = 360.192 + 334.215 = \mathbf{694.407\ m^2}$$

4) *Índice de área verde (I):*

Número de habitantes do bairro Santa Candida (N_{hab}), segundo IPPUC: **32.808**

$$I = \frac{A_v}{N_{hab}}$$

$$\boldsymbol{I = \frac{694.407\ m^2}{32808\ hab} = 21{,}17 m^2/hab}$$

Assim, o Índice de área verde por habitante do bairro Santa Cândida é igual a 21,17 m^2/hab.

Fonte: Relatório da Atividade 2.1 entregue por D2.

Finalizando a atividade, as duplas comunicam os seus resultados para o restante da turma. Após as duplas comunicarem os resultados, o professor/pesquisador propõe uma validação e uma interpretação da modelagem matemática realizada nessa atividade. Caracterizando ações de *treinamento ostensivo* em relação a validação e interpretação dos resultados.

A primeira é em relação à adequabilidade dos polinômios para o cálculo das áreas verdes. O professor/pesquisador indica que o ajuste polinomial é adequado para o cálculo da área verde, pois, se caracteriza como um modelo estático, logo, precisa se adequar apenas naquele intervalo de pontos.

A segunda diz respeito a adequação da área que se quer calcular com a área calculada com a ferramenta "Integral" do GeoGebra. Essa ferramenta destaca a área que ela calculou, assim, pode ser comparada com a área da imagem de satélite e verificar se elas são compatíveis.

No quadro 18 apresentamos de forma sintética as ações de *treinamento* realizadas durante o desenvolvimento da atividade.

QUADRO 18 : TREINAMENTOS REALIZADOS NA ATIVIDADE 2.1

***Regra* do *fazer* Modelagem Matemática**	**Desenvolvimento da atividade**	**Ação de treinamento realizada**	**Uso dos recursos das tecnologias digitais**	**Tipo de treinamento**	**Aula**
Identificar uma situação-inicial problemática	Ler a reportagem que influenciou a identificação da situação-inicial problemática	O professor/pesquisador aproxima a situação da cotidianidade dos alunos ao localizar a discussão na cidade Curitiba, local em que moram, estudam e/ou trabalham.	*Investigação*: situação identificada em uma reportagem de um site de notícias	Uso da Regra	Aula 7
Coletar Dados	Coletar dados sobre os bairros investigados	O professor/pesquisador explicou como encontrar as informações geopolíticas dos bairros nos sites oficiais da prefeitura de Curitiba, proporcionado aos alunos a experiência de selecionar as informações das fontes	*Investigação*: informações dos bairros obtidas no site da prefeitura de Curitiba e imagens de satélite dos bairros obtidas no Google Earth	Uso da Regra	Aula 7
Formular o Problema	Direcionar o problema para um bairro específico	O professor/pesquisador evidencia que o problema formulado deve ser plausível para o contexto em que será resolvido, considerando as ferramentas e tempo disponível para a desenvolvimento da atividade.		Uso da Regra	Aula 7
Realizar Simplificações	Direcionar o problema para um bairro específico	O professor/pesquisador mostra que podem ser realizadas simplificações também na formulação do problema		Uso da Regra	Aula 7

	Definir quais áreas do bairro serão consideradas áreas verdes	O professor/pesquisador explica que realizar essa ação é uma simplificação	*Visualização*: utilizar a imagem de satélite do bairro obtida no Google Earth para determinar as áreas do bairro serão consideradas áreas verdes	Ensino Ostensivo	Aula 7
Formular Hipóteses	Escolher algumas áreas verdes do bairro para calcular suas áreas	O professor/pesquisador orienta os alunos a escolherem algumas áreas verdes do bairro e explica que essa ação é caracterizada como formular uma hipótese	*Visualização*: utilizar a imagem de satélite do bairro obtida no Google Earth para escolher as áreas verdes do bairro	Ensino Ostensivo	Aula 7
	Determinar uma proporção entre a escala do mapa e a escala do software GeoGebra	O professor/pesquisador orienta os alunos da necessidade de determinar a proporção entre as escalas e explica que essa ação é caracterizada como formular uma hipótese	*Experimentação*: utilizar o GeoGebra para determinar a proporção entre a escalas	Ensino Ostensivo	Aula 8
Selecionar Variáveis	Definir as variáveis para construir o modelo	O professor/pesquisador evidencia a necessidade de definir as variáveis para construir o modelo		Ensino Ostensivo	Aula 8
Construir o Modelo	Determinar os ajustes polinomiais que descreviam as áreas escolhidas	O professor/pesquisador ensina o passo a passo de como construir os ajustes polinomiais no software GeoGebra	*Experimentação*: utilizar o GeoGebra para representar em pontos a delimitação as áreas verdes dos bairros *Algebrização*: utilizar o GeoGebra para determinar o ajuste polinomial *Simulação*: manipular os pontos para adequar o ajuste polinomial	Ensino Ostensivo	Aula 8
	Calcular a área descrita pelas polinomiais utilizando a integral	O professor/pesquisador ensina como determinar no software GeoGebra o valor da integral para a polinomial determinada	*Calculação*: utilizar o GeoGebra para calcular a integral definida para as polinomiais determinadas	Ensino Ostensivo	Aula 8
Apresentar uma solução para o problema	Utilizar o modelo para calcular a resposta. Apresentar uma solução para o problema.	Os alunos (exceto de D3) vivenciam a apresentação de uma solução para o problema em uma atividade diferente		Uso da regra	Aula 8
Analisar a resposta em relação à Matemática	Realizar uma interpretação matemática do modelo	O professor/pesquisador indica que o ajuste polinomial é adequado para o cálculo da área verde, pois, se caracteriza como um modelo estático, logo, precisa se adequar apenas naquele intervalo de pontos.	*Visualização*: utilizar o GeoGebra para visualizar a adequação do ajuste polinomial aos pontos	Ensino Ostensivo	Aula 9
Analisar a resposta em relação ao Problema	Realizar uma validação do resultado obtido	O professor/pesquisador indica a adequação da área calculada com a ferramenta integral do GeoGebra comparada com a área da imagem de satélite.	*Visualização*: utilizar o GeoGebra para comparar a área calculada com a ferramenta integral com a área da imagem de satélite	Ensino Ostensivo	Aula 9

Fonte: O autor.

6.1.3.2 Atividade 2.2: Cesta Básica na cidade de Curitiba

Esta atividade foi a última atividade proposta pelo professor/pesquisador e foi planejada para que os alunos a desenvolvessem com mais autonomia. Nesse sentido, foram entregues aos alunos algumas reportagens sobre o tema e a formulação do problema, as demais ações para desenvolver a atividade seriam realizadas pelas duplas com a orientação do professor/pesquisador.

No quadro 19 apresentamos as informações entregue aos alunos.

QUADRO 19: INFORMAÇÕES ENTREGUES AOS ALUNOS NA ATIVIDADE 2.2

Cesta Básica na cidade de Curitiba

Muito se houve falar sobre o aumento no custo de vida, principalmente no momento econômico vivenciado em nosso país. Um dos itens que pode ser um "termômetro" em relação ao custo de vida é a cesta básica. A seguir apresentamos algumas reportagens e um relatório sobre esse tema.

Reportagem 1:

Cesta básica teve redução de 2,73% no mês de dezembro em Curitiba[31]

Batata e tomate estão entre os índices que mais tiveram queda.
Balanço foi divulgado pelo Dieese nesta quarta-feira (4)

04/01/2017 12h46 - Atualizado em 04/01/2017 12h55
Do G1 PR

O valor da cesta básica em Curitiba ficou 2,73% mais barato no mês de dezembro de 2016, na comparação com novembro, de acordo com pesquisa divulgada nesta quarta-feira (4) pelo Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (Dieese). O valor variou de R$ 421,37 para R$ 409,86.

Entre os itens que mais tiveram queda estão a batata e o tomate com 28,14% e 15,53% respectivamente. Já a banana, apresentou aumento de 5,95%.

A pesquisa é realizada nas 27 capitais do Brasil. Este preço verificado em Curitiba é o nono mais alto. No acumulado do ano, a cesta básica apresentou alta de 4,61%.

Quando se analisa uma família, composta por um casal e duas crianças, o custo da cesta básica passa para R$ 1.229,58.

Dos 13 produtos pesquisados, conforme o Dieese, quatro registraram alta e outros nove tiveram queda. Veja abaixo:

Produtos que registraram alta:

- Banana (5,95%);
- Óleo (2,56%);
- Café (0,46%);
- Açúcar (0,32%).

Produtos que tiveram queda:

- Batata (-28,14%);
- Tomate (-15,53%);
- Feijão (-3,36%);
- Farinha de trigo (-2,69%);
- Pão (-1,09%);
- Manteiga (-1,08%);
- Carne (-0,92%);
- Arroz (-0,35%);
- Leite (-0,33%).

Reportagem 2:

CESTA BÁSICA EM CURITIBA FICA R$ 11,61 MAIS BARATA EM NOVEMBRO, DIZ DIEESE[32]

[31] http://g1.globo.com/pr/parana/noticia/2017/01/cesta-basica-teve-reducao-de-273-no-mes-de-dezembro-em-curitiba.html.

[32] http://g1.globo.com/pr/parana/noticia/2016/12/cesta-basica-em-curitiba-fica-r-1161-mais-barata-em-novembro-diz-dieese.html.

AÇÚCAR TEVE A MAIOR ALTA DE PREÇO; JÁ O PREÇO DO TOMATE FOI O QUE MAIS CAIU. ALIMENTOS CONSIDERADOS BÁSICOS CUSTARAM R$ 1.264,11 PARA UMA FAMÍLIA.

06/12/2016 12h38 - Atualizado em 06/12/2016 12h38

Do G1 PR

Os consumidores de Curitiba pagaram R$ 11,61 a menos na cesta básica. A pesquisa de preços divulgada pelo Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (DIEESE) (Dieese), nesta terça-feira (6), mostra que o valor passou de R$ 432,98, em outubro, para R$ 421,37, em novembro. O açúcar foi o produto com a maior variação de preço.

A pesquisa é realizada nas 27 capitais do Brasil. Este preço verificado em Curitiba é o nono mais alto. Porto Alegre aparece como a capital com o a cesta básica mais cara – R$ 469,04.

Ao se considerar a comparação mensal, o custo da cesta básica caiu 2,68% em Curitiba. Todavia, no ano, a alta é de 7,55%.

Quando se analisa uma família, composta por um casal e duas crianças, o custo da cesta básica passa para R$ 1.264,11.

Foi necessário, conforme calculado pelo Dieese, 1,44 salário mínimo para satisfazer as necessidades do trabalhador e da família dele com alimentação no mês de novembro.

O Dieese acompanha a oscilação do preço de 13 produtos. Veja a lista.

Cinco itens registraram alta:

- açúcar (3,36%)
- feijão (1,71%)
- café (1,70%)
- óleo (0,52%)
- carne (0,35%)

Outros sete tiveram queda:

- tomate (-18,45%)
- leite (-6,84%)
- farinha (-3,88%)
- banana (-3,42%)
- manteiga (-3,18%)
- batata (-2,62%)
- pão (-1,08%)

O arroz foi o único item da cesta básica que ficou estável.

Salário miminho ideal

Segundo o Dieese, com base na cesta mais cara, em novembro, que foi a de Porto Alegre, o salário mínimo no país deveria ser de R$ 3.940,41. O salário mínimo vigente no país é de R$ 880,00.

Para se chegar a este montante, os técnicos consideram o valor mínimo para as despesas de um trabalhador e da família dele com alimentação, moradia, saúde, educação, vestuário, higiene, transporte, lazer e previdência.

Em outubro, o mínimo necessário correspondeu a R$ 4.016,27.

Reportagem (relatório) 3:

Custo da cesta básica tem alta em 13 capitais e redução em 14[33]

São Paulo, 07 de novembro de 2016

Em outubro, o custo do conjunto de alimentos básicos repetiu o comportamento diferenciado nas 27 capitais verificado no mês anterior, de acordo com a Pesquisa Nacional da Cesta Básica de Alimentos, realizada pelo Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (DIEESE). Enquanto houve alta da cesta em 13 cidades, em outras 14, foi registrada redução. As maiores altas ocorreram em Florianópolis (5,85%), Vitória (3,19%), Porto Velho (2,18%) e Maceió (2,12%). As

[33] https://www.dieese.org.br/analisecestabasica/2016/201610cestabasica.pdf.

retrações mais expressivas foram observadas em Brasília (-5,44%), Teresina (-1,77%), Palmas (-1,76%) e Salvador (-1,66%).

A cesta mais cara foi a de Porto Alegre (R$ 478,07), seguida de Florianópolis (R$ 475,32) e São Paulo (R$ 469,55). Os menores valores médios foram observados em Natal (R$ 366,90) e Recife (R$ 373,66).

Entre janeiro e outubro de 2016, todas as cidades acumularam alta. As elevações mais expressivas foram observadas em Maceió (24,25%), Aracaju (23,69%), Rio Branco (21,99%) e Fortaleza (21,21%). Os menores aumentos ocorreram em Brasília (9,58%), Curitiba (10,52%) e Macapá (10,99%).

Com base na cesta mais cara, que, em outubro, foi a de Porto Alegre, e levando em consideração a determinação constitucional que estabelece que o salário mínimo deve ser suficiente para suprir as despesas de um trabalhador e da família dele com alimentação, moradia, saúde, educação, vestuário, higiene, transporte, lazer e previdência, o DIEESE estima mensalmente o valor do salário mínimo necessário. Em outubro de 2016, o salário mínimo necessário para a manutenção de uma família de quatro pessoas deveria equivaler a R$ 4.016,27, ou 4,56 vezes o mínimo de R$ 880,00. Em setembro, o mínimo necessário correspondeu a R$ 4.013,08, o que também foi equivalente a 4,56 vezes o piso vigente.

TABELA 1
Pesquisa Nacional da Cesta Básica de Alimentos
Custo e variação da cesta básica em 27 capitais
Brasil – Outubro de 2016

Capital	Valor da cesta	Variação mensal (%)	Porcentagem do Salário Mínimo Líquido	Tempo de trabalho	Variação no ano (%)
Porto Alegre	478,07	0,08	59,05	119h31m	12,65
Florianópolis	475,32	5,85	58,71	118h50m	12,09
São Paulo	469,55	-0,43	58,00	117h23m	12,30
Rio de Janeiro	456,44	1,08	56,38	114h07m	14,71
Cuiabá	452,62	-0,23	55,91	113h09m	15,80
Vitória	449,16	3,19	55,48	112h17m	15,46
Boa Vista	441,05	-0,67	54,48	110h16m	21,20
Brasília	436,85	-5,44	53,96	109h13m	9,58
Campo Grande	436,51	0,98	53,92	109h08m	12,37
Curitiba	432,98	1,91	53,48	108h15m	10,52
Belém	425,03	0,14	52,50	106h16m	20,77
Belo Horizonte	418,47	-0,73	51,69	104h37m	12,95
Fortaleza	415,41	-0,13	51,31	103h51m	21,21
Manaus	409,88	2,10	50,63	102h28m	11,44
Palmas	404,60	-1,76	49,98	101h09m	16,93
Maceió	403,12	2,12	49,79	100h47m	24,25
Porto Velho	397,71	2,18	49,12	99h26m	14,46
Teresina	395,21	-1,77	48,82	98h48m	15,02
Goiânia	389,44	-1,00	48,10	97h22m	16,05
São Luís	386,41	0,88	47,73	96h36m	17,99
João Pessoa	385,50	-0,37	47,62	96h23m	18,71
Rio Branco	379,34	1,94	46,86	94h50m	21,99
Macapá	379,32	-1,27	46,85	94h50m	10,99
Aracaju (1)	378,17	1,58	46,71	94h32m	23,69
Salvador	375,60	-1,66	46,39	93h54m	19,53
Recife	373,66	-0,50	46,15	93h25m	11,93
Natal	366,90	-0,17	45,32	91h44m	17,42

Fonte: DIEESE
Nota: (1) a cesta de Aracaju de setembro foi recalculada e custou R$ 372,29.

Cesta Básica x salário mínimo

Em outubro de 2016, o tempo médio necessário para adquirir os produtos da cesta básica foi de 103 horas e 49 minutos. Em setembro, a jornada necessária foi calculada em 103 horas e 31 minutos.

Quando se compara o custo da cesta e o salário mínimo líquido, ou seja, após o desconto referente à Previdência Social, verifica-se que o trabalhador remunerado pelo piso nacional comprometeu, em outubro, 51,29% para adquirir os mesmos produtos que, em setembro, demandavam 51,15%.

Comportamento dos preços[34]

Em outubro, houve predominância de alta no preço da carne bovina de primeira, da manteiga, do açúcar, tomate e café em pó. O feijão e o leite tiveram o valor reduzido na maior parte das cidades.

[34] Fontes de consulta: Cepea - Centro de Estudos Avançados em Economia Aplicada - ESALQ/USP, Unifeijão, Conab - Companhia Nacional de Abastecimento, Embrapa, Agrolink, Globo Rural, artigos diversos em jornais e revistas.

A carne bovina de primeira aumentou em 21 cidades em outubro. As altas variaram entre 0,29%, em Macapá, e 6,67%, em Curitiba. As quedas mais expressivas foram anotadas em Brasília (-1,27%) e Manaus (-1,23%). A menor oferta de animais para abate e o aumento no ritmo de exportação diminuíram a disponibilidade interna, o que provocou alta dos preços da carne bovina.

O preço do quilo da manteiga seguiu em alta na maior parte das cidades. Entre setembro e outubro, 21 capitais apresentaram elevação do valor do produto. As altas mais expressivas foram observadas em Palmas (9,64%), Boa Vista (5,72%) e Brasília (4,15%). As diminuições mais significativas foram registradas em João Pessoa (-3,00%), Macapá (-2,60%) e Vitória (-1,54%). Apesar da oferta de leite normalizada, da redução da demanda por laticínios e do recuo no preço do leite pago ao produtor, além da diminuição no valor dos derivados, a cotação média da manteiga seguiu em alta no varejo.

O quilo do açúcar aumentou em 20 capitais, com variações entre 0,65%, em Macapá, e 15,41%, em Recife; ficou estável em Natal, Aracaju e Boa Vista; e diminuiu em Belém (-2,28%), Rio de Janeiro (-0,55%), São Paulo (-0,34%) e Porto Alegre (-0,33%). O elevado preço do açúcar demerara, no mercado internacional, incentivou as usinas a manter o preço do produto em alta, apesar da demanda estável.

O tomate teve o preço majorado em 19 cidades. As maiores altas foram verificadas em Florianópolis (29,57%), Vitória (23,77%) e Porto Velho (20,06%). As quedas mais importantes ocorreram em Belo Horizonte (-6,68%), Goiânia (-6,51%) e Brasília (-6,32%). As chuvas prejudicaram a qualidade do fruto e, por ser final de safra, a oferta diminuiu, o que elevou o preço na maior parte do país.

O preço do café seguiu em alta em 19 cidades. As variações oscilaram entre 0,63%, em Porto Alegre, e 3,65%, em Manaus. Houve estabilidade em Belém e São Luís e redução em Belo Horizonte (-3,59%), Florianópolis (-1,14%), Salvador (-0,73%), Macapá (-0,61%), Brasília (-0,61%) e Teresina (-0,34%). Alguns fatores explicaram a alta do café: a expectativa de baixa produção para a safra 2017/18, a valorização do dólar diante do real e a baixa oferta do grão robusta.

Das 27 capitais onde se realiza a pesquisa, houve queda do preço do feijão em 21. O do tipo carioquinha, pesquisado nas regiões Norte, Nordeste, Centro-Oeste, em Belo Horizonte e em São Paulo, diminuiu em 18 cidades e as variações oscilaram entre -1,14%, em Rio Branco, e -10,77%, em Brasília. Houve alta em Manaus (9,45%), Macapá (0,68%), Boa Vista (0,54%) e Maceió (0,50%). Já o preço do feijão preto, pesquisado nas capitais do Sul, em Vitória e no Rio de Janeiro, aumentou em Porto Alegre (3,14%) e Florianópolis (1,19%) e mostrou redução em Curitiba (-1,25%), Vitória (-1,37%) e Rio de Janeiro (-1,46%). Oferta normalizada do grão carioca e menor demanda devido aos altos preços explicaram a queda de valor no varejo na maior parte das cidades.

O preço do leite diminuiu em 21 cidades. As quedas oscilaram entre -0,23%, em Fortaleza, e -12,67%, em Curitiba. Os aumentos foram anotados em Salvador (0,23%), Rio Branco (0,42%), Maceió (1,41%), Manaus (1,79%), Boa Vista (2,91%) e Aracaju (5,46%). O fato de a oferta do produto ter se normalizado e a demanda ter sido menor explica a diminuição do preço do leite integral na maior parte das capitais.

TABELA 2
Variação mensal do gasto por produto
Outubro de 2016

Produtos	Centro-Oeste				Sudeste				Sul		
	Brasília	Campo Grande	Cuiabá	Goiânia	Belo Horizonte	Rio de Janeiro	São Paulo	Vitória	Curitiba	Florianópolis	Porto Alegre
Total	-5,44	0,98	-0,23	-1,00	-0,73	1,08	-0,43	3,19	1,91	5,85	0,08
Carne	-1,27	1,83	1,92	-0,41	3,15	3,58	2,40	3,61	6,67	6,53	3,16
Leite	-1,53	-10,26	-8,92	-2,29	-8,76	-7,48	-6,61	-10,33	-12,67	-10,64	-9,74
Feijão	-10,77	-6,50	-5,55	-3,75	-5,92	-1,46	-10,51	-1,37	-1,25	1,19	3,14
Arroz	-2,27	-1,02	1,27	3,10	-3,00	0,52	-1,26	0,34	-2,72	4,76	0,68
Farinha	-2,42	-0,98	-2,15	0,21	8,05	1,58	0,38	0,28	2,38	-1,92	1,64
Batata	-7,67	10,31	-8,09	-2,69	9,24	6,03	-3,96	14,37	-0,58	20,61	-7,82
Tomate	-6,32	13,57	6,25	-6,51	-6,68	8,30	3,25	23,77	4,25	29,57	1,85
Pão	0,37	-1,75	-0,30	1,16	-0,35	0,62	1,37	0,38	-0,11	-0,48	-0,12
Café	-0,61	0,80	0,63	2,58	-3,59	1,19	1,24	2,77	2,22	-1,14	0,63
Banana	-26,66	4,63	2,02	-2,74	-4,01	-3,66	2,34	1,31	2,07	4,33	-3,95
Açúcar	3,46	3,11	5,47	10,23	4,93	-0,55	-0,34	4,42	2,05	4,46	-0,33
Óleo	-2,43	2,35	2,85	0,00	3,54	0,00	0,90	5,49	2,92	10,72	0,00
Manteiga	4,15	1,60	2,04	0,65	1,17	1,36	-0,77	-1,54	0,05	0,81	0,29

(continua)

Produtos	Norte							Nordeste								
	Belém	Boa Vista	Macapá	Manaus	Palmas	Porto Velho	Rio Branco	Aracaju	Fortaleza	João Pessoa	Maceió	Natal	Recife	Salvador	São Luís	Teresina
Total	0,14	-0,67	-1,27	2,10	-1,76	2,18	1,94	1,58	-0,13	-0,37	2,12	-0,17	-0,50	-1,66	0,88	-1,77
Carne	-0,18	-1,02	0,29	-1,23	0,56	2,75	4,05	0,52	0,38	2,15	4,23	2,22	4,04	-0,27	2,37	1,77
Leite	-0,91	2,91	-2,45	1,79	-8,43	-3,97	0,42	5,46	-0,23	-1,53	1,41	-5,01	-6,53	0,23	-1,97	-7,14
Feijão	-5,13	0,54	0,68	9,45	-10,70	-8,90	-1,14	-8,31	-4,48	-5,89	0,50	-6,04	-8,07	-3,82	-3,68	-6,84
Arroz	0,40	-0,54	0,62	2,35	-0,32	-1,48	0,00	1,42	3,51	0,87	4,46	1,58	-0,54	3,06	2,37	2,13
Farinha	0,14	-0,92	0,95	-0,39	0,98	3,11	0,61	6,90	0,45	-1,27	-0,96	0,54	6,70	-1,74	2,08	-1,55
Batata																
Tomate	5,20	2,53	-3,85	4,61	-3,77	20,06	2,12	15,95	-1,77	7,56	2,17	5,25	1,93	-3,78	9,27	-3,73
Pão	0,09	0,00	-2,27	0,00	-0,19	0,63	3,51	-0,47	0,48	0,89	4,13	1,00	-0,12	-0,33	0,00	0,00
Café	0,00	1,06	-0,61	3,65	1,88	0,66	2,77	2,11	1,57	3,23	2,00	2,30	1,34	-0,73	0,00	-0,34
Banana	1,48	-11,38	-2,57	0,00	-0,95	3,05	1,64	2,13	0,84	-9,69	-3,62	-6,53	-8,75	-7,03	-3,75	-4,45
Açúcar	-2,28	0,00	0,65	5,74	0,69	1,77	1,06	0,00	2,94	1,42	4,42	0,00	15,41	1,89	1,22	2,66
Óleo	-1,15	0,00	1,37	7,08	0,50	2,08	1,64	2,45	2,90	-1,03	0,70	-0,80	0,25	0,58	0,00	1,03
Manteiga	0,95	5,72	-2,60	3,08	9,64	-0,47	0,95	1,10	2,35	-3,00	1,98	1,52	1,23	-0,16	0,26	0,40

Fonte: DIEESE. Pesquisa Nacional da Cesta Básica de Alimentos
Obs.: Podem ocorrer pequenas diferenças nas variações em relação ao texto, pois os dados desta tabela derivam do cálculo resultante do preço dos produtos multiplicado pelas quantidades estabelecidas na cesta

Reportagem 4:

PREÇO DA CESTA BÁSICA CAI EM CURITIBA E FICA EM R$ 424,87 EM SETEMBRO[35]

DADOS DO DIEESE MOSTRAM QUE O PREÇO DA BANANA FICOU 11,49%. CUSTO DA CESTA BÁSICA EM CURITIBA É O 10º MAIOR ENTRE AS CAPITAIS DO PAÍS.

06/10/2016 15h35 - Atualizado em 06/10/2016 15h35

Do G1 PR

O preço da cesta básica em Curitiba ficou 1,75% mais barato no mês de setembro, na comparação com agosto, de acordo com pesquisa divulgada nesta quinta-feira (6) pelo Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos (DIEESE). Os alimentos considerados essenciais custaram R$ 424,87 para o trabalhador.

Mensalmente, o Dieese pesquisa o preço dos alimentos da cesta básica nas 27 capitais do Brasil. Assim como em Curitiba, houve redução do preço em 13 cidades. O valor cobrado em Curitiba é o 10º maior entre as capitais.

Na capital paranaense, o alimento que teve a maior variação de preço foi a banana. Os consumidores encontraram a fruta nos mercados 11,49% mais cara.

Por outro lado, a batata foi o item que teve a maior redução de preço: 24,67%

Veja a variação de preços dos itens pesquisados

- Banana (11,49%)
- Açúcar (2,10%)
- Arroz (1,73%)
- Farinha de trigo (1,61%)
- Pão (0,43%)
- Feijão (0,41%)
- Manteiga (0,18%)
- Batata (-24,67%)
- Leite (-8,64%)
- Óleo de soja (-1,82%)
- Carne (-1,34%)
- Tomate (-0,67%)
- Café (-0,48%)

Continuando:

No site do DIEESE é possível reunir as informações citadas nas quatro reportagens e obter ainda mais informações sobre o custo da cesta básica na cidade de Curitiba. Abaixo uma tabela com os dados resumidos para o ano de 2016.

35 http://g1.globo.com/pr/parana/noticia/2016/10/preco-da-cesta-basica-cai-em-curitiba-e-fica-em-r-42487-em-setembro.html.

Tabela 1: Cesta Básica em Curitiba no ano de 2016

Mês	Total da Cesta	Carne	Leite	Feijão	Arroz	Farinha	Batata	Tomate	Pão	Café	Banana	Açúcar	Óleo	Manteiga
01-2016	R$ 398,46	R$ 147,38	R$ 22,05	R$ 18,72	R$ 7,08	R$ 3,56	R$ 23,64	R$ 52,11	R$ 52,56	R$ 9,29	R$ 34,28	R$ 8,10	R$ 3,85	R$ 15,84
02-2016	R$ 392,75	R$ 151,47	R$ 22,28	R$ 20,52	R$ 7,44	R$ 3,53	R$ 21,54	R$ 41,94	R$ 53,58	R$ 9,44	R$ 32,78	R$ 8,28	R$ 4,18	R$ 15,76
03-2016	R$ 400,78	R$ 151,73	R$ 22,80	R$ 20,74	R$ 7,41	R$ 3,50	R$ 23,64	R$ 43,56	R$ 53,70	R$ 9,83	R$ 34,95	R$ 8,25	R$ 4,26	R$ 16,40
04-2016	R$ 396,34	R$ 152,92	R$ 23,55	R$ 21,02	R$ 7,47	R$ 3,48	R$ 27,78	R$ 32,94	R$ 53,46	R$ 9,97	R$ 34,65	R$ 8,04	R$ 4,32	R$ 16,74
05-2016	R$ 410,05	R$ 151,01	R$ 24,68	R$ 21,20	R$ 7,26	R$ 3,48	R$ 32,94	R$ 40,68	R$ 54,54	R$ 9,82	R$ 33,45	R$ 8,22	R$ 4,21	R$ 18,56
06-2016	R$ 416,49	R$ 145,46	R$ 28,42	R$ 23,94	R$ 7,38	R$ 3,54	R$ 37,98	R$ 38,88	R$ 54,30	R$ 9,97	R$ 34,28	R$ 8,16	R$ 4,12	R$ 20,05
07-2016	R$ 420,24	R$ 143,88	R$ 33,22	R$ 33,30	R$ 8,19	R$ 3,62	R$ 28,80	R$ 33,48	R$ 54,54	R$ 10,30	R$ 37,28	R$ 8,28	R$ 3,92	R$ 21,42
08-2016	R$ 431,14	R$ 143,42	R$ 33,00	R$ 31,90	R$ 8,67	R$ 3,72	R$ 27,48	R$ 40,50	R$ 55,26	R$ 10,41	R$ 42,38	R$ 8,58	R$ 3,84	R$ 21,97
09-2016	R$ 424,87	R$ 141,50	R$ 30,15	R$ 32,04	R$ 8,82	R$ 3,78	R$ 20,70	R$ 40,23	R$ 55,50	R$ 10,36	R$ 47,25	R$ 8,76	R$ 3,77	R$ 22,01
10-2016	R$ 432,98	R$ 150,94	R$ 26,32	R$ 31,64	R$ 8,58	R$ 3,87	R$ 20,58	R$ 41,94	R$ 55,44	R$ 10,59	R$ 48,22	R$ 8,94	R$ 3,88	R$ 22,02
11-2016	R$ 421,37	R$ 151,47	R$ 24,52	R$ 32,18	R$ 8,58	R$ 3,72	R$ 20,04	R$ 34,20	R$ 54,84	R$ 10,77	R$ 46,58	R$ 9,24	R$ 3,90	R$ 21,32
12-2016	R$ 409,86	R$ 150,08	R$ 24,45	R$ 31,10	R$ 8,55	R$ 3,62	R$ 14,40	R$ 28,89	R$ 54,24	R$ 10,82	R$ 49,35	R$ 9,27	R$ 4,00	R$ 21,09

Fonte: DIEESE[36]

Outra informação considerada importante nas reportagens acima é em relação ao salário mínimo praticado (nominal) e o salário mínimo ideal. Também pelo DIEESE podemos obter essa informação de forma resumida.

Tabela 2: Salário mínimo em 2016

Mês de 2016	Salário mínimo nominal	Salário mínimo necessário
Dezembro	R$ 880,00	R$ 3.856,23
Novembro	R$ 880,00	R$ 3.940,41
Outubro	R$ 880,00	R$ 4.016,27
Setembro	R$ 880,00	R$ 4.013,08
Agosto	R$ 880,00	R$ 3.991,40
Julho	R$ 880,00	R$ 3.992,75
Junho	R$ 880,00	R$ 3.940,24
Maio	R$ 880,00	R$ 3.777,93
Abril	R$ 880,00	R$ 3.716,77
Março	R$ 880,00	R$ 3.736,26
Fevereiro	R$ 880,00	R$ 3.725,01
Janeiro	R$ 880,00	R$ 3.795,24

Fonte: DIEESE[37]

No estado do Paraná temos o salário mínimo regional, que é sancionado em lei pela câmara dos deputados. O salário mínimo regional do Paraná é dividido em quatro grupos diferentes: Grupo I - Destinado a profissionais empregados em atividades agropecuárias, florestais e de pesca; Grupo II - Engloba os trabalhadores que atuam em serviços administrativos, empregados em serviços, vendedores do comércio e trabalhadores de reparação e manutenção; Grupo III - Nesta categoria estão incluídos aqueles que trabalham em atividades industriais, com a produção de bens e serviços; Grupo IV - A categoria com melhores salários é destinada a trabalhadores técnicos de nível médio. Ainda há o salário destinado a empregados domésticos. A tabela a seguir resume essas informações.

Tabela 3: Salário mínimo regional do Estado do Paraná

Mês de 2016	Grupo I	Grupo II	Grupo III	Grupo IV	Empregados Domésticos
Janeiro	R$ 1.032,02	R$ 1.070,33	R$ 1.111,04	R$ 1.192,45	R$ 1.070,33
Fevereiro	R$ 1.032,02	R$ 1.070,33	R$ 1.111,04	R$ 1.192,45	R$ 1.070,33
Março	R$ 1.032,02	R$ 1.070,33	R$ 1.111,04	R$ 1.192,45	R$ 1.070,33
Abril	R$ 1.032,02	R$ 1.070,33	R$ 1.111,04	R$ 1.192,45	R$ 1.070,33
Maio	R$ 1.148,40	R$ 1.190,20	R$ 1.234,20	R$ 1.326,60	R$ 1.190,20
Junho	R$ 1.148,40	R$ 1.190,20	R$ 1.234,20	R$ 1.326,60	R$ 1.190,20
Julho	R$ 1.148,40	R$ 1.190,20	R$ 1.234,20	R$ 1.326,60	R$ 1.190,20
Agosto	R$ 1.148,40	R$ 1.190,20	R$ 1.234,20	R$ 1.326,60	R$ 1.190,20

[36] https://www.dieese.org.br/cesta/cidade.
[37] http://www.dieese.org.br/analisecestabasica/salarioMinimo.html#2016.

	Setembro	R$ 1.148,40	R$ 1.190,20	R$ 1.234,20	R$ 1.326,60	R$ 1.190,20
	Outubro	R$ 1.148,40	R$ 1.190,20	R$ 1.234,20	R$ 1.326,60	R$ 1.190,20
	Novembro	R$ 1.148,40	R$ 1.190,20	R$ 1.234,20	R$ 1.326,60	R$ 1.190,20
	Dezembro	R$ 1.148,40	R$ 1.190,20	R$ 1.234,20	R$ 1.326,60	R$ 1.190,20

Fonte: Decreto do Estado do Paraná nº 1.198 de 30.04.2015 e Lei PR 18.766/2016.

Investigue!!!

Fonte: O autor.

Como cada dupla investigou um problema diferente os desenvolvimentos seguiram encaminhamentos independentes dupla a dupla. Nesse sentido, apresentamos primeiramente ações de treinamento mais gerais, e depois apresentamos o desenvolvimento de cada dupla analisada e as ações de treinamento envolvidas nesses desenvolvimentos.

O *treinamento* referente a situação-inicial problemática está na localização das informações sobre a cesta básica na cidade de Curitiba, aproximando a temática da cotidianidade dos alunos. Oportunizando, assim, *treinamento* por *uso* da *regra*.

O professor/pesquisador apresentou uma grande quantidade e diversidade de informações sobre a cesta básica. As duplas coletaram, então, dessas informações os dados necessários para solucionar o problema formulado por eles. Nesse sentido, o *treinamento* por *uso da regra* está relacionado a identificar os dados necessários em meio às informações disponíveis.

A simplificação realizada pelas duplas acontece juntamente com a coleta de dados, ao determinarem quais dados seriam considerados no desenvolvimento da atividade. Nesse sentido, eles vivenciam a simplificação em mais uma atividade, o que se caracteriza como *treinamento* por *uso da regra* em diferentes contextos.

Na formulação do problema as duplas tiveram dificuldade em direcionar a investigação para um aspecto da situação. O professor/pesquisador aproveita as ideias iniciais de direcionamento de cada dupla para realizar um *treinamento ostensivo* de aspectos da formulação do problema, explicando que o problema deve inferir sobre algum aspecto que interesse aos alunos e que se aproxime da cotidianidade deles; também que deve considerar o contexto em que o problema será investigado e as demais fases do desenvolvimento da atividade, para que não sejam exigidas ações que não são possíveis de realizar no tempo destinado ao desenvolvimento da atividade, ou, que exijam muitas simplificações.

Descrevamos agora as ações de treinamento referentes ao desenvolvimento realizado por cada dupla. Primeiramente, referentes ao desenvolvimento realizado por D1 (Quadro 20).

QUADRO 20: DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE 2.2 REALIZADA PELOS ALUNOS DE D1

Resolução:

A inteiração com o tema se deu pelas três reportagens e pelo relatório do DIEESE referentes à Cesta Básica, sua variação de preço, a variação dos preços de seus produtos e comparações com o salário mínimo nacional e regional do Paraná.

Problema: Quanto do salário mínimo é gasto com o consumo de carne anualmente em Curitiba?

Hipóteses simplificadoras usadas:

- (H1) – Reduzir o problema ao ano de 2016, utilizando dados da cesta básica de Curitiba e do salário mínimo regional do Paraná.
- (H2) – Considerar apenas o consumo de carne que entra no cálculo da cesta básica.
- (H3) – Tomar a média entre os percentuais obtidos a partir de cada faixa salarial.

Para responder a pergunta, decidimos nos debruçar sobre os dados de 2016 (H1). Utilizando a tabela "Cesta Básica em Curitiba no ano de 2016" do DIEESE e os salários mínimos regionais do Paraná no ano de 2016.

Além disso, como consumo de carne estamos considerando os valores referentes ao item Carne na composição da Cesta Básica em Curitiba para uma pessoa (H2).

Como variáveis independentes em nosso problema, temos o salário referente ao mês i (s_i) e o gasto com carne refente ao mês i (c_i). Desta forma, o salário relativo à um periodo de (m) meses será representado pela soma dos salários mensais nesse período, ou seja:

$$S' = \sum_{i=1}^{m} s_i$$

Analogamente, o gasto com carne para o mesmo período será dado por:

$$C' = \sum_{i=1}^{m} c_i$$

Para calcular o percentual do salário que é gasto com carne num período de (m) meses, utilizaremos o modelo:

$$R = 100 \times \frac{C'}{S'} = 100 \times \frac{\sum_{i=1}^{m} c_i}{\sum_{i=1}^{m} s_i}$$

Utilizando o excel para fazer os cálculos e os dados referentes ao ano de 2016 citados anteriormente, obtemos C' =R$ 1.781,26, e para os salários obtemos um valor de S' para cada grupo salarial:

	Grupo I	Grupo II	Grupo III	Grupo IV	Empregados Domésticos
S' =	R$ 13.315,28	R$ 13.802,92	R$ 14.317,76	R$ 15.382,60	R$ 13.802,92

E com estes resultados obtemos os percentuais referentes à quanto do salário anual se gasta com carne:

	Grupo I	Grupo II	Grupo III	Grupo IV	Empregados Domésticos
R =	13,38%	12,90%	12,44%	11,58%	12,90%

Com o objetivo de reduzir estes dados em apenas um, optamos pela média aritmética entre eles (H3), que é 12,64% e que responde nosso problema proposto. Além de ser um possível motivador para discussões entorno do consumo de carne intrínseco à nossa sociedade, seus impactos na saúde, no meio ambiente, na economia e as questões éticas/morais envolvidas.

Fonte: Relatório da atividade 2.2 entregue por D1.

As hipóteses foram formuladas por D1 com autonomia nessa atividade, o professor/pesquisador interviu somente no momento da comunicação da atividade, indicando que as hipóteses devem ser evidenciadas no relatório da atividade, pois, como

argumentam Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.19), a comunicação dos resultados deve apresentar argumentos que convençam àqueles aos quais esses resultados são acessíveis.

As ações de selecionar variáveis, construir o modelo e apresentar uma solução para o problema, também foram realizadas sem a necessidade de intervenções de *ensino ostensivo*, a realização delas nessa atividade se caracteriza como um diferente *uso dessas regras*.

Os alunos de D1 apresentam poucas linhas que indicam uma interpretação dos resultados e nenhuma indicação de validação. Nesse sentido o professor/pesquisador intervém *ostensivamente* durante a comunicação dos resultados indicando duas possibilidades para a dupla: 1- que aprofundem essa interpretação, relatando os aspectos que discutiram durante a comunicação da atividade para a turma; e, 2- sugere que D1 realize uma metavalidação do índice obtido que indica o percentual gasto com carne: *"PP: A metavalidação é você pensar na modelagem que você resolveu e como que ela pode interferir [...] no futuro para essa problemática, ou se você tivesse feito diferente a modelagem [...] e se não tivesse considerado a média, tivesse feito por grupo, poderia analisar quem são cada grupo [...] isso é fazer uma metavalidação você, a partir daquilo que você construiu, você pensar no problema [...] sobre os impactos que esse índice pode ter sobre [...] a situação que você está modelando*".

Essas são as ações de *treinamento* relacionadas ao desenvolvimento de D1. Observemos agora o desenvolvimento realizado por D3 (Quadro 21).

QUADRO 21: DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE 2.2 REALIZADA PELOS ALUNOS DE D3

Problema: Qual será o valor da cesta básica no mês de abril de 2017?

Hipótese 1: Acreditamos que haja um comportamento similar em relação ao crescimento e ao decrescimento do valor das cestas básicas anualmente.

Hipótese 2: Usaremos o excel e o geogebra para realizar os cálculos.

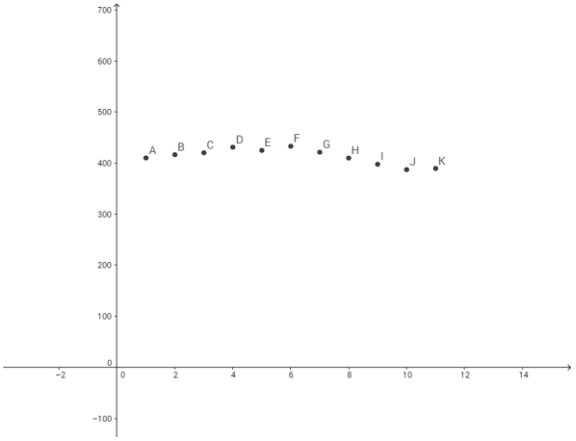
Analisaremos os dados referentes aos anos 2014, 2015 e 2016.

	2016	2015	2014
Mês	**Valor**		
1	410,05	364,8	341,2
2	416,49	359,69	332,3
3	420,24	360,28	308,66
4	431,14	354,94	303,28
5	424,87	356,51	301,08
6	432,98	375,26	314,25
7	421,37	349,93	319,26
8	409,86	387,79	315,84
9	397,69	335,82	294,06
10	387,27	341,64	293,49

11	389,52	349,69	329,55
12	L	359,39	335,73

Hipótese 3: Utilizando apenas os dados de 2016 para criarmos uma função cíclica que representa as alterações no valor da cesta básica, pois o salário mínimo anual varia a cada ano sendo a primeira alteração em maio.

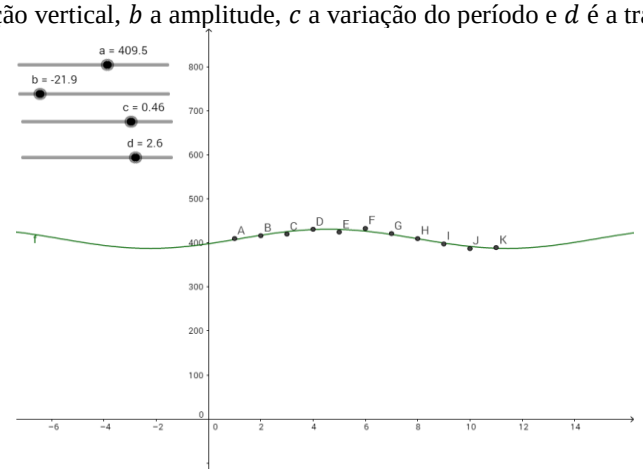
Definimos L como sendo o valor da cesta básica de Abril de 2017.



Utilizaremos a função seno para conseguirmos a função da tendência desses pontos.

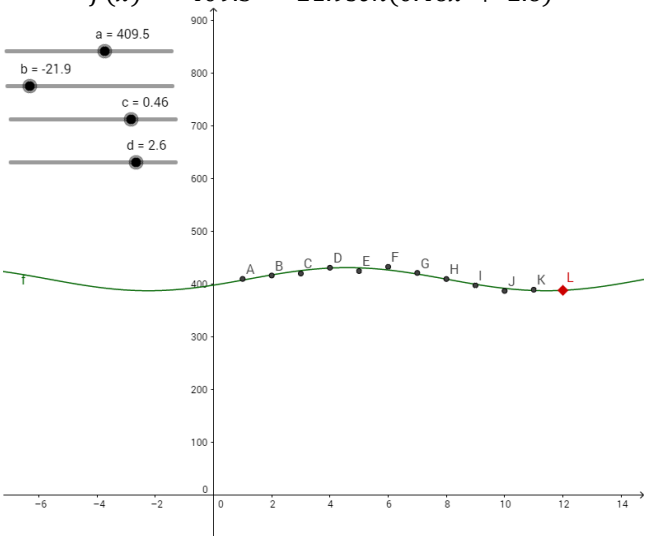
$$f(x) = a + b.sen(c.x + d)$$

Onde a é a translação vertical, b a amplitude, c a variação do período e d é a translação horizontal.



Função cíclica encontrada:

$$f(x) = 409.5 - 21.9sen(0.46x + 2.6)$$



Com essa função conseguimos prever o valor da cesta básica em abril de 2017 que seria

$$f(12) = 409.5 - 21.9sen(0.46(12) + 2.6)$$

$$f(12) = 388{,}38$$

Interpretação e Validação

Nesse estudo conseguimos compreender que o valor das cestas básicas segue um padrão. Conseguimos prever o valor da cesta básica de Abril de 2017 sendo um valor de R$ 388,38, um valor válido de acordo com o período estudado.

Situação final

Prever o valor da cesta básica modelando uma função que melhor se adeque aos valores reais dos meses anteriores.

Fonte: Relatório da atividade 2.2 entregue por D3.

Na formulação do problema realizada por D3, além dos aspectos ressaltados anteriormente, o professor/pesquisador teve que auxiliar na formulação, indicando que determinassem o valor da cesta básica para o último mês de 2017 antes do reajuste salarial do estado do Paraná. O que caracteriza um *treinamento ostensivo* da *regra*.

Na formulação das hipóteses o professor/pesquisador interviu *ostensivamente* na terceira, em que, por meio de questionamentos e orientações, indicou à dupla que os valores das cestas básicas apresentavam um comportamento cíclico. Essa intervenção também encaminhou os alunos da dupla para a construção do modelo que foi determinado a partir da função seno, que têm essa característica cíclica.

Como apresentado no quadro 22, os alunos de D3 não definem as variáveis no relatório da atividade, então, o professor/pesquisador intervém *ostensivamente* quando A5 comunica a atividade para a turma (Aula 12), orientando que eles definam o que a variável x e a variável $y = f(x)$ representam.

Ainda na construção do modelo o professor ensinou como determinar os parâmetros da função seno utilizando a ferramenta do GeoGebra controle deslizante, assim, adequarem a tendência do gráfico da função aos pontos relacionados ao valor da cesta básica.

A ação de apresentar uma solução para o problema foi realizada de forma autônoma, logo, o *treinamento* se caracteriza como *uso dessa regra* num contexto diferente.

Em relação a interpretação e validação, o professor/pesquisador orienta os alunos a realizarem duas ações que validariam o resultado obtido: 1- como a atividade foi realizada entre o final do mês de abril e o início do mês de maio de 2017, a dupla poderia consultar o valor da cesta básica no mês de abril levantado pelo DIEESE; e, 2- aplicar o modelo construído para os meses considerados em sua construção e verificar sua adequabilidade. Intervenções de *ensino ostensivo*.

Essas são as ações de *treinamento* realizadas durante o desenvolvimento de D3.

No quadro 22 apresentamos de forma sintética as ações de *treinamento* realizadas durante o desenvolvimento dessa atividade.

QUADRO 22 : TREINAMENTOS REALIZADOS NA ATIVIDADE 2.2

***Regra* do *fazer* Modelagem Matemática**	**Desenvolvimento da atividade**	**Ação de treinamento realizada**	**Uso dos recursos das tecnologias digitais**	**Tipo de treinamento**	**Aula**
Identificar uma situação-inicial problemática	Ler a reportagem e demais informações referentes a situação-inicial problemática	O professor/pesquisador aproxima a situação da cotidianidade dos alunos ao localizar as informações sobre a cesta básica na cidade Curitiba.		Uso da Regra	Aula 10
Coletar Dados	Identificar os dados necessários em meio as informações disponíveis	As duplas coletaram, da grande quantidade e diversidade de informações sobre a cesta básica fornecidas pelo professor/pesquisador, as informações os dados necessários para solucionar o problema formulado por eles	*Investigação*: informações sobre a situação obtidas de sites de notícias e dos relatórios disponíveis no site do DIEESE	Uso da Regra	Aula 10
Formular o Problema	Direcionar o problema para algum aspecto da situação	O professor/pesquisador explica que o problema deve inferir sobre algum aspecto que interesse aos alunos e que se aproxime da cotidianidade deles; também que deve considerar o contexto em que o problema será investigado e as demais fases do desenvolvimento da atividade	*Simulação*: utilizar o Excel para manipular os dados e encontrar um direcionamento para o problema	Ensino Ostensivo	Aula 10
	Formular um problema específico (D3)	O professor/pesquisador indica o problema que deve ser formulado		Ensino Ostensivo	Aula 11
Realizar Simplificações	Selecionar quais dados seriam considerados no desenvolvimento da atividade	Os alunos vivenciam a realização de uma simplificação dos dados em um contexto diferente	*Visualização*: utilizar o Excel para organizar e visualizar os dados selecionados	Uso da Regra	Aula 10
Formular Hipóteses	Apresentar as hipóteses formuladas de forma evidente no relatório (D1)	O professor/pesquisador indica que as hipóteses devem ser evidenciadas no relatório da atividade		Ensino Ostensivo	Aula 12
	Formular a terceira hipótese (D3)	O professor/pesquisador indica à dupla que os valores das cestas básicas apresentavam um comportamento cíclico	*Experimentação*: representar os valores da cesta básica como pontos no GeoGebra *Visualização*: reconhecer nos pontos representados no GeoGebra um comportamento cíclico	Ensino Ostensivo	Aula 11
Selecionar Variáveis	Os alunos de D1 selecionaram variáveis	Os alunos vivenciam a seleção de variáveis em um contexto diferente		Uso da Regra	Aula 11
	Os alunos de D3 utilizam as variáveis na função seno sem defini-las previamente	O professor/pesquisador orienta que eles definam o que cada variável da função seno representa para a situação		Ensino Ostensivo	Aula 12
Construir o Modelo	Os alunos de D1 construíram o modelo	Os alunos vivenciam a construção do modelo em um contexto diferente		Uso da Regra	Aula 11
	Determinar a matemática envolvida na construção do modelo (D3)	O professor/pesquisador indica à dupla que os valores das cestas básicas apresentavam um comportamento cíclico	*Visualização*: reconhecer nos pontos representados no GeoGebra um comportamento cíclico	Ensino Ostensivo	Aula 11

	Construir o modelo utilizando o software GeoGebra (D3)	O professor/pesquisador ensina como determinar os coeficientes da função seno utilizando a ferramenta controle deslizante do software GeoGebra	*Controle*: utilizar a ferramenta controles deslizantes do GeoGebra para determinar os coeficientes da função seno *Algebrização*: utilizar o GeoGebra para obter a função algébrica	Ensino Ostensivo	Aula 11
Apresentar uma solução para o problema	Os alunos calculam a resposta e apresentaram uma solução para o problema	Os alunos vivenciam experiência de calcular a resposta e apresentar uma solução para o problema em um contexto diferente	*Calculação*: D1 utiliza o Excel para calcular os percentuais	Uso da Regra	Aula 11
Analisar a resposta em relação à Matemática	O professor/pesquisador indica uma validação do modelo (D3)	O professor/pesquisador orienta os alunos a aplicarem o modelo construído nos dados e verificar sua adequabilidade		Ensino Ostensivo	Aula 12
Analisar a resposta em relação ao Problema	Destacar a interpretação dos resultados (D1)	O professor/pesquisador indica que aprofundem a interpretação apresentada no relatório, destacando os aspectos que discutiram durante a comunicação da atividade para a turma	*Investigação*: encontrar informações que reiterem os aspectos discutidos durante a comunicação da atividade para a turma	Ensino Ostensivo	Aula 12
	O professor/pesquisador sugere que D1 realiza uma metavalidação	O professor/pesquisador indica possibilidades de reflexões sobre os resultados obtidos, como os impactos sobre a situação e sobre a maneira que foi produzido.		Ensino Ostensivo	Aula 12
	O professor/pesquisador indica uma validação do resultado (D3)	O professor/pesquisador orienta que os alunos verifiquem o valor da cesta básica no mês de abril levantado pelo DIEESE e compare com o valor obtido	*Investigação*: encontrar no site do DIEESE o valor da cesta básica no mês de abril e comparar com o valor obtido	Ensino Ostensivo	Aula 12

Fonte: O autor.

6.2. As atividades do 3° momento e o *seguir regras*

Nessa seção realizamos a análise específica das atividades desenvolvidas no 3° momento de familiarização com atividades de modelagem matemática. Para isso, consideramos os aspectos metodológicos e seus encaminhamentos apresentados em 5.2 e as ações que indicam o *seguir as regras* do *fazer* Modelagem Matemática definidas no capítulo 4.

A análise específica é realizada para as atividades do 3° momento de familiarização desenvolvidas pelas duplas D1 e D3, respectivamente Atividade 3.1 e Atividade 3.3. São descritas as ações realizadas no desenvolvimento das atividades, identificando se essas ações caracterizam o *seguir regras* do *fazer* Modelagem Matemática. Também são descritos os *usos* dos recursos das tecnologias digitais realizados no desenvolvimento das atividades.

6.2.1. O seguir regras da dupla 1 (D1): Atividade 3.1 – Energia Solar

Nessa atividade os alunos de D1 identificam no tema Energia Solar uma problemática a ser modelada. A problemática é direcionada para o problema do tempo necessário para que o custo de instalação do sistema de captação de energia solar se pague. Para determinar a solução eles encontram os custos máximo, mínimo e médio de instalação do sistema, determinam os valores fixos para manter a ligação com a distribuidora de energia elétrica local, e a partir desses dados constroem funções menor inteiro que representam os gastos com energia solar (custos de instalação e manutenção da ligação com a distribuidora de energia elétrica local) e os gastos com energia elétrica (caso não fosse instalado o sistema de captação de energia solar). A solução é obtida quando comparam as duas funções e os gastos com energia elétrica ultrapassam os gastos com energia solar.

- Identificar uma situação-inicial problemática

A atividade 3.1 (Energia Solar) é a atividade do 3° momento desenvolvida pela dupla 1 (D1), que é composta pelos alunos A2 e A3. Nessa atividade, os alunos de D1 tiveram a primeira experiência na identificação de uma situação-inicial problemática a ser investigada.

Para realizar a escolha do tema da situação-inicial problemática para a atividade, o professor/pesquisador combinou com os alunos que identificassem possibilidades de problemáticas para atividade do 3° momento, das quais uma delas seria utilizada no seu desenvolvimento. Nesse sentido, os alunos de D1 trouxeram três possibilidades de tema, conforme indica o diálogo do Quadro 23.

QUADRO 23: POSSIBILIDADES DE PROBLEMÁTICA PARA A ATIVIDADE 3.1

PP: [...] Vai lá, no que vocês pensaram?
A3: Energia solar...
PP: Energia solar (escreve no quadro)...
A2: Agricultura, eu tinha pensado...
PP: Agricultura (escreve no quadro)...
A3: [...] Eu pensei num, que nem tinha falado pra ele, que era madeira.
PP: Madeira (escreve no quadro). Mais algum assunto?
A3: Acho que não.
A2: Não.

Fonte: Transcrição de gravação de vídeo.

Por meio de alguns questionamentos e reflexões sobre cada uma dessas possibilidades, o professor/pesquisador os orienta para a escolha de um deles. No quadro 24 apresentamos a discussão sobre o tema que foi escolhido pela dupla.

QUADRO 24: DISCUSSÕES PARA A ESCOLHA DA PROBLEMÁTICA DA ATIVIDADE 3.1

PP: Agora vamos tema por tema aqui, e agora vocês explicam mais ou menos o que vocês estavam pensando com esse tema. Para tentar direcionar um pouquinho melhor, daí a gente vai ver qual se adequa mais ou qual vocês preferem fazer. Uma coisa importante pra se pensar quando a gente vai fazer uma atividade de modelagem, é que tem que ser uma coisa que tenha bastante interesse pra você, tem que gerar interesse de ir atrás do assunto, ter vontade de pegar, de discutir, de se aprofundar... e também pensar em alguma coisa que de algum modo interfira na vida da gente [...] Energia solar, em que sentido vocês estavam pensando em energia solar.
A3: Eu comecei a pensar em, tipo, questão de captação de energia solar, tipo, tamanho de placa ou quanto isso tem relação, tipo, custo benefício disso, quanto de energia a gente consegue... mais pra esse lado assim.
PP: Então, estavam pensando mais na parte econômica, isso?
A3: É, por aí. [...]
PR: Pensou em captar energia solar na tua casa?
A3: Eu estava pensando em coisa de telhado de casa, assim mesmo porque, tipo...
PR: Algum caso específico, né [...]
PP: Vocês têm casa ou é apartamento?
A3: Casa.
A2: Casa.
PP: Pode ser uma coisa, por exemplo, pensar em custo/benefício na casa... não numa coisa geral, mas, seria algo mais específico, pra aquela casa, pra aquele espaço [...]

Fonte: Transcrição de gravação de vídeo.

O trecho destacado no quadro 24 sinaliza que, mesmo se tratando de uma atividade do 3° momento, o professor/pesquisador realiza uma ação que indica um *treinamento ostensivo da regra* referente a identificação da situação-inicial problemática, esclarecendo que a situação inicial deve ser de interesse do modelador e de preferência ligada à sua cotidianidade. Embora treinada em atividade anteriores, nesse caso o *ensino ostensivo* foi adequado para reafirmar a *regra*.

É possível observar nas discussões do quadro 24 que o professor/pesquisador fez apontamentos e questionamentos para que o tema da problemática da atividade não fosse escolhido sem um foco de investigação. Entendemos que essas discussões auxiliaram os alunos de D1 na escolha da problemática para a atividade 3.1, na qual optaram pelo tema Energia Solar (Quadro 25).

QUADRO 25: PROBLEMÁTICA ESCOLHIDA POR D1 PARA A ATIVIDADE 3.1

PP: Então vamos lá, A2 e A3 do que a gente discutiu, qual que vocês acharam que dá mais... (A2 e A3 dialogam rapidamente, não é possível identificar na gravação o que falam, em seguida respondem).
A2: Energia.
PP: Energia solar?
A3: Aham.

Fonte: Transcrição de gravação de vídeo.

As discussões dos alunos de D1 indicam que dois dos três temas ou estavam relacionados aos seus interesses pessoais ou tinham influência na cotidianidade deles de alguma maneira. A3 tinha interesse em instalar o sistema de energia solar em sua casa. O pai de A2 cultivava os grãos citados pelo aluno ao propor o tema, contexto presente no seu dia-a-dia. Em relação ao tema "madeira", A3 o propõe sem muito contexto, provavelmente para preencher a lacuna do terceiro tema pedido pelo professor/pesquisador; mas, logo esse tema é descartado.

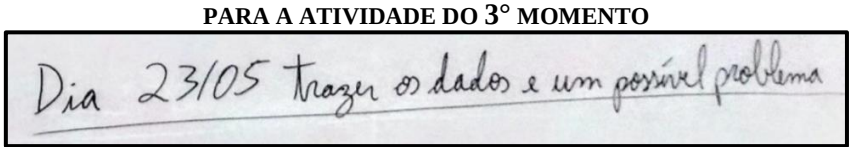
Ao optarem por um dos temas levaram em consideração os aspectos discutidos em conjunto com o professor/pesquisador, mostrando uma consciência de que a identificação do tema da situação inicial problemática faz parte de fazer uma atividade de modelagem matemática, ou seja, é uma das fases de algo mais abrangente.

Podemos inferir, assim, a partir das ações dos alunos de D1 ao identificarem a situação-inicial problemática, Energia Solar, que eles *seguem a regra,* pois, os aspectos de uma situação-problema indicados por Almeida, Silva e Vertuan (2012) foram considerados, tanto na proposição dos temas, quanto na escolha de um tema específico a ser investigado.

- Na fase de Inteiração
    - Coletar dados

A partir das discussões realizadas na identificação do tema da situação inicial problemática para a atividade, ficou combinado que para a Aula 14 os alunos trariam os dados (iniciais) para a atividade e uma primeira ideia de problema (Figura 10).

FIGURA 10: ANOTAÇÃO NO QUADRO DA SALA DE AULA COMBINANDO AS PRÓXIMAS AÇÕES PARA A ATIVIDADE DO 3° MOMENTO



Fonte: Registro fotográfico do quadro da sala de aula

Durante a identificação da situação inicial problemática realizado pelos alunos de D1, o professor/pesquisador os orienta em relação à alguns aspectos dessa problemática que poderão ser considerados na coleta de dados (Quadro 26).

QUADRO 26: ORIENTAÇÃO DO PROFESSOR/PESQUISADOR EM RELAÇÃO À PROBLEMÁTICA ESCOLHIDA POR D1 PARA A ATIVIDADE 3.1

PP: Levando em consideração aquilo que a gente conversou, mais específico, pra um lugar, uma casa. [...] Procurem diferentes formas de se instalar energia solar [...] os custos de instalação... peguem o lugar que pretendem fazer a instalação e tira foto, mede onde vai ser...

Fonte: Transcrição de gravação de vídeo.

Conforme indica o relatório da atividade realizado pelos alunos de D1(Quadro 27), os primeiros dados recolhidos por eles para se inteirar da situação-inicial problemática foram obtidos por meio de algumas reportagens e informações de sites.

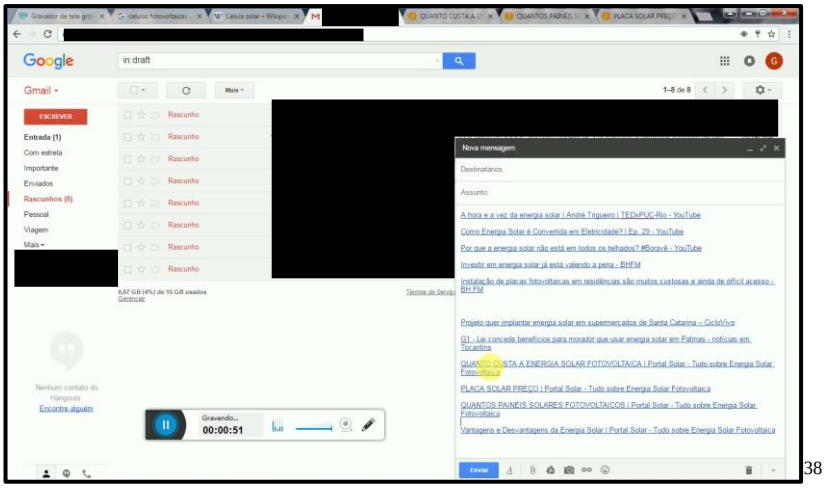
QUADRO 27: INTEIRAÇÃO INICIAL PARA COM O TEMA DA ATIVIDADE 3.1

Num primeiro momento, a inteiração com o tema se deu a partir de algumas reportagens e vídeos sobre as possibilidades do uso da energia solar. • Vantagens e Desvantagens da Energia Solar | Portal Solar • A hora e a vez da energia solar | André Trigueiro | TEDxPUC-Rio • Como Energia Solar é Convertida em Eletricidade? | Ponto em Comum • Lei concede benefícios para morador que usar energia solar em Palmas | G1 • Projeto quer implantar energia solar em supermercados de Santa Catarina

Fonte: Relatório entregue em documento de texto por D1 da Atividade 3.1

Isso pode ser observado no início da Aula 14 quando A3 abre em seu email uma lista com tais endereços eletrônicos (Figura 11).

FIGURA 11: ENDEREÇOS ELETRÔNICOS DA INTEIRAÇÃO INICIAL DA ATIVIDADE 3.1 ABERTOS NO EMAIL DE A3



[38]

Fonte: Captura de tela do computador utilizado por D1.

Do quadro 27 e da figura 11 podemos inferir dois aspectos:

1°- para o relatório os alunos de D1 fazem uma simplificação de quais sites informar como contendo dados para a atividade, o que pode indicar que ao anotarem essa fase da modelagem no relatório já haviam amadurecido algumas ideias e tinham um direcionamento para ela (Quadro 28);

[38] Imagem editada para evitar a identificação do aluno.

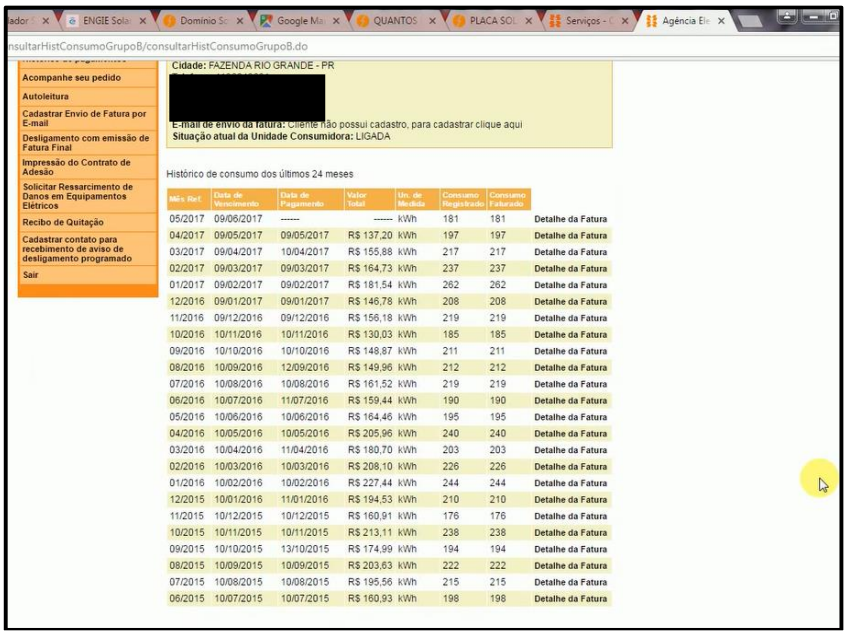
QUADRO 28: INDICAÇÃO DE UM DIRECIONAMENTO DE D1 PARA UM PROBLEMA ESPECÍFICO NA ATIVIDADE 3.1

Aos poucos foi surgindo a dúvida de se valeria a pena utilizar a energia solar em sua forma residencial. [...]

Fonte: Relatório entregue em documento de texto por D1 da Atividade 3.1

2°- o *uso* das tecnologias digitais como *investigação* se faz presente nessa inteiração, mais especificamente na coleta de dados, visto que os alunos da dupla se utilizam do acesso à internet para obter informações sobre o tema. Esse *uso* também foi observado no restante da coleta de dados dessa atividade: um simulador online encontrado pela dupla facilitou o processo de obtenção dos custos de instalação do sistema de captação de energia solar, pois, para obter esses custos pelas empresas que prestam esse serviço seria necessário solicitar um orçamento ou uma visita técnica. Também, para obter o histórico de consumos de energia elétrica eles utilizaram o site da Copel (Figura 15). Nesse sentido, inferimos que *uso* dos recursos das tecnologias digitais auxiliou ativamente os alunos de D1 na ação de coletar de dados.

FIGURA 12: CONSUMO DE ENERGIA ELÉTRICA DA CASA DE UM DOS ALUNOS DE D1 UTILIZADA PARA A ATIVIDADE 3.1



[39]

Fonte: Captura de tela do computador utilizado por D1

Do direcionamento indicado no quadro 28 a dupla foi em busca de dados mais específicos que estivessem ligados à instalação de um sistema residencial de captação de energia solar e também sobre o consumo de energia elétrica na residência de um dos

[39] Imagem editada para evitar a identificação do aluno.

alunos da dupla. O quadro 29 apresenta os dados obtidos pelos alunos de D1 referentes a esses aspectos.

QUADRO 29: DADOS ESPECÍFICOS COLETADOS POR D1 PARA A ATIVIDADE 3.1

[...] Até nos depararmos com o Simulador Solar[40], do site Portal Solar. Este simulador simula a ficha técnica de um gerador fotovoltaico que atenda a demanda de uma residência levando em conta seu consumo mensal em kWh e a cidade onde se localiza (para que seja possível estimar a quantidade de sol disponível).

A coleta de dados começou ao acessarmos os registros da Copel em busca dos dados das contas de luz do ano de 2016 da casa (onde moram duas pessoas) de um dos integrantes da dupla, com esses dados calculamos o consumo anual de 2016 e o consumo mensal médio.

Dados Copel			
...			
Total anual	R$ 2.039,44	2552	kWh
Média mensal	R$ 169,95	213	kWh

Utilizando o consumo mensal médio foi feita uma simulação, de onde foram coletados dados como: preço mínimo e máximo previsto para custo de compra e instalação do sistema para a conversão de energia solar em energia elétrica, a quantidade prevista da produção de kWh por mês, a produção prevista anual e a média mensal, e as dimensões do sistema de energia solar (quantidade de placas fotovoltaicas, espaço ocupado, peso).

Dados da simulação		
Custo mínimo	R$13.786,00	
Média dos custos	R$15.368,00	
Custo máximo	R$16.950,00	
Nº de placas fotovoltaicas	9	
Área mínima ocupada	18,1	m²
Peso médio por m²	15	kg/m²
...		
Produção anual	2555	kWh
Média mensal	213	kWh

[...]

Dados da conta de luz:	
Bandeira da energia (Vermelha)	R$ 8,32
Iluminação pública	R$ 11,77
Preço do 1kWh	0,6402

Fonte: Relatório entregue em documento de texto por D1 da Atividade 3.1

[40] https://www.portalsolar.com.br/calculo-solar.

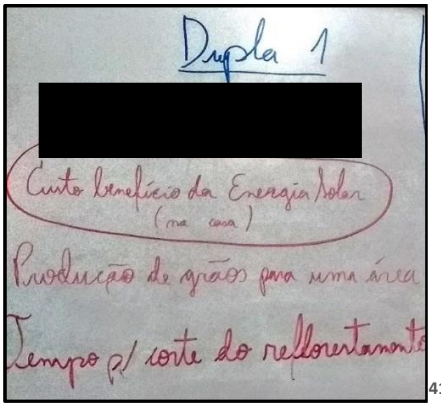
Do trecho destacado no quadro 29 inferimos que os alunos de D1 não consideraram, na coleta de dados, as informações iniciais obtidas nos endereços eletrônicos, indicando que entendem que há na fase de inteiração uma ação relacionada a coleta de informações. Como evidenciam Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.15-16) os dados coletados podem ser quantitativos ou qualitativos, mediante contato direto ou indireto e que busquem informações a respeito do tema. Logo, essa confusão não atrapalhou o desenvolvimento da atividade 3.1, visto que esses aspectos são respeitados na coleta de dados realizada por eles.

As ações realizadas na coleta de dados pelos alunos de D1, nos mostram que foram capazes de coletar informações gerais sobre a situação-inicial e também dados específicos direcionados ao aspecto delimitado que seriam necessários para investigá-lo. Disso, há indícios em suas ações de que eles *seguem essa regra* do *fazer* Modelagem Matemática no desenvolvimento da atividade 3.1.

- Formular o Problema

O problema formulado pela dupla teve seu direcionamento indicado desde a identificação da situação-inicial problemática. Na Figura 16 apresentamos as anotações feitas pelo professor/pesquisador no quadro sobre os temas identificados pela dupla, o trecho contornado resume o interesse deles pelo tema Energia Solar.

FIGURA 13: PRIMEIRO DIRECIONAMENTO DE D1 PARA A FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DA ATIVIDADE 3.1



Fonte: Registro fotográfico do quadro da sala de aula

[41] Custo benefício da Energia Solar (na casa).

Esse direcionamento é confirmado pelos alunos de D1 na Aula 14 quando o professor/pesquisador os questiona sobre o andamento da atividade (Quadro 30), e, também, no relatório da atividade (Quadro 31).

QUADRO 30: CONFIRMAÇÃO DE D1 DO DIRECIONAMENTO PARA O PROBLEMA DA ATIVIDADE 3.1

PP: Conseguiram meninos, definir o problema? **A3**: A gente está encaminhando [...] pra, tipo, ver questão de custo, assim, da instalação de uma casa, mas ainda não está bem definido o que vai ser ainda, tipo, se o quanto se consegue economizar, quando se paga a instalação, esse tipo de coisa.

Fonte: Transcrição de captura de tela

QUADRO 31: PRIMEIRO DIRECIONAMENTO DE D1 NO RELATÓRIO PARA O PROBLEMA DA ATIVIDADE 3.1

Aos poucos foi surgindo a dúvida de se valeria a pena utilizar a energia solar em sua forma residencial. [...]

Fonte: Relatório entregue em documento de texto por D1 da Atividade 3.1

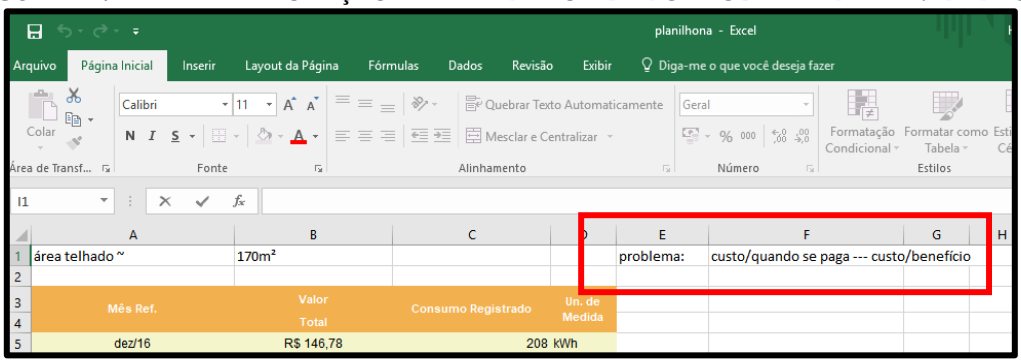
No primeiro momento os alunos de D1 não formulam um problema específico, mas, a partir dos questionamentos do professor/pesquisador, apontam para uma essência do que será investigada na atividade (Quadro 32); observamos isso ao olharmos para a planilha do Excel produzida por eles (Figura 14).

QUADRO 32: ESPECIFICANDO A ESSÊNCIA DO PROBLEMA DA ATIVIDADE 3.1

PP: Qual que é o problema? O que vocês querem investigar? ... quanto é o custo disso, mas quanto isso vai... o custo/benefício, no caso [...] quando isso vai... **A3**: Quanto tempo demora para se pagar... **PP**: Então, esse é o problema de vocês, podem até definir isso. **A3**: Sim. **PP**: Em quanto tempo o custo de instalação da rede elétrica vai ser compensado? Por exemplo. **A2**: Aham. **PP**: Em quanto tempo ele vai começar a gerar economia ao invés de gasto? Seria mais ou menos isso?! **A3**: Sim.

Fonte: Transcrição de captura de tela

FIGURA 14: PRIMEIRA ANOTAÇÃO REALIZADA POR D1 DO PROBLEMA DA ATIVIDADE 3.1



Fonte: Planilha produzida por D1 no Excel

No diálogo do quadro 32 o professor/pesquisador orienta os alunos de D1 na formulação do problema, mas, a ideia principal, a essência do que vai ser investigado é proposto por eles.

Ao discutirem as especificidades do problema – entre eles, por exemplo, o uso do termo custo/benefício –, os alunos de D1 determinam que é na busca por quanto tempo demoraria para um sistema de captação de energia solar cobrir seu custo de instalação que se encontra o interesse de investigação. Disso formulam o problema (Quadro 33).

QUADRO 33: PROBLEMA FORMULADO POR D1 PARA A ATIVIDADE 3.1

[...] decidimos propor a seguinte problemática: *Em quanto tempo este sistema de geração de energia solar residencial se pagará?*

Fonte: Relatório entregue em documento de texto por D1 da Atividade 3.1

É possível inferir que a formulação do problema dessa atividade 3.1 mostra um amadurecimento dos alunos de D1 quanto a essa *regra* do *fazer* Modelagem Matemática. Durante todo o processo de sua formulação foi possível observar que eles estavam considerando aspectos da situação-inicial problemática e, contrariamente ao que ocorreu na atividade 2.2, não apresentaram dificuldades em direcionar a investigação para um problema em específico.

Considerando a multiplicidade de *jogos de linguagem* apontados por Wittgenstein (2000), cada atividade configura-se como um *jogo de linguagem*. Assim como as *regras* do *fazer* Modelagem Matemática regem o desenvolvimento da atividade, o *uso* dessas *regras*, como no caso a formulação do problema, se dá no interior desse *jogo de linguagem*. Aspectos como as ferramentas e tempo necessários para solucionar o problema são determinados nesse *jogo de linguagem*, considerando o contexto em que ele está sendo jogado. Os alunos de D1, consideraram esses aspectos ao formularem o problema da atividade 3.1; aspectos que foram abordados gradativamente no desenvolvimento das atividades. Portanto, observadas essas ações dos alunos de D1 ao *formularem o problema* dessa atividade podemos inferir que eles *seguem essa regra* do *fazer* Modelagem Matemática.

- Na fase de Matematização
    - Realizar Simplificações

Na atividade 3.1 (Energia Solar) os alunos de D1 não evidenciam no relatório da atividade as simplificações realizadas em seu desenvolvimento. As simplificações

realizadas são apresentadas no relatório da atividade entremeadas com outras ações do *fazer* modelagem matemática. Contudo, ainda que não estejam evidenciadas no relatório da atividade, não significa que elas estejam sendo ignoradas por D1 ou sendo realizadas sem uma reflexão prévia.

No diálogo do quadro 34 os alunos de D1 discutem a possibilidade de envolver mais aspectos referentes a instalação de um sistema de captação de energia solar, mas, percebem que não seria possível englobá-los na atividade, naquele momento. Uma primeira simplificação realizada nessa atividade, que não foi incorporada ao relatório da atividade.

QUADRO 34: DISCUSSÃO DE D1 SOBRE A SIMPLIFICAÇÃO REFERENTE AOS ASPECTOS A SEREM CONSIDERADOS NA ATIVIDADE 3.1

A3: [...] Outra coisa que eu pensei também, tipo, a tendência do preço da conta de luz é baixar ou aumentar, conforme o tempo? Porque a gente tem inflação, tipo, a gente tem essas coisas, saca. **A2**: Eu não sei, porque dependendo da... [...] **A3**: mas, do mesmo jeito os produtos eletrodomésticos, eletroeletrônicos da casa [...] quanto mais passa o tempo mais estão otimizados e menos estão gastando energia, saca. **A2**: Aham. **A3**: É que daí também fazer uma modelagem dessa... se a gente for começar a se preocupar com otimização do produto... **A2**: É melhor ficar por isso.

Fonte: Transcrição de captura de tela

Outra simplificação considerada pela dupla, presente no relatório, é a ação de considerar a média de custo de instalação do sistema de captação de energia solar – uma orientação dada pelo professor/pesquisador – e a média de consumo de energia elétrica na casa no último ano (Quadro 35).

QUADRO 35: SIMPLIFICAÇÃO DE D1 CONSIDERANDO A MÉDIA DE ALGUNS PARÂMETROS

Dados Copel			
Mês Ref.	**Valor Total**	**Consumo Registrado**	**Un. de Medida**
jan/16	R$ 227,44	244	kWh
...	...	...	...
dez/16	R$ 146,78	208	kWh
Total anual	R$ 2.039,44	2552	kWh
Média mensal	R$ 169,95	213	KWh

Utilizando o consumo mensal médio foi feita uma simulação [...].

Dados da simulação

	Custo mínimo	R$13.786,00	
	Média dos custos	R$15.368,00	
	Custo máximo	R$16.950,00	
	....		

Fonte: Relatório entregue em documento de texto por D1 da Atividade 3.1

Considerar a média mensal de consumo de energia elétrica simplifica o modelo de consumo de energia elétrica, pois, se não fosse considerada seria necessário determinar uma tendência do consumo mensal de energia elétrica, o que acarretaria em um modelo mais complexo.

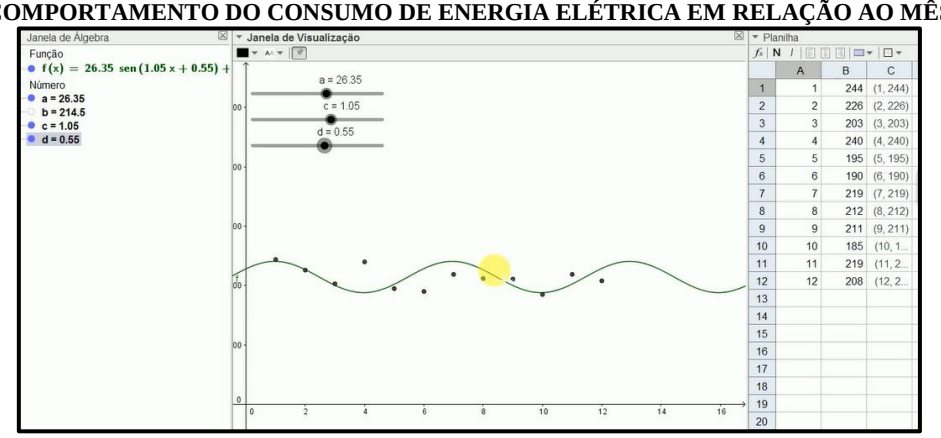
O *uso* dos recursos das tecnologias digitais influenciou indiretamente essa simplificação em duas funções diferentes. Como *visualização*, ao utilizarem o Excel (Figura 15) e o GeoGebra (Figura 16) e perceberem que os dados de consumo de energia elétrica variavam muito mês a mês e não apresentavam um padrão em seu comportamento. Para isso utilizaram dois software.

FIGURA 15: TABELA COM O CONSUMO DE ENERGIA ELÉTRICA

Dados Copel			
Mês Ref.	Valor Total	Consumo Registrado	Un. de Medida
jan/16	R$ 227,44	244	kWh
fev/16	R$ 208,10	226	kWh
mar/16	R$ 180,70	203	kWh
abr/16	R$ 205,96	240	kWh
mai/16	R$ 164,46	195	kWh
jun/16	R$ 159,44	190	kWh
jul/16	R$ 161,52	219	kWh
ago/16	R$ 149,96	212	kWh
set/16	R$ 148,87	211	kWh
out/16	R$ 130,03	185	kWh
nov/16	R$ 156,18	219	kWh
dez/16	R$ 146,78	208	kWh
Total anual	R$ 2.039,44	2552	kWh
Média mensal	R$ 169,95	213	kWh

Fonte: Captura de tela do computador utilizado por D1.

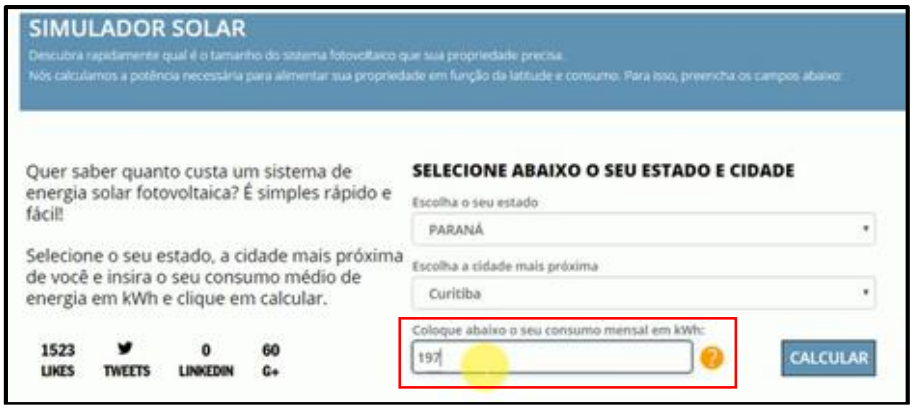
FIGURA 16: TENTATIVA DE OBTER NO GEOGEBRA UMA FUNÇÃO QUE DESCREVE O COMPORTAMENTO DO CONSUMO DE ENERGIA ELÉTRICA EM RELAÇÃO AO MÊS



Fonte: Captura de tela do computador utilizado por D1.

Como *simulação* ao verificarem que era necessário fornecer o consumo mensal médio de energia elétrica para simular o custo da instalação do sistema de captação de energia solar (Figura 17).

FIGURA 17: FORNECER O CONSUMO MENSAL MÉDIO DE ENERGIA ELÉTRICA



Fonte: Captura de tela do computador utilizado por D1.

A simplificação de considerar o custo médio de instalação simplifica a diferença considerável de preço fornecida pelo simulador. Nela o *uso* dos recursos das tecnologias digitais também teve influência como *simulação*. O site indicava um valor mínimo e um valor máximo para o custo de instalação do sistema de captação de energia elétrica, o que induziu A3 a calcular a média desses consumos: ***A3****: Daí aqui no canto ficou os dados da simulação [...] custo mínimo, máximo, daí eu já fiz a média dos custos [...]*. Essa média é calculada com as ferramentas do Excel, indicando o *uso* das tecnologias digitais como *calculação*.

Podem ter sido realizadas outras pequenas simplificações durante o desenvolvimento da atividade 3.1, mas, essas foram as que identificamos.

Como apontam Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.16) as simplificações são realizadas em relação às informações obtidas na coleta de dados e ao problema formulado. Nessa atividade a primeira simplificação e a segunda média da segunda simplificação estão relacionadas às informações coletadas, e a primeira média da segunda simplificação relacionada ao problema. Então, mesmo que os alunos de D1 não tenham evidenciado no relatório da atividade as simplificações como uma fase da atividade, as suas ações autônomas indicam que as simplificações foram realizadas, consequentemente, que eles *seguem essa regra* do *fazer* Modelagem Matemática.

- Formular Hipóteses

Foram formuladas quatro hipóteses no desenvolvimento dessa atividade, a seguir descreveremos as ações realizadas pelos alunos de D1 em cada uma delas.

A primeira hipótese formulada (Quadro 36) diz respeito aos valores que constituem a fatura de energia elétrica residencial. Os valores considerados nessa hipótese surgem de uma reflexão e discussão dos alunos de D1 (Quadro 37). Não foram estipulados de forma aleatória ou por ser o "mais fácil a se fazer".

QUADRO 36: PRIMEIRA HIPÓTESE FORMULADA POR D1 NA ATIVIDADE 3.1

Hipótese 1: Tomamos como base para o modelo os dados coletados da casa já citada e da simulação feita com os dados da mesma, tomaremos o consumo mensal médio como invariante, também usaremos como referência a conta de luz mais atual desta casa.

Fonte: Relatório entregue em documento de texto por D1 da Atividade 3.1

QUADRO 37: DISCUSSÃO SOBRE A PRIMEIRA HIPÓTESE FORMULADA POR D1 NA ATIVIDADE 3.1

A3: [...] Agora eu percebi um negócio, eu fui modelar [...] preço em reais em função dos kwh gastos, e daí deu isso aqui: o tanto de kwh gastos vezes essa constante (valor cobrado pelo kwh) mais esse custo fixo, que é a bandeira [...] e mais a iluminação da rua [...] mas, eu fui testar esse modelo pra meses anteriores, que a gente tem os dados nessa tabela da Copel, e não batia, mas eu lembro [...] de ter baixado a conta de luz. **A2**: Mudou de bandeira, então, no mínimo. **A3**: Não sei se mudou de bandeira ou só mudou os multiplicadores... mudou alguma coisa. Mas, tipo assim, uma das simplificações e das hipóteses vai ser, tipo, quando a gente fizer essa projeção a gente considerar esse modelo e, tipo, ele pra conta de luz do futuro que a gente vai estender, sabe? [...] faz sentido eu usar essa conta que está aqui, que é desse ano já... **A2**: Aham. **A3**: porque daí ela é a mais recente, provavelmente é a que vai ficar por mais tempo.

Fonte: Transcrição de captura de tela

O diálogo entre A2 e A3 do quadro 37 indica que ao perceberem que os valores utilizados não descreviam todos os comportamentos do valor das faturas de energia elétrica, deveriam determinar como uma hipótese que esses valores não se alterariam no decorrer dos próximos meses.

O uso dos recursos das tecnologias digitais como *calculação* e *visualização* foi um ponto essencial para a formulação dessa hipótese. Esses *usos* são ressaltados por A3: *"eu fui testar esse modelo pra meses anteriores, que a gente tem os dados nessa tabela da Copel, e não batia"*; pois, os cálculos numéricos utilizados para realizar esse teste foram realizados utilizando as ferramentas do software Excel.

A segunda hipótese formulada por D1 se refere ao encaminhamento matemático para a resolução da atividade (Quadro 38).

QUADRO 38: SEGUNDA HIPÓTESE FORMULADA POR D1 NA ATIVIDADE 3.1

Hipótese 2: Para um resultado mais preciso de quanto tempo levaria para o sistema gerar economia usaremos como medida de tempo o mês, dado que a conta de luz é mensal, portanto faremos uso da função menor inteiro já que não faz sentido lidar com resultados fracionários em relação a um mês.

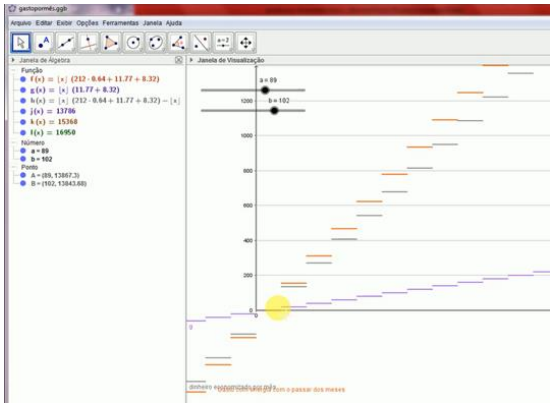
Fonte: Relatório entregue em documento de texto por D1 da Atividade 3.1

Como exposto na formulação dessa hipótese, os alunos de D1 consideraram aspectos da situação para determiná-la. Do contexto dessa situação surgiu a necessidade de o modelo ser construído utilizando a função menor inteiro: a fatura de energia elétrica é mensal, então, não teria sentido considerar um comportamento contínuo.

No diálogo do quadro 39 os alunos D1 explicam ao professor/pesquisador a opção em se trabalhar com a função menor inteiro, indicando que a formulação dessa hipótese é coerente com a situação modelada e também fundamentada, visto que os alunos de D1 citam o fato de a fatura de energia elétrica ser cobrada pós uso, o que determina o uso da função menor inteiro ao invés da maior inteiro.

QUADRO 39: EXPLICAÇÃO DE D1 À SEGUNDA HIPÓTESE FORMULADA NA ATIVIDADE 3.1

A3: [...] o que a gente acabou resolvendo pra esse problema da linearidade do ano, enquanto as taxas não eram lineares, foi, tipo... primeiro a gente ficou pensando em tentar linearizar a soma das taxas que vinha acontecendo a cada a tanto tempo, sabe, e depois, tipo, o que acabou vindo de ideia era, tipo, em vez de tornar linear a soma das taxas, era tipo quebrar a medida de tempo que a gente está usando, tipo, de mês e ano, usando a função parte inteiro ou uma menor inteiro, sabe. [...] A função, essa laranja (f(x))... deixa eu dar um zoom pra ver melhor essa questão do...



A2: Menor inteiro.
A3: de usar o menor inteiro, tipo, se eu tiver meio mês ainda não fechou a conta daquele mês, então, não passou um mês, tipo, pra o tipo de dado que a gente está trabalhando.
PP: Não é contínua.
A3: Aham. Até por isso pegar o menor inteiro e não o maior inteiro. Porque o maior seria se a gente estivesse arredondando para cima, tipo, um mês a gente só fala que teve um mês depois que ele passou inteiro, então, por isso pegar a menor inteiro.

Fonte: Transcrição de captura de tela

No Quadro 40 apresentamos a terceira hipótese formulada pelos alunos de D1, que está relacionada a uma informação técnica sobre a instalação do sistema de captação de energia solar: o sistema de créditos.

QUADRO 40: TERCEIRA HIPÓTESE FORMULADA POR D1 NA ATIVIDADE 3.1

Hipótese 3: Mesmo com o sistema de energia solar, se optará por manter a ligação com a Copel, pois isso permite o sistema de créditos de kWh, onde a produção excedente é lançada na rede da Copel e é contada como créditos para a residência, que serão utilizados durante momentos sem produção (a noite, por exemplo) e nas épocas de baixa produção (como no inverno).

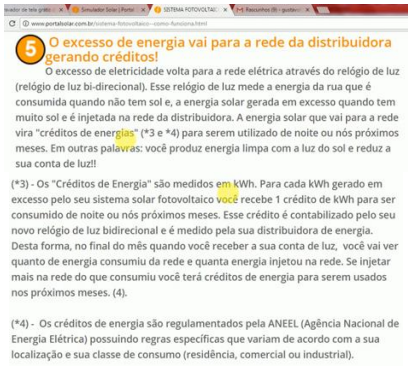
Fonte: Relatório entregue em documento de texto por D1 da Atividade 3.1

Sem o sistema de créditos seria necessário considerar, além do custo de instalação do sistema de captação de energia solar e das taxas fixas mensais da instalação com a distribuidora de energia elétrica (Copel), a cobrança dos kwh consumidos da rede de energia elétrica nos momentos em que o sistema de captação de energia solar não produzisse energia elétrica.

Os alunos de D1 realizaram uma pesquisa para obter as informações necessárias para formular essa hipótese. Primeiramente verificaram que os custos de instalação do sistema de captação de energia solar obtidos por meio do simulador incluíam os equipamentos necessários para o sistema de créditos ser utilizado (Quadro 41).

QUADRO 41: INFORMAÇÕES QUE FUNDAMENTAM A TERCEIRA HIPÓTESE DE D1 PARA A ATIVIDADE 3.1 – PARTE I

A3: [...] tem que ver isso na simulação [...] e se a simulação leva em conta que você vai a instrumentação que precisa pra poder voltar a energia pro poste, sabe, tipo, ganhar crédito. Vamos ver. Ó, porque aqui no sistema que tem aqui, que ele dá o exemplo, ele tem o gerador...
A2: Uhum.
A3: que joga energia pra casa e o excedente ele joga...
A2: Pra rede.
A3: pra rede.



Fonte: Transcrição de captura de tela

Posteriormente encontra a informação que ANEEL possui uma regulamentação para o sistema de créditos, e que a distribuidora de energia elétrica local (Copel) disponibiliza a utilização desse sistema (Quadro 42).

QUADRO 42: INFORMAÇÕES QUE FUNDAMENTAM A TERCEIRA HIPÓTESE DE D1 PARA A ATIVIDADE 3.1 – PARTE II

A3: Queria ver se a Copel faz parte do esquema dos créditos, sabe.
A2: Uhum.
A3: Hum, acho que é aqui.

A3: [...] O bom é saber [...] eles têm o sistema de créditos.

Fonte: Transcrição de captura de tela

O quadro indica que os alunos de D1 utilizaram informações oriundas dos sites da ANEEL e da Copel para determinar essa hipótese. Logo, os recursos das tecnologias digitais foram utilizados na função de *investigação* na formulação dessa hipótese.

No quadro 43 apresentamos quarta hipótese formulada pelos alunos de D1 nessa atividade. Como o tempo em meses foi considerado como a variável independente para as funções que compõe o modelo, foi necessário estabelecer um mês de referência.

QUADRO 43: QUARTA HIPÓTESE FORMULADA POR D1 NA ATIVIDADE 3.1

[...] sendo o mês 0 referente ao mês da instalação do sistema, o mês 1 o mês seguinte ao da instalação e assim por diante.
Hipótese 4: Consideramos como mês 0 o mês julho de 2017.

Fonte: Relatório entregue em documento de texto por D1 da Atividade 3.1

Essa opção pelo mês de julho como o inicial foi feita por causa dos dados da conta de luz que foram tomados da última fatura disponível antes da realização da atividade, e levando em consideração que a instalação do sistema de captação de energia solar pudesse ser realizada nesse mês.

Nessa atividade a ação de formular hipóteses foi realizada pelos alunos de D1 de forma autônoma, mesmo com orientações pontuais do professor/pesquisador, os aspectos essenciais das hipóteses foram propostos por eles. Suas ações nos indicam que as

hipóteses dessa atividade foram formuladas com muita coerência, considerando vários aspectos da situação-inicial. As quatro hipóteses se enquadram nos papéis de uma hipótese esclarecidos em Almeida, Palharini e Tortola (2015), pois, incorporam informações da situação-problema que não constam nos dados coletados e que para eles são relevantes (hipóteses 1, 3 e 4), e indicam a estratégia de resolução e a "matemática" utilizada para a construção do modelo (hipótese 2).

Considerando esses aspectos podemos inferir que os alunos de D1 *seguem essa regra* do *fazer* Modelagem Matemática.

- Selecionar Variáveis

Nessa atividade a seleção da variável independente foi a que gerou mais discussão e dúvida para os alunos de D1, pois, não conseguiam decidir se usariam o tempo em meses ou em anos. A opção final da dupla foi trabalhar com o tempo em meses (Quadro 44), no entanto, essa decisão foi tomada poucos dias antes do prazo para finalização da atividade (Quadro 45), tanto que o direcionamento para construção do modelo e para responder o problema estava encaminhado.

QUADRO 44: DEFINIÇÃO DA VARIÁVEL INDEPENDENTE NA ATIVIDADE 3.1

Variável independente: tempo, medido em meses, sendo o mês 0 referente ao mês da instalação do sistema, o mês 1 o mês seguinte ao da instalação e assim por diante.

Fonte: Relatório entregue em documento de texto por D1 da Atividade 3.1

QUADRO 45: DISCUSSÃO SOBRE A DEFINIÇÃO DA VARIÁVEL INDEPENDENTE NA ATIVIDADE 3.1

A3: Daí até agora eu não sei se fica melhor a gente trabalhar em mês ou ano [...].
PP: Bom, eu acho que meses fica um pouco mais... [...] por exemplo, dá 1,64 anos, quando que é isso?!
A3: É, até porque, tipo, se a gente usa esse esquema da menor inteiro [...] Fica estranho assim interpretar em anos porque as janelas de tempo entre uma resposta e a outra ficaria maior (mais distante), sabe. [...] com meses eu sei que, tipo, a conta anterior ela ainda não deu conta de pagar. [...] nesse exemplo aqui, nesse mês aqui que vai ser o mês 101 ainda não deu conta de pagar o orçamento mínimo, no próximo mês é o mês que começa a ter economia.

A3: E daí, tipo, a diferença entre um mês e outro não vai fazer sentido a gente querer... tipo, se desse três meses e meio, esse meio que vai ser convertido em dias não faz sentido para o problema porque as contas vem fechadas...
A2: De mês em mês.

Fonte: Transcrição de captura de tela

Nesse diálogo do quadro 45, vemos que o professor/pesquisador participa dessa decisão com os alunos de D1, mas, que são os próprios alunos que apresentam argumentos que corroboram para essa opção.

Os alunos de D1 constroem no GeoGebra o modelo em que o tempo é considerado em anos e o modelo em que o tempo é considerado em meses, e ao *visualizarem* os possíveis resultados obtidos é que esses argumentos são apresentados. Nesse sentido, podemos inferir que o uso dos recursos das tecnologias digitais influenciou diretamente na seleção dessa variável ao fornecer ferramentas que possibilitaram a *visualização* das características de cada um dos modelos.

As variáveis dependentes[42] e demais incógnitas utilizadas na construção do modelo foram definidas durante a construção (Quadro 46) e foram selecionadas sem dificuldade pelos alunos de D1.

QUADRO 46: DEMAIS VARIÁVEIS DEFINIDAS POR D1 NA ATIVIDADE 3.1

No primeiro cenário, teremos um gasto inicial (S), referente à compra e instalação do sistema de energia solar, no decorrer dos meses teremos como gasto o pagamento das taxas da Copel que são constantes como a taxa (B), referente a bandeira da energia, e a taxa de iluminação pública (L).
[...]
No segundo cenário, a cada mês teremos o gasto com as taxas constantes (bandeira da energia (B) e iluminação pública (L)) somadas ao gasto com o consumo mensal médio de kWh (C) que é multiplicado pelo preço (P) do kWh.

Fonte: Relatório entregue em documento de texto por D1 da Atividade 3.1

Observamos que as ações dos alunos na seleção de variáveis dessa atividade foram autônomas, as participações do professor/pesquisador tiveram caráter de assessoramento (ALMEIDA e DIAS, 2004, p.25), orientando e coparticipando da ação. Não houve a necessidade de intervenções *ostensivas*, pois, as variáveis selecionadas são coerentes com o problema, abarcando todos os elementos necessários para a construção do modelo que foram determinados nas simplificações realizadas e hipóteses formuladas

[42] Os alunos de D1 apresentaram um comportamento padrão, provavelmente oriundo da representação cartesiana das funções, durante o desenvolvimento das atividades de modelagem, que é utilização da letra *x* quando se referem à variável independente e para a variável dependente as formas tradicionais das funções, tais como *f(x)*, *g(x)*, etc.

para a atividade. Considerando esses aspectos podemos inferir que os alunos de D1 *seguem essa regra* do *fazer* Modelagem Matemática.

- Na fase de Resolução
    - Construir o Modelo

O problema formulado pelos alunos de D1 nessa atividade 3.1 exigia certa complexidade do modelo – no sentido de considerar muitos elementos em sua construção. No Quadro 47 apresentamos um diálogo em que o professor/pesquisador indica os possíveis modelos que um problema de custo/benefício pode gerar.

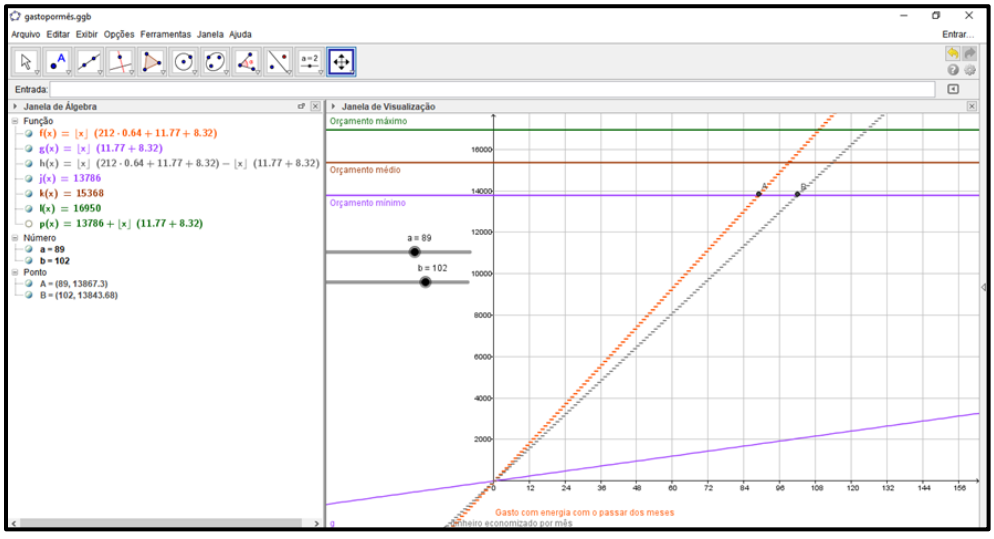
QUADRO 47: PRIMEIROS DIRECIONAMENTOS À D1 PARA O MODELO DA ATIVIDADE 3.1

PP: [...] vão tentando dar uma direcionada nisso [...] a hora que vocês definirem o problema [...] daí vocês já podem começar a pensar em custo/benefício. [...] Porque, acho que o problema de vocês vai tratar de custo/benefício, não só de custo de instalação!? **A3**: Sim, sim. **A2**: Sim. **PP**: [...] ele vai te dar dois modelos, um de custo de instalação, quanto você vai gastar por mês e quanto você vai economizar de energia elétrica. **A3**: Aham. **A2**: Aham. **PP**: E daí em algum momento isso vai te dar um modelo que te dá o custo/benefício.

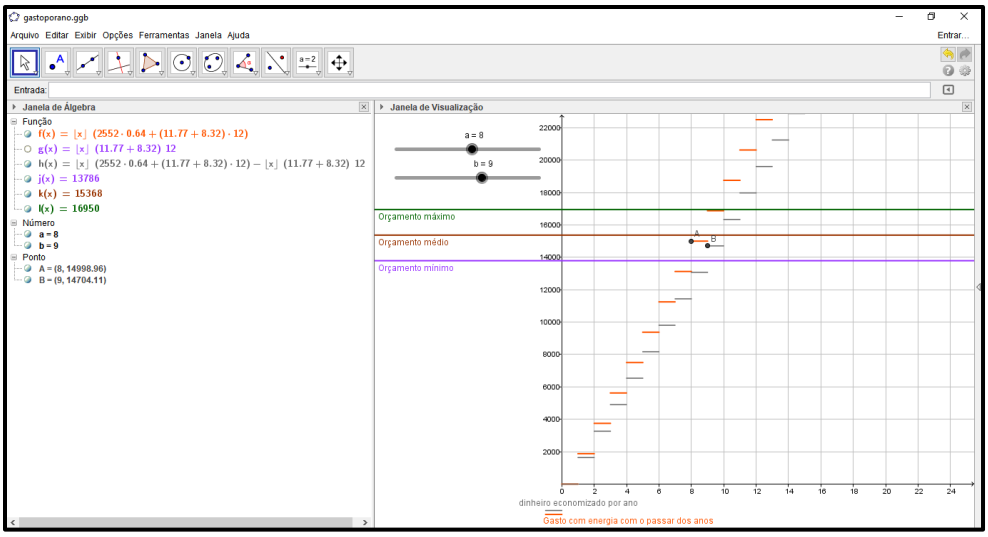
Fonte: Transcrição de captura de tela

Os alunos de D1 construíram as primeiras ideias de modelo para a atividade a partir desse direcionamento do quadro 47. Podemos interpretar como sendo o mesmo modelo, mas, determinado para variáveis diferentes, um deles depende do tempo em meses (Figura 18a) e o outro do tempo em anos (Figura 18b).

FIGURA 18: PRIMEIROS MODELOS CONSTRUÍDOS POR D1 PARA A ATIVIDADE 3.1



(a)



(b)

Fonte: Construções no GeoGebra produzidas por D1

A comparação entre esses dois modelos foi fundamental para que o modelo que depende do tempo em anos fosse abandonado. Assim, a construção do modelo seguiu de discussões sobre esse primeiro modelo que depende do tempo em meses.

No diálogo do quadro 48 o professor/pesquisador questiona os alunos de D1 sobre o significado das funções desse primeiro modelo e faz alguns apontamentos.

QUADRO 48: DISCUSSÃO SOBRE O MODELO CONSTRUÍDO POR D1 PARA A ATIVIDADE 3.1

PP: Só quero ver a interpretação do problema... agora essa função, se ela faz sentido ou não lá na situação. [...] *h* é o custo da copel menos o custo fixo!?
A3: Sim.
PP: Então, ela seria somente o custo com energia da copel [...] Como se tivesse pagando só a energia e não pagasse o custo fixo. [...] você está tirando o custo fixo, então, é só quanto você gastaria com energia se não...
A3: É quanto eu gastaria, mas, como eu não estou gastando é o quanto de dinheiro estou deixando de gastar com a copel, então quando ele ultrapassar o orçamento mínimo é quando, tipo, eu fui deixando de gastar deu conta de pagar o final, sabe.
PP: Acho que vai fazer mais sentido, então, essa outra mudar, porque não faz sentido ela ser constante... porque você vai ter o orçamento, mas você vai continuar pagando aquela taxa ali embaixo, né [...] Você vai ter que somar essas duas, a fixa com a taxa que você gasta só com o preço fixo da copel. [...] Porque aqui você está considerando só o gasto com a instalação.
[...]
A2: Ah, então colocar essa daqui junto com essas constantes aqui, você está falando? O fixo que você continua pagando pra...
A3: Tipo, ó, fazer com a do mínimo, vai ser a soma do gasto mínimo mais a taxa constante.
[...]
PP: Vamos pensar na interpretação do que isso vai gerar. Se fizer só com o gasto de energia [...] se eu gastasse só com energia, tanto pra um quanto pra outro, o ponto seria esse; se eu fizer o gasto total de instalação e manutenção do sistema... de energia pegando em comparação com quem só tem energia elétrica (da copel) [...] até esse ponto quem tem só energia elétrica gastaria menos, mas, a partir de tantos meses já quem usaria energia solar sairia ganhando.

Fonte: Transcrição de captura de tela.

O trecho do quadro 48 indica a importância do assessoramento do professor – nesse caso do professor/pesquisador – no desenvolvimento de uma atividade do 3° momento (ALMEIDA e DIAS, 2004, p.25), pois, pode observar aspectos que os alunos não haviam considerado. Nesse caso, por exemplo, o modelo construído era matematicamente correto, mas não descrevia adequadamente a situação modelada. Ao descontarem os valores que eram fixos tanto no gasto com energia elétrica da Copel quanto da energia elétrica solar eles simplificam matematicamente as funções, mas, isso não se adequa a situação, pois, em ambas as instalações esses valores continuariam sendo pagos.

Adequando o modelo inicial aos apontamentos feitos pelo professor/pesquisador e as reflexões que eles mesmos tiveram, os alunos de D1 finalizam a construção do modelo (Quadro 49).

QUADRO 49: CONSTRUÇÃO DO MODELO REALIZADA POR D1 PARA A ATIVIDADE 3.1

Desenvolvendo paralelamente dois cenários, um onde se faz o uso da energia solar, e outro onde se faz o uso da energia elétrica.

No primeiro cenário, teremos um gasto inicial (S), referente à compra e instalação do sistema de energia solar, no decorrer dos meses teremos como gasto o pagamento das taxas da Copel que são constantes como a taxa (B), referente a bandeira da energia, e a taxa de iluminação pública (L).

Desta forma, passado o mês 0 (julho/2017), o gasto será S, passado o mês 1 (agosto/2017), o gasto será $(B + L) + S$, passado x meses, o gasto será $x \cdot (B + L) + S$.

O que nos leva ao modelo $f(x) = \lfloor x \rfloor \cdot (B + L) + S,\ com\ x \geq 0$, substituindo com os dados da conta de luz e os valores mínimo, médio e máximo obtemos essas três funções, referentes aos gastos em relação aos sistemas de custo mínimo, médio e máximo.

- $f_1(x) = \lfloor x \rfloor \cdot (8{,}32\ + 11{,}77) + 13786,\ com\ x \geq 0.$
- $f_2(x) = \lfloor x \rfloor \cdot (8{,}32\ + 11{,}77) + 15368,\ com\ x \geq 0.$
- $f_3(x) = \lfloor x \rfloor \cdot (8{,}32\ + 11{,}77) + 16950,\ com\ x \geq 0.$

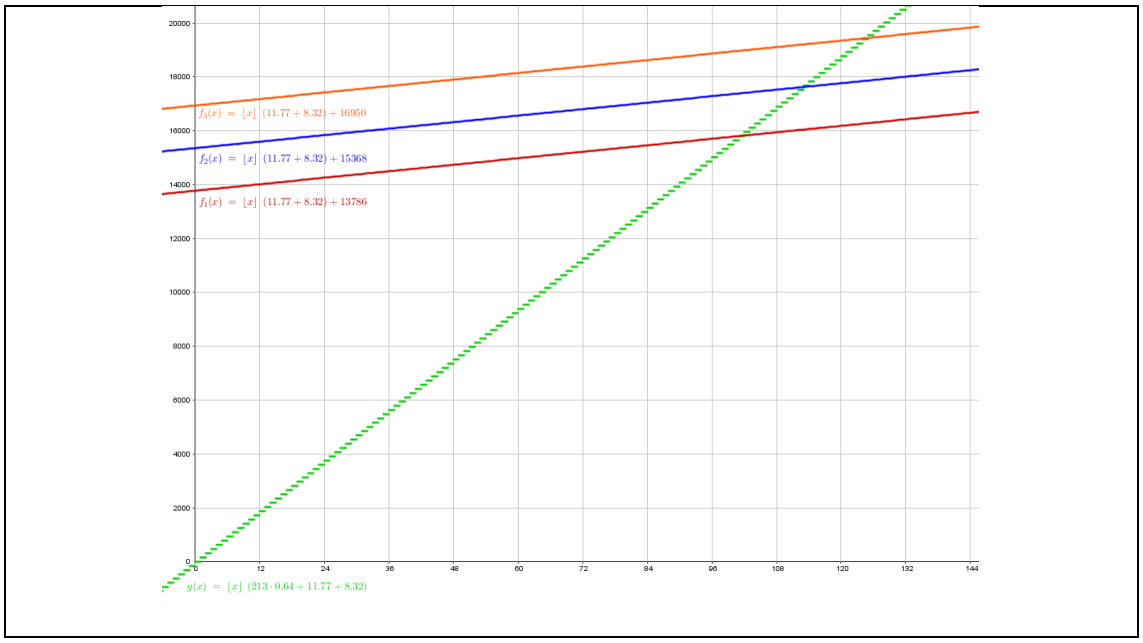
No segundo cenário, a cada mês teremos o gasto com as taxas constantes (bandeira da energia (B) e iluminação pública (L)) somadas ao gasto com o consumo mensal médio de kWh (C) que é multiplicado pelo preço (P) do kWh.

Desta forma, passado 1 mês, o gasto será $1 \cdot [(B + L) + (C \cdot P)]$, passados 2 meses, o gasto será $2 \cdot [(B + L) + (C \cdot P)]$, passados x meses, o gasto será $x \cdot [(B + L) + (C \cdot P)]$.

O que nos leva ao modelo $g(x) = \lfloor x \rfloor \cdot ((B + L) + (C \cdot P)),\ com\ x \geq 0$, substituindo as informações com os dados da conta de luz de o consumo médio da casa que temos os dados obtemos a função referente ao gasto com energia pela Copel:

$$g(x) = \lfloor x \rfloor \cdot \big((8{,}32\ + 11{,}77) + (213 \cdot 0{,}6402)\big), \qquad com\ x \geq 0.$$

Ao plotarmos os gráficos das funções f_1, f_2, f_3 e $g(x)$ no GeoGebra percebemos que o gráfico da função $g(x)$ ultrapassa os gráficos das $f's$.



Fonte: Relatório entregue em documento de texto por D1 da Atividade 3.1

Dois pontos podem ser destacados na construção desse modelo: 1°- indo ao encontro dos apontamentos de Souza e Barbosa (2014), de que a Matemática normatiza a abordagem da situação, as funções menor inteiro foram definidas com o rigor matemático exigido por suas *regras*, mostrando a maturidade adquirida pela dupla na fase de construção do modelo; 2°- o modelo para essa atividade é o gráfico que contém as quatro funções, pois, como apontado em Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.16) descreve a situação, permite responder a pergunta específica do problema e ainda viabiliza previsões.

As representações gráficas das funções que compõem o modelo foram construídas no software GeoGebra. Por se tratarem de funções menor inteiro, podemos inferir que o software facilitou essas representações. Nesse sentido, entendemos que o *uso* dos recursos das tecnologias como *experimentação* conduziu a construção do modelo dessa atividade, pois, o software GeoGebra transforma os modelos algébricos construídos pelos alunos de D1 em modelos gráficos de fácil visualização.

As ações dos alunos de D1 indicam que o modelo da atividade 3.1 foi construído com autonomia. Muitos aspectos são considerados em sua construção: as características da situação-inicial, utilizam os dados coletados e as simplificações realizadas, focam no problema formulado, respeitam as hipóteses formuladas, as variáveis selecionadas e as *regras* da Matemática envolvida. Disso, inferimos que os alunos de D1 *seguem essa regra* do *fazer* Modelagem Matemática.

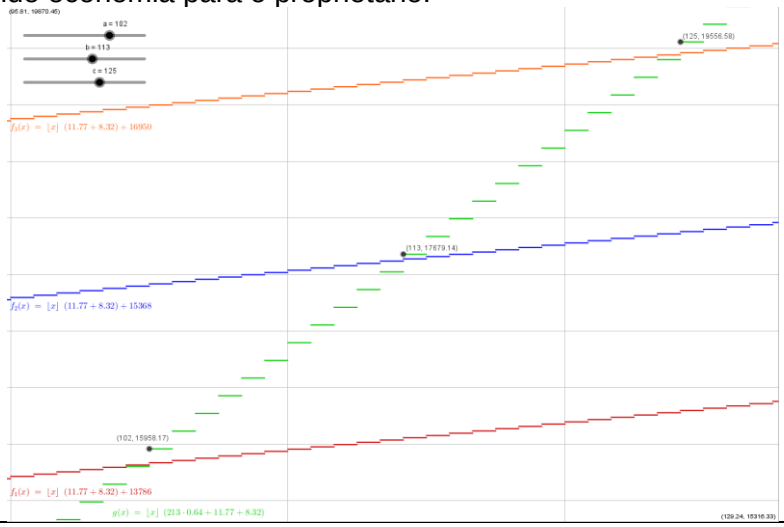
- Apresentar uma solução para o Problema

Desde que as primeiras formulações do problema foram cunhadas, a ideia de encontrar a intersecção entre as funções que representam os gastos com energia elétrica da Copel e os gastos – considerando os orçamentos mínimo, médio e máximo de instalação do sistema – com energia elétrica da captação de energia solar, já era veiculada pelos alunos de D1 como uma possibilidade de encontrar uma solução para o problema dessa atividade.

Como as funções foram definidas como menor inteiro isso não era mais possível. A solução encontrada por eles foi criar controles deslizantes sobre uma das funções e encontrar os pontos em que o critério para responder ao problema fosse satisfeito (Quadro 50).

QUADRO 50: CONTROLES DESLIZANTES CRIADOS POR D1 PARA RESPONDER AO PROBLEMA DA ATIVIDADE 3.1

Com a construção de três pontos sobre a $g(x)$ e o auxílio de três controles deslizantes podemos encontrar em que valor de x a $g(x)$ ultrapassa cada uma das $f's$, esses valores de x serão correspondentes a quantidade de meses passados até que o gasto de energia com a Copel superasse o investimento feito para o sistema de energia solar, ou seja, nesse momento o investimento se pagou e a partir dele o sistema estará gerando economia para o proprietário.



Fonte: Relatório em documento de texto entregue por D1 da Atividade 3.1

A partir do posicionamento adequado dos controles deslizantes os alunos de D1, então, encontram a resposta para o problema, já transformando o número de meses em datas para que a interpretação desses resultados fosse mais acessível (Quadro 51).

QUADRO 51: RESPOSTA DADA POR D1 AO PROBLEMA DA ATIVIDADE 3.1

No sistema com custo mínimo este momento acontece a partir do $x_1 = 102$, ou seja, a partir dos 102 meses, ou então 8 anos e 6 meses. No sistema com custo médio este momento acontece a partir do $x_2 = 113$, ou seja, a partir dos 113 meses, ou então 9 anos e 5 meses. No sistema com custo máximo este momento acontece a partir do $x_3 = 125$, ou seja, a partir dos 125 meses, ou então 10 anos e 5 meses. Portanto, como o preço real do sistema de energia solar se encontrará entre o mínimo e o máximo proposto, podemos dizer que o sistema de energia solar gerará economia ao seu proprietário num tempo entre 8 anos e 6 meses até 10 anos e 5 meses após sua instalação, ou seja, entre janeiro de 2026 e em dezembro de 2027.

Fonte: Relatório em documento de texto entregue por D1 da Atividade 3.1

O *uso* dos controles deslizantes no software GeoGebra foi a estratégia utilizada pelos alunos de D1 para obter uma solução para o problema dessa atividade. Essa ferramenta do software possibilitou que eles obtivessem facilmente a resposta ao problema e com uma *visualização* simples conforme eles construíam o modelo, visto que o uso desses controles deslizantes já estava presente desde as construções embrionárias do modelo. Evidenciando, assim, a importância nessa atividade do *uso* dos recursos das tecnologias digitais como *controle*, *visualização* e até *simulação* para essa *regra* do *fazer* Modelagem Matemática.

Apresentar uma resposta para o problema dessa atividade se mostrou simples para os alunos de D1, isso pode ser creditado ao desenvolvimento criterioso realizado por eles na atividade. A resposta ao problema foi apresentada em um intervalo de tempo; relacionamos isso a uma orientação dada pela professora regente na atividade 2.2, na qual sugeriu aos alunos de D1 que ao invés de encontrarem um percentual de salário gasto com carne, eles determinassem um intervalo de percentual. A sugestão não foi incorporada naquela atividade, mas, ela os influenciou na resposta da atividade 3.1.

A resposta apresentada pelos alunos de D1 é matematicamente rigorosa com o modelo, no sentido em que considera os valores inteiros da variável independente em que a função que representa o gasto com energia elétrica da Copel ultrapassa as funções que representam o gasto com energia elétrica obtida com captação solar; ação normatizada pelas *regras* da matemática envolvida na resolução (SOUZA e BARBOSA, 2014). A "tradução" da resposta matemática para a situação também é realizada por eles de forma adequada, quando transformam os resultados obtidos em número de meses para datas, considerando a quarta hipótese da atividade.

Considerando esses aspectos podemos inferir que as ações dos alunos de D1 nos indicam que eles *seguem essa regra* do *fazer* Modelagem Matemática na atividade 3.1.

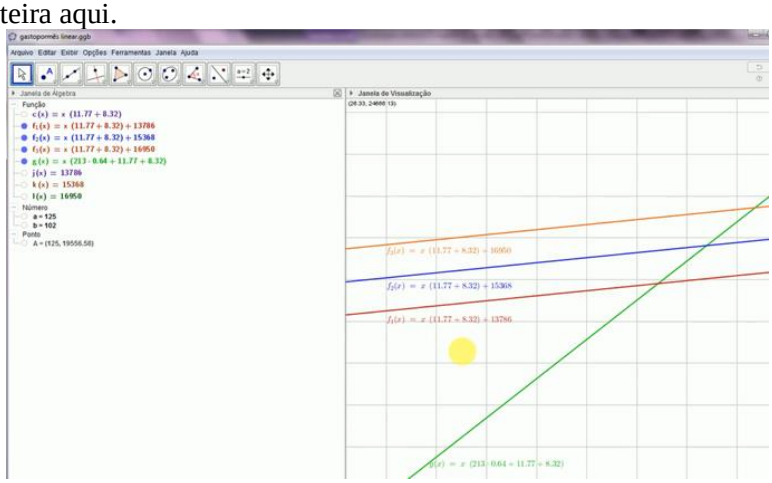
- Na fase de Interpretação e Validação

Na atividade 3.1 os alunos de D1 apresentam no relatório uma validação e uma interpretação dos resultados, mas, além delas, realizaram mais uma validação que não incorporaram ao relatório. As validações realizadas estão relacionadas a ação de analisar a resposta em relação à Matemática, e a interpretação dos resultados relacionada a ação de analisar a resposta em relação ao Problema.

A validação que não foi incorporada ao relatório da atividade, busca validar os valores obtidos pelos controles deslizantes. Para isso, os alunos de D1 aproveitaram a ideia inicial de utilizar funções contínuas e determinar os pontos de intersecção para encontrar uma resposta para o problema. Assim, construíram um modelo equivalente ao das funções menor inteiro, mas, utilizando funções do 1° grau (Quadro 52).

QUADRO 52: VALIDAÇÃO UTILIZADA POR D1 E NÃO INCORPORADA AO RELATÓRIO DA ATIVIDADE 3.1

A3: [...] o mais interessante seria fazer a intersecção [...] entre as funções.
A2: A exata assim?
A3: Aham [...] daí a gente arredonda pra cima [...] só que não dá pra fazer a intersecção quando você está fazendo com menor inteiro [...] pra fazer a intersecção daí tem que ter elas assim, sem a parte inteira aqui.



[...]
A3: Já sei, na parte da validação pode entrar a parte da função [...] sem ser a parte do menor inteiro.

Fonte: Transcrição de captura de tela

Após encontrarem os pontos de intersecção, os alunos de D1 entendem que não seria interessante incorporar essa validação ao relatório (Quadro 53).

QUADRO 53: OPÇÃO POR NÃO INCORPORAR A VALIDAÇÃO UTILIZADA POR D1 E NÃO INCORPORADA AO RELATÓRIO DA ATIVIDADE 3.1

A3: É que eu não sei se fazer essa intersecção dela [...] fica uma parada maneira como validação, tá ligado.
A2: Como validação eu não sei, tipo, pra chegar no resultado em si, ela é maneira.
[...]
A3: Acho que é melhor fazer a resolução algébrica.

Fonte: Transcrição de captura de tela

Interpretamos que mesmo essa validação não sendo incorporada ao relatório, a compreensão de que ela poderia corroborar ou não com o resultado obtido nos indica que os alunos de D1 tem um entendimento dos aspectos da ação de analisar a resposta em relação a Matemática. Novamente os processos de *calculação – uso* dos recursos das tecnologias digitais – foram realizados no software GeoGebra, o modelo para validação foi construído nele e os pontos de intersecção foram determinados a partir de suas ferramentas.

Ao final do diálogo do quadro 53, A3 sugere uma validação algébrica dos resultados obtidos. Essa ideia é colocada em prática pela dupla e incorporada ao relatório da atividade (Quadro 54).

QUADRO 54: VALIDAÇÃO REALIZADA POR D1 PARA A ATIVIDADE 3.1

Solução algébrica: para encontrar quando o gasto com energia com a Copel é maior que o gasto com o sistema de energia solar devemos encontrar o primeiro mês x onde a desigualdade $f(x) < g(x)$ é válida.

$$f(x) < g(x)$$
$$\Leftrightarrow \lfloor x \rfloor \cdot (B + L) + S < \lfloor x \rfloor \cdot \big((B + L) + (C \cdot P)\big)$$
$$\Leftrightarrow \lfloor x \rfloor \cdot (B + L) + S < \lfloor x \rfloor \cdot (B + L) + \lfloor x \rfloor \cdot (C \cdot P)$$
$$\Leftrightarrow S < \lfloor x \rfloor \cdot (C \cdot P)$$
$$\Leftrightarrow \frac{S}{(C \cdot P)} < \lfloor x \rfloor$$
$$\Rightarrow \frac{S}{(C \cdot P)} < \lfloor x \rfloor \leq x$$
$$\Rightarrow \frac{S}{(C \cdot P)} < x$$

Substituindo os valores referentes ao consumo de kWh (C), o preço do kWh e os valores do sistema teremos:

$$\frac{13786}{(213 \cdot 0{,}6402)} < x_1 \Leftrightarrow 101{,}1 < x_1$$
$$\frac{15368}{(213 \cdot 0{,}6402)} < x_2 \Leftrightarrow 112{,}7 < x_2$$
$$\frac{16950}{(213 \cdot 0{,}6402)} < x_3 \Leftrightarrow 124{,}3 < x_3$$

Como x_i é o primeiro mês onde essa desigualdade é válida, e estamos contando apenas meses inteiros, teremos que:

$x_1 = 102$ $\quad$ $x_2 = 113$ $\quad$ $x_3 = 125$

Valores iguais aos obtidos anteriormente pelo uso dos controles deslizantes no Geogebra.

Fonte: Relatório entregue em documento de texto por D1 da Atividade 3.1

Nessa validação algébrica os alunos tiveram dificuldades ao utilizar as propriedades do menor inteiro, para resolver a inequação, o professor/pesquisador os orientou que verificassem essas propriedades na literatura. Essa orientação tem dois papéis, se a considerarmos relacionada a ação de validar os resultados tem papel de assessoramento (ALMEIDA e DIAS, 2004, p. 25), e tem papel de ensino *ostensivo* em relação a aplicação da *regra* normativas da matemática envolvida nesse processo de validação (SOUZA e BARBOSA, 2014).

A interpretação dos resultados realizada pelos alunos de D1 é apresentada (Quadro 55) em um único parágrafo que resume a reflexão sobre alguns pontos que relacionam a problemática aos resultados obtidos.

QUADRO 55: INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS DA ATIVIDADE 3.1

O tempo encontrado como resposta nos faz pensar se nos dias de hoje esse investimento realmente valeria a pena um investimento desse tamanho, vale a pena ressaltar que existem vários benefícios relacionados ao uso da energia solar que não foram levados em conta para esta modelagem, referentes aos benefícios ambientais (ser renovável, não poluente) e as de praticidade (ser silenciosa, não ter custo de transmissão/transporte, utilizável em locais de difícil acesso).

Fonte: Relatório entregue em documento de texto por D1 da Atividade 3.1

Essa interpretação parece sucinta e até superficial visto que no relatório esses pontos levantados são apenas citados e não são aprofundados, contudo, durante a comunicação da atividade os alunos de D1 abordam esses pontos com mais detalhes (Quadro 56).

QUADRO 56: INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS DA ATIVIDADE 3.1 DURANTE A COMUNICAÇÃO DE D1

A3: O tempo... 10 anos é coisa demais, parece que não valeria tanto apena assim esse investimento, e provavelmente, tipo, nos próximos anos isso melhore porque... até uma coisa que foi falado lá naquele negócio que eu falei lá no começo (texto sobre energia solar), é que como o mercado de energia solar está agora é mais ou menos igual ao momento que surgiu as televisões de plasma, quanto elas custavam 12 mil reais, a gente imaginava que nunca ia ter uma e hoje com menos de mil reais a gente consegue comprar uma televisão que é full HD e é muito melhor que aquelas que custavam 12 mil. Então, no momento, agora a energia solar está cara, mas, o mais provável é que em pouco tempo o preço dela venha acontecer mais ou menos o que aconteceu com as tvs de plasma. Além disso, quando a gente obteve esse tempo, essa faixa de tempo como resposta, o único benefício que está sendo considerado é o econômico de utilizar a energia solar. Mas, nesse processo não foram considerados todos os outros benefícios que envolvem a energia solar, como a questão ambiental, porque a energia solar é uma energia renovável, ela não produz poluição, as manutenções do sistema não tem que acontecer tão frequentemente, ou acontecem em períodos bem grandes; e, além disso, a praticidade de usar energia solar, porque eu posso utilizar energia solar em lugares que não são de tão fácil acesso [...] as outras gerações de energia fazem muito barulho, energia solar além de tudo é silenciosa, posso ter no meio da cidade, no telhado da minha casa posso ter um gerador de energia solar que isso não tem nenhum problema.

Fonte: Transcrição de captura de tela

Então, mesmo que no relatório a interpretação pareça simplória, os alunos de D1 consideraram vários aspectos e propuseram reflexões interessantes sobre o uso da energia solar e o tempo necessário para que seus custos de instalação fossem recuperados. Entendemos que essas interpretações podem ser fruto da inteiração que eles tiveram com o tema, pois, os alunos de D1 fizeram a leitura de muitas reportagens e textos sobre o assunto Energia Solar. Nesse sentido, o *uso* dos recursos das tecnologias digitais como *investigação* influenciou de alguma forma nessas interpretações.

As ações dos alunos de D1 indicam a realização de um processo avaliativo dos resultados matemáticos obtidos nessa atividade, considerando tanto os processos matemáticos quanto à adequação para a situação (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012, p. 16), logo, inferimos que na atividade 3.1 eles *seguiram essas regras* do *fazer* Modelagem Matemática. No entanto, entendemos que eles ainda precisam desenvolver uma argumentação que convença aqueles que tem acesso a esses resultados (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012, p. 19), principalmente em relação a interpretação dos resultados.

QUADRO 57: RESUMO DAS AÇÕES DE D1 RELACIONADAS AO *SEGUIR REGRAS* DO *FAZER* MODELAGEM MATEMÁTICA NA ATIVIDADE 3.1

***Regra* do *fazer* Modelagem Matemática**	**Descrição da ação relacionada a *regra***	**Resultados**
Identificar uma situação-inicial problemática	O tema escolhido está relacionado aos seus interesses pessoais e tem influência na cotidianidade: A3 tinha interesse em instalar o sistema de energia solar em sua casa.	Seguem a regra
Coletar Dados	Foram capazes de coletar informações gerais sobre a situação-inicial e também dados específicos direcionados ao aspecto delimitado que seriam necessários para investigá-lo	Seguem a regra
Formular o Problema	Durante todo o processo de formulação do problema estavam considerando os aspectos da situação-inicial problemática. Também consideraram aspectos do contexto de desenvolvimento da atividade, como as ferramentas e tempo necessários para solucionar o problema.	Seguem a regra
Realizar Simplificações	Não evidenciam no relatório da atividade as simplificações como uma fase da atividade, mas, realizam simplificações em relação às informações obtidas na coleta de dados (primeira simplificação e a segunda média da segunda simplificação) e em relação ao problema formulado (primeira média da segunda simplificação).	Seguem a regra
Formular Hipóteses	Os aspectos essenciais das hipóteses foram propostos, as hipóteses dessa atividade foram formuladas com muita coerência, considerando vários aspectos da situação-inicial, pois, incorporam informações da situação-problema que não constam nos dados coletados e que para eles são relevantes (hipóteses 1, 3 e 4), e indicam a estratégia de resolução e a "matemática" utilizada para a construção do modelo (hipótese 2).	Seguem a regra

Selecionar Variáveis	As variáveis selecionadas são coerentes com o problema, abarcando todos os elementos necessários para a construção do modelo que foram determinados nas simplificações realizadas e hipóteses formuladas para a atividade.	Seguem a regra
Construir o Modelo	Os aspectos que envolvem a construção do modelo são considerados: as características da situação-inicial, utilizam os dados coletados e as simplificações realizadas, focam no problema formulado, respeitam as hipóteses formuladas, as variáveis selecionadas e as regras da Matemática envolvida.	Seguem a regra
Apresentar uma solução para o problema	A resposta apresentada é matematicamente rigorosa com o modelo, no sentido em que considera as regras da matemática envolvida na resolução. A "tradução" da resposta matemática para a situação também é realizada por eles de forma adequada, quando transformam os resultados obtidos em número de meses para datas, considerando a quarta hipótese da atividade.	Seguem a regra
Analisar a resposta em relação à Matemática	Realização um processo avaliativo dos resultados matemáticos obtidos nessa atividade considerando os processos matemáticos.	Seguem a regra
Analisar a resposta em relação ao Problema	Consideraram vários aspectos e propõem reflexões interessantes sobre o uso da energia solar e seus impactos sociais e ecológicos, e sobre o tempo necessário para que seus custos de instalação fossem recuperados.	Seguem a regra
	Precisam desenvolver uma argumentação mais convincente em relação a interpretação dos resultados.	

Fonte: O autor

6.2.2. O seguir regras da dupla 3 (D3): Atividade 3.3 – Pista de Skate

Nessa atividade os alunos de D3 identificam no tema Skate uma problemática a ser investigada. A problemática é direcionada para o problema do custo de construção de uma pista de skate na modalidade street com base na quadra de esporte das escolas públicas. Para responder ao problema os alunos determinam os obstáculos que compõem a pista, as dimensões da quadra de esporte, e constroem um modelo de projeto de pista. A partir desse projeto calculam as quantidades de materiais necessárias para construir os obstáculos. Coletam os preços desses materiais. Constroem o modelo de custo em que consideram as quantidades necessárias e o preço de cada material. A solução encontrada é o valor calculado a partir desse modelo.

- Identificar uma situação-inicial problemática

A atividade 3.3 (Pista de Skate) foi desenvolvida pelos alunos A5 e A6 que compõe a dupla 3 (D3) e se caracteriza como uma atividade do 3° momento de familiarização com a modelagem matemática propostos em Almeida e Dias (2004).

A situação-inicial problemática identificada em uma atividade de modelagem matemática abarca a cotidianidade do modelador (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012, p.15), investigando temas de seu interesse.

Nesse sentido, o professor/pesquisador combinou que para a Aula 13 os alunos de D3 identificassem possibilidades de temas a partir dos quais seria identificada a situação-inicial problemática da atividade. No diálogo do quadro 58 os alunos de D3 apresentam as possibilidades de tema para a atividade.

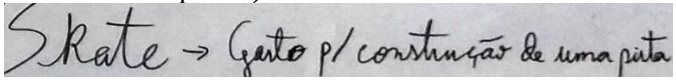
QUADRO 58: POSSIBILIDADES DE PROBLEMÁTICA PARA A ATIVIDADE 3.2

PP: [...] A5 e A6?
A5: Então professor, a gente tinha pensado Skate. Só que skate como esporte.
PP: Skate (escreve no quadro) [...] Outro.
A5: Reflorestamento.
A6: Reflorestamento.
PP: Reflorestamento (escreve no quadro)...
A5: Computador.
PP: Computador (escreve no quadro)... Computador ou computação?
A6: Na verdade, o desempenho do computador.
PP: [...] Mais alguma coisa? (A5 e A6 conversam rapidamente entre si)
A6: É isso.

Fonte: Transcrição de gravação de áudio e vídeo.

O professor/pesquisador encaminha[43] a escolha de um dos temas propostos. O interesse apresentado pelos alunos D3 pelo tema skate se notabilizou. A situação-inicial problemática identificada surge a partir do tema skate e se encaminhou para construção de uma pista de skate (Quadro 59).

QUADRO 59: DISCUSSÕES PARA A ESCOLHA DA PROBLEMÁTICA DA ATIVIDADE 3.1

PP: Agora vocês explicam mais ou menos o que vocês estavam pensando com esse tema. Para tentar direcionar um pouquinho melhor, daí a gente vai ver qual se adequa mais ou qual vocês preferem fazer.
[...]
PP: Vamos para o próximo. Skate!?
A6: A gente pensou no projeto de uma pista, no caso os materiais, essas coisas.
(Professor/pesquisador anota no quadro)

PR: Vocês andam de skate?
A5: Eu ando.
PR: Os dois? Você também?
A6: Não, eu não...
PR: Anda onde?

[43] Como evidenciamos na análise da Atividade 3.1 realizada pela dupla 1 (Quadro 101), antes de iniciar essas discussões o professor/pesquisador aproveita para realizar um *treinamento ostensivo da regra* referente a identificação da situação-inicial problemática, em que explica aos alunos que a situação inicial deve ser de interesse do modelador e de preferência ligada à sua cotidianidade, ou seja, que esteja inserida em sua vida de alguma maneira. Para evitar repetições, não iremos incluir esse trecho no quadro 134 e posteriormente sua análise.

[...]
A5: antes quando eu morava no Hauer[44] tinha uma pista que era paga, que era umas cinco quadras da minha casa, daí eu andava. Andava bastante na rua também. E a gente sempre montava as coisas de pista.[...] E agora eu não ando mais tanto tempo, mas, de vez em quando, domingo assim, eu pego o skate e vou na pista, tem uma perto da minha casa.
PR: É pública ou é o mesmo sistema?
A5: Essa é pública. Eu moro em São José[45], essa pista que tem é uma praça assim, fora a pista de skate.
[...]
PP: seria uma coisa pra pensar, por exemplo, igual o da energia solar deles, aonde essa pista (?)... se tem, por exemplo, algum local que já teria, por exemplo, esse espaço aqui é da prefeitura ou esse espaço é particular, então, tem essa metragem... têm alguma coisa em vista disso ou...?
A5: Não sei professor. Normalmente pista particular é fechada, ela é coberta, ela não tem... ela é de madeira, e... normalmente a da prefeitura é de concreto.
PP: Em qual destes contextos vocês estavam pensando? Não precisa definir agora, mas, na primeira ideia de vocês, era pensar em qual destes contextos? Uma pista pública...?
A5 e A6: Pista pública.
PP: Pública. [...] é interessante que fosse um caso mais palpável pra vocês, por exemplo, medirem o local, poderem pesquisar preço de material, ou não...
[...]
A5: Se fosse privada, poderia fazer uma modelagem do tipo assim: quanto eu vou ter que cobrar pras pessoas irem pra pagar os meus gastos?
PP: Daí seria outro foco, mas, é um foco daí. Porque daí você está olhando com um olhar de quem tem um custo, mas, quer ter um retorno. Daí não é mais um retorno social, é um retorno financeiro. [...]
PR: Daí já tem uma pista idealizada... se for focar o particular, vai fazer essa pista, com essas dimensões, quanto eu vou gastar... até um estudo de mercado, se você vai ter o retorno...
PP: Interessante.
(PP, PR e A5 falam sobre possibilidades de pistas na UTFPR e pistas próximas a universidade)
PR: Já que vai ser um esporte olímpico seria interessante, aulas de skate como atividade complementar, já pensou!?

Fonte: Transcrição de gravação de vídeo.

O tema Skate escolhido pelos alunos de D3 gerou pontos de discussão e deixou caminhos abertos para investigação, sendo o custo de construção de uma pista de skate o caminho que os norteou. A princípio esse custo estaria relacionado à construção de uma pista pública, o que direcionaria a atividade para um encaminhamento, mas, o encaminhamento de uma pista particular também ficou em aberto.

O diálogo do quadro 59 também nos indica que o tema escolhido estava presente na cotidianidade de A5 e que ele estava familiarizado com os aspectos referentes a pista de skate; A6 também demonstrou bastante interesse para com o tema, principalmente no que se refere a construção da pista de skate pública. Posteriormente os alunos de D3 indicam qual desses encaminhamentos lhes instigava à investigação (Quadro 60).

[44] Bairro da cidade de Curitiba.
[45] São José dos Pinhais, município da região metropolitana de Curitiba.

QUADRO 60: DISCUSSÃO SOBRE O ENCAMINHAMENTO DA SITUAÇÃO-INICIAL PROBLEMÁTICA ESCOLHIDA POR D3 PARA A ATIVIDADE 3.3

A6: Podia também pensar na escola, como skate está na olimpíada agora... não sei se as escolas de Curitiba têm um padrão de quadra, né, que nem ele falou (fala algo que não se entende nas gravações)... **A5**: É dá pra fazer várias... **A6**: fazer rampas menores que você pode confeccionar [...] **PP**: Ah, vocês pensaram em equipamentos que são removíveis, isso? **A6**: Isso... **PP**: Coloca e tira de volta, como uma rede... **A5**: É você pode colocar na quadra... **A6**: Na quadra. Daí pensar no tamanho da quadra e quantos seriam, quais... **PP**: Interessante.

Fonte: Transcrição de gravação de áudio.

Ao optarem por esse encaminhamento ratificam seus interesses em relação ao tema skate, de ambos os alunos da dupla.

Os outros dois temas propostos para a atividade também eram familiares aos alunos de D3. O tema Reflorestamento os interessou a partir do desenvolvimento da Atividade 2.1 (Uma árvore por habitante) – na qual se investigou a área verde por habitante nos bairros de Curitiba –, pois, propunham investigar o reflorestamento necessário para que um bairro que não tivesse o índice mínimo de área verde por habitante atingisse esse nível; ambos os alunos de D3 demonstraram interesse nesse assunto. Na discussão sobre o tema Computador identificamos que A5 tinha familiaridade e domínio das especificidades do tema, que foi direcionado para o desempenho do hardware de acordo com a exigência do sistema.

Os temas propostos pelos alunos de D3 para a identificação de uma situação-inicial problemática eram relacionadas à sua cotidianidade e despertavam seu interesse. Ainda, a problemática identificada, além de abarcar esses requisitos, direciona a investigação à escola pública, ambiente de interesse para professores em formação como eles. Nesse sentido, as ações realizadas pelos alunos de D3 nos indicam que eles *seguem essa regra* do *fazer* Modelagem Matemática nessa atividade.

- Na fase de Inteiração
    - Formular o Problema

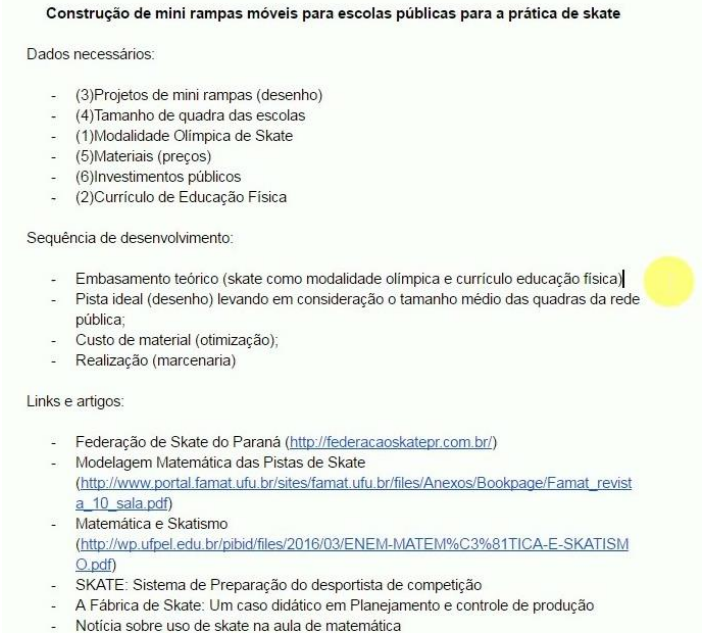
Nessa atividade a ação de formular o problema foi realizada pelos alunos de D3 antes da coleta de dados. O enunciado do problema não foi delimitado logo nas primeiras etapas do desenvolvimento, mas, o direcionamento do problema estava inclinado a

investigar o custo para a construção de uma pista de skate, para alguma modalidade olímpica, nas escolas públicas.

Nesse contexto, quando o professor/pesquisador questiona A5 sobre o andamento da atividade[46], ele apresenta um esquema de desenvolvimento da atividade construído pela dupla e explica que o problema é relacionado ao direcionamento apontado por eles anteriormente (Quadro 61).

QUADRO 61: CONFIRMAÇÃO DE A5 AO DIRECIONAMENTO PARA O PROBLEMA DA ATIVIDADE 3.3

PP: O que vocês já trabalharam? [...]
A5: Bom professor, na verdade, a gente fez esse projeto, pra ver tanto o que a gente precisava.



Construção de mini rampas móveis para escolas públicas para a prática de skate

Dados necessários:

- (3)Projetos de mini rampas (desenho)
- (4)Tamanho de quadra das escolas
- (1)Modalidade Olímpica de Skate
- (5)Materiais (preços)
- (6)Investimentos públicos
- (2)Currículo de Educação Física

Sequência de desenvolvimento:

- Embasamento teórico (skate como modalidade olímpica e currículo educação física)
- Pista ideal (desenho) levando em consideração o tamanho médio das quadras da rede pública;
- Custo de material (otimização);
- Realização (marcenaria)

Links e artigos:

- Federação de Skate do Paraná (http://federacaoskatepr.com.br/)
- Modelagem Matemática das Pistas de Skate (http://www.portal.famat.ufu.br/sites/famat.ufu.br/files/Anexos/Bookpage/Famat_revista_10_sala.pdf)
- Matemática e Skatismo (http://wp.ufpel.edu.br/pibid/files/2016/03/ENEM-MATEM%C3%81TICA-E-SKATISMO.pdf)
- SKATE: Sistema de Preparação do desportista de competição
- A Fábrica de Skate: Um caso didático em Planejamento e controle de produção
- Notícia sobre uso de skate na aula de matemática

PP: Chegaram em algum problema específico?
A5: Então, ó, a gente vai achar 3 projetos de mini rampas, 4 tamanho de quadra (A5 contínua explicando o planejamento para PP). Daí a gente vai fazer o custo, pra ver se dá pra levar pras escolas, daí, acho que esse é o problema professor.

Fonte: Transcrição de captura de tela

Posteriormente A5 questiona o professor/pesquisador sobre a viabilidade do problema direcionado para a atividade 3.3 (Quadro 62).

QUADRO 62: DÚVIDAS DE A5 SOBRE A FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DA ATIVIDADE 3.3

A5: Professor, só uma pergunta, você acha que esse tipo de problema está adequado?
PP: Não existe problema adequado...
A5: Mas é um problema válido?
PP: Vocês estão instigados em estudar isso?
A5: Aham.
PP: Então é válido.
A5: Ah, tá!

[46] Aula 14.

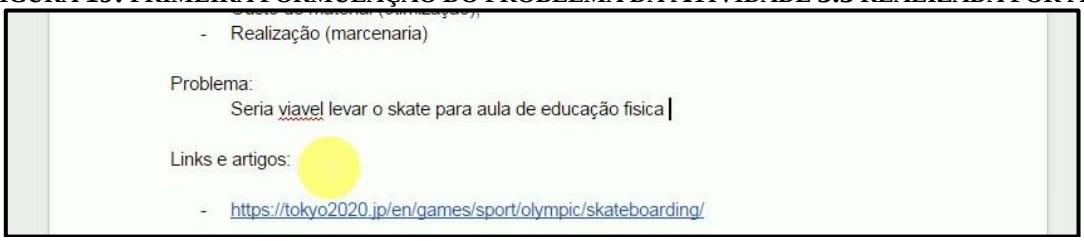
PP: Por que em modelagem não existe problema ideal, problema válido, problema não válido, existe uma problemática que lhe chama atenção... **A5**: Que você tem vontade de estudar. **PP**: que te dá vontade de estudar.

Fonte: Transcrição de captura de tela.

Nesse diálogo percebemos duas situações: 1- a insegurança de A5 na determinação de um problema específico a ser investigado no desenvolvimento da atividade de modelagem, pois, é a segunda experiência em que os alunos de D3 têm a tarefa de formular um problema para a atividade, a primeira foi exatamente na atividade anterior a essa (Atividade 2.2 – Cesta básica); 2- o professor/pesquisador realiza um treinamento vago; como apontam Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.15) a formulação de um problema é orientada pela falta de compreensão de algum aspecto específico da situação-inicial problemática, investigar uma parte específica de uma problemática mais ampla, aspectos que poderiam ter sido explorados pelo professor/pesquisador.

Considerando o direcionamento do problema, apresentado no quadro 137, e a "confirmação" de validade do problema dada pelo professor/pesquisador (Quadro 62), A5 formula uma primeira versão do problema da atividade 3.3 (Figura 19).

FIGURA 19: PRIMEIRA FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DA ATIVIDADE 3.3 REALIZADA POR A5



Fonte: Captura de tela do computador utilizado por A5.

Posteriormente A5 e o professor/pesquisador dialogam novamente sobre a formulação do problema da atividade (Quadro 63).

QUADRO 63: DISCUSSÃO SOBRE O PRIMEIRO PROBLEMA FORMULADO POR A5 PARA A ATIVIDADE 3.3

PP: E qual que é o problema (?), o problema é saber o custo disso... **A5**: Uhum. **PP**: custo de produção. Eu acho que você poderia firmar esse problema já... **A5**: Ah, não... eu firmei, eu coloquei na realidade aqui ó: seria viável levar o skate para a educação física? **PP**: Mas, viável em que sentido? **A5**: Viável no custo. **PP**: Então... mas, viável pra quem (?); pro governo vai fazer diferenças esse custo? Tá vendo que essa palavra... **A5**: É... **PP**: Na verdade você... calcular o custo de construção de uma pista... **A5**: Ah, entendi, mais simples então.

Fonte: Transcrição de captura de tela

O diálogo indica que professor/pesquisador sugere ao aluno que a inclusão do termo “viável” no problema não parece adequada. No entanto, a ideia geral do problema, que está relacionada aos custos de construção da pista de skate foi mantida por D3. Considerando esses aspectos, A5 reformula o problema (Quadro 64).

QUADRO 64: ENCAMINHAMENTO DA SITUAÇÃO-INICIAL PROBLEMÁTICA DA ATIVIDADE 3.3

Problema: Qual o custo da Construção de uma pista de skate?

A história do skate inicia na década de 60 na Califórnia onde surfistas em dias sem ondas adaptaram os shapes das pranchas com rodas de patins. Importando a prática dos estados unidos, também na década de 60, o skate chegou ao Brasil e hoje é um dos esportes mais praticados do país. Segundo a Confederação Brasileira de Skate, o Brasil possui mais de dois milhões desportistas (Sports Magazine, 2007).

Recentemente, o Skate foi incluído entre as novas modalidades nos jogos de Tóquio em 2020 por votação unânime do Comitê Olímpico Internacional (COI). Serão oitenta atletas competindo nas modalidades Street e Park. A modalidade Street é a mais comum no Brasil, ela se caracteriza pela realização de manobras em obstáculos que são encontrados na cidade: bancos, muretas, corrimões, escadas, buracos, rampas nas entradas de garagem, entre outros. Essa modalidade pode ser praticada em pistas de skate onde as rampas se assemelham a arquitetura urbana. Outra modalidade também muito comum no Brasil é a Mini-Ramp onde pistas de fácil construção proporcionam a prática do esporte.

Com a inclusão do Skate como modalidade olímpica, a prática do esporte e o estudo de seus fundamentos pode estar presente nas aulas de educação física do ensino básico, além disso para Armbrust (2008), tendo em vista a educação física que se renova, recria e aprimora seus conceitos, conteúdos e didáticas, é preciso se atentar para a educação física contemporânea e propiciar novas atividades no âmbito educacional.

Utilizando como parâmetro a estrutura das escolas públicas do estado do Paraná e o custo-benefício da modalidade street, qual seria o custo da construção de uma pista de Skate?

Fonte: Relatório entregue em documento de texto por D3 da Atividade 3.3

Os alunos de D3 direcionam o problema formulado para a especificidade da escola pública e para a modalidade de skate street, apresentando fundamentações que justificam tal direcionamento.

O problema formulado por D3 nessa atividade abarca os aspectos indicados em Almeida, Silva e Vertuan (2012): questiona uma especificidade da situação da qual lhes falta compreensão, os custos de construção de uma pista de skate; considera alguns aspectos já conhecidos, a modalidade de skate e o local em que a pista será construída. Assim, mesmo que A5 tenha apresentado insegurança e A6 não tenha participado de todas as ações, o direcionamento e formulação do problema realizada por eles indicam que ambos os alunos de D3 *seguem essa regra* do *fazer* Modelagem Matemática.

- Coletar dados

Almeida, Silva e Vertuan (2012) evidenciam que a coleta de dados busca informações a respeito da situação-inicial problemática, tornando alguns de seus aspectos conhecidos. Essas informações podem ser dados qualitativos ou quantitativos, coletados de forma direta ou indireta. Como cada atividade pode ser considerada como um *jogo de linguagem* específico em que as *regras* do *fazer* Modelagem Matemática são aplicadas, a adequação dos dados coletados e de suas fontes vai ser analisada no interior desse *jogo de linguagem*. Nesse sentido, descrevemos as ações realizadas pelos alunos de D3 na coleta de dados da Atividade 3.3.

Após o encaminhamento da situação-inicial problemática ser identificado, o professor/pesquisador orienta os alunos de D3 a coletarem dados mais localizados, das escolas que eles têm contato, ou seja, que a atividade se aproxime de sua cotidianidade. (Quadro 65).

QUADRO 65: ORIENTAÇÃO DO PROFESSOR/PESQUISADOR EM RELAÇÃO À COLETA DE DADOS DA ATIVIDADE 3.3

PP: Vocês podem... vocês têm acesso a alguma escola, né... **A5**: Aham. **PP**: então, vocês têm a quadra aqui da UTF, que pode ser um exemplo, tem o colégio aqui na esquina, que deve ter uma quadra que vocês podem pedir pra... **A6**: Deve ter um modelo de quadra pras escolas do Paraná... **PP**: Será que todas têm... **A6**: é isso que a gente tava procurando (na internet), se elas têm um padrão... **PP**: É interessante vocês pegarem algumas quadras medir as dimensões, pra vocês saberem... daí fazer uma média das dimensões... já é uma coisa além, entendeu, acho que é mais interessante do que pegar dados prontos é ir nas escolas [...]

Fonte: Transcrição de gravação de áudio.

No início da Aula 14 A5 apresenta o planejamento de desenvolvimento da atividade que a dupla construiu (Quadro 61), o professor/pesquisador, então, questiona quais informações eles haviam coletado (Quadro 66).

QUADRO 66: QUESTIONAMENTOS DO PROFESSOR/PESQUISADOR SOBRE O ANDAMENTO DA COLETA DE DADOS DA ATIVIDADE 3.3

PP: E o que vocês já conseguiram? Quais dessas informações? **A5**: Eu estou pesquisando a parte da... eu fiquei de pesquisar essa parte da modalidade de skate, né, e esse projeto aqui (projetos de mini rampas). O tamanho de quadra a gente vai sair para medir nas escolas, e depois que a gente tiver isso a gente vai ver o material. **PP**: Só tem que pensar no tempo [...] porque essa parte de dados era pra ter coletado antes da aula de hoje [...] vai tentando juntar essas coisas aí... qualquer coisa se precisar, por exemplo, ir na quadra medir hoje, vai lá, mede e volta...

Fonte: Transcrição de captura de tela.

Os alunos de D3 não haviam trabalhado na coleta de dados antes da Aula 14 como havia sido combinado. Nesse sentido, o professor/pesquisador orienta A5 que busque essas informações e, caso necessário, poderia se ausentar de sala de aula para fazê-lo.

A primeira informação coletada por A5 diz respeito às modalidades de skate que serão disputadas nos jogos olímpicos em sua próxima edição. Num primeiro momento, A5 encontra essa informação em uma reportagem de um site especializado no conteúdo relacionado ao skate. Mas, como o problema da construção da pista de skate está contextualizado a introdução da prática do skate na aula de Educação Física, essa informação deve ser obtida de fontes oficiais. O professor/ pesquisador orienta A5 em relação a esse aspecto.

Seguindo a orientação do professor/pesquisador em relação a esse aspecto, A5 busca essa confirmação no site do Comitê Olímpico Internacional (COI) que o direciona para o site da Federação Internacional de Skateboarding (Figura 20).

FIGURA 20: MODALIDADES DE SKATE PRESENTES NOS JOGOS OLÍMPICOS – PRIMEIRA COLETA DE DADOS REALIZADA POR D3 NA ATIVIDADE 3.3

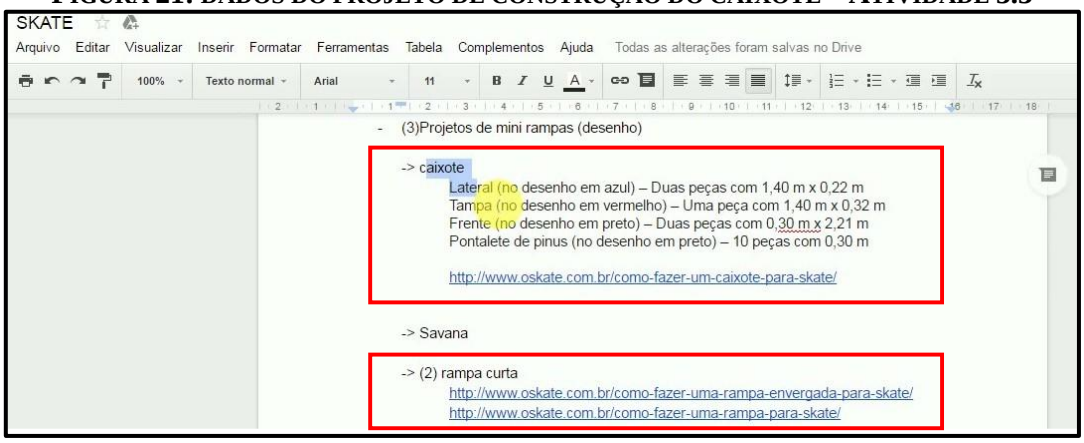
[47]

Fonte: Captura de tela do computador utilizado por A5.

Em seguida A5 procura projetos dos obstáculos utilizados nas modalidades olímpicas e que irão compor a pista de skate, buscando obter dimensões e materiais necessários para sua construção. No site www.oskate.com.br encontra o projeto de três desses equipamentos. Num primeiro momento A5 adiciona ao planejamento as medidas fornecidas no projeto do obstáculo caixote e apenas cita o endereço eletrônico dos projetos da rampa curta e da rampa envergada (Figura 21).

[47] Texto originalmente em inglês traduzido por meio tradutor automático do navegador.

FIGURA 21: DADOS DO PROJETO DE CONSTRUÇÃO DO CAIXOTE – ATIVIDADE 3.3



Fonte: Captura de tela do computador utilizado por A5.

O professor/pesquisador orienta A5 a buscar dimensões oficiais da pista de skate e de seus obstáculos (Quadro 67). Dessa vez essa ação do professor/pesquisador se caracteriza como ensino *ostensivo*, pois, havia orientado A5 anteriormente sobre a necessidade de informações oficiais quando relacionadas a modalidade olímpica skate.

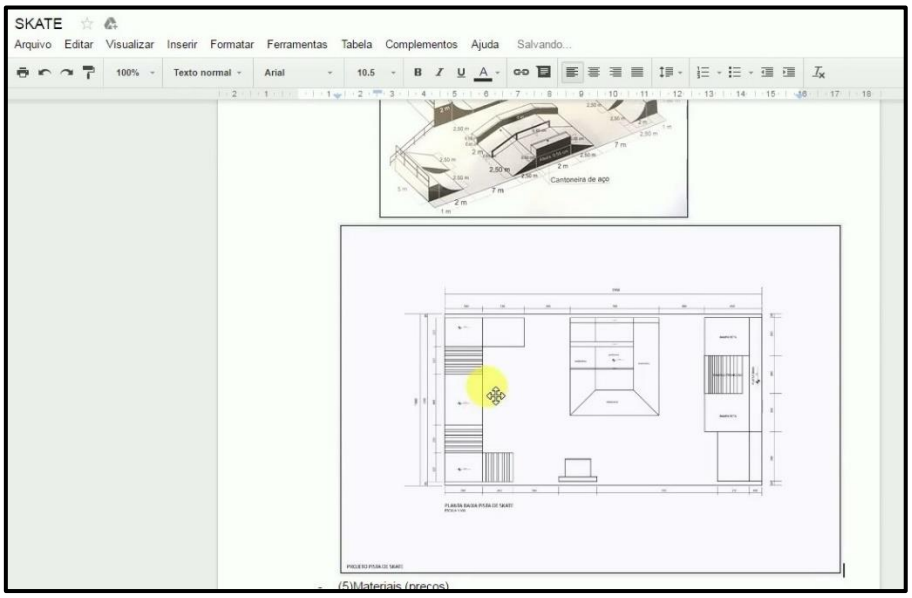
QUADRO 67: CONFIRMAÇÃO DE D3 DO DIRECIONAMENTO PARA O PROBLEMA DA ATIVIDADE 3.1

PP: O que você conseguiu de informação que você não tinha? [...]
A5: Eu consegui as medidas [...] pra construir as pistas... só que nem, eles não dão medidas [...] no site eles dão, compra esse aqui, encaixa e faz [...]
PP: Não tem essas medidas oficiais?
A5: Não tem... por que o que acontece, essas medidas elas são... maior.... a gente queria uma coisa mais viável.
[...]
PP: Naquele site especial (site da Federação Internacional de Skateboarding) lá...
A5: Não tem!
PP: Ele não te dá quanto que tem que ser as medidas da pista? [...] Tem que ter porque, por exemplo, como que alguém vai fazer um campeonato no Brasil e alguém que vai fazer um campeonato na Islândia vai fazer a mesma pista?
A5: Talvez seja em outro site, então.
PP: Por que assim, não vai usar a medida oficial, mas, você pode, por exemplo, pegar uma proporção desse valor oficial. [...] Pegar o tamanho da pista oficial [...] e ver a proporção dela em relação a quadra.
A5: Uhum, entendi.
PP: E dessa proporção, você aplica a mesma proporção para o tamanho dos aparelhos.

Fonte: Transcrição de captura de tela.

Entretanto, A5 descobre que as federações de Skateboarding não padronizam as pistas e as dimensões de seus obstáculos, logo, seria necessário determinar um projeto de pista para saber quais aparelhos iriam formá-la. Nesse sentido, A5 começa a procurar projetos de pistas de skate na modalidade street. Ele inclui no planejamento duas imagens de projetos de pistas dessa modalidade (Figura 22).

FIGURA 22: PROJETOS DE PISTA DE SKATE MODALIDADE STREET ACRESCENTADOS POR A5 AO PLANEJAMENTO DA ATIVIDADE 3.3



Fonte: Captura de tela do computador utilizado por A5.

Essa foi a última ação de A5 na Aula 14. Na Aula 15 nenhum dos alunos de D3 compareceu, assim, o professor/pesquisador entrou em contato por email com os alunos de D3 e marcou um encontro em contraturno (Aula 16).

No relatório parcial da atividade que A5 tinha na Aula 16 é possível identificar que as imagens dos projetos da figura 25 não foram utilizadas, os dados para construção dos obstáculos caixote, rampa curta e rampa envergada foram organizados, mas, nenhum dado à mais foi coletado. Disso, o professor/pesquisador novamente orienta A5 a coletar os dados *in loco*, para obter as dimensões da quadra de esportes e determinar quais e quantos obstáculos comporiam a pista de skate (Quadro 68).

QUADRO 68: AINDA FALTAM DADOS A SEREM COLETADOS NA ATIVIDADE 3.3 – PARTE I

A5: É que não tem muita coisa, sabe. Que nem ó, tem rampa curta, envergada e caixote, só isso.
PP: E corrimão?
A5: [...] tem mais duas coisas... corrimão, só que a gente não achou projeto, teria que montar, fazer no "olhometro", assim... e questão de...
PP: Não tem nenhum que você possa lá medir? [...]
A5: Só que daí não tem padrão.
PP: Não, mas, vocês vão lá: "aquele lá é bom (?) é muito grande, muito comprido (?)"... vocês têm uma ideia... "queremos que seja metade", então, você mede e diz que foi feito metade daquele tamanho.
A5: Entendi.
[...]
PP: Já mediram as quadras?
A5: Não, não.
PP: Isso acho que era a primeira coisa que vocês deveriam ter feito [...] você mede a quadra, bom, eu tenho uma área de tanto... medi lá a quadra, quadra de um lugar, quadra de outro, pega três quadras, quatro quadras, aqui perto vocês conseguem [...] Vai lá, mediu, beleza... em média

as medidas são essas, ou pega a menor, ou pega a maior, não sei, depende do que vocês pensarem [...] Então tem x metros quadrados [...] se você pegar esses três aqui e vocês consigam mais dois, corrimão e mais alguma coisa [...] quantos equipamentos dá pra instalar nessa pista? (O diálogo continua com o professor/pesquisador falando sobre considerar a área necessária para instalação dos equipamentos em relação a área da quadra que eles determinarem)

Fonte: Transcrição de captura de tela.

Posteriormente A5 e o professor discutem a coleta de dados relacionada aos preços dos materiais necessários para a construção dos obstáculos (Quadro 69).

QUADRO 69: AINDA FALTAM DADOS A SEREM COLETADOS NA ATIVIDADE 3.3 – PARTE II

PP: Daí depois vocês vão ver o custo [...] custo das coisas... tem a lista de coisas já lá.
A5: É, tem a lista.

Preço de materiais:

Materiais	Preço
Madeirite Compensado	
Parafusos para Madeira	
Sarrafos de Madeira	
Chapa de Fibra de Madeira (Eucatex)	
Chapa de Metal	
Pregos	
Parafusos	

Cálculo de gastos:

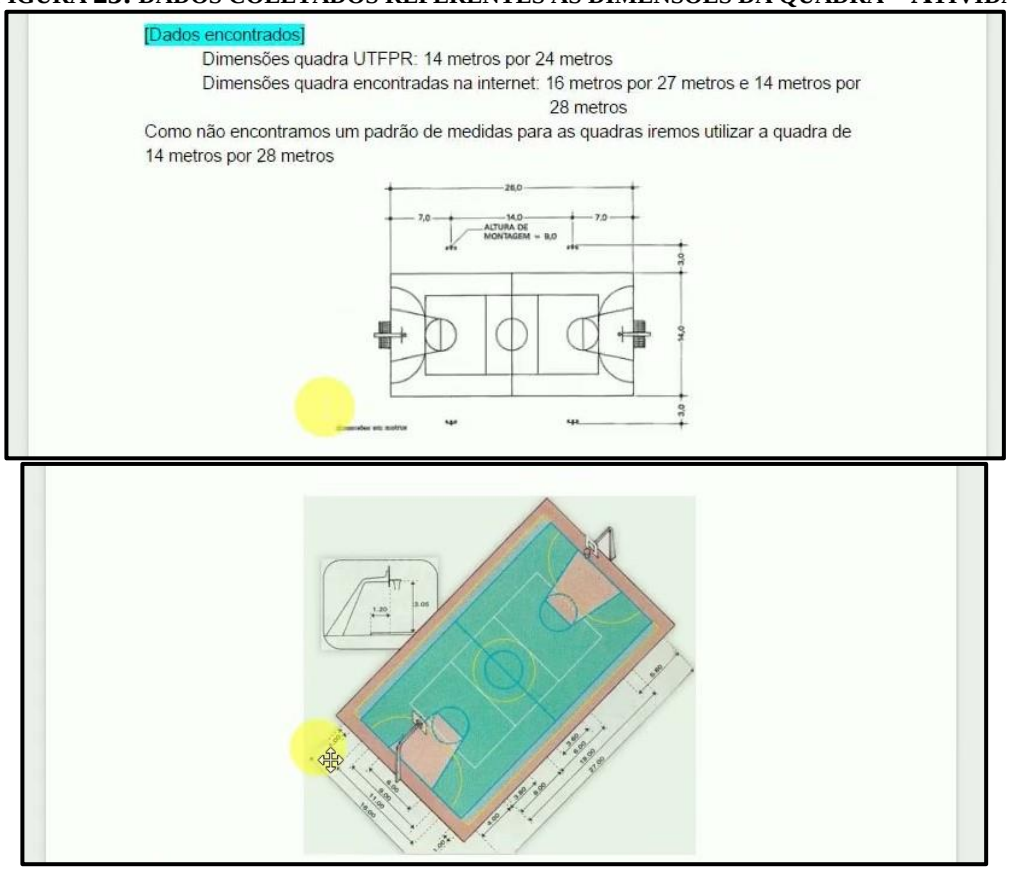
A5: É, tipo, a gente têm em média quanto custa cada coisa, mas, tem que pesquisar certinho.

Fonte: Transcrição de captura de tela.

O trecho do quadro 69 indica que os alunos de D3 têm consciência de quais são os dados necessários, mas, não apresentam segurança no momento de coletá-los. Quando a coleta de dados necessita ocorrer *in loco* ou precisa de mais de uma fonte, como no caso de pesquisar preços em lojas de materiais, ela é adiada ou desconsiderada. Esse aspecto é ressaltado pelo professor/pesquisador à A5: *PP: Vocês têm as ideias... falta dados (?), então, vamos fazer (no sentido de coletar in loco) dados. O interessante é, vocês podem buscar esses dados, tirar esses dados da realidade, buscar eles, medir... ah, não tem pra tudo, então faz uma aproximação, usa o que você tem*. A5 concorda, mas, explica que está complicado conciliar os horários com A6 para que façam a coleta de dados.

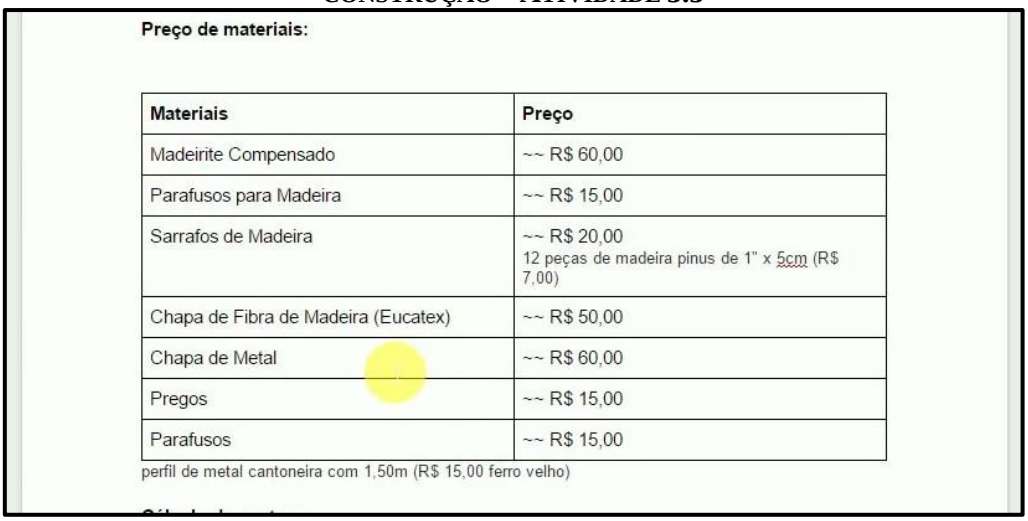
Na Aula 18 A5 tem os dados referentes as dimensões da quadra de esportes (Figura 23) e do preço dos materiais necessários para a construção dos obstáculos (Figura 24).

FIGURA 23: DADOS COLETADOS REFERENTES AS DIMENSÕES DA QUADRA – ATIVIDADE 3.3



Fonte: Captura de tela do computador utilizado por A5.

FIGURA 24: DADOS INICIAIS COLETADOS REFERENTES AOS PREÇOS DOS MATERIAIS DE CONSTRUÇÃO – ATIVIDADE 3.3



Preço de materiais:

Materiais	Preço
Madeirite Compensado	~~ R$ 60,00
Parafusos para Madeira	~~ R$ 15,00
Sarrafos de Madeira	~~ R$ 20,00 12 peças de madeira pinus de 1" x 5cm (R$ 7,00)
Chapa de Fibra de Madeira (Eucatex)	~~ R$ 50,00
Chapa de Metal	~~ R$ 60,00
Pregos	~~ R$ 15,00
Parafusos	~~ R$ 15,00

perfil de metal cantoneira com 1,50m (R$ 15,00 ferro velho)

Fonte: Captura de tela do computador utilizado por A5.

A figura 23 indica que os alunos de D3 decidiram medir *in loco* apenas a quadra de esportes da UTFPR, e incluíram dois modelos de quadra de esportes encontrados na internet. O exposto na figura 24 indica que os dados referentes ao preço dos materiais de construção necessários para os obstáculos estão aproximados, e as fontes em que esses valores foram obtidos não são citadas.

No relatório final da atividade os alunos de D3 alteram os dados apresentados na figura 24, incluem mais especificações de cada um deles e acrescentam as fontes em que os preços foram coletados (Quadro 70).

QUADRO 70: DADOS COLETADOS REFERENTES AOS PREÇOS DOS MATERIAIS DE CONSTRUÇÃO – APRESENTADOS NO RELATÓRIO DA ATIVIDADE 3.3

Preço de materiais:

Materiais	**Preço**
Madeirite Compensado 2440x1220x10mm	R$ 32,90 m^2 Cada chapa tem 2,97 m^2 = R$ 97,7
Parafusos para Madeira 3,5x40mm	Caixa com 500 R$ 50,00
Sarrafos de Madeira 300x10cm	R$ 18,90 cada
Cantoneira de metal 3/4x1/8 por 6 metros	R$ 19,80 cada
Barra de ferro 15x15 por 6 metros	R$ 13,90 cada

Valores coletados da internet:
http://www.leroymerlin.com.br/
http://produto.mercadolivre.com.br/MLB-760688480-metalon-15x15-barra-c-6-metros-_JM
http://www.aladimmetais.com.br/cantoneira-3-4-x-1-8-astm-a36-6mts-pr-4428-389334.htm

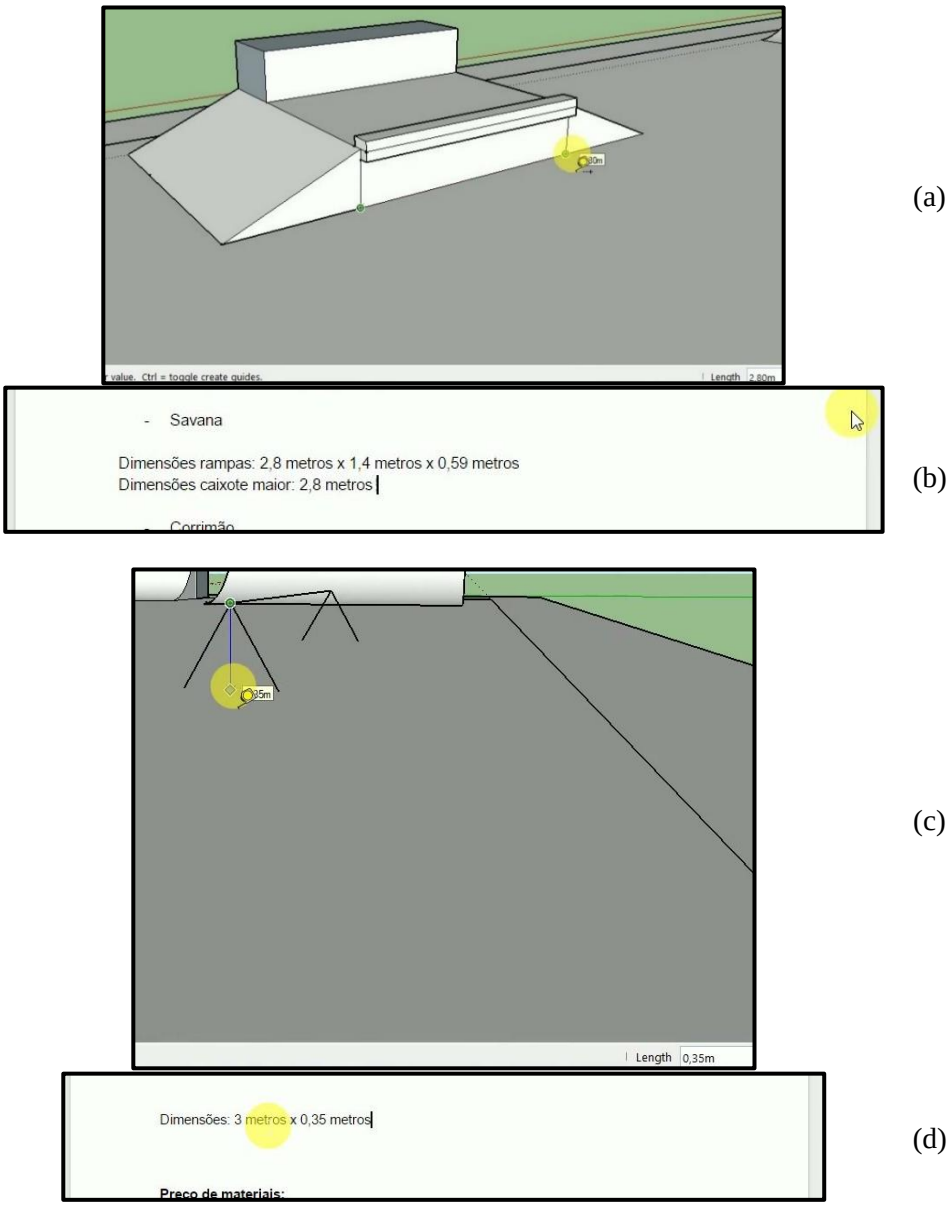
Fonte: Relatório em documento de texto entregue por D3 da Atividade 3.3

Contudo, as fontes dos dados são apenas citadas no quadro 70. Os preços individuais encontrados em cada uma das lojas não são apresentados e nem os critérios para determinação dos valores apresentados na tabela. Isso, pode alienar certas características da atividade. Por exemplo, se os preços mais altos foram considerados, então, a investigação estaria relacionado ao custo máximo de construção da pista de skate, ou, se fossem considerados os menores preços, então, seria o custo mínimo de construção. Como não foi apresentada nenhuma justificação, comunica certa aleatoriedade aos dados coletados.

As dimensões dos obstáculos Savana (Figura 25, a e b) e Corrimão (Figura 25, c e d) foram obtidas diretamente do projeto de pista construído por A5 utilizando o software SketchUp 2017[48].

[48] SketchUp é um software para a criação de modelos em 3D no computador. O software foi utilizado por A5 em sua versão gratuita que é liberada apenas para o uso privado ou educacional.

FIGURA 25: DIMENSÕES DOS OBSTÁCULOS SAVANA E CORRIMÃO – COLETA DE DADOS DA ATIVIDADE 3.3



(a)

(b)

(c)

(d)

Fonte: Captura de tela do computador utilizado por A5.

No relatório final da atividade os alunos de D3 acrescentam a informação que esses dois obstáculos foram projetados com base na pista de skate citada anteriormente por A5, que está localizada na cidade de São José dos Pinhais.

Identificamos que os recursos das tecnologias digitais foram utilizados por D3 em duas funções na coleta de dados realizada nessa atividade: *uso* como *investigação* e *uso* como *calculação*. Como *investigação* quando os alunos de D3 obtêm os dados a partir de sites da internet, no caso, as dimensões dos obstáculos caixote, rampa curta e rampa envergada, das dimensões de 2 das 3 quadras de esporte e dos preços dos materiais de construção. Além, claro, de uma inteiração mais geral com essa temática, buscando

informações sobre o skate nas olimpíadas, sobre os materiais necessários e projetos de pista de skate. Como *calculação* foi utilizado especificamente para obter os dados dos obstáculos savana e corrimão, pois, do modelo geométrico espacial do projeto da pista A5 obteve valores numéricos utilizando para isso uma ferramenta do software.

As ações de A5 relacionadas a coleta de dados predominaram sobre as ações de A6, principalmente no que se refere as ações em aula. Nesse sentido, o *seguir regras* referente a ação de coletar dados deve ser analisado de forma individual.

Considerando as descrições realizadas, as ações de coleta de dados realizadas por A6 nessa atividade se resumem ao direcionamento dos dados que deveriam ser coletados e aos preços dos materiais de construção, e foram realizadas fora de sala de aula. Dessas ações observamos que o direcionamento dos dados é coerente com o problema formulado e com o modelo de custo de produção pretendido, mas, como discutimos, a falta de informações sobre os preços dos materiais de construção pode indicar certa aleatoriedade. Disso, inferimos que A6 *segue* parcialmente *essa regra* do *fazer* Modelagem Matemática.

As ações de A5 se fizeram presentes em toda coleta de dados. Assim, os aspectos analisados para A6 podem ser atribuídos a A5 também. Contudo, as demais ações realizadas por A5 na coleta de dados não foram autônomas, pois, o professor/pesquisador teve que intervir *ostensivamente* para direcioná-las. Inferimos que A5 *segue* aspectos *dessa regra*, como os apontados para A6 e os envolvidos na obtenção das dimensões dos obstáculos savana e corrimão. Ao considerarmos o discutido no capítulo 4 que o *seguir regras* está relacionado às ações autônomas do aluno, nas demais ações de coletar dados A5 não *segue essa regra*.

- Na fase de Matematização
    - Realizar Simplificações

Na atividade 3.3 (Pista de Skate) os alunos de D3 não evidenciam no relatório da atividade as simplificações realizadas no desenvolvimento. Há simplificações que estão relatadas em conjunto com outras fases da atividade, mas, também simplificações que não são citadas.

Como apontam Almeida, Silva e Vertuan (2012), as simplificações podem ser realizadas referentes às informações coletadas e ao problema formulado. A primeira

simplificação realizada pelos alunos de D3 está relacionada a formulação do problema, ao considerar apenas a modalidade street para a construção da pista de skate (Quadro 71).

QUADRO 71: DADOS COLETADOS REFERENTES AOS PREÇOS DOS MATERIAIS DE CONSTRUÇÃO – APRESENTADOS NO RELATÓRIO DA ATIVIDADE 3.3

Recentemente, o Skate foi incluído entre as novas modalidades nos jogos de Tóquio em 2020 por votação unânime do Comitê Olímpico Internacional (COI). Serão oitenta atletas competindo nas modalidades Street e Park. A modalidade Street é a mais comum no Brasil, ela se caracteriza pela realização de manobras em obstáculos que são encontrados na cidade: bancos, muretas, corrimões, escadas, buracos, rampas nas entradas de garagem, entre outros.

Fonte: Relatório em documento de texto entregue por D3 da Atividade 3.3

O trecho destacado no quadro 71 indica que os alunos de D3 justificam a opção pela modalidade street por ser a prática mais comum. Essa simplificação vem misturada com a justificativa do problema e acaba não ficando evidente no relatório da atividade.

A segunda simplificação considerada pelos alunos de D3 está relacionada às informações coletadas. Como as confederações de Skateboarding não fornecem dimensões padrões para as pistas de skate, o professor/pesquisador orienta A5 que inclua essa informação na atividade como uma simplificação (Quadro 72).

QUADRO 72: ORIENTAÇÃO DO PROFESSOR/PESQUISADOR PARA A5 REALIZAR UMA SIMPLIFICAÇÃO EM RELAÇÃO AS MEDIDAS DA PISTA DE SKATE – ATIVIDADE 3.3

PP: Então, acho que vocês vão ter que simplificar isso... como não tem a medida oficial, vão ter que simplificar. **A5**: Uhum. **PP**: Daí você diz que olhou no site do (Comitê Olímpico, Federação de Skateboarding, etc.) internacional [...] e que não há um padrão.

Fonte: Transcrição de captura de tela.

Contudo, os alunos de D3 não fazem menção a essa simplificação no relatório final da atividade.

A terceira simplificação realizada pelos alunos de D3 também diz respeito às informações coletadas, e se refere à escolha das dimensões da quadra de esportes que serviria como base para o projeto da pista de skate. Enquanto no relatório da atividade (Quadro 73) eles apenas exprimem que escolheram tais dimensões, na comunicação da atividade para a turma A5 explica a escolha (Quadro 74).

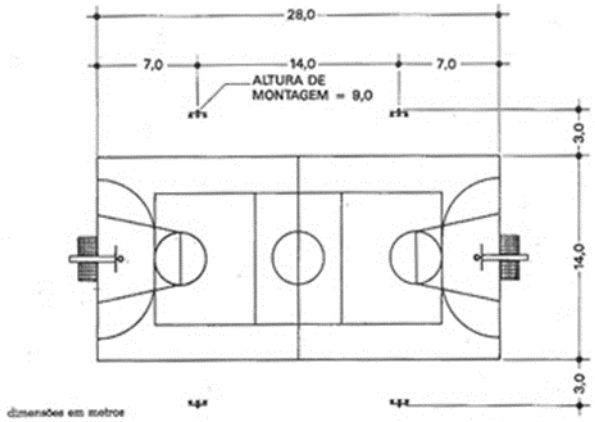
QUADRO 73: OPÇÃO PELAS DIMENSÕES DA QUADRA DE ESPORTES – ATIVIDADE 3.3

Analisamos as medidas das quadras do campus central da Universidade Federal do Paraná em Curitiba e de outras quadras encontradas na internet. UTFPR: 14 metros por 24 metros Quadra da Internet: 16 metros por 27 metros e 14 metros por 28 metros. Utilizamos como padrão a medida 14 metros por 28 metros.

Fonte: Relatório em documento de texto entregue por D3 da Atividade 3.3

QUADRO 74: EXPLICAÇÃO SOBRE A OPÇÃO PELAS DIMENSÕES DA QUADRA DE ESPORTES – ATIVIDADE 3.3

A5: Aqui a quadra da UTF é um pouco menor do que o padrão, ela é 14 por 24. [...] Como eu sou da atlética eu já sabia disso um pouco... daí eu pesquisei na internet algumas quadras também... e a gente achou essa quadra [...] que ao nosso ver seria ideal, que seria essa aqui de 14 por 28.



Fonte: Transcrição de captura de tela.

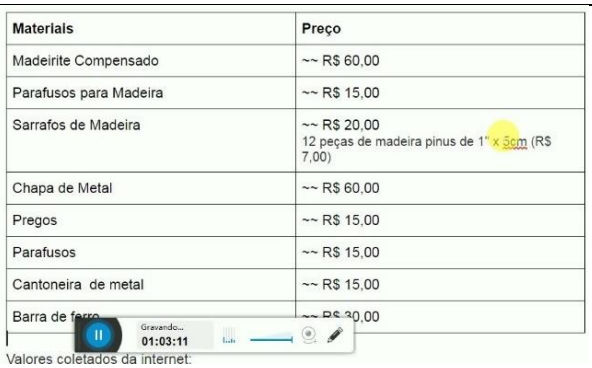
A fala de A5 do quadro 74 indica que essa simplificação foi realizada com base na vivência de A5 com os esportes universitários – visto que ele é membro da atlética da instituição. Contudo, faltou eles acrescentarem essa justificativa ao relatório da atividade.

O *uso* dos recursos das tecnologias digitais como *investigação* e *visualização* auxiliou os alunos de D3 a realizarem essa simplificação. Como afirma A5 no quadro 73 ao realizar uma pesquisa na internet observou diferentes modelos de quadra de esportes, assim, optou por um deles.

A quarta e última simplificação realizada por D3 nessa atividade também diz respeito as informações coletadas, e está relacionada aos preços dos materiais de construção. Na comunicação da atividade para a turma A6 explica as ações da dupla na realização dessa simplificação (Quadro 75).

QUADRO 75: EXPLICAÇÃO SOBRE A SIMPLIFICAÇÃO DOS PREÇOS DOS MATERIAIS DE CONSTRUÇÃO – ATIVIDADE 3.3

A6: Aqui a gente têm um valor base, assim, foi o que a gente usou...



Materiais	Preço
Madeirite Compensado	~~ R$ 60,00
Parafusos para Madeira	~~ R$ 15,00
Sarrafos de Madeira	~~ R$ 20,00 12 peças de madeira pinus de 1" x 3cm (R$ 7,00)
Chapa de Metal	~~ R$ 60,00
Pregos	~~ R$ 15,00
Parafusos	~~ R$ 15,00
Cantoneira de metal	~~ R$ 15,00
Barra de ferro	~~ R$ 30,00

Valores coletados da internet:

A6: mas, a gente quer fazer uma mudança, porque a gente não considerou valores médios, né, a gente considerou alguns valores padrão que a gente encontrou... por isso eles estão aproximados.

A5: A gente achou na internet os valores. Daí a gente pensou, ah, tem o madeirite com a espessura tanto que ele custa 50 (reais), daí tem um outro madeirite que a espessura é 15 (mm) que custa 70 (reais), o outro custa 90 (reais), daí eu peguei um valor entre o maior e o menor, não é uma média.

Fonte: Transcrição de captura de tela.

Contudo, no relatório final da atividade eles apenas apresentam a tabela com os novos valores e suas fontes (Quadro 76), mas, não apresentam os valores obtidos em cada uma das fontes citadas e os cálculos realizados para determinar os valores da tabela. Assim, não sabemos se utilizaram a média, como propuseram na comunicação da atividade, ou se tomaram outro parâmetro.

QUADRO 76: NOVOS VALORES PARA O CUSTO DOS MATERIAIS DE CONSTRUÇÃO – ATIVIDADE 3.3

Preço de materiais:

Materiais	Preço
Madeirite Compensado 2440x1220x10mm	R$ 32,90 m^2 Cada chapa tem 2,97 m^2 = R$ 97,70
Parafusos para Madeira 3,5x40mm	Caixa com 500 R$ 50,00
Sarrafos de Madeira 300x10cm	R$ 18,90 cada
Cantoneira de metal 3/4x1/8 por 6 metros	R$ 19,80 cada
Barra de ferro 15x15 por 6 metros	R$ 13,90 cada

Valores coletados da internet:
http://www.leroymerlin.com.br/
http://produto.mercadolivre.com.br/MLB-760688480-metalon-15x15-barra-c-6-metros-_JM
http://www.aladimmetais.com.br/cantoneira-3-4-x-1-8-astm-a36-6mts-pr-4428-389334.htm

Fonte: Relatório em documento de texto entregue por D3 da Atividade 3.3

Identificamos que os alunos de D3 realizaram simplificações nessa atividade, a primeira relacionada ao problema e as demais relacionadas às informações. Contudo, não evidenciam as simplificações e suas justificativas ao relatarem o desenvolvimento da atividade.

Nesse sentido, inferimos que os alunos de D3 *seguem essa regra* do *fazer* Modelagem Matemática. Mas, ainda necessitam de *treinamento* no que ser refere à comunicação dessas simplificações, pois, como afirmam Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 19) é necessário apresentar uma argumentação que possa convencer àqueles aos quais esses resultados são acessíveis que suas escolhas são baseadas em argumentos racionalmente fundamentos.

- Formular Hipóteses

As hipóteses formuladas pelos alunos de D3 nessa atividade também não foram evidenciadas no relatório da atividade, encontram-se entremeadas às outras fases de desenvolvimento da atividade.

Três das quatro hipóteses formuladas estão relacionadas ao modelo do projeto da pista de skate. A primeira delas diz respeito à praticidade de montagem da pista (Quadro 77).

QUADRO 77: PRIMEIRA HIPÓTESE FORMULADA POR D3 PARA A ATIVIDADE 3.3

Projeto da Pista
Com o objetivo de viabilizar a prática de Skate nas escolas medimos quadras da região de Curitiba e outras encontradas na internet. O projeto foi baseado na modalidade street e nas suas principais rampas. Optamos por obstáculos móveis, foram considerados os mais ideais porque facilitam a montagem e a remontagem da pista.

Fonte: Relatório em documento de texto entregue por D3 da Atividade 3.3

No relatório os alunos de D3 não justificam porque é necessário considerar tal mobilidade, explicam apenas que facilita a montagem e a remontagem da pista. Contudo, durante a comunicação da atividade eles apresentam argumentos que o fazem (Quadro 78).

QUADRO 78: ARGUMENTOS QUE JUSTIFICAM A PRIMEIRA HIPÓTESE FORMULADA POR D3 PARA A ATIVIDADE 3.3

A6: A gente queria implementar essa pista nessa quadra, mas, é claro, a gente não queria impossibilitar a prática dos outros esportes, então, a gente queria uma pista que pudesse ser móvel.

Fonte: Transcrição de captura de tela.

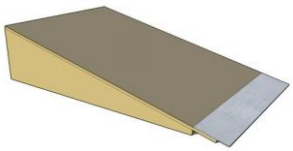
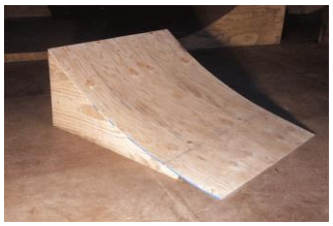
A fala de A6 indica que eles consideram o contexto do projeto da pista de skate para formular essa hipótese, incorporando informações da situação-problema que não constam nos dados coletados na inteiração (ALMEIDA; PALHARINI e TORTOLA, 2015).

A segunda hipótese formulada pelos alunos de D3 está relacionada aos obstáculos que comporiam o projeto da pista skate. No quadro 79 apresentamos como essa hipótese é formulada no relatório da atividade.

QUADRO 79: SEGUNDA HIPÓTESE FORMULADA POR D3 PARA A ATIVIDADE 3.3

Obstáculos

Selecionamos cinco tipos de obstáculos móveis mais comuns na prática de skate: o caixote, a rampa 45 graus, a rampa 90, a savana e o corrimão. A partir da foto desses obstáculos esboçamos seu projeto de construção e disposição na quadra.

Caixote	Rampa 45	Rampa 90
		
Savana	**Corrimão**	

Fonte: Relatório em documento de texto entregue por D3 da Atividade 3.3

O argumento apresentado pelos alunos de D3 é que esses obstáculos são os mais populares na prática do skate modalidade street. Na comunicação da atividade A5 reitera que considerar esses cinco obstáculos é uma hipótese para a atividade (Quadro 80).

QUADRO 80: ESSA É UMA HIPÓTESE PARA A ATIVIDADE 3.3

A5: Até a gente pegou como hipótese simplificadora de usar as mais populares, que seriam essas cinco [...] que são os mais usados, o clássico, sabe.

Fonte: Transcrição de captura de tela.

Essa hipótese direciona (ALMEIDA; PALHARINI e TORTOLA, 2015) a construção do projeto da pista de skate, delimitando os obstáculos que a comporiam. A fundamentação dessa hipótese está nas vivências de A5 como praticamente do skate.

A terceira hipótese formulada pelos alunos de D3 está relacionada as proporções das dimensões dos obstáculos que compõe a pista (Quadro 81).

QUADRO 81: EXPLICAÇÃO SOBRE A TERCEIRA HIPÓTESE FORMULADA POR D3 PARA A ATIVIDADE 3.3

A6: E deixamos um espaço livre pra manobras e circulação. **A5**: Por que tem que ter um espaço entre uma rampa e outra pra pegar embalo. [...] **A5**: No começo eu montei um projeto sem nada assim, sem medida, sem padrão. Daí eu conversei com o professor [...] e deu uma dica pra montar, que fazer em relação a uma pessoa de 1,70 m. Porque se vai ser pro Ensino Médio [...] e é uma pista que tem que ser transportada ela não pode ser muito grande, por que senão não tem como guardar, não tem onde guardar, não tem como transportar. E normalmente Ensino Médio seria 14, 13 anos, normalmente teriam essa altura, 1,50 m, 1,60 m, seria mais ou menos isso. [...] E a gente achou alguns projetos na internet e a gente usou como base algumas medidas, sabe... até, do projeto inicial que eu tinha montado eu peguei 2/3 da medida pra diminuir tudo, todos os obstáculos.

Fonte: Transcrição de captura de tela.

A fala de A5 no quadro 81 indica que o professor/pesquisador o orientou a diminuir as dimensões dos obstáculos da pista de skate para que eles se adequassem ao tamanho dos alunos que a utilizariam. Essa hipótese também incorpora informações da situação-problema que não constam nos dados coletados na inteiração (ALMEIDA; PALHARINI e TORTOLA, 2015). É formulada no relatório da atividade conforme apresentado no quadro 82.

QUADRO 82: TERCEIRA HIPÓTESE FORMULADA POR D3 PARA A ATIVIDADE 3.3

Projeto da Pista [...] As medidas foram baseadas em uma pessoa com cerca de 1,70. A maior rampa mede 1,50m de altura. Os obstáculos foram distribuídos numa área de 392m², tamanho médio escolhido a partir das quadras investigadas. As rampas foram posicionadas deixando áreas livres para a circulação entre um obstáculo e outro e para a execução de manobras fora das rampas.

Fonte: Relatório em documento de texto entregue por D3 da Atividade 3.3

Ao definirem as variáveis para o modelo de cálculo de custo de construção da pista de skate os alunos de D3 definem as quantidades dos materiais de construção parafuso, cantoneira e barra de ferro que seriam utilizados (Quadro 83).

QUADRO 83: QUARTA HIPÓTESE FORMULADA POR D3 PARA A ATIVIDADE 3.3 (?)

Cálculo de custos: Parafuso: quantidade aproximada de parafusos necessários em todo o projeto. Utilizaremos aproximadamente uma caixa de parafusos

Cantoneira: tamanho total de cantoneiras necessárias para a execução do projeto.
Utilizaremos duas cantoneiras de 6 metros

Barra de Ferro: tamanho das barras de ferro necessárias para a execução do projeto.
Utilizaremos uma barra de ferro de 6 metros

Fonte: Relatório em documento de texto entregue por D3 da Atividade 3.3

Os alunos de D3 não apresentam cálculos e nem dados para justificar essas quantidades, então, interpretamos como sendo valores hipotéticos. Alguns projetos de obstáculos para pistas de skate na modalidade street forneciam as quantidades de materiais necessários para sua construção, isso pode ter os direcionado para a determinação desses valores. Contudo, os alunos de D3 não apresentam argumentos a esse respeito.

Com exceção dessa possível quarta hipótese, as hipóteses formuladas pelos alunos de D3 apresentam argumentos sólidos, contextualizados com a situação modelada e com as vivências de A5 que é um praticante desse esporte.

Considerando esses aspectos que identificamos a partir das ações dos alunos de D3, inferimos que eles *seguem essa regra* do *fazer* Modelagem Matemática. Mas, assim como na ação de realizar simplificações, ainda necessitam apresentar e justificar suas escolhas ao comunicarem o desenvolvimento da atividade (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012, p.19).

- Selecionar Variáveis

A seleção de variáveis que os alunos de D3 realizaram nessa atividade consiste em definir as incógnitas, pois, os modelos construídos são equações.

As equações em relação ao cálculo da quantidade de materiais de construção necessários em cada obstáculo são apresentadas no quadro 84.

QUADRO 84: DEFINIÇÃO DE VARIÁVEIS NAS EQUAÇÕES DE CÁLCULO DA QUANTIDADE DE MATERIAIS DE CONSTRUÇÃO? – ATIVIDADE 3.3

Dimensões e Materiais dos obstáculos:

- Caixote

[...]
Dimensões: 1,2 metros x 2,8 metros x 0,35 metros
Materiais Necessários: madeirite compensado, cantoneira de ferro e parafusos.
Planificação: Geogebra
Cálculo da área da superfície: 2x(1,2x0,35) + 2x(2,8x0.35) + 2,8x1,2 = 6,16m^2

- Rampa 45

[...]
Dimensões: 1,5 metros x 0,8 metros x 2,12 metros x 3 metros
Materiais Necessários: madeirite compensado, sarrafos de madeira e parafusos.
Planificação: Geogebra
Área da superfície: 3x(1,5x0,8) + 1,5x3 + (2x(1,5x1,5))/2 + 3x2,12 = 16,71m^2

- Rampa 90

[...]
Dimensões: 1,5 metros x 0,8 metros x 3 metros x
Materiais Necessários: sarrafos de madeira, madeirite compensado e parafusos.
Desenho Planificação: Geogebra
Cálculo da Área de Superfície: 3x(1,5x0,8) + 1,5x3 + 2 $\times \{|(\pi \times 1,5^2) \div 4 - 1,5 \times 1,5|\}$ + $((\pi \times 1,5) \div 4) \times 3$
Usaremos $\pi = 3,14$para fazer as contas
Cálculo da Área de Superfície: 11,6325 + 0,9675 = 12,6m^2

- Savana

[...]
Dimensões rampas: 2,8 metros x 1,4 metros x 0,59 metros
Dimensões caixote maior: 2,8 metros x 2,8 metros 0,59 metros
Dimensões caixote menor: 2,8 metros x 0,8 metros x 0,59 metros
Materiais Necessários: madeirite compensado, sarrafos de madeira, parafusos e cantoneira de ferro
Área da superfície: 2,8x2,8 + 2x(0,8x0,59) + 2x(0,59x2,8) + 0,8x2,8 + (4x(1,4x0,59))/2 + 2x(2,8x1,52) = 24,492m^2

- Corrimão

[...]
Dimensões: 3 metros x 0,35 metros
Materiais Necessários: Barras de ferro

Fonte: Relatório em documento de texto entregue por D3 da Atividade 3.3

As informações do quadro 84 indicam que os alunos de D3 não selecionam variáveis para representar as incógnitas nessas equações, eles simplesmente utilizam as dimensões dos obstáculos em operações básicas de multiplicação e soma. Também não há especificação se a área da superfície calculada por meio das equações é referente a algum dos materiais de construção listados, dificultando a identificação de quais elementos do obstáculo estão sendo considerados nessas equações.

Para o modelo de custo de construção as variáveis são definidas pelos alunos de D3 (Quadro 85).

QUADRO 85: DEFINIÇÃO DE VARIÁVEIS PARA O MODELO DE CUSTO DE CONSTRUÇÃO – ATIVIDADE 3.3

Cálculo de custos:
Para o cálculo dos custos consideraremos as variáveis a seguir:

At madeirite: soma das áreas da superfície dos obstáculos que utilizaram madeirite.
[...]
Parafuso: quantidade aproximada de parafusos necessários em todo o projeto.
[...]
Cantoneira: tamanho total de cantoneiras necessárias para a execução do projeto.
[...]
Barra de Ferro: tamanho das barras de ferro necessárias para a execução do projeto.
[...]
Os custos parciais de cada material utilizado serão encontrados a partir do quadro de custos de materiais. O custo total será a soma dos custos parciais Ct.

At madeirite = 2x16,71 + 24,492 + 2x12,6= 83,112

Ct = At madeirite x m^2 + caixa de parafusos + 2 x cantoneira + barra de ferro
= 83,112x32,90 + 50 + 2x19,80 + 13,90

Fonte: Relatório em documento de texto entregue por D3 da Atividade 3.3

Do exposto no quadro 85, algumas inadequações relacionados a definição dessas variáveis podem ser apontadas: 1- os alunos de D3 utilizam termos por extenso para definir as variáveis, o que não é matematicamente adequado quando os modelos são equações; 2- na equação "At madeirite" os alunos de D3 não especificam a área de superfície de qual obstáculo cada valor utilizado representa, e se compararmos com os valores calculados no quadro 84 verificamos que a área da superfície do obstáculo caixote não está abarcada; 3- a variável m^2 não foi definida e o valor 2, que está sendo multiplicado pela variável cantoneira, também não é especificado; 4- as variáveis parafuso, cantoneira e barra de ferro foram definidas como representando as quantidades desses materiais, mas, quando as incógnitas são substituídas na equação, os valores utilizados são referentes aos preços de cada material, demonstrando uma incoerência entre o que foi definido nas variáveis e o que foi utilizado na equação.

Considerando os pontos levantados a partir das ações dos alunos de D3 na seleção das variáveis dessa atividade, inferimos que eles não *seguem essa regra* do *fazer* Modelagem Matemática.

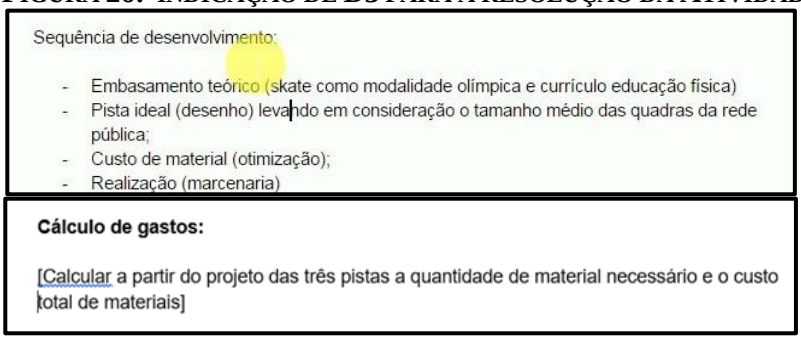
- Na fase de Resolução
    - Construir o Modelo

O problema formulado pela dupla é relativamente simples, de modo que operações básicas são suficientes para determinar o custo de construção da pista de skate.

Determinar a quantidade necessária de cada material de construção é, nesse caso, a ação que requer mais procedimentos dos alunos.

A figura 26 indica que esse encaminhamento de resolução estava indicado desde o começo no planejamento de desenvolvimento da atividade construído pela dupla.

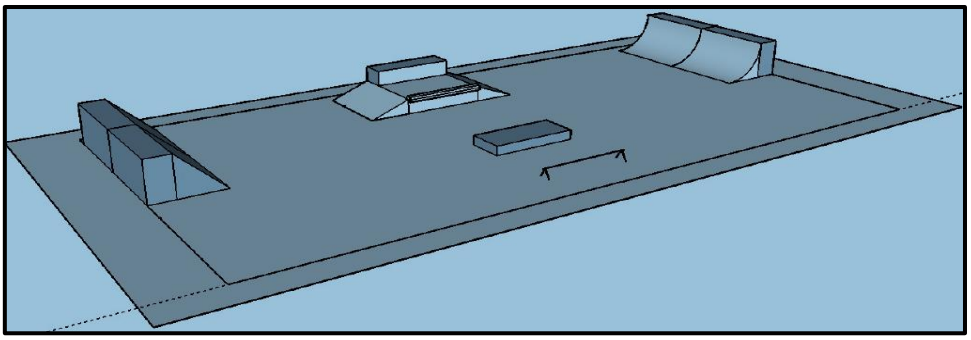
FIGURA 26: INDICAÇÃO DE D3 PARA A RESOLUÇÃO DA ATIVIDADE 3.3



Fonte: Captura de tela do computador utilizado por A5.

O primeiro passo dessa resolução foi a construção do projeto da pista de skate na modalidade street. A5 trouxe na Aula 18 um projeto inicial de pista[49], mas, percebeu que ele não estava adequado, pois, haviam muitos obstáculos e suas dimensões eram muito grandes se considerar que esses obstáculos seriam carregados por alunos do Ensino Médio. Nesse sentido, A5 adaptou o projeto as hipóteses até chegar na forma que considerou mais adequada (Figura 27).

FIGURA 27: PROJETO DA PISTA DE SKATE MODALIDADE STREET CONSTRUÍDO POR A5 – ATIVIDADE 3.3



Fonte: Relatório em documento de texto entregue por D3 da Atividade 3.3

O *uso* dos recursos das tecnologias digitais como *simulação*, *controle* e *visualização* foi fundamental para a construção do modelo da pista de skate. Como *simulação*, pois, o software permitia que o aluno montasse diferentes possibilidades de configuração da pista; como *controle*, pois, o software possibilitava que um mesmo

[49] Não possuímos as imagens desse primeiro projeto, pois, nessa aula houve um problema com a captura de tela do computador de A5, de modo que temos apenas a gravação de voz.

obstáculo fosse adaptado conforme as adequações necessárias; e, como *visualização* ao permitir que o aluno pudesse observar a construção do projeto de diversos ângulos e assim verificar sua adequabilidade. As ações de A5 indicam que *segue essa regra* do *fazer* Modelagem Matemática na construção do modelo do projeto da pista de skate, considerando as simplificações realizadas e hipóteses formuladas.

A partir do projeto os alunos de D3 calcularam a área de superfície de cada um dos obstáculos que compunham a pista de skate (Quadro 86).

QUADRO 86: MODELOS DE CÁLCULO DE MATERIAIS NECESSÁRIOS PARA A CONSTRUÇÃO DOS OBSTÁCULOS DA PISTA DE SKATE – ATIVIDADE 3.3

Dimensões e Materiais dos obstáculos:

- Caixote

[...]
Dimensões: 1,2 metros x 2,8 metros x 0,35 metros
Materiais Necessários: madeirite compensado, cantoneira de ferro e parafusos.
Planificação: Geogebra
Cálculo da área da superfície: 2x(1,2x0,35) + 2x(2,8x0.35) + 2,8x1,2 = 6,16m^2

- Rampa 45

[...]
Dimensões: 1,5 metros x 0,8 metros x 2,12 metros x 3 metros
Materiais Necessários: madeirite compensado, sarrafos de madeira e parafusos.
Planificação: Geogebra
Área da superfície: 3x(1,5x0,8) + 1,5x3 + (2x(1,5x1,5))/2 + 3x2,12 = 16,71m^2

- Rampa 90

[...]
Dimensões: 1,5 metros x 0,8 metros x 3 metros x
Materiais Necessários: sarrafos de madeira, madeirite compensado e parafusos.
Desenho Planificação: Geogebra
Cálculo da Área de Superfície: 3x(1,5x0,8) + 1,5x3 + 2 $\times \{|(\pi \times 1,5^2) \div 4 - 1,5 \times 1,5|\}$ + $((\pi \times 1,5) \div 4) \times 3$
Usaremos $\pi = 3,14$para fazer as contas
Cálculo da Área de Superfície: 11,6325 + 0,9675 = 12,6m^2

- Savana

[...]
Dimensões rampas: 2,8 metros x 1,4 metros x 0,59 metros
Dimensões caixote maior: 2,8 metros x 2,8 metros 0,59 metros
Dimensões caixote menor: 2,8 metros x 0,8 metros x 0,59 metros
Materiais Necessários: madeirite compensado, sarrafos de madeira, parafusos e cantoneira de ferro
Área da superfície: 2,8x2,8 + 2x(0,8x0,59) + 2x(0,59x2,8) + 0,8x2,8 + (4x(1,4x0,59))/2 + 2x(2,8x1,52) = 24,492m^2

- Corrimão

[...]
Dimensões: 3 metros x 0,35 metros
Materiais Necessários: Barras de ferro

Fonte: Relatório em documento de texto entregue por D3 da Atividade 3.3.

As áreas de superfície calculadas no quadro 86 determinam a quantidade de madeirite compensado para a construção dos obstáculos, mas, a quantidade dos demais materiais de construção não é calculada. Outro aspecto indicado no quadro 86 é que os modelos são apresentados com os valores numéricos das incógnitas.

Como apontam Souza e Barbosa (2014) a matemática utilizada na fase de resolução de uma atividade de modelagem normatiza a forma como a situação é tratada e as *regras* dessa matemática devem direcionar o desenvolvimento da atividade. Nesse sentido, as ações dos alunos de D3 demonstram falta de rigor matemático na determinação das equações do quadro 86 – cabe ressaltar que a última parte da resolução realizada em sala de aula pelos alunos de D3 foi o projeto da pista, as demais partes foram apresentadas somente no relatório final da atividade.

A quantidade dos outros materiais é apresentada quando os alunos de D3 definem as variáveis do modelo de custo de construção (Quadro 87). Novamente o material sarrafo de madeira não é considerado.

QUADRO 87: QUANTIDADE DOS DEMAIS MATERIAIS NECESSÁRIOS PARA A CONSTRUÇÃO DOS OBSTÁCULOS DA PISTA DE SKATE – ATIVIDADE 3.3

Cálculo de custos: [...] Utilizaremos aproximadamente uma caixa de parafusos [...] Utilizaremos duas cantoneiras de 6 metros [...] Utilizaremos uma barra de ferro de 6 metros

Fonte: Relatório em documento de texto entregue por D3 da Atividade 3.3.

Os alunos de D3 não se utilizaram de nenhum recurso das tecnologias digitais como *calculação*, para obter as áreas de superfície dos obstáculos e as quantidades de materiais de construção.

Para finalizar os alunos de D3 constroem o modelo do custo total de construção em que são considerados os custos de cada material e suas quantidades (Quadro 88).

QUADRO 88: MODELO DO CUSTO TOTAL DE CONSTRUÇÃO – ATIVIDADE 3.3

Cálculo de custos: [...] At madeirite: soma das áreas da superfície dos obstáculos que utilizaram madeirite. [...] **At madeirite** = 2x16,71 + 24,492 + 2x12,6= 83,112 **Ct** = At madeirite x m^2 + caixa de parafusos + 2 x cantoneiras + barra de ferro

Fonte: Relatório em documento de texto entregue por D3 da Atividade 3.3.

Do quadro 88 identificamos que há um erro no cálculo da área total de madeirite, pois, a quantidade de madeirite compensado do obstáculo caixote não foi considerada.

O modelo do custo de construção da pista de skate, como discutimos na seleção de variáveis, está inadequado visto as variáveis definidas não correspondem aos elementos que o compõe. Assim como os modelos utilizados para calcular as áreas de superfície são inadequados e os cálculos apresentam erros. Contudo, os alunos de D3 foram capazes de determinar uma resposta para o problema a partir desse modelo.

Nesse sentido, inferimos que os alunos de D3 *seguem essa regra* do *fazer* Modelagem Matemática, mas, não *seguem as regras* da matemática envolvida na construção do modelo.

- Apresentar uma solução para o Problema

Os alunos de D3 não apresentam uma resposta para o problema, eles apenas calculam o custo de construção da pista de skate a partir do modelo (Quadro 89).

QUADRO 89: CÁLCULO DA RESPOSTA PARA O PROBLEMA DA ATIVIDADE 3.3

Cálculo de custos:
[...]
Ct = At madeirite x m^2 + caixa de parafusos + 2 x cantoneiras + barra de ferro
= 83,112x32,90 + 50 + 2x19,80 + 13,90
= R$ 2837,88

Fonte: Relatório em documento de texto entregue por D3 da Atividade 3.3.

Esse cálculo é uma solução para o problema, que questionava sobre o custo de produção de uma pista de skate, mas, entendemos que faltou apresentar uma resposta em que os alunos de D3 dissertassem sobre as condições e contexto para o qual esse valor foi calculado.

Portanto, ao considerarmos as ações dos alunos de D3 apresentadas no relatório da atividade inferimos que eles *seguem* o aspecto *dessa regra* relacionado a calcular a solução numérica da resposta, mas, os aspectos relacionados a apresentar uma solução contextualizada não são *seguidos*.

- Na fase de Interpretação e Validação

A dupla apresenta no relatório da atividade algo que eles chamam de "validação das variáveis" (Quadro 90)

QUADRO 90: "VALIDAÇÃO DAS VARIÁVEIS" – ATIVIDADE 3.3

Validação das variáveis

Para fazermos a validação da variável iremos comparar o Ct com o valor do salário mínimo no estado do paraná. Utilizaremos K como uma constante multiplicadora para encontramos quantos salários mínimos são necessários para a construção de uma pista de skate.

TABELA 1

Classe	Valor em R$
Trabalhadores agropecuários, florestais e de pesca	R$ 1.223,20
Trabalhadores de serviços administrativos e serviços; vendedores do comércio em lojas e mercados e trabalhadores de reparação e manutenção	R$ 1.269,40
Trabalhadores da produção de bens e serviços industriais	R$ 1.315,60
Técnicos de nível médio	R$ 1.414,60

TABELA 2

	Ct	Salário Mínimo Técnicos de nível médio	Salário Mínimo Técnicos de nível médio x K = Ct
Valores	R$ 2837,88	R$ 1.414,60	K ≈ 2

Portanto descobrimos que precisamos de aproximadamente 2 salários mínimos de técnicos de nível médio para construirmos uma pista de skate.

Fonte: Relatório em documento de texto entregue por D3 da Atividade 3.3.

Esse desenvolvimento do quadro 90 não se caracteriza como uma validação, pois, não investiga os resultados matemáticos, nem a coerência desses resultados com a situação modelada (ALMEIDA, SILVA e VERTUAN, 2012).

Por se tratar de uma investigação da relação do custo de construção da pista de skate com o salário mínimo no estado do Paraná, poderíamos considerar que se caracteriza como uma interpretação dos resultados, no entanto, a intenção que os levou a determinar essa relação não foi apresentada pela dupla.

Nesse sentido, inferimos que os alunos de D3 não *seguem essa regra* do *fazer* Modelagem Matemática.

QUADRO 91: RESUMO DAS AÇÕES DE D3 RELACIONADAS AO *SEGUIR REGRAS* DO *FAZER* MODELAGEM MATEMÁTICA NA ATIVIDADE 3.3

***Regra* do *fazer* Modelagem Matemática**	**Descrição da ação relacionada a *regra***	**Resultados**
Identificar uma situação-inicial problemática	Os temas propostos pelos alunos de D3 para a identificação de uma situação-inicial problemática eram relacionadas à sua cotidianidade e despertavam seu interesse. Ainda, a problemática identificada, além de abarcar esses requisitos, direciona a investigação à escola pública, ambiente de interesse para professores em formação como eles.	Seguem a regra
Coletar Dados	A6 – O direcionamento da coleta de dados é coerente com o problema formulado e com o modelo de custo de produção pretendido, mas, a falta de informações sobre os preços dos materiais de construção pode indicar certa aleatoriedade.	Segue parcialmente a regra
	A5 – O direcionamento da coleta de dados é coerente com o problema formulado e com o modelo de custo de produção pretendido, mas, a falta de informações sobre os preços dos materiais de construção pode indicar certa aleatoriedade. As dimensões dos obstáculos Savana e Corrimão foram obtidas diretamente do projeto de pista construído no software SketchUp 2017.	Segue parcialmente a regra
	A5 – As demais ações realizadas por A5 na coleta de dados não foram autônomas, o professor/pesquisador teve que intervir ostensivamente para direcioná-las.	Não segue a regra
Formular o Problema	O problema formulado questiona uma especificidade da situação da qual lhes falta compreensão, os custos de construção de uma pista de skate, considerando alguns aspectos já conhecidos, a modalidade de skate e o local em que a pista será construída.	Seguem a regra
Realizar Simplificações	Realizam simplificações, a primeira relacionada ao problema e as demais relacionadas às informações obtidas na coleta de dados. Não evidenciam as simplificações e suas justificativas ao relatarem o desenvolvimento da atividade.	Seguem a regra
Formular Hipóteses	As hipóteses formuladas apresentam argumentos sólidos, contextualizados com a situação modelada e com as vivências de A5 que é um praticante desse esporte. Mas, necessitam apresentar e justificar suas escolhas ao comunicarem o desenvolvimento da atividade no relatório.	Seguem a regra
Selecionar Variáveis	Não selecionam variáveis para representar as incógnitas nas equações, de cálculo da área da superfície, nem especificam os elementos dos obstáculos envolvidos nesses cálculos.	Não seguem a regra
	Utilizam termos por extenso para definir as variáveis, o que não é matematicamente adequado quando os modelos são equações.	
	Na equação "At madeirite" não especificam a área de superfície de qual obstáculo cada valor utilizado representa.	
	Na equação que representa o custo total a variável "m^2" não foi definida, e o valor 2, que está sendo multiplicado pela variável cantoneira, não é especificado.	
	As variáveis "parafuso", "cantoneira" e "barra de ferro" são definidas como a quantidade de cada um desses materiais, mas, quando as incógnitas são substituídas na equação, os valores utilizados são referentes aos preços de cada material, demonstrando uma incoerência entre o que foi definido nas variáveis e o que foi utilizado na equação.	

Construir o Modelo	A5 - constrói o modelo do projeto da pista de skate, adequando as dimensões da área, as dimensões, quantidade e distribuição dos obstáculos considerando as simplificações realizadas e hipóteses formuladas.	Segue a regra
	O modelo do custo de construção da pista de skate está inadequado, visto as variáveis definidas não correspondem aos elementos que o compõe. Os modelos utilizados para calcular as áreas de superfície são inadequados e os cálculos apresentam erros. A partir desse modelo determinaram uma resposta para o problema.	Seguem parcialmente a regra
Apresentar uma solução para o problema	Calculam uma resposta numérica para o problema.	Seguem a regra
	Não apresentam uma resposta dissertativa sobre os argumentos, condições e contexto para o qual a reposta numérica foi calculada.	Não seguem a regra
Analisar a resposta em relação à Matemática	Não apresentam investigação dos resultados matemáticos, nem da coerência desses resultados com a situação modelada.	Não Seguem a regra
Analisar a resposta em relação ao Problema		

Fonte: O autor

7. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Na análise específica realizada no capítulo 6 descrevemos e interpretamos as ações dos alunos de D1 e D3, ao longo do desenvolvimento das atividades do 3° momento de familiarização com a Modelagem Matemática (ALMEIDA e DIAS, 2004), no que se refere ao *seguir regras* no *fazer* Modelagem Matemática.

Considerando, então, as inferências realizadas nesse movimento analítico, nossa primeira discussão da análise global que apresentamos neste capítulo é no sentido de relacionar o *seguir regras* identificado na análise específica das atividades do 3° momento com os *treinamentos* realizados nas atividades do 1° e 2° momentos de familiarização dos alunos com atividades de modelagem matemática. Como discutimos, o critério de correção para a aplicabilidade de uma regra está relacionado ao *treinamento* recebido.

Para isso, apresentamos nos quadros 92 e 93 as ações que indicam o *seguir regras* das duplas D1 e D3, respectivamente, e as ações de *treinamento* realizadas em cada uma dessas *regras* no *fazer* Modelagem Matemática.

QUADRO 92: O *TREINAMENTO* REALIZADO PARA AS AÇÕES DO *SEGUIR REGRAS* DE D1

***Regras* do *fazer* Modelagem Matemática**	**Ação de treinamento realizada**	**Descrição da ação relacionada a *regra***
Identificar uma situação-inicial problemática	Atividade 1.1: o professor/pesquisador explica sua proximidade para com o tema da atividade	O tema escolhido está relacionado aos seus interesses pessoais e tem influência na cotidianidade: A3 tinha interesse em instalar o sistema de energia solar em sua casa.
	Atividade 1.2: o professor/pesquisador explica seu envolvimento com o tema, evidenciando pontos que o levaram a identificá-lo como uma problemática	
	Atividade 2.1 e 2.2: o professor/pesquisador aproxima a situação da cotidianidade dos alunos	
Coletar Dados	Atividade 1.1: o professor/pesquisador disponibiliza o acesso as fontes dos dados	Foram capazes de coletar informações gerais sobre a situação-inicial e também dados específicos direcionados ao aspecto delimitado que seriam necessários para investigá-lo
	Atividade 1.2: o professor/pesquisador explica as informações contidas nos boletins e indica quais dessas informações utilizou na coleta de dados	
	Atividade 2.1: o professor/pesquisador proporciona aos alunos a experiência de selecionar as informações das fontes	
	Atividade 2.2: os alunos selecionam os dados necessários, da grande quantidade e diversidade de informações fornecidas pelo professor/pesquisador	
Formular o Problema	Atividade 1.1: o professor/pesquisador os conduz pelo "mesmo caminho" que percorreu na formulação do problema	Durante todo o processo de formulação do problema estavam considerando os aspectos da situação-inicial problemática. Também consideraram aspectos do contexto de desenvolvimento da atividade, como as
	Atividade 1.2: o professor/pesquisador evidencia que a formulação do problema direciona a investigação da atividade de modelagem matemática para uma especificidade da situação	

	Atividade 2.1: o professor/pesquisador evidencia que o problema formulado deve ser plausível para o contexto em que será resolvido, considerando as ferramentas e tempo disponível para a desenvolvimento da atividade	ferramentas e tempo necessários para solucionar o problema.
	Atividade 2.2: o professor/pesquisador explica que o problema deve inferir sobre algum aspecto que interesse aos alunos e que se aproxime da cotidianidade deles; também que deve considerar o contexto em que o problema será investigado e as demais fases do desenvolvimento da atividade	
Realizar Simplificações	Atividade 1.1: o professor/pesquisador explica que desconsiderar o número de likes e unlikes, considerando apenas o número de visualizações e avaliações é realizar uma simplificação dos dados	Não evidenciam no relatório da atividade as simplificações como uma fase da atividade, mas, realizam simplificações em relação às informações obtidas na coleta de dados (primeira simplificação e a segunda média da segunda simplificação) e em relação ao problema formulado (primeira média da segunda simplificação).
	Atividade 1.2: o professor/pesquisador explica as informações contidas nos boletins e indica quais dessas informações utilizou na coleta de dados	
	Atividade 2.1: O professor/pesquisador mostra que podem ser realizadas simplificações também na formulação do problema	
	Atividade 2.1: O professor/pesquisador explica que desconsiderar algumas das informações da situação é realizar uma simplificação	
	Atividade 2.2: Os alunos vivenciam a realização de uma simplificação dos dados em um contexto diferente	
Formular Hipóteses	Atividade 1.1: o professor/pesquisador conduz discussões sobre a necessidade de criar uma categorização a partir do agrupamento dos dados	Os aspectos essenciais das hipóteses foram propostos, as hipóteses dessa atividade foram formuladas com muita coerência, considerando vários aspectos da situação-inicial, pois, incorporam informações da situação-problema que não constam nos dados coletados e que para eles são relevantes (hipóteses 1, 3 e 4), e indicam a estratégia de resolução e a "matemática" utilizada para a construção do modelo (hipótese 2).
	Atividade 1.1: o professor/pesquisador explica que o número de intervalos era muito grande e que as medidas de tendência central não se localizavam no intervalo com maior frequência	
	Atividade 1.2: O professor/pesquisador explica que incorporar informações da situação que não estão disponíveis nos dados coletados é formular uma hipótese	
	Atividade 1.2: o professor/pesquisador evidencia que uma hipótese deve ser fundamentada e levar em consideração o contexto da atividade	
	Atividade 2.1: O professor/pesquisador orienta os alunos a direcionarem a solução para alguns elementos da situação e explica que essa ação é caracterizada como formular uma hipótese	
	Atividade 2.2: O professor/pesquisador indica que as hipóteses devem ser evidenciadas no relatório da atividade	
Selecionar Variáveis	Atividade 1.1: o professor/pesquisador explica que a variável deve ser definida considerando a característica do que ela representa	As variáveis selecionadas são coerentes com o problema, abarcando todos os elementos necessários para a construção do modelo que foram determinados nas simplificações realizadas e hipóteses formuladas para a atividade.
	Atividade 1.2: o professor/pesquisador explica que a natureza das variáveis deve ser considerada e que é necessário sempre definir as variáveis antes de construir o modelo	
	Atividade 2.1: O professor/pesquisador evidencia a necessidade de definir as variáveis para construir o modelo	
	Atividade 2.2: Os alunos vivenciam a seleção de variáveis em um contexto diferente	
Construir o Modelo	Atividade 1.1: o professor/pesquisador ensina a utilizar as ferramentas do software Excel para construir o Histograma	Os aspectos que envolvem a construção do modelo são considerados: as características da situação-inicial, utilizam os dados coletados e as simplificações realizadas, focam no problema formulado, respeitam as hipóteses formuladas, as variáveis
	Atividade 1.1: o professor/pesquisador conduz a discussão de que o segundo intervalo do Histograma apresentava a maior frequência e as medidas de tendência central estavam nele localizadas	

	Atividade 1.2: O professor/pesquisador orienta os alunos que na construção do modelo não são apenas os aspectos matemáticos que devem ser considerados, é necessário que seja coerente com a situação	selecionadas e as regras da Matemática envolvida.
	Atividade 2.1: O professor/pesquisador ensina a utilizar o software GeoGebra para determinar e calcular os elementos da matemática envolvida	
	Atividade 2.2: Os alunos vivenciam a construção do modelo em um contexto diferente	
Apresentar uma solução para o problema	Atividade 1.1: o professor/pesquisador conduz a discussão de que o segundo intervalo do Histograma apresentava a maior frequência e as medidas de tendência central estavam nele localizadas	A resposta apresentada é matematicamente rigorosa com o modelo, no sentido em que considera as regras da matemática envolvida na resolução. A "tradução" da resposta matemática para a situação também é realizada por eles de forma adequada, quando transformam os resultados obtidos em número de meses para datas, considerando a quarta hipótese da atividade.
	Atividade 1.2, 2.1 e 2.2: Os alunos vivenciam experiência de calcular a resposta e apresentar uma solução para o problema em um contexto diferente	
Analisar a resposta em relação à Matemática	Atividade 1.1: o professor/pesquisador orienta os alunos a refletirem sobre o resultado da modelagem para a situação investigada	Realização um processo avaliativo dos resultados matemáticos obtidos nessa atividade considerando os processos matemáticos.
	Atividade 1.2: a professora substituta conduz a apresentação de uma resolução alternativa que mostra a matemática que o software utiliza para determinar o ajuste de curva	
	Atividade 2.1: O professor/pesquisador indica que o modelo é adequado para a situação, pois, se caracteriza como um modelo estático, logo, precisa se adequar apenas naquele intervalo de pontos.	
Analisar a resposta em relação ao Problema	Atividade 1.1: o professor/pesquisador orienta os alunos a refletirem sobre o resultado da modelagem para a situação investigada	Consideraram vários aspectos e propõem reflexões interessantes sobre o uso da energia solar e seus impactos sociais e ecológicos, e sobre o tempo necessário para que seus custos de instalação fossem recuperados.
	Atividade 2.1: o professor/pesquisador indica a adequabilidade do valor calculado pelo modelo ao compará-lo com a situação	
	Atividade 2.2: o professor/pesquisador indica que aprofundem a interpretação apresentada no relatório, destacando os aspectos que foram discutidos durante a comunicação da atividade para a turma	
	Atividade 2.2: o professor/pesquisador indica possibilidades de reflexões sobre os resultados obtidos, como os impactos sobre a situação e sobre a maneira que foi produzido	

Fonte: O autor.

QUADRO 93: O *TREINAMENTO* REALIZADO PARA AS AÇÕES DO *SEGUIR REGRAS* DE D3

***Regra* do *fazer* Modelagem Matemática**	**Ação de treinamento realizada**	**Descrição da ação relacionada a *regra***
Identificar uma situação-inicial problemática	Atividade 1.1: o professor/pesquisador explica sua proximidade para com o tema da atividade	Os temas propostos pelos alunos de D3 para a identificação de uma situação-inicial problemática eram relacionadas à sua cotidianidade e despertavam seu interesse. Ainda, a problemática identificada, além de abarcar esses requisitos, direciona a investigação à escola pública, ambiente de interesse para professores em formação como eles.
	Atividade 1.2: o professor/pesquisador explica seu envolvimento com o tema, evidenciando pontos que o levaram a identificá-lo como uma problemática	
	Atividade 2.1 e 2.2: o professor/pesquisador aproxima a situação da cotidianidade dos alunos	
Formular o Problema	Atividade 1.1: o professor/pesquisador os conduz pelo "mesmo caminho" que percorreu na formulação do problema	O problema formulado questiona uma especificidade da situação da qual lhes falta compreensão, os custos de

	Atividade 1.2: o professor/pesquisador evidencia que a formulação do problema direciona a investigação da atividade de modelagem matemática para uma especificidade da situação	construção de uma pista de skate, considerando alguns aspectos já conhecidos, a modalidade de skate e o local em que a pista será construída.
	Atividade 2.1: o professor/pesquisador evidencia que o problema formulado deve ser plausível para o contexto em que será resolvido, considerando as ferramentas e tempo disponível para a desenvolvimento da atividade	
	Atividade 2.2: o professor/pesquisador explica que o problema deve inferir sobre algum aspecto que interesse aos alunos e que se aproxime da cotidianidade deles; também que deve considerar o contexto em que o problema será investigado e as demais fases do desenvolvimento da atividade	
	Atividade 2.2: o professor/pesquisador indica o problema que deve ser formulado pela dupla	
Realizar Simplificações	Atividade 1.1: o professor/pesquisador explica que desconsiderar o número de likes e unlikes, considerando apenas o número de visualizações e avaliações é realizar uma simplificação dos dados	Realizam simplificações, a primeira relacionada ao problema e as demais relacionadas às informações obtidas na coleta de dados. Não evidenciam as simplificações e suas justificativas ao relatarem o desenvolvimento da atividade.
	Atividade 1.2: o professor/pesquisador explica as informações contidas nos boletins e indica quais dessas informações utilizou na coleta de dados	
	Atividade 2.1: O professor/pesquisador mostra que podem ser realizadas simplificações também na formulação do problema	
	Atividade 2.1: O professor/pesquisador explica que desconsiderar algumas das informações da situação é realizar uma simplificação	
	Atividade 2.2: Os alunos vivenciam a realização de uma simplificação dos dados em um contexto diferente	
Formular Hipóteses	Atividade 1.1: o professor/pesquisador conduz discussões sobre a necessidade de criar uma categorização a partir do agrupamento dos dados	As hipóteses formuladas apresentam argumentos sólidos, contextualizados com a situação modelada e com as vivências de A5 que é um praticante desse esporte. Mas, necessitam apresentar e justificar suas escolhas ao comunicarem o desenvolvimento da atividade no relatório.
	Atividade 1.1: o professor/pesquisador explica que o número de intervalos era muito grande e que as medidas de tendência central não se localizavam no intervalo com maior frequência	
	Atividade 1.2: O professor/pesquisador explica que incorporar informações da situação que não estão disponíveis nos dados coletados é formular uma hipótese	
	Atividade 1.2: o professor/pesquisador evidencia que uma hipótese deve ser fundamentada e levar em consideração o contexto da atividade	
	Atividade 2.1: O professor/pesquisador orienta os alunos a direcionarem a solução para alguns elementos da situação e explica que essa ação é caracterizada como formular uma hipótese	
	Atividade 2.2: o professor/pesquisador indica que os dados organizados como pontos no plano cartesiano apresentavam um comportamento cíclico	
Construir o Modelo	Atividade 1.1: o professor/pesquisador ensina a utilizar as ferramentas do software Excel para construir o Histograma	A5 - constrói o modelo do projeto da pista de skate, adequando-o as dimensões da área, e as dimensões, quantidade e distribuição dos obstáculos considerando as simplificações realizadas e hipóteses formuladas.
	Atividade 1.1: o professor/pesquisador conduz a discussão de que o segundo intervalo do Histograma apresentava a maior frequência e as medidas de tendência central estavam nele localizadas	
	Atividade 1.2: O professor/pesquisador orienta os alunos que na construção do modelo não são apenas os aspectos matemáticos que devem ser considerados, é necessário que seja coerente com a situação	

	Atividade 2.1: O professor/pesquisador ensina a utilizar o software GeoGebra para determinar e calcular os elementos da matemática envolvida	
	Atividade 2.2: o professor/pesquisador indica que os dados organizados como pontos no plano cartesiano apresentavam um comportamento cíclico	
	Atividade 2.2: o professor/pesquisador ensina utilizar a ferramenta controle deslizante do software GeoGebra para construir o modelo algébrico	

Fonte: O autor.

Ao compararmos as ações de D1 e D3 que indicam o *seguir regras* com os *treinamentos* realizados, percebemos que aspectos da *regra* identificados nas ações autônomas dos alunos são contemplados em um ou mais *treinamentos* nas atividades da fase de *treinamento*.

Na identificação de uma situação-inicial problemática, por exemplo, as duplas escolhem temas que lhes são de interesse e que, em maior ou menor grau, estavam relacionados as suas cotidianidades – D1 investigou a instalação do sistema de captação de energia solar para a casa de A3 e D3 investigou o custo de construção de uma pista de skate, esporte praticado por A5. Os aspectos dessa *regra*, relacionados ao interesse pelo tema da situação problemática e desse tema ser da cotidianidade do modelador, foram contemplados em todas as atividades da fase de *treinamento*. O interesse para com o tema nas Atividades 1.1 e 1.2, foi expresso pelo professor/pesquisador ao propor o tema dessas atividades e a localização do tema à cotidianidade do modelador nas Atividades 2.1 e 2.2, quando o professor/pesquisador localiza na cidade de Curitiba as investigações dos temas dessas atividades.

Também na formulação de hipóteses, as duplas apresentam suposições bem fundamentadas – *treinamento* realizado na Atividade 1.2 –, que adicionam informações da situação que não estavam presentes nos dados coletados – *treinamento* realizado na Atividade 1.2 – e que encaminham a solução, tanto em suas estratégias – *treinamento* realizado nas Atividades 1.1 e 2.1 –, quanto na matemática envolvida – *treinamento* realizado nas Atividades 1.1 e 2.2.

Analogamente essa comparação pode ser realizada para as outras ações no *fazer* Modelagem Matemática realizadas no desenvolvimento das atividades do 3° momento de familiarização dos alunos com atividades de modelagem matemática, e se verificaria que agem de “tal e tal maneira” ao *seguir a regra*, pois foram *treinados* para agir de “tal e tal maneira” nas atividades da fase de *treinamento*. Assim, concluímos que os aspectos das

regras contemplados nas ações dos alunos que indicam o *seguir a regra*, foram também contemplados no desenvolvimento das atividades da fase de *treinamento*.

Nesse sentido, nossa próxima reflexão na análise global é inferir sobre os desdobramentos desse *seguir regras* identificado nas ações de D1 e D3.

Participar de um jogo de linguagem implica em aceitar as *regras* desse jogo (JESUS, 2002). Seguir as *regras* desse jogo direciona o modo de ver mundo (MORENO, 2003) de quem joga o jogo, em nosso caso, direciona a forma como os alunos enxergam o *fazer* Modelagem Matemática, especificamente como proposto em Almeida, Silva e Vertuan (2012).

Ter domínio do *uso* das *regras*, *seguir as regras*, é dominar a técnica prescrita por essas *regras* (SILVEIRA; SILVA, 2016). Dominar uma técnica está intimamente ligado ao compreender um *jogo de linguagem* (WITTGENSTEIN, 2000; GOTTSCHALK, 2008; SILVA e SILVEIRA, 2014, 2016). Nesse sentido, *seguir as regras* de um específico *jogo de linguagem* é compreender esse jogo.

Disso, *seguir as regras* do *fazer* Modelagem Matemática é, em nosso caso, compreender o *fazer* Modelagem Matemática para o *jogo de linguagem* específico proposto em Almeida, Silva e Vertuan (2012).

Nesse sentido, quando inferimos que as ações dos alunos de D1 indicam que *seguem as regras* no *fazer* Modelagem Matemática, e as ações de D3 indicam que *seguem* apenas algumas dessas *regras*, podemos concluir que, para as atividades analisadas, os alunos de D1 compreendem a forma de ver o *fazer* Modelagem Matemática proposta, enquanto os alunos de D3 não a compreendem em todos os seus aspectos.

Precisamos refletir sobre essa compreensão, principalmente no que discute Wittgenstein entre o §150 e o §200 do Investigações Filosóficas (WITTGENSTEIN, 2000). Numa primeira reflexão observemos a seguinte fala de Wittgenstein:

> "É como se pudéssemos aprender todo emprego da palavra de golpe." – Como *o que*, por exemplo? – *Não* podemos – em certo sentido – apreendê-lo de golpe? E em *que* sentido não o podemos? – É como se pudéssemos, num sentido bem mais direto, 'apreendê-lo de golpe' (WITTGENSTEIN, 2000, IF, §191).

Neste parágrafo Wittgenstein discute a impossibilidade de aprender uma palavra instantaneamente – e aqui podemos utilizar aprender assemelhado ao compreender e palavra assemelhado à *regra*. Nesse sentido, quando concluímos que os alunos

compreendem, ou compreendem aspectos do *fazer* Modelagem Matemática, não estamos concluindo que foi ali, naquele instante, "como num golpe", que os alunos das duplas o fizeram. A nossa inferência remete às ações de *seguir regras* no *jogo de linguagem* específico de desenvolvimento das atividades do 3° momento. Para esse contexto delimitado inferimos que sua maneira de agir, frente às *regras* do *fazer* Modelagem Matemática, indica que compreendem *esse fazer* específico.

Dessa inferência estaríamos tentados a afirmar: 1- se não foi ali que os alunos das duplas compreenderam as *regras* e o *jogo de linguagem* que elas determinam, então, compreenderam em algum momento anterior; e, 2- se digo que eles compreendem, ou compreendem aspectos, do *fazer* Modelagem Matemática, então, em futuras práticas essa compreensão estará presente. Contudo, do ponto de vista wittgensteiniano, nenhuma dessas afirmativas pode ser considerada.

Referente à primeira afirmativa, apoiamo-nos nos argumentos de Wittgenstein sobre o "ler" para desconsiderá-la. Ao discutir sobre como determinar quando alguém lê ou não, o autor utiliza o seguinte exemplo:

> pessoas, ou outros seres, seriam utilizados por nós como máquinas de leitura. São treinados para essa finalidade. O treinador diz que alguns já podem ler, e que outros ainda não. Tome o caso de um aluno que até agora não toma parte no treinamento: se lhe mostrarmos uma palavra escrita, ele poderá às vezes proferir sons quaisquer, e aqui e ali acontecerá então 'por acaso' de serem mais ou menos os certos. Um terceiro ouve esse aluno em tal caso e diz: "Ele lê". Mas o professor diz: "Não, ele não lê; foi apenas um acaso". – Mas suponhamos que esse aluno, ao lhe serem mostradas mais palavras, reaja a elas sempre corretamente. Após algum tempo, o professor diz: "Agora ele sabe ler!" – Mas o que ocorreu com aquela primeira palavra? O professor deve dizer: "Enganei-me, ele a leu *realmente*" – Quando começou a ler? Qual é a primeira palavra que ele *leu*? Esta questão não tem sentido aqui (WITTGENSTEIN, 2000, IF, §157).

Seguindo essa argumentação, refutamos essa questão do 'quando' algo começou, qual o momento, o instante em que se pode dizer agora compreende. Pois, assim como empregamos "a palavra 'ler' para uma família de casos [...] aplicamos critérios diferentes para a leitura de uma pessoa" (WITTGENSTEIN, 2000, IF, §164), portanto, a compreensão das *regras* é julgada de acordo com os critérios do *jogo de linguagem* que elas compõem, e o critério não será aplicado no 'quando', mas, a uma prática específica.

Para refutar a segunda afirmativa, partimos da assertiva de Wittgenstein (2000, IF, §197) de que não há nada de espantoso ou estranho quando descrevemos o que

fazemos com as palavras, quando afirmamos que é "como se pudéssemos apreender todo o emprego de uma palavra de um só golpe". A partir desse argumento o autor complementa:

> torna-se estranho quando somos levados a pensar que o desenvolvimento futuro deva estar já de algum modo presente no ato de compreender, e contudo não está. Pois dizemos que não há nenhuma dúvida de que compreendemos esta palavra, mas, por outro lado, que sua significação reside em seu emprego (WITTGENSTEIN, 2000, IF, §197).

Nesse sentido, também não faz sentido fazer afirmativas sobre compreensão baseados em futuros *usos* das *regras*. O *seguir regras*, em nosso caso, deve ser julgado no *fazer* Modelagem Matemática de um específico *jogo de linguagem* de uma atividade de modelagem. Assim, a compreensão se dá na prática da atividade analisada, e não podemos inferir que estará presente em atividades futuras.

Essas reflexões sobre a compreensão do *fazer* Modelagem Matemática estão relacionadas aos pontos de convergência do *seguir regras* inferido a partir das ações dos alunos de D1 e D3. Mas, na análise específica inferimos que há *regras* que os alunos de D1 *seguem* e os alunos de D3 não, indicando pontos de divergências. Nesse sentido, se seguir uma regra é análogo a seguir uma ordem, e se somos treinados para isto e reagimos de um determinado modo, estaríamos tentados a perguntar, assim como faz Wittgenstein (2000, IF, §206): "Mas que aconteceria se uma pessoa reagisse *desse modo* e uma outra *de outro modo* a uma ordem ao treinamento? Quem tem razão?"

Mas, essa pergunta carrega a premissa de que ambas as 'pessoas' – em nosso caso as duplas – receberam o mesmo *treinamento*. Nesse sentido, antes de nos debruçarmos sobre ela, observemos em quais das *regras* do *fazer* Modelagem Matemática há essa divergência e como ocorreu o *treinamento* das duplas em cada uma dessas *regras*.

Para isso apresentamos a seguir quadros que resumem as inferências e informações sobre o *treinamento* de cada uma dessas *regras* em que houve divergência em seu *seguir*. A primeira diz respeito a ação de coletar dados.

QUADRO 94: TREINAMENTOS PARA A COLETA DE DADOS

Atividade	Ação de treinamento realizada	Aula	Alunos presentes[50]
Atividade 1.1	O professor/pesquisador disponibiliza o link dos vídeos para que os alunos tenham acesso as fontes dos dados	Aula 1	A2, A3, A5

[50] Para a análise global evidenciamos a presença dos alunos de D1 e D3.

Atividade 1.2	O professor/pesquisador explica as informações contidas nos boletins e indica quais dessas informações utilizou na coleta de dados	Aula 3	A2, A3
Estudo Teórico	Apresentar teoricamente a subfase de uma atividade de modelagem coleta de dados	Aula 6	A2, A3, A5
Atividade 2.1	O professor/pesquisador explicou como encontrar as informações geopolíticas dos bairros nos sites oficiais da prefeitura de Curitiba, proporcionado aos alunos a experiência de selecionar as informações das fontes	Aula 7	A2, A3, A5
Atividade 2.2	As duplas coletaram, da grande quantidade e diversidade de informações sobre a cesta básica fornecidas pelo professor/pesquisador, as informações os dados necessários para solucionar o problema formulado por eles	Aula 10	A2, A3, A5, A6

Fonte: O autor.

As informações do quadro 94 indicam que os alunos de D3 não participaram integralmente dos *treinamentos* realizados nas atividades do 1° e 2° momentos de familiarização (ALMEIDA e DIAS, 2004). Nesse sentido, não faz sentido fazer a pergunta do §206 para a coleta de dados.

Como discutimos, não há uma relação causal entre o *seguir regras* e o *treinamento da regra*, mas, o *treinamento* é realizado visando o *seguir regras*. Wittgenstein evidencia que *uma regra* é um indicador de direção à ação "na medida em que haja uso constante, um hábito" (WITTGENSTEIN, 2000, IF, §198). Nesse sentido, mesmo que, para além do *treinamento*, as vivências dos alunos possam estar envolvidas no seguir as *regras*, o hábito de *uso*, em nosso caso, foi construído a partir do desenvolvimento das atividades da fase de *treinamento*[51]. Assim, podemos relacionar o não *seguir essa regra* com a ausência de D3 nos *treinamentos*.

O principal aspecto que indicou o não *seguir a regra* na ação de coletar dados, é que as ações de A5 não foram autônomas, necessitando de ações de *treinamento* para realizá-las. Se observarmos que A5 não participou de um dos treinamentos dessa *regra*, em outros dois participou sozinho e na realização da Atividade 3.3 fez grande parte da coleta de dados também sozinho, a necessidade desses *treinamentos* nessa atividade aflora.

Outro aspecto diz respeito à falta de informações sobre os dados coletados referentes aos preços dos materiais de construção. Na Atividade 1.1 o professor/pesquisador apresenta as informações de número de visualizações, avaliações,

[51] Para evitar repetições, consideramos o argumento construído nesse parágrafo sempre que a questão do §206 não fizer sentido.

likes e unlikes dos vídeos, em que as avaliações é a soma dos likes e unlikes. Algo semelhante ao que se esperava em relação aos preços dos materiais, em que o preço obtido em cada fonte deveria ser apresentado e a 'conta' realizada para determinar o preço que seria utilizado fosse descrita. A ausência de A6 quando o professor/pesquisador evidenciava esse aspecto dos dados coletados pode justificar essa *regra* não seja seguida por D3, pois, como essa parte específica da atividade foi realizada em sua maioria fora de sala de aula o trabalho em conjunto é prejudicado. Ainda, as conversas entre o professor/pesquisador e os alunos de D3 durante os encontros de desenvolvimento da atividade 3.3 indicam que algumas das etapas de resolução da atividade foram seccionadas e a coleta de dados referente aos preços dos materiais ficou destinada à A6.

Agora, observemos o *treinamento* relacionado a ação de selecionar variáveis.

QUADRO 95: TREINAMENTOS PARA A SELEÇÃO DE VARIÁVEIS

Atividade	Ação de treinamento realizada	Aula	Alunos presentes
Atividade 1.1	O professor/pesquisador explicar para os alunos que a variável deve ser definida considerando a característica do que ela representa	Aula 1	A2, A3, A5, A6
	O professor/pesquisador conduz a discussão sobre as variáveis da categorização	Aula 2	A2, A3, A5
Atividade 1.2	O professor/pesquisador explica que a natureza das variáveis deve ser considerada	Aula 4	A2, A3, A5, A6
	O professor/pesquisador evidencia que é necessário sempre definir as variáveis antes de construir o modelo		
Estudo Teórico	Apresentar teoricamente a subfase de uma atividade de modelagem seleção de variáveis	Aula 6	A2, A3, A5
Atividade 2.1	O professor/pesquisador evidencia a necessidade de definir as variáveis para construir o modelo	Aula 8	A2, A3, A5
Atividade 2.2	Os alunos de D1 vivenciam a seleção de variáveis em um contexto diferente	Aula 11	A2, A3
	O professor/pesquisador evidencia a necessidade de que os alunos de D3 definam o que cada variável da função seno representa para a situação	Aula 12	A2, A3, A5

Fonte: O autor.

Novamente as informações (Quadro 95) indicam que a questão do §206 não faz sentido, visto que os alunos de D3 e D1 não participaram dos mesmos *treinamentos*, principalmente nas atividades do 2° momento.

Podemos inferir a partir desses *treinamentos* que quando o professor/pesquisador selecionava as variáveis em conjunto com os alunos – atividades do 1° momento de familiarização –, D3 incorporava elas ao relatório de desenvolvimento da atividade, mas, quando eles deveriam selecionar as variáveis com a orientação do

professor/pesquisador, e ao não fazerem o professor/pesquisador intervinha *ostensivamente*, D3 não incorporava a seleção de variáveis ao relatório da atividade. Neste último caso, observamos que A6 não estava presente no momento do *treinamento*. Nesse contexto, concluímos que D3 não estava *habituada* a realizar a seleção de variáveis, por isso não determinaram algumas das variáveis envolvidas nos modelos da Atividade 3.3, e definiram outras inadequadamente. Também o fato da seleção de variáveis da atividade 3.3 ter sido realizada fora de sala de aula pode ter prejudicado o trabalho conjunto da dupla e esses aspectos não foram considerados.

Como discutimos no quarto capítulo, em conjunto com as ações de *treinamento* também há ações de *seguir a regra*, direcionadas por esse *treinamento*. Na ação de selecionar as variáveis, faltou aos alunos de D3 a ação frente ao *treinamento* recebido.

Na ação de construir o modelo, os alunos de D3 *seguiram* parcialmente *essa regra*. Os principais aspectos que indicam essa parcialidade estão no rigor matemático e nos elementos da situação que deviam ser considerados ao definirem as equações algébricas envolvidas nos modelos. Nesse sentido, observamos os *treinamentos* relacionados a essa *regra*.

QUADRO 96: TREINAMENTOS PARA A CONSTRUÇÃO DO MODELO

Atividade	Ação de treinamento realizada	Aula	Alunos presentes
Atividade 1.1	O professor/pesquisador ensina os alunos a utilizar as ferramentas do software Excel para construir o Histograma	Aula 2	A2, A3, A5
	O professor/pesquisador conduz a discussão de que o segundo intervalo do Histograma apresentava a maior frequência e as medidas de tendência central estavam nele localizadas	Aula 2	A2, A3, A5
Atividade 1.2	O professor/pesquisador orienta os alunos que na construção do modelo não são apenas os aspectos matemáticos que devem ser considerados, é necessário que a tendência seja coerente com a situação	Aula 4	A2, A3, A5, A6
Estudo Teórico	Apresentar teoricamente a subfase de uma atividade de modelagem construir o modelo	Aula 6	A2, A3, A5
Atividade 2.1	O professor/pesquisador ensina o passo a passo de como construir os ajustes polinomiais no software GeoGebra	Aula 8	A2, A3, A5
	O professor/pesquisador ensina como determinar no software GeoGebra o valor da integral para a polinomial determinada	Aula 8	A2, A3, A5
Atividade 2.2	Os alunos de D1 vivenciam a construção do modelo em um contexto diferente	Aula 11	A2, A3, A5, A6
	O professor/pesquisador indica à D3 que os valores das cestas básicas apresentavam um comportamento cíclico	Aula 11	A2, A3, A5, A6

	O professor/pesquisador ensina D3 como determinar os parâmetros da função seno utilizando a ferramenta controle deslizante do software GeoGebra	Aula 11	A2, A3, A5, A6

Fonte: O autor.

Mesmo que A5 estivesse presente em todos os momentos de *treinamento dessa regra*, a não participação de A6 em alguns momentos e os *treinamentos* da Atividade 2.2 – os alunos de D1 conduzem a construção do modelo da Atividade 2.2 enquanto os alunos de D3 o fazem conduzidos pelos treinamentos do professor/pesquisador – são suficientes para não direcionarmos a questão do §206 à essa *regra*.

As informações do quadro 96 indicam que os *treinamentos* referentes aos aspectos que D3 apresentou não *seguir*, foram realizados na Atividade 1.2 e no Estudo Teórico. Nesse sentido, podemos interpretar que houve pouco *treinamento* referente a esses aspectos, mas, porque isso aconteceu? Nas descrições da Atividade 3.1 desenvolvida por D1, o professor/pesquisador busca sempre evidenciar que é necessário ter rigor matemático e considerar os elementos da situação ao construir o modelo de uma atividade de modelagem. Mas, quando observamos os *treinamentos* direcionados a D3, podemos perceber que o professor/pesquisador necessitou intervir mais no sentido de auxiliar na construção do modelo, nas ferramentas necessárias e determinação da matemática envolvida, o que pode ter limitado as ações de *treinamento*.

Ao observarmos o quadro 1 com a descrição das atividades realizadas na coleta de dados empíricos da pesquisa, percebemos que os alunos de D3 não participaram de muitas aulas, o que limitou o tempo para os *treinamentos*. Nesse sentido, muitas vezes o professor/pesquisador teve que auxiliar mais diretamente a dupla. Também, no desenvolvimento da Atividade 3.3 os alunos de D3 não trabalharam na construção do modelo em sala de aula, o que impossibilitou possíveis intervenções do professor/pesquisador frente aos aspectos “falhos”.

Na ação de apresentar uma solução para o problema, os alunos de D3 não apresentam uma resposta em que dissertam sobre os aspectos da situação considerados na solução, apenas calculam o valor correspondente à resposta. Como descrevemos na análise específica, na comunicação da atividade para a turma os alunos de D3 ainda não haviam finalizado a construção do modelo, consequentemente, não haviam determinado e nem apresentado a resposta para o problema. Nesse contexto observemos os *treinamentos* referentes a essa *regra*.

QUADRO 97: TREINAMENTOS PARA APRESENTAR UMA SOLUÇÃO PARA O PROBLEMA

Atividade	Ação de treinamento realizada	Aula	Alunos presentes
Atividade 1.1	O professor/pesquisador conduz a discussão de que o segundo intervalo do Histograma apresentava a maior frequência e as medidas de tendência central estavam nele localizadas	Aula 2	A2, A3, A5
Atividade 1.2	Os alunos vivenciam a apresentação de uma solução para o problema em uma atividade diferente	Aula 4	A2, A3, A5, A6
Estudo Teórico	Apresentar teoricamente a subfase de uma atividade de modelagem responder ao problema	Aula 6	A2, A3, A5
Atividade 2.1	Os alunos (exceto de D3) vivenciam a apresentação de uma solução para o problema em uma atividade diferente	Aula 8	A2, A3, A5
Atividade 2.2	Os alunos vivenciam experiência de calcular a resposta e apresentar uma solução para o problema em um contexto diferente	Aula 11	A2, A3, A5, A6

Fonte: O autor.

As ações de *treinamento* do quadro 97 indicam que os alunos apresentaram as repostas aos problemas das atividades desde a Atividade 1.1. De acordo com as descrições das atividades o professor/pesquisador orientava os alunos durante todo o desenvolvimento da atividade e na obtenção da solução pedia a eles que respondessem ao problema. Os alunos de D3 vivenciam essa *regra* em diferentes contextos nas atividades da fase de treinamento, exceto na Atividade 2.1 em que não entregaram o relatório final da atividade e não foi possível inferir sobre. Então, porque na Atividade 3.3 eles apenas calculam a solução numérica e não apresentam uma resposta?

Nesse caso, a questão do §206 faria sentido? A forma como os alunos de D3 desenvolveram essa parte da atividade, nos leva a responder negativamente. As informações do *treinamento* indicam que eles *habitualmente* apresentavam uma solução para o problema. Inferimos que se os alunos de D3 tivessem participado de mais aulas destinadas ao desenvolvimento da Atividade 3.3, poderiam ter apresentado uma solução mais completa, ou seja, o hábito de apresentar uma resposta para o problema indicava a possibilidade de D3 *seguir essa regra*, mas, a falta de comprometimento com as aulas presenciais de desenvolvimento das atividades 2.2 e 3.3 – principalmente de A6, mas, que interferia também em A5 – pode ter levado a um resultado negativo nesses casos.

A última divergência entre o *seguir regras* de D1 e D3 diz respeito às ações de analisar a reposta em relação à Matemática e de analisar a resposta em relação ao Problema.

QUADRO 98: TREINAMENTOS PARA ANALISAR A RESPOSTA EM RELAÇÃO À MATEMÁTICA E EM RELAÇÃO AO PROBLEMA

Atividade	Ação de treinamento realizada	Aula	Alunos presentes
Atividade 1.1	O professor/pesquisador orienta os alunos a refletirem sobre o resultado da modelagem para a situação investigada	Aula 2	A2, A3, A5
Atividade 1.2	A professora substituta conduz a apresentação de uma resolução alternativa que mostra a matemática que o software utiliza para determinar o ajuste de curva	Aula 5	A2, A3
Estudo Teórico	Apresentar teoricamente a fase de uma atividade de modelagem validação e interpretação dos resultados	Aula 6	A2, A3, A5
Atividade 2.1	O professor/pesquisador indica que o ajuste polinomial é adequado para o cálculo da área verde, pois, se caracteriza como um modelo estático, logo, precisa se adequar apenas naquele intervalo de pontos.	Aula 9	A2, A3, A5, A6
	O professor/pesquisador indica a adequação da área calculada com a ferramenta integral do GeoGebra comparada com a área da imagem de satélite.		
Atividade 2.2	O professor/pesquisador indica que os alunos de D1 aprofundem a interpretação apresentada no relatório, destacando os aspectos que discutiram durante a comunicação da atividade para a turma	Aula 12	A2, A3, A5
	O professor/pesquisador sugere que D1 realize uma metavalidação		
	O professor/pesquisador orienta que os alunos de D3 verifiquem o valor da cesta básica no mês de abril levantado pelo DIEESE e compare com o valor obtido		

Fonte: O autor.

Do quadro 98, percebemos que D3 não participa do *treinamento dessa regra* na Atividade 1.2, no Estudo Teórico e na Atividade 2.2 os *treinamentos* direcionados a D3 e D1 remetem a diferentes aspectos. Disso, novamente a questão do §206 não é adequada.

Além dessas duas diferenças no *treinamento* apontadas anteriormente, também é possível observar que A6 participou apenas do *treinamento dessa regra* realizado na Atividade 2.1. Concluímos, então, que a falta de interpretação e validação dos resultados na Atividade 3.3 é consequência da falta de participação nos *treinamentos* e, consequentemente, na falta de hábito em realizar interpretações e/ou validações nas atividades de modelagem.

Ao analisarmos os *treinamentos das regras* realizados para D1 e D3, em que há divergência no *seguir regras*, percebemos que as duplas não participam dos mesmos *treinamentos*. Isso ocorre na maioria dos casos porque os alunos de D3 não compareceram em muitas das aulas em que esses *treinamentos* foram realizados.

Concluímos, então, que a não continuidade de participação dos alunos de D3 aos *treinamentos das regras* impossibilitou que a dupla tornasse o *seguir regras* no *fazer* Modelagem Matemática um hábito, assim, ao desenvolverem a Atividade 3.3, em que suas ações deveriam ser dominantes, necessitaram de intervenções de *treinamento* do professor/pesquisador, ou não conseguiram agir adequadamente em determinadas *regras*.

Não necessitamos adentrar na discussão da questão do §206 – "Mas que aconteceria se uma pessoa reagisse desse modo e uma outra de outro modo a uma ordem ao treinamento? Quem tem razão?" (WITTGENSTEIN, 2000, IF, §206) –, mas, se nela nos enveredarmos, verificamos que a argumentação de Wittgenstein na elucidação dessa questão segue no sentido de que a adequabilidade de uma *regra* está nas convenções e assim a compreensão de um *jogo de* linguagem e de suas *regras* está relacionada aos acordos de juízos sobre as *regras* (WITTGENSTEIN, 2000, IF, §242).

Nesse sentido, teria 'razão' quem estivesse agindo adequadamente as *regras* no acordo de juízos do *fazer* Modelagem Matemática. E nesse ponto voltamos a discussão de que no *treinamento da regra* também há *seguir a regra*, isso quando os alunos agem segundo esse *treinamento*. Assim, quando inferimos que os alunos de D3 não *seguem* algumas *regras* é que suas ações frente a essas *regras* não são autônomas no desenvolvimento dessa atividade. Eles *fazem* Modelagem Matemática, mas, ao não agirem autonomamente, não *seguem* algumas de suas *regras*.

Passando agora a outro aspecto que esteve presente no desenvolvimentos das atividades da pesquisa empírica, o *uso* dos recursos das tecnologias de acordo com as funções evidenciados em Greefrath (2011). O autor evidencia que as funções dos recursos das tecnologias digitais são importantes em diferentes fases de uma atividade de modelagem matemática. As descrições dos *usos* dos recursos das tecnologias digitais realizados no desenvolvimento das atividades acordam com o evidenciado por Greefrath (2011).

Nas atividades da fase de *treinamento* os recursos das tecnologias digitais estiveram presentes em diversos momentos: na coleta de dados de todas elas, no uso dos software Excel e GeoGebra para organizar os dados e realizar as manipulações matemáticas envolvidas, o que afetou as simplificações, as hipóteses, a construção do modelo e a obtenção da resposta. O professor/pesquisador sempre que necessário ensinou os alunos a utilizarem as ferramentas dos software, e indicava em que fontes as informações oriundas da internet foram obtidas. Nas atividades do 3° momento os alunos

também fizeram *uso* dos recursos das tecnologias digitais, contemplando diferentes funções distribuídas em diferentes fases das atividades. No quadro 99 evidenciamos esses diferentes *usos* realizados nas fases das atividades de modelagem matemática.

QUADRO 99: *USOS* DOS RECURSOS DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS REALIZADOS NOS DESENVOLVIMENTO DAS ATIVIDADES DA PESQUISA EMPÍRICA

Fases da Modelagem Matemática	**Atividade 1.1**	**Atividade 1.2**	**Atividade 2.1**	**Atividade 2.2**	**Atividade 3.1**	**Atividade 3.3**
Situação inicial	*Investigação*		*Investigação*			
Coleta de dados	*Investigação*	*Investigação*	*Investigação*	*Investigação*	*Investigação*	*Investigação Calculação*
Formulação do Problema				*Simulação*		
Simplificação	*Calculação*	*Investigação*	*Visualização*	*Visualização*	*Visualização Simulação*	*Investigação Simulação*
Formulação de Hipóteses	*Visualização*	*Investigação*	*Visualização Experimentação*	*Experimentação Visualização*	*Calculação Visualização Investigação*	
Seleção das Variáveis		*Visualização*			*Visualização*	
Construção do Modelo	*Experimentação Visualização*	*Experimentação Algebrização*	*Experimentação Algebrização Simulação Calculação*	*Visualização Controle Algebrização*	*Experimentação*	*Simulação Controle Visualização*
Responder o Problema	*Calculação*	*Calculação*		*Calculação*	*Controle Visualização Simulação*	
Análise da resposta em relação a Matemática		*Calculação*	*Visualização*			
Análise da resposta em relação ao Problema			*Visualização*	*Investigação*	*Investigação*	

Fonte: O autor.

Observamos no quadro 99 que em maior ou menor grau todas as funções de *uso* dos recursos das tecnologias digitais são contempladas, e são utilizados em todas as fases, ora em uma atividade, ora em outra.

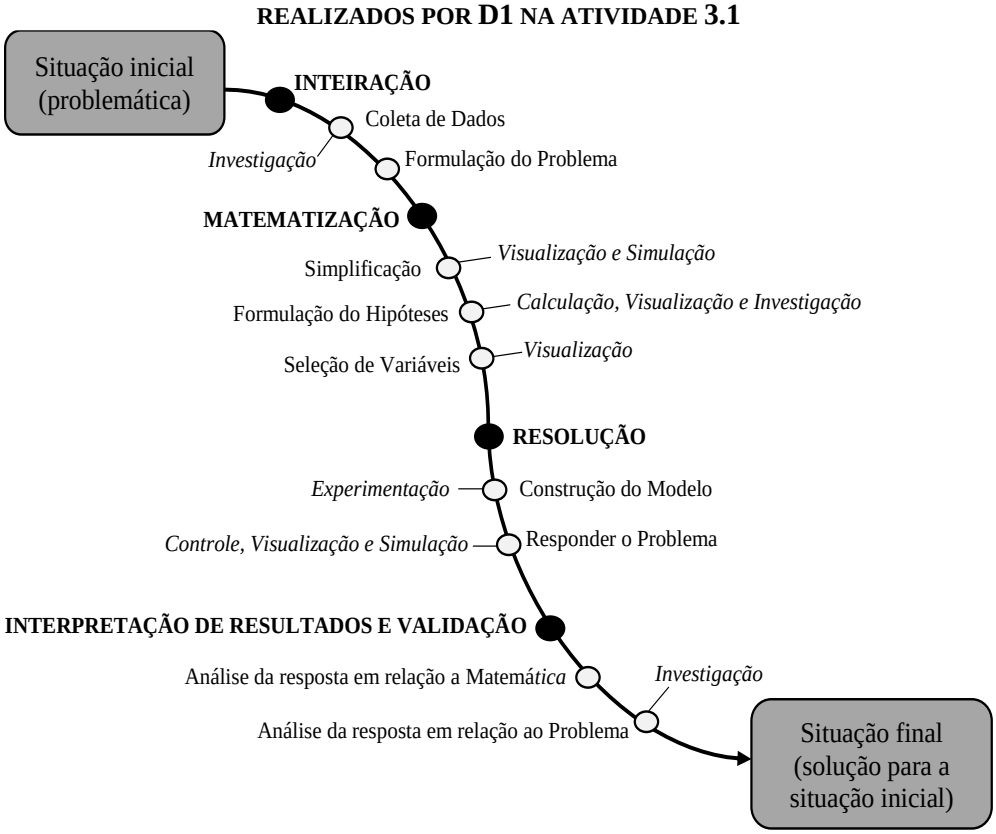
Os *usos* que D1 e D3 fazem dos recursos das tecnologias no desenvolvimento das atividades do 3° momento, conduziram suas ações no *seguir regras* em algumas das fases da Modelagem Matemática, fornecendo facilidades na obtenção, organização e manipulação das informações da situação, também na representação – gráfica, numérica e algébrica – e manipulação dos elementos matemáticos envolvidos na solução das atividades.

Apresentamos uma reinterpretação do esquema de uma atividade de modelagem matemática proposto em Almeida, Silva e Vertuan (2012), no qual de um lado do "caminho" localizamos a fase e subfase do desenvolvimento da atividade, e do outro lado,

indicamos os *usos* dos recursos das tecnologias digitais realizados pelas duplas nessa fase e subfase.

Na figura 28 apresentamos os *usos* realizados por D1. A dupla se utilizou desses recursos em 7 das 8 funções evidenciadas em Greefrath (2011), sendo esses *usos* distribuídos em quase todas as fases de desenvolvimento da atividade.

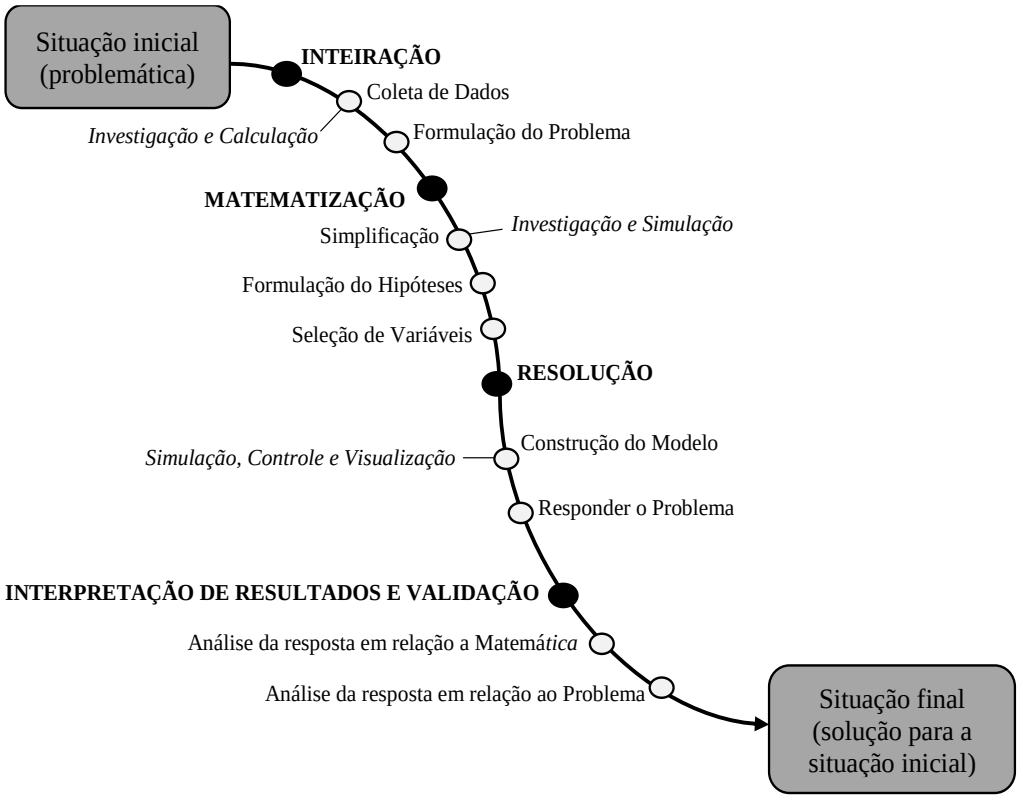
FIGURA 28: REINTERPRETAÇÃO DO ESQUEMA DE MODELAGEM DE ALMEIDA, SILVA E VERTUAN (2012) COM A INCLUSÃO DO *USO* DOS RECURSOS DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS REALIZADOS POR D1 NA ATIVIDADE 3.1



Fonte: O autor.

Na figura 29 apresentamos os *usos* realizados por D3. A dupla concentrou o *uso* desses recursos nas fases de desenvolvimento da atividade realizadas antes dos modelos algébricos. Como inferimos na análise específica, a dupla poderia ter utilizado o GeoGebra para realizar as planificações dos obstáculos da pista e obter, por meio das ferramentas do software, a área de superfície de cada um; também poderiam utilizar as planilhas do Excel para organizar e manipular os dados referentes aos preços dos materiais de construção. Novamente o tempo disponibilizado pela dupla para realizar essas ações pode explicar a não utilização desses recursos.

FIGURA 29: REINTERPRETAÇÃO DO ESQUEMA DE MODELAGEM DE ALMEIDA, SILVA E VERTUAN (2012) COM A INCLUSÃO DO *USO* DOS RECURSOS DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS REALIZADOS POR D3 NA ATIVIDADE 3.3



Fonte: O autor.

Nesse ponto da discussão estamos aptos a voltar nossa atenção para a questão de investigação: *Como se dá o seguir regras no fazer Modelagem Matemática em atividades de modelagem desenvolvidas utilizando recursos das tecnologias digitais?*

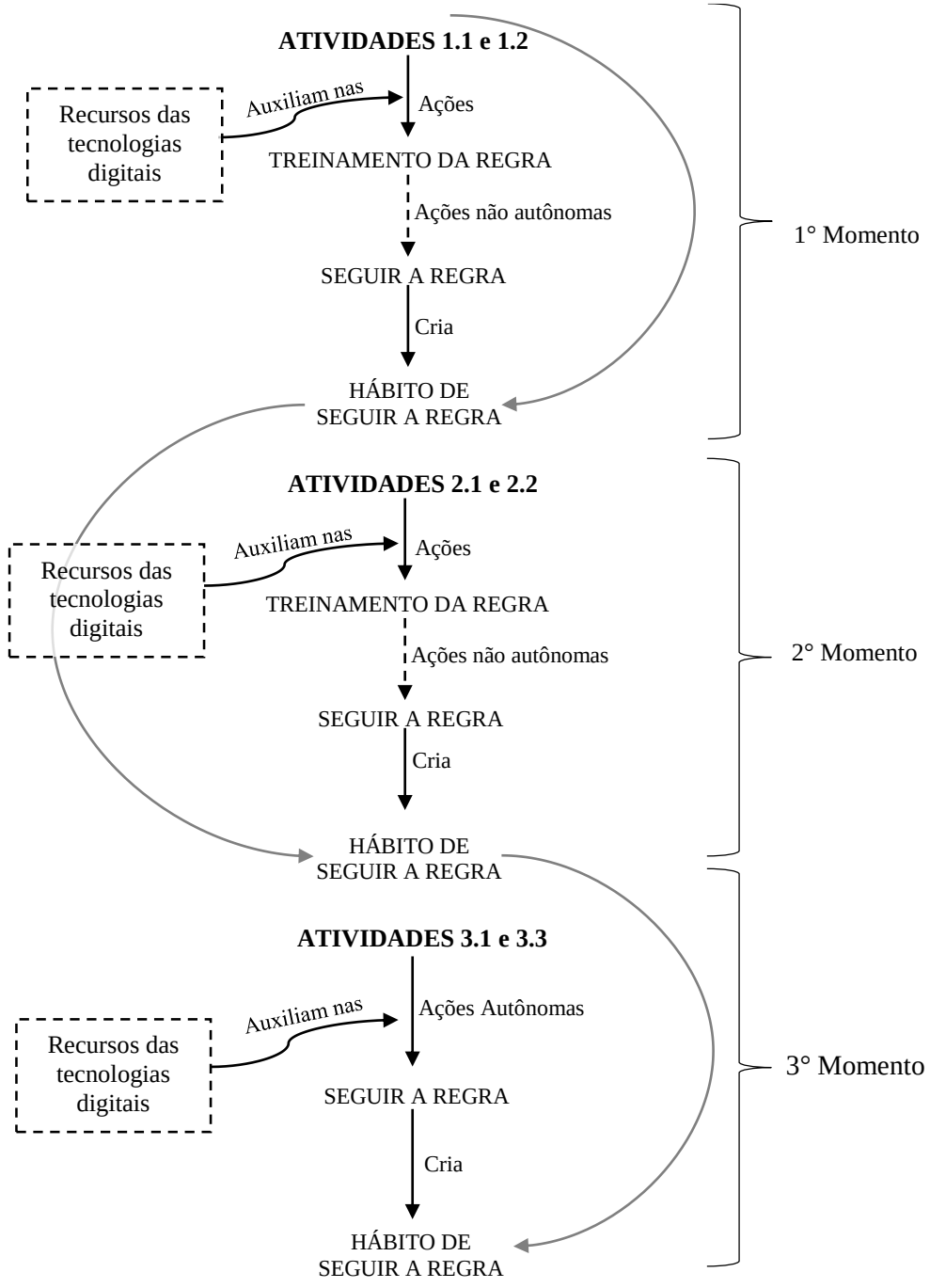
Nossas descrições e interpretações analíticas indicam que o *seguir regras* se dá numa dinâmica em torno da *regra*: ações de *treinamento da regra*, em que também há ações não autônomas do *seguir regras*, e nesse *uso* dessas *regras* se cria o hábito de seguilas, e desse hábito as ações se tornam autônomas e, então, indicam o *seguir regras*.

Estando essa dinâmica contextualiza no *fazer* Modelagem Matemática, as regras se referem a um *fazer* específico, e, em nossa investigação, ela se dá de acordo com os momentos de familiarização com a Modelagem Matemática (ALMEIDA e DIAS, 2004): as ações de *treinamento* são realizadas no 1° e 2° momentos de familiarização em que as ações do professor/pesquisador, mesmo em ações conjuntas, são dominantes, e no 3° momento de familiarização as ações dos alunos são dominantes e o *seguir regras* pode ser observado. Ainda que algumas exceções ocorreram, nas atividades 2.1 e 2.2 algumas ações autônomas dos alunos já puderam ser notadas e nas Atividades 3.1 e 3.3 alguns

treinamentos foram necessários. Quando esse *fazer* Modelagem Matemática utiliza recursos das tecnologias digitais, esses *usos* auxiliam na realização dessas ações.

Na figura 30 apresentamos um esquema que sintetiza como o *seguir regras* se deu no *fazer* Modelagem Matemática nas atividades de modelagem que utilizaram tecnologias digitais.

FIGURA 30: DINÂMICA DO *SEGUIR REGRAS* NO *FAZER* MODELAGEM MATEMÁTICA



Fonte: O autor.

Assim sendo, nossa investigação contribui às pesquisas que envolvem a Modelagem Matemática com a filosofia de Wittgenstein no sentido em que investiga as

regras do *fazer* Modelagem Matemática e o *seguir essas regras* no *fazer* atividades de modelagem que utilizam recursos das tecnologias digitais.

Como discutimos cada proposta do *fazer* Modelagem Matemática se caracteriza com um *jogo de linguagem* específico, assim, possuindo uma gramática própria. Ao considerarmos que o ensino numa perspectiva wittgensteiniana é realizado por meio do *treinamento* das *regras*, então, ensinar a *fazer* Modelagem Matemática é realizar o *treinamento das regras* de uma gramática específica desse *fazer*.

Esse aspecto ganha destaque ao considerarmos o contexto em que os dados empíricos foram coletados: em uma disciplina de Modelagem Matemática no Ensino ofertada no curso de Licenciatura em Matemática. Então, a formação do professor de Matemática também especifica a discussão. Nesse sentido, ensinar a ensinar por meio da Modelagem Matemática, que é objetivo desse contexto, passa por ensinar a *fazer* Modelagem Matemática.

A dinâmica em torno da *regra* que identificamos – *treinamento da regra*, *seguir a regra* por meio de ações não autônomas, hábito de *seguir a regra* que leva a ações autônomas que indicam o *seguir regras* – indica um caminho para o ensinar a *fazer* Modelagem Matemática. Ressaltamos que a criação do hábito de *seguir regras* não cessa ao *seguir a regra*, é algo constante nessa dinâmica.

Os momentos de familiarização com a Modelagem Matemática (ALMEIDA e DIAS, 2004) se mostraram fundamentais para essa dinâmica, pois, nas atividades do 1° e 2° momentos as ações de *treinamento da regra* se mostram dominantes, proporcionando que os alunos criem o hábito de *seguir as regras* do *fazer* Modelagem Matemática, e, assim, suas ações tornam-se autônomas e há o *seguir regras* "desvencilhado" do *treinamento*.

Nos aproximando do final dessa pesquisa, sentimos a necessidade de refletir sobre seus resultados, deliberando sobre suas limitações e possíveis prosseguimentos ou investigações que possam se derivar dos processos envolvidos na pesquisa.

Uma limitação que nossa pesquisa apresenta, mas, que também pode ser interpretada como uma característica da forma como foi realizada, está relacionada aos resultados referentes à compreensão do *fazer* Modelagem Matemática. Como discutimos, a compreensão inferida para a prática de um *jogo de linguagem* de uma atividade de modelagem matemática, não pode ser assegurada em futuras práticas em que haja o *uso*

das *regras*. Assim, nossas inferências sobre a compreensão estão localizadas e limitadas no *fazer* Modelagem Matemática das atividades do 3° momento analisadas.

Outra limitação diz respeito à quantidade de dados empíricos coletados. A escolha metodológica de capturar a tela dos computadores, se por um lado, facilitou o acesso às ações dos alunos durante o desenvolvimento das atividades, por outro lado, produziu horas e mais horas de gravação, que nem sempre tinham o áudio de boa qualidade – algo limitado pelos recursos tecnológicos disponíveis – o que dificultou o movimento analítico desses dados. Nesse sentido, não pudemos utilizar todos os dados coletados para compor esse relatório de pesquisa.

Finalizando, elencamos possíveis caminhos que se derivam dessa pesquisa ou que prosseguem sua empreitada investigativa no que se refere à Modelagem Matemática e à filosofia wittgensteiniana:

- Os aspectos técnicos e metodológicas que envolvem a coleta de dados empíricos quando desenvolvidas atividades que utilizam recursos das tecnologias digitais;
- A ações do pesquisador no *treinamento das regras* do *fazer* Modelagem Matemática quando age no duplo papel de professor/pesquisador (CAMPOS e ARAÚJO, 2015) no desenvolvimento das atividades de modelagem;
- O *seguir regras* da Matemática em atividades de modelagem matemática que utilizam recursos das tecnologias digitais.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, L. M. W. The “practice” of Mathematical Modeling under a wittgensteinian perspective. **RIPEM**, v. 4, n. 2, p. 98–113, 2014.

ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S. Atividades de modelagem matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir? **Ciência & Educação**, v. 11, n. 3, p. 483–498, 2005.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema**, v. 17, n. 22, p. 19–35, 2004.

ALMEIDA, L. M. W.; PALHARINI, B. N.; TORTOLA, E. **Desdobramentos para a Modelagem Matemática decorrentes da formulação de hipóteses**. . In: VI SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (VI SIPEM). Pirenópolis - Goiás - Brasil: nov. 2015

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. **Modelagem Matemática em foco**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2014.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

AMARAL, M. G. M. Russell, Wittgenstein e o atomismo lógico. In: **Filosofia da linguagem e da Lógica**. São Paulo: Coleção XVI Encontro ANPOF: ANPOF, 2015. p. 35–43.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? **Veriati**, n. 4, p. 73–80, 2004.

BARBOSA, J. C. Mathematical modelling in classroom: a socio-critical and discursive perspective. **ZDM**, v. 38, n. 3, p. 293–301, 2006.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2011.

BASSANEZI, R. C. **Modelagem Matemática: teoria e prática**. São Paulo: Contexto, 2015.

BLUM, W.; LEISS, D. How do students and teachers deal with modelling problems? The example “Filling up.” In: **Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics. Chichester: Horwood Publishing Limited**. Chichester: Horwood: HAINES, C.; GALBRAITH, P.; BLUM, W.; KHAN, S., 2006. p. 222–231.

BLUM, W.; NISS, M. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. **Educational studies in mathematics**, v. 22, n. 1, p. 37–68, 1991.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto. Portugal: Porto Editora, 1994.

BORBA, M. C. Potential scenarios for Internet use in the mathematics classroom. **ZDM**, v. 41, n. 4, p. 453–465, 2009.

BORSSOI, A. H. **Modelagem matemática, aprendizagem significativa e tecnologias: articulações em diferentes contextos educacionais**. Tese de Doutorado—Londrina: Universidade Estadual de Londrina, 2013.

BORSSOI, A. H.; ALMEIDA, L. M. W. Percepções sobre o uso da Tecnologia para a Aprendizagem Significativa de alunos envolvidos com Atividades de Modelagem Matemática. **Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias (En línea)**, v. 10, p. 36–45, 2015.

BURAK, D. **Modelagem Matemática e a sala de aula**. . In: I ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Londrina: 2004

BURAK, D. Uma perspectiva de modelagem matemática para o ensino e a aprendizagem da matemática. In: **Modelagem Matemática: uma perspectiva para a Educação Básica**. Ponta Grossa-PR: Editora UEPG, 2010. p. 15–38.

BURAK, D.; ARAGÃO, R. M. R. **A modelagem matemática e relações com a aprendizagem significativa**. Curitiba: Editora CRV, 2012.

CAMPOS, I. S.; ARAÚJO, J. L. Quando pesquisa e prática pedagógica acontecem simultaneamente no ambiente de modelagem matemática: problematizando a dialética pesquisador| professor. **Acta Scientiae**, v. 17, n. 2, p. 324–339, 2015.

DALLA VECCHIA, R. **A Modelagem Matemática e a Realidade do Mundo Cibernético**. Tese (Doutorado em Educação Matemática)—Rio Claro: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2012.

DIAS, M. R.; SOUZA, H. C. T. **'Semelhanças de família' nas caracterizações de modelo matemático**. . In: VI ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Curitiba-PR: 2014

DIAS, M. R.; SOUZA, H. C. T. Algumas evidências de 'semelhanças de família' nas caracterizações de modelo matemático. **Revista Ensino & Pesquisa**, v. 14, n. Suplemento Especial, p. p.166-187, 2016.

DUMMETT, M. Wittgenstein's Philosophy of Mathematics. **The Philosophical Review**, v. 68, n. 3, p. 324–348, 1959.

FERRI, R. B. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. **ZDM**, v. 38, n. 2, p. 86–95, 2006.

FIGUEIREDO, D. F. **Uma Proposta de Avaliação de Aprendizagem Significativa em Atividades de Modelagem Matemática na Sala de Aula**. Dissertação de Mestrado—Maringá: Universidade Estadual de Maringá, 2013.

GALBRAITH, P. Models of modelling: genres, purposes or perspectives. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, v. 1, n. 5, p. 3–16, 2012.

GARNICA, A. V. M. Algumas notas sobre pesquisa qualitativa e fenomenologia. **Interface–Comunicação, Saúde e Educação, São Paulo**, v. 1, n. 1, 1997.

GLOCK, H.-J. **Dicionário Wittgenstein**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1998.

GOTTSCHALK, C. A construção e transmissão do conhecimento matemático sob uma perspectiva wittgensteiniana. **Cadernos Cedes**, v. 28, n. 74, p. 75–96, 2008.

GOTTSCHALK, C. O papel do método no ensino: da maiêutica socrática à terapia wittgensteiniana. **ETD – Educ. Tem. Dig.**, v. 12, n. 1, p. 64–81, 2010.

GOTTSCHALK, C. Educational implications of some of Wittgenstein's remarks on Mathematics: proposition, inference and proof. **RIPEM**, v. 4, n. 2, p. 36–51, 2014.

GREEFRATH, G. Using Technologies: New Possibilities of Teaching and Learning Modelling – Overview. In: **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling (ICTMA 14)**. Hamburgo: KAISER, G.; BLUM, W.; FERRI, R. B.; STILLMAN, G. (Ed.), 2011. p. 301–304.

GREEFRATH, G.; HERTLEIF, C.; SILLER, H.-S. Mathematical modelling with digital tools—a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. **ZDM**, p. 1–12, 2018.

GREEFRATH, G.; SILLER, H.-S. Modelling and Simulation with the Help of Digital Tools. In: **Mathematical Modelling and Applications: Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education (ICTMA 15)**. Melbourne: STILLMAN, G.; BLUM, W.; KAISER, G.;(Ed.), 2017. p. 529–540.

IZMIRLI, I. M. Wittgenstein as a Social Constructivist. **Philosophy of Mathematics Education Journal**, v. 27, abr. 2013.

JESUS, W. P. **Educação matematica e filosofias sociais da matematica: um exame das perspectivas de Ludwig Wittgenstein, Imre Lakatos e Paul Ernest**. Tese de Doutorado—Campinas: Unicamp, 2002.

KAISER, G. et al. (EDS.). **Trends in teaching and learning of mathematical modelling: ICTMA14**. Hamburgo: Springer, 2011. v. 1

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **ZDM**, v. 38, n. 3, p. 302–310, 2006.

KLÜBER, T. E. **Uma metacompreensão da modelagem matemática na educação matemática**. Tese de Doutorado—Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2012.

KNIJNIK, G. et al. **Etnomatemática em movimento**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2012.

LÉVY, P. **As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática**. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

MALHEIROS, A. P. S. **A produção matemática dos alunos em um ambiente de modelagem**. Dissertação de Mestrado—Rio Claro: Unesp, 2004.

MALHEIROS, A. P. S. **Educação Matemática online: a elaboração de projetos de Modelagem**. Tese de Doutorado—Rio Claro: Unesp, 2008.

MASS, K. What are competencies. **ZDM**, v. 38, n. 2, p. 113–141, 2006.

MCCULLAGH, M. Wittgenstein on rules and practices. **Journal of Philosophical Research**, v. 27, p. 83–100, 2002.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. S. Modelagem em educação matemática. **Belo Horizonte: Autêntica**, 2011.

MIGUEL, A. Is the Mathematics Education a problem for the school or is the school a problem for the Mathematics Education? **RIPEM**, v. 4, n. 2, p. 5–35, 2014.

MOREIRA, H. Investigação da motivação do professor: a dimensão esquecida. **Revista Educação & Tecnologia**, n. 1, p. 88–96, 1997.

MORENO, A. Descrição fenomenológica e descrição gramatical-idéias para uma pragmática filosófica. **Revista Olhar**, v. 7, n. 7, p. 94–139, 2003.

MORENO, A. R. **Introdução a uma pragmática filosófica**. Campinas: Editora Unicamp, 2005.

NISS, M. Prescriptive modelling–challenges and opportunities. In: **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**. New York: Gloria Ann Stillman; Werner Blum; Maria Salett Biembengut. (Eds.). Springer, 2015. p. 67–79.

OLIVEIRA, C. F. **Modelagem Matemática do Crescimento Populacional: Um olhar à luz da Socioepistemologia**. Dissertação de Mestrado—Londrina: Universidade Estadual de Londrina, 2011.

OLIVEIRA, C. F.; SOUZA, H. C. T.; ALMEIDA, L. M. W. **Leitura de esquemas de modelagem matemática numa perspectiva wittgensteiniana**. IX Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática. **Anais**...São Carlos - SP: 2015

OLIVEIRA, M. S. **Interpretação e comunicação em ambientes de aprendizagem gerados pelo processo de modelagem matemática**. Dissertação de Mestrado—Belém: Universidade Federal do Pará, 2010.

OLIVEIRA, M. S.; SILVEIRA, M. R. A. Falar e mostrar para provar: uma contribuição teórica sobre a utilização dos gestos ostensivos wittgensteinianos como auxiliares na prova matemática. **Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 9, n. 2, p. 271–285, 2016.

PALHARINI, B. N. **A Matemática em atividades de modelagem matemática: uma perspectiva wittgensteiniana**. Tese de Doutorado—Londrina: Universidade Estadual de Londrina-UEL, 2017.

POLLAK, H. O. The interaction between mathematics and other school subjects. **New trends in mathematics teaching IV**, p. 232–248, 1979.

PONTE, J. P. Estudos de caso em educação matemática. **Boletim de Educação Matemática**, v. 19, n. 25, 2006.

POSTAL, R. F. **Atividades de modelagem matemática visando a uma aprendizagem significativa de funções afins, fazendo uso do computador como ferramenta de ensino**. Dissertação de Mestrado—Lajeado-RS: Centro Universitário Univates, 2009.

QUARTIERI, M. T. **A Modelagem Matemática na escola básica: a mobilização do interesse do aluno e o privilegiamento da matemática escolar**. Tese de Doutorado—São Leopoldo - RS: Universidade do Vale do Rio dos Sinos - UNISINOS, 2012.

SALZANO, J. T. Comentários sobre os "jogos de linguagem". **Integração**, v. Ano X, n. 39, p. 377–381, 2004.

SANTOS, F. V. **Modelagem Matemática e Tecnologias de Informação e Comunicação: o uso que os alunos fazem do computador em atividades de modelagem**. Dissertação de Mestrado—Londrina: Universidade Estadual de Londrina, 2008.

SILVA, C. **A perspectiva sociocrítica da Modelagem Matemática e a Aprendizagem Significativa Crítica: possíveis aproximações**. Dissertação de Mestrado—Maringá: Universidade Estadual de Maringá, 2011.

SILVA, K. A. P. **Modelagem matemática e semiótica: algumas relações**. Dissertação de Mestrado—Londrina: Universidade Estadual de Londrina, 2008.

SILVA, K. A. P. **Uma interpretação semiótica de atividades de Modelagem Matemática: implicações para a atribuição de significado**. Tese de Doutorado—Londrina: Universidade Estadual de Londrina, 2013.

SILVA, P. V.; SILVEIRA, M. R. A. O ver-como wittgensteiniano e suas implicações para a aprendizagem da Matemática: um ensaio. **BoEM-Boletim online de Educação Matemática**, v. 2, n. 3, p. 17–34, dez. 2014.

SILVEIRA, M. R. A.; SILVA, P. V. A compreensão de regras matemáticas na formação docente: uma pesquisa sob o ponto de vista da linguagem. **Arquivos Analíticos de Políticas Educativas**, v. 21, n. 27, 2013.

SILVEIRA, M. R. A.; TEIXEIRA JUNIOR, V. P. Educação Matemática, linguagem e arte: a apreciação da Matemática pela compreensão de suas regras. **Reflexão e Ação**, v. 23, n. 1, p. 204–220, 2015.

SILVEIRA, M. R. A.; SILVA, P. V. O cálculo e a escrita matemática na perspectiva da filosofia da linguagem: domínio de técnicas-The calculation and the mathematical

writing from the perspective of philosophy of language: mastery of techniques. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 18, n. 1, p. 469–483, 2016.

SOARES, D. S. **Uma Abordagem Pedagógica Baseada na Análise de Modelos para Alunos de Biologia: qual o papel do software?** Tese de Doutorado—Rio Claro: Unesp, 2012.

SOARES, D. S.; BORBA, M. C. The role of software Modellus in a teaching approach based on model analysis. **ZDM**, v. 46, p. 575–587, 2014.

SOUSA, C. O processo de formação de proposições e a possibilidade da dúvida no Sobre a Certeza de Wittgenstein. **Argumentos**, v. 5, n. 9, jun. 2013.

SOUSA NETO, P. R. **Aplicação de regras na aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral: um enfoque na filosofia de Wittgenstein**. Tese de Doutorado—Belém: Universidade Federal do Pará, 2016.

SOUZA, H. C. T. **Uma análise dos esquemas do processo de Modelagem Matemática**. Dissertação de Mestrado—Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2013.

SOUZA, H. C. T.; OLIVEIRA, C. F.; ALMEIDA, L. M. W. **O seguir regras em uma atividade de Modelagem Matemática**. Anais da X Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática. **Anais**...2017

SOUZA, H. C. T.; OLIVEIRA, C. F.; ALMEIDA, L. M. W. **Uma proposta de Modelagem prescritiva**. . In: VII EPMEM - ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Londrina: 2016

SOUZA, E. G. **A aprendizagem matemática na modelagem matemática**. Tese de Doutorado—Feira de Santana: Universidade Federal da Bahia, 2012.

SOUZA, E. G.; BARBOSA, J. C. Contribuições teóricas sobre a aprendizagem matemática na modelagem matemática. **Zetetiké**, v. 22, n. 41, jun. 2014.

TIKHOMIROV, O. K. **Man and computer**. Moscow: Moscow University Press, 1972.

TORTOLA, E. **Os usos da linguagem em atividades de modelagem matemática nos anos iniciais do ensino fundamental**. Dissertação de Mestrado—Londrina: Universidade Estadual de Londrina, 2012.

TORTOLA, E. **Configurações de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. Tese de Doutorado—Londrina: Universidade Estadual de Londrina-UEL, 2016.

VEIGA-NETO, A.; LOPES, M. C. Identidade, cultura e semelhança de família: as contribuições da virada linguística. In: **Eu e os outros: estudos multidisciplinares sobre identidade (s), diversidade (s) e práticas culturais**. BIZARRO, Rosa (org.). Porto: Areal, 2007. p. 19–35.

VERONEZ, M. R. D. **As funções dos signos em atividades de modelagem matemática**. Tese de Doutorado—Londrina: Universidade Estadual de Londrina, 2013.

VERTUAN, R. E. **Um olhar sobre a Modelagem Matemática à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica**. Dissertação de Mestrado—Londrina: Universidade Estadual de Londrina, 2007.

VERTUAN, R. E. **Práticas de Monitoramento cognitivo em atividades de modelagem matemática**. Tese de Doutorado—Londrina: Universidade Estadual de Londrina, 2013.

VILELA, D. S. **Matemáticas nos usos e jogos de linguagem: Ampliando concepções na Educação Matemática**. Tese de Doutorado—Campinas: Unicamp, 2007.

WITTGENSTEIN, L. **Tractatus Logico-Philosophicus**. São Paulo: Biblioteca Universitaria, 1968.

WITTGENSTEIN, L. **Observaciones sobre los fundamentos de la matemática**. Madrid: Alianza Editorial, 1987.

WITTGENSTEIN, L. **Investigações Filosóficas**. São Paulo: Editora Nova Cultura Ltda, 2000.

WITTGENSTEIN, L. **Sobre La Certeza**. 1. ed. Barcelona: Gedisa editorial, 2003.

WITTGENSTEIN, L. **Observações Filosóficas**. São Paulo: Edições Loyola, 2005.