



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

RICARDO HENRIQUE DE BASSI

NEUTRINOS ESTÉREIS
AVALIAÇÃO DA SENSIBILIDADE DE EXPERIMENTOS TIPO
DAR

Londrina
2021

RICARDO HENRIQUE DE BASSI

NEUTRINOS ESTÉREIS
AVALIAÇÃO DA SENSIBILIDADE DE EXPERIMENTOS TIPO
DAR

Dissertação de Conclusão de Mestrado
apresentada ao Departamento de Física da
Universidade Estadual de Londrina, como
requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Pietro Chimenti

Londrina
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

De Bassi, Ricardo H.

Neutrinos Estéreis: Avaliação da sensibilidade de experimentos tipo DAR / Ricardo H. De Bassi. - Londrina, 2021.

92 f. : il.

Orientador: Pietro Chimenti.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2021.

Inclui bibliografia.

1. Neutrinos - Tese. 2. Neutrinos Estéreis - Tese. 3. Decaimento em Repouso (DAR) - Tese. 4. Detecção de Neutrinos - Tese. I. Chimenti, Pietro. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

CDU 53

RICARDO HENRIQUE DE BASSI

NEUTRINOS ESTÉREIS
AVALIAÇÃO DA SENSIBILIDADE DE EXPERIMENTOS TIPO
DAR

Dissertação de Conclusão de Mestrado
apresentada ao Departamento de Física da
Universidade Estadual de Londrina, como
requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

Orientador: Prof. Dr. Pietro Chimenti
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Prof. Dra. Christiane Frigério Martins
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Prof. Dr. Thiago Sogo Bezerra
University of Sussex – US

Londrina, 26 de novembro de 2021

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais e meus irmãos, que me deram o suporte necessário para que eu decidisse continuar na área acadêmica. A minha namorada Natalia Sá, que esteve sempre comigo nos momentos de distração e também me auxiliando no entendimento dos mais diversos assuntos. Agradeço aos meus amigos que mesmo distantes nesse momento difícil de pandemia estiveram disponíveis virtualmente jogando e conversando.

Agradeço também aos professores do departamento de física da UEL que contribuíram para a minha formação, em especial ao professor Dr. Pietro Chimenti, que me orientou durante os últimos três anos me auxiliando e me ensinando o que é pesquisa e ciência. Por fim agradeço à CAPES pela concessão de bolsa que foi decisiva para minha conclusão do curso.

*"There's a lot of beauty in ordinary things.
Isn't that kind of the point?"
The Office.*

DE BASSI, Ricardo H. **Neutrinos Estéreis: Avaliação da sensibilidade de experimentos Tipo DAR**. 2021. 92fls. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado em Física) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

Resumo

Desde que neutrinos foram teorizados por Pauli em 1930, experimentos mostraram a existência de diferentes sabores dessas partículas, além de que oscilam e possuem massa. Em décadas de estudos descobrimos várias das características dos neutrinos, entretanto ainda existem várias perguntas não respondidas. Não sabemos qual é a natureza de sua massa, se são submetidos ao mesmo mecanismo que dá massa aos léptons carregados, e são partículas de Dirac, ou se são exceções, e o que chamamos de neutrinos e antineutrinos na verdade coincidem, como férmions de Majorana. Caso sejam partículas de Dirac, o Modelo Padrão, a teoria de maior sucesso da física de partículas, prediz que devem existir neutrinos de mão direita, mas onde eles estão? Não existem barreiras sobre o valor da massa de neutrinos de mão direita, podem existir de poucos eV até muitos GeV, ou talvez nem existam. Além dessas questões existem incontáveis experimentos sendo realizados para determinar os ângulos de mistura dos neutrinos ativos, a fase de violação de carga-paridade, a hierarquia de massa, o valor das massas, e estudar qualquer outra propriedade que essas partículas possam ter. Anomalias ainda não bem compreendidas em experimentos de oscilação tem sido objeto de interesse nas últimas décadas. Desaparecimentos ou excessos de neutrinos podem ser os primeiros indícios de um quarto tipo de neutrino, o neutrino estéril. Neutrinos estéreis podem dar as respostas para algumas questões importantes, mas podem também não existir. Neste trabalho será apresentada uma revisão das propriedades de neutrinos, uma discussão sobre neutrinos estéreis e resultados que motivam ou desmotivam sua existência. Discutiremos pontos importantes em probabilidade e estatística para a análise de resultados. Por fim analisaremos os resultados de um experimento de decaimento de repouso de píons simulado, desenvolvido por meio de um código em python.

Palavras-chave: Neutrinos. Neutrinos Estéreis. Decaimento em Repouso (DAR). Detecção de Neutrinos. Física de Partículas.

DE BASSI, Ricardo H. **Sterile Neutrinos: Evaluation of the sensibility of DAR experiments**. 2021. 92p. Master dissertation (Master of Science in Physics) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

Abstract

Since neutrinos were theorized by Pauli in 1930, experiments have shown the existence of different flavors of these particles and the fact that they oscillate and have mass. In decades of studies we have discovered many of the characteristics of neutrinos, however, there are still many unanswered questions. We do not know what is the nature of its mass, if they are subjected to the same mechanism that gives mass to charged leptons, and they are Dirac particles, or if they are exceptions, and what we call neutrinos and antineutrinos coincide, like Majorana fermions. If they are Dirac particles, the Standard Model, the most successful theory of particle physics, predicts that there must be right-handed neutrinos, but where are they? There are no barriers to the value of the mass of right-handed neutrinos, they may exist from a few eV to many GeV, or perhaps not even exist. In addition to these questions, countless experiments are being carried out to determine the mixing angles of active neutrinos, the charge-parity violation phase, the mass hierarchy, the mass values, and to study any other properties that these particles might have. Anomalies that are not well understood in oscillation experiments have been the object of interest in recent decades. Disappearances or excesses of neutrinos may be the first indications of a fourth type of neutrino, the sterile neutrino. Sterile neutrinos may provide the answers to some important questions, but they may not exist either. This work will present a review of the properties of neutrinos, a discussion about sterile neutrinos, and results that motivate or discourage their existence. We will discuss important points in probability and statistics for the analysis of results. Finally, we will analyze the results of a simulated pion decay at rest experiment, developed using Python code.

Keywords: Neutrinos. Sterile Neutrinos. Decay at Rest (DAR). Neutrino Detection. Particle Physics.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Ângulos de mistura dos Neutrinos (assumindo violação CP nula).	29
Figura 2 – Ilustração do espectro de massa compatível com os dados de oscilação de neutrinos.	35
Figura 3 – O excesso de eventos no experimento LSND.	38
Figura 4 – Resultados observados pelo MiniBooNE.	40
Figura 5 – Razão entre eventos $\bar{\nu}_e$ medidos e preditos nos experimentos de reatores nucleares.	42
Figura 6 – Restrições de análises globais (considerando 3+1).	43
Figura 7 – Restrições de resultados recentes (desaparecimento).	44
Figura 8 – Resultados recentes do experimento KATRIN	45
Figura 9 – Resultados recentes do experimento MicroBooNE	46
Figura 10 – Construção dos limites de confiança 90% para uma variável de Poisson.	60
Figura 11 – Limites de confiança 90% para uma variável Gaussiana.	61
Figura 12 – Limites de confiança 90% para uma variável de Poisson com $b = 1,7$	63
Figura 13 – Diagrama de Feynman a nível de árvore do processo de decaimento do μ^+	65
Figura 14 – Espectros de Energia dos neutrinos provenientes do decaimento do π^+	66
Figura 15 – Seções de choque IBD em ordens zero e um em $1/M$	70
Figura 16 – Seções de choque nos processos de corrente carregada e corrente neutra para o ^{208}Pb	72
Figura 17 – Fluxo de neutrinos do elétron por energia em um ano.	73
Figura 18 – Fluxo de neutrinos do múon por energia em um ano.	73
Figura 19 – Fluxo de neutrinos do tau por energia em um ano.	74
Figura 20 – Fluxo de antineutrinos do elétron por energia em um ano.	74
Figura 21 – Fluxo de antineutrinos do múon por energia em um ano.	75
Figura 22 – Fluxo de antineutrinos do tau por energia em um ano.	75
Figura 23 – Espectro de interação dos $\bar{\nu}_e$ no processo de decaimento beta inverso na mistura de PPO, Parafina e LAB (ordem zero na seção de choque).	76
Figura 24 – Espectro de interação dos ν_e no processo de corrente carregada em ^{208}Pb	77
Figura 25 – Espectro de interação dos ν_e no processo de corrente neutra em ^{208}Pb	78
Figura 26 – Espectro de interação dos ν_μ no processo de corrente neutra em ^{208}Pb	79
Figura 27 – Espectro de interação dos ν_τ no processo de corrente neutra em ^{208}Pb	79
Figura 28 – Espectro de interação dos $\bar{\nu}_e$ no processo de corrente neutra em ^{208}Pb	80
Figura 29 – Espectro de interação dos $\bar{\nu}_\mu$ no processo de corrente neutra em ^{208}Pb	81

Figura 30 – Espectro de interação dos $\bar{\nu}_\tau$ no processo de corrente neutra em ^{208}Pb .	81
Figura 31 – Número total de eventos de neutrinos e antineutrinos em ^{208}Pb em função de Δm^2 .	82
Figura 32 – Histograma do número esperado de interações ν_e^{CC} com ^{208}Pb .	83
Figura 33 – Histograma da distribuição de χ^2 assumindo um modelo esperado com oscilação.	84
Figura 34 – Histograma da distribuição de valores de $ \mathbf{U}_{e4} ^2$ para 10 mil simulações.	85
Figura 35 – Gráfico da variação da média dos valores de $ \mathbf{U}_{e4} ^2$ para 10 mil simulações.	86
Figura 36 – Histograma da distribuição de χ^2 assumindo os valores esperados sem oscilação.	86
Figura 37 – Plot de Sensibilidade de desaparecimento de $\nu_e^{CC} - \chi^2$.	87

Lista de tabelas

Tabela 1	– Parâmetros para a oscilação de neutrinos de três sabores.	35
Tabela 2	– Comparação entre os experimentos LSND e KARMEN.	38
Tabela 3	– Antigas e novas razões $R = \frac{N_{exp}}{N_{cal}}$ calculadas em resultados de experimentos short-baseline.	41
Tabela 4	– Tabela com os valores calculados para ilustrar o processo de construção de intervalos de Feldman-Cousins. Valores para $b = 1,7$ e $\mu = 3,3$	62
Tabela 5	– Densidades e Massas Molares dos materiais que compõe o detector.	68
Tabela 6	– Número de Alvos no Detector.	68
Tabela 7	– Seções de choque dos processos envolvendo ^{208}Pb em unidades de 10^{-40}cm^2 e E_ν em MeV	71
Tabela 8	– Número de eventos esperados para cada sabor de neutrino e total. .	82

Sumário

1	INTRODUÇÃO	14
2	NEUTRINOS	15
2.1	Formalismo Relativístico	16
2.2	Helicidade e Quiralidade	18
2.3	Modelo Padrão	19
2.3.1	Interação via Corrente Carregada	22
2.3.2	Interação via Corrente Neutra	23
2.4	Dirac vs Majorana	26
2.5	Oscilação de Neutrinos	27
2.5.1	Parâmetros Relevantes	28
2.5.2	Matriz de Mistura	29
2.5.3	Oscilação de Neutrinos no Vácuo	30
2.5.3.1	Amplitude de Transição e Probabilidade	30
2.5.3.2	Caso Particular de Dois Sabores e Duas Massas	32
2.5.4	Ordenamento e Medidas dos Parâmetros de Oscilação	34
3	NEUTRINOS ESTÉREIS	36
3.1	Anomalias na Oscilação de Neutrinos	37
3.1.1	LSND e KARMEN	37
3.1.2	MiniBooNE	39
3.1.3	Anomalias em Reatores	40
3.1.4	Hipóteses	42
3.2	Resultados Recentes	43
3.3	Introduzindo Neutrinos Estéreis	46
3.4	Estimativas dos Parâmetros de Oscilação de Neutrinos Estéreis	47
4	PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA	48
4.1	Noções Básicas	48
4.2	Distribuição binomial e de Poisson	49
4.2.1	Distribuição Gaussiana como limite de Poisson	51
4.3	Processo de Contagem	51
4.3.1	Processo de Poisson	52
4.3.1.1	Caso Homogêneo	52
4.3.1.2	Caso Não-Homogêneo	53
4.4	Estimadores	53

4.5	Máxima Verossimilhança	54
4.5.1	Relação com χ^2	56
4.6	Um pouco mais sobre χ^2	57
4.7	Intervalos de Confiança	59
4.7.1	Intervalos de Confiança Clássicos	59
4.7.2	Intervalos de Confiança de Feldman-Cousins	61
5	ESTUDO DE SENSIBILIDADE	64
5.1	Decaimento em Repouso de Píons	64
5.1.1	Espectros de Energia	64
5.2	Características do Experimento	67
5.2.1	Número de Alvos no Detector	67
5.3	Processos Estudados	68
5.4	Seções de Choque	69
5.5	Fluxos de Neutrinos e Antineutrinos	72
5.6	Eventos Esperados no Detector	76
5.6.1	Espectros e Números de Interações	76
5.7	Estudo do χ^2	83
6	CONCLUSÃO	88
	REFERÊNCIAS	89

1 Introdução

Neutrinos foram propostos pela primeira vez em 1930 por Pauli para explicar o espectro contínuo do decaimento Beta. Foram encontrados com um experimento de cintiladores líquidos realizado por Reines e Cowan em 1956, e desde então têm sido objeto de interesse na física devido ao seu comportamento ainda não completamente entendido. Foram descobertos três sabores de neutrinos associados aos léptons carregados, e por muito tempo neutrinos foram considerados partículas de massa nula.

O primeiro indício de física além do Modelo Padrão foi a descoberta do fenômeno de oscilação de neutrinos, que foi agraciada em 2015 com o prêmio Nobel para os experimentos SNO [1] e Super-Kamiokande [2]. A comprovação da oscilação de neutrinos mostra ainda que neutrinos possuem massa diferente de zero, pois a probabilidade de oscilação depende da diferença das massas.

A maior parte dos resultados de experimentos realizados até hoje é bem explicada pelo modelo de três neutrinos ativos. A mais famosa anomalia é a do experimento LSND [3] (Liquid Scintillator Neutrino Detector), que foi realizado entre 1993 e 1998 observando um excesso de eventos de $\bar{\nu}_e$, que pode ser explicado com a adição de um neutrino ao modelo. O novo neutrino poderia participar da mistura com os três neutrinos ativos e gerar oscilações que a diferença de massas dos neutrinos ativos não poderiam gerar.

Caso esse novo sabor de neutrino exista, ele se misturaria com os neutrinos ν_e , ν_μ e ν_τ , mas não se envolveria na interação fraca padrão. Assim sua detecção seria praticamente impossível já que a única interação que restaria seria a gravitacional. Por esse motivo Bruno Pontecorvo em 1967 os chamou estéreis [4]. A única maneira de obter indícios sobre a existência de neutrinos estéreis com experimentos terrestres é através dos efeitos gerados pela mistura com os neutrinos ativos [5].

Dentre os experimentos realizados na tentativa de encontrar neutrinos estéreis temos o experimento JSNS² (J-PARC Sterile Neutrino Search at J-PARC Spallation Neutron Source) [6]. Esse experimento busca por oscilações de neutrinos com $\Delta m^2 \approx 1 \text{ eV}^2$ no Centro Experimental de Materiais e Ciências da Vida (MLF). Esse trabalho se baseia na simulação de um experimento parecido, levando em consideração a fonte utilizada e a distância fonte-detector.

2 Neutrinos

Neutrinos são léptons sem carga elétrica e de spin $1/2$ que interagem apenas pela força nuclear fraca e pela força gravitacional. Sua massa é tão pequena comparada às outras partículas, que por muito tempo se pensou que o neutrino fosse uma partícula sem massa, sendo apenas recentemente descoberta sua existência (sabemos que devem possuir massa para que a oscilação de neutrinos ocorra) [7]. Por interagir apenas pela força fraca (de curto alcance), e pela força gravitacional (fraca nesta escala), a interação com a matéria é baixa, tanto que a detecção foi considerada impossível historicamente. O neutrino é a segunda partícula mais abundante no universo observável, atrás apenas do fóton, um exemplo famoso da quantidade dessa partícula é que a cada segundo 65 bilhões de neutrinos passam em cada centímetro quadrado da face da Terra voltada para o sol.

Conhecemos a existência de três tipos de neutrinos associados aos léptons carregados: neutrino do elétron ν_e , neutrino do múon ν_μ e neutrino do tau ν_τ . Para cada um desses neutrinos existe a antipartícula correspondente, que tem sinais opostos de quiralidade e número leptônico. Também sabemos que a massa de cada sabor de neutrino é uma superposição quântica de três estados de massa. Os estados de massa são estados diferentes dos estados de sabor, não participando diretamente das interações fracas. Como consequência disso, neutrinos podem oscilar entre os sabores, ou seja, um neutrino emitido como neutrino do elétron pode ser detectado como um neutrino do múon ou um neutrino do tau. Sabemos também que apenas neutrinos (antineutrinos) de mão esquerda (direita) participam da interação fraca, explicitando a quebra de paridade dessa interação.

Apesar das várias descobertas sobre neutrinos durante o último século ainda temos importantes questões não compreendidas. Não sabemos se neutrinos são partículas de Dirac ou de Majorana, ou seja, se partículas e antipartículas coincidem ou são diferentes. Temos medidas das diferenças de massa dos neutrinos mas não conhecemos os valores das massas, apenas sabemos que devem ser pelo menos um milhão de vezes menor que a massa do elétron [8]. E não sabemos também qual o ordenamento dessas massas. E finalmente não temos uma medida definitiva do parâmetro de violação de fase CP.

Neutrinos são criados no Sol, no decaimento de partículas da radiação cósmica na atmosfera, em colapsos de estrelas, além de artificialmente em aceleradores de partículas, reatores nucleares e bombas atômicas. A maior parte dos neutrinos que passam pela Terra são provenientes das reações nucleares do Sol. Este capítulo tem como objetivo explorar as propriedades básicas dos neutrinos.

2.1 Formalismo Relativístico

Em 1928 Dirac propôs uma equação de onda relativística com o objetivo de descrever partículas elementares de spin $1/2$. A equação de Klein-Gordon foi primeiramente proposta com a mesma finalidade, mas apresentou problemas na conservação da probabilidade. A equação de Klein-Gordon, de segunda ordem nas derivadas temporais, explica bem partículas de spin zero. Já a equação de Dirac é uma equação espinorial de primeira ordem, e historicamente, a partir dela Dirac pôde prever a existência do pósitron, a antipartícula do elétron. Qualquer solução de Dirac é automaticamente solução de KG, porém o contrário é falso. Para discussões mais detalhadas sobre teoria quântica de campos, pode-se consultar as referências [9] e [10], e para uma leitura divertida o livro [11] é uma boa opção. A equação de Dirac se escreve da seguinte forma:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0, \quad (2.1)$$

onde ∂_μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) é o operador de derivada covariante, m é a massa da partícula e γ_μ é um conjunto de quatro matrizes 4×4 (representações de dimensões maiores são equivalentes) chamado de matrizes γ de Dirac. A solução $\psi(x)$ é uma matriz coluna de quatro componentes. As matrizes γ são determinadas de modo que a relação com o quadrimomento p^μ

$$p^\mu p_\mu - m^2 = 0 \quad (2.2)$$

é preservado. As matrizes γ satisfazem as relações

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

e

$$\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu. \quad (2.4)$$

As matrizes γ são invariantes sob transformações de Lorentz. A condição 2.3 para $\mu \neq \nu$ implica que

$$(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}, \quad (\gamma^k)^2 = -\mathbb{1} \quad (k=1,2,3). \quad (2.5)$$

enquanto que para $\mu = \nu$ e utilizando 2.4, temos que

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k, \quad \leftrightarrow \quad (\gamma^\mu)^\dagger = \gamma_\mu, \quad (2.6)$$

ou seja, a matriz γ^0 é hermitiana e unitária e as matrizes γ^k ($k = 1, 2, 3$) são anti-hermitianas e anti-unitárias. Como as matrizes γ não são quadrivetores é conveniente definir:

$$\gamma_\mu \equiv g_{\mu\nu} \gamma^\nu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \leftrightarrow \quad \gamma_0 = \gamma^0, \quad \gamma_k = -\gamma^k \quad (k = 1, 2, 3). \quad (2.7)$$

A relação 2.3 é necessária para garantir que a equação de Dirac seja compatível com a equação de Klein-Gordon, que deve ser satisfeita pois é equivalente à relação relativística de dispersão energia-momento. Já a equação 2.4 é necessária para que seja possível obter da equação de Dirac uma equação de continuidade com a densidade de probabilidade

$$\varrho(x) = |\psi(x)|^2 = \psi^\dagger(x)\psi(x). \quad (2.8)$$

Tomando o conjugado Hermitiano da equação 2.1 temos

$$(i\partial_\mu\gamma^{\mu\dagger} + m)\psi^\dagger = 0, \quad (2.9)$$

multiplicando por $\gamma^0\psi$ pela direita, obtemos

$$i\partial_\mu\psi^\dagger\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0\psi + m\psi^\dagger\gamma^0\psi = 0, \quad (2.10)$$

mas pela condição 2.6,

$$\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0 = \gamma^0\gamma^\mu, \quad (2.11)$$

portanto, reconhecendo o campo adjunto $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$, podemos escrever

$$i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi + m\bar{\psi}\psi = 0. \quad (2.12)$$

Da equação 2.1, multiplicando pelo spinor adjunto $\bar{\psi}$ pela esquerda, temos que

$$i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi = 0, \quad (2.13)$$

e somando as equações 2.12 e 2.13 obtemos

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = 0. \quad (2.14)$$

Reescrevendo a equação 2.14 na forma de uma equação de continuidade,

$$\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0, \quad (2.15)$$

reconhecemos a corrente conservada

$$j^\mu = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x). \quad (2.16)$$

A componente temporal desta equação é justamente a densidade de probabilidade 2.8.

Também nos será útil definir a matriz quiralidade

$$\gamma^5 \equiv \gamma_5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad (2.17)$$

com as propriedades

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad (\gamma^5)^2 = \mathbb{1} \quad \text{e} \quad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5. \quad (2.18)$$

Uma representação de interesse das matrizes gamma é a chamada representação Quiral. Na qual temos

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

onde σ^i são as matrizes de Pauli. Lembrando que cada elemento das matrizes em 2.19 é uma matriz 2x2.

2.2 Helicidade e Quiralidade

Uma quantidade importante na caracterização de férmions é a helicidade. A helicidade de uma partícula é a projeção do spin na direção do seu momento linear. Uma partícula é de mão direita quando a direção do seu spin é a mesma do momento, e de mão esquerda quando seu spin é na direção contrária. Essa quantidade é dada por

$$\hat{h} = \frac{\vec{\Sigma} \cdot \vec{P}}{|\vec{P}|}, \quad (2.20)$$

onde \vec{P} é o momento linear da partícula. E ainda

$$\Sigma_k = \gamma_0 \gamma_k \gamma_5. \quad (2.21)$$

Os autovalores de helicidade para um férmion de Dirac são -1 (mão esquerda) e +1 (mão direita). O estado de uma partícula é identificado pelas três componentes do momento e pela sua helicidade.

Sejam ψ_R e ψ_L campos que são autofunções de γ^5 (definido em 2.17) com autovalores +1 e -1:

$$\begin{aligned} \gamma^5 \psi_L &= -\psi_L, \\ \gamma^5 \psi_R &= +\psi_R, \end{aligned} \quad (2.22)$$

os campos quirais ψ_L e ψ_R são chamados, respectivamente, de quiral esquerdo e quiral direito. É conveniente definir os projetores quirais como:

$$\begin{aligned} P_L &= (1 - \gamma_5)/2, \\ P_R &= (1 + \gamma_5)/2, \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde o índice L se refere ao projetor esquerdo e o índice R se refere ao projetor direito.

Qualquer objeto $\psi(x)$ que satisfaz a equação de Dirac pode ser decomposto em um termo de quiralidade esquerda e um termo de quiralidade direita,

$$\psi = \psi_L + \psi_R, \quad (2.24)$$

portanto temos

$$P_L \psi = \psi_L \quad \text{e} \quad P_R \psi_L = 0, \quad (2.25)$$

e da mesma forma

$$P_R \psi = \psi_R \quad \text{e} \quad P_L \psi_R = 0. \quad (2.26)$$

A quiralidade é uma quantidade invariante sob transformações de Lorentz, entretanto não é uma quantidade conservada. Isso porque γ_5 não comuta com o termo de massa na hamiltoniana de Dirac (na verdade anticomuta pela relação 2.18). Da

equação 2.25 notamos que P_L irá filtrar o estado de mão esquerda o que implica que apenas estados de partículas de quiralidade esquerda participam das interações fracas de correntes carregadas. No caso de antipartículas, o inverso é verdadeiro, apenas antipartículas de quiralidade direita.

Para partículas sem massa, a helicidade e quiralidade representam a mesma quantidade. Isso pode ser visto imaginando partículas de massa zero viajando a velocidade da luz. Como isso é um fato, não existe nenhum referencial em que a partícula esteja na direção contrária, assim sendo, a helicidade de uma partícula sem massa é um invariante relativístico. Para partículas massivas, é sempre possível inverter a helicidade indo para um referencial em que o momento linear está no sentido oposto ao original, mas a quiralidade permanece a mesma.

Vamos deduzir uma relação útil proveniente dos projetores P_L e P_R . Para isso vamos precisar da relação

$$\bar{\psi}_L = (P_L \psi)^\dagger \gamma^0 = \psi^\dagger P_L \gamma^0 = \psi^\dagger \frac{(1 - \gamma_5)}{2} \gamma^0 = \psi^\dagger \gamma^0 \frac{(1 + \gamma_5)}{2} = \bar{\psi} P_R, \quad (2.27)$$

e das propriedades 2.6, 2.18 e 2.25.

Sejam $\bar{\psi}_L$ e ϕ_L dois campos de mão esquerda, temos que

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_L \gamma^\mu \phi_L &= \bar{\psi} P_R \gamma^\mu P_L \phi = \bar{\psi} \frac{(1 + \gamma_5)}{2} \gamma^\mu P_L \phi = \bar{\psi} \frac{(\gamma^\mu + \gamma_5 \gamma^\mu)}{2} P_L \phi \\ &= \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{(1 - \gamma_5)}{2} P_L \phi = \bar{\psi} \gamma^\mu P_L^2 \phi = \frac{1}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \phi \end{aligned} \quad (2.28)$$

2.3 Modelo Padrão

Utilizando a equação de Dirac 2.1 podemos deduzir a chamada lagrangiana de Dirac apenas como

$$\mathcal{L}_{Dirac} = \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x). \quad (2.29)$$

É fácil ver que \mathcal{L}_{Dirac} é invariante sobre transformações $U(1)$ globais, ou seja,

$$\psi(x) \xrightarrow{U(1)} \psi' \equiv \exp(iQ\theta)\psi(x), \quad (2.30)$$

onde $Q\theta$ é uma constante real qualquer. Por outro lado, assumindo $\theta = \theta(x)$, ou seja uma transformação local, temos que a lagrangiana deixa de ser invariante, basta notar que

$$\partial_\mu \psi(x) \xrightarrow{U(1)} \exp(iQ\theta)(\partial_\mu + iQ\partial_\mu \theta)\psi(x). \quad (2.31)$$

Podemos exigir a invariância da lagrangiana localmente assumindo o princípio de gauge. Isso é possível adicionando um termo na lagrangiana que cancela o termo gerado pela transformação. Note que isso é possível apenas adicionando um termo de interação, ou seja, não é possível exigir invariância de fase local em uma teoria

livre. No caso da transformação sob $U(1)$, isso introduz um campo de spin 1, que denominamos $A_\mu(x)$ e se transforma com

$$A_\mu(x) \xrightarrow{U(1)} A'_\mu(x) \equiv A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \theta, \quad (2.32)$$

e define uma derivada covariante

$$D_\mu \psi(x) \equiv (\partial_\mu + ieQA_\mu(x))\psi(x), \quad (2.33)$$

com a propriedade

$$D_\mu \psi(x) \xrightarrow{U(1)} (D_\mu \psi)'(x) \equiv \exp(iQ\theta) D_\mu \psi(x). \quad (2.34)$$

Desta forma a nova lagrangiana

$$\mathcal{L} \equiv \bar{\psi}(x)(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi(x) = \mathcal{L}_{Dirac} - eQA_\mu(x)\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \quad (2.35)$$

é agora invariante sobre transformações locais $U(1)$ porém não pertence mais a uma partícula livre. O campo A_μ pode ser promovido a um campo verdadeiro adicionando um termo cinético invariante de gauge, fazendo isso temos o campo eletromagnético usual. Um termo de massa do tipo $\frac{m^2}{2} A^\mu A_\mu$ não pode ser adicionado pois violaria a invariância de gauge, portanto é predito que o fóton não possui massa.

Todas as partículas parecem possuir invariância $U(1)$. Como foi mostrado, o bóson necessário para a invariância da teoria sobre essas transformações é o fóton (γ), mediador da interação eletromagnética. Da mesma forma partículas também são invariantes sobre o conjunto de transformações do grupo $SU(2)$, essa invariância é chamada de eletrofraca. Cada gerador do grupo $SU(2)$ está relacionado a um bóson de spin 1 que preserva a invariância da teoria. Nomeamos esses bósons W^\pm e Z , os mediadores da interação fraca. A terceira invariância comum em todas as partículas é a invariância sobre $SU(3)$. Os bósons associados aos geradores do grupo são nomeados G_a^μ , com $a = 1, 2, \dots, 8$ e possuem spin 1. Estes bósons são chamados gluons e a carga que determina como é a interação entre gluons é chamada carga de cor.

Com as análises de distribuição angular e de energia em decaimentos β sabemos que a interação fraca não conserva paridade, e apenas as componentes de mão esquerda(direita) dos campos fermiônicos(antifermiônicos) participam dessa interação. Temos então que o Modelo Padrão é uma teoria baseada na invariância sob transformações do grupo $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. Os subscritos são referentes a cor (C), hipercarga fraca (Y) e o fato de que as transformações de $SU(2)$ operam nas componentes de mão esquerda dos campos fermiônicos (L).

Tendo que neutrinos interagem apenas fracamente, podemos usar o fato de que não há mistura entre os setores forte e eletrofraco e fatorar apenas o setor que estamos interessados, $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Chamamos este setor Modelo Padrão das

interações eletrofracas. Neste contexto o neutrino é então uma partícula sem massa, neutra de mão esquerda e spin $1/2$ que interage apenas fracamente. Vamos agora fazer considerações de simetria sob transformações do grupo $SU(2)_L \times U(1)_Y$.

Tendo as transformações globais G dadas por

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &\xrightarrow{G} \psi'_1(x) \equiv \exp(iy_1\beta)U_L\psi_1(x), \\ \psi_2(x) &\xrightarrow{G} \psi'_2(x) \equiv \exp(iy_2\beta)\psi_2(x), \\ \psi_3(x) &\xrightarrow{G} \psi'_3(x) \equiv \exp(iy_3\beta)\psi_3(x),\end{aligned}\tag{2.36}$$

com

$$U_L \equiv \exp\left(i\frac{\sigma_k}{2}\alpha^k\right), \quad (k = 1, 2, 3),\tag{2.37}$$

a transformação de $SU(2)_L$, generalizamos a lagrangiana 2.1 excluindo o termo de massa (para evitar a mistura de campos com quiralidades opostas) obtendo

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^3 i\bar{\psi}_k(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi_k(x).\tag{2.38}$$

Essa lagrangiana é invariante pelas transformações globais 2.36. Os parâmetros y_k são as hipercargas e a matriz transformação U_L é não abeliana.

Como os geradores do grupo $SU(2)$ são as matrizes 2×2 de Pauli, a função de onda $\psi_1(x)$ na equação 2.36 deve ser escrita em termos de duas componentes. Em analogia com a definição de isospin, $\psi_1(x)$ é chamada dubleto de isospin fraco. A interação fraca de corrente carregada via W^\pm acopla diferentes férmions, portanto são possíveis apenas partículas que diferem por uma unidade de carga elétrica no dubleto. Além disso para que as partículas de mão direita e antipartículas de mão esquerda não sejam afetadas pela transformação local $SU(2)$, essas são colocadas em estados singletos com isospin fraco total nulo.

Com isso as três famílias de neutrinos pertencem a dubletos $SU(2)_L$ tendo como cada parceiro o seu lépton carregado de mesma família. Fazemos então a associação

$$\psi_1(x) = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L, \quad \psi_2(x) = \nu_{eR}, \quad \psi_3(x) = e^-_R,\tag{2.39}$$

onde os índices L e R indicam as quiralidades esquerda e direita respectivamente.

Exigindo agora a invariância de gauge sob transformações locais $SU(2)_L \times U(1)_Y$ via $\alpha^k = \alpha^k(x)$ e $\beta = \beta(x)$, precisamos de uma definição de derivada covariante. Como temos 4 parâmetros, α^i e β , são necessários 4 bósons, temos então

$$\begin{aligned}D_\mu\psi_1(x) &\equiv (\partial_\mu + ig\tilde{W}_\mu(x) + ig'\frac{y_1}{2}B_\mu(x))\psi_1(x), \\ D_\mu\psi_2(x) &\equiv (\partial_\mu + ig'\frac{y_2}{2}B_\mu(x))\psi_2(x), \\ D_\mu\psi_3(x) &\equiv (\partial_\mu + ig'\frac{y_3}{2}B_\mu(x))\psi_3(x),\end{aligned}\tag{2.40}$$

com

$$\tilde{W}_\mu(x) \equiv \frac{\sigma_k}{2} W_\mu^k(x). \quad (2.41)$$

Assim o número correto de campos de gauge para descrever W^\pm , Z e γ é obtido.

Queremos que as derivadas covariante $D_\mu \psi_k(x)$ se transformem como os campos $\psi_k(x)$ o que fixa as leis de transformação dos campos de gauge,

$$\begin{aligned} B_\mu(x) &\xrightarrow{\mathbb{G}} B'_\mu(x) \equiv B_\mu(x) - \frac{1}{g'} \partial_\mu \beta(x), \\ \tilde{W}_\mu &\xrightarrow{\mathbb{G}} \tilde{W}'_\mu \equiv U_L(x) \tilde{W}_\mu U_L^\dagger(x) + \frac{i}{g} \partial_\mu U_L(x) U_L^\dagger(x). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Reescrevendo a lagrangiana 2.38 em função da derivada covariante encontrada temos que a forma invariante sob transformações locais é

$$\mathcal{L} = \sum_{k=1}^3 i \bar{\psi}_k(x) \gamma^\mu D_\mu \psi_k(x). \quad (2.43)$$

A lagrangiana de interação $SU(2)_L \times U(1)_Y$ na equação 2.43 possui apenas campos sem massa. Os termos de massa para bósons são proibidos pela simetria de gauge, já para férmions não são possíveis pois misturariam campos de quiralidades opostas o que produziria uma quebra explícita da simetria de gauge. Como estamos interessados nos termos de interação não escreveremos os termos cinéticos, que são calculados na referência [12].

Explicitando os termos da lagrangiana 2.43 de acordo com as derivadas covariantes 2.40 temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \sum_{k=1}^3 i \bar{\psi}_k(x) \gamma^\mu \partial_\mu \psi_k(x) - \frac{g'}{2} B_\mu(x) \sum_{k=1}^3 y_k \bar{\psi}_k(x) \gamma^\mu \psi_k(x) \\ - g \bar{\psi}_1(x) \gamma^\mu \tilde{W}_\mu(x) \psi_1(x). \end{aligned} \quad (2.44)$$

2.3.1 Interação via Corrente Carregada

O primeiro termo da lagrangiana 2.44 é apenas a parte livre, o segundo e terceiro são termos de interação dos campos com os bósons de gauge. O terceiro termo em especial contém a matriz de $SU(2)_L$,

$$\tilde{W}_\mu(x) = \frac{\sigma_k}{2} W_\mu^k(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3(x) & W_\mu^1(x) - iW_\mu^2(x) \\ W_\mu^1(x) + iW_\mu^2(x) & -W_\mu^3(x) \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

onde podemos definir o campo físico interagente

$$W_\mu^\pm \equiv \frac{(W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)}{\sqrt{2}}, \quad (2.46)$$

e assim

$$\tilde{W}_\mu(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3(x) & \sqrt{2}W_\mu^+(x) \\ \sqrt{2}W_\mu^-(x) & -W_\mu^3(x) \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Voltando agora ao terceiro termo da lagrangiana 2.44, explicitamos os termos de acordo com as equações 2.39 e 2.47, ficando com

$$\mathcal{L}_{CC} \approx -\frac{g}{2} \left[\begin{pmatrix} \bar{\nu}_e & \bar{e} \end{pmatrix}_L \gamma_\mu \begin{pmatrix} W_\mu^3(x) & \sqrt{2}W_\mu^+(x) \\ \sqrt{2}W_\mu^-(x) & -W_\mu^3(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L \right], \quad (2.48)$$

e calculando essa expressão, ficamos com quatro termos,

$$\mathcal{L}_{CC} \approx -\frac{g}{2} \left[\bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu \nu_{eL} W_\mu^3 + \sqrt{2} \bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu e_L W_\mu^+ + \sqrt{2} \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_{eL} W_\mu^- - \bar{e}_L \gamma^\mu e_L W_\mu^3 \right], \quad (2.49)$$

os termos de interesse no momento são os termos com transição $\bar{\nu}_e \rightarrow e$ e $\bar{e} \rightarrow \nu_e$, descartaremos os outros termos por enquanto mas eles serão recuperados mais tarde.

A lagrangiana de corrente carregada é então

$$\mathcal{L}_{CC} = -\frac{g\sqrt{2}}{2} \left[\bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu e_L W_\mu^+ + \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_{eL} W_\mu^- \right]. \quad (2.50)$$

Lembrando da definição dos projetores quirais 2.23, e da propriedade 2.28 temos que

$$\bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu e_L = \frac{1}{2} \bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e, \quad (2.51)$$

e do mesmo modo

$$\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_{eL} = \frac{1}{2} \bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_e, \quad (2.52)$$

substituindo em 2.50 ficamos com

$$\mathcal{L}_{CC} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} \left[\bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e W_\mu^+ + \bar{e} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_e W_\mu^- \right]. \quad (2.53)$$

Podemos notar que o segundo termo desta lagrangiana é exatamente o hermitiano conjugado do primeiro termo, já que $W_\mu^- = [W_\mu^+]^\dagger$. A universalidade das interações leptônicas é uma consequência direta da exigência da simetria de gauge. Além disso, podemos reconhecer

$$j_{W,L}^\mu = \bar{\nu}_e \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e, \quad (2.54)$$

conhecida como corrente carregada leptônica.

2.3.2 Interação via Corrente Neutra

Na seção anterior, ao explicitar o terceiro termo da lagrangiana 2.44, escolhemos apenas os termos de corrente carregada, descartando outros dois presentes na equação 2.49. Recuperamos agora a origem dos termos descartados, somando-os com a contribuição do segundo termo da lagrangiana 2.44. Esse termo contém a informação das

interações com o campo de gauge neutro $B_\mu(x)$. Obtemos assim uma lagrangiana de corrente neutra da forma

$$\mathcal{L}_{NC} = -\frac{g'}{2}B_\mu(x) \sum_{k=1}^3 y_k \bar{\psi}_k(x) \gamma^\mu \psi_k(x) - \frac{g}{2} \bar{\psi}_1 \gamma^\mu \sigma_3 \psi_1 W_\mu^3. \quad (2.55)$$

Precisamos agora identificar os bósons B_μ e W_μ^3 como γ e Z . Como sabemos, a interação eletromagnética preserva paridade, o que não acontece no caso do bóson B_μ , pois este interage de forma diferente dependendo da quiralidade do férmion em questão. Poderíamos igualar A_μ e B_μ exigindo $y_1 = y_2 = y_3$ e $g'y_k = eQ_k$ mas isso não pode ser verdadeiro simultaneamente. Desta forma o que podemos fazer é tomar uma combinação linear dos campos, por meio da conhecida matriz de rotação,

$$\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

A lagrangiana 2.55 em função dos campos Z_μ e A_μ fica então

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{NC} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \bar{\psi}_k \gamma^\mu [(g\sigma_3 \sin\theta_W + g'y_k \cos\theta_W) A_\mu \\ + (g\sigma_3 \cos\theta_W - g'y_k \sin\theta_W) Z_\mu] \psi_k. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Para obter o termo de interação da lagrangiana da eletrodinâmica (segundo termo da equação 2.35), precisamos impor as condições 2.58. A primeira condição relaciona os acoplamentos $SU(2)_L$ e U_Y com o acoplamento eletromagnético, proporcionando a unificação da teoria fraca com a teoria eletromagnética. A segunda condição fixa as hipercargas dos férmions em termos da carga elétrica e do isospin fraco T_3 .

$$g \sin\theta_W = g' \cos\theta_W = e, \quad e \quad Y = 2(Q - \frac{\sigma_3}{2}) = 2(Q - T_3), \quad (2.58)$$

Q é o operador de carga eletromagnético dado para a primeira família leptônica por

$$Q_1 = \begin{pmatrix} Q_\nu & 0 \\ 0 & Q_e \end{pmatrix}, \quad Q_2 = Q_\nu, \quad Q_3 = Q_e. \quad (2.59)$$

Temos assim que as hipercargas para a primeira família leptônica são,

$$\begin{aligned} y_1 &= 2(Q_\nu - \frac{1}{2}) = 2(Q_e + \frac{1}{2}) = -1, \\ y_2 &= Q_\nu = 0, \\ y_3 &= 2Q_e = -2. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Um neutrino de mão direita deveria ter carga elétrica nula e hipercarga fraca nula. Desta forma não acoplaria com nenhum dos bósons, e portanto não interagiria por meio de nenhuma força. Chamamos esse tipo de partícula de neutrino estéril.

Voltando a lagrangiana 2.57 desta vez descartando o termo eletromagnético, ficamos com

$$\mathcal{L}_{NC} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \bar{\psi}_k \gamma^\mu [(g\sigma_3 \cos\theta_W - g' y_k \sin\theta_W) Z_\mu] \psi_k, \quad (2.61)$$

escrevendo as hipercargas em termos da relação 2.58 e utilizando a identidade trigonométrica fundamental é direto que

$$\mathcal{L}_{NC} = -\frac{e}{2\sin\theta_W \cos\theta_W} \sum_{k=1}^3 \bar{\psi}_k \gamma^\mu [\sigma_3 - 2\sin^2\theta_W Q_k^f] \psi_k Z_\mu. \quad (2.62)$$

σ_3^f é o autovalor de σ_3 para qualquer férmion f . Se f é um singleto, temos que $\sigma_3^f = 0$, se f é um membro superior de um dubleto $\sigma_3^f = 1$, se f é um membro inferior de um dubleto $\sigma_3^f = -1$. Q_k^f é a carga elétrica de um férmion f . Com essas considerações explicitamos a lagrangiana 2.62 em termos das quiralidades de acordo com as definições 2.39,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{NC} = -\frac{e}{2\sin\theta_W \cos\theta_W} \{ & \bar{\psi}_L \gamma^\mu [\sigma_3^f - 2\sin^2\theta_W Q^f] \psi_L \\ & + \bar{\psi}_R \gamma^\mu [-2\sin^2\theta_W Q^f] \psi_R \} Z_\mu. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Se na expressão 2.63 definirmos coeficientes

$$g_L^f = \frac{\sigma_3^f}{2} - \sin^2\theta_W Q^f \quad \text{e} \quad g_R^f = -\sin^2\theta_W Q^f \quad (2.64)$$

teremos que

$$\mathcal{L}_{NC} = -\frac{e}{\sin\theta_W \cos\theta_W} \{ \bar{\psi}_L \gamma^\mu g_L^f \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu g_R^f \psi_R \} Z_\mu, \quad (2.65)$$

e usando a propriedade 2.28 podemos escrever

$$\mathcal{L}_{NC} = -\frac{e}{2\sin\theta_W \cos\theta_W} \bar{\psi} \gamma^\mu \{ g_L^f (1 - \gamma_5) + g_R^f (1 + \gamma_5) \} \psi Z_\mu, \quad (2.66)$$

e definindo ainda

$$g_A^f = g_L^f - g_R^f \quad \text{e} \quad g_V^f = g_L^f + g_R^f, \quad (2.67)$$

onde g_A^f e g_V^f são chamados de acoplamentos Axial e Vetorial do bóson Z , temos a versão final da interação de corrente neutra

$$\mathcal{L}_{NC} = -\frac{e}{2\sin\theta_W \cos\theta_W} \sum_f \bar{\psi}^f \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma_5) \psi^f Z_\mu. \quad (2.68)$$

Ou no caso da família eletrônica,

$$\mathcal{L}_{NC} = -\frac{e}{2\sin\theta_W\cos\theta_W} [\bar{\nu}_e\gamma^\mu (g_V^{\nu} - g_A^{\nu}\gamma_5) \nu_e + \bar{e}\gamma^\mu (g_V^e - g_A^e\gamma_5) e] Z_\mu. \quad (2.69)$$

Devido às formas das correntes tanto neutra quanto carregada, a interação fraca não conserva paridade. No Modelo Padrão, uma vez que θ_W é conhecido os acoplamentos do bóson Z com férmions são preditos exatamente. Para a obtenção da lagrangiana completa da interação eletrofraca devemos ainda considerar os termos cinéticos e os termos de massa dos bósons W^\pm e Z .

2.4 Dirac vs Majorana

No Modelo Padrão é exigido que neutrinos tenham massa nula devido ao fato dos termos de massa de Dirac na Lagrangiana exigirem a existência de componentes de mão direita. Porém com a descoberta da oscilação de neutrinos se tornou evidente a existência de massa nessas partículas e portanto a lagrangiana deve conter um termo de massa correspondente. Podemos adicionar um termo de massa exatamente da mesma forma que os quarks up usando o dubleto de Higgs conjugado. Neste caso, após a quebra espontânea de simetria, o termo de massa de Dirac invariante de gauge mais geral que pode ser introduzido na lagrangiana do Modelo Padrão para o neutrino é

$$\mathcal{L}_D^{\nu} = -\sum_{\alpha,\beta} (\bar{\nu}_{\alpha R} \mathcal{M}_{\alpha\beta}^D \nu_{\beta L} + \bar{\nu}_{\beta L} (\mathcal{M}_{\alpha\beta}^D)^\dagger \nu_{\alpha R}) \quad (2.70)$$

onde $M_{\alpha\beta}^D$ é uma matriz complexa arbitrária 3×3 , α e β contam sobre os três neutrinos e , μ e τ . $\nu_{\alpha L}$, $\nu_{\alpha R}$ são campos de mão esquerda e direita respectivamente. Se essa é a origem da massa dos neutrinos, neutrinos de mão direita existem. As massas de neutrinos que observamos são muito pequenas comparadas as massas de outros férmions, o que sugere que outro mecanismo talvez esteja presente.

Existe outra combinação de campos que pode ser escrita que satisfaz as condições necessárias para ser um termo de massa. Seja C a matriz de conjugação de carga, definimos ν_R^c o campo conjugado de carga

$$\nu_R^c \equiv C\bar{\nu}_L^T, \text{ que implica, } \bar{\nu}_R^c = -\nu_L^T C^{-1}. \quad (2.71)$$

A conjugação de carga transforma uma partícula de mão direita em uma antipartícula de mão esquerda. Um férmion que possui a propriedade do seu campo conjugado ser o próprio campo é denominado férmion de Majorana. Como neutrinos de mão direita e antineutrinos de mão esquerda se transformam como singletos sob as transformações de gauge do Modelo Padrão, quaisquer termos na lagrangiana

formados por somente esses campos podem ser adicionados sem quebrar a invariância de gauge da teoria.

No caso específico dos neutrinos, antineutrinos de mão esquerda aparecem na lagrangiana como conjugados dos campos de mão direita ν_R^c , e assim termo de Majorana é

$$\mathcal{L}_M^v = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} (\overline{\nu_{\alpha R}^c} \mathcal{M}_{\alpha\beta}^M \nu_{\beta L} + \overline{\nu_{\beta L}} (\mathcal{M}_{\alpha\beta}^M)^\dagger \nu_{\alpha R}^c). \quad (2.72)$$

Termos de massa de Majorana tem como resultado um acoplamento direto entre a partícula e a antipartícula. Para partículas carregadas eletricamente por exemplo, este termo permitiria transições de partículas positivas para negativas. Isso não é um problema no caso dos neutrinos já que são partículas neutras, dessa possibilidade fica claro que neutrinos e antineutrinos podem ser a mesma partícula.

Não temos nenhuma razão aparente para acreditar que a base dos autoestados de massas de Dirac ou de Majorana seja a base de autoestados de sabores das interações eletrofracas. Explorando essa possibilidade somos levados diretamente ao fenômeno de oscilação de neutrinos.

2.5 Oscilação de Neutrinos

Assumindo que os autoestados da interação fraca dos neutrinos são diferentes dos autoestados de massa podemos definir os estados de propagação, ou neutrinos físicos, as três partículas $\nu_i = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$. Cada uma dessas partículas têm massa $m_i = (m_1, m_2, m_3)$ bem determinadas e não possuem carga elétrica nem carga de cor. A interação fraca cria e aniquila estados de superposição dos neutrinos físicos.

Assim sendo, campos quantizados de neutrinos de dado sabor ν_ℓ não coincidem com campos de neutrinos de massas determinadas, mas coincidem com combinações lineares de campos ν_i que possuem massas m_i .

Definimos a transformação unitária que diagonaliza o termo de massa da lagrangiana,

$$\nu_\ell = \sum_{i=1}^N \mathbf{U}_{\ell i} \nu_i \quad \text{com} \quad \begin{cases} \ell = e, \mu, \tau & [\text{sabor}] \\ i = 1, 2, 3 & [\text{massa}] \end{cases} \quad (2.73)$$

onde $\mathbf{U}_{\ell i}$ são os elementos da matriz de mistura leptônica. No caso de $N = 3$, $\mathbf{U}_{\ell i}$ são os elementos de uma matriz 3x3 unitária, o que garante a preservação das probabilidades e mantém os estados físicos ortonormais, assim como os de sabor. A descrição para antineutrinos se dá simplesmente pela troca de $\mathbf{U}_{\ell i}$ por $\mathbf{U}_{\ell i}^*$.

Essa proposta é consistente com o desenvolvimento da seção anterior tanto para neutrinos de Dirac quanto para neutrinos de Majorana. No caso de neutrinos de Dirac, temos para a lagrangiana 2.70,

$$\mathcal{M}^D = \mathbf{U} \text{diag}(m_1, m_2, m_3) \mathbf{U}^\dagger. \quad (2.74)$$

E no caso de neutrinos de Majorana, na lagrangiana 2.72,

$$\mathcal{M}^M = \mathbf{U}^* \text{diag}(m_1, m_2, m_3) \mathbf{U}^\dagger. \quad (2.75)$$

Como as massas m_1 , m_2 e m_3 não são iguais, durante a propagação diferentes fases surgem entre as componentes da função de onda o que permite a oscilação entre sabores.

2.5.1 Parâmetros Relevantes

A matriz de mistura deve ser unitária e para n neutrinos deve ter dimensão $n \times n$. Uma matriz $n \times n$ possui n^2 componentes independentes, assumindo que essas componentes são complexas, em cada elemento da matriz temos dois parâmetros, portanto temos $2n^2$ parâmetros livres. Além disso, a condição de unitariedade $\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbb{1}$, fixa n^2 parâmetros, o que nos deixa com $2n^2 - n^2 = n^2$ parâmetros independentes na matriz \mathbf{U} . Deste modo no caso 2×2 temos quatro parâmetros independentes, enquanto no caso 3×3 temos nove.

Estados de sabor evoluem no tempo de maneira não trivial e por consequência disso adquirem diferentes fases. A mecânica quântica nos dá liberdade para escolher as fases dos estados físicos, e quando as fases dos estados de massa e de sabor mudam, a matriz de mistura muda. Assumindo que mudemos as fases dos estados de massa e sabor de acordo com

$$|v_i\rangle' = \exp(i\phi_i) |v_i\rangle \quad e \quad |v_\ell\rangle' = \exp(i\phi_\ell) |v_\ell\rangle, \quad (2.76)$$

a relação entre os estados será

$$|v_\ell\rangle' = (\mathbf{U}'_{\ell i})^* |v_i\rangle', \quad (2.77)$$

com

$$\mathbf{U}'_{\ell i} = \exp(-i\phi_\ell) \mathbf{U}_{\ell i} \exp(i\phi_i), \quad (2.78)$$

o que obviamente não altera os valores absolutos

$$|\mathbf{U}'_{\ell i}| = |\mathbf{U}_{\ell i}|, \quad (2.79)$$

e ainda mantém as probabilidades de transição inalteradas

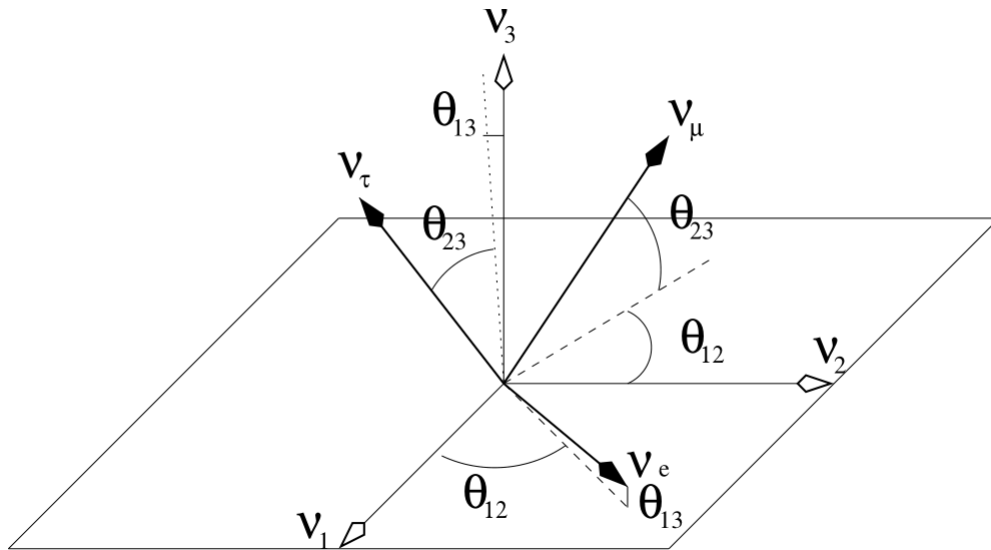
$$|\langle v_{\ell_2} | v_{\ell_1}, t \rangle|^2 = |\langle v_{\ell_2} | v_{\ell_1}, t \rangle'|^2. \quad (2.80)$$

O complexo conjugado da matriz de mistura na relação 2.77 vem do fato de que os estados são criados por operadores conjugados. Assim se os campos se transformam com a matriz \mathbf{U} , os estados devem se transformar com a matriz \mathbf{U}^* . A consequência importante desse desenvolvimento é que dada a possibilidade de redefinir as fases

dos estados, nem todos os n^2 parâmetros independentes da matriz de mistura são relevantes para descrever a oscilação de neutrinos. Como exposto na equação 2.79, os módulos das entradas da matriz de mistura permanecem inalterados quando usamos diferentes fases nos estados. A relação de unitariedade fixa um parâmetro para cada linha e um parâmetro para cada coluna da matriz de mistura, portanto temos $(n - 1)^2$ elementos independentes na matriz real de elementos $|\mathbf{U}_{\ell i}^2|$. Desta maneira temos quatro parâmetros relevantes no caso 3x3, e apenas um no caso 2x2.

Como qualquer matriz unitária 3x3, a matriz de mistura \mathbf{U} pode ser escrita em termos de 3 ângulos e 6 fases [13]. Conforme dito anteriormente, teremos quatro parâmetros independentes na matriz 3x3, portanto usamos três ângulos e uma fase. Estes ângulos podem ser representados como ângulos de Euler que relacionam a base dos autoestados de sabor (ν_e, ν_μ, ν_τ) com a base dos autoestados de massa (ν_1, ν_2, ν_3) (ver figura 1). No caso 2x2 temos um único ângulo como parâmetro importante para as oscilações.

Figura 1 – Ângulos de mistura dos Neutrinos (assumindo violação CP nula).



Fonte: Discrete Symmetries and Models of Flavour Mixing. p.1 [14].

2.5.2 Matriz de Mistura

A matriz PMNS (Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata) é usualmente escrita em termos dos ângulos de mistura θ_{12} , θ_{13} e θ_{23} e da fase δ_{CP} de violação CP. A fase δ_{CP} , também chamada de fase de Dirac, é introduzida na matriz de mistura pela necessidade de descrever a violação CP nas interações em que os neutrinos participam.

Pela nossa construção, a matriz de mistura \mathbf{U} deve ter a seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{e1} & \mathbf{U}_{e2} & \mathbf{U}_{e3} \\ \mathbf{U}_{\mu1} & \mathbf{U}_{\mu2} & \mathbf{U}_{\mu3} \\ \mathbf{U}_{\tau1} & \mathbf{U}_{\tau2} & \mathbf{U}_{\tau3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}. \quad (2.81)$$

A matriz à esquerda representa um estado genérico de neutrinos expresso na base dos sabores. Do lado direito temos a matriz PMNS que multiplica o estado de neutrinos expresso na base das massas. Um neutrino de dado sabor é um estado de mistura de neutrinos de massas bem definidas.

Podemos expressar a matriz de mistura como o produto de três matrizes de rotação unitárias nos planos complexos $(1,2)$, $(1,3)$ e $(2,3)$. Para simplificar a notação, escrevemos $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ e $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$. Desta forma ficamos com

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_{23} & s_{23} \\ 0 & -s_{23} & c_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{13}e^{-i\delta} & 0 & c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{12} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

E calculando o produto entre as matrizes temos que

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}. \quad (2.82)$$

Esta é a chamada parametrização padrão da matriz PMNS. É escrita dessa forma para neutrinos como férmions de Dirac. Se neutrinos forem partículas de Majorana, a matriz 2.82 deve ser multiplicada por uma matriz do tipo $\text{diag}(e^{i\alpha_1}, e^{i\alpha_2}, 1)$, em que os elementos são fases de Majorana. As fases de Majorana α_1 e α_2 não são relevantes para a descrição da oscilação de neutrinos [15]. Os ângulos podem ser tomados no primeiro quadrante $\theta_{ij} \in [0, \pi/2]$ e as fases $\delta_{CP} \in [0, 2\pi]$ sem perda de generalidade. Qualquer valor de δ_{CP} diferente de 0 e π implica em violação CP nas oscilações de neutrinos no vácuo.

2.5.3 Oscilação de Neutrinos no Vácuo

Os desenvolvimentos das próximas seções são válidos para o caso particular em que a propagação de neutrinos se dá no vácuo, evitando assim termos provenientes da interação com a matéria.

2.5.3.1 Amplitude de Transição e Probabilidade

O caso mais geral que podemos considerar descreve n autoestados de sabor de neutrinos $|\nu_\ell\rangle$ como combinação linear de n autoestados de massa $|\nu_j\rangle$. Os autoestados

de de massa, $|v_j\rangle$, possuem massas e energias bem definidas, portanto sua evolução temporal é dada pela equação de Schrödinger,

$$i\frac{\partial}{\partial t} |v_j, t\rangle = \mathcal{H}_0 |v_j, t\rangle = E_j |v_j, t\rangle, \quad (2.83)$$

\mathcal{H}_0 é a Hamiltoniana livre com autovalor E_j , deste modo,

$$|v_\ell, t\rangle = \sum_{j=1}^n \mathbf{U}_{\ell j}^* |v_j, t\rangle, \quad \text{com} \quad |v_j, t\rangle = |v_j, 0\rangle e^{-iE_j t}, \quad (2.84)$$

e explicitando a relação 2.84, com $|v_j, 0\rangle \equiv |v_j\rangle$, temos que

$$|v_\ell, t\rangle = \sum_{j=1}^n \mathbf{U}_{\ell j}^* e^{-iE_j t} |v_j\rangle, \quad (2.85)$$

mas podemos escrever

$$|v_j\rangle = \sum_{\ell'} \mathbf{U}_{\ell' j} |v_{\ell'}\rangle, \quad (2.86)$$

o que substituindo em 2.85 nos leva a

$$|v_\ell, t\rangle = \sum_{j=1}^n \mathbf{U}_{\ell j}^* e^{-iE_j t} \left(\sum_{\ell'} \mathbf{U}_{\ell' j} |v_{\ell'}\rangle \right), \quad (2.87)$$

e conseqüentemente

$$|v_\ell, t\rangle = \sum_{\ell'} \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{U}_{\ell j}^* e^{-iE_j t} \mathbf{U}_{\ell' j} \right) |v_{\ell'}\rangle. \quad (2.88)$$

Da equação 2.88 vemos que o estado de sabor ℓ evolui no tempo como uma superposição linear dos diferentes sabores de neutrinos. Dessa relação, a amplitude de transição é imediatamente calculada,

$$\mathcal{U}_{\ell\ell'}(t) = \langle v_{\ell'}, 0 | v_\ell, t \rangle = \langle v_{\ell'}, 0 | \sum_{\ell''} \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{U}_{\ell j}^* e^{-iE_j t} \mathbf{U}_{\ell'' j} \right) |v_{\ell''}, 0\rangle, \quad (2.89)$$

e portanto

$$\mathcal{U}_{\ell\ell'}(t) = \sum_{j=1}^n \mathbf{U}_{\ell j}^* e^{-iE_j t} \mathbf{U}_{\ell' j}. \quad (2.90)$$

A partir da amplitude de transição podemos calcular diretamente a probabilidade de oscilação, dada por

$$P_{\nu_\ell \rightarrow \nu_{\ell'}}(t) = |\mathcal{U}_{\ell\ell'}(t)|^2 = \mathcal{U}_{\ell\ell'} \mathcal{U}_{\ell\ell'}^* = \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{U}_{\ell i}^* \mathbf{U}_{\ell' i} e^{-iE_i t} \right) \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{U}_{\ell j} \mathbf{U}_{\ell' j} e^{-iE_j t} \right)^*, \quad (2.91)$$

o que nos leva finalmente a

$$P_{\nu_\ell \rightarrow \nu_{\ell'}}(t) = \sum_{i,j} \mathbf{U}_{\ell i}^* \mathbf{U}_{\ell' i} \mathbf{U}_{\ell' j}^* \mathbf{U}_{\ell j} e^{-i(E_i - E_j)t}. \quad (2.92)$$

Como mencionado anteriormente, em experimentos de oscilação, neutrinos são sempre considerados ultrarelativísticos [16], por essa razão podemos aproximar

$$E_i = \sqrt{\vec{p}^2 + m_i^2} \simeq E + \frac{m_i^2}{2E}, \quad (2.93)$$

onde tomamos a energia do neutrino como seu momento linear $E \equiv |\vec{p}|$. Também consideramos que os neutrinos envolvidos no processo possuem a mesma energia, o que nos permite escrever

$$E_i - E_j \simeq E + \frac{m_i^2}{2E} - E - \frac{m_j^2}{2E} = \frac{|m_i^2 - m_j^2|}{2E} \equiv \frac{\Delta m_{ij}^2}{2E}. \quad (2.94)$$

Substituindo em 2.92, temos que

$$P_{\nu_\ell \rightarrow \nu_{\ell'}}(L) = \sum_{i,j} \mathbf{U}_{\ell i}^* \mathbf{U}_{\ell' i} \mathbf{U}_{\ell' j}^* \mathbf{U}_{\ell j} e^{-i \left(\frac{\Delta m_{ij}^2}{2E} \right) L}. \quad (2.95)$$

Que é a fórmula geral para a probabilidade de oscilação de neutrinos. Para escrevê-la ainda fazemos a consideração de que $t \simeq L$.

2.5.3.2 Caso Particular de Dois Sabores e Duas Massas

Um caso simples mas com resultados interessantes para a análise do fenômeno de oscilação de neutrinos é o caso de dois sabores e duas massas. Esse caso é uma boa aproximação à realidade em experimentos short-baseline, pois quando as distâncias envolvidas entre a produção e detecção de neutrinos são pequenas, as duas massas de menor diferença podem efetivamente serem consideradas a mesma, e então o que causa a oscilação é o terceiro neutrino, aquele que a massa mais difere dos outros dois estados [17].

Considerando dois autoestados de sabor $|\nu_\ell\rangle$ com $\ell = \alpha, \beta$ e dois autoestados de massa $|\nu_i\rangle$ com $i = 1, 2$ e sabendo que no caso 2x2 a matriz de mistura possui apenas um parâmetro independente, podemos escrever a relação entre as duas bases em função do ângulo de mistura θ como

$$\begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ \nu_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{\alpha 1} & \mathbf{U}_{\alpha 2} \\ \mathbf{U}_{\beta 1} & \mathbf{U}_{\beta 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad \text{com} \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (2.96)$$

desta maneira temos que $|\nu_\alpha\rangle = \mathbf{U}_{\alpha i} |\nu_i\rangle$ e, pelo fato da matriz de mistura ser real neste caso $|\bar{\nu}_\alpha\rangle = \mathbf{U}_{\alpha i} |\bar{\nu}_i\rangle$. Com isso podemos calcular a probabilidade de sobrevivência do neutrino de sabor α , ou seja, a probabilidade de detectar $|\nu_\alpha\rangle$ após sua propagação no vácuo por um tempo t . A amplitude é

$$\mathcal{U}_{\alpha\alpha}(t) = \langle \nu_\alpha | \nu_\alpha, t \rangle = \langle \nu_j | \sum_{jk} \mathbf{U}_{\alpha j}^* e^{-iE_k t} \mathbf{U}_{\alpha k} | \nu_k \rangle = \sum_k |\mathbf{U}_{\alpha k}|^2 e^{-iE_k t}, \quad (2.97)$$

com $\langle \nu_j | \nu_k \rangle = \delta_{jk}$. A probabilidade de sobrevivência $P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha} = |\mathcal{U}_{\alpha\alpha}(t)|^2$, usando a condição de unitariedade $|\mathbf{U}_{\alpha 1}|^2 + |\mathbf{U}_{\alpha 2}|^2 = 1$, é dada por

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha} = ||\mathbf{U}_{\alpha 1}|^2 + |\mathbf{U}_{\alpha 2}|^2 e^{-i(E_2 - E_1)t}|^2 = |1 - |\mathbf{U}_{\alpha 2}|^2 + |\mathbf{U}_{\alpha 2}|^2 e^{-i(E_2 - E_1)t}|^2, \quad (2.98)$$

e definindo $\phi \equiv (E_2 - E_1)t/2$,

$$\begin{aligned} P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha} &= |1 - |\mathbf{U}_{\alpha 2}|^2(e^{-2i\phi} - 1)|^2 = |1 - |\mathbf{U}_{\alpha 2}|^2 e^{-2i\phi}(1 - e^{+2i\phi})|^2 \\ &= |1 - |\mathbf{U}_{\alpha 2}|^2 e^{i\phi}(e^{-i\phi} - e^{i\phi})|^2 = |1 + 2ie^{i\phi}|\mathbf{U}_{\alpha 2}|^2 \text{sen}\phi|^2 \\ &= |e^{-i\phi} + 2i|\mathbf{U}_{\alpha 2}|^2 \text{sen}\phi|^2 = |\cos\phi - i\text{sen}\phi + 2i|\mathbf{U}_{\alpha 2}|^2 \text{sen}\phi|^2 \\ &= |\cos\phi + i\text{sen}\phi(-1 + 2|\mathbf{U}_{\alpha 2}|^2)|^2 = (\cos\phi + i\text{sen}\phi(-1 + 2|\mathbf{U}_{\alpha 2}|^2)) \\ &(\cos\phi - i\text{sen}\phi(-1 + 2|\mathbf{U}_{\alpha 2}|^2)) = \cos^2\phi + \text{sen}^2\phi(-1 + 2|\mathbf{U}_{\alpha 2}|^2)^2 \\ &= \cos^2\phi + \text{sen}^2\phi(1 + 4|\mathbf{U}_{\alpha 2}|^4 - 4|\mathbf{U}_{\alpha 2}|^2). \end{aligned} \quad (2.99)$$

Finalmente,

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha} = 1 - 4|\mathbf{U}_{\alpha 2}|^2(1 - |\mathbf{U}_{\alpha 2}|^2)\text{sen}^2\phi. \quad (2.100)$$

Voltando a definição de ϕ e considerando a aproximação para neutrinos ultrarelativísticos $t \simeq L$, podemos usar a relação 2.94 e ainda escrever

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha} = 1 - 4|\mathbf{U}_{\alpha 2}|^2(1 - |\mathbf{U}_{\alpha 2}|^2)\text{sen}^2 \frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}. \quad (2.101)$$

A probabilidade de oscilação, neste caso, pode ser calculada da mesma maneira, partindo da amplitude de oscilação do neutrino de sabor α para o neutrino de sabor β

$$\mathcal{U}_{\alpha\beta}(t) = \langle \nu_\beta | \nu_\alpha, t \rangle = \langle \nu_j | \sum_{jk} \mathbf{U}_{\beta j}^* e^{-iE_k t} \mathbf{U}_{\alpha k} | \nu_k \rangle = \sum_k \mathbf{U}_{\beta k} \mathbf{U}_{\alpha k} e^{-iE_k t}, \quad (2.102)$$

com $\langle \nu_j | \nu_k \rangle = \delta_{jk}$. A probabilidade é

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = |\mathbf{U}_{\beta k} \mathbf{U}_{\alpha k} e^{-iE_k t}|^2 = |\mathbf{U}_{\beta 1} \mathbf{U}_{\alpha 1} e^{-iE_1 t} + \mathbf{U}_{\beta 2} \mathbf{U}_{\alpha 2} e^{-iE_2 t}|^2, \quad (2.103)$$

substituindo os elementos da matriz de mistura 2.96, temos que

$$\begin{aligned} P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} &= | -\text{sen}\theta \cos\theta e^{-iE_1 t} + \text{sen}\theta \cos\theta e^{-iE_2 t} |^2 = \text{sen}^2\theta \cos^2\theta |e^{-iE_2 t} - e^{-iE_1 t}|^2 \\ &= \text{sen}^2\theta \cos^2\theta |e^{-i(E_2 - E_1)t} - 1|^2 = \text{sen}^2\theta \cos^2\theta |e^{-2i\phi} - 1|^2 \\ &= \text{sen}^2\theta \cos^2\theta |e^{i\phi} - e^{-i\phi}|^2 = \text{sen}^2\theta \cos^2\theta |2i\text{sen}\phi|^2 \\ &= 4\text{sen}^2\theta \cos^2\theta \text{sen}^2\phi, \end{aligned} \quad (2.104)$$

retornando ϕ , usando a relação 2.94, fazendo a aproximação para neutrinos ultrarelativísticos e utilizando a relação trigonométrica $2\text{sen}\omega \cos\omega = \text{sen}2\omega$, temos finalmente que a probabilidade de oscilação é

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \text{sen}^2 2\theta \text{sen}^2 \frac{\Delta m_{21}^2 L}{4E}. \quad (2.105)$$

Lembrando que estamos utilizando o sistema natural de unidades ($\hbar = c = 1$), ainda podemos recuperar as unidades e escrever

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \text{sen}^2 2\theta \text{sen}^2 \frac{1,267 \Delta m_{21}^2 L}{E}. \quad (2.106)$$

Com Δm^2 em eV^2 , L em km e E em GeV.

Escrevendo na forma

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = 4 \text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta \text{sen}^2 \frac{1,267 \Delta m_{21}^2 L}{E} \quad (2.107)$$

Voltando aos elementos originais da matriz,

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = 4 |\mathbf{U}_{\alpha 2}|^2 |\mathbf{U}_{\beta 2}|^2 \text{sen}^2 \frac{1,267 \Delta m^2 L}{E}, \quad (2.108)$$

e sabendo que a probabilidade de sobrevivência é a probabilidade máxima menos a probabilidade de oscilação, é evidente que

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha} = 1 - 4 |\mathbf{U}_{\alpha 2}|^2 |\mathbf{U}_{\beta 2}|^2 \text{sen}^2 \frac{1,267 \Delta m^2 L}{E}, \quad (2.109)$$

que é compatível com a equação 2.101 e são as formas usuais encontradas na literatura.

Analisando a equação 2.106 vemos que os experimentos de detecção devem ser preparados de modo que $1,267 \Delta m^2 L / E = \pi/2$ pois esse valor maximiza a probabilidade de oscilação. O valor $L/E = \pi / (2,534 \Delta m^2)$ é chamado de oscilação máxima.

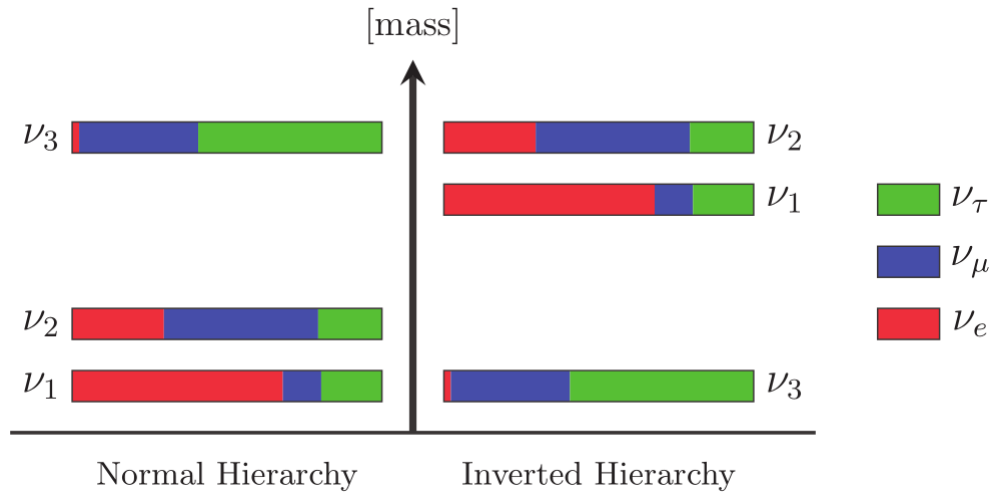
2.5.4 Ordenamento e Medidas dos Parâmetros de Oscilação

A oscilação de neutrinos depende diretamente das massas dos neutrinos, mais especificamente, da diferença de massas ao quadrado. As análises dos dados disponíveis obtidos com experimentos de oscilação nos permitem encontrar duas diferenças de massas ao quadrado independentes,

$$\begin{aligned} \Delta m_{SOL}^2 &= \Delta m_{21}^2 \simeq 7,4 \times 10^{-5} \text{eV}^2 \quad \text{e} \\ \Delta m_{ATM}^2 &= |\Delta m_{31}^2| \simeq |\Delta m_{32}^2| \simeq 2,5 \times 10^{-3} \text{eV}^2. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Δm_{21}^2 é escolhido por convenção de modo que $m_2 > m_1$, ou seja, o neutrino pesado da diferença numerado como 2. Porém dois tipos de ordenamento podem ser definidos para ν_3 . Se ν_3 for mais pesado que ν_2 , temos o que chamamos de "ordenamento normal", se for mais leve que ν_1 , temos o que chamamos de "ordenamento invertido". Na figura 2 vemos uma representação dos dois ordenamentos com os diferentes sabores distribuídos em cada neutrino físico de acordo com os dados disponíveis atualmente. Na representação normal $\Delta m_{31}^2 > \Delta m_{32}^2 > 0$ enquanto que na representação invertida $\Delta m_{32}^2 < \Delta m_{31}^2 < 0$.

Figura 2 – Ilustração do espectro de massa compatível com os dados de oscilação de neutrinos.



Fonte: The State Of The Art Of Neutrino Physics. [17].

Na tabela 1 são apresentados os parâmetros obtidos a partir de análises globais de dados de oscilações para três sabores de neutrinos disponíveis em 2020. Estão apresentados dados em ordem normal e invertida. A análise completa dos dados e a lista dos experimentos dos quais os dados foram retirados está disponível na referência [18]. Na tabela $\Delta m_{3\ell}^2 \equiv \Delta m_{31}^2 > 0$ para o ordenamento normal e $\Delta m_{3\ell}^2 \equiv \Delta m_{32}^2 < 0$ para o ordenamento inverso.

Tabela 1 – Parâmetros para a oscilação de neutrinos de três sabores.

	Ordenamento Normal (best fit)		Ordenamento Invertido ($\Delta\chi^2 = 2,7$)	
	bfp $\pm 1\sigma$	3σ range	bfp $\pm 1\sigma$	3σ range
$\sin^2\theta_{12}$	$0,304^{+0,013}_{-0,012}$	$0,269 \rightarrow 0,343$	$0,304^{+0,013}_{-0,012}$	$0,269 \rightarrow 0,343$
$\theta_{12}/^\circ$	$33,44^{+0,78}_{-0,75}$	$31,27 \rightarrow 35,86$	$33,45^{+0,78}_{-0,75}$	$31,27 \rightarrow 35,87$
$\sin^2\theta_{23}$	$0,570^{+0,018}_{-0,024}$	$0,407 \rightarrow 0,618$	$0,575^{+0,017}_{-0,021}$	$0,411 \rightarrow 0,621$
$\theta_{23}/^\circ$	$49,0^{+1,1}_{-1,4}$	$39,6 \rightarrow 51,8$	$49,3^{+1,0}_{-1,2}$	$39,9 \rightarrow 52,0$
$\sin^2\theta_{13}$	$0,02221^{+0,00068}_{-0,00062}$	$0,02034 \rightarrow 0,02430$	$0,02240^{+0,00062}_{-0,00062}$	$0,02053 \rightarrow 0,02436$
$\theta_{13}/^\circ$	$8,57^{+0,13}_{-0,12}$	$8,20 \rightarrow 8,97$	$8,61^{+0,12}_{-0,12}$	$8,24 \rightarrow 8,98$
$\delta_{CP}/^\circ$	195^{+51}_{-25}	$107 \rightarrow 403$	286^{+27}_{-32}	$192 \rightarrow 360$
$\frac{\Delta m_{21}^2}{10^{-5}\text{eV}^2}$	$7,42^{+0,21}_{-0,20}$	$6,82 \rightarrow 8,04$	$7,42^{+0,21}_{-0,20}$	$6,82 \rightarrow 8,04$
$\frac{\Delta m_{3\ell}^2}{10^{-3}\text{eV}^2}$	$+2,514^{+0,028}_{-0,027}$	$+2,431 \rightarrow +2,598$	$-2,497^{+0,028}_{-0,028}$	$-2,583 \rightarrow -2,412$

Fonte: The fate of hints: updated global analysis of three-flavor neutrino oscillations (2020)[18].

3 Neutrinos Estéreis

Neutrinos são as únicas partículas do Modelo Padrão que interagem apenas fracamente (além de gravitacionalmente). Experimentalmente, detectamos somente neutrinos de mão esquerda e antineutrinos de mão direita, e até mesmo essa definição é de acordo com as reações que essas partículas participam. Se neutrinos de mão direita existem, a única forma de encaixá-los no modelo padrão é como um singlete $SU(2)$ como fizemos na seção 2.3. Nesse caso essas partículas não interagem por nenhuma força, pois os bósons W só interagem com dubletos, e a carga elétrica Q , o isospin fraco T_3 e a carga de cor para essa partícula são quantidades nulas. A única influência dos neutrinos de mão direita seria pela mistura com os neutrinos ativos. Por essa razão neutrinos de mão direita são denominados estéreis.

Como discutido na seção 2.4, adicionar um termo similar aos termos de massa de férmions carregados implica na existência de neutrinos de mão direita. Da mesma forma, se neutrinos de mão direita não existirem neutrinos não podem ter massas de Dirac. Uma outra opção além de um termo de massa de Dirac ou um termo de Majorana seria uma lagrangiana com ambos. A diagonalização da matriz de massa derivada da combinação de termos de massa de Dirac e de Majorana leva a um mecanismo que poderia explicar o fato das massas dos neutrinos ativos serem tão pequenas em comparação com as massas dos outros férmions, esse mecanismo é chamado Seesaw.

Do mecanismo Seesaw encontra-se uma relação entre a escala de massas de Dirac geradas pelo mecanismo de Higgs e a escala de hipotéticos neutrinos estéreis pesados. Se os neutrinos pesados forem da ordem de $10^{14\sim 15} \text{GeV}$, as massas dos neutrinos ativos são naturalmente da ordem de eV [19]. Neste caso, os neutrinos de mão direita são estéreis, mas devido a sua grande massa, desacoplados das escalas físicas acessíveis. A possível existência de neutrinos estéreis pesados não exclui a possibilidade de neutrinos estéreis leves. Esses por sua vez podem gerar oscilações por meio da mistura com os neutrinos ativos, e essas oscilações podem ser medidas em experimentos short-baseline. A baseline está relacionada com a razão L/E do experimento, experimentos ditos short-baseline são sensíveis a $\Delta m^2 > 1 \text{ eV}^2$. Em uma teoria geral o número de neutrinos estéreis não é limitado e suas massas podem possuir qualquer valor entre 1 eV e 10^{15} GeV .

Existem alguns resultados inesperados em experimentos de oscilação de neutrinos a curtas distâncias que não compreendemos bem e a introdução de um quarto sabor de neutrinos poderia explicar. Esses experimentos vêm sendo realizados desde a década de 1990 porém são inconclusivos do ponto de vista científico, com medidas que não foram reproduzidas.

3.1 Anomalias na Oscilação de Neutrinos

Experimentos em neutrinos frequentemente apresentam anomalias. Algumas dessas anomalias levam a descobertas importantes como o problema do espectro contínuo do decaimento beta que levou a descoberta dos neutrinos ou o deficit de neutrinos solares que nos levou a descoberta da oscilação dessas partículas. Algumas anomalias em experimentos de oscilação nas últimas décadas instigam a ideia da existência de um neutrino estéril, que entraria na mistura com os três neutrinos ativos e geraria oscilações para um $\Delta m^2 > 0,1 \text{ eV}^2$ [5]. Os experimentos que apresentaram esse tipo de anomalia ocorreram a distâncias curtas, de algumas dezenas de metros a poucos quilômetros.

3.1.1 LSND e KARMEN

De 1993 a 1998 o experimento LSND (Liquid Scintillator Neutrino Detector) esteve em funcionamento no LAMPF (Los Alamos Meson Physics Facility). Esse experimento buscava o sinal de aparecimento $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$. Antineutrinos do múon são produzidos na cadeia de decaimento de píons positivos de acordo com

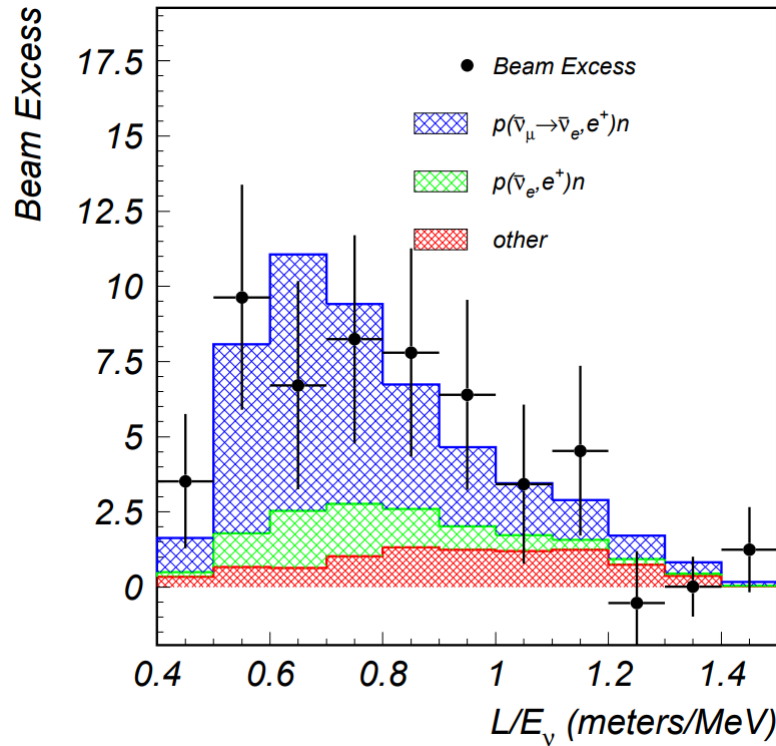
$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu, \quad \text{em que} \quad \mu^+ \rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e. \quad (3.1)$$

Os píons positivos são produzidos pela colisão de um feixe de prótons de 798 MeV com um tanque de água. Após o tanque é colocado um anteparo de cobre onde os píons são desacelerados antes de decair. Como a energia dos píons não é tão alta, eles decaem praticamente em repouso (DAR) em múons positivos, que por fim decaem em antineutrinos do múon. As partículas resultantes encontram o detector LSND colocado a 29,7 m do alvo. O detector consiste em um cilindro de 8,3 m de comprimento e 5,7 m de diâmetro com 1220 fotomultiplicadores distribuídos nas paredes internas e preenchido com 167 toneladas de óleo mineral levemente dopado com cintilador. As especificações do experimento podem ser encontradas em [3]. Píons negativos também são produzidos nesse processo, porém sua maior parte é absorvida pelos núcleos sem produzir neutrinos. Ainda assim existe uma contaminação calculada menor que $8 \times 10^{-4} \bar{\nu}_e$ no fluxo de $\bar{\nu}_\mu$. São usados na análise eventos de neutrinos com energias entre 20 e 52,8 MeV, portanto a faixa da razão L/E do experimento é de 0,5 a 1,5 m/MeV. A assinatura dos antineutrinos do elétron é obtida através da detecção do decaimento beta inverso ($\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$), primeiramente pela detecção imediata do pósitron e pelo sinal atrasado da captura do nêutron por outro próton ($n + p \rightarrow d + \gamma(2,2 \text{ MeV})$).

O experimento observou $87,9 \pm 22,4 \pm 6,0$ eventos de $\bar{\nu}_e$ acima do esperado (o primeiro erro é estatístico e o segundo sistemático devido à incertezas nos backgrounds, fluxo de neutrinos, etc). O excesso corresponde a uma probabilidade de oscilação

de $(0,264 \pm 0,067 \pm 0,045)\%$ [3]. O resultado pode ser visto na figura 3. Em verde e vermelho temos os backgrounds de $\bar{\nu}_e$ do feixe e de outras fontes, e em azul a possível oscilação $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$. Os resultados concordam com a expectativa baseada em oscilação de neutrinos para Δm^2 entre $0,2 \sim 10\text{eV}^2$ [3]. O LSND foi o primeiro indicio experimental da possível existência de neutrinos estéreis leves.

Figura 3 – O excesso de eventos no experimento LSND.



Fonte: Evidence for Neutrino Oscillations from the Observation of $\bar{\nu}_e$ Appearance in a $\bar{\nu}_\mu$ Beam [3].

O experimento KARMEN (KARlsruhe Rutherford Medium Energy Neutrino) também buscou por oscilações $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ com um design experimental diferente. Na tabela 2 os dois experimentos são comparados. Os experimentos possuem picos de sensibilidades em diferentes valores de Δm^2 .

Tabela 2 – Comparação entre os experimentos LSND e KARMEN.

Propriedade	LSND	KARMEN
Energia dos Prótons	798 MeV	800 MeV
Intensidade dos Prótons	$1000\mu\text{A}$	$200\mu\text{A}$
Duty Factor	6×10^{-2}	1×10^{-5}
Massa Total	167 ton	56 ton
Distância dos Neutrinos	30 m	17,5 m
Identificação das partículas	SIM	NÃO
Resolução de energia em 50 MeV	6,6%	1,6%

Fonte: Evidence for Neutrino Oscillations from the Observation of $\bar{\nu}_e$ Appearance in a $\bar{\nu}_\mu$ Beam [3].

Para Δm^2 pequeno, o LSND é 2,94 vezes mais sensível à oscilação de neutrinos que o KARMEN[3]. O KARMEN não observou o excesso de $\bar{\nu}_e$ observado pelo LSND. Os resultados do LSND não puderam ser confirmados por outros experimentos e ainda permanecem sem uma explicação satisfatória. Podemos considerar algumas possíveis fontes para o excesso de eventos detectado. O decaimento de píons negativos antes de chegarem ao anteparo de cobre, ou a não captura desses píons pela blindagem ou pelo anteparo podem ser possíveis motivos, embora o número estimado desses eventos seja muito pequeno para explicar o excesso. Ruídos acidentais ou processos não contabilizados também podem ser motivo dos excessos, mas esses também são bem calculados e não resultariam em uma anomalia dessa magnitude. O fato é que se a fonte da anomalia não for devido aos neutrinos estéreis ainda há algo a não compreendido sobre os resultados do LSND.

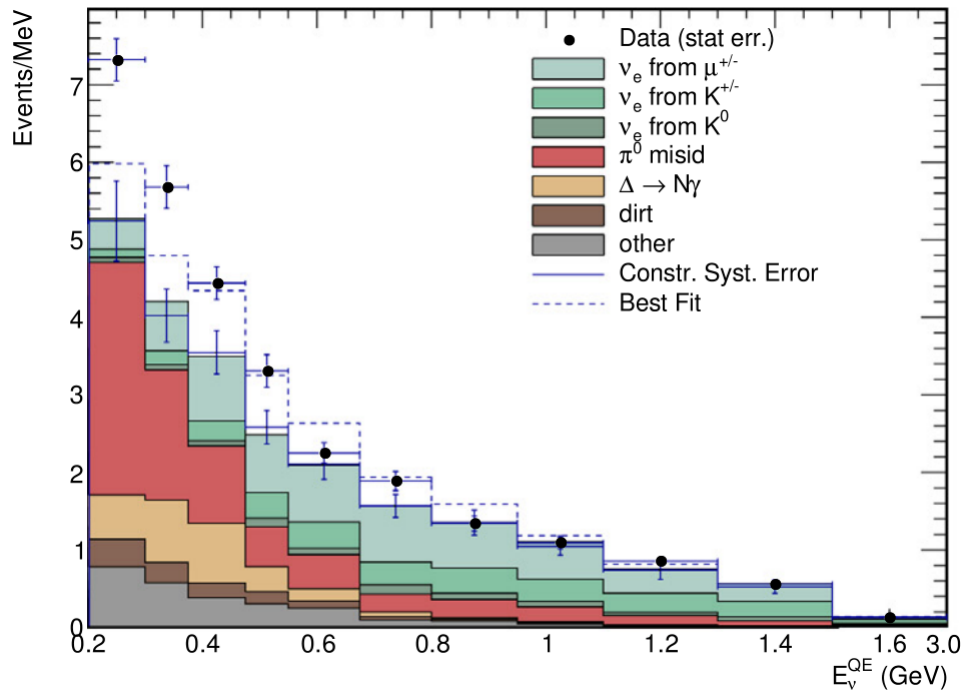
3.1.2 MiniBooNE

A anomalia no LSND é explorada no experimento MiniBooNE que acontece no Fermilab desde 2002. O MiniBooNE busca por sinais de aparecimento de $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$ e $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ usando um feixe de prótons de 8 GeV que colide com um alvo de berílio e produzindo um feixe de píons que decai em voo. Um chifre magnético é utilizado para escolher a polaridade do pión e portanto o canal de oscilação. O detector é colocado a 541 m do alvo e consiste em um tanque esférico com 12,2 m de diâmetro preenchido com 818 toneladas de óleo mineral puro e com 1520 fotomultiplicadores que detectam a radiação Cherenkov e a cintilação produzida pelas partículas carregadas. No MiniBooNE podem ser detectados neutrinos com energias de 200 MeV a 3,0 GeV, assim o alcance da razão L/E é de 0,18 a 2,7 m/MeV o que cobre o alcance do experimento LSND. O sinal obtido no LSND deve ser visto no MiniBooNE para energias maiores ou iguais a 360 MeV. O detector foi otimizado para identificar interações de corrente carregada de ν_e e $\bar{\nu}_e$ nos quais as assinaturas são um único elétron ou pósitron, e também ν_μ e $\bar{\nu}_\mu$ nos quais as assinaturas são um único múon no estado final.

A princípio na publicação de 2007 "A Search for Electron Neutrino Appearance at the $\Delta m^2 \sim 1 \text{ eV}^2$ Scale"[20], foram usados para análise dados de neutrinos com energias maiores que 475 MeV argumentando que os backgrounds seriam diminuídos. Como resultado não foi observado excesso de eventos levando a exclusão da oscilação de neutrinos como explicação para os resultados do LSND com nível de confiança 98% [21]. Um excesso de eventos de ν_e foi medido abaixo do valor de 475 MeV, e essa medida foi confirmada nos anos seguintes nos canais de neutrinos e antineutrinos [22], mas essa medida estava fora da região de anomalia do LSND. Entretanto na publicação de 2018 "Significant Excess of Electronlike Events in the MiniBooNE Short-Baseline Neutrino Experiment"[23], com novos resultados e análises, certa compatibilidade em

energia e magnitude com os resultados do LSND foram confirmados. É sugerido que ao menos quatro tipos de neutrinos são necessários para explicar os resultados obtidos pelo MiniBooNE.

Figura 4 – Resultados observados pelo MiniBooNE.



Fonte: Updated MiniBooNE neutrino oscillation results with increased data and new background studies[24].

No histograma da figura 4 podemos ver o número de eventos de ν_e por MeV em função da energia em GeV das interações. Cada cor na legenda do histograma representa uma fonte de neutrinos ou um background esperado. Os pontos representam as medidas tomadas, nota-se que as medidas em cada intervalo são significativamente maiores que o esperado principalmente para energias até 600 MeV. Em linha tracejada é mostrado o valor esperado assumindo oscilação.

As possíveis explicações para a anomalia do MiniBooNE é que o excesso é produzido por fótons que não podem ser distinguidos de eventos no detector, pelo decaimento de mésons pesados ou de píons neutros dentro do detector. Essas possibilidades têm sido analisadas com cautela e praticamente descartadas pela colaboração do MiniBooNE na última publicação[24].

3.1.3 Anomalias em Reatores

No artigo de 2011 "Improved Predictions of Reactor Antineutrino Spectra"[25], os cálculos do fluxo de antineutrinos do elétron provenientes de reatores nucleares foram refeitos para os núcleos de ^{235}U , ^{238}U , ^{239}Pu e ^{241}Pu . Os novos cálculos se aplicam

a todos os experimentos de antineutrinos de reatores, não tendo grande impacto nos experimentos a grandes distâncias mas causando uma diferença significativa em experimentos short-baseline. A razão entre o fluxo de antineutrinos do elétron preditos e medidos ficou em torno de 6% com os novos cálculos. Sintetizando os resultados publicados, a razão dos eventos $\bar{\nu}_e$ observados com os eventos preditos, que era de $0,976 \pm 0,024$ para os experimentos considerados na tabela 3, cai para $0,943 \pm 0,023$. Como os valores esperados se tornaram maiores do que os medidos em vários experimentos em short-baseline, isso foi chamado de "anomalia de antineutrinos de reatores"[26].

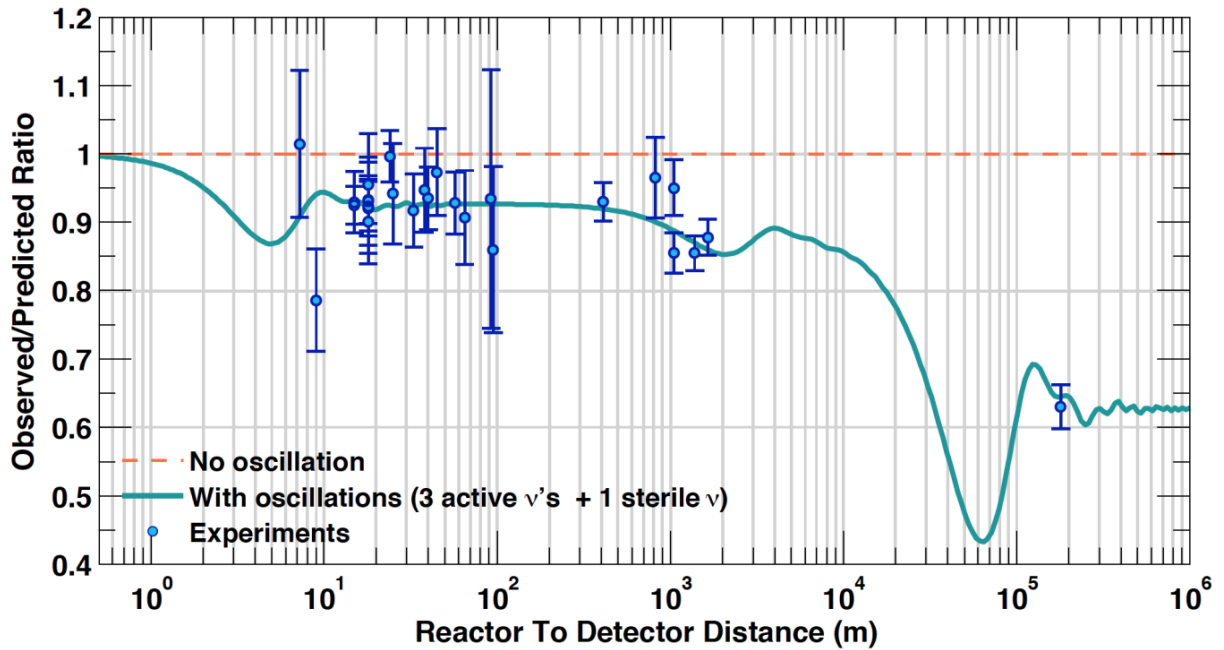
Tabela 3 – Antigas e novas razões $R = \frac{N_{exp}}{N_{cal}}$ calculadas em resultados de experimentos short-baseline.

	Resultado	Tipo de detecção	Antigo	Novo	Inceteza(%)	L(m)
1	Bugey-4	$^3\text{He}+\text{H}_2\text{O}$	0,987	0,942	3,0	15
2	ROVNO91	$^3\text{He}+\text{H}_2\text{O}$	0,985	0,940	3,9	18
3	Bugey-3-I	6Li-LS	0,988	0,946	4,8	15
4	Bugey-3-II	6Li-LS	0,994	0,952	4,9	40
5	Bugey-3-III	6Li-LS	0,915	0,876	14,1	95
6	Goesgen-I	$^3\text{He}+\text{LS}$	1,018	0,966	6,5	38
7	Goesgen-II	$^3\text{He}+\text{LS}$	1,045	0,992	6,5	45
8	Goesgen-II	$^3\text{He}+\text{LS}$	0,975	0,925	7,6	65
9	ILL	$^3\text{He}+\text{LS}$	0,832	0,802	9,5	9
10	Krasn. I	$^3\text{He}+\text{PE}$	1,013	0,936	5,8	33
11	Krasn. II	$^3\text{He}+\text{PE}$	1,031	0,953	20,3	92
12	Krasn. III	$^3\text{He}+\text{PE}$	0,989	0,947	4,9	57
13	SRP I	Gd-LS	0,987	0,952	3,7	18
14	SRP II	Gd-LS	1,055	1,018	3,8	24
15	ROVNO88-1I	$^3\text{He}+\text{PE}$	0,969	0,917	6,9	18
16	ROVNO88-2I	$^3\text{He}+\text{PE}$	1,001	0,948	6,9	18
17	ROVNO88-1S	Gd-LS	1,026	0,972	7,8	18
18	ROVNO88-2S	Gd-LS	1,013	0,959	7,8	25
19	ROVNO88-3S	Gd-LS	0,990	0,938	7,2	18

Fonte: The reactor antineutrino anomaly. [26].

No gráfico da figura 5 podemos ver as razões de vários experimentos com reatores em função da distância fonte-detector. A linha tracejada vermelha mostra a razão se nenhuma oscilação é esperada, ou seja, o número esperado igual ao número observado. A linha contínua mostra as projeções esperadas para quatro neutrinos. Os dados encontrados mostram a falta de eventos observada. Os experimentos das colaborações GALLEX[27] e SAGE[28] também apresentaram certo deficit de ν_e utilizando núcleos de Gálio como alvo e neutrinos de intensas fontes radioativas, o que ficou conhecido como "Anomalia do gálio".

Figura 5 – Razão entre eventos $\bar{\nu}_e$ medidos e preditos nos experimentos de reatores nucleares.



Fonte: Sterile Neutrinos. [19].

3.1.4 Hipóteses

Os resultados obtidos pelo LSND são consistentes com oscilações de neutrinos geradas por $\Delta m^2 \gtrsim 0,1 \text{ eV}^2$, entretanto admitindo os valores de 2.110 , que respectivamente são resultados de vários experimentos de neutrinos solares e atmosféricos [29] e são condizentes com o modelo de três neutrinos, não existe combinação nas massas dos neutrinos que permitem os resultados obtidos pelo LSND. Para entender isso podemos olhar para a equação 2.94. Da definição de Δm^2 vemos que temos três diferentes valores para Δm_{ij}^2 ; mas apenas dois são independentes, assim, o resultado do LSND não pode ser introduzido em um modelo de três sabores.

Os resultados para o excesso de ν_e detectado abaixo de 475 MeV no MiniBooNE são compatíveis com oscilações na faixa $0,01 < \Delta m^2 < 1 \text{ eV}^2$. A anomalia nos experimentos GALLEX e SAGE poderia ser explicada por oscilações de neutrinos geradas por $\Delta m^2 \gtrsim 1 \text{ eV}^2$. No caso da anomalia em reatores nucleares, devido às distâncias dos detectores às fontes, o déficit de antineutrinos pode ser explicado por oscilações geradas por $\Delta m^2 \gtrsim 0,5 \text{ eV}^2$.

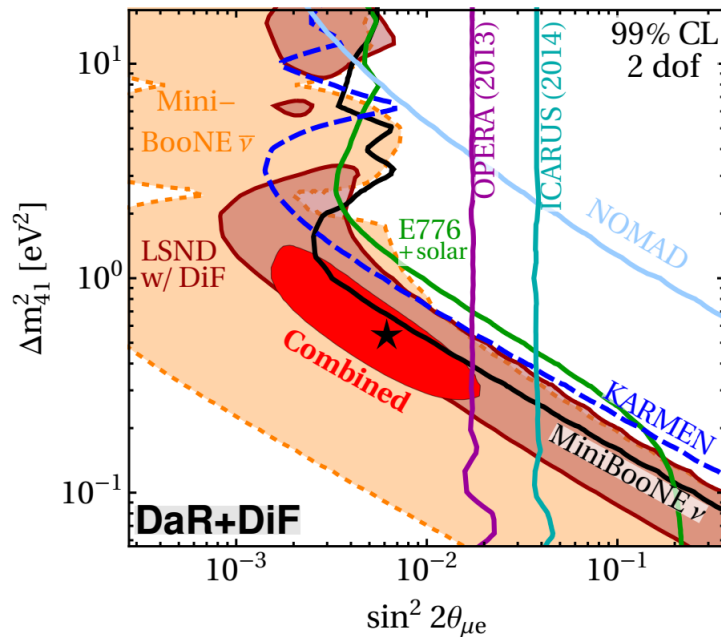
Analisando os resultados obtidos por esses experimentos vemos que em média essas oscilações podem ser explicadas por $\Delta m^2 \sim 1 \text{ eV}^2$, o que é um valor muito maior que as diferenças obtidas nos experimentos solares e atmosféricos. Levando em consideração que essa diferença de massa não pode ser incluída no modelo de três neutrinos, temos base para a hipótese da existência de ao menos um neutrino estéril.

3.2 Resultados Recentes

Como já dito, os experimentos LSND e MiniBooNE obtiveram resultados que podem ser explicados pela adição de um neutrino estéril ao modelo. Esses experimentos utilizaram o canal de aparecimento $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$. Outros experimentos como KARMEN [30], NOMAD [31], E776 [32], ICARUS [33] e OPERA [34] não confirmaram os sinais encontrados pelos dois primeiros. Utilizando os dados disponíveis desses experimentos, a referência [35] calculou as linhas de restrição para os canais $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ e $\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e$, na região do espaço de parâmetros da figura 6.

As análises combinadas do LSND e MiniBooNE que nos dão a região preferencial para um neutrino estéril são representadas na figura 6. Em vermelho temos a região que melhor explicaria as anomalias, com a estrela no ponto de best-fit. As outras curvas nos dão as regiões de exclusão dos parâmetros, que já foram analisadas pelos outros experimentos e não encontraram anomalias. Esses experimentos portanto ainda não possuem sensibilidade suficiente para o descarte da hipótese de um neutrino estéril leve.

Figura 6 – Restrições de análises globais (considerando 3+1).

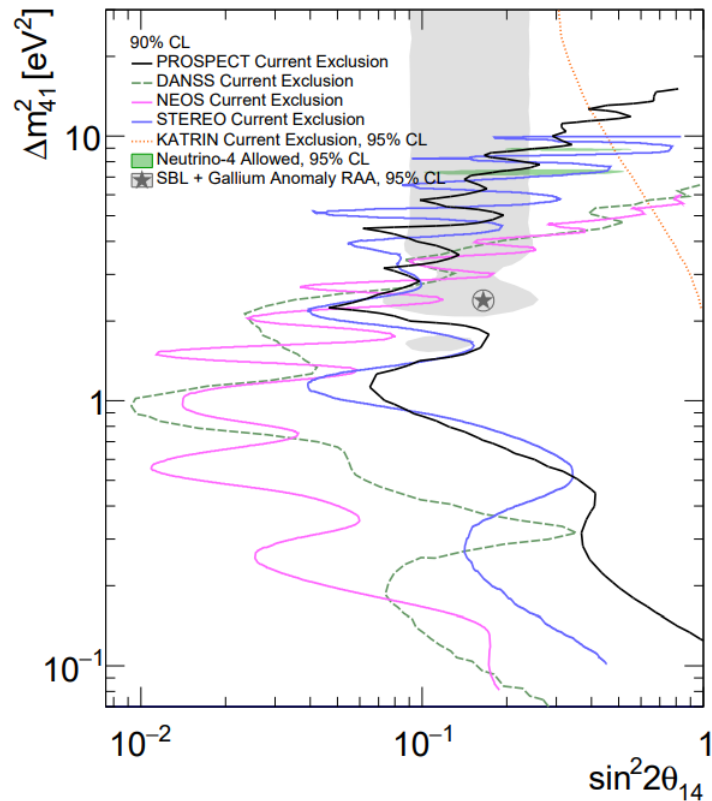


Fonte: Updated global analysis of neutrino oscillations in the presence of eV-scale sterile neutrinos[35]

Para os dados de desaparecimento de $\bar{\nu}_e$ mais recentes que investigam a anomalia de reatores, temos as regiões de exclusão obtidas pelos experimentos short-baseline citados na legenda da figura 7 e pelo experimento KATRIN [36], que estuda o decaimento beta de trítio. Em cinza vemos a região do espaço de parâmetro permitida pela hipótese de neutrinos estéreis, assim como o valor de best-fit calculado com os resultados de experimentos SBL e da anomalia do Gálio. Vemos que a região de best-fit

já é excluída pelos experimentos mais recentes, e é descartada uma diferença de massas menor que cerca de 5 eV^2 . Mesmo assim a região acima deste valor ainda é permitida, e essa região deve ser investigada com mais detalhe.

Figura 7 – Restrições de resultados recentes (desaparecimento).



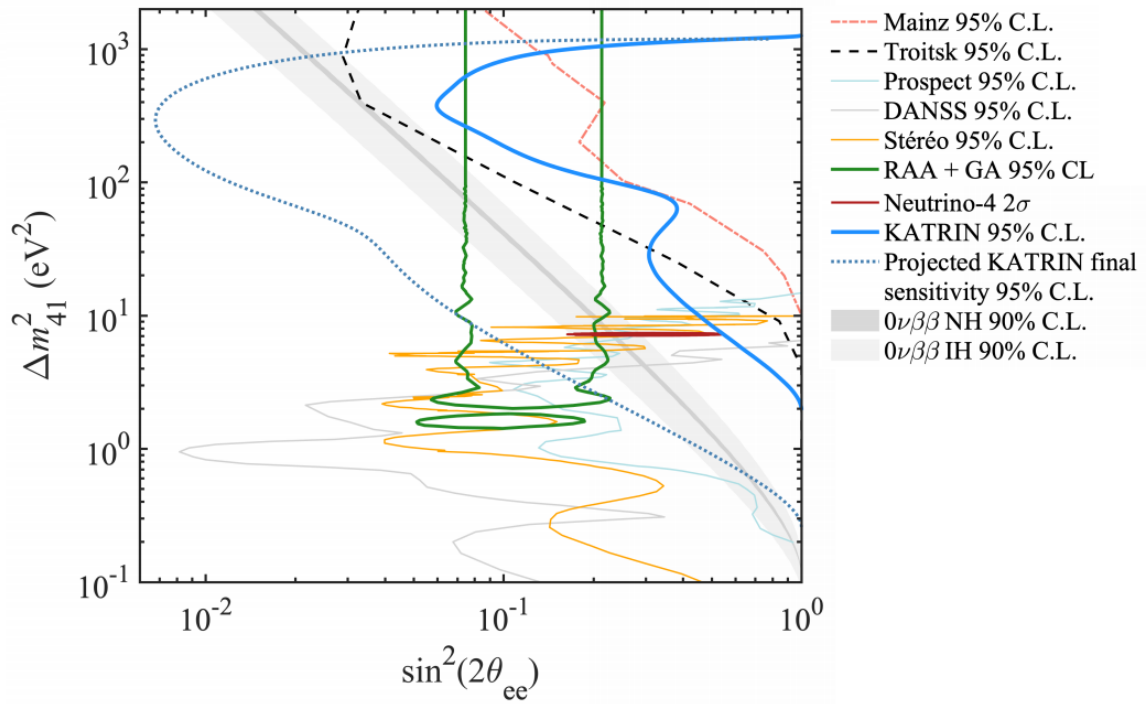
Fonte: PROSPECT-II Physics Opportunities[37]

O experimento KATRIN mede o espectro do elétron do decaimento beta do trítio (${}^3\text{H} \rightarrow {}^3\text{He}^+ + e^- + \bar{\nu}_e$) com alta precisão. O KATRIN foi desenvolvido para melhorar a sensibilidade de medidas da massa efetiva dos neutrinos até $0,2 \text{ eV}$. Com base nos dados das primeiras quatro semanas de funcionamento encontrou-se um limite superior de $m_\nu < 1,1 \text{ eV}$. Usando os mesmos dados é possível estimar a massa e a mistura de um neutrino estéril, que se manifestaria como uma distorção no espectro dos elétrons do decaimento beta. Os detalhes do processo podem ser vistos em [36].

Pelas análises da colaboração KATRIN, os resultados foram consistentes com a hipótese nula e não foi encontrada nenhuma evidência de um sinal de neutrino estéril. As curvas de exclusão resultantes dessa análise foram colocadas no gráfico da figura 8 e comparadas com as curvas de outros experimentos. A linha em verde delimita a região permitida pelas anomalias de reatores e pelos experimentos com gálio em um modelo $3+1$, em azul temos a região excluída pelos resultados do KATRIN. É interessante notar que a linha em azul pontilhada é a região que a colaboração KATRIN espera cobrir ao final das observações. Caso essa previsão se confirme, juntamente com os resultados dos outros experimentos realizados, uma grande parte do espaço

de parâmetros poderá ser excluída, restando pouco embasamento sobre a hipótese de neutrinos estéreis explicarem as anomalias.

Figura 8 – Resultados recentes do experimento KATRIN



Fonte: Bound on 3+1 active-sterile neutrino mixing from the first four-week science run of KATRIN [36]

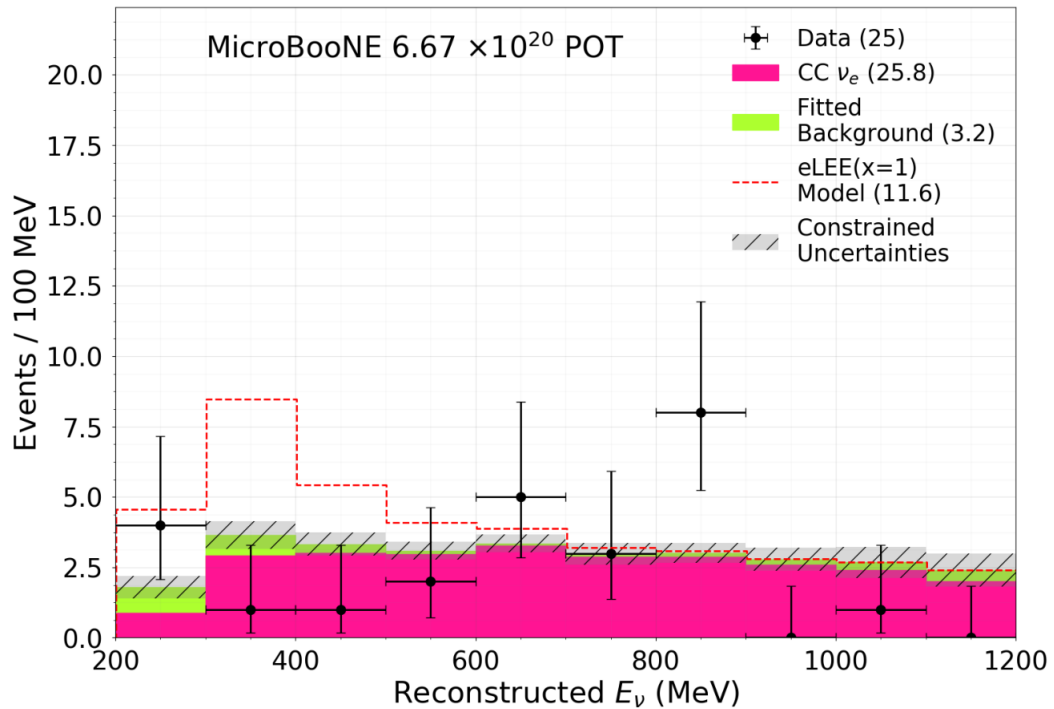
Em 2021 foram publicados os primeiros resultados de medidas de neutrinos do elétron produzidos no Fermilab Booster Neutrino Beamline (BNB) usando o detector MicroBooNE [38]. Esse projeto foi desenvolvido para investigar e tentar explicar o excesso de eventos ν_e detectados pelo MiniBooNE em baixas energias. O detector MicroBooNE consiste de uma câmara de projeção de tempo de argônio líquido retangular de 2,6 m x 2,3 m x 10,4 m localizada a 468,5 m do alvo BNB. Cerca de 85 toneladas de argônio líquido são contidas dentro da câmara[39]. Esse tipo de câmara permite uma reconstrução tridimensional precisa das interações das partículas.

O MicroBooNE coletou resultados de fevereiro de 2016 a julho de 2018. Para diferenciar tipos de eventos no detector, buscou por eventos ν_e de três formas distintas: interações ν_e de dois corpos por corrente carregada, eventos ν_e sem píons e eventos contendo qualquer estado final hadrônico. As análises das três buscas não encontraram eventos anômalos, em geral as taxas observadas foram de acordo ou abaixo das taxas previstas, portanto o excesso de eventos a baixas energias do MiniBooNE não foi confirmado.

No histograma da figura 9 temos a reconstrução de eventos ν_e por corrente carregada do experimento. Em rosa temos os valores preditos, em verde e cinza temos backgrounds e incertezas e em tracejado vermelho temos uma predição feita de acordo

com o excesso de eventos observado pelo MiniBooNE. A reconstrução dos eventos foi feita utilizando aprendizado profundo de máquina (Deep Learning).

Figura 9 – Resultados recentes do experimento MicroBooNE



Fonte: Search for an Excess of Electron Neutrino Interactions in MicroBooNE Using Multiple Final State Topologies [38]

3.3 Introduzindo Neutrinos Estéreis

Como dito anteriormente, uma teoria geral não limita a quantidade de neutrinos estéreis ou sua massa. As anomalias discutidas sugerem ao menos uma nova diferença de massas $\Delta m^2 \sim 1 \text{ eV}^2$. Assim, ao menos um neutrino estéril leve pode ser adicionado ao modelo de mistura. Consideraremos o modelo mais simples capaz de explicar as anomalias experimentais, isto é, a existência de um quarto neutrino de massa da ordem de eV, que corresponde a um neutrino estéril leve na base de sabores. Essa consideração não proíbe a existência de outros neutrinos, mas sugere que tal mistura seria tão pequena que experimentos atuais seriam incapazes de observar qualquer efeito.

No modelo 3+1 adicionaremos um neutrino ν_4 que é mais pesado que os outros três neutrinos ativos, com a diferença de massas correspondente a sugerida pelos experimentos short-baseline. Esse modelo é suportado pelos experimentos solares, atmosféricos e long-baseline pois pode ser visto como uma perturbação na mistura de três neutrinos que gera efeitos pequenos nas oscilações usuais.

Nesse modelo, a matriz de mistura tem a forma

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \\ \nu_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{e1} & \mathbf{U}_{e2} & \mathbf{U}_{e3} & \mathbf{U}_{e4} \\ \mathbf{U}_{\mu1} & \mathbf{U}_{\mu2} & \mathbf{U}_{\mu3} & \mathbf{U}_{\mu4} \\ \mathbf{U}_{\tau1} & \mathbf{U}_{\tau2} & \mathbf{U}_{\tau3} & \mathbf{U}_{\tau4} \\ \mathbf{U}_{s1} & \mathbf{U}_{s2} & \mathbf{U}_{s3} & \mathbf{U}_{s4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \\ \nu_4 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

novamente conectando a base dos sabores à base de massas. O índice "s" faz referência a "sterile". Como antes, a matriz de mistura é unitária e podemos escrevê-la como rotações, agora com uma dimensão a mais.

As probabilidades exatas serão dadas pela equação 2.95, porém, dada a dificuldade de se trabalhar com essa expressão, em especial com todos os Δm^2 , podemos usar o fato de que em experimentos short-baseline os efeitos das diferenças de massa solares e atmosféricas em 2.110 são desprezíveis, já que pela ordem dos valores eles teriam influencias em distâncias maiores.

Assim, as probabilidades de sobrevivência e oscilação dos neutrinos terão as formas encontradas tais quais como no caso desenvolvido para oscilação de dois sabores[40]. Portanto, para a oscilação temos

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = 4|\mathbf{U}_{\alpha 4}|^2|\mathbf{U}_{\beta 4}|^2 \text{sen}^2 \frac{1,267\Delta m_{41}^2 L}{E}, \quad (3.3)$$

onde temos os elementos da matriz de mistura relacionados com o quarto neutrino, e da mesma forma, para a sobrevivência

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\alpha} = 1 - 4|\mathbf{U}_{\alpha 4}|^2(1 - |\mathbf{U}_{\alpha 4}|^2) \text{sen}^2 \frac{1,267\Delta m_{41}^2 L}{E}, \quad (3.4)$$

fórmulas que também são válidas para oscilações de antineutrinos.

3.4 Estimativas dos Parâmetros de Oscilação de Neutrinos Estéreis

A partir dos dados disponíveis obtidos com experimentos short-baseline é possível fazer estimativas dos valores dos parâmetros da matriz 3.2. A referência [41] faz a análise completa dos dados globais disponíveis até o início de 2017 relevantes para testar a hipótese dos neutrinos estéreis no caso 3+1. O valor para $|\mathbf{U}_{\tau 4}|^2$ não é calculado pela referência, mas foi adicionado para projeções futuras neste trabalho.

$$|\mathbf{U}_{e4}|^2 = 0,019, \quad |\mathbf{U}_{\mu 4}|^2 = 0,015, \quad |\mathbf{U}_{\tau 4}|^2 = 0,01 \quad \text{e} \quad \Delta m_{41}^2 = 1,7 \text{ eV}^2. \quad (3.5)$$

4 Probabilidade e Estatística

Neste capítulo definiremos e discutiremos conceitos importantes e gerais de probabilidade e estatística. Para discussões mais aprofundadas pode-se consultar as principais referências utilizadas nesta construção e desenvolvimento [42], [43], [44], [45].

4.1 Noções Básicas

Um modelo estatístico corresponde a situação onde os elementos de uma base de dados são medidas repetidas e independentes de uma mesma quantidade. Cada medida de um experimento é uma realização de uma variável aleatória, e como o valor da variável aleatória depende do resultado de um experimento, podemos atribuir probabilidades para os valores possíveis da variável aleatória. Quando os experimentos são realizados sob as mesmas condições temos que as variáveis aleatórias possuem uma mesma distribuição de probabilidade. Uma amostra aleatória é uma coleção de variáveis aleatórias que possuem a mesma distribuição de probabilidade e são mutualmente independentes.

Uma função massa de probabilidade p de uma variável aleatória discreta X é a função $p : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, definida por

$$p(a) = P(X = a), \quad \text{para } -\infty < a < \infty. \quad (4.1)$$

Uma variável aleatória contínua não pode ser especificada por uma função massa de probabilidade. Uma função distribuição F de uma variável aleatória contínua X é a função $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, definida por

$$F(a) = P(X \leq a) \quad \text{para } -\infty < a < \infty. \quad (4.2)$$

Ambas as funções massa e distribuição contém toda a informação probabilística de X . A distribuição de probabilidade de X pode ser determinada por qualquer uma delas. Podemos ainda expressar uma função distribuição F de uma variável aleatória discreta X em termos da função massa ou vice-versa.

Suponha que temos um experimento que possui apenas dois resultados possíveis, como sucesso ou fracasso, ou de outra forma 1 e 0. Esse experimento pode ser modelado por uma variável aleatória discreta X . X possui uma distribuição de Bernoulli com parâmetro p , onde $0 \leq p \leq 1$, se a função massa de probabilidade é dada por

$$p_X(1) = P(X = 1) = p, \quad \text{e} \quad p_X(0) = P(X = 0) = 1 - p. \quad (4.3)$$

4.2 Distribuição binomial e de Poisson

Uma distribuição binomial é a soma de independentes e identicamente distribuídas variáveis aleatórias de Bernoulli. Podemos por exemplo imaginar um experimento em que jogamos uma moeda e testamos cara (1) ou coroa (0) n vezes. O número de caras nesse experimento será dado por

$$X = \sum_i^n R_i, \quad (4.4)$$

onde R_i é o resultado de cada jogada. A probabilidade de que X tenha um valor exato k de caras é dada por

$$P(X = k) = p^k (1 - p)^{n-k} C_{n,k}, \quad (4.5)$$

onde p é a probabilidade de sucesso de cada jogada e $C_{n,k}$ é o número de maneiras de obter esse resultado. Por sua vez é possível mostrar que o coeficiente $C_{n,k}$ é dado por

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (4.6)$$

Assim uma variável aleatória discreta X possui distribuição binomial com parâmetros n e p , onde $n = 1, 2, \dots$ e $0 \leq p \leq 1$, se sua função massa de probabilidade é dada por

$$p_X(k) = P(X = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n. \quad (4.7)$$

Supomos agora um experimento em que em um intervalo de tempo t um determinado número de pessoas $N([0, t])$ entra em um supermercado. As pessoas entram em tempos aleatórios X_1, X_2, \dots . Fazemos duas suposições:

- A taxa λ em que as pessoas entram é constante no tempo, ou seja, em um subintervalo de tempo t' o número esperado de pessoas entrando é $\lambda t'$;
- O número de pessoas que entram em intervalos de tempo disjuntos não tem relação, ou seja, são variáveis aleatórias independentes.

Para encontrar a distribuição de $N([0, t])$ dividimos o intervalo total em n subintervalos de comprimento t/n . Quando n é grande o suficiente temos que cada subintervalo irá conter 0 ou 1 evento. Assumindo que a probabilidade de dois eventos acontecerem no mesmo subintervalo tende a zero mais rápido que $1/n$, temos que o número de eventos em cada subintervalo possui distribuição de Bernoulli com parâmetro p_i , em que i é o índice de cada subintervalo. Assim sendo, usando a homogeneidade dos eventos, temos que

$$p_i = \frac{\lambda t}{n}, \quad (4.8)$$

e o número total de eventos será a soma do número de eventos em cada subintervalo, da mesma maneira que na equação 4.4. Além disso tendo que o resultado de cada subintervalo é uma variável aleatória independente com distribuição de Bernoulli, $N([0, t])$ terá distribuição binomial com $p = \lambda t/n$.

Reescrevendo, temos

$$P(N([0, t]) = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k} \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n. \quad (4.9)$$

Para que n seja sempre "grande o suficiente" podemos exigir que ele tenda ao infinito e encontrar uma forma para a distribuição de probabilidade de $N([0, t])$. Para o terceiro termo de 4.9, temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n = e^{-\lambda t} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{-k} = 1, \quad (4.10)$$

e ainda,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} \frac{(n-1)}{n} \dots \frac{n-(k-1)}{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{k!}, \quad (4.11)$$

portanto temos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(N([0, t]) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \quad (4.12)$$

Tendo que

$$e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = 1, \quad (4.13)$$

vemos que essa distribuição de probabilidade conta nos valores $0, 1, 2, \dots$. Como todas as probabilidades são determinadas por um único valor λt , definimos que uma variável discreta X possui uma distribuição de Poisson com parâmetro λt , onde $\lambda t > 0$, quando sua função massa de probabilidade é dada por

$$p(k) = P(X = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.14)$$

A forma usual da distribuição de Poisson é escrita definindo um único parâmetro $\mu \equiv \lambda t$, assim temos

$$p(k) = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}, \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.15)$$

A distribuição de Poisson é definida então apenas para números discretos de eventos, e a probabilidade de se observar menos de zero eventos é nula. É interessante notar que a esperança e a variância de uma distribuição de Poisson têm a forma muito simples. Exigindo homogeneidade dos eventos temos que a esperança de uma variável aleatória com distribuição de Poisson e parâmetro μ é

$$E[N(t)] = \mu, \quad (4.16)$$

além disso, podemos fazer o seguinte raciocínio. Dividindo o processo em n intervalos menores de comprimento t/n de modo que em cada intervalo temos 0 ou 1 evento, o número total de eventos terá uma distribuição de probabilidade binomial com $p = \lambda t/n = \mu/n$. A variância de uma variável aleatória com distribuição de probabilidade binomial é [42]

$$\text{Var}(X) = np(1 - p), \quad (4.17)$$

então,

$$\text{Var}(N(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{\mu}{n} \right) \left(1 - \frac{\mu}{n} \right) = \mu. \quad (4.18)$$

4.2.1 Distribuição Gaussiana como limite de Poisson

Uma propriedade interessante da distribuição de Poisson é que tomando um valor médio muito grande sua forma tende a distribuição Gaussiana (na verdade essa característica é consequência do Teorema do Limite Central enunciado na seção 4.6). Utilizando a equação 4.15, temos $\langle k \rangle = \mu$, fazemos $k \equiv \mu(1 + \delta)$ com $\mu \gg 1$ e $\delta \ll 1$, este é o caso em que a distribuição discreta $p(k)$ tende a uma função de distribuição de probabilidade com variável contínua, digamos x . Da fórmula de Stirling,

$$x! \rightarrow \sqrt{2\pi x} e^{-x} x^x \quad \text{com } x \rightarrow \infty, \quad (4.19)$$

temos para $p(k) \rightarrow p(x)$,

$$p(x) = \frac{\mu^{\mu(1+\delta)} e^{-\mu}}{\sqrt{2\pi} e^{-\mu(1+\delta)} (\mu(1+\delta))^{\mu(1+\delta)+\frac{1}{2}}} = \frac{e^{\mu\delta} (1+\delta)^{-\mu(1+\delta)-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi\mu}} = \frac{e^{-\frac{\mu\delta^2}{2}}}{\sqrt{2\pi\mu}}, \quad (4.20)$$

com $\delta = (x - \mu)/\mu$, temos que

$$p(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\mu}}}{\sqrt{2\pi\mu}}. \quad (4.21)$$

A forma usual para a distribuição Gaussiana é dada por,

$$p(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}, \quad (4.22)$$

fica claro que para valores grandes de μ a distribuição de Poisson tende a uma distribuição Gaussiana com variância $\sigma^2 = \mu$ e média μ , explicitada na equação 4.21.

4.3 Processo de Contagem

Um processo estocástico $\{N(t), t \geq 0\}$ é um processo de contagem se $N(t)$ representa o número total de eventos em um intervalo $[0, t)$ [43]. Esse processo deve satisfazer:

- $N(0) = 0$;
- $N(t) \in 0, 1, 2, \dots$;
- Se $s < t$ então $N(s) \leq N(t)$;
- Para $s < t$ então $N(t) - N(s)$ é igual ao número de eventos no intervalo $(s, t]$.

Um processo de contagem tem incrementos independentes se o número de eventos que ocorrem em intervalos de tempo disjuntos são independentes. Ou seja, o número de eventos $N(3)$ não tem relação alguma com o número de eventos que ocorrem no intervalo $N(8) - N(5)$, ou qualquer outro intervalo disjunto.

Um processo de contagem tem incrementos homogêneos se a distribuição de probabilidade do número de eventos que ocorrem em qualquer intervalo é a mesma e depende apenas do comprimento do intervalo.

4.3.1 Processo de Poisson

Um processo de Poisson é um processo de contagem utilizado para modelar eventos que ocorrem aleatoriamente em um intervalo de tempo ou espaço. Exemplos comuns de processos de Poisson são o número de pessoas que entram em uma loja em um intervalo de tempo, o número de carros que para em um semáforo em determinada hora do dia ou o número de partículas que colidem com um detector em um minuto. As variáveis aleatórias do processo em qualquer intervalo possuem uma distribuição de Poisson com parâmetro desconhecido λt , sendo λ a taxa do processo e t o intervalo analisado.

Uma função f é dita $o(h)$ quando

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0. \quad (4.23)$$

4.3.1.1 Caso Homogêneo

Um processo de contagem $\{N(t), t \geq 0\}$ é um processo de Poisson homogêneo com taxa $\lambda > 0$ quando:

- $N(0) = 0$;
- O processo tem incrementos homogêneos e independentes;
- $P\{N(h) = 1\} = \lambda h + o(h)$;
- $P\{N(h) \geq 2\} = o(h)$.

A homogeneidade, e a terceira e quarta condições são equivalentes a dizer que o número de eventos em qualquer intervalo de comprimento t tem distribuição de Poisson com média λt . Ou seja, para todo $s, t \geq 0$, $P(N(t) = k)$ segue a equação 4.14. Se temos um número muito grande de experimentos com chance de sucesso muito pequena a distribuição de eventos tende a uma distribuição de Poisson. A esperança e variância são dadas pelas equações 4.16 e 4.18.

4.3.1.2 Caso Não-Homogêneo

Um processo de contagem $\{N(t), t \geq 0\}$ é um processo de Poisson não-homogêneo com função intensidade $\lambda(t)$, $t \geq 0$ quando [43]:

- $N(0) = 0$;
- O processo tem incrementos independentes;
- $P\{N(t+h) - N(t) = 1\} = \lambda(t)h + o(h)$;
- $P\{N(t+h) - N(t) \geq 2\} = o(h)$.

Para um Processo de Poisson não-homogêneo definido em um intervalo $(a, b]$ e especificado por uma função intensidade $\lambda(t)$ positiva localmente integrável, a intensidade da medida Λ é dada por

$$\Lambda(a, b) = \int_a^b \lambda(t) dt < \infty, \quad (4.24)$$

e a probabilidade da existência de k pontos no intervalo $(a, b]$ será

$$P\{N(a, b] = k\} = \frac{[\Lambda(a, b)]^k}{k!} e^{-\Lambda(a, b)}. \quad (4.25)$$

Portanto a variável aleatória $N(a, b]$, ou o número de eventos no intervalo $(a, b]$, possui distribuição de Poisson com esperança

$$E[N(a, b)] = \Lambda(a, b). \quad (4.26)$$

4.4 Estimadores

Suponhamos que temos uma base de dados que é modelado como uma realização de amostras aleatórias de uma distribuição de probabilidade que é completamente determinada por um ou mais parâmetros. Os parâmetros que determinam a distribuição do modelo são chamados parâmetros do modelo. Queremos modelos que podem ser descritos pelos próprios parâmetros ou por alguma função desses. Uma estimativa é um valor que depende apenas da base de dados.

Seja $t = h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma estimativa baseada em uma base de dados x_1, x_2, \dots, x_n , como a base de dados é formada pela realização de variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots, X_n , t é a realização de uma variável aleatória $T = h(X_1, X_2, \dots, X_n)$, dessa forma T é um estimador para um parâmetro de interesse θ . Em outras palavras, esperamos que o valor t calculado a partir da base de dados dê uma indicação do valor verdadeiro de um parâmetro θ do modelo. A palavra estimador se refere ao método ou dispositivo para estimar, e deve ser distinguida de estimativa, que é o valor calculado para uma base de dados.

Uma característica importante de estimadores é a tendência intrínseca de gerar estimativas próximas do valor real do parâmetro. O viés de um estimador é a tendência sistemática de produzir estimativas maiores ou menores que o valor verdadeiro. Um estimador T é chamado sem viés para o parâmetro θ se o valor esperado $E[T] = \theta$ não importando o valor de θ . A diferença $E[T] - \theta$ é chamada de viés de T .

O viés é uma propriedade indesejável de um estimador, e se podemos construir mais de um estimador sem viés para o mesmo parâmetro precisamos de uma forma de comparar esses estimadores. Uma forma intuitiva de comparar é uma medida do espalhamento das estimativas em torno do valor verdadeiro do parâmetro de interesse. Naturalmente um estimador mais eficiente gera estimativas mais próximas do valor real. Sejam T_1 e T_2 dois estimadores sem viés para um mesmo parâmetro θ . O estimador T_1 é mais eficiente que o estimador T_2 se as variâncias respeitam $Var(T_1) < Var(T_2)$, não importando o valor de θ .

Para um estimador T qualquer que estima um parâmetro θ , definimos o erro quadrático médio o número $EQM(T) = E[(T - \theta)^2] = Var(T) + (E[T] - \theta)^2$. Ou seja, o erro quadrático médio é a generalização do critério de eficiência de um estimador sem viés para um estimador qualquer. Note que o EQM pode ser escrito como um termo de variância de T mais o quadrado do viés de T . Assim no caso sem viés o EQM se torna apenas a variância. Por esse critério um estimador T_1 é mais eficiente que um estimador T_2 se $EQM(T_1) < EQM(T_2)$.

Um estimador com viés e variância pequena pode ser mais útil que um estimador sem viés com grande variância. Além disso estimadores podem ter viés tendendo a zero quando o número de experimentos tende ao infinito.

4.5 Máxima Verossimilhança

O princípio de máxima verossimilhança é um método geral para a construção de estimadores. Utilizando uma estimativa de máxima verossimilhança podemos estimar parâmetros de uma distribuição de probabilidades utilizando uma base de dados. A estimativa é realizada encontrando o ponto no espaço de parâmetros que maximiza a chamada função de verossimilhança de modo que a amostra observada

seja a mais provável para o modelo estatístico estudado.

Suponhamos uma base de dados x_1, x_2, \dots, x_n modelada como a realização de uma amostra aleatória de uma distribuição caracterizada por um parâmetro θ . No caso de uma amostra de uma distribuição discreta temos que $p_\theta(x)$ é a função de massa de probabilidade, ou no caso de uma amostra de uma distribuição contínua, $f_\theta(x)$ é a função densidade de probabilidade.

A função de verossimilhança no caso discreto é dada por

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n p_\theta(x_i), \quad (4.27)$$

ou seja, pelo produto das funções massa de probabilidade em cada valor x_i da amostra. Note que $L(\theta)$ é uma função apenas do parâmetro θ determinada pelos valores x_i . A maximização dessa função nos dá a estimativa de máxima verossimilhança para o parâmetro θ .

No caso contínuo a motivação é dada de modo a escolher o parâmetro θ que maximiza a probabilidade $P(x_1 - \epsilon \leq X_1 \leq x_1 + \epsilon, \dots, x_n - \epsilon \leq X_n \leq x_n + \epsilon)$ com $\epsilon > 0$ pequeno, já que pela definição 4.27 a função $L(\theta)$ seria sempre zero caso adotássemos a mesma definição. Tendo que

$$P(x_i - \epsilon \leq X_i \leq x_i + \epsilon) = \int_{x_i - \epsilon}^{x_i + \epsilon} f_\theta(x) dx \approx 2\epsilon f_\theta(x_i), \quad (4.28)$$

e que os X_i são independentes encontramos

$$\begin{aligned} & P(x_1 - \epsilon \leq X_1 \leq x_1 + \epsilon, \dots, x_n - \epsilon \leq X_n \leq x_n + \epsilon) \\ &= P(x_1 - \epsilon \leq X_1 \leq x_1 + \epsilon) \dots P(x_n - \epsilon \leq X_n \leq x_n + \epsilon) \\ &\approx (2\epsilon)^n f_\theta(x_1) f_\theta(x_2) \dots f_\theta(x_n). \end{aligned} \quad (4.29)$$

O resultado do desenvolvimento 4.29 é máximo qualquer que seja o valor de ϵ , portanto a função de verossimilhança no caso contínuo é definida como

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i). \quad (4.30)$$

A estimativa de máxima verossimilhança para o parâmetro θ é o valor $t = h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ que maximiza a função de verossimilhança $L(\theta)$. A variável aleatória $T = h(X_1, X_2, \dots, X_n)$ é o estimador de máxima verossimilhança para θ .

Usualmente uma função de verossimilhança é contínua e portanto derivável, dessa maneira podemos encontrar seu máximo utilizando o Teorema de Weierstrass. A derivação da função de verossimilhança pode ser trabalhosa pois envolve produtos de funções dependentes de θ e portanto normalmente utilizamos a regra de Leibniz. Considerando que a derivada do logaritmo natural do produto de funções é a derivada da soma dos logaritmos dessas funções é comum utilizar o logaritmo da função de

verossimilhança para facilitar o processo de cálculo de máximo. Além disso como o logaritmo é uma função crescente os valores máximos de $L(\theta)$ são preservados.

Definimos assim a função de log-verossimilhança,

$$\ell(\theta) = \ln(L(\theta)), \quad (4.31)$$

onde $\ell(\theta)$ é máxima se e somente se $L(\theta)$ é máxima.

4.5.1 Relação com χ^2

Suponha uma base de dados com realizações de uma amostra gaussiana x_1, x_2, \dots, x_n de média μ e desvio padrão σ , funções de um parâmetro do modelo θ . Cada ponto da base de dados possui uma função densidade de probabilidade dada por

$$p_\theta(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i(\theta)} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - \mu_i(\theta)}{\sigma_i(\theta)}\right)^2}, \quad (4.32)$$

tendo que os erros em cada medida são independentes, a função de verossimilhança é o produto das funções densidade, ou seja,

$$L(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \mu_i(\theta)}{\sigma_i(\theta)}\right)^2\right) \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i(\theta)}, \quad (4.33)$$

e a função de log-verossimilhança,

$$\ell(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \mu_i(\theta)}{\sigma_i(\theta)}\right)^2 - \sum_{i=1}^N \ln \sigma_i(\theta) - \frac{N}{2} \ln 2\pi, \quad (4.34)$$

notamos que quando as barras de erro σ_i são conhecidas, o único termo dependente do parâmetro do modelo θ é o primeiro da expressão 4.34. Definimos as quantidades,

$$B(\theta) \equiv -2\ell(\theta), \quad (4.35)$$

e

$$\chi^2(\theta) \equiv \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \mu_i(\theta)}{\sigma_i(\theta)}\right)^2, \quad (4.36)$$

temos assim

$$B(\theta) = \chi^2(\theta) + 2 \sum_{i=1}^N \ln \sigma_i(\theta) + N \ln 2\pi = -2\ell(\theta), \quad (4.37)$$

ou seja, maximizar a função de log-verossimilhança é equivalente a minimizar a quantidade χ^2 , e além disso, no caso em que σ_i é conhecido essa correspondência se torna exatamente equivalente. O método de minimização do χ^2 é um caso especial do método de máxima verossimilhança quando temos barras de erros gaussianas conhecidas.

Podemos encontrar a estimativa de máxima verossimilhança com μ e σ sendo os próprios parâmetros do modelo, dessa forma a equação 4.34 se torna

$$\ell(\mu, \sigma) = -N \ln \sigma - \frac{N}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^2, \quad (4.38)$$

as derivadas parciais são, para μ

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu) = \frac{N}{\sigma^2} (\bar{x}_N - \mu), \quad (4.39)$$

e para σ ,

$$\frac{\partial \ell}{\partial \sigma} = -\frac{N}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 = -\frac{N}{\sigma^3} \left(\sigma^2 - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 \right), \quad (4.40)$$

igualando as derivadas a zero e resolvendo, temos então que as estimativas de máxima verossimilhança para μ e σ são

$$\mu = \bar{x}_N \quad \text{e} \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_N)^2}. \quad (4.41)$$

4.6 Um pouco mais sobre χ^2

Na seção anterior mostramos a relação da quantidade χ^2 definida na equação 4.36 com o método de máxima verossimilhança. Desta vez vamos motivar o significado desta quantidade e sua principal aplicação para a estatística e análise de dados.

Seja X_1, X_2, \dots, X_n um conjunto de variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas e com variância finita. A medida que n cresce, a distribuição da média \bar{X}_n tende a uma distribuição gaussiana de média μ e variância σ^2/n , não importando a distribuição de cada X_i . Este resultado é conhecido como Teorema do Limite Central e é um dos fatores que torna a distribuição Gaussiana uma das mais importantes na estatística. A distribuição Gaussiana é uma aproximação muito boa para a distribuição de erros por exemplo, pois estes geralmente surgem devido ao acúmulo de um grande número de pequenos efeitos independentes.

Os erros $\epsilon \equiv X_i - \langle X_i \rangle$ quantificam quanto os valores dos dados X_i estão distantes dos valores verdadeiros $\langle X_i \rangle$. Como normalmente não conhecemos $\langle X_i \rangle$, formulamos um modelo que prediz $\langle X_i \rangle = \mu_i(\theta)$, dependente de algum conjunto de parâmetros θ . Para cada medida podemos calcular então os resíduos, definidos por $\epsilon_i(\theta) \equiv X_i - \mu_i(\theta)$. Dividindo cada resíduo pelo seu desvio padrão $\sigma_i(\theta)$ obtemos os resíduos normalizados,

$$\frac{\epsilon_i(\theta)}{\sigma_i(\theta)} = \frac{X_i - \mu_i(\theta)}{\sigma_i(\theta)}, \quad (4.42)$$

quadrando cada um dos resíduos normalizados sobre os N pontos da base de dados analisada chegamos a expressão já encontrada anteriormente para o χ^2 ,

$$\chi^2(\theta) \equiv \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i - \mu_i(\theta)}{\sigma_i(\theta)} \right)^2, \quad (4.43)$$

desta vez utilizando os erros das medidas. Dessa forma é intuitivo que a quantidade χ^2 mede o "desvio" do modelo em relação às medidas, ou seja, essa quantidade pode ser utilizada para avaliar quantitativamente como os resultados de um experimento se relacionam com a distribuição de probabilidade esperada para a grandeza medida, ou em outras palavras testar como um modelo se adequa aos dados observados (teste de hipótese).

No caso em que temos um experimento de Poisson, ou seja, nossas variáveis aleatórias X_i no processo de contagem possuem distribuição de Poisson, as equações 4.16 e 4.18 nos dizem que o valor esperado e a variância são dadas por $E[X] = \sigma^2 = \mu$. Assim a fórmula 4.43 é usualmente escrita para k graus de liberdade como

$$\chi_k^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}, \quad (4.44)$$

em que O_i representa o valor observado da quantidade estudada e E_i representa o valor esperado.

O número χ^2 é um indicador da concordância entre as distribuições esperadas e observadas. Se $\chi^2 = 0$ a concordância seria perfeita, ou seja, $O_i = E_i$ para todo i . Em geral é esperado que os termos de 4.44 sejam da ordem de 1, logo, $\chi_k^2 \lesssim k$ se as distribuições esperadas e observadas concordam. Por outro lado quando $\chi_k^2 \gg k$, as distribuições observadas diferem significativamente das esperadas, o que indica que as medidas realizadas podem não ser governadas pela distribuição de probabilidade prevista. Este teste é chamado de Teste do χ^2 .

Por definição, a soma dos quadrados de k Gaussianas independentes e padronizadas (com média $\mu = 0$ e desvio padrão $\sigma = 1$) $Z_1^2, Z_2^2, \dots, Z_k^2$, é distribuída de acordo com χ^2 e possui k graus de liberdade,

$$\chi_k^2 \equiv Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_k^2. \quad (4.45)$$

Essa variável possui uma função densidade de probabilidade que nos diz qual a probabilidade de χ_k^2 assumir um valor entre χ_k^2 e $\chi_k^2 + d\chi_k^2$, para k graus de liberdade é dada por

$$f(\chi_k^2) = \frac{1}{2^{k/2} \Gamma(k/2)} e^{-\chi_k^2/2} (\chi_k^2)^{k/2-1}. \quad (4.46)$$

Essa distribuição possui valor médio igual ao número de graus de liberdade k e variância igual a $2k$. Para valores grandes de k ela tende a uma Gaussiana, de acordo com o Teorema do Limite Central.

4.7 Intervalos de Confiança

Ao realizar medidas ou uma série de medidas de um experimento, normalmente estamos interessados em determinar um parâmetro do modelo desenvolvido seja direta ou indiretamente. Esse é o objetivo da construção dos estimadores ou do método de estimativa por máxima verossimilhança. Entretanto deve ser claro que o valor real do parâmetro é um não observável, ou seja, nunca é obtido com certeza pois os experimentos no mundo real estão sujeitos a incertezas e condições que não podem ser totalmente controladas. Assim sendo, podemos construir intervalos em que o valor real do parâmetro está contido, em vez de expressar resultados como um único valor.

Intervalos de confiança são uma estimativa de um intervalo que com determinada frequência, por exemplo 90% das vezes, inclui o valor verdadeiro do parâmetro estudado. Intervalos de confiança podem variar de acordo com cada amostra estudada e são calculados a partir de dados experimentais do fenômeno investigado. Nem todos os intervalos de confiança calculados a partir de dados amostrais irão conter o valor verdadeiro do parâmetro. Por exemplo, se possuímos 100 intervalos calculados a partir de 100 amostras com um nível de confiança de 95%, em 95 intervalos o parâmetro real estará contido, nos outros 5 não. Isso significa que em uma amostra única o valor verdadeiro pode estar contido no intervalo ou não.

4.7.1 Intervalos de Confiança Clássicos

Suponha uma base de dados x_1, \dots, x_n modeladas como a realização de variáveis aleatórias X_1, \dots, X_n . Seja θ o parâmetro de interesse e γ um número entre 0 e 1. Se para qualquer valor de θ existem funções $L_n = g(X_1, \dots, X_n)$ e $U_n = h(X_1, \dots, X_n)$ tais que

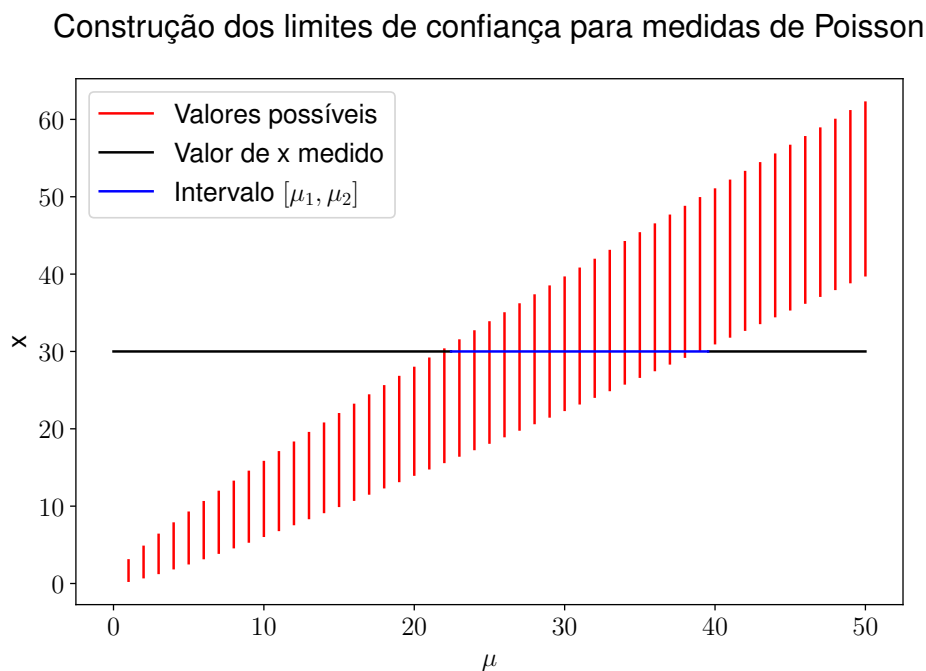
$$P(\theta \in [L_n; U_n]) = \gamma, \quad (4.47)$$

então $[l_n; u_n]$ é um intervalo de confiança para θ com nível de confiança γ . l_n e u_n são definidos pelas realizações $l_n = g(x_1, \dots, x_n)$ e $u_n = h(x_1, \dots, x_n)$. Essa definição é o mesmo que dizer que para determinado experimento o parâmetro desconhecido verdadeiro θ_t está contido no intervalo $[l_n; u_n]$ em uma fração γ dos resultados obtidos. Note que a equação 4.47 define intervalos de confiança variáveis para um conjunto de experimentos de θ fixo. As funções L_n e U_n podem não existir sempre de acordo com a definição 4.47, por exemplo no caso de distribuições discretas em que a igualdade nem sempre é satisfeita. Quando a igualdade é satisfeita dizemos que o intervalo cobre θ com a confiança escolhida. Quando existe qualquer valor de θ para o qual $P(\theta \in [L_n; U_n]) > \gamma$, ou seja o nível de confiança obtido é maior que o nível de confiança estipulado, dizemos que o intervalo é conservador, essa característica leva a maiores dificuldades em rejeitar hipóteses falsas. Idealmente intervalos de confiança devem cobrir o valor verdadeiro do parâmetro escolhido exatamente com a confiança

escolhida, se for de 90%, intervalos devem não conter o valor verdadeiro em 10% das vezes, se uma confiança maior for desejada deve-se escolher um nível maior em vez de adicionar conservadorismo aos intervalos.

A figura 10 mostra a construção gráfica de limites de confiança para um parâmetro desconhecido μ com uma grandeza mensurável x utilizando uma variável aleatória com distribuição de Poisson, dada pela equação 4.15.

Figura 10 – Construção dos limites de confiança 90% para uma variável de Poisson.



Fonte: Elaboração do Autor (2021).

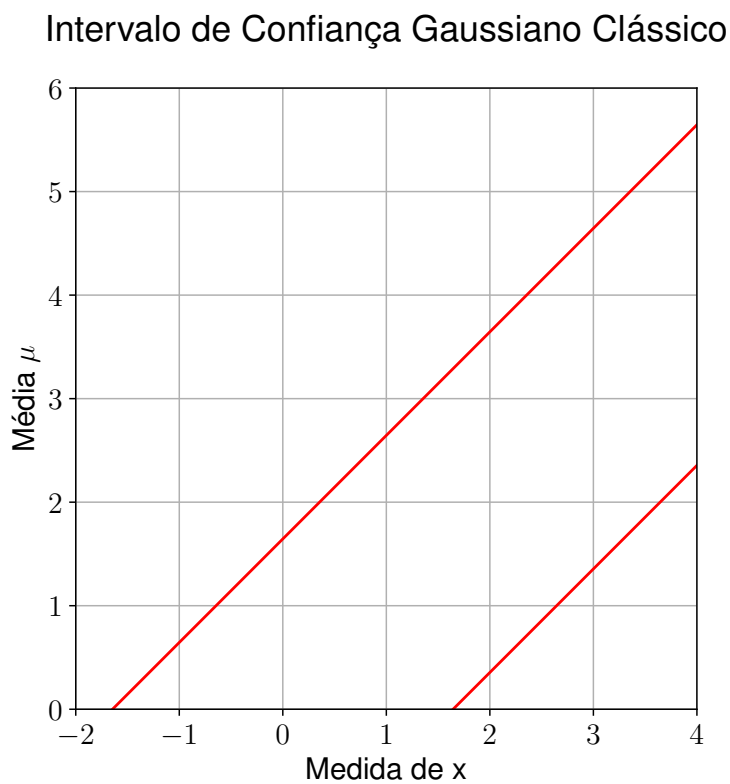
A construção é realizada de maneira que para cada valor de μ calculamos o intervalo $[x_1; x_2]$ tal que a probabilidade de que x esteja contido nesse intervalo para dado μ seja o nível de confiança γ desejado ($P(x \in [x_1; x_2] | \mu) = \gamma$). Neste caso escolhemos $\gamma = 0,90$. Realizando o experimento e obtendo um valor específico para x , desenhamos a reta que representa esse valor no gráfico. O intervalo de confiança para o parâmetro μ , representado em azul, é dado por todos os pontos que interceptam a linha da medida, com limite mínimo a primeira da esquerda e limite máximo a última da direita. Para essa construção faz-se ainda necessária a adoção de um critério que pode ser $P(x < x_1 | \mu) = 1 - \gamma$ (equivalente a $P(\mu > \mu_2) = 1 - \gamma$) que leva a um intervalo de confiança superior, ou $P(x < x_1 | \mu) = P(x > x_2 | \mu) = (1 - \gamma)/2$ (equivalente a $P(\mu < \mu_1) = P(\mu > \mu_2) = (1 - \gamma)/2$) que leva a um intervalo de confiança central. No caso da figura 10 a escolha foi um intervalo central. O intervalo é calculado utilizando o inverso da função distribuição cumulativa de Poisson.

Alguns resultados dessa construção de intervalos de confiança, chamada de construção de Neyman [46], são problemáticos do ponto de vista físico, em especial

quando essa construção resulta em intervalos de confiança vazios. Outro problema é que ao usar dados experimentais para escolher entre o uso de intervalos de limite superior ou o uso intervalos centrais, o nível de confiança obtido da construção é frequentemente menor que o nível estipulado, o que gera dúvida sobre os resultados.

A figura 11 mostra intervalos de confiança centrais com essa construção, onde o observável x é o valor medido do parâmetro μ em um experimento de função densidade de probabilidade gaussiana, dada pela equação 4.22, com desvio padrão $\sigma = 1$. Consideramos o caso em que μ não é fisicamente possível. Os intervalos foram construídos exigindo nível de confiança de 90%.

Figura 11 – Limites de confiança 90% para uma variável Gaussiana.



Fonte: Elaboração do Autor (2021).

No gráfico os intervalos de confiança para cada medida de x é a reta vertical entre os limites em vermelho. Um dos problemas enunciados pode ser visto analisando uma medida de por exemplo $x = -1.8$, vemos que o intervalo de confiança é vazio. Esse resultado pode ser tratado como estando nos 10% "errados" das medidas com 90% de nível de confiança, mas essa solução é pouco satisfatória.

4.7.2 Intervalos de Confiança de Feldman-Cousins

Com intuito de resolver os problemas apresentados no fim da seção anterior Feldman e Cousins propuseram uma nova maneira de construir intervalos de confiança a partir de um ordenamento específico de razões de funções de verossimilhança [45].

Exemplificamos essa construção construindo os intervalos para um processo de Poisson, em que a grandeza mensurável é o número total de eventos observados n , com média μ e com background de média conhecida b . A distribuição de Poisson 4.15 com background é

$$P(n|\mu) = \frac{(\mu + b)^n}{n!} e^{-(\mu+b)}, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.48)$$

Como n é um número inteiro a equação 4.47 não pode ser satisfeita exatamente, assim a igualdade é substituída por " \geq " o que adiciona pouco conservadorismo ao intervalo mas cobre o nível de confiança preestabelecido. Um problema bem conhecido em medidas de Poisson com background é que se por exemplo $b = 5,0$ e nenhum evento é medido o intervalo de confiança é um conjunto vazio.

A construção é baseada no ordenamento da quantidade R definida por

$$R = \frac{P(n|\mu)}{P(n|\mu_{best})} \quad (4.49)$$

onde μ_{best} é o valor de μ que maximiza a função de verossimilhança $P(n|\mu)$ para determinado n . O procedimento é realizado da seguinte maneira: Primeiramente vamos assumir um valor médio do background $b = 1,7$. Para $n = 0$ calculamos a estimativa de máxima verossimilhança para μ com a função de verossimilhança dada por $P(n|\mu)$. O valor de μ para qual $P(n = 0|\mu)$ é máximo denominamos μ_{best} . Agora escolhemos um valor para μ para o qual será calculado o intervalo de confiança, digamos $\mu = 3,3$ e calculamos então a razão dada pela equação 4.49. Repetimos o processo para $n = 1, 2, 3, \dots$ e colocamos os dados na tabela 4. Organizada do maior valor da razão R para o menor.

Tabela 4 – Tabela com os valores calculados para ilustrar o processo de construção de intervalos de Feldman-Cousins. Valores para $b = 1,7$ e $\mu = 3,3$.

n	$P(n \mu)$	μ_{best}	$P(n \mu_{best})$	R
5	0,17547	3,30	0,17547	1,000
6	0,14622	4,30	0,16062	0,910
4	0,17547	2,30	0,19537	0,898
7	0,10444	5,30	0,14900	0,701
3	0,14037	1,30	0,22404	0,627
8	0,06528	6,30	0,13959	0,468
2	0,08422	0,30	0,27067	0,311
9	0,03627	7,30	0,13176	0,275
10	0,01813	8,30	0,12511	0,145
1	0,03369	0,00	0,31056	0,108

Fonte: Elaboração do Autor (2021).

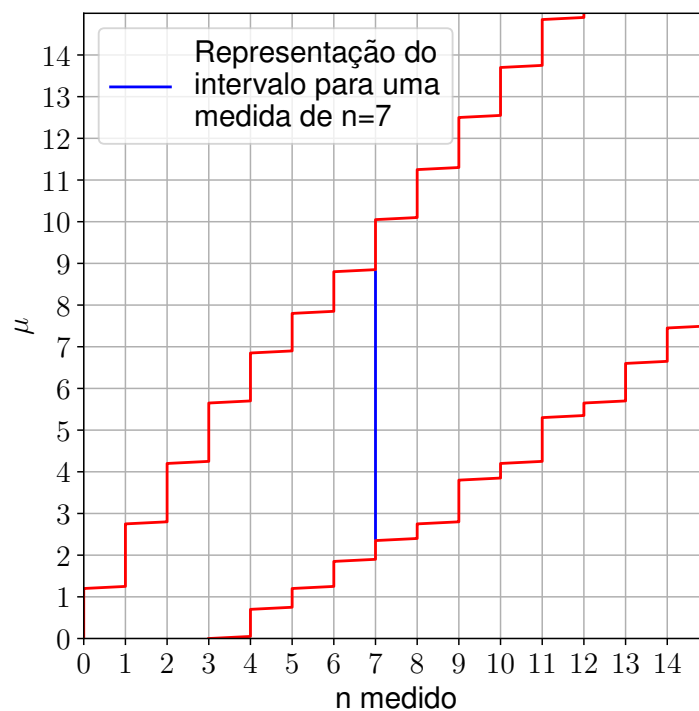
Com a tabela construída escolhemos o nível de confiança desejado, neste caso escolhemos 90%. E finalmente somamos os valores de $P(n|\mu)$ até obter ou ultrapassar a

confiança desejada. Neste exemplo são considerados os valores de $n = 5, 6, 4, 7, 3, 8, 2, 9$. Somando os valores de $P(n|\mu)$ a confiança "real" obtida foi de 92,7% o que mostra o conservadorismo intrínseco às medidas de Poisson. Assim para uma média $\mu = 3,3$, n está no intervalo $[2; 9]$.

Repetindo o processo para todos os valores de μ desejados, construímos os intervalos de confiança para n .

Figura 12 – Limites de confiança 90% para uma variável de Poisson com $b = 1,7$.

Intervalos de Confiança para medidas de Poisson com background médio $b=1.7$



Fonte: Elaboração do Autor (2021).

Para a medida $n = 7$ representada na figura, o intervalo de confiança 90% é $[\mu_1; \mu_2] = [2, 4; 8, 8]$. Vemos que por essa construção dos intervalos de confiança não encontramos intervalos vazios e além disso nunca temos intervalos com confiança menor que a estipulada, já que sempre podemos somar mais pontos até obter o nível de confiança desejado. Os intervalos construídos dessa maneira são aproximadamente centrais. Observando a figura 12, vemos que para $n < 3$ os intervalos se tornam naturalmente limites superiores para μ .

5 Estudo de Sensibilidade

Neste capítulo vamos considerar um experimento de neutrinos provenientes de uma fonte de decaimento em repouso de píons. Os desenvolvimentos e estudos de sensibilidade são baseados nos dados da simulação deste experimento.

5.1 Decaimento em Repouso de Píons

Estamos interessados no processo de decaimento em repouso de píons positivos. O decaimento de píons é comum na radiação cósmica tendo como principal fruto múons no estado fundamental. Artificialmente o decaimento é criado geralmente pela colisão de um feixe de prótons de alta energia, os prótons se chocam com um anteparo criando píons positivos e negativos que decaem aproximadamente em repouso. Os principais canais de decaimento deste processo são [47]

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu, \quad (99,99\%), \quad (5.1)$$

$$\pi^+ \rightarrow e^+ \nu_e, \quad (0,012\%), \quad (5.2)$$

Os percentuais entre parênteses mostram que o canal de decaimento 5.1 possui uma razão de ramificação muito maior que a do processo 5.2. Essa diferença é causada devido ao fato que o múon é muito mais pesado que o elétron, isso faz com que a energia livre no caso 5.2 seja muito maior que no caso 5.1, sendo assim, o elétron será criado com uma maior velocidade e conseqüentemente uma componente maior de quiralidade direita. Como apenas campos de quiralidade esquerda participam da interação fraca, o processo 5.2 é altamente suprimido. Seguindo essa cadeia de decaimento temos ainda

$$\mu^+ \rightarrow e^+ \nu_e \bar{\nu}_\mu, \quad (5.3)$$

isso faz com que o decaimento de píons seja uma ótima fonte para experimentos de neutrinos e antineutrinos, já que o processo possui pouca criação de ruído e a criação de ν_μ , ν_e e $\bar{\nu}_\mu$.

5.1.1 Espectros de Energia

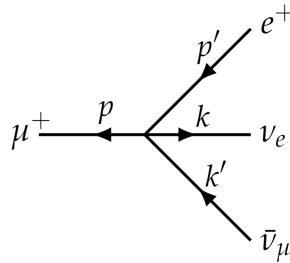
O decaimento dos π^+ é um decaimento de dois corpos e portanto os ν_μ emitidos no processo são monoenergéticos. De fato essas partículas possuem energia fixa $E_{\nu_\mu} \approx 29,8$ MeV o que pode ser encontrado aplicando a conservação do quadrimomento ao

referencial de repouso dos pions, considerando neutrinos partículas de massa nula nesta escala de energias (MeV), e calculando numericamente a relação obtida

$$E_{\nu_\mu} = \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} \approx 29,8 \text{ MeV}. \quad (5.4)$$

Já para o decaimento dos μ^+ como temos um decaimento de três corpos as partículas resultantes do processo possuem espectros contínuos de energia. Podemos usar o diagrama e as regras de Feynman para o decaimento do múon positivo na teoria de Fermi para encontrar a amplitude desse processo.

Figura 13 – Diagrama de Feynman a nível de árvore do processo de decaimento do μ^+ .



Fonte: Elaboração do Autor (2021).

A amplitude é então

$$A = -iG_F 2\sqrt{2} [\bar{v}_{\mu^+} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) v_{\bar{\nu}_\mu}] [\bar{u}_{\nu_e} \gamma_\mu (1 - \gamma^5) v_{e^+}], \quad (5.5)$$

com $G_F = 1,166378 \times 10^{-11} \text{ MeV}^{-2}$ a constante de Fermi [47].

A taxa de decaimento diferencial do processo é proporcional ao módulo quadrado da amplitude,

$$\frac{dY}{dE dE'} = \frac{1}{64\pi^3 m_\mu} \sum_{spin} |A|^2, \quad (5.6)$$

calculando o módulo da amplitude 5.5 ao quadrado e somando sobre todos os estados de spin, utilizando os rótulos para os quadrimomentos definidos no diagrama da figura 13, encontramos que

$$\sum_{spin} |A|^2 = 64G_F^2 (p^{\mu^+} \cdot k^{\nu_e}) (k'^{\bar{\nu}_\mu} \cdot p'^{e^+}), \quad (5.7)$$

escrevendo o processo no referencial de repouso do múon e alinhando o eixo z com a direção de emissão do ν_e , podemos escrever para os quadrimomentos

$$p = (m_\mu, 0, 0, 0), \quad e \quad k = (E_{\nu_e}, 0, 0, E_{\nu_e}). \quad (5.8)$$

O primeiro termo é então

$$(p^{\mu^+} \cdot k^{\nu_e}) = m_\mu E_{\nu_e}, \quad (5.9)$$

para o segundo termo usamos a conservação do quadrimomento,

$$p - p' - k - k' = 0, \quad \text{e} \quad m_\mu \gg m_{e^+}, \quad (5.10)$$

obtendo assim

$$(k' \bar{\nu}_\mu \cdot p'^{e^+}) = \frac{1}{2}(m_\mu^2 - 2m_\mu E_{\nu_e}). \quad (5.11)$$

Substituindo na equação 5.7 temos que

$$\sum_{spin} |A|^2 = 32G_F^2(m_\mu^3 E_{\nu_e} - 2m_\mu^2 E_{\nu_e}^2). \quad (5.12)$$

A cinemática do processo impõe que para a energia do neutrino $m_\mu/2 - E_{e^+(\bar{\nu}_\mu)} < E_{\nu_e} < m_\mu/2$. Voltando à taxa de decaimento diferencial com a amplitude encontrada e integrando sobre as energias possíveis, temos que o espectro de energia para o pósitron e para antineutrino do múon é dado por

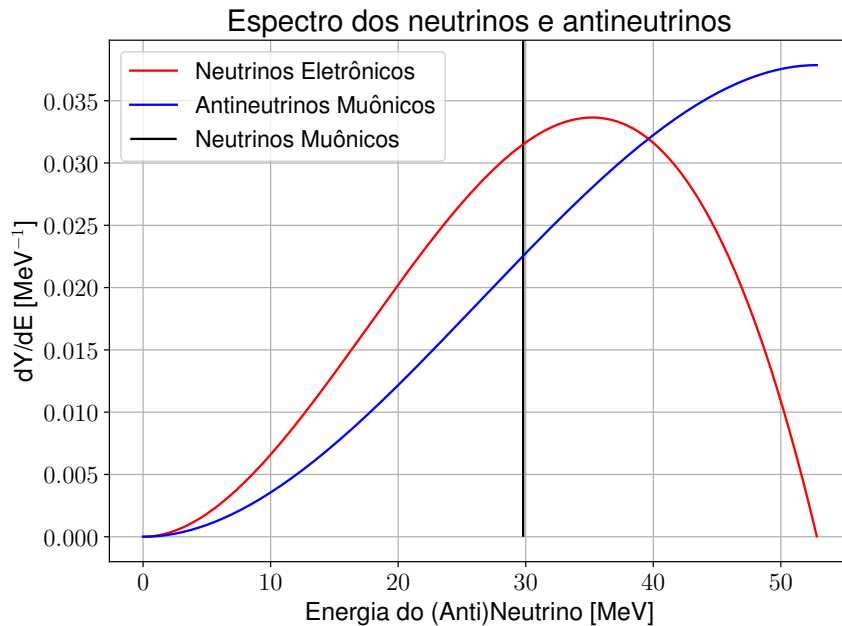
$$\frac{dY}{dE_{e^+(\bar{\nu}_\mu)}} = \frac{G_F^2 m_\mu^2}{4\pi^3} E_{e^+(\bar{\nu}_\mu)}^2 \left(1 - \frac{4E_{e^+(\bar{\nu}_\mu)}}{3m_\mu}\right). \quad (5.13)$$

Note que o espectro é o mesmo para as duas partículas, isso decorre do fato que a amplitude 5.12 depende apenas da energia do neutrino do elétron, e independe das energias das outras partículas envolvidas. O espectro de energia 5.13 normalizado, integrando E_{ν_e} de 0 a $m_\mu/2$ se torna

$$\frac{dY}{dE_{e^+(\bar{\nu}_\mu)}} = \frac{16E_{e^+(\bar{\nu}_\mu)}^2}{m_\mu^4} \left(3m_\mu - 4E_{e^+(\bar{\nu}_\mu)}\right). \quad (5.14)$$

Para o espectro do neutrino do elétron, temos que as energias possíveis são $m_\mu/2 - E_{\nu_e} < E_{e^+(\bar{\nu}_\mu)} < m_\mu/2$, e portanto

Figura 14 – Espectros de Energia dos neutrinos provenientes do decaimento do π^+ .



Fonte: Elaboração do Autor (2021).

$$\frac{dY}{dE_{\nu_e}} = \frac{G_F^2 m_\mu^2}{2\pi^3} E_{\nu_e}^2 \left(1 - \frac{2E_{\nu_e}}{m_\mu}\right). \quad (5.15)$$

E o espectro 5.15 normalizado e integrado de 0 a $m_\mu/2$ em $E_{e^+(\bar{\nu}_\mu)}$ se torna

$$\frac{dY}{dE_{\nu_e}} = \frac{96E_{\nu_e}^2}{m_\mu^4} (m_\mu - 2E_{\nu_e}). \quad (5.16)$$

A figura 14 mostra os espectros de energia normalizados 5.16 e 5.14 dos neutrinos e antineutrinos provenientes da cadeia de decaimento do π^+ . Pelas curvas vemos que a energia com maior probabilidade para o $\bar{\nu}_\mu$ é em torno da metade da massa de repouso do múon $m_\mu/2$ que é a energia máxima disponível no processo. Para os ν_e a probabilidade máxima é em torno de ~ 35 MeV, e os ν_μ sempre são criados com energia 29,8 MeV, pois provém do decaimento de dois corpos. Os espectros de energia 5.4, 5.16 e 5.14 são importantes pois a partir deles calculamos o número de eventos esperado para um detector arbitrário, valor este que podemos nos basear para comparar com o encontrado em experimentos de aparecimento ou desaparecimento de neutrinos.

5.2 Características do Experimento

Consideramos um experimento composto de um detector com o volume de um cilindro de 3,2 m de diâmetro e 2,5 m de comprimento preenchido com uma mistura de PPO (2,5-difeniloxazol), LAB (Alquilbenzeno Linear) e Parafina (baseado em [48]) nas proporções 0,3%, 84,7% e 15%, dissolvida em uma tonelada de ^{208}Pb . O detector é colocado a uma distância de 24 m de uma fonte de fluxo estimado de $1,8 \times 10^{18} \nu$ ano/cm². As dimensões do cilindro, fluxo estimado e distância fonte-detector foram inspiradas no experimento JSNS²[6]. O material cintilador, composto de PPO LAB e Parafina possui a característica interessante que a transparência e a viscosidade pode ser mudada por ajuste de temperatura. Em torno de 40°C o material é um líquido transparente e incolor, conforme a temperatura é reduzida o material perde a transparência e se solidifica lentamente devido à cristalização da parafina. Abaixo de 20°C tem a estrutura de uma cera leitosa. O ^{208}Pb foi escolhido pela possibilidade de se estudar tanto processos de corrente carregada quanto processos de corrente neutra.

5.2.1 Número de Alvos no Detector

O número de alvos na composição PPO/LAB/Parafina é calculado usando as densidades dos materiais e massas molares presentes na tabela 5.

Tabela 5 – Densidades e Massas Molares dos materiais que compõe o detector.

Material	Densidade	Massa Molar
PPO	$1,1 \times 10^6 \text{ g/m}^3$	221,25 g/mol
LAB	$863 \times 10^3 \text{ g/m}^3$	260,46 g/mol
Parafina	$900 \times 10^3 \text{ g/m}^3$	352,68 g/mol

Fonte: Elaboração do Autor (2021).

Utilizando a dimensão do detector, calculamos o volume e a massa de cada composto presente de acordo com as porcentagens definidas. Com as massas podemos calcular o número de moléculas e finalmente o número de átomos de cada tipo presente no detector.

Para o ^{208}Pb o número de alvos é o próprio número de átomos de ^{208}Pb . Desta forma o cálculo é simplesmente

$$N_{208\text{Pb}} = \frac{M_{\text{detector}}}{m_{208\text{Pb}}}, \quad (5.17)$$

onde M_{detector} é a massa total de ^{208}Pb no detector e $m_{208\text{Pb}}$ é a massa atômica do ^{208}Pb , $m_{208\text{Pb}} \approx 3.45 \times 10^{-25} \text{ kg}$. Os resultados dos cálculos dos alvos foram colocados na tabela 6.

Tabela 6 – Número de Alvos no Detector.

Tipo de Átomo	Número Total
Carbono	$7,64 \times 10^{29}$
Hidrogênio	$1,33 \times 10^{30}$
Nitrogênio	$1,81 \times 10^{26}$
Oxigênio	$1,81 \times 10^{26}$
^{208}Pb em 1ton	$2,90 \times 10^{27}$

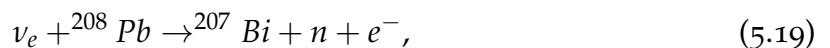
Fonte: Elaboração do Autor (2021).

5.3 Processos Estudados

Os processos considerados no desenvolvimento foram para a mistura PPO/LAB/Parafina o decaimento beta inverso, processo pelo qual podemos estudar o aparecimento de $\bar{\nu}_e$, já que não temos esse sabor de antineutrino na cadeia de decaimento do π^+ ,



em que o número de alvos considerado é o número de núcleos de hidrogênio no detector, e para o ^{208}Pb os processos de corrente carregada e corrente neutra



$$\nu_e + {}^{208}\text{Pb} \rightarrow {}^{206}\text{Bi} + 2n + e^-, \quad (5.20)$$

$$\nu_x + {}^{208}\text{Pb} \rightarrow {}^{207}\text{Pb} + n + \nu_x, \quad (5.21)$$

$$\nu_x + {}^{208}\text{Pb} \rightarrow {}^{207}\text{Pb} + 2n + \nu_x. \quad (5.22)$$

O índice x simboliza que os processos de corrente neutra 5.21 e 5.22 são válidos para todos os sabores de neutrinos e antineutrinos, $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, \bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu$ e $\bar{\nu}_\tau$. Por esses últimos podemos estudar o desaparecimento de ν_μ, ν_e e $\bar{\nu}_\mu$. Para os outros sabores os eventos esperados são apenas devido às oscilações.

5.4 Seções de Choque

Para o processo de decaimento beta inverso consideramos as seções de choque para ordem zero e primeira ordem em $\frac{1}{M}$, onde M é a massa do núcleon em questão. As seções de choque diferenciais são calculadas na referência [49].

A energia do pósitron para ordem zero em $1/M$ é

$$E_e^{(0)} = E_\nu - \Delta, \quad \text{com } \Delta = M_n - M_p, \quad (5.23)$$

onde M_n é a massa do nêutron e M_p a massa do próton. Para cada ordem temos o momento e a velocidade do pósitron definidas por

$$p_e^{(j)} = \sqrt{E_e^{(j)2} - m_e^2} \quad \text{e} \quad v_e^{(j)} = \frac{p_e^{(j)}}{E_e^{(j)}}. \quad (5.24)$$

A seção de choque diferencial a ordem zero é dada por

$$\left(\frac{d\sigma}{d\cos\theta} \right)^{(0)} = \frac{\sigma_0}{2} [(f^2 + 3g^2) + (f^2 - g^2)v_e^{(0)}\cos\theta] E_e^{(0)} p_e^{(0)}, \quad (5.25)$$

com $f = 1$ e $g = 1,26$ as constantes de acoplamento vetorial e axial-vetorial respectivamente, e σ_0 a constante de normalização

$$\sigma_0 = \frac{G_F^2 \cos^2\theta_C}{\pi} (1 + \Delta_{inner}^R), \quad (5.26)$$

que inclui o termo de correção radiativa interna independente da energia $\Delta_{inner}^R \approx 0,024$, e onde temos $\cos\theta_C = 0,974$, com θ_C o ângulo de Cabibbo.

A expressão 5.25 pode ser integrada analiticamente e assim obtemos a seção de choque total em ordem zero de $1/M$ dada por

$$\sigma_{tot}^{(0)} = \sigma_0 (f^2 + 3g^2) E_e^{(0)} p_e^{(0)}. \quad (5.27)$$

Para a primeira ordem a energia do pósitron depende do ângulo de espalhamento,

$$E_e^{(1)} = E_e^{(0)} \left[1 - \frac{E_\nu}{M} (1 - v_e^{(0)} \cos\theta) \right] - \frac{y^2}{M}, \quad \text{com } y = (\Delta^2 - m_e^2)/2. \quad (5.28)$$

A seção de choque diferencial em primeira ordem é

$$\left(\frac{d\sigma}{d\cos\theta} \right)^{(1)} = \frac{\sigma_0}{2} [(f^2 + 3g^2) + (f^2 - g^2)v_e^{(1)} \cos\theta] E_e^{(1)} p_e^{(1)} - \frac{\sigma_0}{2} \left[\frac{\Gamma}{M} \right] E_e^{(0)} p_e^{(0)}, \quad (5.29)$$

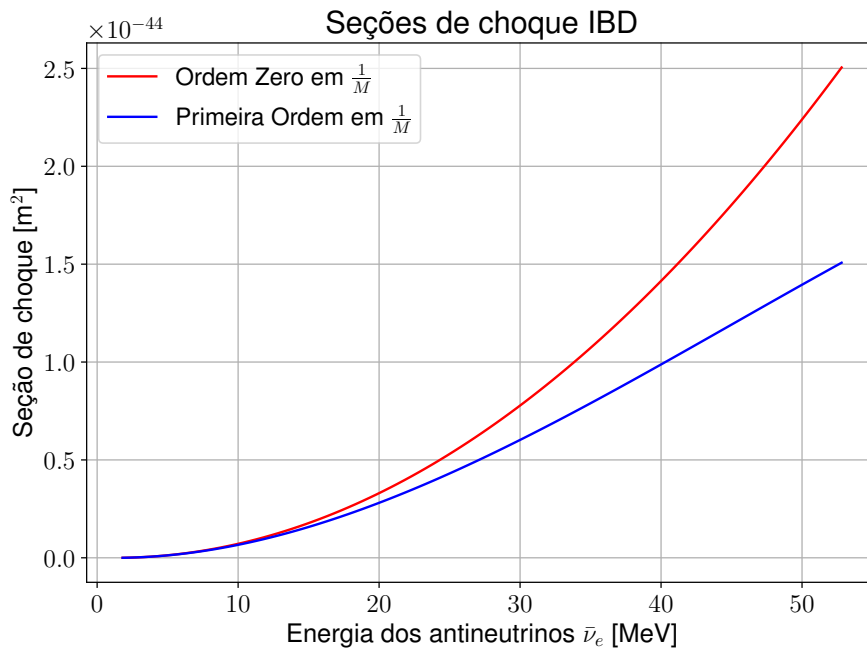
com

$$\begin{aligned} \Gamma = & 2(f + f_2)g \left[(2E_e^{(0)} + \Delta)(1 - v_e^{(0)} \cos\theta) - \frac{m_e^2}{E_e^{(0)}} \right] \\ & + (f^2 + g^2) \left[\Delta(1 + v_e^{(0)} \cos\theta) + \frac{m_e^2}{E_e^{(0)}} \right] \\ & + (f^2 + 3g^2) \left[(E_e^{(0)} + \Delta) \left(1 - \frac{1}{v_e^{(0)} \cos\theta} \right) - \Delta \right] \\ & + (f^2 - g^2) \left[(E_e^{(0)} + \Delta) \left(1 - \frac{1}{v_e^{(0)} \cos\theta} \right) - \Delta \right] v_e^{(0)} \cos\theta, \end{aligned} \quad (5.30)$$

e $f_2 = \mu_p - \mu_n = 3,706$ é o isovetor anômalo de momento magnético do núcleo.

Usando a equação 5.27 e integrando numericamente a equação 5.29, plotamos as seções de choque para o decaimento beta inverso no intervalo de energias possíveis para o experimento considerado.

Figura 15 – Seções de choque IBD em ordens zero e um em $1/M$



Fonte: Elaborado pelo Autor (2021).

Pela figura 15 podemos ver que para baixas energias dos antineutrinos, até ~ 15 MeV, as seções de choque são praticamente idênticas, para valores maiores da energia entretanto a correção de primeira ordem se torna mais e mais significativa reduzindo a seção de choque total.

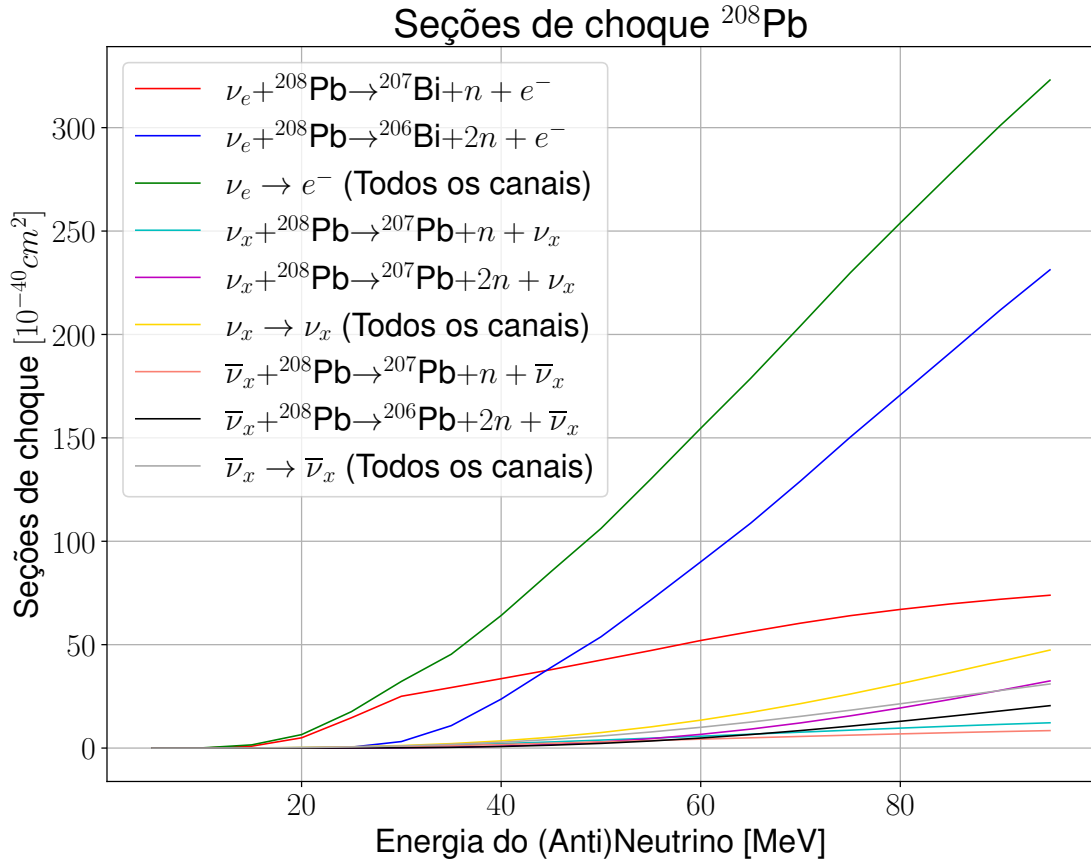
As seções de choque para os processos de corrente carregada e neutra 5.19 a 5.22 foram obtidas na referência [50]. Na referência descreve-se o método utilizado para o cálculo assim como as expressões utilizadas. Na tabela 7 estão descritos os resultados dos cálculos para as seções de choque nos processos com 1 nêutron ou 2 nêutrons no estado final, assim como o total em todos os possíveis canais de decaimento. Os processos de corrente neutra valem para todos os sabores de neutrinos e antineutrinos, como indicado pelo índice x .

Tabela 7 – Seções de choque dos processos envolvendo ^{208}Pb em unidades de 10^{-40}cm^2 e E_ν em MeV.

E_ν	$\nu_e \rightarrow e$			$\nu_x \rightarrow \nu_x$			$\bar{\nu}_x \rightarrow \bar{\nu}_x$		
	1n	2n	Total	1n	2n	Total	1n	2n	Total
5	—	—	0,39E-07	—	—	0,67E-11	—	—	0,66E-11
10	0,29E-11	—	0,09	0,002	—	0,007	0,002	—	0,007
15	0,91	—	1,54	0,06	—	0,08	0,05	—	0,08
20	4,96	—	6,51	0,20	—	0,27	0,18	—	0,24
25	14,66	0,45	17,63	0,46	0,03	0,62	0,40	0,03	0,54
30	25,05	3,15	32,22	0,87	0,15	1,22	0,73	0,13	1,04
35	29,27	10,85	45,37	1,44	0,42	2,15	1,18	0,36	1,79
40	33,56	23,68	64,10	2,15	0,93	3,48	1,73	0,76	2,82
45	37,91	38,97	85,33	2,97	1,74	5,25	2,34	1,39	4,17
50	42,54	53,79	106,16	3,86	2,93	7,50	2,99	2,26	5,82
55	47,17	71,63	130,09	4,79	4,56	10,24	3,65	3,42	7,78
60	52,02	90,05	154,64	5,74	6,63	13,50	4,31	4,85	10,04
65	56,31	108,73	178,75	6,71	9,17	17,25	4,97	6,54	12,57
70	60,39	129,14	204,17	7,69	12,17	21,49	5,62	8,47	15,34
75	64,03	150,40	229,88	8,67	15,59	26,14	6,25	10,62	18,31
80	67,04	170,75	253,92	9,65	19,39	31,16	6,86	12,94	21,42
85	69,69	191,16	277,58	10,58	23,51	36,43	7,44	15,39	24,61
90	71,95	211,73	300,95	11,45	27,90	41,88	7,97	17,93	27,82
95	73,91	231,25	323,03	12,23	32,47	47,39	8,45	20,51	31,00

Fonte: Elaboração do Autor (2021).

Os dados da tabela 7 foram plotados no gráfico da figura 16. Para os cálculos seguintes foram usados os valores totais em todos os canais de decaimento possíveis.

Figura 16 – Seções de choque nos processos de corrente carregada e corrente neutra para o ^{208}Pb .


Fonte: Elaboração do Autor (2021).

5.5 Fluxos de Neutrinos e Antineutrinos

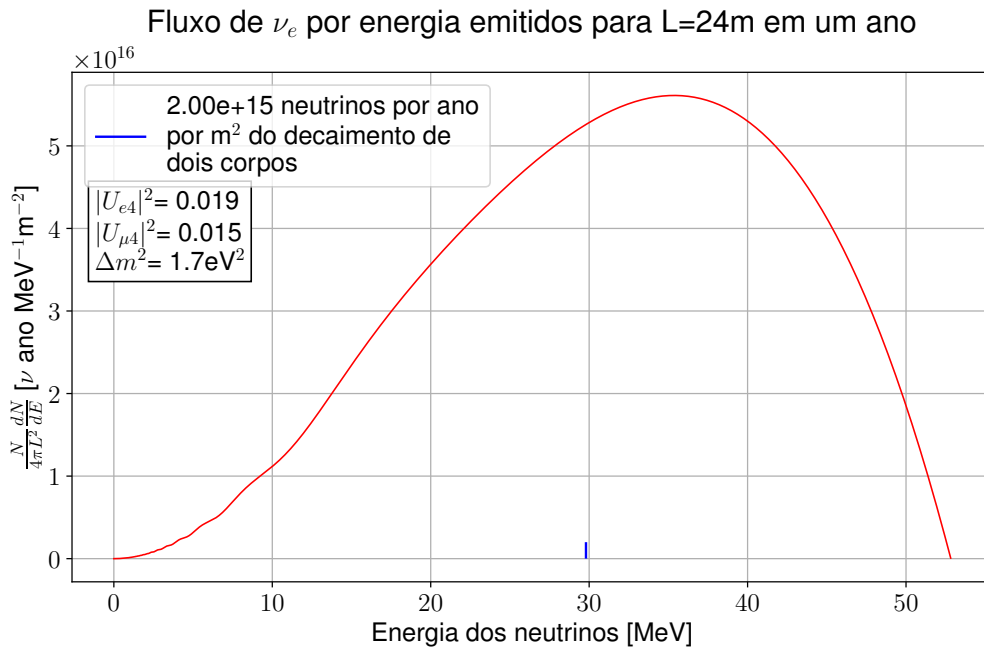
Calculamos o fluxo de neutrinos e antineutrinos considerando a distância fonte-detector, o número estimado de neutrinos produzidos em um ano, o espectro de energia e as respectivas probabilidades de sobrevivência ou oscilação.

Para os neutrinos do elétron temos que o fluxo é dado por

$$\Phi_{\nu_e} = \frac{1}{4\pi L^2} \left[N_\nu \times \left(\frac{dY}{dE_{\nu_e}} \times P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} + P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e} \right) \right], \quad (5.31)$$

onde L é a distância do detector à fonte e N_ν é o número de neutrinos esperados em um ano. O termo $P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e}$ aparece devido à possibilidade da oscilação dos ν_μ vindos do decaimento de dois corpos. O gráfico da figura 17 mostra a forma do fluxo em função da energia dos neutrinos fixando $L = 24$ m. Os parâmetros de mistura utilizados para o cálculo desses fluxos foram os melhores estimados pela referência [41] utilizando o chamada "abordagem pragmática", em que os bins de menor energia do experimento MiniBooNE que possuem um excesso de eventos $\bar{\nu}_e$ são omitidos do ajuste global.

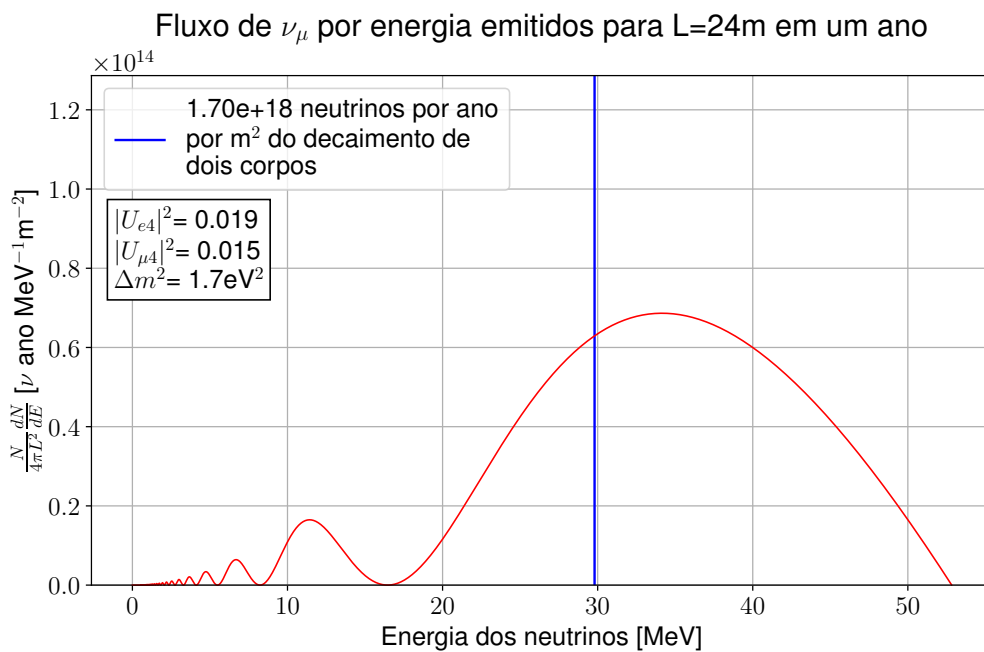
Figura 17 – Fluxo de neutrinos do elétron por energia em um ano.



O mesmo desenvolvimento foi feito para todos os outros sabores de neutrinos e antineutrinos. Para os neutrinos do múon temos

$$\Phi_{\nu_\mu} = \frac{1}{4\pi L^2} \left[N_\nu \times \left(\frac{dY}{dE_{\nu_e}} \times P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu} + P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu} \right) \right]. \quad (5.32)$$

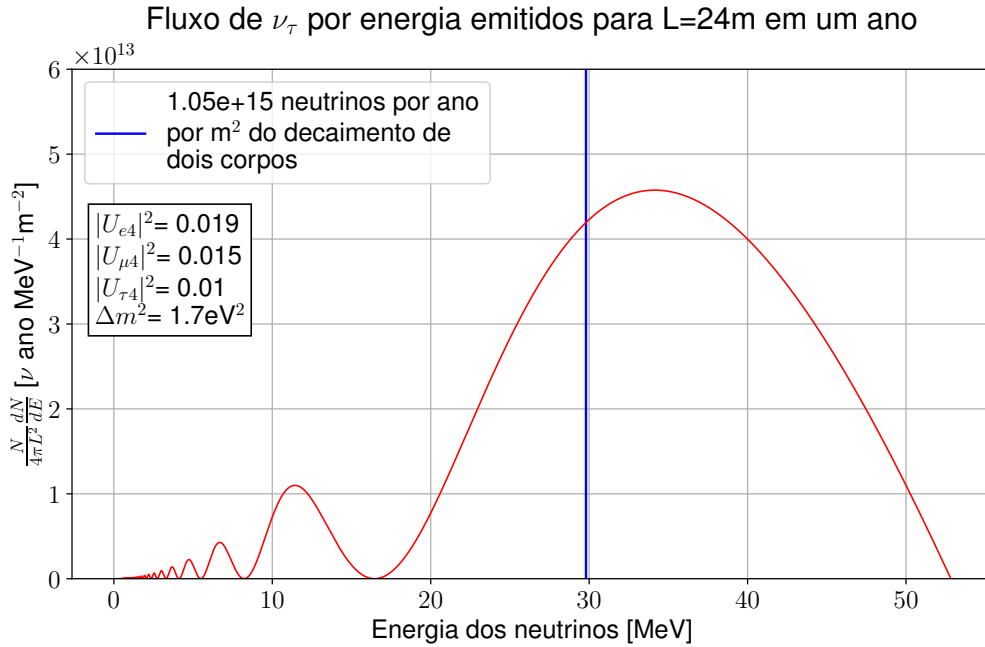
Figura 18 – Fluxo de neutrinos do múon por energia em um ano.



Para os neutrinos do tau,

$$\Phi_{\nu_\tau} = \frac{1}{4\pi L^2} \left[N_\nu \times \left(\frac{dY}{dE_{\nu_e}} \times P_{\nu_e \rightarrow \nu_\tau} + P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau} \right) \right]. \quad (5.33)$$

Figura 19 – Fluxo de neutrinos do tau por energia em um ano.

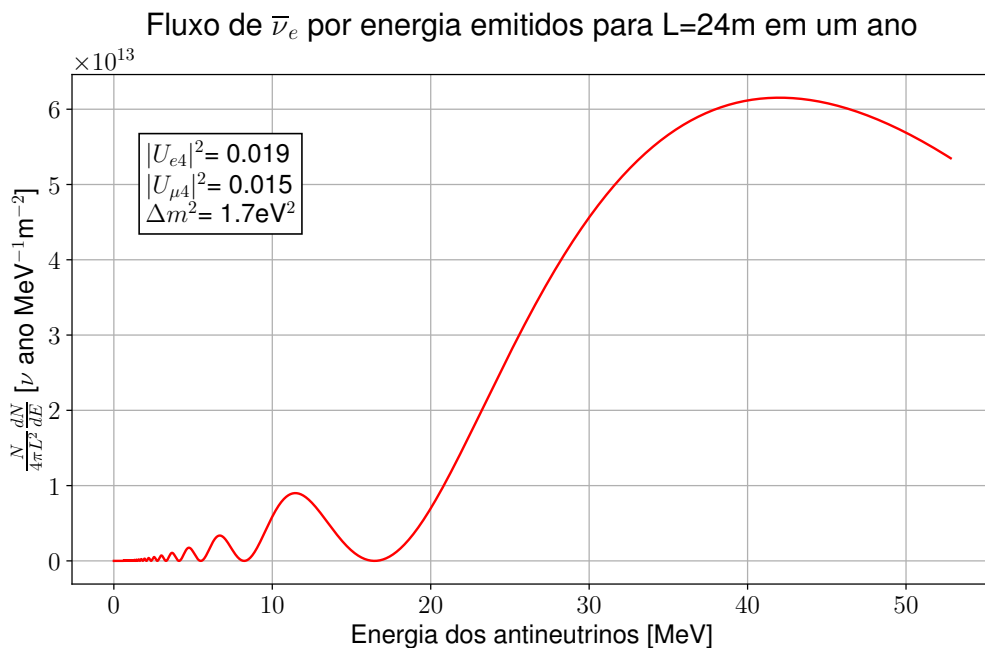


Fonte: Elaboração do Autor (2021).

Para os antineutrinos do elétron,

$$\Phi_{\bar{\nu}_e} = \frac{1}{4\pi L^2} \left[N_\nu \times \frac{dY}{dE_{\bar{\nu}_\mu}} \times P_{\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_e} \right]. \quad (5.34)$$

Figura 20 – Fluxo de antineutrinos do elétron por energia em um ano.

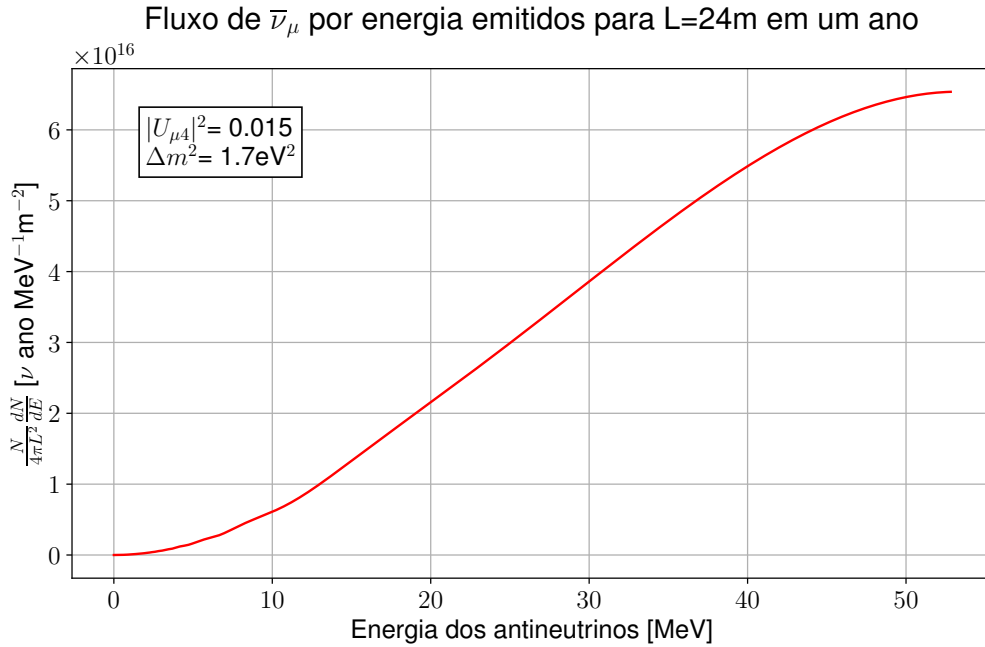


Fonte: Elaboração do Autor (2021).

Para os antineutrinos do múon,

$$\Phi_{\bar{\nu}_\mu} = \frac{1}{4\pi L^2} \left[N_\nu \times \frac{dY}{dE_{\bar{\nu}_\mu}} \times P_{\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu} \right]. \quad (5.35)$$

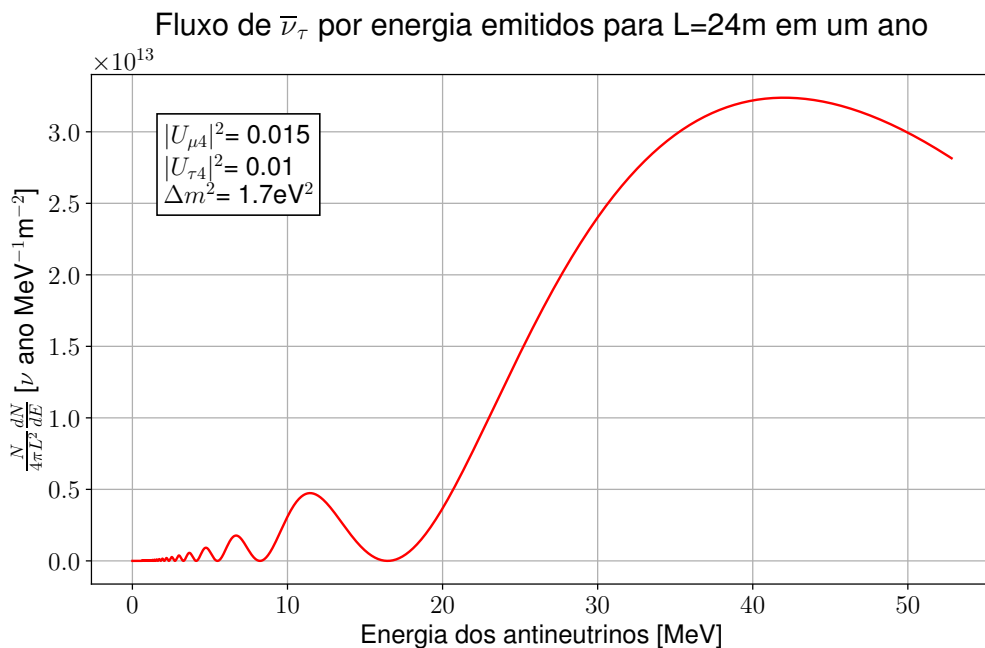
Figura 21 – Fluxo de antineutrinos do múon por energia em um ano.



E finalmente para os antineutrinos do tau,

$$\Phi_{\bar{\nu}_\tau} = \frac{1}{4\pi L^2} \left[N_\nu \times \frac{dY}{dE_{\bar{\nu}_\tau}} \times P_{\bar{\nu}_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\tau} \right], \quad (5.36)$$

Figura 22 – Fluxo de antineutrinos do tau por energia em um ano.



5.6 Eventos Esperados no Detector

Nesta seção vamos calcular os espectros de interação provenientes dos neutrinos e antineutrinos com espectros de energia contínuos. Multiplicando os fluxos obtidos anteriormente pelas respectivas seções de choque e pelos números de alvos do processo considerado temos os espectros de interação. A integral deste espectro nas energias possíveis para o decaimento de três corpos nos dá o número de interações no detector provenientes do decaimento do múon positivo. Ainda consideramos os eventos provenientes dos neutrinos do múon monoenergéticos, criados no decaimento do pión positivo. Os espectros e números de interações foram calculados utilizando os parâmetros da equação 3.5.

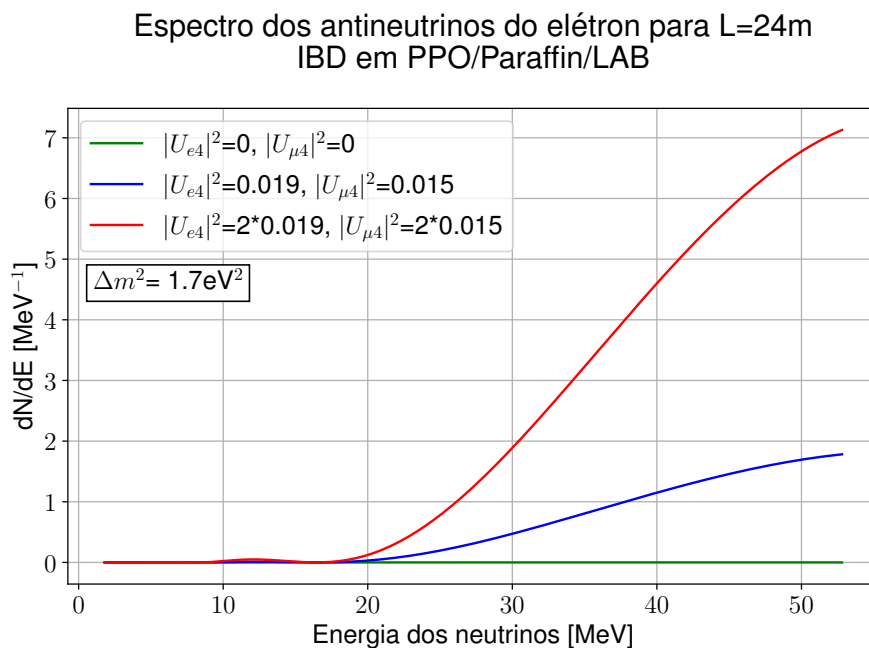
5.6.1 Espectros e Números de Interações

Para o processo de decaimento beta inverso, equação 5.18, o fluxo de $\bar{\nu}_e$ que chegam até os alvos é dado pela equação 5.34. O número de eventos para a ordem zero na seção de choque (equação 5.27) é dado pela integral do espectro de interação, o espectro é

$$\frac{dN}{dE_{\bar{\nu}_e}} = n_H \sigma_{tot}^{(0)} \Phi_{\bar{\nu}_e}, \quad (5.37)$$

$\Phi_{\bar{\nu}_e}$ é o fluxo esperado de antineutrinos do elétron no detector, integrando este resultado da energia mínima do processo de IBD $E_{min}^{IBD} = 1,807$ MeV à energia máxima do decaimento $m_\mu/2$, temos que o número esperado de interações em um ano é $\bar{\nu}_e^{(IBD(0))} = 29,70$, em primeira ordem na seção de choque temos $\bar{\nu}_e^{(IBD(1))} = 20,23$.

Figura 23 – Espectro de interação dos $\bar{\nu}_e$ no processo de decaimento beta inverso na mistura de PPO, Parafina e LAB (ordem zero na seção de choque).



Na figura 23 plotamos o espectro de interações 5.37 para os três conjuntos de parâmetros indicados pela legenda. Como as áreas abaixo das curvas são o número de eventos esperado, vemos que no caso de oscilação nula nenhum evento seria detectado, conforme os parâmetros de mistura aumentam o número de eventos esperado também aumenta, confirmando o aparecimento de $\bar{\nu}_e$. Para a linha azul do gráfico temos que o número esperado é o calculado $\bar{\nu}_e^{(IBD(0))}$, inserido na tabela 8.

Considerando o caso de interação via corrente carregada para ν_e , para a seção de choque total dada na tabela 7, a contribuição do espectro contínuo é calculada integrando o espectro de interação 5.38 da energia mínima (de acordo com os dados disponíveis na tabela 7) à $m_\mu/2$, o termo do fluxo 5.31 proveniente do espectro discreto não é contabilizado na integral, assim o termo integrado é

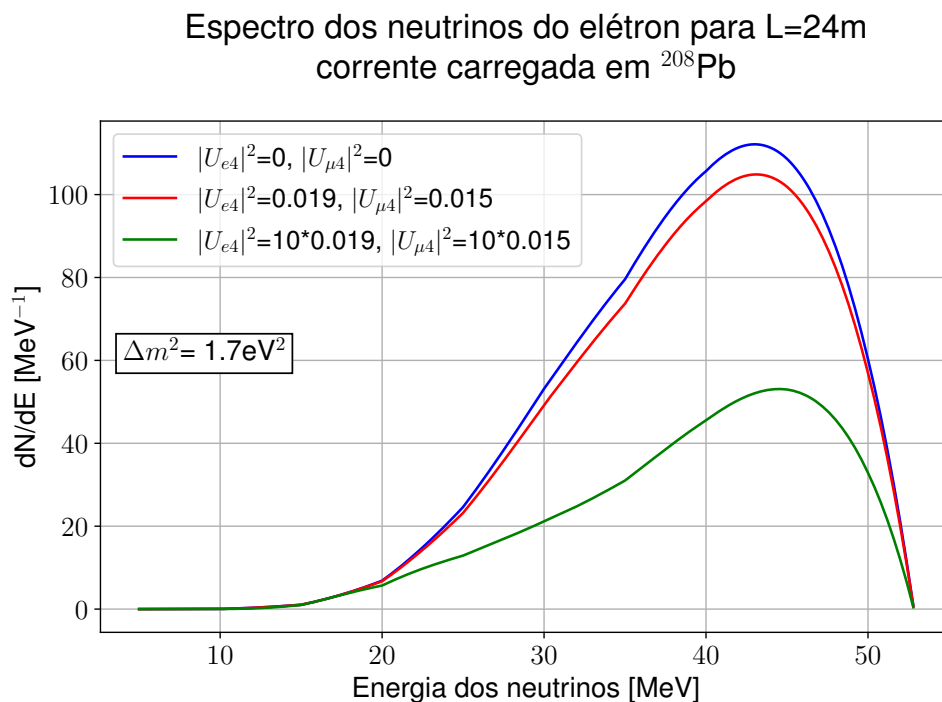
$$\frac{dN}{dE_{\nu_e}} = \frac{N_\nu}{4\pi L^2} n_{208\text{Pb}} \sigma_{PbCC} \frac{dY}{dE_{\nu_e}} P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}, \quad (5.38)$$

e para a parte discreta o número de eventos é calculado por

$$N_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e} = \frac{N_\nu}{4\pi L^2} n_{Pb} \sigma_{PbCC} P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e}, \quad (5.39)$$

somando as duas contribuições temos que o número esperado de eventos de ν_e em corrente carregada é $\nu_e^{(CC)} = 2045,04$ em um ano. A figura 24 mostra o espectro contínuo 5.38 para os três conjuntos de parâmetros da legenda do gráfico. A curva vermelha é a utilizada no cálculo do número de interações. É possível notar o desaparecimento de ν_e conforme o valor dos parâmetros aumenta.

Figura 24 – Espectro de interação dos ν_e no processo de corrente carregada em ^{208}Pb .



Os mesmos cálculos foram feitos para todos os sabores de neutrinos e anti-neutrinos considerando as interações de corrente neutra. Para as interações de ν_e , a contribuição do espectro contínuo é dada pela integral do espectro com o limite de energia dado pela tabela 7 até a energia máxima do decaimento $m_\mu/2$, assim

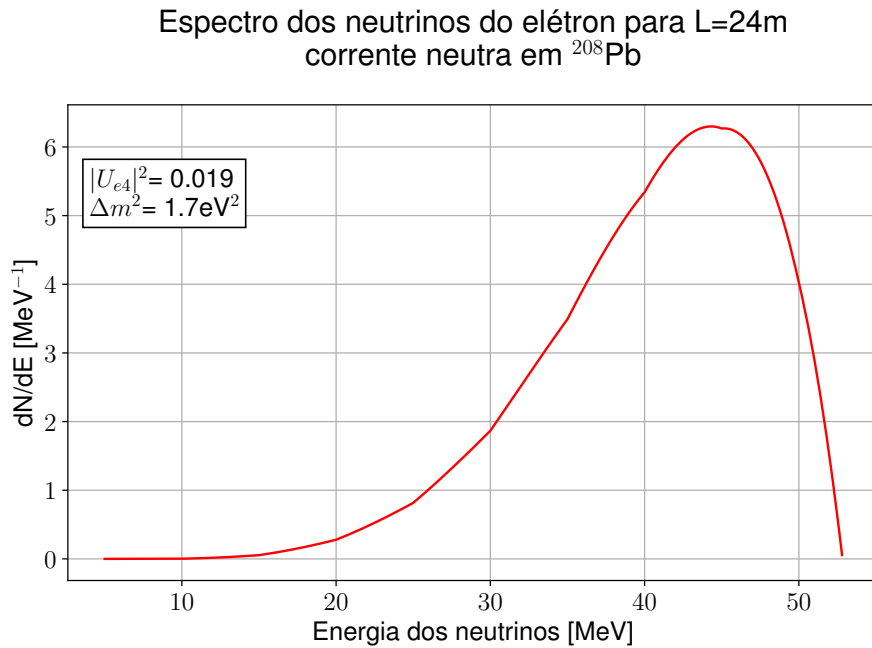
$$\frac{dN}{dE_{\nu_e}} = \frac{N_\nu}{4\pi L^2} n_{208Pb} \sigma_{PbNC} \frac{dY}{dE_{\nu_e}} P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}, \quad (5.40)$$

e para a contribuição discreta temos

$$N_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e} = \frac{N_\nu}{4\pi L^2} n_{Pb} \sigma_{PbNC} P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_e}, \quad (5.41)$$

somando as duas contribuições temos que o número esperado de eventos em um ano é $\nu_e^{(NC)} = 110,41$.

Figura 25 – Espectro de interação dos ν_e no processo de corrente neutra em ^{208}Pb .



Fonte: Elaboração do Autor (2021).

Para as interações de ν_μ em corrente neutra o espectro contínuo é dado por

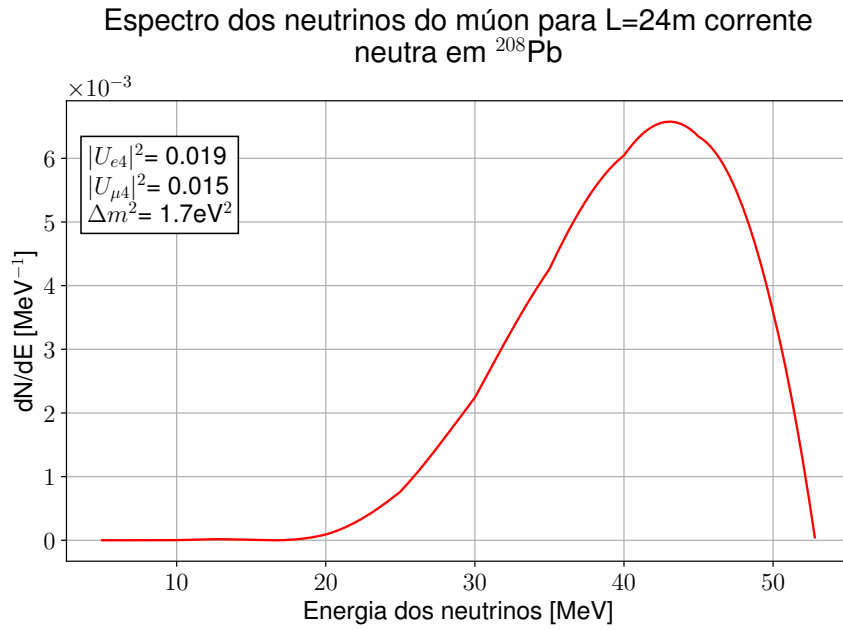
$$\frac{dN}{dE_{\nu_\mu}} = \frac{N_\nu}{4\pi L^2} n_{208Pb} \sigma_{PbNC} \frac{dY}{dE_{\nu_e}} P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}, \quad (5.42)$$

e para calcular a contribuição discreta usamos

$$N_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu} = \frac{N_\nu}{4\pi L^2} n_{Pb} \sigma_{PbNC} P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu}, \quad (5.43)$$

integrando o espectro contínuo da energia mínima a $m_\mu/2$ e somando a contribuição da parte discreta temos que o número esperado de eventos em um ano é $\nu_\mu^{(NC)} = 58,87$.

Figura 26 – Espectro de interação dos ν_μ no processo de corrente neutra em ^{208}Pb .



Fonte: Elaboração do Autor (2021).

Para as interações de ν_τ o espectro contínuo é

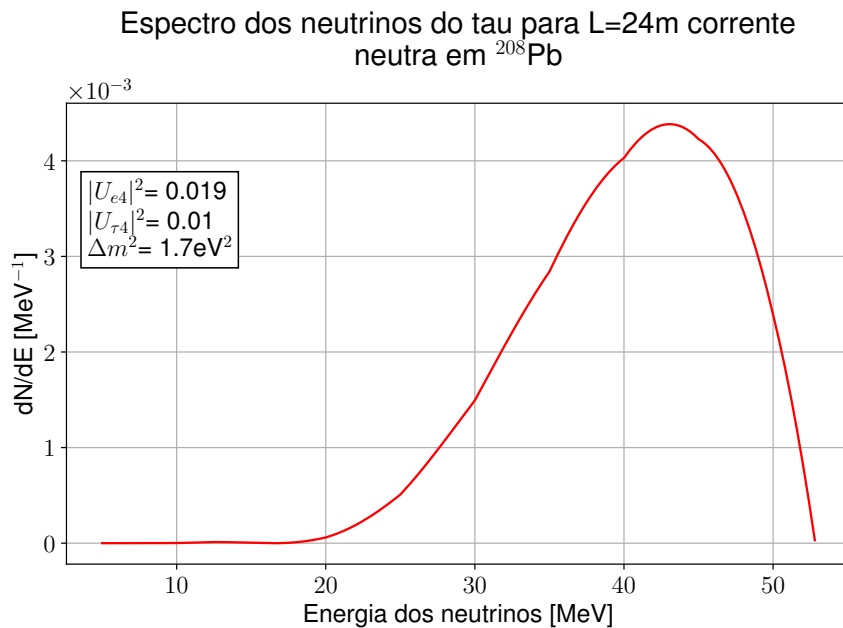
$$\frac{dN}{dE_{\nu_\tau}} = \frac{N_\nu}{4\pi L^2} n_{^{208}\text{Pb}} \sigma_{\text{PbNC}} \frac{dY}{dE_{\nu_e}} P_{\nu_e \rightarrow \nu_\tau} \quad (5.44)$$

e para a contribuição discreta

$$N_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau} = \frac{N_\nu}{4\pi L^2} n_{\text{Pb}} \sigma_{\text{PbNC}} P_{\nu_\mu \rightarrow \nu_\tau} \quad (5.45)$$

integrando o espectro contínuo da energia mínima a $m_\mu/2$ e somando a contribuição da parte discreta temos que o número esperado de eventos em um ano $\nu_\tau^{(NC)} = 0,11$.

Figura 27 – Espectro de interação dos ν_τ no processo de corrente neutra em ^{208}Pb .



Fonte: Elaboração do Autor (2021).

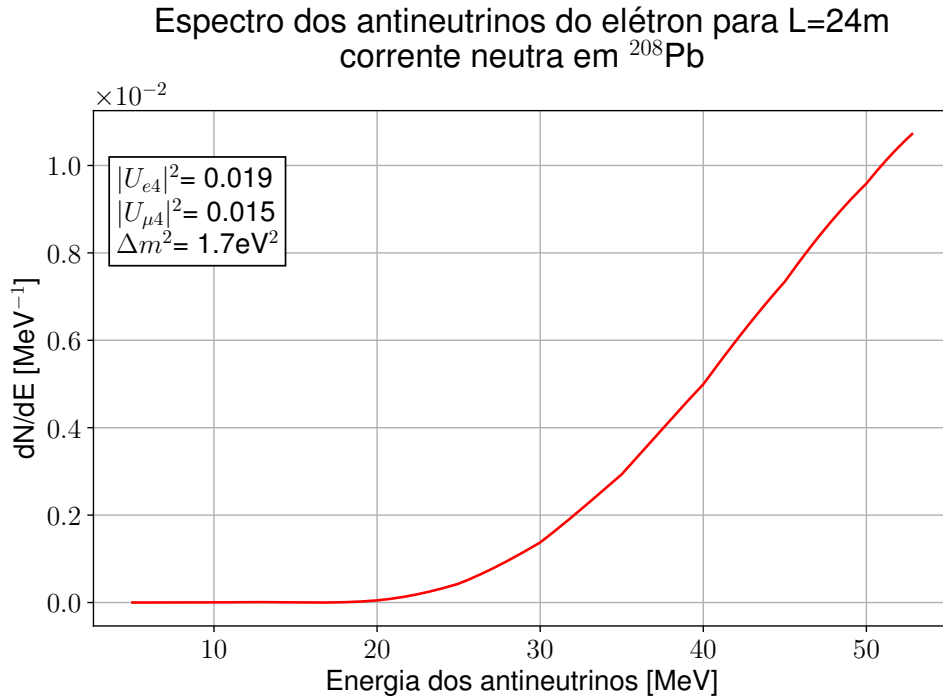
O número baixo de interações é esperado pois todos os neutrinos do tau são provenientes de oscilação. Como temos apenas antineutrinos provenientes do $\bar{\nu}_\mu$, todos os eventos serão provenientes de espectros contínuos, assim o número total para cada sabor de antineutrino é apenas a integral de cada espectro da energia mínima à $m_\mu/2$.

O espectro de interação de corrente neutra dos $\bar{\nu}_e$ é dado por

$$\frac{dN}{dE_{\bar{\nu}_e}} = n_{208Pb} \bar{\sigma}_{Pb_{NC}} \Phi_{\bar{\nu}_e}, \quad (5.46)$$

onde $\bar{\sigma}_{Pb_{NC}}$ é a seção de choque para antineutrinos, calculando a integral deste espectro temos que o número de eventos esperado em um ano é $\bar{\nu}_e^{(NC)} = 0,14$.

Figura 28 – Espectro de interação dos $\bar{\nu}_e$ no processo de corrente neutra em ^{208}Pb .

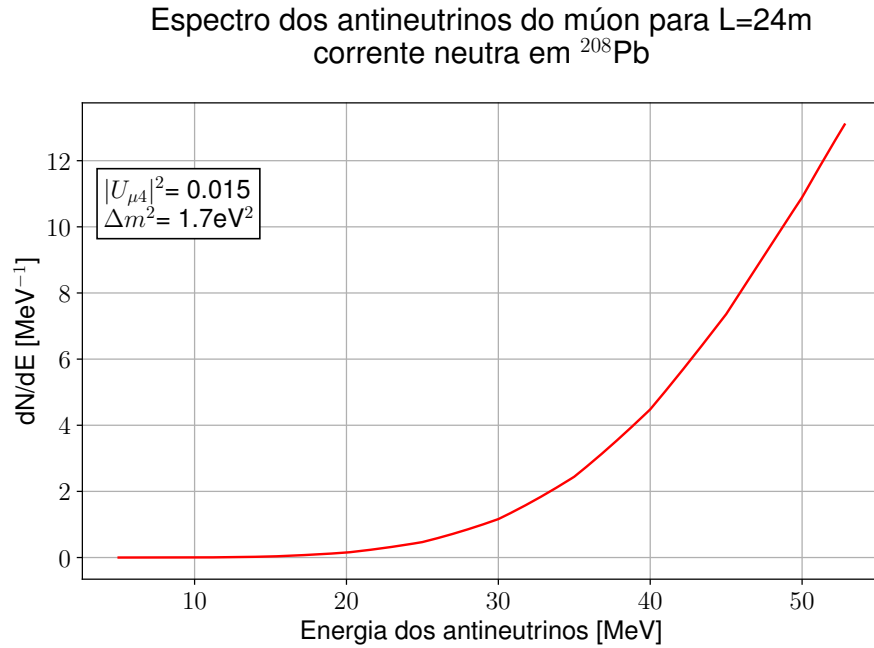


Para as interações dos $\bar{\nu}_\mu$ temos

$$\frac{dN}{dE_{\bar{\nu}_\mu}} = n_{208Pb} \bar{\sigma}_{Pb_{NC}} \Phi_{\bar{\nu}_\mu}, \quad (5.47)$$

fazendo a integral temos que o número de eventos esperado em um ano é $\bar{\nu}_\mu^{(NC)} = 141,09$.

Figura 29 – Espectro de interação dos $\bar{\nu}_\mu$ no processo de corrente neutra em ^{208}Pb .

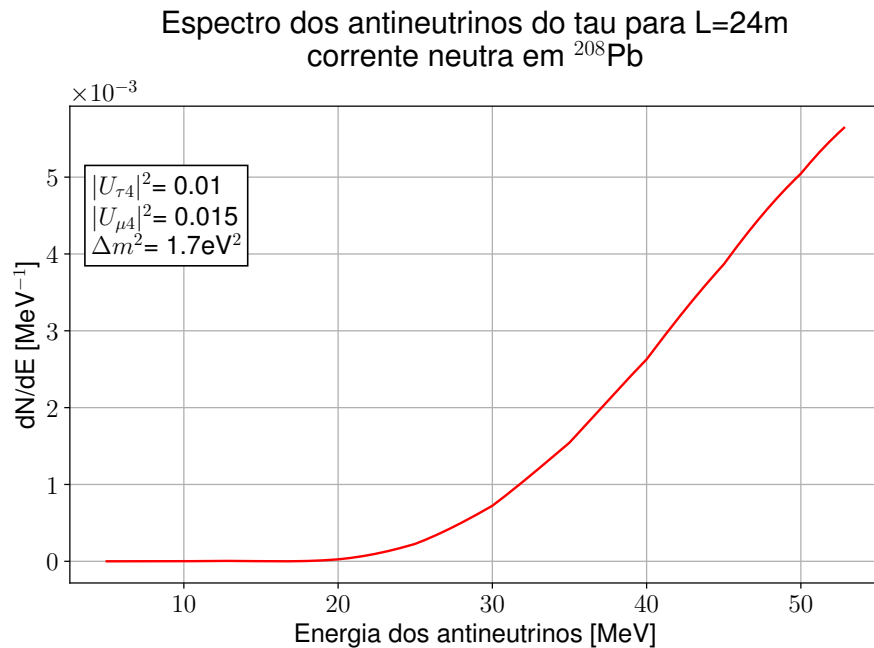


E finalmente para as interações de $\bar{\nu}_\tau$ o espectro é dado por

$$\frac{dN}{dE_{\bar{\nu}_\tau}} = n_{208\text{Pb}} \bar{\sigma}_{\text{PbNC}} \Phi_{\bar{\nu}_\tau}, \quad (5.48)$$

e calculando a integral temos que o número de eventos esperado em um ano é $\bar{\nu}_\tau^{(\text{NC})} = 0,07$.

Figura 30 – Espectro de interação dos $\bar{\nu}_\tau$ no processo de corrente neutra em ^{208}Pb .



O número total de eventos com o ^{208}Pb somando interações de corrente carregada e corrente neutra para neutrinos e antineutrinos é de 2355,69 em um ano. Todos os resultados foram colocados na tabela 8.

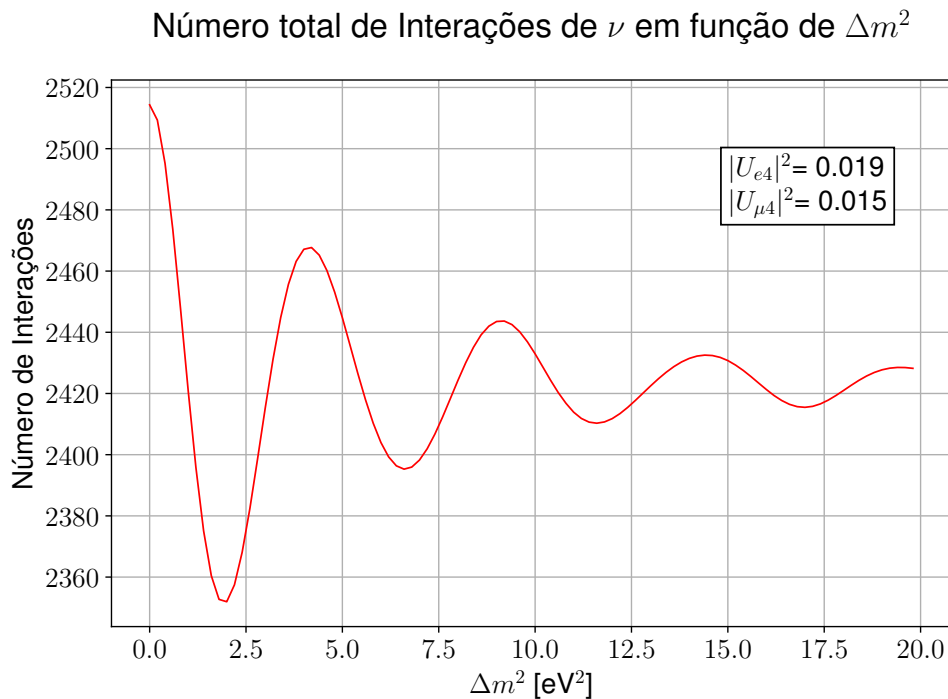
Tabela 8 – Número de eventos esperados para cada sabor de neutrino e total.

Tipo de Neutrino/Interação	Número de interações
$\bar{\nu}_e^{(IBD(0))}$	29,7
$\bar{\nu}_e^{(IBD(1))}$	20,23
$\nu_e^{(CC)}$	2045,00
$\nu_e^{(NC)}$	110,41
$\nu_\mu^{(NC)}$	58,87
$\nu_\tau^{(NC)}$	0,11
$\bar{\nu}_e^{(NC)}$	0,14
$\bar{\nu}_\mu^{(NC)}$	141,09
$\bar{\nu}_\tau^{(NC)}$	0,07
Total ^{208}Pb	2355,69

Fonte: Elaboração do Autor (2021).

Calculamos também o número esperado de interações com o ^{208}Pb em todos os canais em função do parâmetro de diferença de massa ao quadrado Δm^2 , considerando os parâmetros de mistura fixos.

Figura 31 – Número total de eventos de neutrinos e antineutrinos em ^{208}Pb em função de Δm^2 .



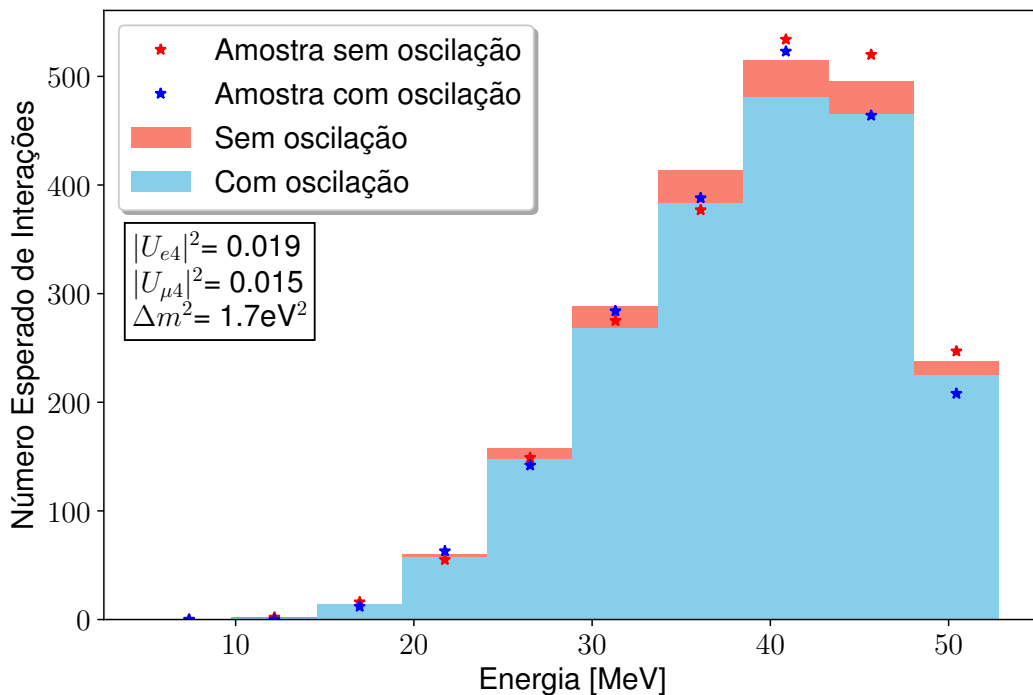
Fonte: Elaboração do Autor (2021).

Pelo gráfico podemos ver que o valor do parâmetro escolhido para os cálculos de eventos esperados $\Delta m^2 = 1,7 \text{ eV}^2$ representa o ponto de máximo desaparecimento comparado ao ponto de oscilação nula. Qualquer outro valor de Δm^2 traria uma diferença menos significativa no número de interações. Cada ponto da função número de interações é calculado integrando os espectros 5.38 a 5.48 para cada valor do parâmetro Δm^2 no intervalo $0 \text{ eV}^2 - 20 \text{ eV}^2$. Ao fim somam-se todas as contribuições ponto a ponto.

5.7 Estudo do χ^2

Dividimos o espectro de interação dos ν_e 5.38 em 10 bins nos quais realizamos as integrais obtendo o número de eventos ν_e^{CC} em cada intervalo de energia para os parâmetros 3.5. Os resultado foram plotados no histograma 32, em azul sólido temos o número esperado de eventos com oscilação e em salmão sólido o valor esperado sem oscilação. As estrelas representam valores sorteados de uma distribuição de Poisson, com a média dada pelo número de eventos esperado em cada bin, as azuis com oscilação e as vermelhas sem oscilação.

Figura 32 – Histograma do número esperado de interações ν_e^{CC} com ^{208}Pb
 Histograma do número esperado de interações ν_e^{CC} com ^{208}Pb



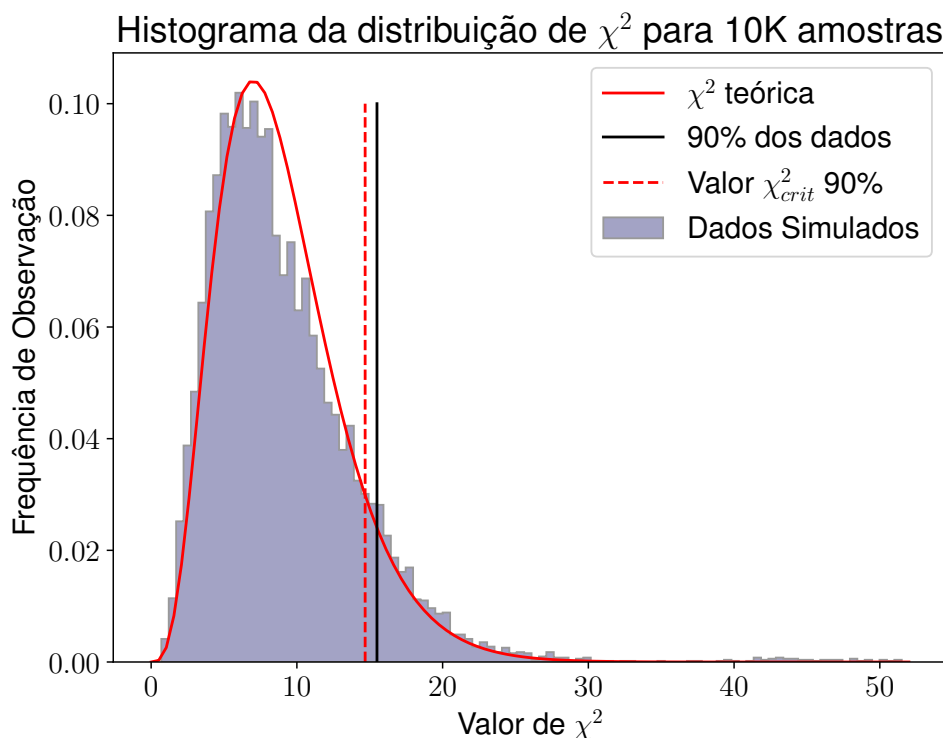
Fonte: Elaboração do Autor (2021).

Os valores obtidos, em azul sólido no histograma 32, serão utilizado como o número medido de eventos em um experimento hipotético para as análises de χ^2 .

Vamos agora realizar simulações de amostras para estudar os casos em que os dados observados para o modelo são valores próximos dos dados esperados assumindo oscilação, e depois assumindo observados com oscilação mas dados esperados sem oscilação. No primeiro caso, um valor de χ^2 , equação 4.44, é calculado para cada uma das amostras utilizando como dados observados um valor sorteado para uma distribuição de Poisson com média dada pelo número esperado de eventos com oscilação, de acordo com 3.5. Dessa forma temos um número fixo de eventos observados em cada bin, como as estrelas azuis no histograma 32. Para o número esperado de eventos, assumimos $|\mathbf{U}_{e4}|^2$ como um parâmetro livre porém com os outros parâmetros do modelo fixos. Depois de calculada a função $\chi^2(|\mathbf{U}_{e4}|^2)$, minimizamos com respeito ao parâmetro livre e encontramos o valor mínimo $|\mathbf{U}_{e4}|_{min}^2$, assim como o valor $\chi_{min}^2 \equiv \chi^2(|\mathbf{U}_{e4}|_{min}^2)$. O valor $|\mathbf{U}_{e4}|_{min}^2$ é nossa estimativa de máxima verossimilhança para o parâmetro $|\mathbf{U}_{e4}|^2$. Em outras palavras, estamos observando certo número de eventos, comparando com um modelo esperado e escolhendo o valor do parâmetro que minimiza o χ^2 . Primeiramente comparamos com o modelo com oscilação dada pelos parâmetros 3.5, e depois para outros valores de parâmetros.

Realizadas as 10 mil simulações, teremos 10 mil estimativas $|\mathbf{U}_{e4}|_{min}^2$ assim como um valor de χ_{min}^2 associado a cada uma delas. Na figura 33 plotamos um histograma da distribuição amostral do χ_{min}^2 .

Figura 33 – Histograma da distribuição de χ^2 assumindo um modelo esperado com oscilação.

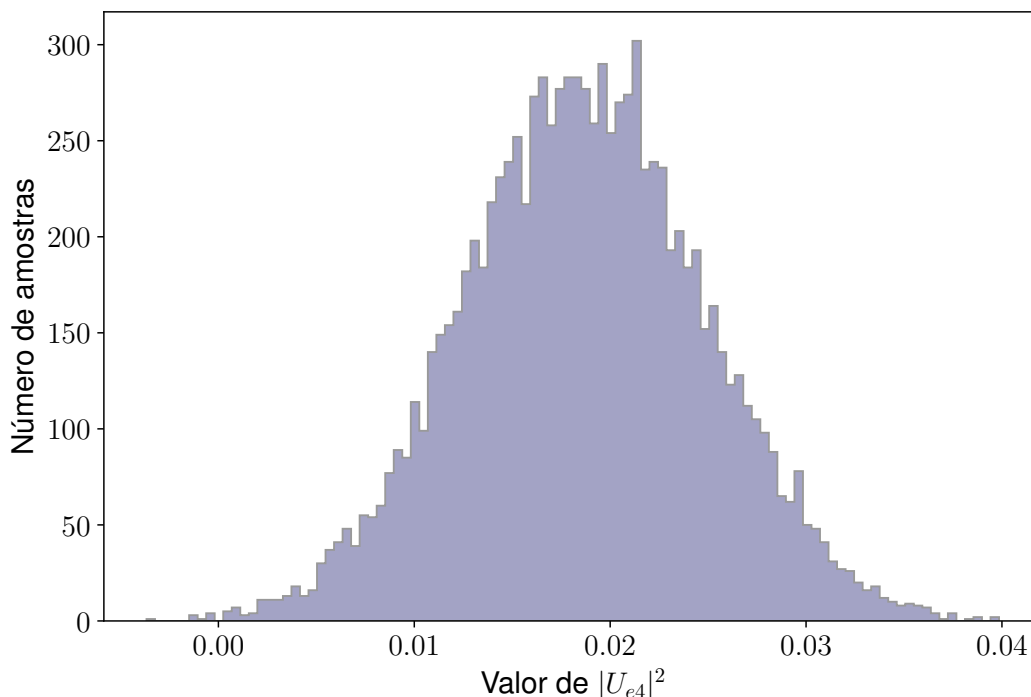


Fonte: Elaboração do Autor (2021).

Pelo histograma vemos que os dados simulados concordam bem com a distribuição teórica de χ^2 para 9 graus de liberdade (equação 4.46), que é de fato o número de bins menos o número de parâmetros livres do modelo, neste caso $|\mathbf{U}_{e4}|^2$. No histograma temos também em linha tracejada vermelha, o valor de χ^2 crítico para a distribuição teórica, assumindo confiança de 90%. A linha preta mostra o valor de χ^2 crítico que contém 90% dos dados simulados. Essa diferença entre os dois valores críticos mostra uma pequena discordância (da ordem de 3%) do modelo idealizado com o obtido através das simulações. De fato, as figuras 34 e 35, mostram respectivamente a frequência dos valores de $|\mathbf{U}_{e4}|^2$ nas amostras e a variação da média do valor estimado para $|\mathbf{U}_{e4}|^2$. O valor médio calculado nas amostras $|\mathbf{U}_{e4}|^2 = 0.0186$, que difere do valor $|\mathbf{U}_{e4}|^2 = 0.019$ utilizado para calcular os eventos esperados mostra que algum viés pode estar presente no processo de estimação, talvez no sorteio dos valores da distribuição de Poisson. Mesmo com esse possível viés os dados simulados mostram que o número de graus de liberdade do modelo está de acordo com os dados. Considerando intervalos de confiança clássicos, nessa simulação o valor real do parâmetro $|\mathbf{U}_{e4}|^2$ estava presente em 91,87% das amostras, o que mostra algum conservadorismo no processo. O que concluímos aqui é que se um experimento mede o número de eventos em cada intervalo de energia dado pelo histograma 32, um modelo com oscilação e com parâmetros $|\mathbf{U}_{e4}|^2 = 0.019$, $\Delta m^2 = 1.7 \text{ eV}^2$ descreve bem os dados.

Figura 34 – Histograma da distribuição de valores de $|\mathbf{U}_{e4}|^2$ para 10 mil simulações.

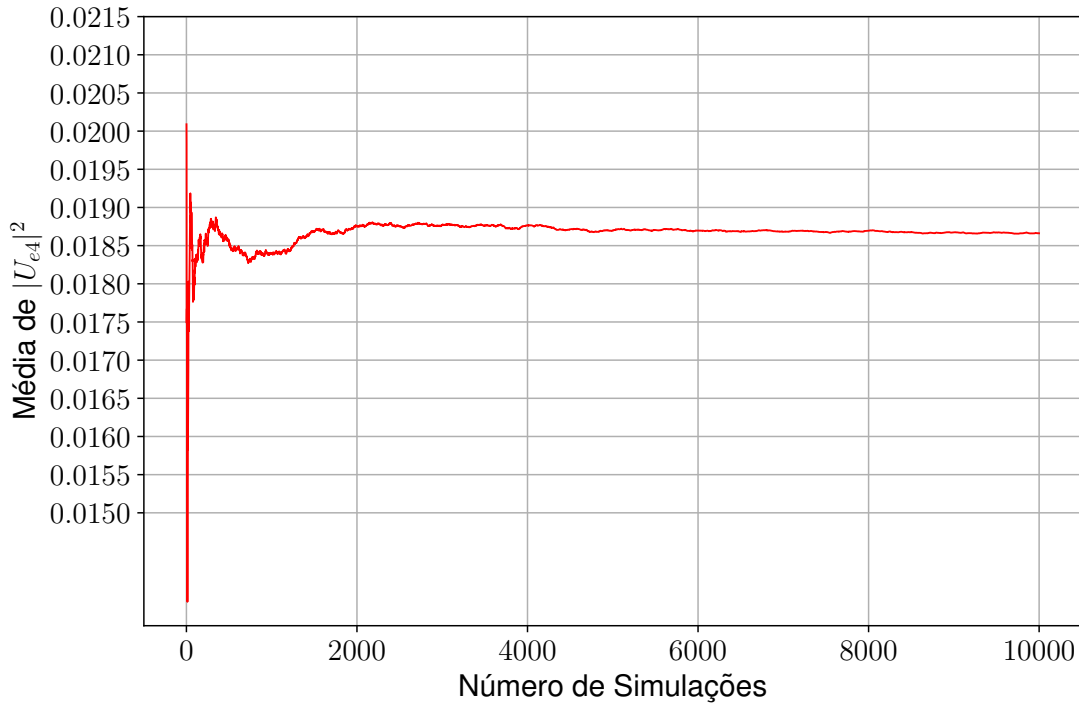
Histograma de 10K simulações



Fonte: Elaboração do Autor (2021).

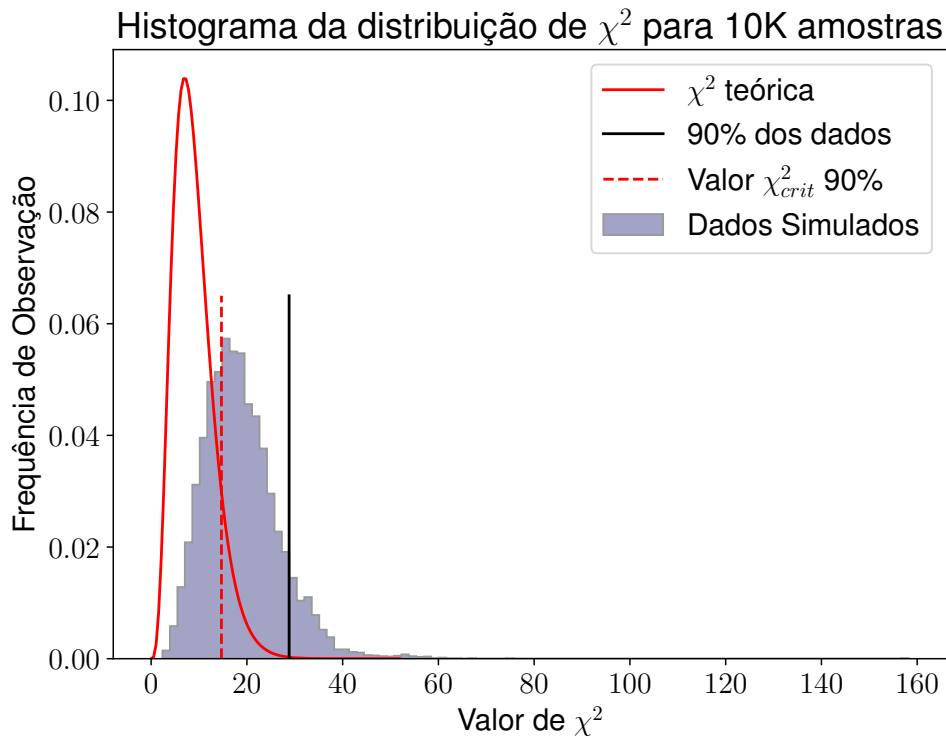
Figura 35 – Gráfico da variação da média dos valores de $|U_{e4}|^2$ para 10 mil simulações

Varição da Média de $|U_{e4}|^2$



Fonte: Elaboração do Autor (2021).

Figura 36 – Histograma da distribuição de χ^2 assumindo os valores esperados sem oscilação.

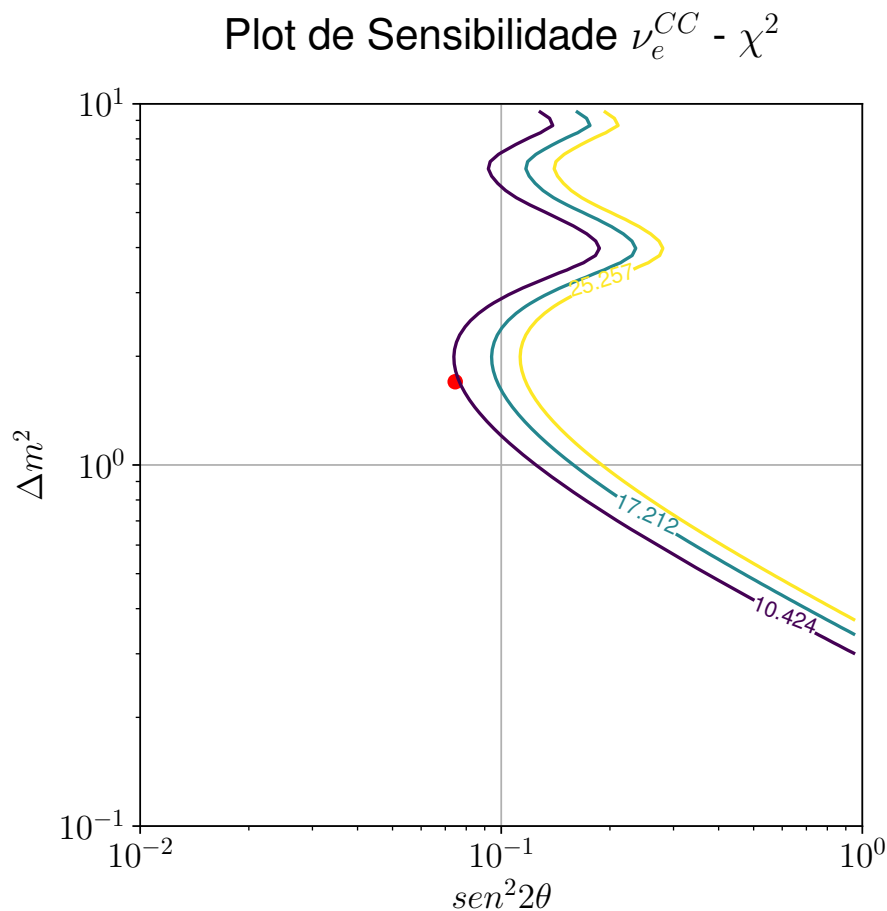


Fonte: Elaboração do Autor (2021).

Na distribuição amostral da figura 36 temos uma simulação onde os dados esperados são sem oscilação, e é detectado o mesmo número de eventos por energia do caso anterior. A mesma curva teórica de χ^2 para 9 graus de liberdade é comparada com a distribuição amostral, revelando uma profunda discordância dos dados observados no experimento, para com o modelo sem oscilação, na verdade o histograma dos dados simulados se comporta como um χ^2 com o dobro de graus de liberdade, mostrando que o modelo esperado não concorda em nenhum intervalo de energia com o modelo observado.

Finalmente na figura 37 temos o plot de sensibilidade esperada utilizando o χ^2 , equação 4.44, assumindo hipótese de não oscilação e considerando o desaparecimento de ν_e . Cada ponto do espaço de parâmetros da figura 37 possui um valor de χ^2 calculado. As curvas roxa, azul e amarela são curvas de χ^2 constante, sendo este valor tal que a distribuição de χ^2 cobre respectivamente 68,27%, 95,45% e 99,73% das medidas, ou seja, 1σ , 2σ e 3σ . Isso significa que medidas em qualquer ponto das regiões englobadas à esquerda das curvas possuem as respectivas confianças. O ponto vermelho é o ponto dos parâmetros 3.5.

Figura 37 – Plot de Sensibilidade de desaparecimento de $\nu_e^{CC} - \chi^2$



Fonte: Elaboração do Autor (2021).

6 Conclusão

Ainda hoje a física de neutrinos é um campo com diversas questões em aberto. Diversos experimentos atuais e futuros estão sendo e serão desenvolvidos para responder essas questões e realizar medidas com maiores sensibilidades. Sobre neutrinos estéreis, os resultados recentes e futuros dos experimentos MicroBooNE e KATRIN, podem começar a ajudar a decifrar o enigma deixado pelas anomalias detectadas no MiniBooNE e LSND, cobrindo uma região do plano $\sin^2 2\theta \times \Delta m^2$ que até então não foi excluída. Se esses resultados se consolidarem nos próximos anos, a possibilidade de existência de neutrinos estéreis leves será diminuída significativamente, sobrando uma pequena região do espaço de parâmetros a ser averiguada. Outras questões no entanto permanecem abertas, inclusive a possibilidade de neutrinos estéreis em outras escalas de energia.

Nesse trabalho consideramos um experimento a curta distância, idealizado para estudar a região mostrada na última seção. Consideramos os processos de decaimento beta inverso com a seção de choque em ordem zero e com correção de primeira ordem, assim como processos de corrente carregada e corrente neutra em ^{208}Pb , se concentrando na interação de corrente carregada dos neutrinos do elétron para estudar o canal de desaparecimento. Todos os cálculos, plots e simulações desse trabalho foram realizados por meio de um código escrito em linguagem python. O código foi escrito de maneira que os parâmetros utilizados e a configuração do experimento possam ser alterados facilmente para gerar novos dados e está disponível no github [51].

Referências

- [1] AHMAD, Q. R. et al. Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral-current interactions in the sudbury neutrino observatory. *Physical review letters*, APS, v. 89, n. 1, p. 011301, 2002.
- [2] FUKUDA, Y. et al. Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos. *Phys. Rev. Lett.*, v. 81, p. 1562–1567, 1998.
- [3] AGUILAR, A. et al. Evidence for neutrino oscillations from the observation of electron anti-neutrinos in a muon anti-neutrino beam. *arXiv preprint hep-ex/0104049*, 2001.
- [4] PONTECORVO, B. Neutrino experiments and the problem of conservation of leptonic charge. *Sov. Phys. JETP*, v. 26, n. 984-988, p. 165, 1968.
- [5] GIUNTI, C.; LASSERRE, T. ν_e -scale sterile neutrinos. *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, Annual Reviews, v. 69, 2019.
- [6] AJIMURA, S. et al. Technical design report (tdr): Searching for a sterile neutrino at j-parc mlf (e56, jsns2). *arXiv preprint arXiv:1705.08629*, 2017.
- [7] CHENG, T.; LI, L.-F. Neutrino masses, mixings, and oscillations in $su(2) \times u(1)$ models of electroweak interactions. *Physical Review D*, APS, v. 22, n. 11, p. 2860, 1980.
- [8] MERTENS, S. Direct neutrino mass experiments. In: IOP PUBLISHING. *Journal of Physics: Conference Series*. [S.l.], 2016. v. 718, n. 2, p. 022013.
- [9] ATKINSON, D.; JOHNSON, P. W. *Quantum Field Theory: A Self-contained Course*. [S.l.]: Rinton Press, 2002. v. 2.
- [10] GREINER, W. et al. *Relativistic quantum mechanics*. [S.l.]: Springer, 2000. v. 2.
- [11] LANCASTER, T.; BLUNDELL, S. J. *Quantum field theory for the gifted amateur*. [S.l.]: OUP Oxford, 2014.
- [12] PICH, A. The standard model of electroweak interactions. *arXiv preprint arXiv:1201.0537*, 2012.
- [13] GIGANTI, C.; LAVIGNAC, S.; ZITO, M. Neutrino oscillations: the rise of the pmns paradigm. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, Elsevier, v. 98, p. 1–54, 2018.
- [14] KING, S. Discrete symmetries and models of flavour mixing. *Journal of Physics: Conference Series*, v. 631, p. 012005, 07 2015.

- [15] LANGACKER, P. et al. Implications of the mikheyev-smirnov-wolfenstein (msw) mechanism of amplification of neutrino oscillations in matter. *Nuclear Physics B*, Elsevier, v. 282, p. 589–609, 1987.
- [16] KRAUS, C. et al. Final results from phase ii of the mainz neutrino mass search in tritium β decay. *The European Physical Journal C-Particles and Fields*, Springer, v. 40, n. 4, p. 447–468, 2005.
- [17] EREDITATO, A. (Ed.). *The State of the Art of Neutrino Physics*. [S.l.]: World Scientific, 2018. ISBN 9789813226081, 9789813226104.
- [18] ESTEBAN, I. et al. The fate of hints: updated global analysis of three-flavor neutrino oscillations. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2020, n. 9, p. 1–22, 2020.
- [19] DASGUPTA, B.; KOPP, J. Sterile neutrinos. *arXiv preprint arXiv:2106.05913*, 2021.
- [20] COLLABORATION, M. et al. A search for electron neutrino appearance at the $\delta m^2 \sim 1 \text{ eV}^2$ scale. *arXiv preprint arXiv:0704.1500*, 2007.
- [21] AGUILAR-AREVALO, A. et al. Search for electron neutrino appearance at the $\delta m^2 \sim 1 \text{ eV}^2$ scale. *Physical review letters*, APS, v. 98, n. 23, p. 231801, 2007.
- [22] AGUILAR-AREVALO, A. et al. Improved search for $\nu \mu \rightarrow \nu e$ oscillations in the miniboone experiment. *Physical Review Letters*, APS, v. 110, n. 16, p. 161801, 2013.
- [23] AGUILAR-AREVALO, A. et al. Significant excess of electronlike events in the miniboone short-baseline neutrino experiment. *Physical review letters*, APS, v. 121, n. 22, p. 221801, 2018.
- [24] AGUILAR-AREVALO, A. et al. Updated miniboone neutrino oscillation results with increased data and new background studies. *Physical Review D*, APS, v. 103, n. 5, p. 052002, 2021.
- [25] MUELLER, T. A. et al. Improved predictions of reactor antineutrino spectra. *Physical Review C*, APS, v. 83, n. 5, p. 054615, 2011.
- [26] MENTION, G. et al. Reactor antineutrino anomaly. *Physical Review D*, APS, v. 83, n. 7, p. 073006, 2011.
- [27] HAMPEL, W. et al. Gallex solar neutrino observations: Results for gallex iv. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 447, n. 1-2, p. 127–133, 1999.
- [28] ABDURASHITOV, J. et al. Measurement of the solar neutrino capture rate with gallium metal. *Physical Review C*, APS, v. 60, n. 5, p. 055801, 1999.

- [29] ESTEBAN, I. et al. Global analysis of three-flavour neutrino oscillations: synergies and tensions in the determination of θ_{23} , δ_{CP} , and the mass ordering. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2019, n. 1, p. 106, 2019.
- [30] ARMBRUSTER, B. et al. Upper limits for neutrino oscillations $\nu_{\mu} \rightarrow \nu_e$ from muon decay at rest. *Physical Review D*, APS, v. 65, n. 11, p. 112001, 2002.
- [31] ASTIER, P. et al. Search for $\nu_{\mu} \rightarrow \nu_e$ oscillations in the nomad experiment. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 570, n. 1-2, p. 19–31, 2003.
- [32] BORODOVSKY, L. et al. Search for muon-neutrino oscillations $\nu_{\mu} \rightarrow \nu_e$ ($\bar{\nu}_{\mu} \rightarrow \bar{\nu}_e$) in a wide-band neutrino beam. *Physical review letters*, APS, v. 68, n. 3, p. 274, 1992.
- [33] FARNESE, C. Some recent results from icarus. In: AIP PUBLISHING LLC. *AIP Conference Proceedings*. [S.l.], 2015. v. 1666, n. 1, p. 110002.
- [34] OPERA, C. et al. Search for $\nu_{\mu} \rightarrow \nu_e$ oscillations with the opera experiment in the cngs beam. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2013, n. 7, p. 004, 2013.
- [35] DENTLER, M. et al. Updated global analysis of neutrino oscillations in the presence of eV-scale sterile neutrinos. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2018, n. 8, p. 1–35, 2018.
- [36] AKER, M. et al. Bound on $3+1$ active-sterile neutrino mixing from the first four-week science run of katrin. *Physical review letters*, APS, v. 126, n. 9, p. 091803, 2021.
- [37] ANDRIAMIRADO, M. et al. Prospect-ii physics opportunities. *arXiv preprint arXiv:2107.03934*, 2021.
- [38] ABRATENKO, P. et al. Search for an excess of electron neutrino interactions in microboone using multiple final state topologies. *arXiv preprint arXiv:2110.14054*, 2021.
- [39] ABRATENKO, P. et al. Determination of muon momentum in the microboone lartpc using an improved model of multiple coulomb scattering. *Journal of instrumentation*, IOP Publishing, v. 12, n. 10, p. P10010, 2017.
- [40] GIUNTI, C.; KIM, C. W. *Fundamentals of neutrino physics and astrophysics*. [S.l.]: Oxford university press, 2007.
- [41] GARIAZZO, S. et al. Updated global $3+1$ analysis of short-baseline neutrino oscillations. *Journal of High Energy Physics*, Springer, v. 2017, n. 6, p. 1–38, 2017.
- [42] DEKKING, F. M. et al. *A Modern Introduction to Probability and Statistics: Understanding why and how*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2005.

- [43] ROSS, S. M. *Introduction to probability models*. [S.l.]: Academic press, 2014.
- [44] TAYLOR, J. *Introduction to error analysis, the study of uncertainties in physical measurements*. [S.l.: s.n.], 1997.
- [45] FELDMAN, G. J.; COUSINS, R. D. Unified approach to the classical statistical analysis of small signals. *Physical Review D*, APS, v. 57, n. 7, p. 3873, 1998.
- [46] NEYMAN, J. *A selection of early statistical papers of J. Neyman*. [S.l.]: University of California Press, 2020.
- [47] TANABASHI, M. et al. Review of particle physics. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 98, n. 3, p. 030001, 2018.
- [48] BUCK, C.; GRAMLICH, B.; SCHOPPMANN, S. Novel opaque scintillator for neutrino detection. *Journal of Instrumentation*, IOP Publishing, v. 14, n. 11, p. P11007, 2019.
- [49] VOGEL, P.; BEACOM, J. The angular distribution of the reaction $\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^+ + n$. *arXiv preprint hep-ph/9903554*, 1999.
- [50] ENGEL, J.; MCLAUGHLIN, G.; VOLPE, C. What can be learned with a lead-based supernova-neutrino detector? *Physical Review D*, APS, v. 67, n. 1, p. 013005, 2003.
- [51] BASSI R.; CHIMENTI, P. *SterileDAR*. [S.l.]: GitHub, 2022. <https://github.com/RicardoBassi/SterileDAR>.
- [52] MAJORANA, E.; MAIANI, L. A symmetric theory of electrons and positrons. In: *Ettore Majorana Scientific Papers*. [S.l.]: Springer, 2006. p. 201–233.
- [53] THE Nobel Prize in Physics 2015. 2015. Disponível em: <<https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2015/summary/>>.
- [54] DAUM, M.; FROSCH, R.; KETTLE, P.-R. The charged and neutral pion masses revisited. *Physics Letters B*, Elsevier, v. 796, p. 11–14, 2019.
- [55] COLLABORATION, M. et al. The neutrino flux prediction at miniboone. *arXiv preprint arXiv:0806.1449*, 2008.
- [56] KANG, S. K. Roles of sterile neutrinos in particle physics and cosmology. *International Journal of Modern Physics A*, World Scientific, v. 34, n. 10, p. 1930005, 2019.
- [57] ATHANASSOPOULOS, C. et al. Evidence for $\nu_\mu \rightarrow \nu_e$ neutrino oscillations from lsnd. *arXiv preprint nucl-ex/9709006*, 1997.