



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

ROGÉRIO RODRIGUES

**TEMPO DE TUNELAMENTO SEMICLÁSSICO EM
BARREIRA TRIANGULAR**

Londrina
2006

ROGÉRIO RODRIGUES

**TEMPO DE TUNELAMENTO SEMICLÁSSICO EM
BARREIRA TRIANGULAR**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação, em Física, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Profa. Dra. Hiromi Iwamoto.

Londrina
2006

ROGÉRIO RODRIGUES

**TEMPO DE TUNELAMENTO SEMICLÁSSICO EM
BARREIRA TRIANGULAR**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação, em Física, da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Hiromi Iwamoto.
Universidade Estadual de Londrina.

Prof. Dr. Veríssimo M. de Aquino.
Universidade Estadual de Londrina.

Prof. Dr. Valdir C. Aguilera-Navarro.
IFT-UNESP.

Londrina, ____ de _____ de 2006.

A Deus, a minha mãe e a todos que me ajudaram...

AGRADECIMENTOS

A Profa. Dra. Orientadora, pela ajuda em todas as etapas deste trabalho.

A minha família, pela confiança e motivação.

Aos professores e colegas de Curso, pois juntos trilhamos uma etapa importante de nossas vidas.

A todos que, com boa intenção, colaboraram para a realização e finalização deste trabalho.

Aos que não impediram a finalização deste estudo.

Resumo

Neste trabalho, aplicamos o tempo de tunelamento para dois tipos de barreiras de potencial distintos, um retangular já bem conhecido e outro triangular.

Restringimos em três tipos de tempo de tunelamento: o tempo de permanência, que é o tempo em que a partícula fica na barreira, e é definida como a probabilidade da partícula estar na barreira dividido pela densidade de probabilidade de corrente incidente; o tempo de fase, é definido separadamente para as partículas refletidas e transmitidas que pode ser calculado considerando-se a trajetória do pico de um pacote de onda via o método da fase estacionária; e o tempo semiclássico, na qual é utilizado a aproximação semiclássica para calcular o tempo gasto da partícula para interagir na barreira antes de refletir e transmitir.

Abstract

In this work, we apply the time of tunelamento for two types of distinct barriers of potential, a rectangular already known well and another triangular.

We restrict in three types of tunelamento time: time of permanence, that it is the time where the particle stay in the barrier, and is defined as the probability of the particle is in the barrier divided by the incident probability current density; the phase time, is defined separately for reflected particles and transmitted that can be calculated considering the trajectory of the peak of a wave packet saw the method of the stationary phase; and the semiclassical time, in which is used the semiclassical approach to calculate the time expense of the particle to interact in the barrier before reflecting and transmitting

Lista de Figuras

2-1	Representação do pacote de ondas	4
3-1	Representação unidimensional de uma partícula incidente com energia $E < V_0$ movendo-se na direção de uma barreira de potencial retangular com altura V_0 e delimitada na região de 0 a a	7
3-2	Gráfico das amplitudes de reflexão R (linha tracejada) e transmissão T (linha contínua) de uma partícula versus k em unidades de k_0 para uma largura fixa da barreira $a = 1$	14
3-3	Gráfico das amplitudes de reflexão (linha tracejada) e transmissão (linha contínua) para uma partícula versus a largura da barreira (em unidades de k_0^{-1}), para uma energia fixa da partícula $k = 0.5k_0$	15
4-1	Representação unidimensional de uma partícula incidente com energia $E < V_0$ indo em direção de uma barreira triangular com altura V_0 e delimitada pela região de 0 a a	20
4-2	Gráfico das amplitudes de reflexão R (linha tracejada) e transmissão T (linha contínua) versus k (energia da partícula em unidades de k_0) para uma barreira triangular com largura fixa $a = 1$	29
4-3	Gráfico das amplitudes de reflexão R (linha tracejada) e transmissão T (linha contínua) para a barreira triangular em função da largura a (em unidades de k_0^{-1}), com energia fixa $k = 0.5k_0$	30

6-1	Tempo de fase τ_{fase} (linha contínua) e tempo de permanência τ_D (linha pontilhada) em unidades de τ_0 , versus a largura da barreira retangular a (em unidades de k_0^{-1}). Onde a energia é fixa em $k = 0.5k_0$	53
6-2	Tempo de fase τ_{fase} (em unidades de τ_0) versus a energia k (em unidades de k_0). Onde a largura da barreira retangular é fixa em $a = 1$	54
6-3	Tempo de tunelamento semiclássico τ (em unidades de τ_0) versus a energia k (em unidades de k_0) com uma barreira de largura fixa $a = 1$. A linha contínua é o tempo semicl. de transmissão, a linha tracejada o tempo semicl. de reflexão e a linha pontilhada o tempo de permanência.	55
6-4	Tempo de tunelamento semiclássico τ (em unidades de τ_0) versus a largura da barreira a (em unidades de k_0^{-1}) com uma energia fixa da partícula $k = 0.5k_0$. A linha contínua é o tempo de semicl. transmissão, a linha tracejada o tempo semicl. de reflexão e a linha pontilhada o tempo de permanência.	56
6-5	Tempo de tunelamento(em unidades de τ_0) versus a largura da barreira triangular(em unidades de k_0^{-1}), onde, o tempo de fase transmitido é representado pela linha contínua, o tempo de fase refletido pela linha tracejada e o tempo de permanência pela linha pontilhada. Onde a energia é fixada em $k = 0.5k_0$	64
6-6	Tempos de tunelamento τ (em unidades de τ_0) versus a energia k (em unidades de k_0) com a barreira com largura fixa ($a = 1$). A linha contínua é o tempo de transmissão, a linha tracejada o tempo de reflexão e a linha pontilhada o tempo de permanência.	67
6-7	Tempos de tunelamento τ (em unidades de τ_0) versus a largura a (em unidades de k_0^{-1}) com a energia da partícula fixa ($k = 0.5k_0$). A linha contínua é o tempo de transmissão, a linha tracejada o tempo de reflexão e a linha pontilhada o tempo de permanência.	68

7-1	Tempo de permanência τ_D (em unidades de τ_0) versus a largura da barreira em unidades de k_0^{-1} , onde a linha contínua representa τ_D para a barreira triangular e a linha pontilhada representa τ_D para a barreira retangular, com $k = 0.5k_0$	70
7-2	Tempo de fase transmitido (linha contínua), tempo de fase refletido (linha tracejada) para a barreira triangular e tempo de fase para a barreira retangular (pontilhada-tracejada) em unidades de τ_0 versus a largura da barreira em unidades de k_0^{-1} , onde a energia é fixa em $k = 0.5k_0$	71

Sumário

1	Introdução	1
2	Pacotes de Ondas e Velocidade de Grupo	3
2.1	Pacotes de Ondas	3
2.2	Velocidade de Grupo	5
3	Barreira de Potencial Retangular	7
3.1	Pacote de Ondas Gaussiano para a Barreira Retangular	17
4	Barreira de Potencial Triangular	20
4.1	Pacote de Ondas Gaussiano para Barreira Triangular	34
5	Tempos de Tunelamento	36
5.1	Tempo de Permanência (Dwell Time)	36
5.2	Tempo de Fase	37
5.3	Tempo de Tunelamento Semiclássico[8]	38
5.3.1	Tempo de Transmissão[8]	40
5.3.2	Tempo de Reflexão[8]	40
6	Aplicação dos Tempos de Tunelamento	42
6.1	Barreira Retangular	42
6.1.1	Tempo de Permanência	42
6.1.2	Tempo de Fase	45

6.1.3	Tempo Semiclássico	52
6.2	Barreira Triangular	57
6.2.1	Tempo de Permanência	57
6.2.2	Tempo de Fase	61
6.2.3	Tempo Semiclássico	64
7	Conclusão	69
8	Apêndice	73
8.1	Tempo de Permanência definido por Hauge et al.(1987)	73
	Referências	84

Capítulo 1

Introdução

O fato das partículas atravessarem barreiras de potencial finitas proibidas classicamente é um fenômeno quântico conhecido como efeito túnel. Embora a probabilidade das partículas atravessarem regiões classicamente proibidas seja conhecida nos livros textos de Mecânica Quântica, não há consenso sobre o tempo que uma partícula gasta para interagir com a barreira de potencial.

Vários autores [1] a [16] vem discutindo esse problema, mas nem sempre as discussões convergem para o mesmo resultado. Isso é devido muitas vezes à construção técnica do problema em questão. Uma das questões seria: "Qual a melhor maneira de representarmos uma partícula clássica que interage com uma barreira de potencial, e que a partir desse momento esta comporta-se como uma partícula quântica até a sua transmissão ou reflexão, quando volta a sua forma clássica?" Apesar dos vários resultados citados na literatura a construção do problema ainda continua.

O interesse em responder tal pergunta, está na necessidade de projetar heteroestruturas de semicondutores na escala de nanômetros.

Algumas respostas foram dadas nas décadas de 1940 e 1950, por Eisenbud(1948); Bohm(1951); e Wigner(1955), com algumas propostas alternativas na década de 1960, por Smith(1960); Baz'(1966); e Rybachenko(1966). Posteriormente respostas com uma apelo mais válido foram propostas: o tempo de fase extrapolado(Collins et al., 1987;

Hauge et al., 1987; Teranishi et al., 1987), o tempo de Stevens(Stevens, 1980, 1983, 1984), diversos tempos: de Larmor(Baz', 1966; Rybachenko, 1966; Büttiker, 1983), o tempo complexo(Sokolovski e Baskin, 1987), e o tempo de Büttiker-Landauer(Büttiker e Landauer, 1982, 1985, 1986; Büttiker, 1983). Outras propostas também foram dadas por Bohm(tempo de Bohm), Feynman(tempo de permanência via método das integrais de trajetória de Feynman), Muga(operadores de projeção) e Kobe-Aguilera-Navarro(operador tempus).

Neste trabalho utilizamos três tipos de métodos para se calcular o tempo de tunelamento: o Tempo de permanência[6, 5, 8], o Tempo de fase [14, 6, 5, 10, 1] e o Tempo semiclássico [8].

No capítulo 2, a seguir, definimos resumidamente pacote de onda e velocidade de grupo de uma partícula. No capítulo 3, estudamos o caso unidimensional em que uma partícula incidente com energia $E < V_0$ (V_0 é a altura da barreira) interage com uma barreira de potencial retangular. Calculamos os coeficientes das ondas nas regiões antes da barreira, dentro da barreira e depois da barreira. E conseqüentemente as amplitudes de reflexão R e a amplitude de transmissão T . Escrevemos também as amplitudes incidentes, refletidas e transmitidas na forma de fase e em seguida construímos os pacotes de ondas incidente, refletido e transmitido para a barreira retangular. No capítulo 4, fazemos o mesmo que foi feito no capítulo 3, mas desta vez, consideramos uma barreira de potencial triangular de grande interesse na física de semicondutores. O capítulo 5 é dedicado a uma breve definição de cada tempo de tunelamento utilizado neste trabalho. No capítulo 6, fazemos uma aplicação dos tempos de tunelamento, na qual, obtemos os tempos de permanência, de fase e semiclássico para as barreiras retangular e triangular, para um comparativo, com o intuito de mostrar que o método do cálculo semiclássico do tempo de tunelamento para barreira triangular é um método bastante viável. E finalmente, o capítulo 7 é destinado às conclusões.

Capítulo 2

Pacotes de Ondas e Velocidade de Grupo

2.1 Pacotes de Ondas

Consideremos uma partícula livre ($V = 0$) num sistema unidimensional, o movimento dessa partícula é descrito pela equação de Schrödinger [9, 13].

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

cujas soluções são ondas harmônicas

$$\psi(x, t) = A e^{i(kx - \omega t)}, \quad (2.2)$$

onde A é a constante de normalização e a relação entre ω e k é dada pela relação de dispersão

$$\omega = \frac{\hbar k^2}{2m} \quad (2.3)$$

onde para cada valor da frequência teremos um valor correspondente de k . Podemos construir "pacotes de ondas" utilizando o princípio da superposição, da combinação linear de ondas de diferentes frequências que satisfaz (2.3) e que é também solução de (2.1)

Escrevemos o "pacote de ondas" na forma normalizada

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k) e^{i(kx - \omega t)} dk, \quad (2.4)$$

esta superposição de onda harmônica representa o "pacote de onda" da Figura 2-1.

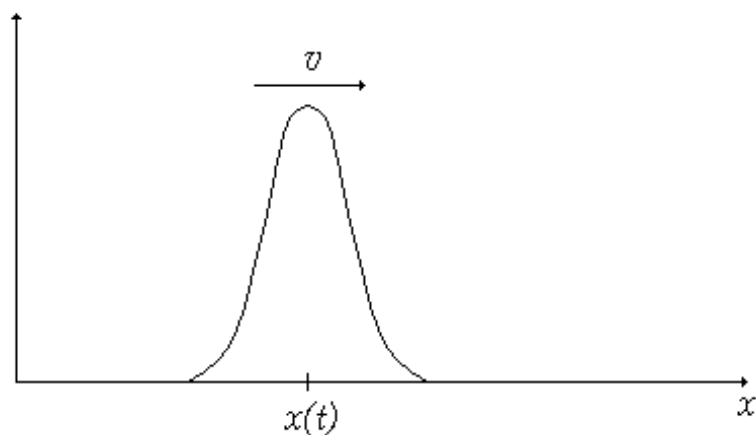


Figura 2-1: Representação do pacote de ondas

A função de onda (2.4) para o instante inicial, ou seja, para $t = 0$ é dada por

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k) e^{ikx} dk, \quad (2.5)$$

e podemos aplicar a transformação inversa de Fourier para determinarmos a distribuição de momentos de (2.5), sendo assim

$$\varphi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, 0) e^{-ikx} dx. \quad (2.6)$$

A representação quântica de uma partícula por um pacote de ondas incorpora limi-

tação imposta pelo princípio da incerteza

$$\Delta x \Delta p \geq 1. \quad (2.7)$$

Esta equação nos diz que se tentarmos construir um pacote de ondas altamente localizado no espaço dos x , será impossível associar a esse pacote um momento bem definido.

2.2 Velocidade de Grupo

Agora nos resta saber como é que um pacote de ondas se propaga no tempo. O pacote de ondas de uma partícula livre, como em (2.4), é uma superposição de ondas planas. São assim chamadas porque variam espacialmente apenas em x e em geral tem a forma

$$e^{i(kx - \omega t)} = e^{ik[x - (\omega/k)t]}. \quad (2.8)$$

Onde $\omega/k = v_{\square}$ é a velocidade de fase que é precisamente a velocidade com que um ponto da fase constante move-se quando ω e k são definidos, portanto,

$$e^{ik(x - v_{\square} t)}. \quad (2.9)$$

Consideremos agora um pacote de ondas da integral (2.4) fortemente localizado no espaço k , em torno do valor \bar{k} . Desse modo expandimos $\omega(k)$ em torno de \bar{k} ,

$$\omega(k) \approx \omega(\bar{k}) + (k - \bar{k}) \frac{d\omega}{dk} \Big|_{\bar{k}} + \frac{1}{2} (k - \bar{k})^2 \frac{d^2\omega}{dk^2} \Big|_{\bar{k}} + \dots \quad (2.10)$$

escrevendo $k - \bar{k} = k^0$ e inserindo em (2.4), obtemos

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k - \bar{k}) e^{ik_0 x} e^{-i\omega(k_0)t} e^{ik^0 [x - (d\omega/dk)_{\bar{k}} t]} e^{-i(k^0)^2/2 (d^2\omega/dk^2)_{\bar{k}} t} dk \\ \psi(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ik_0 x} e^{-i\omega(k_0)t} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k^0) e^{ik^0 [x - (d\omega/dk)_{\bar{k}} t]} e^{-i(k^0)^2/2 (d^2\omega/dk^2)_{\bar{k}} t} dk \quad (2.11) \end{aligned}$$

as coordenadas aparecem sob a forma que nos sugere que a velocidade de propagação do pacote é

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (2.12)$$

que é a velocidade de grupo.

Capítulo 3

Barreira de Potencial Retangular

Vamos considerar o caso unidimensional em que uma partícula incidente com energia $E < V_0$ (V_0 é a altura da barreira) interage com uma barreira de potencial de largura a . A partícula ao interagir com a barreira, região proibida classicamente será com certeza refletida, mas quanticamente existe uma grande probabilidade da partícula penetrar na barreira e emergir do outro lado novamente como uma partícula livre. Aqui vamos considerar uma barreira retangular (Figura 3-1)

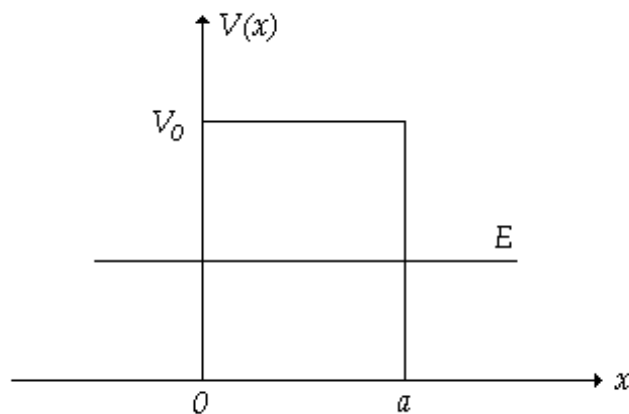


Figura 3-1: Representação unidimensional de uma partícula incidente com energia $E < V_0$ movendo-se na direção de uma barreira de potencial retangular com altura V_0 e delimitada na região de 0 a a .

Com o potencial:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & 0 \leq x \leq a \\ 0 & x > a \end{cases} \quad (3.1)$$

A equação de Schrödinger independente do tempo é

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x), \quad (3.2)$$

onde para a região fora do potencial, temos

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} &= E\psi(x) \\ \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi(x) &= 0 \\ \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$.

Já para a região no interior do potencial a equação acima se torna

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V_0\psi(x) &= E\psi(x) \\ -\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [V_0 - E]\psi(x) &= 0 \\ \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \kappa^2\psi(x) &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde $\kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2}$. Sendo assim as soluções das equações (3.3) e (3.4) são funções de onda do tipo

$$\Psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + Ae^{-ikx} & , x < 0 \\ Be^{-\kappa x} + Ce^{\kappa x} & , 0 \leq x \leq a \\ De^{ikx} & , x > a \end{cases} \quad (3.5)$$

onde impondo as condições de continuidade das funções de ondas e as suas primeiras derivadas, para $x = 0$, devemos encontrar B e C em função de A, portanto

$$\begin{aligned} & \square 1 + A = B + C \\ & \square ik - ikA = -\kappa B + \kappa C \\ & \square 1 + A = B + C \\ & \square \frac{ik}{\kappa} - \frac{ik}{\kappa}A = -B + C \\ & 1 + \frac{ik}{\kappa} + A - \frac{ik}{\kappa}A = 2C \\ & C = \frac{1}{2\kappa} [(\kappa + ik) + A(\kappa - ik)] \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} & \square 1 + A = B + C \\ & \square -\frac{ik}{\kappa} + \frac{ik}{\kappa}A = B - C \\ & 1 - \frac{ik}{\kappa} + A + \frac{ik}{\kappa}A = 2B \\ & B = \frac{1}{2\kappa} [(\kappa - ik) + (\kappa + ik)A] \end{aligned} \quad (3.7)$$

e para $x = a$, devemos encontrar B e C em função de D, portanto

$$\begin{aligned} & \square Be^{-\kappa a} + Ce^{\kappa a} = De^{ika} \\ & \square -\kappa Be^{-\kappa a} + \kappa Ce^{\kappa a} = ikDe^{ika} \\ & \square Be^{-\kappa a} + Ce^{\kappa a} = De^{ika} \\ & \square -Be^{-\kappa a} + Ce^{\kappa a} = \frac{ik}{\kappa}De^{ika} \end{aligned}$$

$$2Ce^{ka} = De^{ika} + \frac{ik}{\kappa} De^{ika}$$

$$C = \frac{1}{2\kappa} (\kappa + ik) De^{ika} e^{-ka} \quad (3.8)$$

$$\square Be^{-ka} + Ce^{ka} = De^{ika}$$

$$\square Be^{-ka} - Ce^{ka} = -\frac{ik}{\kappa} De^{ika}$$

$$2Be^{-ka} = De^{ika} - \frac{ik}{\kappa} De^{ika}$$

$$B = \frac{1}{2\kappa} (\kappa - ik) De^{ika} e^{ka} \quad (3.9)$$

Para encontrarmos D em função de A substituímos (3.6) em (3.8)

$$\frac{1}{2\kappa} [(\kappa + ik) + A(\kappa - ik)] = \frac{1}{2\kappa} (\kappa + ik) De^{ika} e^{-ka}$$

$$[\kappa + ik + A(\kappa - ik)] = De^{ika} (\kappa + ik) e^{-ka} \quad (3.10)$$

e (3.7) em (3.9)

$$\frac{1}{2\kappa} [(\kappa - ik) + (\kappa + ik)A] = \frac{1}{2\kappa} (\kappa - ik) De^{ika} e^{ka}$$

$$[\kappa - ik + A(\kappa + ik)] = De^{ika} (\kappa - ik) e^{ka}$$

$$D = \frac{[\kappa - ik + A(\kappa + ik)] e^{-ka} e^{-ika}}{\kappa - ik} \quad (3.11)$$

e substituímos (3.11) em (3.10)

$$\frac{[\kappa + ik + A(\kappa - ik)] e^{ka} e^{-ika}}{\kappa + ik} = \frac{[\kappa - ik + A(\kappa + ik)] e^{-ka} e^{-ika}}{\kappa - ik}$$

$$e^{ka} + A \frac{\kappa + ik}{\kappa + ik} e^{ka} = e^{-ka} + A \frac{\kappa + ik}{\kappa - ik} e^{-ka}$$

$$A \frac{\kappa + ik}{\kappa + ik} e^{ka} - A \frac{\kappa + ik}{\kappa - ik} e^{-ka} = e^{-ka} - e^{ka}$$

$$\frac{A(\kappa - ik)^2 e^{\kappa a} - A(\kappa + ik)^2 e^{-\kappa a}}{(\kappa + ik)(\kappa - ik)} = \frac{(\kappa + ik)(\kappa - ik)(e^{-\kappa a} - e^{\kappa a})}{(\kappa + ik)(\kappa - ik)}$$

$$A(\kappa^2 - 2ik\kappa - k^2)e^{\kappa a} - A(\kappa^2 + 2ik\kappa - k^2)e^{-\kappa a} = (\kappa^2 + k^2)(e^{-\kappa a} - e^{\kappa a})$$

$$A = \frac{(\kappa^2 + k^2)(e^{-\kappa a} - e^{\kappa a})}{\kappa^2(e^{\kappa a} - e^{-\kappa a}) - 2ik\kappa(e^{\kappa a} + e^{-\kappa a}) - k^2(e^{\kappa a} - e^{-\kappa a})}$$

usando as relações abaixo

$$e^{\kappa a} - e^{-\kappa a} = 2 \sinh(\kappa a)$$

$$e^{\kappa a} + e^{-\kappa a} = 2 \cosh(\kappa a)$$

$$e^{-\kappa a} - e^{\kappa a} = -i e^{\kappa a} - e^{-\kappa a} = -2 \sinh(\kappa a), \quad (3.12)$$

na equação acima, obtemos

$$A = \frac{-2(\kappa^2 + k^2) \sinh(\kappa a)}{2\kappa^2 \sinh(\kappa a) - 4ik\kappa \cosh(\kappa a) - 2k^2 \sinh(\kappa a)}$$

$$A = \frac{-(\kappa^2 + k^2) \sinh(\kappa a)}{(\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa a) - 2ik\kappa \cosh(\kappa a)} \quad (3.13)$$

Para encontrarmos o coeficiente D, substituímos (3.12) em (3.11)

$$D = \frac{[\kappa - ik + A(\kappa + ik)]e^{-\kappa a}e^{-ika}}{\kappa - ik}$$

$$D = 1 + A \frac{\kappa + ik}{\kappa - ik} e^{-\kappa a}e^{-ika}$$

$$D = e^{-\kappa a}e^{-ika} + \frac{-(\kappa^2 + k^2) \sinh(\kappa a)}{(\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa a) - 2ik\kappa \cosh(\kappa a)} \times \frac{\kappa + ik}{\kappa - ik} e^{-\kappa a}e^{-ika}$$

$$D = e^{-\kappa a}e^{-ika} + \frac{-(\kappa + ik)^2 \sinh(\kappa a)}{(\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa a) - 2ik\kappa \cosh(\kappa a)} e^{-\kappa a}e^{-ika}$$

$$D = \frac{(\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa a) e^{-\kappa a} e^{-ika} - 2i\kappa k \cosh(\kappa a) e^{-\kappa a} e^{-ika}}{(\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa a) - 2i\kappa k \cosh(\kappa a)} +$$

$$-\frac{(\kappa + ik)^2 e^{-\kappa a} e^{-ika}}{(\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa a) - 2i\kappa k \cosh(\kappa a)}$$

$$D = \frac{-2i\kappa k \cosh(\kappa a) e^{-\kappa a} e^{-ika} - 2i\kappa k \sinh(\kappa a) e^{-\kappa a} e^{-ika}}{(\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa a) - 2i\kappa k \cosh(\kappa a)}$$

usando as relações (3.12), obtemos

$$D = \frac{-2i\kappa k [(e^{\kappa a} + e^{-\kappa a})/2 + (e^{\kappa a} - e^{-\kappa a})/2] e^{-\kappa a} e^{-ika}}{(\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa a) - 2i\kappa k \cosh(\kappa a)}$$

$$D = \frac{-2i\kappa k e^{-ika}}{(\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa a) - 2i\kappa k \cosh(\kappa a)} \quad (3.14)$$

Através das equações (3.8) e (3.9) encontramos

$$B = \frac{(\kappa - ik)}{2\kappa} D e^{ika} e^{\kappa a} \quad (3.15)$$

$$C = \frac{(\kappa + ik)}{2\kappa} D e^{ika} e^{-\kappa a} \quad (3.16)$$

A amplitude de transmissão é encontrada através de

$$T = |D|^2 = D^* D \quad (3.17)$$

onde D é dado por (3.14).

$$T = \frac{2i\kappa k e^{ika}}{(\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa a) + 2i\kappa k \cosh(\kappa a)} \times$$

$$\times \frac{-2i\kappa k e^{-ika}}{(\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa a) - 2i\kappa k \cosh(\kappa a)}$$

$$T = \frac{4k^2 \kappa^2}{(\kappa^2 - k^2)^2 \sinh^2(\kappa a) + 4k^2 \kappa^2 \cosh^2(\kappa a)}$$

$$T = \frac{4k^2 \kappa^2}{(\kappa^4 - 2k^2 \kappa^2 + k^4) \sinh^2(\kappa a) + 4k^2 \kappa^2 \cosh^2(\kappa a)}$$

$$T = \frac{4k^2\kappa^2}{\kappa^4 \sinh^2(\kappa a) - 2k^2\kappa^2 \sinh^2(\kappa a) + k^4 \sinh^2(\kappa a) + 4k^2\kappa^2 (1 + \sinh^2(\kappa a))}$$

$$T = \frac{4k^2\kappa^2}{\kappa^4 \sinh^2(\kappa a) - 2k^2\kappa^2 \sinh^2(\kappa a) + k^4 \sinh^2(\kappa a) + 4k^2\kappa^2 + 4k^2\kappa^2 \sinh^2(\kappa a)}$$

$$T = \frac{4k^2\kappa^2}{(\kappa^2 + k^2)^2 \sinh^2(\kappa a) + 4k^2\kappa^2}$$

sendo $\kappa^2 + k^2 = k_0^2 = 2mV_0/\hbar^2$, obtemos

$$T = \frac{4k^2\kappa^2}{k_0^4 \sinh^2(\kappa a) + 4k^2\kappa^2} \quad (3.18)$$

Para o amplitude de reflexão, temos

$$R = |A|^2 = A \cdot A$$

onde o coeficiente A é dado por (3.13)

$$R = \frac{-(\kappa^2 + k^2) \sinh(\kappa a)}{(\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa a) + 2i\kappa\kappa \cosh(\kappa a)} \times \frac{-(\kappa^2 + k^2) \sinh(\kappa a)}{(\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa a) - 2i\kappa\kappa \cosh(\kappa a)}$$

$$R = \frac{(\kappa^2 + k^2)^2 \sinh^2(\kappa a)}{(\kappa^2 - k^2)^2 \sinh^2(\kappa a) + 4k^2\kappa^2 \cosh^2(\kappa a)}$$

onde $\cosh^2(\kappa a) = 1 + \sinh^2(\kappa a)$

$$R = \frac{(\kappa^2 + k^2)^2 \sinh^2(\kappa a)}{(\kappa^4 - 2\kappa^2 k^2 + k^4) \sinh^2(\kappa a) + 4k^2\kappa^2 + 4k^2\kappa^2 \sinh^2(\kappa a)}$$

$$R = \frac{(\kappa^2 + k^2)^2 \sinh^2(\kappa a)}{(\kappa^2 + k^2)^2 \sinh^2(\kappa a) + 4k^2\kappa^2}$$

$$R = \frac{k_0^4 \sinh^2(\kappa a)}{4k^2\kappa^2 + k_0^4 \sinh^2(\kappa a)} \quad (3.19)$$

A Figura 3-2 mostra que a transmissão T é muito pequena para $k \ll k_0$ e vai

aumentando à medida que k se aproxima de k_0 , isto quer dizer que a probabilidade da partícula ser transmitida é bem maior. Como era esperado para a reflexão R , ocorre o inverso, isto é, para $k \ll k_0$ temos o máximo de reflexão das partículas e esta reflexão vai diminuindo conforme k se aproxima de k_0 .

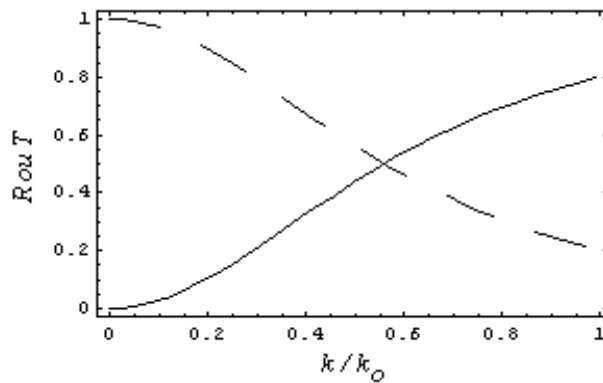


Figura 3-2: Gráfico das amplitudes de reflexão R (linha tracejada) e transmissão T (linha contínua) de uma partícula versus k em unidades de k_0 para uma largura fixa da barreira $a = 1$.

A Figura 3-3 mostra que T tem valor apreciável para barreiras com largura a pequena, facilitando assim o aparecimento de partículas transmitidas através da barreira. Neste caso as chances de partículas refletidas surgirem antes da barreira são bem menores. Já para barreira bem largas R aproxima-se de 1, ou seja, todas as partículas são refletidas, por causa que devido ao aumento de a a barreira tende a tomar a forma de um potencial degrau.

Podemos também escrever os coeficientes D e A na forma polar.

Primeiramente vamos calcular a fase de D (3.14) multiplicando seu numerador e denominador pelo complexo conjugado de seu denominador, ou seja:

$$D = \frac{-2ik\kappa e^{-ika}}{(\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa a) - 2ik\kappa \cosh(\kappa a)} \times \frac{(\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa a) + 2ik\kappa \cosh(\kappa a)}{(\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa a) + 2ik\kappa \cosh(\kappa a)}$$

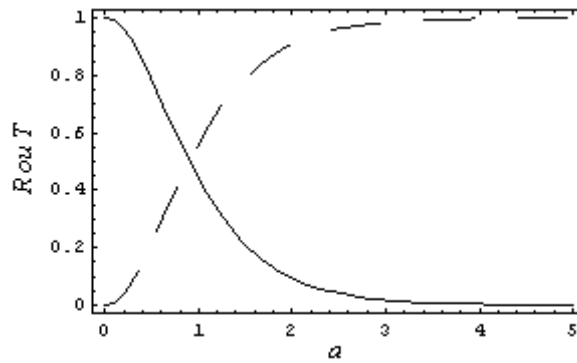


Figura 3-3: Gráfico das amplitudes de reflexão (linha tracejada) e transmissão (linha contínua) para uma partícula versus a largura da barreira (em unidades de k_0^{-1}), para uma energia fixa da partícula $k = 0.5k_0$.

$$D = \frac{-2ik\kappa e^{-ika} [(\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa a) + 2ik\kappa \cosh(\kappa a)]}{(\kappa^2 - k^2)^2 \sinh^2(\kappa a) + 4k^2\kappa^2 \cosh^2(\kappa a)}$$

$$D = \frac{2k\kappa e^{-ika} [2k\kappa \cosh(\kappa a) - i(\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa a)]}{(\kappa^2 - k^2)^2 \sinh^2(\kappa a) + 4k^2\kappa^2 [1 + \sinh^2(\kappa a)]}$$

$$D = \frac{2k\kappa e^{-ika} [2k\kappa \cosh(\kappa a) - i(\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa a)]}{(\kappa^4 - 2k^2\kappa^2 + k^4) \sinh^2(\kappa a) + 4k^2\kappa^2 + 4k^2\kappa^2 \sinh^2(\kappa a)}$$

$$D = \frac{2k\kappa e^{-ika} [2k\kappa \cosh(\kappa a) - i(\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa a)]}{(\kappa^4 + k^4) \sinh^2(\kappa a) + 2k^2\kappa^2 \sinh^2(\kappa a) + 4k^2\kappa^2}$$

$$D = \frac{2k\kappa e^{-ika} [2k\kappa \cosh(\kappa a) - i(\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa a)]}{(\kappa^2 + k^2)^2 \sinh^2(\kappa a) + 4k^2\kappa^2}$$

Separando agora a parte real da complexa, obtemos

$$D = \frac{2k\kappa e^{-ika}}{(\kappa^2 + k^2)^2 \sinh^2(\kappa a) + 4k^2\kappa^2} \times \frac{2k\kappa \cosh(\kappa a) - i(\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa a)}{(\kappa^2 + k^2)^2 \sinh^2(\kappa a) + 4k^2\kappa^2}$$

Portando

$$D = \frac{1}{T} e^{i\beta(k)} e^{-ika} \quad (3.20)$$

onde T é dado na equação (3.18) e

$$e^{i\beta} = \cos \beta + i \sin \beta$$

sendo

$$\cos \beta = \frac{2k\kappa \cosh(\kappa a)}{(\kappa^2 + k^2)^2 \sinh^2(\kappa a) + 4k^2\kappa^2} \kappa^{1/2}$$

e

$$\sin \beta = \frac{-(\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa a)}{(\kappa^2 + k^2)^2 \sinh^2(\kappa a) + 4k^2\kappa^2} \kappa^{1/2}$$

Temos que,

$$\tan \beta = \frac{-(\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa a)}{2k\kappa \cosh(\kappa a)} = \frac{-(\kappa^2 - k^2)}{2k\kappa} \tanh(\kappa a)$$

$$\beta(k) = \arctan \frac{k^2 - \kappa^2}{2k\kappa} \tanh(\kappa a) \quad (3.21)$$

O mesmo procedimento para encontrarmos a fase de D é feito para encontrarmos a fase de A (3.13)

$$A = \frac{-(\kappa^2 + k^2) \sinh(\kappa a)}{(\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa a) - 2ik\kappa \cosh(\kappa a)} \times$$

$$\times \frac{(\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa a) + 2ik\kappa \cosh(\kappa a)}{(\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa a) + 2ik\kappa \cosh(\kappa a)}$$

$$A = \frac{(\kappa^2 + k^2) \sinh(\kappa a) [-(\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa a) - 2ik\kappa \cosh(\kappa a)]}{(\kappa^2 - k^2)^2 \sinh^2(\kappa a) + 4k^2\kappa^2}$$

$$A = \frac{(\kappa^2 + k^2) \sinh(\kappa a) (-i) [2\kappa k \cosh(\kappa a) - i(\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa a)]}{(\kappa^2 - k^2)^2 \sinh^2(\kappa a) + 4k^2 \kappa^2}$$

Sabendo que $e^{-i\pi/2} = \cos(\pi/2) - i \sin(\pi/2) = -i$, temos que

$$A = \frac{(\kappa^2 + k^2) \sinh(\kappa a) e^{-i\pi/2} [2\kappa k \cosh(\kappa a) - i(\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa a)]}{(\kappa^2 - k^2)^2 \sinh^2(\kappa a) + 4k^2 \kappa^2}$$

$$A = \frac{(\kappa^2 + k^2) \sinh(\kappa a) e^{-i\pi/2}}{(\kappa^2 - k^2)^2 \sinh^2(\kappa a) + 4k^2 \kappa^2} \times \frac{[2\kappa k \cosh(\kappa a) - i(\kappa^2 - k^2) \sinh(\kappa a)]}{(\kappa^2 - k^2)^2 \sinh^2(\kappa a) + 4k^2 \kappa^2}$$

e separando novamente a parte real e complexa, obtemos

$$A = \sqrt{\text{Re}}^{i\beta(k)} e^{-i\pi/2} \quad (3.22)$$

onde β é dado pela equação (3.21), e R é dado na equação (3.19).

3.1 Pacote de Ondas Gaussiano para a Barreira Retangular

Vamos agora construir um pacote de ondas que represente a partícula incidente que se desloca com energia $E < V_0$ na direção de uma barreira de potencial e também das partículas após a interação com a barreira, ou seja, as partículas refletidas e transmitidas respectivamente.

Considerando que a partícula incidente esteja localizada para, $t = 0$, a uma distância l da região do potencial, mais precisamente em $x = -l$, que se desloca em direção do potencial com uma certa velocidade \bar{v} . A melhor maneira para representarmos tal partícula é usarmos um pacote de ondas com um pico acentuado (e largura estreita) tanto na distribuição de probabilidade dos momentos $|\varphi(k)|^2$, como na distribuição de

probabilidade espacial $|\psi(x, t)|^2$, ao redor dos valores médios $\bar{k} = m\bar{v}/\hbar$ e \bar{x} , sendo que, $x = -l$ no instante $t = 0$.

Através do pacote de onda (2.4), de uma forma geral podemos especificar a função de onda nas três regiões de interesse

$$\psi(x, t) = \begin{cases} \psi_1(x, t) = \psi_I(x, t) + \psi_R(x, t), & x < 0 \\ \psi_2(x, t) = \psi_{\text{Barreira}}(x, t), & 0 < x < a \\ \psi_3(x, t) = \psi_T(x, t), & x > a \end{cases} \quad (3.23)$$

onde ψ_I , ψ_R e ψ_T indicam os pacotes de ondas incidente, refletido e transmitido, respectivamente.

Na região 1 ($x < 0$), temos os pacotes de ondas incidente e refletido. Consideramos inicialmente que o pacote de ondas incidente tenha uma distribuição de probabilidades gaussiana centrada inicialmente em $x = -l$, desta maneira o pacote incidente tem a forma

$$\psi_I = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_0^{k_0} \varphi(k) e^{ik(x+l) - i\omega(k)t} dk, \quad (3.24)$$

onde a integração em k deve ser limitada em k_0 , uma vez que estamos considerando soluções apenas para $E < V_0$. Com a distribuição de momentos gaussiana [10] dado por

$$\varphi(k) = g \sqrt{k - \bar{k}} = \frac{1}{(2\pi\sigma_k^2)^{1/4}} e^{-(k-\bar{k})^2/4\sigma_k^2}, \quad (3.25)$$

portanto,

$$\psi_I = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_0^{k_0} g \sqrt{k - \bar{k}} e^{i[k(x+l) - \omega(k)t]} dk. \quad (3.26)$$

Obtemos o pacote de ondas refletido com o auxílio de (3.22)

$$\psi_R = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_0^{k_0} g \sqrt{k - \bar{k}} \sqrt{R} e^{i[k(-x+l) + \beta(k) - \pi/2 - \omega(k)t]} dk \quad (3.27)$$

onde R e $\beta(k)$ são definidos pelas equações (3.19) e (3.21).

E finalmente na região 3 ($x > a$), obtemos o pacote de ondas transmitido com o auxílio de (3.20)

$$\psi_T = \frac{1}{2\pi} \int_0^{k_0} g(k) \frac{k - k_0}{k} T e^{ik(x+l-a) + \beta(k) - i\omega(k)t} dk, \quad (3.28)$$

onde T é dado pela equação (3.18).

Capítulo 4

Barreira de Potencial Triangular

A barreira de potencial triangular (Figura 4-1) é de grande interesse na física de semicondutores, pois ele simula a barreira Schottky (interface metal-semicondutor) e também quando aplicamos campo elétrico em heteroestruturas semicondutoras.

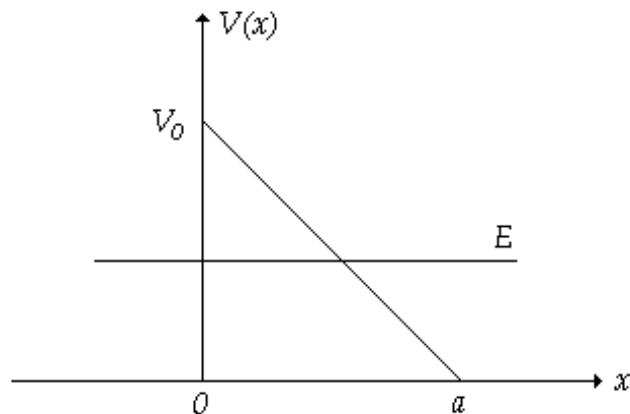


Figura 4-1: Representação unidimensional de uma partícula incidente com energia $E < V_0$ indo em direção de uma barreira triangular com altura V_0 e delimitada pela região de 0 a a .

Considere uma partícula de energia $E < V_0$ incidente indo em direção a uma barreira de potencial $V(x)$ definida por

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 [1 - (x/a)] & 0 \leq x \leq a \\ 0 & x > a \end{cases} \quad (4.1)$$

A equação de Schrödinger independente do tempo na região do potencial é dado por:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V_0 \left[1 - \frac{x}{a}\right] \psi(x) = E\psi(x) \quad (4.2)$$

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k_0^2 \left[\frac{x}{a} + \frac{E}{V_0} - 1 \right] \psi(x) = 0 \quad (4.3)$$

onde $\frac{E}{V_0} = E/V_0$ e $k_0 = \sqrt{2mV_0/\hbar^2}$.

Definimos a quantidade adimensional ξ associada a x através da relação

$$\xi = q_0 \left[\frac{x}{a} + \frac{E}{V_0} - 1 \right], \quad (4.4)$$

onde $q_0 = (k_0 a)^{2/3}$.

Em termos dessa nova variável ξ a equação (4.3) toma a seguinte forma

$$\frac{d^2\Psi(\xi)}{d\xi^2} + \xi\Psi(\xi) = 0 \quad (4.5)$$

que é a equação diferencial de Airy, cuja solução é $\psi(\xi) = BAi(-\xi) + CBi(-\xi)$.

A solução da equação de Schrödinger para o potencial (4.1) é dado por

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} & , x < 0 \\ BAi(-\xi) + CBi(-\xi) & , 0 \leq x \leq a \\ De^{ikx} & , x > a \end{cases} \quad (4.6)$$

Impondo as condições de continuidade das funções de ondas e das suas derivadas primeiras, onde para $x = 0$, vamos encontrar B em função de C . Onde $dAi(-\xi)/d\xi =$

$-(k_0^2/a)^{1/3} Ai^0(-\xi)$ e similarmenete para $Bi^0(-\xi)$.

$$\begin{aligned} \square & \\ \square & \quad 1 + A = BAi(-\xi_0) + CBi(-\xi_0) \\ \square & \quad ik - ikA = -\frac{k_0^2}{a}^{1/3} BAi^0(-\xi_0) - \frac{k_0^2}{a}^{1/3} CBi^0(-\xi_0) \\ \square & \\ \square & \quad 1 + A = BAi(-\xi_0) + CBi(-\xi_0) \\ \square & \quad 1 - A = -\frac{1}{ik} \frac{k_0^2}{a}^{1/3} BAi^0(-\xi_0) - \frac{1}{ik} \frac{k_0^2}{a}^{1/3} CBi^0(-\xi_0) \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$2 = BAi(-\xi_0) - \frac{1}{ik} \frac{\mu k_0^2}{a}^{1/3} BAi^0(-\xi_0) + CBi(-\xi_0) - \frac{1}{ik} \frac{\mu k_0^2}{a}^{1/3} CBi^0(-\xi_0)$$

$$2ik = ikBAi(-\xi_0) - \frac{\mu k_0^2}{a}^{1/3} BAi^0(-\xi_0) + ikCBi(-\xi_0) - \frac{\mu k_0^2}{a}^{1/3} CBi^0(-\xi_0)$$

onde introduzimos as funções auxiliares

$$f(\xi) = ikAi(-\xi) - \frac{\mu k_0^2}{a}^{1/3} Ai^0(-\xi) \text{ e}$$

$$g(\xi) = ikBi(-\xi) - \frac{\mu k_0^2}{a}^{1/3} Bi^0(-\xi)$$

portanto,

$$B = \frac{2ik - Cg(\xi_0)}{f(\xi_0)} \quad (4.8)$$

Já para $x = a$, temos

$$\begin{aligned} \square & \\ \square & \quad De^{ika} = BAi(-\xi_a) + CBi(-\xi_a) \\ \square & \quad ikDe^{ika} = -\frac{k_0^2}{a}^{1/3} BAi^0(-\xi_a) - \frac{k_0^2}{a}^{1/3} CBi^0(-\xi_a) \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \square & \\ \square & \quad -De^{ika} = -BAi(-\xi_a) - CBi(-\xi_a) \\ \square & \quad De^{ika} = -\frac{1}{ik} \frac{k_0^2}{a}^{1/3} BAi^0(-\xi_a) - \frac{1}{ik} \frac{k_0^2}{a}^{1/3} CBi^0(-\xi_a) \end{aligned}$$

$$-ikBAi(-\xi_a) - \frac{\mu k_0^2}{a}^{1/3} BAi^0(-\xi_a) - ikCBi(-\xi_a) - \frac{\mu k_0^2}{a}^{1/3} CBi^0(-\xi_a) = 0$$

$$Bf^{\square}(\xi_a) + Cg^{\square}(\xi_a) = 0$$

usando (4.8)

$$\frac{2ik - Cg(\xi_0)}{f(\xi_0)} f^{\square}(\xi_a) + Cg^{\square}(\xi_a) = 0$$

$$2ikf^{\square}(\xi_a) - Cg(\xi_0)f^{\square}(\xi_a) + Cg^{\square}(\xi_a)f(\xi_0) = 0$$

$$C[g^{\square}(\xi_a)f(\xi_0) - g(\xi_0)f^{\square}(\xi_a)] = -2ikf^{\square}(\xi_a)$$

definindo Δ como

$$\Delta = g(\xi_0)f^{\square}(\xi_a) - f(\xi_0)g^{\square}(\xi_a)$$

portanto,

$$C(-\Delta) = -2ikf^{\square}(\xi_a)$$

$$C = \frac{2ikf^{\square}(\xi_a)}{\Delta} \tag{4.10}$$

Assim podemos determinar B em (4.8) com o auxilio de (4.10)

$$B = \frac{2ik}{f(\xi_0)} - \frac{1}{f(\xi_0)} \frac{2ikf^{\square}(\xi_a)}{\Delta} g(\xi_0)$$

$$B = \frac{2ik\Delta - 2ikf^{\square}(\xi_a)g(\xi_0)}{\Delta f(\xi_0)}$$

$$B = \frac{2ik[g(\xi_0)f^{\square}(\xi_a) - f(\xi_0)g^{\square}(\xi_a) - f^{\square}(\xi_a)g(\xi_0)]}{\Delta f(\xi_0)}$$

$$B = \frac{-2ikg^{\square}(\xi_a)}{\Delta} \tag{4.11}$$

Substituindo (4.10) e (4.11) na equação primeira equação em (4.7), obtemos

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{-2ikg^{\square}(\xi_a)^{\rightarrow}}{\Delta} Ai(-\xi_0) + \frac{2ikf^{\square}(\xi_a)^{\rightarrow}}{\Delta} Bi(-\xi_0) - 1 \\
 A &= \frac{-2ikg^{\square}(\xi_a)Ai(-\xi_0) + 2ikf^{\square}(\xi_a)Bi(-\xi_0) - \Delta}{\Delta} \\
 A &= \frac{-2ikg^{\square}(\xi_a)Ai(-\xi_0) + 2ikf^{\square}(\xi_a)Bi(-\xi_0) - \Delta}{\Delta} \\
 A &= \frac{-2ikg^{\square}(\xi_a)Ai(-\xi_0) + 2ikf^{\square}(\xi_a)Bi(-\xi_0) - g(\xi_0)f^{\square}(\xi_a) + f(\xi_0)g^{\square}(\xi_a)}{\Delta} \\
 A &= \frac{g^{\square}(\xi_a)[-2ikAi(-\xi_0) + f(\xi_0)] - f^{\square}(\xi_a)[-2ikBi(-\xi_0) + g(\xi_0)]}{\Delta} \\
 A &= \frac{g^{\square}(\xi_a) - 2ikAi(-\xi_0) + ikAi(-\xi_0) - \frac{k_0^2}{a}^{1/3} Ai^{\vee}(-\xi_0)}{\Delta} + \\
 &\quad - \frac{f^{\square}(\xi_a) - 2ikBi(-\xi_0) + ikBi(-\xi_0) - \frac{k_0^2}{a}^{1/3} Bi^{\vee}(-\xi_0)}{\Delta} \\
 A &= \frac{g^{\square}(\xi_a)f^{\square}(\xi_0) - f^{\square}(\xi_a)g^{\square}(\xi_0)}{\Delta} \tag{4.12}
 \end{aligned}$$

Voltando em (4.9) e novamente com o auxílio de (4.10) e (4.11), podemos determinar

D.

$$\begin{aligned}
 \square & \\
 \square & \quad De^{ika} = BAi(-\xi_a) + CBi(-\xi_a) \\
 \square & \quad De^{ika} = -\frac{1}{ik} \frac{k_0^2}{a}^{1/3} BAi^{\vee}(-\xi_a) - \frac{1}{ik} \frac{k_0^2}{a}^{1/3} CBi^{\vee}(-\xi_a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2De^{ika} &= B \quad Ai(-\xi_a) - \frac{1}{ik} \frac{k_0^2}{a}^{1/3} BAi^{\vee}(-\xi_a) + \\
 &\quad + C \quad Bi(-\xi_a) - \frac{1}{ik} \frac{k_0^2}{a}^{1/3} CBi^{\vee}(-\xi_a)
 \end{aligned}$$

$$2De^{ika} = \frac{-2ikg^{\square}(\xi_a)}{\Delta} Ai(-\xi_a) - \frac{1}{ik} \frac{\mu k_0^2}{a} \Pi^{1/3} BAi^{\square}(-\xi_a) + \\ + \frac{2ikf^{\square}(\xi_a)}{\Delta} Bi(-\xi_a) - \frac{1}{ik} \frac{\mu k_0^2}{a} \Pi^{1/3} CBi^{\square}(-\xi_a)$$

$$De^{ika} = \frac{-g^{\square}(\xi_a)}{\Delta} ikAi(-\xi_a) - \frac{\mu k_0^2}{a} \Pi^{1/3} BAi^{\square}(-\xi_a) + \\ + \frac{f^{\square}(\xi_a)}{\Delta} ikBi(-\xi_a) - \frac{\mu k_0^2}{a} \Pi^{1/3} CBi^{\square}(-\xi_a)$$

$$D = \frac{f^{\square}(\xi_a)g(\xi_a) - g^{\square}(\xi_a)f(\xi_a)}{\Delta} e^{-ika} \quad (4.13)$$

calculando os produtos do numerador da equação acima:

$$f^{\square}(\xi_a)g(\xi_a) = k^2 Ai(-\xi_a)Bi(-\xi_a) + ik \frac{\mu k_0^2}{a} \Pi^{1/3} [Ai(-\xi_a)Bi^{\square}(-\xi_a) - Ai^{\square}(-\xi_a)Bi(-\xi_a)] + \\ + \frac{\mu k_0^2}{a} \Pi^{2/3} Ai^{\square}(-\xi_a)Bi^{\square}(-\xi_a)$$

onde o Wronskiano $W(Ai, Bi)$ é dado por

$$W(Ai, Bi) = \begin{vmatrix} Ai(-\xi_a) & Bi(-\xi_a) \\ Ai^{\square}(-\xi_a) & Bi^{\square}(-\xi_a) \end{vmatrix} \\ W(Ai, Bi) = Ai(-\xi_a)Bi^{\square}(-\xi_a) - Ai^{\square}(-\xi_a)Bi(-\xi_a) = 1/\pi.$$

Então

$$f^{\square}(\xi_a)g(\xi_a) = k^2 Ai(-\xi_a)Bi(-\xi_a) + \frac{ik}{\pi} \frac{\mu k_0^2}{a} \Pi^{1/3} + \frac{\mu k_0^2}{a} \Pi^{2/3} Ai^{\square}(-\xi_a)Bi^{\square}(-\xi_a) \quad (4.14)$$

e

$$g^{\square}(\xi_a)f(\xi_a) = k^2 Ai(-\xi_a)Bi(-\xi_a) - \frac{ik}{\pi} \frac{\mu k_0^2}{a} \Pi^{1/3} + \frac{\mu k_0^2}{a} \Pi^{2/3} Ai^{\square}(-\xi_a)Bi^{\square}(-\xi_a) \quad (4.15)$$

e substituindo (4.14) e (4.15) em (4.13), obtemos finalmente

$$D = \frac{2ik}{\pi\Delta} \mu \frac{k_0^2}{a} \pi^{1/3} e^{-ika} \quad (4.16)$$

Onde usamos

$$\xi_0 = \xi(x=0) = q_0(-1) \quad (4.17)$$

$$\xi_a = \xi(x=a) = q_0$$

O próximo passo é calcularmos as amplitudes de reflexão(R) e de transmissão(T). A amplitude de reflexão R é

$$R = |A|^2 = A^* A$$

e para calcularmos R vamos ao auxílio de (4.12) e substituímos na equação acima

$$\begin{aligned} R &= A^* A = \frac{\mu}{\Delta^*} \frac{g(\xi_a) f(\xi_0) - f(\xi_a) g(\xi_0)}{\Delta} \mu \frac{g^*(\xi_a) f^*(\xi_0) - f^*(\xi_a) g^*(\xi_0)}{\Delta} \\ &= \frac{1}{|\Delta|^2} [g(\xi_a) g^*(\xi_a) f(\xi_0) f^*(\xi_0) - f^*(\xi_a) g(\xi_a) f(\xi_0) g^*(\xi_0)] + \\ &\quad - \frac{1}{|\Delta|^2} [f(\xi_a) g^*(\xi_a) f^*(\xi_0) g(\xi_0) - g(\xi_0) g^*(\xi_0) f(\xi_a) f^*(\xi_a)] \end{aligned} \quad (4.18)$$

Calculando os produtos da equação acima e introduzindo a equação auxiliar

$$F(A_i, B_i, \xi) = \frac{\pi^2 a}{k} k^2 A_i(-\xi) B_i(-\xi) + \frac{\mu}{a} \frac{k_0^2}{\pi^{2/3}} A_i^0(-\xi) B_i^0(-\xi), \quad (4.19)$$

obtemos as relações

$$\begin{aligned}
g(\xi_a)g^\square(\xi_a) &= \frac{\mu}{\pi^2 a} \frac{k}{\pi} F(Bi, Bi, \xi_a) \\
f(\xi_0)f^\square(\xi_0) &= \frac{\mu}{\pi^2 a} \frac{k}{\pi} F(Ai, Ai, \xi_0) \\
f^\square(\xi_a)g(\xi_a) &= \frac{\mu}{\pi^2 a} \frac{k}{\pi} F(Ai, Bi, \xi_a) + \frac{ik}{\pi} \frac{\mu}{a} k_0^2 \pi^{2/3} \\
f(\xi_0)g^\square(\xi_0) &= \frac{\mu}{\pi^2 a} \frac{k}{\pi} F(Ai, Bi, \xi_0) - \frac{ik}{\pi} \frac{\mu}{a} k_0^2 \pi^{2/3} \\
f(\xi_a)g^\square(\xi_a) &= \frac{\mu}{\pi^2 a} \frac{k}{\pi} F(Ai, Bi, \xi_a) - \frac{ik}{\pi} \frac{\mu}{a} k_0^2 \pi^{2/3} \\
f^\square(\xi_0)g(\xi_0) &= \frac{\mu}{\pi^2 a} \frac{k}{\pi} F(Ai, Bi, \xi_0) + \frac{ik}{\pi} \frac{\mu}{a} k_0^2 \pi^{2/3} \\
g(\xi_0)g^\square(\xi_0) &= \frac{\mu}{\pi^2 a} \frac{k}{\pi} F(Bi, Bi, \xi_0) \\
f(\xi_a)f^\square(\xi_a) &= \frac{\mu}{\pi^2 a} \frac{k}{\pi} F(Ai, Ai, \xi_a)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

usando estas relações em (4.20) em (4.18),obtemos

$$\begin{aligned}
R &= \frac{1}{|\Delta|^2} \frac{\mu}{\pi^2 a} \frac{k}{\pi} F(Bi, Bi, \xi_a) F(Ai, Ai, \xi_0) + \\
&\quad - \frac{1}{|\Delta|^2} \frac{\mu}{\pi^2 a} \frac{k}{\pi} F(Ai, Bi, \xi_a) + \frac{ik}{\pi} \frac{\mu}{a} k_0^2 \pi^{2/3} \times \\
&\quad \times \frac{\mu}{\pi^2 a} \frac{k}{\pi} F(Ai, Bi, \xi_0) - \frac{ik}{\pi} \frac{\mu}{a} k_0^2 \pi^{2/3} + \\
&\quad - \frac{1}{|\Delta|^2} \frac{\mu}{\pi^2 a} \frac{k}{\pi} F(Ai, Bi, \xi_a) - \frac{ik}{\pi} \frac{\mu}{a} k_0^2 \pi^{2/3} \times \\
&\quad \times \frac{\mu}{\pi^2 a} \frac{k}{\pi} F(Ai, Bi, \xi_0) + \frac{ik}{\pi} \frac{\mu}{a} k_0^2 \pi^{2/3} + \\
&\quad + \frac{1}{|\Delta|^2} \frac{\mu}{\pi^2 a} \frac{k}{\pi} F(Ai, Ai, \xi_a) F(Bi, Bi, \xi_0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R = & \frac{1}{|\Delta|^2} \frac{\mu}{\pi^2 a} k \pi l_2 F(Bi, Bi, \xi_a) F(Ai, Ai, \xi_0) + \\
& + \frac{1}{|\Delta|^2} \frac{\mu}{\pi^2 a} k \pi l_2 F(Ai, Ai, \xi_a) F(Bi, Bi, \xi_0) + \\
& - \frac{1}{|\Delta|^2} 2 \frac{\mu}{\pi^2 a} k \pi l_2 [F(Ai, Bi, \xi_a) F(Ai, Bi, \xi_0)] + \\
& - \frac{2}{|\Delta|^2} \frac{\mu}{\pi} k \pi l_2 \frac{\mu}{a} k_0^2 \pi l_2^{2/3}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

onde

$$\begin{aligned}
|\Delta|^2 = & [\frac{\mu}{\pi^2 a} k \pi l_2 (f(\xi_0)g(\xi_a) - f(\xi_a)g(\xi_0))] [\frac{\mu}{\pi^2 a} k \pi l_2 (f(\xi_0)g(\xi_a) - f(\xi_a)g(\xi_0))] \\
= & \frac{\mu}{\pi^2 a} k \pi l_2 [F(Bi, Bi, \xi_a) F(Ai, Ai, \xi_0) + F(Bi, Bi, \xi_0) F(Ai, Ai, \xi_a)] \\
& - 2 \frac{\mu}{\pi^2 a} k \pi l_2 F(Ai, Bi, \xi_a) F(Ai, Bi, \xi_0) + 2 \frac{\mu}{\pi} k \pi l_2 \frac{\mu}{a} k_0^2 \pi l_2^{2/3}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

usando o valor de $|\Delta|^2$ em (4.21), obtemos

$$\begin{aligned}
R = & \frac{1}{|\Delta|^2} |\Delta|^2 - 4 \frac{\mu}{\pi} k \pi l_2 \frac{\mu}{a} k_0^2 \pi l_2^{2/3} \\
R = & 1 - \frac{4}{|\Delta|^2} \frac{\mu}{\pi} k \pi l_2 \frac{\mu}{a} k_0^2 \pi l_2^{2/3}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Através da equação (4.16) podemos calcular a amplitude de transmissão T através da relação:

$$\begin{aligned}
T = & |D|^2 \\
T = & \frac{-2ik}{\pi \Delta} \frac{\mu}{a} k_0^2 \pi l_2^{1/3} e^{ika} \times \frac{2ik}{\pi \Delta} \frac{\mu}{a} k_0^2 \pi l_2^{1/3} e^{-ika}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

$$T = \frac{4 \mu k \pi^2 \mu k_0^2 \pi^{2/3}}{|\Delta|^2} \quad (4.25)$$

onde $|\Delta|^2$ é dado por (4.22)

A Figura 4-2 mostra as amplitudes R e T em função da energia da partícula para uma barreira triangular, onde podemos notar que quando $k \ll k_0$, T tem valores muito pequenos, ou seja, a probabilidade de transmissão de partículas através da barreira é muito baixa nesta região os valores de R neste caso são muito maiores que T, as chances das partículas serem refletidas são bem maiores. Para energias $k \approx k_0$, R tem valores insignificantes se comparados aos valores de T, portanto a chance de transmissão neste caso são bem maiores.

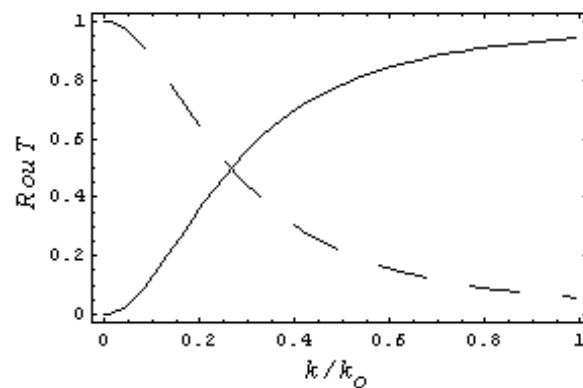


Figura 4-2: Gráfico das amplitudes de reflexão R (linha tracejada) e transmissão T (linha contínua) versus k (energia da partícula em unidades de k_0) para uma barreira triangular com largura fixa $a = 1$.

Na Figura 4-3 mostra os mesmos coeficientes em função da largura da barreira a para $k = 0.5k_0$. Onde a medida que a largura da barreira aumenta a amplitude de transmissão T cai e vai tender a zero quando a aumentar tanto até que a barreira se assemelhe à um potencial degrau.

Como foi feito para a barreira retangular, podemos escrever A e D na forma polar e

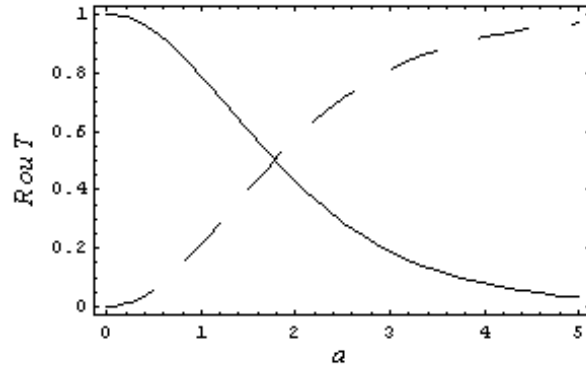


Figura 4-3: Gráfico das amplitudes de reflexão R (linha tracejada) e transmissão T (linha contínua) para a barreira triangular em função da largura a (em unidades de k_0^{-1}), com energia fixa $k = 0.5k_0$.

reescrevemos Δ como um número complexo, onde

$$\Delta = g(\xi_0) f^{\square}(\xi_a) - f(\xi_0) g^{\square}(\xi_a)$$

e usando (4.14) e (4.15), obtemos

$$\begin{aligned} \Delta = & k^2 [Ai(-\xi_a) Bi(-\xi_0) - Ai(-\xi_0) Bi(-\xi_a)] + \\ & + ik \frac{q_0}{a} [-Ai^{\circ}(-\xi_a) Bi(-\xi_0) + Ai(-\xi_a) Bi^{\circ}(-\xi_0) + \\ & + Ai(-\xi_0) Bi^{\circ}(-\xi_a) - Ai^{\circ}(-\xi_0) Bi(-\xi_a)] + \\ & + \frac{q_0}{a}^2 [Ai^{\vee}(-\xi_a) Bi^{\vee}(-\xi_0) - Ai^{\vee}(-\xi_0) Bi^{\vee}(-\xi_a)] \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \text{Re } \Delta = & k^2 [Ai(-\xi_a) Bi(-\xi_0) - Ai(-\xi_0) Bi(-\xi_a)] + \\ & + \frac{q_0}{a}^2 [Ai^{\vee}(-\xi_a) Bi^{\vee}(-\xi_0) - Ai^{\vee}(-\xi_0) Bi^{\vee}(-\xi_a)] \end{aligned} \quad (4.26)$$

e

$$\begin{aligned} \text{Im } \Delta = k \frac{q_0}{a} [& \text{Ai}(-\xi_a) \text{Bi}^0(-\xi_0) - \text{Ai}^0(-\xi_a) \text{Bi}(-\xi_0) + \\ & + \text{Ai}(-\xi_0) \text{Bi}^0(-\xi_a) - \text{Ai}^0(-\xi_0) \text{Bi}(-\xi_a)] \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde introduzimos as quantidades auxiliares:

$$\begin{aligned} R_1 &= \text{Ai}(-\xi_0) \text{Bi}(-\xi_a) - \text{Ai}(-\xi_a) \text{Bi}(-\xi_0) \\ R_2 &= \frac{q_0}{k_0 a} [\text{Ai}^0(-\xi_a) \text{Bi}^0(-\xi_0) - \text{Ai}^0(-\xi_0) \text{Bi}^0(-\xi_a)] \\ I_1 &= \frac{q_0}{k_0 a} [\text{Ai}(-\xi_a) \text{Bi}^0(-\xi_0) - \text{Ai}^0(-\xi_0) \text{Bi}(-\xi_a)] \\ I_2 &= \frac{q_0}{k_0 a} [\text{Ai}^0(-\xi_a) \text{Bi}(-\xi_0) - \text{Ai}(-\xi_0) \text{Bi}^0(-\xi_a)] \end{aligned} \quad (4.28)$$

e $q_0 = (k_0 a)^{2/3}$, obtemos para o número complexo Δ

$$\Delta = \text{Re } \Delta + i \text{Im } \Delta \quad (4.29)$$

$$\Delta = k_0^2 [(R_2 - R_1) + i(I_1 - I_2)], \quad (4.30)$$

com o uso de (4.30) podemos reescrever A, equação (4.12):

$$\begin{aligned} A &= \frac{g^{\square}(\xi_a) f^{\square}(\xi_0) - f^{\square}(\xi_a) g^{\square}(\xi_0)}{\Delta} \\ &= \frac{1}{\Delta} \left\{ -ik \text{Bi}(-\xi_a) - \frac{q_0}{a} \text{Bi}^0(-\xi_a) - ik \text{Ai}(-\xi_0) - \frac{q_0}{a} \text{Ai}^0(-\xi_0) + \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Delta} \left\{ -ik \text{Ai}(-\xi_a) - \frac{q_0}{a} \text{Ai}^0(-\xi_a) - ik \text{Bi}(-\xi_0) - \frac{q_0}{a} \text{Bi}^0(-\xi_0) \right\} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\Delta} \{ -k^2 \text{Ai}(-\xi_0) \text{Bi}(-\xi_a) + ik (q_0/a) \text{Ai}^0(-\xi_0) \text{Bi}(-\xi_a) \\ &\quad + ik (q_0/a) \text{Ai}(-\xi_0) \text{Bi}^0(-\xi_a) + (q_0/a)^2 \text{Ai}^0(-\xi_0) \text{Bi}^0(-\xi_a) + \\ &\quad - [-k^2 \text{Ai}(-\xi_a) \text{Bi}(-\xi_0) + ik (q_0/a) \text{Ai}(-\xi_a) \text{Bi}^0(-\xi_0) + \\ &\quad + ik (q_0/a) \text{Ai}^0(-\xi_a) \text{Bi}(-\xi_0) + (q_0/a)^2 \text{Ai}^0(-\xi_a) \text{Bi}^0(-\xi_0)] \} \end{aligned}$$

e com o auxílio de (4.28), obtemos

$$A = \frac{k_0^2 [-(R_1 + R_2) - i(I_1 + I_2)]}{\Delta}$$

e definindo

$$N_A = k_0^2 [(R_1 + R_2) + i(I_1 + I_2)], \quad (4.31)$$

escrevemos A na forma

$$A = -\frac{N_A}{\Delta} \quad (4.32)$$

Para obtermos a fase de A devemos reescrever N_A e Δ na forma polar, de modo que utilizando N_A escrito na forma da equação (4.31) e escrevendo na forma polar

$$N_A = |N_A| e^{i\alpha} = |N_A| (\cos \alpha + i \sin \alpha) = k_0^2 [(R_1 + R_2) + i(I_1 + I_2)] \quad (4.33)$$

onde a fase α é dada por

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{I_1 + I_2}{R_1 + R_2} \quad (4.34)$$

e o módulo $|N_A|$ por

$$\begin{aligned} |N_A| &= \sqrt{N_A^* N_A} \\ &= \sqrt{k_0^4 [(R_1 + R_2) - i(I_1 + I_2)] [(R_1 + R_2) + i(I_1 + I_2)]} \\ &= k_0^2 \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (I_1 + I_2)^2} \end{aligned} \quad (4.35)$$

escrevendo Δ , equação (4.30) na forma polar

$$\Delta = |\Delta| e^{i\lambda} = |\Delta| (\cos \lambda + i \sin \lambda) = k_0^2 [(R_2 - R_1) + i(I_1 - I_2)] \quad (4.36)$$

de forma que a fase λ é dada por

$$\tan \lambda = \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda} = \frac{I_1 - I_2}{R_2 - R_1}. \quad (4.37)$$

e

$$\begin{aligned} |\Delta| &= \sqrt{\Delta \Delta^*} \\ &= \sqrt{k_0^4 [(R_2 - R_1) + i(I_1 - I_2)][(R_2 - R_1) - i(I_1 - I_2)]} \\ &= k_0^2 \sqrt{(R_2 - R_1)^2 + (I_1 - I_2)^2} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Agora com o auxílio de (4.33) e (4.36), escrevemos o coeficiente de reflexão A na forma polar:

$$A = -\frac{|N_A| e^{i\alpha}}{|\Delta| e^{i\lambda}} = -\frac{|N_A|}{|\Delta|} e^{i(\alpha-\lambda)} \quad (4.39)$$

onde α e λ são dados por (4.34) e (4.37), respectivamente.

Para encontrarmos a fase de D, da equação (4.16) fazemos

$$\begin{aligned} D &= \frac{2ik_0 \Delta^*}{a\pi \Delta} e^{-ika} \\ D &= \frac{2ik_0}{a\pi |\Delta|^2} \Delta^* e^{-ika} \\ D &= \frac{2ik_0}{a\pi |\Delta|^2} k_0^2 [(R_2 - R_1) - i(I_1 - I_2)] e^{-ika} \end{aligned}$$

usando $i = \cos \pi/2 + i \sin \pi/2 = e^{i\pi/2}$ na fração, e a relação

$$\Delta^\square = |\Delta| e^{-i\lambda} = |\Delta| (\cos \lambda - i \sin \lambda) = k_0^2 [(R_2 - R_1) - i (I_1 - I_2)], \quad (4.40)$$

obtemos finalmente D na forma polar,

$$D = \frac{2kq_0}{a\pi |\Delta|} e^{-i\lambda} e^{-ika} e^{i\pi/2}, \quad (4.41)$$

onde λ é dado pela equação (4.37), e $|\Delta|$ é dado pela equação (4.38).

4.1 Pacote de Ondas Gaussiano para Barreira Triangular

Usando o mesmo procedimento da barreira retangular, utilizamos o pacote de ondas dado por (2.4) em $t = 0$ a probabilidade de encontrarmos uma partícula é dada por uma distribuição gaussiana centrada em $x(0) = -l$, e o pico move-se com velocidade de grupo v_g dada por (2.12). E através de (2.4) e (3.23) podemos especificar as funções de ondas nas regiões de interesse. Na região 1 ($x < 0$), temos os pacotes de ondas incidente (3.26) e refletido. Consideramos inicialmente que o pacote de ondas incidente tenha uma distribuição de probabilidades gaussiana centrada inicialmente em $x = -l$, desta maneira o pacote incidente tem a forma

$$\psi_I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k - k_0) e^{i[kx - \omega(k)t]} dk \quad (4.42)$$

onde $g(k - k_0)$ é dado por (3.25)

O pacote de ondas refletido com o auxílio de (4.39) é dado por

$$\begin{aligned} \psi_R &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{-i\phi} e^{-\frac{|N_A|}{|\Delta|}} e^{i(\alpha-\lambda)} e^{-ikx} e^{-i\omega(k)t} dk \\ \psi_R &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{-i\phi} e^{-\frac{|N_A|}{|\Delta|}} e^{-i(-\alpha+\lambda+kx+\omega(k)t)} dk \end{aligned} \quad (4.43)$$

E finalmente para a região 3 ($x > a$), o pacote de ondas transmitido com a ajuda de (4.41) é dado por

$$\psi_T = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} g(k) e^{-i\phi} e^{\frac{2kq_0}{a\pi|\Delta|}} e^{i[-\lambda-ka+\pi/2+kx-\omega(k)t]} dk. \quad (4.44)$$

Capítulo 5

Tempos de Tunelamento

Nesta secção vamos definir o tempo de permanência, o tempo de fase e o tempo semi-clássico.

5.1 Tempo de Permanência (Dwell Time)

O tempo de permanência¹ [6, 4, 5, 15] é o tempo que uma partícula interage no interior da barreira até o momento em que escapa da mesma. A partícula pode escapar da barreira por qualquer um dos lados, ou seja, reflexão ou transmissão. O tempo de permanência é dado por

$$\tau_D = \frac{1}{j_I} \int_B \rho(x) dx, \quad (5.1)$$

e o fluxo incidente j_I é:

$$j_I = \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi_I^* \frac{\partial \psi_I}{\partial x} - \psi_I \frac{\partial \psi_I^*}{\partial x} \right). \quad (5.2)$$

¹o tempo de permanência pode ser definido usando-se a técnica das integrais de trajetória de Feynman, que também foi definido por Hauge et al.[4] (vide apêndice).

A função de onda da partícula incidente é dada por $\Psi_I = e^{ikx}$, portanto

$$j_I = \frac{\hbar k}{m}. \quad (5.3)$$

De (5.3) e (5.1), obtemos

$$\tau_D = \frac{m}{\hbar k} \int_B \rho(x) dx = \frac{m}{\hbar k} \int_B |\psi|^2 dx, \quad (5.4)$$

que é o tempo médio de permanência para uma partícula no autoestado descrito por uma função de onda $\psi_k(x, t)$.

5.2 Tempo de Fase

O tempo de fase [14, 2, 10] para o processo de espalhamento pode ser calculado, tomando como referência o pico do pacote de onda incidente via o método da fase estacionária. O tempo é tomado a partir do instante em que o pico do pacote incidente choca-se com a barreira de potencial, até o surgimento dos picos dos pacotes de ondas refletido e transmitido. Se um pacote de onda com um momento de distribuição largo chocar-se com a barreira, o pacote de onda transmitido mostrará uma distribuição de momento mais alta. Assim o pacote transmitido move-se mais rápido que o pacote incidente. Como o momento é conservado o pacote refletido terá uma distribuição de momento mais baixo que o pacote incidente.

Considere um pacote de ondas com um número k bem distribuído na barreira. O pacote transmitido é descrito

$$\psi_T(x, t) = \int \overline{T(k)} e^{i\alpha(k)} e^{ikx} e^{-iE(k)t} dk \quad (5.5)$$

Na aproximação da fase estacionária [5, 10] o pacote é dado por

$$\frac{df_T}{dk} = 0 \quad (5.6)$$

$$\frac{d}{dk} \left[\alpha(k) + kx - \frac{E(k)t}{\hbar} \right] = 0$$

$$\frac{d\alpha(k)}{dk} + x_p(t) - \frac{1}{\hbar} \frac{dE(k)}{dk} t = 0 \quad (5.7)$$

onde $x \equiv x_p(t)$ que é o pico do pacote.

Portanto o processo de tunelamento causa um atraso espacial

$$\delta x = \frac{d\alpha(k)}{dk}, \quad (5.8)$$

e um atraso temporal

$$\begin{aligned} \delta t_T &= \hbar \frac{d\alpha(k)}{dE} = \frac{1}{v(k)} \frac{dE}{dk} \frac{d\alpha(k)}{dE} = \frac{1}{v(k)} \frac{d\alpha(k)}{dk} \\ &= \frac{m}{\hbar k} \frac{d\alpha(k)}{dk} \end{aligned} \quad (5.9)$$

sendo $v(k) = (\hbar)^{-1} (dE/dk)$ a velocidade de grupo dada por (2.12).

5.3 Tempo de Tunelamento Semiclássico[8]

A equação de movimento unidimensional de uma partícula clássica com velocidade v é

$$dx = v dt, \quad (5.10)$$

onde a velocidade da partícula $v(x, t)$ é dada por

$$v(x, t)|_{x=x(t)} = \frac{dx(t)}{dt}. \quad (5.11)$$

Do ponto de vista da mecânica quântica, para o estado estacionário temos uma função de onda $\psi(x, t) = \psi(x)$ associada com uma densidade de probabilidade $\rho(x) = |\psi(x)|^2$ independente do tempo. Dessa forma, a equação de continuidade $\partial\rho/\partial t + \partial j/\partial x = 0$, define que o fluxo de probabilidade j é constante.

O campo de velocidade da partícula independente do tempo é dada por

$$v(x) = \frac{j}{\rho(x)}, \quad (5.12)$$

onde essa velocidade de campo não pode ser identificada como a velocidade da partícula em um dado ponto x .

Substituindo (5.12) em (5.10), obtemos

$$\begin{aligned} dx &= \frac{j}{\rho(x)} dt \quad \square \quad dt = \frac{\rho(x)}{j} dx \\ \Delta t &= \frac{1}{j} \int_B \rho(x) dx \end{aligned} \quad (5.13)$$

A integral espacial de (5.13) pode ser usada para uma determinação semiclássica do tempo gasto por uma partícula para cobrir uma dada distância Δx . Se o intervalo Δx corresponder à região da barreira B ($0 \leq x \leq a$), temos,

$$T_{\text{semicl.}} = \frac{1}{j} \int_B |\psi|^2 dx, \quad (5.14)$$

onde a integral é na região da barreira B.

E o fluxo de probabilidade j é dado por

$$j = \frac{\hbar}{2mi} \left[\psi^*(x) \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} - \psi(x) \frac{\partial \psi^*(x)}{\partial x} \right]. \quad (5.15)$$

5.3.1 Tempo de Transmissão[8]

O tempo de transmissão de uma partícula é o tempo em que a partícula leva para atravessar a barreira de potencial e ser transmitida, onde através de (5.14) temos:

$$T_{\text{semicl.T}} = \frac{1}{j_T} \int_B |\psi|^2 dx. \quad (5.16)$$

Após a partícula atravessar a barreira B ($0 \leq x \leq a$), a função de onda transmitida para $V(x) = 0$ em $x > a$, é $\psi_T = D e^{ikx}$, de forma que obtemos através de (5.15) o fluxo de probabilidade transmitido j_T na forma

$$\begin{aligned} j_T &= \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi_T \frac{\partial \psi_T}{\partial x} - \psi_T \frac{\partial \psi_T}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\hbar k}{m} |D|^2 = \frac{\hbar k}{m} T, \end{aligned} \quad (5.17)$$

onde $|D|^2 = T$ é a amplitude de transmissão.

Desta forma, encontramos

$$T_{\text{semicl.T}} = \frac{m}{\hbar k T} \int_B |\psi|^2 dx \quad (5.18)$$

5.3.2 Tempo de Reflexão[8]

O tempo de reflexão é justamente o tempo que a partícula leva para ser refletida após interagir com a barreira de potencial e utilizando a equação (5.14), temos:

$$T_{\text{semicl.R}} = \frac{1}{|j_R|} \int_B |\psi|^2 dx, \quad (5.19)$$

onde o fluxo refletido j_R é dado por

$$j_R = \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi_R \frac{\partial \psi_R}{\partial x} - \psi_R \frac{\partial \psi_R}{\partial x} \right). \quad (5.20)$$

Após chocar-se com a barreira B, a função de onda da partícula refletida para $V(x) = 0$ em $x < 0$ é $\psi_R = Ae^{-ikx}$, onde A é a coeficiente de reflexão. Sendo assim, o fluxo de probabilidade j_R é

$$j_R = -\frac{\hbar k}{m} |A|^2 = -\frac{\hbar k}{m} R, \quad (5.21)$$

onde a amplitude de reflexão $|A|^2 = R$.

De (5.21) e (5.19) obtemos

$$T_{\text{semi}.R} = \frac{m}{\hbar k R} \int_B |\psi|^2 dx. \quad (5.22)$$

Capítulo 6

Aplicação dos Tempos de Tunelamento

6.1 Barreira Retangular

Nesta secção faremos uma aplicação dos tempos de tunelamento para uma barreira de potencial retangular.

6.1.1 Tempo de Permanência

Através da equação (5.4) podemos calcular o tempo de permanência de uma partícula que interage com um potencial retangular.

Sendo o número de partículas no interior da barreira, dado por

$$N = \int_B^C \rho(x) dx = \int_0^a |\psi|^2 dx, \quad (6.1)$$

onde a função de onda é dada na equação (3.5) e B e C são dados por (3.15) e (3.16).

Desta forma, temos que

$$|\psi|^2 = \psi^\dagger \psi$$

$$\begin{aligned}
|\psi|^2 &= |B e^{-\kappa x} + C e^{\kappa x}|^2 = |B e^{-\kappa x} + C e^{\kappa x}|^2 \\
&= |B|^2 e^{-2\kappa x} + BC + CB + |C|^2 e^{2\kappa x}
\end{aligned} \tag{6.2}$$

onde

$$\begin{aligned}
|B|^2 &= \left| \frac{\kappa + ik}{2\kappa} D e^{-ika} e^{\kappa a} \right|^2 = \left| \frac{\kappa - ik}{2\kappa} D e^{ika} e^{\kappa a} \right|^2 \\
&= \frac{\kappa^2 + k^2}{4\kappa^2} |D|^2 e^{2\kappa a} = \frac{\kappa^2 + k^2}{4\kappa^2} T e^{2\kappa a} \\
BC &= \frac{\kappa - ik}{2\kappa} D e^{ika} e^{\kappa a} \frac{\kappa - ik}{2\kappa} D e^{-ika} e^{-\kappa a} \\
&= \frac{\kappa^2 - 2ik\kappa - k^2}{4\kappa^2} |D|^2 = \frac{\kappa^2 - 2ik\kappa - k^2}{4\kappa^2} T \\
CB &= \frac{\kappa + ik}{2\kappa} D e^{ika} e^{-\kappa a} \frac{\kappa + ik}{2\kappa} D e^{-ika} e^{\kappa a} \\
&= \frac{\kappa^2 + 2ik\kappa - k^2}{4\kappa^2} |D|^2 = \frac{\kappa^2 + 2ik\kappa - k^2}{4\kappa^2} T \\
|C|^2 &= \left| \frac{\kappa - ik}{2\kappa} D e^{-ika} e^{-\kappa a} \right|^2 = \left| \frac{\kappa + ik}{2\kappa} D e^{ika} e^{-\kappa a} \right|^2 \\
&= \frac{\kappa^2 + k^2}{4\kappa^2} |D|^2 e^{-2\kappa a} = \frac{\kappa^2 + k^2}{4\kappa^2} T e^{-2\kappa a}
\end{aligned} \tag{6.3}$$

usando as equações (6.3) em (6.2)

$$\begin{aligned}
|\psi|^2 &= \frac{T}{4\kappa^2} [\kappa^2 + k^2 e^{2\kappa a} e^{-2\kappa x} + \kappa^2 - 2ik\kappa - k^2 \\
&\quad + \kappa^2 + 2ik\kappa - k^2 + \kappa^2 + k^2 e^{-2\kappa a} e^{2\kappa x}] \\
|\psi|^2 &= \frac{T}{4\kappa^2} [\kappa^2 + k^2 e^{2\kappa a} e^{-2\kappa x} + e^{-2\kappa a} e^{2\kappa x} + \\
&\quad + 2(\kappa^2 - k^2)] \\
|\psi|^2 &= \frac{T}{4\kappa^2} [\kappa^2 + k^2 e^{2\kappa(x-a)} + e^{-2\kappa(x-a)} + \\
&\quad + 2(\kappa^2 - k^2)] \\
|\psi|^2 &= \frac{T}{4\kappa^2} [2(\kappa^2 + k^2) \cosh[2\kappa(x-a)] + 2(\kappa^2 - k^2)] \\
&= \frac{T}{2\kappa^2} (\kappa^2 + k^2) \cosh[2\kappa(x-a)] + (\kappa^2 - k^2)
\end{aligned} \tag{6.4}$$

substituindo (6.4) em (6.1) encontramos número de partículas no interior da barreira de potencial retangular

$$\begin{aligned} \int_0^a |\psi|^2 dx &= \int_0^a \frac{T}{2\kappa^2} \{ \kappa^2 + k^2 \cosh[2\kappa(x-a)] + \kappa^2 - k^2 \} dx \\ &= \frac{T}{2\kappa^2} \left\{ \int_0^a \kappa^2 + k^2 \cosh[2\kappa(x-a)] dx + \int_0^a \kappa^2 - k^2 dx \right\} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Calculando a integral

$$\begin{aligned} \int_0^a \cosh[2\kappa(x-a)] dx &= \int_0^a \cosh u \frac{du}{2\kappa} = \frac{1}{2\kappa} \sinh u \Big|_0^a \\ &= \frac{1}{2\kappa} \{ \sinh[2\kappa(a-a)] - \sinh[2\kappa(0-a)] \} \\ &= \frac{1}{2\kappa} [\sinh(2\kappa a)] \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^a |\psi|^2 dx &= \frac{T}{2\kappa^2} \left\{ \kappa^2 + k^2 \frac{1}{2\kappa} [\sinh(2\kappa a)] + \kappa^2 - k^2 a \right\} \\ &= \frac{T}{4\kappa^2} \left\{ \kappa^2 + k^2 \sinh(2\kappa a) + 2a \kappa^2 - k^2 a \right\} \end{aligned}$$

onde T é dado pela equação (3.18). Sendo assim

$$\begin{aligned} \int_0^a |\psi|^2 dx &= \frac{4k^2\kappa^2}{k_0^4 \sinh^2(\kappa a) + 4k^2\kappa^2} \frac{1}{4\kappa^2} \times \\ &\times \left\{ \kappa^2 + k^2 \sinh(2\kappa a) + 2a \kappa^2 - k^2 a \right\} \\ \int_0^a |\psi|^2 dx &= \frac{k^2}{k_0^4 \sinh^2(\kappa a) + 4k^2\kappa^2} \left\{ \kappa^2 \sinh(2\kappa a) - 2\kappa a (\kappa^2 - k^2) \right\} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Desse modo obtemos o tempo de permanência com o auxílio de (5.4) e (6.6) a fim de

obter

$$\tau_D = \frac{m}{\hbar k} \left[\frac{k^2}{\kappa} \frac{k_0^2 \sinh(2\kappa a) - 2\kappa a (k^2 - \kappa^2)}{k_0^4 \sinh^2(\kappa a) + 4k^2 \kappa^2} \right]$$

$$\tau_D = \frac{m \kappa}{\hbar k} \frac{k_0^2 \sinh(2\kappa a) - 2\kappa a (k^2 - \kappa^2)}{k_0^4 \sinh^2(\kappa a) + (2k\kappa)^2}. \quad (6.7)$$

6.1.2 Tempo de Fase

Agora vamos analisar a fase estacionária afim de obtermos o tempo de fase,

$$\frac{df(k)}{dk} \Big|_{k=\bar{k}} = 0, \quad (6.8)$$

Na região I ($x < 0$), temos o pacote de ondas incidente (3.24),

$$\psi_I(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{k_0} \varphi_I(k) e^{if_I(k)} dk,$$

$$\psi_I(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{k_0} \varphi(k) e^{i[k(x+l) - \omega(k)t]} dk \quad (6.9)$$

e a fase do pacote de ondas incidente é

$$f_I = (x + l)k - \omega(k)t, \quad (6.10)$$

onde $\omega = \hbar k^2/2m$.

Da condição de fase estacionária,

$$\frac{df_I(k)}{dk} \Big|_{k=\bar{k}} = 0, \quad (6.11)$$

onde o momento médio $\bar{k} = \hbar k_i$. Derivando a equação (6.10), obtemos

$$x + l - \frac{\hbar k}{m} t \Big|_{k=\bar{k}} = 0,$$

de onde podemos tirar a equação correspondente à trajetória clássica, que podemos extrapolar para toda região antes do potencial ($x < 0$),

$$\bar{x}(t) = \frac{\bar{\hbar}k}{m}t - l. \quad (6.12)$$

A equação (6.12) corresponde à trajetória de uma partícula clássica que se localiza na posição $x = -l$ no instante $t = 0$, deslocando-se para a direita com velocidade constante

$$\bar{v} = \frac{\bar{\hbar}k}{m}, \quad (6.13)$$

que é a velocidade de grupo do pacote de ondas, quando a partícula atinge a posição $x = 0$, temos

$$0 = \frac{\bar{\hbar}k}{m}t - l \quad \square \quad t_0 = \frac{ml}{\bar{\hbar}k}. \quad (6.14)$$

Ainda na região I ($x < 0$), temos para o pacote de ondas refletido (3.27),

$$\begin{aligned} \psi_R(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{k_0} \varphi_R(k) e^{if_R(k)} dk, \\ \psi_R(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{k_0} g(k) \sqrt{\text{Re}} e^{i[k(-x+l) + \beta(k) - \pi/2 - \omega(k)t]} dk \end{aligned} \quad (6.15)$$

e a fase do pacote de ondas refletido sendo dado por

$$f_R(k) = -(x - l)k - \omega(k)t - \beta(k) - \frac{\pi}{2}, \quad (6.16)$$

onde β é dado por (3.21).

Através da condição de fase estacionária

$$\left. \frac{df_R(k)}{dk} \right|_{k=\bar{k}_R} = 0, \quad (6.17)$$

onde o valor do momento médio refletido é dado por $\hbar k_{R} = \bar{k}_R < \bar{k}$, obtemos a equação de movimento do pacote refletido

$$-x + l - \frac{\hbar k}{m} t + \frac{d\beta(k)}{dk} \Big|_{k=\bar{k}_R} = 0, \quad (6.18)$$

Portanto,

$$\bar{x}(t) = l - \frac{\hbar k_R}{m} t + \frac{d\beta(k)}{dk} \Big|_{k=\bar{k}_R} \quad (6.19)$$

Para um pacote de onda que se localiza em $x = 0$, vai estar no instante

$$l - \frac{\hbar k_R}{m} t + \frac{d\beta(k)}{dk} \Big|_{k=\bar{k}_R} = 0$$

$$t_1 = \frac{m}{\hbar k_R} \left[l + \frac{d\beta(k)}{dk} \Big|_{k=\bar{k}_R} \right] \quad (6.20)$$

e vai em direção à $x = -\infty$ com uma velocidade de grupo $\bar{v}_R = \hbar k_R/m$.

Portanto o tempo de fase é dado por

$$T_{\text{fase}} = T_R = t_1 - t_0 = \frac{m}{\hbar k_R} \left[l - \frac{d\beta(k)}{dk} \Big|_{k=\bar{k}_R} \right] - \frac{ml}{\hbar k} \quad (6.21)$$

mostra que a chegada do pico do pacote de ondas incidente em $x = 0$ não coincide com a saída do pico do pacote de ondas refletido em $x = 0$. A distribuição $\varphi_R(k) = g \delta(k - \bar{k}_R)$, resulta em um pico \bar{k}_R somente um pouco menor que o pico incidente \bar{k} , aparecendo com o pico ligeiramente deslocado para a esquerda se comparado com o pico da distribuição $g \delta(k - \bar{k})$, isto é, $\bar{k}_R < \bar{k}$, observado em [2, 10] a diferença entre \bar{k} e \bar{k}_R é muito pequena, e foi imposta que $\bar{k}_R \approx \bar{k}$.

Portanto (6.21), fica

$$T_{\text{fase}} = T_R = t_1 - t_0 = \frac{m}{\hbar k} \frac{d\beta(k)}{dk} \Big|_{k=\bar{k}} \quad (6.22)$$

Na região III ($x > a$), o pacote de ondas transmitido é dado por (3.28),

$$\begin{aligned}\psi_T(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{k_0}^{\infty} \varphi_T(k) e^{if_T(k)} dk, \\ \psi_T(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{k_0} g(k) e^{i[k(x+l-a) + \beta(k) - \omega(k)t]} dk\end{aligned}\quad (6.23)$$

o valor médio do momento do pico é dado por, $\hbar k_T = \bar{k} > \bar{k}$ e a fase do pacote transmitido é

$$f_T(k) = (x + l - a)k - \omega(k)t + \beta(k). \quad (6.24)$$

Da condição de fase estacionária

$$\frac{df_T(k)}{dk} \Big|_{k=\bar{k}_T} = 0, \quad (6.25)$$

obtemos

$$x + l - a - \frac{\hbar k}{m} t + \frac{d\beta(k)}{dk} \Big|_{k=\bar{k}_T} = 0, \quad (6.26)$$

que corresponde à equação de trajetória

$$\bar{x}(t) = -l + a + \frac{\hbar \bar{k}_T}{m} t - \frac{d\beta(k)}{dk} \Big|_{k=\bar{k}_T} \quad (6.27)$$

Esta equação descreve o movimento do pico do pacote de ondas transmitido que emerge a partir da região de potencial, em $x = a$, no instante

$$\begin{aligned}a &= -l + a + \frac{\hbar \bar{k}_T}{m} t - \frac{d\beta(k)}{dk} \Big|_{k=\bar{k}_T} \\ t_3 &= \frac{m}{\hbar \bar{k}_T} \left[l + \frac{d\beta(k)}{dk} \Big|_{k=\bar{k}_T} \right].\end{aligned}\quad (6.28)$$

O tempo de fase é dado por

$$\tau_{\text{fase}} = \tau_T = t_3 - t_0 = \frac{m}{\hbar k_T} \left[1 + \frac{d\beta(k)}{dk} \Big|_{k=\bar{k}_T} \right] - \frac{ml}{\hbar k} \quad (6.29)$$

e mede o intervalo de tempo a partir da chegada do pico do pacote de ondas incidente em $x = 0$ até o aparecimento do pico do pacote transmitido em $x = a$. A distribuição $\varphi_T(k) = g \sqrt{k - \bar{k}} \sqrt{\tau}$, resulta em um pico \bar{k}_T somente um pouco maior que o pico incidente \bar{k} , aparecendo com o pico ligeiramente deslocado para a direita se comparado com o pico da distribuição $g \sqrt{k - \bar{k}}$, isto é, $\bar{k}_T > \bar{k}$, observado em [2, 10] a diferença entre \bar{k} e \bar{k}_T é mínima, e foi imposto que $\bar{k}_T \approx \bar{k}$ então (6.29) fica

$$\tau_{\text{fase}} = \tau_T = t_3 - t_0 = \frac{m}{\hbar k} \left[\frac{d\beta(k)}{dk} \Big|_{k=\bar{k}} \right] \quad (6.30)$$

Calculando a derivada das equações (6.22) e (6.30), temos

$$\frac{d\beta(k)}{dk} \Big|_{k=\bar{k}} = \frac{d}{dk} \arctan \left[\frac{k^2 - \kappa^2}{2k\kappa} \tanh(\kappa a) \right] \Big|_{k=\bar{k}}$$

como

$$\frac{d}{dk} [\arctan(u)] = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dk}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\beta(k)}{dk} \Big|_{k=\bar{k}} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{k^2 - \kappa^2}{2k\kappa} \tanh(\kappa a) \right)^2} \times \\ &\times \frac{d}{dk} \left[\frac{k^2 - \kappa^2}{2k\kappa} \tanh(\kappa a) \right] \Big|_{k=\bar{k}} \end{aligned} \quad (6.31)$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} \left[\frac{k^2 - \kappa^2}{2k\kappa} \tanh(\kappa a) \right] \Big|_{k=\bar{k}} &= \frac{k^2 - \kappa^2}{2k\kappa} \frac{d}{dk} \tanh(\kappa a) + \\ &+ \tanh(\kappa a) \frac{d}{dk} \left[\frac{k^2 - \kappa^2}{2k\kappa} \right] \Big|_{k=\bar{k}} \end{aligned} \quad (6.32)$$

calculando as derivadas do segundo membro:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} \tanh(\kappa a) &= \frac{d}{dk} \tanh \left(\sqrt{k_0^2 - k^2} a \right) \\ &= \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{k_0^2 - k^2} a \right) \cdot (-k) \sqrt{k_0^2 - k^2} a \\ &= \frac{-k \operatorname{sech}^2(\kappa a) (a)}{\kappa}, \end{aligned}$$

sabendo que $\operatorname{sech}^2(\kappa a) = 1/\cosh^2(\kappa a)$

$$\frac{d}{dk} \tanh(\kappa a) = \frac{-ka}{\kappa \cosh^2(\kappa a)} \quad (6.33)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} \frac{k^2 - \kappa^2}{2\kappa} &= 2\kappa \frac{d}{dk} (k^2 - \kappa^2) - (k^2 - \kappa^2) \frac{d}{dk} (2\kappa) \\ &= \frac{2\kappa(2k) - (k^2 - \kappa^2)(2)}{(2\kappa)^2} \\ &= \frac{2k^2 + \kappa^2 - k^2}{2\kappa^2} \end{aligned} \quad (6.34)$$

Substituindo (6.33) e (6.34) em (6.32)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} \frac{k^2 - \kappa^2}{2\kappa} \tanh(\kappa a) &= \frac{k^2 - \kappa^2}{2\kappa} \frac{-ka}{\kappa \cosh^2(\kappa a)} + \\ &+ \tanh(\kappa a) \frac{2k^2 + \kappa^2 - k^2}{2\kappa^2} \end{aligned}$$

onde $\tanh(\kappa a) = \sinh(\kappa a) / \cosh(\kappa a)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} \frac{k^2 - \kappa^2}{2\kappa} \tanh(\kappa a) &= \frac{k^2 - \kappa^2}{2\kappa} \frac{-ka}{\kappa \cosh^2(\kappa a)} + \\ &+ \frac{\sinh(\kappa a)}{\cosh(\kappa a)} \frac{2k^2 + \kappa^2 - k^2}{2\kappa^2} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dk} \frac{k^2 - \kappa^2}{2k\kappa} \tanh(\kappa a) = \frac{k^2 a (\kappa^2 - k^2)}{2\kappa^2 k^2 \cosh^2(\kappa a)} + \frac{\kappa \cosh(\kappa a) \sinh(\kappa a) [2k^2 + \kappa^2 - k^2]}{2\kappa^2 k^2 \cosh^2(\kappa a)}$$

usando a relação $2 \sinh x \cosh x = \sinh(2x)$ e $k^2 = k_0^2 - \kappa^2$, temos que

$$\frac{d}{dk} \frac{k^2 - \kappa^2}{2k\kappa} \tanh(\kappa a) = \frac{k^2 a (\kappa^2 - k^2)}{2\kappa^2 k^2 \cosh^2(\kappa a)} + \frac{(\kappa/2) \sinh(2\kappa a) [2(k_0^2 - \kappa^2) + \kappa^2 - k_0^2 + \kappa^2]}{2\kappa^2 k^2 \cosh^2(\kappa a)}$$

$$\frac{d}{dk} \frac{k^2 - \kappa^2}{2k\kappa} \tanh(\kappa a) = \frac{k^2 a (\kappa^2 - k^2) + k_0^2 (\kappa/2) \sinh(2\kappa a)}{2\kappa^2 k^2 \cosh^2(\kappa a)} \quad (6.35)$$

E finalmente substituindo (6.35) em (6.31)

$$\frac{d\beta(k)}{dk} \Big|_{k=\bar{k}} = \frac{1}{1 + \frac{(k^2 - \kappa^2)^2}{(2k\kappa)^2} \tanh^2(\kappa a)} \times \frac{k^2 a (\kappa^2 - k^2) + k_0^2 (\kappa/2) \sinh(2\kappa a)}{2\kappa^2 k^2 \cosh^2(\kappa a)} \Big|_{k=\bar{k}}$$

$$\frac{d\beta(k)}{dk} \Big|_{k=\bar{k}} = \frac{1}{1 + \frac{(k^2 - \kappa^2)^2 \sinh^2(\kappa a)}{(2k\kappa)^2 \cosh^2(\kappa a)}} \times \frac{k^2 a (\kappa^2 - k^2) + k_0^2 (\kappa/2) \sinh(2\kappa a)}{2\kappa^2 k^2 \cosh^2(\kappa a)} \Big|_{k=\bar{k}}$$

$$\frac{d\beta(k)}{dk} \Big|_{k=\bar{k}} = \frac{(2k\kappa)^2 \cosh^2(\kappa a)}{(2k\kappa)^2 \cosh^2(\kappa a) + (k^2 - \kappa^2)^2 \sinh^2(\kappa a)} \times \frac{k^2 a (\kappa^2 - k^2) + k_0^2 (\kappa/2) \sinh(2\kappa a)}{2\kappa^2 k^2 \cosh^2(\kappa a)} \Big|_{k=\bar{k}}$$

$$\frac{d\beta(k)}{dk} \Big|_{k=\bar{k}} = \frac{2k^2 a (\kappa^2 - k^2) + k_0^2 \kappa \sinh(2\kappa a)}{(2k\kappa)^2 \cosh^2(\kappa a) + (k^2 - \kappa^2)^2 \sinh^2(\kappa a)} \Big|_{k=\bar{k}}$$

introduzindo agora $\cosh^2(\kappa a) = 1 + \sinh^2(\kappa a)$

$$\begin{aligned} \frac{d\beta(k)}{dk} \Big|_{k=\bar{k}} &= \frac{2k^2 a (\kappa^2 - k^2) + k_0^2 k \sinh(2\kappa a)}{(2k\kappa)^2 + 1 + \sinh^2(\kappa a) + (k^2 - \kappa^2)^2 \sinh^2(\kappa a)} \Big|_{k=\bar{k}} \\ \frac{d\beta(k)}{dk} \Big|_{k=\bar{k}} &= \frac{2k^2 a (\kappa^2 - k^2) + k_0^2 k \sinh(2\kappa a)}{(2k\kappa)^2 + k_0^4 \sinh^2(\kappa a)} \Big|_{k=\bar{k}} \\ \frac{d\beta(k)}{dk} \Big|_{k=\bar{k}} &= \frac{2\kappa a k^2 (\kappa^2 - k^2) + k_0^2 \sinh(2\kappa a)}{\kappa (2k\kappa)^2 + k_0^4 \sinh^2(\kappa a)} \Big|_{k=\bar{k}} \end{aligned} \quad (6.36)$$

Com (6.36), (6.22) e (6.30), obtemos o tempo de fase para uma partícula que interage com uma barreira retangular

$$T_{\text{fase}} = \frac{m}{\hbar k} \frac{2\kappa a k^2 (\kappa^2 - k^2) + k_0^2 k \sinh(2\kappa a)}{(2k\kappa)^2 + k_0^4 \sinh^2(\kappa a)} \Big|_{k=\bar{k}} \quad (6.37)$$

Na Figura 6-1, observamos que o tempo de fase (linha contínua) para a grande satura assim como ocorre com o tempo de permanência (linha pontilhada), concordando com o efeito Hartman.

Na Figura 6-2, vemos que conforme k aumenta o tempo de fase diminui aproximando-se de zero para $k = 1$. Já para $k \rightarrow 0$, o tempo de fase vai tender a infinito, impossibilitando assim qualquer tipo de transmissão da partícula.

6.1.3 Tempo Semiclássico

Através das equações (5.18), (3.18) e (6.6) obtemos o tempo de transmissão da partícula após interagir com uma barreira de potencial retangular.

$$\begin{aligned} T_{\text{semicl.T}} &= \frac{m}{\hbar k} \frac{4k^2 \kappa^2}{k_0^4 \sinh^2(\kappa a) + 4k^2 \kappa^2} \times \\ &\times \frac{k^2 \left[\frac{k_0^2 \sinh(2\kappa a) - 2\kappa a (k^2 - \kappa^2)}{k_0^4 \sinh^2(\kappa a) + 4k^2 \kappa^2} \right]}{1} \\ T_{\text{semicl.T}} &= \frac{m}{\hbar} \frac{1}{4k\kappa^3} \left[k_0^2 \sinh(2\kappa a) - 2\kappa a (k^2 - \kappa^2) \right], \end{aligned} \quad (6.38)$$

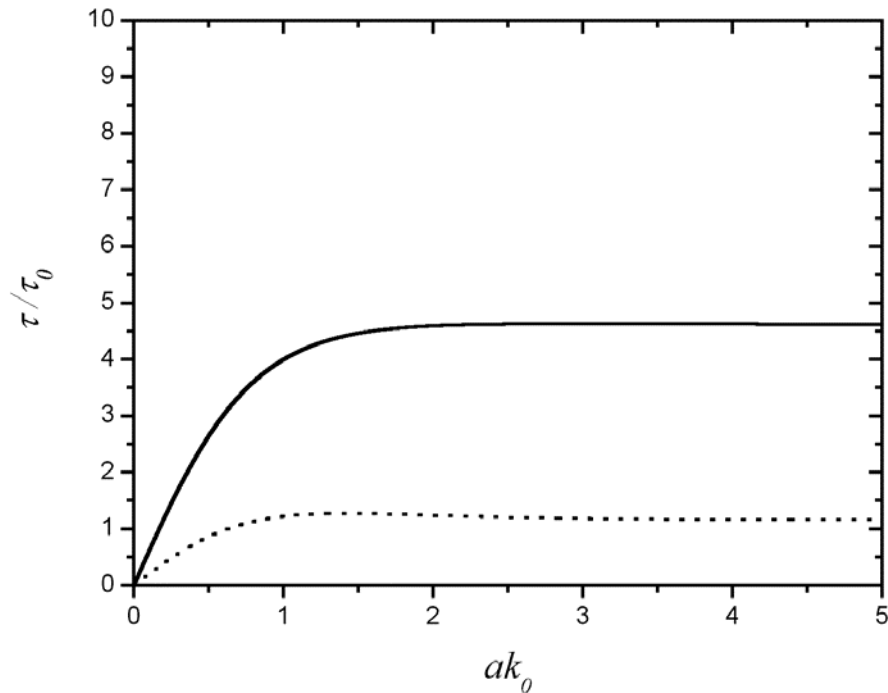


Figura 6-1: Tempo de fase τ_{fase} (linha contínua) e tempo de permanência τ_D (linha pontilhada) em unidades de τ_0 , versus a largura da barreira retangular a (em unidades de k_0^{-1}). Onde a energia é fixa em $k = 0.5k_0$

e também podemos calcular através das equações (5.22), (3.19) e (6.6) o tempo de reflexão da partícula após ter interagido com mesmo potencial.

$$\begin{aligned}
 T_{\text{semicl.R}} &= \frac{m}{\hbar k} \frac{\hbar^2 k_0^4 \sinh^2(\kappa a)}{4k^2 \kappa^2 + k_0^4 \sinh^2(\kappa a)} \times \\
 &\times \frac{\hbar^2 k^2 \left[k_0^2 \sinh(2\kappa a) - 2\kappa a (k^2 - \kappa^2) \right]}{k_0^4 \sinh^2(\kappa a) + 4k^2 \kappa^2} \\
 T_{\text{semicl.R}} &= \frac{m \hbar k}{\hbar k} \frac{k_0^2 \sinh(2\kappa a) - 2\kappa a (k^2 - \kappa^2)}{k_0^4 \sinh^2(\kappa a)} \quad (6.39)
 \end{aligned}$$

Na Figura 6-3 observamos que o tempo de transmissão τ_T diminui com o aumento da energia k , devido a amplitude de transmissão T que está no denominador de (5.18)

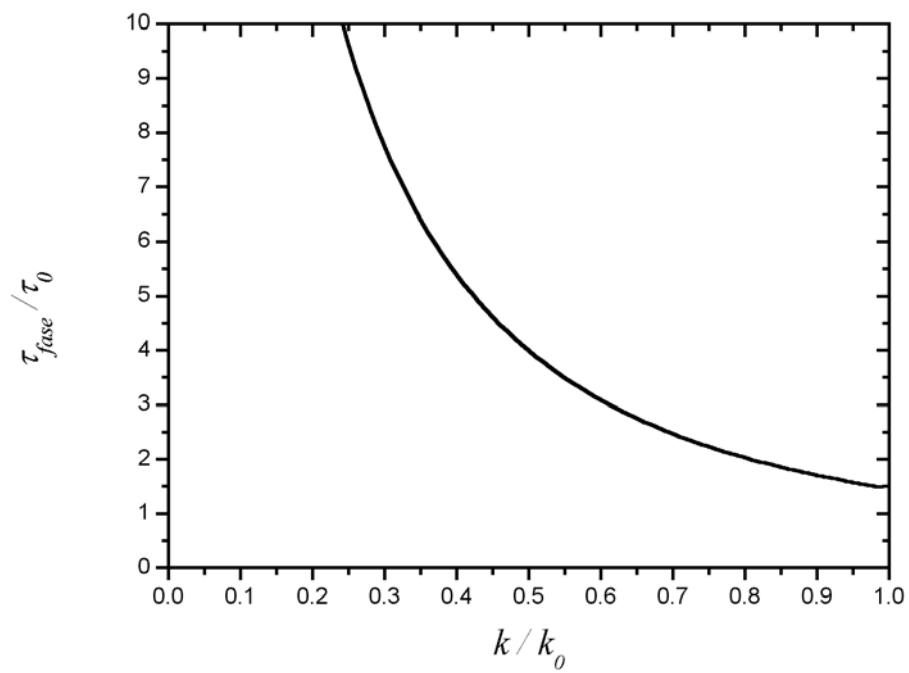


Figura 6-2: Tempo de fase τ_{fase} (em unidades de τ_0) versus a energia k (em unidades de k_0). Onde a largura da barreira retangular é fixa em $a = 1$.

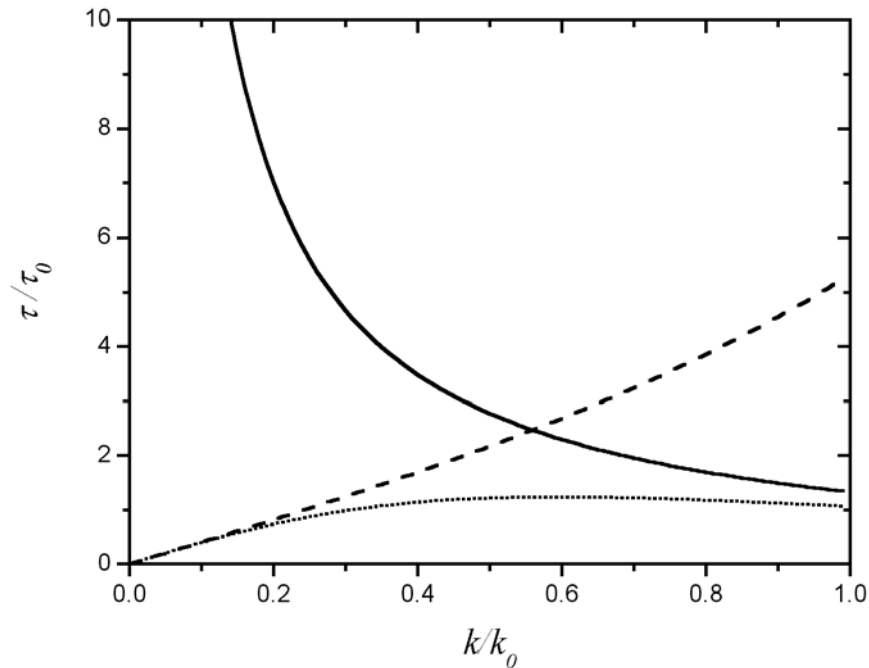


Figura 6-3: Tempo de tunelamento semiclássico τ (em unidades de τ_0) versus a energia k (em unidades de k_0) com uma barreira de largura fixa $a = 1$. A linha contínua é o tempo semicl. de transmissão, a linha tracejada o tempo semicl. de reflexão e a linha pontilhada o tempo de permanência.

crescer com a energia. Já para $k = 0$, o tempo de transmissão tende à infinito, pois não há transmissão ($T = 0$). Para o tempo de reflexão τ_R , notamos o inverso, ou seja, ele cresce com o aumento da energia, devido a amplitude de reflexão R estar no denominador de (5.22) e que decresce com o aumento da energia. No caso do tempo de permanência τ_D dado por (6.7) aproxima-se de zero quando a energia é próxima de zero, por causa que com a diminuição da energia, a partícula vai penetrar menos na região do interior da barreira. Para $k \rightarrow k_0$ o tempo de permanência τ_D tende a saturar para o valor de τ_0 .

Na Figura 6-4, vemos que o tempo de transmissão τ_T aumenta com o aumento da largura da barreira a , isto é devido à amplitude de transmissão T que está no denominador da equação (5.18), decrescer com o aumento da largura da barreira. Já para larguras

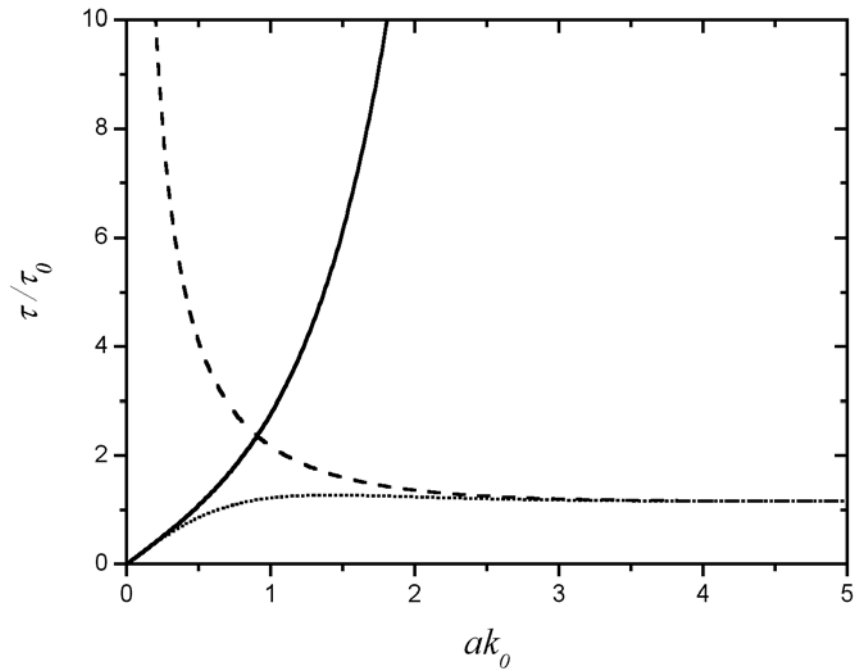


Figura 6-4: Tempo de tunelamento semiclássico τ (em unidades de τ_0) versus a largura da barreira a (em unidades de k_0^{-1}) com uma energia fixa da partícula $k = 0.5k_0$. A linha contínua é o tempo de semicl. transmissão, a linha tracejada o tempo semicl. de reflexão e a linha pontilhada o tempo de permanência.

tendendo a zero o coeficiente de transmissão (3.18) é igual a 1 o que resulta que o tempo de transmissão torna-se igual ao tempo de permanência τ_D . Para o tempo de reflexão τ_R notamos novamente que ocorre o inverso, diminuindo a medida que aumentamos a largura da barreira, devido ao coeficiente R estar no denominador de (5.22) e o mesmo aumentar com o aumento da largura a . Observamos que o tempo de permanência aproxima-se de uma constante para barreira de largura grande, isto é o efeito Hartman.

6.2 Barreira Triangular

Nesta secção faremos uma aplicação dos tempos de tunelamento para uma barreira de potencial triangular.

6.2.1 Tempo de Permanência

Através da equação (5.4) podemos calcular o tempo de permanência de uma partícula que interage com um potencial triangular antes de ser refletida ou transmitida.

Do mesmo modo feito na barreira retangular calculamos o número de partículas no interior da barreira, dado por (6.1),

$$N = \int_B^a \rho(x) dx = \int_0^a |\psi|^2 dx,$$

onde a função de onda é dada na equação (4.6) e B e C são dados por (4.11) e (4.10).

Desta forma, temos que

$$|\psi|^2 = \psi^* \psi$$

$$\begin{aligned} |\psi|^2 &= [B^* Ai(-\xi) + C^* Bi(-\xi)][BAi(-\xi) + C Bi(-\xi)] \\ &= |B|^2 Ai^2(-\xi) + [BC^* + CB^*]Ai(-\xi)Bi(-\xi) + |C|^2 Bi^2(-\xi) \end{aligned} \quad (6.40)$$

onde

$$\begin{aligned}
|B|^2 &= B^\square B = \frac{2ikg(\xi_a)^\rightarrow}{\Delta^\square} \frac{-2ikg^\square(\xi_a)^\rightarrow}{\Delta} \\
&= \frac{4k^2}{|\Delta|^2} [g(\xi_a)g^\square(\xi_a)] \\
BC^\square &= \frac{-2ikg^\square(\xi_a)^\rightarrow}{\Delta} \frac{-2ikf(\xi_a)^\rightarrow}{\Delta^\square} \\
&= -\frac{4k^2}{|\Delta|^2} [g^\square(\xi_a)f(\xi_a)] \\
CB^\square &= \frac{2ikf^\square(\xi_a)^\rightarrow}{\Delta} \frac{2ikg(\xi_a)^\rightarrow}{\Delta^\square} \\
&= -\frac{4k^2}{|\Delta|^2} [f^\square(\xi_a)g(\xi_a)] \\
|C|^2 &= C^\square C = \frac{-2ikf(\xi_a)^\rightarrow}{\Delta^\square} \frac{2ikf^\square(\xi_a)^\rightarrow}{\Delta} \\
&= \frac{4k^2}{|\Delta|^2} [f(\xi_a)f^\square(\xi_a)]
\end{aligned} \tag{6.41}$$

e $|\Delta|^2$ é dado por (4.22). Substituindo (6.41) em (6.40), temos

$$\begin{aligned}
|\psi|^2 &= \frac{4k^2}{|\Delta|^2} \{ [g(\xi_a)g^\square(\xi_a)] Ai^2(-\xi) - [g^\square(\xi_a)f(\xi_a) + \\
&\quad -f^\square(\xi_a)g(\xi_a)] Ai(-\xi) Bi(-\xi) + [f(\xi_a)f^\square(\xi_a)] Bi^2(-\xi) \},
\end{aligned}$$

onde os produtos de $g(\xi)$ e $f(\xi)$ são dados pelas equações (4.20), obtemos

$$\begin{aligned}
|\psi|^2 &= \frac{4k^2}{|\Delta|^2} \{ {}^1k/\pi^2 a^\psi F(Bi, Bi, \xi_a) Ai^2(-\xi) - [{}^1k/\pi^2 a^\psi F(Ai, Bi, \xi_a) - \frac{ik}{\pi} {}^1k_0^2/a^\psi^{2/3} + \\
&\quad - {}^1k/\pi^2 a^\psi F(Ai, Bi, \xi_a) + \frac{ik}{\pi} {}^1k_0^2/a^\psi^{2/3}] Ai(-\xi) Bi(-\xi) + \\
&\quad + {}^1k/\pi^2 a^\psi F(Ai, Ai, \xi_a) Bi^2(-\xi) \}
\end{aligned}$$

sendo $F(Ai, Bi, \xi)$ dado por (4.19).

$$|\psi|^2 = \frac{4k^2}{|\Delta|^2} \left\{ k/\pi^2 a^\psi F(Bi, Bi, \xi_a) Ai^2(-\xi) + k/\pi^2 a^\psi F(Ai, Ai, \xi_a) Bi^2(-\xi) + \right. \\ \left. -2 k/\pi^2 a^\psi F(Ai, Bi, \xi_a) Ai(-\xi) Bi(-\xi) \right\}$$

$$|\psi|^2 = \frac{4k^3}{|\Delta|^2 \pi^2 a} [F(Bi, Bi, \xi_a) Ai^2(-\xi) + F(Ai, Ai, \xi_a) Bi^2(-\xi) - 2F(Ai, Bi, \xi_a) Ai(-\xi) Bi(-\xi)] \quad (6.42)$$

Agora integrando (6.42) e mudando a variável x para ξ que é dada por (4.4), podemos finalmente encontrar o número de partículas no interior da barreira de potencial triangular

$$N = \int_0^a |\psi|^2 dx$$

$$\frac{d\xi}{dx} = \frac{q_0}{a} \Rightarrow dx = \frac{a}{q_0} d\xi \Rightarrow dx = \frac{a}{k_0^2} d\xi$$

assim

$$N = \frac{a}{k_0^2} \int_{\xi_0}^{\xi_a} |\psi|^2 d\xi$$

$$N = \frac{4k^3}{|\Delta|^2 \pi^2 a} \frac{a}{k_0^2} \left[\int_{\xi_0}^{\xi_a} F(Bi, Bi, \xi_a) Ai^2(-\xi) d\xi + \int_{\xi_0}^{\xi_a} F(Ai, Ai, \xi_a) Bi^2(-\xi) d\xi + \right. \\ \left. -2 \int_{\xi_0}^{\xi_a} F(Ai, Bi, \xi_a) Ai(-\xi) Bi(-\xi) d\xi \right] \quad (6.43)$$

as integrais em (6.43) podem ser calculadas usando-se a relação

$$\int_x^\infty F(u) G(u) du = xF(x)G(x) - F'(x)G'(x)$$

valido para funções $F(x)$ e $G(x)$ que satisfazem a equação de Airy $y''(x) - xy = 0$. Dessa

forma

$$\begin{aligned}
 \int_{\xi_0}^{\xi_a} \text{Ai}^2(-\xi) d\xi &= \xi_a \text{Ai}^2(-\xi_a) + \text{Ai}^{02}(-\xi_a) - \xi_0 \text{Ai}^2(-\xi_0) - \text{Ai}^{02}(-\xi_0) \\
 \int_{\xi_0}^{\xi_a} \text{Bi}^2(-\xi) d\xi &= \xi_a \text{Bi}^2(-\xi_a) + \text{Bi}^{02}(-\xi_a) - \xi_0 \text{Bi}^2(-\xi_0) - \text{Bi}^{02}(-\xi_0) \\
 \int_{\xi_0}^{\xi_a} \text{Ai}(-\xi) \text{Bi}(-\xi) d\xi &= \xi_a \text{Ai}(-\xi_a) \text{Bi}(-\xi_a) + \text{Ai}^0(-\xi_a) \text{Bi}^0(-\xi_a) + \\
 &\quad - \xi_0 \text{Ai}(-\xi_0) \text{Bi}(-\xi_0) - \text{Ai}^0(-\xi_0) \text{Bi}^0(-\xi_0)
 \end{aligned}
 \tag{6.44}$$

Onde substituímos (6.44) em (6.43) e introduzimos a função auxiliar

$$G(\text{Ai}, \text{Bi}, \xi) = \xi \text{Ai}(-\xi) \text{Bi}(-\xi) + \text{Ai}^0(-\xi) \text{Bi}^0(-\xi) \tag{6.45}$$

para assim obtermos o número de partículas no interior da barreira triangular

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{4k^3}{|\Delta|^2 \pi^2 a} \frac{\mu}{k_0^2} a^{11/3} \{ F(\text{Bi}, \text{Bi}, \xi_a) [G(\text{Ai}, \text{Ai}, \xi_a) - G(\text{Ai}, \text{Ai}, \xi_0)] + \\
 &\quad + F(\text{Ai}, \text{Ai}, \xi_a) [G(\text{Bi}, \text{Bi}, \xi_a) - G(\text{Bi}, \text{Bi}, \xi_0)] + \\
 &\quad - 2F(\text{Ai}, \text{Bi}, \xi_a) [G(\text{Ai}, \text{Bi}, \xi_a) - G(\text{Ai}, \text{Bi}, \xi_0)] \}
 \end{aligned}
 \tag{6.46}$$

Assim introduzindo (6.46) na equação (5.4), obtemos o tempo de permanência de uma partícula que interage com uma barreira retangular

$$\begin{aligned}
 \tau_D &= \frac{m}{\hbar k} \frac{4k^3}{|\Delta|^2 \pi^2 a} \frac{\mu}{k_0^2} a^{11/3} \{ F(\text{Bi}, \text{Bi}, \xi_a) [G(\text{Ai}, \text{Ai}, \xi_a) - G(\text{Ai}, \text{Ai}, \xi_0)] + \\
 &\quad + F(\text{Ai}, \text{Ai}, \xi_a) [G(\text{Bi}, \text{Bi}, \xi_a) - G(\text{Bi}, \text{Bi}, \xi_0)] + \\
 &\quad - 2F(\text{Ai}, \text{Bi}, \xi_a) [G(\text{Ai}, \text{Bi}, \xi_a) - G(\text{Ai}, \text{Bi}, \xi_0)] \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_D &= \frac{m}{\hbar} \frac{4k^2}{|\Delta|^2 \pi^2 a^{2/3} k_0^{2/3}} \{ F(\text{Bi}, \text{Bi}, \xi_a) [G(\text{Ai}, \text{Ai}, \xi_a) - G(\text{Ai}, \text{Ai}, \xi_0)] + \\
 &\quad + F(\text{Ai}, \text{Ai}, \xi_a) [G(\text{Bi}, \text{Bi}, \xi_a) - G(\text{Bi}, \text{Bi}, \xi_0)] + \\
 &\quad - 2F(\text{Ai}, \text{Bi}, \xi_a) [G(\text{Ai}, \text{Bi}, \xi_a) - G(\text{Ai}, \text{Bi}, \xi_0)] \}
 \end{aligned}$$

onde introduzimos o tempo característico $\tau_0 = m/\hbar k_0^2$, obtendo finalmente

$$\frac{\tau_D}{\tau_0} = \frac{4k^2}{|\Delta|^2 \pi^2} \frac{\hbar^2 k_0^2}{a} \{ F(B_i, B_i, \xi_a) [G(A_i, A_i, \xi_a) - G(A_i, A_i, \xi_0)] + F(A_i, A_i, \xi_a) [G(B_i, B_i, \xi_a) - G(B_i, B_i, \xi_0)] + -2F(A_i, B_i, \xi_a) [G(A_i, B_i, \xi_a) - G(A_i, B_i, \xi_0)] \} \quad (6.47)$$

que é o tempo de permanência dado para a barreira triangular.

6.2.2 Tempo de Fase

Para calcularmos o tempo de fase para a barreira triangular, impomos na equação (4.43) a condição da fase estacionária (5.6), em $x = 0$:

$$\frac{d}{dk} [-\alpha + \lambda + kx + \omega(k)t]_{x=0} = 0 \quad (6.48)$$

onde $\omega = \hbar k^2/2m$

$$x + \frac{\hbar k}{m} t + \frac{d\lambda}{dk} - \frac{d\alpha}{dk}_{x=0} = 0. \quad (6.49)$$

De (6.49), obtemos o tempo de reflexão

$$\tau_R = \frac{m}{\hbar k} \frac{d\alpha}{dk} - \frac{d\lambda}{dk}. \quad (6.50)$$

Mudando a variável k por k_0 ,

$$\frac{\partial}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k} \frac{\partial}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k} \frac{\hbar k}{k_0} \frac{\partial}{\partial k} = \frac{1}{k_0} \frac{\partial}{\partial k} \quad (6.51)$$

o tempo de reflexão pode ser escrito como

$$\tau_R = \frac{m}{\hbar k_0} \frac{1}{k_0} \frac{\partial}{\partial k} [\alpha - \lambda],$$

e em termos do tempo característico $\tau_0 = m/\hbar k_0^2$,

$$\frac{\tau_R}{\tau_0} = \frac{1}{\partial} [\alpha - \lambda]. \quad (6.52)$$

onde α e λ são dados por (4.34) e (4.37). Calculando as derivadas $\partial\alpha/\partial$ e $\partial\lambda/\partial$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\alpha}{\partial} &= \frac{\partial}{\partial} \arctan \frac{I_1 + I_2}{R_1 + R_2} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{I_1 + I_2}{R_1 + R_2}} \frac{\partial}{\partial} \frac{I_1 + I_2}{R_1 + R_2} \\ &= \frac{(R_1 + R_2)^2 + (I_1 + I_2)^2}{(R_1 + R_2)^2} \times \\ &\quad \times (R_1 + R_2) \frac{d}{d} (I_1 + I_2) - (I_1 + I_2) \frac{d}{d} (R_1 + R_2) \sqrt{(R_1 + R_2)^2} \\ \frac{\partial\alpha}{\partial} &= k_0^4 (R_1 + R_2) \frac{d}{d} (I_1 + I_2) - (I_1 + I_2) \frac{d}{d} (R_1 + R_2) \sqrt{|N_A|^2} \end{aligned} \quad (6.53)$$

e o mesmo é feito para $\partial\lambda/\partial$,

$$\frac{\partial\lambda}{\partial} = k_0^4 (R_2 - R_1) \frac{d}{d} (I_1 - I_2) - (I_1 - I_2) \frac{d}{d} (R_2 - R_1) \sqrt{|\Delta|^2}. \quad (6.54)$$

As derivadas das quantidades R_1 , R_2 , I_1 e I_2 das (6.53) e (6.54), podem ser obtidas das relações conhecidas das funções de Airy e suas derivadas [11]. Os resultados são

$$\frac{\partial R_1}{\partial} = \frac{2R_1}{\partial} + 2^2 k_0 a (I_1 + I_2) \quad (6.55)$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial} = \frac{2k_0 a}{q_0} (\xi_a I_1 + \xi_0 I_2) \quad (6.56)$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial} = \frac{2I_1}{\partial} - 2^2 k_0 a R_2 - \frac{2\xi_0 k_0 a}{q_0} R_1 \quad (6.57)$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial} = \frac{2I_2}{\partial} - 2^2 k_0 a R_2 - \frac{2\xi_a k_0 a}{q_0} R_1 \quad (6.58)$$

Finalmente o tempo de fase para a transmissão através de (4.44), (5.6) e impondo a

condição de fase estacionária para $x = a$:

$$\frac{d}{dk} \left[-\lambda - ka + \frac{\pi}{2} + kx - \omega(k)t \right]_{x=a} = 0 \quad (6.59)$$

$$\frac{d}{dk} [-\lambda - \omega(k)t] = 0$$

$$-\frac{\partial \lambda}{\partial k} - \frac{d\omega}{dk} t = 0$$

$$t = -\frac{m \partial \lambda}{\partial k} \quad (6.60)$$

usando (6.51), obtemos

$$t = -\frac{m}{k_0} \frac{\partial \lambda}{\partial k}$$

$$\frac{\tau_T}{\tau_0} = -\frac{\partial \lambda}{\partial k} \quad (6.61)$$

A Figura 6-5 nos mostra os tempos variando com a largura. Observamos que o tempo de fase tende a um valor constante quando aumentamos a . Notamos também que quando a largura a aumenta o tempo de transmissão tende a aumentar mostrando dessa forma que a partícula tem mais dificuldade para atravessar a barreira na medida que a largura aumenta. O inverso ocorre com o tempo de reflexão, pois a possibilidade de haver partículas refletidas é muito maior com o aumento de a e assim há uma diminuição do tempo de reflexão.

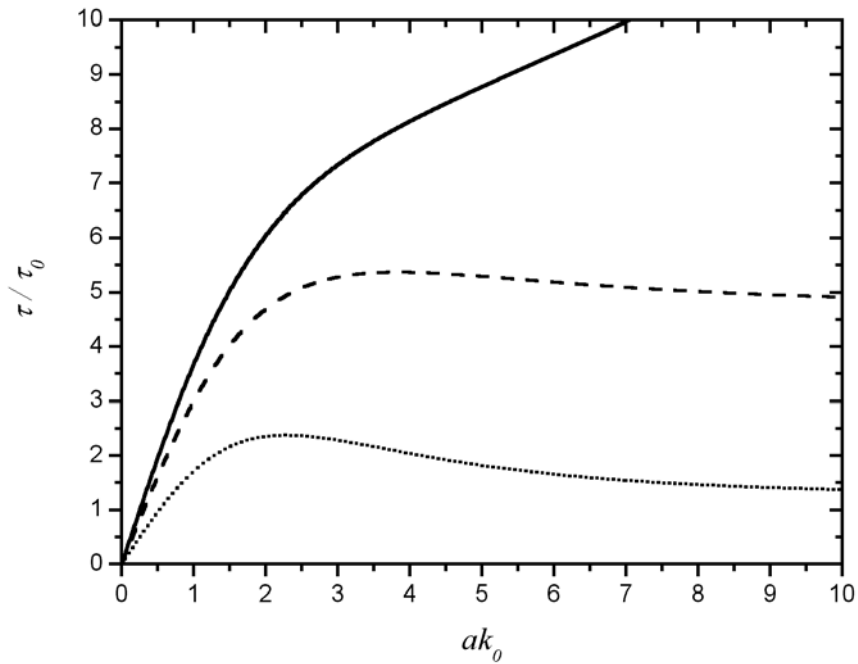


Figura 6-5: Tempo de tunelamento(em unidades de τ_0) versus a largura da barreira triangular(em unidades de k_0^{-1}), onde, o tempo de fase transmitido é representado pela linha contínua, o tempo de fase refletido pela linha tracejada e tempo de permanência pela linha pontilhada. Onde a energia é fixada em $k = 0.5k_0$

6.2.3 Tempo Semiclássico

Com o auxílio das equações (5.18), (4.25) e (6.46) obtemos o tempo de transmissão da partícula após ter interagido com a barreira triangular.

$$\begin{aligned}
 \tau_T = & \frac{m}{\hbar k} \frac{4 k^2 \mu k_0^2 \pi^{2/3} a^{-1}}{|\Delta|^2 \pi^2} \frac{4k^3 \mu a \pi^{1/3}}{|\Lambda|^2 \pi^2 a} \frac{1}{k_0^2} \times \\
 & \times \{F(Bi, Bi, \xi_a)[G(Ai, Ai, \xi_a) - G(Ai, Ai, \xi_0)] + \\
 & + F(Ai, Ai, \xi_a)[G(Bi, Bi, \xi_a) - G(Bi, Bi, \xi_0)] + \\
 & - 2F(Ai, Bi, \xi_a)[G(Ai, Bi, \xi_a) - G(Ai, Bi, \xi_0)]\}
 \end{aligned}$$

$$T_T = \frac{m}{\hbar^2 k_0^2} \{ F(Bi, Bi, \xi_a) [G(Ai, Ai, \xi_a) - G(Ai, Ai, \xi_0)] + \\ + F(Ai, Ai, \xi_a) [G(Bi, Bi, \xi_a) - G(Bi, Bi, \xi_0)] + \\ - 2F(Ai, Bi, \xi_a) [G(Ai, Bi, \xi_a) - G(Ai, Bi, \xi_0)] \}$$

$$\frac{T_T}{T_0} = \{ F(Bi, Bi, \xi_a) [G(Ai, Ai, \xi_a) - G(Ai, Ai, \xi_0)] + \\ + F(Ai, Ai, \xi_a) [G(Bi, Bi, \xi_a) - G(Bi, Bi, \xi_0)] + \\ - 2F(Ai, Bi, \xi_a) [G(Ai, Bi, \xi_a) - G(Ai, Bi, \xi_0)] \} \quad (6.62)$$

e agora calculamos através das equações (5.22), (4.23) e (6.46) o tempo de reflexão da partícula.

$$T_R = \frac{m}{\hbar k} \left[1 - \frac{4}{|\Delta|^2} \frac{\mu_k \Gamma_2 \mu_{k_0} \Gamma_{2/3}^{\mu-1}}{a} \frac{4k^3}{2} \frac{\mu_a \Gamma_{1/3}}{k_0^2} \right] \times \\ \times \{ F(Bi, Bi, \xi_a) [G(Ai, Ai, \xi_a) - G(Ai, Ai, \xi_0)] + \\ + F(Ai, Ai, \xi_a) [G(Bi, Bi, \xi_a) - G(Bi, Bi, \xi_0)] + \\ - 2F(Ai, Bi, \xi_a) [G(Ai, Bi, \xi_a) - G(Ai, Bi, \xi_0)] \}$$

$$T_R = \frac{m}{\hbar k} \frac{|\Delta|^2 \Gamma_{2/3}^{\mu-1} - 4k^2 k_0^{4/3} \Gamma_{2/3}^{\mu-1}}{|\Delta|^2 \Gamma_{2/3}^{\mu-1}} \frac{4k^3}{|\Delta|^2 \Gamma_{2/3}^{\mu-1}} \frac{\mu_a \Gamma_{1/3}}{k_0^2} \times \\ \times \{ F(Bi, Bi, \xi_a) [G(Ai, Ai, \xi_a) - G(Ai, Ai, \xi_0)] + \\ + F(Ai, Ai, \xi_a) [G(Bi, Bi, \xi_a) - G(Bi, Bi, \xi_0)] + \\ - 2F(Ai, Bi, \xi_a) [G(Ai, Bi, \xi_a) - G(Ai, Bi, \xi_0)] \}$$

$$T_R = \frac{m}{\hbar^2 k_0^2} \frac{4k^2}{|\Delta|^2 \Gamma_{2/3}^{\mu-1} k_0^{-4/3} - 4k^2} \{ F(Bi, Bi, \xi_a) [G(Ai, Ai, \xi_a) - G(Ai, Ai, \xi_0)] + \\ + F(Ai, Ai, \xi_a) [G(Bi, Bi, \xi_a) - G(Bi, Bi, \xi_0)] + \\ - 2F(Ai, Bi, \xi_a) [G(Ai, Bi, \xi_a) - G(Ai, Bi, \xi_0)] \}$$

$$\frac{\tau_R}{\tau_0} = \frac{4k^2}{|\Delta|^2 \pi^2 (a/k_0^2)^{2/3} - 4k^2} \pi \{F(B_i, B_i, \xi_a)[G(A_i, A_i, \xi_a) - G(A_i, A_i, \xi_0)] + \\ + F(A_i, A_i, \xi_a)[G(B_i, B_i, \xi_a) - G(B_i, B_i, \xi_0)] + \\ - 2F(A_i, B_i, \xi_a)[G(A_i, B_i, \xi_a) - G(A_i, B_i, \xi_0)]\} \quad (6.63)$$

Na Figura 6-6 observamos o mesmo comportamento que ocorre na barreira retangular, que o tempo de transmissão τ_T diminui com o aumento da energia k , devido a amplitude de transmissão T (4.25) que está no denominador de (5.18) crescer com a energia. Para o tempo de reflexão τ_R , notamos que ele cresce com o aumento da energia, devido a amplitude de reflexão R (4.23) que aparece no denominador de (5.22) decrescer com o aumento da energia. No caso do tempo de permanência τ_D dado por (6.47) novamente ela aproxima-se de zero quando a energia é próxima de zero e para energia próxima a barreira tende a um valor constante.

Ao observarmos a Figura 6-7, notamos novamente o mesmo comportamento que para a barreira retangular. Onde o tempo de transmissão τ_T na equação (5.18) aumenta com o aumento da largura da barreira a , também devido à amplitude de transmissão T decrescer com o aumento da largura da barreira. E para larguras próximas de zero, o tempo de transmissão aproxima-se também ao tempo de permanência τ_D . Para o tempo de reflexão τ_R notamos o inverso, que a medida que aumentamos a largura da barreira, o tempo de reflexão diminui, devido o coeficiente R aumentar com o aumento da largura a . O tempo de permanência novamente aproxima-se de uma constante para barreira de largura grande, observando o efeito Hartman.

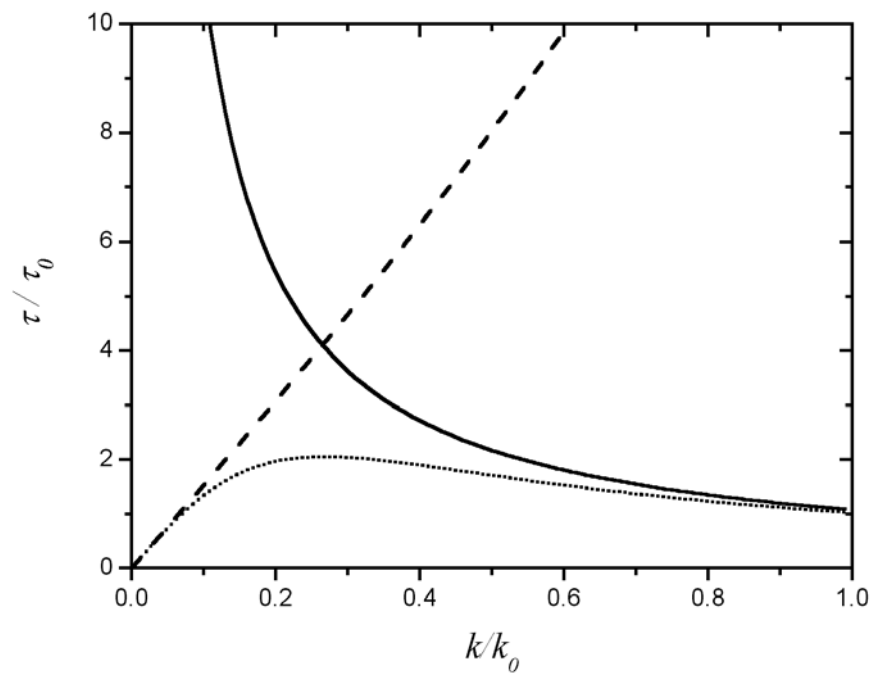


Figura 6-6: Tempos de tunelamento τ (em unidades de τ_0) versus a energia k (em unidades de k_0) com a barreira com largura fixa ($a = 1$). A linha contínua é o tempo de transmissão, a linha tracejada o tempo de reflexão e a linha pontilhada o tempo de permanência.

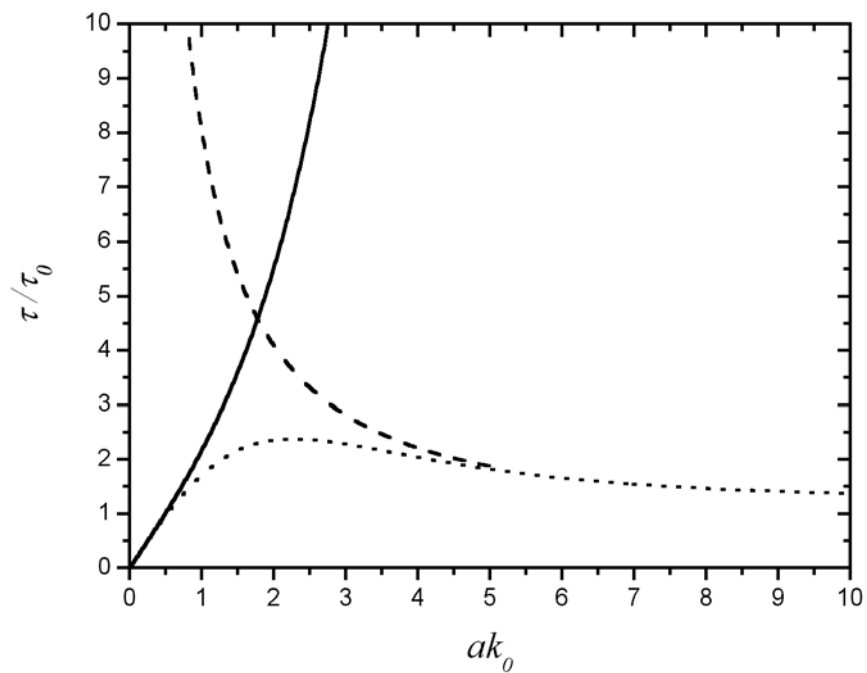


Figura 6-7: Tempos de tunelamento τ (em unidades de τ_0) versus a largura a (em unidades de k_0^{-1}) com a energia da partícula fixa ($k = 0.5k_0$). A linha contínua é o tempo de transmissão, a linha tracejada o tempo de reflexão e a linha pontilhada o tempo de permanência.

Capítulo 7

Conclusão

Como era esperado, podemos observar pela figura 7-1 que o tempo de permanência para a barreira triangular possui o mesmo comportamento para a barreira retangular. Ou seja, o tempo de permanência para o potencial triangular para grandes valores de largura de potencial tende a um mesmo valor constante da barreira retangular, observando assim o efeito Hartman.

Em relação ao tempo de fase, notamos que tanto para a barreira retangular como para a triangular, o tempo tende a permanecer constante para barreira com largura grande, e assim também mostrando que o tempo é independente da largura da barreira como já foi citado por Hartman[2] para barreira retangular como observamos na Figura 7-2 que mostra o comportamento do tempo de fase para as barreiras retangular e triangular.

No tempo semiclássico notamos realmente um comportamento coerente da partícula em que se aumentarmos a largura da barreira o tempo semiclássico de transmissão vai aumentar até um certo ponto em que não existirá mais possibilidade de transmissão. Para partículas com altas energias é observamos que o tempo de transmissão é baixo, ou seja, a partícula transmitida aparece em um intervalo de tempo mais curto do que partículas com baixas energias. Portanto, baseado no conceito clássico do espaço-tempo, aliado com a mecânica quântica, foi introduzido[8] um método direto para definir e estimar os tempos de tunelamento semiclássico $T_{\text{semicl.}}$, e aplicado em uma barreira de potencial

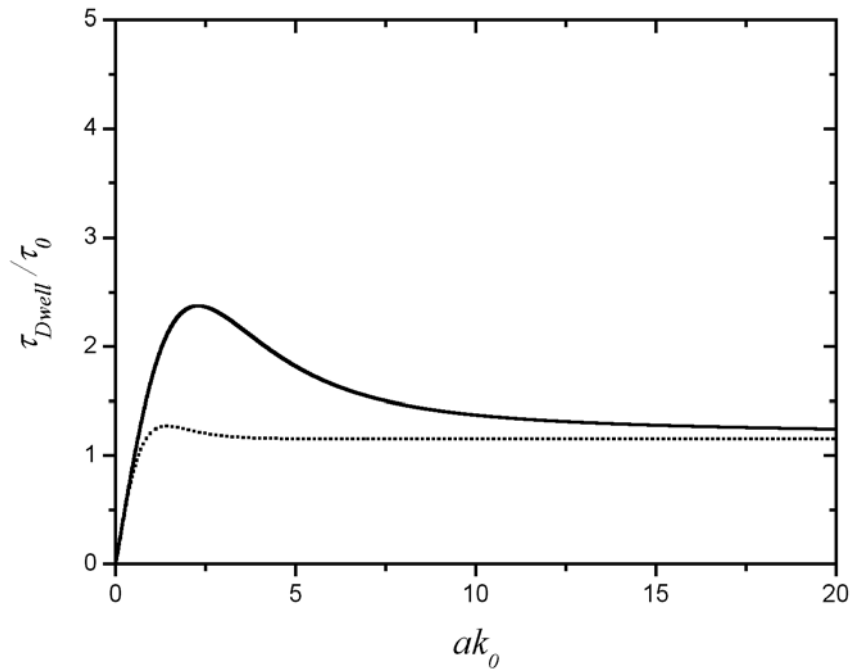


Figura 7-1: Tempo de permanência τ_D (em unidades de τ_0) versus a largura da barreira em unidades de k_0^{-1} , onde a linha contínua representa τ_D para a barreira triangular e a linha pontilhada representa τ_D para a barreira retangular, com $k = 0.5k_0$.

retangular[8] e extendemos para a barreira triangular.

Na literatura são bem aceitos os tempos de tunelamentos que observa o efeito Hartman. Este efeito foi observado no tempo de permanência e tempo de fase nas barreiras de potencial retangular e triangular.

Embora não observamos o efeito Hartman nos tempos de reflexão e transmissão semi-clássicos e nem resulta na relação do tempo de permanência $\tau_D = T\tau + R\tau_R$ [5], consideramos que a proposta do tempo semiclassico venha a contribuir no entendimento no tempo de interação da partícula na barreira de potencial.

Considerando a dificuldade de avaliar experimentalmente o tempo de tunelamento de elétrons o próximo passo seria fazer o estudo teórico do tunelamento óptico onde existe

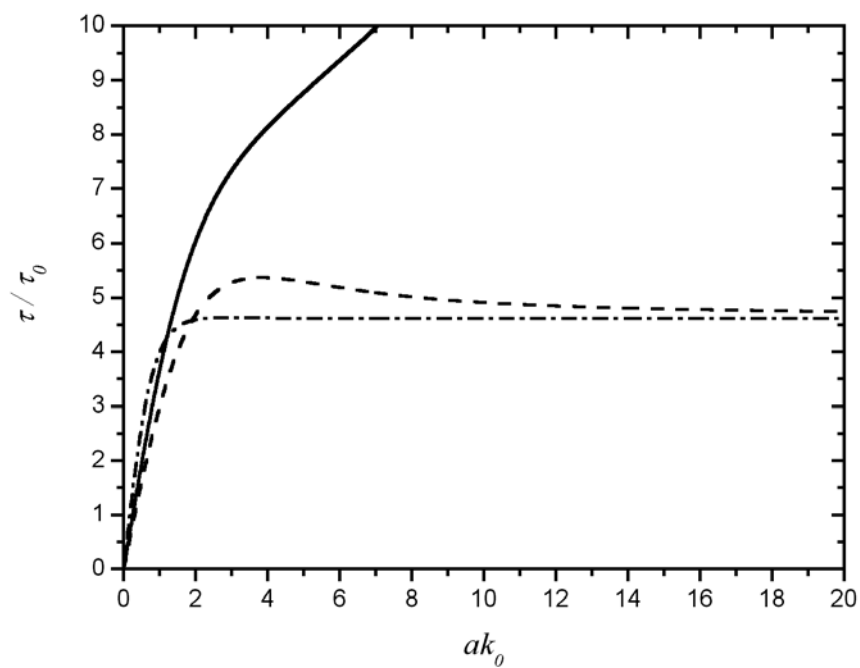


Figura 7-2: Tempo de fase transmitido (linha contínua), tempo de fase refletido (linha tracejada) para a barreira triangular e tempo de fase para a barreira retangular (pontilhada-tracejada) em unidades de τ_0 versus a largura da barreira em unidades de k_0^{-1} , onde a energia é fixa em $k = 0.5k_0$.

experimentos que avaliam o tempo de tunelamento.

Capítulo 8

Apêndice

8.1 Tempo de Permanência definido por Hauge et al.(1987)

O tempo de permanência usado recentemente na literatura não é idêntico ao conceito introduzido por Smith em 1960, na teoria de espalhamento. Nesta secção mostraremos, para um caso unidimensional, uma relação entre os tempos de fase de transmissão τ_{faseT} e reflexão τ_{faseR} e o tempo de permanência τ_D , obtido por Hauge et al.[4].

Integrando a equação de continuidade na região (a, b) para um estado dependente do tempo $\psi(x, t)$, temos:

$$\int_a^b \frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} dx + \int_a^b \frac{\partial \mathbf{j}(x, t)}{\partial x} dx = 0 \quad (8.1)$$

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 dx + \mathbf{j}(b, t) - \mathbf{j}(a, t) = 0$$

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial t} |\psi|^2 dx = \mathbf{j}(a, t) - \mathbf{j}(b, t)$$

$$\frac{d}{dt} \int_a^b |\psi|^2 dx = j(a, t) - j(b, t)$$

$$\int_a^b |\psi|^2 dx = \int_{-\infty}^t j(a, t) dt - \int_{-\infty}^t j(b, t) dt$$

onde $\rho_{ab} = \int_a^b |\psi|^2 dx$

$$\rho_{ab}(t) = \int_{-\infty}^t j(a, t) dt - \int_{-\infty}^t j(b, t) dt \quad (8.2)$$

integrando novamente em t, temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{ab}(t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^t [j(a, t^0) - j(b, t^0)] dt^0 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_a^b |\psi|^2 dx = \tau_D, \end{aligned} \quad (8.3)$$

que é o tempo de permanência de Smith (1960).

Agora chamando:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_a^b |\psi|^2 dx \\ I_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^t [j(a, t^0) - j(b, t^0)] dt^0 \end{aligned} \quad (8.4)$$

onde

$$I_1 + I_2 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_a^b |\psi|^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^t [j(a, t^0) - j(b, t^0)] dt^0 = 0. \quad (8.5)$$

Esta equação serve como base para nós definirmos a relação entre o tempo de fase transmitido, o tempo de fase refletido e o tempo de permanência.

Considerando que os pacotes de ondas nas regiões dentro e fora de uma barreira

limitada de a até b , para um caso unidimensional são dadas por

$$\psi_k = \begin{cases} \psi_{Ik} = e^{ikx} + R e^{-ikx}, & x < a \\ \psi_{IIk} = \chi_k(k), & a < x < b \\ \psi_{IIIk} = T e^{ikx}, & x > b \end{cases} \quad (8.6)$$

podemos calcular I_1 com o auxílio de (8.6):

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_a^b |\psi|^2 dx \quad (8.7)$$

onde

$$\psi_{IIk} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k) \chi(k) e^{-i(\hbar k^2/2m)t} dk \quad (8.8)$$

Assim

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_a^b \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k) \chi(k) e^{i(\hbar k^2/2m)t} dk \times \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k^0) \chi(k^0) e^{-i(\hbar k^{02}/2m)t} dk^0 dx$$

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_a^b dx \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k) \varphi(k^0) \chi(k) \chi(k^0) dk dk^0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\hbar/2m)(k^2 - k^{02})t} dt \quad (8.9)$$

onde a última integral da expressão (8.9) pode ser expressa em termos de uma função δ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\hbar/2m)(k^2 - k^{02})t} dt = 2\pi \delta \left\{ \frac{\hbar}{2m} (k^2 - k^{02}) \right\} = \frac{\hbar}{2m} \left\{ \frac{2m}{\hbar} (k^2 - k^{02}) \right\}$$

onde

$$\delta \left\{ \frac{\hbar}{2m} (k^2 - k^{02}) \right\} = \delta [(k + k^0)(k - k^0)] = \delta [2k(k - k^0)] = \frac{1}{2k} \delta(k - k^0).$$

Portanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\hbar/2m)(k^2 - k^{02})t} dt = \frac{\hbar}{2k} \delta(k - k^0), \quad (8.10)$$

e substituindo em (8.9), temos:

$$I_1 = \frac{m}{\hbar} \int_a^b dx \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(k) \varphi(k^0) \chi^*(k) \chi(k^0) dk dk^0 \frac{1}{k} \delta(k - k^0),$$

e ainda temos que $\delta(k - k^0) = \begin{cases} 1 & \rightarrow k = k^0 \\ 0 & \rightarrow k \neq k^0 \end{cases}$, então

$$I_1 = \frac{m}{\hbar} \int_a^b dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k} |\varphi(k)|^2 |\chi(k)|^2 dk. \quad (8.11)$$

Seja $\chi(k) \equiv \chi(k, x)$, então

$$I_1 = \frac{m}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k} |\varphi(k)|^2 dk \int_a^b |\chi(k, x)|^2 dx$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dk |\varphi(k)|^2 \int_a^b \frac{m}{\hbar k} |\chi(k, x)|^2 dx$$

onde $T_D = \int_a^b \frac{m}{\hbar k} |\chi(k, x)|^2 dx$ e

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} dk |g(k)|^2 T_D(k) \quad (8.12)$$

Agora vamos calcular I_2 .

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^t [j(a, t^0) - j(b, t^0)] dt^0, \quad (8.13)$$

onde primeiramente vamos calcular para $x = b$,

$$I_2^b = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^t [-j(b, t^0)] dt^0 \quad (8.14)$$

onde a função de onda é dada por

$$\psi_{IIIk} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(k) T(k) e^{ikx} e^{-i(\hbar k^2/2m)t} dk \quad (8.15)$$

e

$$\mathbf{j}(b, t) = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im} \left[\psi^* \frac{d}{dx} \psi \right], \quad (8.16)$$

portanto

$$\mathbf{j}(b, t) = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} dk dk^0 \varphi^*(k^0) \varphi(k) T^*(k^0) T(k) (ik) e^{-ik^0 b} e^{ikb} e^{-i(\hbar/2m)(k^2 - k^{02}) t} \quad (8.17)$$

$$I_2^b = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^t dt^0 \left[\frac{\hbar}{m} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} dk dk^0 e^{-i(\hbar/2m)(k^2 - k^{02}) t} \right] \times \varphi^*(k^0) \varphi(k) T^*(k^0) T(k) (ik) e^{-ik^0 b} e^{ikb}. \quad (8.18)$$

Onde introduzimos:

$$k^0 = Q - \frac{q}{2} \text{ e } k = Q + \frac{q}{2}, \quad (8.19)$$

temos

$$I_2^b = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^t dt^0 e^{-i(\hbar/2m) \left[(Q - \frac{q}{2})^2 - (Q + \frac{q}{2})^2 \right] t} \times \left[\frac{\hbar}{m} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} dQ dq \varphi^* \left(Q - \frac{q}{2} \right) \varphi \left(Q + \frac{q}{2} \right) \times T^* \left(Q - \frac{q}{2} \right) T \left(Q + \frac{q}{2} \right) i \left(Q + \frac{q}{2} \right) e^{iqb} \right] \quad (8.20)$$

$$I_2^b = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^t dt^0 e^{-i(\hbar/m) Qqt} \times \left[\frac{\hbar}{m} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} dQ dq \varphi^* \left(Q - \frac{q}{2} \right) \varphi \left(Q + \frac{q}{2} \right) \times T^* \left(Q - \frac{q}{2} \right) T \left(Q + \frac{q}{2} \right) i \left(Q + \frac{q}{2} \right) e^{iqb} \right] \quad (8.21)$$

Calculando a segunda integral de (8.21), obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i(\gamma/m)Qqt} = -\frac{m}{i\gamma Q} e^{i(\gamma/m)qQt} + A(-\infty).$$

$$\begin{aligned} I_2^b &= -\frac{m}{i\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\gamma/m)qQt} dt \times \\ &\times \left[-\frac{\gamma}{m} \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} dQ dq \varphi \left(Q - \frac{q}{2} \right) \varphi \left(Q + \frac{q}{2} \right) \times \right. \\ &\times \left. T \left(Q - \frac{q}{2} \right) T \left(Q + \frac{q}{2} \right) i \left(Q + \frac{q}{2} \right) \frac{1}{qQ} e^{iqb} \right] \end{aligned} \quad (8.22)$$

onde a primeira integral é uma função δ , portanto

$$\begin{aligned} I_2^b &= \frac{m}{i\gamma} 2\pi \times \\ &\times \left[\frac{\gamma}{m} \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} dQ dq \varphi \left(Q - \frac{q}{2} \right) \varphi \left(Q + \frac{q}{2} \right) \times \right. \\ &\times \left. T \left(Q - \frac{q}{2} \right) T \left(Q + \frac{q}{2} \right) i \left(Q + \frac{q}{2} \right) \frac{1}{qQ} \delta \left(\frac{\gamma Q}{m} \right) e^{iqb} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2^b &= \frac{m^2}{i\gamma^2} 2\pi \frac{\gamma}{m} \frac{1}{2\pi} \times \\ &\times \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} dQ dq \varphi \left(Q - \frac{q}{2} \right) \varphi \left(Q + \frac{q}{2} \right) \times \\ &\times \left[T \left(Q - \frac{q}{2} \right) T \left(Q + \frac{q}{2} \right) i \left(Q + \frac{q}{2} \right) \frac{1}{qQ^2} \delta(q) e^{iqb} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2^b &= \frac{m}{\gamma} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} dQ dq \varphi \left(Q - \frac{q}{2} \right) \varphi \left(Q + \frac{q}{2} \right) T \left(Q - \frac{q}{2} \right) T \left(Q + \frac{q}{2} \right) \times \\ &\times \left(Q + \frac{q}{2} \right) \frac{e^{iqb}}{qQ^2} \delta(q) \end{aligned}$$

$$I_2^b = \frac{m}{\hbar} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} dQ dq \varphi \left(Q - \frac{q}{2} \right) \varphi \left(Q + \frac{q}{2} \right) \times \\ \times \frac{1}{qQ} T \left(Q - \frac{q}{2} \right) T \left(Q + \frac{q}{2} \right) + \frac{1}{2Q^2} T \left(Q - \frac{q}{2} \right) T \left(Q + \frac{q}{2} \right) \quad (8.23)$$

Calculando agora I_2 para $x = a$, temos a função de onda dada por (8.6):

$$\psi_{Ik} = e^{ikx} + R e^{-ikx} \quad (8.24)$$

e

$$I_2^a = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} j(a, t^0) dt^0 \quad (8.25)$$

onde

$$j(a, t^0) = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im} \left\{ \psi \frac{d}{dx} \psi^* \right\}$$

$$j(a, t) = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(k^0) \varphi(k) e^{-ik^0 a} + R^*(k^0) e^{ik^0 a} \times \right. \\ \times \left. i k e^{ika} - ik R(k) e^{-ika} e^{-i(\hbar/2m)(k^2 - k^{02})t} dk dk^0 \right\} \\ = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(k^0) \varphi(k) (ik) [e^{-i(k^0 - k)a} - R(k) e^{-i(k + k^0)a} + \\ + R^*(k^0) e^{i(k + k^0)a} - R^*(k^0) R(k) e^{-i(k - k^0)a}] e^{-i(\hbar/2m)(k^2 - k^{02})t} dk dk^0 \quad (8.26)$$

Obtemos

$$I_2^a = \frac{\hbar}{m} \operatorname{Im} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dt^0 e^{-i(\hbar/2m)(k^2 - k^{02})t} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} dk dk^0 \varphi^*(k^0) \varphi(k) (ik) [e^{-i(k^0 - k)a} - R(k) e^{-i(k + k^0)a} + \\ + R^*(k^0) e^{i(k + k^0)a} - R^*(k^0) R(k) e^{-i(k - k^0)a}] \quad (8.27)$$

Usando (8.19)

$$\begin{aligned}
 I_2^a &= \frac{1}{m} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dt' e^{-i(\gamma/2m)qQt} \times \\
 &\times \int_{-\infty}^{+\infty} dq dQ \varphi \left[Q - \frac{q}{2} \right] \varphi \left[Q + \frac{q}{2} \right] i \left[Q + \frac{q}{2} \right] \times \\
 &\times [e^{-i(Q-\frac{q}{2}-Q-\frac{q}{2})a} - R \left[Q + \frac{q}{2} \right] e^{-i(Q+\frac{q}{2}+Q-\frac{q}{2})a} + \\
 &+ R \left[Q - \frac{q}{2} \right] e^{i(Q+\frac{q}{2}+Q-\frac{q}{2})a} - R \left[Q - \frac{q}{2} \right] R \left[Q + \frac{q}{2} \right] e^{-i(Q+\frac{q}{2}-Q+\frac{q}{2})a}]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2^a &= -\frac{m}{\gamma} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} dQ dq \varphi \left[Q - \frac{q}{2} \right] \varphi \left[Q + \frac{q}{2} \right] \times \\
 &\times [e^{iqa} - R \left[Q + \frac{q}{2} \right] e^{-i2Qa} + R \left[Q - \frac{q}{2} \right] e^{i2Qa} + \\
 &- R \left[Q - \frac{q}{2} \right] R \left[Q + \frac{q}{2} \right] e^{-iqa}] \frac{1}{qQ^2} \delta(q)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2^a &= -\frac{m}{\gamma} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} dQ dq \varphi \left[Q - \frac{q}{2} \right] \varphi \left[Q + \frac{q}{2} \right] \times \\
 &\times \left\{ \frac{1}{qQ} [e^{iqa} - R \left[Q + \frac{q}{2} \right] e^{-i2Qa} + R \left[Q - \frac{q}{2} \right] e^{i2Qa} + \right. \\
 &- R \left[Q - \frac{q}{2} \right] R \left[Q + \frac{q}{2} \right] e^{-iqa}] + \\
 &+ \frac{1}{2Q^2} [e^{iqa} - R \left[Q + \frac{q}{2} \right] e^{-i2Qa} + R \left[Q - \frac{q}{2} \right] e^{i2Qa} + \\
 &- R \left[Q - \frac{q}{2} \right] R \left[Q + \frac{q}{2} \right] e^{-iqa}] \left. \right\}
 \end{aligned}$$

(8.28)

Sendo $I_2 = I_2^a + I_2^b$, obtemos:

$$\begin{aligned}
 I_2 = & \frac{m}{\beta} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} dQ dq \varphi \left(Q - \frac{q}{2} \right) \varphi \left(Q + \frac{q}{2} \right) \times \\
 & \times \left\{ -\frac{1}{qQ} \left[e^{iqa} - R \left(Q + \frac{q}{2} \right) e^{-i2Qa} + R \left(Q - \frac{q}{2} \right) e^{i2Qa} + \right. \right. \\
 & \left. \left. - R \left(Q - \frac{q}{2} \right) R \left(Q + \frac{q}{2} \right) e^{-iqa} \right] + \right. \\
 & \left. -\frac{1}{2Q^2} \left[e^{iqa} - R \left(Q + \frac{q}{2} \right) e^{-i2Qa} + R \left(Q - \frac{q}{2} \right) e^{i2Qa} + \right. \right. \\
 & \left. \left. - R \left(Q - \frac{q}{2} \right) R \left(Q + \frac{q}{2} \right) e^{-iqa} \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{qQ} T \left(Q - \frac{q}{2} \right) T \left(Q + \frac{q}{2} \right) e^{iqb} + \frac{1}{2Q^2} T \left(Q - \frac{q}{2} \right) T \left(Q + \frac{q}{2} \right) e^{iqb} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 = & \frac{m}{\beta} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} dQ dq \varphi \left(Q - \frac{q}{2} \right) \varphi \left(Q + \frac{q}{2} \right) \times \\
 & \times \left\{ \frac{1}{qQ} \left[-e^{iqa} + R \left(Q + \frac{q}{2} \right) e^{-i2Qa} - R \left(Q - \frac{q}{2} \right) e^{i2Qa} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + R \left(Q - \frac{q}{2} \right) R \left(Q + \frac{q}{2} \right) e^{-iqa} + T \left(Q - \frac{q}{2} \right) T \left(Q + \frac{q}{2} \right) e^{iqb} \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2Q^2} \left[-e^{iqa} + R \left(Q + \frac{q}{2} \right) e^{-i2Qa} - R \left(Q - \frac{q}{2} \right) e^{i2Qa} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + R \left(Q - \frac{q}{2} \right) R \left(Q + \frac{q}{2} \right) e^{-iqa} + T \left(Q - \frac{q}{2} \right) T \left(Q + \frac{q}{2} \right) e^{iqb} \right] \right\} \quad (8.29)
 \end{aligned}$$

Reescrevendo T e R na forma polar em (8.29), temos:

$$\begin{aligned}
 I_2 = & \frac{m}{\beta} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} dQ dq \varphi \left(Q - \frac{q}{2} \right) \varphi \left(Q + \frac{q}{2} \right) \frac{1}{Q} \times \\
 & \times \left\{ \frac{1}{q} \left[-e^{iqa} + R \left(Q + \frac{q}{2} \right) e^{i\beta(Q+q/2)} e^{-i2Qa} - R \left(Q - \frac{q}{2} \right) e^{-i\beta(Q-q/2)} e^{i2Qa} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + R \left(Q - \frac{q}{2} \right) R \left(Q + \frac{q}{2} \right) e^{-i\beta(Q-q/2)} e^{i\beta(Q+q/2)} e^{-iqa} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + T \left(Q - \frac{q}{2} \right) T \left(Q + \frac{q}{2} \right) e^{-i\alpha(Q-q/2)} e^{i\alpha(Q+q/2)} e^{iqb} \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2Q^2} \left[-e^{iqa} + R \left(Q + \frac{q}{2} \right) e^{i\beta(Q+q/2)} e^{-i2Qa} - R \left(Q - \frac{q}{2} \right) e^{-i\beta(Q-q/2)} e^{i2Qa} \right. \right. \\
 & \left. \left. + R \left(Q - \frac{q}{2} \right) R \left(Q + \frac{q}{2} \right) e^{-i\beta(Q-q/2)} e^{i\beta(Q+q/2)} e^{-iqa} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + T \left(Q - \frac{q}{2} \right) T \left(Q + \frac{q}{2} \right) e^{-i\alpha(Q-q/2)} e^{i\alpha(Q+q/2)} e^{iqb} \right] \right\} \quad (8.30)
 \end{aligned}$$

Ao expandirmos as exponenciais e devido à $\delta(q)$, obtemos

$$\begin{aligned}
 I_2 = & \frac{m}{\hbar} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} dQ d\varphi \varphi^* \left(Q - \frac{q}{2} \right) \varphi \left(Q + \frac{q}{2} \right) \frac{1}{Q} \delta(q) \times \\
 & \times \left\{ \frac{1}{q} \left[-e^{iqa} + R \left(Q - \frac{q}{2} \right) R^* \left(Q + \frac{q}{2} \right) e^{-i\beta(Q-q/2) + i\beta(Q+q/2) - iqa} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + T^* \left(Q + \frac{q}{2} \right) T \left(Q - \frac{q}{2} \right) e^{+i\alpha(Q-q/2) + iqb} \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2Q} \left[R^* \left(Q + \frac{q}{2} \right) e^{i\beta(Q+q/2)} e^{-i2Qa} - R \left(Q - \frac{q}{2} \right) e^{-i\beta(Q-q/2)} e^{i2Qa} \right] \right\}. \quad (8.31)
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 |R|^2 \frac{1}{q} (1 - iqa + i\beta^0 q + \dots) &= |R|^2 [1 + i(-a + \beta^0) + \dots] = |R|^2 + i |R|^2 (-a + \beta^0) \\
 |T|^2 \frac{1}{q} (1 + iqb + i\alpha^0 q + \dots) &= |T|^2 [1 + i(b + \alpha^0) + \dots] = |T|^2 + i |T|^2 (b + \alpha^0) \\
 -e^{iqa} \frac{1}{q} &= -\frac{1}{q} (1 + iqa + \dots) = -(1 + ia + \dots), \quad (8.32) \\
 \text{sendo } |R|^2 + |T|^2 &= 1 \Rightarrow -e^{iqa} \frac{1}{q} = -|R|^2 - |T|^2 - i |R|^2 + |T|^2 a
 \end{aligned}$$

e

$$|R(Q)| e^{i\beta(Q)} e^{-i2Qa} - |R(Q)| e^{-i\beta(Q)} e^{i2Qa} = 2i |R(Q)| [\sin(\beta(Q) - 2Qa)] \quad (8.33)$$

temos

$$\begin{aligned}
 I_2 = & \frac{m}{\hbar} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} dQ \varphi^*(Q) \varphi(Q) \frac{1}{Q} \times \\
 & \times \left\{ -i |R|^2 + |T|^2 a + i |R|^2 [-a + \beta^0(Q)] + i |T|^2 [b + \alpha^0(Q)] + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{Q} |R(Q)| [\sin(\beta(Q) - 2Qa)] \right\}
 \end{aligned}$$

Com $Q \rightarrow k$, encontramos

$$\begin{aligned}
 I_2 = & - \frac{m}{\hbar} \int dk |\varphi(k)|^2 \frac{1}{k} \times \\
 & \times \{ |R|^2 [-2a + \beta^u(k)] + |T|^2 [b - a + \alpha^u(k)] + \\
 & + \frac{1}{k} |R(k)| [\sin(\beta(k) - 2ka)] \}. \tag{8.34}
 \end{aligned}$$

Voltando à equação (8.5), e com a ajuda de (8.12) e (8.34) :

$$I_1 = -I_2$$

$$\begin{aligned}
 \tau_D(k) = & |T|^2 \tau_T + |R|^2 \tau_R + \\
 & + \frac{m}{\hbar k} |R(k)| [\sin(\beta(k) - 2ka)], \tag{8.35}
 \end{aligned}$$

que é a relação (5.9) obtida por Hauge et al. [4] para o tempo de permanência.

Referências Bibliográficas

- [1] Aquino V.M., Aguilera-Navarro V. C., Goto M.e Iwamoto H, Phys. Rev. A 58, 4359 (1998).
- [2] Hartman T. E., J. Appl. Phys. 33, 3427 (1962).
- [3] Büttiker M. e Landauer R., Phys. Scripta 32, 429 (1985).
- [4] Hauge E. H., Falck J. P. e Fjeldly T. A., Phys. Rev. B 36, 4203 (1987)
- [5] Hauge E. H. e Støvneng, Rev. Phys. 61, 917 (1989).
- [6] Büttiker M., Phys. Rev. B 27, 6178 (1983).
- [7] Goto M., Iwamoto H., Aquino V. M. e Aguilera-Navarro V. C., International Journal of Theoretical Physics 41, 877 (2002).
- [8] Goto M., Iwamoto H., Aquino V. M. e Aguilera-Navarro V. C. e Kobe D. H., J. Phys. A: Math. Gen. 37, 3599 (2004).
- [9] Eisberg R. e Resnick R., Física Quântica, editora Campus, 9ª reimpressão, 865 (1994).
- [10] Aquino V. M., Aguilera-Navarro V. C., Goto M. e Iwamoto H. Notas de Física (Junho de 1998).
- [11] Abramovitz M. e Stegun I., Handbook of Mathematical Functions (1970).
- [12] Erdélyi A., Assymptotic Expansions, Dover, New York (1956).
- [13] Gasiorowicz S., Física Quântica, Guanabara Dois, Rio de Janeiro (1979).

[14] Wigner E. P., Phys. Rev. 98, 145 (1955).

[15] Smith F. T., Phys. Rev. 118, 349 (1960).

[16] Leavens C. R., Phys. Rev. A 58, 840 (1998).