



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

EZEQUIEL ELIAS FORMA SEMENTE

**UMA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM  
AUXILIANDO O RECONHECIMENTO DE FUNÇÕES POR  
MEIO DE REPRESENTAÇÕES:  
ANÁLISE DE ERROS E DIFICULDADES EM TAREFAS NA 8ª  
CLASSE NO 1º CICLO DO ENSINO SECUNDÁRIO GERAL  
EM UMA ESCOLA DE QUELIMANE – MOÇAMBIQUE**

EZEQUIEL ELIAS FORMA SEMENTE

**UMA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM  
AUXILIANDO O RECONHECIMENTO DE FUNÇÕES POR MEIO  
DE REPRESENTAÇÕES:  
ANÁLISE DE ERROS E DIFICULDADES EM TAREFAS NA 8<sup>a</sup>  
CLASSE NO 1º CICLO DO ENSINO SECUNDÁRIO GERAL EM  
UMA ESCOLA DE QUELIMANE – MOÇAMBIQUE**

Dissertação apresentada à Universidade Estadual de Londrina - UEL, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre, em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Angela Marta Pereira das Dores Savioli

Londrina  
2023

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

S471u Semente, Ezequiel Elias Forma.

Uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem auxiliando o reconhecimento de funções por meio de representações: análise de erros e dificuldades em tarefas na 8ª classe no 1º ciclo do Ensino Secundário Geral em uma Escola de Quelimane – Moçambique / Ezequiel Elias Forma Semente. - Londrina, 2023. 117 f.

Orientador: Angela Marta Pereira das Dores Savioli.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2023.

Inclui bibliografia.

1. Funções - Tese. 2. Trajetória Hipotética de Aprendizagem - Tese. 3. Ensino da Matemática - Tese. 4. Erros e Dificuldades - Tese. I. Savioli, Angela Marta Pereira das Dores. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 51

EZEQUIEL ELIAS FORMA SEMENTE

**UMA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM AUXILIANDO O  
RECONHECIMENTO DE FUNÇÕES POR MEIO DE REPRESENTAÇÕES:  
ANÁLISE DE ERROS E DIFICULDADES EM TAREFAS NA 8ª CLASSE NO  
1º CICLO DO ENSINO SECUNDÁRIO GERAL EM UMA ESCOLA DE  
QUELIMANE – MOÇAMBIQUE**

Dissertação apresentada à Universidade Estadual de Londrina - UEL, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre, em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Profª Drª Angela Marta Pereira das Dores Savioli  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

---

Prof. Dr. Osvaldo Inarejos Filho  
Universidade Estadual de Londrina–UEL

---

Prof. Dr. Geraldo Aparecido Polegatti  
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia  
de Mato Grosso – IFMT

Londrina, 16 de outubro de 2023.

## **AGRADECIMENTOS**

À Deus pela existência, meu refúgio em todos os momentos e protetor nessa trajetória da vida estudantil. Aos meus pais Elias Forma Semente e Mariazinha Mureve por terem me gerado e fazerem parte dos meus progressos.

À minha família, minha esposa Celestina Henriques Rafael Mouzinho, que sempre prestou o apoio necessário para que a minha formação fosse possível, e a meus filhos, em especial a minha caçula Ezelice, que tanto chorou pela minha ausência e que constituiu fonte de inspiração e vontade de perseguir este percurso, motivo de produção acelerada desta Dissertação. A estimada “Mãe”, minha orientadora Professora Doutora Angela Marta Pereira das Dores Savioli, que aceitou me receber antes de ter tido contato comigo. Estou grato pela correção cuidadosa da minha produção acadêmica, pela compreensão, liberdade e autonomia que concede para a construção de uma trajetória pessoal e singular. Agradeço por ter permitido esse contato, um momento que despertou em mim a verdadeira forma de fazer e produzir a ciência. Obrigado do fundo do coração, Mae! Às/aos Professores do PECEM e colegas do grupo de pesquisa GEPPMat, pela recepção e por ter me ajudado a dar os primeiros passos na construção desta pesquisa. Os meus agradecimentos vão aos membros da banca Examinadora, Doutor Osvaldo Inarejos Filho, Doutor Geraldo Aparecido Polegatti, Professora Doutora Mariany Layne de Souza e Professora Doutora Michelle Andrade Klaiber, que contribuíram de forma didática para a melhora da qualidade deste trabalho e aos colegas do grupo de estudo, Mariza, Ana Carolina, Osvaldo, Gabriela, António e Christian, pela oportunidade de convivência acadêmica, pelas trocas e aprendizado nesse processo. Agradeço à coordenação do programa, liderada pela Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Fabiele Cristiane Dias Broietti, Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Mariana A. Bologna Soares de Andrade, pela atenção e preocupação por mim, na ajuda prestada para ultrapassar os momentos difíceis durante este processo longe da minha família. Os meus agradecimentos vão em direção à Universidade Licungo pela oportunidade que me concedeu mesmo com as dificuldades financeiras que enfrenta. Os agradecimentos são extensivos à direção da Escola Secundária Geral do Sangarivera e o professor Madeira, pela compreensão e apoio no momento do trabalho com estudantes naquela escola.

Para todos que direta e indiretamente me apoiaram vão os meus agradecimentos.

*Á todos vocês o meu muito obrigado e Deus vos abençoe*

SEMENTE, Ezequiel Elias Forma. **Uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem auxiliando o reconhecimento de funções por meio de representações: análise de erros e dificuldades em tarefas na 8ª classe no 1º ciclo do Ensino Secundário Geral de uma Escola de Quelimane - Moçambique.** 2023. 117f. Dissertação de mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática — Universidade Estadual de Londrina, Londrina, ano de 2023.

## RESUMO

Este estudo, de caráter descritivo com uma abordagem qualitativa, analisa as representações de funções por diagramas de Venn-Euler e de gráficos e a elaboração de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem como um meio auxiliar no processo de ensino do conceito de funções. O objetivo da pesquisa foi verificar erros e dificuldades de estudantes, a respeito das formas de representação de funções em diagramas e gráficos, na 8ª classe do Ensino Secundário Geral de Quelimane, Moçambique. O programa de ensino e o caderno de atividades mereceram um destaque. Os dados foram coletados a partir da aplicação de tarefas diagnósticas e de tarefas pós-aplicação de uma oficina; além disso, foram analisadas falas dos estudantes produzidas durante a oficina. Foi desenvolvida uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem ampliada para auxiliar no ensino e aprendizagem do conceito de funções. O estudo foi realizado com uma turma de 40 alunos da 8ª classe no 1º ciclo do Ensino Secundário Geral em uma Escola Secundaria Geral de Quelimane. Deste modo, conclui-se que os estudantes, na resolução de tarefas diagnósticas, cometeram erros conceituais, de definição, de associação incorreta de fatos, erro estratégico e de linguagem. Com o desenvolvimento das atividades propostas pela oficina, verificou-se melhora nas tarefas com a redução dos erros, prevalecendo, pós-aplicação das tarefas, os erros cometidos por equívocos, de linguagem e de associação incorreta de fatos.

**Palavras-chave:** Funções, Trajetória Hipotética de Aprendizagem, Ensino da Matemática, Erros e Dificuldades.

SEMENTE, Ezequiel Elias Forma. **A Hypothetical Learning Trajectory helping to recognize functions through representations: analysis of errors and difficulties in tasks in the 8th grade in the 1st cycle of General Secondary Education at a School in Quelimane-Mozambique.** 2023. 117f. Master's thesis in Science Teaching and Mathematics Education – State University of Londrina, Londrina, year 2023.

### **ABSTRACT**

This study, of a descriptive nature with a qualitative approach, analyzes the representations of functions using Venn-Euler diagrams and graphs and the elaboration of a Hypothetical Learning Trajectory as an auxiliary means in the process of teaching the concept of functions. The objective of the research was to verify students' errors and difficulties, regarding the ways of representing functions in diagrams and graphs, in the 8th grade of General Secondary Education in Quelimane, Mozambique. The teaching program and activity book were highlighted. Data were collected from the application of diagnostic tasks and post-application tasks in a workshop; in addition, student speeches produced during the workshop were analyzed. An expanded Hypothetical Learning Trajectory was developed to assist in teaching and learning the concept of functions. The study was carried out with a class of 40 students from the 8th grade in the 1st cycle of General Secondary Education at a General Secondary School in Quelimane. Therefore, it is concluded that the students, when solving diagnostic tasks, made conceptual, definitional, incorrect association of facts, strategic and language errors. With the development of the activities proposed by the workshop, there was an improvement in the tasks with a reduction in errors, with errors made due to mistakes, language and incorrect association of facts prevailing after the tasks were applied.

**Keywords:** Functions, Hypothetical Learning Trajectory, Teaching Mathematics, Errors and Difficulties.

## LISTA DE QUADROS

<b>Quadro 1</b> - Conteúdos do programa de Matemática do 1º ciclo.....	21
<b>Quadro 2</b> - Descrição do caderno de atividades de Matemática sobre o tratamento do conceito de funções.....	27
<b>Quadro 3</b> - Classificação de erros de acordo com Radatz (1979).....	32
<b>Quadro 4</b> - Tipos de erros utilizados análise das produções dos estudantes.....	40
<b>Quadro 5</b> - Ações que representam os três pontos de vista da THA.....	48
<b>Quadro 6</b> - Análise das respostas da Tarefa um da tarefa diagnóstica.....	67
<b>Quadro 7</b> - Análise das respostas da tarefa dois das Tarefas Diagnóstica.....	70
<b>Quadro 8</b> - Resolução de tarefa da alínea a) e b) da oficina.....	72
<b>Quadro 9</b> - Resolução da tarefa dois da parte II.....	72
<b>Quadro 10</b> - Análise das respostas da tarefa um do TP1AO.....	77
<b>Quadro 11</b> - Análise das respostas da tarefa dois do TPAO.....	82
<b>Quadro 12</b> - Análise das respostas da tarefa três do TPAO.....	84
<b>Quadro 13</b> - Representação do tipo erros cometidos nas tarefas diagnósticas e nas tarefas pós-aplicação da oficina.....	84
<b>Quadro 14</b> - Análise comparada da evolução dos Estudantes nas tarefas diagnósticas e tarefas pós-aplicação da oficina.....	85

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1</b> - Comparação de porcentagens das tarefas diagnósticas com as das tarefas pós-aplicação da oficina.....	62
--	----

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1</b> - Localização geográfica de Moçambique no continente africano.....	16
<b>Figure 2</b> - Imagem da Cidade de Quelimane.....	17
<b>Figura 3</b> - Representação de uma relação por diagrama de Venn-Euler.....	28
<b>Figura4</b> -Representação de correspondências por diagrama de Venn-Euler.....	30
<b>Figura 5</b> -Representação de funções por meio de gráficos.....	31
<b>Figura 6</b> -Modelo de análise didática dos erros (MADE).....	40
<b>Figura7</b> -Etapas do processo instrucional utilizando a THA como recurso didático.....	44
<b>Figura 8</b> -Ciclo de Ensino de Matemática.....	46
<b>Figura 9</b> -Ciclo de ações na sala de aula no ensino do conceito de funções.....	50
<b>Figura 10- Figura 10:</b> Professor explicando o conceito de funções.....	59
<b>Figura 11</b> - Aluno apresentando a resolução da tarefa um.....	60
<b>Figura 12</b> – Registro do estudante A23.....	64
<b>Figura 13</b> - Resposta do estudante A4.....	64
<b>Figura 14</b> - Resposta do estudante A27.....	65
<b>Figura 15</b> - Resposta do estudante A31.....	65
<b>Figura 16</b> - Resposta do estudante A33.....	66
<b>Figura 17</b> - Resposta do estudante A35.....	66
<b>Figura 18</b> - Registro escrito do estudante A36.....	66
<b>Figura 19</b> - Resposta do estudante A37.....	67
<b>Figura 20</b> - Resposta do estudante A23.....	68
<b>Figura 21</b> - Resposta do estudante A4.....	68
<b>Figura 22</b> - Resposta do estudante A27.....	68
<b>Figura 23</b> - Resposta do estudante A31.....	69
<b>Figura 24</b> - Resposta do estudante A33.....	69
<b>Figura 25</b> - Resposta do estudante A35.....	69
<b>Figura 26</b> - Resposta do estudante A36.....	70
<b>Figura 27</b> - Resposta do estudante A37.....	70
<b>Figura 28</b> - Resposta do Aluno A23.....	73
<b>Figura 29</b> - Resposta do aluno A4.....	74
<b>Figura 30</b> - Resposta do estudante A27.....	74
<b>Figura 31</b> - Resposta do estudante A31.....	75
<b>Figura 32</b> - Resposta do estudante A33.....	75
<b>Figura 33</b> - Resposta do estudante A35.....	76
<b>Figura 34</b> - Resposta do estudante A36.....	76
<b>Figura 35</b> - Resposta do estudante A37.....	76
<b>Figura 36</b> - Resposta do Aluno A23.....	78
<b>Figura 37</b> - Resposta do Aluno A4.....	78
<b>Figura 38</b> - Resposta do Aluno A27.....	79
<b>Figura 39</b> - Resposta do Aluno A31.....	79
<b>Figura 40</b> - Resposta do Aluno A33.....	79
<b>Figura 41</b> - Resposta do Aluno A35.....	80
<b>Figura 42</b> - Resposta do Aluno A36.....	80
<b>Figura 43</b> - Resposta do Aluno A37.....	81
<b>Figura 44</b> - Resposta do Aluno 23.....	81

<b>Figura 45</b> - Resposta do aluno A4.....	82
<b>Figura 46</b> - Resposta do aluno A27.....	82
<b>Figura 47</b> - Resposta do aluno A31.....	82
<b>Figura 48</b> - Registro do aluno A33.....	83
<b>Figura 49</b> - Resposta do aluno A35.....	83
<b>Figura 50</b> - Resposta do aluno A36.....	83
<b>Figura 51</b> - Resposta do aluno A37.....	84
<b>Figura 52</b> - Esquema da Trajetória Hipotética de Aprendizagem ampliada para aprendizagem do conceito de função.....	97

## LISTA DE GRÁFICOS

<b>Gráfico 1-</b> Não representa função.....	96
<b>Gráfico 2-</b> Representa função.....	96

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

Est	Estudante
INE	Instituto Nacional de Estatística
INDE	Instituto Nacional de Desenvolvimento de Educação
MADE	Modelo de análise didática de erros
MINED	Ministério de Educação
SNE	Sistema Nacional de Educação
TD	Tarefa diagnóstica
THA	Trajetória Hipotética de Aprendizagem
TPAO	Tarefa pós-aplicação da oficina
TO1PI	Tarefa um da oficina parte um
TO2PI	Tarefa dois da oficina parte um
TO3PI	Tarefa três da oficina parte um
TO1PII	Tarefa um da oficina parte dois
TO2PII	Tarefa dois da oficina parte dois
Prof	Professor

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	14
CAPÍTULO I.....	16
1.1 Caraterísticas sócio demográficas de Moçambique .....	16
1.2 Educação em Moçambique .....	17
1.3 Ensino da Matemática no 1º ciclo do Ensino Secundário geral em Moçambique .....	19
1.4 Como é tratado o conceito de funções no programa de ensino de Matemática – 8ª Classe?.....	21
1.5 Como o caderno de atividades de Matemática – 8ª Classe trata o conceito de função?.....	25
CAPÍTULO II.....	29
2.1 Funções e História de funções .....	29
2.2 Formas de representação de Funções .....	30
2.3 Erros e Dificuldades na aprendizagem do conceito de funções .....	31
2.4 Análise de erro e sua importância no ensino e aprendizagem .....	38
CAPÍTULO III.....	42
3.1 Procedimentos metodológicos.....	42
3.1.1 Recolha de dados .....	43
3.1.2 Tarefas diagnósticas .....	43
3.2 Trajetória Hipotética de Aprendizagem.....	45
3.3 Nossa Trajetória Hipotética de Aprendizagem para o reconhecimento de funções na 8ª classe .....	49
3.3.1 Ações do professor .....	51
3.3.2 Ações dos alunos .....	52
3.4 Início da Trajetória Hipotética de Aprendizagem .....	52
3.4.1 Parte I: Reconhecimento de funções por meio de Diagrama de Venn-Euler .	53
3.4.2 Parte I: Reconhecimento de funções por meio de gráficos .....	53
3.5 Descrição do desenvolvimento da oficina.....	56
3.5.1 Tarefas da oficina (TO).....	56
3.5.2 Oficina.....	59
CAPÍTULO IV .....	63
4. Apresentação, Discussão e Interpretação de Resultados .....	62
4.1 Descrição das fases da análise de dados .....	62
4.1.1 Descrição das respostas dos estudantes nas tarefas diagnóstica (TD).....	63
4.1.2 Análise das respostas da tarefa um .....	64

4.1.3 Análise das respostas da tarefa dois da Tarefas Diagnósticas .....	67
4.2 Análise das atividades da oficina.....	71
4.3 Análise de respostas de tarefas pós-aplicação da oficina .....	73
4.3.1 Análise das respostas da tarefa um .....	74
4.3.2 Análise das respostas da tarefa dois .....	78
4.3.3 Análise da Tarefa Três após aplicação da oficina.....	81
4.4 Conclusão das análises.....	89
CAPÍTULO V .....	91
5.1 Teoria Hipótetica de Aprendizagem ampliada para o ensino e aprendizagem do conceito de funções.....	91
5.1.1 Parte I: Reconhecimento de funções a partir da representação por diagrama de Venn-Euler .....	91
5.1.2 Parte II: Reconhecimento de funções a partir de representação gráfica .....	95
CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	99
REFERÊNCIAS .....	101
APÊNDICES.....	111
Apêndice A - Tarefas Diagnósticas.....	112
Apêndice B - Tarefas da oficina (TO) .....	113
Apêndice C - Tarefas após aplicação da oficina.....	115

## INTRODUÇÃO

A partir de conjuntos e suas relações, temos a ideia de função, que pode ser representada de várias formas, como algébrica, gráfica, por diagramas, por uma lei, entre outras. Algumas dessas representações são mais conhecidas por aparecerem em livros didáticos ou trabalhadas por professores em suas aulas, como a algébrica e a gráfica. Contudo, quando se trata do conceito de função, faz-se necessário introduzir outras formas de representação de função, como em diagramas, de acordo com Ribas e Monteiro (2014). É a partir dessa reflexão que surgiu a indagação deste trabalho.

Nesse contexto, estamos interessados em analisar, nesta dissertação, erros e dificuldades de estudantes, a respeito das formas de representação de funções em diagramas e gráficos, na 8ª classe do Ensino Secundário Geral de uma Escola de Quelimane, Moçambique, considerando ser nesse o nível de escolaridade em que esse conceito se apresenta (Moçambique, 2010).

Para tanto, utilizaremos tarefas diagnósticas com o objetivo de identificar erros e dificuldades para auxiliar na produção de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) gerando desenvolvimento da oficina e tarefas pós-aplicação da oficina para verificar possíveis erros e dificuldades de estudantes com as representações de funções por diagrama Venn-Euler e gráfica. Além disso, apresentaremos o sistema de ensino de Moçambique, bem como o programa de ensino da classe estudada e o caderno de atividades utilizado pelos estudantes. Como objetivos específicos, esperamos atingir :

- ✓ Avaliar o entendimento de uma turma de 8ª classe de uma escola de Quelimane a respeito de representações de funções por gráficos e diagramas a partir de uma tarefa diagnóstica;
- ✓ Analisar o caderno de atividades de matemática utilizado pelos estudantes, bem como o programa de ensino;
- ✓ Elaborar uma THA para auxiliar em uma oficina;
- ✓ Aplicar uma oficina contemplando diagramas de Venn-Euler e gráficos de funções;

- ✓ Reaplicar a tarefa diagnóstica, visando analisar os erros e dificuldades dos estudantes após a oficina e aperfeiçoar a Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA);
- ✓ Analisar a produção (escrita, oral, etc.) dos alunos obtida a partir da aplicação da oficina, verificando possíveis erros e dificuldades.

Diante dos resultados objetivos essa dissertação está estruturada em cinco capítulos. O Capítulo I trataremos da localização de Moçambique e apresentaremos breves comentários a respeito do currículo e do ensino Secundário Geral em Moçambique.

No capítulo II o conceito de função será apresentado, bem como algumas de suas representações. Além disso, contemplará uma discussão a respeito de erros e dificuldades de estudantes em relação à Matemática, mais especificamente, quanto ao tema funções.

No capítulo III trará os procedimentos metodológicos, contemplando as tarefas diagnósticas, a Trajetória Hipotética de Aprendizagem e a oficina aplicada aos estudantes.

No capítulo IV teremos apresentação, discussão, interpretação de resultados obtidos pós-aplicação da oficina e a comparação com as tarefas diagnósticas.

No capítulo V apresentamos a Trajetória Hipotética de Aprendizagem ampliada para o ensino e aprendizagem de funções.

## CAPÍTULO I

Neste capítulo vamos apresentar a localização de Moçambique no continente africano e descrever o sistema de Educação e o ensino de Matemática no 1º ciclo do Ensino Secundário Geral.

### 1.1 Caraterísticas sócio demográficas de Moçambique

De acordo com Moçambique (2011), o território moçambicano possui 799.380 Km<sup>2</sup> e situa-se ao sudeste da África, conforme representado na Figura 1 a seguir.

**Figura 1** - Localização geográfica de Moçambique no continente africano



**Fonte:** CENACARTE (2017)<sup>1</sup>

Segundo Moçambique (2017), a capital de Moçambique é Maputo e, de acordo com o censo de 2017, estima-se em cerca de 27.909.798 habitantes. A sua população é falante de várias línguas oriundas das línguas bantas e Língua Portuguesa e esta última é utilizada como língua oficial ou língua de unidade nacional. De acordo Moçambique (2017), Quelimane é “a capital e a maior cidade da Província da Zambézia na região central de Moçambique”. Está localizada a mais ou menos 20 quilómetros do Oceano Índico, sendo uma cidade portuária com a indústria pesqueira uma de suas principais atividades econômicas.

---

<sup>1</sup> Centro Nacional de Cartografia e Teledeteção. Instituição Pública subordinada ao Ministério de Agricultura e Seguramça Alimentar.

**Figura 2** - Imagem da Cidade de Quelimane



Fonte: [https://macua.blogs.com/moambique\\_para\\_todos/2009/08/quelimane-completa-67-anos.html](https://macua.blogs.com/moambique_para_todos/2009/08/quelimane-completa-67-anos.html) (Acessado em 17.07.2023)

A UniLicungo (Universidade Licungo) situa-se em Quelimane e é uma das instituições de ensino superior públicas do país, de acordo com Moçambique (2019). Na seção que se segue vamos descrever o sistema de educação em Moçambique.

## 1.2 Educação em Moçambique

Para fazermos uma abordagem da educação em Moçambique, é importante falarmos do papel do Estado moçambicano no campo da educação que ganhou avanços na ampliação da rede escolar, alcançando um considerável número da população com acesso à educação, segundo o Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (PNUD, 2000), que atua em Moçambique desde 1976. Dentre os avanços deste setor ocorridos em Moçambique com a Proclamação da Independência (25/06/1975), houve a diminuição do analfabetismo que apresentava índices muito altos desde o tempo da ocupação colonial (Itanquê; Subuhana, 2018).

Segundo Frederico (2012), entre a década de 1980 e o início da década de 1990, Moçambique teve um período político instável que levou a um êxodo rural, refletindo-se de maneira negativa no desenvolvimento da rede escolar. A autora ainda afirma que “este período foi caracterizado por uma

estagnação do sistema educativo devido a destruição do material, desarticulação e desintegração da vida social e muitas das escolas não eram viáveis nem possíveis do ponto de vista material” (PNUD, 2000, p.38-40)

De acordo com Pessuro (2022, p. 6),

a Lei n. 4/83 do SNE é a primeira lei do país pós-Independência, cria o SNE com a sua perspectiva de buscar a “criação do Homem novo” (MOÇAMBIQUE, 1983); a formação dessa nova pessoa está inserida nos ideais do marxismoleninismo voltados para a construção de uma sociedade socialista (Moçambique, 1983).

Segundo o mesmo autor, com “as mudanças nos campos políticos, social, econômico e cultural, que culminaram na Emenda à Constituição de 1990, a Secretaria de Educação foi obrigada a ajustar sua filosofia na perspectiva do ensino e da organização.” (P.6) No entanto, foi preciso modificar “o sistema educacional (MOÇAMBIQUE, 1983) o que levou à aprovação da Lei n. 6/92 (MOÇAMBIQUE, 1992), revogando outras anteriores e, dando novos rumos ao Sistema Nacional de Educação (SNE) conforme a realidade econômica e social no país” (Pessuro, 2022, p.6).

De acordo com o mesmo autor, em 2018, foi criada a Lei de Revisão do Sistema Nacional de Educação (Moçambique, 2018) promulgada em substituição à Lei n. 6/92 (Pessuro, 2022, p.7).

Pessuro (2022, p. 7) ainda afirma que, depois de 2018, o SNE “se subdivide em seis subsistemas: de Educação Pré-Escolar; de Educação Geral; de Educação de Adultos; de Educação Profissional; de Educação e Formação de Professores; de Ensino Superior.” Assim, teve-se a possibilidade de mudanças do plano curricular para corresponder às necessidades da escola, desde que não entre em desacordo com os princípios, objetivos e concepção do SNE.

Conforme esta Lei, segundo Pessuro, 2022, o processo educativo deve seguir alguns princípios pedagógicos que tratam do desenvolvimento de capacidades e iniciativa criadora, bem como liberdade de trabalhar com a cultura e o saber, viver em sociedade de maneira igual, com inclusão e equidade, e oportunidades para estudantes com necessidades especiais e uma conexão entre comunidade e escola.

Na Lei n.º 18/2018, de 28 de Dezembro, o Ensino Secundário é o nível pós-primário em que se ampliam e aprofundam os conhecimentos, as habilidades, os valores e as atitudes para o aluno continuar os seus estudos,

inserir-se na vida social e no mercado do trabalho.

Desse modo, Pessuro (2022, p. 7) afirma que essa recente lei alterou a parte educacional, com o estabelecimento de um ensino público “... da 1ª para a 7ª classe e estendendo-a para a 9ª classe. O ensino primário completo é concluído na 6ª classe e o ensino Secundário Geral inicia na 7ª classe e estende-se por cinco anos até a 12ª classe”.

### 1.3 Ensino da Matemática no 1º ciclo do Ensino Secundário geral em Moçambique

Moçambique (2018, p.9) destaca que o “1º Ciclo do ES visa aprofundar as competências desenvolvidas no Ensino Primário, preparar os alunos a fim de continuar os estudos no 2º Ciclo”. Apesar disso, o ensino e a aprendizagem da Matemática, ao longo dos vários níveis de ensino em Moçambique, é alvo de muita preocupação crescente da sociedade, pois apresenta elevados níveis de reprovação. Neste mesmo contexto o estudo desenvolvido pelos autores Deixa, Passos e Salvi (2013, p.2) refere que:

O Ensino da Matemática nas nossas escolas é, hoje em dia, caracterizado por um baixo desempenho. Esta situação tem levado as autoridades moçambicanas a imprimir uma maior dinâmica na revisão curricular bem como na capacitação de docentes em matérias de metodologia de ensino. Apesar desse esforço, a situação ainda continua alarmante (Deixa, Passos e Salvi (2013, p.2)

Para Banyankindagiye (2012; p. 100-101) “em Moçambique, os alunos moçambicanos não reprovam no momento da realização dos exames, mas sim, em cada momento em que não beneficiam do apoio necessário para ultrapassar as suas dificuldades”, ainda neste mesmo estudo afirma que “[...] para erradicar o insucesso escolar, em geral, e reduzir as taxas de reprovações, em particular nas escolas moçambicanas, seria o desenvolvimento de um programa de apoio e acompanhamento escolar que orienta as actividades dos professores na sala de aulas” (Banyankindagiye (2012; p.99).

Neste trabalho focalizamos o estudo do conceito de funções, pois possui aplicabilidade em várias situações em geral relacionadas ao ensino da Matemática e em outras áreas do conhecimento. Por essa razão, consideramos importante trazer para a sala de aula recursos didáticos com tarefas que contenham questões que auxiliem o estudante a reconhecer funções e entender

o seu conceito.

Acreditamos que um dos grandes obstáculos da aprendizagem da Matemática é a estruturação dos conteúdos e a ligação do conceito com as diversas representações, bem como a sua abordagem de forma linear e rígida, de acordo com Ribas e Monteiro (2014). Isto é, os conteúdos que constituem a matriz curricular do 1º ciclo do Ensino Secundário Geral de Moçambique são tratados em sala de aula sem qualquer alteração da ordem em que eles estão elencados. Todavia estes são introduzidos aos estudantes da forma como o programa de ensino orienta (como será visto mais adiante), o que não permite aos estudantes terem a oportunidade de explorar os conteúdos programáticos na sua vida quotidiana.

O programa de ensino estabelece que é necessário garantir a sistematização de conhecimentos por meio da exercitação, quer dizer, “dentro de cada unidade e ao longo da classe e do ciclo, deve conseguir-se a integração das diferentes áreas da Matemática como a álgebra, a aritmética e a geometria” (Moçambique, 2010; p. 10).

Além disso, analisando os estudos desenvolvidos sobre o insucesso e a qualidade do Sistema de Educação em Moçambique destacados por Macamo (2015); Zucula (2021, p.190), o ensino do conceito de funções em Moçambique, em particular nas escolas da cidade de Quelimane, é, geralmente, realizado de maneira analítica, ou seja, por meio da lei de formação e exercícios de fixação de forma mecânica sem observar aspectos que podem facilitar a sua aprendizagem, e isso faz com que de acordo com Lima (2012), os estudantes tenham dificuldades na sua abordagem não permitindo a interligação com outros conteúdos, criando desgostos pela matemática e o que condiciona construção de padrões.

Conforme aponta a pesquisa de Gois e Silva (2022, p.424), “um dos objetos matemáticos que os alunos apresentam dificuldades é no estudo de funções”.

Neste contexto Zucula (2021, p.190) ressalta que:

[...] a preocupação sobre a qualidade na educação, a nível global, em particular, em Moçambique continua a ser agenda de destaque por parte do Governo, dos profissionais do campo da educação, dos pesquisadores do campo da educação, dos académicos, dos movimentos sociais, pais, estudantes e da sociedade em geral. Esses

atores têm-se debruçado sobre essa problemática, no sentido de entender seu significado e do alcance da mesma.

A presente pesquisa se justifica pelo fato de que,

“[...] os resultados de avaliação nacionais, isto é, exames nacionais que reafirmam o baixo rendimento dos alunos, consolidando a crença de que a escola moçambicana não oferece uma educação de qualidade à população que a procura” (ZUCULA, 2021, p.191).

Como se vê, de acordo com estudos feitos pelos autores, o ensino em Moçambique ainda apresenta deficiências no que diz respeito ao processo de ensino e aprendizagem e carece de trabalhos com essa temática.

#### 1.4 Como é tratado o conceito de Funções no programa de ensino de Matemática – 8ª Classe?

O estudo de funções de modo formal é abordado pela primeira vez na 8ª classe do 1º ciclo do Secundário Geral em Moçambique. Moçambique (2010) orienta começar fazendo a revisão sobre Sistema de Coordenadas Cartesianas; identificação das coordenadas de um ponto no Sistema de Coordenadas Cartesianas; proporcionalidade direta, inverso e constante de proporcionalidade, recomendando-se que seja feita por meio da exercitação variada.

O programa de ensino de Matemática – 8ª Classe destaca que a “noção de função é o principal instrumento para a valorização de fenómenos e factos da vida quotidiana e das Ciências” (Moçambique 2010, p.41).

Neste aspecto, quadro que segue apresenta a distribuição dos conteúdos por trimestres.

**Quadro 1** - Conteúdos do programa de Matemática do 1º ciclo

Trimestre	Unidades temáticas por classe		
	8ª	9ª	10ª
1º	Números racionais; Equações lineares;	Números reais e Radiciação; Inequações lineares e sistemas de inequações lineares com uma variável; Noção de monômios e polinômios;	Teoria de conjunto Polinômios Função quadrática; Inequação quadrática;

2º	Proporcionalidade e funções lineares Sistema de duas equações lineares a duas incógnitas	Equação quadrática Quadriláteros; Semelhanças de triângulos;	Função exponencial Equação e inequação exponencial Logaritmo e Função logarítmica Equação e inequações Logarítmica
3º	Circunferências e Círculos Congruência de triângulos e Teorema de Pitágoras	Noções básicas de estatística Cálculo de áreas e volumes de Sólidos geométricos	Trigonometria Estatística

**Fonte:** Programa Curricular de Moçambique (Moçambique, 2010, p.13)

De acordo com o Programa de Ensino de Moçambique (2010, p. 13), têm os seguintes objetivos do ensino de funções a considerar: “Interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões e símbolos); Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica (fórmulas, símbolos, tabelas, diagramas, gráficos, etc.) e vice-versa”. Com base nesses objetivos, recomenda-se que a correspondência deva ser explicada partindo de situações concretas como

Há uma correspondência entre a sementeira e a chuva; O poder de compra está relacionado com a inflação; A vontade de comer se corresponde com a fome; Há uma correspondência entre o nome de cada aluno e seu apelido (Moçambique, 2010, p.13-14).

Além disso, é vinculado ao programa que os diagramas de Venn-Euler são importantes para ilustrar que nem todas as correspondências são funções. Por isso, o estudante deve reconhecer uma função de uma correspondência qualquer e que uma função de A em B é um tipo especial de correspondência de A em B, em que todo o elemento do conjunto A tem apenas um único correspondente em B. Sendo assim, o professor poderá utilizar a linguagem simbólica própria para ilustrar esta definição.

No tratamento dos conceitos de domínio, imagem e contradomínio, sugerimos que o professor, por meio de funções representadas em diagramas de Venn-Euler, conduza os alunos a identificar o conjunto de partida, o conjunto de chegada, o conjunto dos objetos (domínio) e o conjunto imagem (contradomínio).

Como podemos ver, no quadro de conteúdos (Quadro 1), não

aparece a noção de função de forma geral, mas sim começa por tratar função polinomial. Este pode ser um dos fatores que faz com que os estudantes tenham dificuldades no estudo de função.

Segundo Barreto (2008, p.2), “O conceito de função envolve concepções diversas e múltiplas representações, fazendo-se necessário, compreender o sentido que este conceito pode assumir em diferentes contextos”.

Ponte *et al.* (1998, p.173) consideram que o “raciocínio matemático exige o trabalho intensivo com representações externas, sejam elas símbolos matemáticos, diagramas, gráficos”. E a utilização de representações auxilia a comunicação, se estabelecermos alguma conexão entre a manipulação simbólica e os significados associados aos conceitos.

As representações matemáticas relacionam-se com o “raciocínio matemático devido ao seu importante papel no ensino e na aprendizagem da Matemática e, conseqüentemente, no desenvolvimento e compreensão dos processos de raciocínio dos alunos” (Henrique; Ponte 2014, p.277).

Segundo Viseu *et al.*, (2022, p.190),

As representações matemáticas relacionam-se com o “raciocínio matemático devido ao seu importante papel no ensino e na aprendizagem da Matemática e, conseqüentemente, no desenvolvimento e compreensão dos processos de raciocínio dos alunos” (Henriques; Ponte, 2014, p. 277). Ponte *et al.* (1998) consideram que o “raciocínio matemático exige o trabalho intensivo com representações externas, sejam elas símbolos matemáticos, diagramas, gráficos” (p. 173). O uso destas representações facilita o processo de comunicação, se houver interligação da manipulação simbólica com os significados que associamos aos conceitos. Os conceitos matemáticos são também trabalhados mentalmente, utilizando as representações internas dos conceitos (Ponte *et al.*, 1998). Para estes autores, as “capacidades de representar os conceitos matemáticos e de relacionar entre si as diversas representações de um mesmo conceito estão associadas ao pensamento matemático avançado” (p. 173). Contudo, os alunos têm dificuldade em estabelecer conexões entre diferentes representações de funções, na interpretação de gráficos e na manipulação de símbolos (Elia *et al.*, 2007). Segundo estes autores e segundo (Gagatsis e Elia 2005), cada representação oferece informação sobre aspectos particulares do conceito em estudo sem o descrever completamente. Viseu *et al.*, (2022, p.190).

Em contra partida, os estudantes, ao combinar ligações enfrentam dificuldade em distintas representações de funções, na utilização de símbolos e interpretação de gráficos (Elia *et al.*, 2007).

A ideia de utilização de representações no processo de ensino e aprendizagem é de relevada importância na construção de conhecimentos,

ficando claro que, ao se estudar funções é necessário que se estabeleça uma relação entre o fenômeno e a sua representação, por estas serem um elemento facilitador no conhecimento, compreender e analisar a realidades fenomenais que ocorrem no dia a dia das pessoas ou mesmo do estudante.

O processo de representação possui três tipos principais: as representações simbólicas, as representações mentais e a visualização (Dreyfus, 1991). Sousa e Almeida (2010, p.3) de acordo com Dreyfus (1991) afirmam que “O processo de visualização está ligado à visualização de artefatos concretos, como, por exemplo, gráficos, diagramas e tabelas”. Além disso,

Um outro aspecto tem a ver com a representação dos conceitos. É importante que os alunos sejam capazes de lidar com os conceitos matemáticos em diversos tipos de representação (numérica, algébrica, geométrica, esquemática, verbal, etc.). Isso nem sempre acontece, privilegiando-se muitas vezes as representações simbólicas em detrimento de todas as outras (Ponte *et al.*, 1998,104).

De acordo com Sousa e Almeida (2010, p.3), o “processo visualização está ligado à visualização de artefatos concretos, como, por exemplo, gráficos, diagramas e tabelas.” Neste contexto, para a aprendizagem de qualquer conteúdo é importante que o estudante esteja em condições de sintetizar a informação que segundo Dreyfus (1991, p.35) “significa compor ou combinar partes de tal forma que elas formem um todo, uma entidade”.

Ainda conforme Sousa e Almeida (2010, p.3), o “processo de mudar de uma representação para outra está associado à necessidade das pessoas utilizarem representações mais eficientes em determinadas situações”. Além disso, as representações são um meio facilitador na interpretação, sistematização e compreensão de conceitos de uma proposição, e encaminham a explorar a apreensão do contexto e conduz a melhor forma de chegar a uma resposta esperada, bem como monitorizar e avaliar o processo da resolução de tarefas (Stylianou, 2010).

Duval (2017) afirma que cada uma das representações de funções destaca diferentes particularidades, que em conjunto contribuem para a formulação do conceito global de função, o que realça o papel da conversão entre diferentes representações na compreensão do conceito de função. As funções podem ser representadas de várias maneiras, como por diagrama de Venn-

Euler, tabela, gráfico e de forma analítica.

É de acordo com a perspectiva destes autores que neste estudo abordamos as representações de funções por meio de diagrama de Venn e de gráficos auxiliado por uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) para o reconhecimento de funções.

O que motivou a fazer este estudo foi o fato de termos constatado que o tratamento do conceito de funções no manual do aluno da 8ª classe de Moçambique dá maior primazia à representação analítica, ou seja, por meio da lei de formação, como se vê no quadro que segue, em detrimento de outras formas como a representação por diagramas de Venn-Euler e gráficos, o que contrasta com as orientações vinculadas no programa de ensino da mesma classe.

Além das preocupações levantadas por Zucula (2021), o pesquisador constatou que boa parte dos alunos, quando levados contato com o conceito de funções no âmbito da disciplina de matemática apresentam dificuldades na aprendizagem de funções, desde o início de sua abordagem, formalmente iniciada no 1º ciclo do Ensino Secundário Geral, estendendo-se até ao 2º ciclo em escolas moçambicanas.

Como forma de melhorar este quadro entendemos que recorrer a representações (diagramas de Venn-Euler e gráficos) como foco do processo didático pode contribuir para o reconhecimento de funções. Além disso, o interesse para estudo surge porque no dia-dia do aluno são várias as situações as quais podem ser interpretadas como funções, por exemplo, número de pães por comprar com o preço a pagar; o tempo de viagem do aluno de casa à escola.

1.5 Como o caderno de atividades de Matemática – 8ª Classe trata o conceito de função?

O caderno de atividades de Matemática é um livro didático utilizado por professores e discentes da 8ª classe do 1º ciclo do Ensino Secundário Geral e acreditamos ser relevante fazer uma análise, devido ao importante papel que este desempenha nessa classe no processo de ensino e aprendizagem. O manual escolar (caderno de atividades de Matemática) como um recurso didático na esfera educacional ajuda no ensino aprendizagem de

conteúdos.

Segundo Zucula (2021, p.190)

“Encontram-se a nível de sociedade várias vozes reclamando que a qualidade de ensino oferecido nas nossas escolas não é de desejar, pois, segundo eles, os alunos concluem ensino primário sem saber escrever, ler e fazer as primeiras quatro operações matemáticas”.

Essas reclamações a nível social fizeram com que ocorressem mudanças nas leis (lei n.4/83, lei n.6/92) e criação da lei n. 18/2018 que regulam o Sistema Nacional de Educação (SNE). Assim ficando o professor o indivíduo que possui o papel de maior destaque na condução do processo de ensino e aprendizagem devendo a ele, criação de meios de ensino que são um instrumento indispensável.

Caporrino (2010, p.3) afirma que

“Incorporar na prática, recursos alternativos valendo-se de materiais didáticos pedagógicos e tecnológicos poderá ser um caminho mais seguro e eficiente para a escola, uma vez que torna a prática pedagógica mais dinâmica, e a participação dos alunos mais ativa no processo”.

E de acordo com este autor, o uso de recursos pedagógicos promove uma aprendizagem de forma interativa dando oportunidade aos estudantes a desenvolverem as suas ideias.

Biehl (2009, p.1), afirma que

O livro didático exerce grande influência sobre o processo de ensino aprendizagem, na medida em que a partir dele o professor seleciona os conteúdos que serão ministrados e a maneira como serão abordado esses conteúdos.

De acordo com o autor, neste estudo destacamos o livro didático como elemento essencial pelo qual o professor deve ter em conta nas suas práticas, pois a partir do livro didático em que o professor deve se basear para definir estratégias e métodos de ensino com uma análise mais detalhada das tarefas a serem trabalhadas pelos estudantes.

Por sua vez Silva Junior (2007, p.17) destaca que

O livro didático destina-se a dois leitores: o professor e o aluno, em que o professor é o transmissor e/ou o mediador dos conteúdos que estão nesses livros, e o aluno é o receptor de tais conteúdos. É através desses livros que o aluno vai aprender construir e alterar significados, em relação a um padrão social, que a própria escola estabeleceu como

projeto de educação, quando da adoção desse livro didático para utilização na escola.

De acordo com estes autores (Biehl, 2009; Silva Junior, 2007) fica clara a importância que o manual escolar desempenha no processo de ensino e aprendizagem. Assim, com a missão que é incumbida ao professor de selecionar conteúdos, neste estudo vamos descrever o caderno de atividades para perceber como o conceito de função é abordado. O que igualmente, nos auxiliará na produção da nossa Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA).

Apesar do programa de ensino elencar os objetivos para o ensino do conceito de função que são: interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões e símbolos) e transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para a linguagem simbólica (fórmulas, símbolos, tabelas, diagramas, gráficos, etc.) (Moçambique, 2010). O manual escolar começa por tratar de proporcionalidades direta e inversa e em seguida introduz o estudo da função afim; e não utiliza as diversas maneiras de representações para ajudar os estudantes no reconhecimento de funções como o programa de ensino recomenda. A única representação que utiliza é por diagrama de Venn-Euler. O quadro 2 que segue descreve a maneira como o conceito de funções é apresentado no caderno de atividades de Matemática .

**Quadro 2** - Descrição do caderno de atividades de Matemática sobre o tratamento do conceito de funções

Utiliza a representação por diagrama de Venn?	Pouco
Utiliza a representação gráfica?	Não
Utiliza a representação verbal?	Não
Utiliza a representação analítica?	Sim
Dados tabelados?	Pouco
Como são os exemplos e as tarefas que se propõe no caderno de atividades?	Os exemplos são pouco claros, as tarefas não contemplam as diversas representações, as tarefas não proporcionam uma atuação reflexiva dos estudantes.

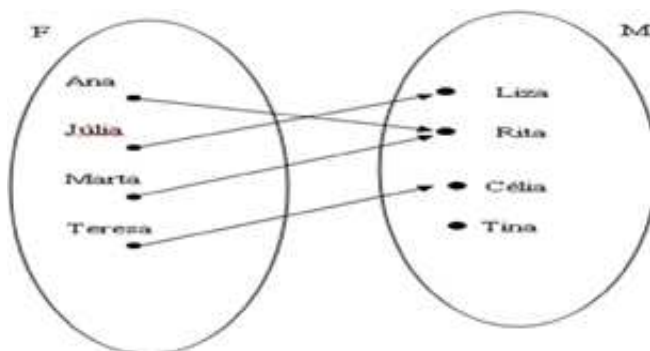
**Elaboração:** o autor

Garibotti (2019, p.11), de acordo com Ausubel (1963), afirma que, “é possível, ao professor, propor situações novas, diversificadas, de nível

adequado, que auxiliem na ampliação do repertório de esquemas dos estudantes, de modo que os conceitos vão ganhando significados progressivamente”.

O Caderno de atividades de Matemática começa por estudar a relação que se pode estabelecer entre elementos de dois conjuntos, como os representados pelos conjuntos  $F = \{ \text{Ana, Júlia, Marta, Teresa} \}$  e  $M = \{ \text{Liza, Rita, Célia, Tina} \}$  a relação de  $F$  para  $M$  “é filha de”. Com base nessa relação, podemos representar a relação num Diagrama de Venn-Euler como mostra a figura 3 a seguir.

**Figura 3** – Representação de uma relação por diagrama de Venn-Euler



**Fonte:** O meu caderno de actividades de Matemática – 8ª Classe, 2019.

Feita esta introdução por meio de diagramas de Venn-Euler, o Caderno apresenta a definição que se segue. “Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$  não vazios, chama-se função (ou aplicação) de  $A$  em  $B$ , representada por  $f: A \rightarrow B$ , a qualquer relação binária que associa a cada elemento de  $A$ , um único elemento de  $B$ ” (Langa; Chuquela, 2019, p. 14).

Para que essa definição tenha um melhor entendimento por parte dos alunos é importante que seja acompanhada de diferentes formas de representações de funções, as quais iremos apresentar no próximo capítulo.

## CAPÍTULO II

Neste capítulo apresentamos um resumo do panorama histórico de funções. Vamos abordar o conceito de funções recorrendo a várias representações de funções com maior destaque aos diagramas de Venn-Euler e gráficos e descrever Erros e Dificuldades na aprendizagem do conceito de funções.

### 2.1 Funções e História de funções

De acordo com Morris Kline (1967, p. 295), Galileu

“[...] pretendia encontrar princípios ou leis físicas e quantitativas às quais aplicar o raciocínio matemático para deduzir novas leis físicas. Destas leis físicas saíram as respostas a toda uma variedade de problemas teóricos e práticos. Para expressar os princípios físicos da maneira que considerava significativa, introduziu um conceito matemático novo, o extremamente importante conceito de função. Durante os séculos seguintes os matemáticos se dedicaram à construção de função e ao estudo de suas propriedades. (tradução nossa)”

A noção de função está presente em muitas situações na vida das pessoas no dia a dia. Historicamente, segundo Katz (2009), o *Almagesto* de Ptolomeu já apresentava uma ideia do que entendemos hoje por função com trabalhos a respeito de posições dos planetas, tábuas com relações entre conjuntos e valores discretos. Ptolomeu não discute a noção geral de função. Essa noção mais geral aparece em textos de outros matemáticos, como Euler, Bernoulli, Lacroix, Fourier, Dedekind, entre outros. Ou seja, função é um tópico importante da matemática escolar.

Segundo Hygino H. Domingues e Gelson Iezzi (2004), função é uma relação com algumas propriedades; em que uma relação é um subconjunto do produto cartesiano de dois conjuntos quaisquer  $X$  e  $Y$ . Assim, para os autores,  $X \times Y = \{ (x,y); x \text{ pertence a } X \text{ e } y \text{ pertence a } Y \}$ . Uma função é uma relação em  $X \times Y$ , tal que está definida para todos os elementos de  $X$  e associa a cada elemento de  $X$  um único elemento em  $Y$ . Geralmente, a função  $f$  é denotada por  $f: X \rightarrow Y$  em que a cada  $x$  em  $X$ , associamos  $f(x)$  em  $Y$ .

Aqui estamos interessados em duas representações de funções, quais sejam diagrama (Venn-Euler) e gráficos. Se  $f: X \rightarrow Y$  é uma função, seu gráfico é um subconjunto de  $X \times Y$ .

## 2.2 Formas de representação de Funções

As funções podem ser representadas de várias maneiras, verbal, diagrama de Venn, tabela, gráficos e de forma analítica (lei de formação).

Segundo Souza (2016, p.21-22),

**Registro verbal** - Onde se registra uma determinada situação que representa uma Função por meio de palavras ou da própria fala.

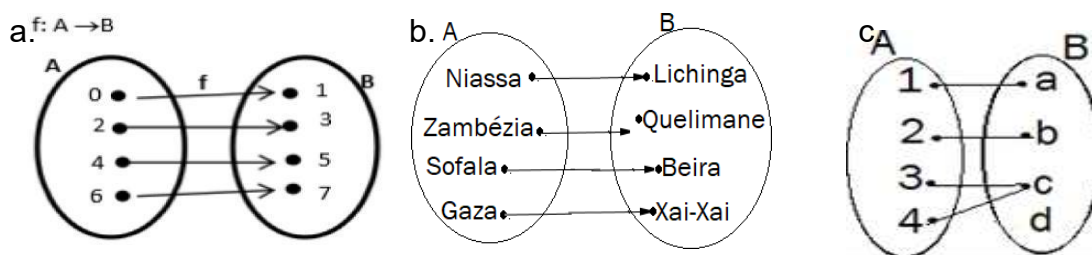
**Lei de formação** - é uma regra Matemática que define exatamente como tal função deve ser representada.

**Dados tabelados** - Tabelas representam informação, em geral numérica, arranjada sistematicamente, na forma de linhas e colunas.

**Diagrama Venn**- É todo diagrama que possibilita a visualização de propriedades e de relações entre um número finito de conjuntos. São representados por linhas fechadas, desenhadas sobre um plano, de forma a representar os conjuntos e as diferentes relações existentes entre conjuntos e elementos.

De acordo as diversas formas de representação de função a figura 4 que segue ilustra a representação de função por diagrama de Venn-Euler.

**Figura 4** - Representação de correspondências por diagrama de Venn-Euler



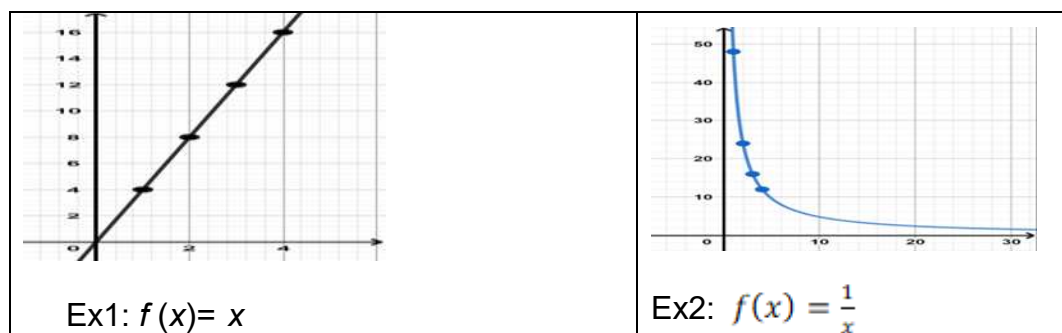
Elaborado: pelo autor

Segundo Souza (2016, p.22), gráficos são como uma

“[...] tentativa de se expressar visualmente dados ou valores numéricos, de maneiras diferentes, assim facilitando a compreensão dos mesmos. O gráfico de uma função  $f: X \rightarrow Y$  é o conjunto dos pares ordenados em  $X \times Y$  da forma  $(x, f(x))$ , ou seja:  $(x, f(x)): x \in X$ . Uma função é determinada pelo seu gráfico e pela especificação do conjunto de chegada”.

Tendo em consideração a definição acima a figura 5 ilustra a representação de funções por meio de gráfico.

**Figura 5.** Representação de funções por meio de gráficos



Fonte: Souza (2016)

### 2.3 Erros e Dificuldades na aprendizagem do conceito de funções

Iniciamos nossa argumentação a respeito de erros e dificuldades de estudantes quanto ao conceito de função, com a perspectiva do sistema educacional moçambicano em sua intenção de demandar a criação do Homem novo (Moçambique, 1983). É neste contexto que podemos afirmar que o objetivo da escola e do professor moçambicanos é o de formar indivíduos capazes de desenvolver suas habilidades com um nível satisfatório.

Segundo Luckesi (2002, p.54),

A idéia de erro só emerge no contexto da existencia de um padrão considerado correto. A solução insatisfatória de um problema só pode ser considerada errada a partir do momento em que se tem uma forma considera correta de resolvê-lo; uma conduta é considerada errada na medida em que se tem uma definição o que seria considerada correta, e assim por diante. Sem padrão não há erro. O que pode existir (e existe) é uma ação insatisfatória, no sentido de ela não atinge um determinado objetivo que está sendo buscado. Ao investirmos esforços na busca de um objetivo qualquer, podemos ser bem ou mal sucedidos. Aí não há erro, mas sim sucesso ou insucesso nos resultados da nossa ação.

Concordando com o autor, no processo de ensino e aprendizagem é necessário definir padrões para servirem de indicadores de controle da ação que está sendo desenvolvida pelos estudantes de modo a possibilitar na definição ou redefinição dos caminhos para o alcance dos objetivos preconizados.

Nessa perspectiva, Silva, Silva, e Alves (2014, p. 22) afirmam que “algumas vezes no processo de desenvolvimento intelectual os erros são considerados fracasso, e na prática escolar o erro é utilizado como uma forma de avaliação, sendo a mesma fonte de condenação”.

Luckesi (2006, p. 34) discute até a utilização de castigos “como forma de correção e direção de aprendizagem...” e afirma que “uma visão sadia do erro possibilita sua utilização de forma construtiva”.

No nosso entender e de acordo com o autor, quando o erro não é encarado pelo professor como fonte de aprendizagem, inibe a construção de conhecimentos. Neste contexto, no processo de ensino e aprendizagem consideramos o erro como parte integrante do processo e deve ser visto como elemento fundamental na construção de conceitos matemáticos a partir da lógica do raciocínio do estudante que levou ao cometimento do tal erro ou a obter uma solução não desejada.

Lima (2011, p.361) refere que:

[...] é necessário, também, que o professor seja capaz de identificar as dificuldades de aprendizagem, os conhecimentos que os alunos têm sobre uma determinada noção matemática e as eventuais fontes de erros cometidos. Ele deve, sobretudo, ser capaz de criar boas situações didáticas que propiciem a superação dos erros e que favoreçam a aprendizagem de novos conhecimentos.

Concordamos com a autora a respeito dos erros no processo de ensino e aprendizagem da matemática, que são o resultado de conflitos cognitivos típicos do processo devido a sua complexidade. Acreditamos ser importante conhecer a natureza do erro e que não é difícil encontrá-los, devido a existência de uma interação muito próxima entre os fatores, o que abre o caminho para o professor recorrer a um ensino diagnóstico. É neste contexto que Radatz (1979, p.165-168) define os erros de acordo como eles se caracterizam no processo da aprendizagem. O quadro 3 apresenta a classificação de Radatz sobre erros.

**Quadro 3** - Classificação de erros de acordo com Radatz (1979)

<b>CLASSIFICAÇÃO</b>	<b>CARATERIZAÇÃO DO TIPO DE ERRO</b>
1ª: Erros devidos a dificuldades de linguagem;	O autor diz que muitos alunos apresentam dificuldades em interpretar símbolos, conceitos e linguagem matemática, nesse sentido, a falta de compreensão dos textos pode levar o aluno a esse tipo de erro.
2ª: Erros devido a dificuldades na obtenção de informações espaciais	É apresentado a dificuldade que o aluno tem em mentalizar figuras espaciais e pode levar a uma má representação implicando em soluções erradas.

3ª: Erros devido a uma aprendizagem deficiente de fatos, habilidades e conceitos prévios;	Esses erros são oriundos da falta de conhecimentos necessários dos conteúdos, dessa forma, quando uma situação matemática exigir esses conteúdos para chegar a solução o aluno não desenvolverá as habilidades necessárias.
4ª: Erros devido a associações incorretas ou rigidez de pensamento;	São erros devido a aplicação de uma operação cognitiva a situações diferentes, ou seja, faz com que o aluno aprenda uma operação relativa de um conteúdo e passa a aplicar em outras situações na perspectiva que ela é válida para todas situações similares.
5ª: Erros devido à aplicação de regras ou estratégias irrelevantes.	Utilização de fórmulas ou regras similares em situações diferentes mostra a ineficácia do raciocínio análogo.

**Fonte:** adaptado Radatz (1979, tradução nossa).

Essas classificações podem contribuir na escolha e organização de meios adequados para o encaminhamento do processo de ensino e aprendizagem da Matemática tanto para os estudantes como para os professores.

Ramos e Curi (2014, p.14) defendem que “o erro é um conhecimento que o aluno possui e que foi construído de alguma maneira”.

Assim, é preciso que o professor faça uma análise da produção escrita do aluno visando encontrar erros e, deste modo, pensar em estratégias mais adequadas para abordá-los.

Os mesmos autores afirmam que “A análise do erro não deve ser realizada somente pelo professor, mas igualmente pelo aluno” (Ramos; Curi, 2014, p.14).

Mas para que isso ocorra, é missão do professor definir tarefas que proporcionem um estímulo motivacional para que o estudante possa analisar a sua produção escrita. Essa busca que o professor oferece aos estudantes cria oportunidades “de identificar e compreender seus erros, podendo, assim, em outras ocasiões, geri-los, isto é, desenvolver processos de verificação e autocorreção que o ajudem, se necessário, a refazer os caminhos para sua resposta” (Nagy; Buriasco, 2008, p. 39).

Nagy e Buriasco (2008, p. 36) ainda descrevem que:

Numa perspectiva de ensino que considera as respostas dos alunos apenas como ‘certas’ ou ‘erradas’, o professor deixa de conhecer/entender, entre outras coisas, a razão das escolhas feitas

pelos alunos, bem como possíveis equívocos relacionados à apropriação de alguns conceitos.

Nagy e Buriasco (2008, p.36) e ressaltam que,

No caso de respostas incorretas ou parcialmente corretas, à medida que os erros são investigados pelo professor, ele poderá perceber que, de acordo com a sua natureza — erros de ‘tabuada’, de ‘contagem’, da não compreensão do enunciado, de ‘falsas generalizações’ —, devem ser tratados de forma diferenciada em sala de aula. Além disso, pode ser produtivo, se o professor buscar compreender que caminhos eles utilizam para resolver problemas, quais conhecimentos demonstram ter.

Segundo Ramos e Curi (2014, p.13), é por “[...] meio de um interesse único de propostas de conteúdos programáticos que fazem parte do mundo real do aluno, da busca pela superação das dificuldades e com o uso de novas situações didáticas, é que professor e aluno poderão ter como resultado uma melhoria na aprendizagem.”

Rico (1998) apresenta algumas reflexões a respeito dos “[...] processos de ensino-aprendizagem das Matemáticas.” (p. 75), citando alguns autores, como Popper, Bachelard, entre outros. O autor aborda algumas consequências dessas reflexões. Primeiro, afirma que “[...] os erros podem contribuir positivamente no processo de aprendizagem” (RICO, 1998, p.75).

Em segundo lugar, o mesmo autor concorda que “[...] erros não aparecem por azar se não que sejam em um marco conceitual consistente” (p.75-76).

Em terceiro lugar, Rico (1998) coloca a necessidade de não se culpar os estudantes e, finalmente, assinala que se tem um processo de estudo, então se tem erros. Conclui que a partir dos erros um estudante pode aprender mais, pois permite que as pessoas possam ajudá-lo. E que os erros fazem parte da formação dos alunos quando do estudo de Matemática. Nas reflexões a respeito de erros, Rico (1998), destaca que o professor precisa dirigir e guiar o trabalho na mente dos estudantes, pois é necessário que o professor conheça o que os estudantes pensam e não fazer somente suposições. É importante que o professor preveja possíveis erros dos estudantes.

Rico (1998) traz algumas razões apontadas por Radatz (1979) em relação ao estudo de erros e da necessidade de se estudar esse tópico.

Resumindo, considera a atenção que deve ser dada ao trabalho diagnóstico do ensino, reforma de currículo, foco em uma instrução individual e, finalmente, críticas ao tradicional. Além disso, Rico (1998) e outros abordam uma classificação de erros de (Radatz, 1979).

Nesta pesquisa, analisamos os erros cometidos pelos estudantes nas tarefas propostas para a coleta de dados. Definimos tipos de erros cometidos de acordo com os de Torre (2007, p.108) que aponta “as dimensões e as categorias do erro que podem ser utilizadas como orientações tanto na investigação, como para a sua análise didática entendendo a aprendizagem e a ocorrência de erro dentro dela”.

De Lima (2010) e Ramos (2018, p.11) consideram os seguintes tipos de erros “erros de definição, erros de interpretação e erros de conversão”.

O Erro de definição ocorre quando o aluno não consegue definir corretamente o conceito de função; o Erro de interpretação quando o estudante não consegue estabelecer uma relação entre elementos do conjunto de partida, com o conjunto de chegada e o Erro de conversão quando o estudante, a partir de um diagrama de Venn ou gráfico, não chega à definição do conceito.

Segundo Duval (2012, p.269) “a conversão de uma representação é a transformação desta função em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial”.

As abordagens do conteúdo “funções” no Ensino Médio devem ser ampliadas e aprofundadas de modo que o aluno consiga identificar regularidades, estabelecer generalizações e apropriar-se da linguagem matemática para descrever e interpretar fenômenos ligados a ela e a outras áreas do conhecimento (Ribas; Monteiro, 2014, p.8).

Segundo Trujillo et al (2023, p.1, tradução nossa):

As funções começam a ser estudadas no ensino secundário e são um conceito fundamental em disciplinas de matemática de cursos universitários relacionados a ciências básicas, ciências sociais, engenharia e arquitetura. A falta de uma compreensão profunda do conceito de função provoca (1) problemas de compreensão com conceitos subsequentes, como limites, derivadas ou integrais; (2) precária aplicação de funções em outras disciplinas ou futuro profissional; e (3) um sentimento de que o conceito é inútil, o que leva à baixa motivação e interesse em seu estudo.

Olhando as diversas abordagens consideradas por estes autores é conveniente e interessante desenvolver uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) para o ensino e aprendizagem do conceito de funções na 8ª

classe, começando por identificar os erros que os alunos cometem no reconhecimento de funções e, a partir desses erros desenvolvermos uma série de atividades que ajudem a diminuir as dificuldades dos alunos.

Neste estudo, consideramos o erro como fonte de orientação e organização de um conhecimento no processo de ensino e aprendizagem de Matemática; não queremos olhar o erro como sendo um pecado mortal, mas como um diamante por lapidar, pois ele oferece mais uma oportunidade de aprendizagem.

Segundo Pinto (1998, p.7) “a reflexão sobre o erro no cotidiano escolar, levando em conta a perspectiva docente, permite a abordagem de três vertentes: a formação continuada dos professores, o ensino de Matemática e o processo de avaliação da aprendizagem escolar”.

Segundo Cury (2007, p. 91),

[...] a análise de erros é uma abordagem de pesquisa — com fundamentações teóricas variadas, objetivos distintos e participação de todos os níveis de ensino nas amostras, mas também é uma metodologia de ensino, podendo ser empregada quando se detecta dificuldades na aprendizagem dos alunos e se quer explorá-las em sala de aula.

Cury (2007), no seu estudo, tem uma percepção de que a análise de erros é uma abordagem de pesquisa e uma metodologia de ensino, se for utilizada em sala de aula com a intenção de levar os alunos a questionarem suas próprias respostas. Indo na linha do pensamento desta autora, é fundamental que o professor intensifique as ações pedagógicas na construção do conhecimento, na qual a mediação e a interação são os pressupostos essenciais para a condução do processo de ensino para que ocorra uma aprendizagem eficaz.

De acordo com Brousseau (1983 p. 171)

O erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza e do acaso, como se acredita nas teorias empiristas ou behavioristas da aprendizagem, mas o efeito de um conhecimento anterior, que tinha seu interesse, seu sucesso, mas que agora se revela falso, ou simplesmente inadaptado. Os erros desse tipo não são instáveis e imprevisíveis, eles são constituídos em obstáculos.

Segundo Cury (1994, p.132) os erros

[...] cometidos pelos alunos são considerados estágios necessários à exploração de problemas e podem ser utilizados, pelo professor ou pelos próprios alunos, para novas descobertas e para discussão dos conceitos envolvidos em um determinado problema matemático.

Segundo Moraes (2013, p.15), o erro “é um conhecimento, o erro é um saber que o aluno possui e não a falta dele”.

Ozores (2015, p. 24) não “considera que os erros demonstram aquilo que os alunos não sabem, assim como não é possível assumir que os acertos demonstram aquilo que eles sabem”.

Para Luckesi (2011, p. 22), a “diferença entre ‘dar aulas’ e ‘ensinar’ é que, dando aula, espera-se que o aluno aprenda; já no ato de ensinar, deseja-se que ele aprenda, sendo assim, o professor investe na busca por esse resultado”.

De acordo com a diferenciação feita por Luckesi (2011) há uma necessidade de o professor orientar as atividades em busca de resultados que pretende alcançar quando ensina e na mesma perspectiva “Muitas vezes, aquilo que parece ser uma resposta incorreta pode se tratar de falta de capacidade para expressar-se” (Mengali; Nacarato; Passos, 2009, p.73).

Com a compreensão do que levou determinado estudante a cometer o erro, torna-se mais fácil elaborar atividades que visem trabalhar melhor as dificuldades dos alunos, uma vez que há mais probabilidade de detectar qual parte do conteúdo em questão não está sendo entendida pelo aluno (Azevedo, 2009, p. 6).

Para Paulo Freire (1996, p. 47), precisamos “[...] saber que ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua própria produção ou sua construção” é o fator importante para a aprendizagem do aluno.

De acordo com este autor o professor assume o papel de condutor das tarefas na sala e auxilia na realização e progressão das tarefas. Este auxílio oferece ao estudante a possibilidade de avaliar as suas resoluções e isso contribui na construção do saber pela atividade autônoma do estudante.

Segundo Souza (2007, p. 111), o “recurso didático é todo material utilizado como auxílio no ensino-aprendizagem do conteúdo proposto para ser aplicado pelo professor a seus alunos”.

Mais aindiante, Souza (2007, p.113) afirma que:

O uso de materiais didáticos no ensino escolar deve ser sempre acompanhado de uma reflexão pedagógica quanto a sua verdadeira utilidade no processo de ensino e de aprendizagem, para que se alcance o objetivo proposto. Não se pode perder em teorias, mas também não se deve utilizar qualquer recurso didático por si só sem objetivos claros.

Concordando com Souza (2007) a utilização da THA pode contribuir para uma aprendizagem mais eficiente (de modo correto e com o mínimo de erros), para isso o professor é convidado, com base nos erros e dificuldades verificados dos estudantes, a definir os recursos adequados à aprendizagem do conteúdo em causa e não a falta dele.

#### 2.4 Análise de erro e sua importância no ensino e aprendizagem

Segundo Souza (2001, p. 137), “Errando é que se aprende; na escola da vida os erros são os melhores mestres; a prática leva à perfeição”.

Conforme Luckesi (2002, p. 56) o

“não sucesso” é, em primeiro lugar, um indicador de que ainda não se chegou à solução necessária e, a indicação de um modo de “como não se resolve” essa determinada necessidade. O fato de não se chegar à solução bem sucedida, indica, no caso, o trampolim para um novo salto.

No nosso entender de acordo com os autores Luckesi (2002) e Sousa (2001), para que os erros levem à perfeição e constituam um trampolim para novos avanços o professor deve se empenhar durante o processo em identificar e categorizar ou classificar os erros. Esta ação do professor ajuda na elaboração de tarefas e uma metodologia de acordo com o tipo de erros cometidos.

Para Torre (2007, p.63) o “erro nos proporciona um excelente instrumento diagnóstico do desenvolvimento mental do sujeito, do seu nível de execução, de habilidades, de atenção, de estilo cognitivo etc.” O autor considera três categorias de erro, nomeadamente: (1) Erros de Entrada, erros que estão associados a compreensão da informação; (2) Erros de Organização, aqueles em que cada indivíduo estrutura a informação para responder a tarefa; e (3) Erros de Execução, acontecem na prática ou falhas de comunicação, confusões operacionais, divagação ou de estratégia.

Segundo Cury (2007, p.13)

“a análise das produções dos estudantes não é um fato isolado na prática do professor; ela é - ou deveria ser- um dos componentes dos planos pedagógicos das instituições e dos planos de aula dos docentes, levando em conta os objetivos do ensino de cada disciplina.”

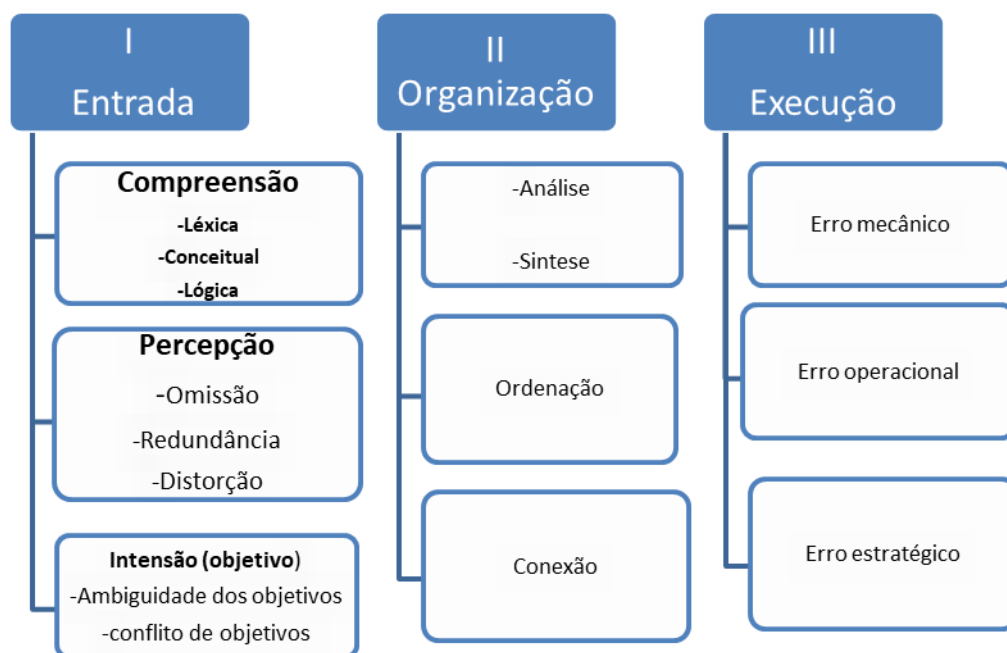
Luckesi (2002, p.57) afirma que “reconhecendo a origem e a constituição de um erro, podemos superá-los com benefícios significativos para o crescimento”. Com isso, questionamentos na sala de aulas sobre as ações dos estudantes são importantes, como: o que fez? Como fez? Porque fez assim? e são fundamentais para o alcance das suas intencionalidades da aula.

De acordo com as diferentes classificações de erro arroladas ao longo desta seção, vamos fazer uma análise dos erros de acordo com Torre (2007), Radatz (1979), Lima (2010) e Ramos (2018, p.11) para perceber que tipo de erros os estudantes cometeram nos registros das tarefas diagnósticas assim como nas tarefas pós-aplicação da oficina. Para Torre (2007, p.107) “o conhecimento dos erros e de seus tipos facilita o diagnóstico e o tratamento”.

Segundo Nikerson, Perkins e Smith (1987, *apud* Torre, 2007, p. 107) “é importante que os professores se dêem conta das deficiências comuns do raciocínio; não apenas com o fim de que sejam capazes de corrigi-las mediante o treinamento, como também, o que não é menos importante, para evitar o reforço desses modos de pensar”. Com esta visão sobre erros trazida por estes autores, o erro possui um papel importante na construção de uma metodologia didática para o ensino e aprendizagem e que os professores não considerem o erro num sentido negativo, ou seja, como um instrumento para julgar o estudante, mas sim o erro deve servir para orientar a aprendizagem.

Na mesma linha de pensamento, para Luckesi (2011, p.293) “o processo de avaliar tem o papel de averiguar o rendimento dos estudantes, tendo em consideração uma intervenção para a melhoria do processo da aprendizagem e dos resultados”.

Na Figura 6 esquema que segue trazemos o modelo da análise didática proposta por Torre (2007) para o erro.

**Figura 6 - Modelo de análise didática dos erros (MADE)**

Fonte: Adaptado de Torre (2007, p.108)

Para a concretização do nosso estudo iremos analisar os erros cometidos por estudantes nas tarefas diagnósticas assim como nas tarefas pós-aplicação da oficina, com base nas classificações consideradas pelos autores no Quadro 4 que segue.

**Quadro 4:** Tipos de erros utilizados análise das produções dos estudantes

<b>Autores</b>	<b>Tipos de erros</b>
Torre (2007)	Erros relacionados a compreensão de conteúdos Erro conceitual Erro estratégico Erro de Linguagem Síntese
Radatz (1979)	Erro por aprendizagem deficiente de fatos Associações incorretas ou rigidez de pensamento Equivocado
De Lima (2010) e Ramos (2018)	Erros de definição (ocorre quando o aluno não consegue definir corretamente o conceito) Erros de interpretação (quando o aluno não consegue estabelecer uma relação entre elementos)

Na nossa visão, a análise de erros das resoluções de tarefas dos

estudantes antes da utilização de qualquer metodologia de ensino, ajuda a diagnosticar dificuldades dos estudantes e por sua vez, proporciona ao professor o conhecimento dos tipos de erros e dificuldades o que facilita a escolha de tarefas que contemplem aspectos que facilitem o entendimento dos alunos e a produção de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem adequada.

A análise dos erros nas tarefas após aplicação de uma proposta metodológica é fundamental e facilita para uma tomada de decisão do professor na redefinição, reorientação das tarefas e das estratégias utilizadas pelos estudantes na resolução de tarefas.

## CAPÍTULO III

### 3.1 Procedimentos metodológicos

É neste capítulo que descrevemos a natureza e a caracterização dos participantes da pesquisa e as justificativas pela escolha dos mesmos, as tarefas realizadas para o desenvolvimento dessa pesquisa, a descrição do modo como foi conduzida a coleta de dados, como foi guiada a oficina de formação e alguns aspectos segundo os quais se procederam as análises dos dados colhidos.

A abordagem deste trabalho insere-se nos pressupostos da pesquisa qualitativa (Bogdan; Biklen, 2010; Moraes; Galiazzi, 2011), a qual pretende “aprofundar a compreensão do fenômeno investigado e reconstruir conhecimentos existentes sobre o tema estudado” (Moraes; Galiazzi, 2011).

As respostas coletadas foram tratadas e analisadas utilizando a Análise de Conteúdo de Bardin (1977) que, segundo Campos (2004, p. 611) é “compreendida como um conjunto de técnicas de pesquisa cujo objetivo é a busca do sentido ou dos sentidos de um documento”.

De acordo com Bardin (2011, p.125) a “análise de conteúdo compreende três fases: a pré-análise, a exploração do material e o tratamento dos resultados, inferência e interpretação”. Essas fases não serão tratadas de forma sequencial nesta pesquisa. Entretanto, neste estudo, iremos analisar os registros e descrever a produção escrita do conceito de função.

Patton (1980 *apud* Lüdke e André 2013, p.49) afirma que

“a análise de dados qualitativos é um processo criativo que exige grande rigor intelectual e muita dedicação. Não existe uma forma melhor ou mais correta. O que existe é sistematização e coerência do esquema escolhido com o que pretende o estudo.”

Segundo as autoras Lüdke e André (2013, p. 49), decidido “[...] o tipo de codificação, o próximo passo da análise é a forma de registro”.

É com este propósito que neste estudo as unidades consideradas foram os registros e falas dos estudantes na tarefa diagnóstica, na oficina e nas tarefas pós-aplicação da oficina.

Para a concretização das intenções e aprofundar a compreensão do fenômeno em estudo, a pesquisa contou com a participação de

quarenta estudantes do regime diurno, de uma escola Secundária Geral de Quelimane em Moçambique.

### 3.1.1 Recolha de dados

Nesta pesquisa utilizamos dois instrumentos de recolha de dados, tarefas diagnósticas e tarefas pós-aplicação da oficina. A primeira ação desenvolvida foi a aplicação de tarefas diagnósticas para os 40 estudantes e destes foram analisados 8 registros que tinham como intenção verificar o tipo de erro que os alunos comentem.

Após a análise qualitativa dos registros das tarefas diagnósticas, elaboramos as tarefas para a oficina. A oficina foi estruturada em três fases, com uma carga horária total de 270 minutos e com uma duração de 90 minutos cada fase e foram realizadas em dias consecutivos.

1ª fase: realização de tarefas que contemplavam atividades que visavam o reconhecimento de função a partir da representação por diagrama de Venn-Euler.

2ª fase: realização de tarefas que contemplavam atividades que visavam o reconhecimento de funções a partir da representação gráfica.

3ª fase: esta fase foi considerada de reflexão sobre as ações desenvolvidas durante a oficina pelos professores e alunos tais como, exposição das tarefas pelo professor, a orientação e reorientação durante a realização das tarefas, estratégias de resolução adotada pelos alunos e o seu entendimento do conceito de função durante o processo.

### 3.1.2 Tarefas diagnósticas

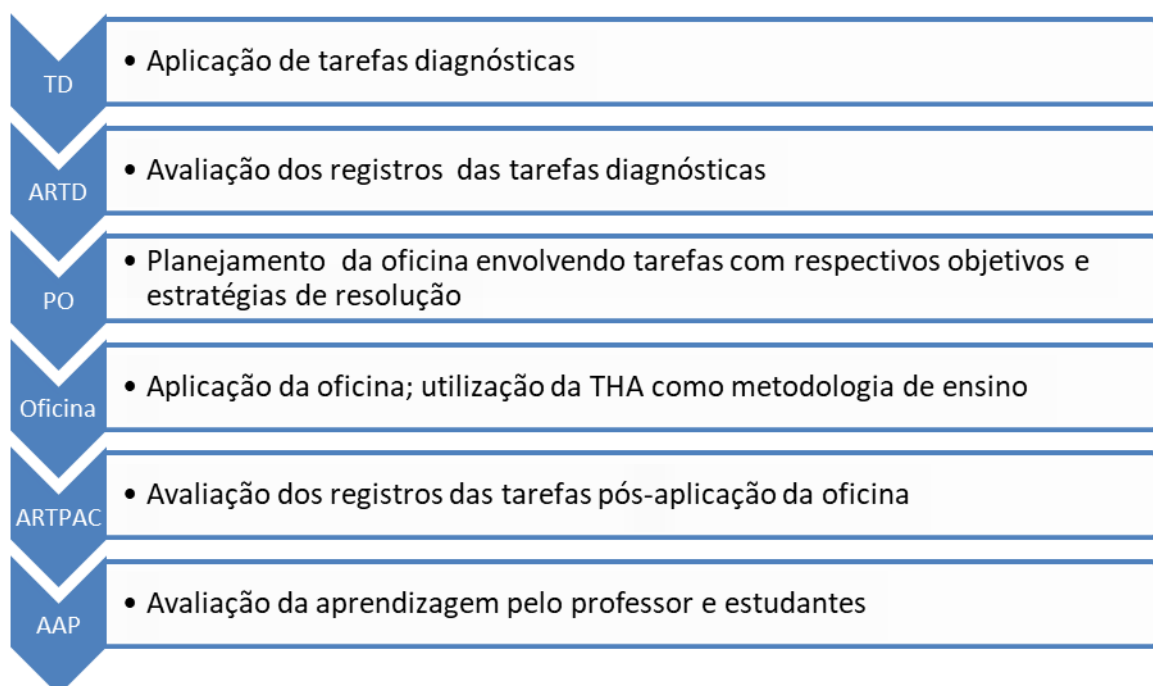
Cury (2009) destaca que há necessidade de saber as origens das dificuldades que envolvem a aprendizagem de um grupo de estudantes, antes de lhes introduzir novos procedimentos metodológicos para a aprendizagem de qualquer conteúdo. Desse ponto de vista, acreditamos ser conveniente obter um diagnóstico dos conhecimentos prévios de cada grupo de estudantes para poder adequar a metodologia de ensino às necessidades deles.

Garibotti (2019, p.11) refere que uma “alternativa é investigar as concepções prévias, por meio do teste de conhecimentos prévios, e considerá-las como ponto de partida do desenvolvimento cognitivo do sujeito na direção dos conceitos”.

Segundo Radatz (1980), o erro desempenha um papel valioso que oferece possibilidade de um diagnóstico de dificuldades de aprendizagem da matemática e abre os caminhos para a avaliação do nível de conhecimento dos alunos. Além disso, a análise de erros contribui para pesquisar o processo de ensino e aprendizagem na matemática sendo uma estratégia metodológica para facilitar o entendimento de aspetos considerados fundamentais na aprendizagem da matemática (Radatz, 1980, p. 16).

A Figura 7a seguir ilustra o roteiro (ciclo instrucional) do decurso do processo de levantamento dos elementos de avaliação dos registros das tarefas diagnósticas, planejamento da oficina, decurso da oficina, avaliação dos registros das tarefas pós-aplicação da oficina deste estudo e avaliação da aprendizagem pelo professor e estudantes.

**Figura 7** - Etapas do processo instrucional utilizando a THA como recurso didático



**Elaboração:** pelo autor

Com base nesses pressupostos teóricos dos autores Cury (2009), Fetzer e Brandalise (2010), Simon (1995), Radatz (1980) e Radatz (1979)

aplicamos tarefas diagnósticas para identificar os tipos de erros que estudantes cometem para a posterior elaboração de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) para auxiliar na aplicação de uma oficina aos estudantes. Cabe destacar que a turma na qual trabalhamos as tarefas diagnósticas já tinha o estudo do conceito de função antes da aplicação da diagnóstica.

### 3.2 Trajetória Hipotética de Aprendizagem

De acordo com Camargo (2019, p.68) temos que:

O sucesso ou não no processo de ensino e aprendizagem da Matemática está diretamente relacionado à prática pedagógica do professor nas salas de aula. A metodologia de ensino adotada para abordar o conteúdo poderá ser determinante para atingir os objetivos da aprendizagem.

O termo Trajetória Hipotética de Aprendizagem foi utilizado por Martim Simon (1995) e se refere:

[...] à previsão do professor para a trajetória que possibilitará a aprendizagem. É hipotética, porque a verdadeira trajetória de aprendizagem não é cognoscível de antecedência. Isso caracteriza uma expectativa. A aprendizagem individual dos estudantes ocorre de forma idiossincrática, embora muitas vezes em trajetos semelhantes (Simon, 1995, p. 135).

A Trajetória Hipotética de Aprendizagem, de acordo com Carvalho *et al* (2018, p. 7),

[...] se configura uma fundamentação teórica pertinente para os objetivos almejados, principalmente pela necessidade de articulação entre as intenções do professor para com a aprendizagem do aluno, seu plano para as atividades de aprendizagem, bem como a elaboração de hipóteses a respeito do processo de aprendizagem da matemática dos alunos.

Além disso, Simon destaca que o

[...] professor está continuamente empenhado em ajustar a trajetória de aprendizagem que ele supôs para melhor refletir seu conhecimento aprimorado. Algumas vezes o ajuste fino está em ordem, enquanto outras vezes todo o conteúdo da lição deve ser descartado em favor de um mais apropriado. Independentemente da extensão da modificação, mudanças podem ser feitas em qualquer um ou em todos os três componentes da trajetória hipotética de aprendizagem: o objetivo, as atividades e/ou o processo de aprendizagem hipotético (Simon, 1995, p. 37).

É neste contexto, que o autor propõe o ciclo de Ensino de Matemática com uma estrutura composta por objetivos da aprendizagem, tarefas de aprendizagem e conhecimento dos estudantes que estarão envolvidos no

processo de aprendizagem e que estes são elementos essenciais na construção de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem. Ainda, o autor argumenta que uma trajetória com estas características permite ao professor justificar escolhas e pensar em possíveis tomadas de decisões. De acordo com Simon (1995),

[...] a trajetória hipotética de aprendizagem é composta de três componentes: a meta de aprendizagem que define a direção, as atividades de aprendizagem e o processo de aprendizagem hipotético - uma previsão de como o pensamento/compreensão dos alunos evoluirá no contexto da aprendizagem (Simon, 1995, p.35).

É nesta perspectiva de desenvolver a Trajetória Hipotética de Aprendizagem que Simon (1995) propõe que o objetivo do professor deve focar a aprendizagem dos estudantes, que devem ser elaboradas tarefas visando esse objetivo e que deve ser pensado um processo hipotético de aprendizagem. Na Figura 8 temos o Ciclo de Ensino de Matemática proposto por Simon (1995).

**Figura 8:** Ciclo de Ensino de Matemática



**Fonte:** Simon (1995, p. 136)

Além disso, ainda nesta linha de desenvolver a THA, segundo Figueiredo e Da Costa (2016, p.3), para Piaget (1972) é preciso um conflito cognitivo para ter a construção de um conceito e afirmam que o “[...] desenvolvimento cognitivo é controlado pelas atividades do indivíduo que o colocam em diferentes situações de aprendizagem nas quais utiliza mecanismos de abstração.” Uma THA permite ao professor pensar nesses desequilíbrios ou

conflitos colocados por Piaget, proporcionando um ganho nesse desenvolvimento cognitivo do estudante, o que inspirou a Simon a quando da criação da THA. Piaget (1977) classifica esses mecanismos em abstração empírica, pseudo-empírica e reflexiva.

Ainda de acordo com Figueiredo e Da Costa (2016), segundo Piaget (2001)

“a abstração reflexiva tem duas fases: a primeira em que as ações feitas são analisadas e uma segunda na qual o indivíduo reflete sobre relações não observáveis, elaboradas na mente e reorganiza seus esquemas mentais agregando os elementos abstraídos de inferências e de deduções lógicas.”

Segundo Moura-Silva *et al.* (2020), na

[...] perspectiva de Freudenthal (1983), os alunos devem aprender matemática através de um processo de matematização progressiva, baseando-se em problemas contextuais reais ou matematicamente autênticos.”

De acordo com esta perspectiva o nosso estudo lança o olhar sobre o ensino de funções no que tange a metodologia utilizada no seu ensino, pois percebemos a importância do professor se preparar para momentos em que os alunos possam ter um conflito cognitivo, saiam de sua zona de conforto, tenham interesse e criatividade, ou seja, tenham liberdade para construir seus conhecimentos.

É com base nesta abordagem e na perspectiva de Simon (1995) que refere ser necessário formular modelos de ensino baseados no construtivismo, de modo a proporcionar mudanças na forma de ensinar matemática, que neste estudo incluímos a ideia de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem do conceito de função.

Simon e Tzur (2004, p.91) afirmam que uma

[...] THA tem como objetivo a aprendizagem dos estudantes, as tarefas matemáticas que serão utilizadas para promover a aprendizagem dos estudantes e em hipóteses sobre o processo de aprendizagem dos estudantes. No entanto, a construção da THA não forneceu nenhuma estrutura para pensar sobre o processo de aprendizagem, a seleção de tarefas matemáticas ou o papel das tarefas matemáticas no processo de aprendizagem. Tal estrutura poderia contribuir significativamente para a geração de THA úteis. (p. 91, tradução nossa).

Devido a essa evolução detalhada sobre compreensão da Matemática que a THA promove, segundo Rosseto (2016, p.16)

[...] a elaboração de uma THA permite ao professor: maior segurança no gerenciamento da elaboração e na execução da proposta; prever perguntas que possam levar os alunos a refletirem, pensarem a respeito da tarefa; tomar decisões a respeito dos conteúdos e das tarefas; prever uma trajetória que possibilitará a aprendizagem; construir diálogos hipotéticos com os alunos; e alterar e modificar todos os três componentes da trajetória de aprendizagem.

A autora apresenta um quadro de ações que representam os três pontos de vista da Trajetória Hipotética de Aprendizagem, como se verifica no Quadro 5.

**Quadro 5 - Ações que representam os três pontos de vista da THA**

<p style="text-align: center;">Elaboração (Planejamento)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● As tomadas de decisões do professor a respeito dos conteúdos e das tarefas;</li> <li>● Previsão do professor sobre a trajetória que possibilitará a aprendizagem;</li> <li>● Diálogos hipotéticos entre professor e alunos;</li> <li>● Previsão de perguntas que podem levar os alunos a refletirem, pensarem a respeito da tarefa.</li> </ul>
<p style="text-align: center;">Execução (Processo)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● O pensamento/ entendimento dos estudantes tem lugar central na estruturação e implementação das tarefas de ensino;</li> <li>● Podem ocorrer imprevistos que exijam novas decisões para a continuidade do trabalho;</li> <li>● O professor está continuamente empenhado em ajustar a trajetória de aprendizado que ele “hipotetizou”;</li> <li>● Alterações e modificações podem ser feitas em um ou todos os três componentes da trajetória hipotética de aprendizagem;</li> <li>● Os estudantes também fazem perguntas, é o professor que encaminha a THA a partir das possíveis dúvidas e perguntas deles.</li> </ul>

<p>Depois da Execução (Planejamento)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• A avaliação do conhecimento do aluno pode trazer ajustes a respeito de qualquer conhecimento do professor;</li> <li>• O plano para sala de aula poderá ser repensado, modificado, pois as interações professor – aluno e as observações do professor podem fazer com que isso ocorra.</li> </ul>
--	---

**Fonte:** Rosseto (2016, p. 26)

A elaboração de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) auxilia o professor a refletir a respeito dos conteúdos e a maneira como os estudantes compreendem, os objetivos de ensiná-los e possibilita a elaboração de tarefas que tem por objetivo oportunizar momentos de reflexões aos estudantes para que estes possam construir significados para as relações e os conceitos por meio de representações.

Acreditamos que o papel do professor é fazer questionamentos que levem os alunos a pensar e a refletir a tarefa. As ações que serão tomadas pelo professor também fazem parte de uma trajetória de ensino e aprendizagem (Gravemeijer; Terwel 2000), (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2001). De acordo com estes autores, o papel do professor é importante para organizar o processo e fazer a intervenção em todos os cenários na sala de aula. Esses cenários podem ser individuais, ou de grupos de dois ou mais de dois estudantes que vão discutindo e todos empenhados em busca de solução da tarefa colocada.

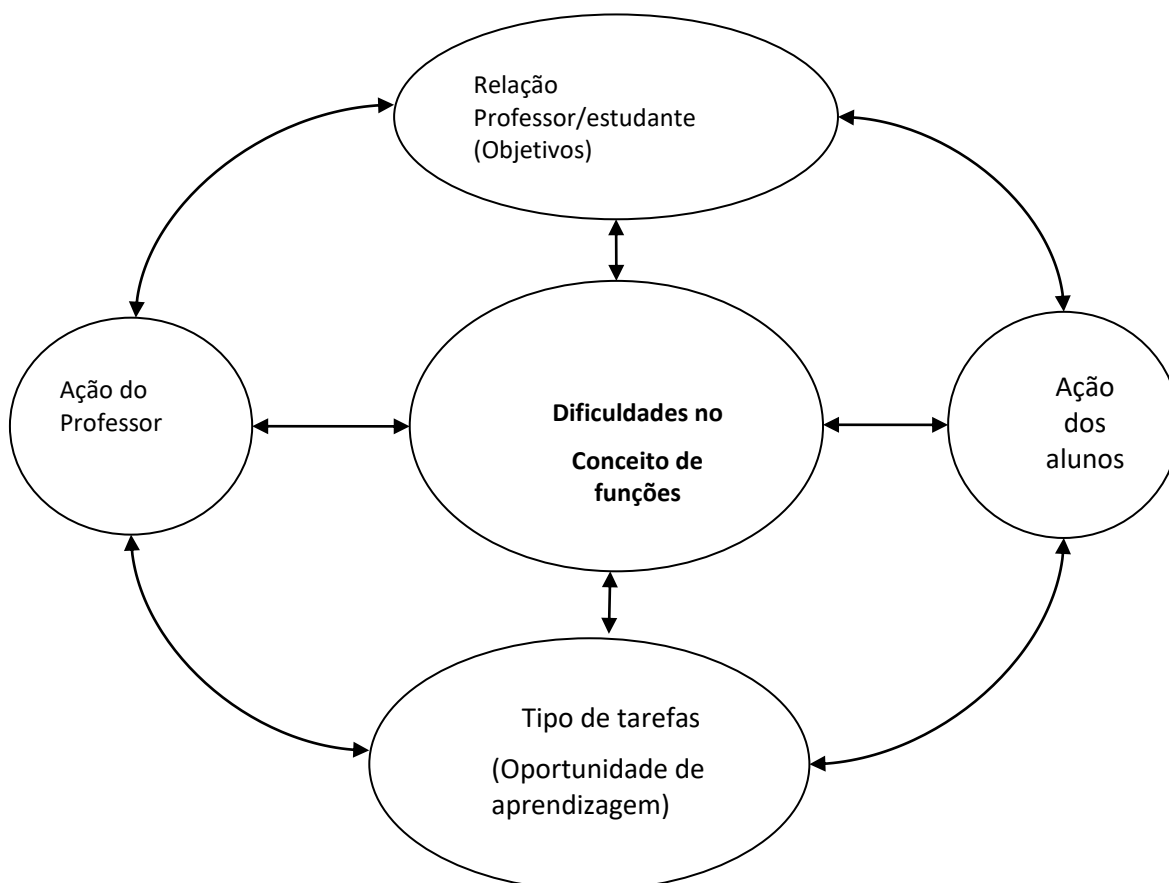
### 3.3 Nossa Trajetória Hipotética de Aprendizagem para o reconhecimento de funções na 8ª classe

Nesta seção trazemos a Trajetória Hipotética de Aprendizagem como uma alternativa metodológica que visa potencializar possibilidades no processo de reconhecimento de funções na 8ª classe, recorrendo a atividades que proporcionam a construção do conhecimento voltado para o conceito de funções.

A partir do ciclo de Ensino de Matemática proposto por Simon (1995), adaptamos um ciclo de ações a serem desenvolvidas na sala de aulas, para o ensino do conceito de funções na 8ª classe como se vê na Figura 9

que segue.

**Figura 9.** Ciclo de ações na sala de aula no ensino do conceito de funções



**Fonte:** Adaptado pelo autor de SIMON (1995)

Esta THA tem como intencionalidades promover para os professores e estudantes possibilidades de ensino e aprendizagem da Matemática. Ela vai obedecer quatro etapas baseadas no Ciclo de Ensino de Matemática de acordo com Simon (1995), as flechas duplas indicam a relação que existe entre as ações na sala de aula.

1ª etapa: Definição dos objetivos da aprendizagem e seleção de tarefas de acordo com os objetivos.

2ª etapa: Verificação do nível atual de conhecimento sobre o conteúdo a tratar, definição de uma metodologia de acordo com o nível de conhecimento dos estudantes, elaboração de tarefas ou atividades com uma previsão da resposta e estratégias de resolução.

3ª etapa: Articulação de debates dentro da sala de aulas, resolução de tarefas, utilização de estratégias de resolução e colocação de opiniões em torno das tarefas desenvolvidas.

4ª etapa: Reflexão sobre as tarefas de aprendizagem, métodos de ensino e estratégias de resolução. Nesta etapa o professor faz uma avaliação das produções dos estudantes na sala de aula e por sua vez os estudantes analisam as suas produções e fazem a síntese dos conhecimentos produzidos e o professor complementa as opiniões dos estudantes.

Um dos primeiros cenários foi a identificação das dificuldades dos estudantes no reconhecimento de funções por meio de tarefas diagnósticas em que foi possível verificar as seguintes dificuldades:

- ✓ Reconhecer funções a partir de diagramas de Venn-Euler.
- ✓ Reconhecer funções a partir de gráficos.
- ✓ Definir o conceito de função.

### 3.3.1 Ações do professor

Identificadas essas dificuldades, elencamos ações a serem desenvolvidas pelo pesquisador no ato de implementação da oficina.

- ✓ Contextualização das tarefas

Aqui o professor explica de maneira clara acerca da atividade que os estudantes irão resolver no sentido de detalhar para ajudar a compreensão da tarefa.

- ✓ Fazer questionamentos sobre as atividades e esclarecimento de possíveis dúvidas que os estudantes podem ter.

Na estratégia de resolução das tarefas é importante que o professor interfira o menos possível e que as questões individuais sejam atendidas no grupo, e não com a turma toda uma vez que é muito provável que todos façam uma mesma pergunta.

- ✓ Definir função durante o processo de resolução de tarefas.

Nesta fase o professor define função baseando-se nas respostas dadas pelos estudantes que, segundo Onuchic e Allevato (2011), as tarefas são consideradas como ponto para construção dos seus conhecimentos, ou seja, os estudantes são construtores da sua aprendizagem e o professor é o responsável

por conduzir esse processo, no final faz uma sintetização sob o ponto de vista de autores.

### 3.3.2 Ações dos alunos

- ✓ Resolver as atividades individualmente e em grupo.

Os estudantes de forma individual ou em grupo vão resolver a tarefa e eles estarão livres de levantar debates que vão ajudar a resolução da mesma.

- ✓ Definir estratégias de resolução das tarefas (tabelas, esquemas, etc.).

Os discentes estabelecem estratégias de resolução de forma individual ou em grupo e vão apresentar para a turma.

- ✓ Desenvolver discussões na busca de soluções.

Nesta etapa os estudantes estão livres de levantar debates e até fazer consultas em manuais para responderem à questão.

### 3.4 Início da Trajetória Hipotética de Aprendizagem

No início da aula o professor deve explicar as características da metodologia de resolução das tarefas, na qual o estudante deve, por meios próprios, buscar a solução que, por sua vez, irá auxiliar no entendimento do conceito de função. O professor neste processo auxiliará apenas quando necessário e muitas vezes por meio de perguntas, que estimulam o estudante a pensar a respeito do procedimento que está seguindo e qual o próximo passo. Essa explicação é importante para que os estudantes saibam como se comportar e o que esperar do professor.

A turma deve se organizar de forma que permita que os estudantes possam discutir suas ideias uns com os outros. A tarefa será entregue a cada uma das duplas ou grupo e o professor orienta para que estudantes leiam atentamente o enunciado da tarefa.

Esta Trajetória esta composta em duas partes. Na parte I são discutidas tarefas sobre o reconhecimento de funções com recurso aos diagramas de Venn-Euler e analisa-se a associação ou a correspondência entre os conjuntos por meio de uma lei de associação. A parte II discute tarefas sobre o

reconhecimento de funções a partir da representação gráfica, mostrando as estratégias de resolução.

### 3.4.1 Parte I: Reconhecimento de funções por meio de Diagrama de Venn- Euler

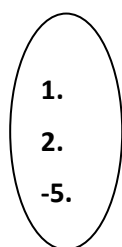
Diálogo desenvolvido durante a realização das tarefas.

**Prof:** Já ouviu falar de um diagrama?

**Est.1:** Sim, já ouvi falar.

**Est.2:** Nunca ouvi

**Prof:** Represente numa figura.



**Prof:** O professor pergunta. Que tipo de diagrama é este?

**Est:** É um diagrama de Venn.

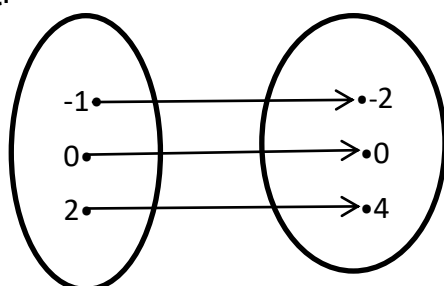
**Prof:** Já ouviu falar de correspondência entre os elementos de dois conjuntos?

**Est:** Não.

**Prof:** Representem dois conjuntos e utilizando setas façam corresponder elementos do conjunto A a elementos do conjunto B.

Dados dois conjuntos  $A = \{-1, 0, 2\}$  e  $B = \{-2, 0, 4\}$ , associar cada elemento de A ao seu dobro em B.

**Est:**



**Prof:** Observe a sua resposta. Tem algum elemento que não tem o seu correspondente?

**Est:** Não, cada elemento tem o seu correspondente noutra conjunto.

**Prof:** Ok. Vamos passar para a tarefa seguinte.

Considere uma máquina de duplicar números. Duplique os números 1, 2 e 3, Utilizando o diagrama de Venn-Euler.

**Prof:** O que percebeu nessa tarefa?

**Est:** Percebi que os elementos do conjunto de chegada são obtidos a partir do dobro dos elementos de partida.

**Prof:**

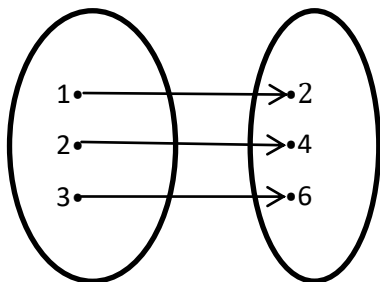
Escreva uma correspondência entre os conjuntos dos números 1, 2, e 3 com o conjunto dos resultado obtidos.

**Prof:** O que é em sua opinião a máquina de duplicar números?

**Est:** Em minha opinião a máquina de duplicar é a regra para obter o conjunto de chegada.

**Prof:** Faça corresponder a cada elemento o seu dobro num diagrama de Venn-Euler. O que você verificou?

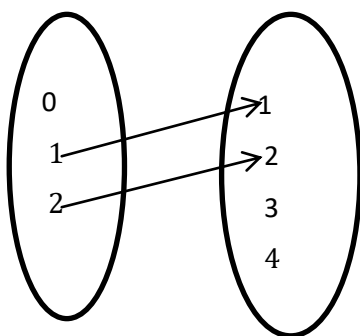
**Est:** Resolve



**Prof:** Agora vamos passar para a terceira tarefa.

Associar cada elemento do conjunto A ao valor igual no conjunto B, num diagrama de Venn-Euler.  $A = \{0, 1, 2\}$  e  $B = \{1, 2, 3, 4\}$

**Est.** Resolve



**Prof:** Verifica a sua resposta e compare com as resoluções das tarefas anteriores.

**Est:** Temos elementos do conjunto A que não tem o seu correspondente no segundo conjunto B e igualmente temos elementos do conjunto B que não tem correspondente no conjunto A.

**Prof:** A que conclusão chegou?

**Est:** Significa que no segundo caso não existe relação entre o conjunto A e o conjunto B.

**Prof:** Numa correspondência de elementos de dois conjuntos, se todos os elementos do conjunto de partida possuírem um único correspondente no caso contrario, não representa função é apenas uma relação.

**Prof:** Verifique as tarefas anteriores e diga qual representa função e quais não representam função e justifique a sua resposta.

**Est.** A primeira e segunda tarefa representam função, porque todos os elementos de A tem um correspondente em B e é único.

Na segunda tarefa tem elemento do conjunto A que não tem correspondente em B, logo não representa função.

### 3.4.2 Parte II: Reconhecimento de funções por meio de gráficos

**Prof:** Já ouviu falar de gráfico?

**Est:** Sim,

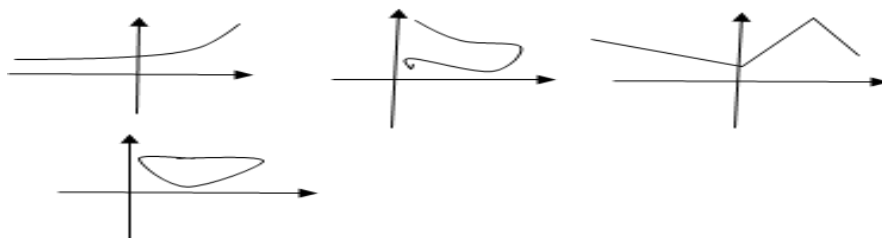
**Prof:** Aonde? Quem? Qual é a sua utilização?

**Est:** Na aula de Matemática e não sei para quê servem.

**Prof:** Como é obtido?

**Est:** Através de problemas de Matemática

**Prof:** Observe as figuras. Que figuras são essas?



**Est:** São gráficos

**Prof:** De entre estes gráficos, quais os que representam uma função e os que não representam?

**Est:** A terceira figura representa função, porque se assemelha com o que o professor representou no quadro.

**Prof:** Pode explicar a diferença?

**Est:** Porque outros não têm a forma de uma reta.

**Prof:** Considere o eixo x como conjunto de partida e eixo y o conjunto de chegada. O que consegue enxergar?

**Est:** Vejo que para construir o gráfico é preciso unir os elementos de X com os elementos de Y.

**Prof:** Que método usou para chegar a sua resposta?

**Est:** Desenhando retas perpendiculares ao eixo X e outras perpendiculares a Y que se vão interceptar num ponto duas a duas formando pontos e quando unimos os pontos construímos uma linha.

**Prof:** Muito bom!

**Prof:** Já que vocês sabem como se constroem as linhas que representam o gráfico, para reconhecer se o gráfico representa uma função ou não existe uma regra que veremos mais adiante.

### 3.5 Descrição do desenvolvimento da oficina

Para o desenvolvimento da oficina, ela foi dividida em duas partes: A parte I visava o reconhecimento de funções por meio de diagrama de Venn- Euler. A parte II visava reconhecer funções a partir de gráficos

Nesta fase os estudantes resolveram as tarefas que depois foram analisadas para verificar a sua evolução com base nas respostas, colocações, falas em relação ao contexto, exemplos, assim como a produção escrita.

#### 3.5.1 Tarefas da oficina (TO)

Parte I: Reconhecimento de funções recorrendo ao diagrama de Venn

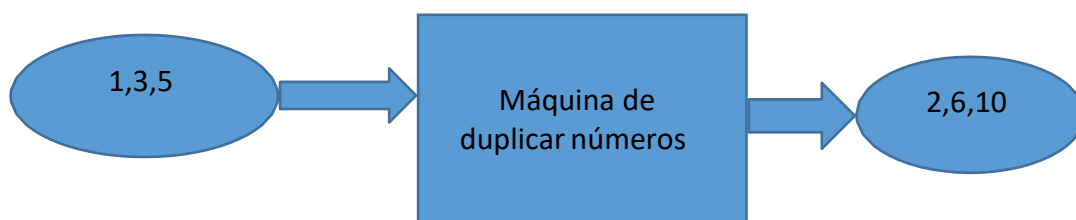
TO1PI: Dados dois conjuntos  $A=\{-1,0,2\}$  e  $B=\{-2,0,4\}$ , associar cada elemento de A ao seu dobro em B.

**Estratégia de resolução de TO1PI:** Utilizar diagrama de Venn para resolver a tarefa.

**Objetivo da TO1PI:** Determinar correspondência entre dois conjuntos; criar uma intuição da existência de uma regra de associação.

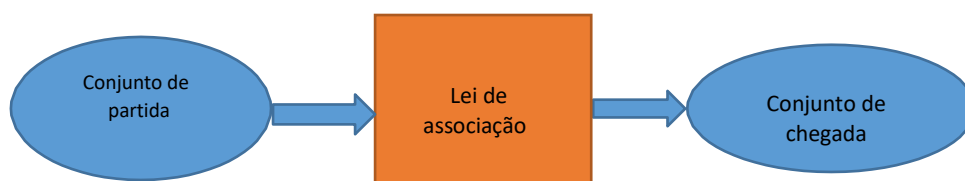
TO2PI: Considere uma máquina de duplicar números. Duplique os números "1,3 e 5". O utilizando o diagrama de Venn-Euler, escreva uma correspondência entre os conjuntos dos números "1, 2, e 3" com o conjunto dos resultados obtidos. O que é será em sua opinião a máquina de duplicar o os números?

**Estratégia:**



**Objetivo da TO2PI:** O estudante relacionar a máquina de duplicar com a leide associação.

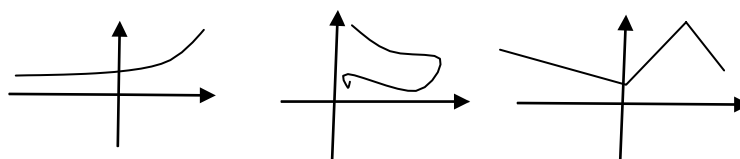
TO3PI: Associar cada elemento do conjunto A ao valor igual no conjunto B num diagrama de Venn-Euler e diga se é função  $A=\{0,1,2\}$  e  $B=1,2,3,4\}$

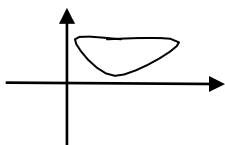


**Objetivo da TO3PI:** Fixar a condição para que uma correspondência represente uma função.

Parte II: Reconhecendo funções em gráfico

TO1PII. Sabendo que nem todo gráfico é função então, verifique se os gráficos que seguem representam função.





**Estratégia de resolução TO1P11:** Recordar as componentes de uma função tais como conjunto de partida, conjunto de chegada; traçar retas perpendiculares ao eixo  $x$ , verificar se a reta não tocou em dois pontos do gráfico.

**Objetivo TO1P11:** Perceber que os elementos de eixo  $x$  (abscissas) representam o conjunto de partida e o eixo  $y$  (ordenada) corresponde ao conjunto de chegada; induzir a ideia da representação de ponto no sistema cartesiano.

TO2P11: Dê um exemplo duma situação do seu dia a dia que define uma função.

**Estratégia de resolução:** Livre.

**Objetivo da TO2P11:** Levar o estudante a perceber que é possível relacionar os fenômenos do dia a dia por uma lei que os associa.

A Figura 10 retrata o momento em que o pesquisador explica as representações de funções por meio de diagrama de Venn- Euler

**Figura 10:** Professor explicando o conceito de funções



**Fonte:** Autor

### 3.5.2 Oficina

A oficina começou com a resolução das tarefas sobre a representação de funções por diagrama de Venn-Euler. Nesse momento, os estudantes discutiram as tarefas em grupo de dois e três. No decorrer, os estudantes ficaram envolvidos em discussões promovidas dentro do grupo e de acordo com as situações, apresentaram dúvidas e esclarecimentos entre membros do grupo ou com elementos de outros grupos e deram as suas respostas a respeito da tarefa.

No decurso da oficina, o professor se encarregou a fazer anotações dos vários momentos dentro da sala de aula tais como dúvidas, intervenções dos alunos, exemplos dados pelos estudantes. A oficina se caracterizou em momentos de perguntas de reflexão e respostas que eram dadas por estudantes.

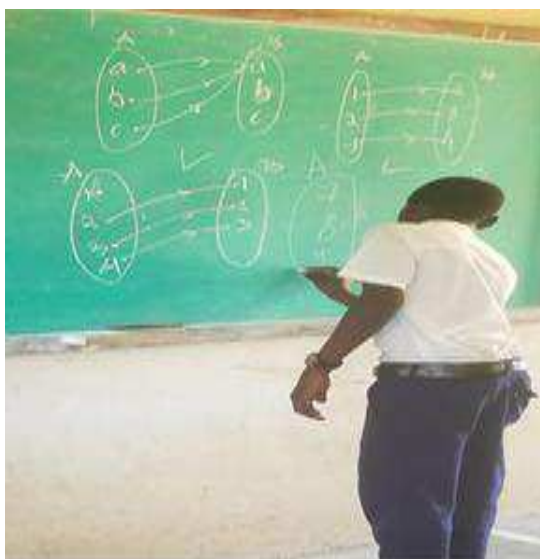
As perguntas feitas pelo professor foram de caráter reflexivo, com intenção de induzir os estudantes a encontrar nas diversas situações do dia a dia, relações que representam funções, como referencia Moura-Silva *et al.* (2020, p.5), ao afirmar que a teoria da EMR (Educação Matemática Realística) é uma abordagem de ensino de matemática que foi proposta por Hans Freudenthal (1905-1990), que “tem como intenção possibilitar aos alunos o contato com situações-problema do dia a dia, despertando o interesse, a criatividade e o

aprendizado de conteúdos matemático” Moura-Silva *et al.* (2020, p.5).

É nesta perspectiva que, para a resolução de tarefas da oficina foram desenvolvidas várias discussões a respeito da representação de funções por meio de diagramas de Venn e de gráficos. Van Den Heuvel-Panhuizen (2000) refere que os professores têm de proporcionar aos discentes um ambiente de aprendizagem em que esse processo de construção possa surgir. É nesta perspectiva que, para a resolução desta tarefa os estudantes se organizaram em grupos de dois e depois foram desenvolvidos debates em torno das tarefas (TO1PI, TO2PI, TO3PI, TO1PII e TO2PII) e outras tarefas que de forma ocasional surgiam, assim como exemplos.

Nesses debates os estudantes foram apresentando dúvidas e respostas, no final apresentavam a sua solução como mostra a figura 11 em que o estudante apresenta um exemplo de relação entre elementos de dois conjuntos.

**Figura 11-** Aluno apresentando a resolução da tarefa um



**Fonte:** autor

Freudenthal (1991) propõe que se deve dar aos estudantes a oportunidade de serem autores do seu conhecimento por meio do que ele denomina reinvenção guiada. O professor deve orientá-los e acompanhá-los a partir de suas produções, para que possam inventar/construir/lidar com ferramentas matemáticas em diferentes atividades.

Neste contexto, o estudante

“possui diversos papéis no processo de aprendizagem, entre eles, ser

ativo, ser autor e responsável pelo seu conhecimento matemático, desenvolver atitudes que contribuam para a reflexão e o interesse em novas estratégias de resolução, estar atento às discussões, buscando entender as resoluções dos outros estudantes e justificando suas estratégias” Silva (2015 *apud* Rossetto,2016, p.19).

É no olhar desses dois autores que as atividades foram desenvolvidas somente pelos estudantes porque entendemos que eles é que devem criar suas estratégias de resolução promovendo discussões de resolução das tarefas. A Figura 11 mostra o aluno representando relações em diagramas de Venn e identifica os que representam uma função e os que não representam função.

Durante o decurso da oficina a resolução das tarefas foi deixada a critério dos estudantes, o professor orientou as atividades durante a oficina sem que as suas intervenções interferissem nos resultados obtidos pelos alunos nas tarefas. Após a oficina, aplicamos as mesmas tarefas diagnósticas. Estas tarefas tinham como finalidade, verificar se houve melhora nas dificuldades dos estudantes no reconhecimento de funções. Com esta ação pretendíamos encontrar similaridades nas produções escrita e identificar estratégias e procedimentos de resolução mais utilizados.

## CAPÍTULO IV

### 4. Apresentação, Discussão e Interpretação de Resultados

Neste capítulo, discutimos e analisamos as respostas obtidas nas tarefas diagnósticas, que agrupamos em respostas semelhantes, e fizemos um cruzamento com as respostas semelhantes das tarefas pós-aplicação da oficina. Com o cruzamento, pretendíamos analisar o nível evolutivo dos participantes da pesquisa e verificar se os estudantes compreenderam o conceito.

Além das respostas dos dois instrumentos aplicados, analisamos as diversas intervenções dos estudantes anotadas em um bloco de notas durante o decurso da oficina, porque as falas de cada interveniente nos ofereciam percepções de como os alunos encaravam o conceito de funções no seu dia-dia e na sala de aula. Ressaltamos que o autor não era professor regente da turma.

Para verificar se houve compreensão do conceito de função, além das duas tarefas propostas para tarefas pós-aplicação da oficina, incluímos a tarefa três com intenção de ajudar a perceber se os estudantes tiveram um entendimento dando uma opinião do que entende sobre o conceito de função.

#### 4.1 Descrição das fases da análise de dados

Na primeira fase das nossas análises iremos apresentar os resultados de forma quantitativa para permitir verificar o percentual dos erros nas tarefas diagnósticas que constituiu a pré-análise de acordo as categorias e igualmente foram analisados oito registros de estudantes, na segunda fase analisamos as tarefas da oficina e por fim na terceira fase foram analisadas tarefas pós-aplicação da oficina. Na tabela 1 que segue, apresentamos uma comparação de porcentagens entre as tarefas diagnósticas e Tarefas pós-aplicação da oficina.

**Tabela 1:** Comparação de porcentagens das Tarefas Diagnósticas com as das tarefas Pós-aplicação da oficina

Categorias	Tarefas Diagnósticas			Tarefas após-Aplicação da oficina		
	Todas certas	Algumas certas	Todas não certas	Todas certas	Alguma scertas	Todas não certas
<b>Tarefa 1</b>	0%	25%	75%	7%	65%	28%
<b>Tarefa 2</b>	12%	33%	55%	45%	40%	15%

Fonte: tarefas diagnósticas e tarefas Pós-aplicação da oficina

As porcentagens nesta tabela nos indicam que houve uma mudança quantitativa por categorias nas tarefas pós-aplicação da oficina.

#### 4.1.1 Descrição das respostas dos estudantes nas tarefas diagnóstica (TD)

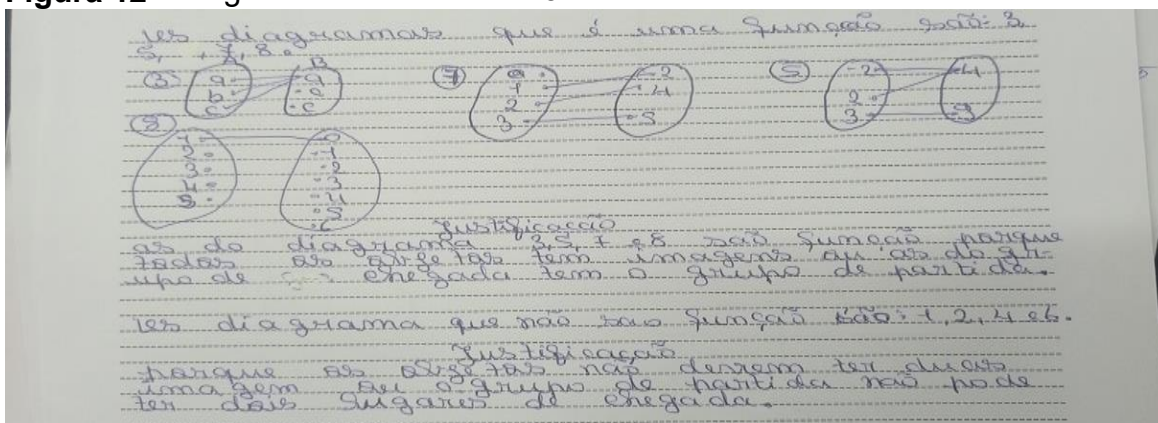
Nesta fase apresentamos e analisamos respostas de oito registros escritos dos estudantes A4, A23, A27, A31, A33, A35, A36 e A37 dadas na tarefa diagnóstica e na tarefa pós-aplicação da oficina. Estas respostas foram escolhidas de forma aleatória procurando fugir de uma escolha intencional entre os estudantes que mais se destacaram na oficina. A escolha das respostas dos oito estudantes tinha como finalidade verificar a evolução desde as tarefas diagnósticas e pós-aplicação da oficina.

Com esta análise, pretendíamos verificar como esses estudantes respondem ou fazem a produção e escrita a respeito do conceito de funções. Santos (2014, p.64), considera que “a produção escrita dos estudantes é de grande importância, pois constitui o ponto de partida que permite ao professor fazer suas análises e considerações, possibilitando assim uma tomada de decisões”. Em outras palavras, “é uma estratégia de ensino em que o meio, a produção escrita, é um recurso material, de suporte textual e portador de informação que é manipulado pelo professor a fim de que ele possa atingir seus objetivos” Santos (2014, p.64).

### 4.1.2 Análise das respostas da tarefa um

Nesta seção, analisaremos as respostas dos estudantes da tarefa um das tarefas diagnósticas.

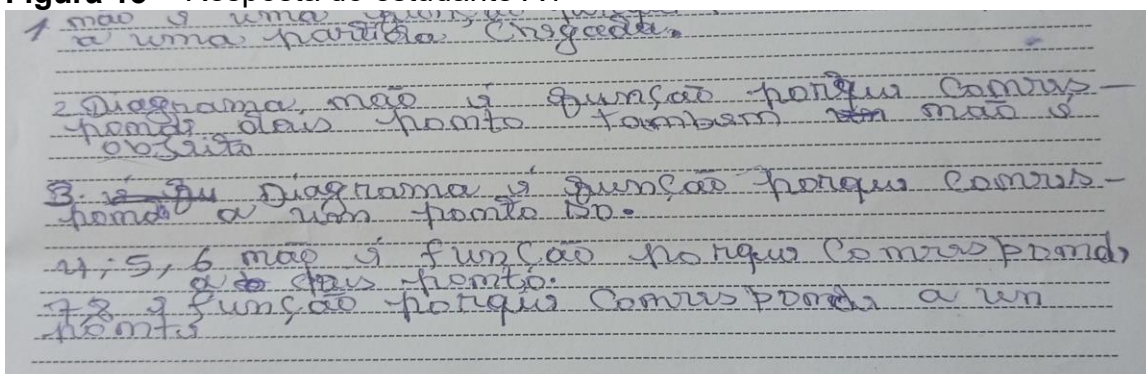
**Figura 12** – Registro do estudante A23



Fonte: Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

Neste registro o estudante A23, identifica os diagramas 3, 5, 7 e 8 como os que representam função e justifica que é função, porque todos os objetos têm imagem, o grupo de partida e grupo de chegada. Não representam função os diagramas 1, 2, 4 e 6 porque alguns objetos têm duas imagens. E não chega a resposta esperada. O estudante cometeu um erro de definição de acordo com a classificação feita por De Lima (2010) e Ramos (2018).

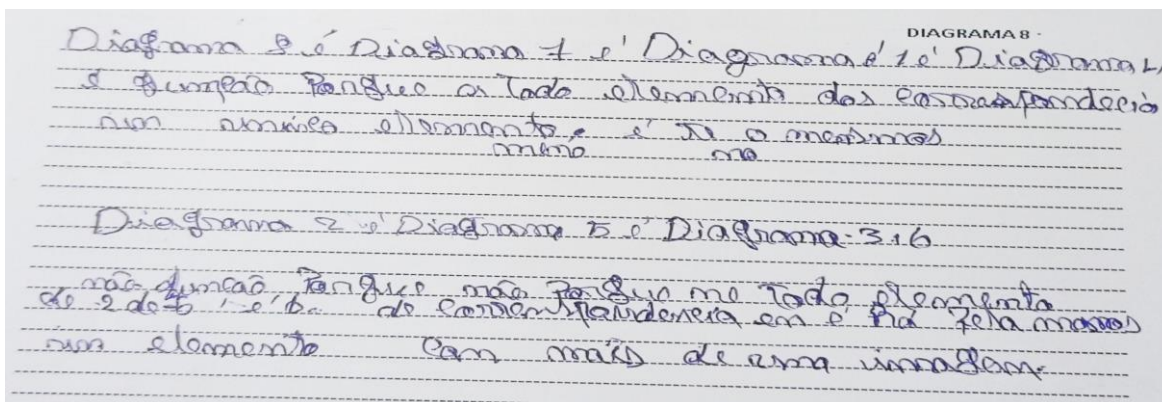
**Figura 13** - Resposta do estudante A4



Fonte: Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

O estudante A4 não chega a resposta esperada, comete erro por equívoco de acordo a classificação de Radatz (1979). O estudante utiliza uma estratégia não adequada para a resolução da tarefa.

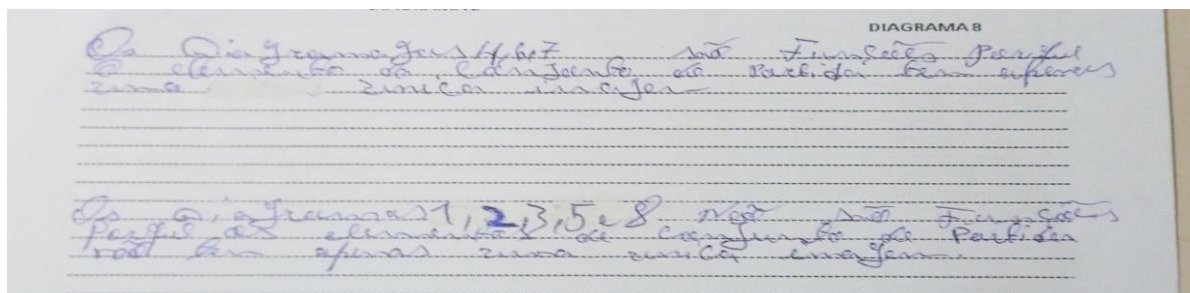
**Figura 14** - Resposta do estudante A27



**Fonte:** Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

O estudante A27 comete o erro devido a uma aprendizagem deficiente de fatos que na classificação de Radatz (1979), esses erros são oriundos da falta de conhecimentos necessários de conteúdos. O estudante a partir das relações definidas nos diagramas Venn-Euler, não estabelece uma ligação com a definição.

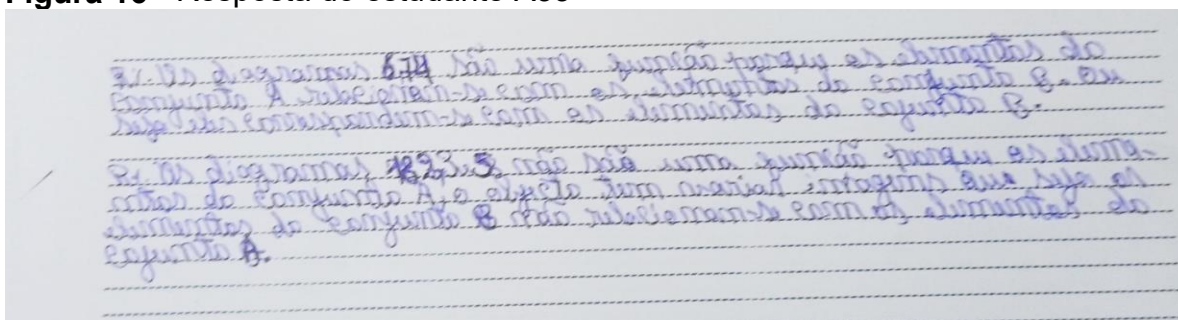
**Figura 15** - Resposta do estudante A31



**Fonte:** Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

No registro do estudante A31 chegou a resposta esperada, e justifica a resposta definindo o conceito e diz que a correspondência represente uma função, se e somente se quando os elementos do conjunto de partida tiverem um único elemento correspondente no conjunto de chegada.

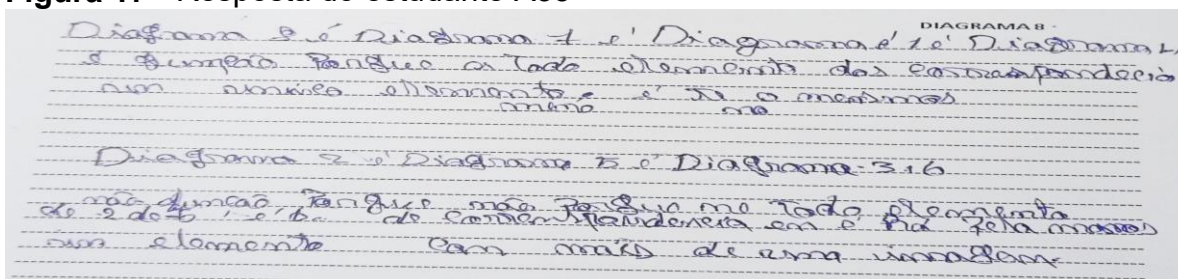
**Figura 16 - Resposta do estudante A33**



Fonte: Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

O estudante A33 revela neste registro, ter noção do conceito de função, mas comete o erro de distorção de acordo com a classificação de Torre (2007), quando não explica que, na correspondência estabelecida não pode existir em A um elemento sem imagem no conjunto B.

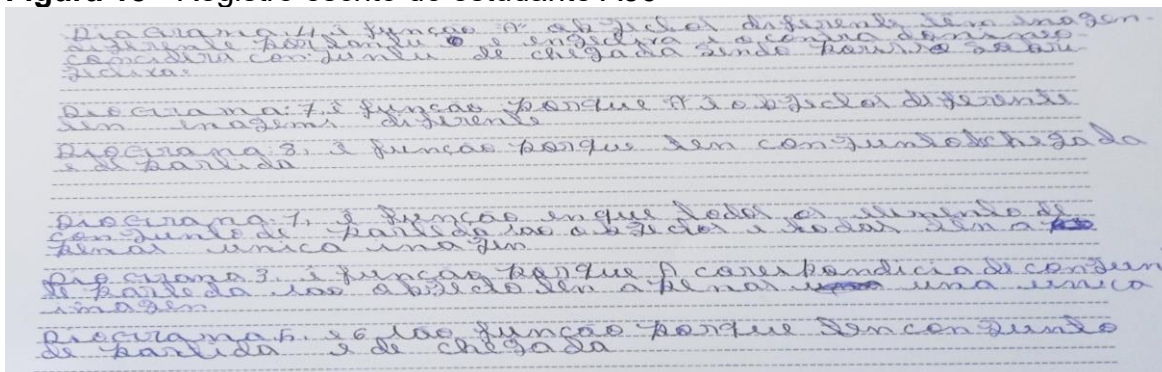
**Figura 17 - Resposta do estudante A35**



Fonte: Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

Este estudante A35 não chega a resposta esperada, ele comete o erro de aprendizagem de deficiente de fatos de acordo com a classificação de Radatz (1979), não consegue justificar ou explicar a resposta dada.

**Figura 18 - Registro escrito do estudante A36**

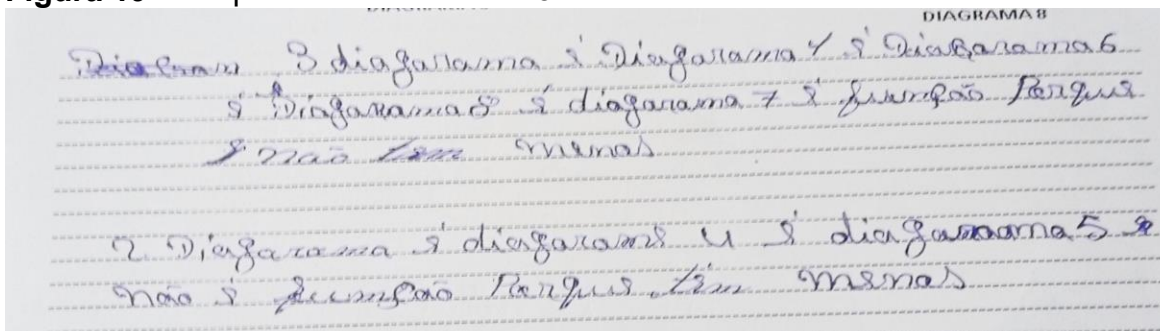


Fonte: Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

O estudante A36 não chega a resposta esperada e mostra dificuldades em identificar os diagramas que representam função, tem

dificuldades em definir o conceito de função, portanto ele comete o erro de definição de acordo a classificação de De Lima (2010) e Ramos (2018).

**Figura 19** - Resposta do estudante A37



Fonte: Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

O estudante A37 não chegou a resposta esperada, comete erros de aprendizagem deficiente de fatos de acordo a classificação de Radatz (1979), não identificou os diagramas que representam uma função no conjunto dos diagramas dados.

O quadro 6 que segue apresenta um resumo das respostas dos registros dos estudantes nas tarefas diagnósticas.

**Quadro 6** - Análise das respostas da Tarefa um da tarefa diagnóstica

Aluno A4, A27, A31, A35, A36 e A37	Aluno A23 e A33	Aspectos comuns
Dificuldades de reconhecer de função a partir do diagrama de Venn-Euler.	Os registros Mostram terem a noção de função quando referem que os objetos não devem ter duas imagens. Tem a dificuldade na definição do conceito de função.	Têm dificuldades em identificar uma função por meio do diagrama de Venn-Euler.
Resposta esperada: os diagramas que representam função são: 3, 5, 6 e 8 porque cada objeto do conjunto de partida tem uma única imagem no conjunto de chegada. Os diagramas 1, 2, 4 e 7 não representam função porque cada objeto de conjunto de partida tem mais de uma imagem no conjunto de chegada e existem elementos do conjunto de partida que não tem imagem no conjunto de chegada. Tipo de erro conetidos: erro conceitual, erro de definição, equivocos, erro devido a uma aprendizagem deficiente.		

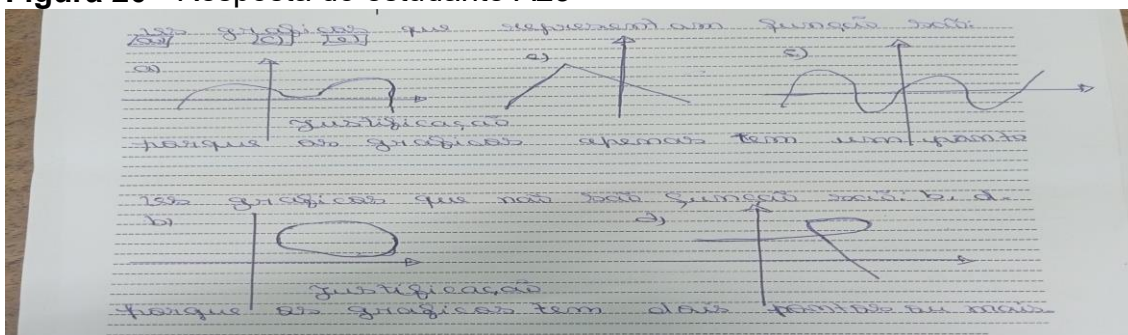
**Elaboração:** Autor

#### 4.1.3 Análise das respostas da tarefa dois da Tarefas Diagnósticas

Nesta seção vamos analisar as respostas da tarefa dois dos

estudantes.

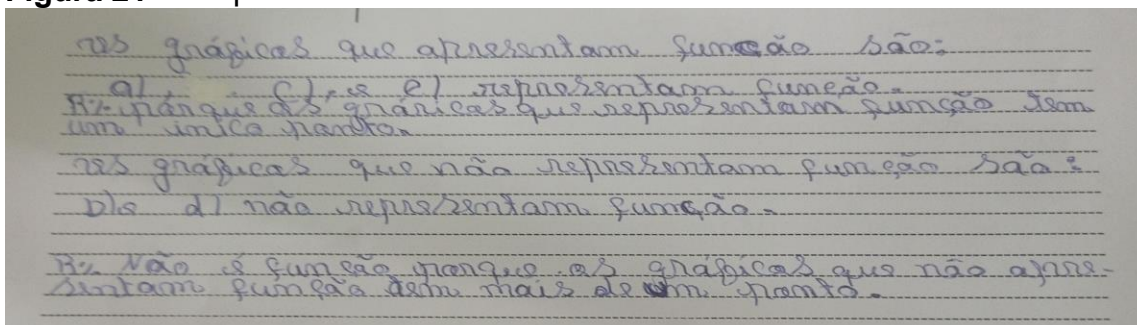
**Figura 20** - Resposta do estudante A23



**Fonte:** Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

O estudante A23 chega à resposta desejada, mas tem dificuldades em explicar a estratégia utilizada e comete erro de linguagem de acordo com a classificação de Torre (2007).

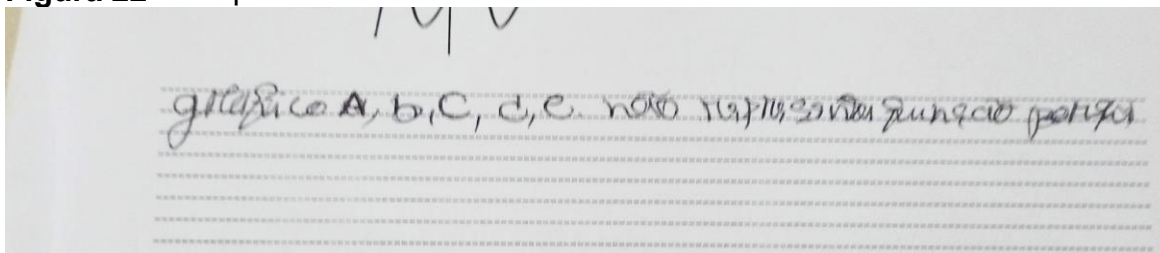
**Figura 21** - Resposta do estudante A4



**Fonte:** Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

O estudante A4 chega a resposta esperada, reconhece função a partir da representação gráfica que as alíneas **a**, **c** e alínea **e** são as que representam função. No entanto a explicação sobre os procedimentos não é clara e comete erro de linguagem de acordo com a classificação de Torre (2007).

**Figura 22** - Resposta do estudante A27

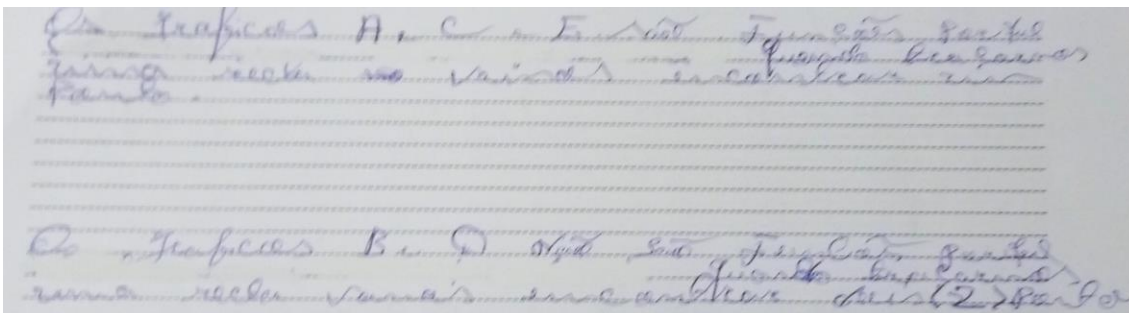


**Fonte:** Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

Nesta tarefa, o estudante A27 em sua resposta, diz que todos os

gráficos não representam função e a partir do registro notamos que tenta justificar a sua resposta, mas não procede com a justificação, ele comete erro de aprendizagem deficiente de com a classificação de Radatz (1979).

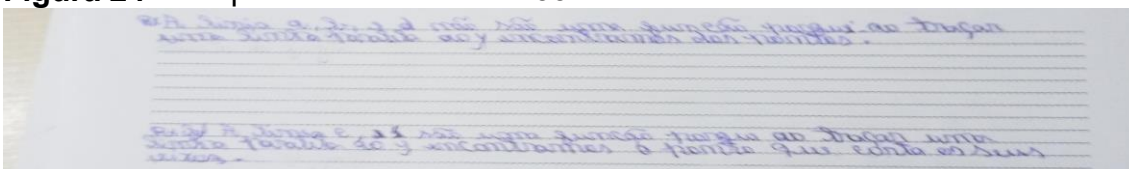
**Figura 23** - Resposta do estudante A31



Fonte: Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

O estudante A31 chegou à resposta esperada e mostra que aplicou alguma estratégia de resolução quando justifica a razão da sua escolha, mesmo revelando dificuldade em explicar os procedimentos.

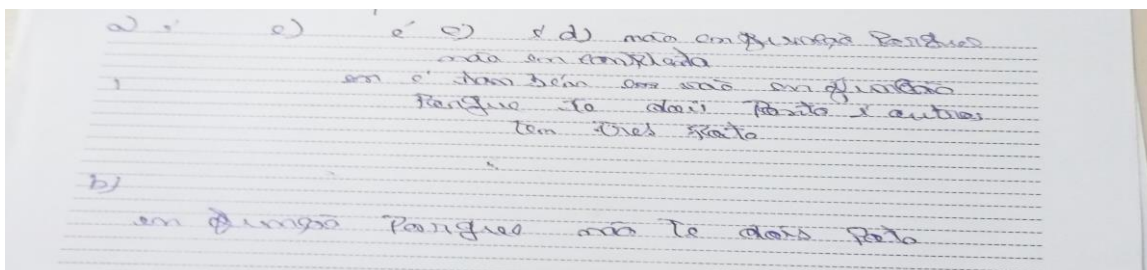
**Figura 24** - Resposta do estudante A33



Fonte: Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

O estudante A33 chegou à resposta esperada em algumas alíneas da tarefa e mostra no seu registro que aplicou uma estratégia de resolução e revelou a partir da sua justificativa tem conhecimento dos procedimentos da aplicação da estratégia utilizada.

**Figura 5-** Resposta do estudante A35

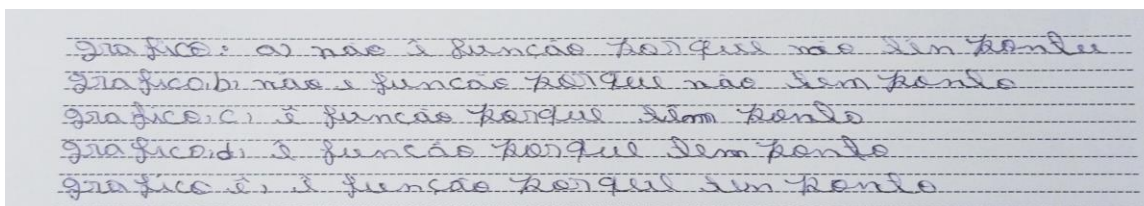


Fonte: Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

Neste registro verificamos que o estudante A35 chegou a resposta esperada em algumas alíneas e não chegou em outras, e ele tenta

explicar a estratégia utilizada, mas comete o erro de linguagem de acordo com a classificação de Torre (2007) pois tem claudicância em explicar a estratégia aplicada.

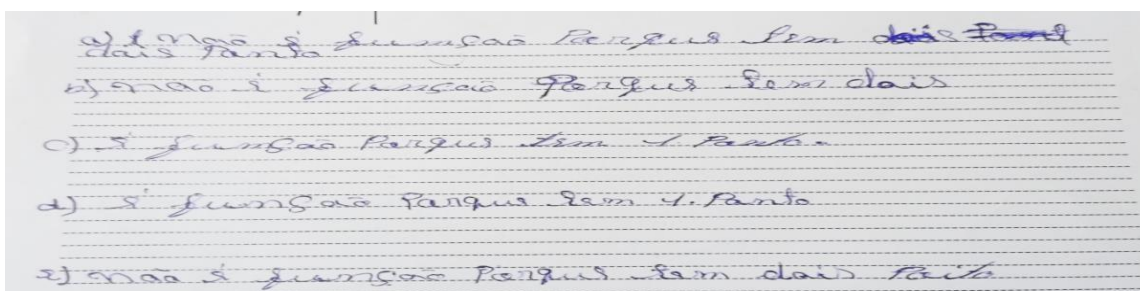
**Figura 26-** Resposta do estudante A36



**Fonte:** Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

Este estudante A36 identificou alguns gráficos que representam funções e não identificou outros, contudo tenta explicar a estratégia utilizada, comete o erro estratégico e de linguagem de acordo com a classificação de Torre (2007).

**Figura 27 -** Resposta do estudante A37



**Fonte:** Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

A partir do registro verificamos que o estudante A37 chegou à resposta esperada e aplicou uma estratégia de resolução, mas revela dificuldades na descrição dos procedimentos utilizados. O estudante cometeu, assim, erro de linguagem de acordo com a classificação de Torre (2007).

O Quadro 7 que se segue apresenta um resumo respostas das tarefas dois das tarefas diagnósticas.

**Quadro 7- Análise das respostas da tarefa dois das Tarefas Diagnóstica**

<b>Análise da resposta dos estudantes A4, A23, A31, A36 e A37</b>	<b>Análise da resposta dos estudantes A27, A33 e A35</b>	<b>Aspectos comuns</b>
Reconhece que os gráficos que representam uma função são, a), c) e e)	Não reconhece que os gráficos a), c) e e) representam uma função.	Os estudantes têm dificuldades em justificar a estratégia utilizada na resolução.
	<b>Resposta esperada:</b> Os gráficos que representam função são os gráficos das alíneas <b>a</b> , <b>c</b> e <b>e</b> ; porque quando traçamos retas paralelas em relação ao eixo das ordenadas toca em um único ponto e os que não representam função, são os gráficos das alíneas <b>b</b> e <b>d</b> , porque quando traçamos retas paralelas em relação ao eixo das ordenadas toca em mais de um ponto. <b>Erro cometido:</b> Erro Estratégico, linguagem e interpretação.	

**Elaboração:** autor

#### 4.2 Análise das atividades da oficina

Nesta fase, descrevemos os diferentes momentos do decurso da oficina e apresentadas várias situações ou intervenções dos sujeitos participantes.

As figuras a seguir correspondem aos registros das respostas de tarefas dos estudantes A7, A11, A17 e A31 durante o decurso da oficina escolhidas de forma aleatória na medida em que resolviam e apresentavam as suas respostas.

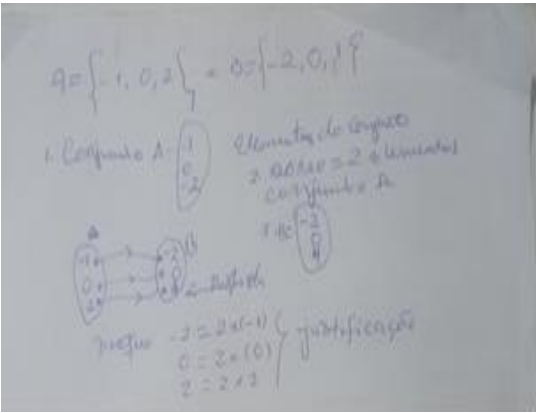
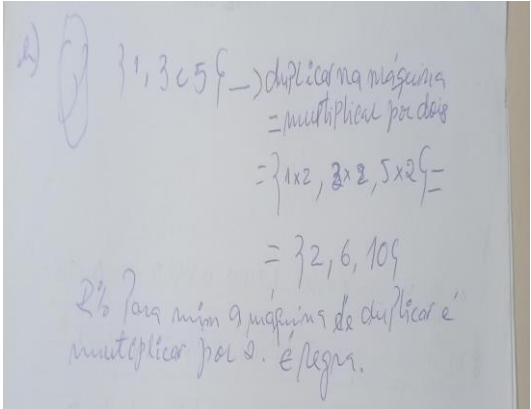
Segundo Ferreira (2009, p.24), a

[...] produção escrita dos alunos se mostra como uma alternativa para interrogar-se sobre os processos de ensino e aprendizagem. Entretanto, é preciso reconhecer que a análise da produção escrita por si só também não dá conta de todos os processos. A sugestão é que ela venha acompanhada de alternativas como, por exemplo, entrevistas, discussões e explorações coletivas, em sala de aula, a respeito de uma ou mais produções.

De acordo com a autora, no decurso da oficina as discussões e os questionamentos contituiram aspectos fundamentais para a resolução das tarefas.

O Quadro 8 que se segue apresenta a resolução de duas da oficina.

**Quadro 8** - Resolução de tarefa da alínea a) e b) da oficina.

<p>Dados dois conjuntos <math>A = \{-1, 0, 2\}</math> e <math>B = \{-2, 0, 1\}</math> associar cada elemento de A ao seu dobro em B.</p> 	<p>Considere uma máquina de duplicar números. Duplique os números "1, 3 e 5". O utilizando o diagrama de Venn-Euler, escreva uma correspondência entre os conjuntos dos números "1, 2, e 3" com o conjunto dos resultados obtidos. O que é será em sua opinião a máquina de duplicar o os números?</p> 
Resolução do aluno A17 da TO1PI	Resolução do aluno A7 da TO2PI

Fonte: Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

O momento dois foi marcado por resolução das tarefas da parte II da oficina, onde os estudantes resolveram tarefas recorrendo a representação por diagramas de Venn-Euler para reconhecer os gráficos que representam uma função como as figuras dos registros mostram. Nesta etapa sentimos o envolvimento dos alunos em busca de solução, pois constantemente iam recorrendo às resoluções das tarefas anteriores (parte I) para auxiliarem a resolução das tarefas da parte II. O Quadro 9 que segue ilustra a resolução da tarefa 2 que se pretendia reconhecer funções a partir de gráficos.

**Quadro 9 - Resolução da tarefa 2 da parte II**

Resolução do aluno A31 da TO2PII	Resolução do aluno A11 da TO2PII

Fonte: Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

Os estudantes no ato de resolução justificaram as suas resoluções com base nos seguintes depoimentos:

*A7: Um diagrama não representa função quando um objeto possui duas imagens ou quando um objeto não possui imagem. E ainda justificaram que é função se todos os objetos tiverem uma única imagem.*

*A17: Um menino diante a um espelho, o menino corresponde ao objeto e o que reflete no espelho é a imagem do objeto e se a imagem não refletir o objeto então não é função.*

*A31: O estudante relacionou com dois gêmeos e a imagem na fotografia. Ele afirma que dois objetos podem ter a mesma imagem como o caso dos gêmeos. Sendo assim um diagrama que tenha dois objetos com a mesma imagem também representa uma função.*

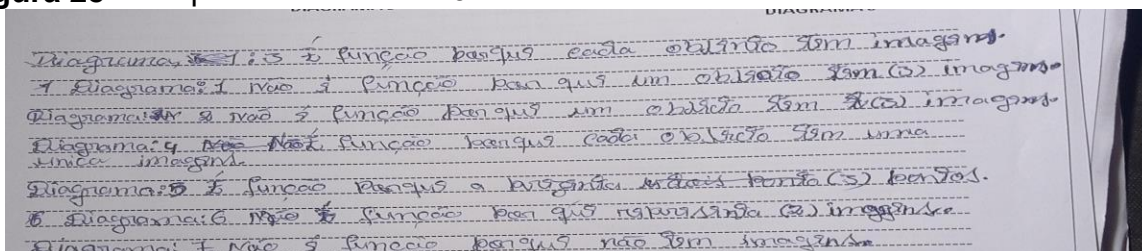
#### 4.3 Análise de respostas de tarefas pós-aplicação da oficina

Nesta fase analisamos as tarefas pós-aplicação da oficina, que consistiram em verificar se as dificuldades apresentadas na tarefa diagnóstica foram minimizadas com a aplicação da oficina. E nesta mesma fase foi analisada a terceira tarefa, que tinha como finalidade verificar se os sujeitos participantes já conseguiam definir o conceito de função a partir das representações para verificar se houve melhora em relação as respostas das tarefas diagnósticas.

#### 4.3.1 Análise das respostas da tarefa um

Nesta seção vamos analisar as respostas dos estudantes da tarefa um das tarefas pós-aplicação da oficina.

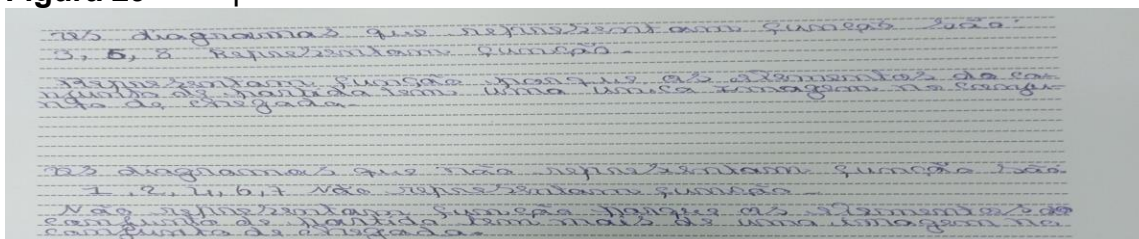
**Figura 28 - Resposta do Aluno A23**



Fonte: Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

Neste registro o estudante A23 chegou à resposta esperada da tarefa, mas tem dificuldades ao justificar a resposta, comete erro de linguagem de acordo com a classificação de Torre (2007).

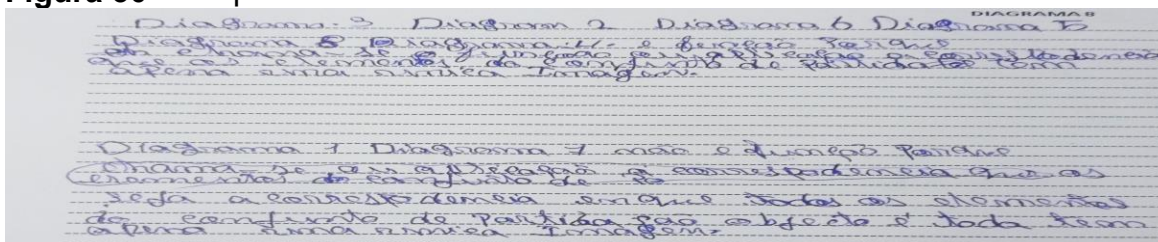
**Figura 29 - Resposta do aluno A4**



Fonte: Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

Pelo registro, está evidente que o estudante A4 melhorou nas suas respostas e faz uma justificação perceptível. Na sua produção escrita ele afirma que é função porque cada objeto tem uma única imagem e não é função porque cada objeto tem três imagens ou porque cada objeto tem mais de duas imagens. Este fato nos faz acreditar que consegue reconhecer quando é que os diagramas representam função e quando é que não representam uma função.

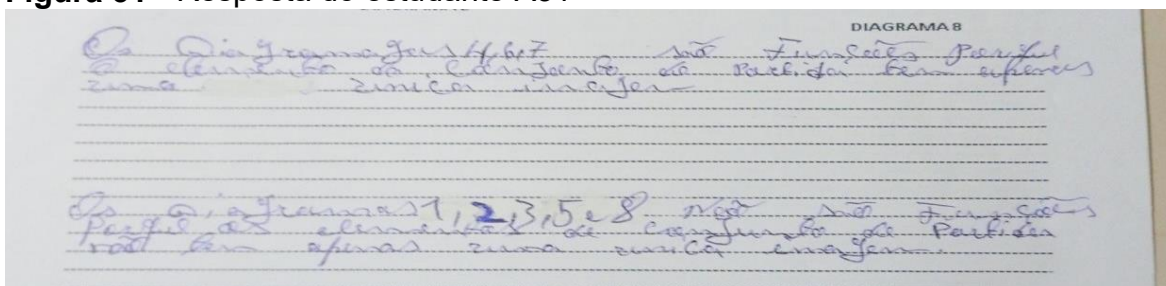
**Figura 30 - Resposta do estudante A27**



Fonte: Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

Nesta tarefa o estudante A27 chega a resposta esperada em algumas alíneas e em outras não chega à resposta esperada e, explica a razão da sua escolha, recorrendo a definição do conceito de função e justifica que, cada objeto tem uma única imagem. O estudante comete equívocos de acordo com a classificação de Radatz (1979), pois revela ter cometido alguma confusão na resolução da tarefa o que levou a não chegar a resposta esperada em todas.

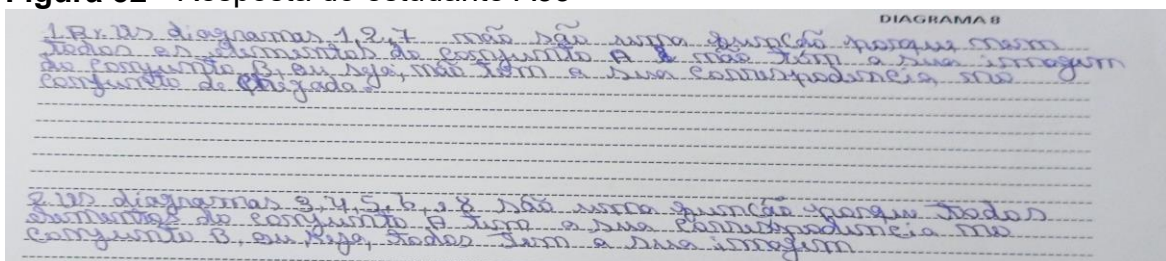
**Figura 31** - Resposta do estudante A31



**Fonte:** Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

Neste registro o estudante A31 não chegou a resposta esperada, entretanto no seu registro mostra ter conhecimentos das propriedades para que uma relação represente uma função. O estudante cometeu o erro por equívocos de acordo com Radatz (1979).

**Figura 32** - Resposta do estudante A33

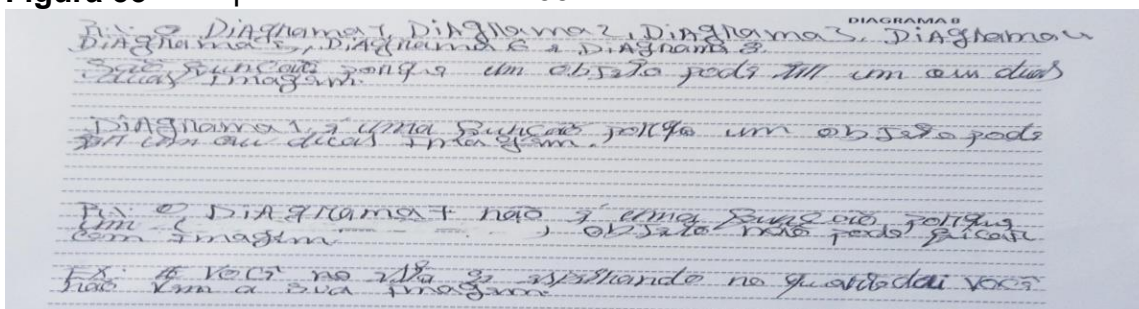


**Fonte:** Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

O estudante A33 identificou os diagramas que representam funções e os que não representam funções e comete alguma confusão quando considera alguns diagramas como os que representam função quando não. Entretanto ele tem dificuldade em justificar corretamente as respostas utilizando a definição como, quando diz “os diagramas representam uma função porque todos os elementos do conjunto A tem a sua correspondência no conjunto B”. Notamos que teve uma aprendizagem deficiente do conceito função porque não explica que, o objeto deve ter uma única imagem. O estudante comete erro de uma

aprendizagem deficiente de fatos de acordo com a classificação de Torre (2007).

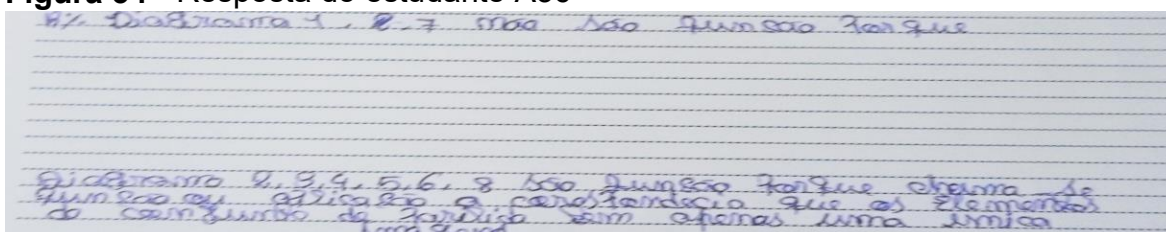
**Figura 33** - Resposta do estudante A35



Fonte: Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

O estudante A35 neste registro não obteve resposta esperada e não conseguiu justificar a sua resposta a partir da definição do conceito de função, “o diagrama não é função porque o objeto não pode ficar com imagem”. O estudante comete erros devido a associações incorretas ou rigidez de pensamento na classificação de Radatz (1979).

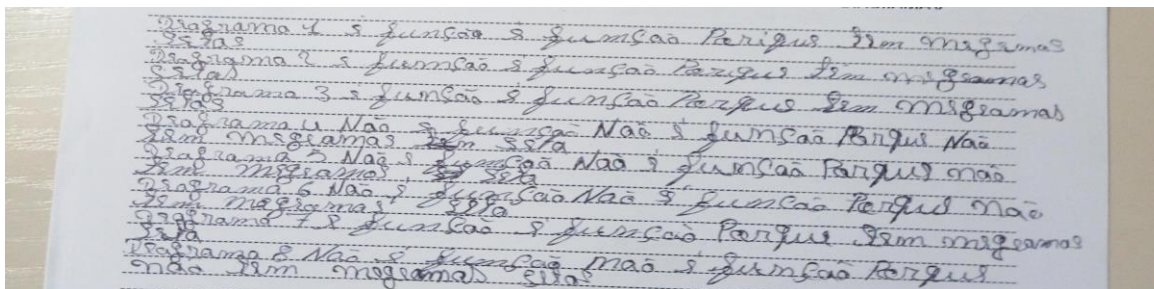
**Figura 34** - Resposta do estudante A36



Fonte: Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

Neste registro o estudante A36 não chega a resposta esperada, o estudante não conseguiu distinguir os diagramas que representam função e os que não representam função. Entretanto acreditamos que pode ter sido um erro provocado por uma associação incorreta ou rigidez de pensamento de acordo da classificação de Radatz (1979).

**Figura 35 - Resposta do estudante A37**



Fonte: Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

Neste registro o estudante A37 chega a resposta esperada em algumas e não chega em outras tarefas e não justifica a razão da sua escolha. Recorrendo a este fato nos dá indicações que ainda prevalece a dificuldade de definir do conceito de função, ou seja, comete erro conceitual de acordo a classificação de Torre (2007) que constitui um erro de entrada.

O Quadro 10 que se segue apresenta um resumo respostas das tarefas um pós-aplicação da oficina.

**Quadro 10 - Análise das respostas da tarefa um do TP1AO**

Resposta do aluno A4, e A23	Resposta do aluno A27, A31, A33, A35, A36 e A37	Aspectos comuns
<p>Os diagramas 3, 5 e 8 é que representam função e os diagramas 1, 2, 4, 6 e 7 não representam função.</p> <p>Justificação: “é função porque os elementos do conjunto de partida têm uma única imagem”.</p> <p>“Não representa função porque os elementos do conjunto de partida tem de mais de imagem no conjunto de chegada.</p>	<p>Estes não acertaram na totalidade a tarefa, mas apresentaram uma justificação da razão da sua escolha. E outros ficaram equivocados, pois não tiveram acertos e nem justificaram.</p> <p>Justificação: “é função porque cada elemento tem imagem”.</p> <p>“Não representa função porque cada objeto tem duas, três imagens”.</p>	<p>Constata-se que ambos têm a noção de que numa função, um objeto não deve possuir mais de uma imagem para a correspondência representar função.</p> <p>Mas não tem clareza das propriedades necessárias para que essas correspondências representem efetivamente uma função. Como no caso o aluno A23 que cometeu erro de definição.</p>
<p>Resposta esperada: os diagramas que representam função são: 3, 5, 6 e 8 porque para cada objeto do conjunto de partida tem uma única imagem no conjunto de chegada.</p> <p>Os diagramas 1, 2, 4 e 7 não representam função porque cada objeto de conjunto de partida tem mais de uma imagem e existem elementos do conjunto de partida que não tem imagem no conjunto de chega.</p> <p>Erro cometido: erro de linguagem, equívocos e associação incorreta ou rigidez de pensamento.</p>		

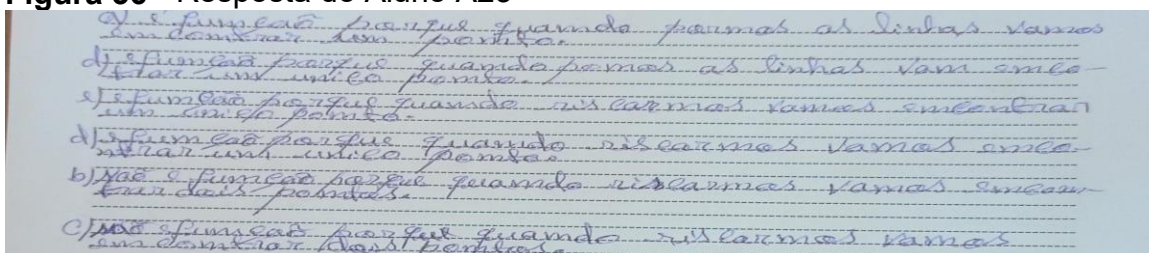
Elaboração: Autor

Assim, a partir dos registros verificamos que os estudantes têm a noção do conceito de função, consideram a representação por diagrama de Venn-Euler como função, se todos os elementos do conjunto de partida, possuírem uma imagem no conjunto de chegada, apesar das dificuldades que enfrentam em relação às condições para que a relação represente uma função. Outro aspecto que verificamos foi o erro cometido em comum, erro ligado à definição do conceito de função. Nos registros analisados os estudantes não destacam que, no conjunto de partida, não pode sobrar elemento sem imagem no conjunto de chegada.

#### 4.3.2 Análise das respostas da tarefa dois.

Nesta seção vamos analisar as respostas dos estudantes da tarefa dois das tarefas pós-aplicação da oficina.

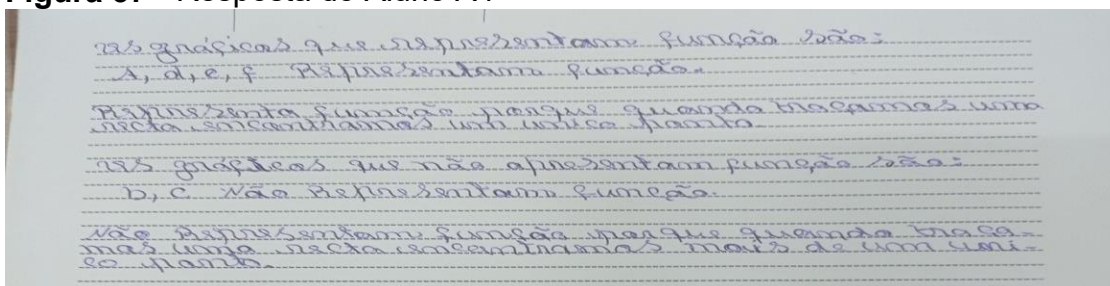
**Figura 36** - Resposta do Aluno A23



Fonte: Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

Neste registro verificamos que o estudante A23 reconheceu os gráficos que representam funções e os que não representam e tenta descrever a estratégia utilizada no reconhecimento dos gráficos apesar de não ter clareza dos procedimentos ele comete erro de linguagem de acordo com a classificação de Torre (2007).

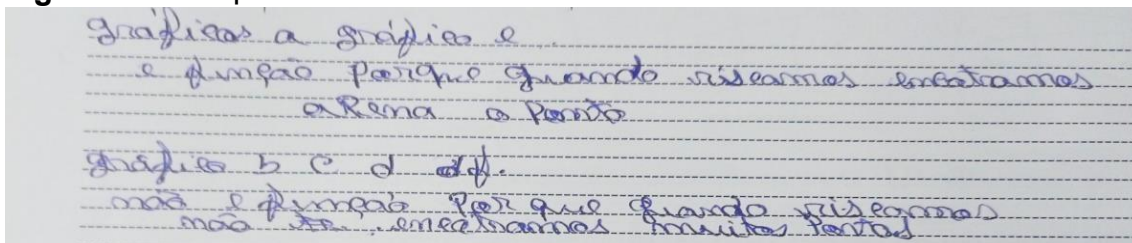
**Figura 37** - Resposta do Aluno A4



Fonte: Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

Neste registro o estudante A4 chegou à resposta esperada nesta tarefa porque identifica corretamente os gráficos que representam funções e descreve a estratégia utilizada de resolução.

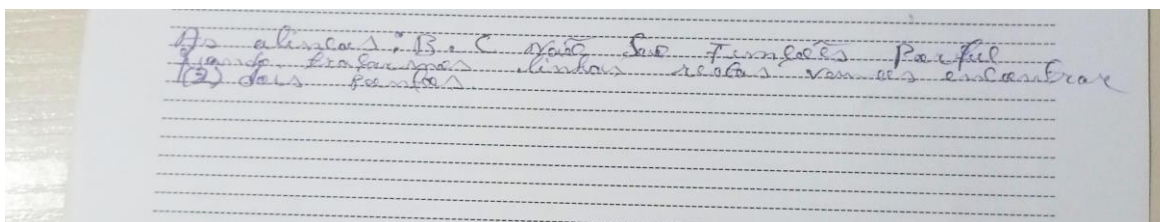
**Figura 38** - Resposta do Aluno A27



Fonte: Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

Olhando a resposta do estudante A27 mostrou dificuldades em reconhecer os gráficos que representam função e mostra ter domínio da estratégia de resolução da tarefa. De acordo com a classificação de Torre (2007) o estudante comete erro estratégico.

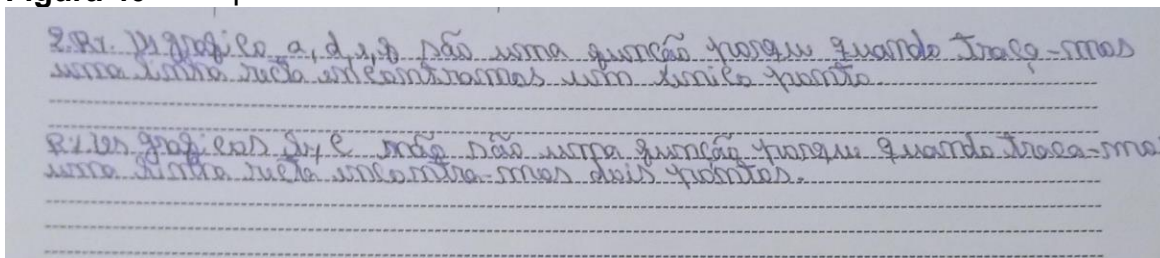
**Figura 39** - Resposta do Aluno A31



Fonte: Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

Este estudante mostrou dificuldades em reconhecer funções a partir da representação gráfica, tem dificuldade na utilização da estratégia para reconhecer funções, a partir das representações gráficas. De acordo com a classificação de Torre (2007) o estudante A31 comete erro estratégico.

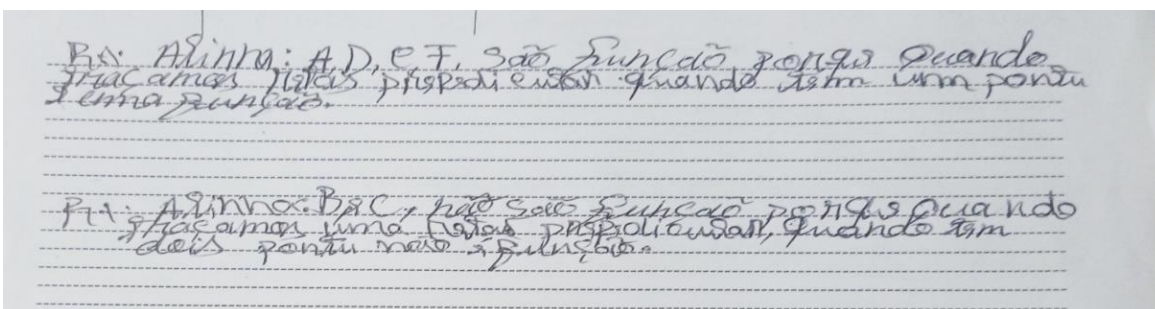
**Figura 40** - Resposta do Aluno A33



Fonte: Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

O estudante A33 dá resposta esperada, reconhecendo os gráficos que representam função e os que não representam função, ele utiliza uma estratégia de resolução.

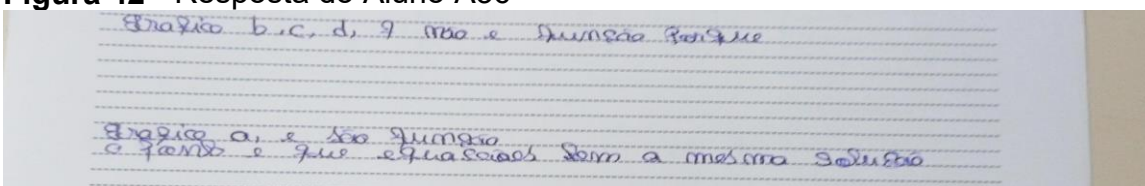
**Figura 41** - Resposta do Aluno A35



Fonte: Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

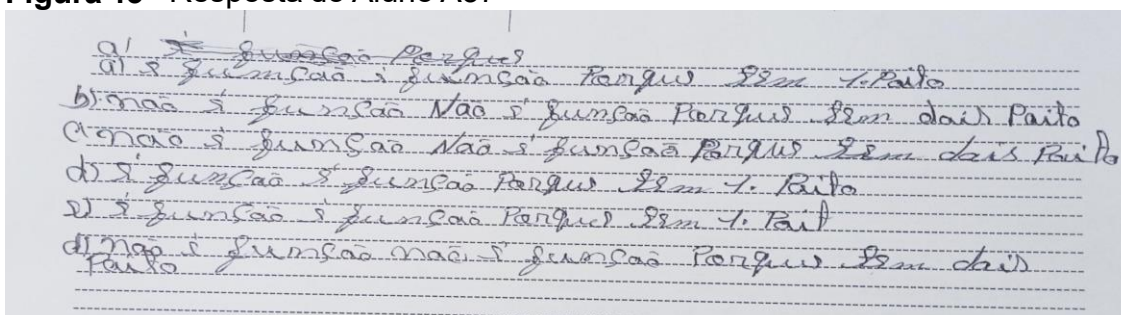
O estudante A35 neste registro demonstra ter a noção do o conceito de função e conhece a estratégia de resolução, pois explica os procedimentos utilizados para obter a resposta esperada.

**Figura 42** - Resposta do Aluno A36



Fonte: Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

Notamos que o estudante A36 tem dificuldades de reconhecer funções a partir das representações gráficas e na sua resposta não descreve os procedimentos de resolução. Comete erro conceitual de acordo com a classificação de Torre (2007).

**Figura 43** - Resposta do Aluno A37

**Fonte:** Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

O estudante A37 chega à resposta esperada, e verificamos que utilizou uma estratégia para facilitar o reconhecimento apesar de ter alguma dificuldade em explicar os seus procedimentos. Ele comete o erro de linguagem de acordo com a classificação de Torre (2007).

O Quadro 11 que se segue apresenta um resumo respostas das tarefas dois pós-aplicação da oficina.

**Quadro 11** - Análise das respostas da tarefa dois do TPAO

Análise da resposta do Aluno A4, A23, A33, A35, A37	Análise da resposta do aluno A27, A31, A36	Aspectos comuns
Estes estudantes reconheceram os gráficos que representam funções e explicam a estratégia usada na resolução.	Estes estudantes mostraram dificuldades no reconhecimento de funções a partir da representação gráfica.	Dificuldade em explicar o procedimento da estratégia utilizada.
<p>Resposta esperada:</p> <p>As alíneas a), b), e) e f) representam função porque quando traçamos retas paralelas em relação ao eixo vertical ou das ordenadas toca em único ponto do gráfico.</p> <p>As alíneas b) e c) não representam função porque quando traçamos retas paralelas em relação ao eixo das ordenadas toca em mais de um ponto.</p> <p>Erros cometidos: Erro de linguagem e erro estratégico</p>		

**Elaboração:** autor

#### 4.3.3 Análise da Tarefa três após aplicação da oficina

Nesta seção vamos analisar as respostas da tarefa Três das tarefas pós-aplicação da oficina.

**Figura 44** - Resposta do Aluno A23

Função é uma correspondência por que todos os elementos do conjunto de partida são imagem e todos tem apenas uma imagem. e a correspondência que os elementos do conjunto de partida tem apenas uma imagem.

Fonte: Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

O estudante A23 dá uma definição correta do conceito de função, o que nos leva a acreditar que compreendeu o conceito de função.

**Figura 45** - Resposta do aluno A4

É em sentido que uma função é aquela em que por exemplo: o conjunto A tem uma lei e uma correspondência no conjunto B, ou seja, os elementos do conjunto A tem uma única imagem no conjunto B.  
Os elementos do conjunto de partida tem uma única imagem no conjunto de chegada.

Fonte: Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

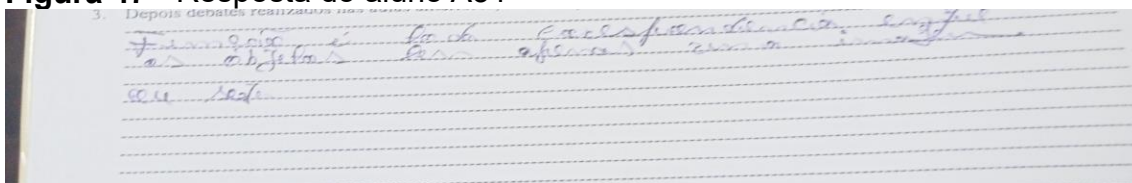
O estudante A4 revela ter noção do conceito de função, e identifica as condições que definem uma função apesar de não explicar com mais detalhes. Não explicou que, não deve sobrar elemento no conjunto de partida sem correspondente ou imagem no conjunto de chegada.

**Figura 46** - Resposta do aluno A27

função injetiva diz-se função injetiva

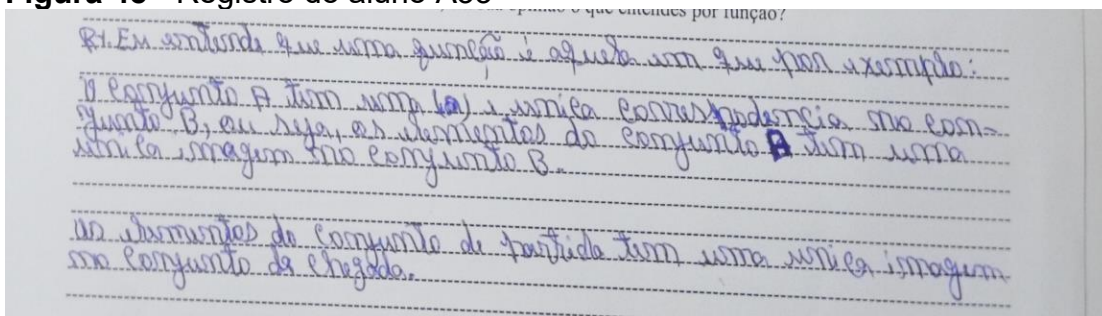
Fonte: Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

Neste registro o estudante A27 mostra estar equivocado na tarefa. O estudante não define o conceito de função e tenta classificar as funções o que nos leva a acreditar que pode ser por uma interpretação errada do enunciado da tarefa, entretanto ele comete erro de interpretação de acordo com a classificação de Lima (2010) e Ramos (2018).

**Figura 47 - Resposta do aluno A31**

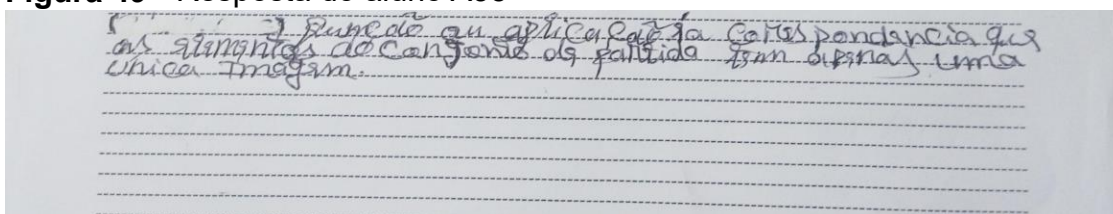
**Fonte:** Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

Neste registro o estudante A31 chega a resposta esperada, mas comete erro de definição de acordo com a classificação de Lima (2010) e Ramos (2018), ele não apresenta todas as propriedades na definição.

**Figura 48 - Registro do aluno A33**

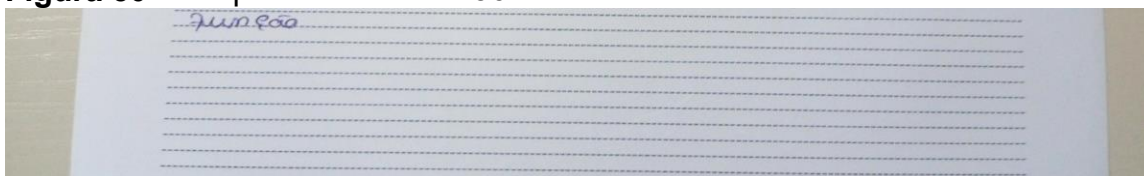
**Fonte:** Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

Neste registro verificamos que o estudante A33 tem noções de função, mas tem dificuldades em mencionar as propriedades que definem o conceito de função. O estudante comete erros de aprendizagem deficiente de acordo com a classificação de Radatz (1979).

**Figura 49 - Resposta do aluno A35**

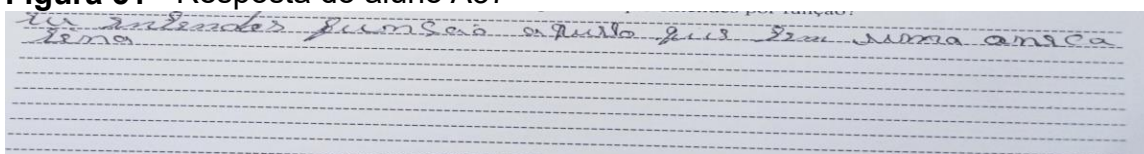
**Fonte:** Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

O estudante A35 chega à resposta esperada, ele define e deixa claro seu entendimento sobre o conceito de função.

**Figura 50** - Resposta do aluno A36

**Fonte:** Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

O estudante A36 não realizou a tarefa, e este fato pode ser analisado em vários pontos de vista, pode não ter compreendido o que certamente se pretendia fazer, não ter alguma noção da resposta, etc.

**Figura 51** - Resposta do aluno A37

**Fonte:** Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

O estudante A37 não definiu o conceito de função, o que pode ser por confusão criada no decurso da oficina ou aprendizagem deficiente do conteúdo.

**Quadro 12** - Análise das respostas da tarefa 3 do TPAO

Análise da resposta do aluno A4, A23, A31, A33 e A35,	Análise da resposta do aluno A27, A36 e A37	Aspectos comuns
Estes estudantes definem função como sendo aquela em que os elementos de partida têm uma única imagem no conjunto de chegada ou correspondência em que os elementos de partida têm uma única imagem.	Estes estudantes mostraram terem dificuldades em definir função.	Nota-se na produção escrita destes estudantes que têm dificuldades em mencionar as propriedades que definem uma função.
<p>Resposta esperada:</p> <p>Sejam A e B dois conjuntos, uma relação entre uma variável de <math>x \in A</math>, e uma variável <math>y \in B</math> é dita relação funcional se qualquer que seja <math>x \in A</math>, existe um único elemento <math>y</math> de B, que esteja na relação considerada. (Chaves; Carvalho, 2004) Ou seja, chama-se função a toda correspondência em que todos os elementos ou objetos do conjunto de partida têm uma única imagem ou um único correspondente no conjunto de chegada.</p> <p><b>Tipo de erros cometidos:</b> Erro de linguagem</p>		

**Elaboração:** Autor

O quadro 13 que se segue apresentamos os tipos de erros constatado nas produções dos estudantes nas tarefas diagnósticas e nas tarefas pós-aplicação das tarefas.

**Quadro 13:** Representação do tipo erros cometidos nas tarefas diagnósticas e nas tarefas pós-aplicação da oficina.

<b>Tipos de erros nas tarefas diagnósticas</b>	
Tarefa 1	Tarefa 2
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Erro conceitual; (Torre)</li> <li>• De definição (De Lima e Ramos)</li> <li>• Equívocos; (Radatz)</li> <li>• Erro devido a uma aprendizagem deficiente (Radatz)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Erro Estratégico; (Torre)</li> <li>• Linguagem; (Torre)</li> <li>• Interpretação; (De Lima e Ramos )</li> </ul>
<b>Tipos de erros nas tarefas pós-aplicação da oficina</b>	
Tarefa 1	Tarefa 3
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Erro de linguagem; (Torre)</li> <li>• Equívocos; (Radatz)</li> <li>• Erro devido associação incorreta ou rigidez de pensamento; (Radatz)</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Erro de linguagem; (Torre)</li> <li>• Erro estratégico; (Torre)</li> </ul>
Tarefa 3	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• Erro de linguagem; e Síntese (Torre)</li> </ul>	

**Elaboração:** Autor

Com base com o quadro acima verificamos que houve uma mudança nos tipos de erros que alunos cometem na tarefa diagnóstica e nas tarefas pós-aplicação da oficina, prevalecendo os erros de linguagem, erros devido associação incorreta e erro estratégico. De acordo com os erros que constam no quadro 13, o Quadro 14 que se segue traz uma comparação da evolução das respostas desde as tarefas diagnósticas e as tarefas pós-aplicação da oficina.

**Quadro 14 - Análise comparada da evolução dos Estudantes nas tarefas diagnósticas e tarefas pós-aplicação da oficina**

<b>Tarefa um</b>		
<b>Estudante</b>	<b>Tarefa diagnóstica</b>	<b>Tarefa pós-aplicação da oficina</b>
A4	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Representa função porque corresponde a um ponto;</li> <li>- Não representa função porque corresponde a dois pontos também não é objeto;</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Representam uma função porque os elementos do conjunto de partida tem uma única imagem;</li> <li>- Não representam função porque os elementos do conjunto de partida têm mais de uma única imagem;</li> </ul>
A23	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Todos os objetos têm imagens no grupo de chegada;</li> <li>- Não representam função porque os objetos não devem ter duas imagens, ou o grupo de partida não pode ter dois lugares de chegada;</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Diagrama representa função porque cada objeto tem imagem;</li> <li>- Representa função porque tem 3 pontos;</li> <li>- Não representa porque tem 3 imagens;</li> <li>- Não é função porque não tem imagem;</li> </ul>
A27	<p>É função porque todos os objetos das correspondências tem único elemento;</p> <p>Não representa função porque nem todo elemento tem duas imagens em B. Há pelo menos um elemento com mais de uma imagem;</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- É função porque é uma aplicação ou correspondência, os elementos do conjunto de partida tem apenas uma imagem no conjunto de chegada;</li> <li>- Não função porque todos os elementos do conjunto de partida tem uma única imagem;</li> </ul>
A31	<ul style="list-style-type: none"> <li>- São funções porque o elemento do conjunto de partida tem apenas uma imagem;</li> <li>- Não São funções porque o elemento do conjunto de partida não tem apenas uma imagem;</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Representam função porque os elementos do conjunto de partida tem apenas uma imagem;</li> <li>- Não representam função porque os elementos do conjunto de partida não tem apenas uma imagem;</li> </ul>
A33	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Representam uma função porque os elementos do conjunto A relacionam-se com os elementos do conjunto B, ou seja, eles se correspondem com elementos do conjunto B;</li> <li>- Não representam função porque os elementos do conjunto A, o objeto tem várias imagens, ou seja, os elementos do conjunto B não se relacionam com os elementos do conjunto A;</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Não representam função porque nem todos os elementos do conjunto A não tem imagem no conjunto B, ou seja, não tem a sua correspondência no conjunto de chegada;</li> <li>- Representam função porque todos os elementos do conjunto A tem imagem no conjunto B, ou seja todos tem a sua imagem;</li> </ul>
A35	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Representa função porque</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Representam funções porque um</li> </ul>

	<p>todo elemento da correspondência tem único elemento;</p> <p>- Não representa função Porque todos os elementos tem pelo menos um elemento com mais de uma imagem;</p>	<p>objeto pode ter uma ou dois imagem;</p> <p>- Não representa uma função porque um objeto não pode ter uma imagem;</p>
A36	<p>- Representa função "A" objeto diferente tem imagem diferente;</p> <p>É função porque tem conjunto de partida e conjunto de chegada;</p>	<p>- Representa função porque se chama função ou aplicação a correspondencia em que os elementos de partida têm apenas uma única imagem;</p> <p>Não representa função...</p>
A37	<p>- É função porque não tem menos;</p> <p>- Não é função porque têm menos;</p>	<p>- é função porque tem imagem;</p> <p>-Não é função porque não tem imagem;</p>
<b>Tarefa dois</b>		
A4	<p>- Representam função porque tem um único ponto;</p> <p>- Não função porque o gráfico tem mais de um ponto;</p>	<p>- Representa uma função porque quando traçamos uma reta encontramos um união ponto;</p>
A23	<p>- O gráfico representa função porque tem um ponto;</p> <p>- Os gráficos não representam funções porque têm dois pontos;</p>	<p>- É função porque quando traçarmos linhas vai encontrar um ponto.</p> <p>- Não é função porque quando traçarmos linhas vão encontrar dois pontos;</p> <p>- Não Representam uma função porque quando traçamos uma reta encontramos mais de um ponto;</p>
A27	<p>- Não representa função porque...</p>	<p>- É função porque quando riscamos encontramos um ponto;</p> <p>- Não representam função porque quando riscamos encontramos muitos pontos;</p>
A31	<p>-Representam funções porque uma reta vai encontrar um ponto;</p> <p>- Não representa função porque se traçarmos uma reta vamos encontrar dois pontos;</p>	<p>- Não representam função porque quando traçamos linhas retas encontrar dois pontos;</p>
A33	<p>- Representam uma função porque ao traçar uma linha paralela y encontramos o ponto que corta os seus eixos;</p> <p>- Não representa uma função porque quando traçamos uma linha paralela ao y encontramos dois pontos;</p>	<p>- Representam uma função porque quando traçamos uma reta encontramos um único ponto;</p> <p>- Não representam uma função porque quando traçamos uma reta encontramos dois pontos;</p>
A35	<p>- Não representa função</p>	<p>- São funções porque quando</p>

	porque encontra dois pontos; - É função porque tem dois pontos;	traçamos retas perpendiculares, quando tem um ponto é uma função;
A36	- Não representa função porque não tem ponto; - É função porque tem ponto;	- É função porque a equação tem a mesma solução;
A37	- Representa função porque tem um ponto; - Não representa função porque tem dois pontos;	- É uma função porque tem um ponto; - Não é função porque tem dois pontos;
<b>Tarefa três pós- aplicação da oficina</b>		
A4, A23, A31, A33, A35	- Elementos do conjunto de partida são objetos e todos tem apenas uma única imagem no conjunto de Chegada. - Todos os elementos do conjunto de partida são objetos e tem apenas uma imagem no conjunto de chegada.	
A27, A36, A37	Não responderam a tarefa 3.	

**Fonte:** Pesquisa In loco realizada em outubro de 2022

Nesta análise constatamos que nas tarefas diagnósticas os estudantes cometeram erros conceituais, linguagem e erro estratégico; de acordo com o modelo de análise de erros de Torres (2007), erros de definição, Interpretação; de acordo com a classificação de De Lima (2010) e Ramos (2018) e erros de Equívocos e Erro devido a uma aprendizagem deficiente na classificação de Radatz (1979). O cometimento desses erros, acreditamos ser insuficiência ou inadequação de informação sobre o conceito de função, notamos igualmente o cometimento de erro de linguagem, pois verificamos pouca clareza e ambiguidade nas suas respostas devido a dificuldades de escrita.

Além disso, notamos nos registros das tarefas pós-aplicação da oficina erros devido a associação incorreta, interpretação e erros estratégicos devido a deficiência na compreensão léxica conceitual do conteúdo e a falta de domínio sobre a informação, ou seja, as propriedades na definição do conceito de função. Apesar dos erros cometidos nas tarefas pós-aplicação da oficina notamos uma diminuição dos tipos de erros anteriormente cometidos nas tarefas diagnósticas. Apesar dessa diminuição verificamos a prevalência de alguns erros de acordo com a classificação de Torre tais como, erro de linguagem, síntese, Equívocos, erro devido associação incorreta ou rigidez de pensamento e estratégico, pois os estudantes não foram capazes de isolar as propriedades do

conceito de função o que acreditamos que cometeram este tipo erros por uma leitura incorreta ou mesmo as informações sobre o conceito de funções não foram devidamente compreendidos.

#### 4.4 Conclusão das análises

Das análises feitas dos dois instrumentos de coleta de dados, constatamos a ocorrência de erros nas respostas nas tarefas diagnósticas e nas tarefas pós-aplicação da oficina.

Nas produções escritas dos estudantes nas tarefas diagnósticas, verificamos com maior frequência erros de definição e erros de linguagem, erro devido associação incorreta ou rigidez de pensamento, erro estratégico e erro de síntese. Contudo a constatação de erros nas tarefas diagnósticas ajudou a definir o tipo de tarefas a serem trabalhadas na oficina. Como refere Azevedo (2009), é fundamental que o professor tenha o conhecimento do tipo de erros que os estudantes cometem na resolução de tarefas, para ajudar na escolha de tarefas ou atividades que contribuam para a construção do conteúdo a ser trabalhado.

Na análise de tarefas pós-oficina, os resultados mostraram que os estudantes na sua maioria obtiveram respostas esperadas. Todavia observamos que tiveram dificuldades em sintetizar o conteúdo aprendido devido a erros de linguagem e associação incorreta. Apesar destas dificuldades verificadas, os resultados mostraram uma diminuição dos erros de definição e de estratégia cometidos nas tarefas diagnóstica mostrando terem compreendido o conceito de função.

Torre (2007, p. 123) afirma que “Embora sejam os erros de entrada e de organização os que mais devem atrair a atenção do professor, por suas repercursões cognitivas, o aluno comete outros erros igualmente sancionados nas avaliações”. Além disso, o mesmo autor coloca que “Os erros de Entrada e de organização requerem uma maior orientação, nos de execução basta proporcionar pistas indicativas no processo” (p.123). Assim, é importante que os professores estejam atentos a outros tipos de erros no sentido de proporcionar uma aprendizagem efetiva do conceito de função.

Entretanto, com a melhora na compreensão do conceito de função as dificuldades e erros que verificamos nas tarefas durante a oficina assim como pós- aplicação da oficina sugerimos que os professores ao introduzir o

conceito de função, apliquem múltiplas tarefas sobre representação de funções por diagrama de Venn-Euler e de gráficos e, no ato de resolução dessas tarefas, o professor deve se ocupar somente em apoiar os alunos e verificar a possível ocorrência de erros como, por exemplo, erros devido a associações incorretas ou rigidez de pensamento de acordo com a classificação de erros de Radatz (1979).

Segundo Paulo Freire (1996, p. 47) “o professor deve criar as possibilidades para a sua própria produção”. De acordo o autor, este procedimento, o professor em sala de aula pode oportunizar a compreensão e aprendizagem do conceito de função por um lado e, por outro lado, o professor deve identificar os possíveis erros e dificuldades dos estudantes ao lidarem com o conceito de função, pois essas dificuldades e erros podem ajudar na seleção de tarefas, e de uma metodologia que ajude na compreensão do conteúdo a ensinar e na elaboração de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem.

## CAPÍTULO V

Neste capítulo apresentamos uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem ampliada para o ensino do conceito de função, descrevendo as ações a serem desenvolvidas por professores e estudantes na sala de aula, considerando a THA anterior como base.

### 5.1 Teoria Hipotética de Aprendizagem ampliada para o ensino e aprendizagem do conceito de funções

Com base na THA anterior e as ações desenvolvidas durante a oficina e das análises de registros das produções dos estudantes, considerando as dificuldades e erros que eles apresentaram, propomos uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem ampliada, visando minimizar os erros e dificuldades no ensino e aprendizagem do conceito de função.

#### 5.1.1 Parte I: Reconhecimento de funções a partir da representação por diagrama de Venn-Euler

Nesta fase o professor desenvolve um diálogo com os estudantes criando um ambiente de interação entre estudantes e professor/estudantes durante a realização das tarefas voltadas a representação de funções por meio de diagramas.

**Prof:** Já ouviu falar de um diagrama?

**Est:** Sim.

**Prof:** Pode mencionar os que conheces?

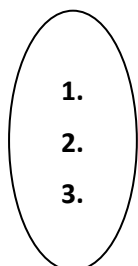
**Est:** Diagrama de Venn-Euler.

**Prof:** Para que serve um diagrama?

**Est:** Servem para representar conjuntos.

**Prof:** Represente um diagrama de cinco números.

**Est:** Representa



**Prof:** Que tipo de diagrama é este?

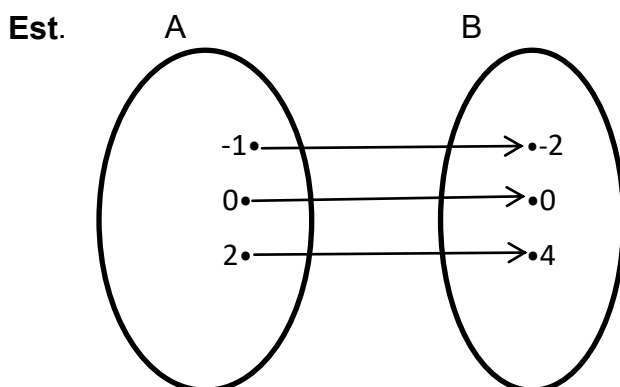
**Est:** Diagrama de Venn

**Prof:** Já ouviu falar de correspondência entre os elementos de dois conjuntos?

**Est:** Sim

**Prof:** Então utilizando um diagrama de Venn-Euler faça corresponder elementos do conjunto A aos elementos do conjunto B. O professor pede para resolver a seguinte tarefa.

Dados dois conjuntos  $A = \{-1, 0, 2\}$  e  $B = \{-2, 0, 4\}$ , associar cada elemento de A ao seu dobro em B.



**Prof:** Tem algum elemento sem correspondente?

**Est:** Não, cada elemento tem o seu correspondente noutro conjunto.

**Prof:** Como vocês vêm às setas indicam a correspondência que se estabelece entre os elementos do conjunto A com elementos do Conjunto B. O conjunto A é designado por conjunto de partida e o conjunto B por conjunto de chegada.

**Prof:** Ok. Vamos passar para a tarefa seguinte.

Considere uma máquina de duplicar números. Duplica os números 1, 2 e 3. Utilizando o diagrama de Venn-Euler.

O que percebeu nessa tarefa?

**Est:** Obtemos os elementos do conjunto de chegada são obtidos a partir do dobro dos elementos de partida.

**Prof:**

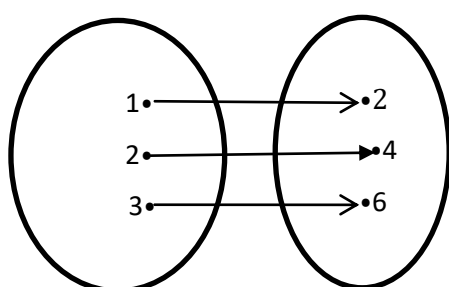
Escreva uma correspondência entre os conjuntos dos números 1, 2, e 3 com o conjunto dos resultado obtidos.

O que é em sua opinião, a máquina de duplicar números?

**Est:** Na minha opinião a máquina de duplicar significa uma regra para obter elementos do conjunto de chegada.

**Prof:** Faça corresponder a cada elemento e o seu dobro num diagrama de Venn-Euler. O que você verificou?

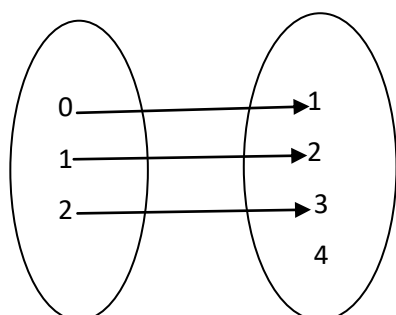
**Est:** Resolve



**Prof:** Agora vamos passar para a terceira tarefa.

Associar cada elemento do conjunto  $A=\{0,1,2\}$  ao valor igual no conjunto  $B=\{1,2,3,4\}$  num diagrama de Venn-Euler.

**Est.** Resolve



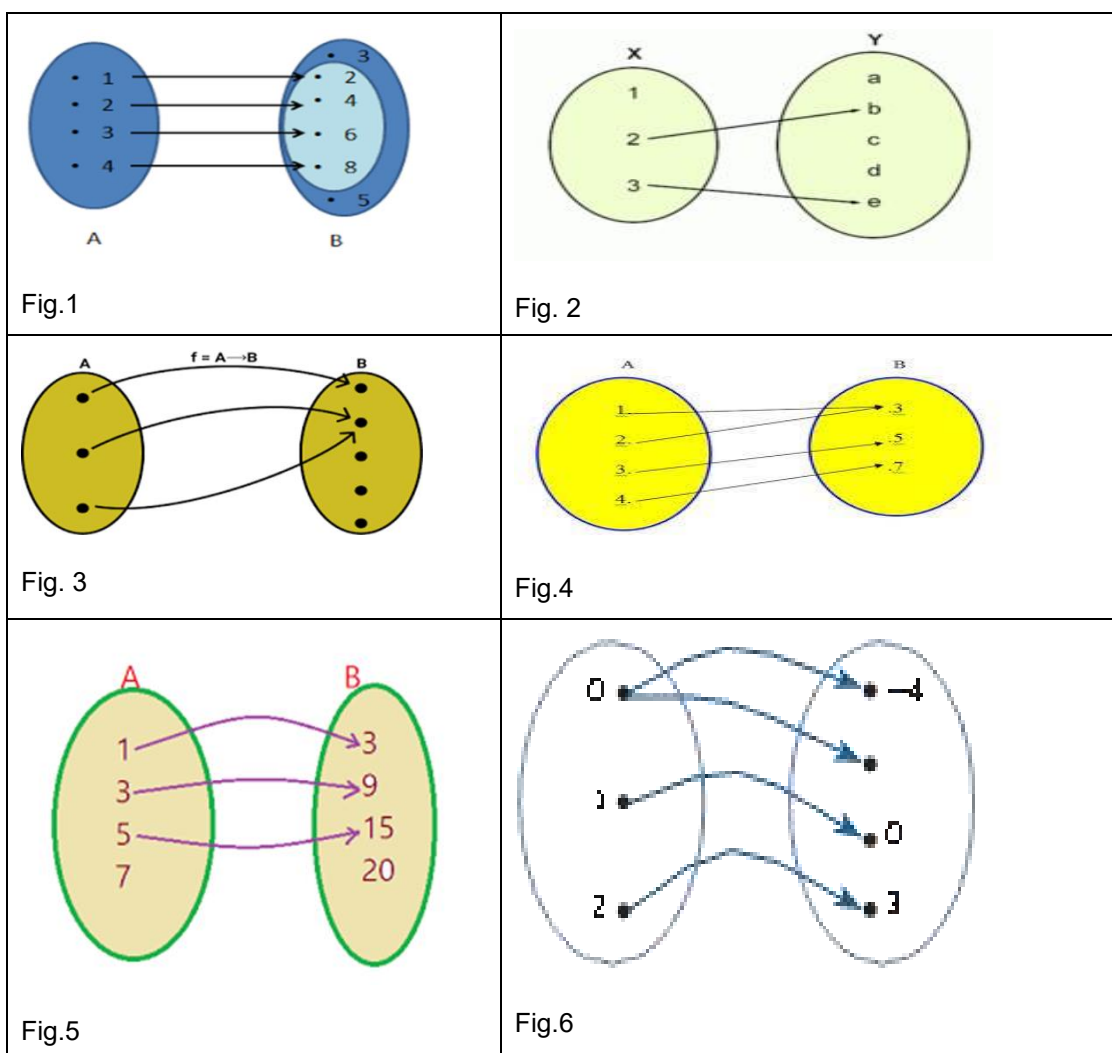
**Prof:** Verifica a sua resposta e compare com as resoluções das tarefas anteriores.

**Est:** Temos o elementos do conjunto A que não tem o seu correspondente no segundo conjunto B e temos um elemento do conjunto B que não corespondente no conjunto A.

**Prof:** A que conclusão chegou?

**Est:** Significa que segundo caso não existe relação entre o conjunto A e o conjunto B.

**Prof:** Das figuras que seguem diga quais os que representam função e os que não representam função. Justifique a sua resposta.



**Est:** Os diagramas que representam funções são as fig. 1, fig.3 e fig.4. Estes diagramas representam uma função porque todos os elementos de partida têm um correspondente no conjunto de chegada e é único. E as fig.2, fig.5 e fig. 6 não representam função porque alguns elementos do conjunto de partida não têm correspondentes e outros têm dois elementos correspondentes no conjunto de chegada.

**Prof:** Muito certo

**Prof:** Uma correspondência de dois conjuntos representa uma função, se todos os elementos do conjunto de partida possuírem um único correspondente no conjunto de chegada, então, a relação desses conjuntos representa uma função caso contrário, a correspondência não representa função.

**Prof:** Verifique as tarefas anteriores e diga qual representa função e quais não representam função e justifique a sua resposta.

### 5.1.2 Parte II: Reconhecimento de funções a partir de representação gráfica

Nesta segunda fase da trajetória Hipotética de Aprendizagem ampliada o professor desenvolve um diálogo aberto com os estudantes criando um ambiente de interação entre estudantes e professor/estudantes durante a realização das tarefas voltadas a representação de funções por meio de gráficos.

**Prof:** Já ouviu falar de gráfico?

**Est:** Sim,

**Prof:** Aonde? Quem? Qual é a sua utilização

**Est:** Na aula de Matemática e não sei para quê servem.

**Prof:** Como é obtido?

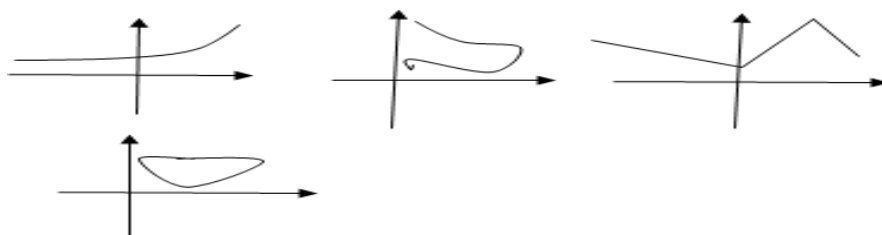
**Est:** Através de problemas de Matemática

**Prof:** Como reconhecer se um gráfico representa uma função?

Explicação do professor:

- Se qualquer reta perpendicular ao eixo  $Ox$  interceptar o gráfico em um único ponto; portanto, o gráfico representa uma função de  $X$  em  $Y$ .
- Se existem retas perpendiculares a  $Ox$  que interceptam o gráfico em mais de um ponto; portanto, o gráfico não representa uma função de  $X$  em  $Y$ .

Tarefa: Quais destas figuras representam função representam função?



**Est:** As figuras que representam função são o primeiro e o terceiro gráficos contados na horizontal.

**Prof:** Porque o primeiro e o terceiro é que representam função?

**Est:** A primeira e a terceira figura representam funções porque se traçarmos qualquer reta paralela ao eixo  $y$  interceptará o gráfico em apenas um ponto.

**Prof:** Pode explicar a diferença?

**Est:** Porque outros não têm a forma de uma reta.

**Prof:** Considere o eixo  $X$  como conjunto de partida e eixo  $Y$  o conjunto de chegada. O que consegue enxergar?

**Est:** Vejo que para construir o gráfico é preciso unir os elementos de  $X$  com os elementos de  $Y$ .

**Prof:** Que método usou para chegar a sua resposta?

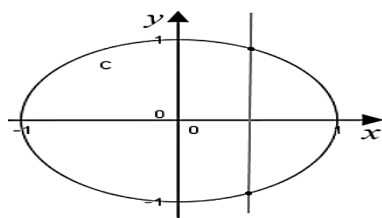
**Est:** Desenhando retas perpendiculares ao eixo  $X$  e outras perpendiculares a  $Y$  que se vão interceptar num ponto duas a duas formando pontos e quando unimos os pontos construímos uma linha.

**Prof:** Muito bom!

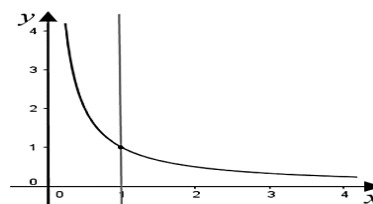
**Prof:** Já que vocês sabem como se constroem as linhas que representam o gráfico, para reconhecer se o gráfico representa uma função ou não, existe uma condição, que ajuda a verificar se um gráfico no plano cartesiano representa ou não função.

O professor explica o seguinte: considerando o gráfico da relação  $f$  de  $X$  em  $Y$ , se traçarmos reta paralela ao eixo das ordenadas orientada pelo ponto  $(x, 0)$ , em que  $x \in X$ , deve sempre intersectar o gráfico de  $f$  em um único ponto, então esse gráfico representa uma função. Se a paralela, nessas condições, intersectar ou cruzar o gráfico em mais de um ponto, o gráfico não representa uma função.

No gráfico que não representa função, a reta cortará em dois pontos a curva, pois isso significa que a relação está levando um elemento do conjunto de partida  $X$  em duas imagens que são dadas pelas interseções da reta com a curva, como se vê nos graficos 1 e 2.

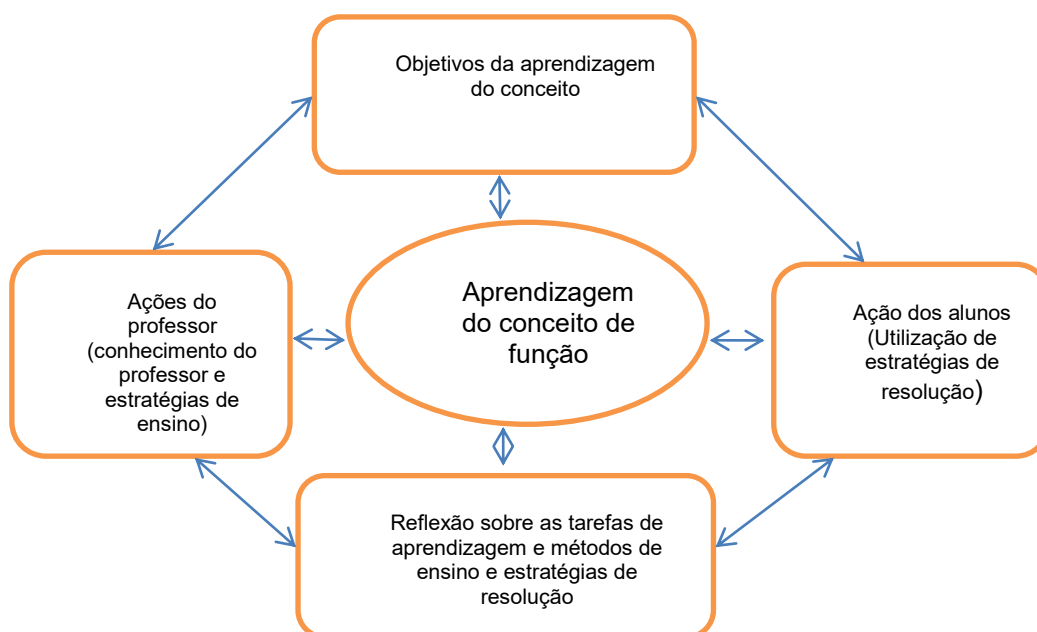
**Gráfico 1 - Não representa função**

Fonte: Autor

**Gráfico 2 - Representa função**

Com este encaminhamento encerramos a nossa Trajetória Hipotética Aprendizagem ampliada, que está sintetizada na figura 52 que segue:

**Figura 52 - Esquema da Trajetória Hipotética de Aprendizagem ampliada para aprendizagem do conceito de função**



Fonte: Autor (adaptado de Simon 1995)

O esquema explica a relação que existe entre os elementos a serem levados em conta no processo de ensino e aprendizagem do conceito de função. O processo de ensino e aprendizagem para que ele ocorra, devem ser conhecidos alguns elementos que segundo Oliveira (2007, p.21)

[...] o ato de planejar exige aspectos básicos a serem considerados. Um primeiro aspecto é o conhecimento da realidade daquilo que se deseja planejar, quais as principais necessidades que precisam ser trabalhadas; para que o planejador as evidencie faz-se necessário fazer primeiro um trabalho de sondagem da realidade daquilo que ele pretende planejar, para assim, traçar finalidades, metas ou objetivos daquilo que está mais urgente de se trabalhar.

De acordo com o autor, este esquema estabelece as relações começando nos objetivos da aprendizagem estabelecendo relação com ações do professor (conhecimento professor e estratégias de ensino) que por sua vez se relacionam com as ações dos alunos (Utilização de estratégias de resolução) que essas ações culminam com uma reflexão da prática do professor e alunos sobre as atividades realizadas na sala de aula a respeito das tarefas de aprendizagem (métodos de ensino e estratégias de resolução), o que, por fim, promove a aprendizagem do conceito de função.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

As informações levantadas, ancoradas no referencial teórico e nos instrumentos utilizados para o levantamento de dados, permitem determinar alguns pressupostos. O objeto deste estudo foi o conceito de função focalizando o reconhecimento de funções por meio de diagramas de Venn-Euler e de gráficos no âmbito do ensino e aprendizagem de funções na 8ª classe. As informações analisadas até o momento apontam que as dificuldades verificadas após a administração das tarefas diagnósticas, e quando da aplicação da oficina, revelam uma alteração crescente em termos quantitativos no que diz respeito a estudantes que chegaram a respostas corretas e, diminuiu o número de estudantes que obtiveram todas as respostas erradas, em uma porcentagem de 75% para 28% na tarefa 1 e de 55% para 15% na tarefa 2. Entretanto em termos qualitativos, notamos a partir das respostas dadas nos registros dos dois instrumentos aplicados, que houve uma melhora na compreensão do conceito de função.

De acordo com as respostas nas tarefas diagnósticas, os estudantes cometeram o erro conceitual, de definição, equívocos, erro devido a uma aprendizagem deficiente, erro estratégico, erro de linguagem e erro de interpretação.

Entretanto, com a aplicação da oficina, auxiliada com a THA, os participantes mostraram uma evolução, na consistência das suas respostas e nos exemplos que deram nos seus depoimentos.

A qualidade das intervenções na oficina revelou uma evolução, pois as resoluções, os depoimentos e os exemplos dos estudantes, mostram ter mudado o quadro de construção do seu próprio conhecimento, ou seja, verificamos uma diminuição do número de estudantes que não obtiveram respostas desejadas.

Além do mais, verificamos nas ações durante a oficina, que os registros analisados pós-aplicação da mesma revelam uma melhora, como por exemplo, os estudantes conseguiram reconhecer funções a partir de representações por diagrama de Venn-Euler, assim como, por gráficos e utilização de uma estratégia de resolução.

Este fato nos leva a acreditar que, com aplicação da oficina, auxiliada com a Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) como metodologia, ajudou para o reconhecimento de funções por meio de diagramas de Venn-Euler e de gráficos. Contudo, vale ressaltar que apesar da melhora que verificamos, ainda prevalecem erros tais como: erros de erro de linguagem, equívocos, erro devido associação incorreta ou rigidez de pensamento síntese e erro estratégico.

Verificamos, por conseguinte, que os estudantes não aplicaram uma estratégia para ajudar na resolução nas tarefas diagnósticas. Este fato veio a mudar nas tarefas pós-aplicação da oficina, porque as suas produções escritas mostram que os estudantes utilizaram estratégias de resolução mesmo revelando dificuldades em explicar os procedimentos. Com tudo, devido a essas dificuldades a aplicação de uma estratégia de resolução foi considerada na Trajetória Hipotética de Aprendizagem ampliada para ajudar na compreensão do conceito de função.

Num contexto geral concluímos que os estudantes melhoraram as respostas dadas nas tarefas pós-aplicação da oficina em relação às respostas nas tarefas diagnósticas.

Finalizamos a nossa dissertação com o sentimento de que para ultrapassar o erro do estudante no processo do ensino e aprendizagem é importante o envolvimento profundo do professor, pois é ele quem pode encontrar formas adequadas que proporcionem ao estudante a superação dos erros.

Além disso, sentimos igualmente que se analisarmos novamente os registros trabalhados, podemos chegar a novas constatações sobre o entendimento dos estudantes sobre o conceito de função. Com essa nova constatação abre-se mais uma possibilidade de outros estudos mais aprofundados a respeito do entendimento dos estudantes neste tema.

## REFERÊNCIAS

- ANDRINI, A. **Praticando matemática**. 3 ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2012. (Coleção Praticando Matemática)
- AUSUBEL, D.P. **The psychology of meaningful verbal learning: An introduction to school learning**. 1 ed. New York and London: Grune and Stratton. 255p, 1963.
- AZEVEDO, D. S. **Análise de Erros Matemáticos: Interpretação das respostas dos alunos**. 2009. 65 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto de Matemática – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, 2009.
- BANYANKINDAGYE, Jacques, **Análise comparativas de práticas avaliativas dos currículos Moçambicano e Francês: O caso de apoio de recuperação dos alunos com dificuldades de aprendizagem de Matemática**. Dissertação apresentada no Departamento de Educação em Ciências Naturais e Matemática, Universidade Eduardo Mondlane, Maputo, Outubro 2012.
- BARRETO, Marina Menna. **Tendências atuais sobre o ensino de funções no Ensino Médio**. Artigo adaptado da dissertação de mestrado Matemática e Educação Sexual: modelagem do fenômeno da absorção/eliminação de anticoncepcionais orais diários (Menna Barreto, 2008).
- BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. Tradução: Luis Antero Reto, Augusto Pinheiro. 2ª Reimp. Da 1ª edição. São Paulo: Edições 70, 2011.
- BETA, J. M. **As principais mudanças ocorridas na educação em Moçambique no período pós-independência e o trabalho docente na voz de um educador**. 2015. Dissertação (Mestrado) - Universidade do Vale do Itajaí, Programa de Pós- Graduação em Educação. Santa Catarina.
- BIEHL, Juliana Volcanogro. **A escolha do livro didático em matemática**; In: X Encontro Gaúcho de Educação Matemática; Injuí-RS; 2009.
- BOGDAN, R. e BIKLEN, S. (2010). **Investigação Qualitativa em Educação: Uma Introdução à Teoria e aos Métodos**. Porto: Porto Editora.
- BOTELHO, L.; REZENDE, W. **Um breve histórico do conceito de função**. Cidade: editora, p. 64–75, 2011.
- BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomides. São Paulo: Edgard Blücher, 1999.
- BURIASCO, R, L, C de. **Sobre a Resolução de Problemas (I)**. Ano 1, n.º5. Secretaria Municipal de Educação, Londrina, 1995.
- BURIASCO, R. L. C. **Análise da produção escrita: a busca do conhecimento escondido**. In: XII ENDIPE - ENCONTRO NACIONAL DE DIDÁTICA E

PRÁTICA DE ENSINO, 2004, Curitiba. *Anais...* Curitiba, 2004. CD-ROM.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.** v 2. Brasília: MEC/SEB, 2006.

CAMARGO, Bruna de Cassia Soares. **Uma proposta de material de apoio para o ensino da função afim.** - Campos dos Goytacazes, RJ, 2019. C172. 213 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, Centro de Ciência e Tecnologia, 2019.

CAMPOS, Claudinei José Gomes. **Método de análise de conteúdo: ferramenta para a análise de dados qualitativos** no campo da saúde. Revista Brasileira de Enfermagem, Brasília (DF), v. 57, n. 5, p. 611-614, set./out. 2004.

CAPORRINO, Cláudia Gonçalves. **Materiais didático-pedagógicos como recurso de aprendizagem para alunos com necessidades educacionais especiais: caminhos e possibilidades.** Produção Didática-Pedagógica Professor PDE, 2010

CHAVES, M. I. de A.; CARVALHO, H. C. de. **Formalização do conceito de função no ensino médio: Uma sequência de ensino-aprendizagem.** Julho 2004. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática.

CARVALHO, Diego Fogaça; FERNANDES, Renata Karoline; ROSSETTO, Hallynnee Héllenn Pires; RAMOS, Daiany Cristiny; BARBA, Alessandra Negrini Dalla; RIBEIRO, Mariana da Silva Nogueira e FIGUEIREDO, Adriana Giarola Ferraz. **A incesão da trajetória hipotética de aprendizagem na educação à distância:** Relato de práticas realizado em um curso de Licenciatura em Matemática. Londrina/PR Maio/2018

CURY, H. N. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos.** Belo Horizonte: Editora Autêntica. 2007.

CURY, H. N. **Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos.** 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. Coleção Tendências em Educação Matemática.

CURY, H. N. **Pesquisas em análise de erros no ensino superior: retrospectiva e novos resultados.** In: FROTA, M.C.R. E NASSER, L (Org.). Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates: Recife: SBEM, 2009. p.265.

CURY, H. N. **As concepções de Matemática dos professores e sua forma de considerar o erro dos alunos.** Porto Alegre, Tese de Doutorado na Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1994.

CORREIA, Carlos Eduardo Felix. **Os Erros no Processo Ensino/Aprendizagem em Matemática.** EDUCAÇÃO: Teoria e Prática - v. 20, n.34, jan.-jun.-2010, p. 169-186.

- DIEUDONNÉ, J. A. **Formação da matemática contemporânea**. Tradução de J. H. von Hafe Perez. Lisboa: Dom Quixote, 1990.
- DOMINGUES, Hygino H; IEZZI, Gelson. **Álgebra Moderna**. 5ª edição. São Paulo: Editora Saraiva, 2004.
- DUVAL, Raymond. **Sémiosis et pensée humaine – registres sémiotiques et apprentissages intellectuels**. Peter Lang. SA. Neuchâtel, Suisse: 1995.
- DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. Trad. Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.
- DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. Tradução de Mérciles Thadeu Moretti. Revista Eletrônica de Educação Matemática. Florianópolis, v. 07, n. 2, 2012, p.266-297.
- DUVAL, Raymond. **Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de matemática**. Revemat: Revista eletrônica de educação matemática, Florianópolis, v. 11, n. 2, 188 p. 1-78, 02 mar. 2017. Tradução de Mérciles Thadeu Moretti. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2016v11n2p1/33628>. Acesso em: 14 Julho. 2023.
- DEIXA, Geraldo Vernijo, SALVI, Rosana Figueiredo, PASSOS, Marinez Meneghellos. **Um Estudo do programa de ensino e Livros- Textos de Matemática do ensino Secundário Geral Moçambicano na óptica das dimensões dos conhecimentos em Matemáticae dos registos de representação semiótica**. VI Congresso Internacional de ensino de Matemática. ULBRA-Canoas-Rio Grande do Sul- Brasil 16,17,18 de outubro de 2013. Comunicação Científica
- DREYFUS, T. **Advanced mathematical thinking processes**. In David Tall (Org.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25–41). Dordrecht: Kluwer, 1991.
- EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Campinas, SP. Ed.Unicamp, 2002.
- EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: UNICAMP, 2004.
- ELIA, I., Panoura, A., Eracleous, A., y Gagatsis, A. (2007). **Relations between secondary pupils' conceptions about functions and problem solving in different representations**. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 5, 533-556. <https://doi.org/10.1007/s10763-006-9054-7>
- FERNANDES, R. K. PIRES, M. N. **Uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem: Construindo o Pensamento Algébrico nos Anos Iniciais**. In: XI Encontro Nacional de Educação Matemática, 2013, Curitiba. Anais..., 2013
- FETZER, F., BRANDALISE. M. A. T.; **Processo de ensino-aprendizagem da matemática: o que dizem os alunos?** In: EREMAT SUL — Encontro Regional

de Estudantes de Matemática do Sul, 06, 2010, Porto Alegre. Disponível em: <[http://www.pucrs.br/edipucrs/erematsul/comunicacoes/14\\_FERNANDAFETZER.pdf](http://www.pucrs.br/edipucrs/erematsul/comunicacoes/14_FERNANDAFETZER.pdf)>. Acesso em: 10 de maio de 2023.

FREDERICO, M. **Situação da Educação em Moçambique**. Revista de Estudos Antiutilitaristas e Pós - Coloniais.V.2 n.2, Julho – Dezembro, 2012. Disponível em WWW. Revista – reals. (Acesso em 23 de Agosto de 2023).

FERREIRA, Pamela Emanuelli Alves. **Análise da produção escrita de professores da Educação Básica em questões não-rotineiras de matemática**. 2009. 166f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2009.

FREIRE, P. Pedagogia da Autonomia: **saberes necessários à prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting Mathematics Education**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

FIGUEIREDO, Sonner Arfux de, COSTA, Nielce Meneguelo Lobo da. **Trajétoria Hipotética de Aprendizagem e a compreensão das relações trigonométricasno ciclo**. Educação Matemática na Contemporaneidade: desafios e possibilidades São Paulo – SP, 13 a 16 de julho de 2016.

GARIBOTTI, Cristiano Rodrigues. Produto educacional [Recurso Eletrônico]: **teste diagnóstico de conhecimentos matemáticos por meio de website**. Santo Antônio da Patrulha, RS: FURG, 2019. 27 f.: il. color.

GOIS, Victor Hugo dos Santos, SILVA Karina Alessandra Pessoa da. **Situações-Problema de livros didáticos e modelagem matemática: Identificando Possibilidades**. RPEM, Campo Mourão, PR, Brasil, v.11, n.26, p.422-445, set.-dez. 2022.

GRAVEMEIJER, K.; TERWEL, J. Hans Freudenthal: **a mathematician on didactics and curriculum theory**. Journal of Curriculum Studies, v. 32, n. 6, p. 777-796, nov- dez. 2000.

HENRIQUES A. e PONTE J. P. **As Representações como Suporte do Raciocínio Matemático dos Alunos quando Exploram Atividades de Investigação**. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p. 276-298, abr. 2014.

INDE/MINED. **Matemática, Programa da 8ª classe**. Maputo, 2010.

ITAMQUÊ, Sabino Tobana; SUBUHANA, Carlos. **Educação pós-independência em Moçambique**. Revista África e Africanidades. Rio de Janeiro, ano XI, n.26, abril, 2018.

KATZ, Victor J. A. **history of mathematics**. 3rd ed. p. cm. Includes bibliographical references and index. ISBN 0-321-38700-7 1. Mathematics—History. I. Title. QA21.K.33 2009.

KLING, Morris. **Matemáticas para los estudiantes de humanidades**. 1967.

KLING, Morris. Calculus: Pt. 2: An Intuitive and Physical Approach. **Publisher:** wiley. **ISBN13:** 9780471491156. **Released:** Apr30,1967; **Format:** Hardcover, 426 pages.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. Coleção do Professor de Matemática. v. 1. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LIMA, Simone Marques. **A formação do pedagogo e o ensino da matemática nos anos iniciais do ensino fundamental** / Simone Marques Lima. - 2011. 212 f.

De LIMA, D. T. **Erros no processo de resolução de equações do 1 grau**. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, 2010.

LANGA, Heitor; CHUQUELA, Neto João "Nick". **Livro do Aluno - Matemática - 8.ª Classe**. Editor: Plural Editores .Moçambique Edição/reimpressão: 05-2021.

LOPES, W. S. **A importância da utilização de múltiplas representações no desenvolvimento do conceito de função: uma proposta de ensino**. 2003. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC, São Paulo, 2003.

LUCKESI, Cipriano C. **Avaliação da aprendizagem escola: estudos e proposições**. -12 ed.- São Paulo: Cortez, 2002.

LUCKESI, Cipriano C. **Avaliação da aprendizagem escola: estudos e proposições**. 18ª edição. São Paulo: Cortez, 2006.

LUCKESI, Cipriano Carlos. **Avaliação da aprendizagem escolar: estudos e proposições**. 22. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

LÜDKE, Menga e ANDRÉ, Marli E.D.A. **Pesquisa em educação: abordagens qualitativas** – 2ª edição – Rio de Janeiro: EPU, 2013.

MACHADO. N. J. **Matemática por assunto: lógica, conjuntos e funções**. v.1. São Paulo: Scipione. 1988.

MACAMO, Ernesto Mário. Insucesso Escolar em Moçambique. **Estudo de caso na Escola Secundária Graça Machel**. Dissertação apresentada para obtenção do grau de Mestre em administração e Gestão educacional; Lisboa, outubro, 2015.

MAHALAMBE, F. M. **Trajectória sobre o sistema de formação de professores em Moçambique** (2011).

NACARATO, B. L. S.; MENGALI, A. M.; PASSOS, C. L. B. **A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: tecendo fios do ensinar e do aprender**. Belo Horizonte: autêntica, 2009. 159 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

MENEGHETTI, R. C. G.; REDLING, J. P. **Tarefas Alternativas para o Ensino e a Aprendizagem de Funções: análise de uma intervenção no Ensino Médio**. Bolema. Rio Claro (SP), v. 26, n. 42A, p. 193 — 229, 2012.

Moçambique INE - **Instituto Nacional de Estatística**. 2017. Disponível em: <http://www.ine.gov.mz/iv-rgph2017/mocambique/>. Acesso em: 18 de Março de 2023.

Moçambique. INE - **Instituto Nacional de Estatística**. Síntese de Conjuntura Económica Nº 8, março, 2015. Moçambique, 2015; 26p.

MOÇAMBIQUE. **Boletim da República**. Lei nº4/83. I Série, nº 12. Aprova a Lei do Sistema Nacional de Educação. Maputo: Imprensa Nacional, 1983.

MOÇAMBIQUE. **Boletim da República**. Lei nº6/92. I Série, nº 19. Aprova a Lei do Sistema Nacional de Educação. Maputo: Imprensa Nacional, 1992.

MOÇAMBIQUE. **Sector Alimentar Bens e Serviços para Hotelaria AIP - FCE Manual do Empreendedor\_Versão 2011** . Um Estudo Realizado pela CESO CI Portugal para a AIP - Feiras, Congressos e Eventos no âmbito do QREN - Projecto Conjunto SI Qualificação nº 16834

MOÇAMBIQUE. **Boletim da Republica**. I Série – Nr. 254. Lei 18/2018 de 28 de Dezembro. Sistema Nacional de Educação. Maputo, 2018

Moçambique. **Política, Plano de Estudos e Estratégia de Implementação**. INDE, Maputo, Junho 2022

MOÇAMBIQUE. **Boletim da Republica**. I SÉRIE — Número 31. a Lei n.º 27/2009, de 29 de Setembro , Lei do Ensino Superior, Decreto n.º 3/2019. Maputo 2019

MOL, R. S. **Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: CAED UFMG, Belo Horizonte, v. 79, p. 80, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 17, 18 e 19.

MORAES, R.; GALIAZZI, M. C. **Análise textual discursiva**. Ijuí, Brasil: Editora Unijuí. 2011

MORAES, Franciele Rodrigues de. UM ESTUDO SOBRE ERROS NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM O SOFTWARE APLUSIX. Dissertação apresentada ao Curso de PósGraduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. UFMS- 2013-108p.

- MORRIS, Kline. **Mathematics for the liberal arts**, b. Addison Wesley, Reading, Mass., 1967. xiii + 577 pages. Published online by Cambridge University Press: 01 April 2019.
- MORAES, Michael Machado. **Análise de erros em problemas de aritmética: uma abordagem na 2ª fase da OBMEP no oeste do Pará / Michael Machado Moraes**. – Santarém, Pará, 2018.
- MOURA-SILVA, M. G., Souza, R. O., Gonçalves, T. O., & Borges, R. G. B. **Educação matemática realística: uma abordagem teórico-metodológica para o ensino de matemática nas escolas do campo**. Revista Brasileira de Educação do Campo. (2020) DOI: <http://dx.doi.org/10.20873/uft.rbec.e7879>.
- NAGY, M. C.; BURIASCO, R. L. C. **A análise da produção escrita em matemática: possível contribuição**. IN: Buriasco, R. L. C. (Org.). Avaliação e educação matemática. Recife: SBEM, 2008.
- NACARATO, B. L. S.; MENGALI, A. M.; PASSOS, C. L. B. **A matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: tecendo fios do ensinar e do aprender**. Belo Horizonte: autêntica, 2009. 159 p. (Coleção Tendências em Educação Matemática).
- PALHARINI Bárbara Nivalda ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de. Modelagem Matemática: **perspectivas interdisciplinares para o ensino e a aprendizagem de matemática**. IV EPMEM – ENCONTRO PARANAENSE DE MODELAGEM EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA Maringá – PR, 11 a 13 de Novembro de 2010.
- OLIVEIRA, Dalila de Andrade. **Gestão Democrática da Educação: Desafios Contemporâneos**. 7ª edição. Petrópolis, RJ. Editora Vozes, 2007.
- ONUCHIC, L. de L. R.; ALLEVATO, N. S. G. **Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas**. Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.
- OZORES, Ana Luiza F. **Entendendo alguns erros do ensino Fundamental II que alunos mantem ao final do ensino Médio**. Dissertação para o mestrado Profissional em Educação Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da universidade de São Paulo. São Paulo 2015.
- PEREIRA, Júlio Emílio Diniz. **A pesquisa dos educadores como estratégia para a construção de modelos críticos de formação docente**. In: PEREIRA, Júlio Emílio Diniz; ZEICHNER, Kenneth M. (Org.). A pesquisa na formação e no trabalho docente. Belo Horizonte: Autêntica, 2002. p.11-42
- PESSURO, Graciano Pedro. **Política educacional em Moçambique diante das Tecnologias de Informação e Comunicação**. Revista IMPA, Fortaleza, v. 3, n. 1, e0220008 2022. DOI: <https://doi.org/10.51281/impa.e02200>.
- PIAGET, J. (1975). A teoria de Piaget. Em P. H. Mussen (Org.), **Desenvolvimento cognitivo** (Vol. 4, pp. 71- 115). São Paulo: EDU.

PIAGET, J. (1972) **Desenvolvimento e Aprendizagem sob o Enfoque da Psicologia**. UFRGS – PEAD 2009/1

PINTO, N. B. **O erro como estratégia didática: o estudo do erro no ensino da matemática elementar**. Campinas: Papyrus, 2000.

PINTO, N. B. **O erro como estratégia didática no ensino da matemática elementar**. Tese de doutorado da faculdade de Educação da universidade de sao paulo. 174p Sao Paulo, 1998.

PONTE, J. P., MATOS, J. M., y ABRANTES, P. (1998). *Investigação em educação matemática: Implicações curriculares*. Instituto de Inovação Educacional.

Programa das nações unidas para o desenvolvimento - PNUD. **Relatório nacional de desenvolvimento humano de Moçambique 2000**. Maputo: PNUD, 2000.

RADATZ, H. **Error analysis in mathematics education**. *Journal for Research in Mathematics Education*, v.10, n.3, p.163-172, May 1979.

RADATZ, H. **Students' errors in the mathematical learning process: a survey**. *For the Learning of Mathematics*, v.1, n.1, p.16-20, July 1980.

RAMOS, Maria Luisa Perdigão Diz e CURI, Edda: **Análise de erros em uma questão sobre função: uma forma de desvendar as dificuldades dos alunos**. *Revista de Educação, Ciências e Matemática* v.4 n.3 set/dez 2014 ISSN 2238- 2380.

RAMOS, Maria Luísa Perdigão Diz. **Interação e Diálogo: Imprescindíveis nas formas de tratamento das dificuldades e erros**. *Revista Educação & Tecnologia*, | Belo Horizonte | v. 23 | n. 1 | p. 9-21 | jan./abr. 2018

RIBAS João Luiz Domingues, MONTEIRO Zilé. **O ensino aprendizagem de funções polinomiais do 1º grau, no Ensino Médio, através da resolução de problemas**. Produção didático-pedagógica a ser implementada no Colégio Estadual Agrícola “Olegário Macedo” e apresentada para o Programa de Desenvolvimento Educacional – PDE, Secretaria de Estado da Educação – SEED, junto a Universidade Estadual de Ponta Grossa – UEPG, Ponta Grossa, 2014.

RICO, L. (1998). **Programas de investigación doctorales y académicos en educación matemática en las universidades españolas**. En A. Alsina, J. Álvarez, B. Hodgson, C. Laborde, A. Pérez, L. Rico, & A. Sfard (Eds.), 8th International Congress on Mathematical Education. Selected Lectures (pp. 369-389). Sevilla: SAEM Thales.

ROSSETTO, H. H. P. (2016). **Trajectoria Hipotética de Aprendizagem sob um olhar realístico**. 2016. (Dissertação de Mestrado). Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Brasil.

ROSSETTO, Hallynnee Héllenn Pires. **O desenvolvimento de um framework de trajetórias de ensino e aprendizagem de Matemática**. 2021. 91f. Tese de Doutorado (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) — Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

SANTOS, E. R. dos. **Análise da Produção Escrita em matemática: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino**. Tese (Doutorado em ensino de Ciências e Educação Matemática) — Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, 2014.

SANTOS, Graça Luzia Dominguez Bibliotecas Universitárias da UFBA: **Um modelo teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função / Graça Luzia Dominguez Santos**. -- Salvador, 2017.

SARAIVA, M. J. & Teixeira, A. M. (2009). **Secondary school students understanding of function via exploratory and investigative tasks**. Quaderni di Ricerca in Didattica, Supplemento n° 4 al n°19, pp. 74-83. Itália: Palermo. (ISSN on-line 1592-4424)

SILVA JUNIOR, C. G. R. **O livro didático de Matemática e o tempo**. Revista de Iniciação Científica da FFC, v. 7, n. 1, p.13-21, 2007.

SILVA, Jandilene Alves da; SILVA, Maria Jeane da; ALVES, Segirlaine Camilo. **A aplicação da avaliação diagnóstica no ambiente escolar: um olhar reflexivo**. João Pessoa: UFPB, 2014. 51f.

SIMON, M. A. **Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective**. Journal for Research in Mathematics Education, vol. 26, n. 2, pp. 114- 145. 1995.

SIMON, M. A.; TZUR, R.; HEINZ, K.; KINZEL, M. **Explicating a mechanism for conceptual learning: elaborating the construct of reflective Abstraction**. Journal for Research in Mathematics Education, 35(5), 305-329, 2004.

SIMON, M. A. **“Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective**. Journal for research in Mathematics Education”, Vol. 26, n° 2. p. 114- 145.

SOUSA, Clarilza Prado de (Org.). **A Avaliação do rendimento escolar**. 9. ed. Campinas: Papirus. 2001.

SOUZA, Rebeca Pereira de; **A construção do conceito de função através de atividades baseadas em situações do dia a dia – Campos dos Goytacazes**, 2016

SOUZA, S. E. **O uso de recursos didáticos no ensino escolar**. In: I Encontro de Pesquisa em Educação, IV Jornada de Prática de Ensino, XIII Semana De Pedagogia da UEM: “Infância e Práticas Educativas”, Anais... Maringá: UEM,

2007.

SOUSA, Bárbara Nivalda Palharini Alvim; ALMEIDA Lourdes Maria Werle de. **Modelagem Matemática e Pensamento e pensamento Matemático: Algumas relações**. X Encontro Nacional de Educação Matemática Educação Matemática, Cultura e Diversidade Salvador – BA, 7 a 9 de Julho de 2010.

SEED, **Diretrizes Curriculares da Rede Pública de Educação Básica do Estado do Paraná**. Editora Memvavmem, 2006.

STYLIANOU, D. A. (2010). **Teachers' conceptions of representation in middle school mathematics**. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13, 325-343.

TORRE, S. **Aprender com os erros: o erro como estratégia de mudança**. Porto Alegre: Artmed, 2007.

TRUJILLO, Malarca; ATARÉS, Lorena; CANET, María José; PÉREZ-PASCUAL, María Asunción. **Learning difficulties with the concepts of function: A Literature Review**. *Educ.sci.*2023, 13(5); <https://doi.org/10.3390/educsi13050495>. Published: 13May 2023.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. V. D. **Mathematics education in the Netherlands: A guided tour**. Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9. Utrecht: Utrecht University, 2000. CD-ROM.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M.D. **Children learn mathematics: a learning- teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school**. Groningen, The Netherlands: Wolters Noordhoff, 2001b.

WISEU, Floriano; SILVA, André; ROCHA, Helena, MARTINS, Paula Mendes. **A representação gráfica na aprendizagem de Funções por alunos do 10º ano de escolaridade**. EDUCACION MATEMÁTICA, vol.34 Núm. 1, abril de 2022

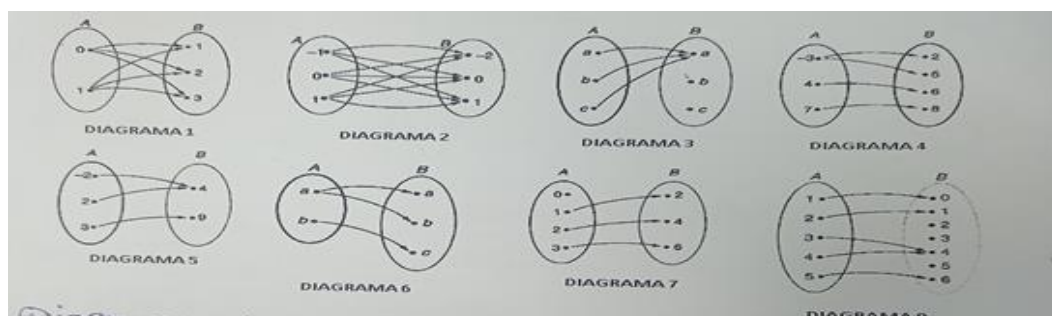
ZUCULA, António Fernando. **Qualidade da educação em Moçambique: Uma análise a partir dos indicadores educacionais**. ABATIRÁ - REVISTA DE CIÊNCIAS HUMANAS E LINGUAGENS Universidade do Estado da Bahia - UNEB - Campus XVIII V2: n.3 Jan : Jul :: 2021. p. 1- 524 ISSN 2675-6781

## Apêndices

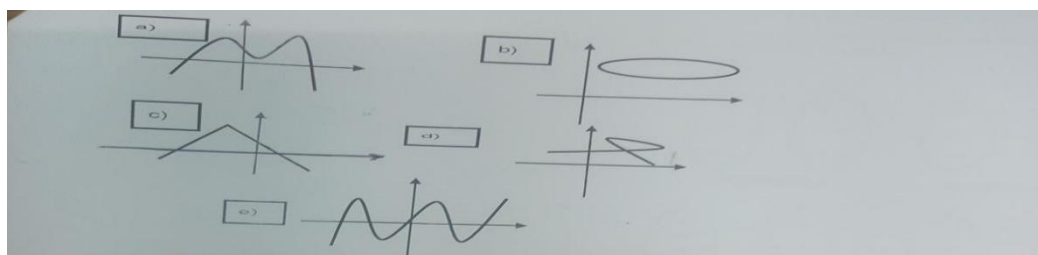
## Apêndice A - Tarefas Diagnósticas

Leia atentamente as questões e responda. Não é necessário que escreva o seu nome na folha.

1. Sabendo que toda função é uma relação, mas nem toda relação é uma função, na figura abaixo identifique quais dos diagramas representam função e justifique a resposta.



2. Dos gráficos abaixo agrupe os que representam função e os que não representam função e justifique a sua resposta.



## Apêndice B - Tarefas da oficina (TO)

### Parte I: Reconhecimento de funções recorrendo ao diagrama de Venn

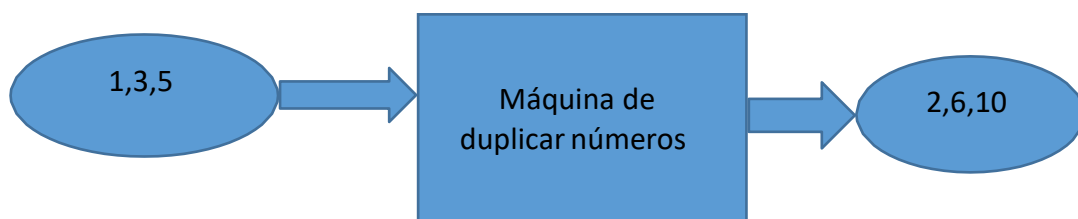
TO1PI: Dados dois conjuntos  $A = \{-1, 0, 2\}$  e  $B = \{-2, 0, 4\}$ , associar cada elemento de A ao seu dobro em B.

**Estratégia de resolução de TO1PI:** Utilizar diagrama de Venn para resolver a tarefa.

**Objetivo da TO1PI:** Determinar correspondência entre dois conjuntos; criar uma intuição da existência de uma regra de associação.

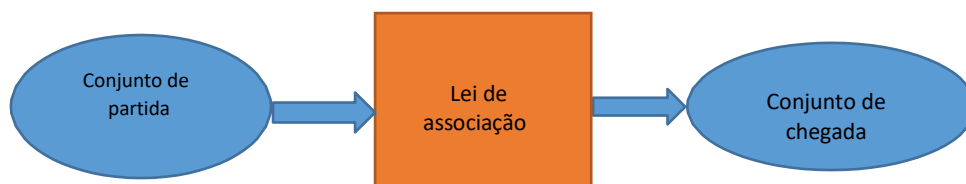
TO2PI: Considere uma máquina de duplicar números. Duplique os números "1,3 e 5". Outilizando o diagrama de Venn-Euler, escreva uma correspondência entre os conjuntos dos números "1, 2, e 3" com o conjunto dos resultados obtidos. O que é, em sua opinião, a máquina de duplicar os números?

**Estratégia:**



**Objetivo da TO2PI:** O estudante relacionar a máquina de duplicar com a lei de associação.

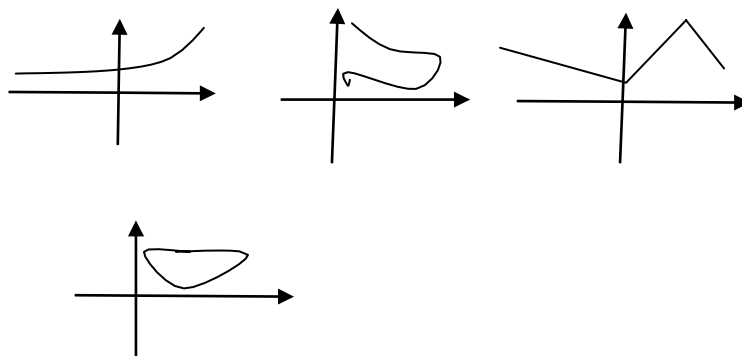
TO3PI: Associar cada elemento do conjunto A ao valor igual no conjunto B num diagrama de Venn-Euler e dizer se é função.  $A = \{0, 1, 2\}$  e  $B = \{1, 2, 3, 4\}$

**Estratégia:**

**Objetivo da TO3PI:** Fixar a condição para que uma correspondência represente uma função.

**Parte II: Reconhecendo funções em gráfico**

TO1PII. Sabendo que nem todo gráfico é função então velique se os gráficos que seguem representam função.



**Estratégia de resolução TO1PII:** Recordar as componentes de uma função tais como conjunto de partida, conjunto de chegada; traçar retas perpendiculares ao eixo  $x$ , verificar se a reta não tocou em dois pontos do gráfico.

**Objetivo TO1PII:** Perceber que os elementos de eixo  $x$  (abscissas) representam o conjunto de partida e o eixo  $y$  (ordenada) corresponde ao conjunto de chegada; induzir a ideia da representação de ponto no sistema cartesiano.

TO2PII: Dê um exemplo duma situação do seu dia a dia que define uma função.

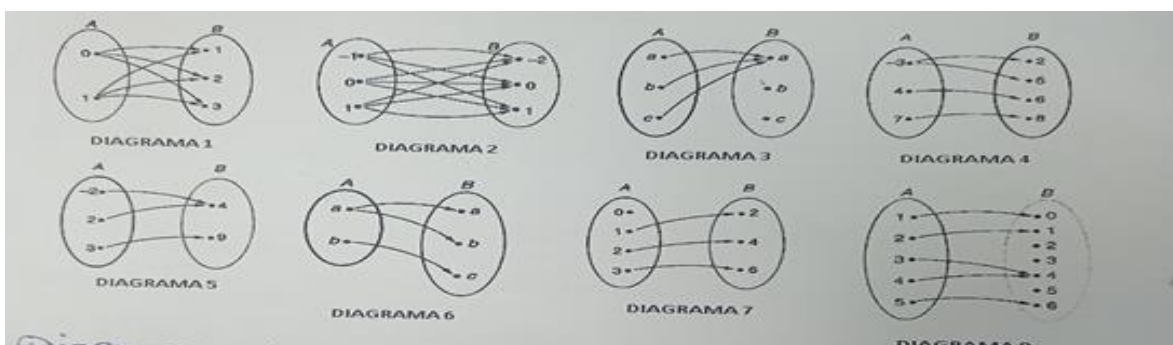
**Estratégia de resolução:** Livre.

**Objetivo da TO2PII:** Levar o estudante a perceber que é possível relacionar os fenômenos do dia a dia por uma lei que os associa.

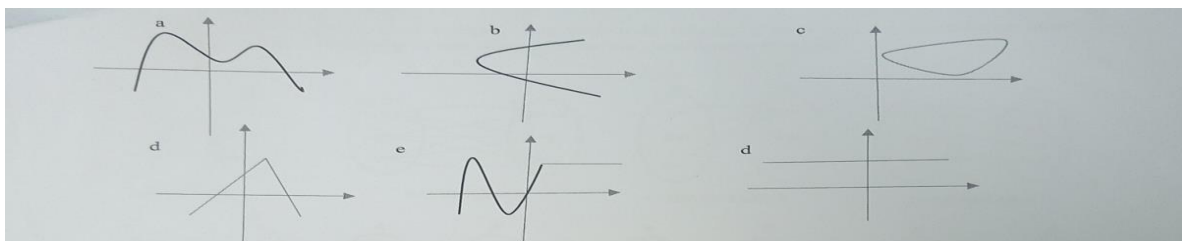
## APÊNDICE C - Tarefas após aplicação da oficina

Leia atentamente as questões e responda. Não é necessário que escreva o seu nome na folha.

1. Sabendo que toda função é uma relação, mas nem toda relação é uma função, na figura abaixo identifique quais dos diagramas representam função e justifique a resposta.



2. Dos gráficos abaixo agrupe os que representam função e os que não representam função e justifique a sua resposta.



3. Depois debates realizados na aula anterior, em sua opinião o que entendes por função?