Universidade Estadual de Londrina

ANGELA FONTANA MARQUES

AULAS DE MATEMÁTICA:

NARRATIVAS DE UMA PROFESSORA EM TRANSIÇÃO

Londrina
2017

ANGELA FONTANA MARQUES

AULAS DE MATEMÁTICA:

NARRATIVAS DE UMA PROFESSORA EM TRANSIÇÃO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Doutora.

Orientadora: Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco

Londrina
2017

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

M357a Marques, Angela Fontana.
Aulas de matemática: narrativas de uma professora em transição / Angela Fontana Marqueso. - Londrina, 2017.
83 f. : il.

Orientador: Regina Luzia Corio de Buriasco.
Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina,
Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2017.
Inclui bibliografia.

1. Educação matemática realística – Teses. 2. Narrativa – Teses. 3. Prática docente – Teses. I. Buriasco, Regina Luzia Corio de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

ANGELA FONTANA MARQUES

AULAS DE MATEMÁTICA:

NARRATIVAS DE UMA PROFESSORA EM TRANSIÇÃO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Doutora.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Profª. Drª. Regina Luzia Corio de Buriasco
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Profª. Drª. Maria Tereza Carneiro Soares –
Universidade Federal do Paraná- UFPR

Profª. Drª. Marcele Tavares Mendes
Universidade Federal Tecnológica do Paraná - UTFPR

Profª. Drª. Angela Marta P. das D. Savioli
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Profª. Drª. Andréia Büttner Ciani
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE

Londrina, 20 de fevereiro de 2017.

Dedico este trabalho ao meu esposo,
Ronaldo, e ao meu filho, João Vitor,
homens da minha vida e sentido para
minhas conquistas.

AGRADECIMENTOS

A todos que fizeram parte de cada passo de minha caminhada, que contribuíram para eu que conseguisse realizar mais esta conquista em minha vida!

Em especial:

- ✓ a Deus, por me capacitar e não me deixar enfraquecer;
- ✓ à minha orientadora Regina, por não desistir de mim, por ter me oportunizado e me guiado nesse processo de intenso aprendizado a quem, serei eternamente grata por todo o cuidado que sempre teve comigo;
- ✓ às professoras da banca pelo cuidado ao realizar as leituras do meu trabalho e por todas as contribuições;
- ✓ a todas as “criaturas” do GEPEMA, por todas as discussões e estudos, por todas as experiências vividas com vocês, companheiros que muito respeito;
- ✓ aos meus queridos alunos, principalmente aos alunos da turma do 3o ano do curso Técnico em Informática Integrado ao Ensino Médio do ano de 2014, que me apoiaram e aceitaram a minha proposta de pesquisa;
- ✓ aos professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática pelos momentos e oportunidades de discussões, estudos e de aprendizagem;
- ✓ aos meus amigos do IFPR – Campus Paranavaí, por terem acreditado e incentivado meus estudos, por sempre me motivar e escutar minhas angústias, medos, incertezas;
- ✓ ao meu esposo Ronaldo, “MEU PRÍNCIPE”, por todos os momentos vividos, por sonhar comigo, por me dar segurança, por me ajudar em todas as dificuldades, por cuidar do nosso filho de forma exemplar e, sobretudo, por me fazer sentir amada;
- ✓ ao meu filho João Vítor, “pessoinha” que amo incondicionalmente, um presente de Deus em minha vida;
- ✓ ao meu pais, Alcides e Yvone, que foram meus alicerces, que me ensinaram a nunca desistir dos meus sonhos, por todos os ensinamentos, e por terem me dado a oportunidade de ter vindo ao mundo;

- ✓ a minha irmã Yone, “irmãmiga”, por sempre ter me apoiado, ajudado, escutado e orado por mim, por sonhar comigo, por me tratar com uma filha;
- ✓ aos meus irmãos Alcione, Altair e Leandro, pelo incentivo, por compartilharem comigo momentos de tristeza e de alegrias, por todo o carinho e compreensão;
- ✓ a todos os meus familiares, cunhados(as), sobrinhos(as), “AGREGADOS”, que sempre torceram por mim, por entenderem minha ausência em alguns momentos, por estarem sempre me apoiando com palavras de incentivo;
- ✓ aos meus amigos Osmar, Hallynnee e Etiane, por sempre me apoiarem, por me consolarem quando precisei, por me fazerem enxergar caminhos, por sempre torcerem por mim;
- ✓ aos meus amigos Antão Rodrigo e Edwiges, por fazerem papel de irmãos, por cuidarem do meu filho quando eu precisava estudar, pela amizade e carinho, por sempre me socorrerem mesmo que eu não pedisse socorro;
- ✓ ao Instituto Federal do Paraná, pelo afastamento concedido;
- ✓ a todos que, de alguma forma, contribuíram para que este trabalho fosse realizado.

Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades, lembrai-vos de que as grandes coisas do homem foram conquistadas do que parecia impossível.

Charles Chaplin

MARQUES, Angela Fontana. **Aulas de matemática**: narrativas de uma professora em transição. 2017. 82f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

RESUMO

Este trabalho apresenta narrativas cuja fonte foram aulas ministradas semanalmente em uma turma do 3º ano de um curso técnico do Ensino Médio, com 22 alunos, durante o primeiro semestre do ano de 2013, em uma escola de um município situado no noroeste do Paraná. O principal objetivo foi conhecer aspectos da minha prática letiva na qual pensei atender os princípios e ideias da abordagem Educação Matemática Realística, entre eles, a Matemática como atividade humana, a aprendizagem Matemática por meio da matematização, o ensino e a aprendizagem por meio da Reinvenção Guiada. Analisando minha prática narrada nesta investigação percebo a grande dificuldade que ainda tenho de esperar o aluno pensar, construir estratégias e procedimentos por ele mesmo. Entendi que os princípios e pressupostos da RME vão além do planejar bem as aulas uma vez que estão na ação do professor, na prática docente, na ação do aluno, na dinâmica das aulas. A matemática como atividade humana faz parte da concepção de ensino da matemática do professor que se dispõe a trabalhar nessa perspectiva.

Palavras-Chave: Educação Matemática Realística. Narrativa. Prática docente.

MARQUES, Angela Fontana. **Mathematics classes:** narratives of a teacher in transition. 2017. 82f. Doctoral thesis (Post-Graduation on the Teaching of Sciences and Mathematics Education) – State University of Londrina, Londrina, 2017.

ABSTRACT

This thesis presents narratives from classes taught weekly in a 3rd year class of a Secondary Technical School, with 22 students, during the first semester of 2013, in a school from a city in northwest of Paraná. The main goal was to know aspects of my teaching practice, in which I thought I would meet the principles and ideas of Realistic Mathematics Education approach, among them, mathematics as a human activity, mathematics learning through mathematization, teaching and learning through guided reinvention. Analyzing my practice that was narrated in this investigation, I realize the big difficulty, that I still have, to wait the student to think, to construct strategies and procedures for himself. I understood that the principles and assumptions of RME go beyond planning classes once they are in the action of the teacher, in the teaching practice, in the student's action, in the dynamics of the classes. Mathematics as a human activity is part of the teaching conception of mathematics of the teacher who is willing to work in this perspective.

Key words: Realistic Mathematics Education. Narrative. Teaching practice.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Tarefa: encarte de um supermercado e tabela de preço da cantina do IFPR – Campus Paranavaí....25
Figura 2 – Resolução apresentada pelo grupo A....29
Figura 3 – Sistema 3x3 elaborado pelos alunos B e O....65
Figura 4 – Resolução do sistema 3x3 elaborado pelos alunos B e O....65
Figura 5 – Sistema 3x3 elaborado pelos alunos G e V....69
Figura 6 – Resolução do sistema 3x3 produzida pelos alunos G e V....69

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Teses e Dissertações do GEPEMA que envolvem algo da RME.........15
Quadro 2 – Estratégia de ensino: aula do dia 23/04/2014 20
Quadro 3 – Esquema de aulas..22
Quadro 4 – Aula planejada e aula na Tendência da Resolução de Problemas 23
Quadro 5 – Indícios de aspectos da RME na fala dos alunos.................................35
Quadro 6 – Lista de Tarefas...52
Quadro 7 – Explicação do aluno Q 54
Quadro 8 – Representação encontrada pelo aluno O..59
Quadro 9 – Tarefa - Sistema de equações de duas equações e duas incógnitas 60
Quadro 10 – Tarefa - Sistema de equações de três equações e três incógnitas 60
Quadro 11 – Tarefa - Sistema de equações de quatro equações e quatro incógnitas 61
Quadro 12 – Sistema de equações de duas equações e duas incógnitas elaborado e resolvido pelos alunos 61
Quadro 13 – Elaboração de alguns Sistemas de equações de três equações e três incógnitas 63

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Resolução apresentada pelo grupo B 29
Tabela 2 – Resolução apresentada pelo grupo E 29

SUMÁRIO

DA NARRADORA..14

DO ITINERÁRIO 18

DAS NARRATIVAS: MISTURANDO ANTES, DURANTE E DEPOIS.....................19

DO INTENTO 74

REFERÊNCIAS..78

APÊNDICE..81

DA NARRADORA

"Se você não for atrás do que quer, nunca vai ter. Se não der um passo à frente nunca sairá do lugar." (Jhennifer Cavassola)

Em 2012, passei na seleção para o doutorado no Programa de Pós- -Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática na Universidade Estadual de Londrina – UEL, onde, desde setembro de 2009, participava, semanalmente, dos encontros do Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação - GEPEMA[1]. Com a participação no grupo, o encantamento com a área da Educação Matemática e com a Avaliação da Aprendizagem me levou a fazer o doutorado nesse programa, e, com isso, nasceu a proposta deste trabalho que é apresentar uma narrativa da minha prática docente durante o processo de mudança, no qual ainda estou imersa.

Anteriormente a essa participação no grupo, escrevia, nos projetos, nos planos de ensino de minha prática letiva, que a avaliação aconteceria de forma contínua, paralela e concomitante ao processo de ensino e aprendizagem. Depois de começar a participar do GEPEMA, fui percebendo que essa concepção ficava apenas nos documentos. Na prática, eu fazia mesmo era uma avaliação do rendimento.

Os estudos, leituras e discussões propostos pelo GEPEMA me permitiram refletir a respeito dos vários assuntos referentes à Educação Matemática, dentre eles, a função do professor. Dessa maneira, pude perceber que a função do professor não era apenas dominar um conteúdo e, em sala de aula, expor o que sabia e depois cobrar que os alunos repetissem o que foi exposto. É função do professor é oportunizar que os alunos construam seu próprio conhecimento e evoluam.

Participar do GEPEMA me influenciou a continuar minha formação na área da Educação Matemática e Avaliação. Quando iniciei minha participação no GEPEMA, o grupo estava trabalhando com a produção escrita em questões não rotineiras de Matemática por meio da Análise da Produção Escrita. Essas questões eram retiradas do banco de questões do *Programme for International Student Assessment,* o PISA[2], que inicialmente adotavam alguns dos pressupostos da

---

[1]http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema/

[2]PISA é um estudo global realizado pela *Organisation for Economic Co-operation and Development* (OECD) - Organização para o Desenvolvimento e a Cooperação Econômica.

abordagem Educação Matemática Realística - RME[3]. Essa abordagem permitiu-me perceber que existiam possibilidades para desenvolver um ensino de Matemática que oportunizasse ao aluno aprender matemática, não como “um sistema fechado, mas sim como uma atividade, um processo de matematização da realidade e, se possível ainda, da matematização da matemática" (FREUDENTHAL, 1968, p. 7). Para esse autor, o processo de matematização é o núcleo da atividade do aluno. Os estudos e leituras da RME sobre a oportunidade de matematização me motivavam e provocavam reflexões em relação ao papel do professor, ao papel do aluno na dinâmica das aulas.

O GEPEMA toma a avaliação como um processo intencional, por parte do professor, e serve “para obter informações que o auxiliem a conhecer e compreender como os alunos interpretam uma situação, como procedem para resolver uma tarefa, que dificuldades apresentam, quais erros cometem e por que eles ocorrem, o que demonstram saber” (SANTOS, 2014, p. 27).

Os estudos elaborados à luz da Educação Matemática Realística, que tomavam a avaliação como prática de investigação despertaram o interesse de estudar como seria uma dinâmica de aula na perspectiva da RME.

O Quadro 1 apresenta as teses e dissertações já elaboradas por membros do grupo GEPEMA nas quais a abordagem da Educação Matemática Realística está presente.

Quadro 1 - Teses e Dissertações do GEPEMA que envolvem a RME

Autor Tese/dissertação	Resumo da pesquisa realizada e objetivo central.
Pedrochi Junior (2012) Dissertação	Apresenta algumas das ações consideradas importantes para que uma avaliação se constitua como uma oportunidade de aprendizagem: a autoavaliação, o *feedback*, a avaliação como prática de investigação e a utilização da análise da produção escrita.
Ciani (2012) Tese	Apresenta duas propostas de intervenção como subsídio operacional para a constituição de oportunidade de aprendizagem, por meio da análise da produção escrita, como prática de investigação. Essas propostas foram elaboradas à luz da Educação Matemática, na perspectiva da reinvenção guiada, tomando a avaliação como prática de investigação.
Ferreira (2013)	Realiza um estudo de enunciados de tarefas de matemática e elabora um quadro de referência com base na perspectiva da

[3]*Realistic Mathematics Education*. Abordagem de ensino desenvolvida na Holanda entre o final da década de 1960 e começo dos anos 1970, em oposição ao Movimento da Matemática Moderna.

Tese	Educação Matemática Realística, com o qual se pode analisar tarefas de matemática.
Pires (2013) Tese	Descreve e analisa uma pesquisa com uma prova em fases como instrumento de oportunidade de aprendizagem para professoras de uma escola municipal situada no norte do Paraná. A pesquisadora analisa a prova em fases como uma forma de realizar uma reinvenção-guiada na perspectiva da Educação Matemática Realística.
Trevisan (2013) Tese	Apresenta reflexões referentes à sua prática docente utilizando a prova em fases como instrumento de avaliação em aulas de matemática. Relata seu repensar segundo três focos: os itens que compuseram a prova, o conteúdo matemático subjacente a esses itens e as próprias atitudes enquanto professor de Matemática.
Moraes (2013) Dissertação	Estuda um episódio de múltiplas correções de uma prova escrita de matemática, e apresenta uma condução para a correção dessas provas como mote para provocar reflexão a respeito do papel do professor, tanto nas suas aulas quanto na correção das provas aplicadas. A base de seus estudos é a Educação Matemática Realística na perspectiva da avaliação escolar como oportunidade de aprendizagem.
Santos (2014) Tese	Analisa trabalhos do GEPEMA que utilizam a análise da produção escrita como instrumento de avaliação e como elemento de estudo para oportunidade de aprendizagem. Investiga a utilização da análise da produção escrita em aulas de matemática, sob a luz da reinvenção guiada, para além de ser uma estratégia de avaliação.
Mendes (2014) Tese	Utiliza a Prova em Fases como um recurso de regulação da aprendizagem, em especial, para a regulação de conhecimentos básicos na aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral, pautada na abordagem de ensino da Educação Matemática Realística e em autores que tratam da avaliação como elemento constituinte e permanente da prática pedagógica.
Oliveira (2014) Dissertação	Apresenta um estudo teórico da matematização, um dos temas da Educação Matemática Realística. Para desenvolver a pesquisa, analisou textos de autores da RME, documentos do PISA e dicionários. Também apresenta alguns aspectos referentes a uma aula com vistas a proporcionar ambientes favoráveis à matematização quanto ao papel da reinvenção guiada.
Pereira Junior (2014) Dissertação	Apresenta um estudo dos enunciados de itens de provas de matemática do 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, o qual tem como referência a perspectiva de avaliação como prática de investigação e como oportunidade de aprendizagem tomada por autores da Educação Matemática Realística.
Silva (2015) Dissertação	Configura a reinvenção guiada por meio de aspectos apresentados por autores de textos da Educação Matemática Realística e evidencia um entrelaçamento entre temas, ideias, noções da Educação Matemática Realística e entre o papel do professor e do estudante.

Prestes (2015) Dissertação	Apresenta uma pesquisa realizada com uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do Paraná na qual se utilizou uma prova em fases, como proposta na abordagem de ensino da Educação Matemática Realística, como instrumento de avaliação.

Fonte: A autora

Para Freudenthal, os alunos aprendem matemática fazendo matemática, "matematizando". Na RME, a "matematização" pode ser tomada como a ação de organizar e lidar matematicamente com o "imaginável", ou seja, "é uma atividade de organização e estruturação pela qual conhecimentos são adquiridos e competências são utilizadas para descobrir regularidades, relações e estruturas desconhecidas" (DE LANGE, 1987, p. 43, tradução nossa)[4].

Após participar do GEPEMA por três anos e meio, fui percebendo que havia passado por algumas mudanças e que estava me desvencilhando de alguns preconceitos. Desprender-me de ideias, concepções e ritos foi um processo de incertezas. Parecia simples ministrar aulas seguindo o modelo de apresentar o conteúdo, demonstrar alguma fórmula, apresentar regras, algoritmos que resolviam a situação, indicar exercícios para que os alunos replicassem o que havia sido apresentado e, finalmente, mudar os valores dos exercícios dados em sala e coloca--los na prova. Esse modelo de aula não me provocava dúvidas ao elaborar e ao ministrar a aula, sabia como fazer isso. O único aspecto com que tinha que me preocupar era em resolver, antecipadamente, a lista de exercícios que iria entregar aos alunos para não correr o risco de um aluno não conseguir resolver, perguntar e eu também não saber.

Afinal, quando ministrava aulas seguindo o modelo descrito, acreditava que o professor deveria

> 'ensinar o conteúdo' já previsto em um programa, ao aluno, 'prestar atenção' e, em seguida, fazer uma série de exercícios para 'treinar' o que 'aprendeu', mesmo que, muitas vezes, não reconheça a importância do conteúdo; ao final do bimestre, o aluno faz uma prova, a qual, quase sempre, contém exercícios análogos aos já resolvidos em suas tarefas e, então, o professor atribui alguma nota a essa prova (FERREIRA, 2009, p.14).

[4]Is an organizing and structuring activity to which acquired knowledge and skills are used to discover unknown regularities, relations and structures.

Despregar o que estava “entranhado em minhas tripas”[5] e passar a me preocupar com o elaborar e o ministrar aulas de matemática, considerando aspectos, tais como: estratégias de ensino e avaliação, oportunizar aos alunos se sentirem responsáveis e autores das suas próprias aprendizagens, trabalhar na perspectiva da reinvenção guiada. Tudo isso era algo desconhecido e que exigia, e ainda exige de mim um constante estudar.

DO ITINERÁRIO

Ao longo das últimas décadas, as pesquisas na educação, com abordagem qualitativa, vêm fazendo uso da pesquisa narrativa como uma metodologia de investigação da prática docente.

É usual a expressão “fazer uma narrativa” ser tomada como “contar uma história[6]”, um relato de um ou mais acontecimentos, em uma dada perspectiva, podendo conter ou não, conclusão, “moral da história”.

Para Benjamin (1994), a narrativa oportuniza um reviver de parte do passado, de modo que, junto com o presente e o futuro, seja por ela conectados, sem que o interesse seja outro a não ser o do narrador. Assim, a “coisa em si” toma a forma dada pelo narrador.

A narrativa apresenta, digamos assim, um fenômeno, do ponto de vista do narrador, e, com isso, a pesquisa narrativa é principalmente uma forma de pensar sobre a experiência (CONNELLY; CLANDININ, 2004), sendo ao mesmo tempo o método de pesquisa e o fenômeno pesquisado.

A presente pesquisa é uma investigação de caráter qualitativo de cunho predominantemente interpretativo, cujo objetivo é narrar episódios da minha prática docente em aulas de matemática. A fonte dos dados é a sala de aula. Aqui estão as situações vividas e a busca por conhecer possíveis significados, refletindo na minha trajetória pessoal e profissional, atendendo à dupla dimensão da pesquisa narrativa: a de investigação e a de formação.

> Configura-se como investigação porque se vincula à produção de conhecimentos experienciais dos sujeitos adultos em formação. Por outro lado, é formação porque parte do princípio de que o sujeito toma consciência de si e de suas aprendizagens experienciais quando vive,

---

[5]Expressão metafórica muito utilizada pela Profa. Dra. Regina Luzia Corio de Buriasco.
[6]História: segundo o dicionário de Língua Portuguesa Houaiss (2001, CD ROM).

> simultaneamente, os papéis de ator e investigador da sua própria história (SOUZA, 2006, p.26)

Assim, o foco de interesse não é o produto final, mas o próprio processo de produção das narrativas, pois, segundo Bolívar (2001, p.2), "[...] contar as próprias vivências e ler, no sentido de interpretar, ditos feitos e ações, à luz das histórias que os atores narram, se converte em uma perspectiva peculiar de investigação". Peculiar na medida de ser predicado daquele específico narrador, que apresenta, de forma consciente, suas narrativas e, por conta delas, os questionamentos a respeito do que e do como escreveu, colocando-o também como autor e ator das experiências e, consequentemente, dos episódios narrados.

DAS NARRATIVAS: MISTURANDO ANTES, DURANTE E DEPOIS

As aulas foram ministradas semanalmente nos dois primeiros horários das quartas-feiras, na turma do 3º ano do curso Técnico em Informática Integrado ao Ensino Médio, na disciplina de Matemática III, que é anual, durante o primeiro semestre do ano de 2013, no Instituto Federal do Paraná – IFPR - Campus Paranavaí. Nessa disciplina, estavam matriculados 22 alunos.

No primeiro encontro do ano, foi explicado aos alunos que as aulas de Matemática III, do primeiro semestre, seriam ministradas numa perspectiva diferente. As aulas deixariam de ser, na maioria, expositivas e passariam a oportunizar aos alunos que fossem construtores/elaboradores/reinventores da Matemática.

Como forma de situar os alunos acerca da dinâmica da aula, foi informado que na sala de aula eles desempenhariam o papel de construtores do próprio conhecimento e que, em muitos momentos, seria solicitado que eles compartilhassem suas reflexões (explicações, justificativas, conjecturas), produções com os demais alunos. Buscou-se destacar a importância do professor e do aluno para que isso fosse possível.

Foram feitos alguns comentários a respeito da Educação Matemática Realística. Um deles era que a RME proporciona aos alunos situações que podem ser matematizadas para que elaborem algum conhecimento a partir do seu próprio conhecimento prévio. Questionou-se se estavam dispostos a participar, e a turma concordou e achou a proposta interessante. Como os alunos eram menores de idade, foi-lhes comunicado que, na reunião de pais e mestres do primeiro dia de aula, a proposta de aulas de matemática nessa perspectiva já havia sido explicada aos pais, que haviam assinado um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, que foi apresentado aos alunos para que tomassem ciência do conteúdo do documento.

A turma foi informada de que as aulas seriam gravadas por meio de vídeos e áudios, que as tarefas realizadas deveriam ser entregues à professora, quando solicitado, e que trabalhariam em grupos com muita frequência.

Do meu ponto de vista, as aulas haviam sido planejadas adequadamente e atendiam às perspectivas da RME. Eu havia proposto aos alunos tarefas que considerava realísticas e acreditava que estava criando um ambiente no qual não desempenhava o papel de transmissora de conhecimento e o aluno, de receptor. Considerava, na época do planejamento, ter desenvolvido estratégias de ensino que ajudariam os alunos a não receberem o conhecimento matemático pronto e acabado, e que lhes dariam oportunidade de estruturar, monitorar, refletir, discutir, debater, ajustar atividades por meio da elaboração do seu próprio conhecimento matemático. Eu estava convicta de que havia seguido os princípios da Educação Matemática Realística.

No entanto, à medida que ministrava as aulas e tentava pôr em prática o que havia planejado, fui percebendo um descompasso entre a minha prática e a perspectiva da RME. O planejamento que havia elaborado não estava na perspectiva da RME. Mesmo buscando me distanciar, ao máximo, de outras abordagens de ensino e aprendizagem, certamente, sofria influência do ensino tradicional.

O Quadro 1 apresenta um exemplo de estratégia de ensino planejada para ministrar as aulas na perspectiva inicialmente pensada como sendo da RME.

Quadro 2 – Estratégia de ensino: aula do dia 23/04/2014

Plano de aula do dia 23/04/2014

Duração: 2 aulas de 50 minutos cada uma.

O objetivo é trabalhar com os conceitos de:

— Equação linear;
— Solução de uma equação linear.

A aula iniciará com a professora mostrando, em *slide* (Tarefa 1), fotos de encartes e tabelas de preços, entre elas, a foto da tabela de preço da cantina do IFPR – Campus Paranavaí. O intuito é trabalhar com os alunos a ideia de sistemas de equação voltada a situações vividas, por eles, todos os dias. Será solicitado aos alunos que criem situações de compra (equações) dos diversos produtos dos encartes ou das tabelas, e que estas compras sejam detalhadas para que após possam ser demonstradas à turma. Em boa parte dos livros didáticos, o capítulo de sistema de equações já inicia com a definição: chama-se equação linear toda equação de 1º grau, com uma ou mais incógnita. A ideia é fazer com que os alunos observem características entre as situações de compra, elaboradas por eles, e que percebam a presença das incógnitas, coeficiente e termo independente. Após, os alunos serão questionados a respeito da possibilidade de se escrever de maneira geral a equação linear, e, como tarefa, eles deverão propor esta definição (maneira geral). Espera-se que os alunos elaborem algo próximo à maneira geral, apresentada na forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

em que a_1, a_2, a_3,..., a_n são constantes reais chamadas de coeficientes das incógnitas, b é uma constante real chamada de termo independente da equação e x_1, x_2, x_3,..., x_n são as incógnitas.

Por meio das situações de compra postas pelos alunos, também se trabalhará com a ideia de solução da equação linear. Esta expressão “solução da equação linear” será colocada no quadro, e a professora questionará os alunos a respeito do que eles pensam quando escutam tal expressão? Toda equação tem sempre uma solução? Pretende-se, com esses questionamentos, que os alunos percebam que, para a solução da equação é preciso substituir na equação as incógnitas por valores, de tal forma que torne a sentença verdadeira. Serão escritas no quadro algumas equações, exemplo: $0x + 0y = 9$, e será solicitado aos alunos que encontrem a solução para a equação. Com essa tarefa, pretende-se discutir quando uma equação é impossível, pois não admite soluções.

Para tratar do assunto de Equação Linear Homogênea, será solicitado aos alunos que elaborem uma situação de compra, porém o valor da compra deverá ser zero. O questionamento norteador será:

- Quais os possíveis valores para o que você deseja comprar (para as incógnitas)?

Deseja-se com esta tarefa que os alunos compreendam que, para uma equação, na qual o termo independente é zero e os valores dos coeficientes diferentes de zero, sempre se admite a solução $(0,0,0,\ldots,0)$, o que se chama de solução trivial.

Será solicitado que os alunos resolvam as tarefas - exercícios resolvidos e os exercícios propostos - da página 127 do livro didático PAIVA, M. Matemática. São Paulo: Moderna, 2009. II Volume.

Fonte: A autora

Após a aplicação das aulas para o 3º ano do curso Técnico em Informática Integrado ao Ensino Médio, no primeiro semestre de 2014, foi realizada uma análise geral do trabalho desenvolvido. Quando comecei a escrever a narrativa da aula, constatei que as estratégias de resolução das tarefas haviam sido dadas por mim, e não desenvolvidas pelos alunos conforme pretendia. Ainda surpresa com a constatação, lembrei-me de um quadro elaborado por Buriasco (1995), no qual ela apresenta dois esquemas de aulas.

Quadro 3 – Esquema de aulas

Esquema de aula na Tendência Tradicional	Esquema de aula na Tendência da Resolução de Problemas
1) O professor explica a matéria (teoria).	1) O professor apresenta um problema - escolhido por ele ou pelo(s) aluno(s).
2) O professor mostra exemplos.	2) Os alunos tentam resolver o problema com o conhecimento que têm.
3) O professor propõe “exercícios” semelhantes aos exemplos dados para que os alunos resolvam.	3) Quando os alunos encontram algum obstáculo (falta de algum conteúdo necessário para a resolução do problema) o professor apresenta, de alguma forma, esse conteúdo.
4) O professor (ou um aluno) resolve no quadro de giz os exercícios.	4) Resolvido o problema, os alunos discutem sua solução, se necessário, com a ajuda do professor. Essa discussão envolve todos os aspectos da resolução do problema, inclusive os do conteúdo necessário.
5) O professor propõe aos alunos outros “exercícios” já não tão semelhantes aos exemplos que ele resolveu.	5) O professor apresenta outro problema - escolhido por ele ou pelo(s) aluno(s).
6) O professor (ou um aluno) resolve os exercícios no quadro de giz.	
7) O professor propõe “problemas”, se for o caso, ou mais “exercícios”.	
8) Correção dos “problemas” ou e dos “exercícios”.	
9) O professor começa outro assunto.	

Fonte: Buriasco (1995)

Incomodada com a surpresa e buscando entender esse descompasso entre o que pretendia fazer e o que de fato foi feito, elaborei o quadro a seguir.

Quadro 4 – Aula planejada e aula na Tendência da Resolução de Problemas

Aula do dia 23/04/2014 planejada	Esquema de aula na Tendência da Resolução de Problemas (BURIASCO, 1995)
A aula iniciará com a professora mostrando, *slides*, fotos de encartes e tabelas de preços, entre elas, a foto da tabela de preço da cantina do IFPR – Campus Paranavaí, conforme consta no Quadro 1 . O intuito era trabalhar com os alunos a ideia de sistemas de equação voltada a situações vividas por eles diariamente. Serão escritas no quadro algumas equações, exemplo: $0x + 0y = 9$, e será solicitado aos alunos que encontrem a solução para a equação. Com essa tarefa, pretende-se discutir o que significa uma equação ser impossível de resolver e quando isso pode ocorrer. Para tratar do assunto de Equação Linear Homogênea será solicitado aos alunos que elaborem uma situação de compra, porém o valor da compra deverá ser zero.	1) O professor apresenta um problema - escolhido por ele ou pelo(s) aluno(s).
Será solicitado aos alunos que criem situações de compra (equações) dos diversos produtos dos encartes ou das tabelas, e que estas compras sejam detalhadas para que após possam ser demonstradas à turma. A ideia é fazer com que os alunos observem características entre as situações de compra, elaboradas por eles, e que percebam a presença das incógnitas, coeficiente e termo independente.	2) Os alunos tentam resolver o problema com o conhecimento que têm.
Após, os alunos serão questionados a respeito da possibilidade de escrever de maneira geral, a equação linear, e, como tarefa, eles deverão propor essa definição (maneira geral). O questionamento norteador será: quais os possíveis valores para o que você deseja comprar (para as incógnitas)?	3) Quando os alunos encontram algum obstáculo (falta de algum conteúdo necessário para a resolução do problema), o professor apresenta, de alguma forma, esse conteúdo.
Por meio das situações de compra postas pelos alunos também se trabalhará com a ideia de solução da equação linear. Deseja-se com esta tarefa fazer com que os alunos compreendam que, para uma equação, na qual o termo independente é zero e os valores dos coeficientes diferentes de zero, sempre se admite a solução	4) Resolvido o problema, os alunos discutem sua solução, se necessário, com a ajuda do professor. Essa discussão envolve todos os aspectos da resolução do problema,

$(0,0,0,\dots,0)$, o que se chama de solução trivial.	inclusive os do conteúdo necessário.
Esta expressão "solução da equação linear" será posta no quadro e a professora questionará os alunos a respeito do que eles pensam quando escutam tal expressão. É possível ter solução da equação verdadeira ou falsa? Pretende-se, com estes questionamentos, que os alunos percebam que, para que a solução da equação seja verdadeira, é preciso substituir na equação as incógnitas por valores, de tal forma que torne a sentença verdadeira. Será solicitado que os alunos resolvam as tarefas Exercícios resolvidos e os exercícios propostos na página 127 do livro didático PAIVA, M. M**atemática**. São Paulo: Moderna, 2009. II Volume.	5) O professor apresenta outro problema - escolhido por ele ou pelo(s) aluno(s).

Fonte: A autora

Analisando a aula planejada, observei que sempre é proposta uma tarefa como ponto de partida, para cada aula, e o esquema de aula se parece com o apresentado na Tendência da Resolução de Problemas. Como eu pretendia, no caso, ministrar aulas de matemática na perspectiva da Educação Matemática Realística, pode-se dizer que o trabalho foi equivocado, por várias razões, entre elas porque a estratégia de resolução foi proposta por mim e não resultado do trabalho dos alunos.

As tarefas deveriam permitir a recolha de informações, possibilitar a exploração das resoluções dos alunos, das mais informais até as mais formais, e, por meio dessa exploração, reconhecer as diferenças existentes entre elas. Assim, eu teria a oportunidade de discutir com meus alunos aspectos matemáticos de forma mais aprofundada e guiá-los na construção de seu próprio conhecimento matemático. Nas aulas ministradas, as tarefas foram escolhidas com a intenção de propor aos alunos uma situação que possibilitasse que eles se movessem em diferentes níveis de matematização e reinventassem alguma matemática. No entanto, a condução das aulas não permitiu isso. Para caracterizar uma aula, como ministrada à luz da RME, alguns aspectos deveriam estar presentes: o aluno precisaria deixar de ser mero espectador da Matemática pronta e acabada e passar a desempenhar o papel de agente ativo na construção do seu próprio conhecimento; o professor deixaria de exercer a função de transmitir conhecimento e assumiria um papel de guia, de acordo com o princípio da Reinvenção Guiada.

Figura 1 – Tarefa o encarte de um supermercado e tabela de preço da cantina do IFPR – Campus Paranavaí

As fotos a seguir são referentes aos encartes de supermercados e da tabela de preço da cantina do IFPR – Campus Paranavaí. Utilizando os diversos produtos presentes no encarte ou na tabela, elabore duas expressões que representem situações de compra que você costuma fazer ou desejaria fazer. Descreva as expressões no seu caderno.

Fonte: tabela de preço da cantina do IFPR – Campus Paranavaí

Essa tarefa (Figura 1) foi utilizada no início da aula com a intenção de dar oportunidade aos alunos de trabalharem com alguma linguagem matemática. Também se desejava que a tarefa motivasse os alunos a apresentarem uma resolução, que seria compartilhada com a turma toda. Assim, interagiriam uns com os outros e teriam a possibilidade de analisar e discutir as estratégias e os procedimentos que utilizaram. Ao refletir sobre como a proposta foi feita, reconheci, muito a contragosto, o caminho seria o contrário: as equações (linguagem matemática) viria para lidar com a situação.

Na RME, segundo De Lange (1987), as tarefas devem ser ricas, despertando no aluno o interesse em resolvê-las. Além disso, o autor destaca que tarefas ricas não são necessariamente aquelas que representam situações complexas ou difíceis, mas aquelas para as quais todos os alunos sejam capazes de lidar. Foi com essa intenção que propus a tarefa (Figura 1). O intuito era recolher informações em relação ao tratamento matemático apresentado pelos alunos e identificar quais intervenções seriam convenientes para os alunos continuarem.

A fim de identificar se a tarefa proposta havia despertado o interesse dos alunos e de recolher algumas informações, perguntei no que eles pensavam quando olhavam para as imagens presentes no enunciado. Eles revelaram que se imaginavam em diversas situações a partir das imagens: fazer compra para casa, fazer propaganda de alimentos, comprar coisas gostosas, economizar (já que os encartes eram de diferentes supermercados de Paranavaí) e comprar lanche na cantina. Solicitei aos alunos que verbalizassem o motivo que os levou a fazer tais sugestões. A turma apresentou vários argumentos e não houve uma sugestão que sobressaísse, portanto pedi que a turma se dividisse em grupos de três alunos. Como havia vinte e dois alunos, foram formados seis grupos compostos por três alunos e um com quatro. Todos os alunos dessa turma possuíam *notebook*, então foram enviados a eles os encartes para que pudessem realizar a tarefa.

Quando preparei a tarefa (Figura 1), imaginei que a tabela de preços da cantina seria tomada pela turma para elaborar as equações, porém isso não aconteceu. Foi necessário fazer um ajuste em relação ao que havia planejado. Para recolher informações a respeito da produção dos alunos, tanto oral como escrita, mudei a pergunta que tinha feito na tarefa (Figura 1). Em vez de solicitar aos alunos que elaborassem duas expressões que representassem situações de compras que costumavam fazer, ou desejariam fazer, pedi que eles simulassem uma compra usando os produtos que estivessem representados nos encartes ou na tabela de preços da cantina e, depois, cada grupo deveria representar a compra no quadro.

Ainda analisando a primeira proposta feita, percebi minha dificuldade de deixar o aluno refletir, construir estratégias e procedimentos por si só. Ao propor a tarefa, deixei explícito que desejava que os alunos montassem uma equação. A situação de compra simplesmente “veste” a tarefa. Quando mudei a pergunta e solicitei que simulassem uma compra usando os produtos presentes nos encartes ou na tabela de preços da cantina, vi uma oportunidade de os alunos refletirem a respeito de quais estratégias e procedimentos deveriam utilizar, usando os conhecimentos matemáticos que possuíam.

Um fato relevante que me chamou a atenção é que os alunos também estavam tão acostumados a ter modelo para resolverem as tarefas, que, quando fiz a nova proposta, os alunos se sentiram inseguros de tomar decisões e resolver o que havia sido solicitado. Isso ficou claro quando perguntaram como eu gostaria que eles representassem a solução da tarefa. Apresentar tarefas sem que o professor indique o que se deve fazer, possibilitar ao aluno a liberdade e a responsabilidade de produzir a resolução que acham mais adequado, no primeiro momento, causou desconforto aos alunos.

A proposta na qual os alunos, em grupos, deveriam elaborar as simulações de compra e apresentá-las para a turma, tinha a intenção de obter produções escritas dos alunos e, por meio delas, informações que serviriam de apoio para que pudesse conduzir o trabalho em sala de aula de modo a auxiliar o aluno em seu processo de matematização (CIANI, 2012; PIRES, 2013; SANTOS, 2014).

As resoluções apresentadas foram diferentes umas das outras. Alguns grupos montaram uma tabela com duas colunas que denominaram, respectivamente, produto e preço, ficando muito parecida com a tabela de preços da cantina. Entretanto, na última linha, na coluna dos produtos, escreveram “total” e, na coluna de preços, colocaram o valor da compra (Tabela 1).

A seguir estão algumas resoluções apresentadas pelos grupos.

Tabela 1 – Resposta apresentada pelo grupo B

Produto	Preço (R$)
Carne de porco (Kg)	19,95
Coca Cola (3,3 L)	39,92
Linguiça (kg)	28,77
Carne bovina (kg)	54,95
Tomate (kg)	2,65
Arroz (5Kg)	7,59
Total	153,83

Fonte: Caderno aluno B

Outra forma que os alunos acharam para representar a compra foi a Tabela 2 a seguir.

Tabela 2 – Resposta apresentada pelo grupo E

Produto	Quantidade	Preço unitário (R$)	Preço total por produto
Refrigerante Lata	03	2,50	7,50
Pão de queijo	03	1,50	4,50
Salgados assados	03	3,00	9,00
Mini-pizza	01	3,50	3,50
Suco com água (300ml)	01	2,00	2,00
Total			26,50

Fonte: Caderno aluno B

Também houve alunos que descreveram o que compraram sem pôr na forma de tabela, como demonstrado a seguir (Figura 2).

Figura 2 – Resolução apresentada pelo grupo A

(2,50) *(3,00)* *(3,50)* *(3,50)*

$3\,refrigetante\ lata\ +\ 3\ salgados\ assados\ +\ 1\ lanche\ natural\ +\ 2\ Mini - pizza\ =$ $27{,}00$

Fonte: Caderno aluno A

Ao analisar a produção escrita dos grupos, percebi que existem particularidades em relação a cada resolução e que essas particularidades são informações que provocaram reflexões a respeito dos processos de ensino e aprendizagem da matemática e do planejamento das intervenções.

Os alunos discutiram os diferentes formatos de resolução, interagindo entre si, discutindo estratégias[7] e procedimentos[8] que utilizaram e fui fazendo intervenções. O questionamento feito à turma, para que refletisse sobre as suas produções escritas, dos grupos, tinha como objetivo verificar se conseguiam perceber/estabelecer características entre as resoluções propostas. Houve várias intervenções consideradas relevantes, mas será destacada a que foi feita ao grupo B.

Aluno O: Professora, estávamos discutindo e achamos que conseguimos levantar algumas características entre o que os grupos apresentaram.

Professora: Vocês podem me mostrar descrevendo?

Aluno O: Mas e se tiver errado?

Professora: Não se preocupem com estar certo ou errado, pensem, no que estão fazendo e levantem hipóteses.

Aluno O: Quando começamos a conversar, percebemos que todas as maneiras que os grupos apresentaram poderiam ser escritas utilizando uma delas.

Professora: Como assim? Explique de outra forma, não entendi.

Aluno D: Professora, se quiséssemos, poderíamos escrever a nossa tabela da mesma forma que o Grupo A fez.

Professora: Como vocês fariam isso?

Aluno D: Ah, olhe o que fizemos. Pegamos a compra que fizemos e escrevemos assim, 3 refrigerantes + 3 pães de queijo + 3 salgados assados + 1 mini-pizza + 1 suco com água (300ml) = 26,50, o mesmo podemos fazer com a tabela que o grupo B fez e que parece bastante com o que os grupos E, F e C fizeram.

Professora: Podem?

---

[7]Considera-se, nesse trabalho, *estratégia* como a maneira pela qual o estudante abordou o problema.
[8] Considera-se, nesse trabalho que *procedimento* é o instrumental que o aluno utiliza para efetivar a estratégia.

Aluno O: Podemos, e é só fazer o que fizemos antes, fica assim professora: 3 carnes de porco (Kg) + 8 coca-colas (3,3 L) + 3 linguiças (Kg) + 1 tomate (Kg) + 1 arroz (5Kg) = 153,83.

Professora: Legal, só que me digam um detalhe, na tabela apresentada pelo grupo B, eles não discriminaram o valor individual de cada produto e vocês, ao apresentarem a compra, o que fizeram? Colocaram na frente de cada produto uma quantidade. Como acharam essa quantidade?

Aluno S: Ah professora, a senhora enviou os *slides* para nós e como sabíamos qual foi o encarte que eles usaram, procuramos os produtos que eles compraram, pegamos o valor de cada um e dividimos pelo total.

Professora: Vocês podem me dar um exemplo?

Aluno S: Sim, vou mostrar como fizemos para achar o valor de um quilo da carne de porco. No encarte, o quilo da carne de porco custa seis reais e sessenta e cinco centavos. O grupo E colocou na tabela que pagou, em toda a quantidade de carne de porco que compraram, dezenove reais e noventa e cinco centavos. Então pegamos os dezenove reais e noventa e cinco centavos que era o total de carne de porco que compraram e dividimos pelo preço de um quilo. Com esta conta descobrimos a quantidade de carne de porco que eles compraram.

Professora: Muito bem meninos, mas se pensarmos na matemática será que vocês conseguem reconhecer algo parecido com a maneira que representaram todas as tabelas?

Quando a Professora percebeu, a turma estava em silêncio e escutando o que o grupo B estava conversando com ela, então ela brincou com a turma dizendo:

– O que aconteceu? Por que estão todos quietos e olhando para nós?

Os alunos tentavam falar o que estava acontecendo, mas falavam todos de uma vez, então a Professora pediu que tivessem calma e que alguém explicasse. O aluno G levantou o dedo e disse:

Aluno G	Sabe, professora, é que o nosso grupo fez a mesma coisa que o grupo B. Escrevemos todas as representações da forma que o grupo D fez, só que, para não precisar escrever o nome de cada produto, colocamos símbolos matemáticos no lugar deles.
Professora:	Por favor, algum grupo quer falar, além do grupo que falou agora? Fiquem à vontade.

Nesse momento percebi que os grupos tinham feito conexões e levantado características muito próximas entre as resoluções apresentadas, e que estavam, naquele momento, tentando estabelecer relações entre o que tinham construído, com alguma linguagem matemática que já haviam visto. Quando perguntei ao grupo B se o que eles estavam fazendo tinha relação com alguma matemática, os outros grupos também começaram a pensar a respeito disso.

Analisando a transcrição do meu diálogo com os alunos, pude inferir que estávamos na direção do proposto pela RME: os alunos se colocaram como ativos e responsáveis pela construção do seu próprio conhecimento, a professora guiou os alunos por meio de questionamentos e intervenções buscando oportunizar--lhes matematizar. Ou seja, alunos e professora trabalhavam atendendo a um aspecto da Reinvenção Guiada, qual seja, os alunos apresentaram suas produções, discutiram com os colegas, interagiram entre si, explicaram o que fizeram, refletiram sobre as suas produções e na dos colegas, compartilharam reflexões.

Os grupos reconheceram que a maneira mais adequada para representar as simulações das compras era a resolução apresentada na Figura 2 e começaram a reescrever os seus modelos substituindo os nomes dos produtos por outros símbolos, atendendo ao meu pedido de que todos fizessem as alterações que achassem pertinentes e depois discutissem as alterações com toda a turma.

As novas formulações das simulações das compras seguiam frequentemente a mesma estrutura: substituíram os produtos por símbolos.

Alguns grupos, como o grupo E, fizeram a seguinte alteração na representação:

de

3 refrigerantes em lata + 3 salgados assados + 1 lanche natural + 2 Mini-pizzas = 27,00

para

$3rl + 3sa + 1ln + 2\,mp = 27{,}00.$

O grupo B alterou a representação:

de

3 refrigerantes + 3 pães de queijo + 3 salgados assados + 1 mini-pizza + 1 suco com água (300ml) = 26,50

para

$3x + 3y + 3z + 1m + 1s = 26{,}50.$

Vale a pena lembrar que, em nenhum momento, nas intervenções, foi feita menção a algo estar correto ou incorreto. Todos os grupos apresentaram o que haviam feito ao final da discussão.

O aluno V pediu a palavra e desencadeou uma sequência de falas, conforme segue:

Aluno V: Professora, acho que fica mais simples escrever desta forma, acho que fica até mais bonito, mas, quando estávamos representando da outra maneira, sabíamos o que cada um havia comprado, desta maneira não sei o que significa x, y, z. Não teríamos que dizer o que significam estes símbolos? Sabe, eu estava pensando que, se fizermos uma compra grande, igual às que minha mãe faz, se formos escrever como antes, nossa, daria muito trabalho. Simplificando desta forma, fica bem mais fácil, só que pensa o trabalho que vai dar se primeiro tivermos que escrever qual produto significa qual letra, símbolo?

Aluno O: Lembra quando começamos aprender a mexer no EXCEL? O que fazíamos era a mesma coisa. Colocávamos o que queríamos em tabelas e depois, para fazer as contas, usávamos símbolos relacionando as linhas e as colunas para representar um valor, lembra $a1$, $b4$, $t5$. Ah, também podíamos fazer assim, $3a1 + 3b4 + t5$. Claro que era preciso usar uma simbologia própria do Excel, mas para mim é a mesma coisa.

Aluno V: É verdade cara, tem razão.

Professora: E aí turma, o que vocês acham de tudo o que foi falado? [silêncio]

Aluno S: Professora, o que estamos fazendo é construindo uma forma de representar que deixa as coisas mais fáceis, isso é uma forma matemática. Pelo que já estudamos isso parece com uma equação.

Professora: Por que você acha que é uma equação?

Aluno S: Uma equação tem dois lados.

Aluno V: Dois membros.

Aluno S: É, obrigado, você está certo, dois membros. Então, no primeiro membro, escrevemos os produtos e as quantidades de cada produto e, no segundo membro, colocamos a soma do valor de todos os produtos.

Professora: Gostaria que vocês falassem o que estão pensando a respeito do que está sendo discutido, debatido e apresentado.

Aluno G: As coisas que estão sendo ditas estão fazendo sentido para mim, nunca pensei na equação desta forma. Para mim, equação era algo que aprendíamos para achar o valor que não tinha sido colocado.

Aluno N: Sabia que agora o que fazíamos no Excel fez sentido?. Eu achava estranho pôr = soma $(a1 + e3 + \ldots)$, ou outra função na frente dos parênteses e apertava o *enter*, este *enter* era como se fosse o segundo membro, o valor da expressão que queríamos.

Aluno D: Por que fazem isso com a gente? Ensinam as coisas todas separadas? Assim fica tão mais simples.

Professora: Pessoal, todos acham que o que estávamos fazendo era representar a simulação das compras por uma equação?

Esse diálogo revela indícios de que estávamos na direção da Reinvenção Guiada na medida em que as perguntas possibilitaram aos alunos refletir sobre as suas produções e nas produções dos colegas e terem a oportunidade de organizar a realidade com as ideias e conceitos matemáticos que possuíam.

Nas aulas de matemática, é frequente o professor apresentar um problema e, pouco tempo depois, resolvê-lo ele mesmo. O objetivo do professor é mostrar aos alunos um modelo para que apliquem em outros problemas que serão propostos. Por mais que tenha tentado me afastar disso, nem sempre consegui.

Os alunos expuseram suas ideias, reflexões, conjecturas, compartilharam as diferentes relações estabelecidas entre as informações, seus conhecimentos prévios entre eles e comigo. Para De Lange (1987), essa interação é de suma importância, pois nela os conflitos conceituais intensificam a motivação dos alunos na resolução do problema, bem como melhoram a compreensão de conceitos e, consequentemente, do mundo físico.

Diferentemente do que muitas vezes se pensa, que os alunos não querem ter responsabilidades ou não querem comprometimentos com os processos de ensino e aprendizagem, os alunos participantes desse diálogo apresentavam-se dispostos e motivados a descobrir, elaborar, refinar seus próprios conhecimentos matemáticos.

Na perspectiva da RME, o aluno tem papel importante no processo de ensino e aprendizagem, e alguns aspectos são considerados fundamentais. Analisando o diálogo anterior, foi construído o Quadro 5 no qual são apresentados indícios do papel do aluno que vão ao encontro da RME.

Quadro 5 – Indícios de aspectos da RME na fala dos alunos

Indícios nas falas	**Aspectos da RME**
Aluno V: Professora, **acho que fica mais simples escrever desta forma, acho que fica até mais bonito...** Aluno O: Lembra quando começamos aprender a mexer no EXCEL? O **que fazíamos era a mesma coisa, colocávamos o que queríamos em tabelas e depois, para fazer as contas, usávamos símbolos relacionando as linhas e as colunas para representar um valor. Lembra $a1, b4, t5$?** Aluno S: Professora, o que estamos fazendo **é construindo uma forma de representar que deixa as coisas mais fáceis, isso é uma forma matemática.**	Cada aluno traz um conhecimento prévio que pode envolver algum preconceito para a experiência educativa. Os alunos possuem um conjunto diversificado de concepções alternativas a respeito de ideias matemáticas que influenciam o aprendizado futuro.
Aluno V: [...] **Sabe, eu estava pensando que se fizermos uma compra grande, igual às que minha mãe faz, se formos escrever como antes, nossa, daria**	Cada aluno constrói significados ativamente, ao lidar com as diferentes

muito trabalho, simplificando desta forma fica bem mais fácil, só que pensa o trabalho que vai dar se primeiro tivermos que escrever qual produto significa qual letra, símbolo? Aluno O: **Lembra quando começamos aprender a mexer no EXCEL? O que fazíamos era a mesma coisa,** colocávamos o que queríamos em tabelas e depois, para fazer as contas, usávamos símbolos relacionando as linhas e as colunas para representar um valor. Lembra $a1,\ b4,\ t5$? Ah, também podíamos fazer assim, $3a1 + 3\,b4 + t5$. Claro que era preciso usar uma simbologia própria do Excel**, mas para mim é a mesma coisa.** Aluno V: **É verdade cara, tem razão.** Aluno S: **Pelo que já estudamos, isso parece com uma equação.** Aluno S: **Então, no primeiro membro, escrevemos os produtos e as quantidades de cada produto e, no segundo membro, colocamos a soma do valor de todos os produtos.** Aluno G: **As coisas que estão sendo ditas estão fazendo sentido para mim, nunca pensei na equação desta forma. Para mim equação era algo que aprendíamos para achar o valor que não tinha sido colocado.** Aluno N: **Sabia que agora o que fazíamos no Excel fez sentido.**	situações que lhes são apresentadas tornando-se autores do seu conhecimento.
Aluno V: Professora, acho que fica mais simples escrever desta forma, acho que fica até mais bonito, mas, quando estávamos representando da outra maneira, sabíamos o que cada um havia comprado, desta maneira não sei o que significa x, y, z. Não teríamos que dizer o que significa estes símbolos? Sabe, **eu estava pensando que se fizermos uma compra grande, igual às que minha mãe faz, se formos escrever como antes, nossa daria muito trabalho, simplificando desta forma fica bem mais fácil, só que pensa o trabalho que vai dar se primeiro tivermos que escrever qual produto significa qual letra, símbolo?** Aluno O: **Lembra quando começamos aprender a mexer no EXCEL? O que fazíamos era a mesma coisa, colocávamos o que queríamos em tabelas e depois, para fazer as contas, usávamos símbolos relacionando as linhas e as colunas para representar um valor. Lembra $\boldsymbol{a1,\ b4,\ t5}$?** Ah, também podíamos fazer assim, $3\,a1 + 3\,b4 + t5$. Claro que era preciso usar uma simbologia própria do Excel, mas para mim é a mesma coisa.	Cada aluno está pronto para compartilhar o seu significado pessoal com os outros e, com base nesse processo de negociação, reconceitualiza as estruturas do conhecimento inicial. A construção do conhecimento é um processo de mudança que inclui criação, adição, modificação, aperfeiçoamento, reestruturação e rejeição;

Aluno V: **É verdade, cara, tem razão.** Aluno S: Professora, **o que estamos fazendo é construindo uma forma de representar que deixa as coisas mais fáceis, isso é uma forma matemática.** Pelo que já estudamos, isso parece com uma equação. Aluno S: **Uma equação tem dois lados.** Aluno V: **Dois membros.** Aluno S: **É, obrigado, você está certo, dois membros.** Então, no primeiro membro, escrevemos os produtos e as quantidades de cada produto e, no segundo membro, colocamos a soma do valor de todos os produtos. Aluno G: **As coisas que estão sendo ditas estão fazendo sentido para mim, nunca pensei na equação desta forma. Para mim equação era algo que aprendíamos para achar o valor que não tinha sido colocado.** Aluno N: **Sabia que agora o que fazíamos no Excel fez sentido? Eu achava estranho pôr = soma (a1+e3+...), ou outra função na frente dos parênteses e apertava o *enter*, este *enter* era como se fosse o segundo membro, o valor da expressão que queríamos.** Aluno D: **Porque fazem isso com a gente? Ensinam as coisas todas separadas? Assim fica tão mais simples.**	
Aluno V: [...] **acho que fica até mais bonito,** mas, quando estávamos representando da outra maneira, sabíamos o que cada um havia comprado. D**esta maneira não sei o que significa x, y, z**. Não teríamos que dizer o que significa estes símbolos? Sabe, eu estava pensando que **se fizermos uma compra grande, igual às que minha mãe faz**, se formos escrever como antes, nossa, daria muito trabalho, **simplificando desta forma fica bem mais fácil, só que pensa o trabalho que vai dar se primeiro tivermos que escrever qual produto significa qual letra, símbolo?** Aluno O: **Lembra quando começamos aprender anexar no EXCEL?** O que fazíamos era a mesma coisa, colocávamos o que queríamos em tabelas e depois, para fazer as contas, usávamos símbolos relacionando as linhas e as colunas para representar um valor. Lembra a1, b4, t5? Ah**, também podíamos fazer assim, 3 a1 + 3 b4 + t5.Claro que era preciso usar uma simbologia própria do Excel, mas para mim é a mesma coisa.** Aluno V: **É verdade, cara, tem razão.**	Cada aluno assume a responsabilidade pela sua aprendizagem, de modo que o conhecimento elaborado tem sua origem em um conjunto diversificado de experiências;

Aluno S: Professora, o que estamos fazendo é construindo **uma forma de representar que deixa as coisas mais fáceis**, isso é uma forma matemática. **Pelo que já estudamos, isso parece com uma equação.** Aluno G: As coisas que estão sendo ditas **estão fazendo sentido para mim**, **nunca pensei na equação desta forma. Para mim equação era algo que aprendíamos para achar o valor que não tinha sido colocado.** Aluno N: **Sabia que agora o que fazíamos no Excel fez sentido**? **Eu achava estranho pôr = soma (a1+e3+...), ou outra função na frente dos parênteses e apertava o *enter*, este *enter* era como se fosse o segundo membro, o valor da expressão que queríamos.** Aluno D: Por que fazem isso com a gente? Ensinam as coisas todas separadas? A**ssim fica tão mais simples.**	
Aluno V: Professora, **acho que fica mais simples escrever desta forma, acho que fica até mais bonito, mas, quando estávamos representando da outra maneira, sabíamos o que cada um havia comprado, desta maneira não sei o que significa x, y, z.** Não teríamos que dizer o que significam estes símbolos? Sabe, eu estava pensando que, se fizermos uma compra grande, igual às que minha mãe faz, **se formos escrever como antes**, **nossa, daria muito trabalho, simplificando desta forma fica bem mais fácil**, **só que pensa o trabalho que vai dar se primeiro tivermos que escrever qual produto significa qual letra, símbolo?** Aluno O: Lembra quando começamos aprender a mexer no EXCEL? O que fazíamos era a mesma coisa, colocávamos o que queríamos em tabelas e depois, para fazer as contas, usávamos símbolos relacionando as linhas e as colunas para representar um valor. Lembra a1, b4, t5? Ah, também podíamos fazer assim, 3 a1 + 3 b4 + t5. **Claro que era preciso usar uma simbologia própria do Excel, mas para mim é a mesma coisa.** Aluno V: **É verdade, cara**, tem razão. Aluno S: **Professora, o que estamos fazendo é construindo uma forma de representar que deixa as coisas mais fáceis**, **isso é uma forma matemática. Pelo que já estudamos isso parece com uma equação.** Aluno S: Uma equação tem dois lados. Aluno V: Dois membros. Aluno S: É, obrigado, você está certo, dois membros. **Então, no primeiro membro, escrevemos os produtos e as quantidades de cada produto e, no segundo**	O aluno pode se convencer de que aprender é possível. Em outras palavras, todos os alunos independentemente de raça, cultura e gênero são capazes de compreender e fazer matemática.

membro colocamos a soma do valor de todos os produtos. Aluno G: **As coisas que estão sendo ditas estão fazendo sentido para mim, nunca pensei na equação desta forma.** Para mim equação era algo que aprendíamos para achar o valor que não tinha sido colocado. Aluno N: **Sabia que agora o que fazíamos no Excel fez sentido**? Eu achava estranho pôr = soma $(a1 + e3 + \dots)$, ou outra função na frente dos parênteses e apertava o *enter*, este *enter* era como se fosse o segundo membro, o valor da expressão que queríamos. Aluno D: **Por que fazem isso com a gente? Ensinam as coisas todas separadas? Assim fica tão mais simples.**	

Fonte: A autora

Os alunos entenderam que uma simulação de uma compra pode ser representada por uma expressão algébrica (aqui utilizada como uma ferramenta para organizar a situação), quando se deseja uma ênfase nos preços dos produtos. Utilizando diferentes estratégias, formulações, caminhos, faziam suas próprias conexões e por meio das discussões foram construindo significados. Houve momentos em que atuei como interlocutora, questionadora, guia dos alunos, desempenhando o papel de mediadora das discussões e debates em sala de aula, mas também houve outros em que ainda me comportei tradicionalmente, como transmissora de conhecimento.

Mesmo assim, na prática, as interações aluno-aluno, professor-aluno, a ação de valorizar o que o aluno fez desencadeou um ritmo, um ambiente de aula muito diferente do que estávamos acostumados, além de ser também diferente da condução inicialmente planejada para as aulas.

Aqui termina a narrativa do que se chamou primeiro episódio e se inicia o segundo episódio.

Iniciando a aula (segundo episódio), foi solicitado aos alunos que discutissem entre si a tarefa que deveriam ter trazido resolvida de casa que consistia em buscar o que é necessário em uma situação para que ela possa ser representada por uma equação e, a partir disso, escrever o que é uma equação. A tarefa deveria ser feita por escrito.

Depois de algum tempo, alguns alunos estavam em pé andando pela sala, uns sentados na cadeira, outros encostados na carteira, uns com o lápis na mão explicando para o seu colega o que havia pensado. Foi pedido, então, que dispusessem as carteiras em forma de círculo para discutir o que haviam elaborado, possibilitando uma oportunidade de analisar e discutir as estratégias e os procedimentos que utilizaram. Pedi que cada aluno colocasse no quadro de giz as definições de equações que havia encontrado, mas disseram que não seria necessário que todos fossem ao quadro, pois muitos haviam escrito a mesma coisa, apenas com palavras diferentes. A análise da produção escrita dos e pelos alunos serviu também para que eles recolhessem e reconhecessem regularidades entre suas próprias produções e construíssem significados.

Enquanto conversavam entre si, observei a produção dos alunos e percebi que todos, mesmo os que utilizaram o Google, haviam pelo menos rascunhado o que tinham pensado em casa. Isso foi considerado como motivação e responsabilidade pela própria aprendizagem. Houve também momentos nos quais cada aluno compartilhou o significado pessoal com os outros, em um processo de negociação, o que pode ter provocado adição, modificação, reestruturação ou rejeição, presentes em um processo de aprendizagem.

Aluno Q: Equação apresenta duas expressões matemáticas ligadas pelo sinal de igual. O lado direito e o lado esquerdo do sinal de igual são chamados de membros e pelo menos um desses membros precisa apresentar uma incógnita ou termo desconhecido.

Aluno G: Equação é uma igualdade entre duas expressões matemáticas, e pelo menos uma delas deve conter termos desconhecidos.

Aluno E: Equação é quando temos um sinal de igualdade que separa duas expressões matemáticas de mesmo resultado.

Aluno M: Equação é quando se tem duas expressões matemáticas separadas por um sinal de igual.

Aluno O: Equação é a representação de uma situação, matemática ou não, em que esta situação pode ser representada na forma de duas expressões e que entre essas expressões existe uma relação de igualdade.

Após os alunos G, E, M e O apresentarem sua definições no quadro, os outros começaram a dizer que não precisava mais escrever outras definições, e perguntei: Por quê? Os alunos responderam que todos tinham feito sua definição muito parecida[9] com uma das definições que estavam no quadro, exceto a do aluno O. Questionou-se, então, se a definição do aluno O era inadequada. Os alunos pediram que ele falasse por que havia pensado em definir equação daquela forma.

Professora: Você pode dizer aos seus colegas o que pensou para elaborar essa definição de equação?

Aluno O: Sim, professora. Quando eu estava pensando em definir o que era uma equação para mim, me veio na cabeça as equações químicas, que são equações pelo fato de terem uma relação química entre reagentes e produto, e a quantidade de substâncias presentes na parte do reagente é igual ao do produto, isso não é uma situação matemática é química, tudo bem?

Turma: [momento de silêncio]

Aluno O: Pensando nisso, achei que não deveria colocar expressão matemática e sim só expressão porque já tinhamos tido uma discussão grande sobre expressão matemática, sentença, lembram?

Turma: É [risos]

Aluno O: Pensando na equação química, temos elementos químicos em cada membro.

Aluno E: Mas não são símbolos? Não podemos dizer que é da matemática já que não são símbolos?

Aluno O: Acho que são símbolos, usar a ideia de símbolos não está só na matemática. O que acho que é importante para definir uma equação é que haja uma relação de igualdade entre as expressões, qualquer situação, não importa se a situação é matemática ou não...

[9] Quem sabe por consultarem o Google.

Professora: O que acharam da ideia?

Aluno E: Talvez o que fazemos é querer definir as coisas de forma muito fechada na matemática e o aluno O definiu equações, mesmo sendo uma palavra usada na matemática, de forma geral.

Professora: E o que o aluno E apresenta serve para definir equações? Qual definição foi mais adequada?

Aluno O: Professora, acho que todas as definições são adequadas, eu só tentei falar de forma bem geral.

Professora: A turma toda pensa assim?

Aluno B: Professora, não fique brava, abri uma página no *google* e digitei definição de equação, o que aparece é a mesma definição, só que a definição do aluno O é inédita [risos], mas para mim fez muito sentido. Acho que pensar na equação química para definir equação ficou *show*.

Aluno I: Sabe, já tinha me encantado quando pude entender que eu usava a ideia de equação na computação, para construir as tabelas do EXCEL. Agora, quando falaram da utilização das equações químicas, o que que é isso gente? Saímos da utilização da matemática no supermercado e fomos parar na química!

Aluno O: Sabem por que eu pensei na química? Quando a professora pediu para pensarmos o que se faz necessário para que uma situação possa ser representada por uma equação, fiquei tentando montar relações entre duas situações dentro de uma mesma situação em que estas situações tivessem diferentes representações, mas resultassem no mesmo valor.

Pelas definições e falas dos alunos descritas anteriormente, acreditei estar atuando na perspectiva da RME em relação à reinvenção guiada, ao papel do professor e ao papel do aluno. Afinal, me posicionei como guia, busquei promover um ambiente interativo, encaminhar as discussões com tom questionador, promovendo uma reflexão a respeito das suas próprias falas e das falas dos colegas. A todo momento permiti que participassem ativamente da aula, que compartilhassem suas reflexões, que explicassem, justificassem o que estavam produzindo. Ao reler esse parágrafo, encontrei, novamente, um indício de que não estava assim tão “boa” quanto pensei inicialmente. Ainda me colocava como “dona do pedaço” ao dizer “permiti que participassem”. Certamente essa não é uma posição pouco tradicional. Mesmo assim, me dei conta de que estou efetivamente, em transição, pois minha intenção era a de oportunizar a reflexão por parte de todos os alunos, o que aconteceu. Além disso, foi visível que eles estavam trabalhando de diferentes maneiras, e o compartilhar uns com os outros permitiu que atingissem um nível maior de compreensão.

Em momento algum apresentei técnicas ou algoritmos prontos, já que a intenção era oportunizar que lidassem com diferentes formas de representação e, por meio dessas representações, fossem capazes de perceber diferenças entre os vários elementos matemáticos emergentes da discussão e da produção da turma.

A transcrição do momento de aula em que os alunos estavam apresentando suas ideias dá indícios de que lhes foi oportunizado um ambiente interativo, no qual os alunos construíram, com o professor desenvolvendo o papel de guia, um espaço de negociação e legitimação de significados (VIOLA DOS SANTOS; BURIASCO; FERREIRA, 2010). Freudenthal (1991, p. 48) discute o direito que o aluno tem de entender as definições por meio de uma reinvenção realizada por ele próprio e ser capaz de comunicá-las aos outros e a si próprio. A fala dos alunos forneceu indícios de que minha participação como guia, mediadora, serviu para estimulá-los a se mobilizarem, a aprimorar e refinar seu conhecimento matemático, além de elaborarem conhecimento a partir do seu conhecimento prévio.

Os diálogos presentes nas aulas mostram minha busca por promover um ambiente de aprendizagem produtivo, um ambiente de interação social, baseado na atividade dos alunos. A intenção era pôr os alunos sempre em lugar de destaque, dar a eles o direito de desempenharem o papel de protagonista da sua própria aprendizagem.

Na aula seguinte, retomei as perguntas:

Ouviram falar mais a respeito de equação linear?

O que caracteriza uma equação linear?

Como sempre, o interesse era oferecer aos alunos a oportunidade de fazer convergências com as normas, definições, regras, propostas pela comunidade matemática. Os alunos tiveram alguns minutos para refletir e registrar as respostas aos questionamentos. Passado esse tempo, perguntei o que haviam feito e eles disseram:

Aluno Q: Utilizei equação linear para criar um algoritmo que calculasse a quantidade de pontos que cada equipe fez em um campeonato.

Aluno G: Eu programei a fórmula da taxa metabólica basal para homens e mulheres.

Aluno A: Também utilizei equação linear para construir um programa que calculasse a quantidade a ser paga por uma pessoa em relação ao tempo que o seu carro permanecesse no estacionamento.

Após o relato dos alunos, coloquei no quadro de giz os três exemplos e perguntei o que caracterizava uma equação linear. Como na sala de aula, frequentemente, alguns são mais extrovertidos e falantes e, se deixar, só eles participam de tudo, a todo momento, perguntei se, dessa vez, poderia pedir a resposta a um aluno específico. Os alunos foram favoráveis e não se percebeu constrangimento ou rejeição em relação à proposta. Então foi solicitado ao aluno A que iniciasse apresentando os seus registros.

Todos os alunos, cada um com suas particularidades, expuseram o que pensaram, registrando as suas estratégias e procedimentos, sua conjecturas, apresentando resoluções, e as diferenças entre o que os alunos estavam produzindo serviram para direcionar minhas intervenções e propor discussões que explorariam aspectos matemáticos presentes nessas produções, encorajando e despertando nos alunos interesses por esses aspectos.

O diálogo ficou assim:

Professora: A, você pode iniciar apresentando o que registrou a respeito do questionamento que fiz?

Aluno A: Posso. Fico aqui ou vou aí na frente?

Professora: Como você se sentir melhor.

Aluno A: Então vou ler o que fiz daqui.

Professora: Tudo bem.

Aluno A: Eu acho que o que caracteriza uma equação linear é que ela precisa ser do jeito $x + y = 2, x + 2y = 10$. O que quero dizer é que precisa ter uma ou mais letras e todas essas letras precisam estar elevadas ao expoente 1.

Professora: Você pode escrever o que leu no quadro?

O aluno A foi até o quadro e escreveu o que tinha lido. Logo após, foi chamado outro aluno.

Professora: L, pode ser você agora?

Aluno L: Pode sim, eu vou aí no quadro e vou escrever o que fiz e depois leio, pode?

Professora: Sinta-se à vontade.

Aluno L: Uma equação linear deve apresentar uma ou mais variáveis e estas variáveis devem ser elevadas a 1, precisa ser uma equação do 1º grau.

Professora: T.

Aluno T: Escrevi que, para serem chamadas de equação linear, elas precisam ser do tipo x + y = 4 e os expoentes do x e do y devem ser elevados a 1; se for elevado a 2, 3 ou qualquer outro número, ela não é linear. Elas devem ser do primeiro grau.

Professora: Q.

Aluno Q: Professora, quando a senhora pediu para que eu escrevesse sobre o que caracteriza uma equação linear lembrei da professora[10] D falando: estamos usando as equações lineares para construir esses algoritmos porque todas as equações são do primeiro grau. Então pensei em uma equação de 1º grau tipo 3x+4w= 11. Acho que, para que uma equação seja linear, ela precisa ter uma ou mais incógnitas e os expoentes dessas incógnitas devem ser um.

Professora: Vamos escutar mais um aluno?

Turma: Vamos. Pode ser. É bom.

Aluno N: Professora, coloquei que, para uma equação ser linear, ela precisa ter uma ou mais incógnitas e essas incógnitas precisam ter seu expoente igual a 1.

---

[10] Outra professora da turma.

Aluno L: Professora, quero fazer uma mudança no que escrevi, em vez de variável é incógnita.

Aluno M: Eu também quero trocar letras por incógnita.

Professora: Por que vocês querem fazer esta troca? Faz diferença chamar de variável, incógnita ou letra?

Aluno M: Professora, quando eu fui escrever, fiquei com dúvida entre pôr variável e incógnita. Então coloquei letra, mas acho que é incógnita mesmo. Incógnita é aquela letra que só pode ser substituída por um valor, só existe um valor que faz com que a equação seja verdadeira. É isso, não é?

Aluno L: Eu também tive dúvida em colocar incógnita ou variável. Mas concordo com o aluno M.

Professora: Pessoal, o que vocês acham? Faz diferença colocar letra, incógnita, variável, para caracterizar uma equação linear?

Após o diálogo, pedi que discutissem entre eles o que caracterizava uma equação linear e se fazia diferença usar letra, ou as palavras variável ou incógnita. Eles podiam debater em duplas, trios. A quantidade de membros no grupo de discussão não importava, pois o desejo era o de observar o que produziam.

Após alguns minutos, sugeri que observassem os pontos em comum entre o que haviam registrado, as discussões e a produção dos colegas. Fui ao quadro de giz e propus que juntos definissem o que caracteriza uma equação linear. Quanto à utilização das palavras incógnitas, variáveis e letras, os alunos decidiram que usariam a palavra incógnita. Eles começaram a relembrar uma discussão anterior, que já tinham feito da definição de incógnita e variável e decidiram que utilizariam a palavra incógnita.

Solicitei, então, que elencassem o que achavam que caracterizava uma equação linear. Eles disseram que, para ser linear, é preciso que a equação tenha uma ou mais incógnitas e que seja do 1º grau. Retomei a discussão dos exemplos escritos no quadro, e pedi que verificassem se, realmente, as situações sugeridas poderiam ser representadas por uma equação linear. Os alunos que deram os exemplos falaram dos algoritmos que haviam produzido, e todos concordaram que os exemplos propostos eram equações lineares. Os exemplos utilizados foram:

1) $0x + 0y + 0z = 0$
2) $6x + 4y + 3w = 24$

3) $2x + 3e + 4i + 3d + 4h + r + m = 33$

4) $3x + y + 5r + 2a + 6j + t + 8p + 2k + m + g + 7s = 75$.

Perguntei quantas incógnitas uma equação linear poderia ter, e os alunos responderam que não havia limite. Questionados sobre o que representavam os números à frente de cada incógnita, responderam que representavam a quantidade de vezes em que cada incógnita aparece na equação. Informei que esses números são chamados de coeficiente.

Os alunos davam indícios de que haviam entendido o que era uma equação linear e em que situações ela poderia ser usada. Propus que encontrassem uma solução para $0x + 0y + 0z = 0$. Alguns alunos disseram que sim, que existe solução e outros que não. A turma não parecia chegar a um acordo com relação a se havia ou não uma solução para o primeiro exemplo.

Passados alguns minutos, sugeri que cada aluno substituísse os valores das incógnitas por qualquer valor que desejasse e observasse qual seria o valor do segundo membro. Um aluno perguntou se o que estava no segundo membro poderia ser chamado de termo independente e respondi que sim.

Os alunos começaram a desenvolver a tarefa e logo compreenderam que quaisquer valores que substituíssem nas incógnitas satisfariam a equação $0x + 0y + 0z = 0$. Entretanto, mesmo percebendo que os alunos tinham realizado diferentes substituições e que notaram que o resultado do termo independente seria zero, perguntei:

- Por que na equação $0x + 0y + 0z = 0$ existiam diferentes soluções?
- Na equação $3x + 5y = 0$, podemos substituir as incógnitas por qualquer valor e obter solução para a equação?
- Para a equação $0x + 0y = 3$, existe solução?

Após os questionamentos, pedi que os alunos analisassem e refletissem nos questionamentos e descrevessem as peculiaridades existentes entre as equações $0x + 0y + 0z = 0, 3x + 5y = 0 \; e \; 0x + 0y = 3$. Para o desenvolvimento dessa tarefa, solicitei aos alunos que se dividissem em grupos. Eles se organizaram em cinco grupos: três grupos de quatro alunos e dois com cinco alunos. Os grupos começaram a discutir as questões, analisar e verificar características próprias para a solução de cada equação. Caminhei pela sala para atender os alunos, caso fosse preciso, porém, nesse episódio, os alunos discutiram entre si e só me chamaram quando estavam com as descrições das peculiaridades de cada equação prontas. Acredito que os alunos estavam se sentindo responsáveis pela sua aprendizagem e motivados a discutir o que haviam produzido.

Enquanto andei pela sala, percebi que os grupos haviam evidenciado as mesmas peculiaridades a respeito das equações $0x + 0y = 3$ e $0x + 0y + 0z = 0$. Entretanto, acerca da equação $3x + 5y = 0$, um grupo havia produzido relações que iam além das apresentadas pelos outros. De forma sistematizada, os alunos chegaram à conclusão que a equação $0x + 0y + 0z = 0$, pelo fato de os coeficientes das incógnitas ser zero, para todos os valores que fossem substituídos em $x, y\ e\ z$, a resposta sempre seria igual a zero. Em relação à equação linear $3x + 5y = 0$, os alunos definiram que uma reposta para que o termo independente seja zero é quando x e y valem zero.

O grupo que produziu algo diferente mostrou a equação $3x + 5y = 0$ e disse que, nesse caso, a resposta poderia ser x e y iguais a zero, $x = 5$ e $y = -3$ ou $x = -5$ e $y = 3$. Pedi que colocassem no quadro de giz o que haviam produzido, e chamei a atenção dos outros grupos para o que seria apresentado. Após a apresentação, questionei se o que havia sido apresentado tinha sentido. Os alunos disseram que sim, então escrevi alguns exemplos: $2x + 8y + 5w = 0,\ 3t + +4p + 2z + r = 0$ e perguntei:

Professora: Há soluções para estas equações?
Turma: Sim.
Professora: Qual?
Turma: Zero para todas as incógnitas.
Professora: Existem mais soluções?
Turma: Sim.
Professora: Qual?

Alguns alunos começaram a fazer cálculos mentais, outros pegaram o lápis e começaram a substituir as incógnitas para descobrir a solução para a equação. Os alunos acharam algumas respostas para as equações, tais como: $x = 2$, $y = 5$ e $w = -\frac{44}{5}$; $t = 1$, $z = 2$, $p = 5$ e $r = 0$; $x = 5$, $y = 5$ e $w = -10$; $t = 2$, $p = 1$, $z = -5$ e $r = 0$. Contudo, todos mencionaram a resposta $x = 0$, $y = 0$ e $w = 0$ e $t = 0$, $z = 0$, $p = 0$ e $r = 0$. Disse aos alunos que, quando o termo independente de uma equação linear é zero, tem-se uma equação homogênea e que todas as equações homogêneas admitem a solução $(0,0,0,\ldots 0)$. Além disso, quando a equação admitir a ênupla ordenada $(0,0,0,\ldots 0)$ como solução, esta é chamada solução trivial.

Para dar continuidade, chamei a atenção da turma para o fato de que qualquer equação linear homogênea admite solução trivial, porém a solução $(0,0,0,..,0)$ não é única.

Para a equação linear $0x + 0y = 3$, os alunos concluíram que não existem valores para x e y que resolvam a equação, ou seja, a equação linear não admite solução.

Os nomes convencionais dos termos matemáticos, que fazem parte do que se chama conhecimento social, não serão "reconstruídos" pelos alunos, contudo eles podem ter oportunidade de reconstruir o que caracteriza ou define esses termos. Disse isso para mostrar que os alunos perceberam que a equação $3x + 5y = 0$, para se tornar verdadeira, admite o zero como solução, porém pode haver outras soluções.

Em relação às equações lineares anteriores, os questionamentos podem parecer simples e óbvios, entretanto, por meio desses questionamentos, os alunos tiveram a oportunidade de elaborar e construir noções matemáticas a respeito da solução de uma equação linear ou o que é uma equação homogênea, sem que isso fosse apresentado como nos livros didáticos: definição, exemplo.

Os questionamentos e a descrição que solicitei aos alunos apresentaram-se como uma proposta bem flexível, possibilitando algumas construções contrárias àquelas resoluções únicas, padrão. Os alunos tiveram liberdade para pensar conforme as suas experiências e repertórios matemáticos. A sensação de ver os alunos produzindo seus próprios conhecimentos e lidando com a matemática de maneira tão natural, envolvidos em situações novas, nas quais precisam elaborar e utilizar estratégias para abordá-las, e não simplesmente respondê-las por meio da aplicação de uma regra, fórmula ou algoritmo decorado e memorizado, fez-me sentir realizada.

Para finalizar as aulas do dia 07/05/2015 e para que os alunos pudessem pensar na possibilidade de se escrever uma representação de maneira geral para equação linear, perguntei:

Professora:	Pessoal, as expressões ($y = 2,\ 2x^2 + 3s = 3,\ 0t + 0e + 0w = 3,\quad 2f + a + 6s + 4y - 3t + 7d + k + c = 68$) que estou escrevendo no quadro são exemplos de equação linear?
Turma:	O segundo exemplo não é uma equação linear.
Professora:	Por quê?
Aluno V:	A incógnita x está elevada ao quadrado.
Professora:	Todos concordam?
Turma:	Sim.
Professora:	Gostaria que pensassem no que eu vou falar. Posso ir adicionando e subtraindo quantos termos algébricos, compostos pelo produto de um coeficiente e uma incógnita, a um dos membros de uma equação linear?
Turma:	Infinitos.
Aluno O:	Professora, fiquei pensando aqui em uma coisa. [silêncio]. Se adicionarmos ou subtrairmos sempre o mesmo produto de um coeficiente e uma incógnita, depois poderemos simplificar esta equação, não podemos?
Professora:	Você pode me dar um exemplo a respeito do que você pensou?
Aluno O:	A senhora escreve no quadro a equação que eu pensei?
Professora:	Sim, escrevo, pode falar.
Aluno O:	$3m + 4m + 5m + 2x + 4x + 3m + m + x\ - 3m - 4m - 5m - -2x - 4x - 3m - m - x\ =\ 56$, a resposta seria $0 = 56$.
Professora:	Moçada, entenderam o que o aluno O quis dizer com o exemplo que sugeriu?
Turma:	Sim.
Aluno I:	Mas aí não é uma equação!
Aluno B:	Professora, eu poderia escrever assim $0x + 0y = 56$ em vez de $0 = 56$?
Professora:	Sim.
Aluno O:	Então continuaria sendo uma equação linear só que impossível de se resolver. Lembra do exemplo $0x + 0y = 3$? Pensei nele.

Nesse momento, quis um tempo para pensar e elaborar, com calma, questionamentos para trabalhar com o que estava sendo posto.

Professora:	Pessoal, o exemplo que o aluno O propôs pode acontecer? Pode sim. O aluno B tem razão no que ele falou? O que vocês acham?
Turma:	Tem.
Professora:	Acho muito bom quando isso acontece. Vocês normalmente me deixam surpresa com as relações e perguntas que fazem. O que eu havia pensado, com a minha pergunta a respeito de quantas vezes poderíamos adicionar ou subtrair um produto de um coeficiente e uma incógnita a uma equação linear, era com incógnitas diferentes. Vocês formam uma turma fantástica de trabalhar, às vezes me fazem pensar em coisas em que não havia pensado.
Aluno B:	É professora, se for assim, realmente podemos acrescentar infinitos produtos de um coeficiente e uma incógnita.
Professora:	Turma, tudo bem?
Turma:	Sim.
Professora:	Gostaria que vocês pensassem se há uma forma geral, algébrica, para representar uma equação linear com muitas adições ou subtrações de produto de um coeficiente e uma incógnita.

Entreguei uma lista de tarefas para os alunos e solicitei que, no dia 14/05/2014, trouxessem as resoluções.

Quadro 6 – Lista de Tarefas

Tarefa - Equação linear homogênea

Elaborem uma situação de compra, na qual o valor da compra deverá ser zero. Após respondam:

- Quais as possíveis quantidades para o que você deseja comprar (para as incógnitas)?

Tarefa – Papelaria e a venda de três tipos de canetas esferográficas

Uma papelaria vende apenas três tipos de canetas esferográficas, A ,B e C, aos preços unitários de R$ 1,00, R$ 2,00 e R$ 3,00, respectivamente. Uma pessoa pretende gastar R$ 15,00 nessa papelaria comprando apenas canetas, pelo menos uma de cada tipo. Quantas são as possibilidades de compra? Represente cada uma delas em seu caderno.

Tarefa - Equação $\mathbf{4x + 3y = 12}$

Considerando a equação $4x + 3y = 12$:

a) Qual é o valor de y para $x = 3$?

b) Qual é o valor de y para $x = -7$?

c) Sempre existirá um valor de y para qualquer valor atribuído para x? Justifique sua resposta.

d) Quantos pares ordenados são solução da equação $4x + 3y = 12$? Justifique sua resposta.

Tarefa – Equação linear $\mathbf{2x + 3y - z = 7}$

Considerando a equação linear $2x + 3y - z = 7$, faça o que se pede.

a) Classifique, no seu caderno, como verdadeira ou falsa cada uma das afirmações e justifique:

I. O terno ordenado $(6, -2, -10)$ é solução dessa equação.

II. O terno ordenado $(1,1,2)$ é solução dessa equação.

b) Determine os valores da *p* e *q* de modo que os ternos ordenados $(2,1,p)$ e $(-1, q, 3)$ sejam soluções dessa equação.

c) Obtenha duas outras soluções dessa equação, diferentes das apresentadas nos itens anteriores.

Tarefa – Vunesp

Uma pessoa quer trocar duas cédulas de 100 reais por cédulas de 5, 10 e 50 reais, recebendo cédulas de todos esses valores e o maior número possível de cédulas de 50 reais. Nessas condições, qual é o número mínimo de cédulas que ela poderá receber? Justifique sua resposta.

Fonte: A autora

A lista de tarefas proposta teve o intuito de que os alunos percebessem que o que estavam construindo de conhecimento matemático seria útil para resolverem tarefas matemáticas, entre elas, as questões propostas nos vestibulares. O curso Técnico em Informática Integrado ao Ensino Médio tem como objetivo possibilitar aos alunos uma formação técnica em nível médio, entretanto há uma forte pressão dos pais para que esses alunos sejam aprovados no vestibular. Os pais cobram dos professores que trabalhem, em sala de aula, com questões de vestibular. Eles não têm a leitura de que o professor pode trabalhar com a matemática para que ela seja útil em variadas situações. É preciso montar listas de tarefas, com foco em questões de vestibular, para que os pais vejam que realmente o professor está preparando seus filhos para o vestibular.

Outro ponto a ser destacado é que as ementas das disciplinas dos cursos ofertados pelo IFPR devem ser cumpridas rigorosamente. O trabalho realizado pelo professor em sala de aula é avaliado bimestralmente pela equipe pedagógica que averigua se os conteúdos trabalhados estão condizentes com a ementa. A solução da lista de tarefas apresentada pelos alunos daria um suporte para mostrar que a professora estava vencendo a ementa e também aliviaria a pressão a respeito de se estar focando o ensino para o vestibular.

Ao iniciar a aula do dia 14/05/2014, perguntei aos alunos se haviam feito as tarefas e disseram que sim. Quando perguntei se tiveram alguma dúvida, os alunos responderam que não.

As tarefas serviram de recapitulação do que eles haviam construído no ambiente de aula. Para dar continuidade às aulas, perguntei aos alunos se haviam pensado na possibilidade de escrever uma forma geral, algébrica, para representar uma equação linear com muitas adições ou subtrações de produto de um coeficiente e uma incógnita. Os alunos disseram que haviam procurado na *Internet* e que tinham encontrado a fórmula:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

Perguntei se alguém havia entendido a representação e se poderia explicar para a turma. O aluno Q pediu para explicar, foi ao quadro e escreveu.

Quadro 7 – Explicação do aluno Q

$$5x + 3y = 6$$

$$2x + y + 3z + d = 20$$

$$0x + 0y = 3$$

$$A_1.X_1 + A_2.X_2 = b$$

$$A_n.X_n = b$$

coeficiente incógnita

Fonte: A autora

Aluno Q: Pessoal, para explicar o que significa a fórmula geral de uma equação linear, vamos dizer que $A_1 = 2$, $A_2 = 3$, $X_1 = x$, $X_2 = y$ e $b = 10$. Agora vamos trocar. Então vai ser 2 vezes x, porque A_1 vale 2 e X_1 vale x e A_2, que é 3 vezes y, que é a incógnita que foi dada para X_2, isso igual a b que é igual a 10, isso foi o que a gente fez.

$$2x + 3y = 10$$

Aluno Q: A_1, que estava aqui dentro (no quadro, o aluno aponta para A_n representado na fórmula $A_n.X_n = b$) no qual entram todos os coeficientes possíveis para aquilo que está aqui (aponta para o valor dois da equação $2x + 3y = 10$), o A_2 está aqui (aponta para o valor 3 da equação $2x + 3y = 10$, e os outros, é, as outras incógnitas que estão aqui dentro de X_n (aponta com o dedo o valor de X_n presente na equação $A_n. X_n = b$) são A_2X_2. Assim estão todos estabelecidos e colocados na equação. Nesse caso, para a gente resolver esse tipo de equação linear, a gente pode pôr qualquer valor dentro de x e de y. Então, nesse caso, tentem me dar algum valor para x e y que resolva esta equação.

Aluno G: X 5 y 0.

Aluno Q: Ótimo, 2 vezes 5 mais 3 vezes 0 é igual a 10. Outros valores?

Todos falam ao mesmo tempo.

Aluno Q: Quanto? Qual?

Aluno J: X e y igual a 2.

Aluno Q: Ótimo, também satisfaz a equação. Isso mostra que, dentro de uma equação linear, você pode ter qualquer valor para as incógnitas. Então, no caso de um exercício que desse lá, cinco pares de valores que no caso represente x e y. [Pausa] Porque, quando a gente estava estudando, a gente acabou vendo isso que, para você representar os valores das incógnitas, você pode representar por um par ordenado. Exemplo do caso x e y igual a 2, você pode colocar assim $(2,2)$, respectivamente para x e y. Isso pode variar com o número de incógnitas que você tem em uma equação, e assim todo valor que pode estar dentro de uma incógnita ele vai ter um [silêncio] uma limitação de certa forma. Geralmente, quando se tem exercícios, eles colocam dentro do conjunto dos reais, que abrange mais valores, e também para você responder e já que pode ser o conjunto dos números reais, você pode ter infinitos valores para x e y. Então, geralmente quando a gente vai trabalhar com algum exercício do tipo, exemplo, de cinco pares ordenados que satisfaça a equação, não vai assim ser cem pares, não é assim um exercício acadêmico, dúvida.

Turma: Silêncio

É oportuno, antes de prosseguir com a descrição, destacar alguns aspectos referentes à estratégia de ensino usada em relação às falas do aluno Q. Ao lerem, a transcrição anterior, pode-se questionar por que a professora não interrompeu o aluno e interveio para mostrar que a representação $A_1.X_1 + A_2.X_2 = b$ não era equivalente a $A_n.X_n = b$. Mas a intenção era conhecer como o aluno estava lidando, interpretando a fórmula geral da equação linear e, assim, ter condições de ajudá-lo no aperfeiçoamento dos conceitos matemáticos.

Apontar erros e prontamente corrigi-los não é uma prática pertinente à perspectiva da reinvenção guiada, uma vez que o erro é visto como algo positivo no processo de aprendizagem.

Ao escutar as explicações e ideias do aluno Q, a intenção era criar um momento de aprendizagem, em que o aluno fosse protagonista do desenvolvimento do seu raciocínio e que compreendesse o que fez e por que o fez, ou seja, não era objetivo dizer de forma direta que a fórmula $A_n.X_n = b$ não representa $A_1.X_1 + A_2.X_2 = b$. O intuito era fazer com que o aluno refletisse, tomasse consciência do equívoco que estava cometendo e se autocorrigisse.

Outro aspecto destacado é a fala do aluno Q. Ao analisar a maneira como esse aluno expôs suas ideias e compreendeu a fórmula geral de equação linear, nota-se que ele fez sua apresentação seguindo a mesma estratégia que eu utilizava para ministrar as aulas, ou seja, de uma maneira tradicional. O aluno Q apresentou os exemplos, em seguida explicou e apresentou as definições.

Para criar uma situação na qual os alunos pudessem refletir a respeito do erro apresentado, isto é, o fato de $A_n.X_n = b$ não ter o mesmo significado que $A_1.X_1 + A_2.X_2 = b$, e caminhar no sentido de serem capazes de corrigir o próprio erro e desenvolverem uma nova aprendizagem com significado, e disse:

Professora: Posso perguntar uma coisa?

Aluno Q: [Sorri e mexe com a cabeça para cima e para baixo].

Professora: Será que teria como [pausa], é que achei legal a sua apresentação $A_n.X_n = b$, mas quem está variando é o n, ou não?

Aluno Q: O n de certa forma diz qual é [pausa] o valor, [pausa], isso é complicado de explicar, porque é assim A_1, A_2 são valores que estão aqui dentro (aponta com o dedo para a letra *n* da fórmula $A_n.X_n = b$), só que, neste A_1, o 1 é só a posição do elemento.

Professora: Se alguém quiser pode ajudar. Eu estava pensando assim, se eu colocasse n igual a 1, pelo que você representou ficaria assim: $A_1.X_1 = b$ (A turma e o Aluno Q mexem a cabeça concordando). Se eu colocasse n igual a 2, ficaria A_2vezes $X_2 = b$, a tua relação é muito interessante, mas está dando continuidade, porque, quando falo n igual a 2, eu estou inserindo automaticamente o 1. Veja. Se eu colocasse n igual a 3, ficaria como, no entendimento de vocês?

Turma: Deveria ficar $A_1\,X_1\ + A_2\,X_2\ + A_3\,X_3\ =\ b$.

Professora: Então os elementos que estão atrás do n que você deseja representar, na fórmula $A_n\,X_n\ =\ b$, não aparecem. Vocês estão entendendo o que eu estou falando?

A turma estava em silêncio, mas a expressão facial de alguns alunos dava indícios de que estavam refletindo. Outros alunos, porém, apresentavam uma expressão facial de não estar entendendo.

Professora: Só que é assim, ó Q escreva no quadro n igual a 1, (o aluno Q escreveu no quadro $n = 1$), agora, pessoal, substituam este n igual a 1 na fórmula proposta pelo Q. Como fica?

Turma: Fica $A_1.X_1 = b$.

Professora: Q, vai pondo no quadro o que a turma falou. Vamos ver se vocês vão entender o que eu estou falando.

Aluno Q: Eu acho que já entendi.

Como alguns alunos pareciam ainda não ter compreendido o que se estava buscando explicar, o questionamento continuou.

Professora: Agora escreva n igual a 2. Como ficaria se substituíssemos o dois no lugar do n da fórmula do aluno Q?

Turma: $A_2.X_2\ =\ b$.

Professora: Certo, isso! Q, põe no quadro para mim.

Aluno J: É que é assim, se você fosse substituir n por três, seria assim $A_3.X\ _3 =\ b$ e não $A_1.X_1 +\ A_2.X_2\ +\ A_3.X_3\ =\ b$.

Professora: Será que é isso que eu quis dizer? Será que o J está certo?

Turma: [Silêncio]

Aluno Q: Mas, de certa forma, não faz sentido.

Professora: Coloque n igual a 1 e substitua na sua fórmula.

Aluno Q: Não, mas pensa que eu tenho $A_1.X_1 +\ A_2.X_2 =\ b$, se há X_1 nos dois, eu tenho a mesma incógnita, se é a mesma incógnita, eu junto tudo.

Professora: Perfeito, o que estou questionando é que você colocou n e n.

Aluno Q:	Posso pôr outro.
Professora:	Sim, pode ser, o que eu estou questionando é que, se você diz que n vale 1, fica A_1 vezes X_1 igual a b. Se o n vale dois, substitui para mim a fórmula.
Aluno Q:	A_2 vezes X_2 igual a b.
Professora:	Mas o teu pensamento não é este, o seu pensamento é: se n fosse dois, ele gostaria que fosse o quê? J?
Aluno J:	Que acompanhasse os elementos que estão antes, os números em forma crescente, que iniciasse em um e fosse até o valor de n.
Professora:	Então se n fosse dois, seria?
Turma:	A_1 vezes X_1 mais A_2 vezes X_2 igual a b.
Professora:	Se pensarmos em n três, pensamos só em n três?
Aluno Q:	No meu caso eu penso em A_1 A_2 A_3.
Professora:	Então, o que desejamos que aconteça quando pensamos em n igual a três, não está sendo refletido na fórmula posta pelo aluno Q. Como poderíamos escrever esta fórmula para contemplarmos esta sequência? Será que existe algum símbolo matemático que me ajuda a representar esta continuação de somar um número com outro?
Aluno M:	Tem que ser um símbolo que faça esta somatória de: $a_1x_1 +$ $+ a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$
Professora:	Procurem na *Internet*. Veja se vocês encontram um símbolo para isso.

Não demorou e logo alguns alunos já falaram que era o símbolo de somatório e mostraram na tela do computador o símbolo $\sum$. Então perguntei como esse símbolo seria utilizado para que a fórmula $a_nx_n = b$ tivesse o mesmo significado que $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$. Os alunos começaram a pesquisar a utilidade do símbolo e não demorou muito já estavam discutindo, entre eles, como deveriam usar o símbolo de somatório. A fórmula sugerida pelos alunos foi $\sum A_nX_n = b$, porém foi questionado se só colocando o sinal de somatório à frente da fórmula já bastaria para saber qual valor de n deveria ser utilizado. O aluno O falou que, quando ele estava procurando entender o uso do símbolo de somatório, encontrou a seguinte representação.

Quadro 8 – Representação encontrada pelo aluno O

$\sum_{i=1}^{n} a_n\, x_n = b$

Fonte: A autora

Solicitei ao aluno O que explicasse à turma o que ele havia entendido da utilização do símbolo de somatório.

Aluno O: Vamos considerar que desejo construir uma equação linear com n igual a três. Para usar a fórmula no lugar de n, coloco três e a representação seria $\sum_1^3 a_n\, x_n = b$. Desenvolvendo, teríamos $a_1x_1 + + a_2x_2 + a_3x_3 = b$.

O aluno trabalhava com i variando de um a três e utilizava na fórmula o n para representar essa variação. Então fiz uma intervenção para oportunizar que a turma percebesse que havia um equívoco na representação.

Professora: Pessoal, na fórmula apresentada pelo aluno O, o n pode variar de quanto a quanto?

Turma: De um a três.

Professora: E o i representa o quê?

Turma: Que varia de um a três.

Professora: Quem deve variar é i ou n?

Aluno O: Professora, cometi um erro, no lugar de n é i, deveria ter colocado $\sum_{i=1}^{3} a_i x_i = b$.

Professora: Minha intenção era fazer com que vocês percebessem que a representação estava equivocada, mas entenderam o que o O disse?

Aluno N: Professora, quer dizer que, se eu usar o símbolo de somatório para dizer que i varia de um a cinco, a fórmula ficaria somatório de i igual a um variando até 5, como a variação é de i, na fórmula o que deve ser substituído por 1,2,3,4,5 é o i?

Professora: Sim.

Aluno N: O i sempre será representado pelos números naturais, tirando o zero?

Aluno O: Penso que sim. Mas as incógnitas e coeficientes podem assumir qualquer valor. É isso, né professora?

Professora: Qualquer valor inteiro positivo. Quando usamos a variável i, chamada de limite inferior, no sinal de somatório já está implícito que a variável i percorre os valores inteiros até alcançar o n, chamado de limite superior. Quanto aos valores das incógnitas, coeficiente da incógnita e termo independente, estes podem assumir quaisquer valores contidos no conjunto dos números reais. Entenderam o que eu estou falando?

Turma: Sim.

A intenção, com esse episódio de aula, foi guiar os alunos a seguirem um caminho que os levasse a construir a fórmula geral de uma equação linear e se sentissem autores e responsáveis pela sua própria aprendizagem. Esse episódio mostrou que não só a intervenção do professor dá pistas para que os alunos se autocorrijam ou reinventem a matemática, como também as discussões, os debates e a apresentação das produções dos alunos.

As tarefas (Quadro 9, 10 e 11) da aula do dia 15/07/2014 tinham como intuito oportunizar a observação das escolhas e caminhos percorridos pelos alunos e guiá-los a reinventar a matemática pretendida, nesse caso, a solução de sistemas de equações.

Quadro 9: Tarefa - Sistema de equações de duas equações e duas incógnitas.

Em dupla, escolham, entre os encartes e as tabelas, duas mercadorias (incógnita) e elaborem duas equações. Logo após, cada dupla deverá trocar o sistema de equações com outra dupla, que deverá descobrir quais foram as mercadorias utilizadas.

Fonte: A autora

Quadro 10: Tarefa - Sistema de equações de três equações e três incógnitas

Em dupla, escolham, entre os encartes e as tabelas, três mercadorias (incógnita) e elaborem três equações. Em seguida, cada dupla deverá trocar o sistema de equações com outra dupla, que deverá descobrir quais foram as mercadorias utilizadas.

Fonte: A autora

Quadro 11: Tarefa **-** Sistema de equações de quatro equações e quatro incógnitas

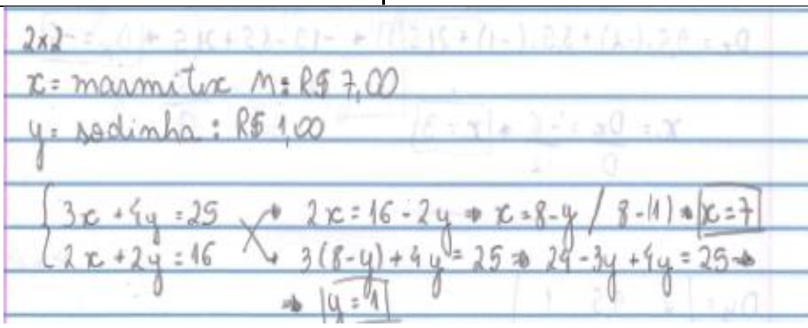
Em dupla, escolham, entre os encartes e as tabelas, quatro mercadorias (incógnita) e elaborem quatro equações, depois, cada dupla deverá trocar o sistema de equações com outra dupla, que deverá descobrir quais foram as mercadorias utilizadas.

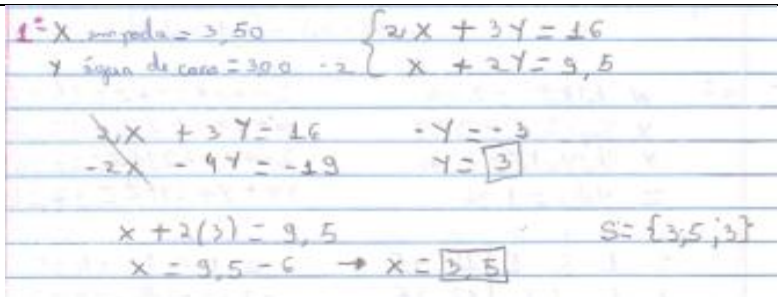
Fonte: A autora

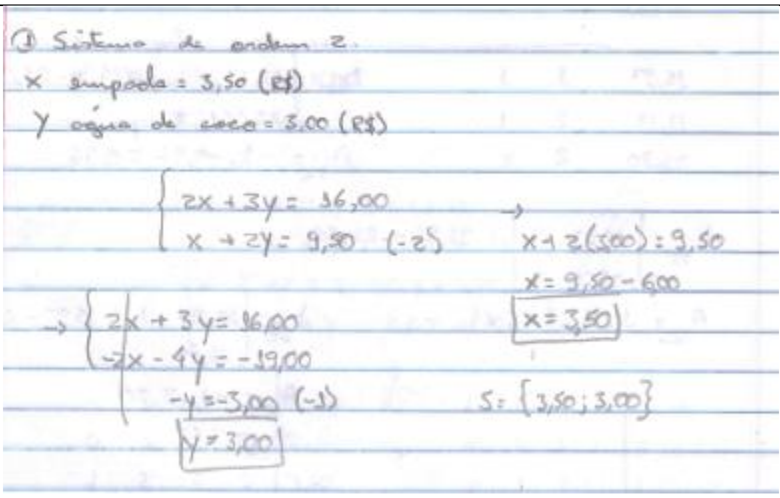
Por se tratar de um sistema de duas equações e duas incógnitas e por já terem trabalhado com as regras de substituição e de adição para resolver sistemas dessa natureza, os alunos não tiveram dificuldade em elaborar e resolver a tarefa constante no Quadro 9.

O Quadro 12 apresenta alguns sistemas de duas equações e duas incógnitas elaborados e resolvidos pelos alunos.

Quadro 12: Sistema de equações de duas equações e duas incógnitas elaborado e resolvido pelos alunos.







① Sistema de ordem 2.

x empada = 3,50 (R\$)

y água de coco = 3,00 (R\$)

$$\begin{cases} 2x + 3y = 16{,}00 \\ x + 2y = 9{,}50 \quad (-2) \end{cases}$$

$x + 2(3{,}00) = 9{,}50$

$x = 9{,}50 - 6{,}00$

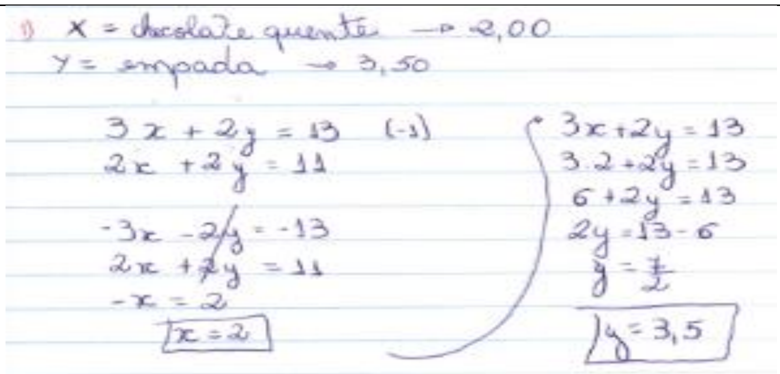
$\boxed{x = 3{,}50}$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 16{,}00 \\ -2x - 4y = -19{,}00 \end{cases}$$

$-y = -3{,}00 \quad (-1)$

$\boxed{y = 3{,}00}$

$S: \{3{,}50; 3{,}00\}$



1) x = chocolate quente → 2,00

y = empada → 3,50

$3x + 2y = 13 \quad (-1)$

$2x + 2y = 11$

$-3x - \cancel{2y} = -13$

$2x + \cancel{2y} = 11$

$-x = 2$

$\boxed{x = 2}$

$3x + 2y = 13$

$3.2 + 2y = 13$

$6 + 2y = 13$

$2y = 13 - 6$

$y = \frac{7}{2}$

$\boxed{y = 3{,}5}$

Fonte: Caderno do aluno D, G, L e M

Para trabalhar com a resolução de sistemas com três equações e três incógnitas, propus a tarefa presente no Quadro 10. A turma já havia sido dividida em duplas para resolver a tarefa do Quadro 9, e os grupos continuaram como estavam para trabalhar com a tarefa do Quadro 10. Cada dupla deveria elaborar um sistema linear de três incógnitas e três equações e depois passar o que elaborou para que outra dupla resolvesse.

Tanto na elaboração, quanto na resolução, os alunos não poderiam consultar nenhum material na *Internet* ou em livros. Deveriam discutir com o seu par e buscar estratégias e procedimentos para resolver a tarefa da maneira que achassem mais adequada. Meu papel era o de questionar os alunos e guiá-los para que tivessem condições de matematizar, isto é, promover um ambiente em que os alunos, ao elaborar e resolver a tarefa, pudessem fazer isso de seus conhecimento prévio, o qual poderia servir de apoio para o aprofundamento e construção de conjecturas, ferramentas matemáticas, bem como para a elaboração de novos conhecimentos.

As duplas elaboraram os sistemas com três incógnitas e três equações sem apresentar dificuldade. Contudo, quando os alunos foram resolver o sistema 3x3 que haviam elaborado, não tinham certeza de que método deveriam usar. A sala ficou eufórica, queria que fosse mostrado como seria possível resolver um sistema com três incógnitas e três equações. Algumas duplas recordaram que um sistema 3x3 poderia ser resolvido pelo método de substituição e foram tentar resolver; outras tentaram aplicar o método da adição. A intenção, em relação a essa tarefa, era criar um cenário no qual os alunos se sentissem reinventores de ferramentas, procedimentos, conceitos matemáticos, ou seja, que se sentissem autores do que faziam.

O Quadro 13 a seguir apresenta alguns sistemas com três incógnitas e três equações produzidos pelas duplas.

Quadro 13: Elaboração de alguns Sistema de equações de três equações e três incógnitas.

3x3 x= Salgados assados: R$ 3,00 y= Pão de queijo: R$ 1,50 z= Toddynho: R$ 2,00 $\begin{cases} 2x+y+z=9,5 \\ c+y+2z=8,5 \\ 3x+3y+4z=21,5 \end{cases}$	- Sistema de 3x3 usar Cofator: x= Biscoitos Trakinas = 1,55 y= vinho Santa Ana = 6,40 z= margarina Qualy = 3,49 $\begin{cases} 2x+y+z=12,99 \\ x+y+z=11,44 \\ x+y+2z=14,93 \end{cases}$
x = coca cola 1 litro → 4,00 y = Salgado → 3,00 z = pão de queijo → 2,00 $\begin{cases} 2x+2y+z=16 \\ x+3y+2z=17 \\ 3x+2y+z=20 \end{cases}$	Motas 3x3 x = Sodinha = R$ 1,00 y = Refrigerante Lata = R$ 2,50 z = Refrigerante Garrafa 600 ml = R$ 2,80 $2x+2y+2z=12,6$ $x+4y+3z=19,4$ $4x+3y+4z=22,7$

Fonte: Caderno dos alunos B, G, O e A

As duplas que optaram pela aplicação do método de substituição apresentavam-se inseguras quanto ao procedimento de substituir as incógnitas nas expressões matemáticas encontradas, porém conseguiram encontrar os valores das incógnitas que eram solução do sistema. Além disso, a resolução das duplas que optaram pela aplicação do método de substituição não foi rápida. Os alunos foram resolvendo, encontrando obstáculos e os superando. Às vezes cometiam equívocos em relação aos cálculos envolvidos na aplicação do método de substituição e, após tentarem encontrar o que haviam errado, chamavam a professora para que os auxiliasse.

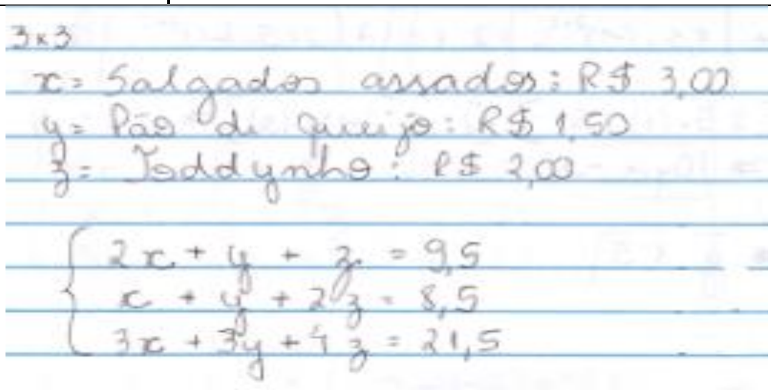
Trabalhar com a resolução de sistemas 3x3, pelo método de substituição, é uma tarefa que requer muito cuidado com os cálculos envolvidos. Qualquer equívoco, provavelmente, compromete o resultado final. Para ajudar os alunos a encontrarem o que haviam errado, buscava fazer com que olhassem as etapas do método que haviam executado com calma e atenção. Muitas vezes percebia onde o erro estava antes que os alunos, então, se eles não encontrassem o erro, orientava-os a olhar novamente se os cálculos que haviam executado naquela etapa estavam corretos. Não foram poucas as vezes em que tive vontade de pegar um lápis e resolver o sistema para as duplas, mostrando o que haviam errado, entretanto sabia que, se tomasse essa atitude, não estaria caminhando ao encontro da perspectiva da reinvenção guiada à luz da RME.

Em relação às duplas que decidiram aplicar o método da adição para resolver o sistema 3x3 que haviam elaborado, deixei que tentassem, pois estava buscando proporcionar um ambiente no qual os alunos participassem ativamente da aula e a interação professor e aluno fizesse parte do processo de ensino e aprendizagem. Todas as informações que os alunos apresentavam eram vistas como possibilidade de guiá-los e encaminhá-los para que continuassem trabalhando, matematizando e construindo conhecimento. Além disso, como estava tentando trabalhar na perspectiva da reinvenção guiada à luz da RME, era necessário que os alunos tivessem liberdade e autonomia para apresentarem o que estavam pensando e como estavam lidando com a resolução da tarefa.

Também deixei que as duplas tentassem utilizar o método da adição para resolver o sistema 3x3. Enquanto caminhava pela sala, atendendo os alunos, uma dupla pediu-me que olhasse a resolução que havia realizado. Quando olhei e percebi que, para resolver o sistema 3x3, os alunos haviam seguido os passos do método de adição, fiquei surpresa e fui verificar como haviam desenvolvido o método.

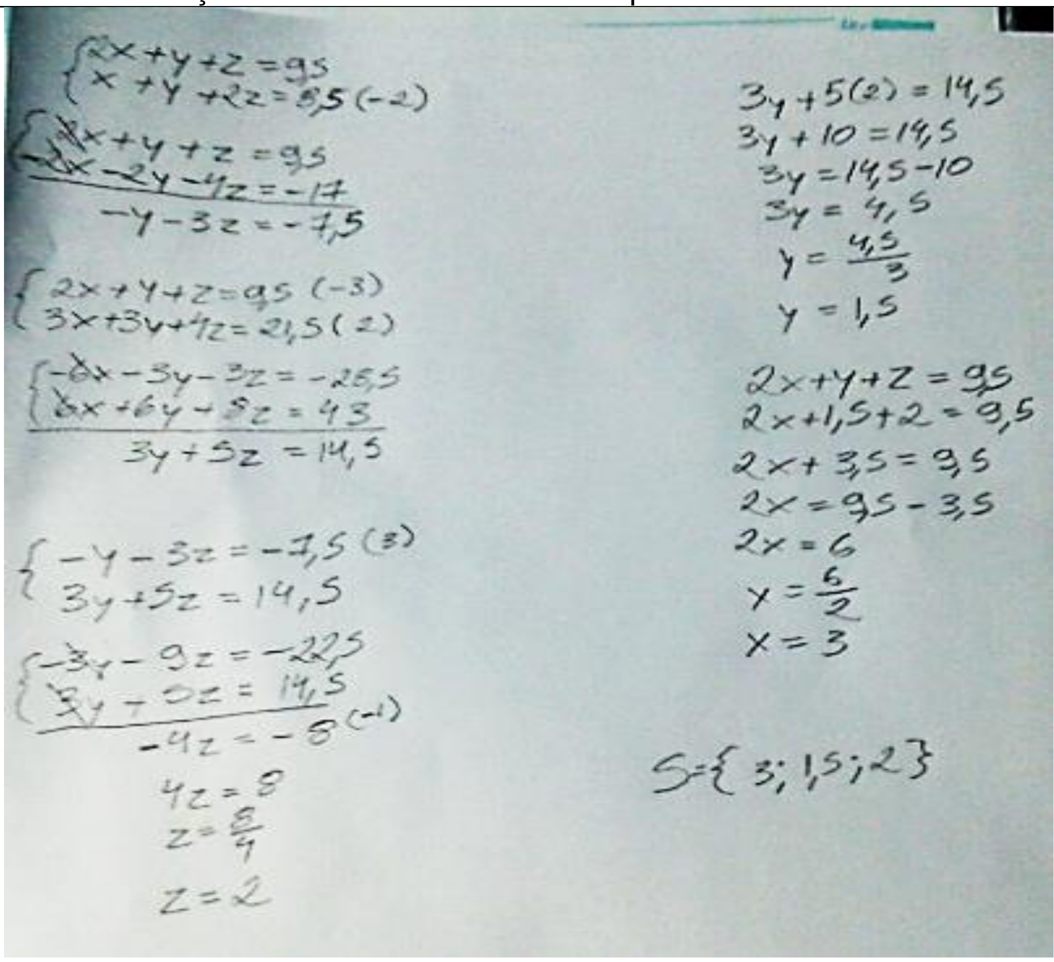
Os alunos B e O disseram que, da maneira que resolveram, era muito mais fácil que pelo método de substituição, então pedi que explicassem como haviam resolvido. Na Figura 2, está apresentado o que a dupla formada pelos alunos B e O fez: a elaboração do sistema 3x3. A Figura 3 traz a resolução do sistema.

Figura 3 – Sistema 3x3 elaborado pelos alunos B e O



Fonte: Caderno do aluno B

Figura 4 – Resolução do sistema 3x3 elaborado pelos alunos B e O



Fonte: Caderno do aluno B

O aluno B explicou:

> 1º Passo – Pega a 1ª e a 2ª equação e coloca uma embaixo da outra fazendo que $x, y\ e\ z$ estejam na mesma sequência; que x

fique embaixo de x, y embaixo de y, z embaixo de z e os termos independentes um embaixo do outro:

$$2x + y + z = 9{,}5$$
$$x + y + 2z = 8{,}5$$

2º Passo – Multiplique a 2ª equação por menos dois (-2) e, após, adicione as equações para cancelar a incógnita x.

Multiplicando a 2ª equação por (-2) temos:

$$(-2).[x + y + 2z = 8{,}5] \rightarrow -2x - 2y - 4x = -17$$

adicionando a 1ª equação do resultado da 2ª equação multiplicada por (-2), temos:

$$\begin{array}{r} 2x + y + z = 9{,}5 \\ -2x - 2y - 4z = -17 \\ \hline 0x - y - 3z = -7{,}5 \quad (1) \end{array}$$

3º Passo – Pega a 1ª e a 3ª equação e coloca uma embaixo da outra fazendo que $x, y\ e\ z$ estejam na mesma sequência; que x fique embaixo de x, y embaixo de y, z embaixo de z e os termos independentes um embaixo do outro:

$$2x + y + z = 9{,}5$$
$$3x + 3y + 4z = 21{,}5$$

4º Passo – Multiplique a 1ª equação por menos três (-3) e a 3ª equação por mais dois $(+2)$; após, adicione as equações para cancelar a incógnita x.

Multiplicando a 1ª equação por menos três (-3), temos:

$$(-3).[2x + y + z = 9{,}5]$$
$$-6x - 3y - 3z = 21{,}5$$

Multiplicando a 3ª equação por mais dois (+2), temos:

$$(+2).[3x + 3y + 4z = 21{,}5]$$
$$6x + 6y + 8z = 43$$

adicionando $-6x - 3y - 3z = 21{,}5$ para cancelar o valor de x, temos:

$$\begin{array}{r} -6x - y - 3z = 21{,}5 \\ 6x + 6y + 8z = 43 \\ \hline 0x + 3y + 5z = 14{,}5 \quad (2) \end{array}$$

5º Passo –Pega a equação (1) e a equação (2), coloca uma embaixo da outra fazendo que x e y estejam na mesma sequência;

que x fique embaixo de x, y embaixo de y e os termos independentes um embaixo do outro.

$$-\ \ y - 3z = -7{,}5$$

$$3y + 5z = 14{,}5$$

6º Passo – Cancelar y ou z. Para isso multiplicaremos a equação (1) por mais três $(+3)$ e depois o resultado de $(+3)[-y - 3z = -7{,}5]$ adicionaremos à equação (2).

Multiplicando a equação (1) por $(+3)$, temos:

$$(+3)[-y - 3z = 7{,}5] \rightarrow -3y - 9z = 22{,}5$$

Adicione a equação (1) e (2) e calcule o valor de z, ou seja:

$$\begin{array}{c} -3y - 9z = 22{,}5 \\ \underline{3y + 5z = 14{,}5} \\ 0y - 4z = 8 \end{array}$$

$$4z = 8$$

$$z = \frac{8}{4}$$

$$z = 2$$

Para calcular o valor de y, substituiremos $z = 2$ na equação $-3y - 9z = 22{,}5$ ou na equação $3y + 5z = 14{,}5$, assim:

$$3y + 5z = 14{,}5$$

$$3y + 5.2 = 14{,}5$$

$$3y + 10 = 14{,}5$$

$$3y = 14{,}5 - 10$$

$$3y = 4{,}5$$

$$y = \frac{4{,}5}{3}$$

$$y = 1{,}5$$

7º Passo – Calcular o valor de x. Para calcular o valor de x, substituiremos $y = 1{,}5\ e\ z = 2$ em uma das três equações iniciais do sistema.

Usando a 1ª equação do sistema, temos:

$$2x + y + z = 9{,}5$$
$$2x + 1{,}5 + 2 = 9{,}5$$
$$2x + 3{,}5 = 9{,}5$$
$$2x + 3{,}5 = 9{,}5$$

$$2x = 9{,}5 - 3{,}5$$
$$2x = 6$$
$$x = \frac{6}{2}$$
$$x = 3$$

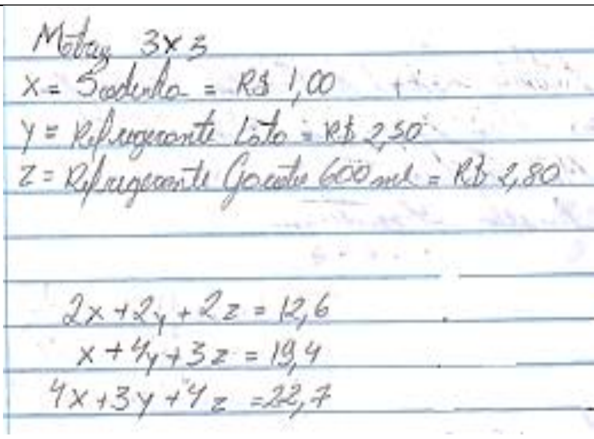
Portanto, a solução do sistema é $S = (3; 1{,}5; 2)$.

Quando o aluno B terminou de apresentar a maneira como haviam resolvido o sistema 3x3, me surpreendi, pois era a primeira vez que resolviam um sistema desse “tamanho” utilizando o método da adição. Os alunos B e O perceberam a surpresa e perguntaram se eu não sabia que, daquela maneira que eles fizeram, resolvia o sistema. Respondi que minha surpresa era devido a nunca termos feito em sala esse processo num sistema 3x3 juntos, ou seja, eles tinham feito sozinhos.

Os alunos B e O pediram se poderiam tentar aplicar novamente o método em outro sistema. Disse que sim e pedi que se preparassem para, na próxima aula, apresentar para a turma a resolução. Os alunos B e O elaboraram outro sistema 3x3 e começaram a resolver da mesma maneira que haviam resolvido o primeiro.

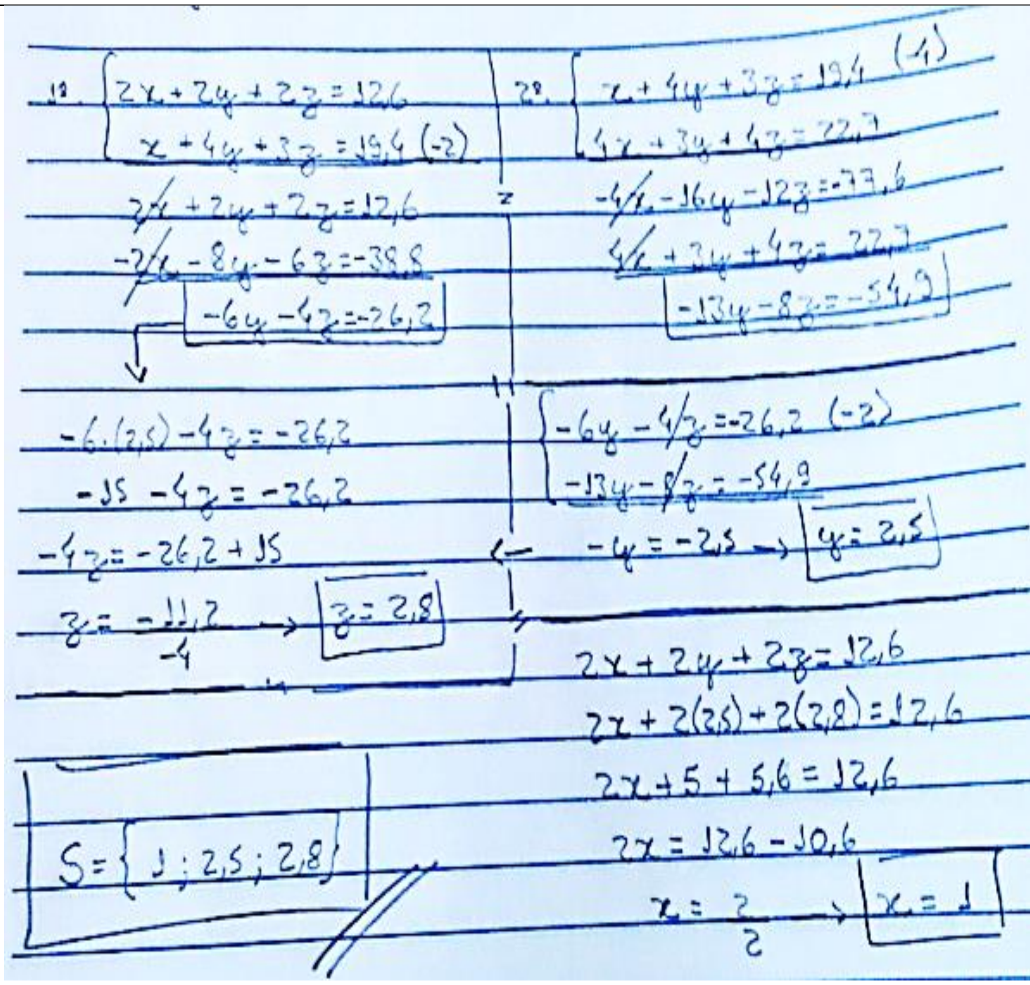
É importante destacar que a dupla formada pelos alunos G e V também usou o método de adição para resolver o sistema 3x3, mas estavam do lado oposto da sala em relação à dupla formada pelos alunos B e O e que não houve troca de informação entre eles durante o processo de resolução. A dupla dos alunos G e V chamou para mostrar como haviam resolvido o sistema 3x3, sistema que apresentado na Figura 4. A Figura 5 apresenta a resolução produzida pela dupla.

Figura 5 – Sistema 3x3 elaborado pelos alunos G e V.



Fonte: Caderno do aluno G

Figura 6 – Resolução do sistema 3x3 produzida pelos alunos G e V.



Fonte: Caderno do aluno G

A dupla formada pelos alunos G e V resolveu de maneira muito semelhante à da dupla formada pelos alunos B e O, entretanto não seguiu a mesma ordem ao agrupar as equações para adicioná-las e cancelar o valor de x.

1º Passo – Para cancelar o valor de x.

Multiplicaram a 2ª equação por menos dois (-2) e, após, adicionaram a 1ª equação ao resultado da 2ª equação multiplicada por menos dois (-2).

$$(-2).[x + 4y + 3z = 19{,}4] \rightarrow -2x - 8y - 6z = -38{,}8$$

$$\begin{array}{r} 2x + 2y + 2z = 12{,}6 \\ -2x - 8y - 6z = -38{,}8 \\ \hline 0x - 6y - 4z = -26{,}2 \quad (1) \end{array}$$

Depois multiplicaram a 1ª equação por menos quatro (-4) e o resultado obtido por essa operação adicionaram à 3ª equação.

$$(-4).[x + 4y + 3z = 19{,}4] \rightarrow -4x - 16y - 12z = -77{,}6$$

$$\begin{array}{r} -4x - 16y - 12z = -77{,}6 \\ 4x - 13y + \quad 4z = \quad 22{,}7 \\ \hline 0x - 13y - 8z = -54{,}9 \quad (2) \end{array}$$

2º Passo – Para calcular o valor de z.

Multiplicaram a equação (1) por menos dois (-2) e o resultado foi adicionado à equação (2).

$$(-2).[6y - 4z = -26{,}2] \rightarrow 12y + 8z = 52{,}4$$

$$\begin{array}{r} 12y + 8z = 52{,}4 \\ -13y - 8z = -54{,}9 \\ \hline -y + 0z = -2{,}5 \end{array}$$

$$-y = -2{,}5$$

$$y = 2{,}5$$

3º Passo – Cálculo do valor de z;

Para calcular o valor de z, será substituído na equação (2) o valor de y por 2,5.

$$-13y - 8z = -54{,}9$$

$$-13(2{,}5) - 8z = -54{,}9$$

$$-32{,}5 - 8z = -54{,}9$$

$$-8z = -54{,}9 + 32{,}5$$

$$-8z = -22,4$$

$$z = \frac{-22,4}{-8}$$

$$z = 2,8$$

4º Passo – Calculo do valor de x.

Para calcular o valor de x, será substituído na 1ª equação o valor de y por $2,5$, e o valor de z por $2,8$.

$$2x + 2y + 2z = 12,6$$

$$2x + 2(2,5) + 2(2,8) = 12,6$$

$$2x + 5 + 5,6 = 12,6$$

$$2x = 12,6 - 10,6$$

$$2x = 2$$

$$x = \frac{2}{2}$$

Portanto, a solução do sistema é $S = (1; 2,5; 2,8)$.

Os procedimentos utilizados pelas duas duplas, formadas pelos alunos B e O e G e V, para a resolução do sistema 3x3, foram semelhantes. A diferença estava na maneira como cancelaram o valor de x. A primeira dupla utilizou a 1ª e a 2ª equação e, após, a 1ª e a 3ª equação. A segunda dupla utilizou a 1ª e a 2ª equação e, após, a 2ª e a 3ª equação. Os procedimentos posteriores ao cancelamento do valor de x foram os mesmos.

Em sala, todas as duplas haviam resolvido o sistema 3x3 que elaboraram, então, solicitei que trocassem os sistemas entre si e resolvessem o sistema que tinham recebido. A aula estava no final, e o término da resolução ficou para casa. Solicitei que cada aluno elaborasse um sistema 4x4, orientando que não resolvessem, mas que trouxessem o sistema 3x3 resolvido.

Ao sair da sala de aula, pensando a respeito da utilização do método de adição para sistemas 3x3 e seguindo os passos que os alunos B e O e G e V haviam executado, percebi que tinham feito um escalonamento. Honestamente, nunca havia pensado na semelhança entre aplicar o método de adição para um sistema 2x2 e escalonar um sistema 2x2.

Relembrando falas de alguns autores da RME, como Freudenthal (1973), Van den Heuvel-Panhuizen (1996), De Lange (1999), Treffers & Gofree (1985) em relação ao processo de aprendizagem, que defendem que o processo de aprendizagem matemática acontece na sala de aula por meio da utilização de situações que permitam aos estudantes “reinventar” a matemática, senti grande satisfação porque me dei conta de que, na produção realizada, os alunos, de certa forma, matematizaram e se sentiram motivados a “fazer matemática”. Os alunos desenvolveram ferramentas matemáticas para lidar com a tarefa e procurar resolvê-la. Compreendi claramente o que significa dizer que o professor precisa acreditar que o aluno é capaz de aprender matemática.

O episódio de elaborar e resolver um sistema 3x3 oportunizou um fazer matemática e não uma “atividade robótica”, não só aos alunos, mas também para mim, já que observando o trabalho dos alunos, reconheci a aplicação do escalonamento.

Para seguir a perspectiva da reinvenção guiada, é preciso apresentar situações que favoreçam a oportunidade de o aluno desenvolver algo que é novo para ele, entretanto conhecido pelo professor (FREUDENTHAL, 1991). Parece óbvio pensar que o aluno irá criar algo que é novo somente para ele e não para o professor, porém, no caso aqui narrado, me deparei com situações nas quais os alunos me surpreenderam.

Nas aulas, devido à constante interação entre os alunos e deles comigo, a dinâmica foi sofrendo modificações. Comecei a perceber que estava desenvolvendo um papel de organizadora da reconstrução dos alunos de ideias e conceitos matemáticos. Meu papel estava mudando, não era mais a professora que transmitia conhecimento, mas a professora mediadora das discussões, dos debates, a professora que, ao planejar uma aula, tinha a constante preocupação de propor aos alunos tarefas suscetíveis à matematização, buscando, no executar da aula, questionar os alunos no intuito de oportunizar que fizessem uso do próprio conhecimento para um pensar mais matemático.

DO INTENTO

Sou professora da disciplina de Matemática no Ensino Fundamental e Médio desde o ano 2000, e, no decorrer da minha carreira, existem falas, comportamentos, atitudes, crenças, por parte dos professores, que muito me preocupam. É frequente escutar, no diálogo entre professores:

- Os alunos não aprendem por que são desinteressados.
- Ensinei várias vezes e os alunos não aprenderam, não sei por quê?
- Acho que a Matemática básica desses alunos é muito fraca.
- Aprender matemática não é para qualquer um, o aluno precisa ser inteligente e resolver os problemas aplicados em sala de aula várias vezes até decorar.
- Os bons alunos que aprendem matemática são a minoria.
- Preparei uma lista de problemas enorme para os alunos, resolvi todos os problemas com eles e eles ainda foram mal na minha prova! Você acredita? Não sei mais o que fazer para os alunos aprenderem Matemática.

Essas afirmações e questionamentos sempre me deixam angustiada. As falas dos professores quanto ao fracasso presente na aprendizagem dos alunos, dão indícios de que o aluno é o único responsável pela sua não aprendizagem, o professor está livre de qualquer responsabilidade. Porém, nunca me senti isenta dessa responsabilidade, o que desejava era descobrir um “como” ministrar aulas de matemática que oportunizassem aos alunos se sentissem autores e produtores do seu próprio conhecimento, que o conhecimento matemático fosse útil, ou seja, desejava que os alunos aprendessem e não decorassem o que havia apresentado a eles.

Minhas crenças a respeito do papel do professor no processo de ensino e aprendizagem, depois da participação no GEPEMA, eram ainda mais distantes das crenças da maioria dos professores de matemática que trabalhava comigo. No entanto, quando tentava expor minha concepção do papel do professor como mediador e guia do conhecimento matemático, rapidamente a conversa era encerrada com algum professor dizendo: “ Na teoria tudo é lindo, quero ver na prática”.

Ciani (2012), em sua tese de doutorado, faz menção a trabalhar com a análise da produção escrita como meio para a intervenção do professor. Porém, em um ambiente de sala de aula em que se estava atuando, a produção escrita dos alunos não era um dos principais materiais disponíveis para fazer as intervenções. Na maioria do tempo, o retorno que se tinha para realizar as intervenções eram as falas dos alunos, as discussões em grupos, os questionamentos. Não havia tempo para recorrer às produções escritas e fazer uma análise detalhada com o intuito de identificar as maneiras de lidar de cada um deles. Nesse contexto de sala de aula, era preciso utilizar as informações produzidas pelos alunos, refletir, planejar e executar intervenções de forma paralela e contínua à dinâmica da aula. Os alunos precisavam de orientações quanto ao processo de aprendizagem. O que Ciani (2012) apresenta, porém, a respeito da intervenção para aulas de matemática sob a luz da reinvenção guiada, a partir da análise da produção escrita, possibilitou-me refletir nas informações e produções que vinham por parte dos alunos e ajudou a elaborar as intervenções no decorrer das aulas.

Minhas aulas de matemática sempre eram iniciadas com uma tarefa para os alunos resolverem. Depois apresentava os procedimentos possíveis para resolver a tarefa. Finalizava a aula com uma lista de novas tarefas para que, em dupla ou individualmente, os alunos resolvessem e depois eu pudesse verificar se haviam ou não feito o que havia proposto. Nessa época, pensava que essa dinâmica oportunizava aos alunos trabalhar com a matemática do cotidiano. Muitas vezes saía da sala sem entender porque alguns alunos diziam: “Professora, a senhora explica muito bem! Gosto da senhora! Mas não consigo entender a matemática, acho que não consigo aprender Matemática”. Tais falas me incomodavam e me faziam refletir: O que estava fazendo que não conseguia atingir os alunos? Como poderia atuar e fazer com que os alunos realmente entendessem a Matemática? Como fazer que a matemática fosse útil e deixasse de ser um “monstro de sete cabeças”?

Trabalhar com base em um modelo tradicional de aula, em que o professor apresenta o conteúdo e depois os alunos treinam a aplicação em diferentes exercícios, não me provocava dúvidas ou incertezas em como encaminhar a aula. Eu não precisava refletir ou analisar minha prática. Sabia o que fazer. Se por acaso algum aluno não conseguisse resolver um exercício, eu ia ao quadro e explicava como se fazia. A preocupação com a elaboração da aula resumia-se em escolher a tarefa para a aplicação do conteúdo e selecionar uma lista de exercícios para que os alunos resolvessem. É relevante lembrar que eu sempre resolvia a lista antes de entregar para os alunos para não correr o risco de ter dificuldade na frente da turma, já que acreditava na necessidade de deixar evidente que dominava o conteúdo que estava ensinando.

Quando comecei a planejar as aulas que seriam ministradas no 1º semestre do ano de 2014, tinha a ideia de que não seria uma tarefa simples e que, seria um desafio, mas me achava preparada para enfrentá-lo, mesmo tendo de sair da minha zona de conforto. Olhando para trás, sair da zona de conforto talvez tenha sido uma das maiores dificuldades que passei.

Para a elaboração e planejamento de cada aula, tive diversos momentos de reflexão e de elaboração de hipóteses a respeito dos diferentes caminhos que os alunos poderiam seguir, ao trabalharem com as tarefas que lhes seriam apresentadas. Pretendi organizar um ambiente de aprendizagem com tarefas relevantes

Para trabalhar à luz da RME e seguir os princípios da reinvenção guiada, precisava mudar radicalmente as atitudes e ações em sala de aula, passar por um processo de reorganização da minha prática. As concepções que tinha em relação ao papel do professor e do aluno no processo de ensino e aprendizagem já não eram adequadas, não davam subsídios para trabalhar com a RME. Entretanto, mesmo envolvida em tantas dúvidas, angústias, incertezas, medo de falhar ao trabalhar com a ideia da matemática vista como uma criação humana, um processo de matematização da realidade, fiquei motivada a tentar modificar minha prática.

Revendo agora o trabalho, confesso que pensei que me sairia melhor, até porque me sentia contagiada com a possibilidade de planejar e ministrar aulas que tivessem como foco a aprendizagem por meio da matematização da realidade, da reinvenção guiada, respeitando e explorando as produções dos alunos.

Analisando minha prática narrada, percebo a grande dificuldade que ainda tenho para esperar o aluno “pensar”, construir estratégias e procedimentos por ele mesmo. Ao propor a Tarefa 1, deixei explícito que desejava que montassem uma equação. Agora vejo que a situação de compra simplesmente “vestiu” a tarefa. Quando mudei a pergunta e solicitei que simulassem uma compra usando os produtos presentes nos encartes ou na tabela de preços da cantina, sem mencionar a palavra equação, penso que houve um vislumbre de alguma oportunidade de os alunos pensarem sozinhos nas estratégias e nos procedimentos que deveriam usar.

Porém, quando chegou o dia de desenvolver as aulas planejadas na “perspectiva da RME”, com todos os princípios da RME , percebi que havia alguns equívocos. Um deles era em relação ao Princípio da Atividade que entende a matemática como uma atividade humana, que não era algo que se poderia inserir no decorrer das aulas, ou planejar momentos em que a matemática se apresentasse como atividade humana. A matemática como atividade humana deve fazer parte da concepção de ensino da matemática, deve estar na essência do professor que se dispõe a trabalhar nessa perspectiva.

Outro equívoco relaciona-se às tarefas utilizadas para ministrar as aulas, que não tinham as características de tarefas usadas na RME , embora não deixassem de ser "boas" tarefas. Perceber que as aulas planejadas não atendiam à perspectiva da RME, em um primeiro momento, fez meu "chão desaparecer ".

Após essa percepção, entendi que trabalhar na perspectiva da RME não consiste somente no planejamento das aulas. Os princípios e pressupostos da RME estão além do planejar, estão na ação do professor, na prática docente, na ação do aluno, na dinâmica da aula, no ambiente de sala de aula. Ao chegar a essa conclusão, comecei a refletir na mudança de prática, no que havia ocorrido durante a tentativa de ministrar aulas de matemática, que acreditava estar na perspectiva da RME. Então percebi que o que havia sido realizado era um "como", uma maneira de ministrar aulas à luz da Educação Matemática Realística por meio da Resolução de Problemas , a RME havia sido o fio condutor.

Ao ministrar as aulas, pensei atender aos princípios e às ideias lançados por Freudenthal, o que ele acreditava ser a Educação Matemática: a Matemática como atividade humana, a aprendizagem Matemática por meio da matematização, o ensino e a aprendizagem por meio da Reinvenção Guiada, a Inversão antididática. A partir da investigação e análise da minha prática pude encontrar indícios de que tive atitudes que vão ao encontro da abordagem da RME. Mas boa parte ainda não vai. E é assim que estou: em transição. Mas, é na direção dessa abordagem que estou caminhando.

REFERÊNCIAS

BENJAMIN, W. O narrador: considerações sobre a obra de Nikolai Leskov. In: ______. **Magia e técnica, arte e política**: ensaios sobre literatura e história da cultura. Tradução de Sérgio Paulo Rouanet. 7. ed. São Paulo: Brasiliense, 1994.

BOLÍVAR, A. **Profissão Professor:** o itinerário profissional e a construção da escola. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001.

BURIASCO, R. L. C. de. Sobre a Resolução de Problemas (I). **Nosso Fazer**. Londrina, 1, n.5. Londrina, 1995, p. 1.

BUTTS, Thomas. **Formulando Problemas Adequadamente**. In: KRULIK, S.; REYS, R.E. A Resolução de Problemas na Matemática Escolar. São Paulo: Atual, 1997, p.32-48.

CIANI, A. B. **O realístico em questões não-rotineiras de Matemática**. 2012. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

CONNELLY, F. Michael e CLANDININ, D. Jean (2004). **Narrative Inquiry**. Complementary Methods for Research in Education, 3rd Edition, Washington: American Educational Research Association.

DE LANGE, J. **Framework for classroom assessment in mathematics**. Madison: WCER, 1999.

DE LANGE, J. **Mathematics, Insight and Meaning**. Utrecht: OW &OC, 1987.

FERREIRA, P. E. A. **Análise da produção escrita de professores da Educação Básica em questões não-rotineiras de matemática**. 2009. 166 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

FERREIRA, P. E. A. **Enunciados de Tarefas de Matemática**: um estudo sob a perspectiva da Educação Matemática Realística. 2013. 121f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

FREUDENTHAL, H. Why to Teach Mathematics so as to Be Useful. **Educational Studies in Mathematics**, v. 1, n. 1-2, p. 3-8, 1968.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an educational task.** Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1973.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting Mathematics Education.** Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

MENDES, M. T. **Utilização da Prova em Fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de cálculo**. 2014. 275f. Trabalho Tese de doutorado (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, 2014.

MORAES, M. A. G. **Correção de uma prova escrita de matemática**: algumas considerações. 2013. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

OLIVEIRA, Rodrigo Camarinho. **Matematização: estudo de um processo.** 2014. 62f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

PAIVA, M. **Matemática.** Ed. Moderna. II Volume. São Paulo: Moderna, 2009.

PEDROCHI JUNIOR, O. **Avaliação como oportunidade de aprendizagem em matemática**. 2012. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

PEREIRA JUNIOR, Ademir. **Enunciados de Itens de provas de Matemática**: um estudo na perspectiva da Educação Matemática Realística. 2014. 68f. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

PIRES, M. N. M.; **Oportunidade para aprender:** uma Prática da Reinvenção Guiada na Prova em Fases**.** 2013. 122f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

PRESTES, Diego Barboza. **Prova em fases de Matemática:** uma experiência no 5o ano do Ensino Fundamental. 2015. 122f. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

SANTOS, E. R. dos. **Análise da produção escrita em matemática**: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino. 2014. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2014.

SILVA, Gabriel dos Santos e. **Uma configuração da reinvenção guiada**. 2015. 94f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

SOUZA, E.C.(Org.). **Autobiografias, História de Vida e Formação**: pesquisa e ensino. Salvador/Bahia: EDUNEB - EDIPUCRS, 2006.

TREFFERS, A.; GOFREE, F. **Rational analysis of realistic mathematics education – the wiskobas program**. 1985. Disponível em: <https://docs.google.com/file/d/0B4o6aVujDKNpY1dQSTBqNEo4b1E/edit>. Acesso em: 28/02/15.

TREVISAN, André Luis. **Prova em fases e um repensar da prática avaliativa em Matemática**. 2013. Tese de doutorado (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. **Assessment and Realistic Mathematics Education**. Utrecht: CD-ß Press/Freudenthal Institute, Utrecht University, 1996.

VIOLA DOS SANTOS, J.R; BURIASCO, R. L. C.; FERREIRA, P. E. A. Interpretações de Alunos da Educação Básica para a Idéia de Recorrência em uma Questão Aberta de Matemática. In: **Educação Matemática em Pesquisa**, São Paulo, v. 12, n. 1, p. 143-163. 2010.

APÊNDICE

Planejamento Inicial

1º Passo: planejamento das aulas.

- Estabelecer quais os conteúdos deveriam estar presentes nas aulas que seriam ministradas no primeiro semestre de 2013 para a disciplina de Matemática III;
- Levantamento da quantidade de aulas que deveriam ser ministradas no semestre e por bimestre;

2º Passo: seleção das tarefas.

- Foram selecionadas, ao todo, 135 tarefas referentes aos conteúdos de Matrizes; Determinantes; Sistemas Lineares.
- As tarefas foram formuladas pela professora/ pesquisadora, retiradas do livro didático que seria utilizado pela turma no ano em que as aulas seriam ministradas, de provas de vestibular.
- As tarefas selecionadas tinham a intenção de propor uma situação realística que seguisse a Classificação dos Problemas segundo Butts (1997). Ao selecionar as tarefas, buscou-se um número maior de tarefas que pudessem ser classificadas como Problema de Aplicação, Problema de Situação Problema e Problema de Pesquisa Aberta.

3º Passo: elaboração das trajetórias de ensino (papel do professor).

- Foram elaboradas 60 horas/aula.
- As aulas foram descritas passo a passo, ou seja, pensou-se em quais tarefas seriam utilizadas, quais questionamentos, discussões, intervenções poderiam ser feitos pela professora.
    - quais atitudes a professora poderia tomar para oportunizar com que os alunos interagissem entre si e com a professora.
    - refletiu a respeito de aspectos que deveriam estar presentes na dinâmica da aula: como a turma poderia ser dividida quando os alunos fossem resolver as tarefas

propostas; quais tarefas poderiam ser resolvidas como tarefa de casa.

4º Passo: elaboração das trajetórias de aprendizagem (papel do aluno).

— Buscou-se elaborar diferentes resoluções que os alunos supostamente poderiam apresentar.
— Pensou em quais questionamentos poderiam ser feitos pelos alunos.

5º Passo: execução das aulas.

— Foram ministradas 60 horas/aulas;
— Houve replanejamento na maioria das aulas.
— A Professora começou a perceber que o caminho pensado *a priori*, para ministrar aulas na tentativa de oportunizar aos alunos serem orientados a construir seu próprio conhecimento e matematizarem, não era como havia modelado.
— As aulas não poderiam ser ministradas de forma tão linear como havia imaginado. Houve tarefas que quando desenvolvidas pelos alunos, seguiram um caminho muito diferente do que a Professora havia pensado;
— Foram utilizadas todas as tarefas previstas.
— Uma ou outra tarefa sofreram alterações no enunciado.
— A maioria das mudanças ocorreu nas trajetórias de ensino e de aprendizagem planejadas pela Professora.
— Os alunos se motivaram a trabalhar como seres ativos do processo de aprendizagem.
— A tentativa de mudança de prática por parte da Professora quanto a ministrar aulas de matemática à luz da RME foi constante.
— Foi possível vencer a ementa.