



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

ADRIANO MATHEUS TARGINO DE AZEVEDO

**UM NOVO ESQUEMA UPWIND FUNDAMENTADO NA  
SÉRIE DE FOURIER PARA AS EQUAÇÕES DE NAVIER-  
STOKES**

---

Londrina  
2016

ADRIANO MATHEUS TARGINO DE AZEVEDO

**UM NOVO ESQUEMA UPWIND FUNDAMENTADO NA  
SÉRIE DE FOURIER PARA AS EQUAÇÕES DE NAVIER-  
STOKES**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Eliandro Rodrigues Cirilo

Londrina  
2016

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da  
Universidade Estadual de Londrina**

**Dados Internacionais de Catalogação -na-Publicação (CIP)**

Azevedo, Adriano Matheus Targino de.

Um novo esquema upwind fundamentado na série de Fourier para as equações de Navier-Stokes / Adriano Matheus Targino de Azevedo. – Londrina, 2016.

139 f. : il.

Orientador: Eliandro Rodrigues Cirilo.

Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2016.

Inclui Bibliografia.

1. Navier-Stokes - Teses. 2. Termos Convectivos - Teses. 3. Série de Fourier - Teses. 4. Coordenadas Generalizadas - Teses. I. Cirilo, Eliandro Rorigues. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

ADRIANO MATHEUS TARGINO DE AZEVEDO

**UM NOVO ESQUEMA UPWIND FUNDAMENTADO NA  
SÉRIE DE FOURIER PARA AS EQUAÇÕES DE NAVIER–  
STOKES**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Orientador: Prof. Dr. Eliandro Rodrigues Cirilo  
Universidade Estadual de Londrina – UEL

---

Prof. Dra. Neyva Maria Lopes Romeiro  
Universidade Estadual de Londrina – UEL

---

Prof. Dr. Rafael Alves Bonfim de Queiroz  
Universidade Federal de Juiz de Fora – UEL

Londrina, 31 de março de 2016.

*À minha amada mãe, in memoriam.*

## AGRADECIMENTOS

A Jah, pelo fôlego de vida e inspiração que me permitiram elaborar este trabalho. Pela força concedida para superar todas as dificuldades e desafios que me foram postos à prova no decorrer desses dois anos. Sobretudo, por ter colocado pessoas especiais em minha vida, as quais sempre me fizeram lembrar que eu não caminhava só.

Ao meu pai, meu melhor amigo, exemplo, ídolo e herói. Por ter me encorajado a perseguir um sonho e mergulhar de cabeça rumo ao desconhecido, minha eterna gratidão.

À minha magnólia, Amanda Letícia Soares. Minha estrela-guia e razão da minha existência, por me tornar uma pessoa melhor a cada dia, fazendo-me enxergar o mundo com outros olhos e apreciar o lado bom da vida.

Ao meu grande amigo e irmão, Adolfo Di Angelly Moreira, sempre presente nos momentos mais importantes da minha vida. Sinônimo de uma amizade sincera e verdadeira e com o qual tenho o orgulho e a honra de conviver.

Ao amigo e filósofo Juliano de Souza, pelas orações e sábias palavras de incentivo.

Aos amigos Carlos Eduardo Miranda e Eduardo Henrique Gomes Tavares, pela enriquecedora harmonia diária, compartilhando conhecimentos, descontrações, vitórias, alegrias, angústias e tristezas. Com certeza essa guerra não seria vencida com a vossa ausência!

Ao professor e orientador Eliandro Rodrigues Cirilo, pelo apoio, ensinamentos, disposição, confiança, paciência e compreensão constantes.

Ao professor e amigo Rogério Luis Rizzi, por ter acreditado em meu potencial desde o início.

Ao amigo Israel Emanuá de Matos, pela parceria contínua e frequente companhia das refeições.

Ao colega e eterno veterano, Péttersen Vinícius Pramiu, pelo auxílio em tópicos fundamentais para a conclusão deste trabalho.

Ao amigo e companheiro Robson Gaebler (*in memoriam*). Impossível não lembrá-lo ao recordar essa penosa trajetória...

À CAPES, pelo amparo financeiro parcial concedido para o desenvolvimento deste trabalho.

*“Nunca pare de acreditar! Tentar e falhar não é uma vergonha, esteja pronto para se levantar e começar de novo. A vida torna-se cruel às vezes, mas ainda posso lutar com um sorriso. [...] Com os meus defeitos, resisto. Meus sonhos, minha fé, completam-me. [...] Sonhar me faz sentir vivo!”*

*Dreamshade*

AZEVEDO, Adriano Matheus Targino de. Um novo esquema upwind fundamentado na série de Fourier para as equações de Navier-Stokes. 2016. 139 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

## RESUMO

Este trabalho tem por objetivo desenvolver um esquema aproximativo não linear de alta resolução para o tratamento dos termos convectivos das equações de Navier-Stokes, extensivamente utilizadas como referência para a modelagem de escoamentos de fluidos. Para isso, a abordagem numérica das equações é realizada tomando por base o método de diferenças finitas e a discretização do domínio, restrito ao caso bidimensional, é feita por intermédio de malhas do tipo deslocada, escritas no sistema de coordenadas generalizadas. O esquema convectivo proposto é idealizado sob a estratégia upwind e fundamentado na série de Fourier de uma extensão ímpar obtida a partir do esquema CUBISTA (Convergent and Universally Bounded Interpolation Scheme for the Treatment of Advection). Soluções aproximadas para os problemas de valor inicial e de contorno foram obtidas para escoamentos laminares confinados, incompressíveis e isotérmicos. Essas soluções, avaliadas em cada ponto de interesse do domínio computacional foram, então, comparadas com dados disponíveis na literatura.

**Palavras-chave:** Navier-Stokes. Termos convectivos. Upwind. Série de Fourier. Coordenadas generalizadas.

AZEVEDO, Adriano Matheus Targino de. A new upwind scheme based on the Fourier series for the Navier-Stokes equations. 2016. 139 p. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

### **ABSTRACT**

This work aims to develop an approximate nonlinear high resolution scheme for the treatment of the convective terms of the Navier-Stokes equations, extensively used as reference for modeling fluid flow. For this, the numerical approach of the equations is performed based on the finite difference method and the domain discretization, restricted to two-dimensional case, is made through staggered grids, written in the curvilinear coordinate system. The proposed convective scheme is designed under the upwind strategy and established on an odd extension of the Fourier series obtained from the CUBISTA (Convergent and Bounded Universally Interpolation Scheme for the Treatment of Advection) scheme. Approximate solutions to the initial value and boundary problems were obtained for isothermal and incompressible laminar confined flows. These solutions, evaluated at each point of interest of the computational domain, were then compared with data available in the literature.

**Keywords:** Navier-Stokes. Convective terms. Upwind. Fourier series. Curvilinear coordinates.

## LISTA DE FIGURAS

2.1	Correspondência discreta entre os pontos dos planos físico e transformado . . .	24
3.1	Perfil monótono e não monótono de solução . . . . .	29
3.2	Representação do domínio computacional . . . . .	30
3.3	Representação do domínio computacional deslocado mostrando o $i$ -ésimo volume de controle, cujas fronteiras são indicadas pelas linhas tracejadas $x_{i-\frac{1}{2}}$ e $x_{i+\frac{1}{2}}$ . . . . .	31
3.4	Representação esquemática para se obter aproximações para a derivada convectiva mostrando o ponto $i$ de discretização e seus vizinhos, as faces que definem o $i$ -ésimo volume de controle e o sentido da velocidade de convecção $u$ na face $i + \frac{1}{2}$ . . . . .	34
3.5	Estêncil do esquema FOU para a equação de advecção 1D . . . . .	36
3.6	Estêncil do esquema SOU para a equação de advecção 1D . . . . .	39
3.7	Estêncil do esquema QUICK para a equação de advecção 1D . . . . .	41
3.8	Representação dos esquemas convectivos <i>upwind</i> clássicos FOU, SOU e QUICK no diagrama de variáveis normalizadas NVD . . . . .	45
3.9	Diagrama CBC em variáveis normalizadas no plano- $\hat{\phi}_U \hat{\phi}_f$ . . . . .	47
3.10	Diagrama TVD em variáveis normalizadas no plano- $\hat{\phi}_U \hat{\phi}_f$ . . . . .	48
3.11	Representação do esquema CUBISTA no diagrama NVD . . . . .	51
3.12	Estêncil do esquema CUBISTA para a equação de advecção 1D no intervalo $(0.75, 1)$ , com $u > 0$ e $u < 0$ . . . . .	53
3.13	Representação da função (3.51) no plano- $\hat{\phi}_U f(\hat{\phi}_U)$ , com $0 < \hat{\phi}_U \leq 2$ . . . . .	55
3.14	Extensão ímpar de (3.51), com $-2 \leq \hat{\phi}_U \leq 2$ . . . . .	56
3.15	Gráfico da $m$ -ésima soma parcial da série de Fourier da extensão ímpar $F_1(\hat{\phi}_U)$ (3.53) para alguns valores de $m \in \mathbb{N}$ , com $0 < \hat{\phi}_U < 1$ . . . . .	61
3.16	Representação do esquema CUBISTA-FOURIER no interior da região TVD . . . . .	64
4.1	Malha do tipo deslocada no sistema generalizado $(\xi, \eta)$ . . . . .	65
4.2	Estrutura de identificação $(i, j)$ para a célula de centro P . . . . .	66
4.3	Discretização do termo temporal $\mathcal{T}(u)$ na face $e$ . . . . .	69
4.4	Discretização do termo temporal $\mathcal{T}(v)$ na face $n$ . . . . .	69
4.5	Discretização do termo de pressão $\mathcal{P}(u)$ na face $e$ . . . . .	70
4.6	Pontos utilizados para estimar a pressão nos vértices $ne$ e $se$ da $i$ -ésima célula . . . . .	71
4.7	Discretização do termo de pressão $\mathcal{P}(v)$ na face $n$ . . . . .	72
4.8	Pontos utilizados para estimar a pressão no vértice $nw$ da $i$ -ésima célula . . . . .	72

4.9	Discretização do termo difusivo $\mathcal{D}_1(u)$ na face $e$ . . . . .	73
4.10	Discretização das derivadas $u_\xi$ e $u_\eta$ , pertencentes ao termo $\mathcal{D}_1(u)$ , no ponto E .	74
4.11	Discretização das derivadas $u_\xi$ e $u_\eta$ , pertencentes ao termo $\mathcal{D}_1(u)$ , no ponto P .	74
4.12	Pontos utilizados para estimar a componente cartesiana $u$ do vetor velocidade, pertencente ao termo $\mathcal{D}_1(u)$ , nas faces horizontais $nee$ , $see$ , $n$ e $s$ . . . . .	75
4.13	Discretização do termo difusivo $\mathcal{D}_2(u)$ na face $e$ . . . . .	76
4.14	Discretização das derivadas $u_\xi$ e $u_\eta$ , pertencentes ao termo $\mathcal{D}_2(u)$ , no ponto $ne$	77
4.15	Discretização das derivadas $u_\xi$ e $u_\eta$ , pertencentes ao termo $\mathcal{D}_2(u)$ , no ponto $se$	77
4.16	Discretização do termo difusivo $\mathcal{D}(v)$ na face $n$ . . . . .	78
4.17	Discretização das derivadas $v_\xi$ e $v_\eta$ pertencentes ao termo $\mathcal{D}_1(v)$ . . . . .	79
4.18	Discretização das derivadas $v_\xi$ e $v_\eta$ pertencentes ao termo $\mathcal{D}_2(v)$ . . . . .	80
4.19	Pontos utilizados para estimar a componente cartesiana $v$ do vetor velocidade, pertencente ao termo $\mathcal{D}(v)$ , nas faces verticais $nne$ , $e$ , $nnw$ e $w$ . . . . .	81
4.20	Representação esquemática para se obter aproximações para as derivadas convectivas das equações de Navier-Stokes mostrando o ponto $i$ de discretização e seus vizinhos, a face $f$ da célula $(i, j)$ e o sentido da velocidade de convecção $\bar{U}$ na face $f$ . . . . .	82
4.21	Discretização do termo convectivo $\mathcal{C}(u)$ na face $e$ . . . . .	83
4.22	Pontos utilizados para determinar as velocidades de convecção $\bar{U}_E^k$ , $\bar{U}_P^k$ , $\bar{V}_{ne}^k$ e $\bar{V}_{se}^k$ pertencentes ao termo convectivo $\mathcal{C}(u)$ discretizado na face $e$ da $i$ -ésima célula . . . . .	84
4.23	Pontos da malha utilizados para aproximar a componente $u$ do vetor velocidade no ponto E e no nível de tempo $k$ , $k \geq 0$ , por meio do esquema CUBISTA-FOURIER . . . . .	85
4.24	Pontos da malha utilizados para aproximar a componente $u$ do vetor velocidade no ponto P e no nível de tempo $k$ , $k \geq 0$ , por meio do esquema CUBISTA-FOURIER . . . . .	86
4.25	Pontos da malha utilizados para aproximar a componente $u$ do vetor velocidade no ponto $ne$ e no nível de tempo $k$ , $k \geq 0$ , por meio do esquema CUBISTA-FOURIER . . . . .	87
4.26	Pontos da malha utilizados para aproximar a componente $u$ do vetor velocidade no ponto $se$ e no nível de tempo $k$ , $k \geq 0$ , por meio do esquema CUBISTA-FOURIER . . . . .	88
4.27	Discretização do termo convectivo $\mathcal{C}(u)$ na face $n$ . . . . .	89
4.28	Pontos utilizados para determinar as velocidades de convecção $\bar{U}_{ne}^k$ , $\bar{U}_{nw}^k$ , $\bar{V}_N^k$ e $\bar{V}_P^k$ pertencentes ao termo convectivo $\mathcal{C}(u)$ discretizado na face $n$ da $i$ -ésima célula . . . . .	89

4.29	Pontos da malha utilizados para aproximar a componente $u$ do vetor velocidade no ponto $ne$ e no nível de tempo $k, k \geq 0$ , por meio do esquema CUBISTA–FOURIER . . . . .	90
4.30	Pontos envolvidos no cálculo das médias aritméticas utilizadas para estimar a componente $u$ do vetor velocidade no ponto $ne$ e no nível de tempo $k, k \geq 0$ , pertencente ao termo convectivo $\mathcal{C}(u)$ discretizado na face $n$ . . . . .	91
4.31	Pontos da malha utilizados para aproximar a componente $u$ do vetor velocidade no ponto $nw$ e no nível de tempo $k, k \geq 0$ , por meio do esquema CUBISTA–FOURIER . . . . .	92
4.32	Pontos da malha utilizados para aproximar a componente $u$ do vetor velocidade no ponto N e no nível de tempo $k, k \geq 0$ , por meio do esquema CUBISTA–FOURIER . . . . .	93
4.33	Pontos da malha utilizados para aproximar a componente $u$ do vetor velocidade no ponto P e no nível de tempo $k, k \geq 0$ , por meio do esquema CUBISTA–FOURIER . . . . .	94
4.34	Discretização do termo convectivo $\mathcal{C}(v)$ na face $n$ . . . . .	95
4.35	Pontos utilizados para determinar as velocidades de convecção $\bar{U}_{ne}^k, \bar{U}_{nw}^k, \bar{V}_N^k$ e $\bar{V}_P^k$ pertencentes ao termo convectivo $\mathcal{C}(v)$ discretizado na face $n$ da $i$ -ésima célula . . . . .	95
4.36	Pontos da malha utilizados para aproximar a componente $v$ do vetor velocidade no ponto $ne$ e no nível de tempo $k, k \geq 0$ , por meio do esquema CUBISTA–FOURIER . . . . .	96
4.37	Pontos da malha utilizados para aproximar a componente $v$ do vetor velocidade no ponto $nw$ e no nível de tempo $k, k \geq 0$ , por meio do esquema CUBISTA–FOURIER . . . . .	97
4.38	Pontos da malha utilizados para aproximar a componente $v$ do vetor velocidade no ponto N e no nível de tempo $k, k \geq 0$ , por meio do esquema CUBISTA–FOURIER . . . . .	98
4.39	Pontos da malha utilizados para aproximar a componente $v$ do vetor velocidade no ponto P e no nível de tempo $k, k \geq 0$ , por meio do esquema CUBISTA–FOURIER . . . . .	98
4.40	Discretização do termo convectivo $\mathcal{C}(v)$ na face $e$ . . . . .	99
4.41	Pontos utilizados para determinar as velocidades de convecção $\bar{U}_E^k, \bar{U}_P^k, \bar{V}_{ne}^k$ e $\bar{V}_{se}^k$ pertencentes ao termo convectivo $\mathcal{C}(v)$ discretizado na face $e$ da $i$ -ésima célula . . . . .	100
4.42	Pontos da malha utilizados para aproximar a componente $v$ do vetor velocidade no ponto E e no nível de tempo $k, k \geq 0$ , por meio do esquema CUBISTA–FOURIER . . . . .	100

4.43	Pontos envolvidos no cálculo das médias aritméticas utilizadas para estimar a componente $v$ do vetor velocidade no ponto E e no nível de tempo $k$ , $k \geq 0$ , pertencente ao termo convectivo $\mathcal{C}(v)$ discretizado na face $e$ . . . . .	102
4.44	Pontos da malha utilizados para aproximar a componente $v$ do vetor velocidade no ponto P e no nível de tempo $k$ , $k \geq 0$ , por meio do esquema CUBISTA–FOURIER . . . . .	103
4.45	Pontos da malha utilizados para aproximar a componente $v$ do vetor velocidade no ponto $ne$ e no nível de tempo $k$ , $k \geq 0$ , por meio do esquema CUBISTA–FOURIER . . . . .	104
4.46	Pontos da malha utilizados para aproximar a componente $v$ do vetor velocidade no ponto $se$ e no nível de tempo $k$ , $k \geq 0$ , por meio do esquema CUBISTA–FOURIER . . . . .	105
5.1	Domínio do problema do escoamento laminar entre duas placas paralelas . . . . .	112
5.2	Perfil da magnitude da velocidade para a malha G5, com $\tau = 30s$ . . . . .	114
5.3	Perfil de velocidades na seção de saída para o problema do escoamento entre duas placas paralelas . . . . .	115
5.4	Comparativo qualitativo do divergente numérico máximo entre os esquemas FOU e CUBISTA–FOURIER para as malhas G1 – G3 . . . . .	116
5.5	Comparativo qualitativo do divergente numérico máximo entre os esquemas FOU e CUBISTA–FOURIER para as malhas G4 e G5 . . . . .	117
5.6	Domínio do problema do escoamento laminar em cavidade com tampa deslizante	118
5.7	Distribuição do campo de velocidades para o problema do escoamento em cavidade com parede superior em movimento, com $Re = 100$ e $\tau = 50s$ . . . . .	119
5.8	Distribuição do campo de velocidades para o problema do escoamento em cavidade com parede superior em movimento, com $Re = 400$ e $\tau = 50s$ . . . . .	120
5.9	Distribuição do campo de velocidades para o problema do escoamento em cavidade com parede superior em movimento, com $Re = 1000$ e $\tau = 50s$ . . . . .	121
5.10	Domínio do problema do escoamento laminar através de um orifício . . . . .	122
5.11	Malha do problema do escoamento envolvendo placa de orifício . . . . .	123
5.12	Perfil da magnitude da velocidade para o problema do escoamento envolvendo placa de orifício . . . . .	124
5.13	Variação da velocidade e da pressão, em função do deslocamento espacial L, para o esquema CUBISTA–FOURIER, com $\tau = 100s$ . . . . .	125
5.14	Domínio do problema do escoamento laminar aplicado à hemodinâmica . . . . .	126
5.15	Perfil da magnitude da velocidade para o problema do escoamento aplicado à hemodinâmica, com $Re = 211$ . . . . .	127

5.16	Comparativo qualitativo da variação da velocidade e da pressão, em função do deslocamento espacial $D$ , entre os esquemas FOU e CUBISTA–FOURIER, com $Re = 211$ . . . . .	128
5.17	Perfil da magnitude da velocidade para o problema do escoamento aplicado à hemodinâmica, com $Re = 390$ . . . . .	129
5.18	Mapa das linhas de corrente para o problema do escoamento aplicado à hemodinâmica, com $Re = 390$ . . . . .	129
5.19	Comparativo qualitativo da variação da velocidade, em função do deslocamento espacial $D$ , entre os esquemas FOU e CUBISTA–FOURIER, com $Re = 390$ . .	130
5.20	Comparativo qualitativo da variação da pressão, em função do deslocamento espacial $D$ , entre os esquemas FOU e CUBISTA–FOURIER, com $Re = 390$ . .	131
5.21	Ampliação da variação da pressão, em função do deslocamento espacial $D$ , para o esquema CUBISTA–FOURIER, com $Re = 390$ . . . . .	131

## LISTA DE TABELAS

3.1	$m$ -ésima soma parcial da série de Fourier da extensão ímpar $F_1(\hat{\phi}_U)$ (3.53) para valores arbitrários de $m \in \mathbb{N}$ , com $\hat{\phi}_U = 1$ e truncamento de oito casas decimais	60
3.2	Estimativa para $H_1$ em $\hat{\phi}_U = 0.01$ e $\hat{\phi}_U = 0.1$ , com $m \in \mathbb{N}$ ímpar e truncamento de oito casas decimais . . . . .	62
3.3	Comparativo da $m$ -ésima soma parcial da série de Fourier (3.59) avaliada para valores próximos de $\hat{\phi}_U = 1$ , com $m = 22, 26, 30, 34, 38$ e truncamento de oito casas decimais . . . . .	63
5.1	Quantidade de elementos considerados na construção das malhas para a simulação do problema do escoamento entre duas placas paralelas . . . . .	113
5.2	Comparativo de convergência via velocidade da corrente livre numérica entre os esquemas FOU e CUBISTA–FOURIER . . . . .	114
5.3	Comparativo quantitativo do divergente numérico máximo entre os esquemas FOU e CUBISTA–FOURIER para o problema do escoamento entre duas placas paralelas . . . . .	118
5.4	Posição $(x, y)$ do centro do vórtice primário . . . . .	121
5.5	Comparativo quantitativo do divergente numérico máximo entre os esquemas FOU e CUBISTA–FOURIER para o problema do escoamento em cavidade com tampa deslizante . . . . .	122
5.6	Comparativo quantitativo do divergente numérico máximo entre os esquemas FOU e CUBISTA–FOURIER para o problema do escoamento envolvendo placa de orifício . . . . .	126

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>EQUAÇÕES GOVERNANTES</b>	<b>21</b>
<b>3</b>	<b>ESQUEMAS UPWIND</b>	<b>27</b>
3.1	FUNDAMENTOS DAS DISCRETIZAÇÕES . . . . .	30
3.2	ESQUEMAS UPWIND DE PRIMEIRA E SEGUNDA ORDEM . . . . .	35
3.3	ESQUEMA UPWIND DE TERCEIRA ORDEM . . . . .	40
3.4	ESQUEMAS UPWIND DE ALTA RESOLUÇÃO . . . . .	42
3.4.1	Normalização de Variáveis . . . . .	43
3.4.2	CrITÉrios de Limitação . . . . .	46
3.5	ESQUEMA CUBISTA . . . . .	49
3.6	ESQUEMA UPWIND VIA SÉRIE DE FOURIER . . . . .	54
<b>4</b>	<b>MODELAGEM COMPUTACIONAL</b>	<b>65</b>
4.1	DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO . . . . .	68
4.1.1	Termos Não Convectivos . . . . .	68
4.1.2	Termos Convectivos . . . . .	81
4.2	MÉTODO MAC PARA ESCOAMENTOS CONFINADOS INCOMPRESSÍVEIS	105
<b>5</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>110</b>
5.1	ESCOAMENTO ENTRE DUAS PLACAS PARALELAS . . . . .	112
5.2	ESCOAMENTO EM CAVIDADE COM PAREDE SUPERIOR EM MOVIMENTO	118
5.3	ESCOAMENTO ENVOLVENDO PLACA DE ORIFÍCIO . . . . .	122
5.4	APLICAÇÃO À HEMODINÂMICA . . . . .	126
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>132</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>133</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Muitos dos processos naturais envolvem escoamentos de fluidos, cujos comportamentos despertam o interesse do homem desde os tempos remotos. Entre os séculos XV e XVIII, diversos estudos contribuíram para a concepção de uma ciência que trata do processo mecânico dos fluidos, dos quais é possível citar autores consagrados como Leonardo da Vinci (1452–1519), Galileu Galilei (1564–1642), Isaac Newton (1643–1727) e Daniel Bernoulli (1700–1782). No entanto, somente a partir do século XVIII é que as formulações matemáticas que retratam o movimento dos fluidos começaram a ser deduzidas, as quais só ganharam força no século XIX [22], em virtude do prelúdio da unificação entre a hidráulica experimental e a hidrodinâmica teórica [83].

Dependendo das características do fluido, os escoamentos são classificados como viscosos e não viscosos ou invíscidos<sup>1</sup>, cujos fenômenos físicos típicos de cada um dos casos são descritos matematicamente pelas equações de Navier-Stokes (Claude Navier, 1785–1836; George Stokes, 1819–1903) e pelas equações de Euler (Leonhard Euler, 1707–1783), respectivamente. No passado, era comum o uso de dois tipos de abordagens metodológicas para o estudo das leis da natureza: teórica (métodos analíticos) e experimental (em laboratório) [2, 25, 59]. Em particular, tais abordagens podem ser aplicadas na resolução de problemas de escoamentos governados por uma das duas equações diferenciais previamente citadas.

Embora a abordagem teórica possua a vantagem de fornecer soluções exatas, estas são possíveis para uma classe muito limitada de problemas, obtidas a partir de convenientes simplificações das equações governantes. Por sua vez, a experimentação em laboratório tem como premissa simular, com auxílio de dispositivos e instrumentos de medição, um experimento cuidadosamente projetado segundo um modelo do objeto real. No entanto, é muito restrita, dadas as dificuldades técnicas e, principalmente, o alto custo de implementação.

Por outro lado, devido aos avanços contínuos da tecnologia computacional desde a metade do século passado, a abordagem numérica (abordagem computacional) se instaurou no meio científico como uma terceira alternativa na resolução de problemas complexos, conectando as duas metodologias tradicionais e complementando os estudos teóricos e experimentais relacionados à dinâmica dos fluidos e transferência de calor [59].

A abordagem numérica praticamente não apresenta restrições, podendo resolver problemas com complicadas condições de contorno, definidos em geometrias arbitrárias e apresentando resultados com uma considerável rapidez. Como desvantagem, cita-se os erros numéricos, provenientes da má solução ou do uso inadequado das equações diferenciais governantes [48]. A simulação numérica em mecânica dos fluidos e transferência de calor, conhecida

---

<sup>1</sup>Escoamentos onde os efeitos da viscosidade são desprezados e, conseqüentemente, a viscosidade do fluido é hipoteticamente igual a zero. Fluidos com viscosidade nula não existem, porém, em muitos problemas a hipótese de inexistência das forças viscosas simplifica a análise e, ao mesmo tempo, incita resultados significativos [60]

como Dinâmica de Fluidos Computacional (DFC), utiliza métodos computacionais em busca de uma solução aproximada para o problema em estudo, superando as outras duas abordagens em alguns aspectos muito importantes, como universalidade, flexibilidade, precisão e custo [85].

Nessa perspectiva, a DFC surgiu no intuito de permitir a obtenção de soluções numéricas de qualidade para equações diferenciais parciais (EDPs) que regem o transporte de massa, momento e energia, relativos ao movimento dos fluidos, considerando ou não as trocas de calor. Com o aperfeiçoamento dos computadores digitais no início da década de 60, a DFC ganhou destaque e se expandiu a diversos ramos da ciência, sendo considerada atualmente uma referência tanto em pesquisa teórica quanto aplicada, bem como no projeto de equipamentos de engenharia e no cálculo de fenômenos ambientais e geofísicos [15].

No início da década de 70, o advento dos códigos computacionais (algoritmos) permitiu estabelecer a DFC como um componente essencial da prática de engenharia em organizações de cunho industrial, militar e ambiental [15]. Atualmente, graças aos computadores de alta velocidade e de grande capacidade de armazenamento, os princípios da DFC são rotineiramente empregados em projetos das indústrias aeronáutica e aeroespacial, automotiva, biomédica, eletrônica, marinha, nuclear, química, têxtil e de geração de energia. Destacam-se, também, aplicações nos campos da meteorologia, oceanografia, astrofísica, biologia, engenharia de reatores, recuperação de petróleo, arquitetura e na otimização do consumo de energia por meio de dispositivos de controle inteligente, dentre muitas outras [7, 25, 51].

A partir da metade da década de 80, a comunidade científica começou a se concentrar na simulação de escoamentos viscosos, governados pelas equações de Navier-Stokes e, desde então, uma das questões centrais da DFC é a representação numérica dos fluxos convectivos, característicos dessas equações [7]. Nessa perspectiva, modelos matemáticos são desenvolvidos partindo de dois pressupostos essenciais, a saber: eficiência computacional e resultados fisicamente coerentes [48]. Portanto, o modelo representativo do fenômeno físico em estudo deve ser tal que, tanto as equações quanto o domínio do problema em questão, sejam expressos adequadamente.

Como as equações de Navier-Stokes são classificadas como EDPs não lineares, e como a teoria matemática relativa a esta área se encontra em constante desenvolvimento, é muito difícil encontrar soluções analíticas para essas equações<sup>2</sup> quando se consideram regiões arbitrárias e condições de fronteira genéricas [22]. Logo, é indispensável o uso da simulação numérica para calcular uma solução aproximada para o problema em estudo governado pelas equações diferenciais de Navier-Stokes.

Para isso, torna-se necessário desenvolver esquemas numéricos de discretização, fundamentados em ferramentas clássicas utilizadas na resolução de EDPs em geral. No escopo da modelagem matemática, a aproximação dos fluxos convectivos nas equações de transporte influencia decisivamente a precisão global de qualquer solução numérica para um

---

<sup>2</sup>Soluções analíticas de alguns problemas envolvendo diferentes formas das equações de Navier-Stokes podem ser consultadas em [56, 67, 68, 69], dentre outros.

problema de escoamento de fluido [72]. Por conseguinte, esquemas numéricos específicos são idealizados a fim de tratar as não linearidades dos termos convectivos das equações governantes de Navier-Stokes, visando, ao mesmo tempo, obter uma alta ordem de precisão, manter a estabilidade da solução de maneira incondicional, capturar descontinuidades ou choques, minimizar o efeito da viscosidade artificial, ser convergente e de fácil implementação [16, 62].

É fato que, dos últimos anos até a atualidade, o objetivo maior é a precisão numérica e diversos esquemas convectivos idealizados sob a estratégia *upwind* foram e vêm sendo desenvolvidos para esse fim. Os esquemas *upwind* são classificados com relação à precisão em esquemas de primeira ou alta ordem. O esquema *upwind* de primeira ordem, na sua forma mais simples, foi apresentado pela primeira vez em [13] para a discretização das equações da dinâmica dos gases, tornando-se precursor na modelagem matemática de escoamentos. Outros esquemas *upwind* derivados dessa forma mais simples passaram a ser extensivamente utilizados na modelagem de escoamentos com diferentes características.

Um clássico esquema *upwind* de primeira ordem é o esquema FOU (*First-Order Upwinding*), atualmente associado àquele de 1952 [13], que é estável incondicionalmente e numericamente difusivo, fornecendo, frequentemente, soluções suaves. Dentre os de alta ordem, pode-se citar os esquemas de segunda ordem SOU (*Second-Order Upwinding*) [80] e de terceira ordem QUICK (*Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics*) [41], os quais, mesmo propiciando o acréscimo da precisão numérica, introduzem oscilações espúrias em pontos de descontinuidade, comprometendo a convergência.

Para controlar as oscilações não físicas indesejáveis resultantes da implementação dos esquemas de alta ordem e, ao mesmo tempo, garantir a convergência da solução numérica, critérios de limitação foram desenvolvidos, dando origem a uma nova classe de esquemas convectivos, denominada esquemas de alta resolução. Como exemplo, pode-se citar o esquema de terceira ordem CUBISTA (*Convergent and Universally Bounded Interpolation Scheme for the Treatment of Advection*) [1].

O termo alta resolução foi mencionado pela primeira vez em um artigo publicado em 1983 por Harten [29], e o conhecimento existente desde então impulsionou significativas melhorias dos métodos disponíveis [35]. Sua necessidade é uma consequência direta das propriedades não lineares de sistemas de leis de conservação hiperbólicos [40].

O objetivo proposto neste trabalho é desenvolver um esquema aproximativo não linear de alta resolução, idealizado sob a estratégia *upwind* de interpolação, para o tratamento dos termos convectivos das equações incompressíveis de Navier-Stokes.

Para cumprir esse propósito, discretiza-se as equações com base no método de diferenças finitas (MDF), amplamente aplicado à fluidodinâmica e cuja filosofia se resume em substituir as derivadas parciais das equações governantes por quocientes de diferenças algébricas, dando origem a um sistema de equações algébricas, o qual pode ser resolvido para as variáveis do campo de escoamento em um ponto de malha específico do domínio computacional. Para a aproximação dos termos convectivos, opta-se pela estratégia *upwind* de discretização.

Para a limitação do esquema, adota-se como referência o esquema *upwind* de alta resolução CUBISTA e, após algumas hipóteses assumidas e manipulações do cálculo diferencial e integral, obtém-se o novo esquema, cuja principal característica é a não linearidade atribuída a polinômios trigonométricos.

A viabilidade da proposta foi aferida com a simulação numérica de quatro problemas distintos, dos quais três desses – escoamento entre duas placas paralelas, escoamento em cavidade quadrada com parede superior em movimento e escoamento em duto contendo placa de orifício – são amplamente utilizados pela comunidade científica para a validação de metodologias numéricas. O quarto e último problema abordado é uma aplicação à área médica, no qual o objetivo foi retratar as principais estruturas fluidas do sistema hemodinâmico.

O texto está organizado como segue. No capítulo 2 se apresentam, em coordenadas generalizadas, as EDPs que regem os problemas estudados. No capítulo 3 são apresentados e brevemente resumidos alguns dos esquemas *upwind* clássicos para o tratamento da advecção. Além disso, desenvolve-se, em detalhes, um esquema convectivo não linear de alta resolução. O capítulo 4 descreve a metodologia numérica, com ênfase na discretização dos termos convectivos das equações governantes.

Por fim, o capítulo 5 se destina à apresentação dos resultados numéricos aos problemas previamente citados. Comentários sobre o trabalho desenvolvido, conclusões e indicações para possíveis trabalhos futuros são descritos no capítulo 6.

## 2 EQUAÇÕES GOVERNANTES

Para a modelagem de escoamentos de fluidos que satisfazem a hipótese do contínuo, faz-se uso de métodos de descrição para a consecutiva formulação das equações que regem o fenômeno físico de interesse. Tais equações são fundamentadas em premissas físicas universais, de modo que as propriedades de um escoamento em regime transiente ou estacionário possam ser descritas, por exemplo, por grandezas macroscópicas (variáveis de campo) como velocidade, pressão, densidade e temperatura, ambas funções contínuas das coordenadas espaciais e temporal de um elemento desse fluido [22].

Dependendo da natureza geométrica de um elemento de fluido, existem duas abordagens distintas para a descrição de um escoamento ao longo do tempo: Lagrangeana (descrição material) e Euleriana (descrição espacial). Enquanto na primeira as variáveis de campo são obtidas tendo como referência o deslocamento de uma partícula fluida individual, a segunda calcula as variáveis de campo no interior do elemento de fluido fixo no espaço. Por ser a mais usual em problemas de mecânica dos fluidos, neste trabalho se admite a descrição Euleriana e a respectiva forma diferencial das equações resultantes, a qual permite uma previsão ponto a ponto do campo de escoamento. A análise diferencial do escoamento pode ser obtida com detalhes em [14, 52, 60].

Como o modelo de fluxo utilizado para a dedução das equações governantes é fixo no espaço, segue que as leis físicas básicas que o restringem são expressas por equações escritas na forma conservativa<sup>3</sup>. Tal preferência é fundamentada essencialmente nas conclusões apresentadas pela comunidade científica em DFC acerca da qualidade dos resultados obtidos. Apesar das soluções numéricas serem deveras semelhantes (ou até mesmo idênticas no limite de malhas muito refinadas), tanto para equações escritas na forma conservativa quanto na forma não conservativa, é provado que, sob certas circunstâncias, a primeira adquire resultados qualitativamente e quantitativamente superiores [2, 17, 22].

Não obstante, atentando à complexidade daquelas equações, a obtenção de soluções analíticas se torna uma tarefa árdua. Esta dificuldade decorre, diversas vezes, das acelerações convectivas, representadas por termos não lineares. Visando facilitar a aquisição de soluções, formas alternativas para os modelos matemáticos se tornam necessárias, respaldadas nas características do fluido e perfil do escoamento estudado. Porém, mesmo simplificadas, a maioria das equações diferenciais governantes continuam sem resolução mediante ferramentas algébricas tradicionais e, nos casos limitados onde a solução existe, esta engloba erros de aproximação [17]. Sendo assim, torna-se imprescindível, do ponto de vista numérico, o auxílio de computadores na busca de soluções.

---

<sup>3</sup>A forma conservativa ou divergente de uma EDP é escrita de acordo com os coeficientes dos termos relativos aos fluxos, os quais podem ser constantes, aparecendo dentro do sinal da derivada, ou variáveis, e, neste caso, suas derivadas não se apresentam na equação [22, 48, 58].

Para o cálculo do campo de velocidades de um fluido em movimento, utilizam-se as equações de Navier-Stokes, as quais, dada sua importância, são extensivamente estudadas em mecânica dos fluidos, aplicáveis tanto a escoamentos laminares quanto turbulentos, bem como a fluidos compressíveis e incompressíveis. Considerando-se o caso tridimensional, as equações de Navier-Stokes para fluidos Newtonianos, na ausência de forças externas, são expressas, em notação indicial e em coordenadas cartesianas, por

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.1)$$

em que  $t$ ,  $\mu$ ,  $p = p(x, y, z, t)$  e  $\rho = \rho(x, y, z, t)$  representam o tempo, a viscosidade dinâmica, a pressão e a densidade ou massa específica<sup>4</sup>, respectivamente [17, 20]. Aqui, o coeficiente de viscosidade  $\mu$  é constante e uniforme, pois se consideram unicamente fluidos homogêneos.

A componente  $u_i$  em (2.1) corresponde à  $i$ -ésima componente do campo de velocidade  $\vec{u} = \vec{u}(x, y, z, t)$ , ou seja, denotando  $u_1 = u$ ,  $u_2 = v$  e  $u_3 = w$  como sendo as componentes escalares do vetor velocidade nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , nesta ordem, então

$$\vec{u} = u(x, y, z, t) \hat{i} + v(x, y, z, t) \hat{j} + w(x, y, z, t) \hat{k}.$$

As equações (2.1) fazem parte de um restrito conjunto de equações da física matemática no qual a não linearidade surge a partir dos aspectos matemáticos do problema, e não devido aos atributos físicos do sistema [20]. Podem ser reescritas na forma vetorial como

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u} \vec{u}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u}, \quad (2.2)$$

com  $\nabla$  o operador diferencial, o qual fornece o vetor gradiente ou o divergente quando aplicado a um campo escalar ou a um campo vetorial, respectivamente, e  $\nabla^2$  o operador Laplaciano.

Matematicamente, as equações de Navier-Stokes (2.2), combinadas à equação da continuidade sem termo-fonte,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) = 0, \quad (2.3)$$

constituem um conjunto de quatro equações acopladas nas variáveis  $u$ ,  $v$ ,  $w$  e  $p$  [17].

Assumindo-se que a massa específica de um elemento de fluido não é afetada pelas variações de pressão, isto é, assumindo-se o fluido incompressível, admite-se a massa específica  $\rho$  constante, sendo possível retirá-la do operador divergente. Assim, a equação (2.2) é

<sup>4</sup>A terminologia varia de acordo com o significado físico. Embora definidas de maneira análoga, a massa específica designa uma propriedade de um material maciço e, supostamente, homogêneo ao longo de todo o volume considerado para o cálculo. Em geral, para líquidos e gases ambas as expressões são consideradas sinônimas.

escrita preservando a forma conservativa como

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \nabla \left( \vec{u}\vec{u} - \frac{\mu}{\rho} \nabla \vec{u} \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (2.4)$$

Com um raciocínio análogo, a equação da continuidade (2.3) para um fluido incompressível é dada por

$$\nabla \vec{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.5)$$

implicando em um campo de velocidades com divergência nula, o qual designa uma condição de incompressibilidade. As equações de movimento (2.4) e (2.5) expressam, respectivamente, as leis físicas de conservação da quantidade de momento linear e de massa.

Ainda, por simplicidade, pode-se restringir a análise do escoamento para o caso bidimensional, reduzindo o sistema composto pelas equações (2.4) e (2.5) a três EDPs acopladas nas variáveis  $u$ ,  $v$  e  $p$ . Assim, utilizando o coeficiente de viscosidade cinemática  $\nu = \mu/\rho \geq 0$ , tem-se:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( uv - \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( uv - \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( uv - \nu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( vv - \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

Uma vez que muitos dos problemas físicos são descritos por meio de geometrias irregulares, e levando em consideração que o sistema de coordenadas cartesianas não retrata adequadamente a modelagem dessas geometrias, enfatiza-se a necessidade do uso de um sistema genérico de natureza não ortogonal para descrever os escoamentos [48].

O uso do sistema de coordenadas generalizadas é extremamente importante para mapear geometrias arbitrárias de um domínio físico limitado  $\Omega$ , tipicamente escritas no sistema cartesiano, de forma que a representação computacional da fronteira  $\partial\Omega$  dessas regiões adquira um caráter regular e ortogonal, coincidindo com o domínio transformado [19].

Para o caso particular 2D, a partir do plano físico, as coordenadas de um ponto qualquer no sistema generalizado  $(\xi, \eta)$  se relacionam diretamente com o sistema de coordenadas retangulares  $(x, y)$ , de maneira única, por meio das seguintes equações de transformação

$$\xi = \xi(x, y, t), \quad \eta = \eta(x, y, t), \quad \tau = \tau(t), \quad (2.7)$$

cujos mapeamento pode ser observado na figura 2.1.

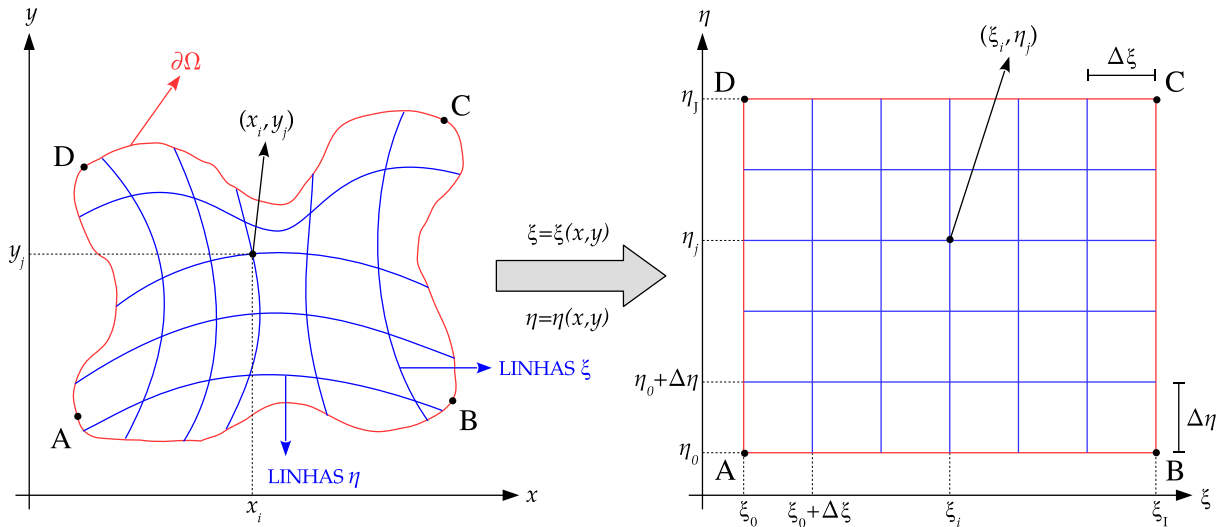


Figura 2.1: Correspondência discreta entre os pontos dos planos físico e transformado

O conjunto de pontos discretos

$$G = \{ \mathcal{P} \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 : \mathcal{P} = \mathcal{P}(\xi_i, \eta_j), i, j \in \mathbb{N} \},$$

com

$$\xi_i = \xi_0 + i\Delta\xi, 0 \leq i \leq I = i_{\max} \equiv n_i \in \mathbb{N} \text{ e } \eta_j = \eta_0 + j\Delta\eta, 0 \leq j \leq J = j_{\max} \equiv n_j \in \mathbb{N},$$

constitui o domínio transformado, representado por meio de uma malha computacional estruturada e uniforme, como mostra o lado direito da figura 2.1, utilizada no processo de obtenção da solução numérica.

De posse da transformação (2.7), as equações de conservação (2.6) são reescritas para o sistema curvilíneo de coordenadas generalizadas  $(\xi, \eta)$  preservando a forma conservativa e mantendo a interpretação física de cada termo. Os detalhes inerentes às transformações podem ser consultados em [4]. As equações de Navier-Stokes passam, então, a ser redigidas sob a forma:

- Direção  $\xi$ :

$$\begin{aligned} \overbrace{\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{u}{J} \right)}^{\text{TERMO TEMP.}} + \overbrace{\frac{\partial}{\partial \xi} (Uu) + \frac{\partial}{\partial \eta} (Vu)}^{\text{TERMO CONVECTIVO}} = \overbrace{\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right]}^{\text{TERMO DE PRESSÃO}} \\ + \underbrace{\nu \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right) \right]}_{\text{TERMO DIFUSIVO}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

- Direção  $\eta$ :

$$\begin{aligned}
 \overbrace{\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{v}{J} \right)}^{\text{TERMO TEMP.}} + \overbrace{\frac{\partial}{\partial \xi} (Uv) + \frac{\partial}{\partial \eta} (Vv)}^{\text{TERMO CONVECTIVO}} &= \overbrace{\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right]}^{\text{TERMO DE PRESSÃO}} \\
 + \underbrace{\nu \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial v}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial v}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \right) \right]}_{\text{TERMO DIFUSIVO}} &
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Nota-se que, além das componentes cartesianas da velocidade,  $u$  e  $v$ , e da pressão  $p$ , as equações (2.8) e (2.9) são formuladas também em termos das componentes contravariantes  $U$  e  $V$  do vetor velocidade, definidas como

$$U = u \frac{\partial y}{\partial \eta} - v \frac{\partial x}{\partial \eta} \quad \text{e} \quad V = -u \frac{\partial y}{\partial \xi} + v \frac{\partial x}{\partial \xi}, \tag{2.10}$$

e do Jacobiano da transformação,

$$J = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^{-1} \neq 0,$$

ambos expressos em termos das métricas inversas da transformação de coordenadas (2.7).

As constantes  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  presentes em (2.8) e (2.9) são os coeficientes de acoplamento entre as equações que geram as linhas  $\xi$  e  $\eta$  no interior da malha, dadas por [2, 48, 59]

$$\alpha = \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2, \quad \beta = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta}, \quad \gamma = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2. \tag{2.11}$$

Para o propósito deste trabalho, salienta-se que a malha computacional é fixa devido ao formalismo Euleriano adotado, ou seja, as coordenadas espaciais dos nós computacionais não se alteram com o passar do tempo. Por esse motivo, a função  $\tau$  em (2.7) pode ser reescrita simplesmente como  $\tau = t$ .

As componentes contravariantes (2.10) são normais às linhas coordenadas  $\xi$  e  $\eta$  do domínio físico [76]. Por essa razão, são responsáveis pela modelagem da preservação da massa no sistema curvilíneo de coordenadas. Assim, a equação da continuidade em (2.6) é reescrita em termos das componentes  $U$  e  $V$  como

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0, \tag{2.12}$$

condição válida para todo o domínio.

Embora a correspondente transformação de coordenadas  $(x, y, t) \rightarrow (\xi, \eta, t)$  incorpore erros adicionais aos resultados numéricos, devidos à discretização dos parâmetros que definem o mapeamento, torna-se possível concentrar as linhas da malha em partes do espaço

físico que retratam gradientes elevados. Inclusive, as malhas podem ser adaptadas conforme o problema físico em estudo, reduzindo o custo computacional e, ao mesmo tempo, contribuindo para a precisão da solução [19, 48]. Ademais, o mapeamento de domínios por coordenadas curvilíneas preserva a estrutura  $(i, j)$  de identificação nodal ao longo da malha [15].

Por fim, os problemas modelados neste trabalho representam escoamentos nos quais as mudanças locais de temperatura são desprezíveis ou até mesmo inexistentes e, portanto, admite-se o fluido em equilíbrio térmico, ou seja, isotérmico. Por conseguinte, as propriedades do fluido são consideradas constantes em relação à temperatura e, desta forma, o campo de pressão não pode ser determinado através de uma equação de estado termodinâmica, mas sim a partir de manipulações algébricas das equações governantes que exprimem as leis físicas de conservação.

Para fluidos incompressíveis, dispõe-se de uma abordagem desenvolvida em termos das variáveis primitivas  $u$ ,  $v$  e  $p$ , na qual, a partir de uma discretização explícita da evolução temporal das equações de momento, gera-se uma equação de correção do tipo Poisson para o cálculo da evolução temporal da pressão [22].

A técnica utilizada para resolver as equações (2.8), (2.9) e (2.12) faz uso do método MAC (*Marker-and-Cell*), de Harlow e Welch [28], o qual, neste trabalho, é adaptado para o sistema de coordenadas generalizadas, restrito a escoamentos sem superfícies livres, ou seja, escoamentos cujo fluido está plenamente cercado por paredes com entradas e saídas fixas no espaço, preenchendo todo o volume entre elas.

Diante do exposto, o sistema constituído pelas equações de Navier-Stokes (2.8) e (2.9), juntamente com a equação generalizada da continuidade (2.12), formam um sistema fechado de EDPs, o qual pode ser resolvido após a especificação de condições de contorno propícias ao problema modelado.

### 3 ESQUEMAS UPWIND

A dinâmica de um fluido pode ser descrita por meio de equações de advecção-difusão, cujos termos advectivos geralmente são dominantes. Esses termos são responsáveis por fenômenos complexos no escoamento, ocasionando, durante as simulações, dificuldades numéricas relativas à precisão, estabilidade e limitação das soluções [16]. Por esse motivo, a discretização das derivadas espaciais presentes nos termos convectivos das equações governantes requer uma atenção especial.

A utilização de aproximações convencionais por diferenças finitas e elementos finitos para discretizar termos convectivos introduzem oscilações artificiais, fornecendo soluções inconsistentes com a física do problema modelado [84]. Em particular, o uso de esquemas de diferenças centradas não fornece bons algoritmos, é incapaz de identificar a direção do escoamento e cria, praticamente de maneira generalizada, coeficientes negativos e, consequentemente, soluções não realísticas [48, 57, 79].

Para contornar a situação, a partir da década de setenta os esquemas de convecção *upwind* têm sido amplamente estudados e utilizados nas simulações numéricas, visando reduzir a viscosidade artificial e, ao mesmo tempo, derivar técnicas de discretização de alta ordem de consistência [16].

Computacionalmente, os esquemas *upwind* simulam o conceito físico da direção de propagação das informações de um campo de escoamento, como a direção de propagação de uma onda, no caso de problemas hiperbólicos. Beneficiando-se do valor conhecido dessa informação em um ponto de malha, empregam, naturalmente, uma técnica de diferenças finitas (explícita ou implícita) na discretização espacial do termo convectivo<sup>5</sup> [57]. Em resumo, a ideia principal desses esquemas é vincular a interpolação do fluxo numérico na interface de uma molécula computacional à direção e sentido locais do escoamento, isto é, ao sinal do vetor velocidade nessa interface.

Uma das grandes vantagens em se utilizar a metodologia *upwind* é a garantia do cumprimento das propriedades fundamentais e obrigatórias para que um esquema de discretização, aplicado a um número finito de células computacionais, conceba resultados fisicamente aceitáveis, a saber: conservação dos fluxos (convectivos ou difusivos) nas interfaces, positividade dos coeficientes<sup>6</sup> e sensibilidade à direção do escoamento [79].

Outra característica marcante de uma equação diferencial discretizada por um esquema de diferenças *upwind*, independente da precisão desse esquema, é que sua solução  $\varphi$  varia monotonicamente em regiões específicas do domínio computacional [43]. Harten [29]

<sup>5</sup>Por este motivo, os esquemas *upwind* são também conhecidos como esquemas de diferenças *upwind*.

<sup>6</sup>É desejável que os coeficientes das equações discretizadas sejam positivos, pois isto implica que a matriz dos coeficientes possua dominância diagonal e, assim, qualquer método iterativo pode ser utilizado para a resolução do sistema linear proveniente dessas equações [48].

afirma que uma condição suficiente para que a solução discreta  $\varphi$  seja monótona é dada por

$$\min(\varphi_{i-1}, \varphi_{i+1}) \leq \varphi_i \leq \max(\varphi_{i-1}, \varphi_{i+1}), \quad \forall i \in [0, i_{\max}], \quad (3.1)$$

desde que a monotonicidade da solução em qualquer nível de tempo  $k$ ,  $k \geq 0$ , garanta a monotonicidade dessa solução para o nível de tempo subsequente, isto é,

$$\varphi_i^k \geq \varphi_{i+1}^k, \quad \forall i \in [0, i_{\max}] \implies \varphi_i^{k+1} \geq \varphi_{i+1}^{k+1}, \quad \forall i \in [0, i_{\max}]. \quad (3.2)$$

Esquemas que satisfazem a condição (3.1), e portanto (3.2), são ditos esquemas que preservam monotonicidade e asseguram à solução numérica as seguintes propriedades:

- i)* máximos locais não-crescentes e mínimos locais não-decrescentes;
- ii)* a não concepção de novos extremos.

De acordo com Pulliam e Zingg [61], as propriedades *i)* e *ii)* oferecem benefícios ao esquema numérico. A primeira delas proporciona estabilidade, acarretando soluções discretas limitadas. Já a segunda viabiliza robustez, evitando oscilações artificiais devido à conservação da positividade de determinadas grandezas pertinentes ao escoamento, como pressão e densidade, por exemplo.

Segundo Harten [31], a condição de monotonicidade da solução  $\varphi$  em função do tempo é expressa idealmente quando a forma geral de um esquema numérico explícito de diferenças finitas com  $l + r + 1$  pontos, aplicado a uma lei de conservação<sup>7</sup> hiperbólica escalar

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0,$$

com  $F = F(\varphi) \in C^1$  a função fluxo na direção  $x$ , é escrita na forma

$$\varphi_i^{k+1} = \mathbf{G}(\varphi_{i-l}^k, \varphi_{i-l+1}^k, \dots, \varphi_{i+r}^k) = \sum_{p=-l}^r c_p \varphi_{i+p}^k, \quad (3.3)$$

em que  $l, r \in \mathbb{Z}_+$  e  $c \in \mathbb{R}^*$  dependem do esquema considerado,  $\mathbf{G}$  é uma função contínua e  $\varphi_i^k$  é uma aproximação para a solução exata, avaliada na posição  $i$ ,  $0 \leq i \leq I = i_{\max}$ , e no nível de tempo  $k$ ,  $k \geq 0$ , de uma malha computacional. Desse modo, diz-se que o esquema de discretização (3.3) é monótono desde que  $\mathbf{G}$  seja uma função não-decrescente levando em consideração cada um dos seus  $l + r + 1$  argumentos, isto é,

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \varphi_j}(\varphi_{i-l}, \varphi_{i-l+1}, \dots, \varphi_{i+r}) \geq 0, \quad \forall i - l \leq j \leq i + r. \quad (3.4)$$

<sup>7</sup>Matematicamente, uma lei de conservação afirma que a taxa de variação da quantidade total de uma substância contida em alguma região fixa é igual ao fluxo dessa substância que atravessa as fronteiras dessa região.

Ainda em seu trabalho, Harten [31] conclui que a convergência das soluções de esquemas monótonos escritos na forma (3.3) sempre correspondem à solução física ideal, justificada pela relação existente entre a monotonicidade dessas soluções e a presença de termos viscosos nas equações a serem discretizadas. Além disso, mostra que a precisão desses esquemas é, necessariamente, de primeira ordem. Por fim, em [29] Harten enuncia e demonstra um teorema que relaciona esquemas monótonos com as propriedades *i*) e *ii*), do qual é possível inferir o seguinte corolário.

**Corolário 3.1.** *Todo esquema monótono é um esquema que preserva monotonicidade.*

Desse resultado, segue que as propriedades *i*) e *ii*) de monotonicidade (da solução) são garantidas para quaisquer esquema monótono de primeira ordem de precisão.

A figura 3.1 retrata o comportamento não oscilatório de uma solução numérica  $\varphi$  obtida por meio de um esquema monótono.

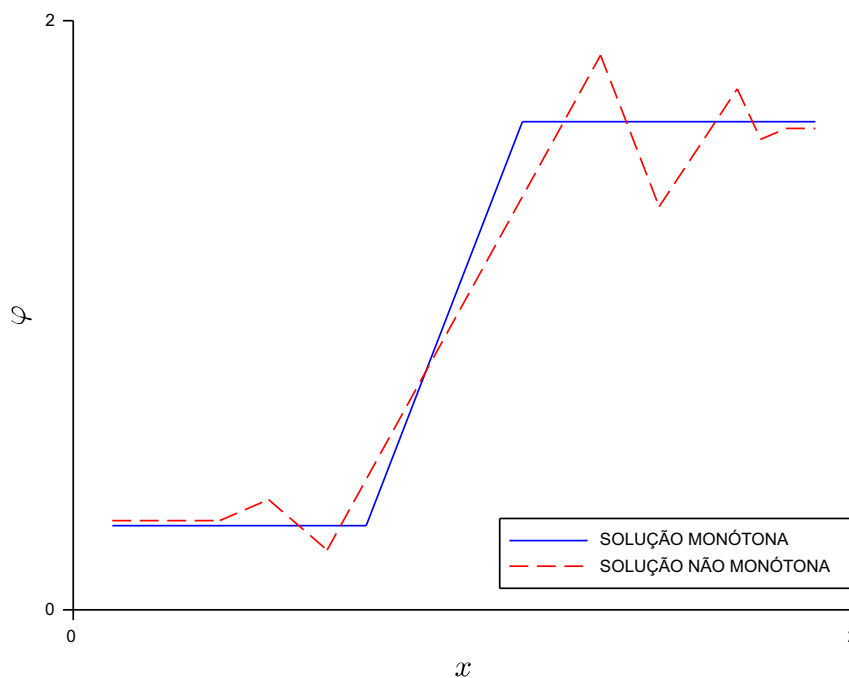


Figura 3.1: Perfil monótono e não monótono de solução

Embora o perfil monótono seja desejável para que a correspondente solução numérica seja fisicamente consistente, a recíproca do corolário 3.1 somente é válida para o caso de esquemas de discretização lineares<sup>8</sup>. Entretanto, é possível desenvolver esquemas de diferenças finitas não lineares, decorrentes de discretizações não lineares, com precisão maior que um e que preservam monotonicidade [71].

No que se segue, discute-se brevemente alguns esquemas *upwind* clássicos disponíveis na literatura, bem como suas respectivas formulações explícitas via diferenças fini-

<sup>8</sup>Um esquema de discretização linear é um esquema que dá origem a um sistema de equações lineares a partir da discretização de uma equação diferencial linear [82].

tas, dadas em coordenadas cartesianas. Outros pormenores concernentes à análise numérica de cada um desses esquemas podem ser consultados em [1, 2, 17, 22, 32, 33, 36, 51, 79].

No final do capítulo expõe-se o desenvolvimento, em coordenadas generalizadas, de um novo esquema convectivo não linear que preserva monotonicidade, idealizado sob o tratamento *upwind* de discretização.

### 3.1 FUNDAMENTOS DAS DISCRETIZAÇÕES

A título de exemplificação, os esquemas *upwind* descritos nas próximas seções são embasados na discretização da lei de conservação unidimensional linear

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\phi) = 0, \quad x \in \Omega = [a, b] \subset \mathbb{R}, \quad t \in [t_0, \mathbf{T}], \quad t \geq 0, \quad (3.5)$$

com  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$  uma função escalar desconhecida,  $t_0$  e  $\mathbf{T}$  os tempos inicial e final da simulação, respectivamente. A função fluxo em um ponto  $(x, t)$  é dada por

$$\mathbf{F}(\phi) = u(x, t) \phi(x, t), \quad (3.6)$$

com  $u$  a velocidade positiva ou negativa de propagação da quantidade conservada  $\phi$ .

Para a finalidade em questão, toma-se como referência um ponto arbitrário de coordenadas  $(x, t) \in [a, b] \times [t_0, \mathbf{T}]$ , o qual, para uma malha computacional uniforme similar à exibida na figura 3.2, é definido como

$$x = x_i, \quad 0 \leq i \leq \mathbf{I} = i_{\max} = \frac{b-a}{\Delta x} \quad \text{e} \quad t = t_k, \quad 0 \leq k \leq \mathbf{K} = k_{\max} = \frac{\mathbf{T} - t_0}{\Delta t},$$

com  $\Delta x = x_{i+1} - x_i$  e  $\Delta t = t_{k+1} - t_k$  os incrementos espacial e temporal, respectivamente.

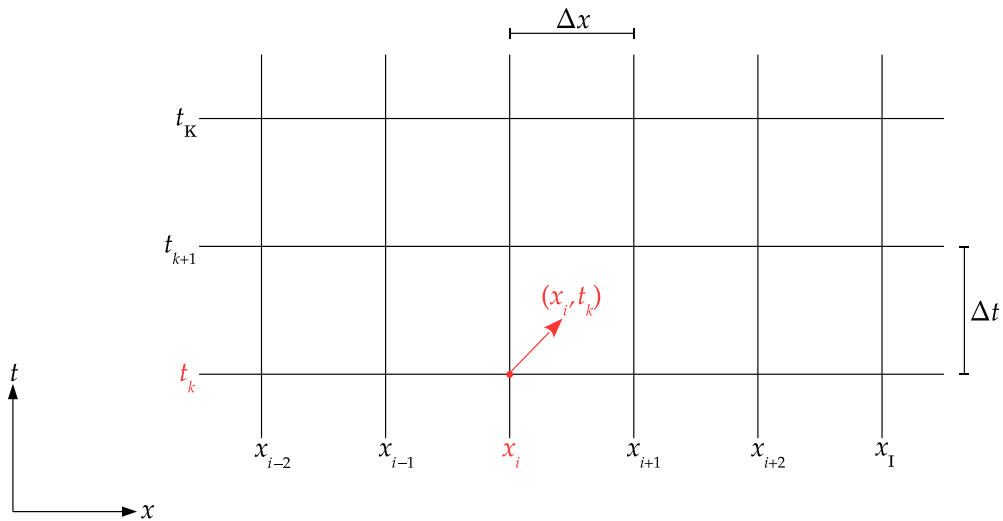


Figura 3.2: Representação do domínio computacional

Sem perda de generalidade, considera-se  $x_i = i\Delta x$  e  $t_k = k\Delta t$ . Deste modo, o valor discreto da função  $\phi(x, t)$ , avaliada na posição  $i$  e no nível de tempo  $k$ , com  $i \in [0, i_{\max}]$  e  $k \in [0, k_{\max}]$ , é então denotado por  $\phi_i^k \equiv \phi(x_i, t_k) = \phi(i\Delta x, k\Delta t)$ . Por simplicidade, o ponto  $(x_i, t_k)$  da malha será referenciado como ponto  $(i, k)$ .

A discretização da EDP (3.5) será feita com base no MDF. Porém, MDF tradicionais, mesmo se linearmente estáveis, muitas vezes fornecem maus resultados na presença de choques e outras discontinuidades [70]. Sendo assim, a representação por diferenças finitas da EDP (3.5) é feita de modo que o princípio conservativo seja mantido, isto é, a menos de erros de arredondamento, a versão discretizada dessa equação corresponde exatamente à conservação da grandeza física  $\phi$  sobre uma região finita arbitrária, para qualquer tamanho de malha contendo qualquer número de pontos. Esquemas que satisfazem esta propriedade conservativa são ditos esquemas conservativos [59].

De acordo com LeVeque [43], a base da conservação está associada à taxa de variação da massa total no interior de um volume de controle, devido unicamente ao fluxo nas fronteiras (faces) deste volume. Nesta perspectiva e sem prejuízos à notação adotada, os esquemas *upwind* apresentados nas próximas seções são desenvolvidos a partir de um deslocamento de  $\Delta x/2$  da malha no sentido positivo do eixo  $x$ , de modo que os nós computacionais da malha primária passam a ser o centro dos novos volumes de controle da malha deslocada, delimitados pelas linhas tracejadas, conforme mostra a figura 3.3.

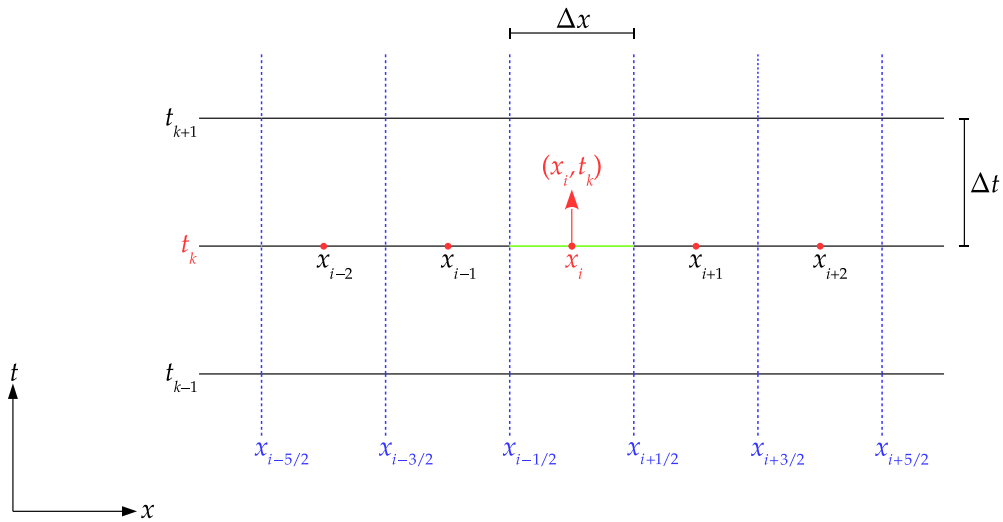


Figura 3.3: Representação do domínio computacional deslocado mostrando o  $i$ -ésimo volume de controle, cujas fronteiras são indicadas pelas linhas tracejadas  $x_{i-\frac{1}{2}}$  e  $x_{i+\frac{1}{2}}$

Dessa forma, se  $i \in [1, i_{\max}] \subset \mathbb{N}$ , então o  $i$ -ésimo volume de controle, destacado em verde na figura 3.3, é definido como o intervalo

$$\mathbf{I}_i = \left[ x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right], \text{ com } x_i = \frac{1}{2} \left[ x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}} \right] \text{ e } \Delta x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}.$$

Assim, um esquema de diferenças conservativo para a lei de conservação (3.5) é um método numérico da forma

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \Big|_i^k + \frac{1}{\Delta x} \left[ \tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^k - \tilde{F}_{i-\frac{1}{2}}^k \right] = 0, \quad (3.7)$$

em que

$$\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^k = \mathcal{F}(\phi_{i-l+1}^k, \phi_{i-l+2}^k, \dots, \phi_{i+r}^k) \quad \text{e} \quad \tilde{F}_{i-\frac{1}{2}}^k = \mathcal{F}(\phi_{i-l}^k, \phi_{i-l+1}^k, \dots, \phi_{i+r-1}^k) \quad (3.8)$$

são aproximações para a função fluxo (3.6) nas fronteiras  $i + \frac{1}{2}$  e  $i - \frac{1}{2}$  de  $I_i$ , obtidas por intermédio de uma função de interpolação, denominada esquema convectivo.

Nesse contexto, é de fundamental importância que o fluxo numérico conservativo  $\tilde{F}$  do esquema convectivo desenvolvido seja consistente com a função fluxo da EDP (3.5), isto é,

$$\tilde{F}(\phi, \phi, \dots, \phi) = F(\phi),$$

implicando que o esquema de diferenças (3.7) seja consistente com a lei de conservação (3.5).

Admitindo-se constante a velocidade  $u$  de propagação da quantidade conservada  $\phi$ , a função fluxo (3.6) é dada por

$$F(\phi) = u\phi(x, t),$$

e, portanto, a lei de conservação (3.5) é reescrita como

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (u\phi) = 0, \quad (3.9)$$

conhecida como equação de advecção. Consequentemente, supõe-se que o fluxo numérico dependa diretamente do valor da variável genérica  $\phi$  convectada no escoamento. A função fluxo é então aproximada, respectivamente, nas faces  $i + \frac{1}{2}$  e  $i - \frac{1}{2}$  do  $i$ -ésimo volume de controle  $I_i$  pelas expressões

$$\tilde{F}_{i+\frac{1}{2}}^k \equiv (u\phi)_{i+\frac{1}{2}}^k = u\phi_{i+\frac{1}{2}}^k \quad \text{e} \quad \tilde{F}_{i-\frac{1}{2}}^k \equiv (u\phi)_{i-\frac{1}{2}}^k = u\phi_{i-\frac{1}{2}}^k. \quad (3.10)$$

Logo, de (3.7), (3.8) e (3.9) impõe-se que

$$\frac{1}{\Delta x} \left[ \mathcal{F}(\phi_{i-l+1}^k, \phi_{i-l+2}^k, \dots, \phi_{i+r}^k) - \mathcal{F}(\phi_{i-l}^k, \phi_{i-l+1}^k, \dots, \phi_{i+r-1}^k) \right] \approx \left( \frac{\partial}{\partial x} (u\phi) \right) \Big|_i^k$$

e, como  $u$  é admitida constante, segue imediatamente de (3.10) que o termo convectivo é apro-

ximado por uma abordagem de diferenças centradas,

$$\frac{u}{\Delta x} \left[ \phi_{i+\frac{1}{2}}^k - \phi_{i-\frac{1}{2}}^k \right] \approx u \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \Big|_i^k \quad (3.11)$$

e, por conseguinte, o método numérico (3.7) é reescrito como

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \Big|_i^k + \frac{u}{\Delta x} \left[ \phi_{i+\frac{1}{2}}^k - \phi_{i-\frac{1}{2}}^k \right] = 0. \quad (3.12)$$

A discretização da derivada temporal de (3.12) no ponto  $(i, k)$  é feita utilizando o método de Euler explícito, isto é, uma diferença progressiva da forma

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \Big|_i^k = \frac{\phi_i^{k+1} - \phi_i^k}{\Delta t} + \mathcal{O}(\Delta t). \quad (3.13)$$

O símbolo  $\mathcal{O}(\cdot)$ , conhecido como o símbolo de Landau, indica a ordem do erro da aproximação do esquema, obtida, neste caso, a partir do truncamento da expansão em série de Taylor da função  $\phi$  em torno do nó computacional identificado pelo ponto  $(i, k)$ . Assim, se  $\Delta t$  corresponde ao incremento uniforme de passo no tempo, então a expansão em série de Taylor da função  $\phi$  avaliada no nível de tempo  $k+1$ ,  $k \geq 0$ , por exemplo, é dada por

$$\phi(t_{k+1}) = \phi(t_k) + \frac{\partial \phi}{\partial t}(t_k)(t_{k+1} - t_k) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}(t_k)(t_{k+1} - t_k)^2 + \dots$$

Ainda, considerando-se a notação discreta  $\phi^k \equiv \phi(t_k)$  e  $\phi^{k+1} \equiv \phi(t_{k+1})$ , segue que

$$\phi^{k+1} = \phi^k + \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \Big|_i^k \underbrace{(t_{k+1} - t_k)}_{\Delta t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) \Big|_i^k \underbrace{(t_{k+1} - t_k)^2}_{(\Delta t)^2} + \dots,$$

o que implica em

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \Big|_i^k = \frac{\phi_i^{k+1} - \phi_i^k}{\Delta t} - \underbrace{\frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) \Big|_i^k}_{\mathcal{O}(\Delta t)} - \dots, \quad \forall i \in [1, i_{\max}] \subset \mathbb{N},$$

mostrando que o esquema (3.13) atinge primeira ordem de precisão temporal.

De forma geral, uma expressão do tipo  $\mathcal{O}(\Delta \Phi)^\omega$  representa uma série de potências em  $\Delta \Phi$  iniciando com grau  $\omega \in \mathbb{Z}_+$ , o qual determina a taxa com que o erro da aproximação tende para zero à medida que a malha é refinada.

Substituindo a expressão (3.13) na equação (3.12), obtém-se uma representação por diferenças finitas da EDP (3.9) no ponto  $(i, k)$

$$0 = \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\phi_i^{k+1} - \phi_i^k}{\Delta t} + u \frac{\phi_{i+\frac{1}{2}}^k - \phi_{i-\frac{1}{2}}^k}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x^\omega, \Delta t). \quad (3.14)$$

A precisão espacial  $\omega \in \mathbb{Z}_+$  depende da função de interpolação utilizada na discretização do termo convectivo de (3.9) e também pode ser obtida a partir de uma expansão em série de Taylor, na qual o gradiente  $\partial \phi / \partial x$  da função  $\phi$  é estimado conforme o número de pontos intrínsecos aos volumes de controle envolvidos em sua formulação.

Os esquemas *upwind* utilizados para avaliar a quantidade conservada  $\phi$  são fundamentados na molécula computacional 1D extraída da malha deslocada da figura 3.3 e exposta na figura 3.4, a qual representa esquematicamente o escoamento de um fluido na direção horizontal, cujo sentido é dado pelo sinal da velocidade constante de convecção  $u$  na face  $i + \frac{1}{2}$  do  $i$ -ésimo volume de controle  $I_i$ .

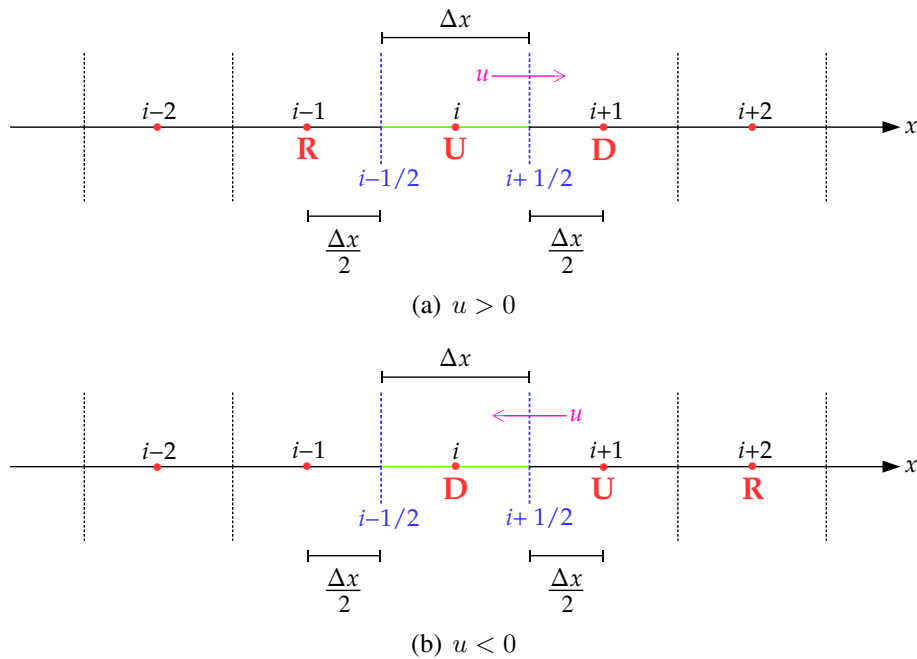


Figura 3.4: Representação esquemática para se obter aproximações para a derivada convectiva mostrando o ponto  $i$  de discretização e seus vizinhos, as faces que definem o  $i$ -ésimo volume de controle e o sentido da velocidade de convecção  $u$  na face  $i + \frac{1}{2}$

Os pontos D (*Downstream*), U (*Upstream*) e R (*Remote-upstream*) são, respectivamente, as posições à jusante, à montante e mais à montante da interface  $i + \frac{1}{2}$  entre o  $i$ -ésimo e o  $(i + 1)$ -ésimo volumes de controle, as quais variam conforme o sinal da velocidade  $u$ , como pode ser observado nas figuras 3.4(a) e 3.4(b).

De modo geral, para avaliar a propriedade transportada  $\phi$  em uma interface

arbitrária  $f$ , faz-se uso de um perfil de interpolação ou extrapolação *upwind* da forma

$$\phi_f = \phi_f(\phi_D, \phi_U, \phi_R, \text{sgn}(u_f)), \quad (3.15)$$

em que  $\phi_D$ ,  $\phi_U$  e  $\phi_R$  denotam os valores da grandeza  $\phi$  nos pontos D, U e R, respectivamente, e  $\text{sgn}(u_f)$  é o sinal da velocidade de convecção  $u$  na interface  $f$  de duas células adjacentes.

Por fim, admitindo-se apenas as equações algébricas de diferenças de (3.14) e assumindo, por hipótese, a massa específica do fluido constante<sup>9</sup>, pode-se fazer uso do número de Courant<sup>10</sup>

$$\sigma = u \frac{\Delta t}{\Delta x}, \quad (3.16)$$

para reescrever o esquema de diferenças conservativo (3.12) na forma

$$\phi_i^{k+1} = \phi_i^k - \sigma \left[ \phi_{i+\frac{1}{2}}^k - \phi_{i-\frac{1}{2}}^k \right], \quad (3.17)$$

utilizada para estimar o valor da função  $\phi$  no ponto  $(i, k+1)$ ,  $k \geq 0$ .

### 3.2 ESQUEMAS UPWIND DE PRIMEIRA E SEGUNDA ORDEM

O mais simples dos esquemas *upwind* é o esquema de primeira ordem, FOU[13]. O esquema possui um perfil de extrapolação constante, expresso por

$$\phi_f = \phi_U. \quad (3.18)$$

Considerando os respectivos pontos associados às posições D, U e R das figuras 3.4(a) e 3.4(b), consoante ao perfil (3.18) tem-se

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \phi_i, & u > 0 \\ \phi_{i+1}, & u < 0 \end{cases} \quad ; \quad \phi_{i-\frac{1}{2}} = \begin{cases} \phi_{i-1}, & u > 0 \\ \phi_i, & u < 0 \end{cases},$$

e, portanto, segue da expressão (3.11) que a discretização da derivada espacial de (3.9) por este esquema, no ponto  $(i, k)$ ,  $k \geq 0$ , é dada por

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \Big|_i^k = \frac{\phi_i^k - \phi_{i-1}^k}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x), \quad u > 0 \quad (3.19)$$

<sup>9</sup>Caso a massa específica seja variável, além da velocidade natural de convecção  $u$ , a velocidade do som também influencia no transporte da quantidade  $\phi$ , devido à convecção da pressão. Nesse caso, a velocidade de propagação da onda é definida como  $\vartheta := u + c$ , com  $c$  a velocidade do som [3].

<sup>10</sup>Variável local do domínio fluido, definido como o fluxo numérico advectivo adimensionalizado pelas malhas espacial e temporal em cada célula computacional. Usualmente, emprega-se essa nomenclatura para se referir à condição CFL (Courant–Friedrichs–Lewy), que permite a precisão física e estabilidade do cálculo em um intervalo.

ou

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\Big|_i^k = \frac{\phi_{i+1}^k - \phi_i^k}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x), \quad u < 0, \quad (3.20)$$

que nada mais são do que esquemas de diferenças regressivas e progressivas, respectivamente.

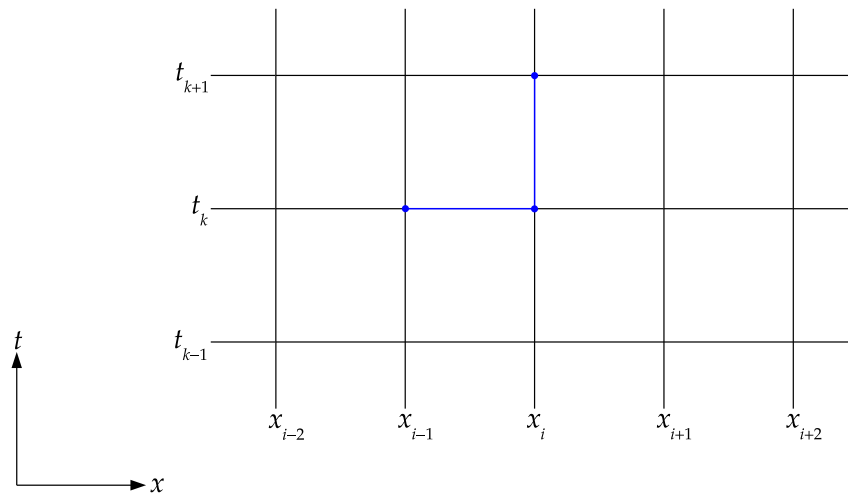
Substituindo as expressões (3.19) e (3.20) na equação (3.14), tem-se

$$0 = \frac{\phi_i^{k+1} - \phi_i^k}{\Delta t} + u \frac{\phi_i^k - \phi_{i-1}^k}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x, \Delta t), \quad u > 0 \quad (3.21)$$

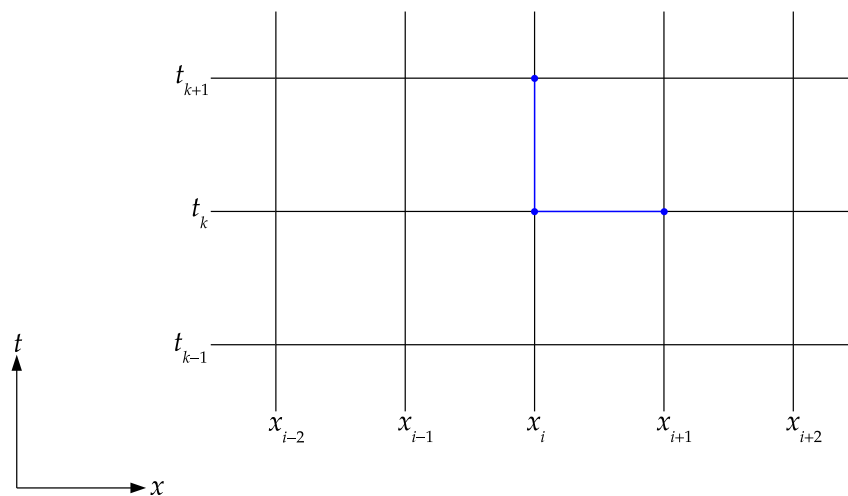
ou

$$0 = \frac{\phi_i^{k+1} - \phi_i^k}{\Delta t} + u \frac{\phi_{i+1}^k - \phi_i^k}{\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x, \Delta t), \quad u < 0, \quad (3.22)$$

cujos dois primeiros termos do segundo membro consistem na representação por diferenças finitas da EDP original.



(a)  $u > 0$



(b)  $u < 0$

Figura 3.5: Estêncil do esquema FOU para a equação de advecção 1D

Admitindo-se apenas as equações de diferenças em (3.21) e (3.22), tem-se

$$\frac{\phi_i^{k+1} - \phi_i^k}{\Delta t} = -u \frac{\phi_i^k - \phi_{i-1}^k}{\Delta x}, \quad u > 0 \quad (3.23)$$

ou

$$\frac{\phi_i^{k+1} - \phi_i^k}{\Delta t} = -u \frac{\phi_{i+1}^k - \phi_i^k}{\Delta x}, \quad u < 0. \quad (3.24)$$

As figuras 3.5(a) e 3.5(b) apresentam os estênceis<sup>11</sup> computacionais do esquema FOU para a resolução da equação de advecção unidimensional (3.9), com  $u > 0$  e  $u < 0$ , respectivamente. Também, decorre de (3.23) e (3.24) que o esquema conservativo pode ser escrito na forma (3.17) como<sup>12</sup>

$$\phi_i^{k+1} = \phi_i^k - \sigma (\phi_i^k - \phi_{i-1}^k), \quad u > 0 \quad (3.25)$$

ou

$$\phi_i^{k+1} = \phi_i^k - \sigma (\phi_{i+1}^k - \phi_i^k), \quad u < 0. \quad (3.26)$$

Caso se deseje levar em conta ambos os sinais da velocidade de convecção  $u$  simultaneamente durante o processo de discretização da equação (3.9), as expressões (3.25) e (3.26) podem ser combinadas de maneira que o esquema conservativo possa ser representado de forma geral pela seguinte expressão<sup>13</sup>

$$\phi_i^{k+1} = \phi_i^k - \frac{\Delta t}{\Delta x} [u^+ (\phi_i^k - \phi_{i-1}^k) + u^- (\phi_{i+1}^k - \phi_i^k)], \quad (3.27)$$

com

$$u^+ \equiv \max(u, 0) = \frac{1}{2}(u + |u|) \quad \text{e} \quad u^- \equiv \min(u, 0) = \frac{1}{2}(u - |u|). \quad (3.28)$$

Assim, por exemplo, se  $u > 0$ , então segue imediatamente de (3.28) que

$$u^+ = \frac{1}{2}(u + u) = u \quad \text{e} \quad u^- = \frac{1}{2}(u - u) = 0,$$

os quais, substituídos na forma compacta (3.27), fornecem a expressão correspondente ao caso particular (3.25).

Outra forma de se determinar a precisão de um método numérico consiste na comparação entre as soluções numérica e exata, desde que a última seja conhecida. Para o esquema FOU, essa sistemática pode ser encontrada em [78], na qual soluções numéricas para a equação do transporte (3.5) são avaliadas para diferentes refinamentos de malhas uniformes.

<sup>11</sup>No contexto de expressões de diferenças finitas, o estêncil de uma aproximação indica, através de uma figura, a posição relativa dos pontos presentes em uma equação de diferenças finitas (EDF) [22].

<sup>12</sup>Os esquemas (3.23) e (3.24) – ou sua forma alternativa (3.25) e (3.26) – também são conhecidos como FTBS (*Forward Time–Backward Space*) e FTFS (*Forward Time–Forward Space*), respectivamente.

<sup>13</sup>A forma concisa (3.27) foi introduzida por Courant, Isaacson e Rees [13] para se resolver equações diferenciais hiperbólicas não lineares via diferenças finitas e, em virtude disso, também é conhecido como esquema CIR.

Apesar de se tratar de um esquema de primeira ordem e ser numericamente difusivo, as soluções numéricas obtidas pelo esquema FOU preservam o comportamento não oscilante, independentemente da malha [17, 66]. Ou seja, o esquema FOU é um esquema monótono, pois, considerando a lei de conservação (3.9) e sendo  $\phi_i^{k+1}$  a solução numérica obtida por meio de (3.25) ou (3.26) no ponto  $(i, k + 1)$ ,  $k \geq 0$ , então segue de (3.3) e (3.4) que

$$\phi_i^{k+1} = F_1(\phi_{i-1}^k, \phi_i^k), \quad 0 \leq i \leq i_{\max} \implies \frac{\partial F_1}{\partial \phi_{i-1}} = \sigma, \quad \frac{\partial F_1}{\partial \phi_i} = 1 - \sigma, \quad u > 0$$

ou

$$\phi_i^{k+1} = F_2(\phi_i^k, \phi_{i+1}^k), \quad 0 \leq i \leq i_{\max} \implies \frac{\partial F_2}{\partial \phi_i} = 1 + \sigma, \quad \frac{\partial F_2}{\partial \phi_{i+1}} = -\sigma, \quad u < 0.$$

Como o esquema FOU é estável para  $\sigma \in (0, 1)$ , se  $u > 0$ , ou para  $\sigma \in (-1, 0)$ , se  $u < 0$  [33], então

$$\frac{\partial F_1}{\partial \phi_j}(\phi_{i-1}, \phi_i) \geq 0, \quad j = i - 1, i \quad ; \quad \frac{\partial F_2}{\partial \phi_j}(\phi_i, \phi_{i+1}) \geq 0, \quad j = i, i + 1.$$

Logo, o esquema FOU preserva monotonicidade tanto para  $u > 0$  quanto para  $u < 0$  em seus respectivos intervalos de estabilidade numérica.

Porém, embora os resultados mostrem monotonicidade da solução na vizinhança da(s) descontinuidade(s), o esquema FOU não é recomendado para simulações que admitam longos períodos de tempo, visto que podem ocorrer a suavização dos extremos e a predominância de dissipação numérica [46]. Além disso, quando  $\sigma$  é praticamente desprezível, a baixa ordem do esquema induz a sérias perdas de precisão [26].

A fim de se minimizar os erros causados pelo efeito difusivo do esquema FOU, novos esquemas foram propostos, dentre eles, o esquema *upwind* de segunda ordem, SOU, de Warming e Beam [80]. Este método faz uso de um ponto a mais durante o processo de discretização e sua aproximação pode ser dada por meio de uma extrapolação linear<sup>14</sup> da forma

$$\phi_f = \frac{3}{2}\phi_U - \frac{1}{2}\phi_R. \quad (3.29)$$

Assim, considerando os pontos associados às posições D, U e R da molécula computacional exibida na figura 3.4, tem-se

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{3}{2}\phi_i - \frac{1}{2}\phi_{i-1}, & u > 0 \\ \frac{3}{2}\phi_{i+1} - \frac{1}{2}\phi_{i+2}, & u < 0 \end{cases} \quad ; \quad \phi_{i-\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{3}{2}\phi_{i-1} - \frac{1}{2}\phi_{i-2}, & u > 0 \\ \frac{3}{2}\phi_i - \frac{1}{2}\phi_{i+1}, & u < 0 \end{cases}.$$

Por conseguinte, o esquema SOU, aplicado à derivada espacial de (3.9) no

<sup>14</sup>Por este motivo, o esquema SOU também é referenciado como LUDS (*Linear Upwind Differencing Scheme*).

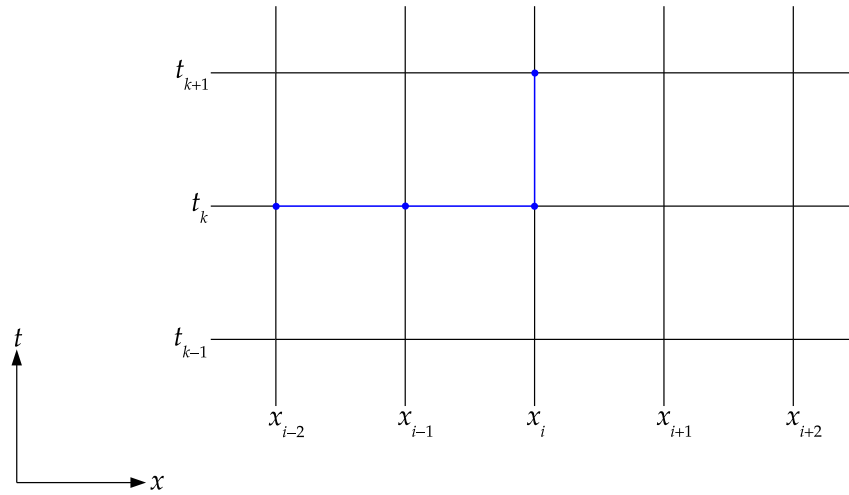
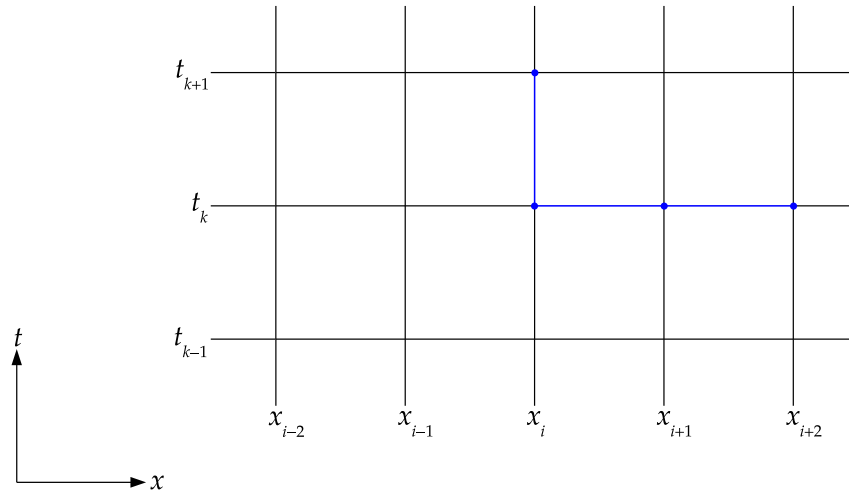
(a)  $u > 0$ (b)  $u < 0$ 

Figura 3.6: Estêncil do esquema SOU para a equação de advecção 1D

ponto  $(i, k)$ ,  $k \geq 0$ , é dado conforme a velocidade de convecção  $u$  por

$$\left. \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right|_i^k = \frac{\phi_{i-2}^k - 4\phi_{i-1}^k + 3\phi_i^k}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)^2, \quad u > 0 \quad (3.30)$$

ou

$$\left. \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right|_i^k = \frac{-3\phi_i^k + 4\phi_{i+1}^k - \phi_{i+2}^k}{2\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)^2, \quad u < 0. \quad (3.31)$$

Substituindo as expressões (3.30) e (3.31) na equação (3.14), tem-se as EDF

$$\frac{\phi_i^{k+1} - \phi_i^k}{\Delta t} = -u \frac{\phi_{i-2}^k - 4\phi_{i-1}^k + 3\phi_i^k}{2\Delta x}, \quad u > 0 \quad (3.32)$$

ou

$$\frac{\phi_i^{k+1} - \phi_i^k}{\Delta t} = -u \frac{-3\phi_i^k + 4\phi_{i+1}^k - \phi_{i+2}^k}{2\Delta x}, \quad u < 0, \quad (3.33)$$

cujos estênceis são mostrados nas figuras 3.6(a) e 3.6(b), nesta ordem.

Equivalentemente, segue de (3.32) e (3.33) que o esquema de diferenças conservativo pode ser escrito na forma (3.17) como

$$\phi_i^{k+1} = \phi_i^k - \frac{\sigma}{2} (\phi_{i-2}^k - 4\phi_{i-1}^k + 3\phi_i^k), \quad u > 0$$

ou

$$\phi_i^{k+1} = \phi_i^k - \frac{\sigma}{2} (-3\phi_i^k + 4\phi_{i+1}^k - \phi_{i+2}^k), \quad u < 0,$$

ou ainda, analogamente a (3.27), de forma compacta e geral como

$$\phi_i^{k+1} = \phi_i^k - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [u^+ (\phi_{i-2}^k - 4\phi_{i-1}^k + 3\phi_i^k) + u^- (-3\phi_i^k + 4\phi_{i+1}^k - \phi_{i+2}^k)],$$

com  $u^+$  e  $u^-$  definidos em (3.28).

Embora o esquema SOU atinja segunda ordem de precisão, trata-se de um esquema não monótono e, assim como no esquema de diferenças centradas de segunda ordem – CDS (*Central Difference Scheme*) – sob condições severas de convecção, sua implementação acarreta o comportamento oscilatório em torno de regiões com gradientes elevados, implicando a instabilidade da solução e, conseqüentemente, a perda de precisão numérica [48].

### 3.3 ESQUEMA UPWIND DE TERCEIRA ORDEM

Um dos mais conhecidos esquemas de alta ordem é o esquema QUICK, de Leonard [41], cuja formulação se fundamenta numa interpolação quadrática da forma

$$\phi_f = \frac{3}{4}\phi_U + \frac{3}{8}\phi_D - \frac{1}{8}\phi_R, \quad (3.34)$$

com terceira ordem de precisão tanto para malhas uniformes quanto para malhas não uniformes.

Considerando os pontos associados às posições D, U e R da molécula computacional exibida na figura 3.4, tem-se

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} -\frac{1}{8}\phi_{i-1} + \frac{3}{4}\phi_i + \frac{3}{8}\phi_{i+1}, & u > 0 \\ \frac{3}{8}\phi_i + \frac{3}{4}\phi_{i+1} - \frac{1}{8}\phi_{i+2}, & u < 0 \end{cases} \quad ; \quad \phi_{i-\frac{1}{2}} = \begin{cases} -\frac{1}{8}\phi_{i-2} + \frac{3}{4}\phi_{i-1} + \frac{3}{8}\phi_i, & u > 0 \\ \frac{3}{8}\phi_{i-1} + \frac{3}{4}\phi_i - \frac{1}{8}\phi_{i+1}, & u < 0 \end{cases}.$$

Assim, para uma malha cartesiana uniforme, a aproximação da derivada convectiva de (3.9) pelo esquema QUICK, no ponto  $(i, k)$ ,  $k \geq 0$ , é dada por

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \Big|_i^k = \frac{\phi_{i-2}^k - 7\phi_{i-1}^k + 3\phi_i^k + 3\phi_{i+1}^k}{8\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)^3, \quad u > 0 \quad (3.35)$$

ou

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\bigg|_i^k = \frac{-3\phi_{i-1}^k - 3\phi_i^k + 7\phi_{i+1}^k - \phi_{i+2}^k}{8\Delta x} + \mathcal{O}(\Delta x)^3, \quad u < 0. \quad (3.36)$$

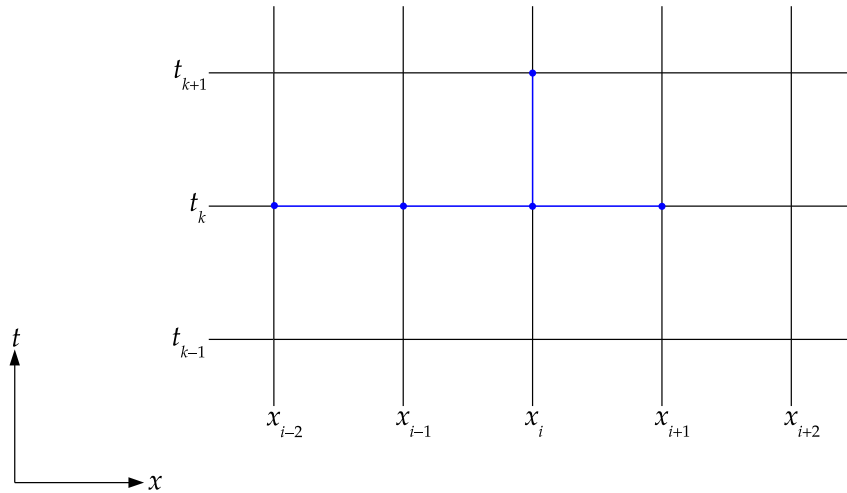
Substituindo as discretizações espaciais (3.35) e (3.36) na equação (3.14), tem-se as EDF

$$\frac{\phi_i^{k+1} - \phi_i^k}{\Delta t} = -u \frac{\phi_{i-2}^k - 7\phi_{i-1}^k + 3\phi_i^k + 3\phi_{i+1}^k}{8\Delta x}, \quad u > 0 \quad (3.37)$$

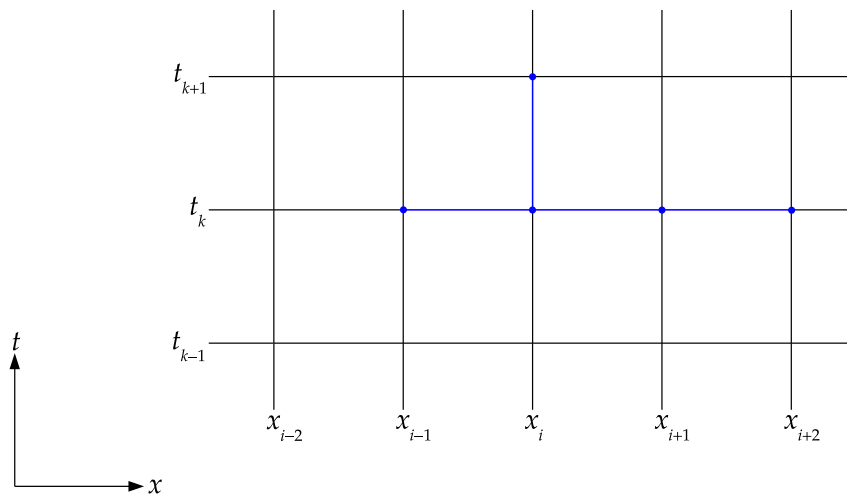
ou

$$\frac{\phi_i^{k+1} - \phi_i^k}{\Delta t} = -u \frac{-3\phi_{i-1}^k - 3\phi_i^k + 7\phi_{i+1}^k - \phi_{i+2}^k}{8\Delta x}, \quad u < 0. \quad (3.38)$$

A posição relativa dos pontos presentes nas equações (3.37) e (3.38) é mostrada nas figuras 3.7(a) e 3.7(b), respectivamente.



(a)  $u > 0$



(b)  $u < 0$

Figura 3.7: Estêncil do esquema QUICK para a equação de advecção 1D

Ainda, de (3.37) e (3.38), o esquema de diferenças conservativo é escrito na

forma (3.17) como

$$\phi_i^{k+1} = \phi_i^k - \frac{\sigma}{8} (\phi_{i-2}^k - 7\phi_{i-1}^k + 3\phi_i^k + 3\phi_{i+1}^k), \quad u > 0$$

ou

$$\phi_i^{k+1} = \phi_i^k - \frac{\sigma}{8} (-3\phi_{i-1}^k - 3\phi_i^k + 7\phi_{i+1}^k - \phi_{i+2}^k), \quad u < 0,$$

ou também, semelhantemente, de forma concisa como

$$\phi_i^{k+1} = \phi_i^k - \frac{\Delta t}{8\Delta x} [u^+ (\phi_{i-2}^k - 7\phi_{i-1}^k + 3(\phi_i^k + \phi_{i+1}^k)) + u^- (-3(\phi_{i-1}^k + \phi_i^k) + 7\phi_{i+1}^k - \phi_{i+2}^k)],$$

com  $u^+$  e  $u^-$  definidos em (3.28).

Em comparação aos esquemas *upwind* tradicionais, a falsa difusão<sup>15</sup> resultante da implementação do esquema QUICK é demasiadamente pequena e as soluções obtidas com malhas grosseiras são, frequentemente, mais precisas. Todavia, para certos tipos de escoamentos, tais soluções apresentam problemas inerentes à estabilidade e limitação [79].

Diante do exposto e sem perda de generalidade, conclui-se que esquemas de primeira ordem introduzem difusão numérica na solução, suavizando regiões com fortes gradientes, e, à vista disso, ineficientes na resolução de problemas multidimensionais envolvendo malhas grosseiras [71]. Por outro lado, apesar de evoluir a eficiência computacional, esquemas com precisão maior que um – particularmente os que possuem coeficientes constantes – têm a possibilidade de originar oscilações espúrias, induzindo instabilidades não lineares quando aplicados ao longo de uma descontinuidade [26].

Diante desse impasse, tornou-se um desafio para a comunidade científica em DFC estabelecer o acréscimo na precisão dos esquemas *upwind* sem invalidar a solução, a fim de que atributos como a forma conservativa e o princípio do valor máximo, além da alta eficácia de aplicações, fossem satisfeitos.

Como resultado das constantes pesquisas, surge uma classe de novos esquemas, discutida na próxima seção, os quais, a partir de uma limitação do fluxo convectivo, preservam a estabilidade da solução numérica e, ao mesmo tempo, são sensíveis à direção do escoamento, apropriados a problemas multidimensionais [2, 79, 84].

### 3.4 ESQUEMAS UPWIND DE ALTA RESOLUÇÃO

Segundo Roe [64], esquemas de alta resolução são uma classe de algoritmos destinados a resolver problemas envolvendo EDPs de primeira ordem, nos quais a propagação de ondas, particularmente ondas não lineares, é um atributo relevante. Mais precisamente, LeVeque [44] atesta que esse termo se aplica aos esquemas que possuem, no mínimo, segunda ordem de precisão sobre soluções suaves e são capazes de fornecer descontinuidades livres de

<sup>15</sup>Para uma melhor compreensão sobre este contexto, recomenda-se [22, 48, 54].

oscilações.

De forma geral, os esquemas de alta resolução são deduzidos visando melhorar a precisão e estabilidade dos esquemas convectivos existentes mediante um perfil de interpolação adequado, de forma que as soluções obtidas possuam, no mínimo, segunda ordem de precisão e sejam incondicionalmente estáveis [51]. Nesse contexto, utiliza-se um método de alta ordem, modificando-o de forma que a quantidade de dissipação numérica na vizinhança de uma descontinuidade seja refinada [44].

Sendo assim, desenvolver um esquema *upwind* de alta resolução requer a combinação entre um esquema de convecção *upwind* de alta ordem e um critério de limitação, garantindo que nenhum comportamento oscilatório seja evidenciado na solução. Nesta perspectiva, uma metodologia bem aceita na modelagem de escoamentos incompressíveis [16] consiste em formular esquemas *upwind* de alta resolução com o objetivo simultâneo de obter o perfil monótono de solução, manter a alta ordem do esquema QUICK e preservar a vantagem do esquema FOU em suprimir oscilações artificiais em torno das descontinuidades, proporcionando, dessa forma, resultados fisicamente coerentes e aceitáveis.

Entretanto, reitera-se que esquemas lineares monótonos e que preservam monotonicidade atingem, no máximo, primeira ordem de precisão, inapropriados para a resolução de problemas bi- ou tridimensionais envolvendo malhas grosseiras. Consequentemente, para que o esquema *upwind* de alta resolução desenvolvido preserve monotonicidade, este deve possuir, necessariamente, um caráter não linear.

Para esse fim, fatores de correção não lineares, denominados limitadores, são inseridos nas equações [33, 61]. Os limitadores restringem a amplitude dos gradientes existentes nas equações de diferenças de segunda ordem originais, evitando a geração de oscilações indesejáveis (*overshoots* ou *undershoots*) [2]. Nesta lógica, há uma grande variedade de abordagens disponíveis, sendo os limitadores de fluxo uma das mais usuais e relevantes [44, 81]. Para um estudo mais aprofundado sobre limitadores, o leitor interessado pode consultar [39].

No que se segue, apresentam-se as principais ferramentas necessárias para o desenvolvimento do esquema *upwind* de alta resolução não linear proposto neste trabalho, com base na formulação de variáveis normalizadas NVF (*Normalized Variable Formulation*), sugerida por Leonard [42], no critério de convecção limitada CBC (*Convection–Boundedness Criterion*), de Gaskell e Lau [23], e da propriedade limitadora TVD (*Total Variation Diminishing*), de Harten [29] e Sweby [75].

### 3.4.1 Normalização de Variáveis

Considere a molécula computacional ilustrada na figura 3.4, de modo que a velocidade de convecção  $u$  é supostamente conhecida em todos os pontos do domínio. A fim de que a solução numérica do esquema convectivo condicione estabilidade e solucione problemas que envolvam gradientes elevados, Leonard [42] propôs a metodologia NVF, na qual a variável genérica  $\phi$  convectada no escoamento, fixada em uma posição arbitrária com relação a uma face

de um volume de controle do domínio computacional, é definida como

$$\hat{\phi}_{(.)} = \frac{\phi_{(.)} - \phi_R}{\phi_D - \phi_R}, \quad (3.39)$$

fixando um padrão para o comportamento da solução local.

Particularmente,

$$\hat{\phi}_D = \frac{\phi_D - \phi_R}{\phi_D - \phi_R} = 1 \quad \text{e} \quad \hat{\phi}_R = \frac{\phi_R - \phi_R}{\phi_D - \phi_R} = 0. \quad (3.40)$$

Logo, se  $\hat{\phi}_U = 0$  então  $\phi_U = \phi_R$  e se  $\hat{\phi}_U = 1$  então  $\phi_U = \phi_D$ . Assim, a análise da variação  $\phi$  via um esquema *upwind* genérico expresso na forma (3.15) passa a depender unicamente de  $\phi_U$ , podendo ser reescrita na forma normalizada como

$$\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_f(\hat{\phi}_U), \quad (3.41)$$

denominada curva característica, na qual  $\hat{\phi}_U$  torna-se um indicador de suavidade.

A partir da definição (3.39) e dos valores (3.40), os perfis dos esquemas FOU (3.18), SOU (3.29) e QUICK (3.34) são escritos, respectivamente, como

$$\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_U, \quad \hat{\phi}_f = \frac{3}{2}\hat{\phi}_U, \quad \hat{\phi}_f = \frac{3}{4}\left(\hat{\phi}_U + \frac{1}{2}\right). \quad (3.42)$$

As curvas (3.42) são delineadas no diagrama de variáveis normalizadas NVD (*Normalized Variable Diagram*), exposto na figura 3.8, extremamente útil para a elaboração de esquemas convectivos de alta resolução. Sua idealização é fundamentada na relação existente entre a variável convectada, estimada em uma face arbitrária da célula computacional, e a variável adjacente à montante, ambas na forma normalizada.

De acordo com Alves, Oliveira e Pinho [1], o diagrama NVD compreende uma zona de suavidade, constituída para valores de  $\hat{\phi}_U \approx 0.5$ . Para variações bruscas na inclinação da característica de um esquema em  $\hat{\phi}_U = 0.5$ , simulações computacionais apresentaram dificuldades quanto à convergência numérica.

Qualquer relação funcional (em geral não linear) entre  $\hat{\phi}_f$  e  $\hat{\phi}_U$  que passe pelo ponto (0.5, 0.75) pode ser definida em termos da curva característica no sentido da interpolação *upwind* da seguinte forma

$$\hat{\phi}_f = \frac{1}{2}(1 + \hat{\phi}_U) - C(1 - 2\hat{\phi}_U), \quad C = \frac{2S - 1}{4}, \quad C = C(\hat{\phi}_U), \quad (3.43)$$

em que C representa o fator de curvatura e S o coeficiente angular da característica, condição necessária e suficiente para que o esquema atinja segunda ordem de precisão [42]. Em particular,

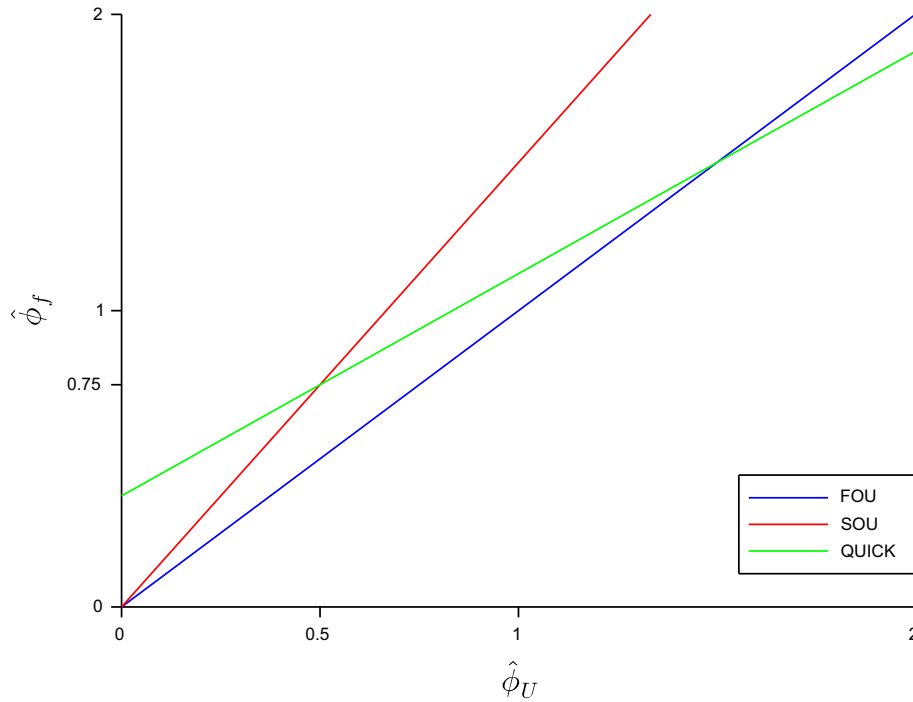


Figura 3.8: Representação dos esquemas convectivos *upwind* clássicos FOU, SOU e QUICK no diagrama de variáveis normalizadas NVD

como requisito para atingir a conservação da propriedade linear, se

$$C\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} \iff S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}, \quad (3.44)$$

então o esquema possui terceira ordem de precisão [42, 81].

A partir de experimentos numéricos realizados, concluiu-se também que esquemas cuja característica (3.41) intercepta o segundo e quarto quadrantes, bem como a reta  $\hat{\phi}_U = 1$  acima e abaixo de  $\hat{\phi}_f = 1$ , implicam no surgimento das principais inconsistências físicas, intrínsecas às oscilações e difusão artificial. Por conseguinte, para desenvolver esquemas *upwind* de alta resolução, a característica não linear esquematizada no diagrama NVD deve, necessariamente, estar definida na origem do sistema de coordenadas ortogonais  $\hat{\phi}_U O \hat{\phi}_f$  e no ponto (1,1), satisfazendo, concomitantemente, as condições (3.43) e (3.44) [42].

Para os valores de  $\hat{\phi}_U \notin [0, 1]$ , Leonard [42] ainda propõe que a característica seja estendida continuamente, de forma a se aproximar da reta que representa o esquema QUICK. Já Lin e Chieng [47] sugerem que, para essa restrição, o esquema FOU deve ser utilizado como referência. Ainda mais, recomendam que a relação funcional (3.41) seja continuamente diferenciável em todo domínio computacional, de forma a prevenir problemas de convergência para longos períodos de tempo nas simulações.

### 3.4.2 Critérios de Limitação

Computacionalmente, dizer que uma solução é limitada significa que o seu valor num dado ponto não ultrapassa os valores máximos e mínimos assumidos nos pontos adjacentes dependentes do processo físico.

Considerando a variação da quantidade  $\phi$  numa vizinhança do ponto associado à posição U, como mostrado na figura 3.4, e estendendo a interpretação para qualquer face de uma célula do interior do domínio computacional, pode-se obter uma solução numérica localmente limitada, desde que

$$\phi_R \leq \phi_U \leq \phi_D, \quad u > 0, \quad ; \quad \phi_R \geq \phi_U \geq \phi_D, \quad u < 0,$$

ou, equivalentemente, no contexto de variáveis normalizadas

$$\hat{\phi}_R \leq \hat{\phi}_U \leq \hat{\phi}_D, \quad u > 0, \quad ; \quad \hat{\phi}_R \geq \hat{\phi}_U \geq \hat{\phi}_D, \quad u < 0. \quad (3.45)$$

Caso a restrição local (3.45) seja válida para todo o domínio de solução, haverá ausência de oscilações não físicas para a solução global [10, 16]. A seguir, definem-se dois critérios típicos de limitação, de forma que os esquemas de alta ordem derivados a partir destes preceitos preservam monotonicidade e inibem possíveis instabilidades.

- CBC

O critério CBC, de Gaskell e Lau [23], é uma condição necessária e suficiente<sup>16</sup> para garantir que a solução de um esquema convectivo definido por uma função contínua ou contínua por partes, ambas crescentes, seja não oscilatória. Este propósito é alcançado desde que a relação funcional (3.41) satisfaça as seguintes condições:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\phi}_f \in [\hat{\phi}_U, 1], \hat{\phi}_U \in [0, 1] \\ \hat{\phi}_f = 0 \quad , \quad \hat{\phi}_U = 0 \\ \hat{\phi}_f = 1 \quad , \quad \hat{\phi}_U = 1 \\ \hat{\phi}_f = \hat{\phi}_U \quad , \quad \hat{\phi}_U \notin [0, 1] \end{array} \right. \quad (3.46)$$

O verde em destaque na figura 3.9 ilustra geometricamente o diagrama representativo do critério CBC (3.46). Assim, dada a restrição de limitação local (3.45), para se obter a limitação global da solução numérica é exigido que

$$0 \leq \hat{\phi}_U \leq 1, \quad (3.47)$$

<sup>16</sup>Apesar de ser considerado a referência mais aceitável para se derivar esquemas limitados em termos de variáveis normalizadas, trabalhos recentes provam que a condição de limitação CBC é apenas suficiente [12, 81].

e, nesse caso, a característica  $\hat{\phi}_f(\hat{\phi}_U)$  está inteiramente contida na região triangular da figura 3.9 e a solução numérica preserva o perfil monótono [23].

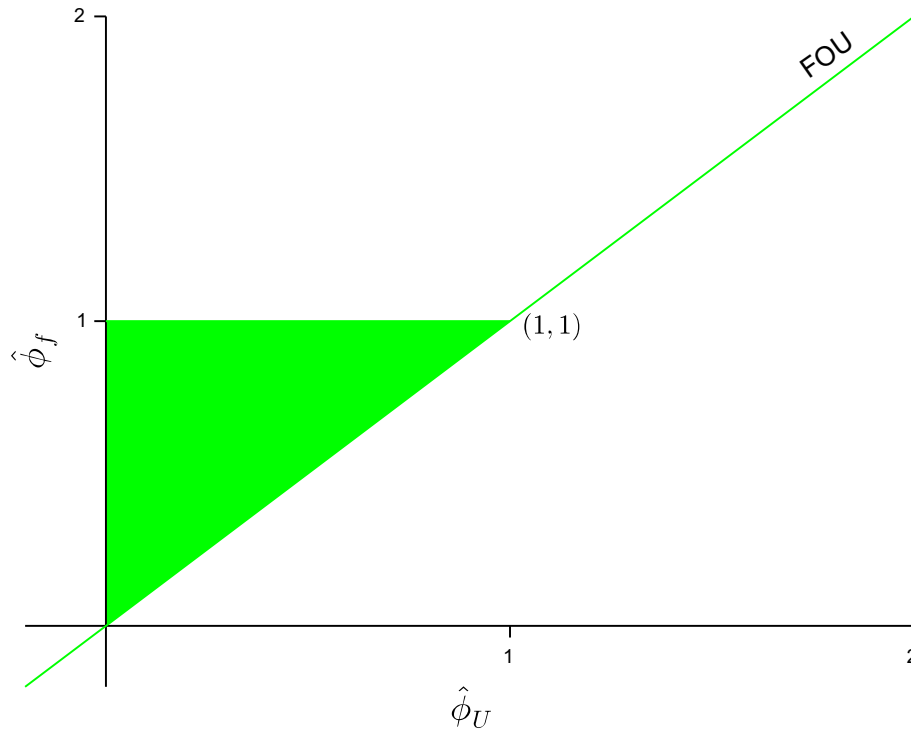


Figura 3.9: Diagrama CBC em variáveis normalizadas no plano- $\hat{\phi}_U\hat{\phi}_f$

Das figuras 3.8 e 3.9, nota-se que o esquema FOU é o único a satisfazer o critério de limitação CBC (3.46) de forma incondicional. Logo, e sem perda de generalidade, para que esquemas de ordem superior (no mínimo ordem dois) sejam limitados, estes devem representar funções não lineares ou lineares por partes no diagrama CBC, o que ratifica as ideias apresentadas na seção 3.4.

Sob essas considerações, o esquema de diferenças *upwind* obtido da relação funcional (3.41) é limitado e a restrição (3.47) descreve o intervalo de monotonicidade da solução. Neste caso, a região do diagrama NVD associada à interpolação *upwind* no intervalo  $[0, 1]$  é estável, na qual a viscosidade artificial resultante é mínima [16]. Todavia, embora o critério CBC aborde o problema da estabilidade de soluções numéricas de forma satisfatória, não há garantia da convergência dessas soluções [1, 46, 62, 65].

- TVD

Para assegurar a convergência de um esquema convectivo e ao mesmo tempo garantir a monotonicidade da solução combinada a uma alta ordem de precisão, Harten [29] introduziu o critério TVD. Sua premissa tem por objetivo evitar o incremento da variação total TV (*Total Variation*) da solução discretizada ao longo do tempo.

Para esclarecer este conceito considere, sem perda de generalidade, a lei de conservação escalar (3.5). A variação total TV de uma solução fisicamente aceitável  $\phi$  com respeito a  $x \in \Omega$ , no instante de tempo  $t \in [0, T]$ , é definida como

$$\text{TV}(\phi(x, t)) = \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \phi}{\partial x} \right| dx,$$

ou ainda, em termos da solução numérica, como

$$\text{TV}(\phi_i^k) = \sum_{i=1}^{i_{\max}} |\phi_{i+1}^k - \phi_i^k|, \quad \forall k \geq 0, \quad (3.48)$$

de modo que esse valor não aumente com o avanço do tempo [59].

Assim, para que um esquema numérico possua variação total não-crescente no tempo, isto é, seja um esquema TVD, exige-se que a variação total TV (3.48) satisfaça

$$\text{TV}(\phi^{k+1}) \leq \text{TV}(\phi^k), \quad \forall k \geq 0.$$

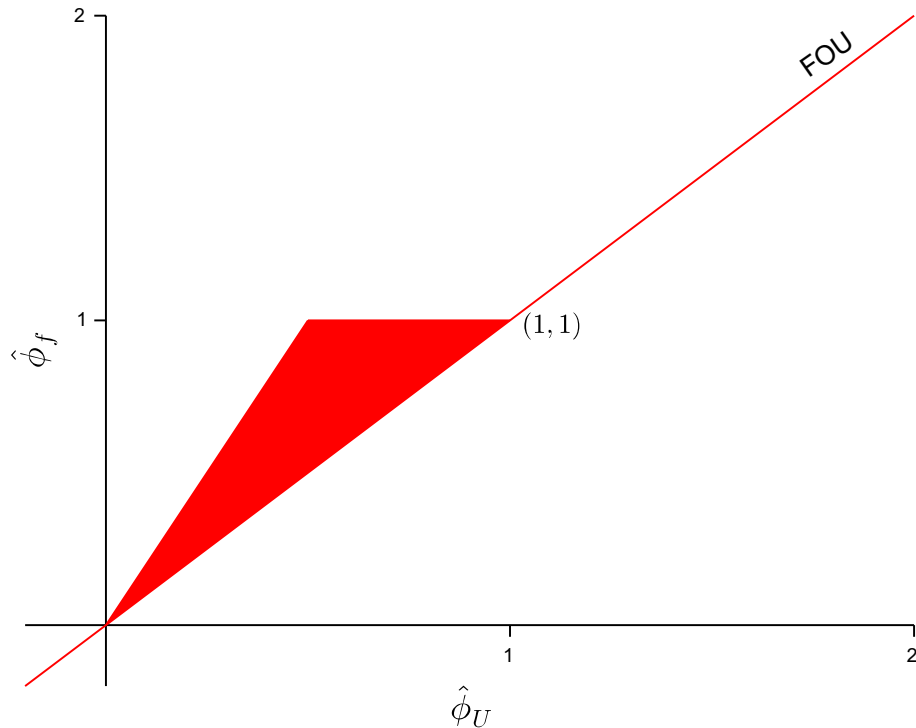


Figura 3.10: Diagrama TVD em variáveis normalizadas no plano- $\hat{\phi}_U\hat{\phi}_f$

Harten [29, 30] demonstra o seguinte

**Teorema 3.2.** *Todo esquema monótono é TVD*

e, tendo em vista o corolário 3.1, segue que esquemas TVD preservam a monotonicidade da solução. Logo, ao se desenvolver esquemas convectivos TVD de alta ordem, estes preservam o

perfil monótono de solução (3.1) e, conseqüentemente, satisfazem a propriedade (3.2), de modo que a solução numérica seja de primeira ordem próximo a descontinuidades e de ordens mais elevadas em zonas de suavidade [59].

Em resumo, os esquemas conservativos TVD foram desenvolvidos para contornar o comportamento oscilatório indesejável apresentado pelos esquemas de alta ordem. O critério TVD de Harten foi reinterpretado por Sweby [75] no contexto NVF, sendo expresso pelas restrições

$$\begin{cases} \hat{\phi}_f \in [\hat{\phi}_U, 2\hat{\phi}_U] \text{ e } \hat{\phi}_f \leq 1, \hat{\phi}_U \in [0, 1] \\ \hat{\phi}_f = \hat{\phi}_U, \hat{\phi}_U \notin [0, 1] \end{cases}$$

e cuja representação geométrica é dada pela figura 3.10, destacada em vermelho.

### 3.5 ESQUEMA CUBISTA

O esquema de alta resolução CUBISTA foi desenvolvido por Alves, Oliveira e Pinho [1] com o objetivo de melhorar as propriedades de convergência numérica, admitindo-se os critérios de limitação que preservam a estabilidade da solução.

Sua fundamentação depende do critério de limitação abordado, onde, se o critério CBC for considerado, utiliza-se como base o esquema de terceira ordem SMART (*Sharp and Monotonic Algorithm for Realistic Transport*), proposto por Gaskell e Lau [23], o qual se refere a uma versão limitada do esquema QUICK desenvolvido no contexto de variáveis normalizadas. Caso o critério TVD seja considerado, o método se baseia no esquema de alta resolução WACEB (*Weighted-Average Coefficient Ensuring Boundedness*), de Song *et al* [73].

Partindo desse pressuposto, a construção do esquema CUBISTA é composta por partes, unindo-se três segmentos de reta no diagrama NVD. Para o critério TVD, deve-se levar em consideração as seguintes circunstâncias:

- Zona de suavidade ( $0.4 \leq \hat{\phi}_U \leq 0.6$ ):

Utiliza-se o esquema QUICK (3.42), prolongando-o o máximo possível em torno de  $\hat{\phi}_U = 0.5$ , a fim de se evitar possíveis variações na inclinação da característica resultante.

- Restrições TVD:

Na zona de ligação com a origem tem-se  $\hat{\phi}_f = (2 - \sigma_1)\hat{\phi}_U$  e na zona de ligação com o ponto  $\hat{\phi}_U = 1 = \hat{\phi}_f$ , tem-se  $\hat{\phi}_f = 1 - \sigma_2(1 - \hat{\phi}_U)$ , em que  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são parâmetros empíricos definidos. Fora da zona monótona, isto é,  $\hat{\phi}_U < 0$  ou  $\hat{\phi}_U > 1$ , adota-se o esquema FOU.

- Escolha dos parâmetros  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ :

Para satisfazer a simetria do esquema, exige-se que  $\sigma_1 = \sigma_2$ . Além disso,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  devem ser escolhidos de forma que, para valores de  $\hat{\phi}_U \rightarrow 1$ , a interpolação do esquema QUICK não ultrapasse (*overshoot*) a característica constante à jusante  $\hat{\phi}_f = 1$ . Por essa

razão, prolonga-se o esquema QUICK na zona suave até o valor máximo de  $\hat{\phi}_U = 0.75$ . Para  $\hat{\phi}_U \in (0.75, 1]$ , liga-se os pontos  $(0.75, (\hat{\phi}_f)_{\text{QUICK}}(0.75))$  e  $(1, 1)$  através do segmento de reta de inclinação  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.25$ .

Assim, para malhas uniformes<sup>17</sup>, o esquema CUBISTA é definido como [1]

$$\hat{\phi}_f = \begin{cases} \frac{7}{4}\hat{\phi}_U & , 0 < \hat{\phi}_U < \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4}\left(\hat{\phi}_U + \frac{1}{2}\right) & , \frac{3}{8} \leq \hat{\phi}_U \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}(\hat{\phi}_U + 3) & , \frac{3}{4} < \hat{\phi}_U < 1 \\ \hat{\phi}_U & , -\infty < \hat{\phi}_U \leq 0 \text{ ou } 1 \leq \hat{\phi} < \infty \end{cases} . \quad (3.49)$$

Caso se deseje considerar o esquema para variáveis não normalizadas, basta substituir as equações (3.49) na relação (3.39), obtendo-se

$$\phi_f = \begin{cases} \frac{7}{4}\phi_U - \frac{3}{4}\phi_R & , 0 < \hat{\phi}_U < \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4}\phi_U + \frac{3}{8}\phi_D - \frac{1}{8}\phi_R & , \frac{3}{8} \leq \hat{\phi}_U \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\phi_U + \frac{3}{4}\phi_D & , \frac{3}{4} < \hat{\phi}_U < 1 \\ \phi_U & , -\infty < \hat{\phi}_U \leq 0 \text{ ou } 1 \leq \hat{\phi} < \infty \end{cases} . \quad (3.50)$$

A figura 3.11 destaca na cor magenta a representação geométrica do esquema CUBISTA no diagrama NVD.

Como exemplo de aplicação deste esquema na forma não normalizada (3.50), considere a lei de conservação (3.9). Assim, com base nos pontos associados às posições D, U e R da molécula computacional exibida na figura 3.4, para  $f = i + \frac{1}{2}$ , tem-se

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{7}{4}\phi_i - \frac{3}{4}\phi_{i-1} & , 0 < \hat{\phi}_U < \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4}\phi_i + \frac{3}{8}\phi_{i+1} - \frac{1}{8}\phi_{i-1} & , \frac{3}{8} \leq \hat{\phi}_U \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\phi_i + \frac{3}{4}\phi_{i+1} & , \frac{3}{4} < \hat{\phi}_U < 1 \\ \phi_i & , -\infty < \hat{\phi}_U \leq 0 \text{ ou } 1 \leq \hat{\phi} < \infty \end{cases} , \quad u > 0$$

<sup>17</sup>Alves, Oliveira e Pinho [1] expandem a formulação do esquema para malhas não uniformes usando a metodologia NVSF (*Normalized Variable and Space Formulation*).

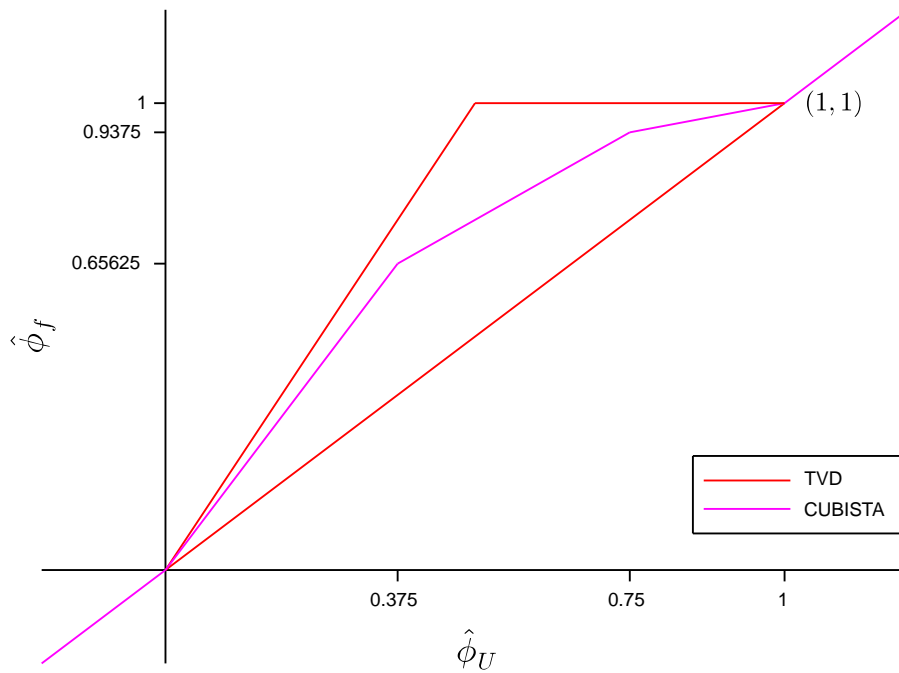


Figura 3.11: Representação do esquema CUBISTA no diagrama NVD

ou

$$\phi_{i+\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{7}{4}\phi_{i+1} - \frac{3}{4}\phi_{i+2} & , 0 < \hat{\phi}_U < \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4}\phi_{i+1} + \frac{3}{8}\phi_i - \frac{1}{8}\phi_{i+2} & , \frac{3}{8} \leq \hat{\phi}_U \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\phi_{i+1} + \frac{3}{4}\phi_i & , \frac{3}{4} < \hat{\phi}_U < 1 \\ \phi_{i+1} & , -\infty < \hat{\phi}_U \leq 0 \text{ ou } 1 \leq \hat{\phi} < \infty \end{cases} , \quad u < 0.$$

Analogamente, se  $f = i - \frac{1}{2}$ , então

$$\phi_{i-\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{7}{4}\phi_{i-1} - \frac{3}{4}\phi_{i-2} & , 0 < \hat{\phi}_U < \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4}\phi_{i-1} + \frac{3}{8}\phi_i - \frac{1}{8}\phi_{i-2} & , \frac{3}{8} \leq \hat{\phi}_U \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\phi_{i-1} + \frac{3}{4}\phi_i & , \frac{3}{4} < \hat{\phi}_U < 1 \\ \phi_{i-1} & , -\infty < \hat{\phi}_U \leq 0 \text{ ou } 1 \leq \hat{\phi} < \infty \end{cases} , \quad u > 0$$

ou

$$\phi_{i-\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{7}{4}\phi_i - \frac{3}{4}\phi_{i+1} & , 0 < \hat{\phi}_U < \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4}\phi_i + \frac{3}{8}\phi_{i-1} - \frac{1}{8}\phi_{i+1} & , \frac{3}{8} \leq \hat{\phi}_U \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}\phi_i + \frac{3}{4}\phi_{i-1} & , \frac{3}{4} < \hat{\phi}_U < 1 \\ \phi_i & , -\infty < \hat{\phi}_U \leq 0 \text{ ou } 1 \leq \hat{\phi} < \infty \end{cases} , \quad u < 0.$$

Logo, a derivada convectiva de (3.9) é aproximada pelo esquema CUBISTA no ponto  $(i, k)$ ,  $k \geq 0$ , conforme o sinal da velocidade de convecção  $u$ , por meio da diferença central (3.11) como

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\Big|_i^k \approx \begin{cases} \frac{1}{2\Delta x} \left(\frac{3}{2}\phi_{i-2}^k - 5\phi_{i-1}^k + \frac{7}{2}\phi_i^k\right) & , 0 < \hat{\phi}_U < \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8\Delta x} (\phi_{i-2}^k - 7\phi_{i-1}^k + 3\phi_i^k + 3\phi_{i+1}^k) & , \frac{3}{8} \leq \hat{\phi}_U \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2\Delta x} \left(-\frac{1}{2}\phi_{i-1}^k - \phi_i^k + \frac{3}{2}\phi_{i+1}^k\right) & , \frac{3}{4} < \hat{\phi}_U < 1 \\ \frac{1}{\Delta x} (\phi_i^k - \phi_{i-1}^k) & , -\infty < \hat{\phi}_U \leq 0 \text{ ou } 1 \leq \hat{\phi} < \infty \end{cases} , \quad u > 0$$

ou

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\Big|_i^k \approx \begin{cases} \frac{1}{2\Delta x} \left(-\frac{7}{2}\phi_i^k + 5\phi_{i+1}^k - \frac{3}{2}\phi_{i+2}^k\right) & , 0 < \hat{\phi}_U < \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8\Delta x} (-3\phi_{i-1}^k - 3\phi_i^k + 7\phi_{i+1}^k - \phi_{i+2}^k) & , \frac{3}{8} \leq \hat{\phi}_U \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2\Delta x} \left(-\frac{3}{2}\phi_{i-1}^k + \phi_i^k + \frac{1}{2}\phi_{i+1}^k\right) & , \frac{3}{4} < \hat{\phi}_U < 1 \\ \frac{1}{\Delta x} (-\phi_i^k + \phi_{i+1}^k) & , -\infty < \hat{\phi}_U \leq 0 \text{ ou } 1 \leq \hat{\phi} < \infty \end{cases} , \quad u < 0.$$

Substituindo o valor de (3.13) e as discretizações da derivada convectiva na equação algébrica de diferenças (3.14), e considerando também o número de Courant (3.16), tem-se a forma (3.17)

$$\phi_i^{k+1} = \phi_i^k - \begin{cases} \frac{\sigma}{2} \times \begin{cases} \frac{3}{2}\phi_{i-2}^k - 5\phi_{i-1}^k + \frac{7}{2}\phi_i^k, & u > 0 \\ -\frac{7}{2}\phi_i^k + 5\phi_{i+1}^k - \frac{3}{2}\phi_{i+2}^k, & u < 0 \end{cases}, & 0 < \hat{\phi}_U < \frac{3}{8} \\ \frac{\sigma}{8} \times \begin{cases} \phi_{i-2}^k - 7\phi_{i-1}^k + 3\phi_i^k + 3\phi_{i+1}^k, & u > 0 \\ -3\phi_{i-1}^k - 3\phi_i^k + 7\phi_{i+1}^k - \phi_{i+2}^k, & u < 0 \end{cases}, & \frac{3}{8} \leq \hat{\phi}_U \leq \frac{3}{4} \\ \frac{\sigma}{2} \times \begin{cases} -\frac{1}{2}\phi_{i-1}^k - \phi_i^k + \frac{3}{2}\phi_{i+1}^k, & u > 0 \\ -\frac{3}{2}\phi_{i-1}^k + \phi_i^k + \frac{1}{2}\phi_{i+1}^k, & u < 0 \end{cases}, & \frac{3}{4} < \hat{\phi}_U < 1 \\ \sigma \times \begin{cases} \phi_i^k - \phi_{i-1}^k, & u > 0 \\ -\phi_i^k + \phi_{i+1}^k, & u < 0 \end{cases}, & -\infty < \hat{\phi}_U \leq 0 \text{ ou } 1 \leq \hat{\phi}_U < \infty \end{cases}.$$

A figura 3.12 apresenta o estêncil computacional da equação de advecção (3.9) discretizada por meio do esquema CUBISTA no intervalo  $0.75 < \hat{\phi}_U < 1$ , tanto para  $u > 0$  quanto para  $u < 0$ .

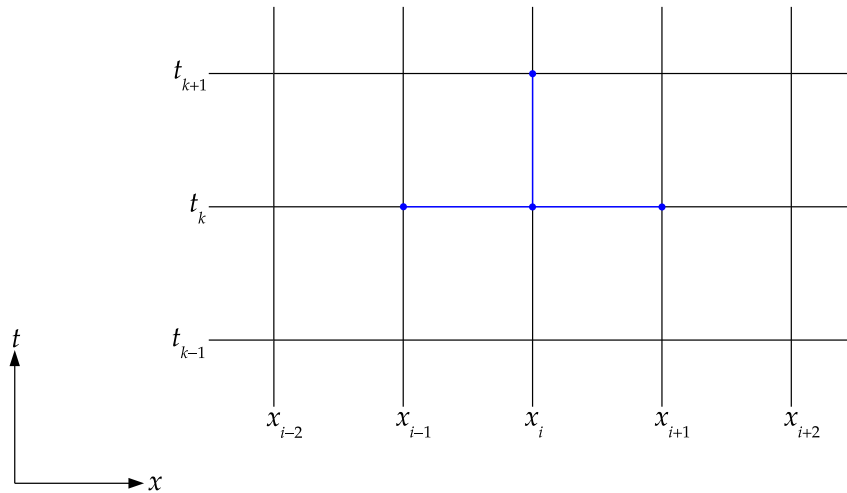


Figura 3.12: Estêncil do esquema CUBISTA para a equação de advecção 1D no intervalo  $(0.75, 1)$ , com  $u > 0$  e  $u < 0$

Os estêncis para os demais intervalos  $(0, 0.375)$ ,  $[0.375, 0.75]$  e  $(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$  são idênticos aos apresentados nas figuras 3.6, 3.7 e 3.5, respectivamente.

### 3.6 ESQUEMA UPWIND VIA SÉRIE DE FOURIER

Já foi estabelecido pela comunidade científica que as séries de Fourier<sup>18</sup> têm importantes aplicações em diversas áreas do conhecimento, como na dedução formal da solução de EDPs – submetidas a condições iniciais e de contorno específicas – de problemas de resfriamento e de vibrações [74], na análise de sistemas mecânicos ou elétricos sob a ação de forças externas [9], no processamento de sinais e de imagens [38], e até mesmo na teoria aproximativa, servindo para aproximar os valores de uma função [11], dentre outras.

Por outro lado, como abordado na seção 3.4, é importante que o esquema numérico aplicado aos termos convectivos seja não linear, pois isto permitirá maior precisão nos resultados simulados. É nessa questão que o presente trabalho se justifica, agregando série de Fourier (de caráter não linear) à dedução de esquemas convectivos.

Uma vez que o esquema CUBISTA abordado na seção 3.5 é de alta ordem, construído sob o critério de limitação TVD e, portanto, um esquema de alta resolução, então, tomando uma série de Fourier sob uma extensão ímpar a partir da função que o define, pode-se conseguir um ganho adicional quanto à precisão dos resultados simulados. É essa conjectura que se pretende avaliar neste trabalho.

Assim, a presente seção é escrita com o propósito de se obter um novo esquema aproximativo para o tratamento dos termos convectivos das equações incompressíveis de Navier-Stokes (2.8) e (2.9). Inicialmente, são estabelecidas informações necessárias sobre séries de Fourier e, em seguida, deduz-se o novo esquema não linear de alta resolução, o qual preserva o perfil não oscilatório da solução numérica.

Considere o esquema CUBISTA (3.49) e suponha  $0 < \hat{\phi}_U \leq 2$ . Assim, pode-se construir a função definida por partes

$$f(\hat{\phi}_U) = \begin{cases} \frac{7}{4}\hat{\phi}_U & , 0 < \hat{\phi}_U < \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4}\left(\hat{\phi}_U + \frac{1}{2}\right) & , \frac{3}{8} \leq \hat{\phi}_U \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}(\hat{\phi}_U + 3) & , \frac{3}{4} < \hat{\phi}_U \leq 2 \end{cases}, \quad (3.51)$$

cujo gráfico é ilustrado na figura 3.13.

Para determinar uma série de Fourier da função (3.51) deve-se, primeiramente, considerar o intervalo simétrico  $-2 \leq \hat{\phi}_U \leq 2$ , estendendo  $f(\hat{\phi}_U)$  em  $[-2, 0]$ . De forma geral, uma extensão ímpar de uma dada função  $f(x)$ ,  $x \in [0, L] \subset \mathbb{R}$ , é definida como

$$F_I(x) = \begin{cases} f(x) & , 0 \leq x \leq L \\ -f(-x) & , -L \leq x < 0 \end{cases}, \quad (3.52)$$

<sup>18</sup>Em homenagem ao matemático e físico francês Joseph Fourier (1768–1830).

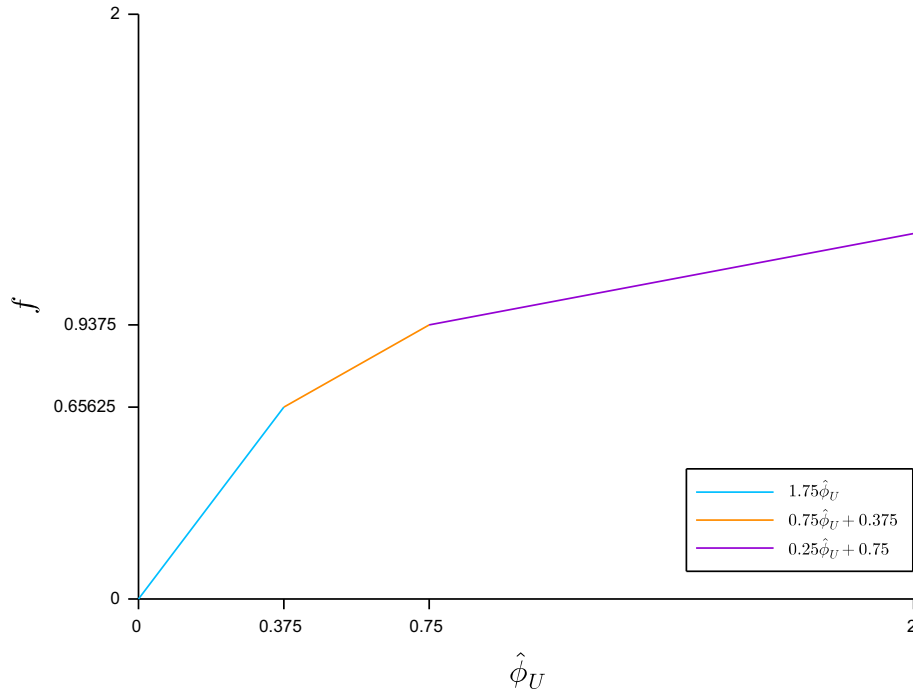


Figura 3.13: Representação da função (3.51) no plano- $\hat{\phi}_U f(\hat{\phi}_U)$ , com  $0 < \hat{\phi}_U \leq 2$

de modo que a extensão  $F_I$ , restrita ao intervalo  $[0, L]$ , coincida com a função original  $f(x)$ .

Assim, segue diretamente da definição (3.52) que a extensão ímpar de (3.51) definida no intervalo  $[-2, 2]$  é dada por

$$F_I(\hat{\phi}_U) = \begin{cases} \frac{1}{4}(\hat{\phi}_U - 3) & , -2 \leq \hat{\phi}_U < -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4}\left(\hat{\phi}_U - \frac{1}{2}\right) & , -\frac{3}{4} \leq \hat{\phi}_U \leq -\frac{3}{8} \\ \frac{7}{4}\hat{\phi}_U & , -\frac{3}{8} < \hat{\phi}_U < \frac{3}{8} \\ \frac{3}{4}\left(\hat{\phi}_U + \frac{1}{2}\right) & , \frac{3}{8} \leq \hat{\phi}_U \leq \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}(\hat{\phi}_U + 3) & , \frac{3}{4} < \hat{\phi}_U \leq 2 \end{cases} , \quad (3.53)$$

cuja representação geométrica é exibida na figura 3.14.

Note que a função real ímpar  $F_I(\hat{\phi}_U)$  é contínua e, portanto, integrável no intervalo  $[-2, 2]$ . Também, como  $|F_I(\hat{\phi}_U)| \leq 5/4$  para todo  $\hat{\phi}_U \in [-2, 2]$ , ou seja,  $F_I(\hat{\phi}_U)$  é limitada em  $[-2, 2]$ , segue que

$$\int_{-2}^2 |F_I(\hat{\phi}_U)| d\hat{\phi}_U = 0 < \infty,$$

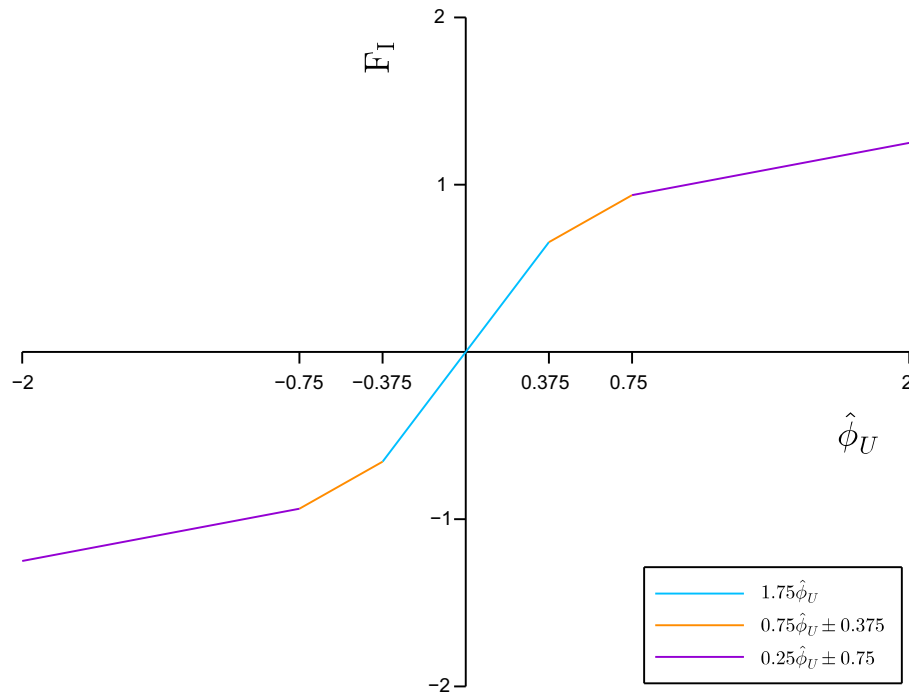


Figura 3.14: Extensão ímpar de (3.51), com  $-2 \leq \hat{\phi}_U \leq 2$

e, portanto, a função  $F_I$  é absolutamente integrável em  $[-2, 2]$ . Suponha, ainda, que  $F_I$  seja periódica de período 4, isto é,

$$F_I(\hat{\phi}_U + 4) = F_I(\hat{\phi}_U), \quad \forall \hat{\phi}_U \in \mathbb{R}.$$

Sob tais considerações, pode-se representar a extensão ímpar (3.53) via série de Fourier por [18]

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos\left(\frac{n\pi\hat{\phi}_U}{2}\right) + b_n \sen\left(\frac{n\pi\hat{\phi}_U}{2}\right) \right], \quad (3.54)$$

com  $a_n$  e  $b_n$  os coeficientes de Fourier, dados por

$$a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 F_I(\hat{\phi}_U) \cos\left(\frac{n\pi\hat{\phi}_U}{2}\right) d\hat{\phi}_U, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

e

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 F_I(\hat{\phi}_U) \sen\left(\frac{n\pi\hat{\phi}_U}{2}\right) d\hat{\phi}_U, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Além disso, como a extensão (3.53) é uma função ímpar, segue das proprie-

dades de paridade de funções que

$$\underbrace{F_I(\hat{\phi}_U) \cos\left(\frac{n\pi\hat{\phi}_U}{2}\right)}_{\text{ÍMPAR}} \implies a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 F_I(\hat{\phi}_U) \cos\left(\frac{n\pi\hat{\phi}_U}{2}\right) d\hat{\phi}_U = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.55)$$

e

$$\begin{aligned} \underbrace{F_I(\hat{\phi}_U) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\hat{\phi}_U}{2}\right)}_{\text{PAR}} &\implies b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 F_I(\hat{\phi}_U) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\hat{\phi}_U}{2}\right) d\hat{\phi}_U \\ &= \int_0^2 F_I(\hat{\phi}_U) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\hat{\phi}_U}{2}\right) d\hat{\phi}_U, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.56)$$

Dessa forma, considerando (3.55) e (3.56), a série de Fourier (3.54) pode ser reescrita como a série de senos

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\hat{\phi}_U}{2}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.57)$$

onde os coeficientes  $b_n$  são dados por

$$\begin{aligned} b_n &= \int_0^2 F_I(\hat{\phi}_U) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\hat{\phi}_U}{2}\right) d\hat{\phi}_U \\ &= \int_0^{\frac{3}{8}} \frac{7}{4} \hat{\phi}_U \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\hat{\phi}_U}{2}\right) d\hat{\phi}_U + \int_{\frac{3}{8}}^{\frac{3}{4}} \left(\frac{3}{4} \hat{\phi}_U + \frac{3}{8}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\hat{\phi}_U}{2}\right) d\hat{\phi}_U \\ &\quad + \int_{\frac{3}{4}}^2 \left(\frac{1}{4} \hat{\phi}_U + \frac{3}{4}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\hat{\phi}_U}{2}\right) d\hat{\phi}_U. \end{aligned}$$

Ainda, uma vez que

$$\frac{7}{4} \int_0^{\frac{3}{8}} \hat{\phi}_U \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\hat{\phi}_U}{2}\right) d\hat{\phi}_U = \frac{7}{2n\pi} \left[ \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{3n\pi}{16}\right) - \frac{3}{8} \cos\left(\frac{3n\pi}{16}\right) \right],$$

$$\begin{aligned} &\frac{3}{4} \int_{\frac{3}{8}}^{\frac{3}{4}} \hat{\phi}_U \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\hat{\phi}_U}{2}\right) d\hat{\phi}_U + \frac{3}{8} \int_{\frac{3}{8}}^{\frac{3}{4}} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\hat{\phi}_U}{2}\right) d\hat{\phi}_U \\ &= \frac{3}{2n\pi} \left[ \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{3n\pi}{8}\right) - \frac{5}{4} \cos\left(\frac{3n\pi}{8}\right) - \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{3n\pi}{16}\right) + \frac{7}{8} \cos\left(\frac{3n\pi}{16}\right) \right] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \int_{\frac{3}{4}}^2 \hat{\phi}_U \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{\phi}_U}{2} \right) d\hat{\phi}_U + \frac{3}{4} \int_{\frac{3}{4}}^2 \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{\phi}_U}{2} \right) d\hat{\phi}_U \\ &= \frac{1}{2n\pi} \left[ -5(-1)^n - \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{3n\pi}{8} \right) + \frac{15}{4} \cos \left( \frac{3n\pi}{8} \right) \right], \end{aligned}$$

então,  $b_n$ ,  $n \in [1, \infty) \subset \mathbb{N}$ , é dado por

$$b_n = \frac{1}{n^2\pi^2} \left[ 4 \operatorname{sen} \left( \frac{3n\pi}{16} \right) + 2 \operatorname{sen} \left( \frac{3n\pi}{8} \right) - \frac{5}{2} n\pi (-1)^n \right]. \quad (3.58)$$

Substituindo o coeficiente (3.58) na série (3.57), tem-se a série de Fourier para uma extensão ímpar de (3.51) com  $\hat{\phi}_U \in [-2, 2]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} \left[ 4 \operatorname{sen} \left( \frac{3n\pi}{16} \right) + 2 \operatorname{sen} \left( \frac{3n\pi}{8} \right) - \frac{5}{2} n\pi (-1)^n \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{\phi}_U}{2} \right), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.59)$$

A convergência da série (3.59) é verificada a seguir. Para explicitar a análise, toma-se por base o próximo teorema, cuja demonstração pode ser encontrada em [18] e que fornece condições suficientes para que uma dada função seja igual à sua série de Fourier.

**Teorema 3.3 (Teorema de Convergência de Fourier).** *Se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função seccionalmente diferenciável<sup>19</sup> em  $[-L, L]$  e  $2L$ -periódica, então a série de Fourier de  $f = f(x)$  converge para*

$$\frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)], \quad \forall x \in (-L, L) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} [f(-L+0) + f(L-0)], \quad x = \pm L.$$

Caso a função seja contínua em  $[-L, L]$ , então  $f(x-0) = f(x+0)$  e, dessa forma, a convergência do teorema 3.3 é reescrita simplesmente como

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \left( \frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi x}{L} \right) \right], \quad \forall x \in (-L, L).$$

Uma vez que a extensão ímpar (3.53) satisfaz as hipóteses do teorema 3.3, então pode-se escrever

$$F_I(\hat{\phi}_U) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} \left[ 4 \operatorname{sen} \left( \frac{3n\pi}{16} \right) + 2 \operatorname{sen} \left( \frac{3n\pi}{8} \right) - \frac{5}{2} n\pi (-1)^n \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{\phi}_U}{2} \right),$$

para qualquer  $\hat{\phi}_U \in (-2, 2)$  e  $n \in \mathbb{N}$ .

<sup>19</sup>Diz-se que uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é seccionalmente diferenciável em um intervalo fechado quando  $f$  e sua função derivada  $f'$  são seccionalmente contínuas nesse intervalo, ou seja, se ambas têm, nesse intervalo, no máximo um número finito de descontinuidades finitas [74].

Particularmente, a fim de se garantir que a representação da extensão (3.53) pela série trigonométrica (3.59) esteja inteiramente contida na região TVD, a análise de convergência será restrita ao intervalo  $[0, 1] \subset [-2, 2]$ . Para isso, dado  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m < \infty$ , a função  $F_I$  será aproximada por uma sequência de polinômios trigonométricos da forma

$$S_m(F_I)(\hat{\phi}_U) = \sum_{n=1}^m b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi\hat{\phi}_U}{2} \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.60)$$

para qualquer  $\hat{\phi}_U \in [0, 1]$ , com  $S_m(F_I)(\hat{\phi}_U)$  a soma dos  $m$  primeiros termos da série de Fourier da extensão ímpar  $F_I$  e  $b_n$  o coeficiente de Fourier dado por (3.58).

Nota-se que, para o extremo inferior do intervalo  $[0, 1]$ , ou seja, para  $\hat{\phi}_U = 0$ ,

$$\operatorname{sen} \left( \frac{n\pi\hat{\phi}_U}{2} \right) = \operatorname{sen}(0) = 0 \implies \sum_{n=1}^m b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi\hat{\phi}_U}{2} \right) = 0,$$

e como, por (3.53),  $F_I(0) = 0$ , segue que

$$F_I(0) = \sum_{n=1}^m b_n \operatorname{sen}(0), \quad \forall m, n \in \mathbb{N}, m < \infty. \quad (3.61)$$

No entanto, uma investigação mais criteriosa deve ser feita para  $\hat{\phi}_U = 1$ . Neste caso, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , tem-se

$$\operatorname{sen} \left( \frac{n\pi\hat{\phi}_U}{2} \right) = \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi}{2} \right) = \begin{cases} 0 & , n \text{ PAR} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}} & , n \text{ ÍMPAR} \end{cases}$$

e, portanto, a expressão (3.60) é reescrita como

$$S_m(F_I)(1) = \sum_{n=1}^m b_{2n-1} (-1)^{n-1},$$

em que

$$b_{2n-1} = \frac{1}{(2n-1)^2\pi^2} \left[ 4 \operatorname{sen} \left( \frac{3}{16}\pi(2n-1) \right) + 2 \operatorname{sen} \left( \frac{3}{8}\pi(2n-1) \right) + \frac{5}{2}\pi(2n-1) \right].$$

De acordo com o teorema 3.3, sabe-se que  $S_m(F_I)(1) \rightarrow 1 = F_I(1)$ , quando  $m \rightarrow \infty$ . Por outro lado, se  $m < \infty$  fixo, então

$$F_I(1) \neq \sum_{n=1}^m b_{2n-1} (-1)^{n-1}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (3.62)$$

como pode ser comprovado pelos dados da tabela 3.1.

Tabela 3.1:  $m$ -ésima soma parcial da série de Fourier da extensão ímpar  $F_I(\hat{\phi}_U)$  (3.53) para valores arbitrários de  $m \in \mathbb{N}$ , com  $\hat{\phi}_U = 1$  e truncamento de oito casas decimais

$m$	$S_m(F_I)(1)$	$ S_m(F_I)(1) - S_{m-1}(F_I)(1) $
1	1.20815598	—————
2	0.90734781	0.30080817
3	1.06656352	0.15921571
10	0.98116423	0.04056697
29	1.00683371	0.01400706
30	0.99334644	0.01348727
31	1.00630594	0.01295950
100	0.99801686	0.00399509
1000	0.99980105	0.00039810
5000	0.99996021	0.00007958

Logo, com base nas expressões (3.61) e (3.62), segue que, para quaisquer  $\hat{\phi}_U \in [0, 1]$  e  $m, n \in \mathbb{N}$ , com  $m < \infty$ ,

$$F_I(\hat{\phi}_U) \cong \sum_{n=1}^m \frac{1}{n^2 \pi^2} \left[ 4 \operatorname{sen} \left( \frac{3n\pi}{16} \right) + 2 \operatorname{sen} \left( \frac{3n\pi}{8} \right) - \frac{5}{2} n\pi (-1)^n \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{\phi}_U}{2} \right).$$

Resta agora determinar um valor  $m \in \mathbb{N}$  que satisfaça a condição de que a soma parcial  $S_m(F_I)(\hat{\phi}_U)$  esteja inteiramente contida na região TVD, para qualquer  $\hat{\phi}_U \in (0, 1)$ , isto é, exige-se que  $\hat{\phi}_U < S_m(F_I)(\hat{\phi}_U) < 2\hat{\phi}_U$  e  $S_m(F_I)(\hat{\phi}_U) < 1$ . Ao mesmo tempo, tem-se por objetivo fixar um valor de  $m \in \mathbb{N}$  suficientemente pequeno, no sentido de reduzir o custo computacional envolvido no processo de simulação e cujo gráfico da soma parcial resultante não gere amplos erros de aproximação em torno da extensão ímpar  $F_I$  (3.53).

No entanto, ao plotar os gráficos das somas parciais, observou-se que em alguns subintervalos os requisitos do parágrafo anterior não eram satisfeitos, como pode ser observado nas figuras 3.15(a) – 3.15(f). Visivelmente, quanto maior o valor de  $m \in \mathbb{N}$ , as zonas de complicação se concentram nos subintervalos  $(0, 0.1]$  e  $[0.9, 1)$ .

Torna-se necessário, então, restringir as possíveis escolhas para  $m \in \mathbb{N}$ , de forma que  $S_m(F_I)(\hat{\phi}_U)$  não intercepte as retas  $\hat{\phi}_f = \hat{\phi}_U$ ,  $\hat{\phi}_f = 2\hat{\phi}_U$  e  $\hat{\phi}_f = 1$ , para todo  $\hat{\phi}_U \in (0, 1)$ . O seguinte corolário, caso particular do Teorema do Valor Intermediário [45], fornece garantias de que o polinômio trigonométrico não transcenda a fronteira da região TVD.

**Corolário 3.4.** *Se  $f$  for uma função contínua no intervalo fechado  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  e se  $f(a)$  e  $f(b)$  tiverem sinais contrários, então existirá pelo menos um  $c$  em  $(a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ .*

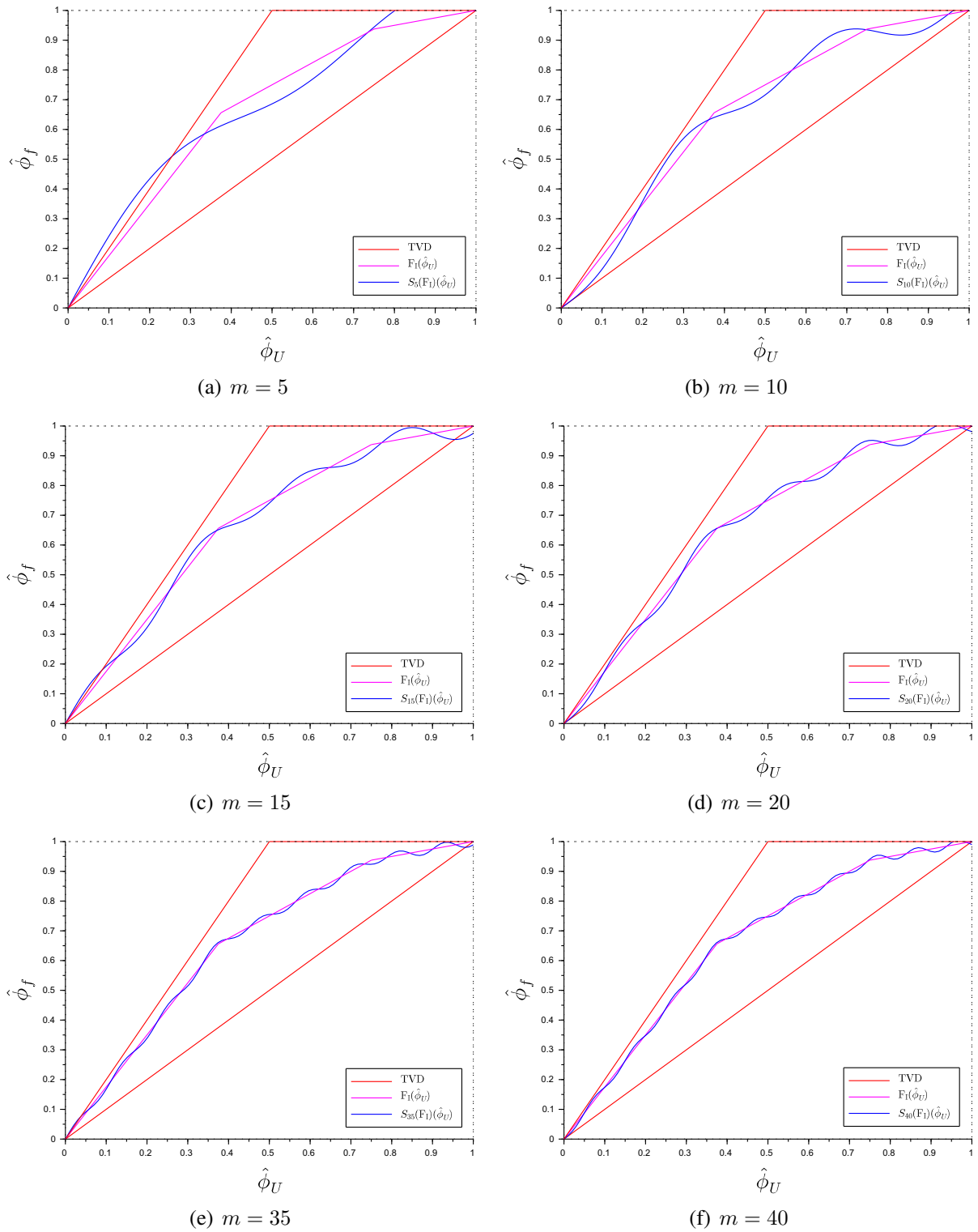


Figura 3.15: Gráfico da  $m$ -ésima soma parcial da série de Fourier da extensão ímpar  $F_I(\hat{\phi}_U)$  (3.53) para alguns valores de  $m \in \mathbb{N}$ , com  $0 < \hat{\phi}_U < 1$

Por conseguinte, define-se inicialmente a função

$$H_1 : [0.01, 0.1] \subset [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\hat{\phi}_U \longmapsto S_m(F_I)(\hat{\phi}_U) - \kappa \hat{\phi}_U = \sum_{n=1}^m b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{\phi}_U}{2} \right) - \kappa \hat{\phi}_U,$$

com  $\kappa = 1$  para  $m$  par e  $\kappa = 2$  para  $m$  ímpar. Como  $S_m(\mathbf{F}_1)(\hat{\phi}_U)$ ,  $\hat{\phi}_U$  e  $2\hat{\phi}_U$  são contínuas, então  $H_1$  é contínua e portanto, de acordo com o corolário 3.4, deve-se escolher  $m \in \mathbb{N}$  de maneira que  $H_1(\hat{\phi}_U) \neq 0$  em  $(0.01, 0.1)$ , com  $H_1(0.01) \times H_1(0.1) > 0$ , mas  $\hat{\phi}_U < S_m(\mathbf{F}_1)(\hat{\phi}_U) < 2\hat{\phi}_U$ .

Nessa perspectiva, constatou-se que os valores  $m \in \mathbb{N}$  ímpares são inapropriados, pois, para  $m \geq 15$ , com  $m$  suficientemente pequeno, a curva trigonométrica representativa das somas parciais sempre intercepta a reta  $\hat{\phi}_f = 2\hat{\phi}_U$  no intervalo  $(0.01, 0.1)$ , como mostram as figuras 3.15(c) e 3.15(e). Por outro lado, os dados da tabela 3.2 informam que, embora a contrapositiva do corolário 3.4 seja satisfeita para  $1 \leq m \leq 13$ , o gráfico da  $m$ -ésima soma parcial intercepta a fronteira da região TVD em um ou dois pontos distintos fora do intervalo  $(0.01, 0.1)$ , como pode ser visto na figura 3.15(a), por exemplo. Além disso, para estes valores há um amplo erro de aproximação em torno da extensão ímpar  $F_1$ .

Tabela 3.2: Estimativa para  $H_1$  em  $\hat{\phi}_U = 0.01$  e  $\hat{\phi}_U = 0.1$ , com  $m \in \mathbb{N}$  ímpar e truncamento de oito casas decimais

$m$	$S_m(\mathbf{F}_1)(0.01) - 0.02$	$S_m(\mathbf{F}_1)(0.1) - 0.2$
1	$-1.02312 \times 10^{-3}$	$-1.100277 \times 10^{-2}$
3	$4.71447 \times 10^{-3}$	$4.260371 \times 10^{-2}$
5	$5.04402 \times 10^{-3}$	$4.133363 \times 10^{-2}$
7	$4.67109 \times 10^{-3}$	$3.233731 \times 10^{-2}$
9	$2.95683 \times 10^{-3}$	$1.265023 \times 10^{-2}$
11	$2.70182 \times 10^{-3}$	$2.8198 \times 10^{-3}$
13	$3.89564 \times 10^{-3}$	$2.812 \times 10^{-5}$

Para os valores  $m \in \mathbb{N}$  pares, define-se também a função

$$H_2 : [0.9, 0.99] \subset [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\hat{\phi}_U \longmapsto S_m(\mathbf{F}_1)(\hat{\phi}_U) - 1 = \sum_{n=1}^m b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi\hat{\phi}_U}{2} \right) - 1.$$

Conseqüentemente, conforme corolário 3.4,  $m$  par deve ser tal que  $H_2(\hat{\phi}_U) \neq 0$  em  $(0.9, 0.99)$ , com  $H_2(0.9) \times H_2(0.99) > 0$ , mas  $S_m(\mathbf{F}_1)(\hat{\phi}_U) < 1$ .

Assim, se  $H_1$  e  $H_2$  forem ambos não nulos para algum  $m$  par suficiente pequeno satisfazendo, concomitantemente,  $\hat{\phi}_U < S_m(\mathbf{F}_1)(\hat{\phi}_U)$  e  $S_m(\mathbf{F}_1)(\hat{\phi}_U) < 1$ , então esse valor é razoável para ser fixado como o limite superior da soma parcial (3.60). Após algumas inspeções, concluiu-se que, apesar da desigualdade  $\hat{\phi}_U < S_m(\mathbf{F}_1)(\hat{\phi}_U)$  ser satisfeita para todo  $m$  par, para os Algarismos da forma  $m = 4 + 4l$ ,  $l \in \mathbb{Z}_+$ ,  $S_m(\mathbf{F}_1)(\hat{\phi}_U) \not< 1$  em  $(0.9, 0.99)$ , ou seja, o gráfico da soma parcial resultante intercepta a reta  $\hat{\phi}_f = 1$  em dois pontos distintos, como pode ser averiguado nas figuras 3.15(d) e 3.15(f), sendo, desta maneira, descartados.

Logo, limita-se a escolha aos números naturais pares da forma  $m = 2 + 4l$ ,  $l \in \mathbb{Z}_+$ , cujos gráficos da  $m$ -ésima soma parcial (3.60) se assemelham ao gráfico apresentado na figura 3.15(b) e cujos valores para  $\hat{\phi}_U$  muito próximos de um são dispostos na tabela 3.3.

Tabela 3.3: Comparativo da  $m$ -ésima soma parcial da série de Fourier (3.59) avaliada para valores próximos de  $\hat{\phi}_U = 1$ , com  $m = 22, 26, 30, 34, 38$  e truncamento de oito casas decimais

$\hat{\phi}_U$	$F_1(\hat{\phi}_U)$	$S_{22}(F_1)(\hat{\phi}_U)$	$S_{26}(F_1)(\hat{\phi}_U)$	$S_{30}(F_1)(\hat{\phi}_U)$	$S_{34}(F_1)(\hat{\phi}_U)$	$S_{38}(F_1)(\hat{\phi}_U)$
0.985	0.99625	1.00400025	0.99997613	0.99713932	0.99632918	0.99474098
0.986	0.99650	1.00507599	1.00107902	0.99825966	0.99746296	0.99586367
0.987	0.99675	1.00614234	1.00217538	0.99937730	0.99859515	0.99699000
0.988	0.99700	1.00719829	1.00326372	1.00049024	0.99972316	0.99811678
0.989	0.99725	1.00824281	1.00434259	1.00159648	1.00084441	0.99924081
0.990	0.99750	1.00927490	1.00541053	1.00269403	1.00195634	1.00035889
0.991	0.99775	1.01029358	1.00646609	1.00378092	1.00305641	1.00146784
0.992	0.99800	1.01129787	1.00750787	1.00485522	1.00414210	1.00256451
0.993	0.99825	1.01228681	1.00853447	1.00591499	1.00521094	1.00364579
0.994	0.99850	1.01325946	1.00954451	1.00695835	1.00626052	1.00470861
0.995	0.99875	1.01421491	1.01053666	1.00798344	1.00728845	1.00574999
0.996	0.99900	1.01515223	1.01150958	1.00898844	1.00829242	1.00676698
0.997	0.99925	1.01607057	1.01246201	1.00997160	1.00927019	1.00775676
0.998	0.99950	1.01696905	1.01339267	1.01093117	1.01021958	1.00871658
0.999	0.99975	1.01784684	1.01430037	1.01186548	1.01113851	1.00964380

Ainda da tabela 3.3, depreende-se que, para valores de  $m$  suficientemente pequenos e  $\hat{\phi}_U$  muito próximo de um, a curva representativa da  $m$ -ésima soma parcial intercepta a reta  $\hat{\phi}_f = 1$ . Por outro lado, de (3.62),  $S_m(F_1)(1)$  tende a um quando  $m$  tende a infinito e, neste caso, a  $m$ -ésima soma parcial representa a própria extensão ímpar (3.53) definida no intervalo  $(0, 1)$ , a qual é idêntica ao esquema CUBISTA.

Assim sendo, para a futura implementação do algoritmo computacional, considera-se um arredondamento de duas casas decimais de precisão para  $\hat{\phi}_U \geq 0.985$  de modo que, para estes valores,  $S_m(F_1)(\hat{\phi}_U)$  é admitido igual a um. Certifica-se, portanto, que a curva trigonométrica está inteiramente contida no intervalo  $(0, 1)$ .

Por fim, apesar dos resultados dispostos na tabela 3.3 serem muito semelhantes, salienta-se que  $m$  deve ser escolhido visando tanto eficiência computacional quanto a preservação ao máximo da não linearidade da curva trigonométrica, no intuito de garantir uma alta ordem de precisão numérica. Nesta perspectiva, conclui-se que um valor apropriado é  $m = 30$ .

Diante do exposto, deduz-se um novo esquema *upwind* fundamentado na série de Fourier para as equações de Navier-Stokes, nomeado CUBISTA–FOURIER (*Convergent and Universally Bounded Interpolation Scheme for the Treatment of Advection via Fourier Series*):

$$\hat{\phi}_f \cong \begin{cases} \sum_{n=1}^{30} \frac{1}{n^2 \pi^2} \left[ 4 \operatorname{sen} \left( \frac{3n\pi}{16} \right) + 2 \operatorname{sen} \left( \frac{3n\pi}{8} \right) - \frac{5}{2} n\pi (-1)^n \right] \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{\phi}_U}{2} \right), & \hat{\phi}_U \in [0, 1) \\ \hat{\phi}_U, & \hat{\phi}_U \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \end{cases}$$

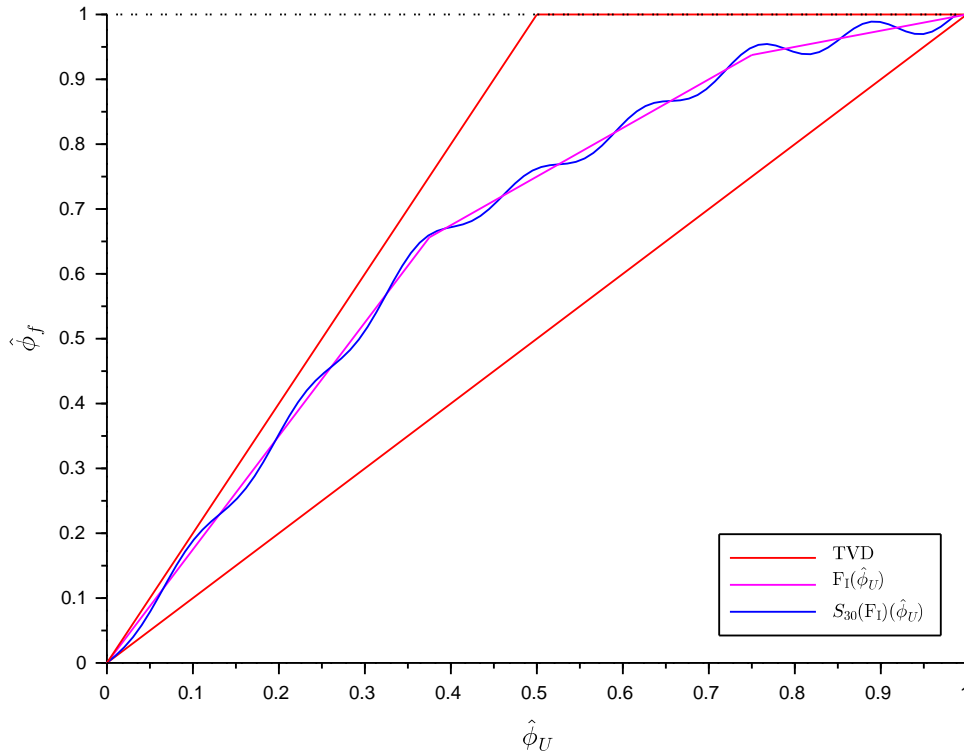


Figura 3.16: Representação do esquema CUBISTA–FOURIER no interior da região TVD

Utilizando a relação (3.39), o esquema CUBISTA–FOURIER é representado de forma equivalente em variáveis não normalizadas como

$$\phi_f \cong \begin{cases} \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{\phi}_U}{2} \right) (\phi_D - \phi_R) + \phi_R, & \hat{\phi}_U \in [0, 1) \\ \phi_U, & \hat{\phi}_U \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \end{cases}, \quad (3.63)$$

com

$$b_n = \frac{1}{n^2 \pi^2} \left[ 4 \operatorname{sen} \left( \frac{3n\pi}{16} \right) + 2 \operatorname{sen} \left( \frac{3n\pi}{8} \right) - \frac{5}{2} n\pi (-1)^n \right].$$

A figura 3.16 ilustra o comportamento da soma parcial de (3.63) em torno da extensão ímpar  $F_I$  (3.53) no intervalo  $[0, 1)$ .



Para simplificação do código computacional, os comprimentos das faces das áreas elementares são admitidos convenientemente unitários, ou seja,  $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$ . As aproximações numéricas das equações governantes são explicitadas tendo como referência a célula destacada em verde na figura 4.1. Sendo assim, a estrutura  $(i, j)$  de identificação dos pontos de malha é vinculada a partir do centro P. Logo, as faces passíveis às discretizações neste volume de controle são  $e$  ou  $w$ , na direção  $\xi$ , e  $n$  ou  $s$ , na direção  $\eta$ , as quais correspondem às coordenadas  $(i + \frac{1}{2}, j)$ ,  $(i - \frac{1}{2}, j)$ ,  $(i, j + \frac{1}{2})$  e  $(i, j - \frac{1}{2})$ , respectivamente.

A discretização é estendida a todo domínio computacional, de modo que os pontos a serem discretizados reportam-se ao nó  $(i, j)$ . Sem perda de generalidade, dados  $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$  e  $i, j \in \mathbb{N}$ , com  $0 \leq i \leq i_{\max}$  e  $0 \leq j \leq j_{\max}$ , segue que a localização dos pontos e das variáveis associadas, em cada volume de controle, é especificada em termos dos espaçamentos nas direções  $\xi$  e  $\eta$  conforme esquema abaixo.

$$\left(i \pm \frac{r_1}{2}, j \pm \frac{r_2}{2}\right) \longrightarrow \begin{cases} r_1, r_2 \text{ ÍMPARES : VÉRTICES} \\ r_1, r_2 \text{ PARES : CENTRO} \longrightarrow \text{PRESSÃO} \\ r_1 \text{ ÍMPAR e } r_2 \text{ PAR : FACES VERTICAIS} \longrightarrow \text{COMPONENTE } U \\ r_2 \text{ ÍMPAR e } r_1 \text{ PAR : FACES HORIZONTAIS} \longrightarrow \text{COMPONENTE } V \end{cases}$$

A figura 4.2 retrata a estrutura de identificação  $(i, j)$  para a célula de referência centrada em P, a qual, a partir deste momento, será denominada simplesmente como célula  $(i, j)$  ou, equivalentemente, como  $i$ -ésima célula.

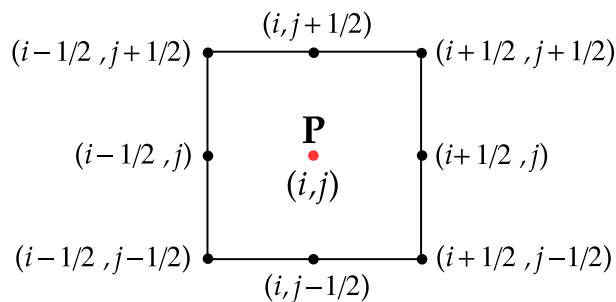


Figura 4.2: Estrutura de identificação  $(i, j)$  para a célula de centro P

No processo de obtenção das equações algébricas, escritas em função dos pontos da malha deslocada, muitas vezes se torna necessário o uso de uma inferência, geralmente estabelecida por meio de médias aritméticas, para aproximar as componentes vetoriais  $U$  e  $V$  e/ou a grandeza escalar  $p$  em pontos que não representam a localização padrão dessas variáveis e, conseqüentemente, não estão definidas na malha.

Assim, dados  $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$  e números naturais  $0 \leq i \leq i_{\max}$  e  $0 \leq j \leq j_{\max}$ , se  $\Theta$  denota as variáveis dependentes  $U, V$  e  $p$ , então, para cada célula pertencente ao domínio

computacional, as seguintes fórmulas genéricas

$$2\bar{\Theta}\left|\left(i\pm\frac{r_1}{2},j\pm\frac{r_2}{2}\right)\right. = \begin{cases} \Theta\left|\left(i\pm\frac{r_1}{2}-\frac{1}{2},j\pm\frac{r_2}{2}\right)\right. + \Theta\left|\left(i\pm\frac{r_1}{2}+\frac{1}{2},j\pm\frac{r_2}{2}\right)\right. & (4.1) \\ \Theta\left|\left(i\pm\frac{r_1}{2},j\pm\frac{r_2}{2}-\frac{1}{2}\right)\right. + \Theta\left|\left(i\pm\frac{r_1}{2},j\pm\frac{r_2}{2}+\frac{1}{2}\right)\right. & (4.2) \end{cases}$$

e

$$4\bar{\Theta}\left|\left(i\pm\frac{r_1}{2},j\pm\frac{r_2}{2}\right)\right. = \Theta\left|\left(i\pm\frac{r_1}{2}-\frac{1}{2},j\pm\frac{r_2}{2}-\frac{1}{2}\right)\right. + \Theta\left|\left(i\pm\frac{r_1}{2}+\frac{1}{2},j\pm\frac{r_2}{2}-\frac{1}{2}\right)\right. \\ + \Theta\left|\left(i\pm\frac{r_1}{2}+\frac{1}{2},j\pm\frac{r_2}{2}+\frac{1}{2}\right)\right. + \Theta\left|\left(i\pm\frac{r_1}{2}-\frac{1}{2},j\pm\frac{r_2}{2}+\frac{1}{2}\right)\right. \quad (4.3)$$

são utilizadas para avaliar a grandeza correspondente  $\Theta$  não definida na malha em qualquer nível de tempo  $k$ ,  $k \in [0, k_{\max}] \subset \mathbb{N}$ .

As equações (4.1) e (4.2) estimam as componentes contravariantes  $U$  nos centros e  $V$  nos vértices, bem como as componentes  $U$  nos vértices e  $V$  nos centros, respectivamente. A equação (4.3) avalia a pressão nos vértices, a componente  $U$  nas faces horizontais e a componente  $V$  nas faces verticais dessas células. Salienta-se que as inferências (4.1)–(4.3) somente fazem sentido se os campos de velocidade e pressão forem conhecidos nos pontos cuja localização é condizente com a definição do armazenamento deslocado.

Por fim, ressalta-se que, como o fluxo numérico deve ser conservado em todas as células do interior do domínio computacional, a massa de fluido que entra e sai de uma célula deve ser igual, considerando ambas as direções do escoamento. Assim, não há a necessidade de realizar a discretização nas quatro arestas do mesmo volume de controle, pois a discretização nas arestas direita e superior deste volume corresponde, respectivamente, à discretização das arestas esquerda e inferior dos volumes de controle adjacentes. Nesse contexto, considerando a célula  $(i, j)$ ,  $i, j \in \mathbb{N}$ , para qualquer nível de tempo  $k$ ,  $k \in [0, k_{\max}] \subset \mathbb{N}$ , deve-se ter

$$\phi_e^k(i, j) = \phi_w^k(i + 1, j) \quad \text{e} \quad \phi_n^k(i, j) = \phi_s^k(i, j + 1), \quad \forall i \in [0, i_{\max}], \forall j \in [0, j_{\max}],$$

onde  $\phi$  representa uma variável genérica convectada no escoamento.

Dadas as hipóteses e fundamentos das discretizações, na próxima seção são obtidas as equações de diferenças que compõem o modelo numérico utilizado para a resolução dos problemas apresentados no capítulo 5. No final deste capítulo, exhibe-se o algoritmo de resolução para escoamentos confinados e incompressíveis.

## 4.1 DISCRETIZAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO

### 4.1.1 Termos Não Convectivos

Durante o processo de obtenção das aproximações por diferenças finitas dos termos não inerciais, o nível de tempo é omitido na discretização das métricas inversas  $x_\xi, x_\eta, y_\xi$  e  $y_\eta$  da transformação de coordenadas. Visto que não se consideram malhas móveis, o valor discreto destas derivadas em um ponto específico da malha permanecerá constante no decorrer do tempo. Desse modo, para uma face  $f$  de uma célula arbitrária do domínio transformado, tem-se

$$\left. \frac{\partial x}{\partial \xi} \right|_f^k \equiv \left. \frac{\partial x}{\partial \xi} \right|_f, \quad \left. \frac{\partial x}{\partial \eta} \right|_f^k \equiv \left. \frac{\partial x}{\partial \eta} \right|_f, \quad \left. \frac{\partial y}{\partial \xi} \right|_f^k \equiv \left. \frac{\partial y}{\partial \xi} \right|_f, \quad \left. \frac{\partial y}{\partial \eta} \right|_f^k \equiv \left. \frac{\partial y}{\partial \eta} \right|_f$$

e, conseqüentemente, como o Jacobiano  $J$  da transformação  $(x, y) \rightarrow (\xi, \eta)$  é escrito em termos dessas métricas, então

$$J_f^k = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^{-1} \Big|_f^k \equiv \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^{-1} \Big|_f = J_f.$$

As discretizações dos termos temporal, de pressão e difusivo das equações de Navier-Stokes são dadas a seguir. Maiores detalhes podem ser consultados em [4].

#### Termos Temporais:

Sejam

$$\mathcal{T}(u) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{u}{J} \right) \quad \text{e} \quad \mathcal{T}(v) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{v}{J} \right)$$

os termos temporais de (2.8) e (2.9), respectivamente. Utilizando o método de Euler explícito, segue que o valor de  $\mathcal{T}(u)$  avaliado na face  $e$  e no nível de tempo  $k$ ,  $k \geq 0$ , é dado por

$$\mathcal{T}(u) \Big|_e^k \approx \frac{1}{J_e} \left( \frac{u_e^{k+1} - u_e^k}{\Delta \tau} \right). \quad (4.4)$$

As figuras 4.3(a) e 4.3(b) destacam a aproximação para a componente  $u$  do vetor velocidade na face  $e$  para os níveis de tempo  $k$  e  $k + 1$ , respectivamente. Por não se considerarem malhas móveis, nota-se que a discretização explícita da derivada parcial  $u_\tau$  na face  $e$  está vinculada unicamente ao ponto de coordenadas  $(i + \frac{1}{2}, j)$  durante o avanço temporal.

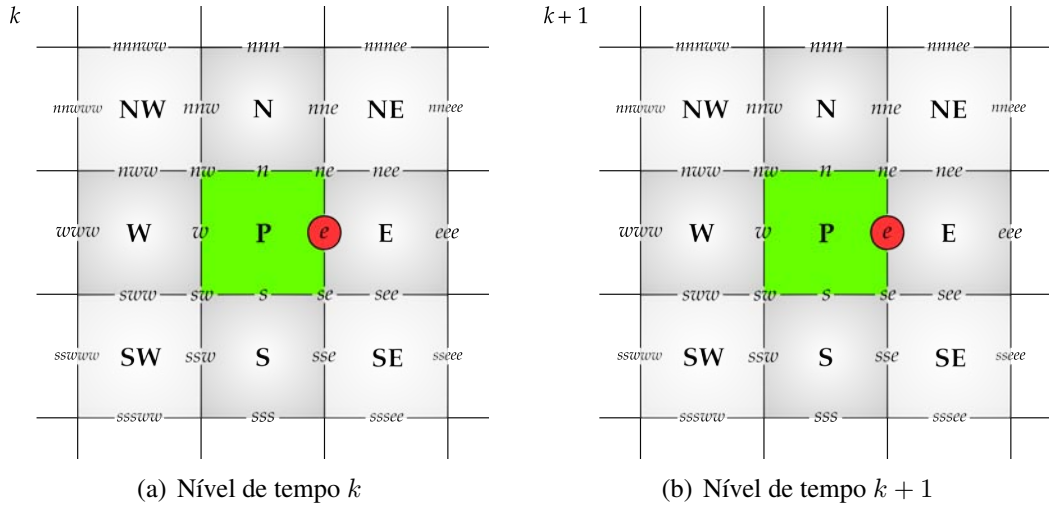


Figura 4.3: Discretização do termo temporal  $\mathcal{T}(u)$  na face  $e$

Semelhantemente, o valor discreto de  $\mathcal{T}(v)$ , avaliado na face  $n$  e no nível de tempo  $k$ ,  $k \geq 0$ , é dado por

$$\mathcal{T}(v) \Big|_n^k \approx \frac{1}{J_n} \left( \frac{v_n^{k+1} - v_n^k}{\Delta\tau} \right). \tag{4.5}$$

As figuras 4.4(a) e 4.4(b) destacam, nesta ordem, a aproximação para a componente  $v$  do vetor velocidade na face  $n$  para os níveis de tempo  $k$  e  $k+1$ . Neste caso, observa-se que a discretização explícita da derivada parcial  $v_\tau$  na face  $n$  está associada exclusivamente ao ponto de coordenadas espaciais  $(i, j + \frac{1}{2})$  no decorrer do tempo.

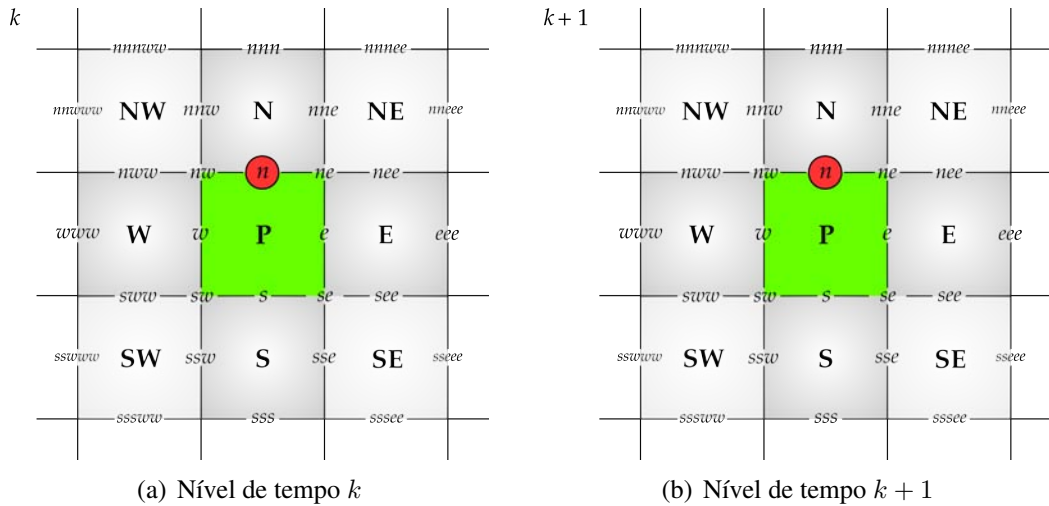


Figura 4.4: Discretização do termo temporal  $\mathcal{T}(v)$  na face  $n$



das derivadas parciais  $p_\xi$  e  $p_\eta$  são mostradas, respectivamente, nas figuras 4.5(a) e 4.5(b), as quais destacam os pontos envolvidos na discretização.

Como pode ser observado na figura 4.5(b), as variáveis  $p_{ne}$  e  $p_{se}$  estão armazenadas nos vértices da célula  $(i, j)$ . Sendo assim, segue da inferência (4.3) que

$$p_{ne}^{k+1} = \frac{1}{4} (p_P^{k+1} + p_E^{k+1} + p_{NE}^{k+1} + p_N^{k+1}) \quad \text{e} \quad p_{se}^{k+1} = \frac{1}{4} (p_S^{k+1} + p_{SE}^{k+1} + p_E^{k+1} + p_P^{k+1}), \quad (4.7)$$

cujos pontos são destacados nas figuras 4.6(a) e 4.6(b), nesta ordem.

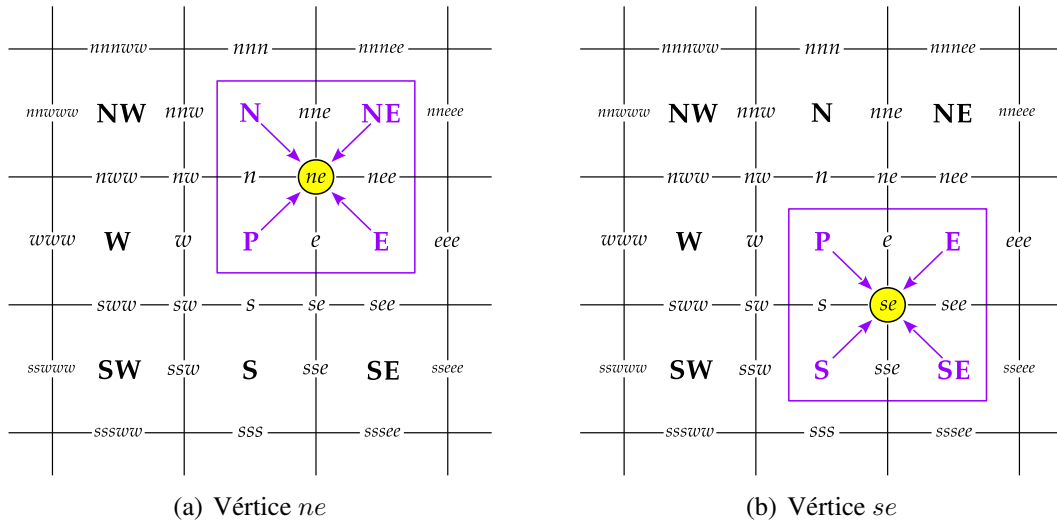


Figura 4.6: Pontos utilizados para estimar a pressão nos vértices  $ne$  e  $se$  da  $i$ -ésima célula

Dessa forma,  $p_{ne}^{k+1} = \bar{p}_{ne}^{k+1}$  e  $p_{se}^{k+1} = \bar{p}_{se}^{k+1}$  e, portanto,

$$\mathcal{P}(u) \Big|_e^{k+1} \approx \frac{1}{\rho} \left[ (\bar{p}_{ne}^{k+1} - \bar{p}_{se}^{k+1}) \frac{\partial y}{\partial \xi} \Big|_e - (p_E^{k+1} - p_P^{k+1}) \frac{\partial y}{\partial \eta} \Big|_e \right]. \quad (4.8)$$

Procedendo de modo análogo, aproximando  $\mathcal{P}(v)$  na face  $n$  e no nível de tempo  $k+1$ ,  $k \geq 0$ , tem-se

$$\mathcal{P}(v) \Big|_n^{k+1} \approx \frac{1}{\rho} \left[ (\bar{p}_{ne}^{k+1} - \bar{p}_{nw}^{k+1}) \frac{\partial x}{\partial \eta} \Big|_n - (p_N^{k+1} - p_P^{k+1}) \frac{\partial x}{\partial \xi} \Big|_n \right]. \quad (4.9)$$

As figuras 4.7(a) e 4.7(b) destacam, nesta ordem, os pontos envolvidos na aproximação das derivadas parciais  $p_\xi$  e  $p_\eta$  na face  $n$  pelo método de diferenças centradas.

Enfim, a figura 4.8 realça os pontos empregados para determinar a pressão no vértice  $nw$  da  $i$ -ésima célula, a qual é estimada através da equação (4.3) como

$$p_{nw}^{k+1} = \frac{1}{4} (p_W^{k+1} + p_P^{k+1} + p_N^{k+1} + p_{NW}^{k+1}).$$

A pressão no vértice  $ne$  é calculada exatamente como na equação (4.7).

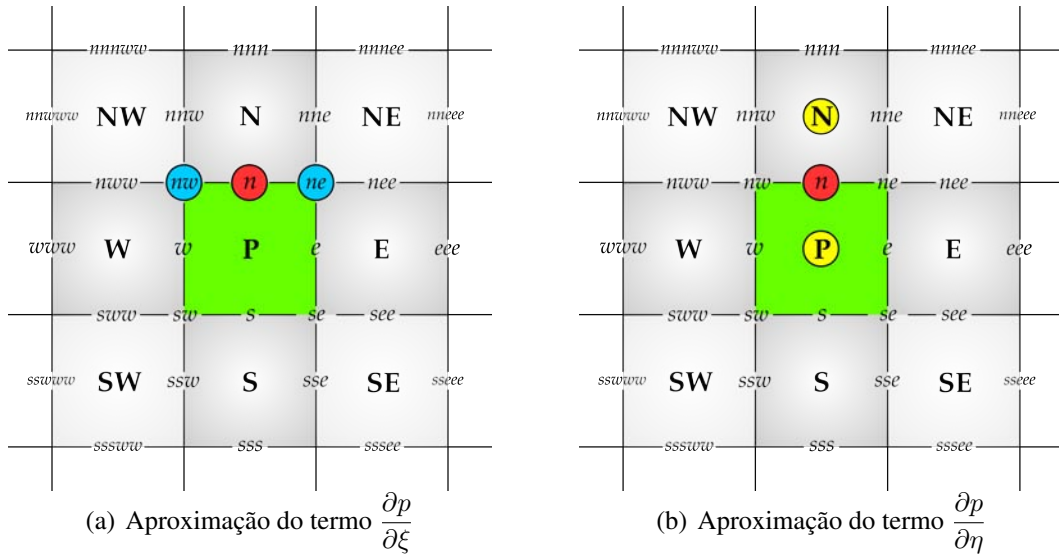


Figura 4.7: Discretização do termo de pressão  $\mathcal{P}(v)$  na face  $n$

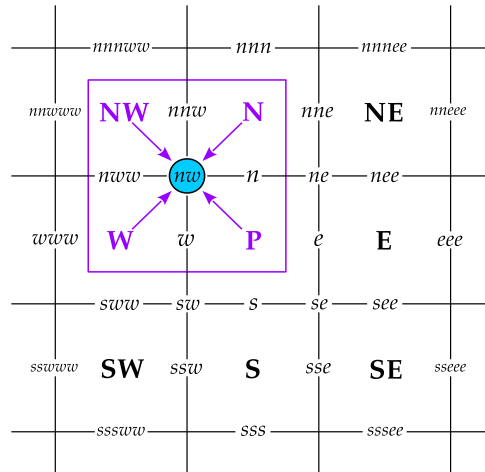


Figura 4.8: Pontos utilizados para estimar a pressão no vértice  $nw$  da  $i$ -ésima célula

**Termos Difusivos:**

Considere

$$\mathcal{D}(u) = \nu \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right) \right], \quad (4.10)$$

o qual corresponde ao termo difusivo de (2.8), e seja

$$\mathcal{D}_1(u) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right),$$

presente no segundo membro de (4.10)

Em conformidade com a figura 4.9, discretizando  $\mathcal{D}_1(u)$  na face  $e$  e no nível

de tempo  $k$ ,  $k \geq 0$ , por meio do esquema de diferenças centradas de segunda ordem, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1(u) \Big|_e^k &= \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right) \right] \Big|_e^k \\ &\approx \left( J \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right) \Big|_E^k - \left( J \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right) \Big|_P^k \\ &= J_E \left[ \alpha_E \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \Big|_E^k - \beta_E \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \Big|_E^k \right] - J_P \left[ \alpha_P \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \Big|_P^k - \beta_P \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \Big|_P^k \right]. \end{aligned}$$

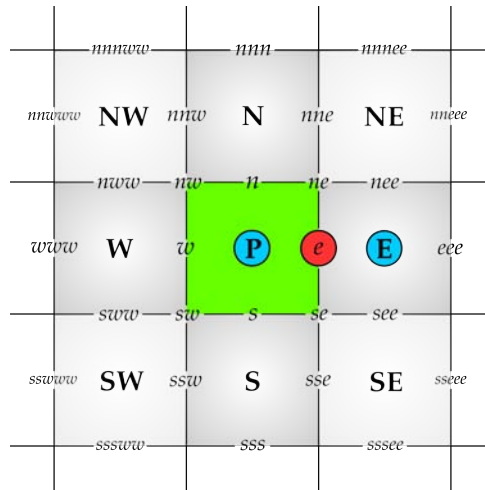


Figura 4.9: Discretização do termo difusivo  $\mathcal{D}_1(u)$  na face  $e$

As derivadas parciais  $u_\xi$  e  $u_\eta$  são calculadas nos nós computacionais E e P aplicando-se novamente diferenças centradas. As figuras 4.10(a) e 4.10(b) destacam, nesta ordem, os pontos envolvidos nas aproximações da componente  $u$  do vetor velocidade no ponto E com respeito às direções  $\xi$  e  $\eta$ . Os pontos utilizados para aproximar as derivadas  $u_\xi$  e  $u_\eta$  no ponto P são evidenciados nas figuras 4.11(a) e 4.11(b), respectivamente.

Dessa forma, tem-se que

$$\mathcal{D}_1(u) \Big|_e^k \approx J_E [\alpha_E (u_{eee}^k - u_e^k) - \beta_E (u_{nee}^k - u_{see}^k)] - J_P [\alpha_P (u_e^k - u_w^k) - \beta_P (u_n^k - u_s^k)].$$

Das figuras 4.10(b) e 4.11(b), nota-se que as componentes cartesianas discretas  $u_{nee}^k$ ,  $u_{see}^k$ ,  $u_n^k$  e  $u_s^k$  estão armazenadas nas faces horizontais das células centradas em E e em P. Como a componente  $u$  do campo de velocidades não está definida nessas faces, mas sua localização padrão no plano transformado coincide com a da componente contravariante  $U$ ,

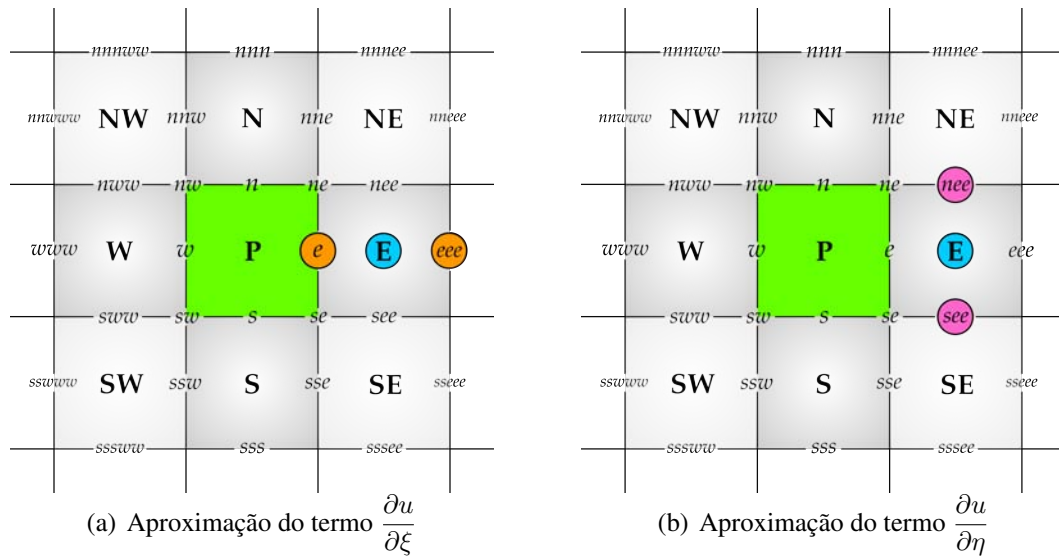


Figura 4.10: Discretização das derivadas  $u_\xi$  e  $u_\eta$ , pertencentes ao termo  $\mathcal{D}_1(u)$ , no ponto E

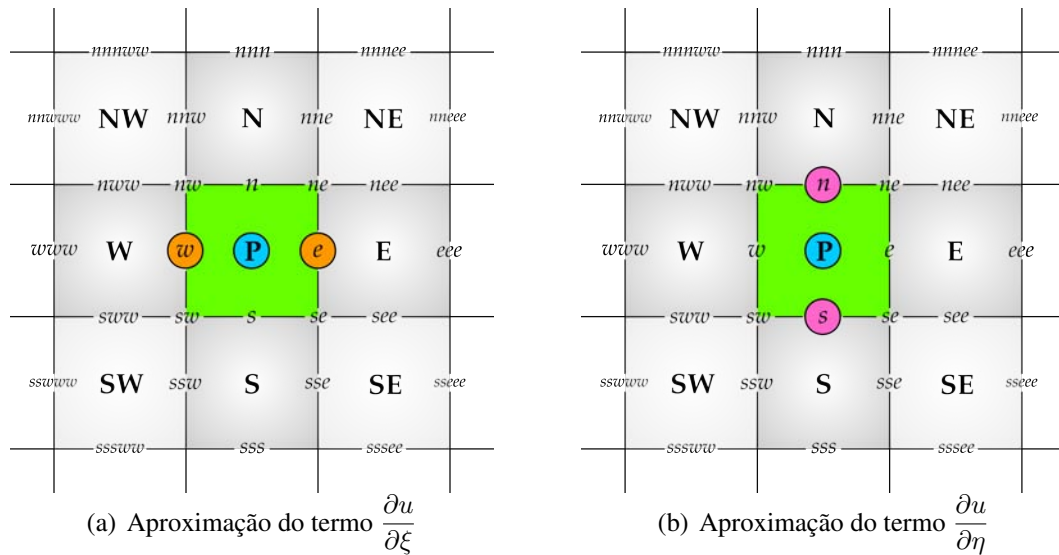


Figura 4.11: Discretização das derivadas  $u_\xi$  e  $u_\eta$ , pertencentes ao termo  $\mathcal{D}_1(u)$ , no ponto P

então decorre de (4.3) que

$$u_{nee}^k = \frac{1}{4} (u_e^k + u_{eee}^k + u_{nnee}^k + u_{nne}^k) ; u_{see}^k = \frac{1}{4} (u_{sse}^k + u_{ssee}^k + u_{eee}^k + u_e^k) \quad (4.11)$$

$$u_n^k = \frac{1}{4} (u_w^k + u_e^k + u_{nne}^k + u_{nnw}^k) ; u_s^k = \frac{1}{4} (u_{ssw}^k + u_{sse}^k + u_e^k + u_w^k).$$

Por esse motivo, denota-se  $u_{nee}^k = \bar{u}_{nee}^k$ ,  $u_{see}^k = \bar{u}_{see}^k$ ,  $u_n^k = \bar{u}_n^k$  e  $u_s^k = \bar{u}_s^k$  e, dessa forma,

$$\mathcal{D}_1(u) \Big|_e^k \approx J_E [\alpha_E (u_{eee}^k - u_e^k) - \beta_E (\bar{u}_{nee}^k - \bar{u}_{see}^k)] - J_P [\alpha_P (u_e^k - u_w^k) - \beta_P (\bar{u}_n^k - \bar{u}_s^k)]. \quad (4.12)$$

Os pontos compreendidos no cálculo de cada uma das médias aritméticas (4.11) são indicados nas figuras 4.12(a) – 4.12(d).

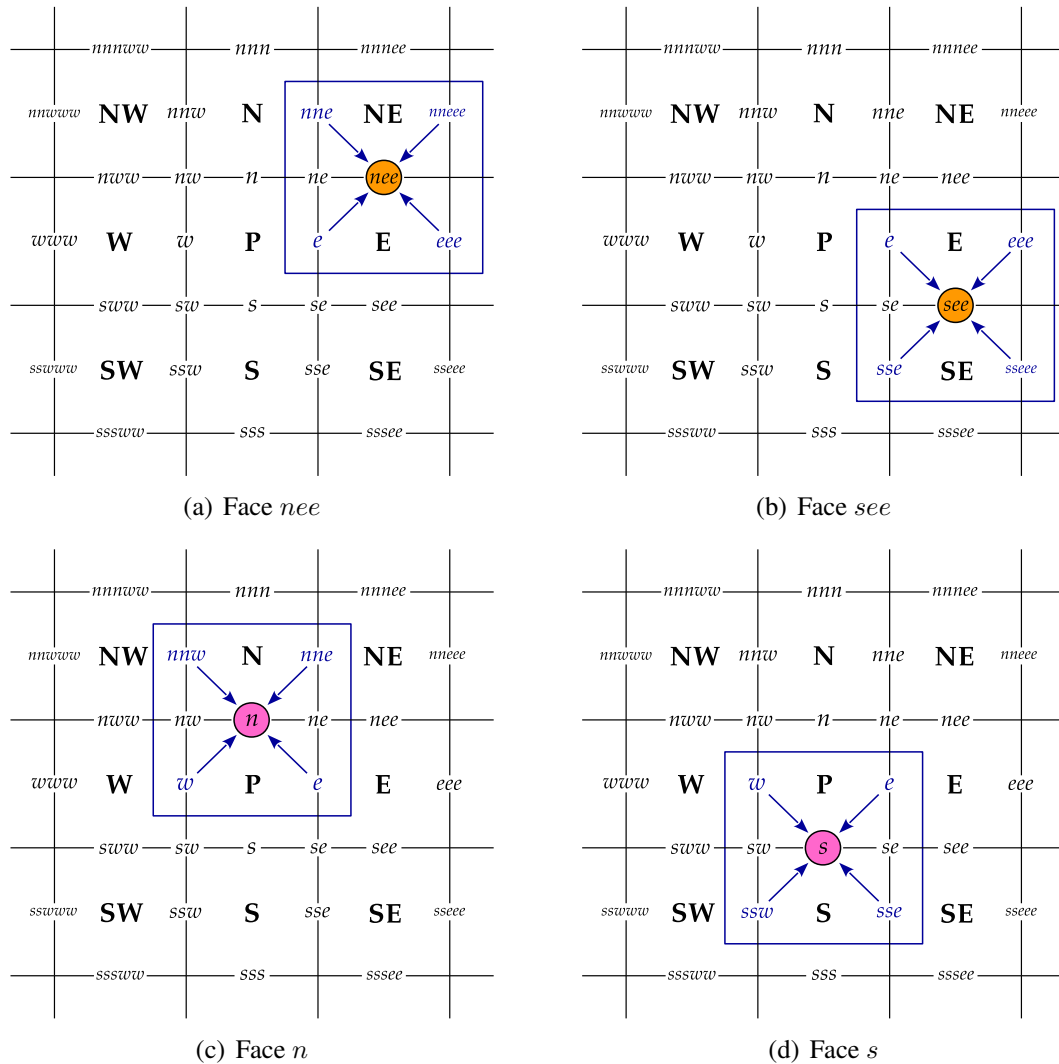


Figura 4.12: Pontos utilizados para estimar a componente cartesiana  $u$  do vetor velocidade, pertencente ao termo  $\mathcal{D}_1(u)$ , nas faces horizontais  $nee$ ,  $see$ ,  $n$  e  $s$

Similarmente, se

$$\mathcal{D}_2(u) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right),$$

pertinente ao segundo membro de (4.10), então, de acordo com a figura 4.13, a discretização de  $\mathcal{D}_2(u)$  na face  $e$  e no nível de tempo  $k$ ,  $k \geq 0$ , através do esquema de diferenças do tipo central

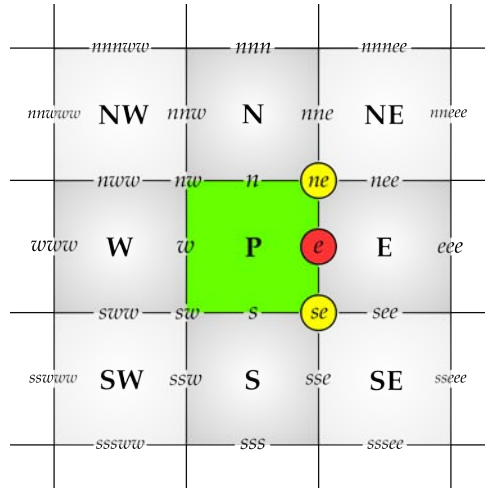


Figura 4.13: Discretização do termo difusivo  $\mathcal{D}_2(u)$  na face  $e$

de segunda ordem de precisão, é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_2(u) \Big|_e^k &= \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right) \right] \Big|_e^k \\ &\approx \left( J \left( \gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right) \Big|_{ne}^k - \left( J \left( \gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right) \Big|_{se}^k \\ &= J_{ne} \left[ \gamma_{ne} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \Big|_{ne}^k - \beta_{ne} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \Big|_{ne}^k \right] - J_{se} \left[ \gamma_{se} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \Big|_{se}^k - \beta_{se} \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \Big|_{se}^k \right]. \end{aligned}$$

Os pontos utilizados nas aproximações por diferenças centradas das derivadas parciais  $u_\xi$  e  $u_\eta$  no vértice  $ne$  da  $i$ -ésima célula são apontados nas figuras 4.14(a) e 4.14(b), respectivamente. Também, as figuras 4.15(a) e 4.15(b) destacam, nesta ordem, os pontos envolvidos na estimativa da componente  $u$  do vetor velocidade no vértice  $se$  da célula  $(i, j)$ , relativamente às direções  $\xi$  e  $\eta$ .

Desse modo,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_2(u) \Big|_e^k &\approx J_{ne} \left[ \gamma_{ne} (u_{nne}^k - u_e^k) - \beta_{ne} (u_{nee}^k - u_n^k) \right] \\ &\quad - J_{se} \left[ \gamma_{se} (u_e^k - u_{sse}^k) - \beta_{se} (u_{see}^k - u_s^k) \right]. \end{aligned}$$

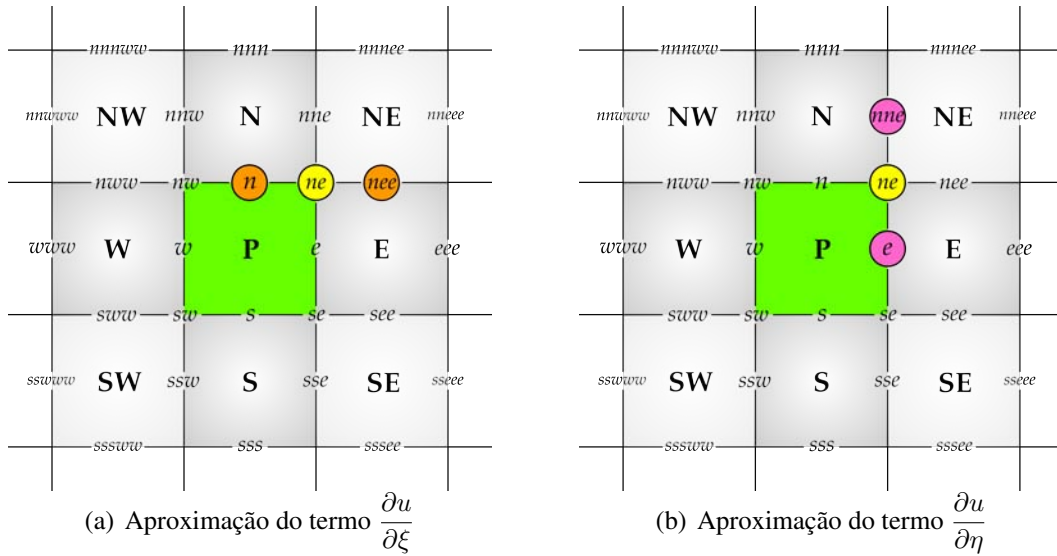


Figura 4.14: Discretização das derivadas  $u_\xi$  e  $u_\eta$ , pertencentes ao termo  $\mathcal{D}_2(u)$ , no ponto  $ne$

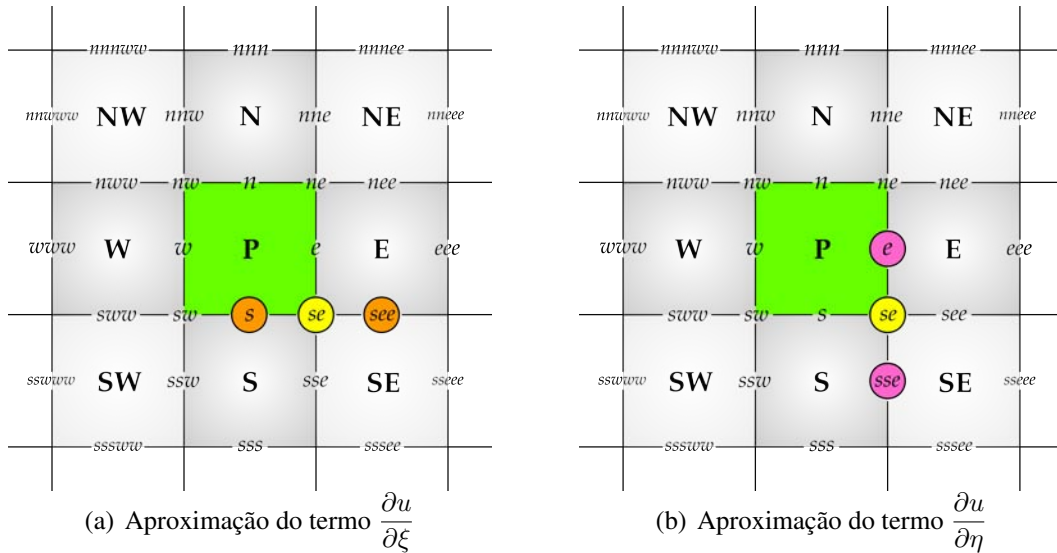


Figura 4.15: Discretização das derivadas  $u_\xi$  e  $u_\eta$ , pertencentes ao termo  $\mathcal{D}_2(u)$ , no ponto  $se$

Novamente, percebe-se das figuras 4.14(a) e 4.15(a) que as incógnitas  $u_{nee}^k$ ,  $u_n^k$ ,  $u_{see}^k$  e  $u_s^k$  estão armazenadas nas faces horizontais das células e, por isso, são determinadas mediante as médias (4.11), cujos pontos utilizados nos cálculos se encontram destacados nas figuras 4.12(a) – 4.12(d).

Assim,  $u_{nee}^k = \bar{u}_{nee}^k$ ,  $u_{see}^k = \bar{u}_{see}^k$ ,  $u_n^k = \bar{u}_n^k$  e  $u_s^k = \bar{u}_s^k$  e, por conseguinte,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_2(u) \Big|_e^k &\approx J_{ne} [\gamma_{ne} (u_{nee}^k - u_e^k) - \beta_{ne} (\bar{u}_{nee}^k - \bar{u}_n^k)] \\ &\quad - J_{se} [\gamma_{se} (u_e^k - u_{see}^k) - \beta_{se} (\bar{u}_{see}^k - \bar{u}_s^k)]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Logo, de (4.12) e (4.13), segue que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}(u) \Big|_e^k &= \nu [\mathcal{D}_1(u) + \mathcal{D}_2(u)] \Big|_e^k \\
 &\approx \nu J_E [\alpha_E (u_{eee}^k - u_e^k) - \beta_E (\bar{u}_{nee}^k - \bar{u}_{see}^k)] - \nu J_P [\alpha_P (u_e^k - u_w^k) \\
 &\quad - \beta_P (\bar{u}_n^k - \bar{u}_s^k)] + \nu J_{ne} [\gamma_{ne} (u_{nne}^k - u_e^k) - \beta_{ne} (\bar{u}_{nee}^k - \bar{u}_n^k)] \\
 &\quad - \nu J_{se} [\gamma_{se} (u_e^k - u_{sse}^k) - \beta_{se} (\bar{u}_{see}^k - \bar{u}_s^k)].
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Analogamente, para o termo difusivo da equação (2.9),

$$\mathcal{D}(v) = \nu \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial v}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial v}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \right) \right],$$

supondo-se

$$\mathcal{D}_1(v) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial v}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \right) \quad \text{e} \quad \mathcal{D}_2(v) = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial v}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \right),$$

então a discretização de  $\mathcal{D}_1(v)$  e  $\mathcal{D}_2(v)$  na face  $n$  – destacada nas figuras 4.16(a) e 4.16(b), nesta ordem – e no nível de tempo  $k$ ,  $k \geq 0$ , utilizando diferenças do tipo central é dada por

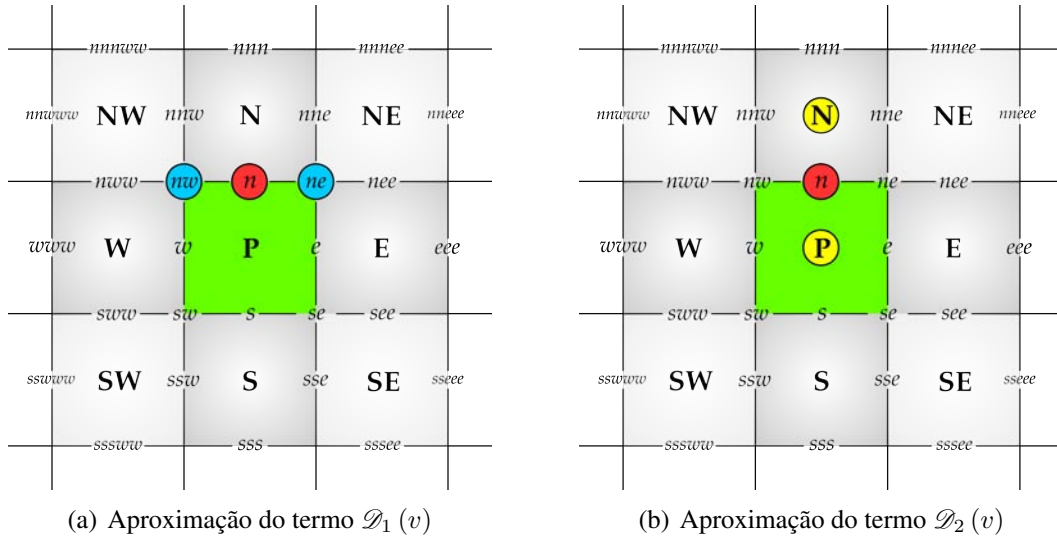


Figura 4.16: Discretização do termo difusivo  $\mathcal{D}(v)$  na face  $n$

$$\mathcal{D}_1(v) \Big|_n^k \approx J_{ne} \left[ \alpha_{ne} \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \Big|_{ne}^k - \beta_{ne} \left( \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \Big|_{ne}^k \right] - J_{nw} \left[ \alpha_{nw} \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \Big|_{nw}^k - \beta_{nw} \left( \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \Big|_{nw}^k \right]$$

e

$$\mathcal{D}_2(v) \Big|_n^k \approx J_N \left[ \gamma_N \left( \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \Big|_N^k - \beta_N \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \Big|_N^k \right] - J_P \left[ \gamma_P \left( \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \Big|_P^k - \beta_P \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \Big|_P^k \right].$$

As aproximações das derivadas parciais  $v_\xi$  e  $v_\eta$  – também obtidas por intermédio do MDF do tipo central – nos vértices  $ne$  e  $nw$  da  $i$ -ésima célula, pertencentes ao termo  $\mathcal{D}_1(v)$ , são dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1(v) \Big|_n^k &\approx J_{ne} [\alpha_{ne} (v_{nee}^k - v_n^k) - \beta_{ne} (v_{nne}^k - v_e^k)] \\ &\quad - J_{nw} [\alpha_{nw} (v_n^k - v_{nww}^k) - \beta_{nw} (v_{nnw}^k - v_w^k)] \end{aligned}$$

e destacadas nas figuras 4.17(a) e 4.17(b), respectivamente. Também, as aproximações da componente  $v$  do vetor velocidade com relação às direções  $\xi$  e  $\eta$  nos pontos N e P, pertencentes ao termo  $\mathcal{D}_2(v)$ , são obtidas por diferenças centradas e escritas como

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_2(v) \Big|_n^k &\approx J_N [\gamma_N (v_{nnn}^k - v_n^k) - \beta_N (v_{nne}^k - v_{nnw}^k)] \\ &\quad - J_P [\gamma_P (v_n^k - v_s^k) - \beta_P (v_e^k - v_w^k)], \end{aligned}$$

destacadas, nesta ordem, nas figuras 4.18(a) e 4.18(b).

Os pontos envolvidos em cada estimativa em relação às direções  $\xi$  e  $\eta$  são realçados nas cores laranja e rosa, respectivamente.

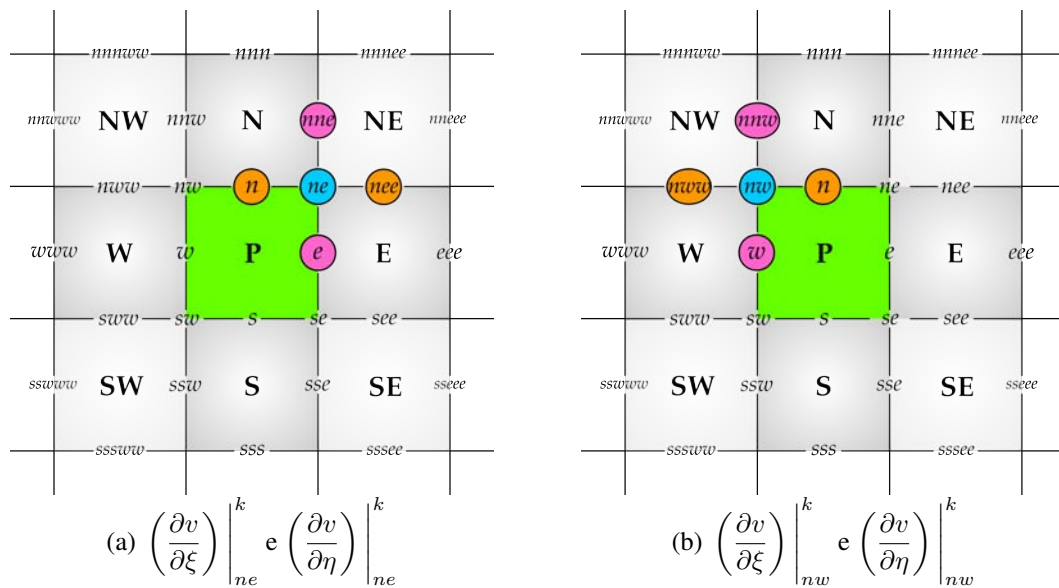


Figura 4.17: Discretização das derivadas  $v_\xi$  e  $v_\eta$  pertencentes ao termo  $\mathcal{D}_1(v)$

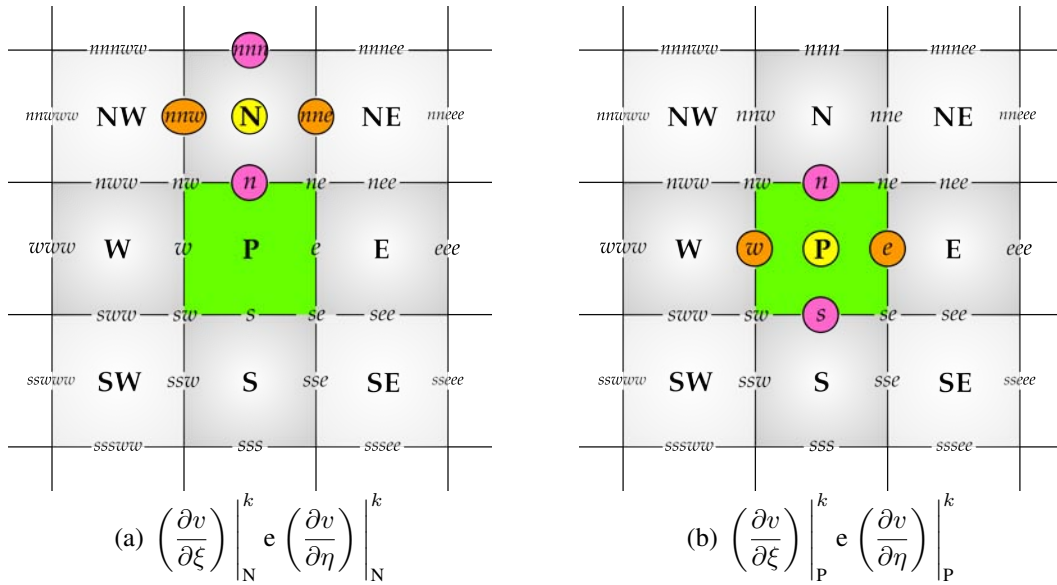


Figura 4.18: Discretização das derivadas  $v_\xi$  e  $v_\eta$  pertencentes ao termo  $\mathcal{D}_2(v)$

Como pode ser observado nas figuras 4.17 e 4.18, as componentes cartesianas  $v_{nne}^k$ ,  $v_e^k$ ,  $v_{nnw}^k$  e  $v_w^k$  estão armazenadas nas faces verticais das células e, portanto, não estão definidas nessas faces. No entanto, considerando o domínio computacional, sua localização padrão condiz com a da componente contravariante  $V$ .

Sendo assim, segue da equação (4.3) que

$$v_{nne}^k = \frac{1}{4} (v_n^k + v_{nee}^k + v_{nnne}^k + v_{nnn}^k) ; v_e^k = \frac{1}{4} (v_s^k + v_{see}^k + v_{nee}^k + v_n^k)$$

$$v_{nnw}^k = \frac{1}{4} (v_{nww}^k + v_n^k + v_{nnn}^k + v_{nnnnw}^k) ; v_w^k = \frac{1}{4} (v_{sww}^k + v_s^k + v_n^k + v_{nww}^k),$$

conforme indicam as figuras 4.19(a) – 4.19(d).

Por conseguinte, denota-se  $v_{nne}^k = \bar{v}_{nne}^k$ ,  $v_e^k = \bar{v}_e^k$ ,  $v_{nnw}^k = \bar{v}_{nnw}^k$  e  $v_w^k = \bar{v}_w^k$  e, desse modo, tem-se

$$\mathcal{D}_1(v) \Big|_n^k \approx J_{ne} [\alpha_{ne} (v_{nee}^k - v_n^k) - \beta_{ne} (\bar{v}_{nne}^k - \bar{v}_e^k)]$$

$$- J_{nw} [\alpha_{nw} (v_n^k - v_{nww}^k) - \beta_{nw} (\bar{v}_{nnw}^k - \bar{v}_w^k)]$$
(4.15)

e

$$\mathcal{D}_2(v) \Big|_n^k \approx J_N [\gamma_N (v_{nnn}^k - v_n^k) - \beta_N (\bar{v}_{nne}^k - \bar{v}_{nnw}^k)]$$

$$- J_P [\gamma_P (v_n^k - v_s^k) - \beta_P (\bar{v}_e^k - \bar{v}_w^k)],$$
(4.16)

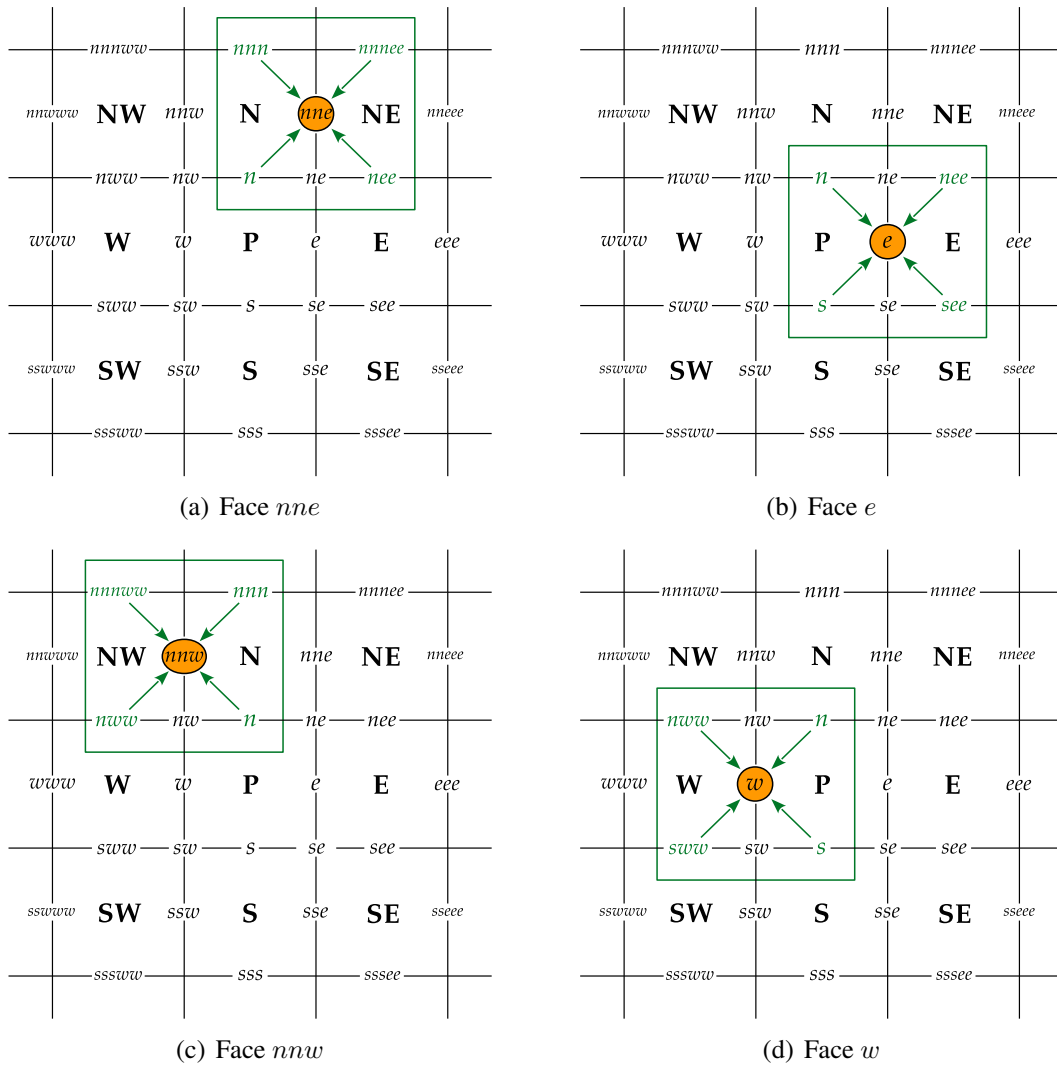


Figura 4.19: Pontos utilizados para estimar a componente cartesiana  $v$  do vetor velocidade, pertencente ao termo  $\mathcal{D}(v)$ , nas faces verticais  $nne$ ,  $e$ ,  $nnw$  e  $w$

Logo, de (4.15) e (4.16), segue que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}(v) \Big|_n^k &= \nu [\mathcal{D}_1(v) + \mathcal{D}_2(v)] \Big|_n^k \\
 &\approx \nu J_{ne} [\alpha_{ne} (v_{nee}^k - v_n^k) - \beta_{ne} (\bar{v}_{nne}^k - \bar{v}_e^k)] - \nu J_{nw} [\alpha_{nw} (v_n^k - v_{nnw}^k) \\
 &\quad - \beta_{nw} (\bar{v}_{nnw}^k - \bar{v}_w^k)] + \nu J_N [\gamma_N (v_{nnn}^k - v_n^k) - \beta_N (\bar{v}_{nne}^k - \bar{v}_{nnw}^k)] \\
 &\quad - \nu J_P [\gamma_P (v_n^k - v_s^k) - \beta_P (\bar{v}_e^k - \bar{v}_w^k)].
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

#### 4.1.2 Termos Convectivos

O processo de discretização dos termos convectivos das equações de Navier-Stokes consiste em aplicar uma linearização aos termos das EDF, de modo a viabilizar uma influência significativa na taxa de convergência e na qualidade da solução numérica, minimizando

distorções na forma de difusão e/ou dispersão artificiais [22, 68]. Neste trabalho, a discretização baseia-se na diferença entre a velocidade de convecção e a propriedade sendo transportada.

Os valores das componentes contravariantes  $U$  e  $V$  são obtidos por meio das inferências (4.1)–(4.3), e portanto, definidas como  $U = \bar{U}$  e  $V = \bar{V}$ . Conforme  $\bar{U}$  e  $\bar{V}$  são positivos ou negativos, as componentes cartesianas  $u$  e  $v$  são aproximadas por uma função de interpolação, neste caso, o esquema convectivo CUBISTA–FOURIER na forma não normalizada, dado pela equação (3.63).

Nesse contexto, dado um ponto  $\mathcal{P}$  presente na EDF, faz-se uso da função sinal, escrita em termos da velocidade de convecção  $\bar{U}$  ou  $\bar{V}$  no nível de tempo  $k$ ,  $k \geq 0$ , como

$$S_{\mathcal{P}}^k = \begin{cases} 1, & \bar{U}_{\mathcal{P}}^k \geq 0 \\ -1, & \bar{U}_{\mathcal{P}}^k < 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad S_{\mathcal{P}}^k = \begin{cases} 1, & \bar{V}_{\mathcal{P}}^k \geq 0 \\ -1, & \bar{V}_{\mathcal{P}}^k < 0 \end{cases},$$

para se estimar a propriedade transportada,  $u$  ou  $v$ , naquele ponto.

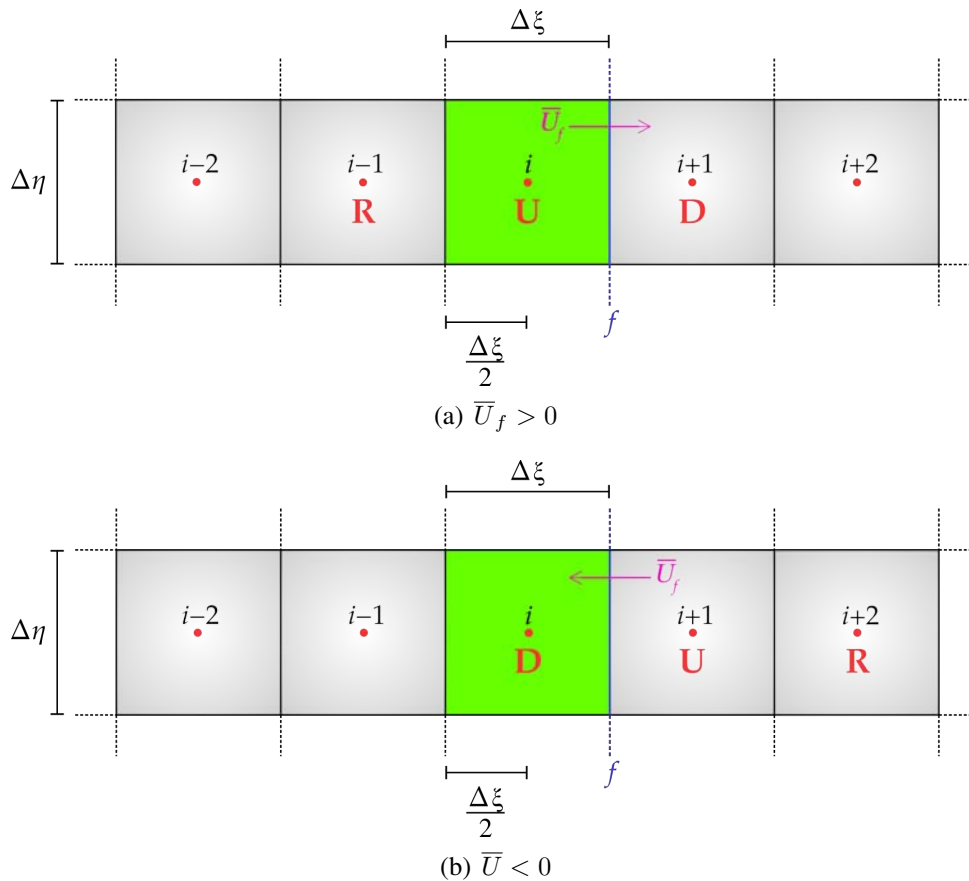


Figura 4.20: Representação esquemática para se obter aproximações para as derivadas convectivas das equações de Navier-Stokes mostrando o ponto  $i$  de discretização e seus vizinhos, a face  $f$  da célula  $(i, j)$  e o sentido da velocidade de convecção  $\bar{U}$  na face  $f$

Assim sendo, considere, sem perda de generalidade, a molécula computacional apresentada na figura 4.20, a qual destaca os pontos envolvidos no processo de formulação

de variáveis normalizadas, cujas posições variam conforme o sentido da velocidade de convecção  $\bar{U}$ , normal à face de referência  $f = e \equiv i + \frac{1}{2}$  da célula  $(i, j)$ , denotada por  $\bar{U}_f$ .

Seja, também, o termo convectivo da equação (2.8),

$$\mathcal{C}(u) = \frac{\partial}{\partial \xi}(Uu) + \frac{\partial}{\partial \eta}(Vu),$$

cuja discretização via diferenças centrais na face  $e$  da  $i$ -ésima célula e no nível de tempo  $k$ ,  $k \geq 0$ , é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(u) \Big|_e^k &= \left( \frac{\partial}{\partial \xi}(Uu) + \frac{\partial}{\partial \eta}(Vu) \right) \Big|_e^k = \frac{\partial}{\partial \xi}(Uu) \Big|_e^k + \frac{\partial}{\partial \eta}(Vu) \Big|_e^k \\ &\approx \frac{(Uu) \Big|_E^k - (Uu) \Big|_P^k}{2(\Delta\xi/2)} + \frac{(Vu) \Big|_{ne}^k - (Vu) \Big|_{se}^k}{2(\Delta\eta/2)}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

As figuras 4.21(a) e 4.21(b) mostram a aproximação das derivadas parciais  $(Uu)_\xi$  e  $(Vu)_\eta$  na face  $e$ , respectivamente.

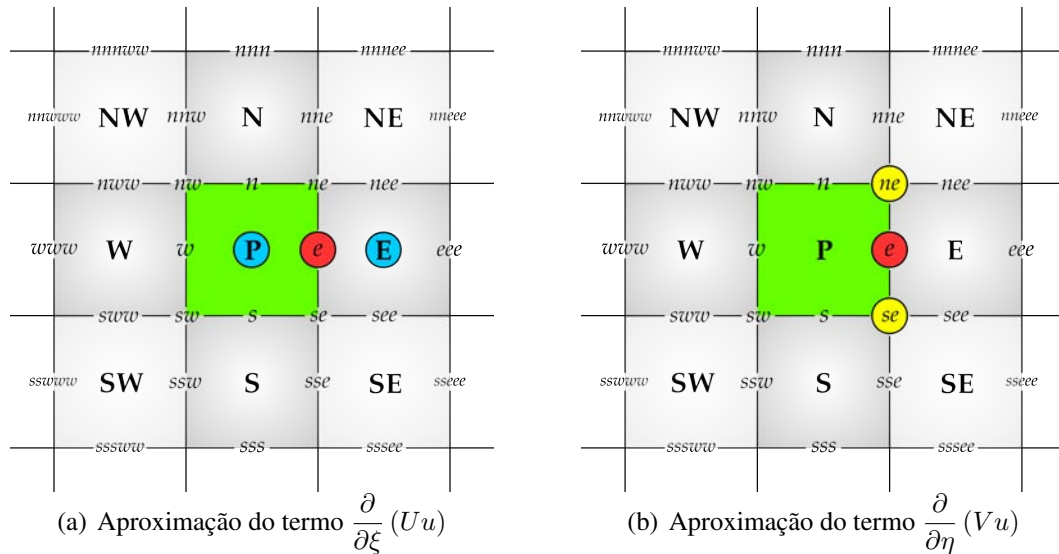


Figura 4.21: Discretização do termo convectivo  $\mathcal{C}(u)$  na face  $e$

Aplicando-se linearização à EDF (4.18) e salientando que  $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$ , segue que

$$\mathcal{C}(u) \Big|_e^k \approx \bar{U}_E^k u_E^k - \bar{U}_P^k u_P^k + \bar{V}_{ne}^k u_{ne}^k - \bar{V}_{se}^k u_{se}^k. \quad (4.19)$$

Assim, da equação (4.1), as velocidades de convecção  $\bar{U}_E^k$ ,  $\bar{U}_P^k$ ,  $\bar{V}_{ne}^k$  e  $\bar{V}_{se}^k$  são obtidas pela média aritmética dos valores conhecidos em torno do ponto considerado, isto é,

$$\bar{U}_E^k = \frac{U_e^k + U_{eee}^k}{2}; \quad \bar{U}_P^k = \frac{U_w^k + U_e^k}{2}; \quad \bar{V}_{ne}^k = \frac{V_n^k + V_{nee}^k}{2}; \quad \bar{V}_{se}^k = \frac{V_s^k + V_{see}^k}{2},$$

como destaca a figura 4.22.

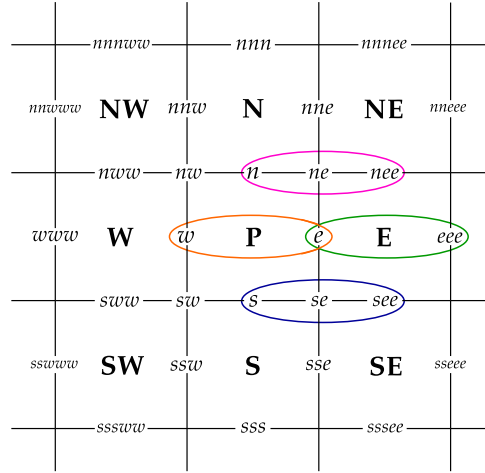


Figura 4.22: Pontos utilizados para determinar as velocidades de convecção  $\bar{U}_E^k$ ,  $\bar{U}_P^k$ ,  $\bar{V}_{ne}^k$  e  $\bar{V}_{se}^k$  pertencentes ao termo convectivo  $\mathcal{C}(u)$  discretizado na face  $e$  da  $i$ -ésima célula

As incógnitas  $u_E^k$ ,  $u_P^k$ ,  $u_{ne}^k$  e  $u_{se}^k$  são determinadas aplicando o esquema CUBISTA–FOURIER (3.63) em conformidade com o sinal da velocidade de convecção  $\bar{U}$  ou  $\bar{V}$ , isto é, consoante ao sentido do escoamento.

Para esclarecer esta ideia, considere a figura 4.23, a qual representa um recorte de malha e destaca, por meio de uma comparação direta com a molécula computacional genérica exposta nas figuras 4.20(a) e 4.20(b), os pontos envolvidos no processo de formulação de variáveis normalizadas utilizados para estimar a velocidade  $u_E^k$ , conforme o sinal de  $\bar{U}_E^k$  é positivo ou negativo, respectivamente.

Tomando como base a figura 4.23(a), se  $\bar{U}_E^k \geq 0$ , então a aproximação para a propriedade transportada  $u_E^k$  será dada por

$$u_E^k \cong \begin{cases} \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{u}_e^k}{2} \right) (u_{eee}^k - u_w^k) + u_w^k, & \hat{u}_e^k \in [0, 1) \\ u_e^k, & \hat{u}_e^k \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \end{cases} \quad (4.20)$$

Caso contrário, se  $\bar{U}_E^k < 0$ , então, conforme a figura 4.23(b), o termo  $u_E^k$  será aproximado por

$$u_E^k \cong \begin{cases} \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{u}_{eee}^k}{2} \right) (u_e^k - u_{eeee}^k) + u_{eeee}^k, & \hat{u}_{eee}^k \in [0, 1) \\ u_{eee}^k, & \hat{u}_{eee}^k \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \end{cases} \quad (4.21)$$

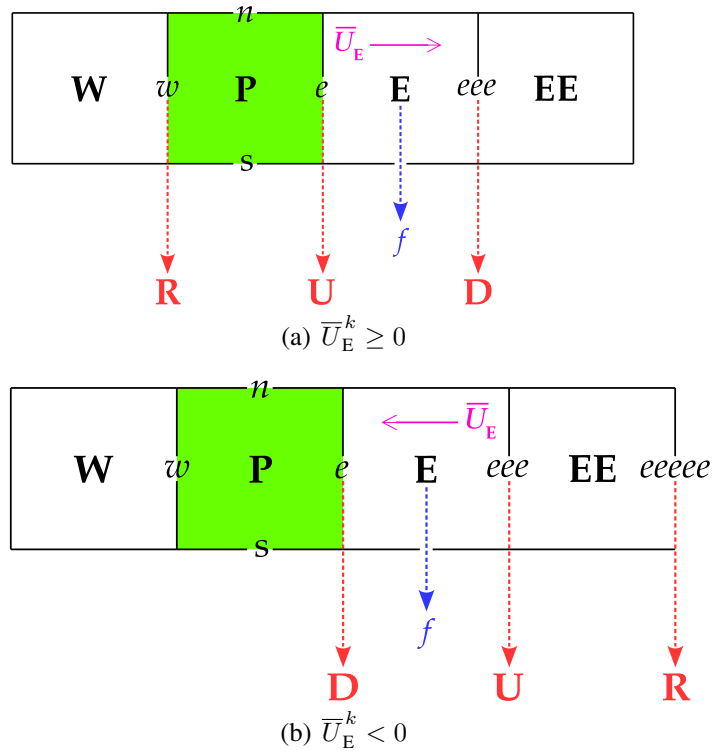


Figura 4.23: Pontos da malha utilizados para aproximar a componente  $u$  do vetor velocidade no ponto E e no nível de tempo  $k$ ,  $k \geq 0$ , por meio do esquema CUBISTA-FOURIER

Nomeando-se a primeira expressão de (4.20) e (4.21) como  $u_{E_1}$  e  $u_{E_2}$ , respectivamente, pode-se definir  $u_E^k$  de forma concisa como

$$u_E^k \cong \begin{cases} \left( \frac{1 + S_E^k}{2} \right) u_{E_1} + \left( \frac{1 - S_E^k}{2} \right) u_{E_2}, & \hat{u}_e^k, \hat{u}_{eee}^k \in [0, 1) \\ \left( \frac{1 + S_E^k}{2} \right) u_e^k + \left( \frac{1 - S_E^k}{2} \right) u_{eee}^k, & \hat{u}_e^k, \hat{u}_{eee}^k \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \end{cases},$$

onde

$$u_{E_1} = \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{u}_e^k}{2} \right) (u_{eee}^k - u_w^k) + u_w^k,$$

$$u_{E_2} = \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{u}_{eee}^k}{2} \right) (u_e^k - u_{eeee}^k) + u_{eeee}^k$$

e

$$S_E^k = \begin{cases} 1, & \bar{U}_E^k \geq 0 \\ -1, & \bar{U}_E^k < 0 \end{cases}.$$

As demais propriedades transportadas são obtidas de maneira análoga. A fim de facilitar a visualização, os demais recortes de malha serão exibidos de forma que, além da célula de referência centrada em P e destacada em verde, as outras duas células envolvidas no

processo de discretização serão destacadas na cor cinza. Os pontos realçados em vermelho representam as posições R, U e D em relação ao ponto de referência  $f$ , destacado em azul.

Assim, no caso da propriedade  $u_p^k$ , de acordo com a figura 4.24, tem-se que

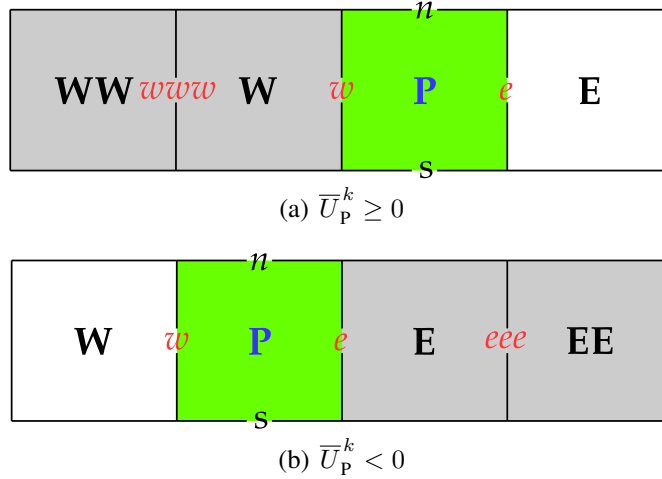


Figura 4.24: Pontos da malha utilizados para aproximar a componente  $u$  do vetor velocidade no ponto P e no nível de tempo  $k$ ,  $k \geq 0$ , por meio do esquema CUBISTA-FOURIER

$$u_P^k \cong \begin{cases} \left( \frac{1 + S_P^k}{2} \right) u_{P_1} + \left( \frac{1 - S_P^k}{2} \right) u_{P_2}, \hat{u}_w^k, \hat{u}_e^k \in [0, 1) \\ \left( \frac{1 + S_P^k}{2} \right) u_w^k + \left( \frac{1 - S_P^k}{2} \right) u_e^k, \hat{u}_w^k, \hat{u}_e^k \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \end{cases},$$

com

$$u_{P_1} = \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{u}_w^k}{2} \right) (u_e^k - u_{www}^k) + u_{www}^k,$$

$$u_{P_2} = \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{u}_e^k}{2} \right) (u_w^k - u_{eee}^k) + u_{eee}^k$$

e

$$S_P^k = \begin{cases} 1, \bar{U}_P^k \geq 0 \\ -1, \bar{U}_P^k < 0 \end{cases}.$$

Para  $u_{ne}^k$ , em conformidade com a figura 4.25, tem-se que

$$u_{ne}^k \cong \begin{cases} \left( \frac{1 + S_{ne}^k}{2} \right) u_{ne_1} + \left( \frac{1 - S_{ne}^k}{2} \right) u_{ne_2}, \hat{u}_e^k, \hat{u}_{nne}^k \in [0, 1) \\ \left( \frac{1 + S_{ne}^k}{2} \right) u_e^k + \left( \frac{1 - S_{ne}^k}{2} \right) u_{nne}^k, \hat{u}_e^k, \hat{u}_{nne}^k \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \end{cases},$$

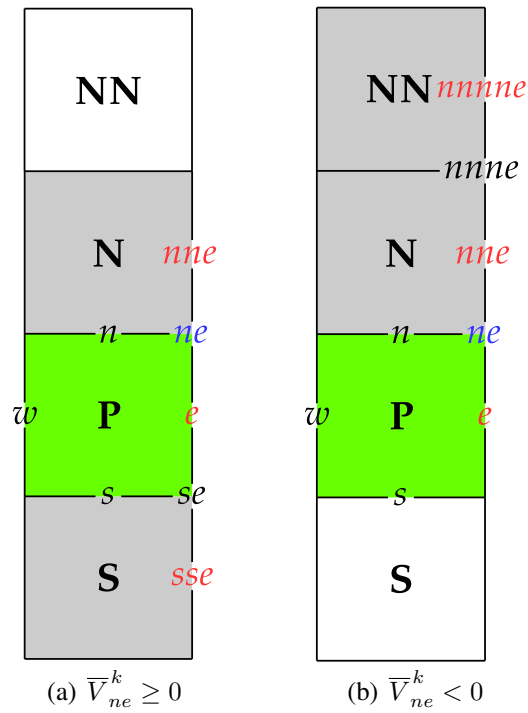


Figura 4.25: Pontos da malha utilizados para aproximar a componente  $u$  do vetor velocidade no ponto  $ne$  e no nível de tempo  $k$ ,  $k \geq 0$ , por meio do esquema CUBISTA-FOURIER

com

$$u_{ne_1} = \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{u}_e^k}{2} \right) (u_{nne}^k - u_{sse}^k) + u_{sse}^k,$$

$$u_{ne_2} = \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{u}_{nne}^k}{2} \right) (u_e^k - u_{nnnne}^k) + u_{nnnne}^k$$

e

$$S_{ne}^k = \begin{cases} 1, & \bar{V}_{ne}^k \geq 0 \\ -1, & \bar{V}_{ne}^k < 0. \end{cases}$$

Para  $u_{se}^k$ , conforme a figura 4.26, tem-se que

$$u_{se}^k \approx \begin{cases} \left( \frac{1 + S_{se}^k}{2} \right) u_{se_1} + \left( \frac{1 - S_{se}^k}{2} \right) u_{se_2}, & \hat{u}_{sse}^k, \hat{u}_e^k \in [0, 1) \\ \left( \frac{1 + S_{se}^k}{2} \right) u_{sse}^k + \left( \frac{1 - S_{se}^k}{2} \right) u_e^k, & \hat{u}_{sse}^k, \hat{u}_e^k \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \end{cases},$$

com

$$u_{se_1} = \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{u}_{sse}^k}{2} \right) (u_e^k - u_{sssse}^k) + u_{sssse}^k,$$

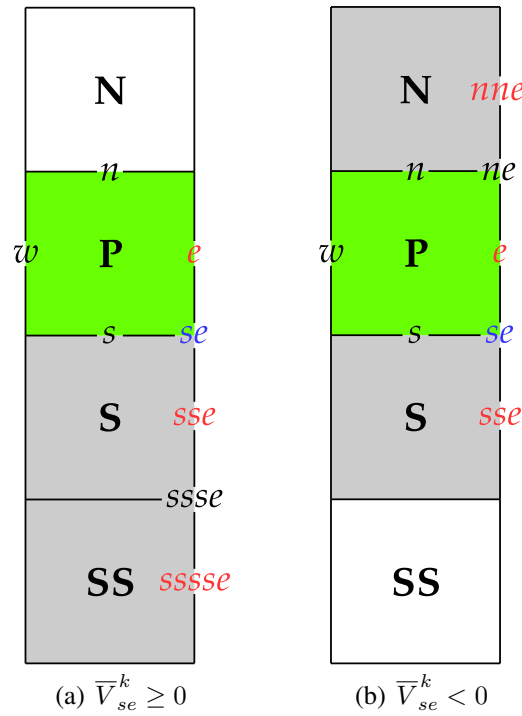


Figura 4.26: Pontos da malha utilizados para aproximar a componente  $u$  do vetor velocidade no ponto  $se$  e no nível de tempo  $k$ ,  $k \geq 0$ , por meio do esquema CUBISTA–FOURIER

$$u_{se_2} = \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{u}_e^k}{2} \right) (u_{sse}^k - u_{nne}^k) + u_{nne}^k$$

e

$$S_{se}^k = \begin{cases} 1, & \bar{V}_{se}^k \geq 0 \\ -1, & \bar{V}_{se}^k < 0. \end{cases}$$

Semelhantemente, discretizando o termo convectivo  $\mathcal{L}(u)$  via diferenças centrais na face  $n$  e no nível de tempo  $k$ ,  $k \geq 0$ , tem-se

$$\mathcal{L}(u) \Big|_n^k \approx \bar{U}_{ne}^k u_{ne}^k - \bar{U}_{nw}^k u_{nw}^k + \bar{V}_N^k u_N^k - \bar{V}_P^k u_P^k, \quad (4.22)$$

de modo que os pontos compreendidos nas aproximações das derivadas parciais  $(Uu)_\xi$  e  $(Vu)_\eta$  são apontados nas figuras 4.27(a) e 4.27(b), respectivamente.

As velocidades de convecção  $\bar{U}_{ne}^k$ ,  $\bar{U}_{nw}^k$ ,  $\bar{V}_N^k$  e  $\bar{V}_P^k$ , obtidas a partir da equação (4.2), são dadas pelas médias

$$\bar{U}_{ne}^k = \frac{U_e^k + U_{nne}^k}{2}; \quad \bar{U}_{nw}^k = \frac{U_w^k + U_{nnw}^k}{2}; \quad \bar{V}_N^k = \frac{V_n^k + V_{nnn}^k}{2}; \quad \bar{V}_P^k = \frac{V_s^k + V_n^k}{2},$$

conforme mostra a figura 4.28. Por sua vez, as componentes cartesianas discretas  $u_{ne}^k$ ,  $u_{nw}^k$ ,  $u_N^k$  e  $u_P^k$  do vetor velocidade são estipuladas mediante o esquema CUBISTA–FOURIER (3.63).

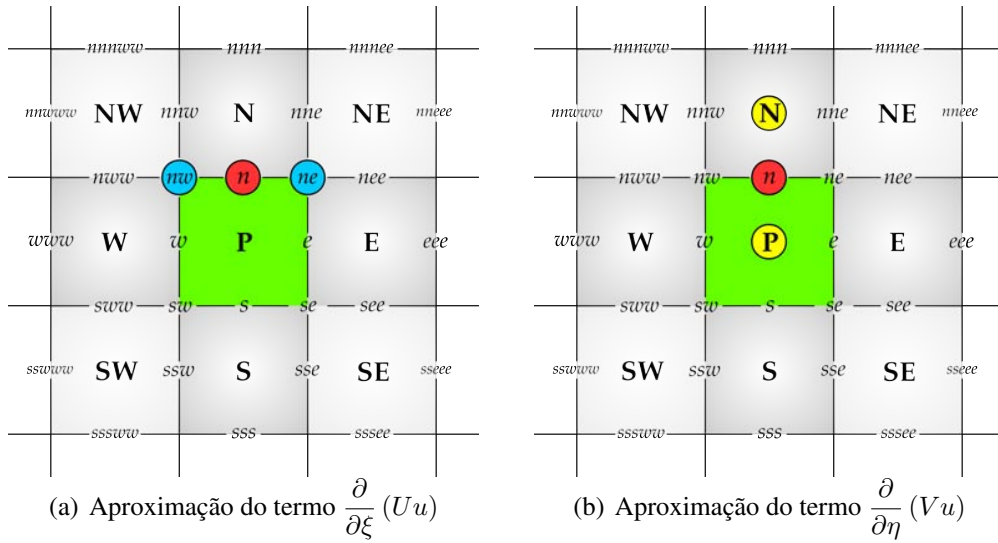


Figura 4.27: Discretização do termo convectivo  $\mathcal{L}(u)$  na face  $n$

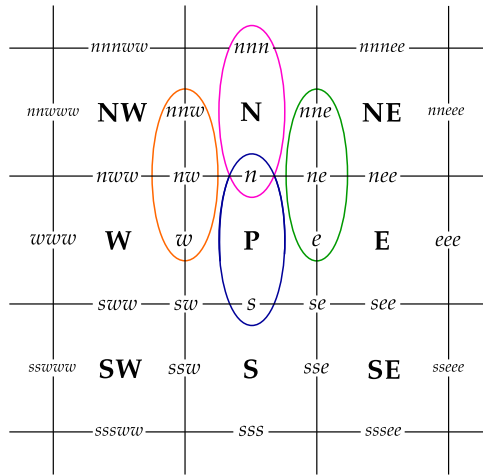


Figura 4.28: Pontos utilizados para determinar as velocidades de convecção  $\bar{U}_{ne}^k, \bar{U}_{nw}^k, \bar{V}_N^k$  e  $\bar{V}_P^k$  pertencentes ao termo convectivo  $\mathcal{L}(u)$  discretizado na face  $n$  da  $i$ -ésima célula

Assim, para  $u_{ne}^k$ , em conformidade com a figura 4.29, tem-se que

$$u_{ne}^k \cong \begin{cases} \left(\frac{1+S_{ne}^k}{2}\right) u_{ne_1} + \left(\frac{1-S_{ne}^k}{2}\right) u_{ne_2}, \hat{u}_n^k, \hat{u}_{nne}^k \in [0, 1) \\ \left(\frac{1+S_{ne}^k}{2}\right) u_n^k + \left(\frac{1-S_{ne}^k}{2}\right) u_{nee}^k, \hat{u}_n^k, \hat{u}_{nee}^k \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \end{cases},$$

com

$$u_{ne_1} = \sum_{n=1}^{30} b_n \text{sen} \left( \frac{n\pi \hat{u}_n^k}{2} \right) (u_{nee}^k - u_{nww}^k) + u_{nww}^k,$$

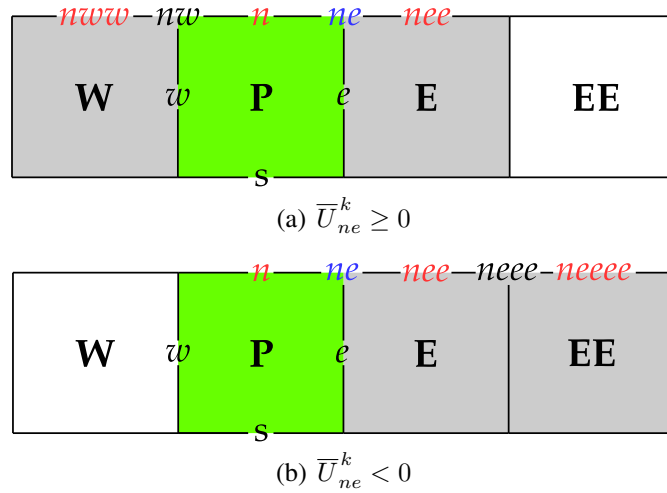


Figura 4.29: Pontos da malha utilizados para aproximar a componente  $u$  do vetor velocidade no ponto  $ne$  e no nível de tempo  $k$ ,  $k \geq 0$ , por meio do esquema CUBISTA-FOURIER

$$u_{ne_2} = \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{u}_{nee}^k}{2} \right) (u_n^k - u_{neeee}^k) + u_{neeee}^k$$

e

$$S_{ne}^k = \begin{cases} 1, & \bar{U}_{ne}^k \geq 0 \\ -1, & \bar{U}_{ne}^k < 0 \end{cases}$$

Note que a componente  $u$  do campo de velocidades não está definida nas faces horizontais  $n$ ,  $nee$ ,  $nww$  e  $neeee$ . Contudo, em se tratando do domínio computacional, sua localização coincide com a da componente contravariante  $U$  e, por causa disso, seu valor numérico nestas faces pode ser calculado por meio da inferência (4.3). Segue, então, que

$$u_n^k = \frac{1}{4} (u_w^k + u_e^k + u_{nne}^k + u_{nnw}^k) ; u_{nee}^k = \frac{1}{4} (u_e^k + u_{eee}^k + u_{neeee}^k + u_{nne}^k)$$

$$u_{nww}^k = \frac{1}{4} (u_{www}^k + u_w^k + u_{nnw}^k + u_{nnwww}^k)$$

e

$$u_{neeee}^k = \frac{1}{4} (u_{eee}^k + u_{neeee}^k + u_{neeee}^k + u_{neeee}^k),$$

conforme indicam as figuras 4.30(a) – 4.30(d).

Dessa maneira, tem-se  $u_n^k = \bar{u}_n^k$ ,  $u_{nee}^k = \bar{u}_{nee}^k$ ,  $u_{nww}^k = \bar{u}_{nww}^k$  e  $u_{neeee}^k = \bar{u}_{neeee}^k$

e, portanto,

$$u_{ne}^k \cong \begin{cases} \left( \frac{1 + S_{ne}^k}{2} \right) u_{ne_1} + \left( \frac{1 - S_{ne}^k}{2} \right) u_{ne_2}, & \hat{u}_n^k, \hat{u}_{nne}^k \in [0, 1) \\ \left( \frac{1 + S_{ne}^k}{2} \right) \bar{u}_n^k + \left( \frac{1 - S_{ne}^k}{2} \right) \bar{u}_{nee}^k, & \hat{u}_n^k, \hat{u}_{nee}^k \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \end{cases},$$

com

$$u_{ne_1} = \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{u}_n^k}{2} \right) (\bar{u}_{nee}^k - \bar{u}_{nww}^k) + \bar{u}_{nww}^k,$$

$$u_{ne_2} = \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{u}_{nee}^k}{2} \right) (\bar{u}_n^k - \bar{u}_{neeee}^k) + \bar{u}_{neeee}^k$$

e

$$S_{ne}^k = \begin{cases} 1, & \bar{U}_{ne}^k \geq 0 \\ -1, & \bar{U}_{ne}^k < 0 \end{cases}.$$

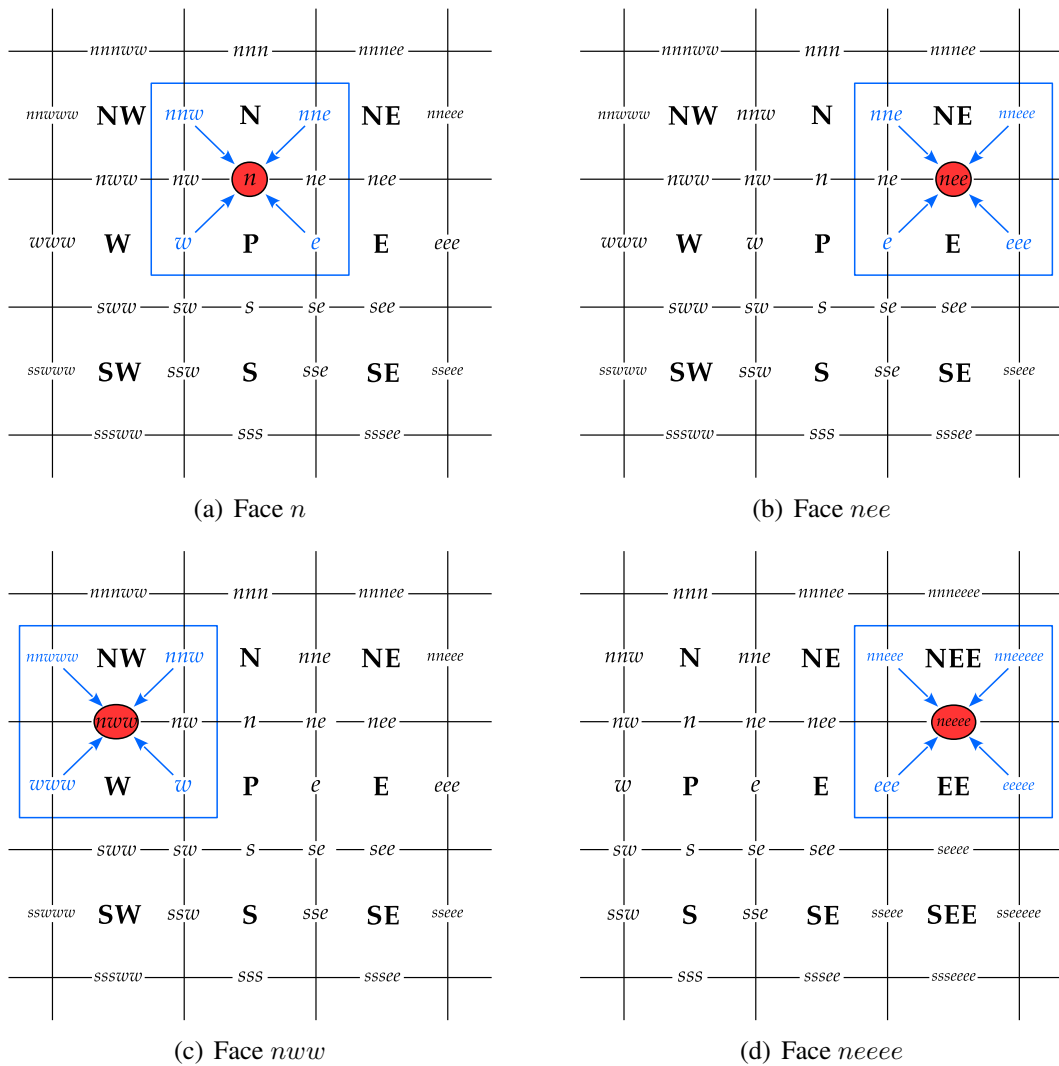


Figura 4.30: Pontos envolvidos no cálculo das médias aritméticas utilizadas para estimar a componente  $u$  do vetor velocidade no ponto  $ne$  e no nível de tempo  $k$ ,  $k \geq 0$ , pertencente ao termo convectivo  $\mathcal{L}(u)$  discretizado na face  $n$

Por simplicidade, para as demais incógnitas  $u_{nw}^k$ ,  $u_N^k$  e  $u_P^k$ , as estimativas da componente cartesiana  $u$  do vetor velocidade nas faces horizontais das células – e suas respectivas gravuras apontando os pontos envolvidos no cálculo de cada uma das médias – ficam

subentendidas, dado que o processo é análogo ao anterior. Logo, se  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(i \pm \frac{r_1}{2}, j \pm \frac{r_2}{2})$  representa o ponto associado à face horizontal na qual a componente  $u$  será aproximada, com  $r_1$  e  $r_2$  números inteiros pares e ímpares, respectivamente,  $i \in [0, i_{\max}] \subset \mathbb{N}$  e  $j \in [0, j_{\max}] \subset \mathbb{N}$ , então, para qualquer nível de tempo  $k$ ,  $k \geq 0$ , quando for o caso, denota-se naturalmente  $u_{\mathcal{P}}^k = \bar{u}_{\mathcal{P}}^k$ .

Com base nesse pressuposto e em concordância com a figura 4.31, para a propriedade transportada  $u_{nw}^k$ , tem-se que

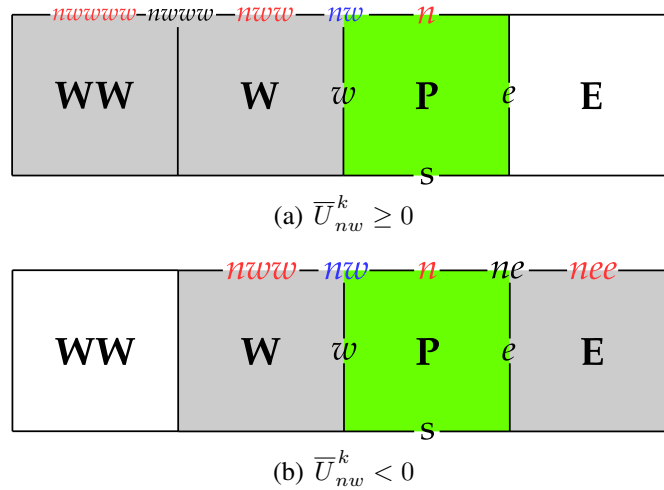


Figura 4.31: Pontos da malha utilizados para aproximar a componente  $u$  do vetor velocidade no ponto  $nw$  e no nível de tempo  $k$ ,  $k \geq 0$ , por meio do esquema CUBISTA–FOURIER

$$u_{nw}^k \approx \begin{cases} \left(\frac{1+S_{nw}^k}{2}\right)u_{nw_1} + \left(\frac{1-S_{nw}^k}{2}\right)u_{nw_2}, \hat{u}_{nww}^k, \hat{u}_n^k \in [0, 1) \\ \left(\frac{1+S_{nw}^k}{2}\right)\bar{u}_{nww}^k + \left(\frac{1-S_{nw}^k}{2}\right)\bar{u}_n^k, \hat{u}_{nww}^k, \hat{u}_n^k \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \end{cases},$$

com

$$u_{nw_1} = \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{u}_{nww}^k}{2} \right) (\bar{u}_n^k - \bar{u}_{nww}^k) + \bar{u}_{nww}^k,$$

$$u_{nw_2} = \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{u}_n^k}{2} \right) (\bar{u}_{nww}^k - \bar{u}_{nee}^k) + \bar{u}_{nee}^k$$

e

$$S_{nw}^k = \begin{cases} 1, \bar{U}_{nw}^k \geq 0 \\ -1, \bar{U}_{nw}^k < 0 \end{cases}.$$



Para  $u_P^k$ , conforme a figura 4.33, tem-se que

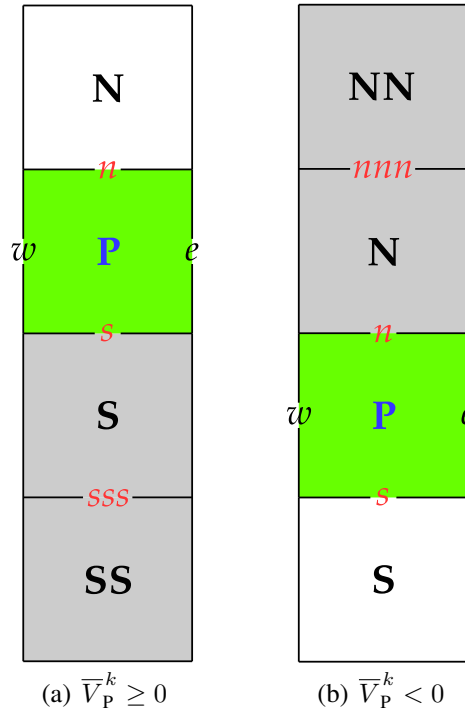


Figura 4.33: Pontos da malha utilizados para aproximar a componente  $u$  do vetor velocidade no ponto P e no nível de tempo  $k$ ,  $k \geq 0$ , por meio do esquema CUBISTA–FOURIER

$$u_P^k \cong \begin{cases} \left( \frac{1 + S_P^k}{2} \right) u_{P_1} + \left( \frac{1 - S_P^k}{2} \right) u_{P_2}, \hat{u}_s^k, \hat{u}_n^k \in [0, 1) \\ \left( \frac{1 + S_P^k}{2} \right) \bar{u}_s^k + \left( \frac{1 - S_P^k}{2} \right) \bar{u}_n^k, \hat{u}_s^k, \hat{u}_n^k \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \end{cases},$$

com

$$u_{P_1} = \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{u}_s^k}{2} \right) (\bar{u}_n^k - \bar{u}_{sss}^k) + \bar{u}_{sss}^k,$$

$$u_{P_2} = \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{u}_n^k}{2} \right) (\bar{u}_s^k - \bar{u}_{nnn}^k) + \bar{u}_{nnn}^k$$

e

$$S_P^k = \begin{cases} 1, \bar{V}_P^k \geq 0 \\ -1, \bar{V}_P^k < 0 \end{cases}.$$

Seja agora o termo convectivo da equação (2.9),

$$\mathcal{C}(v) = \frac{\partial}{\partial \xi} (Uv) + \frac{\partial}{\partial \eta} (Vv),$$

cujas discretizações via diferenças centrais na face  $n$  da  $i$ -ésima célula e no nível de tempo  $k$ ,

$k \geq 0$ , conforme mostram as figuras 4.34(a) e 4.34(b), é dada por

$$\mathcal{L}(v) \Big|_n^k \approx \bar{U}_{ne}^k v_{ne}^k - \bar{U}_{nw}^k v_{nw}^k + \bar{V}_N^k v_N^k - \bar{V}_P^k v_P^k. \quad (4.23)$$

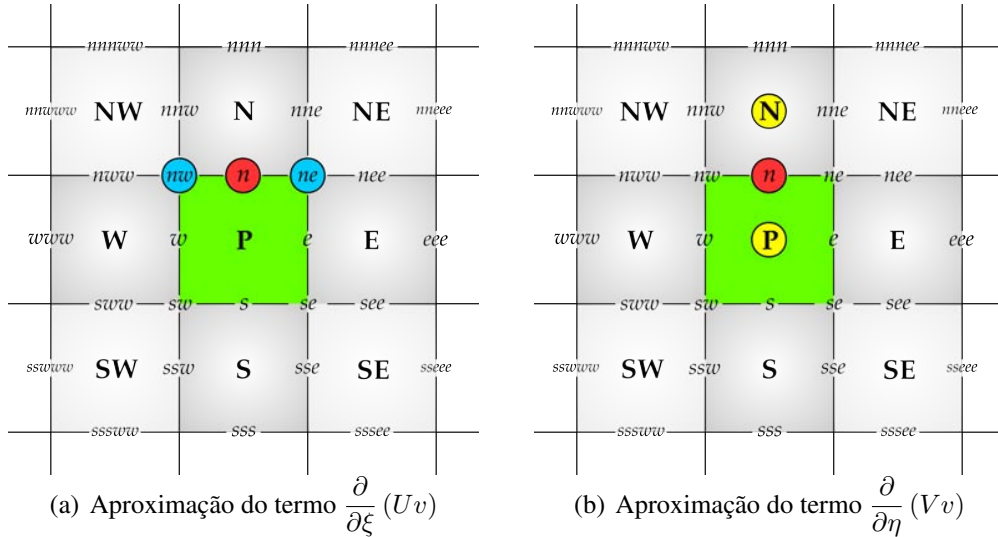


Figura 4.34: Discretização do termo convectivo  $\mathcal{L}(v)$  na face  $n$

As velocidades de convecção  $\bar{U}_{ne}^k$ ,  $\bar{U}_{nw}^k$ ,  $\bar{V}_N^k$  e  $\bar{V}_P^k$ , obtidas por meio da fórmula genérica (4.2), são dadas pelas médias aritméticas,

$$\bar{U}_{ne}^k = \frac{U_e^k + U_{nne}^k}{2}; \quad \bar{U}_{nw}^k = \frac{U_w^k + U_{nnw}^k}{2}; \quad \bar{V}_N^k = \frac{V_n^k + V_{nnn}^k}{2}; \quad \bar{V}_P^k = \frac{V_s^k + V_n^k}{2},$$

conforme destaca a figura 4.35

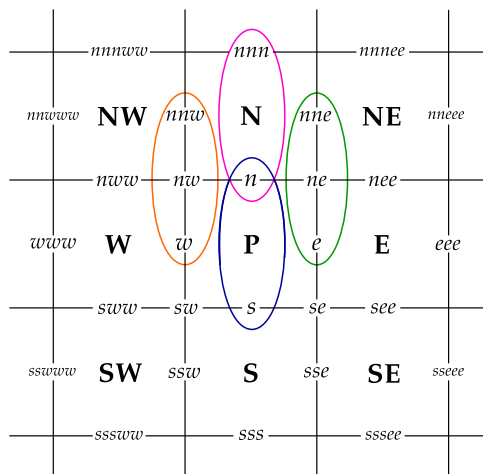


Figura 4.35: Pontos utilizados para determinar as velocidades de convecção  $\bar{U}_{ne}^k$ ,  $\bar{U}_{nw}^k$ ,  $\bar{V}_N^k$  e  $\bar{V}_P^k$  pertencentes ao termo convectivo  $\mathcal{L}(v)$  discretizado na face  $n$  da  $i$ -ésima célula

As aproximações para  $v_{ne}^k$ ,  $v_{nw}^k$ ,  $v_N^k$  e  $v_P^k$  são determinadas aplicando o esquema CUBISTA-FOURIER em variáveis não normalizadas (3.63). Assim, no caso do termo  $v_{ne}^k$ ,

com base na figura 4.36, tem-se que

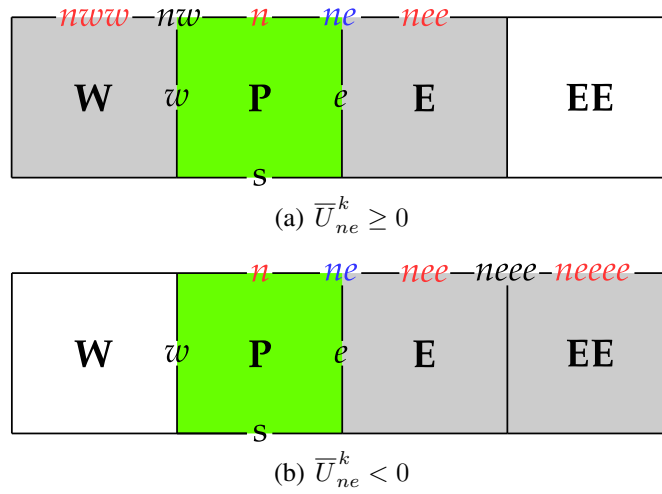


Figura 4.36: Pontos da malha utilizados para aproximar a componente  $v$  do vetor velocidade no ponto  $ne$  e no nível de tempo  $k$ ,  $k \geq 0$ , por meio do esquema CUBISTA-FOURIER

$$v_{ne}^k \approx \begin{cases} \left(\frac{1+S_{ne}^k}{2}\right)v_{ne_1} + \left(\frac{1-S_{ne}^k}{2}\right)v_{ne_2}, \hat{v}_n^k, \hat{v}_{nee}^k \in [0, 1) \\ \left(\frac{1+S_{ne}^k}{2}\right)v_n^k + \left(\frac{1-S_{ne}^k}{2}\right)v_{nee}^k, \hat{v}_n^k, \hat{v}_{nee}^k \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \end{cases},$$

com

$$v_{ne_1} = \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{v}_n^k}{2} \right) (v_{nee}^k - v_{nww}^k) + v_{nww}^k,$$

$$v_{ne_2} = \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{v}_{nee}^k}{2} \right) (v_n^k - v_{neeee}^k) + v_{neeee}^k$$

e

$$S_{ne}^k = \begin{cases} 1, \bar{U}_{ne}^k \geq 0 \\ -1, \bar{U}_{ne}^k < 0 \end{cases}.$$

Para  $v_{nw}^k$ , conforme a figura 4.37, tem-se que

$$v_{nw}^k \approx \begin{cases} \left(\frac{1+S_{nw}^k}{2}\right)v_{nw_1} + \left(\frac{1-S_{nw}^k}{2}\right)v_{nw_2}, \hat{v}_{nww}^k, \hat{v}_n^k \in [0, 1) \\ \left(\frac{1+S_{nw}^k}{2}\right)v_{nww}^k + \left(\frac{1-S_{nw}^k}{2}\right)v_n^k, \hat{v}_{nww}^k, \hat{v}_n^k \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \end{cases},$$

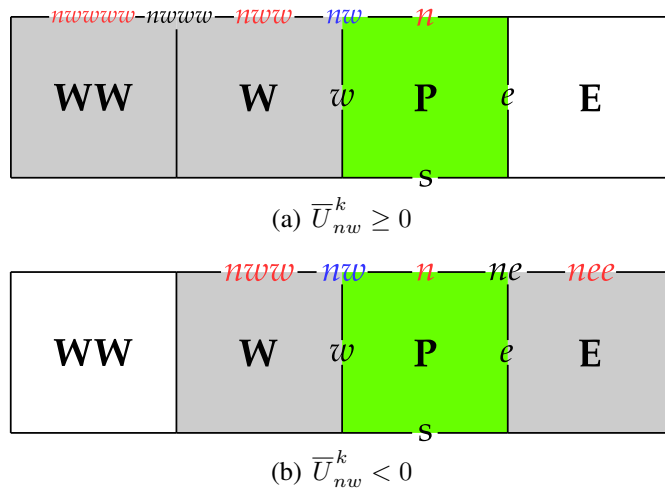


Figura 4.37: Pontos da malha utilizados para aproximar a componente  $v$  do vetor velocidade no ponto  $nw$  e no nível de tempo  $k$ ,  $k \geq 0$ , por meio do esquema CUBISTA-FOURIER

com

$$v_{nw_1} = \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{v}_{nww}^k}{2} \right) (v_n^k - v_{nwwww}^k) + v_{nwwww}^k,$$

$$v_{nw_2} = \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{v}_n^k}{2} \right) (v_{nww}^k - v_{nee}^k) + v_{nee}^k$$

e

$$S_{nw}^k = \begin{cases} 1, & \bar{U}_{nw}^k \geq 0 \\ -1, & \bar{U}_{nw}^k < 0 \end{cases}.$$

Para  $v_N^k$ , conforme a figura 4.38, tem-se que

$$v_N^k \approx \begin{cases} \left( \frac{1 + S_N^k}{2} \right) v_{N_1} + \left( \frac{1 - S_N^k}{2} \right) v_{N_2}, & \hat{v}_n^k, \hat{v}_{nnn}^k \in [0, 1) \\ \left( \frac{1 + S_N^k}{2} \right) v_n^k + \left( \frac{1 - S_N^k}{2} \right) v_{nnnn}^k, & \hat{v}_n^k, \hat{v}_{nnn}^k \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \end{cases},$$

com

$$v_{N_1} = \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{v}_n^k}{2} \right) (v_{nnn}^k - v_s^k) + v_s^k,$$

$$v_{N_2} = \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{v}_{nnn}^k}{2} \right) (v_n^k - v_{nnnnnn}^k) + v_{nnnnnn}^k$$

e

$$S_N^k = \begin{cases} 1, & \bar{V}_N^k \geq 0 \\ -1, & \bar{V}_N^k < 0 \end{cases}.$$

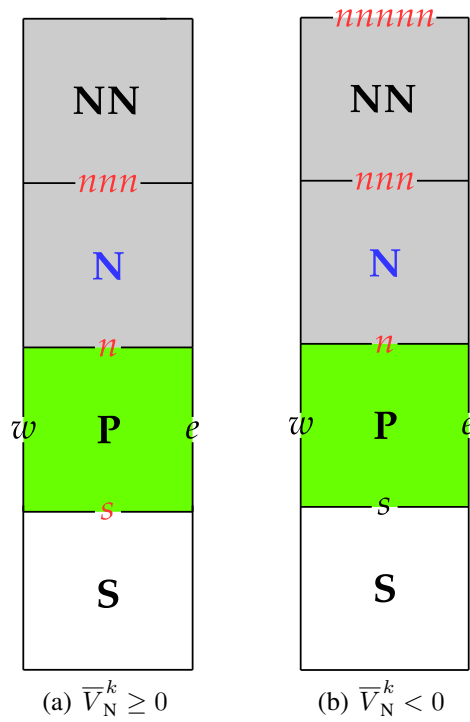


Figura 4.38: Pontos da malha utilizados para aproximar a componente  $v$  do vetor velocidade no ponto N e no nível de tempo  $k$ ,  $k \geq 0$ , por meio do esquema CUBISTA-FOURIER

Para  $v_p^k$ , conforme a figura 4.39, tem-se que

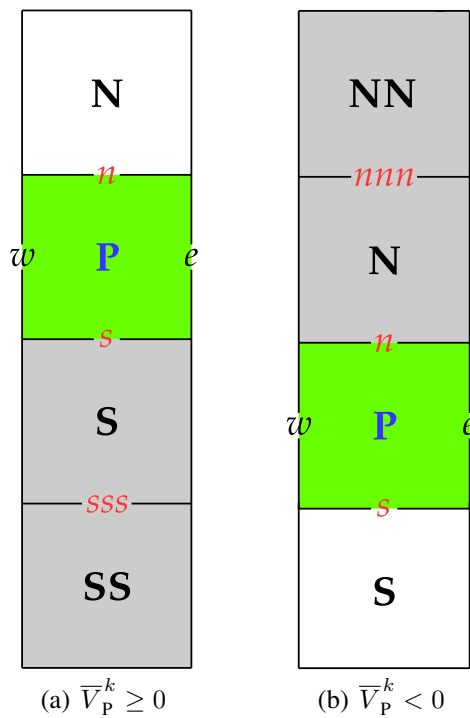


Figura 4.39: Pontos da malha utilizados para aproximar a componente  $v$  do vetor velocidade no ponto P e no nível de tempo  $k$ ,  $k \geq 0$ , por meio do esquema CUBISTA-FOURIER

$$v_P^k \approx \begin{cases} \left( \frac{1+S_P^k}{2} \right) v_{P_1} + \left( \frac{1-S_P^k}{2} \right) v_{P_2}, & \hat{v}_s^k, \hat{v}_n^k \in [0, 1) \\ \left( \frac{1+S_P^k}{2} \right) v_s^k + \left( \frac{1-S_P^k}{2} \right) v_n^k, & \hat{v}_s^k, \hat{v}_n^k \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \end{cases},$$

com

$$v_{P_1} = \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{v}_s^k}{2} \right) (v_n^k - v_{sss}^k) + v_{sss}^k,$$

$$v_{P_2} = \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{v}_n^k}{2} \right) (v_s^k - v_{nnn}^k) + v_{nnn}^k$$

e

$$S_P^k = \begin{cases} 1, & \bar{V}_P^k \geq 0 \\ -1, & \bar{V}_P^k < 0 \end{cases}.$$

Por fim, discretizando o termo convectivo  $\mathcal{C}(v)$  via diferenças centrais na face  $e$  e no nível de tempo  $k$ ,  $k \geq 0$ , tem-se

$$\mathcal{C}(v) \Big|_e^k \approx \bar{U}_E^k v_E^k - \bar{U}_P^k v_P^k + \bar{V}_{ne}^k v_{ne}^k - \bar{V}_{se}^k v_{se}^k, \quad (4.24)$$

de forma que os pontos utilizados na aproximação das derivadas parciais  $(Uv)_\xi$  e  $(Vv)_\eta$  são evidenciados nas figuras 4.40(a) e 4.40(b), nesta ordem.

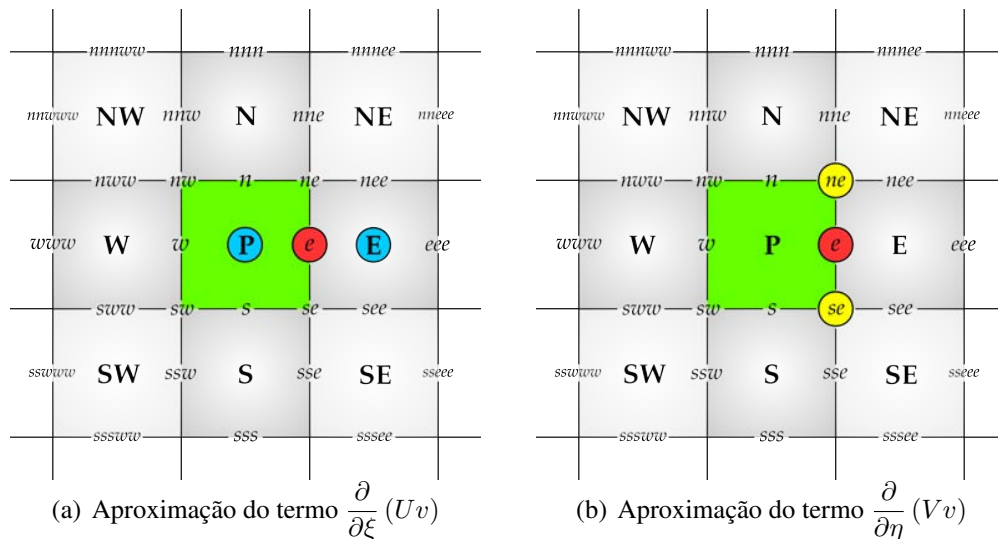


Figura 4.40: Discretização do termo convectivo  $\mathcal{C}(v)$  na face  $e$

Também, a figura 4.41 destaca os pontos compreendidos no cálculo das médias aritméticas obtidas da equação geral (4.1), as quais determinam as velocidades de convec-

ção  $\bar{U}_E^k, \bar{U}_P^k, \bar{V}_{ne}^k$  e  $\bar{V}_{se}^k$ , dadas por

$$\bar{U}_E^k = \frac{U_e^k + U_{eee}^k}{2}; \bar{U}_P^k = \frac{U_w^k + U_e^k}{2}; \bar{V}_{ne}^k = \frac{V_n^k + V_{nee}^k}{2}; \bar{V}_{se}^k = \frac{V_s^k + V_{see}^k}{2}.$$

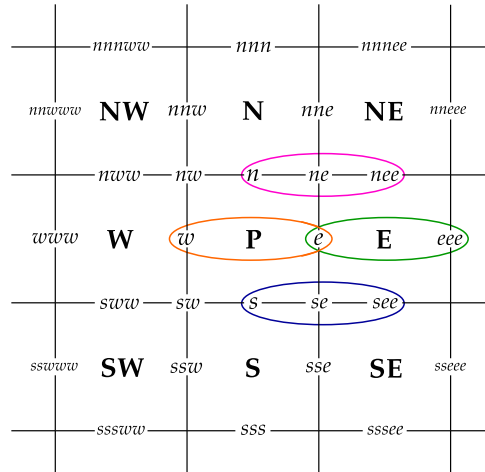


Figura 4.41: Pontos utilizados para determinar as velocidades de convecção  $\bar{U}_E^k, \bar{U}_P^k, \bar{V}_{ne}^k$  e  $\bar{V}_{se}^k$  pertencentes ao termo convectivo  $\mathcal{L}(v)$  discretizado na face  $e$  da  $i$ -ésima célula

As propriedades transportadas são avaliadas por meio da aplicação do esquema CUBISTA–FOURIER (3.63). Logo, no caso do termo  $v_E^k$ , em concordância com a figura 4.42, tem-se que

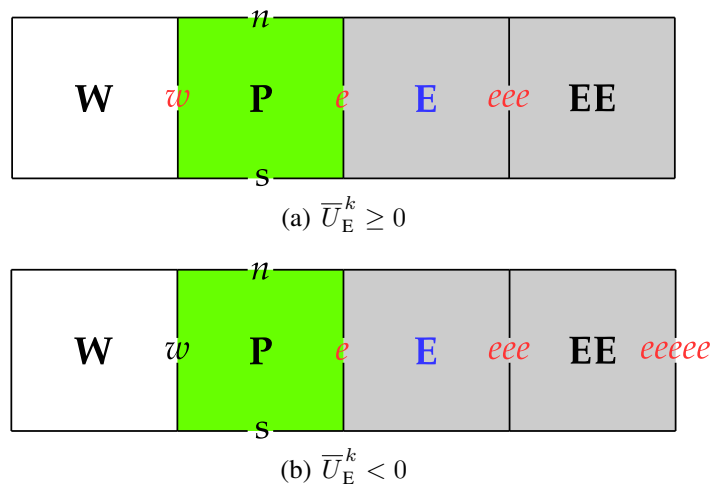


Figura 4.42: Pontos da malha utilizados para aproximar a componente  $v$  do vetor velocidade no ponto E e no nível de tempo  $k, k \geq 0$ , por meio do esquema CUBISTA–FOURIER

$$v_E^k \cong \begin{cases} \left( \frac{1+S_E^k}{2} \right) v_{E_1} + \left( \frac{1-S_E^k}{2} \right) v_{E_2}, \hat{v}_e^k, \hat{v}_{eee}^k \in [0, 1) \\ \left( \frac{1+S_E^k}{2} \right) v_e^k + \left( \frac{1-S_E^k}{2} \right) v_{eee}^k, \hat{v}_e^k, \hat{v}_{eee}^k \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \end{cases},$$

com

$$v_{E_1} = \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{v}_e^k}{2} \right) (v_{eee}^k - v_w^k) + v_w^k,$$

$$v_{E_2} = \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{v}_{eee}^k}{2} \right) (v_e^k - v_{eeee}^k) + v_{eeee}^k$$

e

$$S_E^k = \begin{cases} 1, \bar{U}_E^k \geq 0 \\ -1, \bar{U}_E^k < 0 \end{cases}.$$

Como a componente  $v$  do campo de velocidades não está definida nas faces verticais  $e$ ,  $eee$ ,  $w$  e  $eeee$ , porém, sua localização condiz com a da componente contravariante  $V$  no plano transformado, então decorre de (4.3) que seu valor numérico pode ser estimado nestas faces mediante as seguintes médias

$$v_e^k = \frac{1}{4} (v_s^k + v_{see}^k + v_{nee}^k + v_n^k); \quad v_{eee}^k = \frac{1}{4} (v_{see}^k + v_{seeee}^k + v_{neeee}^k + v_{nee}^k);$$

$$v_w^k = \frac{1}{4} (v_{sww}^k + v_s^k + v_n^k + v_{nww}^k)$$

e

$$v_{eeee}^k = \frac{1}{4} (v_{seeee}^k + v_{seeeee}^k + v_{neeeee}^k + v_{neeee}^k),$$

conforme indicam as figuras 4.43(a) – 4.43(d).

Assim,  $v_e^k = \bar{v}_e^k$ ,  $v_{eee}^k = \bar{v}_{eee}^k$ ,  $v_w^k = \bar{v}_w^k$  e  $v_{eeee}^k = \bar{v}_{eeee}^k$  e, diante disso, tem-se

$$v_E^k \cong \begin{cases} \left( \frac{1+S_E^k}{2} \right) v_{E_1} + \left( \frac{1-S_E^k}{2} \right) v_{E_2}, \hat{v}_e^k, \hat{v}_{eee}^k \in [0, 1) \\ \left( \frac{1+S_E^k}{2} \right) \bar{v}_e^k + \left( \frac{1-S_E^k}{2} \right) \bar{v}_{eee}^k, \hat{v}_e^k, \hat{v}_{eee}^k \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \end{cases},$$

com

$$v_{E_1} = \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{v}_e^k}{2} \right) (\bar{v}_{eee}^k - \bar{v}_w^k) + \bar{v}_w^k,$$

$$v_{E_2} = \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{v}_{eee}^k}{2} \right) (\bar{v}_e^k - \bar{v}_{eeee}^k) + \bar{v}_{eeee}^k$$

e

$$S_E^k = \begin{cases} 1, & \bar{U}_E^k \geq 0 \\ -1, & \bar{U}_E^k < 0 \end{cases}.$$

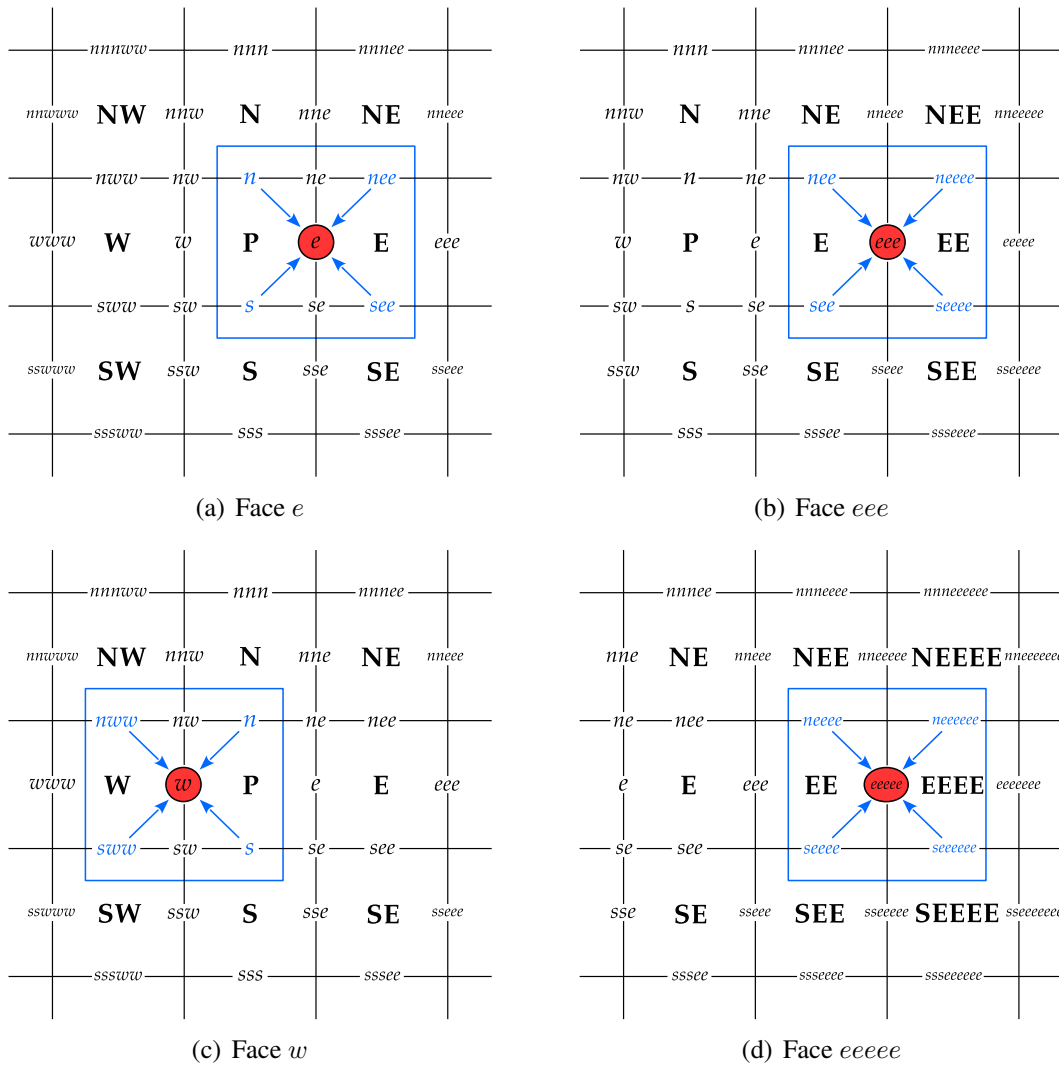


Figura 4.43: Pontos envolvidos no cálculo das médias aritméticas utilizadas para estimar a componente  $v$  do vetor velocidade no ponto E e no nível de tempo  $k$ ,  $k \geq 0$ , pertencente ao termo convectivo  $\mathcal{L}(v)$  discretizado na face  $e$

Para as demais incógnitas  $v_P^k$ ,  $v_{ne}^k$  e  $v_{se}^k$ , as estimativas para a componente cartesiana  $v$  do vetor velocidade nas faces verticais das células são obtidas de maneira análoga e, em vista disso, as expressões obtidas a partir da equação (4.3), bem como as respectivas ilustrações apontando os pontos envolvidos no cálculo de cada uma das médias, serão omitidos. Sendo assim, se  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(i \pm \frac{r_1}{2}, j \pm \frac{r_2}{2})$  representa o ponto associado à face vertical na qual a componente  $v$  será aproximada, com  $r_1$  e  $r_2$  números inteiros ímpares e pares, respectivamente,  $i \in [0, i_{\max}] \subset \mathbb{N}$  e  $j \in [0, j_{\max}] \subset \mathbb{N}$ , então, para qualquer nível de tempo  $k$ ,  $k \geq 0$ , e quando for o caso, assume-se simplesmente a notação  $v_P^k = \bar{v}_P^k$ .

Com base nesse argumento e de acordo com a figura 4.44, para a propriedade transportada  $v_P^k$ , tem-se que

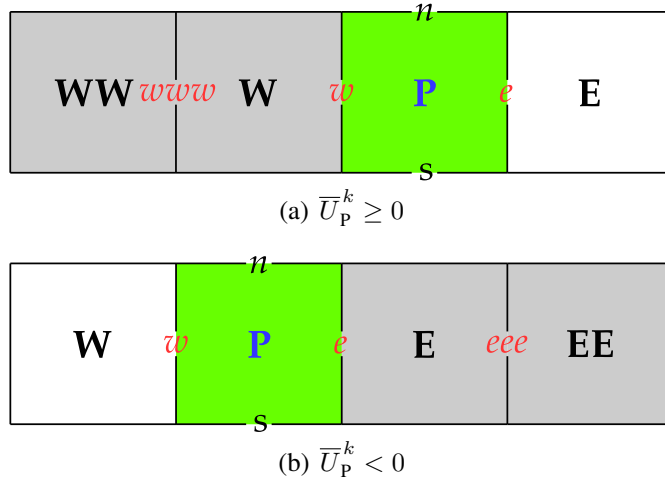


Figura 4.44: Pontos da malha utilizados para aproximar a componente  $v$  do vetor velocidade no ponto P e no nível de tempo  $k$ ,  $k \geq 0$ , por meio do esquema CUBISTA-FOURIER

$$v_P^k \cong \begin{cases} \left( \frac{1 + S_P^k}{2} \right) v_{P_1} + \left( \frac{1 - S_P^k}{2} \right) v_{P_2}, \hat{v}_w^k, \hat{v}_e^k \in [0, 1) \\ \left( \frac{1 + S_P^k}{2} \right) \bar{v}_w^k + \left( \frac{1 - S_P^k}{2} \right) \bar{v}_e^k, \hat{v}_w^k, \hat{v}_e^k \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \end{cases},$$

com

$$v_{P_1} = \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{v}_w^k}{2} \right) (\bar{v}_e^k - \bar{v}_{www}^k) + \bar{v}_{www}^k,$$

$$v_{P_2} = \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{v}_e^k}{2} \right) (\bar{v}_w^k - \bar{v}_{eee}^k) + \bar{v}_{eee}^k$$

e

$$S_P^k = \begin{cases} 1, \bar{U}_P^k \geq 0 \\ -1, \bar{U}_P^k < 0 \end{cases}.$$

Para  $v_{ne}^k$ , conforme a figura 4.45, tem-se que

$$v_{ne}^k \cong \begin{cases} \left( \frac{1 + S_{ne}^k}{2} \right) v_{ne_1} + \left( \frac{1 - S_{ne}^k}{2} \right) v_{ne_2}, \hat{v}_e^k, \hat{v}_{nne}^k \in [0, 1) \\ \left( \frac{1 + S_{ne}^k}{2} \right) \bar{v}_e^k + \left( \frac{1 - S_{ne}^k}{2} \right) \bar{v}_{nne}^k, \hat{v}_e^k, \hat{v}_{nne}^k \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \end{cases},$$

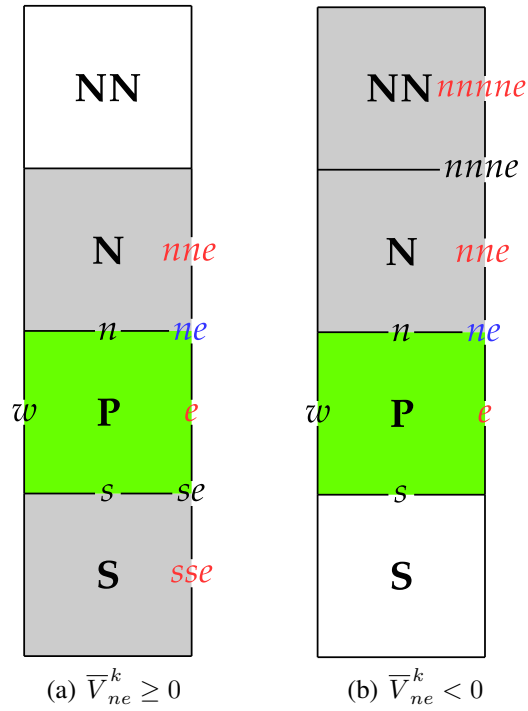


Figura 4.45: Pontos da malha utilizados para aproximar a componente  $v$  do vetor velocidade no ponto  $ne$  e no nível de tempo  $k$ ,  $k \geq 0$ , por meio do esquema CUBISTA-FOURIER

com

$$v_{ne_1} = \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{v}_e^k}{2} \right) (\bar{v}_{nne}^k - \bar{v}_{sse}^k) + \bar{v}_{sse}^k,$$

$$v_{ne_2} = \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{v}_{nne}^k}{2} \right) (\bar{v}_e^k - \bar{v}_{nnne}^k) + \bar{v}_{nnne}^k$$

e

$$S_{ne}^k = \begin{cases} 1, & \bar{V}_{ne}^k \geq 0 \\ -1, & \bar{V}_{ne}^k < 0 \end{cases}.$$

Enfim, para  $v_{se}^k$ , em conformidade com a figura 4.46, tem-se que

$$v_{se}^k \cong \begin{cases} \left( \frac{1 + S_{se}^k}{2} \right) v_{se_1} + \left( \frac{1 - S_{se}^k}{2} \right) v_{se_2}, & \hat{v}_{sse}^k, \hat{v}_e^k \in [0, 1) \\ \left( \frac{1 + S_{se}^k}{2} \right) \bar{v}_{sse}^k + \left( \frac{1 - S_{se}^k}{2} \right) \bar{v}_e^k, & \hat{v}_{sse}^k, \hat{v}_e^k \in (-\infty, 0) \cup [1, \infty) \end{cases},$$

com

$$v_{se_1} = \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{v}_{sse}^k}{2} \right) (\bar{v}_e^k - \bar{v}_{sssse}^k) + \bar{v}_{sssse}^k,$$

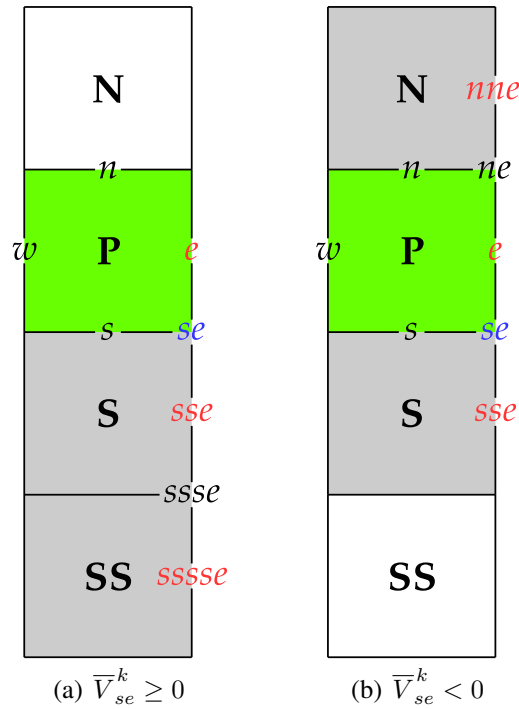


Figura 4.46: Pontos da malha utilizados para aproximar a componente  $v$  do vetor velocidade no ponto  $se$  e no nível de tempo  $k$ ,  $k \geq 0$ , por meio do esquema CUBISTA-FOURIER

$$v_{se_2} = \sum_{n=1}^{30} b_n \operatorname{sen} \left( \frac{n\pi \hat{v}_e^k}{2} \right) (\bar{v}_{sse}^k - \bar{v}_{nne}^k) + \bar{v}_{nne}^k$$

e

$$S_{se}^k = \begin{cases} 1, & \bar{V}_{se}^k \geq 0 \\ -1, & \bar{V}_{se}^k < 0 \end{cases}.$$

## 4.2 MÉTODO MAC PARA ESCOAMENTOS CONFINADOS INCOMPRESSÍVEIS

Consoante às ideias apresentadas no capítulo 2, nesta seção se obtém uma equação de evolução para a pressão a partir de uma combinação das equações de Navier-Stokes, cuja solução discreta dá origem a um campo de velocidades com divergência nula.

Nesse contexto, dadas as discretizações explícitas (4.4) e (4.5) dos termos que descrevem a evolução temporal do campo de velocidades, este pode ser estipulado no instante de tempo  $t_k + \Delta t$ , isto é, no nível de tempo  $k + 1$ ,  $0 < k \leq k_{\max}$ , por intermédio das equações

$$u^{k+1} = J\Delta\tau\mathcal{F}(u^k, v^k, p^{k+1}) + u^k \quad \text{e} \quad v^{k+1} = J\Delta\tau\mathcal{G}(u^k, v^k, p^{k+1}) + v^k,$$

em que as funções  $\mathcal{F}$  e  $\mathcal{G}$  contêm os termos viscosos, convectivos e de pressão das equações de Navier-Stokes e as velocidades  $u^k$  e  $v^k$  são conhecidas [22]. No que segue, apresenta-se a dedução da equação de Poisson para o cálculo da pressão.

Reescrevendo a equação da quantidade de movimento (2.8) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \overbrace{\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{u}{J} \right)}^{\mathcal{T}(u)} = & - \overbrace{\left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (Uu) + \frac{\partial}{\partial \eta} (Vu) \right]}^{\mathcal{C}(u)} + \overbrace{\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right]}^{\mathcal{P}(u)} \\ & + \underbrace{\nu \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \right) \right]}_{\mathcal{D}(u)}, \end{aligned}$$

e considerando a expressão discreta (4.4), segue que a componente cartesiana  $u$  do vetor velocidade, avaliada em uma face  $f$  da célula computacional de referência, no nível de tempo  $k+1$ ,  $k \geq 0$ , é escrita como

$$u_f^{k+1} = J_f \Delta \tau \left( -\mathcal{C}(u) \Big|_f^k + \mathcal{P}(u) \Big|_f^{k+1} + \mathcal{D}(u) \Big|_f^k \right) + u_f^k, \quad f = e, w, n, s,$$

ou ainda, de forma concisa como

$$u_f^{k+1} = F_f^k + J_f \Delta \tau \mathcal{P}(u) \Big|_f^{k+1}, \quad (4.25)$$

com

$$F_f^k = J_f \Delta \tau \left( -\mathcal{C}(u) \Big|_f^k + \mathcal{D}(u) \Big|_f^k \right) + u_f^k, \quad f = e, w, n, s. \quad (4.26)$$

Analogamente, da equação da quantidade de movimento (2.9), reescrita como

$$\begin{aligned} \overbrace{\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{v}{J} \right)}^{\mathcal{T}(v)} = & - \overbrace{\left[ \frac{\partial}{\partial \xi} (Uv) + \frac{\partial}{\partial \eta} (Vv) \right]}^{\mathcal{C}(v)} + \overbrace{\frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right]}^{\mathcal{P}(v)} \\ & + \underbrace{\nu \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( J \left( \alpha \frac{\partial v}{\partial \xi} - \beta \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( J \left( \gamma \frac{\partial v}{\partial \eta} - \beta \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \right) \right]}_{\mathcal{D}(v)}, \end{aligned}$$

e com base na discretização temporal (4.5), sucede que a componente cartesiana  $v$  do vetor velocidade, estimada em uma face  $f$  e no nível de tempo  $k+1$ ,  $k \geq 0$ , é dada por

$$v_f^{k+1} = J_f \Delta \tau \left( -\mathcal{C}(v) \Big|_f^k + \mathcal{P}(v) \Big|_f^{k+1} + \mathcal{D}(v) \Big|_f^k \right) + v_f^k, \quad f = e, w, n, s,$$

ou ainda, concisamente como

$$v_f^{k+1} = G_f^k + J_f \Delta \tau \mathcal{P}(v) \Big|_f^{k+1}, \quad (4.27)$$

com

$$G_f^k = J_f \Delta \tau \left( -\mathcal{C}(v) \Big|_f^k + \mathcal{D}(v) \Big|_f^k \right) + v_f^k, \quad f = e, w, n, s. \quad (4.28)$$

A partir das expressões (2.10) que descrevem as componentes contravariantes  $U$  e  $V$  e com base nas expressões concisas (4.25) e (4.27), tem-se a formulação  $UV$  para a velocidade, necessária para a conservação do fluxo de massa em todo o domínio computacional:

$$\begin{aligned} U_f^{k+1} &= u_f^{k+1} \frac{\partial y}{\partial \eta} \Big|_f - v_f^{k+1} \frac{\partial x}{\partial \eta} \Big|_f \\ &= \left( F_f^k + J_f \Delta \tau \mathcal{P}(u) \Big|_f^{k+1} \right) \frac{\partial y}{\partial \eta} \Big|_f - \left( G_f^k + J_f \Delta \tau \mathcal{P}(v) \Big|_f^{k+1} \right) \frac{\partial x}{\partial \eta} \Big|_f, \end{aligned} \quad (4.29)$$

para  $f = e, w, e$

$$\begin{aligned} V_f^{k+1} &= -u_f^{k+1} \frac{\partial y}{\partial \xi} \Big|_f + v_f^{k+1} \frac{\partial x}{\partial \xi} \Big|_f \\ &= - \left( F_f^k + J_f \Delta \tau \mathcal{P}(u) \Big|_f^{k+1} \right) \frac{\partial y}{\partial \xi} \Big|_f + \left( G_f^k + J_f \Delta \tau \mathcal{P}(v) \Big|_f^{k+1} \right) \frac{\partial x}{\partial \xi} \Big|_f, \end{aligned} \quad (4.30)$$

para  $f = n, s$ .

Sendo  $\mathcal{P}(u)$  e  $\mathcal{P}(v)$  dados pelas expressões (4.6) e considerando os coeficientes de acoplamento  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  definidos em (2.11), segue que o produto dos termos de pressão pelas métricas dos segundos membros de (4.29) e (4.30) resulta na forma concisa para as componentes contravariantes

$$U_f^{k+1} = F_f^k \frac{\partial y}{\partial \eta} \Big|_f - G_f^k \frac{\partial x}{\partial \eta} \Big|_f + J_f \Delta \tau \frac{1}{\rho} \left( -\alpha_f \frac{\partial p}{\partial \xi} \Big|_f^{k+1} + \beta_f \frac{\partial p}{\partial \eta} \Big|_f^{k+1} \right), \quad (4.31)$$

para  $f = e, w, e$

$$V_f^{k+1} = -F_f^k \frac{\partial y}{\partial \xi} \Big|_f + G_f^k \frac{\partial x}{\partial \xi} \Big|_f + J_f \Delta \tau \frac{1}{\rho} \left( \beta_f \frac{\partial p}{\partial \xi} \Big|_f^{k+1} - \gamma_f \frac{\partial p}{\partial \eta} \Big|_f^{k+1} \right), \quad (4.32)$$

para  $f = n, s$ .

Por fim, a equação da continuidade (2.12) é aproximada no ponto P e no nível de tempo  $k + 1$ ,  $k \geq 0$ , por uma diferença do tipo central

$$\left( \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} \right) \Big|_P^{k+1} \approx U_e^{k+1} - U_w^{k+1} + V_n^{k+1} - V_s^{k+1} = 0. \quad (4.33)$$

Substituindo as expressões (4.31) e (4.32) em (4.33), obtém-se a equação de evolução para a pressão

$$\begin{aligned}
 (FG) \Big| \frac{\rho}{\Delta\tau} = & J_e \left[ -\alpha_e \frac{\partial p}{\partial \xi} \Big|_e^{k+1} + \beta_e \frac{\partial p}{\partial \eta} \Big|_e^{k+1} \right] + J_w \left[ \alpha_w \frac{\partial p}{\partial \xi} \Big|_w^{k+1} - \beta_w \frac{\partial p}{\partial \eta} \Big|_w^{k+1} \right] \\
 & + J_n \left[ \beta_n \frac{\partial p}{\partial \xi} \Big|_n^{k+1} - \gamma_n \frac{\partial p}{\partial \eta} \Big|_n^{k+1} \right] + J_s \left[ -\beta_s \frac{\partial p}{\partial \xi} \Big|_s^{k+1} + \gamma_s \frac{\partial p}{\partial \eta} \Big|_s^{k+1} \right], \tag{4.34}
 \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned}
 (FG) \Big| \Big| & = -F_e^k \frac{\partial y}{\partial \eta} \Big|_e + G_e^k \frac{\partial x}{\partial \eta} \Big|_e + F_w^k \frac{\partial y}{\partial \eta} \Big|_w - G_w^k \frac{\partial x}{\partial \eta} \Big|_w \\
 & + F_n^k \frac{\partial y}{\partial \xi} \Big|_n - G_n^k \frac{\partial x}{\partial \xi} \Big|_n - F_s^k \frac{\partial y}{\partial \xi} \Big|_s + G_s^k \frac{\partial x}{\partial \xi} \Big|_s.
 \end{aligned}$$

A seguir, expõe-se o algoritmo representativo da versão simplificada do método MAC abordada neste trabalho.

---

**Algorithm 1** MÉTODO MAC PARA ESCOAMENTOS CONFINADOS INCOMPRESSÍVEIS
 

---

Tome  $\mu, \rho, \tau = 0, \tau_{final}, \Delta\tau$   
 $u = u_0, v = v_0, p = p_0, U = U_0, V = V_0$   
**procedure** ALOCAÇÃO DE MEMÓRIA  
**end procedure**  
**procedure** LEITURA DOS PONTOS DA MALHA  
**end procedure**  
 $k = 0$   
**procedure** CONDIÇÕES INICIAIS  
**end procedure**  
**procedure** CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA A VELOCIDADE  
**end procedure**  
**procedure** GRAVAÇÃO =  $(u^0, v^0, p^0)$   
**end procedure**  
**while**  $\tau < \tau_{final}$  **do**  
   **procedure** CONVECTIVO =  $(\mathcal{C}(u)|^k, \mathcal{C}(v)|^k)$   
     equações (4.19), (4.22), (4.23) e (4.24)  
**end procedure**  
   **procedure** DIFUSIVO =  $(\mathcal{D}(u)|^k, \mathcal{D}(v)|^k)$   
     equações (4.14) e (4.17)  
**end procedure**  
   **procedure**  $(FG)|^k = (F^k, G^k)$   
     equações (4.26) e (4.28)  
**end procedure**  
    $\tau = \tau + \Delta\tau$   
   **procedure** PRESSÃO =  $(p^{k+1})$   
     equação (4.34) **“DE FORMA ITERATIVA ATÉ A CONVERGÊNCIA”**  
     **procedure** CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA A PRESSÃO  
     **end procedure**  
**end procedure**  
   **procedure** VELOCIDADE =  $(\mathcal{P}(u)|^{k+1}, \mathcal{P}(v)|^{k+1}, u^{k+1}, v^{k+1}, U^{k+1}, V^{k+1})$   
     equações (4.8), (4.9), (4.25), (4.27), (4.29) e (4.30)  
**end procedure**  
   **procedure** CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA A VELOCIDADE  
**end procedure**  
   **procedure** GRAVAÇÃO =  $(u^{k+1}, v^{k+1}, p^{k+1})$   
**end procedure**  
    $k = k + 1$   
**end while**

---

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A fim de se validar o modelo teórico exposto no capítulo 4, a seguir são apresentados os resultados obtidos pela implementação do algoritmo a quatro tipos de problemas reais que caracterizam escoamentos confinados 2D laminares, incompressíveis e isotérmicos.

Para o estudo da validação, investiga-se o desempenho do novo esquema CUBISTA–FOURIER (3.63) mediante comparação das soluções numéricas com os resultados experimentais disponíveis na literatura para os seguintes problemas físicos:

- escoamento entre duas placas paralelas;
- escoamento em cavidade com parede superior em movimento;
- escoamento envolvendo placa de orifício;
- escoamento do sangue em uma artéria coronária.

No processo de geração das malhas, impôs-se o número máximo de  $10^3$  iterações, com erro inferior a  $10^{-4}$ , e os sistemas lineares decorrentes das EDF apresentadas no capítulo 4 foram resolvidos pelo método iterativo de Gauss-Seidel [11].

As condições iniciais para os campos de velocidade e pressão de todos os problemas, submetidas ao instante de tempo  $t = t_0$ , são admitidas como

$$\begin{cases} \vec{u}(x, y, t_0) = \vec{0} \\ p(x, y, t_0) = 0 \end{cases}, \quad \forall (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad t_0 = 0 \quad (5.1)$$

e, portanto, o fluido se encontra em repouso em todo o domínio. É importante ressaltar que o campo de velocidades em (5.1) é construído de forma que a equação da continuidade seja satisfeita, evitando possíveis prejuízos quanto à convergência do método numérico [22].

As condições de contorno retratam o comportamento da solução na fronteira  $\partial\Omega$  da região de definição do problema físico a ser modelado. Para o campo de velocidades, essas são específicas para cada um dos problemas sugeridos, dadas nas seções consequentes, as quais podem ser classificadas em

- condição de não escorregamento e impermeabilidade (CNEI);
- condição de livre escorregamento (CLES);
- condição de injeção prescrita (CIPR);
- condição de ejeção prescrita (CEPR);
- condição de ejeção contínua (CECO).

A condição de contorno para a pressão não é necessária, *a priori*, para a resolução das equações de momento (2.8) e (2.9), em razão de se fazer uso de malhas deslocadas [59]. Essa hipótese é ratificada para os problemas modelados nas próximas seções, visto que o fluido não pode escoar através das fronteiras rígidas do domínio. Diante disso, segue que

$$\frac{\partial p}{\partial n}(x, y, t) = \nabla p \cdot \vec{n} = 0, \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega, \quad t > t_0,$$

em que  $n$ , neste caso, denota a normal ao contorno  $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e, portanto, a condição utilizada é uma condição de fronteira homogênea.

Sendo  $\vec{U} = \langle U, V \rangle$ , segue da equação da continuidade (2.12) que  $\nabla \cdot \vec{U} = 0$ . No entanto, como as equações são resolvidas numericamente, então, o que de fato ocorre é que  $(\nabla \cdot \vec{U})_{num} \neq 0$ , com  $(\nabla \cdot \vec{U})_{num}$  o divergente numérico. Uma vez que se deseja monitorar o processo de convergência, nas simulações são utilizados os valores obtidos para  $(\nabla \cdot \vec{U})_{num}$ .

Se  $t_k$  corresponde ao instante de tempo inicial, então, a menos de erros de truncamento e arredondamento, o princípio da conservação de massa para os instantes subsequentes exige que as componentes contravariantes  $U^{k+1}(u^{k+1}, v^{k+1})$  e  $V^{k+1}(u^{k+1}, v^{k+1})$  satisfaçam a equação da continuidade em todo o domínio, para qualquer  $k \geq 0$ . Portanto,

$$(\nabla \cdot \vec{U})_{num} \Big|_{(\xi_i, \eta_j)}^{k+1} \approx 0. \quad (5.2)$$

Logo, da relação (5.2), pode-se estimar o divergente numérico em um ponto de malha no nível de tempo  $k + 1$ ,  $0 \leq k \leq k_{max}$ , da seguinte forma

$$(\nabla \cdot \vec{U})_{num} \Big|_{(\xi_i, \eta_j)}^{k+1} \equiv \left( \frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} \right)_{num} \Big|_{(\xi_i, \eta_j)}^{k+1} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \Big|_{(\xi_i, \eta_j)}^{k+1} + \frac{\partial V}{\partial \eta} \Big|_{(\xi_i, \eta_j)}^{k+1} \approx 0,$$

e o método é convergente se  $(\nabla \cdot \vec{U})_{num} \Big|_{(\xi_i, \eta_j)}^{k+1}$  tende a zero quando a malha é refinada.

Os resultados numéricos apresentados neste capítulo foram obtidos em função do número adimensional de Reynolds, definido como

$$Re = \frac{LV}{\nu},$$

em que  $L$  e  $V$  são, respectivamente, o comprimento e a velocidade característicos do escoamento e, portanto, dependentes do problema em estudo.

Neste trabalho, todas as simulações numéricas foram realizadas em um microcomputador com arquitetura 64 bits e sistema operacional Linux Ubuntu versão 14.04.4 LTS, compiladas no GFortran. Tanto a geração das malhas quanto a visualização dos resultados foram obtidos através do software livre ParaView versão 4.0.1.

## 5.1 ESCOAMENTO ENTRE DUAS PLACAS PARALELAS

Neste problema, também conhecido como escoamento de Hagen-Poiseuille no caso de escoamentos laminares plenamente desenvolvidos<sup>21</sup>, o domínio físico consiste numa geometria de formato retangular com altura  $H$  e comprimento  $L$ , conforme mostra a figura 5.1.

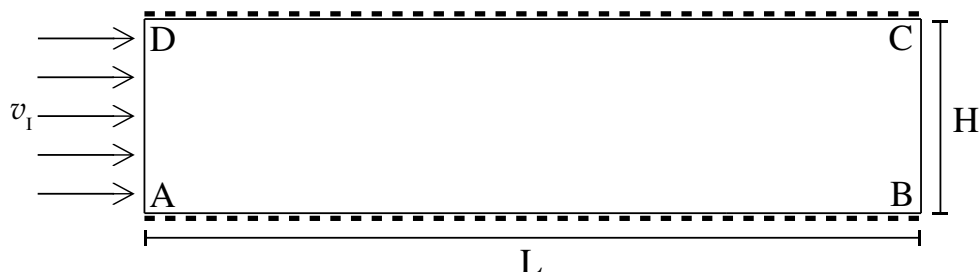


Figura 5.1: Domínio do problema do escoamento laminar entre duas placas paralelas

O escoamento é unidimensional, cujo fluido se desloca na direção horizontal da esquerda para a direita. Sendo assim, o campo de velocidades  $\vec{u}$  é determinado unicamente pela componente  $u$ , normal à fronteira de entrada, a qual é representada pela aresta AD.

O escoamento de Hagen-Poiseuille é considerado um dos poucos problemas nos quais a solução analítica para as equações de Navier-Stokes existe [22], a qual é expressa a uma distância  $y$  da parede inferior do canal por

$$u(y) = 6 \frac{1}{H^3} \int_0^H \mathcal{U}(y) dy (yH - y^2), \quad (5.3)$$

onde  $\mathcal{U}(y)$  se refere ao perfil de velocidades definido em função de um valor de referência [53]. Sendo assim, a validação do modelo teórico aqui proposto é factível.

Para esse desígnio, dadas as placas fixas representadas pelas arestas AB e CD, considera-se a distância  $H = 1m$  e comprimento  $L = 8H = 8m$ , garantindo que o escoamento seja plenamente desenvolvido na seção de saída do fluido, indicada pela aresta BC.

Inicialmente, o canal formado pela distância  $H$  se encontra vazio e o fluido é injetado para o interior da geometria através da aresta AD a uma velocidade prescrita  $v_1$  com perfil do tipo parabólico. À medida que o fluido escoar para dentro do canal é desenvolvida uma camada limite<sup>22</sup>, em virtude das forças cisalhantes das paredes rígidas do tubo.

Dada a hipótese de incompressibilidade do fluido, a velocidade na linha de simetria do tubo aumenta com a distância percorrida a partir da entrada, satisfazendo a equação da continuidade. A variação da velocidade é interrompida quando o regime permanente é atingido, ou seja, quando a camada limite coincide com a linha de corrente central da tubulação

<sup>21</sup>Um escoamento é dito completamente desenvolvido quando se torna inteiramente viscoso e o perfil de velocidades não se altera com o avanço do tempo, isto é, quando o escoamento atinge o regime permanente [59].

<sup>22</sup>Escoamentos de fluidos com baixa viscosidade, como os escoamentos de água e de ar, podem ser divididos em uma camada limite. Trata-se de uma camada viscosa delgada próxima às superfícies sólidas e interfaces, ligada a uma camada externa que pode ser considerada invíscida, em que são válidas as equações de Euler e Bernoulli [83].

e, em razão disso, o valor de  $u$  ao longo do canal é o mesmo para todos os pontos do domínio pertencentes a uma mesma linha de corrente.

Os resultados numéricos são então comparados com a solução analítica do vetor velocidade para um perfil do tipo reto, cujo valor de referência para este caso é justamente a velocidade de injeção prescrita, admitida como  $v_1 = 1m/s$ . Logo, da equação (5.3) segue que

$$u(y) = 6 \int_0^1 dy (y - y^2) = -6y(y - 1). \quad (5.4)$$

Para as devidas comparações, considera-se a região que corresponde à metade do canal, ou seja, que dista  $y = H/2 = 0.5m$  da parede inferior. Visto que a velocidade máxima é obtida na linha de corrente central, segue imediatamente de (5.4) que

$$u_{\max}(0.5) = 1.5m/s.$$

As implementações foram realizadas com base nos distintos refinamentos de malha apresentados na tabela 5.1. Cada malha foi gerada de modo a preservar a proporcionalidade quanto ao número de elementos nas direções  $\xi$  e  $\eta$ . Por conseguinte, denotando  $n_{elem \xi}$  e  $n_{elem \eta}$  como o número de elementos na direção  $\xi$  e  $\eta$ , respectivamente, então, para a geometria em questão, tem-se  $h_x = L/n_{elem \xi}$  e  $h_y = H/n_{elem \eta}$  e, portanto, a razão de refinamento

$$\frac{h_y}{h_x} = \frac{H}{L} \frac{n_{elem \xi}}{n_{elem \eta}} = \frac{1}{8} \frac{n_{elem \xi}}{n_{elem \eta}}$$

se mantém constante entre as malhas G1 – G5.

Tabela 5.1: Quantidade de elementos considerados na construção das malhas para a simulação do problema do escoamento entre duas placas paralelas

MALHAS	NÚMERO DE ELEMENTOS	
	DIREÇÃO $\xi$	DIREÇÃO $\eta$
G1	8	4
G2	16	8
G3	32	16
G4	64	32
G5	128	64

Visando a convergência do método numérico e, conseqüentemente, a obtenção da solução, para as malhas G1 – G3 considerou-se  $\Delta\tau = 10^{-2}$  e para as malhas G4 e G5 adotou-se  $\Delta\tau = 5 \times 10^{-3}$ . As simulações foram realizadas para  $Re = 100$  assumindo o tempo final  $\tau = 30s$ , tempo em que o regime permanente foi atingido, nas quais a solução foi obtida

estabelecendo o processamento de, no máximo,  $10^6$  iterações, com erro mínimo de  $10^{-3}$ . Ademais, assume-se o uso de condições de contorno do tipo CIPR na fronteira de entrada, CECO na fronteira de saída e CNEI nas fronteiras que retratam o comprimento das placas.

A figura 5.2 mostra o perfil, em regime permanente, do vetor velocidade para o caso particular da malha G5. Nota-se que a magnitude é máxima no centro do duto, em contrapartida, próximo às fronteiras superior e inferior a velocidade é nula, devido à condição de não escorregamento e impermeabilidade assumida.

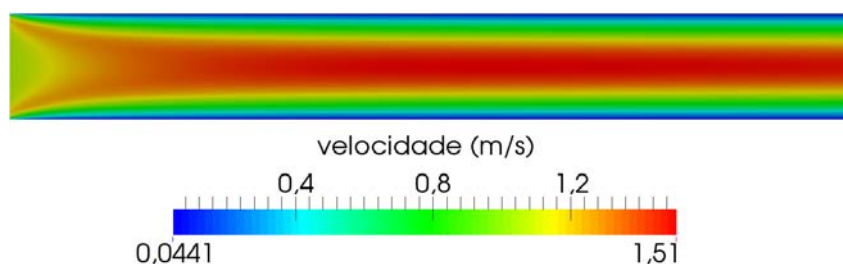


Figura 5.2: Perfil da magnitude da velocidade para a malha G5, com  $\tau = 30s$

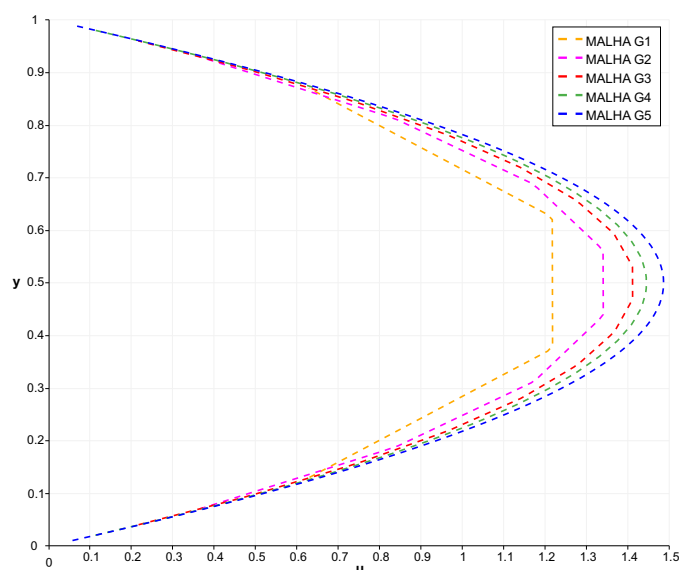
A figura 5.3(a) apresenta os perfis de velocidade, obtidos da seção reta determinada pelos pontos  $\mathcal{P}1 (7.5, 0)$  e  $\mathcal{P}2 (7.5, 1)$  de cada uma das malhas da tabela 5.1, por meio do esquema CUBISTA–FOURIER. A relação existente entre a variação dos valores admitidos pela componente  $u$  do vetor velocidade e os valores assumidos por  $y$  são comparados qualitativamente aos perfis resultantes dos métodos apresentados em [4] e [8], mostrados nas figuras 5.3(b) e 5.3(c), respectivamente.

Nota-se que  $y = 0.5$  corresponde ao eixo de simetria da parábola representativa da solução exata e, portanto, como mencionado anteriormente, a velocidade na linha de centro do domínio ABCD é máxima. Logo, a velocidade da corrente livre<sup>23</sup>  $V_l$  é calculada numericamente nos pontos  $(x_i, 0.5)$ ,  $i \in [0, i_{\max}] \subset \mathbb{N}$ , para cada uma das malhas utilizadas.

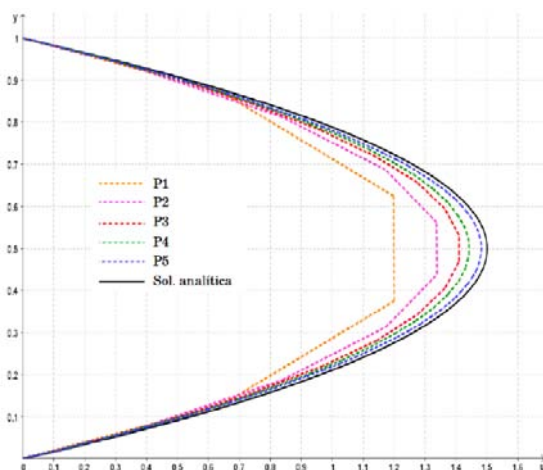
Tabela 5.2: Comparativo de convergência via velocidade da corrente livre numérica entre os esquemas FOU e CUBISTA–FOURIER

MALHAS	$h_x (m)$	$h_y (m)$	$h_x \times h_y (m^2)$	$V_{lnum} (m/s)$		ERRO= $ 1.5 - V_{lnum} $	
				FOU	FOURIER	FOU	FOURIER
G1	1.0	0.25	0.25	1.1999	1.2175	0.3001	0.2825
G2	0.5	0.125	0.0625	1.3380	1.3402	0.1620	0.1598
G3	0.25	0.0625	0.015625	1.4158	1.4113	0.0842	0.0887
G4	0.125	0.03125	0.00390625	1.4498	1.4445	0.0502	0.0555
G5	0.0625	0.015625	0.0009765625	1.4814	1.4863	0.0186	0.0137

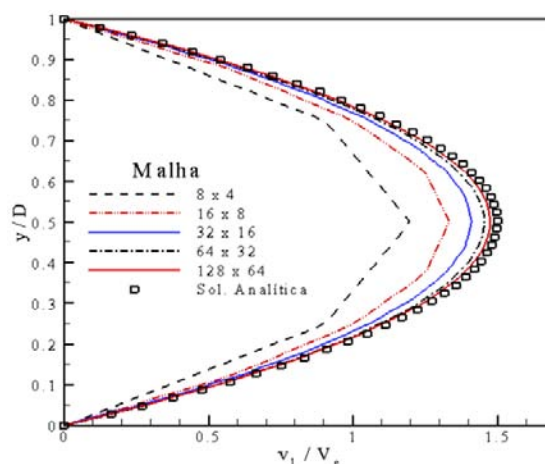
<sup>23</sup>A velocidade da corrente livre é definida como a velocidade de superfície de um fluxo invíscido, onde não há influência das condições de contorno.



(a) Esquema CUBISTA-FOURIER



(b) Apresentado por [4]



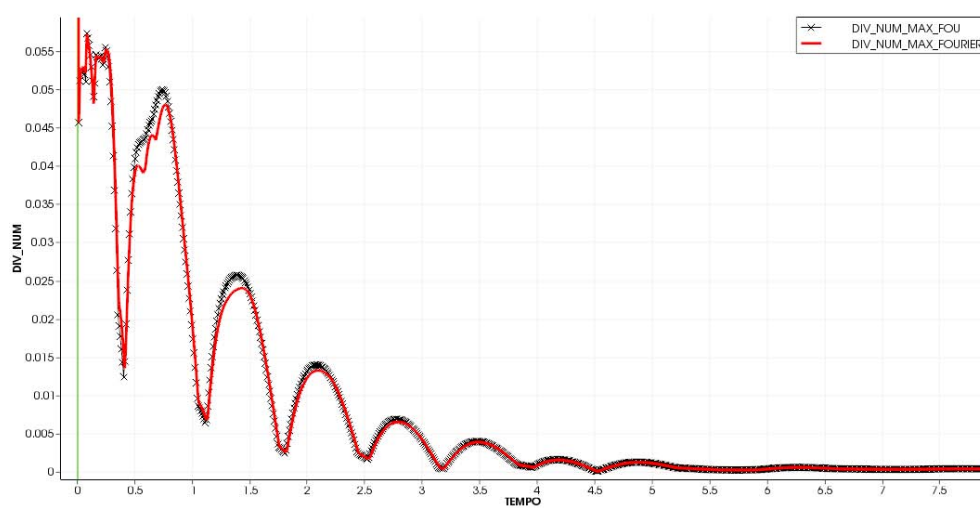
(c) Apresentado por [8]

Figura 5.3: Perfil de velocidades na seção de saída para o problema do escoamento entre duas placas paralelas

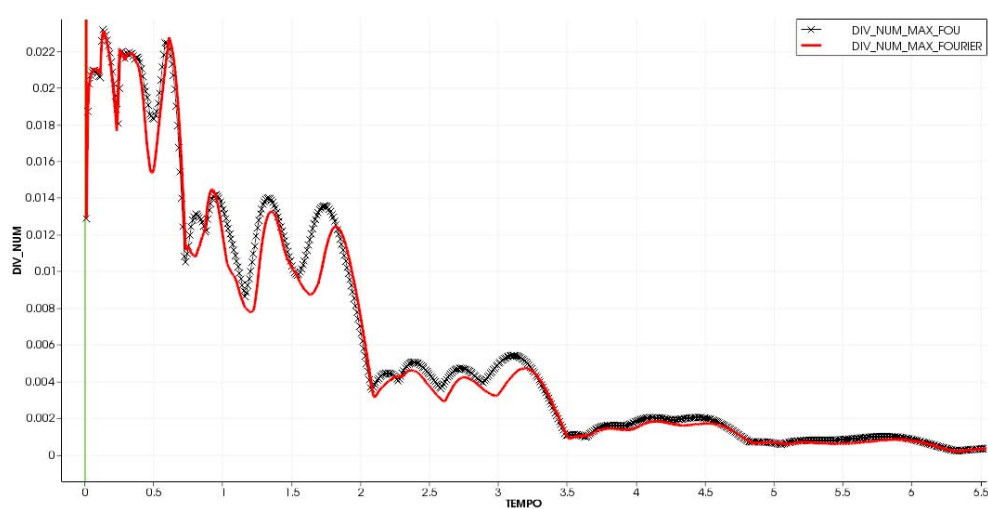
A tabela 5.2 mostra, com arredondamento de quatro casas decimais, que quanto menor a área  $h_x \times h_y$  de uma célula do domínio computacional, isto é, quanto mais refinada a malha, a velocidade da corrente livre calculada numericamente, simbolizada por  $V_{num}$ , tende para a velocidade máxima teórica.

As informações expostas na tabela 5.2 ainda mostram que, relativamente ao esquema FOU, percebe-se que o esquema CUBISTA-FOURIER apresentou melhores resultados para as malhas G1, G2 e G5, sendo que as malhas G1 e G2 apresentaram a maior e menor diferença entre  $V_{num}$  (FOU) e  $V_{num}$  (FOURIER), respectivamente.

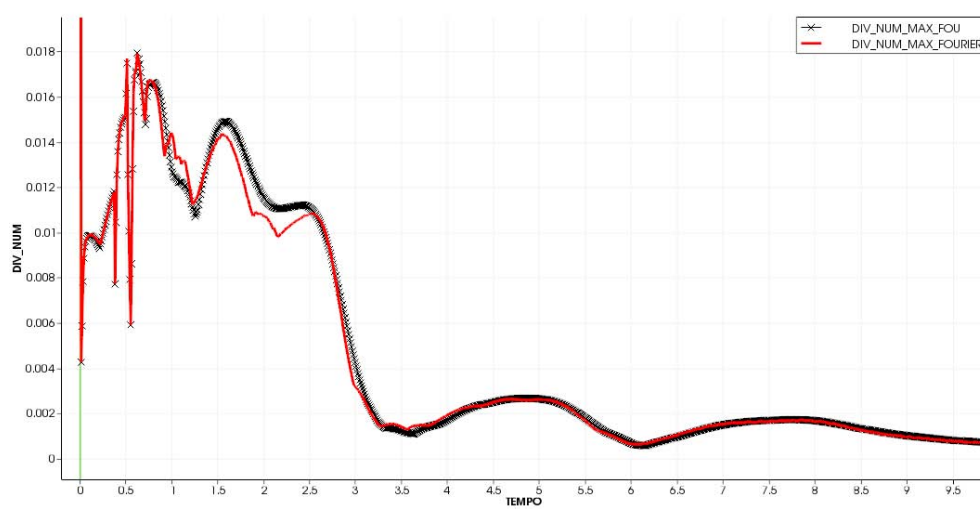
Posto que a convergência é garantida, as figuras 5.4(a) – 5.4(c), 5.5(a) e 5.5(b) exibem o comportamento simultâneo do divergente numérico máximo, para cada uma das malhas G1 – G5, do esquema CUBISTA-FOURIER e do esquema FOU.



(a) G1

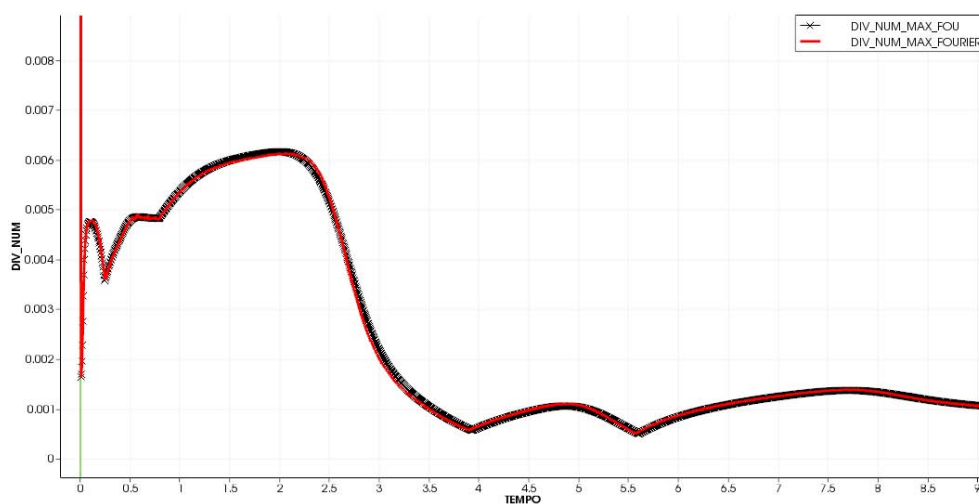


(b) G2

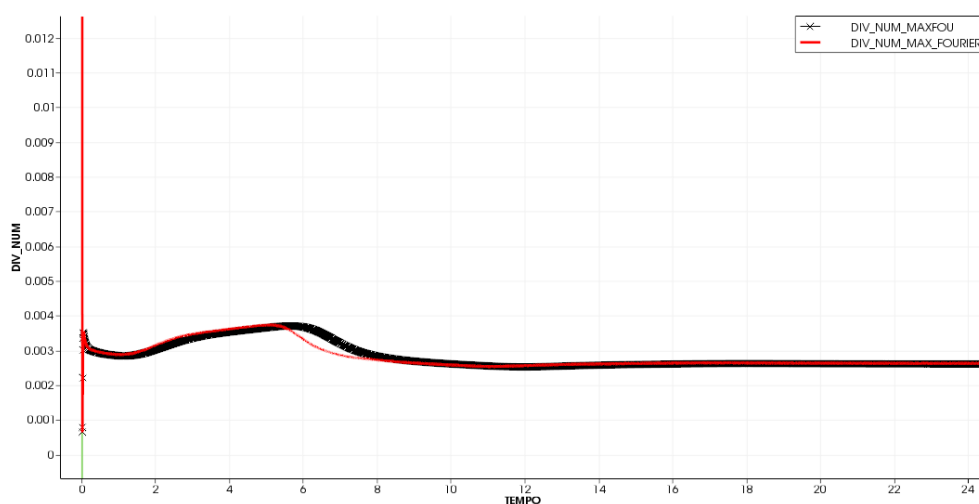


(c) G3

Figura 5.4: Comparativo qualitativo do divergente numérico máximo entre os esquemas FOU e CUBISTA–FOURIER para as malhas G1 – G3



(a) G4



(b) G5

Figura 5.5: Comparativo qualitativo do divergente numérico máximo entre os esquemas FOU e CUBISTA–FOURIER para as malhas G4 e G5

Visivelmente, no início das simulações o esquema CUBISTA–FOURIER apresenta fortes oscilações, em especial nas malhas G1 – G3, devido à não linearidade do polinômio trigonométrico. À medida que o tempo avança, as oscilações tendem a diminuir, aproximando-se do divergente numérico calculado através do esquema FOU.

Nesse contexto, a curva que representa o divergente numérico máximo, denotado por  $(\nabla \cdot \vec{U})_{num_{max}}$ , descreve um perfil monótono quando  $\tau \rightarrow \tau_{final} = 30s$ , sendo que, quanto mais grossa a malha, mais próximo de zero é aquele valor. A tabela 5.3 mostra, com um arredondamento de quatro casas decimais, que, após alcançar o regime permanente, o esquema CUBISTA–FOURIER leva à convergência com valores  $(\nabla \cdot \vec{U})_{num_{max}}$  menores do que os calculados pelo esquema FOU.

Tabela 5.3: Comparativo quantitativo do divergente numérico máximo entre os esquemas FOU e CUBISTA–FOURIER para o problema do escoamento entre duas placas paralelas

MALHA	$(\nabla \cdot \vec{U})_{num_{max}}$	
	FOU	FOURIER
G1	$3.983 \times 10^{-4}$	$3.931 \times 10^{-4}$
G2	$2.479 \times 10^{-4}$	$2.374 \times 10^{-4}$
G3	$8.873 \times 10^{-4}$	$8.607 \times 10^{-4}$
G4	$1.032 \times 10^{-3}$	$1.031 \times 10^{-3}$
G5	$2.615 \times 10^{-3}$	$2.633 \times 10^{-3}$

## 5.2 ESCOAMENTO EM CAVIDADE COM PAREDE SUPERIOR EM MOVIMENTO

O problema do escoamento forçado pelo deslizamento da parede superior em uma cavidade é um dos problemas clássicos para a avaliação de algoritmos numéricos para as equações de Navier-Stokes [22]. O domínio físico consiste em uma geometria de formato quadrado com altura  $H$  e comprimento  $L$ , cujo interior, dotado de paredes sólidas e impermeáveis, é totalmente preenchido com fluido, conforme mostra a figura 5.6.

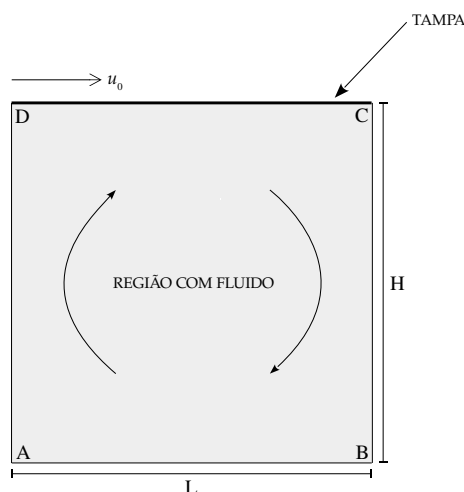


Figura 5.6: Domínio do problema do escoamento laminar em cavidade com tampa deslizante

Inicialmente, tanto a tampa da cavidade, representada pela aresta  $CD$ , quanto o fluido estão em repouso. No instante de tempo inicial  $t_0$  a tampa da cavidade sofre uma aceleração devido a uma velocidade inicial  $u_0 > 0$ . Consequentemente, o fluido adjacente à tampa é tracionado em virtude das tensões viscosas, suscitando o escoamento. Com o avanço do tempo, identifica-se a direção do escoamento e zonas de recirculação se tornam visíveis.

Neste trabalho, a cavidade possui uma área de  $1m^2$ , logo, suas dimensões são iguais e unitárias. As simulações, com  $Re = 100$ ,  $Re = 400$  e  $Re = 1000$ , foram realizadas

com base em uma malha com  $128 \times 128$  elementos e, portanto, as células que compõem o domínio computacional possuem o formato quadrado com áreas iguais a  $6.1035 \times 10^{-5} m^2$ .

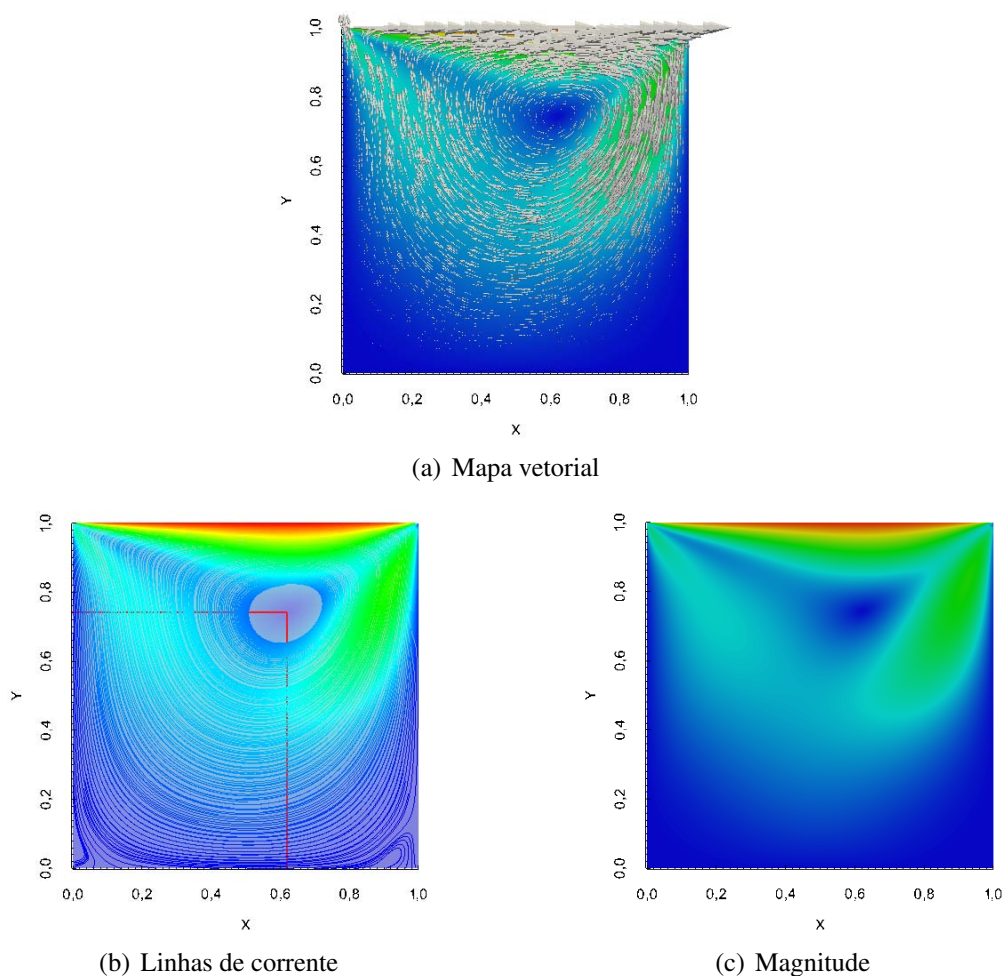


Figura 5.7: Distribuição do campo de velocidades para o problema do escoamento em cavidade com parede superior em movimento, com  $Re = 100$  e  $\tau = 50s$

Para a convergência do método numérico, considerou-se  $\Delta\tau = 10^{-3}$ , com o tempo final  $\tau = 50s$ . Assim como no problema das placas paralelas, obteve-se a solução estipulando o processamento de, no máximo,  $10^6$  iterações com erro mínimo de  $10^{-3}$ . Também, assume-se o uso de condições de contorno do tipo CLES na fronteira superior, com velocidade de escorregamento  $v_E = 1m/s$ , e CNEI nas fronteiras laterais e inferior.

Os campos de velocidades, considerando o escoamento completamente desenvolvido, para  $Re = 100$  e  $Re = 400$  são mostrados nas figuras 5.7 e 5.8, respectivamente. A variação da magnitude da velocidade pode ser observada nas figuras 5.7(c) e 5.8(c), nas quais se verificam a origem de uma região na cor azul escuro, onde os valores das velocidades são iguais ou muito próximos de zero. Nota-se, ainda, que a velocidade máxima é atingida na fronteira superior, adjacente à tampa móvel da cavidade.

Os mapas vetoriais expostos nas figuras 5.7(a) e 5.8(a) facilitam a visualização da direção e sentido do escoamento. Observa-se que na região de velocidade intermediária o

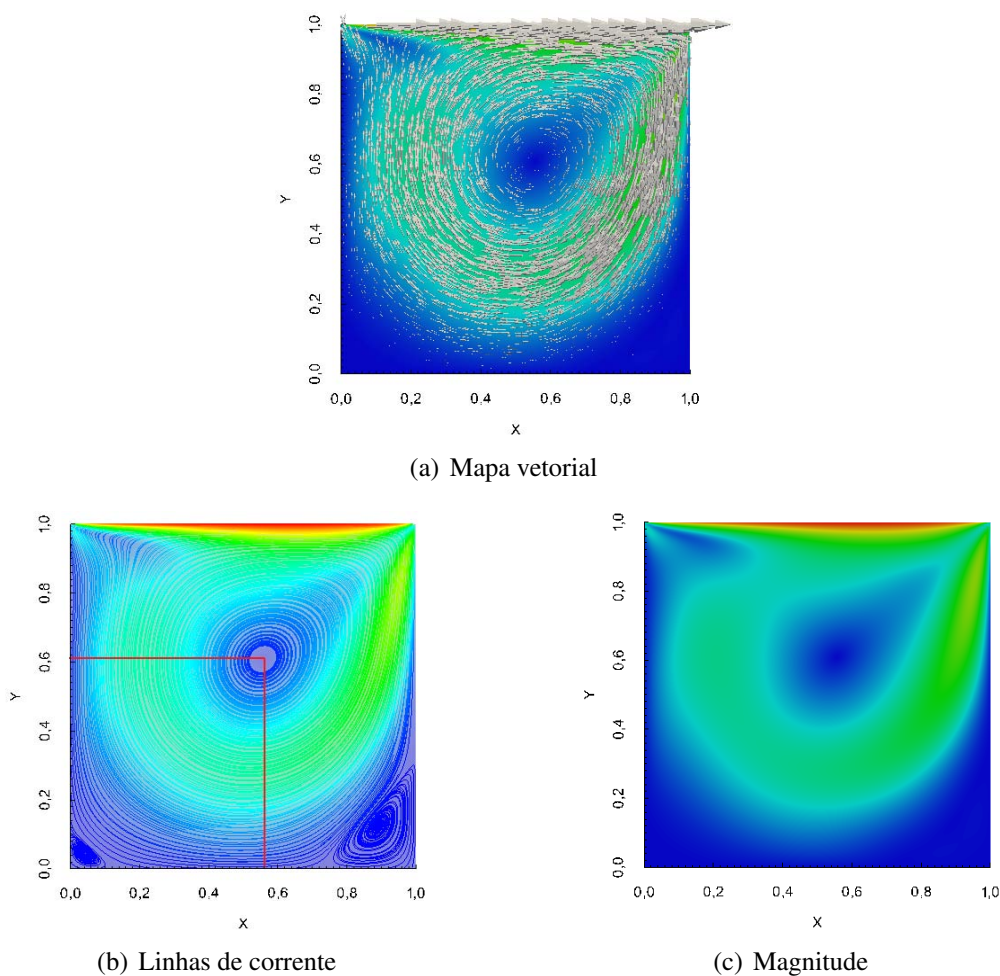


Figura 5.8: Distribuição do campo de velocidades para o problema do escoamento em cavidade com parede superior em movimento, com  $Re = 400$  e  $\tau = 50s$

fluido escoo da esquerda para a direita e para baixo, estimulando uma zona de recirculação consoante ao avanço temporal. Tal zona engloba um vórtice primário (principal), cuja localização se aproxima do centro da cavidade com o acréscimo do número de Reynolds.

A descrição das velocidades por meio das linhas de corrente, expostas nas figuras 5.7(b) e 5.8(b), permite visualizar a topologia do escoamento e torna evidente a origem de outros dois vórtices, próximos aos cantos inferiores esquerdo e direito. Por possuírem dimensões menos expressivas do que o vórtice central, esses são denominados vórtices secundários. Enquanto para  $Re = 100$  há apenas um prenúncio estrutural desses vórtices, para  $Re = 400$  o vórtice detectado no canto inferior direito já aparenta um formato definido.

As coordenadas do ponto que identifica o centro do vórtice primário obtidas para os casos em que  $Re = 100$  e  $Re = 400$  são apresentadas na tabela 5.4, comparando-as com resultados disponíveis na literatura.

Por fim, a figura 5.9 expõe o campo de velocidades, em regime permanente, para  $Re = 1000$ . Nota-se que ambos os vórtices secundários inferiores estão bem estabelecidos. Além disso, há um indicativo da formação de outro vórtice no canto superior esquerdo, o que

era de se esperar, visto que o escoamento está tendendo para um comportamento turbulento.

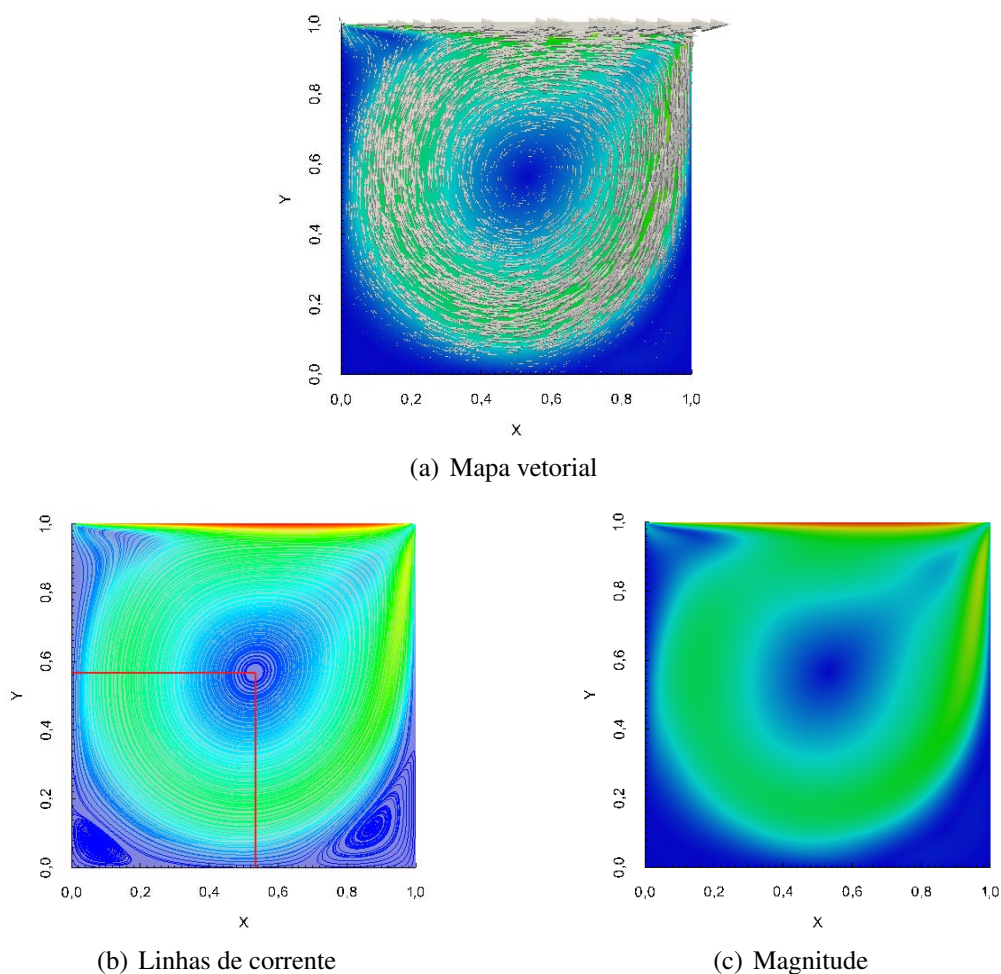


Figura 5.9: Distribuição do campo de velocidades para o problema do escoamento em cavidade com parede superior em movimento, com  $Re = 1000$  e  $\tau = 50s$

Da tabela 5.4 e das figuras 5.7 – 5.9, conclui-se que os resultados obtidos por meio deste trabalho estão em concordância com os dados obtidos por outros pesquisadores.

Tabela 5.4: Posição  $(x, y)$  do centro do vórtice primário

REFERÊNCIA	$Re = 100$	$Re = 400$
CUBISTA–FOURIER	(0.6191, 0.7386)	(0.5612, 0.6112)
BARBA [4]	(0.6109, 0.7335)	(0.5699, 0.6033)
BONO, LYRA E BONO [8]	(0.6157, 0.7373)	(0.5613, 0.6123)
GHIA, GHIA E SHIN [24]	(0.6172, 0.7344)	(0.5547, 0.6055)
GUPTA E KALITA [27]	(0.6125, 0.7375)	(0.5500, 0.6125)
HOU <i>et al</i> [34]	(0.6196, 0.7373)	(0.5608, 0.6078)
MARCHI, SUERO E ARAKI [49]	(0.6162, 0.7373)	(0.5537, 0.6054)

Em particular, relativamente ao esquema FOU, o esquema CUBISTA–FOURIER forneceu melhores resultados para  $Re = 1000$ , como pode ser observado mediante uma análise quantitativa dos valores numéricos expostos na tabela 5.5.

Tabela 5.5: Comparativo quantitativo do divergente numérico máximo entre os esquemas FOU e CUBISTA–FOURIER para o problema do escoamento em cavidade com tampa deslizante

REYNOLDS	$(\nabla \cdot \vec{U})_{num,max}$	
	FOU	FOURIER
$Re = 100$	$8.022 \times 10^{-5}$	$8.098 \times 10^{-5}$
$Re = 400$	$1.781 \times 10^{-5}$	$1.819 \times 10^{-5}$
$Re = 1000$	$6.567 \times 10^{-6}$	$6.518 \times 10^{-6}$

Ou seja, quando o termo convectivo se torna dominante nas equações governantes, o carácter não linear do esquema CUBISTA–FOURIER permite obter melhores resultados quando comparados ao esquema FOU.

### 5.3 ESCOAMENTO ENVOLVENDO PLACA DE ORIFÍCIO

Devido à sua simplicidade, baixo custo, segurança universal e ampla aplicabilidade, a placa de orifício é um dos meios mais utilizados para a medição confiável e precisa de fluxos envolvendo fluidos no estado gasoso, líquido ou até mesmo de vapor [77].

Em um duto, a medição da vazão por esse sistema consiste numa diferença de pressões, de modo que, ao ingressar na tubulação, o campo de pressão do fluido sofre uma variação brusca à medida que este se aproxima da restrição que condiz à placa de orifício de diâmetro  $H_0$ . Nesse processo, as linhas de corrente sofrem uma contração à jusante do orifício, dando origem a uma região cuja área possui um diâmetro inferior a  $H_0$ .

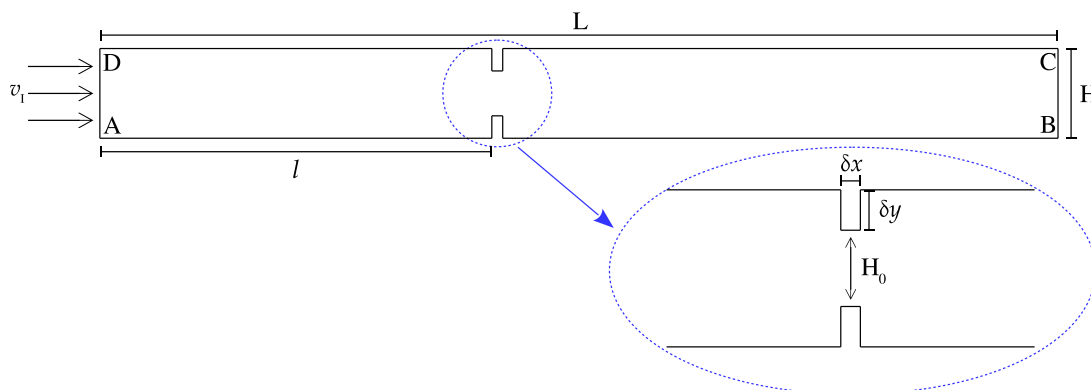


Figura 5.10: Domínio do problema do escoamento laminar através de um orifício

A geometria que retrata o domínio físico é admitida sob a forma exibida na figura 5.10, com as dimensões do duto especificadas pela altura  $H$  e comprimento  $L$  e as dimensões da placa de orifício, simétricas ao eixo central da tubulação, especificadas por  $\delta x$  e  $\delta y$  nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Inicialmente, o fluido, que se encontra em estado de repouso, é injetado para o interior da geometria através da aresta  $AD$  a uma velocidade prescrita  $v_1$ . Após percorrer uma distância  $l$ , o fluido traspasa a placa de orifício sofrendo, concomitantemente, um aumento da velocidade e diminuição na pressão. Em decorrência dessa variação, instiga-se a formação de vórtices nas regiões imediatamente acima e abaixo da *vena contracta*<sup>24</sup>. A seção de saída é representada pela aresta  $BC$ , na qual o escoamento alcança o regime permanente.

Admitindo o escoamento (incompressível) em regime permanente, a variação da pressão  $p$  – por efeito da variação da velocidade  $V$  – ao longo de uma linha de corrente é expressa pela equação de Bernoulli

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gH = \text{CONSTANTE}, \quad (5.5)$$

desde que as forças internas viscosas ou resultantes de atrito sejam desprezíveis. Na equação (5.5),  $\rho$  é a massa específica,  $g$  a força gravitacional e  $H$  a altura do duto.

O escopo desta seção é verificar a capacidade do esquema CUBISTA–FOURIER em detectar e avaliar a variação da pressão durante o escoamento no interior de um duto contendo uma placa de orifício de altura  $H_0$ , fundamentada na equação (5.5).

Para esse desígnio, dadas as paredes inferior e superior do duto, representadas pelas arestas  $AB$  e  $CD$ , respectivamente, considera-se a distância entre elas medindo  $H = 0.21m$  e comprimento  $L = 2.961m$ . As dimensões da placa de orifício, localizada a uma distância  $l = 1.26m$  da aresta  $AD$ , são  $\delta x = 0.021m$  e  $\delta y = 0.0525m$ . Logo, a altura  $H_0$  do orifício pelo qual o fluido atravessa mede  $H_0 = 0.105m$ .

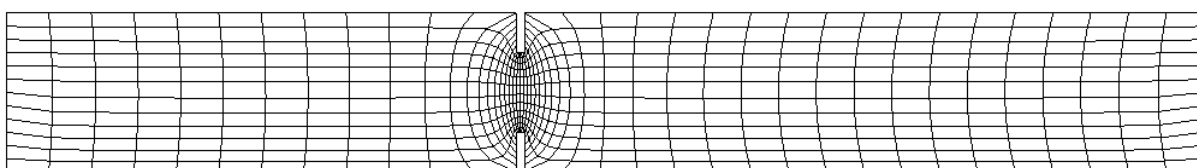


Figura 5.11: Malha do problema do escoamento envolvendo placa de orifício

Neste problema, as simulações foram feitas para uma malha com  $48 \times 12$  elementos. Para uma melhor visualização da malha na região que compreende o orifício, utilizou-se um fator de escala de 0.7 na direção  $x$  e de 1.3 na direção  $y$ . A figura 5.11 apresenta a malha já multiplicada pelo fator de escala.

<sup>24</sup>A *vena contracta*, definida por Evangelista Torricelli (1608–1647), trata-se de um estreitamento das linhas de corrente de um fluido em virtude de uma redução súbita da largura do canal de escoamento. Neste ponto do escoamento a área da seção transversal é mínima, ou seja, o diâmetro do fluxo é o menor e a velocidade é máxima.

Objetivando a convergência do método numérico e, conseqüentemente, a obtenção da solução numérica, para a malha em questão foi considerado  $\Delta\tau = 5 \times 10^{-3}$ . A solução foi obtida mediante a realização de, no máximo,  $10^6$  iterações, com erro mínimo de  $10^{-4}$ , admitindo-se o tempo final  $\tau = 100s$ .

Assume-se o uso da condição de contorno do tipo CIPR na fronteira de entrada, com  $v_I = 0.0025m/s$ , perpendicular à aresta AD. As condições do tipo CECO e CNEI são consideradas na fronteira de saída e nas fronteiras superior e inferior, respectivamente.

A figura 5.12 exhibe, via mapa de cores, o campo de velocidades obtido para o regime permanente. Logo após o fluido traspasar o orifício, duas regiões com tonalidade azul escuro são visivelmente identificadas nos cantos superior e inferior, nas quais a velocidade é nula ou muito próxima de zero, sinalizando a estruturação de vórtices. Além disso, nota-se também que, ao longo da linha de corrente central do duto, a velocidade aumenta até atingir seu valor máximo na região que contém a placa de orifício, decaindo progressivamente até alcançar a seção de saída.

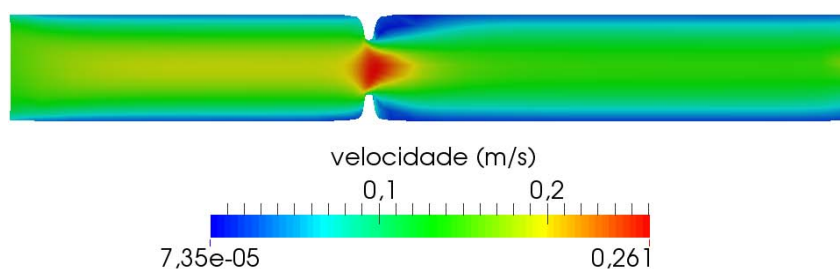
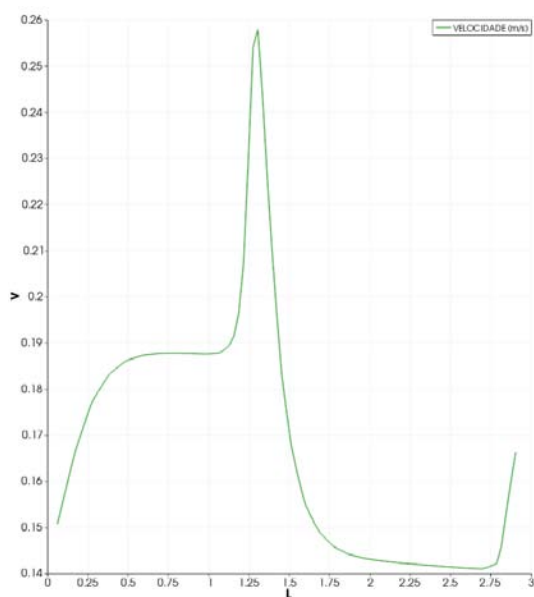


Figura 5.12: Perfil da magnitude da velocidade para o problema do escoamento envolvendo placa de orifício

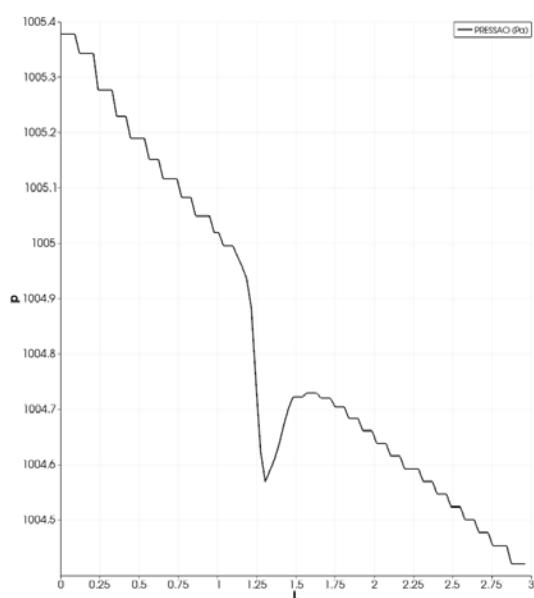
Uma melhor análise dos efeitos relativos às alterações da velocidade e da pressão, provocadas pela presença do orifício no duto, pode ser feita por artifício dos gráficos apresentados na figura 5.13. Esses representam, respectivamente, as variações da magnitude da velocidade e da pressão, ambas expressas em função do deslocamento espacial  $L$ , descrito pelo eixo das abscissas.

Na figura 5.13(a) verifica-se que, à medida que o escoamento avança ao longo do duto, a velocidade aumenta paulatinamente até se manter praticamente constante, com um valor em torno de  $0.187m/s$ . No entanto, ao se aproximar da placa de orifício, localizada a  $1.26m$  da região de injeção do fluido, a velocidade se eleva abruptamente, atingindo um valor máximo muito próximo de  $0.26m/s$ . Após o fluido traspasar o orifício, a velocidade decai continuamente até se estabilizar para valores em torno de  $0.14m/s$  para, logo em seguida, ascender a um valor máximo local de aproximadamente  $0.166m/s$ , próximo à seção de saída.

Por sua vez, na figura 5.13(b), observa-se que a pressão decresce gradativamente conforme o fluido se desloca com o avanço temporal. Ao se aproximar do ponto de abscissa  $L = 1.26m$ , o decaimento ocorre severamente até atingir um valor mínimo local, no valor de  $1004.57Pa$ . Imediatamente após atravessar a restrição imposta no duto, a pressão sofre



(a) Velocidade



(b) Pressão

Figura 5.13: Variação da velocidade e da pressão, em função do deslocamento espacial  $L$ , para o esquema CUBISTA–FOURIER, com  $\tau = 100s$

um ligeiro acréscimo, ascendendo a um valor máximo local de  $1004.73Pa$ , para então decair outra vez, progressivamente, até a seção de saída do duto.

Por fim, a tabela 5.6 compara os valores máximos assumidos pelo divergente numérico do escoamento em regime permanente calculados mediante o esquema CUBISTA–FOURIER e o esquema FOU. Não se percebeu diferenças consideráveis na comparação dos dois esquemas porque o escoamento foi simulado a baixa velocidade.

Tabela 5.6: Comparativo quantitativo do divergente numérico máximo entre os esquemas FOU e CUBISTA–FOURIER para o problema do escoamento envolvendo placa de orifício

MALHA	$(\nabla \cdot \vec{U})_{num_{max}}$	
	FOU	FOURIER
$48 \times 12$	$3.206 \times 10^{-3}$	$3.213 \times 10^{-3}$

Apesar do divergente numérico do esquema FOU estar diminutamente mais próximo de zero, o esquema CUBISTA–FOURIER também é eficaz em captar as alterações de pressão – oriundas da redução repentina da largura da tubulação por onde o fluido escoava – e, por conseguinte, reproduzir o fenômeno justificado pela equação de Bernoulli (5.5).

#### 5.4 APLICAÇÃO À HEMODINÂMICA

Atualmente, a aplicação da DFC em problemas relacionados à área médica tem se intensificado. Morris *et al* [50] fizeram uma revisão didática de métodos, benefícios e mudanças associando a DFC à medicina cardiovascular, enfatizando que as simulações numérico-computacionais já são reconhecidas pelos órgãos reguladores. Ainda, evidenciam que os investimentos em DFC oportunizam o aperfeiçoamento e o desenvolvimento de inovações no campo das aplicações. Nesta perspectiva, a correta simulação dos valores da pressão é um fator determinante na aferição de procedimentos clínicos. A questão é mensurar a viscosidade, a separação no escoamento e a turbulência, que resultam em baixa energia.

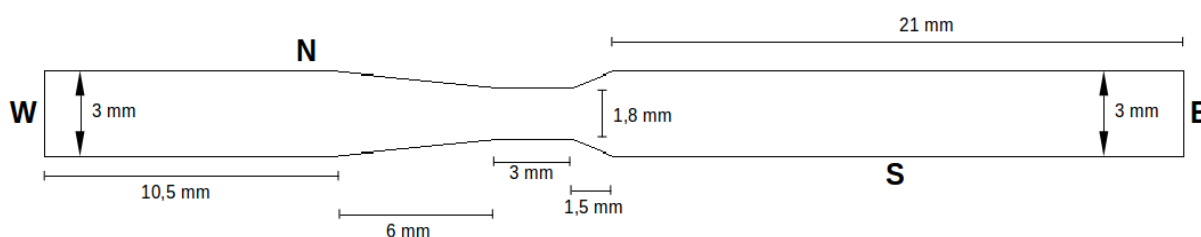


Figura 5.14: Domínio do problema do escoamento laminar aplicado à hemodinâmica

O estudo do escoamento de sangue nas artérias coronárias e seu desdobramento na saúde humana têm sido pesquisado pela comunidade científica de maneira extensiva [5, 6, 37, 63]. Especificamente, os estudos são realizados com a finalidade de medir as variações de pressão nas proximidades da estenose<sup>25</sup> associadas às recirculações (vórtices) existentes. Além disso, procura-se avaliar as tensões de cisalhamento nas paredes das artérias, no intuito de se investigar o aumento do espessamento da parede arterial, bem como desenvolver técnicas cirúrgicas que possam minimizar o risco da ocorrência da aterosclerose<sup>26</sup>.

<sup>25</sup>Estreitamento patológico de qualquer canal, conduto ou orifício orgânicos.

<sup>26</sup>Aterosclerose é uma doença inflamatória crônica caracterizada pela formação de placas, compostas especialmente por lípidos e tecido fibroso, no interior dos vasos sanguíneos.

Nesse contexto, como última aplicação deste trabalho, simulou-se o escoamento de um fluido cujos parâmetros, quando submetidos a condições apropriadas, são similares ao sangue humano. A geometria que corresponde ao domínio físico é exibida na figura 5.14, semelhante à apresentada em [5].

As simulações foram realizadas para  $Re = 211$  e  $Re = 390$ , considerando uma malha escrita no sistema de coordenadas generalizadas de  $444 \times 24$  nós, com  $\nu = 3.5 \times 10^{-6} m^2/s$ , de modo análogo aos dados apresentados em [5]. O critério de convergência adotado para o cálculo da pressão foi de  $5 \times 10^{-4}$ .

Inicialmente, parte-se de um estado de quiescência (artificial) e a evolução temporal é realizada até que o regime permanente seja estabelecido. Assume-se o uso de condições de contorno do tipo CIPR na fronteira de entrada, CECO na fronteira de saída e CNEI nas fronteiras superior e inferior, descritas pelas arestas W, E, N e S, respectivamente.

Para o caso em que  $Re = 211$ , as figuras 5.15(a) e 5.15(b) exibem, nesta ordem, os mapas de cores, da magnitude da velocidade obtida para o regime permanente, determinados pelos esquemas FOU e CUBISTA-FOURIER.

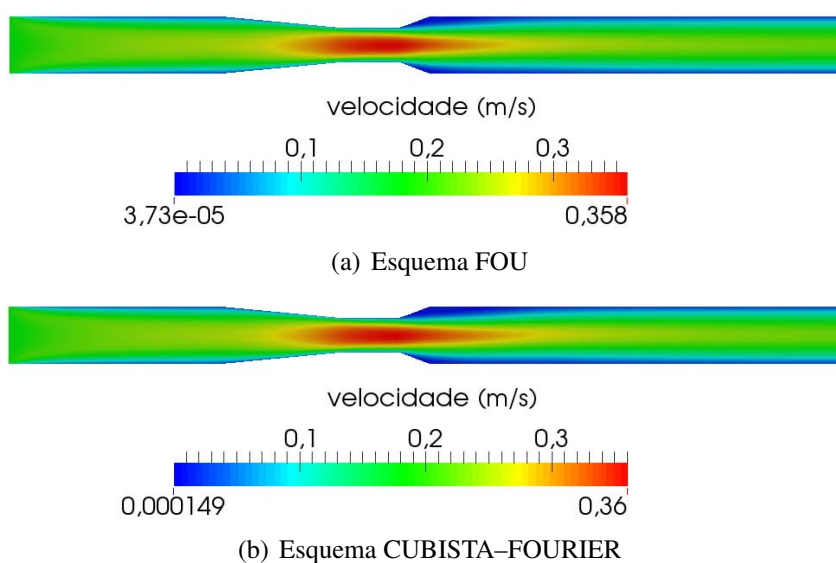
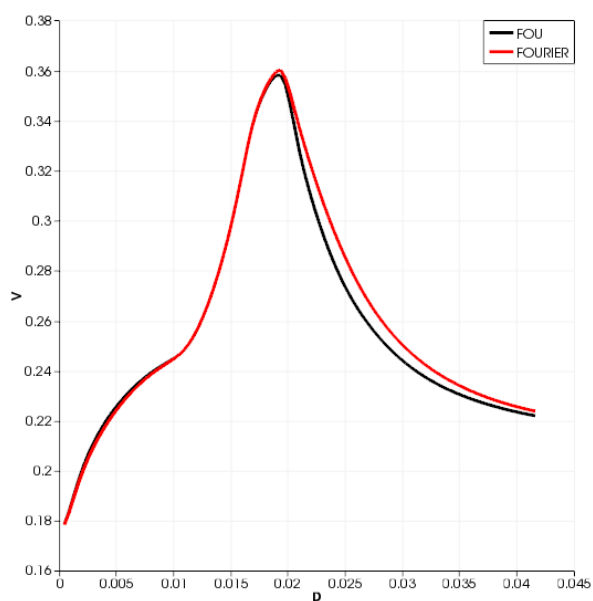


Figura 5.15: Perfil da magnitude da velocidade para o problema do escoamento aplicado à hemodinâmica, com  $Re = 211$

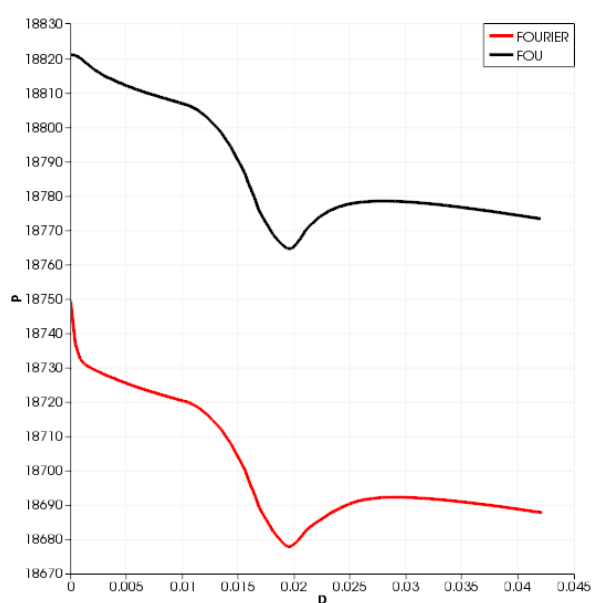
Observa-se que, visualmente, a diferença entre os perfis não é perceptível. A velocidade do fluido aumenta à medida em que este se aproxima da estenose e diminui ao se afastar da restrição. No entanto, as velocidades máximas obtidas são diferentes para cada um dos dois métodos convectivos considerados. As diferenças ficam evidenciadas tomando a linha de corrente central – linha que vai do ponto  $(0, 0.0015)$  até  $(0.042, 0.0015)$  – como pode ser observado na figura 5.16(a).

Ainda, da figura 5.16(a), nota-se que o esquema CUBISTA-FOURIER, quando comparado ao esquema FOU, exibe uma queda menos acentuada na curva que representa a variação da velocidade. Entretanto, pelos gráficos da pressão apresentados na figura 5.16(b),

pode-se notar que há uma diferença substancial entre os dois esquemas.



(a) Velocidade



(b) Pressão

Figura 5.16: Comparativo qualitativo da variação da velocidade e da pressão, em função do deslocamento espacial  $D$ , entre os esquemas FOU e CUBISTA-FOURIER, com  $Re = 211$

Para o caso em que  $Re = 390$ , aumenta-se o valor da velocidade de injeção prescrita, cujas simulações resultam nos mapas de cores para o regime permanente da magnitude da velocidade dos esquemas FOU e CUBISTA-FOURIER, exibidos nas figuras 5.17(a) e 5.17(b), respectivamente.

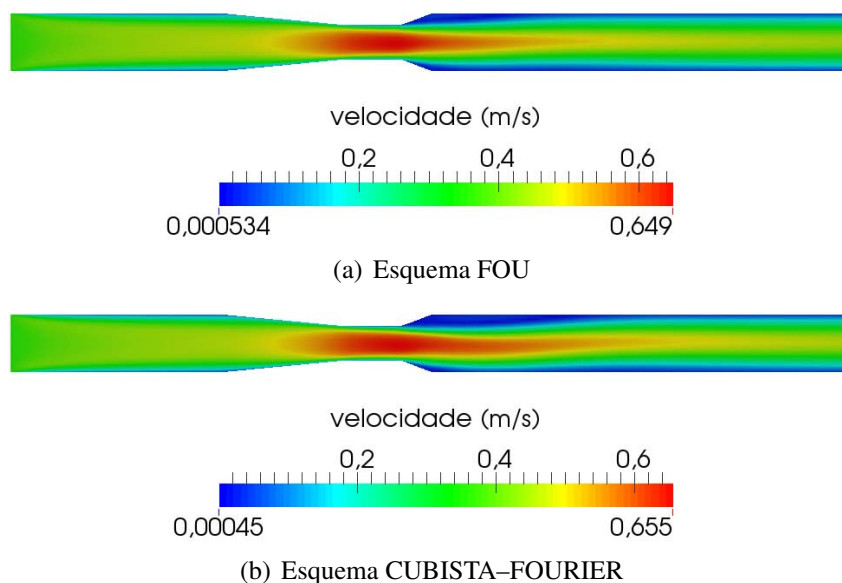


Figura 5.17: Perfil da magnitude da velocidade para o problema do escoamento aplicado à hemodinâmica, com  $Re = 390$

Analogamente ao regime anterior, para  $Re = 390$  a velocidade do fluido aumenta quando este se aproxima da estenose e decresce à medida em que se afasta da mesma. Não obstante, neste novo regime de escoamento há uma diferença perceptível entre os campos. Um jato de fluido é consolidado no centro da geometria e o vórtice principal, adjacente à parede superior, apresenta uma configuração bem definida, provocando uma separação no escoamento.

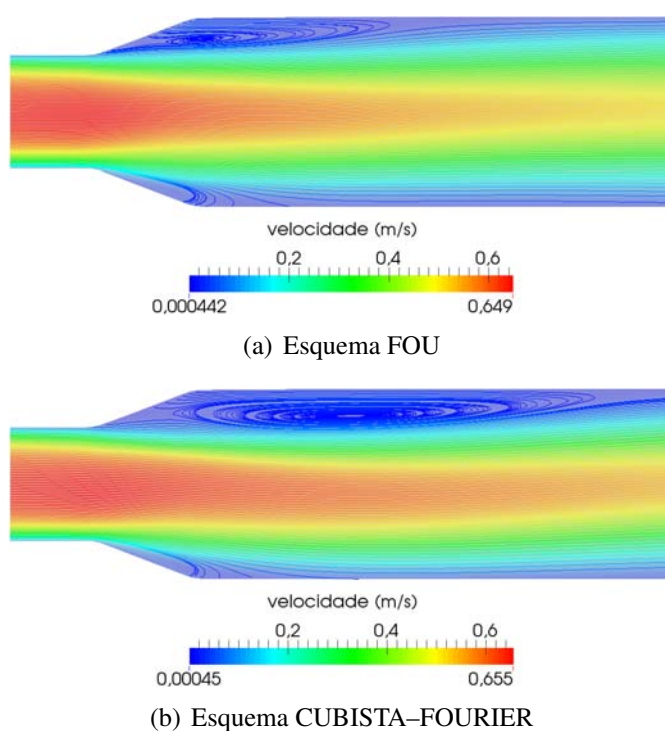


Figura 5.18: Mapa das linhas de corrente para o problema do escoamento aplicado à hemodinâmica, com  $Re = 390$

Das figuras 5.18(a) e 5.18(b), nota-se que a estrutura do vórtice principal é melhor captada pelo esquema CUBISTA–FOURIER. A busca por esse tipo de estrutura é um dos relevantes objetivos dos trabalhos previamente citados no início desta seção.

De acordo com as análises geométricas deste escoamento, depreende-se que o resultado aqui apresentado está qualitativamente de acordo com [5], logo, supõe-se que o esquema CUBISTA–FOURIER poderá ser adequadamente quantificado quando comparado a outros trabalhos.

As diferenças entre as velocidades calculadas para os dois esquemas se tornam mais evidentes neste novo regime ao se considerar a linha de centro na geometria, como pode ser observado na figura 5.19.

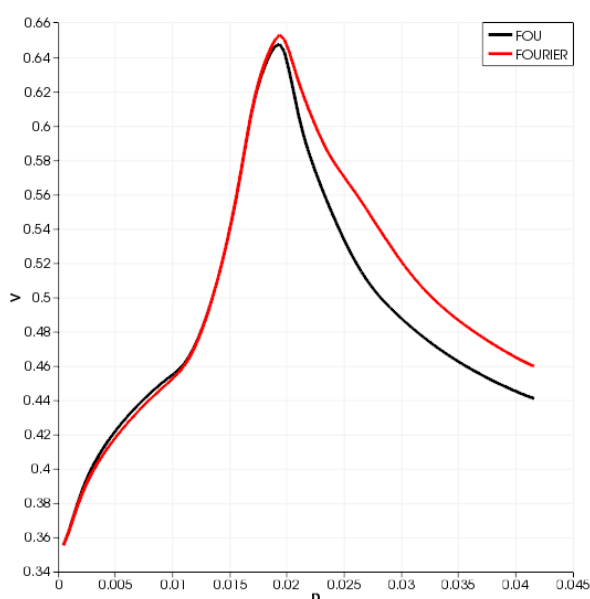


Figura 5.19: Comparativo qualitativo da variação da velocidade, em função do deslocamento espacial  $D$ , entre os esquemas FOU e CUBISTA–FOURIER, com  $Re = 390$

Na figura 5.20 é possível verificar que há uma diferença ainda mais substancial nos gráficos da pressão. Aparentemente, as curvas se comportam quase que como uma constante, mas isto não é verdade, como mostra o gráfico da figura 5.21. Salienta-se que a correta simulação dos valores da pressão é fator decisivo na calibragem de procedimentos clínicos.

Por fim, com essas simulações finais, acredita-se que o novo esquema desenvolvido via série de Fourier – CUBISTA–FOURIER – seja mais adequado nas simulações futuras por permitir captar, com mais riqueza de detalhes, estruturas mais complexas no escoamento, uma vez que as equações de Navier-Stokes são não lineares.

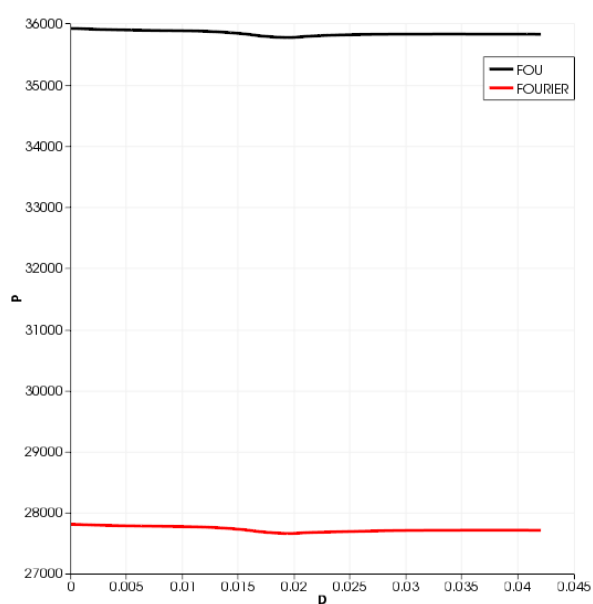


Figura 5.20: Comparativo qualitativo da variação da pressão, em função do deslocamento espacial  $D$ , entre os esquemas FOU e CUBISTA-FOURIER, com  $Re = 390$

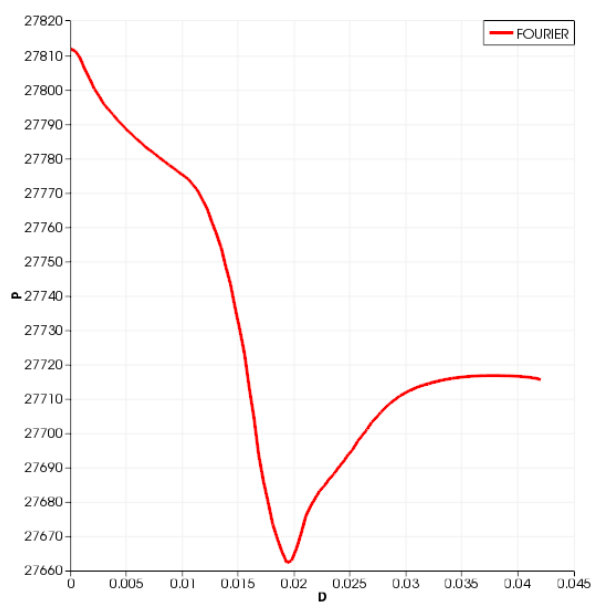


Figura 5.21: Ampliação da variação da pressão, em função do deslocamento espacial  $D$ , para o esquema CUBISTA-FOURIER, com  $Re = 390$

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo deste trabalho foi o desenvolvimento, validação e aplicação de um esquema convectivo não linear escrito em variáveis normalizadas, nomeado CUBISTA–FOURIER (*Convergent and Universally Bounded Interpolation Scheme for the Treatment of Advection via Fourier Series*), para a simulação de escoamentos bidimensionais laminares, incompressíveis e isotérmicos.

No processo de modelagem dos problemas discutidos no capítulo 5, tomou-se por base as equações matemáticas fundamentadas nas premissas físicas de conservação de massa e momento, discretizando-as por intermédio do MDF.

Embora os problemas apresentados nas seções 5.1 – 5.3 possam ser resolvidos por meio de métodos fundamentados no sistema cartesiano de coordenadas, esses foram resolvidos em coordenadas generalizadas, dado que o primeiro sistema de coordenadas é uma particularidade do segundo. Entretanto, assim como no problema da hemodinâmica, os resultados serviram para verificar a eficiência do esquema proposto.

Observou-se que, apesar de exigir maior custo computacional, as soluções obtidas para os problemas em estudo estão em concordância com os resultados apresentados pela comunidade científica em DFC e, portanto, são consideradas satisfatórias. Em especial, o esquema numérico CUBISTA–FOURIER detectou de forma adequada o salto na velocidade e pressão, para o caso do problema do escoamento envolvendo uma placa de orifício, além de identificar corretamente os vórtices gerados nos problemas do escoamento em cavidade com tampa deslizante e da aplicação à hemodinâmica.

Destaca-se que o esquema CUBISTA–FOURIER permitiu captar vórtices e campos vetoriais com maior riqueza de detalhes, quando comparado ao esquema FOU. Entende-se que isto se deve ao fato da não linearidade peculiar do esquema, o que implica em uma melhor precisão numérica, como mencionado no capítulo 3. Em contrapartida, percebeu-se que o tempo final de simulação para a obtenção da solução foi substancialmente maior.

Como sugestão para trabalhos futuros, pode-se desenvolver uma análise quantitativa e qualitativa entre os resultados obtidos neste trabalho e os obtidos pelo esquema CUBISTA, do qual o esquema CUBISTA–FOURIER foi derivado. É possível, também, estender todo o estudo desenvolvido neste trabalho para o caso de escoamentos tridimensionais e/ou turbulentos, objetivando, concomitantemente, validá-lo conforme resultados disponíveis na literatura e verificar sua competitividade do ponto de vista de eficiência computacional, mais precisamente do tempo de simulação.

## REFERÊNCIAS

- [1] ALVES, M. A.; OLIVEIRA, P. J.; PINHO, F. T. A convergent and universally bounded interpolation scheme for the treatment of advection. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 41, n. 1, p. 47–75, jan. 2003.
- [2] ANDERSON JUNIOR, J. D. *Computational fluid dynamics: the basics with applications*. Nova Iorque: McGraw–Hill, 1995. (McGraw–Hill Series in Mechanical Engineering).
- [3] \_\_\_\_\_. Explicit finite difference methods: some selected applications to inviscid and viscous flows. In: WENDT, J. F. (Ed.). *Computational fluid dynamics: an introduction*. 3. ed. Berlim: Springer, 2009. p. 127–149.
- [4] BARBA, A. N. D. *Estudo e implementação de esquema upwind na resolução de um modelo de dinâmica dos fluidos computacional em coordenadas generalizadas*. 2015. 117 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional), Universidade Estadual de Londrina – UEL, Londrina.
- [5] BERNAD, S. I. *et al.* Particle Hemodynamics analysis after coronary angioplasty. In: IA-ENG. (Org.). *Proceedings of the World Congress on Engineering 2010*. Londres: Newswood Limited, 2010. v. 1. p. 583–588.
- [6] \_\_\_\_\_. *et al.* Clinical important hemodynamic characteristics for serial stenosed coronary artery. *International Journal of Design & Nature and Ecodynamics*, v. 10, n. 2, p. 97–113, jun. 2015.
- [7] BLAZEK, J. *Computational fluid dynamics: principles and applications*. 2. ed. Amsterdã: Elsevier, 2006.
- [8] BONO, G.; LYRA, P. R. M.; BONO, G. F. F. Solução numérica de escoamentos incompressíveis com simulação de grandes escalas. *Mecânica Computacional*, v. 30, n. 16, p. 1423–1440, nov. 2011.
- [9] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. Tradução de Valéria de Magalhães Iorio. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2005.
- [10] BRANDI, A. C. *Estratégias “upwind” e modelagem  $\kappa - \varepsilon$  para simulação numérica de escoamentos com superfícies livres em altos números de Reynolds*. 2005. 88 f. Dissertação (Mestrado em Ciências da Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC, Universidade de São Paulo – USP, São Carlos.

- [11] BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Numerical analysis*. 9. ed. Boston: Brooks/Cole, 2010.
- [12] CANDEZANO, M. A. C. *Desenvolvimento de esquema upwind para equações de conservação e implementação de modelagens URANS com aplicação em escoamentos incompressíveis*. 2012. 194 f. Tese (Doutorado em Ciências da Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC, Universidade de São Paulo – USP, São Carlos.
- [13] COURANT, R.; ISAACSON, E.; REES, M. On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, v. 5, n. 3, p. 243–255, ago. 1952.
- [14] ÇENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. *Mecânica dos fluidos: fundamentos e aplicações*. Tradução de Katia Aparecida Roque e Mario Moro Fecchio. São Paulo: McGraw–Hill, 2011.
- [15] DATE, A. W. *Introduction to computational fluid dynamics*. Cambridge: Cambridge University, 2005.
- [16] FERREIRA, V. G. *Análise e implementação de esquemas de convecção e modelos de turbulência para simulação de escoamentos incompressíveis envolvendo superfícies livres*. 2001. 184 f. Tese (Doutorado em Ciências da Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC, Universidade de São Paulo – USP, São Carlos.
- [17] FERZIGER, J. H.; PERIĆ, M. *Computational methods for fluid dynamics*. 3. ed. rev. Berlim: Springer, 2002.
- [18] FIGUEIREDO, D. G. DE. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. Rio de Janeiro: IMPA, 1977. (Projeto Euclides).
- [19] FLETCHER, C. A. J. *Computational techniques for fluid dynamics: specific techniques for different flow categories*. 2. ed. Berlim: Springer, 1991. v.2. (Scientific Computation).
- [20] FOIAS, C. *et al. Navier-Stokes equations and turbulence*. Cambridge: Cambridge University, 2001. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, v. 83).
- [21] FORNBERG, B. *A practical guide to pseudospectral methods*. Cambridge: Cambridge University, 1996. (Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, v.1).
- [22] FORTUNA, A. DE O. *Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações*. 2. ed. São Paulo: EdUSP, 2012.

- [23] GASKELL, P. H.; LAU, A. K. C. Curvature-compensated convective transport: SMART, a new boundedness-preserving transport algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 8, n. 6, p. 617–641, jun. 1988.
- [24] GHIA, U.; GHIA, K. N.; SHIN, C. T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, v. 48, n. 3, p. 387–411, dez. 1982.
- [25] GRIEBEL, M.; DORNSEIFER, T.; NEUNHOEFFER, T. *Numerical simulation in fluid dynamics: a practical introduction*. Filadélfia: SIAM, 1997. (SIAM Monographs on Mathematical Modeling and Computation, v.3).
- [26] GUINOT, V. *Godunov-type schemes: an introduction for engineers*. Amsterdã: Elsevier, 2003.
- [27] GUPTA, M. M.; KALITA, J. C. A new paradigm for solving Navier-Stokes equations: streamfunction-velocity formulation. *Journal of Computational Physics*, v. 207, n. 1, p. 52–68, jul. 2005.
- [28] HARLOW, F. H.; WELCH, J. E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *The Physics of Fluids*, v. 8, n. 12, p. 2182–2189, dez. 1965.
- [29] HARTEN, A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, v. 49, n. 3, p. 357–393, mar. 1983.
- [30] ———. On a class of high resolution total-variation-stable finite-difference schemes. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 21, n. 1, p. 1–23, fev. 1984.
- [31] ———. *et al.* On finite-difference approximations and entropy conditions for shocks. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, v. 29, n. 3, p. 297–322, maio 1976.
- [32] HIRSCH, C. *Numerical computation of internal and external flows: fundamentals of numerical discretization*. Chichester: Wiley, 1994a. v. 1. (Wiley Series in Numerical Methods in Engineering).
- [33] ———. *Numerical computation of internal and external flows: computational methods for inviscid and viscous flows*. Chichester: Wiley, 1994b. v. 2. (Wiley Series in Numerical Methods in Engineering).
- [34] HOU, S. *et al.* Simulation of cavity flow by the lattice Boltzmann method. *Journal of Computational Physics*, v. 118, n. 2, p. 329–347, maio 1995.
- [35] HUSSAINI, M. Y.; LEER, B. V.; ROSENDALE, J. V. (Ed.). *Upwind and high-resolution schemes*. Berlin: Springer, 1997.

- [36] JAKOBSEN, H. A. *Chemical reactor modeling: multiphase reactive flows*. 2. ed. Cham: Springer, 2014.
- [37] JOHNSTON, B. M. *et al.* Non-Newtonian blood flow in human right coronary arteries: transient simulations. *Journal of Biomechanics*, v. 39, n. 6, p. 1116–1128, 2006.
- [38] KARL, J. H. *An introduction to digital signal processing*. San Diego: Academic Press, 1989.
- [39] KEMM, F. A comparative study of TVD-limiters: well-known limiters and an introduction of new ones. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 67, n. 4, p. 404–440, out. 2011.
- [40] LEER, B. V. ICASE and the history of high-resolution schemes. In: HUSSAINI, M. Y.; LEER, B. V.; ROSENDALE, J. V. (Ed.). *Upwind and high-resolution schemes*. Berlin: Springer, 1997. p. 1–7.
- [41] LEONARD, B. P. A stable and accurate convective modelling procedure based on quadratic upstream interpolation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 19, n. 1, p. 59–98, jun. 1979.
- [42] ———. Simple high-accuracy resolution program for convective modelling of discontinuities. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 8, n. 10, p. 1291–1318, out. 1988.
- [43] LEVEQUE, R. J. *Finite volume methods for hyperbolic problems*. Cambridge: Cambridge University, 2002. (Cambridge Texts in Applied Mathematics).
- [44] ———. *Numerical methods for conservation laws*. 2. ed. Basel: Birkhäuser, 1992. (Lectures in Mathematics. ETH Zürich).
- [45] LIMA, E. L. *Curso de análise*. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. v. 1. (Projeto Euclides).
- [46] LIMA, G. A. B. DE. *Desenvolvimento de estratégias de captura de descontinuidades para leis de conservação e problemas relacionados em dinâmica dos fluidos*. 2010. 211 f. Dissertação (Mestrado em Ciências da Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC, Universidade de São Paulo – USP, São Carlos.
- [47] LIN, H.; CHIENG, C.–C. Characteristic-based flux limiters of an essentially third-order flux-splitting method for hyperbolic conservation laws. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 13, n. 3, p. 287–307, jul. 1991.

- [48] MALISKA, C. R. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional: fundamentos e coordenadas generalizadas*. Rio de Janeiro: LTC, 1995.
- [49] MARCHI, C. H.; SUERO, R.; ARAKI, L. K. The lid-driven square cavity flow: numerical solution with a 1024 x 1024 grid. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 31, n. 3, p. 186–198, jul./set. 2009.
- [50] MORRIS, P. D. *et al.* Computational fluid dynamics modelling in cardiovascular medicine. *Heart*, v. 102, n. 1, p. 18–28, jan. 2016.
- [51] MOUKALLED, F.; MANGANI, L.; DARWISH, M. *The finite volume method in computational fluid dynamics: an advanced introduction with OpenFOAM and Matlab*. Cham: Springer, 2015. (Fluid Mechanics and Its Applications, v. 113).
- [52] MUNSON, B. R.; YOUNG, D. F.; OKIISHI, T. H. *Fundamentos da mecânica dos fluidos*. Tradução de Euryale de Jesus Zerbini. São Paulo: Edgard Blücher, 2004.
- [53] OISHI, C. M. *Análise e implementação de métodos implícitos no sistema FreeFlow2D*. 2004. 162 f. Dissertação (Mestrado em Ciências da Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC, Universidade de São Paulo – USP, São Carlos.
- [54] PATANKAR, S. V. *Numerical heat transfer and fluid flow*. [Nova Iorque]: CRC, 1980. (Series in Computational Methods in Mechanics and Thermal Sciences).
- [55] PEIXOTO, P. DA S. *Análise de discretizações e interpolações em malhas icosaédricas e aplicações em modelos de transporte semi-lagrangianos*. 2013. 241 f. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) – Instituto de Matemática e Estatística – IME, Universidade de São Paulo – USP, São Paulo.
- [56] PEREIRA, J. M. C.; KOBAYASHI, M. H.; PEREIRA, J. C. F. A fourth-order-accurate finite volume compact method for the incompressible Navier-Stokes solutions. *Journal of Computational Physics*, v. 167, n. 1, p. 217–243, fev. 2001.
- [57] PETRILA, T.; TRIF, D. *Basics of fluid mechanics and introduction to computational fluid dynamics*. Boston: Springer, 2005. (Numerical Methods and Algorithms, v. 3).
- [58] PINTO, J. C.; LAGE, P. L. DA C. *Métodos numéricos em problemas de engenharia química*. Rio de Janeiro: e-papers, 2001. (Série Escola Piloto de Engenharia Química).
- [59] PLETCHER, R. H.; TANNEHILL, J. C.; ANDERSON, D. A. *Computational fluid mechanics and heat transfer*. 3. ed. Boca Raton: CRC, 2012. (Series in Computational and Physical Processes in Mechanics and Thermal Sciences).

- [60] PRITCHARD, P. J.; FOX, R. W.; MCDONALD, A. T. *Introduction to fluid mechanics*. 8. ed. [Nova Iorque]: Wiley, 2011.
- [61] PULLIAM, T. H.; ZINGG, D. W. *Fundamental algorithms in computational fluid dynamics*. Cham: Springer, 2014. (Scientific Computation).
- [62] QUEIROZ, R. A. B. DE. *Desenvolvimento e teste de esquemas “upwind” de alta resolução e suas aplicações em escoamentos incompressíveis com superfícies livres*. 2009. 157 f. Dissertação (Mestrado em Ciências da Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC, Universidade de São Paulo – USP, São Carlos.
- [63] RAZAVI, S. E.; ZANBOURI, R.; ARJMANDI-TASH, O. Simulation of blood flow coronary artery with consecutive stenosis and coronary-coronary bypass. *BioImpacts*, v. 1, n. 2, p. 99–104, ago. 2011.
- [64] ROE, P. A brief introduction to high-resolution schemes. In: HUSSAINI, M. Y.; LEER, B. V.; ROSENDALE, J. V. (Ed.). *Upwind and high-resolution schemes*. Berlin: Springer, 1997. p. 9–28.
- [65] SARTORI, P. *Um esquema upwind polinomial por partes para problemas em mecânica dos fluidos*. 2011. 149 f. Dissertação (Mestrado em Ciências da Computação e Matemática Computacional) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC, Universidade de São Paulo – USP, São Carlos.
- [66] SCHÄFER, M. *Computational engineering: introduction to numerical methods*. Berlin: Springer, 2006.
- [67] SHAH, A.; YUAN, L. Flux-difference splitting-based upwind compact schemes for the incompressible Navier-Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 61, n. 5, p. 552–568, out. 2009.
- [68] SHEU, T. W. H.; LIN, R. K. Newton linearization of the incompressible Navier-Stokes equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 44, n. 3, p. 297–312, jan. 2004.
- [69] SHIH, T. M.; TAN, C. H.; HWANG, B. C. Effects of grid staggering on numerical schemes. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 9, n. 2, p. 193–212, fev. 1989.
- [70] SHU, C.-W.; OSHER, S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. *Journal of Computational Physics*, v. 77, n. 2, p. 439–471, ago. 1988.
- [71] SOD, G. A. *Numerical methods in fluid dynamics: initial and initial boundary-value problems*. Cambridge: Cambridge University, 1985.

- [72] SONG, B.; AMANO, R. S. A higher-order bounded discretization scheme. In: AMANO, R. S.; SUNDÉN, B. (Ed.). *Computational fluid dynamics and heat transfer: emerging topics*. Southampton: WIT, 2010. p. 3–18.
- [73] ———. *et al.* On a higher-order bounded discretization scheme. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 32, n. 7, p. 881–897, abr. 2000.
- [74] SPIEGEL, M. R. *Análise de Fourier*. Tradução de Alfredo Alves de Farias. São Paulo: McGraw–Hill, 1976. (Coleção Schaum).
- [75] SWEBY, P. K. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 21, n. 5, p. 995–1011, out. 1984.
- [76] THOMPSON, J. F.; WARSI, Z. U. A.; MASTIN, C. W. *Numerical grid generation: foundations and applications*. [S.l.]: North-Holland, 1985.
- [77] VALLE, R. M. *Escoamento laminar em placas de orifício: análise teórica e experimental em regime permanente e transiente*. 1995. 276 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC, Florianópolis.
- [78] VÁSQUEZ–CENDÓN, M. E. *Solving hyperbolic equations with finite volume methods*. Cham: Springer, 2015. (UNITEXT, v. 90).
- [79] VERSTEEG, H. K.; MALALASEKERA, W. *An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*. 2. ed. Harlow: Prentice Hall, 2007.
- [80] WARMING, R. F.; BEAM, R. M. Upwind second-order difference schemes and applications in aerodynamic flows. *The American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, v. 14, n. 9, p. 1241–1249, set. 1976.
- [81] WATERSON, N. P.; DECONINCK, H. Design principles for bounded higher-order convection schemes: a unified approach. *Journal of Computational Physics*, v. 224, n. 1, p. 182–207, maio 2007.
- [82] WESSELING, P. *Principles of computational fluid dynamics*. Berlim: Springer, 2001. (Springer Series in Computational Mathematics, v. 29).
- [83] WHITE, F. M. *Mecânica dos fluidos*. Tradução de Mario Moro Fecchio e Nelson Manzares Filho. 6. ed. São Paulo: McGraw–Hill, 2011.
- [84] ZHAO, W. A high-order upwind method for convection-diffusion equations with the Neumann boundary condition. In: CHEN, Z.; EWING, R. E.; SHI, Z.–C. (Ed.). *Numerical treatment of multiphase flows in porous media*. Berlim: Springer, 2000. p. 430–440. (Lecture Notes in Physics, v. 552).
- [85] ZIKANOV, O. *Essential computational fluid dynamics*. Nova Jersey: Wiley, 2010.