UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

LILIAM APARECIDA ALVES PAES

NÚMEROS COMPLEXOS:

UMA PROPOSTA DIDÁTICA BASEADA NA MODELAGEM MATEMÁTICA E EM CONTEXTOS HISTÓRICOS

Londrina
2013

LILIAM APARECIDA ALVES PAES

NÚMEROS COMPLEXOS:

UMA PROPOSTA DIDÁTICA BASEADA NA MODELAGEM MATEMÁTICA E EM CONTEXTOS HISTÓRICOS

Dissertação de mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Paulo Laerte Natti

Londrina
2013

Catalogação elaborada pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da Universidade Estadual de Londrina

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

P126n Paes, Liliam Aparecida Alves.
Números complexos: uma proposta didática baseada na modelagem matemática e em contextos históricos / Liliam Aparecida Alves Paes. – Londrina, 2013.
83 f. : il.

Orientador: Paulo Laerte Natti.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2013.
Inclui bibliografia.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Modelagem matemática – Teses. 3. Educação matemática – Teses. 4. Números complexos – Teses. I. Natti, Paulo Laerte. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Sociedade Brasileira de Matemática. IV. Título.

CDU 51:37.02

LILIAM APARECIDA ALVES PAES

NÚMEROS COMPLEXOS:
UMA PROPOSTA DIDÁTICA BASEADA NA MODELAGEM MATEMÁTICA E EM CONTEXTOS HISTÓRICOS

Dissertação de mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Paulo Laerte Natti

Prof. Dr. Paulo Laerte Natti-Orientador
Universidade Estadual de Londrina

Juan Soriano

Prof. Dr. Juan Amadeo Palomino Soriano
Universidade Estadual de Maringá

Prof.ª Dr.ª Neyva Maria Lopes Romeiro
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 12 de abril de 2013.

A Deus, por Sua presença em minha vida; aos meus avós, Pedro e Pascoalina, exemplos de Fé e sabedoria; aos meus pais, Francisco e Benilda, pelo carinho e incentivo; aos meus irmãos, Bruno e Sheila, pela confiança e compreensão; ao meu esposo, Ricardo, companheiro de todas as horas; aos amigos, pela força e paciência; aos meus mestres, pela dedicação e ensinamentos.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, que me conduz na realização de mais esse sonho.

À minha família, pelas demostrações de apoio, confiança, amor, dedicação e compreensão nos momentos de ausência.

Ao Professor Dr. Paulo Laerte Natti, meu orientador, pela disponibilidade, competência, dedicação e amizade.

Aos Professores Doutores Juan Amadeo Palomino Soriano e Neyva Maria Lopes Romeiro, pelas relevantes contribuições como membros da banca examinadora.

Ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), à Universidade Estadual de Londrina (UEL) e aos professores do curso, por contribuirem com a minha formação.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) que permitiu a realização deste trabalho, concedendo-me bolsa de estudos.

Aos amigos do mestrado, exemplos de determinação e esperança, com os quais tive o privilégio de conviver; em especial, à Daniele, pela amizade incondicional, incentivando-me quando pensava não ter mais forças para continuar. Turma, esta conquista é nossa!

Enfim, agradeço a todos aqueles que, de uma forma ou de outra, colaboraram com a realização deste trabalho.

“A Ciência pode ser encarada sob dois aspectos diferentes. Ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, e o aspecto é o de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições. Ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como foi sendo elaborada, e o aspecto é totalmente diferente – descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que logo surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições.”

Bento de Jesus Caraça

PAES, Liliam Aparecida Alves. **Números complexos:** uma proposta didática baseada na modelagem matemática e em contextos históricos. 2013. 83 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta didática para o processo de ensino e aprendizagem dos números complexos no ensino médio. A motivação para a sua elaboração surge a partir dos seguintes questionamentos: Por que estudar números complexos? E para que servem números complexos?. Inicialmente, apresenta-se como os números complexos surgiram e como geralmente são abordados nos livros didáticos. Em seguida, propõe-se uma sequência de atividades didáticas, fundamentada na metodologia da Modelagem Matemática e na História da Matemática, que tem como principal objetivo propiciar um ensino de qualidade dos números complexos aos alunos. Por meio desta proposta didática, pretende-se que os alunos sejam responsáveis pela construção de seus conhecimentos, atribuindo significado aos números complexos. Ao término da sequência de atividades didáticas, os alunos responderão um questionário que tem por objetivo avaliar a qualidade da intervenção pedagógica.

Palavras-chave: Ensino-aprendizagem. Intervenção pedagógica. História da Matemática.

PAES, Liliam Aparecida Alves. **Complex numbers:** a didactic proposal based on mathematical modeling and historical contexts. 2013. 83 f. Dissertation (Professional Maste's degree in Mathematics in National Network) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

ABSTRACT

This work presents a didactic proposal for the teaching and learning process of complex numbers in high school. The motivation for its development arises from the following questions: Why study complex numbers? and What are complex numbers?. Initially is presented as the complex numbers have emerged and how usually are discussed in textbooks. Then it is proposed a didactic sequence, based on the methodology of mathematical modelling and in the history of mathematics, whose main objective is to provide a quality education of the complex numbers to the students. Through this didactic proposal is intended that students be responsible for building their knowledge, assigning meaning to complex numbers. At the end of the sequence of learning activities the students will answer a questionnaire that aims to evaluate the quality of the pedagogical intervention.

Keywords: Teaching-learning. Pedagogical intervention. History of Mathematics.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Da experiência vivenciada em sala de aula, verifica-se que a forma como o conteúdo dos números complexos é apresentado, no contexto educacional das escolas de Ensino Médio, tem gerado muitas inquietudes tanto para os alunos como para os professores. Foram justamente estas inquietações que nos levaram à escolha do tema desta dissertação.

Em sala de aula, observa-se que, ao apresentar o conteúdo dos números complexos, surgem questionamentos, tais como: Por que estudar números complexos? Para que servem os números complexos? Dentre outros. Com o objetivo de responder a tais questionamentos, deparamo-nos com algumas dissertações, teses e artigos sobre o tema, que reforçaram o fato de que muitos de nossos alunos, e até mesmo muitos professores, não compreendem a importância dos números complexos. José Paulo Carneiro escreve:

> De fato, que utilidade poderia ter objetos cuja existência é motivada, logo no primeiro contato, pela capacidade que possuem de fornecer uma solução "imaginária" para uma equação que "sabemos" que não tem solução, como nos foi antes demonstrado várias vezes? Pois é assim que quase sempre aprendemos e ensinamos os números complexos. (CARNEIRO, 2004, p.1-2)

Ou ainda, nas palavras de Raimundo Martins Reis Neto:

> Durante oito anos ministrando aulas de números complexos na 3ª série do ensino médio de escolas particulares e públicas e em pré-vestibulares de São Luís do Maranhão, percebi que os professores, inclusive eu, e os alunos sentíamos dificuldades quando o objeto de estudo era o conjunto dos números complexos. (REIS NETO, 2009, p. 15).

Os livros de Matemática para o ensino médio abordam o conteúdo de números complexos de forma padrão, ou seja, geralmente um fato histórico é citado, porém sem estar diretamente relacionado com o conteúdo a ser desenvolvido; ou ainda é realizada uma revisão acerca dos conjuntos numéricos até chegar aos números complexos. Em tais livros, geralmente são apresentadas três maneiras de representar tais números complexos: na forma de pares ordenados, na forma algébrica ou na forma trigonométrica. Na sequência definem-se as operações básicas, em sua maioria, através da representação algébrica, sem relacioná-las com as transformações que ocorrem no plano complexo. Enfim, o conteúdo não é contextualizado, há um apego ao uso de fórmulas e definições, e, consequentemente, os exercícios são aplicações diretas dessas fórmulas. Tais abordagens geram uma grande insatisfação tanto para os alunos quanto para os professores.

Vale destacar que essas considerações foram feitas a partir da análise de três livros didáticos utilizados em escolas estaduais do Estado de São Paulo, a saber: Matemática: contexto e aplicações, de Luiz Roberto Dante (DANTE, 2010); Matemática: ciência, linguagem e tecnologia, de Jackson Ribeiro (RIBEIRO, 2012) e Novo olhar matemática, de Joamir Roberto de Souza (SOUZA, 2010).

Por outro lado, na literatura observam-se algumas abordagens alternativas na apresentação deste conteúdo, as quais nos chamaram a atenção. A seguir, citamos alguns destes textos, que consideramos mais relevantes para nossos propósitos e que, de alguma forma, contribuíram para o desenvolvimento da sequência de atividades didáticas que vamos propor mais adiante.

Mário Servelli Rosa (ROSA, 1998) propõe atividades com números complexos baseadas na forma em que surgiram historicamente, justificando assim, para os alunos, a necessidade de extrair a raiz quadrada de números negativos. Em (ROSA, 1998, p. 24), o autor enfatiza que a mudança da representação dos números complexos da forma algébrica para a forma trigonométrica possibilitou a realização das operações de potenciação e radiciação, permitindo assim a resolução de problemas que envolviam equações do terceiro grau, cujas resoluções dependiam do cálculo de raízes quadradas de números negativos.

Rosa (1998, p. 26) assume como hipótese de trabalho com números complexos a necessidade de expor os alunos a problemas que possuam soluções reais, mas que, para obterem tais soluções, eles devem operar com raízes quadradas de números negativos. Estes problemas justificariam a necessidade do estudo dos números complexos. Ele destaca alguns aspectos positivos referentes à aplicação de sua sequência didática, entre os quais citamos: a oportunidade que os alunos tiveram de descobrir os motivos que levaram os matemáticos a extraírem as raízes quadradas de números negativos, fazendo com que eles percebessem que a matemática não é inventada, mas que surge da resolução de problemas. Rosa afirma que os alunos notam a necessidade da mudança do registro algébrico para o geométrico para operarem com raízes quadradas de números negativos e assim obterem as soluções reais dos problemas propostos. Dessa forma, os alunos compreendem que, mesmo que um número complexo não represente uma quantidade "real", é possível operar com eles e chegar a resultados reais (ROSA, 1998, p. 165-166).

Em outro texto, Nanci Barbosa Ferreira Araújo propõe uma "mudança na metodologia do ensino de números complexos mediante implementação de atividades encaminhadas para serem desenvolvidas pelo aluno na sala de aula." (ARAÚJO, 2006, p. 20). Ela descreve como ocorreu todo o processo de pesquisa, elaboração e execução da sequência de atividades propostas, cuja metodologia está pautada na Engenharia Didática[1], a qual é constituída por quatro fases, a saber: análises preliminares; concepção e análise a *priori* das situações didáticas; experimentação; análise a *posteriori* e validação[2]. Destaca que seus objetivos foram alcançados, pois conseguiu trabalhar as aulas sobre números complexos de uma maneira diferente da tradicional, fazendo com que os alunos se interessassem mais, participassem das intervenções e, consequentemente, conquistassem a aprendizagem desejada.

O trabalho de Raimundo Martins Reis Neto propõe uma reflexão sobre a metodologia tradicional empregada no ensino dos números complexos e apresenta uma metodologia alternativa para o ensino dos mesmos, que tem por objetivo principal "contribuir para uma melhor compreensão do conceito e do significado geométrico da unidade imaginária i " (REIS NETO, 2009, p. 45). A proposta metodológica utilizada nas atividades didáticas está fundamentada na ênfase dos números complexos como vetores, dada através de uma abordagem ampla e interdisciplinar.

No trabalho de Carlos Nely Clementino de Oliveira é investigado se uma sequência didática baseada na exploração dos aspectos gráficos dos números

[1] "A Engenharia Didática surgiu em meados de 1980 e teve como precursora a pesquisadora francesa Michèle Artigue inspirada no trabalho de um engenheiro. O trabalho didático tem como objetivo construir o conhecimento e o trabalho de um engenheiro é voltado para a construção de um projeto."(NORO, 2012, p. 22). Michèle Artigue (1996 *apud* NORO, 2012, p. 22) relaciona o engenheiro ao professor, "tal como o engenheiro, o professor necessita de um conjunto de conhecimentos teóricos, ter planejamento de todas as etapas da pesquisa, ir prevendo as possíveis dificuldades e soluções para os problemas encontrados, até a aplicação da sequência didática".

[2] Na primeira fase, é realizado um levantamento das concepções envolvidas, fundamentando a pesquisa através de referências teóricas. Na segunda fase, a partir das informações obtidas na fase anterior, ocorre o desenvolvimento das atividades que comporão a sequência didática. Na terceira fase, as atividades propostas são aplicadas. Na quarta e última fase, é realizada uma análise dos dados observados pelo professor-pesquisador durante a aplicação da sequência didática, ocorre também um confronto entre os dados obtidos a partir da análise a priori e os da análise a posteriori. (ARAÚJO, 2006, p. 41 - 49)

complexos contribuiria para desenvolver nos alunos a aptidão para resolver alguns problemas, como, por exemplo, os de geometria plana. A sequência didática elaborada é baseada na metodologia da Engenharia Didática, de Michèle Artigue. O autor destaca que os números complexos podem ser estudados através de seus diferentes registros de "representação semiótica: registro algébrico, registro por pares ordenados, registro gráfico por vetores, registro trigonométrico, registro por matrizes e por transformações no plano" (2010, p. 104).

Oliveira (2010) explora as transformações no plano complexo através do uso do software Geogebra, mas não utiliza o registro matricial. Entretanto, ele aponta uma "falha" em sua sequência didática, já que em uma das atividades, quando os alunos deveriam determinar as coordenadas de dois vértices consecutivos de um quadrado sabendo as coordenadas dos outros dois vértices, verificou-se que nenhum dos alunos resolveu o referido problema utilizando os conceitos dos números complexos desenvolvidos nas atividades anteriores.

Enfim, o Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012) apresenta uma abordagem para os números complexos através de referências a alguns fatos históricos e com ênfase na representação geométrica.

Nestes cincos estudos citados acima, percebe-se que o ensino do conteúdo de números complexos no Ensino Médio tem sido um desafio. Notamos que o processo de ensino e aprendizagem dos números complexos ocorre de maneira mais significativa quando o aluno entra em contato com o processo histórico do surgimento de tais números, assim como quando participa ativamente de todo o processo de construção do seu conhecimento, seja através de atividades encaminhadas, seja por atividades pautadas nos diferentes registros dos números complexos realizadas com a ajuda de softwares (no caso, o Geogebra). Assim, destacamos a importância de tais trabalhos para nossa reflexão sobre o assunto, direcionando-nos para uma sequência de atividades que foram apontadas como relevantes nos mesmos.

Em nossa visão, acreditamos que o conteúdo de Números Complexos deva ser abordado através de uma situação-problema inicial, recorrendo sempre que necessário à sua história, visando uma melhor compreensão deste tema. De acordo com o Currículo do Estado de São Paulo (SÃO PAULO, 2012, p. 45) "...é na história que buscamos não apenas uma compreensão mais nítida dos significados dos conceitos fundamentais, mas principalmente o significado das mudanças conceituais, ou seja, o significado das mudanças de significado”.

O objetivo principal deste trabalho consiste no desafio de elaborar uma sequência didática para o ensino dos números complexos que objetivem responder as questões propostas, assim como propiciar alternativas para que o processo de ensino e aprendizagem ocorra da melhor forma possível. Cabe ressaltar que as atividades da sequência didática não foram ainda aplicadas em sala de aula, o que abre caminhos para trabalhos futuros.

Neste contexto, estruturamos a apresentação deste trabalho como descrita a seguir: No capítulo 2, discute-se a falta de contextualização dos conceitos acerca dos números complexos no ensino médio. Em seguida, apresenta-se a metodologia que será adotada no desenvolvimento da sequência didática – a Modelagem Matemática. No capítulo 3, descrevem-se alguns fatos históricos sobre o surgimento dos números complexos e como estes são abordados nos livros didáticos utilizados em escolas públicas. No capítulo 4, propõe-se uma sequência didática que objetive melhorar a qualidade do processo de ensino e aprendizagem dos números complexos, baseada em recortes da história dos números complexos e na Modelagem Matemática. Finalmente, no capítulo 5, apresentam-se as considerações finais e possíveis encaminhamentos futuros para o trabalho apresentado.

2 PROBLEMÁTICA E FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, trataremos do problema que consideramos mais pertinente no ensino dos Números Complexos: a falta de contextualização dos conteúdos sobre números complexos no processo de ensino e aprendizagem. Apresentaremos também a metodologia que consideramos mais compatível aos nossos propósitos.

2.1 JUSTIFICATIVA E DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA

Nos textos mencionados no capítulo introdutório, percebemos claramente o quanto o ensino dos números complexos vem ocorrendo de maneira descontextualizada, e, consequentemente, os alunos reproduzem o que aprendem sem saber ao certo o que estão fazendo.

Oliveira (2010, p. 105-110) aplicou sua sequência didática a alunos que já tinham assistido a aulas sobre o conteúdo de Números Complexos. Inicialmente o referido autor propôs aos sujeitos de sua pesquisa um questionário cujo objetivo era verificar o que os mesmos já sabiam sobre o conteúdo em estudo. Assim, Oliveira obteve, resumidamente, as seguintes informações: os alunos não sabiam que os conceitos sobre números complexos podiam ser aplicados na resolução de problemas de Geometria; a abordagem histórica não era realizada adequadamente, visto que os alunos acreditavam que os números complexos surgiram da necessidade de se resolver uma equação de grau 2, com discriminante negativo, e não da resolução de uma equação de grau 3; enfim, havia deficiência quanto à abordagem geométrica e suas propriedades básicas.

No mesmo contexto, Araújo (2006, p. 45) apresentou uma entrevista realizada com professores do ensino médio que lecionavam o conteúdo de números complexos. O objetivo da entrevista era investigar como eles ensinavam tais conceitos aos seus alunos e as dificuldades encontradas pelos mesmos. Araújo (2006, p. 75-76) constatou que a maioria dos entrevistados – matemáticos – apontavam os livros didáticos como o principal responsável pelas suas dificuldades em ensinar números complexos. Já os entrevistados - engenheiros – atribuíam a dificuldade ao fato de terem que atrasar o conteúdo devido à dificuldade que os alunos apresentavam com relação a conceitos anteriores (citam como exemplo a trigonometria).

Nesta entrevista, o autor verificou também que as dificuldades dos alunos estavam relacionadas com as dificuldades dos professores. Os entrevistados também consideravam que contextualizações históricas seriam importantes, pois serviriam de motivação e contribuiriam para responder os questionamentos dos alunos quanto ao tema estudado. Quando questionados pelo autor quanto à importância de se estudar números complexos, a maioria respondeu ser importante e apresentou algumas justificativas: realizar aplicações em áreas científicas, auxiliar no estudo de disciplinas relacionadas com a eletricidade, elevar o conhecimento acerca dos conjuntos numéricos, resolver equações polinomiais, entre outras respostas. Araújo (2006, p. 77) observou que os professores entrevistados não citaram o uso de outra metodologia de ensino e aprendizagem que não fosse a tradicional.

Enfim, os trabalhos citados reforçam o fato de que as abordagens propostas nos livros didáticos são insuficientes para que o processo de ensino e aprendizagem dos números complexos ocorra de modo satisfatório, pois não contribui para a formação dos alunos, o que revela a necessidade de se buscarem novas metodologias.

2.2 Metodologia Adotada: Modelagem Matemática

Em geral, é notável que a Matemática ensinada na sala de aula, assim como a forma como é ensinada, não acompanhou a evolução tanto social quanto tecnológica, gerando conflitos entre aqueles que devem ensinar (professores) e os que devem aprender (alunos). Na tentativa de reduzir esses conflitos, surgem novas propostas de ensino “centradas em enfoques, métodos e estratégias, uma vez que, do ponto de vista teórico, os conteúdos a serem abordados durante as aulas de Matemática deverão continuar essencialmente os mesmos” (ALMEIDA, DIAS, 2004, *apud* MACHADO JÚNIOR, 2005, p. 13).

Essas metodologias buscam basicamente a melhoria da qualidade do ensino da matemática, dentre as quais podemos citar: a Modelagem Matemática, a Investigação Matemática, a Resolução de Problemas e a Engenharia Didática.

A seguir, apresentaremos elementos teóricos sobre a Modelagem Matemática, metodologia que consideramos adequada para os nossos objetivos de atribuir significado ao processo de ensino e aprendizagem dos números complexos no ensino médio.

2.2.1 Modelagem Matemática

Em nossa busca pela definição e/ou caracterização sobre o que é Modelagem Matemática, encontramos alguns textos que nos chamaram a atenção e que evidenciam os motivos que nos levaram à escolha desta metodologia para este trabalho. A seguir, citamos alguns destes textos.

Segundo Biembengut & Hein (2000, a*pud* MACHADO JÚNIOR, 2005, p. 6) “a modelagem matemática no ensino pode ser um caminho para despertar no aluno o interesse por tópicos matemáticos que ele ainda desconhece, ao mesmo tempo em que aprende a arte de modelar, matematicamente.”

Barbosa (2004, p. 3) considera que a modelagem propicia “um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade”.

Nas palavras de Bassanezi (2002, *apud* MACHADO JÚNIOR, 2005, p. 17) a Modelagem Matemática pode levar “os alunos a despertar maior interesse, ampliar o conhecimento e auxiliar na estruturação de sua maneira de pensar e agir”.

Conforme Burak (2005, p. 10), a Modelagem Matemática tem como princípio o interesse do aluno em romper com a forma tradicional de se conduzir o processo de ensino das escolas.

> Quando o professor se propõe a compartilhar o processo de ensino que usualmente é deflagrado pelo professor, ele se sujeita a perder um pouco da sua segurança, pois, depara-se com o desconhecido, não possui domínio completo da situação, rompe com a forma linear de se tratar com o conteúdo matemático. (BURAK, 2005, p. 10)

Assim sendo, a Modelagem Matemática pode ser entendida como uma oportunidade para os alunos investigarem situações através da matemática, sem procedimentos determinados com antecedência e com várias maneiras de se proceder, procedimentos esses que são construídos conforme as atividades vão sendo desenvolvidas. Por ter essa característica, a Modelagem Matemática promove momentos de investigação, análise e tomadas de decisão, o que contribui para o desenvolvimento de uma postura crítica nos alunos, tanto em relação à matemática quanto em relação à vida.

As atividades de Modelagem Matemática, segundo Almeida e Vertuan (2011, p. 21), podem ser estruturadas através de uma situação inicial (problemática), de uma situação final (modelo) e de uma série de procedimentos e conceitos necessários para ir da situação inicial para a final.

> Nesse sentido, relações entre a realidade (origem da situação inicial) e a Matemática (área em que os conceitos e os procedimentos estão ancorados) servem de subsídio para que conhecimentos matemáticos e não matemáticos sejam acionados e/ou produzidos e integrados. A essa situação inicial problemática chamamos situação-problema; à situação final desejada associamos uma representação matemática, um modelo matemático. (ALMEIDA, VERTUAN, 2011, p. 21)

Citando Almeida e Ferruzzi (2009, *apud* ALMEIDA, VERTUAN, 2011, p. 22) os procedimentos referidos acima podem ser relacionados com um conjunto de ações, como: levantamento dos dados, definição das variáveis, elaboração de hipóteses, obtenção do modelo matemático, resolução e análise da solução através da validação ou não dos resultados obtidos.

2.2.2. Modelagem Matemática na Sala de Aula

Pelo que já vislumbramos até o presente momento, a Modelagem Matemática pode proporcionar um ambiente investigativo em sala de aula, abrindo caminhos para que o processo de ensino e aprendizagem seja compartilhado por professor e alunos, levando-os a se sentirem responsáveis por parte da construção de seu próprio conhecimento.

Entretanto, alguns questionamentos se fazem necessários, a saber: Como incorporar atividades de Modelagem Matemática no currículo? Como adequar os conteúdos curriculares em atividades de Modelagem Matemática? Como trabalhar a Modelagem Matemática com alunos que não estão habituados a tal metodologia? Qual é o papel do professor e dos alunos em atividades de Modelagem Matemática?

Ao tentarmos responder essas questões – para nós mesmos – deparamo-nos com algumas orientações para à introdução da Modelagem

Matemática nos currículos escolares. No entanto, não há formulas prontas, visto que devemos considerar as peculiaridades de cada turma.

Blum e Niss (1991, *apud* ALMEIDA, VERTUAN, 2011, p. 24-25) sugerem que as atividades de Modelagem Matemática podem ser introduzidas no currículo de quatro maneiras diferentes, sendo elas: a alternativa da separação (os desenvolvimentos das atividades em Modelagem Matemática ocorrem em cursos extracurriculares); a alternativa da combinação (através da utilização da Modelagem Matemática no decorrer das aulas para auxiliar na introdução de conceitos matemáticos e vice-versa); a alternativa da integração curricular (o processo ocorre através de problemas aplicados e assim a matemática é introduzida de acordo com a necessidade, entretanto, os problemas devem conduzir aos conceitos matemáticos adequados à série/ano com que se está trabalhando); e a alternativa interdisciplinar integrada (as atividades “extramatemáticas” e matemáticas seriam integradas através da interdisciplinaridade, “a ‘matemática’ não seria organizada como disciplina isolada, mas com os conteúdos das diferentes disciplinas curriculares, previamente identificados...” (ALMEIDA, VERTUAN, 2011, p. 25))

Geralmente, conforme Almeida e Vertuan (2011, p. 26), os alunos, ao envolverem-se com atividades de modelagem, são levados a enfrentar barreiras para as quais não estão devidamente preparados, pois não possuem os conhecimentos necessários para tanto, surgindo assim a necessidade de buscar e construir estes conhecimentos através desta atividade.

O desenvolvimento de tais atividades está sujeito às direções propostas pelo professor. Essas direções são passivas de mudanças desde que fundamentadas em teorias e no conhecimento adquirido durante o processo. Contudo, sair de um cenário composto por aulas expositivas e resolução de exercícios, onde o professor possui o domínio da situação, requer o envolvimento ativo tanto do professor quanto dos alunos na busca pela aquisição de conhecimentos.

Para Almeida e Vertuan (2011, p. 27), os métodos adotados em sala de aula, fundamentados “na realização de atividades investigativas, como é o caso das atividades de Modelagem Matemática, ao mesmo tempo em que requerem um novo comportamento diante dos problemas, envolvem professor e alunos com a própria definição de um problema”.

Nas palavras de Lourdes Maria Werle de Almeida e Rodolfo Eduardo Vertuan:

> O uso da Modelagem Matemática como alternativa pedagógica na qual fazemos uma abordagem, por meio da Matemática, de uma situação-problema não essencialmente matemática é denotativo da necessidade de articulação entre definição, investigação e resolução. Avançar nestas três perspectivas simultaneamente é relevante em uma atividade de modelagem (ALMEIDA, VERTUAN, 2011, p. 27)

Para tanto, conforme Almeida e Dias (2004, *apud* ALMEIDA, VERTUAN, 2011, p. 27), o hábito do trabalho com modelagem pode ser adquirido pelos alunos de maneira gradual, através de "momentos", a saber:

- Primeiro momento: os alunos são colocados diante de uma "situação-problema" pelo professor, devidamente descrito pelas informações necessárias à resolução do mesmo. Desse modo, os alunos não precisam obter dados novos, e o professor acompanha – avaliando e orientando – todo o processo de investigação, dedução, análise e utilização do modelo matemático.
- Segundo momento: uma "situação-problema" é proposta aos alunos pelo professor, cabendo aos mesmos (dispostos em grupos) coletarem os dados relevantes para que a atividade se desenvolva. Esse momento é caracterizado por uma maior "independência do estudante no que se refere à definição de procedimentos extramatemáticos e matemáticos adequados para a realização da investigação".
- Terceiro momento: uma atividade de modelagem é conduzida pelos alunos que estão divididos em grupos, eles são os responsáveis pela formulação de uma "situação-problema", assim como de todo o processo de modelagem do mesmo, incluindo a divulgação dos resultados obtidos para a "comunidade escolar".

A justificativa primeira para a introdução gradual de atividades de modelagem está baseada no fato de proporcionar ao aluno o desenvolvimento de aptidão para a modelagem. Desta maneira, “a orientação e colaboração do professor, mais intensa no primeiro e segundo momentos, confere ao aluno confiança, independência e autoridade para delimitar uma situação-problema e buscar, por meio da matemática, uma solução.” (ALMEIDA, VERTUAN, 2011, p. 28-29)

Determinar o papel do professor e dos alunos em atividades de Modelagem Matemática, segundo Almeida e Vertuan (2011, p. 29) seria pretensão, pois cada situação é singular. Desse modo, na busca por conferir ações ao professor e aos alunos, Barbosa (2001, p. 9-10) caracteriza o professor “como ‘co-partícipe’ na investigação dos alunos, dialogando com eles acerca de seus processos.” Assim sendo, o processo de ensino e aprendizagem através da Modelagem Matemática é compartilhado entre o professor e seus alunos, exigindo uma mudança de postura de ambos os envolvidos.

Iniciamos o próximo capítulo com o estudo de como surgiram os números complexos. Em seguida, apresentamos como os conteúdos sobre os números complexos são abordados nos livros didáticos.

3 ENSINO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Neste capítulo, apresentaremos alguns fatos históricos sobre o surgimento dos números complexos que podem e devem ser levados em consideração no processo de ensino e aprendizagem. Além disso, também será apresentado como esses números são abordados nos livros didáticos disponíveis nas escolas e utilizados por boa parte dos professores no preparo de suas aulas.

3.1 HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Inicialmente, segundo Peruzzo (2012), os números complexos não foram naturalmente aceitos como números. Não havia um significado geométrico em uma raiz quadrada de um número negativo, ou seja, tal número não existia. Entretanto, durante a resolução de equações cúbicas, utilizando a fórmula que hoje conhecemos como de Cardano-Tartáglia, o matemático Bombelli percebeu a necessidade de se trabalhar com números imaginários, e o desenvolvimento de regras para trabalhar com tais números propiciou um avanço considerável na Matemática e demais ciências.

A resolução de equações foi um assunto que sempre despertou o interesse de matemáticos ao longo da história. Rosa (1998, p. 42) cita que o primeiro exemplo de raiz quadrada de número negativo foi publicado por volta de 75 d.C., por Heron de Alexandria, em *Estereometria*, num cálculo sobre o desenho de uma pirâmide, onde surge a necessidade de calcular $\sqrt{81-144}$. Entretanto, Heron substituiu este número por $\sqrt{144-81}$, e assim este problema foi resolvido sem a criação dos números complexos. Anos depois, por volta de 275 d.C., surge no livro *Arithmética* um problema geométrico em que Diofanto de Alexandria chega à equação $24x^2 - 172x + 336 = 0$, cujas raízes são $x = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{12}$.

Segundo Iezzi (2005, p. 99), até o final do século XV a álgebra pouco havia evoluído, o que pode ser constatado no mais antigo livro impresso sobre aritmética e álgebra, a *Summa* de 1494, do frade italiano Luca Pacioli (1445-1515), o qual se limita à resolução de equações do primeiro e segundo graus por meio de regras verbais aplicadas a casos numéricos. No final de seu livro, Pacioli afirma que a solução da equação cúbica: $x^3 + mx = n$ (usando a notação moderna), é tão impossível quanto à quadratura do círculo.

No século XVI, ressurge na Europa o interesse pela matemática. Nesse período, ocorreu a descoberta por matemáticos italianos da solução algébrica das equações cúbica e quártica.

Por volta de 1515, ainda segundo Iezzi (2005, p. 99), Scipione del Ferro (1465-1526), professor da Universidade de Bolonha, conseguiu resolver algebricamente esse tipo de equação, através da substituição de $x = y - \frac{a}{3}$ em $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, obtendo $y^3 + py + q = 0$, e desse modo o método de resolução das equações cúbicas estava praticamente descoberto. Scipione não publicou seu método, mas revelou o segredo tempos depois a seu discípulo Antonio Maria Fior.

De acordo com Eves (2004, p. 302-303), por volta de 1535, Niccolo Fontana (1499(?)-1557), natural de Bréscia, na Itália, mais conhecido como Tartaglia, anunciou ter descoberto uma solução algébrica para a equação cúbica $x^3 + mx = n$. Por considerar que se tratava de um blefe de Tartaglia, Fior o desafia para uma disputa pública envolvendo a resolução de equações cúbicas.

Com muito empenho, Tartaglia conseguiu resolver também, faltando poucos dias para a disputa, a equação cúbica desprovida do termo quadrático. Como no dia marcado sabia resolver dois tipos de cúbicas, ao passo que Fior só sabia resolver um, Tartaglia triunfou plenamente. Mais tarde, Girolamo Cardano, um gênio inescrupuloso que ensinava matemática e praticava medicina em Milão, depois de um juramento solene de segredo, conseguiu arrancar de Tartaglia a chave da solução da equação cúbica.

Em 1545, porém, quando apareceu em Nuremberg a *Ars Magna* (A Grande Arte) de Cardano, um grande tratado em latim de álgebra, lá estava a solução de Tartaglia para a equação cúbica. Os protestos veementes de Tartaglia foram rebatidos por Ludovico Ferrari, o mais brilhante dos discípulos de Cardano, que argumentou ter seu mestre recebido informações de Scipione del Ferro, através de um terceiro personagem, ao mesmo tempo que acusava Tartaglia de ter plagiado a mesma fonte. Seguiu-se uma polêmica, e Tartaglia, com certeza, deu-se feliz por sair vivo. (EVES, 2004, p. 303)

Para Eves (2004, p. 303), Cardano, em sua *Ars Magna*, mostrou um método para resolver equações do terceiro grau do tipo

$$x^3 + mx = n \, .$$

(1)

Considerando a identidade $(a-b)^3 + 3ab(a-b) = a^3 - b^3$ e escolhendo a e b de modo que $3ab = m$ e $a^3 - b^3 = n$, segue que $x = a - b$ com

$$a = \sqrt[3]{\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}} \quad \text{e} \quad b = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3}} \, . \qquad (2)$$

Este método é conhecido atualmente por fórmula de Cardano-Tartaglia.

A *Ars Magna* apresenta outra descoberta considerável, devida a Ludovico Ferrari (1522-1565), discípulo de Cardano, um método para reduzir equações do quarto grau a equações cúbicas (IEZZI, 2005, p. 100).

De acordo com Eves (2004, p. 308), em 1572, poucos anos antes de Cardano morrer, Rafael Bombelli publicou a "*Álgebra*", obra notável sobre resolução das equações cúbicas. Seus textos mostram que, se a quantidade $\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{m}{3}\right)^3$ é negativa, então a equação cúbica (1) tem três raízes reais. Entretanto, nesse caso, devido à fórmula de Cardano-Tartaglia, essas raízes eram expressas como a diferença de duas raízes cúbicas de números complexos imaginários, o que gerava desconforto para os matemáticos do período.

Segundo Boyer (2010, p.197), Bombelli, ao resolver a equação $x^3 = 15x + 4$, verificou que 4 era raiz da equação. Contudo, ao tentar verificar se encontrava a mesma solução através da fórmula de Cardano-Tartaglia, chegou à expressão

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{2} + \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{3375}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{4}{2} - \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{3375}{27}}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

(3)

Para superar essa dificuldade, de acordo com Peruzzo (2012, p. 2), Bombelli tentou encontrar regras para operar com esses números, denominados por ele de imaginários. Bombelli admitiu a existência de expressões da forma $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$, que podem ser consideradas como $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, respectivamente. Escrevendo

$$(a + \sqrt{(-b)}) + (a - \sqrt{(-b)}) = 4 \quad , \qquad (4)$$

de onde segue que $a = 2$. Então, como $a = 2$, voltando à equação, obteve

$$(2 + \sqrt{-b}) = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{121}.\sqrt{-1}} = \sqrt[3]{2 + 11.\sqrt{-1}} \quad . \qquad (5)$$

Portanto,

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4 \quad . \qquad (6)$$

A partir do resultado de Bombelli, os matemáticos passaram a usar as raízes quadradas de números negativos, apesar de se sentirem desconfortáveis com isso. Mais de dois séculos depois, Euler sistematizou como extrair raízes de números complexos. Vale destacar também que foram as equações do 3º grau e não as do 2º que levaram à necessidade da criação dos números imaginários.

O suíço Leonard Euler (1707-1783) foi o primeiro a utilizar o símbolo i , para $\sqrt{-1}$, em um de seus trabalhos. Em 1749, segundo Dante (2010, p. 171), Euler mostrou que se $a + b\sqrt{-1}$ é raiz de uma equação, então $a - b\sqrt{-1}$ também será. Entretanto, como muitos matemáticos da época, Euler era discreto ao trabalhar com os números complexos. Segundo Boyer (2010, p. 305), “foi por Gauss ter adotado esse símbolo em seu clássico ‘*Disquisitiones arithmetica’* de 1801 que seu lugar ficou assegurado entre as notações matemáticas”.

O alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), em 1832, apresentou um importante artigo sobre a representação geométrica dos números complexos, abrindo caminho para a extensão da teoria dos números do corpo real para o complexo. Anteriormente a ele, matemáticos como o suíço Jean Robert Argand (1768-1822) e o norueguês Caspar Wessel (1745-1818) já haviam trabalhado com a representação geométrica dos complexos no plano, entretanto a pouca representatividade desses matemáticos fez com que seus trabalhos não obtivessem a notoriedade merecida na época.

É interessante observar que a representação gráfica dos complexos já havia sido descoberta em 1797 por Caspar Wessel (1745-1818) e publicada nas atas da Academia Dinamarquesa em 1798; no entanto, o trabalho de Wessel ficou praticamente ignorado, e, dessa forma, o plano complexo passou a ser chamado plano de Gauss, embora Gauss só publicasse sua ideia trinta anos mais tarde. Estranhamente ninguém antes de Wessel e Gauss deu o passo óbvio de pensar nas partes real e imaginária de um número complexo $a+bi$ como coordenados retangulares num plano. Dar este simples passo fez com que os matemáticos se sentissem muito à vontade quanto aos números imaginários, pois estes agora podiam ser visualizados no sentido de que cada ponto do plano corresponde a um número complexo e vice-versa. Ver é crer, e as velhas ideias sobre a existência de números imaginários foram abandonadas. (BOYER, 2010, p. 350-351)

Finalmente, em 1833, Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) apresenta à Academia Irlandesa um artigo em que introduz uma álgebra formal de pares de números complexos cujas regras de combinação são utilizadas até hoje. Assim, vemos “o conceito definitivo de número complexo como par ordenado de numerais reais, ideia que permeava as representações gráficas de Wessel, Argand e Gauss, mas que pela primeira vez era explicitada” (MILIES, 2008).

Hamilton propôs também a expressão matemática dos números complexos, onde um número complexo qualquer z pode ser escrito na forma $a+bi$, denominada forma algébrica, com a e b reais e i a unidade imaginária. Este feito é considerado o início da moderna formulação dos números complexos. Nesta nova representação, $z=a+bi$, o número a é a parte real de z, $Re(z)=a$, e o número b é a parte imaginária, $Im(z)=b$. Para $b=0$, segue que o número é real: $z=a+0.i$, logo $z=a$. Para $a=0$, temos um número imaginário puro: $z=0+bi$, logo $z=bi$. Assim, o conjunto dos números complexos contém o conjunto dos números reais, pois, para $b=0$, o número complexo reduz-se a parte real. Logo, a criação da unidade imaginária i , deu origem a um novo conjunto numérico que generaliza o conjunto dos números reais: o conjunto dos números complexos.

Conforme Peruzzo (2012), Gauss, em 1798, demonstrou que toda equação algébrica de grau n $(n > 0)$ e coeficientes complexos têm pelo menos uma raiz complexa, o Teorema Fundamental da Álgebra. Esse teorema resolveu a questão das soluções de equações algébricas e ainda mostrou que o conjunto dos números complexos é o melhor conjunto para tratar o problema.

Ao longo da história dos números complexos, podemos perceber que o surgimento desses números ocorreu através da resolução de equações algébricas, principalmente as de grau 3. Podemos notar também que até mesmo os grandes matemáticos demoraram a compreender, aceitar e utilizar os números complexos, o que reforça a dificuldade que nós (alunos e professores) temos em trabalhar esses conceitos.

3.2 Abordagens Matemáticas Tradicionais para o Ensino dos Números Complexos

Frequentemente o ensino dos números complexos ocorre através de uma retomada da evolução dos números, na tentativa de contribuir para uma aprendizagem mais significativa, visando proporcionar ao aluno a oportunidade de refletir sobre a necessidade do surgimento de “novos” números na medida em que os homens relacionavam-se. Contudo, estas abordagens normalmente ocorrem de forma descontextualizada.

Na busca por tornar esse problema ainda mais evidente, apresentamos como esses conteúdos são abordados tendo como referência os livros didáticos – *Matemática: contexto e aplicações*, de Luiz Roberto Dante; *Matemática: ciência, linguagem e tecnologia*, de Jackson Ribeiro, e *Novo olhar matemática*, de Joamir Roberto de Souza – que geralmente são os principais materiais de consulta que os professores dispõem para o preparo de suas aulas. Nestes livros, notamos que a apresentação dos conceitos sobre números complexos seguem uma abordagem padrão. Vejamos a seguir como estes conceitos são apresentados.

3.2.1 Do Conjunto dos Números Naturais ao Conjunto dos Números Complexos

- Conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$)

O conjunto dos números naturais é representado por

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \ldots\} \ . \tag{7}$$

Os números naturais são usados nas contagens, nos códigos e nas ordenações. No conjunto dos números naturais, a adição e a multiplicação têm por resultado um número natural. Entretanto, a subtração entre dois números naturais nem sempre é um número natural, ou seja, a subtração por exemplo, não é possível em $\mathbb{N}$. Surge assim a necessidade de ampliação do conjunto $\mathbb{N}$ com a introdução do conjunto dos números negativos.

- Conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$)

O conjunto dos números inteiros é representado por

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\} \ . \tag{8}$$

Note que a adição, a multiplicação e a subtração de dois números inteiros têm por resultado um número inteiro. Todas as propriedades das operações em $\mathbb{N}$ são válidas em $\mathbb{Z}$. Entretanto, a divisão de dois números inteiros nem sempre resulta em um número inteiro, por exemplo, $\frac{-5}{+2}$ não é possível em $\mathbb{Z}$. Temos então a necessidade de ampliação do conjunto $\mathbb{Z}$, introduzindo as frações não aparentes.

- Conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$)

Acrescentando as frações não aparentes positivas e negativas ao conjunto $\mathbb{Z}$ se obtém o conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$). Todo número racional pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, com $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$. Assim, o conjunto dos números racionais pode ser representado por

$$\mathbb{Q} = \left\{x \middle| x = \frac{a}{b}, com\ a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\ e\ b \neq 0\right\}. \qquad (9)$$

A representação decimal de um número racional $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$ é obtida dividindo-se *a* por *b*, obtendo assim decimais exatas (finitas) ou dízimas periódicas (infinitas).

As quatro operações fundamentais (adição, subtração, multiplicação e divisão por um número diferente de zero) são definidas em $\mathbb{Q}$. Entretanto, uma equação como $x^2 = 5$ não possui solução em $\mathbb{Q}$, pois não existe racional $\frac{a}{b}$ tal que $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 5$. Surge então à necessidade da criação de outro tipo de número, o número irracional.

- Conjunto dos números irracionais ($\mathbb{I}r$)

O conjunto dos números irracionais é formado pelos números decimais que não podem ser escritos na forma fracionária com numerador inteiro e denominador inteiro diferente de zero. Estes números são os decimais infinitos e não periódicos.

- Conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$)

Da reunião do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais se obtém o conjunto dos números reais.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}r = \{x | x\ é\ racional\ ou\ x\ é\ irracional\}. \qquad (10)$$

Contudo, temos que se $x \in \mathbb{R}$, então $x^2 \geq 0$. Consequentemente, a equação $x^2 + 1 = 0$ não tem solução em $\mathbb{R}$, pois: $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$ e não existe um número real x que, elevado ao quadrado, seja igual a -1. Surge então a necessidade de estender o conjunto dos números reais.

- Conjunto dos números complexos ($\mathbb{C}$)

O conjunto dos números complexos é um conjunto cujos elementos devem ser tais que possam ser somados e multiplicados, e que possibilitem a extração da raiz quadrada de um número negativo. Segundo Dante (2010, p. 138) uma boa maneira de definir esse conjunto é a proposta realizada por Gauss em 1831, e reforçada por Hamilton em 1837, segundo a qual o conjunto dos números complexos é um conjunto de pares ordenados de números reais, em que estão definidas operações:

- Igualdade: $(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c$ e $b = d$,
- Adição: $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$,
- Multiplicação: $(a,b)(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Desse modo, o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ é definido como o conjunto dos pares ordenados de números reais (x,y) em que estão definidas as operações citadas. Portanto,

$$z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = (x,y), \text{ com } x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R} \tag{11}$$

3.2.2 Forma Algébrica dos Números Complexos

O número complexo $(0,1)$ é chamado unidade imaginária e é indicado por i. Por definição, $i^2 = -1$ é a característica fundamental da unidade imaginária. Todo número complexo $z = (x,y)$ pode ser escrito de maneira única como

$$z = x + yi \quad (x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ e } i^2 = -1). \tag{12}$$

Essa é a forma algébrica ou forma binomial de escrever um número complexo. Um número complexo escrito nessa forma tem duas partes

- parte real, $Re(z) = x$;
- parte imaginária, $Im(z) = y$.

Portanto, em um número complexo,

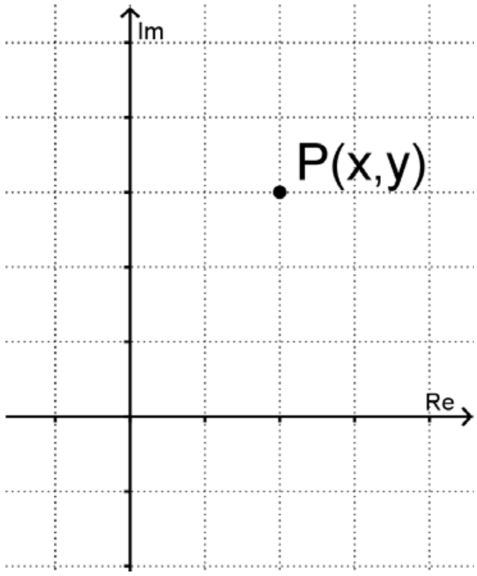
- se a parte imaginária for nula $(y - 0)$, dizemos que o número é real, ou seja, $z = x + 0i \Rightarrow z = x$,
- se a parte real for nula $(x = 0)$ e a parte imaginária não for nula $(y \neq 0)$, dizemos que o número é imaginário puro, ou seja, $z = 0 + yi \Rightarrow \; z = yi$.

3.2.3 Representação Geométrica de um Número Complexo

Sabemos que o número complexo z pode ser escrito como um par ordenado $z = (x, y)$ e na forma algébrica $z = x + yi$, com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbf{R}$. Temos ainda que cada par ordenado de números reais (x, y) pode ser representado em um plano cartesiano por um único ponto. Desse modo, no plano complexo, podemos associar a um ponto P de coordenadas (x, y) um único número complexo $z = x + bi$, e vice-versa.

A representação geométrica de um número complexo é realizada em um plano cartesiano denominado plano de Argand-Gauss ou plano complexo. Nesse plano, o eixo das abscissas é chamado eixo real (Re) e o eixo das coordenadas, eixo imaginário (Im). Chamamos de afixo de P o número complexo representado pelo ponto $P(x, y)$, como ilustrado na Figura 1.

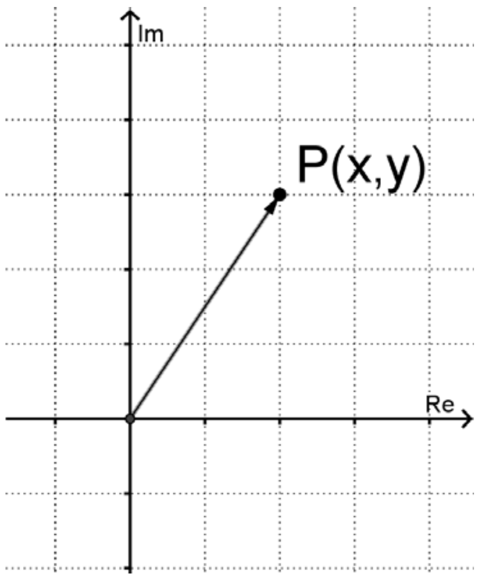
Figura 1 – Representação geométrica de um número complexo.



Fonte: Autores

Pode-se associar no plano complexo um vetor a cada número complexo $z = x + yi$, de modo que uma das extremidades esteja na origem do plano e a outra no ponto $P(x, y)$, como ilustrado na Figura 2.

Figura 2 – Vetor associado ao número complexo $z = x + yi$.



Fonte: Autores.

3.2.4 Adição, Subtração e Multiplicação de Números Complexos

Considere $z_1 = (a, b)$ e $z_2 = (c, d)$, com $a, b, c,$ e d reais. A seguir, definimos as operações de adição, subtração e multiplicação de Números Complexos.

- Adição

A adição de dois números complexos é realizada adicionando-se, separadamente, as partes reais e as partes imaginárias. Assim, na forma de pares ordenados $z_1 + z_2 = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, e na forma algébrica $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di \Rightarrow z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$.

É importante destacar a propriedade do elemento oposto, a qual diz que para cada número complexo z_1, existe um número oposto z_2, também complexo, tal que: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1 = 0 + 0i$ (SOUZA, 2010, p. 233). Assim, os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = -a - bi$ são opostos, e podemos dizer que $z_1 = -z_2$ ou $-z_1 = z_2$.

- Subtração

A subtração de dois números complexos é realizada subtraindo-se, separadamente, as partes reais e as partes imaginárias. Assim, na forma de pares ordenados $z_1 - z_2 = (a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$, e na algébrica $z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = a + bi - c - di \Rightarrow z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$.

- Multiplicação

Para realizar a multiplicação de dois números complexos, aplicamos a propriedade distributiva e reduzimos os termos semelhantes. Assim, na forma de pares ordenados, $z_1 \cdot z_2 = (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, e na algébrica $z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd \Rightarrow z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

3.2.5 Conjugado e Divisão de Números Complexos

Dado o número complexo $z = x + yi$, $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, o conjugado de z , indicado por $\bar{z}$, é o número complexo $\bar{z} = x - yi$. Note que, a diferença entre o número complexo z e o seu conjugado $\bar{z}$ é apenas o sinal da parte imaginária, sendo que o sinal da parte real não se altera.

Uma propriedade dos conjugados é que, ao multiplicarmos um número complexo por seu conjugado, obtemos sempre um número real não negativo. Vejamos,

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 - xyi + xyi - y^2 i^2 \Rightarrow z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 \quad (13)$$

Portanto, o produto $z \cdot \bar{z}$ é igual ao quadrado da parte real com o quadrado da parte imaginária.

O quociente entre dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di \quad (z_2 \neq 0)$ pode ser calculado multiplicando-se o dividendo e o divisor pelo conjugado do divisor, isto é:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}} = \frac{(a + bi).(c - di)}{(c + di).(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} \quad (14)$$

3.2.6 Potenciação de i

Sabemos que $i^2 = -1$ e utilizando as propriedades de potenciação dos números reais, podemos calcular os valores de i^n, com $n \in \mathbb{N}$. A tabela (1) apresenta estes resultados.

Tabela 1 – Potências de i^n

$i^0 = 1$	$i^6 = i.i^5 = i.i = -1$
$i^1 = i$	$i^7 = i.i^6 = i.(-1) = -i$
$i^2 = -1$	$i^8 = i.i^7 = i.(-i) = 1$
$i^3 = i.i^2 = i.(-1) = -i$	$i^9 = i.i^8 = i.(1) = i$
$i^4 = i.i^3 = i \cdot (-i) = 1$	$i^{10} = i.i^9 = i.i = i^2 = -1$
$i^5 = i.i^4 = i.1 = i$	$i^{11} = i.i^{10} = i.(-1) = -i$

Fonte: Autores.

Note que as potências de i^n se repetem de 4 em 4, ou seja,

- $i^0 = i^4 = i^8 = \cdots = i^{4m} = 1$, $m = 0, 1, 2, ...$
- $i^1 = i^5 = i^9 = \cdots = i^{4m+1} = i,$ $m = 0,1,2, ...$
- $i^2 = i^6 = i^{10} = \cdots = i^{4m+2} = -1,$ $m = 0,1,2 ...$
- $i^3 = i^7 = i^{11} = \cdots = i^{4m+3} = -i,$ $m = 0,1,2, ...$

Assim, $i^n = \begin{cases} 1, & se\ n = 4m \\ i, & se\ n = 4m + 1 \\ -1, & se\ n = 4m + 2 \\ -i, & se\ n = 4m + 3 \end{cases}$ $\quad \textbf{para } m = 0, 1, 2, ...$

Desse modo, como essas recorrências são válidas para todo n natural, temos que $i^n = i^r$, onde r é o resto da divisão de n por 4.

3.2.7 Módulo de um Número Complexo

O módulo de um número complexo $z = x + yi$, com $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$, geometricamente, é a distância entre a origem O do sistema de coordenadas cartesianas e o ponto $P(x, y)$. Algebricamente, indicamos o módulo do número complexo z por $|z|$ e, utilizando o Teorema de Pitágoras, podemos determinar a distância da origem O ao ponto P como sendo

$$(OP)^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow OP = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow |z| = \sqrt{x^2 + y^2} . \qquad (15)$$

Em relação ao módulo de números complexos são válidas as seguintes propriedades:

- $z \cdot \bar{z} = |z|^2$,
- $|z| = |\bar{z}|$,
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, e
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, onde $z_2 \neq 0$.

3.2.8 Forma Trigonométrica de um Número Complexo

Já vimos anteriormente que um número complexo $z = x + yi$, com $z \neq 0$, é representado por um ponto P no plano de coordenadas (x, y), chamadas coordenadas cartesianas do ponto z . Agora, esse mesmo ponto pode ser representado por suas coordenadas polares, dadas por:

- módulo do vetor $\overrightarrow{OP}$, indicado por $|z|$ ou ρ ;
- argumento de z , dado pelo ângulo θ formado pelo vetor $\overrightarrow{OP}$ com o eixo x , contado positivamente no sentido anti-horário.

O ângulo θ é tal que $0 \leq \theta < 2\pi$ e satisfaz as seguintes igualdades:

- $\cos\theta = \frac{x}{|z|} \Rightarrow x = |z| \cdot \cos\theta$,
- $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{|z|} \Rightarrow y = |z| \cdot \operatorname{sen}\theta$.

Substituindo esses valores em $z = x + yi$, obtemos a chamada forma trigonométrica ou forma polar de um número complexo, ou seja,

$$z = x + yi = |z| \cdot \cos\theta + |z| \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot i \rightarrow z = |z| \cdot (\cos\theta + i \cdot \operatorname{sen}\theta) . \quad (16)$$

Enfim, nos livros didáticos citados anteriormente, a cada etapa da apresentação das operações com os números complexos são propostos exercícios de fixação, visando que os alunos incorporem a técnica dos cálculos com estes números.

No próximo capítulo, vamos apresentar a nossa proposta de intervenção pedagógica na escola que visa uma melhor compreensão e assimilação dos conceitos dos Números Complexos pelos alunos.

4 INTERVENÇÃO PEDAGÓGICA NA ESCOLA

Neste capítulo, vamos descrever nossa sequência didática, que tem por objetivo melhorar a qualidade do processo de ensino-aprendizagem dos números complexos na 3ª série do Ensino Médio. A sequência didática será dividida em etapas. A seguir, enumeramos as etapas.

- Etapa 1: será proposta uma situação-problema aos alunos, para que, durante a busca da solução, os estudantes sintam a necessidade de aprender novos conceitos que facilitem a sua obtenção;

- Etapa 2: serão propostas algumas atividades que visem a aquisição de conceitos sobre números complexos, necessários à resolução da situação-problema proposta na primeira etapa;

- Etapa 3: consistirá basicamente na retomada da situação-problema inicial e sua resolução através dos conceitos adquiridos na etapa anterior;

- Etapa Final: aplicação de um questionário para avaliar a qualidade desta intervenção pedagógica.

A seguir, descreveremos como ocorrerá cada etapa, juntamente com a justificativa de cada atividade proposta. Para fins de organização, alguns textos e/ou atividades de algumas etapas serão colocadas no anexo.

4.1 ETAPA 1 – PROBLEMATIZAÇÃO

Atividade 1

Justificativa: a situação-problema escolhida para a realização da etapa 1 tem como principais objetivos introduzir e atribuir significado aos conceitos sobre números complexos. Tal problema foi apresentado em um artigo da edição número 47 da *Revista do Professor de Matemática* e é conhecido como “o problema da Ilha do Tesouro”. A escolha deste problema deve-se ao fato de o mesmo ter sido, segundo o autor, apresentado em um curso sobre números complexos, onde os participantes eram professores de Matemática, causando “comoção” entre os mesmos.

Na verdade, todos os professores presentes admitiram que, se o curso não fosse sobre números complexos, a nenhum dos presentes teria ocorrido a ideia de resolver esse problema usando a álgebra dos números complexos. E, mesmo depois da sugestão para fazê-lo, quase ninguém conseguiu (CARNEIRO, 2001).

Atividade 1. (CARNEIRO, 2001) Dois piratas decidem enterrar um tesouro em uma ilha. Escolhem, como pontos de referência, uma árvore e duas pedras. Começando na árvore, medem o número de passos até a primeira pedra. Em seguida, dobram, segundo ângulo de 90°, à direita e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem uma marca. Voltam à árvore, medem o número de passos desde a árvore até a segunda pedra, dobram à esquerda, segundo um ângulo de 90º, e caminham o mesmo número de passos até alcançar outro ponto, onde fazem outra marca. Finalmente, enterram o tesouro exatamente no ponto médio, entre as duas marcas. Anos mais tarde, os dois piratas voltam à ilha e decidem desenterrar o tesouro, mas, para sua decepção, constatam que a árvore não existe mais. Então um dos piratas decide arriscar. Escolhe ao acaso um ponto da ilha e diz: “Vamos imaginar que a árvore estivesse aqui.” Repete então os mesmos procedimentos de quando havia enterrado o tesouro: conta os passos até a primeira pedra, dobra à direita, etc., e encontra o tesouro.

A pergunta é: esse pirata era sortudo ou um matemático?

Desenvolvimento: a atividade será realizada por meio de uma Modelagem Matemática, metodologia escolhida e apresentada no capítulo 2. O professor deve organizar os alunos em grupos, explicar aos mesmos que será proposta uma situação-problema, para que eles, dispondo dos conhecimentos adquiridos até o presente momento – além da utilização de recursos tais como livros, apostilas, calculadoras, malha quadriculada, régua, compasso, entre outros – resolvam pelo método considerado mais adequado, e que esta resolução deverá ser entregue ao término do tempo estipulado – o que pode variar de acordo com as especificidades da turma – para que futuramente possam ser retomadas.

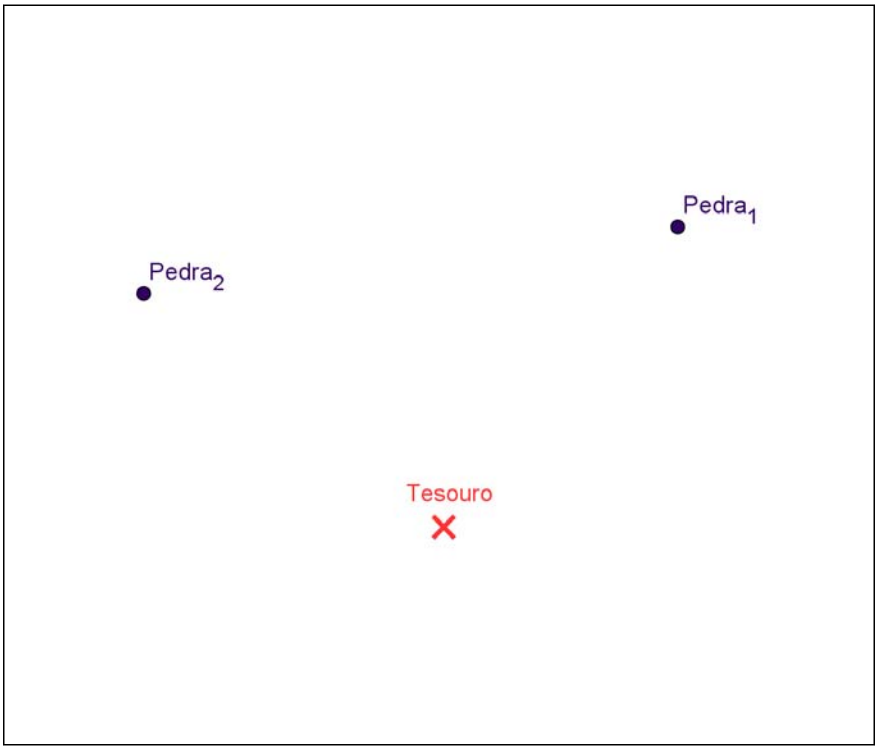
A fim de instigar os alunos na busca pelas soluções para a situação-problema proposta, o professor deve entregar a cada grupo pontos marcados que representem as pedras e a localização do tesouro (Figura 3) e solicitar que estes reproduzam os procedimentos dos piratas ao voltarem à ilha para desenterrar o referido tesouro, escolhendo em cada figura um ponto ao acaso para representar a árvore.

As seguintes ilustrações (Figura 4,

Figura 5, Figura 6 e

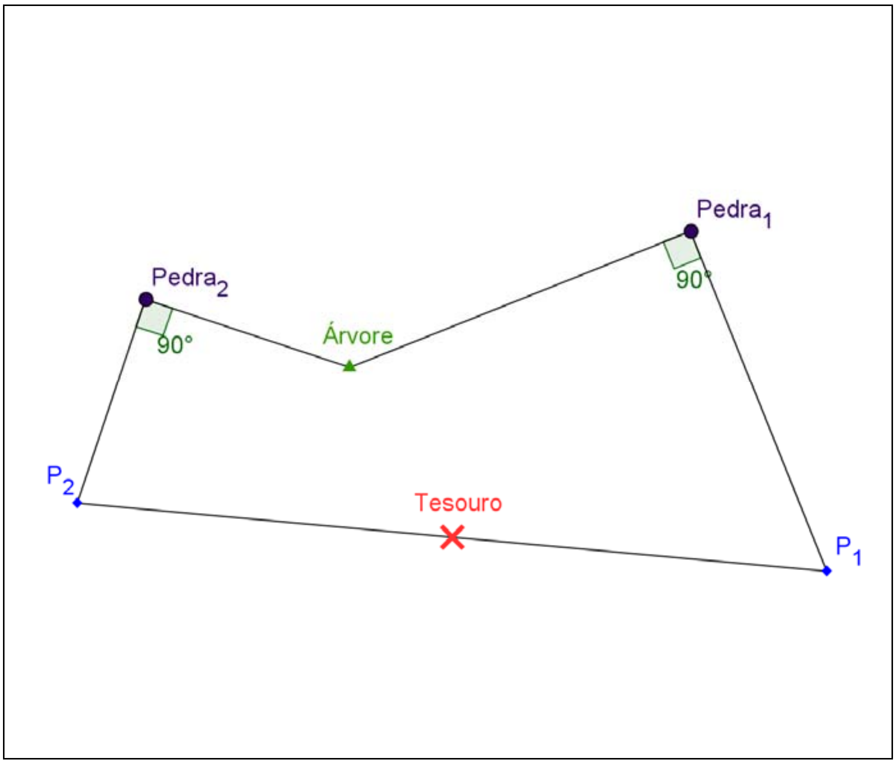
Figura 7) apresentam quatro maneiras de se escolher a posição da árvore. Desse modo, os alunos podem perceber que, de fato, a posição da árvore não importa para determinar a localização do tesouro. Essa investigação também pode ser realizada através de softwares matemáticos, como o Geogebra, por exemplo.

Figura 3 – Localização das pedras e do Tesouro: Atividade 1.



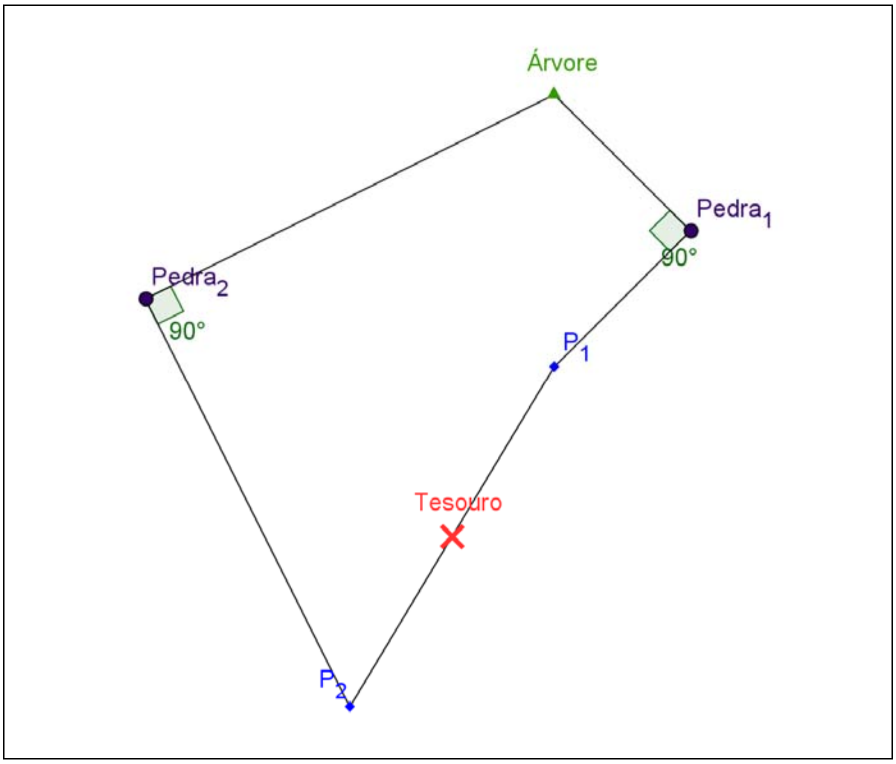
Fonte: Autores.

Figura 4 – Atividade 1: Resolução geométrica do problema da "Ilha do Tesouro". Solução A.



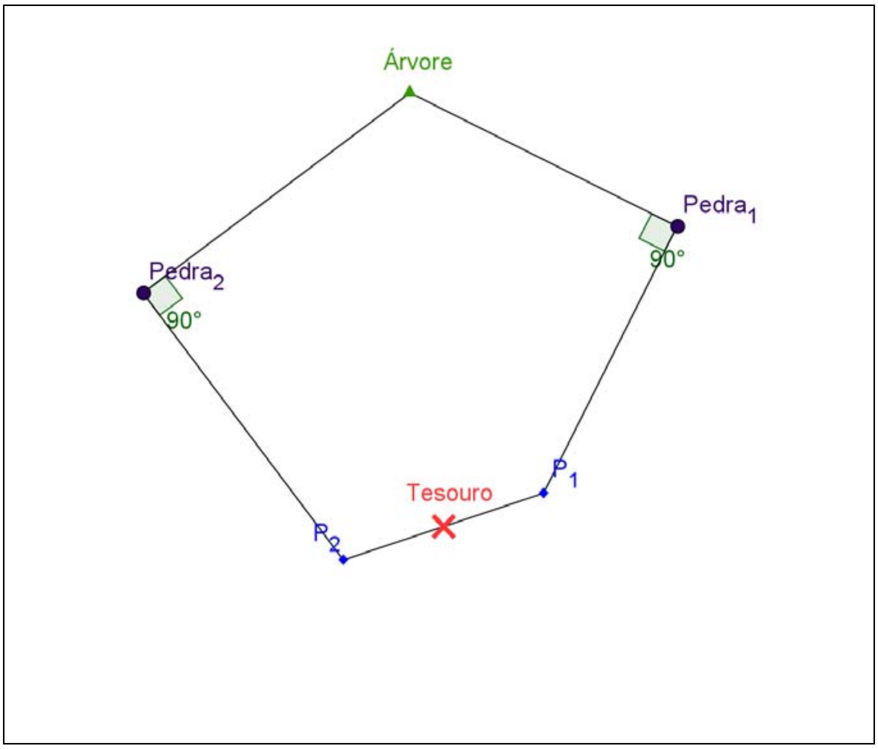
Fonte: Autores.

Figura 5 – Atividade 1: Resolução geométrica do problema da "Ilha do Tesouro". Solução B.



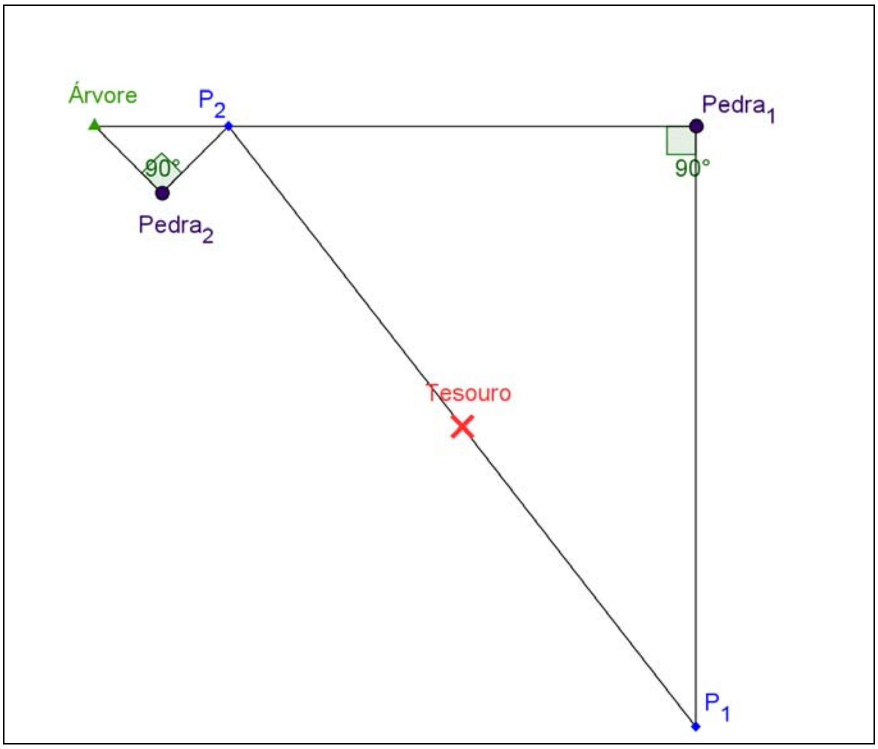
Fonte: Autores.

Figura 6 – Atividade 1: Resolução geométrica do problema da "Ilha do Tesouro". Solução C.



Fonte: Autores.

Figura 7 – Atividade 1: Resolução geométrica do problema da "Ilha do Tesouro". Solução D.



Fonte: Autores.

Durante esse processo, o professor deve acompanhar os grupos, orientando-os no que for possível, entretanto, vale ressaltar que o professor não deve contar a resolução aos alunos, mas apenas conduzi-los para que eles mesmos a obtenham. É importante também que, no final da etapa 1, seja realizada uma apresentação das maneiras encontradas para resolver a situação-problema. No Anexo A, apresentamos algumas formas para a solução do "Problema da Ilha do Tesouro". Salientamos, contudo, que a solução 4 somente será apresentada e/ou encontrada pelos alunos após a etapa 2, ou seja, após a "aquisição" dos conceitos acerca dos números complexos.

Devem-se valorizar os procedimentos corretos e destacar as dificuldades encontradas, as quais devem ser valorizadas a fim de justificar a necessidade de aprender algo novo, que possa simplificar tais resoluções, visto que elas baseiam-se em conceitos da geometria analítica, que nem sempre são de fácil compreensão aos nossos alunos. Assim sendo, há uma possibilidade considerável de que nenhuma solução seja encontrada, reforçando o fato de que novos conceitos devem ser aprendidos.

4.2 ETAPA 2 – AQUISIÇÃO DE CONCEITOS

Nesta etapa, juntamente com os fatos históricos, utilizaremos de situações-problemas em que os alunos tenham a oportunidade de vivenciar os processos que levaram ao surgimento dos números complexos. Além de atividades que contribuam para que o aluno compreenda as operações com números complexos e seus significados no plano complexo.

Atividade 2

Justificativa: contextualizar, através de uma situação-problema, a equação que o matemático e engenheiro Rafael Bombelli utilizou para descobrir a necessidade do surgimento de outros números, para que o aluno tenha a oportunidade de "vivenciar" parte desse processo. Para tanto, utilizaremos uma situação-problema, adaptada por nós, e que se encontra no Currículo do Estado de São Paulo, no Caderno do Aluno da 3ª série do ensino médio, v. 2 (MATEMÁTICA-3, 2008, p. 18).

Atividade 2. Um marceneiro quer construir duas caixas, uma com a forma de um cubo de aresta x metros, outra com a forma de um paralelepípedo com base retangular, de lados $3\ m$ e $5\ m$, e de altura igual à altura do cubo. O valor de x deve ser escolhido de tal forma que o volume do cubo seja igual ao volume do paralelepípedo adicionado a $4\ m^3$.

a) Escreva a equação que traduz a exigência a ser satisfeita pelo valor de x.

Resposta: $x^3 - 15x - 4 = 0.$

b) Encontre, por tentativa e erro, um valor para x que satisfaça a equação do item anterior.

Resposta: $x = 4$.

c) A equação encontrada no item (a) é uma equação do terceiro grau do tipo $y^3 + py + q = 0$, isto é, não apresenta o termo em y^2. Vejamos, na próxima atividade, um pouco da história que envolve a busca pela solução dessas equações.

Desenvolvimento: Propor a situação-problema para os alunos resolverem em duplas e, após o tempo estipulado, fazer a discussão e correção do mesmo, chamando a atenção para o fato de que resolver a equação significa resolver o problema.

Atividade 3

Justificativa: é “contando histórias que os significados são construídos [...]. Na verdade, não parece concebível ensinar qualquer disciplina sem despertar o interesse em sua história” (SÃO PAULO, 2012, p. 45). Nesta etapa, recorremos, em alguns momentos, à história dos números complexos.

Atividade 3. Leitura e análise de texto: Contexto histórico do surgimento dos Números Complexos (GARBI, 2010, p. 159-165).

Na mesma época em que Copérnico revolucionava a Astronomia, a Álgebra também passava, no norte da Itália, por profundas transformações. De acordo com relatos da época, um professor da Universidade de Bolonha, chamado ***Scipione de Ferro*** (1465-1526), encontrou, em 1510, uma forma geral de resolver equações do tipo $x^3 + px + q = 0$. Ele não publicou sua descoberta, mas, antes de morrer, revelou-a a seu aluno Antonio Maria Fior. No mesmo período e na mesma região, viviam dois matemáticos cujos nomes entraram para a História: ***Girolano Cardano*** (1501-1576) e ***Nicolò Fontana*** (1500-1557), apelidado ***Tartaglia***.

Cardano nasceu em Pávia e levou uma vida marcada por contrastes e extremos.[...] Em um documento por ele mesmo redigido, definiu-se desbocado, espião, melancólico, traidor, invejoso [...] Cardano legou a posterioridade um livro que, à época, era sem dúvida o maior compêndio algébrico existente: a ***Artis Magnae sive de Regulis Algebraicis*** (A Arte Magna ou Sobre as Regras Algébrica), conhecida por ***Ars Magna***, publicada em Nuremberg, Alemanha, em 1545. Naquele livro, entre diversas outras ideias que impulsionaram o estudo da

Álgebra, foi introduzido, com a clareza moderna, o conceito de número negativo, em analogia aos créditos e débitos da contabilidade usual. O nome de Cardano também sobrevive na expressão “eixo cardan”, embora a inversão não tenha sido dele.

Nicolò Fontana, o ***Tartaglia,*** em comum com Cardano, tinha apenas o talento matemático e a nacionalidade italiana. Nascido em Bréscia, em 1500, teve a vida marcada pelo infortúnio, pelas lutas, pelas asperezas e por toda a sorte de dificuldades. [...] A despeito de infância tão amarga, Tartaglia desde cedo demonstrou grande amor pelos estudos e vontade de aprender. Entretanto, mal começou a ser alfabetizado, sua mãe tirou-o da escola por absoluta impossibilidade de pagá-la. Tartaglia passou então a estudar por si mesmo [...] Tartaglia construiu sua cultura, e, em 1535, já era renomado professor em Verona, Vicenza, Bréscia e Veneza. Ao longo da vida, publicou diversas obras, inclusive sobre o Triângulo Aritmético, e foi o primeiro, um século antes de Galileu, a realizar cálculos de artilharia. Mas o que o colocou nos anais da Matemática foram suas disputas com Cardano sobre as equações do 3º grau.

Dispondo do segredo do falecido Del Ferro e desejando conquistar fama, Antonio Fior decidiu desafiar Tartaglia para um duelo matemático. Isso era comum à época, e tais duelos consistiam na apresentação recíproca de questões que deveriam ser resolvidas pelas partes. Fior, naturalmente, pretendia apresentar problemas envolvendo equações do 3º grau, das quais somente ele detinha a solução. Não tendo Fior em grande conceito, Tartaglia aceitou o desafio, mas pouco tempo antes do encontro veio a saber que seu oponente estava armado do método de Del Ferro. Sentindo-se ameaçado de perder o confronto, Tartaglia escreveu em suas memórias: ***“mobilizei todo o entusiasmo, a aplicação e a arte de que fui capaz, objetivando encontrar uma regra para a solução daquelas equações, o que consegui a 10 de fevereiro de 1531”***. O resultado foi que Tartaglia venceu o desafio de Fior e tornou-se ainda mais famoso.

Quando essa notícia se espalhou, ***Cardano*** estava escrevendo a ***Pratica Arithmeticae Generalis***, englobando Álgebra, Aritmética e Geometria. Ao saber que Tartaglia resolvera as equações do terceiro grau, Cardano procurou por ele pedindo que permitisse a publicação daquela admirável descoberta em seu livro. Tartaglia não concordou alegando que seria feita por ele mesmo, em uma obra a ser escrita futuramente. Durante meses, Cardano continuou a insistir, até que, após fazer um juramento solene de que manteria o segredo, Tartaglia concordou em enviar-lhe a solução em um poema, de forma cifrada e misteriosa, que Cardano não conseguiu entender. Mais conversações, mais juras, mais promessas e, finalmente, Tartaglia revelou tudo. Conforme qualquer um podia prever, Cardano quebrou as promessas e juramentos e, em 1545, publicou na Ars Magna a fórmula revelada por Tartaglia. Apesar dos rasgados elogios feitos por Cardano a ele, Tartaglia teve reação pronta e explosiva: publicou sua versão dos fatos e denunciou Cardano por haver traído um juramento feito sobre a Bíblia. Cardano alegou que, depois de receber as informações de Tartaglia, visitara Bolonha e ali vira os manuscritos de Del Ferro, de modo que não havia mais razão para que o segredo fosse mantido. Seu discípulo ***Ludovico Ferrari***, o descobridor da solução das equações de 4º grau, também correu em defesa de Cardano. O círculo de ódio cresceu, e Tartaglia chegou a aceitar um debate público com Cardano, no território deste, Milão, mas quem compareceu no lugar do perjuro foi Ferrari. Após trocas de insultos, as partes retiraram-se cantando vitória, mas o debate propriamente não se realizou. No final, a posteridade foi injusta para com o sofrido Tartaglia: a fórmula que ele deduzira e que ensinara ao desleal inimigo é hoje conhecida por ***"Fórmula de Cardano".***[...]

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Esta é a chamada ***Fórmula de Cardano***, embora descoberta por Tartaglia.[...]

Uma consequência inesperada e admirável do método de Tartaglia foi a descoberta de que o Campo Real é insuficiente para o estudo da Álgebra, sendo indispensável trabalhar-se também com os chamados "números imaginários". Seja, por exemplo, a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$. Por inspeção, vemos que $x = 4$ é uma raiz. Aplicando a fórmula de Cardano, obteremos

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

e caímos na extração de raízes de números de natureza desconhecida. Como o resultado daquelas operações existe e é o número 4, ficou evidente a necessidade de se estender o Campo Real para que a Álgebra pudesse continuar avançando. O autor desta descoberta foi outro italiano, o matemático e engenheiro ***Rafael Bombelli***, nascido em Bolonha por volta de 1530 e autor do livro ***L'Algebra Parte***

Maggiore dell'Arithmetica (1672), onde, de uma forma que ele descreveu como "rude", foram feitas as primeiras operações com números contendo a raiz quadrada de . ***É importante ressaltar que foram as equações do 3º grau e não as do 2º que levaram à criação do Campo Complexo.***

Desenvolvimento: O professor deve propor inicialmente a leitura silenciosa do texto pelos alunos e, posteriormente, a compartilhada. Na sequência, o professor pode pedir para os alunos apontarem o que mais lhes chamaram a atenção. Para concluir, caso seja necessário, o professor complementa os apontamentos dos alunos e enfatiza que a equação utilizada por Bombelli é a mesma da atividade 2.

Atividade 4

Justificativa: continuar e concluir as atividades 2 e 3, dessa forma, possui a mesma relevância que ambas.

Atividade 4. Refaça os passos de Bombelli e resolva a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ através da fórmula de Cardano.

Resposta: Por comparação, temos que $p = -15$ *e* $q = -4$ *, assim substituindo estes valores na fórmula de Cardano, temos:*

$$x = \sqrt[3]{-\frac{(-4)}{2} + \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-15}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{(-4)}{2} - \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 + \left(\frac{-15}{3}\right)^3}} \Rightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 125}} \Rightarrow$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Desenvolvimento: O professor deve propor a atividade aos alunos e corrigi-la. Aproveitando o momento para explicar aos mesmos como Bombelli chegou à igualdade: $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=4$, proporcionando, assim, o desenvolvimento da álgebra dos números complexos.

Bombelli admitiu a existência de um número da forma $a+\sqrt{-b}$ como resultado da $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$, ou seja,

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a+\sqrt{-b} \quad . \tag{17}$$

Do mesmo modo, admitiu que:

$$\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = a-\sqrt{-b} \,. \tag{18}$$

Logo,

$$(a+\sqrt{(-b)}) + (a-\sqrt{(-b)}) = 4 \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow a = 2 \tag{19}$$

Então, como $a=2$, voltando à equação (17), segue que

$$\begin{aligned}
&\left(2+\sqrt{-b}\right) = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} \Rightarrow \\
&\left(2+\sqrt{-b}\right)^3 = 2+11\sqrt{-1} \Rightarrow \\
&\left(4+4\sqrt{-b}-b\right).\left(2+\sqrt{-b}\right) = 2+11\sqrt{-1} \Rightarrow \\
&8+4\sqrt{-b}+8\sqrt{-b}+4\sqrt{-b}\sqrt{-b}-2b-b\sqrt{-b} = 2+11\sqrt{-1}
\end{aligned} \tag{20}$$

Nesta etapa, é importante chamar a atenção do aluno para o seguinte resultado: $\sqrt{-b}\sqrt{-b}$. Uma maneira de resolver é definir o valor de b , ou seja, considerarmos $b<0 \Rightarrow -b>0$, logo $\sqrt{-b}\sqrt{-b}=\sqrt{(-b)^2}=|b|=-b$. Voltando a equação (20), temos que:

$$\begin{aligned}
&8+12\sqrt{-b}-4b-2b-b\sqrt{-b} = 2+11\sqrt{-1} \Rightarrow \\
&8-6b+(12-b)\sqrt{-b} = 2+11\sqrt{-1} \,,
\end{aligned} \tag{21}$$

de onde segue, por comparação, o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} 8 - 6b = 2 \\ (12 - b)\sqrt{-b} = 11\sqrt{-1} \end{cases}$$

(22)

Novamente, por comparação, obtemos que $b = 1$. Portanto, $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$ e de modo análogo, $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$. Enfim,

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4 \, .$$

Vale ressaltar que, neste momento, o professor deve deixar bem claro aos alunos que $\sqrt{-1}$ existe, e, como eles já sabem, não pertence ao conjunto dos números reais, surgindo assim a necessidade da extensão do conjunto dos números reais para o conjunto dos números complexos.

Antes de passarmos para a próxima atividade da sequência, é necessário fazer uma retomada de como os números (naturais, inteiros, racionais e reais) são representados na reta real. Explicar que um número complexo pode ser representado na forma algébrica e na forma de par ordenado, podendo assim ser representado graficamente no plano complexo (plano de Argand-Gauss), e que cada número complexo pode ser associado a um vetor com extremidades na origem, e que este vetor possui um módulo, uma direção e um sentido, abrindo caminho para abordar a representação trigonométrica de um número complexo. Aproveita-se também para apresentar as operações entre os números complexos, assim como o seu conjugado e seu inverso.

Atividade 5

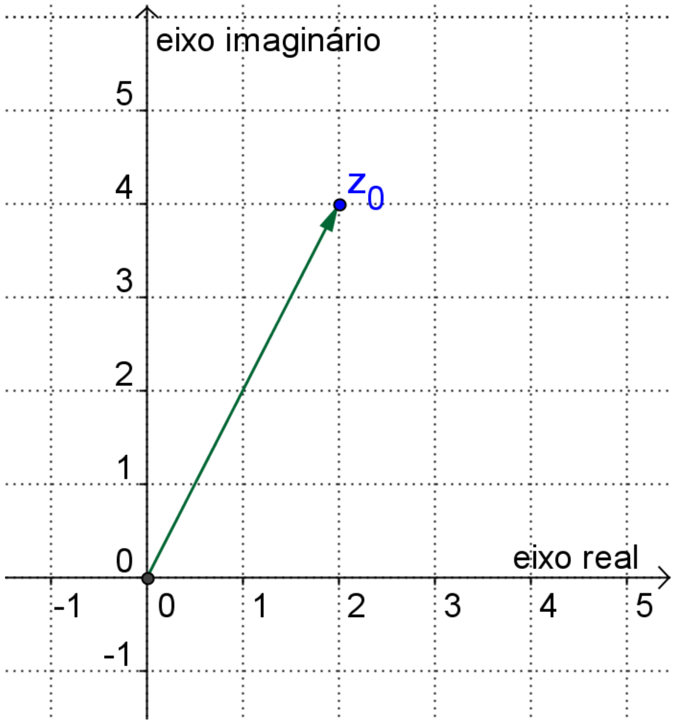
Justificativa: representação geométrica de um número complexo no plano complexo; relacionar as operações de adição e subtração de números complexos com as transformações no plano (translações), proporcionando uma melhor compreensão sobre o assunto.

Atividade 5. Esta atividade pode ser realizada tanto com malha quadriculada, régua, lápis e borracha, como através de softwares matemáticos, como, por exemplo, o Geogebra.

a) Represente o número complexo $z_0 = 2 + 4i$ no plano complexo, como um vetor centrado na origem do plano citado.

Resposta: ver Figura 8.

Figura 8 – Representação do número complexo z_0 no plano complexo.

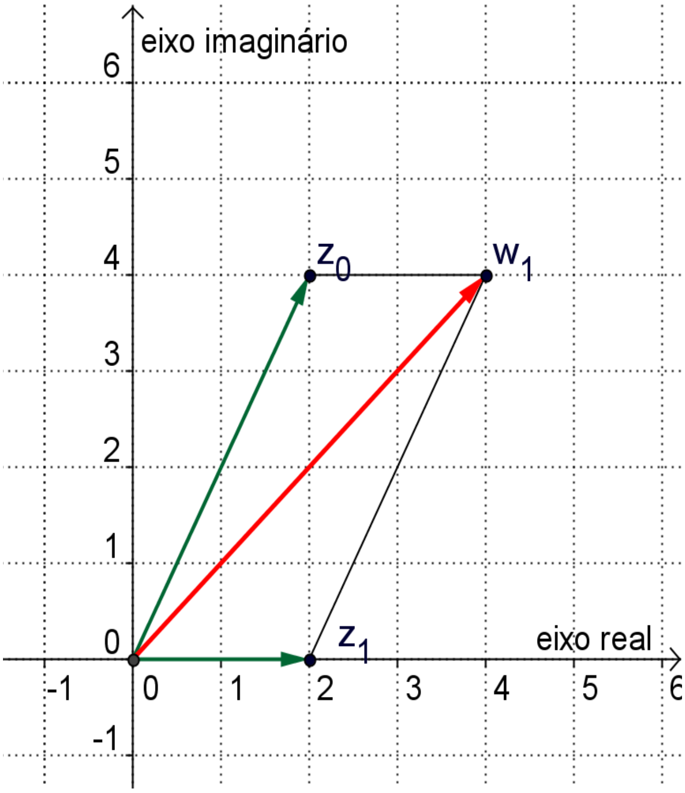


Fonte: Autores.

b) Determine e represente no plano complexo os números complexos $z_0 - 2 + 4i$ e $z_1 - 2$. Em seguida, represente o vetor que representa o número complexo $w_1 = z_0 + z_1$. Anote suas observações.

Resposta: $w_1 = 4 + 4i$.

Figura 9 – Representação da adição no plano complexo: $w_1 = z_0 + z_1$



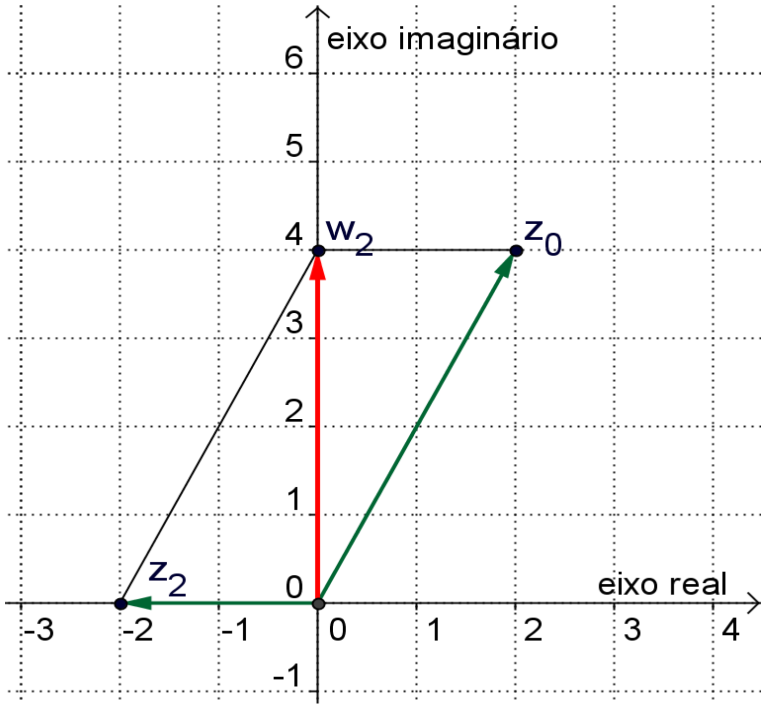
Fonte: Autores.

Note que a imagem de z_0 sofreu um deslocamento de 2 unidades no sentido positivo do eixo real.

c) Determine e represente no plano complexo os números complexos $z_0 = 2 + 4i$ e $z_2 = -2$. Em seguida, represente o vetor que representa o número complexo $w_2 = z_0 + z_2$. Anote suas observações.

Resposta: $w_2 = 4i$.

Figura 10 – Representação da adição no plano complexo: $w_2 = z_0 + z_2$



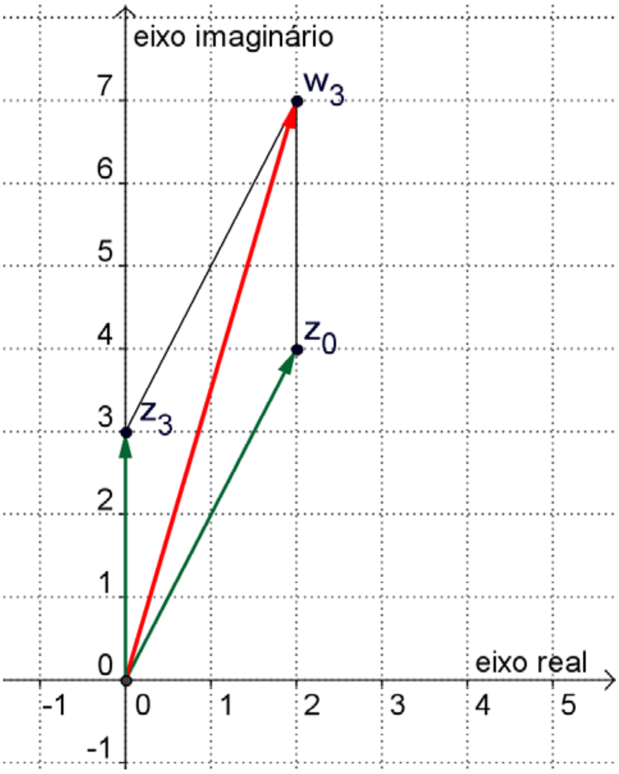
Fonte: Autores.

De modo análogo, a imagem de z_0 sofreu um deslocamento de 2 unidades no sentido negativo do eixo real.

d) Determine e represente no plano complexo os números complexos $z_0 = 2 + 4i$ e $z_3 = 3i$. Em seguida, represente o vetor que representa o número complexo $w_3 = z_0 + z_3$. Anote suas observações.

Resposta: $w_3 = 2 + 7i$.

Figura 11 – Representação da adição no plano complexo: $w_3 = z_0 + z_3$.



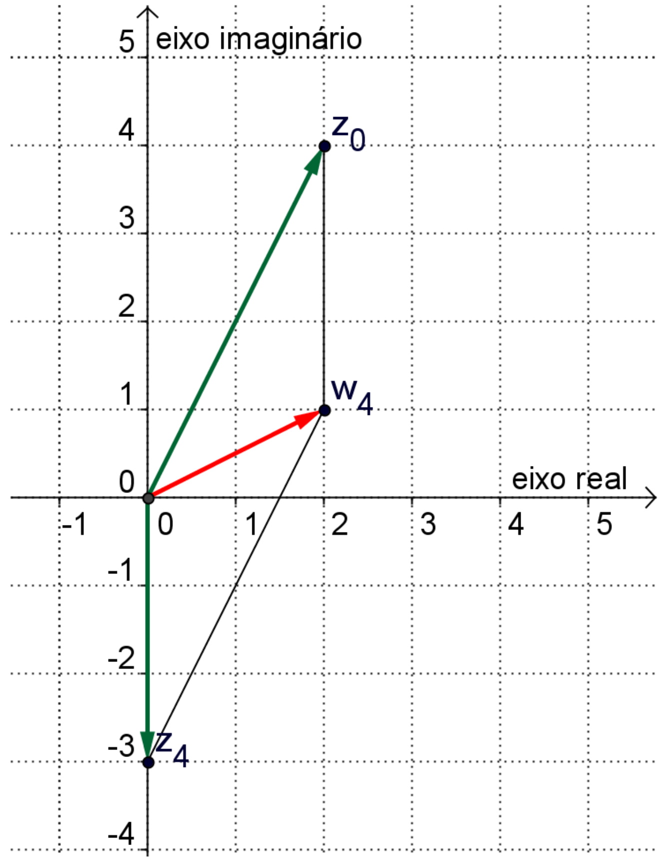
Fonte: Autores.

Note que a imagem de z_0 sofreu um deslocamento de 3 unidades no sentido positivo do eixo imaginário.

e) Determine e represente no plano complexo os números complexos $z_0 = 2 + 4i$ e $z_4 = -3i$. Em seguida, represente o vetor que representa o número complexo $w_4 = z_0 + z_4$. Anote suas observações.

Resposta: $w_4 = 2 + i$.

Figura 12 – Representação da adição no plano complexo: $w_4 = z_0 + z_4$.



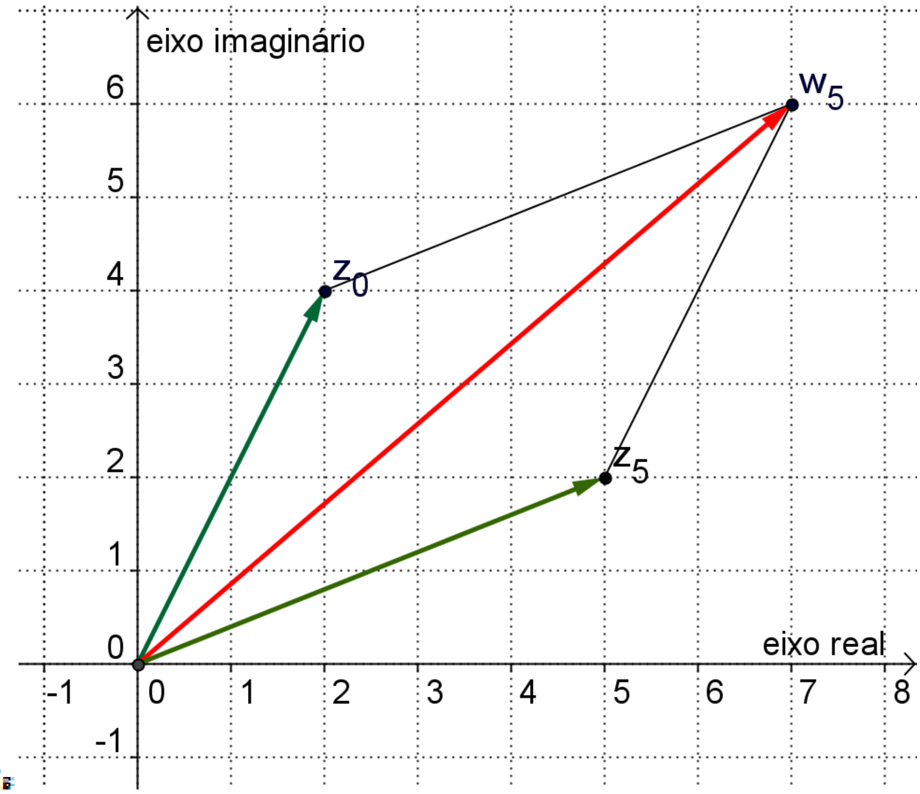
Fonte: Autores.

De modo análogo, a imagem de z_0 sofreu um deslocamento de 3 unidades no sentido negativo do eixo imaginário.

f) Determine e represente no plano complexo os números complexos $z_0 = 2 + 4i$ e $z_5 = 5 + 2i$. Em seguida, represente o vetor que representa o número complexo $w_5 = z_0 + z_5$. Anote suas observações.

Resposta: $w_5 = 7 + 6i$.

Figura 13 – Representação da adição no plano complexo:



$w_5 = z_0 + z_5$

Fonte: Autores.

Note que a imagem de z_0 sofreu um deslocamento de 5 unidades no sentido positivo do eixo real e um deslocamento de 2 unidades no sentido positivo do eixo imaginário.

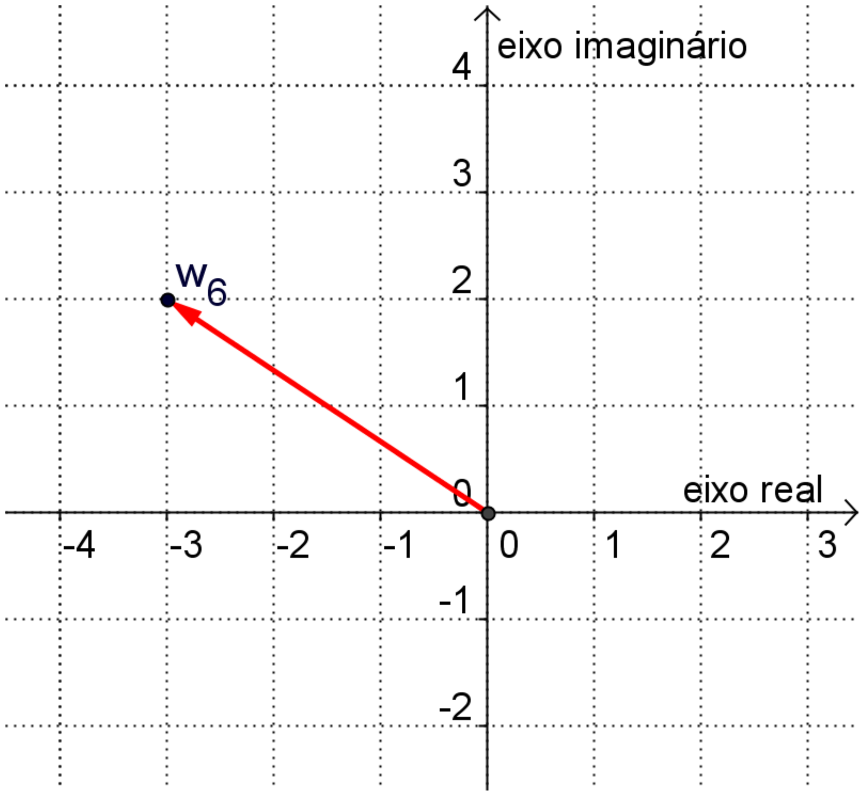
g) Sejam os números complexos $z_0 = 2 + 4i$ e $z_5 = 5 + 2i$. Considerando as atividades realizadas nos itens de (b) até (e), é possível concluir como será o vetor representante do número complexo $w_6 = z_0 - z_5$? Caso sua resposta seja afirmativa, como seria este vetor?

Resposta: Sim. Analisando as respostas dos itens (b) e (c), podemos notar que o vetor $\overrightarrow{w_2}$ (Figura 10*) e o vetor* $\overrightarrow{z_1 z_0}$ (Figura 9*) possuem a mesma direção, módulo e sentido, assim como os vetores* $\overrightarrow{w_4}$ (Figura 12*) e o vetor* $\overrightarrow{z_5 z_0}$ (Figura 11*). Dessa forma, podemos concluir que o vetor representante do número complexo* w_6 *tem mesma direção, módulo e sentido que o vetor* $\overrightarrow{z_5 z_0}$ (Figura 13*) e centro na origem do plano complexo.*

h) Determine o número complexo w_6 do item (g) e represente-o no plano complexo. A representação obtida corresponde à resposta dada no referido item?

Resposta: $w_6 = -3 + 2i$.

Figura 14 – Representação do número complexo $w_6 = z_0 - z_3$ no plano complexo



Fonte: Autores.

Comparando as figuras (13) e (14) podemos notar que a resposta obtida agora corresponde à resposta dada no item (g).

Desenvolvimento: As atividades propostas devem ser realizadas em grupos de 2 ou 3 alunos. Durante a resolução, o professor deve acompanhar os grupos, orientando e instigando os alunos na busca pelas respostas.

Atividade 6

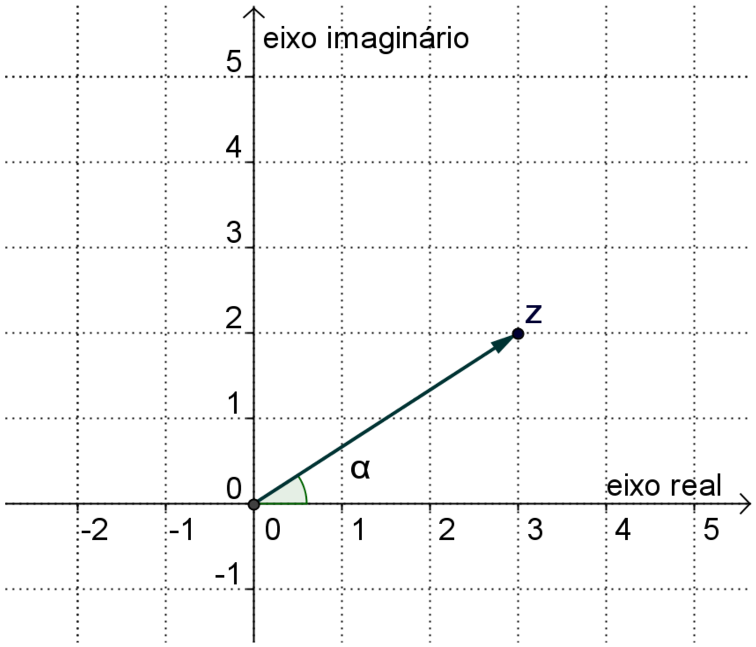
Justificativa: representação geométrica de um número complexo no plano complexo; relacionar as operações de multiplicação e divisão de números complexos com as transformações no plano (ampliações e/ou reduções, rotações), proporcionando uma melhor compreensão sobre o assunto.

Atividade 6. Esta atividade pode ser realizada tanto com malha quadriculada, régua, transferidor, lápis e borracha, como através de softwares matemáticos, como, por exemplo, o Geogebra.

Seja o número complexo $z = 3 + 2i$.

a) Represente o número complexo z no plano complexo, como um vetor centrado na origem do plano citado.

Figura 15 – Representação de $z = 3 + 2i$ no plano complexo.

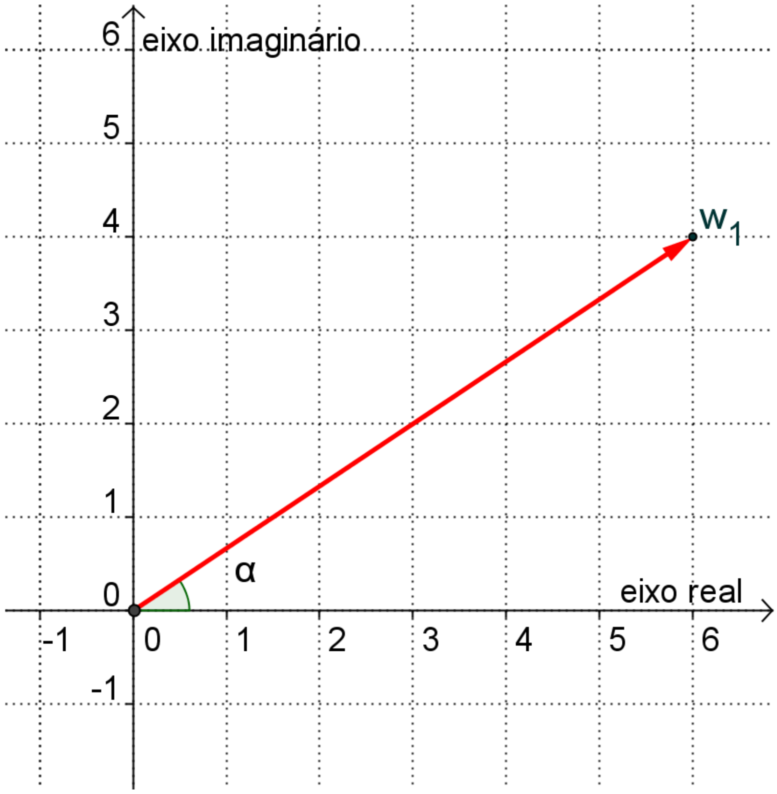


Fonte: Autores.

b) Determine e represente no plano complexo o vetor representante do número complexo $w_1 = 2z$, ou seja, o vetor resultante da multiplicação de z pelo número real 2. Em seguida, analise as representações de z e w_1 e anote suas conclusões.

Resposta: $w_1 = 6 + 4i$.

Figura 16 – Representação geométrica do produto de um número complexo por um número real.



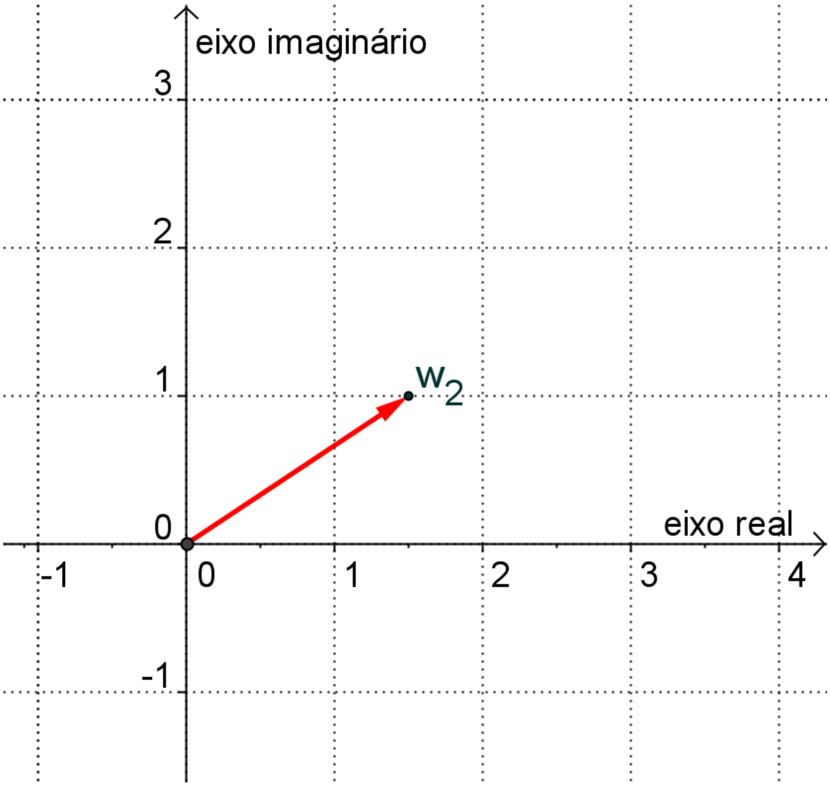
Fonte: Autores.

Podemos notar que o vetor representante do número complexo w_1 *preserva o argumento e o sentido do vetor representante do número complexo* z *, porém possui o dobro de seu módulo.*

c) Determine e represente no plano complexo o vetor representante do número complexo $w_2 = \frac{z}{2}$, ou seja, o vetor resultante da divisão de z_1 pelo número real 2. Em seguida, analise as representações de z e w_2 e anote suas conclusões.

Resposta: $w_2 = 1{,}5 + i$.

Figura 17 – Representação geométrica da divisão de um número complexo por um número real.



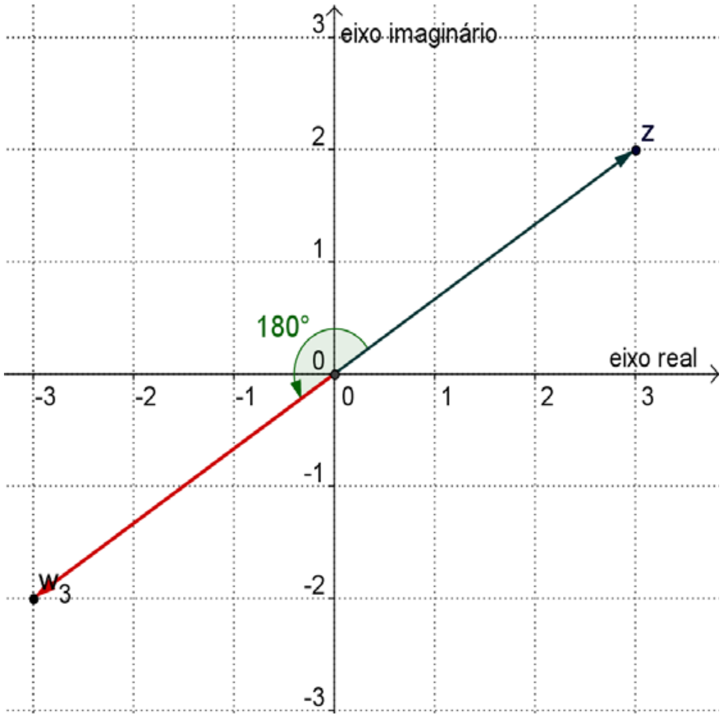
Fonte: Autores.

De modo análogo, podemos notar que o vetor representante do número complexo w_2 preserva o argumento e o sentido do vetor representante do número complexo z , porém tem a metade de seu módulo.

d) Determine e represente no plano complexo o vetor resultante da multiplicação de z pelo número real , ou seja, o vetor representante do número complexo $w_3 = -z$. No mesmo plano, represente z e analise estas representações. Anote suas conclusões.

Resposta: $w_3 = -3 - 2i$.

Figura 18 – Representação geométrica do produto de um número complexo pelo número real -1.



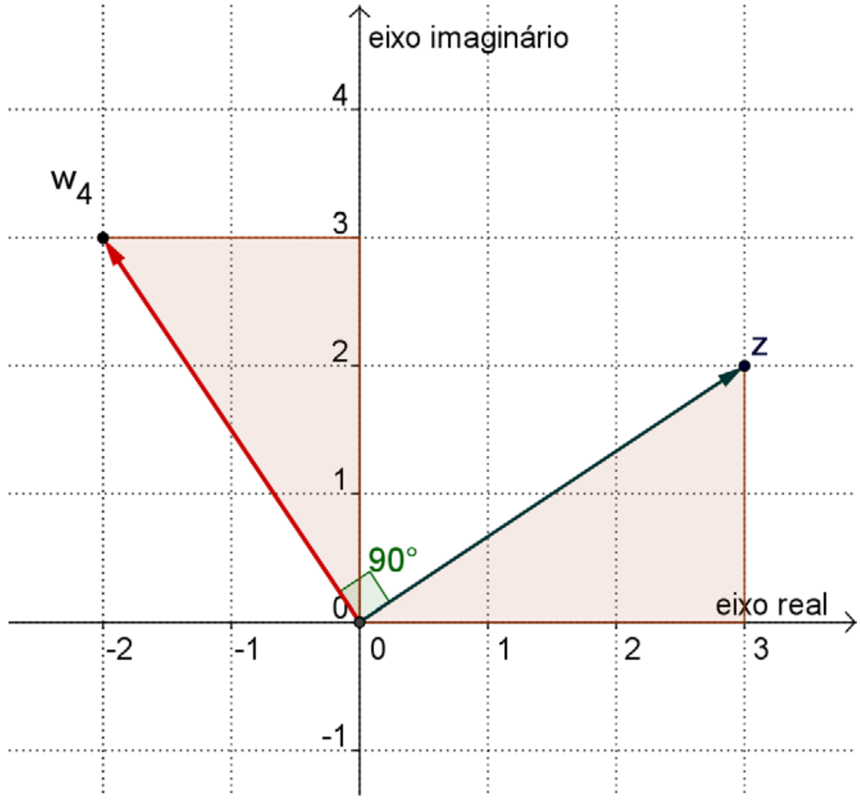
Fonte: Autores.

Podemos notar que o vetor representante do número complexo w_3 *preserva o módulo de* $\vec{z}$*, entretanto, tem sentido contrário. Percebemos ainda que* $z\hat{O}w_3$ *formam um ângulo de 180º. Assim, temos que multiplicar um número complexo por corresponde a girá-lo sob um ângulo de 180º.*

e) Determine e represente no plano complexo o vetor resultante da multiplicação de z pelo número imaginário i , ou seja, o vetor representante do número complexo $w_4 = zi$. No mesmo plano, represente z e analise estas representações. Anote suas conclusões.

Resposta: $w_4 = -2 + 3i$.

Figura 19 – Representação geométrica do produto de um número complexo pelo número complexo i .



Fonte: Autores.

Analogamente, podemos notar que o vetor representante do número complexo w_4 *preserva o módulo de* $\vec{z}$*, entretanto tem sentido e direção diferentes. Percebemos ainda que* $z\hat{O}w_4$ *formam um ângulo de 90º (observe que os triângulos destacados são congruentes). Assim, multiplicar um número complexo por i corresponde a girá-lo sob um ângulo de 90º no sentido anti-horário.*

f) O que aconteceria com o vetor representante do número complexo w_4, item (e), se o multiplicássemos pelo número imaginário i ? O que podemos mostrar com este fato?

Resposta: O vetor representante de w_4 *sofreria um giro de 90º no sentido anti-horário, e coincidiria com o vetor* w_3 (Figura 18)*. Pelo item d, temos que multiplicar um número complexo por – 1 significa girar o vetor que o representa sob um ângulo de 180º.*

No item e, visualizamos que multiplicar um número complexo por i significa girar seu vetor representante em um ângulo de 90º também no sentido anti-

horário. Assim sendo, podemos dizer que multiplicar um número complexo por i duas vezes corresponde a girá-lo duas vezes sob um ângulo de 90º, totalizando 180º, resultado obtido ao multiplicar tal número por -1 *; logo, temos que* $i.i = -1$ *, ou seja,* $i^2 = -1$ *.*

g) O que aconteceria com o vetor representante do número complexo w_4 (Figura 19) se o multiplicássemos pelo número imaginário i ?

Resposta: O vetor sofreria um giro de 90º no sentido horário.

Desenvolvimento: As atividades propostas devem ser realizadas em grupos de 2 ou 3 alunos. Durante a resolução, o professor deve acompanhar os grupos, orientando e instigando os alunos na busca pelas respostas.

4.3 ETAPA 3 – RETOMADA E RESOLUÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA INICIAL

Justificativa: verificar se os alunos compreenderam os conceitos sobre os números complexos apresentados na etapa anterior e se sabem aplicá-los na resolução de uma situação-problema.

Atividade 7. Situação-problema proposta na atividade 1 (Etapa 1).

Resposta: resolução que chamamos de solução 4 apresentada no anexo A.

Desenvolvimento: O professor deve retomar a situação-problema da atividade 1 (Etapa 1). A atividade proposta deve ser realizadas em grupos de 2 ou 3 alunos. Durante a resolução, o professor deve acompanhar os grupos a fim de verificar se os mesmos se apropriaram dos conceitos de representação vetorial, operações e aplicações dos números complexos.

4.4 ETAPA FINAL – QUESTIONÁRIO

Justificativa: avaliar a qualidade da intervenção pedagógica proposta.

Atividade 8. Responda às seguintes questões.

a) Você considera importante o conhecimento de números complexos? Justifique sua resposta.

Resposta esperada: Sim, pois facilitam a resolução de situações-problemas; possibilitam a resolução de equações polinomiais; possuem aplicações para as transformações no plano; entre outras.

b) Em que momento os matemáticos confirmaram a necessidade do surgimento de novos números, no caso, dos números complexos?

Resposta esperada: Quando Rafael Bombelli, por volta de 1530, comparava as respostas $x = 4$ *(obtida por inspeção) e* $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ *(obtida pela fórmula de Cardano) da equação* $x^3 - 15x - 4 = 0$.

c) Como podemos representar um número complexo?

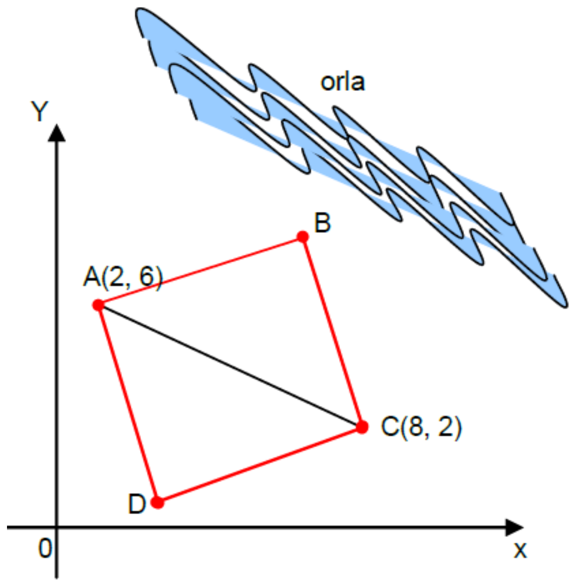
Resposta esperada: Um número complexo qualquer z *pode ser representado das seguintes maneiras: forma algébrica, ou seja, na forma* $a + bi$ *, com* a *e* b *reais e* i *a unidade imaginária; por pares ordenados, neste caso,* $z = (a, b)$*; por vetores no plano; e, na forma trigonométrica, assim sendo,* $z = |z|.(\cos\theta + i\ sen\theta)$.

d) Cite alguma utilidade (aplicação) para os números complexos:

Resposta esperada: Resolução de situações-problemas, principalmente os relacionados à geometria.

e) (ELIAS, 2013) Um arquiteto gostaria de construir um edifício de base quadrada em frente à praia, de tal forma que uma das diagonais de sua base fosse paralela à orla, conforme a ilustração abaixo. Utilizando um sistema de coordenadas cartesiano, ele determinou que os vértices da base que determinam a diagonal paralela à orla deverão ser $A(2,6)$ e $C(8,2)$. Determine as coordenadas dos outros dois vértices, de modo que o quadrilátero ABCD seja, de fato, um quadrado.

Figura 20 – Representação de uma situação-problema - construção de um edifício.



Fonte: Elias (2013).

Resposta esperada: Note que o vetor $\overrightarrow{CD}$ *pode ser obtido através da rotação no sentido anti-horário do vetor* $\overrightarrow{CB}$*, ou seja,* $\overrightarrow{CD} = i\overrightarrow{CB}.$ *De onde obtemos:*

$$D - C = (B - C)i \Rightarrow \boxed{D = 10 - 6i + Bi\ (I)}$$

Por outro lado, de modo análogo obtemos:

$$\overrightarrow{AB} = i.\overrightarrow{AD} \Rightarrow B - A = (D - A)i \Rightarrow \boxed{B = 8 + 4i + Di\ (II)}$$

De (I) e (II), temos que: $D = 3 + i$ e $B = 7 + 7i$.

Observação: Outra maneira de resolução consiste em considerar: $\overrightarrow{BC} = i\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{DA} = i\overrightarrow{DC}$.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A busca pelas respostas das perguntas propostas a nós por nossos alunos, citadas na introdução do presente trabalho – que valem a pena serem retomadas: Porque estudar números complexos? Para que servem números complexos? – levaram-nos ao encontro de várias sequências didáticas, baseadas em diversas metodologias. Umas baseiam-se na história da matemática, outras na engenharia didática, ou em atividades investigativas, ou ainda na modelagem matemática.

Das sequências didáticas consultadas, as que nos chamaram a atenção e que eram mais pertinentes aos nossos propósitos foram as que utilizavam a história da matemática em suas abordagens e as que adotavam a modelagem matemática como metodologia de ensino, pois, através da história dos números complexos, acreditamos que os alunos tenham a oportunidade de “reviver” parte do processo de criação dos números complexos, e, através da modelagem matemática, esses mesmos alunos serão levados a se sentirem responsáveis pela construção de seus conhecimentos. Assim sendo, ambas contribuem significativamente para uma aprendizagem de qualidade.

Desse modo, elaboramos nossa sequência didática pautados na Modelagem Matemática e recorrendo à História dos Números Complexos para que o processo de ensino/aprendizagem aconteça de modo satisfatório, com significados e aplicações, levando os alunos a responderem as questões levantadas por eles mesmos.

Finalmente, é necessário destacar que a sequência didática proposta por nós não foi aplicada para que uma análise de sua eficácia fosse realizada, o que abre espaço para que no futuro possamos dar continuidade ao presente trabalho, aplicando-o, analisando e publicando os resultados obtidos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Lourdes M. W. de; VERTUAN, Rodolfo E. Discussões sobre “como fazer” Modelagem Matemática na sala de aula. In: ALMEIDA, Lourdes M. W. de;ARAÚJO, Jussara de L.; BISOGNIN, Eleni. **Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática: relatos de experiências e propostas pedagógicas**. Londrina: Eduel, 2011. p. 19-43.

ARAÚJO, Nanci B. F. **Números Complexos:** uma proposta de mudança metodológica para uma aprendizagem significativa no ensino médio. 2006. 111 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? **Veritati,** 4, p. 73-80, 2004. Disponível em <http://www.uefs.br/nupemm/veritati.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2013.

BARBOSA, J. C. **Modelagem na Educação Matemática:** contribuições para o debate teórico. 2001. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATICA/Artigo_Barbosa.pdf>. Acesso em: 07 mar. 2013.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BURAK, D. Modelagem Matemática: experiências vividas. In: IV Conferência Nacional sobre Modelagem e Educação Matemática -CNMEM, 2005, Feira de Santana - BA. **Conferência Nacional sobre Modelagem e Educação Matemática**. Feira de Santana - BA : Editora da UEFS, 2005. Disponível em <http://dionisioburak.com.br/documents/CNMEMDionísio.pdf> Acesso em 10 mar. 2013.

CARNEIRO, José P. A geometria e o ensino dos números complexos. In: Encontro em Educação Matemática, 8, 2004. Recife, **Anais...** SBEM. 2004. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/15/PA07.pdf>. Acesso em 10 mar. 2013.

CARNEIRO, José P. A ilha do tesouro: dois problemas e duas soluções. **Revista do Professor de Matemática**, 47, p. 1-4, 2001.

DANTE, Luiz R. **Matemática:** contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2010.

ELIAS, Ambrósio. **Geometria analítica:** questões contextualizadas. Disponível em http://www.ambrosioelias.com.br/wp-content/uploads/2011/04/Professor-Ambr%C3%B3sio-Elias-Material-Geometria-Anal%C3%ADtica.pdf. Acesso em 10 mar. 2013.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** Campinas: Editora da Unicamp, 2004.

GARBI, Gilberto G. **A Rainha da Ciências:** um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. 5. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática Elementar, 6:** complexos, polinômios, equações. 7. ed. São Paulo: Atual, 2005.

MACHADO JÚNIOR, Arthur Gonçalves. **Modelagem matemática no ensino-aprendizagem e resultados.** 142 p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, 2005.

MATEMÁTICA-3. **Caderno do Aluno:** matemática, ensino médio, 3ª série, 2º bimestre. Coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado. São Paulo: Imprensa Oficial do Estado/SEE, 2008.

MILIES, Francisco C. P. 2008. **A introdução dos números complexos**. 2008. Disponível em <http://www.matematica.br/historia/complexos.html>. Acesso em: 10 mar. 2013.

NORO, Ana Paula. **Contribuições da engenharia didática para o ensino e aprendizagem de poliedros.** 2012. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática) – Centro Universitário Franciscano. Santa Maria, 2012. Disponível em:<http://sites.unifra.br/Portals/13/Disserta%C3%A7%C3%B5es/2012/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20AnaPaula.pdf>. Acesso em: 03 mar. 2013.

OLIVEIRA, Carlos N. C. de. **Números complexos: um estudo dos registros de representação e de aspectos gráficos**. 2010. São Paulo. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2010. Disponível em http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/carlos_nely_oliveira.pdf. Acesso em: 07 fev. 2013.

PERUZZO, Jucimar. **Origem dos números imaginários ou complexos.** 2012. Disponível em:<http://www.educairani.com/site_2012/artigos_e_monografias/numeros_imaginarios_jucimar_peruzzo.pdf>. Acesso em: 10 mar. 2013.

REIS NETO, Raimundo M. **Alternativa Metodológica para o Ensino e Aprendizagem de números Complexos:** uma experiência com professores e alunos. 2009. 142 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.

RIBEIRO, Jackson. **Matemática:** ciência, linguagem e tecnologia, v.3. São Paulo: Scipione, 2012

RODRIGUES, Claudina I.; REZENDE, Eliane Q. F.; QUEIROZ, Maria L. B. **Guia do Professor:** Tesouro Cartesiano. Disponível em <https://docs.google.com/viewer?a=v&q=cache:NhzTZapRopkJ:m3.ime.unicamp.br/dl/1IMTyTq8wNQ_MDA_abdd4_+problema+da+ilha+do+tesouro&hl=pt-BR&gl=br&pid=bl&srcid=ADGEESjMllMeEvSU4zuwjZmIKEkEfTb-QU-8Lewn5vgwkSe2pN2t6-sWQFry19dt4omlm6QbhrGkuktJ-NANtdYeoQQSMMvJPrme2nVBlfcMwpRWWkZV8QH0yTLaT8FSsvLgESyZRN4U&sig=AHIEtbS6mDbyOHqkZJVM7tyR3tNTHh3Y0w>. Acesso em: 10 mar. 2013.

ROSA, Mário S. **Números complexos, “Uma abordagem histórica para aquisição do conceito”**. 1998. 172 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

SÃO PAULO. Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo:** matemática e suas tecnologias / Secretaria da Educação. Coordenação geral, Maria Inês Fini; coordenação de área, Nilson José Machado. 1 ed. atual. São Paulo: Imprensa Oficial do Estado/SEE, 2012.

SOUZA, Joamir R. de. **Novo olhar matemática**. v. 3. São Paulo: FTD, 2010.

ANEXOS

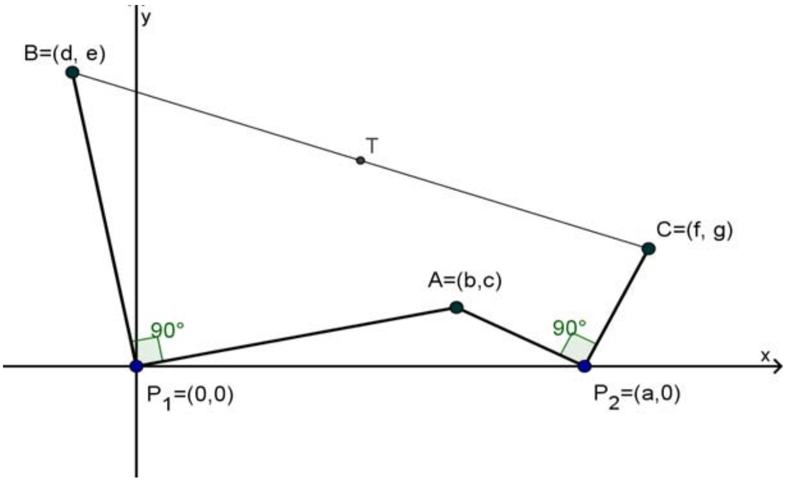
ANEXO A

Algumas soluções para o “Problema da Ilha do Tesouro”

SOLUÇÃO 1:

Uma possibilidade de resolução é utilizar o plano cartesiano para representar o problema proposto e resolvê-lo através dos conceitos da geometria analítica. Para tanto, podemos considerar que a posição de uma das pedras (P_1) é a origem. Assim, $P_1 = (0,0)$, e a outra pedra (P_2) está localizada sobre o eixo das abscissas, a uma distância *a* de P_1, ou seja, $P_2 = (a,0)$, supondo que a localização da árvore é dada por um ponto $A = (b,c)$ qualquer, e que os pontos $B = (d,e)$ e $C = (f,g)$ são as marcas. A Figura 21 ilustra estas considerações.

Figura 21 – Representação do problema da ilha do tesouro. Soluções 1 e 2.



Fonte: Autores.

Para encontrar o tesouro, precisamos das coordenadas de T. Sabemos ainda que T é ponto médio de BC; assim, basta determinar as coordenadas dos pontos B e C.

Para o ponto B, vamos encontrar a equação da reta $\mathbf{AP_1}$, para que na sequência possamos determinar a equação da reta $\mathbf{P_1B}$, visto que essas retas são perpendiculares. Encontraremos também a equação da circunferência Γ de centro $\mathbf{P_1}$ e raio $\overline{\mathbf{P_1B}}$. Desse modo, fazendo a intersecção da reta $\mathbf{P_1B}$ com a circunferência $\Gamma(\mathbf{P_1}, \overline{\mathbf{P_1B}})$ o ponto B fica determinado. Vejamos:

- Reta AP_1.

Temos que a equação de uma reta é da forma $y = mx + h$, $A = (b, c)$ e $P_1 = (0, 0)$, de onde segue que $h = 0$ e $m = \frac{c}{b}$, logo $y = \frac{c}{b}x$ é a equação da reta AP_1.

- Reta P_1B .

Sabemos que, se r e s são retas perpendiculares, sendo m_r e m_s os coeficientes angulares de r e s, respectivamente, então $m_r = -\frac{1}{m_s}$. Assim, o coeficiente angular da reta $P_1B = -\frac{b}{c}$. Temos ainda que tal reta passa pelo ponto $P_1 = (0, 0)$, de onde segue que $y = -\frac{b}{c}x$ é a equação da reta P_1B .

- Circunferência $\Gamma(P_1, \overline{P_1B})$.

A equação de uma circunferência com centro na origem é dada por $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, onde x_0 e y_0 são as coordenadas do centro da circunferência, e r é o raio. Dessa forma, como $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ e $r = \overline{P_1B} = \sqrt{a^2 + e^2}$, segue que $x^2 + y^2 = a^2 + e^2$ é a equação da circunferência Γ.

- Reta P_1B intersecção com a circunferência $\Gamma(P_1, \overline{P_1B})$.

Substituindo a equação da reta P_1B na circunferência $\Gamma(P_1, \overline{P_1B})$, temos que:

$x^2 + \left(-\frac{b}{c}x\right)^2 = a^2 + e^2 \Rightarrow (b^2 + c^2).x^2 = (a^2 + e^2).c^2 \Rightarrow x^2 = c^2 \Rightarrow x = \pm c$, logo $y = \mp b$, então $B = (c, -b)$ ou $B = (-c, b)$. Entretanto, de acordo com os dados do problema proposto, o ponto $B = (c, -b)$ deve ser descartado. Portanto, $B = (-c, b)$. As coordenadas do ponto C podem ser determinadas de modo análogo: $C = (c + a, a - b)$.

Assim, $T = \left(\frac{-c+c+a}{2}, \frac{b+a-b}{2}\right) \Rightarrow T = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$. Note que as coordenadas de T estão em função de a e não de b ou c, o que mostra que a localização do tesouro não depende da posição da árvore.

SOLUÇÃO 2:

Ainda tendo como base a representação do problema proposto dada pela Figura 21, note que o triângulo AP_1B é retângulo em P_1, e os segmentos AP_1 e P_1B são iguais por construção. Assim, pela distância entre dois pontos, temos:

$$d(A, P_1) = \sqrt{(b^2 + c^2)} = \sqrt{(d^2 + e^2)} = d(P_1, B) \qquad (I)$$

$$d(A, B) = \sqrt{(d-b)^2 + (e-c)^2} \qquad (II)$$

Por outro lado, aplicando o Teorema de Pitágoras em AP_1B determinamos a distância entre os pontos A e B, ou seja,

$$\overline{AB}^2 = \overline{AP_1}^2 + \overline{P_1B}^2 \Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2 + e^2} \ . \qquad (III)$$

De (II) e (III), segue que:

$$(d-b)^2 + (e-c)^2 = b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \Rightarrow d = -\frac{ce}{b} \ . \qquad (IV)$$

Substituindo (IV) em (I), obtemos:

$$b^2 + c^2 = \left(-\frac{ce}{b}\right)^2 + e^2 \Rightarrow (b^2 + c^2).b^2 = c^2e^2 + b^2e^2 \Rightarrow b^2 = e^2 \Rightarrow e = \pm b$$

e pela representação dada através da Figura 21), segue que $e = b$, então (por (IV)) temos que $d = -c$. Portanto, o ponto B possui coordenadas $-c$ e b, ou seja, $B = (-c, b)$. De modo análogo, podemos determinar as coordenadas do ponto C, dadas por $C = (c + a, a - b)$.

De onde segue que $T = \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$, mostrando mais uma vez que a localização de T independe da localização da árvore, ou seja, do ponto A.

SOLUÇÃO 3:

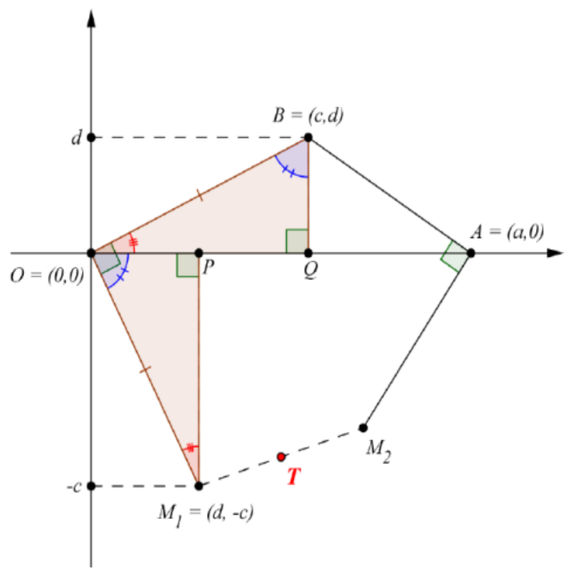
Outra maneira de resolver este problema é proposta por Rodrigues, Rezende e Queiroz (ONLINE). Segundo as autoras, podemos considerar que, no sistema de coordenadas cartesiana, a posição de um dos baobás, árvores que os povos da África consideravam sagradas, (no problema enunciado acima seria uma das pedras) é a origem $O = (0,0)$, e a posição da outra é o ponto $A = (a, 0)$. Devemos também supor que o totem, protetor e símbolo de uma tribo local, (no nosso caso, a árvore) encontra-se na posição $B = (c, d)$. Sendo necessário encontrar as coordenadas do ponto em que o tesouro está localizado.

Ainda, de acordo com as autoras, como o tesouro está no ponto médio T dos pontos que representam as marcas 1 e 2, conhecendo-se as coordenadas destes pontos, o ponto T fica determinado.

- Coordenadas da marca 1.

Para determinar as coordenadas da marca 1, denotada M_1, primeiro note que os dois triângulos retângulos OQB e M_1PO, em destaque na figura, são congruentes, pois as hipotenusas OB e M_1O são congruentes, os ângulos BOQ e M_1OP são complementares e disto segue que os ângulos OBQ e M_1OP são congruentes, assim como os ângulos BOQ e OM_1P. Com isso, os lados correspondentes são congruentes e, como $Q = (c, 0)$, as coordenadas do ponto M_1 são d e $-c$, ou seja, $M_1 = (d, -c)$. Veja Figura 22:

Figura 22 – Representação geométrica da primeira parte do problema da ilha do tesouro. Solução 3.

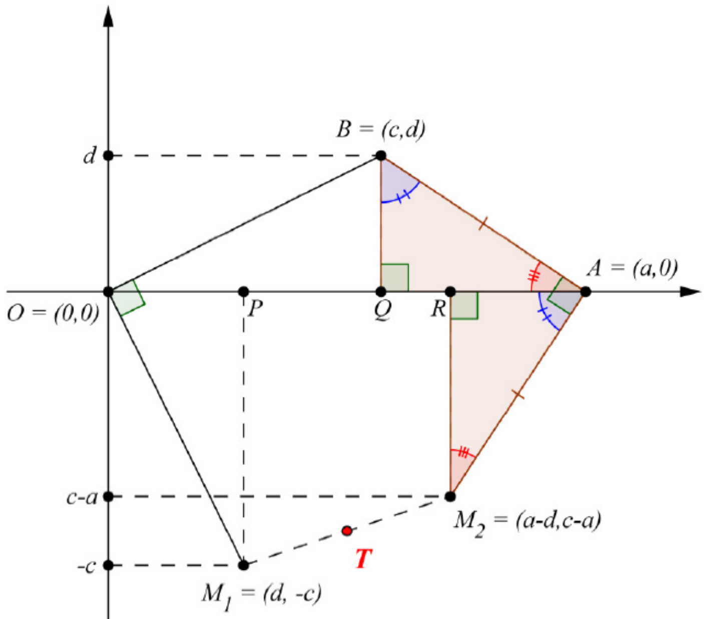


Fonte: Rodrigues, Rezende e Queiroz (ONLINE).

- Coordenadas da marca 2.

Os dois triângulos retângulos BQA e ARM_2, em destaque na figura, são congruentes, pois as hipotenusas BA e AM_2 são congruentes, os ângulos BAQ e M_2AR são complementares e disto segue que os ângulos QBA e RAM_2 são congruentes, assim como os ângulos QAB e RM_2A. Logo, os lados correspondentes são congruentes e, como $Q=(c,0)$, as coordenadas do ponto M_2 são $a-d$ e $c-a$, ou seja, $M_2=(a-d,c-a)$. Veja Figura 23.

Figura 23 – Representação geométrica da segunda parte do problema da ilha do tesouro. Solução 3.



Fonte: Rodrigues, Rezende e Queiroz (ONLINE).

- Coordenadas do ponto médio entre as duas marcas.

Como $M_1=(d,-c)$ e $M_2=(a-d,c-a)$, e as coordenadas do ponto médio T são dadas pelas médias aritméticas das correspondentes coordenadas dos dois pontos, conclui-se que $T=\left(\frac{d+a-d}{2},\frac{-c+c-a}{2}\right)=\left(\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right)$.

Dessa maneira, as autoras concluem que as coordenadas da localização do tesouro dependem apenas da localização dos baobás (pedras), e que, para qualquer ponto $B=(c,d)$, a posição do tesouro será sempre a mesma.

<u>SOLUÇÃO 4</u>:

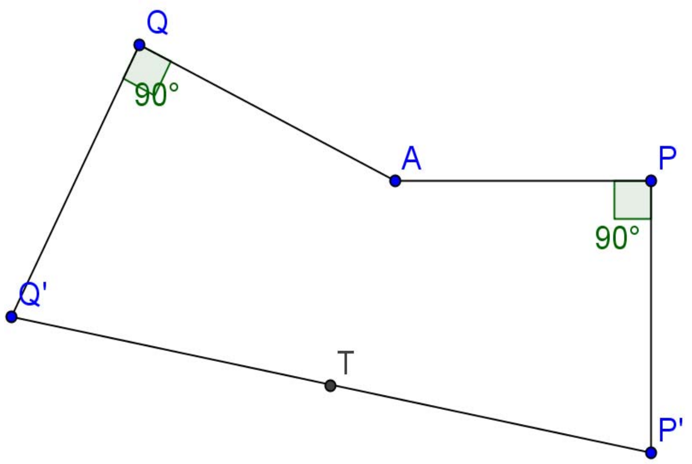
Solução publicada na *Revista do Professor de Matemática* (CARNEIRO, 2001). Esta solução consiste na utilização de dois fatos fundamentais relacionados aos números complexos.

O primeiro fato é que, se Z e W são as imagens dos números complexos representados por z e w no plano de Argand-Gauss, então $z - w$, isto é, a diferença entre esses complexos, pode ser representada por um vetor centrado em W e extremidade em Z , sendo usualmente indicada por $Z - W$.

O segundo fato é que a multiplicação de um número complexo pela unidade imaginária i , equivale graficamente a girar o vetor que representa z, em torno da origem, segundo um ângulo de 90º, no sentido anti-horário.

A Figura 24 representa a situação proposta no problema. Os pontos P e Q indicam as posições das pedras, e o ponto A, a posição da árvore. Dessa forma, o autor do referido artigo considera que os pontos pertencem ao plano complexo, sem se importar onde a origem está localizada.

Figura 24 – Representação do problema da ilha do Tesouro. Solução 4.



Fonte: Autores

Assim sendo,

$\overrightarrow{PA}.i = \overrightarrow{PP'} \Rightarrow (A - P)i = P' - P \Rightarrow \boxed{P' = P - (P - A).i}$

De modo análogo,

$\overrightarrow{QA}.(-i) = \overrightarrow{QQ'} \Rightarrow \boxed{Q' = Q + (Q - A).i}$

Como T é ponto médio de P' e Q', segue que:

$T = \dfrac{P' + Q'}{2} = \dfrac{P - (P - A).i + Q + (Q - A).i}{2} = \dfrac{P + Q}{2} + \dfrac{Q - P}{2}$

O resultado mostra que a localização do tesouro não depende da posição da árvore. Observe que, das soluções apresentadas, a de número 4 é a mais simples, visto que utiliza apenas dois conceitos básicos referentes aos números complexos.

ANEXO B

Resumo das Atividades Propostas na Sequência Didática

Atividade 1 (CARNEIRO, 2001). Dois piratas decidem enterrar um tesouro em uma ilha. Escolhem, como pontos de referência, uma árvore e duas pedras. Começando na árvore, medem o número de passos até a primeira pedra. Em seguida, dobram, segundo ângulo de 90°, à direita e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem uma marca. Voltam à árvore, medem o número de passos desde a árvore até a segunda pedra, dobram à esquerda, segundo um ângulo de 90º, e caminham o mesmo número de passos até alcançar um ponto, onde fazem outra marca. Finalmente, enterram o tesouro exatamente no ponto médio, entre as duas marcas. Anos mais tarde, os dois piratas voltam à ilha e decidem desenterrar o tesouro, mas, para sua decepção, constatam que a árvore não existe mais. Então um dos piratas decide arriscar. Escolhe ao acaso um ponto da ilha e diz: “Vamos imaginar que a arvore estivesse aqui.” Repete então os mesmos procedimentos de quando havia enterrado o tesouro: conta os passos até a primeira pedra, dobra à direita, etc., e encontra o tesouro.

A pergunta é: esse pirata era sortudo ou um matemático?

Atividade 2 (MATEMÁTICA-3). Um marceneiro quer construir duas caixas, uma com a forma de um cubo de aresta x metros, outra com a forma de um paralelepípedo com base retangular, de lados $3\,m$ e $5m$, e de altura igual à altura do cubo. O valor de x deve ser escolhido de tal forma que o volume do cubo seja igual ao volume do paralelepípedo adicionado a $4m^3$.

a) Escreva a equação que traduz a exigência a ser satisfeita pelo valor de x.

b) Encontre, por tentativa e erro, um valor para x que satisfaça a equação do item anterior.

c) A equação encontrada no item a é uma equação do terceiro grau do tipo $y^3 + py + q = 0$, isto é, não apresenta o termo em y^2. Vejamos, na próxima atividade, um pouco da história que envolve a busca pela solução dessas equações.

Atividade 3. Leitura e análise de texto: Contexto histórico do surgimento dos Números Complexos (GARBI, 2010, p. 159-165).

Atividade 4. Refaça os passos de Bombelli e resolva a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ através da fórmula de Cardano.

Atividade 5. Esta atividade pode ser realizada tanto com malha quadriculada, régua, lápis e borracha, como através de softwares matemáticos, como, por exemplo, o Geogebra.

a) Represente o número complexo $z_0 = 2 + 4i$ no plano complexo, como um vetor centrado na origem do plano citado.

b) Determine e represente no plano complexo os números complexos $z_0 = 2 + 4i$ e $z_1 = 2$. Em seguida, represente o vetor que representa o número complexo $w_1 = z_0 + z_1$. Anote suas observações.

c) Determine e represente no plano complexo os números complexos $z_0 = 2 + 4i$ e $z_2 = -2$. Em seguida, represente o vetor que representa o número complexo $w_2 = z_0 + z_2$. Anote suas observações.

d) Determine e represente no plano complexo os números complexos $z_0 = 2 + 4i$ e $z_3 = 3i$. Em seguida, represente o vetor que representa o número complexo $w_3 = z_1 + z_3$. Anote suas observações.

e) Determine e represente no plano complexo os números complexos $z_0 = 2 + 4i$ e $z_4 = -3i$. Em seguida, represente o vetor que representa o número complexo $w_4 = z_0 + z_4$. Anote suas observações.

f) Determine e represente no plano complexo os números complexos $z_0 = 2 + 4i$ e $z_5 = 5 + 2i$. Em seguida, represente o vetor que representa o número complexo $w_5 = z_0 + z_5$. Anote suas observações.

g) Sejam os números complexos $z_0 = 2 + 4i$ e $z_5 = 5 + 2i$. Considerando as atividades realizadas nos itens de (b) até (e), é possível concluir como será o vetor representante do número complexo $w_6 = z_0 - z_5$? Caso sua resposta seja afirmativa, como seria este vetor?

h) Determine o número complexo w_6 do item (g) e represente-o no plano complexo. A representação obtida corresponde à resposta dada no referido item?

Atividade 6. Seja o número complexo $z = 3 + 2i$:

a) Represente o número complexo z no plano complexo, como um vetor centrado na origem do plano citado.

b) Determine e represente no plano complexo o vetor representante do número complexo $w_1 = 2z$, ou seja, o vetor resultante da multiplicação de z pelo número real 2. Em seguida, analise as representações de z e w_1 e anote suas conclusões.

c) Determine e represente no plano complexo o vetor representante do número complexo $w_2 = \frac{z}{2}$, ou seja, o vetor resultante da divisão de z_1 pelo número real 2. Em seguida, analise as representações de z e w_2 e anote suas conclusões.

d) Determine e represente no plano complexo o vetor resultante da multiplicação de z pelo número real –1, ou seja, o vetor representante do número complexo $w_3 = -z$. No mesmo plano, represente z e analise estas representações. Anote suas conclusões.

e) Determine e represente no plano complexo o vetor resultante da multiplicação de z pelo número imaginário i , ou seja, o vetor representante do número complexo $w_4 = zi$. No mesmo plano, represente z e analise estas representações. Anote suas conclusões.

f) O que aconteceria com o vetor representante do número complexo w_4, item (e), se o multiplicássemos pelo número imaginário i ? O que podemos mostrar com este fato?

g) O que aconteceria com o vetor representante do número complexo w_4 (Figura 19), se o multiplicássemos pelo número imaginário ?

Atividade 7. Situação-problema proposta na atividade 1.

Atividade 8. Responda as seguintes questões.

a) Você considera importante o conhecimento de números complexos? Justifique sua resposta.

b) Em que momento os matemáticos confirmaram a necessidade do surgimento de novos números, no caso, dos números complexos?

c) Como podemos representar um número complexo?

d) Cite alguma utilidade (aplicação) para os números complexos:

e) (ELIAS, 2013) Um arquiteto gostaria de construir um edifício de base quadrada em frente à praia, de tal forma que uma das diagonais de sua base fosse paralela à orla (Figura 20). Utilizando um sistema de coordenadas cartesiano, ele determinou que os vértices da base que determinam a diagonal paralela à orla deverão ser A (2, 6) e C (8, 2). Determine as coordenadas dos outros dois vértices, de modo que o quadrilátero ABCD seja, de fato, um quadrado.