



UNIVERSIDADE
ESTADUAL de LONDRINA

EDUARDO CAROLENSKY JUNIOR

**TEORIA DE PERTURBAÇÕES COSMOLÓGICAS
LINEARES**

Londrina
2016

EDUARDO CAROLENSKY JUNIOR

**TEORIA DE PERTURBAÇÕES COSMOLÓGICAS
LINEARES**

Dissertação de Mestrado apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Thiago dos Santos Pereira

Londrina

2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Carolensky Junior, Eduardo.

Teoria de perturbações cosmológicas lineares / Eduardo Carolensky Junior. - Londrina, 2016.

81 f.

Orientador: Thiago dos Santos Pereira.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2016.

Inclui bibliografia.

1. Cosmologia - Teses. 2. Relatividade Geral - Teses. 3. Perturbação - Teses. 4. Equações de Einstein - Teses. I. Pereira, Thiago dos Santos. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

EDUARDO CAROLENSKY JUNIOR

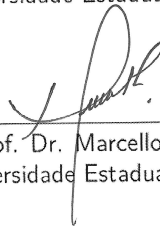
**TEORIA DE PERTURBAÇÕES COSMOLÓGICAS
LINEARES**

Dissertação de Mestrado apresentado ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

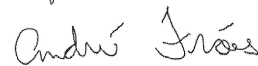
BANCA EXAMINADORA



Orientador: Prof. Dr. Thiago dos Santos Pereira
Universidade Estadual de Londrina - UEL



Prof. Dr. Marcello Ferreira da Costa
Universidade Estadual de Londrina - UEL



Prof. Dr. André Luis Delvas Fróes
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 04 de fevereiro de 2016.

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Dr. Thiago dos Santos Pereira pela orientação nestes dois anos de mestrado, aos colegas Renan Alves de Oliveira e Felipe Oliveira Franco, pelas discussões e sugestões durante a elaboração deste estudo. Agradeço a minha família, esposa Regiane, filhas Isabela e Larissa, netos Mateus e Julia e a enteada Ana Flávia pela paciência que tiveram comigo durante esta jornada. Agradeço também ao CNPq/CAPES por prover o suporte financeiro para a realização deste trabalho.

Persistência.

CAROLENSKY JUNIOR, Eduardo. **Teoria de perturbações cosmológicas lineares**. 2016. 81 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Física) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

Resumo

O objetivo deste trabalho é entender diversos conceitos associados a cosmologia. Iremos estudar as equações de Friedmann, e também calcular algumas quantidades tais como: a idade do universo, a época da equivalência entre a radiação-matéria, a época da recombinação, e redshifts associados a esses períodos. Vamos explorar alguns conceitos básicos da teoria relativística de perturbações cosmológicas lineares, verificando suas equações e aplicando-as a um modelo cosmológico, a fim de se obter uma visão geral da formação das grandes estruturas do universo. Utilizando o princípio cosmológico e introduzindo pequenas perturbações à métrica Friedmann-Robertson-Walker, obteremos as perturbações das equações de Einstein linearizadas. Teremos então a evolução de potenciais gravitacionais e entropia, com a finalidade de verificarmos as dinâmicas de diferentes modos de Fourier na era da radiação e da matéria.

Palavras-chave: Cosmologia. Relatividade geral. Perturbação. Equações de Einstein.

CAROLENSKY JUNIOR, Eduardo. **Linear theory of cosmological perturbations**. 2016. 81 p. Masters Dissertation (Master in Physics) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

Abstract

The goal of this work is to understand various concepts associated with cosmology. We will study the Friedmann equations, and calculate some quantities such as, the age of the universe, the time of equivalence between the radiation-matter, the time of recombination, and redshifts associated with these periods. We will explore some basic concepts of the relativistic theory of linear cosmological perturbations, checking its equations and applying them to a cosmological model in order to obtain an overview of the formation of large structures of the universe. Using the cosmological principle and introducing small perturbations to the Friedmann-Robertson-Walker metric, we obtain perturbations of the linearized Einstein equations. Then we have the evolution of gravitational potential and entropy, in order as to check the dynamics of different Fourier modes in the era of radiation and matter.

Keywords: Cosmology. General relativity. Perturbation. Einstein's equations.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Evolução das coordenadas comóveis em um universo em expansão.	26
Figura 2 – Linha de mundo: evolução de um determinado evento ao longo do espaço-tempo.	27
Figura 3 – Propagação de um raio de luz num plano comóvel (χ, η)	29
Figura 4 – Cone de Luz (o eixo z foi suprimido).	30
Figura 5 – Relações entre dois eventos.	30
Figura 6 – Ondas de pequeno e grande comprimentos de onda.	32
Figura 7 – Diferentes regimes no universo.	40
Figura 8 – Interação entre fluidos cosmológicos.	54
Figura 9 – Potencial gravitacional com condições iniciais adiabáticas.	61
Figura 10 – Potencial gravitacional com entropia e condições iniciais de isocurvatura.	64
Figura 11 – Contraste de densidade com condições iniciais adiabáticas - entre $(-1,1)$	65
Figura 12 – Módulo do Contraste de densidade com condições iniciais adiabáticas, com entropia	65

Sumário

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	Princípio Cosmológico	22
1.2	Métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)	23
1.3	Coordenadas e tempos	25
1.3.1	Eventos, horizontes, raio de Hubble, ondas de grande e pequeno comprimento	27
1.3.2	Redshift	32
1.3.3	Tensor de Fluido Perfeito	33
1.4	Equações de Friedmann	34
1.4.1	Soluções para a equação de Friedmann.	35
2	TEORIA DE PERTURBAÇÃO COSMOLÓGICA LINEAR	43
2.1	Parametrização das Perturbações	44
2.1.1	Perturbações	44
2.1.2	Transformações de gauge e variáveis invariantes de gauge	46
2.1.3	Equações para perturbações cosmológicas, em modos escalares	49
2.1.4	Perturbações da equação de conservação de um fluido	52
2.1.5	Evolução das perturbações	53
2.1.6	Mistura de diversos fluidos	53
2.1.7	Modos adiabáticos e de isocurvaturas	56
2.1.8	Mistura de dois fluidos perfeitos	57
2.1.9	Estudos sobre a evolução das perturbações num universo com radiação e matéria.	60
3	CONCLUSÃO	67
	REFERÊNCIAS	69
	APÊNDICES	71
	APÊNDICE A – QUANTIDADES E RELAÇÕES ÚTEIS	73

1 Introdução

A Cosmologia é o estudo do universo como um todo: sua evolução, composição e dinâmica. Um dos principais objetivos dos estudos em cosmologia é entender a formação e evolução das estruturas em grandes escalas, tais como as galáxias e seus aglomerados. A cosmologia fornece também um ponto de partida para o estudo do desenvolvimento de todas as estruturas de pequenas escalas que surgiram com a expansão do universo, até as grandes estruturas que temos hoje. Além disso, os astrônomos começaram a ter condições de estudar, baseados em dados observacionais, através de satélites, como por exemplo o WMAP¹ e Planck², evidências que são compatíveis com o modelo do big-bang.

De acordo com os dados do satélite Planck, o universo observável surgiu há $13,813 \pm 0,038$ bilhões de anos [1], evoluindo a partir de um estado inicial extremamente denso e quente. Com a sua expansão, a densidade e temperatura média do plasma primordial diminuiu até que, transcorridos cerca de 380 mil anos, a temperatura caiu a ponto de permitir que elétrons e prótons pudessem se ligar e formar os primeiros átomos neutros de hidrogênio. Esse período chamado de recombinação, que é o processo de formação de átomos neutros, a partir de uma combinação entre um próton e um elétron, confinados ao redor de núcleos atômicos, os elétrons passaram a interagir menos com os fótons, reduzindo assim a opacidade do plasma primordial, fazendo com que os raios de luz começassem a se propagar livremente pelo universo. O universo tornou-se então transparente à radiação eletromagnética.

O conteúdo do universo se resume ao que observamos, ou seja, matéria convencional, ou bariônica, e radiação? Em 1933, o astrônomo suíço Fritz Zwicky (1898-1974) provou que não. Para chegar a este resultado ele comparou velocidades observadas de galáxias do aglomerado de Coma com velocidades calculadas a partir da massa total do aglomerado. A massa total foi deduzida a partir da relação entre massa e luminosidade. Fazendo a suposição de que a luminosidade é comparável ao de populações estelares conhecidas, Zwicky chegou à conclusão de que para explicar as velocidades significativas das galáxias do aglomerado, esta estrutura deveria ser muito mais massiva, mais do que sugeria sua luminosidade. Como parte do aglomerado não fornecia a luminosidade para chegar a massa necessária para justificar a velocidade observada, essa massa, segundo Zwicky, deveria ser formada por matéria escura [2]. A matéria escura seria uma hipotética forma de matéria, de natureza desconhecida e ainda não foi detectada em laboratórios ou em aceleradores de partículas. Físicos e cosmólogos, no entanto, esboçaram de forma geral suas propriedades: são eletricamente neutras, interagem pouco com a matéria convencional, não interagem com fótons, foram produzidas em abundância no início do universo e interagem gravitacionalmente com a matéria convencional [3]. A matéria escura permeia todo universo, parece frustrante fundamentar tantas observações cosmológicas num

¹ Site oficial: <http://map.gsfc.nasa.gov/>

² Site oficial: <http://sci.esa.int/planck/>

elemento não detectado diretamente e que nem se sabe se um dia será detectado, mas, não resta mais dúvida de que a matéria escura existe. Pela forma como ela influi na estrutura do universo pode-se constatar, com precisão, e por vários métodos diferentes, a sua existência de forma implícita [2].

Mas o universo não se resume a matéria convencional, radiação e a matéria escura. Temos também a energia escura, representada pela constante cosmológica Λ . A energia escura é uma forma hipotética de energia que estaria distribuída por todo espaço e tende a acelerar a expansão do universo cuja principal característica é ter uma pressão negativa. De acordo com a teoria da relatividade, o efeito de tal pressão negativa seria semelhante, qualitativamente, a uma força que age em larga escala em oposição à gravidade. Tal efeito é utilizado para explicar as observações que apontam para um universo em expansão acelerada. A determinação da natureza da energia escura, assim como da matéria escura, é um dos maiores desafios atuais da física. Einstein introduziu esta constante na sua equação com o objetivo de se obter um universo estático, para o modelo cosmológico vigente naquela época. Em 1929, Edwin Hubble descobriu que o universo estava se expandindo, o que levou Einstein a abandonar a ideia da constante. A situação mudou novamente com o passar dos anos, após a comprovação de que o universo está se expandido de forma acelerada, então, a constante voltou a fazer parte das equações de Einstein [4], como vemos na Eq. (A.32).

Na composição do universo, temos que a energia escura contribui com 68,5%, a matéria escura com 26,6%, a matéria convencional com 4,9% [1] e a radiação com $9,2 \cdot 10^{-3}\%$ (valor calculado no item *d* da seção 1.4.1). Este cenário é conhecido como modelo cosmológico Λ CDM (Lambda Cold Dark Matter). O termo matéria escura fria (cold dark matter), está relacionada ao fato de que sua velocidade é não relativística.

O Modelo Cosmológico Padrão (MCP) baseia-se no princípio cosmológico, tal que na média, o universo é isotrópico e homogêneo em grandes escalas, acima de 100 Mpc (1 pc = 3,26 anos luz - a.l.) [5]. Essa disposição espacial de galáxias é resultado de um período do universo primordial no qual o espaço foi inflado a distâncias incrivelmente grandes em um intervalo de tempo infinitesimal. As distâncias foram multiplicadas por uma fator 10^{25} , no intervalo de tempo de 10^{-37} a 10^{-34} segundos. A ideia da inflação³ foi proposta por Alan Guth na década de 80 [6]. Inicialmente concebida de modo a resolver problemas de condições iniciais do big-bang, a inflação tornou-se atrativa por conciliar num mesmo arcabouço teórico, as simetrias do universo com as propriedades estatísticas de suas estruturas. Como é possível que uma distribuição densa e homogênea de matéria e energia, dê origem às estruturas astrofísicas que observamos? A resposta da inflação para esta pergunta é a de que a existência de um período primordial de expansão acelerada poderia deslocar para fora do raio de Hubble (subseção 1.3.1) todas flutuações presentes na matéria e energia primordiais. Uma vez fora do raio de Hubble, essas imperfeições permanecem constantes até o instante em que a subsequente evolução do universo volta a englobá-las em seu domínio de causalidade, quando passam a

³ Usaremos a partir de agora, o termo “inflação” para nos referirmos a “inflação cósmica”.

atuar como condições iniciais num processo de instabilidade gravitacional, do qual surgem as estruturas astrofísicas que conhecemos.

A inflação permite várias previsões robustas, independentemente dos detalhes do seu desdobramento. Dentre elas, existe a previsão de que o universo seja espacialmente plano, isto é, sem curvatura espacial intrínseca, o que é confirmado pelas medidas do satélite Planck . Por outro lado, a inflação prevê várias propriedades estatísticas das flutuações de densidade. Em particular, a variância das distribuições estatísticas devem ser invariantes de escala, ou seja, sua amplitude é independente da escala estudada. Além disso, a distribuição espacial obedece uma estatística gaussiana. Esses resultados, confirmados por experimentos anteriores, foram também confirmados com os dados fornecidos pelo satélite Planck. Eles permitem descartar modelos mais complexos de inflação, como o cenário ecpirótico, um modelo cíclico do universo [7]. Dessa forma, o satélite Planck permitiu avaliar com precisão os parâmetros do MCP.

Entretanto, pouco se conhece sobre os mecanismos específicos do período inflacionário. Apesar disso, o modelo inflacionário possui um grande apelo teórico, sendo por enquanto o único modo de acesso ao universo jovem com respaldo observacional [8].

A inflação também foi proposta para explicar porque a Radiação Cósmica de Fundo (RCF) é a mesma em todas as direções, pois sem a inflação não saberíamos explicar como regiões do mapa do fundo cósmico, muito afastadas umas das outras, apresentam a mesma temperatura média de 2,725 K. O cenário inflacionário garante que essas regiões estiveram em contato causal, o que explica porque regiões distintas do céu apresentam as mesmas características. A RCF cuja existência foi prevista teoricamente por George Gamow, Ralph Alpher e Robert Herman em 1948, e observada em 1965 por Arno Penzias e Robert Woodrow Wilson, se caracteriza por apresentar um espectro térmico de corpo negro com uma temperatura de 2,725 K, de intensidade máxima na faixa de micro-ondas, com um pico de frequência de 160,4 GHz e, é isotrópica em uma parte em 10^5 , preenchendo todo universo. A RCF é o fóssil do big-bang, resultado de uma época em que o universo era quente e denso. As medidas rudimentares de Penzias e Wilson não permitiram determinar com precisão a homogeneidade da radiação. As previsões teóricas indicavam que a RCF apresentava fracas flutuações de temperatura indicadas pelos fótons. Como o universo está em expansão, a intensidade das ondas eletromagnéticas emitidas a mais de 13 bilhões de anos foi progressivamente diluída e resfriada ao longo do tempo sem desaparecer. Portanto, a RCF ainda existe na forma de uma radiação fria e uniforme. O satélite Planck, lançado em 2009, com a missão de estudar a RCF, estabeleceu um mapa com os dados obtidos, com uma resolução nunca antes alcançada. Em março de 2013, equipes que analisaram os dados coletados pelo satélite publicaram um número expressivo de resultados, confirmando as previsões do modelo do big-bang, e permitiram testar alguns cenários que descrevem fenômenos produzidos nos primeiros instantes do universo. As variações de temperaturas registradas pelo satélite Planck representam exatamente as flutuações de densidade da matéria do universo primordial, tendo uma variação da ordem da 10^{-5} .

Como a Terra gira ao redor do Sol com uma velocidade de 30 Km.s^{-1} , o Sol gira ao redor da Via Láctea com uma velocidade de 215 Km.s^{-1} e a Via Láctea se move em direção ao aglomerado de Virgem com uma velocidade de 370 Km.s^{-1} , temos uma velocidade líquida em relação a RCF de 627 Km.s^{-1} [9]. Devido a esta velocidade relativa, há o surgimento do efeito Doppler causando uma anisotropia dipolar na RCF. Assim, a temperatura na direção do movimento é $2,729 \text{ K}$ e a temperatura no sentido contrário ao movimento é $2,721 \text{ K}$ ⁴, em relação à temperatura média de $2,725 \text{ K}$. Devido a esta situação, a variação das flutuações da temperatura passa a ser da ordem de 10^{-3} .

1.1 Princípio Cosmológico

O princípio cosmológico é o pressuposto de que nenhum observador ocupa uma posição privilegiada no universo, ou seja, em uma escala acima de 100 Mpc [5], as propriedades do universo são as mesmas em todos os pontos. Esta afirmação está fortemente relacionada à hipótese de que parte do universo observável é uma amostra representativa do mesmo, e que as mesmas leis físicas se aplicam em todos os lugares. O princípio cosmológico contém duas consequências testáveis, que são: a homogeneidade e a isotropia [10].

A hipótese homogeneidade implica em uma distribuição espacialmente uniforme da matéria em grandes escalas. A isotropia significa que as mesmas características observacionais podem ser encontradas em qualquer direção do universo, ou seja, as mesmas leis e propriedades da física se aplicam em todas as direções e em todos os lugares.

O princípio cosmológico é o sustentáculo da cosmologia moderna. Evidentemente, como acontece com quase todas as ideias científicas, há contestações. É devido a contestações que uma teoria científica, ou mesmo um princípio, é substituída por outra, ou tenha sua consistência cada vez mais confirmada. No entanto, nenhuma contestação foi ainda capaz de abalar a sua importância. Ao longo da história, vários princípios cosmológicos existiram, sendo que cada um deles refletia o entendimento cosmológico de sua época. Estes foram modificados de acordo com as novas descobertas e os novos conhecimentos adquiridos.

Um dos principais resultados obtidos pela análise dos dados fornecidos pelo satélite Planck refere-se à descrição do processo responsável pelas flutuações primordiais de densidade de matéria e energia. Na verdade, as medidas permitem caracterizar as flutuações de densidade e comparar suas propriedades com as previsões de modelos teóricos desenvolvidos pelos cosmólogos.

Para uma melhor compreensão do que vimos até agora, veremos a seguir a métrica FRW, alguns conceitos cosmológicos e as equações de Friedmann.

⁴ https://wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d9/Anisotropia_dipolar

1.2 Métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

Nesta seção estudaremos a métrica FRW que é utilizada nas soluções das equações de Einstein da relatividade geral (RG), para um universo em expansão, homogêneo e isotrópico. Esta métrica é também utilizada nas equações de Friedmann (subseção 1.4), cujas soluções nos fornecem diversos dados, tais como: idade do universo, época da recombinação, época da equivalência (quando a densidade da radiação é igual a densidade da matéria) e, relações entre o fator de escala a e o tempo comóvel (tempo físico) t . A métrica FRW é conhecida também como métrica FLRW, em referência à Georges Lemaître (1894-1966), que independentemente dos trabalhos de Alexander Friedmann (1888-1925) também fez seus estudos sobre a expansão do universo e é considerado o precursor da teoria do big-bang, através dos seus conceitos do “átomo primordial”.

Veremos nesta seção os tensores, a métrica e o tensor métrico, que são elementos fundamentais no estudo da cosmologia. Os tensores: um tensor T do tipo $\begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix}$ é uma função multilinear de N vetores \vec{V} , em um número real \mathbb{R} , então, $T := \vec{V}_1 \otimes \vec{V}_2 \otimes \vec{V}_3 \otimes \dots \otimes \vec{V}_N \rightarrow \mathbb{R}$. Um tensor do tipo $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ representado por \tilde{V} , é chamado de vetor-dual ou 1-forma.

A métrica é um elemento geométrico que define a distância ou o ângulo entre dois pontos, podendo também proporcionar um mapeamento entre vetores e 1-forma, em cada ponto de uma variedade⁵, tal que

$$V^\mu = g^{\mu\nu} V_\nu,$$

onde V^μ é a μ -ésima componente do vetor \vec{V} , V_ν é a ν -ésima componente do 1-forma \tilde{V} e g é chamado de tensor métrico, ou simplesmente métrica, onde seus componentes são $g^{\mu\nu}$, que pode ser representado na forma de uma matriz cujo número de elementos depende da dimensão do espaço adotado.

Uma variedade é a extensão natural de uma superfície para dimensões maiores, e também para espaços mais gerais que \mathbb{R}^n . É útil pensar inicialmente sobre uma variedade como uma hipersuperfície em \mathbb{R}^n [11]. A variedade é essencialmente um espaço contínuo que se parece localmente como um espaço euclidiano [12].

Uma hipersuperfície é uma variedade de n -dimensões embutida em um espaço $(n + 1)$ -dimensões. Um exemplo seria uma superfície embutida em um espaço tridimensional, como a superfície de uma esfera.

O tensor métrico g , como vimos, é um objeto geométrico. Este tensor é como um aparelho onde existem 2 entradas⁶ $g(\quad, \quad)$, para inserir 2 vetores. Se inserirmos 2 vetores diferentes \vec{u} e \vec{v} , tal que $g(\vec{u}, \vec{v})$ dizemos que a resultante é o produto escalar de \vec{u} com \vec{v} e denotamos como: $\vec{u} \cdot \vec{v}$, resultando em um número real. Num sistema de coordenadas quaisquer, a operação de dois vetores pode ser escrita em termos de suas componentes [13]

⁵ Manifold em inglês.

⁶ Slot, em inglês.

$$g(\vec{u}, \vec{v}) = g_{\mu\nu} u^\mu v^\nu = g_{00} u^0 v^0 + g_{01} u^0 v^1 + \dots + g_{21} u^2 v^1 + \dots + g_{33} u^3 v^3.$$

Com respeito aos índices, adotaremos: índices gregos (μ, ν, \dots) variam de 0 a 3, índices latinos (i, j, \dots) variam de 1 a 3, e utilizaremos a convenção de soma de Einstein para índices repetidos, como feito acima [13].

Assim, dado um espaço de vetores $\vec{V}(x^\mu)$, onde \vec{V} depende de um ponto x^μ qualquer, existe associado a este vetor um 1-forma, tal que, $\tilde{V}(x) = g(\vec{V}(x), \cdot)$.

O mapeamento inverso é

$$V_\mu = g_{\mu\nu} V^\nu.$$

Note que a métrica permite transformar vetores covariantes em contravariantes e vice-versa. [12].

A construção de uma métrica que descreva o potencial gravitacional para um modelo baseado na RG, assumindo a existência de um universo homogêneo e isotrópico em expansão, não é uma tarefa trivial. Na RG levamos em conta que uma certa distribuição de matéria e/ou energia causam uma deformação na estrutura espaço-tempo. Para o caso em estudo, utilizaremos a métrica FRW, que satisfaz o princípio cosmológico e conduz a resultados numéricos compatíveis com as observações atuais. Esta métrica é especificada em coordenadas esféricas por:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (1.1)$$

onde: ds^2 é a distância entre dois eventos A e B, também chamado de elemento de linha, que é invariante por qualquer transformação de sistemas de coordenadas, sob rotação ou translação; $a(t)$ é o fator de escala, que diz como é a expansão do universo; K descreve a curvatura espacial do universo, assumindo os valores $(\pm 1, 0)$, para $K = +1$, admite-se um espaço fechado, como uma esfera, para $K = -1$ um espaço hiperbólico, e $K = 0$ um espaço plano. Nesse trabalho vamos considerar um espaço plano, e também vamos trabalhar com o sistema de unidades naturais, onde $c = 1$. Com estas considerações a equação acima fica:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (1.2)$$

e, em coordenadas cartesianas,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (1.3)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. É conveniente definirmos a quantidade η , denominada de tempo conforme

$$d\eta = \frac{1}{a} dt. \quad (1.4)$$

A justificativa para utilizarmos essa redefinição de tempo é que a métrica FRW fica conforme a métrica de Minkowski, logo a Eq. (1.3) fica:

$$ds^2 = a^2(\eta)(-d\eta^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j). \quad (1.5)$$

A assinatura da métrica adotada neste trabalho, será $(-, +, +, +)$.

1.3 Coordenadas e tempos

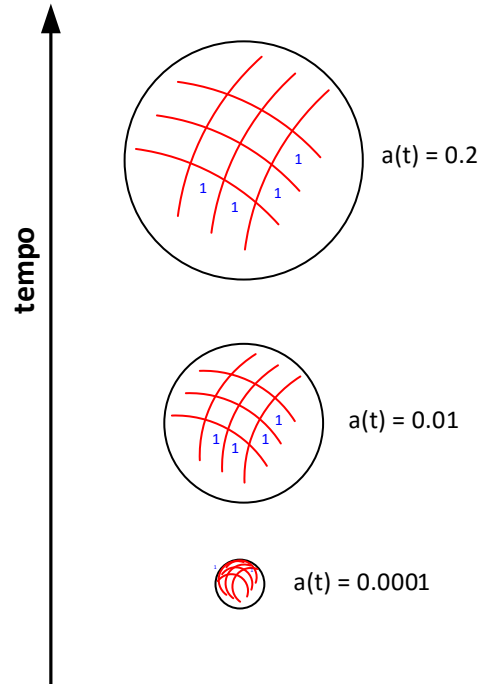
Nesta seção vamos definir alguns tópicos, temas, assuntos e objetos básicos que serão utilizados no decorrer do nosso estudo.

Compreendemos o efeito de afastamento das galáxias como expansão do próprio espaço. Podemos fazer uma analogia da expansão com a superfície de um balão que contém inúmeros pontos representando galáxias, e, ao ser inflado o balão se expande. Consequentemente, a distância entre cada par destes pontos aumenta. A adoção de um sistema de coordenadas que acompanha a expansão do universo, chamada de coordenadas comóveis, é muito útil, já que neste sistema de coordenadas, a posição dos objetos em largas escalas é fixa, e o vetor posição \mathbf{r} que os conecta é

$$\mathbf{r}(t) = a(t)\mathbf{x}, \quad (1.6)$$

onde, \mathbf{x} é a posição fixa do objeto em um dado sistema de coordenadas. Em pequenas escalas, a posição \mathbf{x} de uma galáxia depende de t , como estamos interessados em largas escalas, vamos considerar \mathbf{x} constante. Podemos introduzir neste momento, o conceito de observadores comóveis, que são aqueles que seguem as geodésicas do espaço-tempo, ou seja, estão em repouso num sistema de coordenadas comóveis. Na Fig. 1 temos uma representação bidimensional de um sistema de coordenadas comóveis, onde uma grade se expande junto com o universo, mantendo fixa a posição comóvel dos objetos neste sistema. Cada aresta dessa grade tem valor $a(t)$, que, de acordo com o princípio cosmológico, depende apenas do tempo. Adota-se que o valor do fator de escala no instante atual é $a(t_0) = 1$. Na Fig. 1 temos, como exemplo, o $a(t)$ com três valores diferentes.

Figura 1 – Evolução das coordenadas comóveis em um universo em expansão.



A derivada temporal da Eq. (1.6) fica:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{a}\mathbf{x} + a\dot{\mathbf{x}},$$

onde o termo $\dot{\mathbf{x}} = 0$ em virtude da aproximação anteriormente, então:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{x} = \frac{\dot{a}}{a}\mathbf{r}, \quad (1.7)$$

onde \mathbf{v} é o vetor velocidade de afastamento entre dois objetos separados por uma distância \mathbf{r} . O ponto sobrescrito (\dot{a}) representa a derivada em relação ao tempo comóvel t . Podemos definir então o *parâmetro de Hubble*, como sendo

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (1.8)$$

nota-se que H é a taxa de expansão do universo, $H = \frac{Km}{s} \frac{1}{Mpc}$. Então, podemos escrever a Eq. (1.7) como

$$\mathbf{v} = H(t)\mathbf{r}.$$

Com o tempo conforme deduzimos o *parâmetro de Hubble conforme*,

$$\mathcal{H}(\eta) = \frac{a'}{a}, \quad (1.9)$$

onde a' é a derivada do fator de escala em relação ao tempo conforme η . Relacionando as Eq. (1.8), (1.4) e (1.9), temos

$$\mathcal{H} = a(\eta)H, \quad (1.10)$$

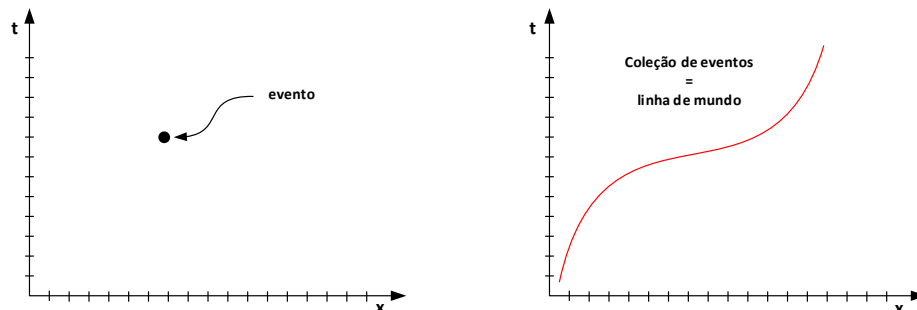
Fazendo com que o parâmetro de Hubble no presente seja $H(t_0) \equiv H_0$, também conhecido como constante de Hubble, que através de observações astronômicas e dos dados do satélite Planck vale $H_0 = (67,31 \pm 0,96) \text{ km.s}^{-1}.\text{Mpc}^{-1}$ [1].

1.3.1 Eventos, horizontes, raio de Hubble, ondas de grande e pequeno comprimento

Grande parte das informações que recebemos do universo chegam até nós através de fótons. O caminho percorrido por eles pode ser compreendido através das estruturas causais que definem as conexões entre os eventos acontecendo no universo e nós. Causal é definida como relação entre dois acontecimentos ou estados de coisas, observada quando o surgimento do primeiro induz, origina ou condiciona a ocorrência do segundo. Um evento é um acontecimento com posição fixa no espaço-tempo. Uma sucessão de eventos descreve o caminho percorrido por um objeto, por exemplo, um fóton ou uma galáxia, gerando uma linha a qual denominamos trajetória do objeto, apresentado na Fig. 2. Uma trajetória é chamada de linha do universo ou linha de mundo, sendo uma curva no espaço tempo, de forma que: $X^\mu \rightarrow X^\mu(\lambda)$, onde λ é o parâmetro da curva.

A teoria da relatividade geral é uma teoria causal, e a evolução do tempo acontece num sentido único, então um efeito não pode anteceder sua causa. As estruturas causais de um espaço-tempo determinam como um evento se desenvolve em relação à sua causa. Assim, as linhas de mundo nos permitem descrever eventos causalmente conectados.

Figura 2 – Linha de mundo: evolução de um determinado evento ao longo do espaço-tempo.



Geodésicas:

A trajetória de todos os corpos livres sujeitos somente à gravidade é chamada de geodésica, que é o caminho mais curto a ser percorrido na geometria do espaço-tempo

curvo. Assim não temos mais a distinção entre referenciais inerciais e não inerciais, o que nos permite conciliar gravidade e a relatividade especial [14]. A geodésica é caracterizada pela sua tangente, que em um determinado ponto, deve ser paralela à tangente do ponto anterior. No espaço euclidiano, a geodésica é uma linha reta, sendo a única curva que transporta o seu próprio vetor tangente. A equação da geodésica é:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right) + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0,$$

sendo λ um parâmetro da curva e $\Gamma_{\mu\beta}^\alpha$ a conexão métrica. Como este tema não é objeto de estudo, para o desenvolvimento da equação acima, ver referencia [13].

Da Eq. (1.2) para um fóton, temos que os ângulos $\theta = \phi = 0$ e, como a geodésica para um fóton é nula, $ds^2 = 0$, fazendo as alterações, obtemos então que , $ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dr^2 = 0$, ficando

$$r = \int \frac{dt}{a(t)} = \eta,$$

que é a distância física percorrida por um fóton. Por que os ângulos θ e ϕ são nulos? Como a geodésica do fóton é zero, ela é uma reta, então $\theta = \phi = 0$, e, como podemos escolher o sistema de coordenadas, escolhemos então um sistema em que θ e ϕ coincidam com um eixo do sistema de coordenadas escolhido.

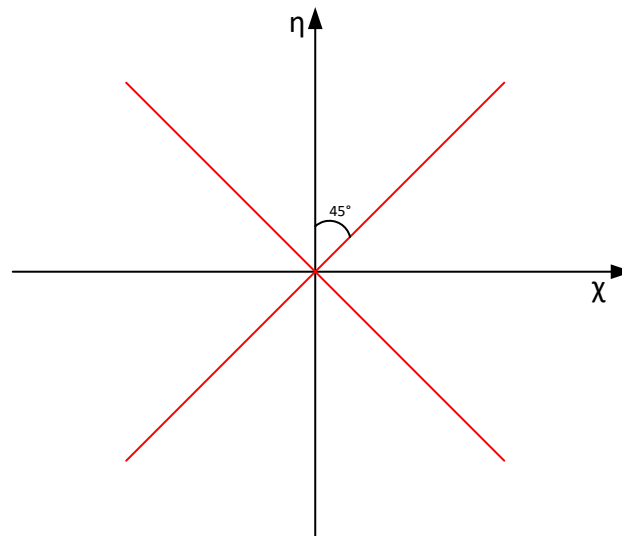
Podemos analisar também a propagação de um fóton em coordenadas comóveis. Para analisar este efeito, utilizaremos a Eq. (1.5), onde $ds^2 = a^2(-d\eta^2 + d\chi^2)$, então,

$$-d\eta^2 + d\chi^2 = 0,$$

e, as geodésicas radiais do sinal emitido são descritas por:

$$\chi(\eta) = \pm\eta + const,$$

que correspondem a linhas retas com ângulos de $\pm 45^\circ$ no plano comóvel (χ, η) . Podemos representar as geodésicas dos fótons num plano bidimensional de acordo com a Fig. 3.

Figura 3 – Propagação de um raio de luz num plano comóvel (χ, η) .

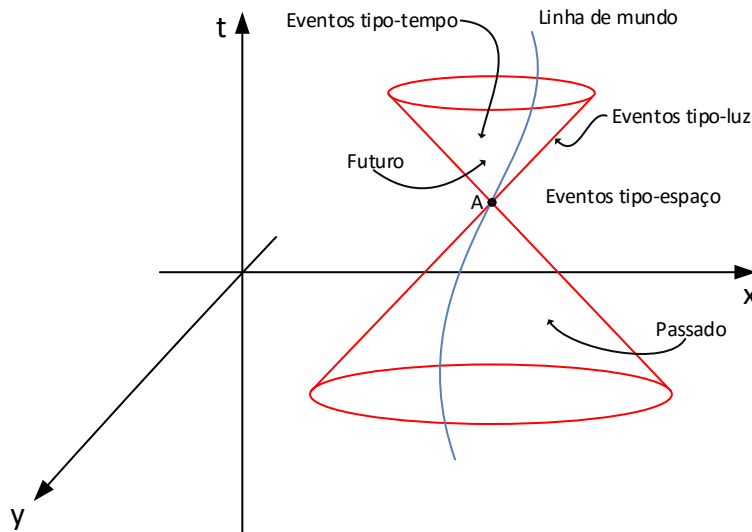
Estas linhas de mundo são chamadas de linhas tipo-luz e, em um espaço quadridimensional, limitam um cone de luz.

Cone de Luz:

Cada linha de mundo no universo é definida por uma geodésica, que por sua vez está associada a uma métrica. A Eq. (1.5) pode ser escrita como $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Sendo ds^2 uma propriedade invariante, ele pode ser usado para classificar uma relação entre dois eventos [12]. Derivando essa equação em relação ao parâmetro λ , sendo λ o tempo próprio, teremos um vetor tangente à linha de mundo

$$\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda},$$

onde $u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ é a quadrivelocidade do observador. Esta equação mostra que as linhas de mundo podem ser agrupadas em três classes: se ds^2 for menor que zero, temos linhas de mundo tipo-tempo; se for igual a zero, tipo-luz; e, se for maior que zero temos as tipo-espaço.

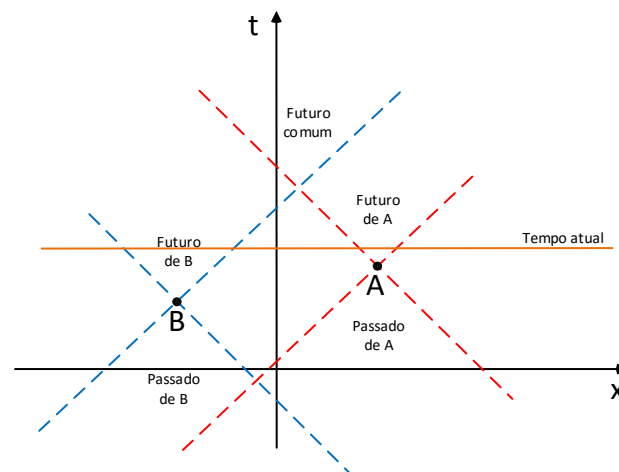
Figura 4 – Cone de Luz (o eixo z foi suprimido).

Fonte: referência [12].

As linhas tipo-luz delimitam o cone de luz no espaço-tempo, tanto do passado como do futuro, onde os eventos do tipo-tempo são aqueles que podem ser relacionados causalmente. Portanto um objeto ou sinal pode passar de um evento a outro, influenciando o que acontece. Os eventos do tipo-espaço são causalmente não relacionados, ou seja, nenhum objeto ou sinal pode passar de um evento para outro. condições propostas para a Eq. (1.13

Na Fig. 5 temos dois eventos distintos, A e B. Neste caso, estes dois eventos entrarão em contato causal num futuro comum, quando seus cones de luz se cruzarem.

Figura 5 – Relações entre dois eventos.



Fonte: Referência [12].

Horizonte de Partículas:

O horizonte de partículas em um determinado momento, é uma esfera em torno de nós, cujo raio é igual a distância para o objeto mais distante que podemos ver [15]. A máxima distância comóvel percorrida pela luz [5] é dada por

$$\chi_{hp}(\eta) = \eta_0 - \eta_i = \int_{\eta_i}^{\eta_0} d\eta, \quad (1.11)$$

neste caso η_i corresponde ao início do universo e η_0 é o momento atual. No caso de um universo com uma condição inicial de singularidade, podemos fazer $\eta_i = 0$. Em um tempo η_0 , as informações sobre eventos localizados em $\chi > \chi_{hp}$ são inacessíveis a um observador localizado em $\chi = 0$. Podemos obter o tamanho físico do horizonte de partículas [5] como sendo :

$$d_{hp}(t) = a(t)\chi_{hp} = a(t) \int_{t_i}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}, \quad (1.12)$$

o raio do horizonte de partículas vale atualmente, $d_{hp} = 46,8 \cdot 10^9$ a.l., de acordo com os cálculos feitos no item *e* da seção 1.4.1.

Quando a matéria satisfaz as condições dominantes de energia forte, $(\rho + 3P) > 0$, o tamanho do horizonte de partículas é da ordem do inverso do parâmetro de Hubble, chamado de raio de Hubble, H^{-1} , mesmo sendo conceitualmente diferentes, alguns autores usam indistintamente os dois termos [5],

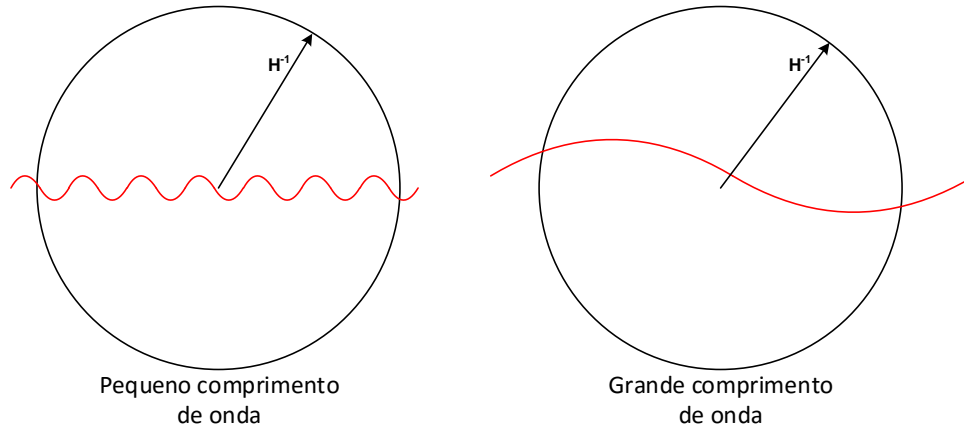
$$d_{hp}(t) = a(t)\chi_{hp} = a(t) \int_{t_i}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \approx H^{-1}, \quad (1.13)$$

ver a demonstração desta aproximação no parágrafo *c* da seção 1.4.1.

Ondas de pequeno e grande comprimento:

Primeiramente, de que tipo de ondas estamos falando? Estamos falando de ondas planas no espaço de Fourier, e, quando falamos em ondas de grande comprimento, ou de pequeno comprimento, a referência é em relação ao raio de Hubble, H^{-1} .

Figura 6 – Ondas de pequeno e grande comprimentos de onda.



Portanto, ondas de grande comprimento são aquelas em que $\lambda > H^{-1}$, também chamadas de modos super-Hubble. Ondas de pequeno comprimento são aquelas em que $\lambda < H^{-1}$, também chamadas de modos sub-Hubble. Como H varia com o tempo físico, então os valores para pequenos e grandes comprimentos de onda, também irão variar dependendo da época sobre a qual estamos fazendo o estudo. Estes conceitos serão explorados na subseção 2.1.9.

1.3.2 Redshift

O redshift (desvio para o vermelho) cosmológico, z , é o aumento do comprimento de onda causado pela expansão do espaço. Quando uma onda de luz é emitida por uma galáxia, à medida que ela se propaga, o espaço aumenta, e, então, seu comprimento de onda também aumenta. O redshift cosmológico é definido como a variação do comprimento de onda de um fóton emitido por uma fonte distante e o comprimento de onda observado atualmente⁷, de forma que:

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda_{em}}{\lambda_{em}}, \quad (1.14)$$

onde o índice subscrito (0) corresponde a valores atuais e λ_{em} o comprimento de onda no momento da emissão. Como sabemos que existe um redshift? É possível obter o espectro de elementos químicos usando técnicas de laboratórios. Por exemplo, para o hidrogênio, podemos usar esses processos, ou então analisarmos o espectro do Sol e comparar com o espectro de

⁷ lembrando que estamos desprezando a velocidade peculiar entre a fonte emissora e o observador. A velocidade peculiar é velocidade relativa entre dois corpos, não levando em conta a velocidade de expansão do universo.

emissão de galáxias. A partir dessa comparação, nota-se que há um desvio para o vermelho nos espectros de objetos que estão se afastando em relação a nós. Relacionando os comprimentos de onda, emitidos e atuais, com o fator de escala, temos [5]:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_{em}} = \frac{a_0}{a_{em}}$$

e com a Eq. (1.14) chegamos em:

$$1 + z = \frac{a_0}{a_{em}}, \quad (1.15)$$

obtendo assim uma relação direta entre z e a .

Medindo o valor do redshift podemos calcular o tempo em que o fóton foi emitido, sua distância entre a fonte emissora e o observador, bem como a velocidade de recessão do objeto que emitiu essa onda.

1.3.3 Tensor de Fluido Perfeito

Um fluido é uma coleção de partículas tão numerosa que a dinâmica das partículas não pode ser individualizada, sendo apenas uma descrição em termos de quantidades totais, tais como: número de partículas por unidade de volume, a densidade de energia, pressão, temperatura, etc. [12].

Um fluido perfeito na RG não apresenta viscosidade e nem conduz calor em um referencial momentaneamente repouso (RMR). Trata-se do tipo mais simples de fluido a ser estudado. Em grandes escalas, os elementos do universo, tais como, matéria, radiação, etc., podem ser considerados como fluidos perfeitos [14].

O tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ é simétrico e descreve o fluxo do quadri-momento p^μ através de uma hipersuperfície com x^ν constante. Este tensor é de grande utilidade pois pode ser escrito para qualquer objeto físico que contenha energia e momento. As componentes do tensor energia-momento, no RMR, são:

- T_0^0 - densidade de energia;
- T_0^i - densidade de momento linear;
- T_i^i - tensão normal (pressão) na direção i ;
- T_k^i ($i \neq k$) - tensão de cisalhamento;

O tensor energia-momento, para um fluido perfeito, assume a forma:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu} \quad (1.16)$$

onde $u^\mu = dx^\mu/d\eta$ é a quadrivelocidade de um observador em repouso com o fluido, $\rho = \rho(\eta)$ é a densidade total, $P = P(\eta)$ é a pressão total, e $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico.

Devido às identidades de Bianchi, ver Apêndice A, o tensor de Einstein $G^{\mu\nu}$ é conservativo, consequentemente $T^{\mu\nu}$ também ⁸, logo,

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0. \quad (1.17)$$

Para um sistema com vários fluidos, o tensor energia-momento é a soma dos tensores de energia-momento de cada fluido, tal que:

$$T^{\mu\nu} = \sum_{x=1} T_x^{\mu\nu},$$

e a densidade e pressão totais são definidas como:

$$\rho = \sum_x \rho_x, \quad P = \sum_x P_x, \quad (\rho + P) u^{\mu} u^{\nu} = \sum_x (\rho_x + P_x) u_x^{\mu} u_x^{\nu}.$$

1.4 Equações de Friedmann

As Equações de Friedmann são um conjunto de soluções que regem a expansão de um universo homogêneo e isotrópico no contexto da RG. Foram deduzidas por Alexander Friedmann em 1922, para um fluido perfeito de densidade de energia ρ e uma pressão P . As equações são obtidas inserindo a métrica da Eq. (1.5) nas equações de Einstein, (A.31), utilizando a Eq. (1.16) como fonte de matéria e energia.

Usando a métrica FRW, Eq. (1.5), desenvolvendo o tensor métrico, os símbolos de Christoffel, o tensor e o escalar de Ricci, obtemos o tensor de Einstein, na forma da Eq. (A.31). Para cada uma das 16 componentes do tensor de Einstein ou do tensor energia-momento⁹ temos uma equação, entretanto, usando-se a condição de fluido perfeito apenas as componentes da diagonal são diferentes de zero. Usando

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (1.18)$$

da Eq. (A.31), sendo $\kappa = 8\pi G$, e, utilizando as componentes 00 calculadas no Apêndice A, temos: tensor energia-momento, $T_{00} = \rho a^2$; tensor de Ricci, $R_{00} = -3\mathcal{H}'$; e do escalar de Ricci, $R = 6(\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}')a^{-2}$, que substituindo na Eq. (1.18), obtemos:

$$\mathcal{H}^2 = \frac{\kappa}{3} \rho a^2, \quad (1.19)$$

que pode ser escrita como:

$$\mathcal{H}^2 = \frac{a'^2}{a^2} = \frac{\kappa}{3} \sum_x \rho_x a^2,$$

pois ρ é a soma de cada fluido do universo.

⁸ veja Eq. (A.31) ou para mais detalhes [4]

⁹ apenas 10 são usadas, pois os tensores são simétricos

Para as componentes ij , usando também os resultados calculados no Apêndice A, usando a Eq. (1.19), temos:

$$\mathcal{H}' = -\frac{\kappa}{6}a^2(\rho + 3P). \quad (1.20)$$

Trabalhando com as Eq. (1.20), (1.19) e eliminando os termos \mathcal{H}^2 e \mathcal{H}' , chegamos em

$$\rho' + 3\mathcal{H}(\rho + P) = 0, \quad (1.21)$$

também chamada de equação de continuidade, que pode ser reescrita como:

$$\rho'_x + 3\mathcal{H}(\rho_x + P_x) = 0,$$

pois ρ e P se relacionam com cada fluido do universo, assumindo que existe a conservação independente de cada um dos fluidos do universo.

A Eq. (1.19) descreve a evolução do fator de escala, enquanto a Eq. de continuidade, descreve a evolução de cada componente do universo.

Temos duas equações independentes para três incógnitas, a , ρ , P . Precisamos portanto, de mais uma informação para que possamos determinar qual o fator de escala e a evolução do fluido desse modelo. A maneira mais prática de resolver isso é usando a equação de estado. Uma equação de estado é um tipo de equação termodinâmica que expõe o estado do fluido de acordo com o conjunto de condições físicas. É uma equação que fornece uma relação matemática entre duas ou mais funções de estado associadas com o fluido, tais como sua temperatura, pressão, volume, energia interna ou entropia. Equações de estado são úteis em descrever as propriedades de fluidos, misturas de fluidos, sólidos, e até mesmo os elementos do interior de uma estrela. Neste trabalho usaremos a equação de estado relacionando a pressão e a densidade de energia.

$$\omega \equiv \frac{P}{\rho}, \quad (1.22)$$

desta equação podemos tirar algumas conclusões: para um universo só de matéria temos $\omega = 0$, pois $P = 0$, pois a matéria não exerce pressão; se for só de radiação, $\omega = 1/3$, pois, $P_r = (\rho_r/3)$; se for só com a constante cosmológica Λ , $\omega = -1$, significando que a densidade de energia é constante, portanto, $\rho = -P$.

1.4.1 Soluções para a equação de Friedmann.

Usando as equações de Friedmann, a evolução para o fator de escala pode ser determinada como uma função do tempo.

a) Supondo o universo constituído unicamente de matéria:

Neste caso $P_m = 0$. Resolvendo a Eq. (1.21), temos

$$\rho' + 3\mathcal{H}\rho = 0 \quad \text{então,} \quad \frac{\rho'}{\rho} = -3\frac{a'}{a},$$

integrando chegamos em condições propostas para a Eq. (1.13)

$$\rho_m = \rho_m^0 a^{-3}.$$

Podemos relacionar este resultado com a expansão do universo com raio R , onde a densidade seria inversamente proporcional ao cubo do raio. Substituindo este resultado na Eq. (1.19) e resolvendo a equação diferencial, temos

$$a(\eta) \propto \eta^2 \quad \Longleftrightarrow \quad a(t) \propto t^{2/3}.$$

O parâmetro de Hubble fica:

$$\mathcal{H} = \frac{a'}{a} = \frac{2}{\eta} \quad \Longleftrightarrow \quad H = \frac{2}{3t}.$$

b) Supondo o universo constituído unicamente de radiação:

Neste caso $P_r = \frac{\rho_r}{3}$. Resolvendo a Eq. (1.21), temos

$$\rho' + 3\mathcal{H}(\rho_r + P_r) = 0 \quad \text{então,} \quad \frac{\rho'}{\rho} = -4\frac{a'}{a},$$

integrando, obtemos

$$\rho_r = \rho_r^0 a^{-4}.$$

Mais uma vez podemos relacionar este resultado com a expansão do universo com raio R , onde a densidade seria inversamente proporcional ao cubo do raio, o outro fator inverso do fator, a^{-1} , seria proveniente do redshift cosmológico que atua nos comprimentos de ondas da radiação. Substituindo na Eq. (1.19), temos

$$a(\eta) \propto \eta \quad \Longleftrightarrow \quad a(t) \propto t^{1/2}.$$

O parâmetro de Hubble fica:

$$\mathcal{H} = \frac{a'}{a} = \frac{1}{\eta} \quad \Longleftrightarrow \quad H = \frac{1}{2t}.$$

relacionando os parâmetros de Hubble comóveis da matéria e da radiação, temos que $H_m = \frac{4}{3}H_r$, ou seja, um universo composto só de matéria tem uma taxa de expansão 33,33% maior que

um universo composto só de radiação. Esta taxa maior é porque a radiação possui pressão, $P = \rho/3$, na relatividade geral a pressão gera efeito gravitacional, fazendo com que a radiação tenha uma expansão $1/3$ menor que a matéria.

c) demonstração de que o tamanho do horizonte de partículas é aproximadamente igual ao raio de Hubble:

Como visto nos parágrafos *a* e *b* acima,

$$a(t) = a_0 t^n, \quad (1.23)$$

onde n é um número (diferente de 1) cujo valor depende da constituição do universo. Substituindo a Eq. (1.23) na Eq. (1.12), temos:

$$d_{hp}(t) = a_0 t^n \int_0^t \frac{dt}{a_0 t^n} = \frac{t}{1-n} \approx t,$$

substituindo novamente a Eq. (1.23) na Eq. (1.8),

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{a_0 n t^{n-1}}{a_0 t^n} = \frac{n}{t} \approx \frac{1}{t},$$

portanto

$$d_{hp} \approx H^{-1}.$$

Esta aproximação é válida para as condições propostas para a Eq. (1.13).

d) Cálculo no instante de equivalência do redshift z_{eq} e a_{eq} :

Para chegarmos em z_{eq} e a_{eq} , temos que fazer alguns cálculos prévios. Como na equivalência $\rho_r(t) = \rho_m(t)$, vamos partir dos cálculos feitos nos parágrafos **a** e **b**, então,

$$\rho_r(t) = \rho_m(t) \longrightarrow \rho_r^0(t_0) a^{-4} = \rho_m^0(t_0) a^{-3}$$

então,

$$\frac{1}{a} = \frac{\rho_m^0(t_0)}{\rho_r^0(t_0)} \longrightarrow \frac{1}{a} = \frac{\kappa \rho_m^0(t_0)}{3H^2} \frac{3H^2}{\kappa \rho_r^0(t_0)} \longrightarrow \frac{1}{a} = \frac{\Omega_m^0}{\Omega_r^0},$$

onde Ω_m^0 e Ω_r^0 é a densidade de energia relativa para a matéria e a radiação, definidos nas Eq. (A.12) e (A.14). Substituindo a Eq. (1.15) na equação acima, temos:

$$1 + z = \frac{\Omega_m^0}{\Omega_r^0}, \quad (1.24)$$

onde, $\Omega_m^0 = 0,315$ [1], e Ω_r^0 é a composição de neutrinos e fótons. Vamos agora calcular o Ω_r^0 . A densidade dos fótons ρ_γ é calculada usando equação de Planck para a densidade do número de fótons [16],

$$n(\nu)d\nu = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{\exp[(h\nu/K_B T) - 1]},$$

onde ν é a frequência, K_B é a constante de Boltzmann e, T é a temperatura da RCF. A equação da densidade de energia dos fótons,

$$\rho_\gamma c^2 = \int_{-\infty}^{\infty} h\nu n(\nu) d\nu,$$

numericamente, obtemos que $\rho_\gamma = 4,65 \cdot 10^{-31} \text{Kg.m}^{-3}$.

A densidade dos neutrinos é relacionada com a densidade dos fótons por [17],

$$\rho_\nu = 3,05 \frac{7}{8} \left[\frac{4}{11} \right]^{4/3} \rho_\gamma = 3,21 \cdot 10^{-31} \text{Kg.m}^{-3}.$$

Hoje, a densidade de radiação vale

$$\rho_r^0 = \rho_\gamma + \rho_\nu = 7,86 \cdot 10^{-31} \text{Kg.m}^{-3}.$$

Precisamos ainda calcular a densidade crítica na época atual, que é dada pela Eq. (A.13), assim, utilizando $H_0 = 67,31 \text{Km.Mpc}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} = 2,18 \cdot 10^{-18} \text{s}^{-1}$, e, $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \cdot \text{Kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$, obtemos:

$$\rho_c^0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 8,52 \cdot 10^{-27} \text{Kg.m}^{-3}, \quad \longrightarrow \quad \Omega_\gamma^0 = \frac{\rho_\gamma}{\rho_c^0} = 5,45 \cdot 10^{-5} \quad e \quad \Omega_\nu^0 = 3,77 \cdot 10^{-5}.$$

Portanto a densidade de radiação total vale

$$\Omega_r^0 = \Omega_\gamma^0 + \Omega_\nu^0 = 9,23 \cdot 10^{-5};$$

e, resolvendo a Eq. (1.24)

$$z_{eq} = \frac{\Omega_m^0}{\Omega_r^0} = 3.415,38 \approx 3.415,$$

que está de acordo com o valor observado por [1], onde $z_{eq} = 3.393 \pm 49$.

Para o cálculo de a_{eq} utilizando a Eq. (1.15) temos que $a_{eq} = 2,93 \cdot 10^{-4}$, então

$$a_{eq} \approx 3,0 \cdot 10^{-4}.$$

e) Cálculo do tamanho físico do horizonte de partículas:

Partindo das equações de densidade para a matéria, radiação, contante cosmológica e da Eq. (1.19) temos:

$$H^2 = \frac{\kappa}{3} (\rho_m + \rho_r + \rho_\Lambda) \quad \longrightarrow \quad \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = H_0^2 \left[\frac{\kappa}{3H_0^2} \rho_m^0 a^{-3} + \frac{\kappa}{3H_0^2} \rho_r^0 a^{-4} + \frac{\kappa}{3H_0^2} \rho_\Lambda^0 \right],$$

tal que

$$dt = \frac{da}{H_0 \sqrt{\Omega_m a^{-1} + \Omega_r a^{-2} + \Omega_\Lambda a^2}}. \quad (1.25)$$

Podemos resolver esta equação numericamente para $a(t)$, integrando de $t_i = 0$ até hoje, $t_0 = 13,813 \cdot 10^9$. Usando este resultado na Eq. (1.12), chegamos ao valor $d_{hp} = 46,8 \cdot 10^9$ a.l. para o raio do horizonte de partículas, que coincide com o valor da referência [15].

f) Cálculo do tempo físico em diferentes z e a :

Iremos agora realizar um cálculo sistemático para valores do redshift e do fator de escala para diferentes épocas. Partindo da Eq. (1.25), usando relações já conhecidas entre z e a , temos

$$dt = - \frac{dz}{H_0 (1+z)^2 \sqrt{\Omega_m (1+z) + \Omega_r (1+z)^2 + \Omega_\Lambda (1+z)^{-2}}}.$$

Para o cálculo do tempo comóvel na época da equivalência, usando a equação acima, $z_{eq} \approx 3.414$ e outros valores tabelados ou já calculados, teremos:

$$t_{eq} = -10^9 \int_{\infty}^{z_{eq}} \frac{dz}{H_0 (1+z)^2 \sqrt{\Omega_m (1+z) + \Omega_r (1+z)^2 + \Omega_\Lambda (1+z)^{-2}}} = 52.173 \text{ anos.}$$

Para o cálculo do tempo comóvel na época da recombinação, usando $z_{rec} \approx 1.090,09$ [1] e outros valores já calculados, teremos:

$$t_{cmb} = -10^9 \int_{\infty}^{z_{rec}} \frac{dz}{H_0 (1+z)^2 \sqrt{\Omega_m (1+z) + \Omega_r (1+z)^2 + \Omega_\Lambda (1+z)^{-2}}} = 376.629 \text{ anos,}$$

que é um valor muito próximo, diferença menor que 1%, do valor adotado que é de 380.000 anos.

Para o cálculo da idade do universo, usando a equação acima, $z_0 = 0$ e outros valores tabelados ou já calculados, teremos:

$$t_0 = -10^9 \int_{\infty}^{z_0} \frac{dz}{H_0 (1+z)^2 \sqrt{\Omega_m (1+z) + \Omega_r (1+z)^2 + \Omega_\Lambda (1+z)^{-2}}} = 14,02 \text{ bilhões de anos}$$

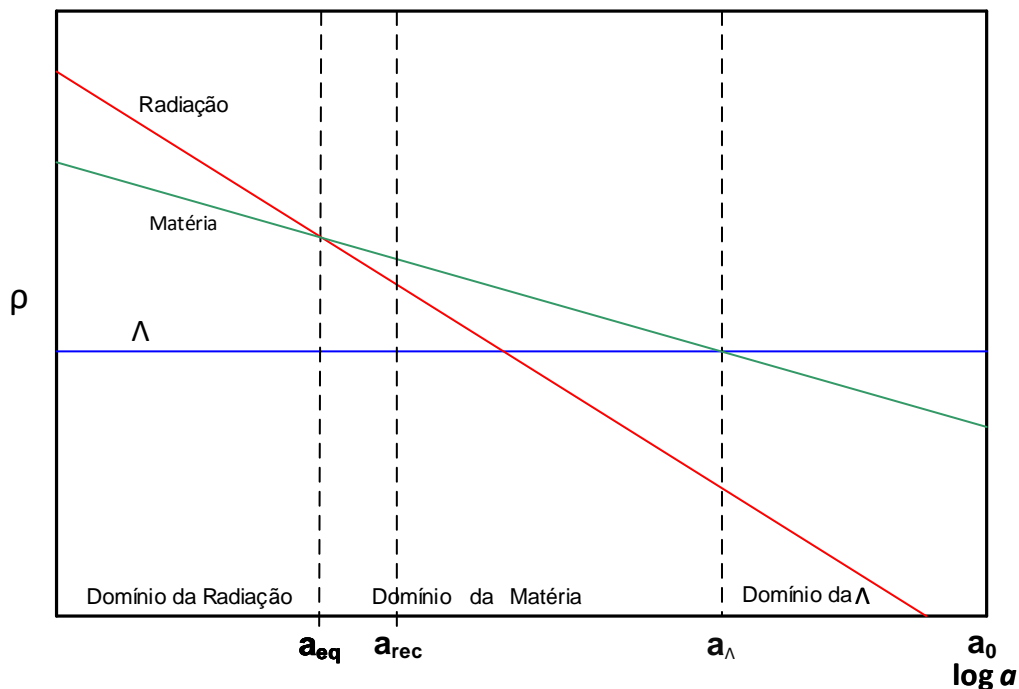
que também é um valor muito próximo, diferença de 1,5%, do valor que adotamos de 13,813 bilhões de anos. Podemos diagramar os dados calculados mostrados na tabela abaixo:

Na equivalência	Na recombinação	Const. Cosmológica	Hoje
$a_{eq} \approx 3,0 \cdot 10^{-4}$	$a_{rec} \approx 0,9 \cdot 10^{-3}$	$a_\Lambda \approx 0,5$	$a_0 = 1,0$
$z \approx 3,4 \cdot 10^3$	$z \approx 1,0 \cdot 10^3$	$z \approx 1,0$	$z = 0$
$t \approx 52,0 \cdot 10^3$	$t \approx 376,0 \cdot 10^3$	$t \approx 6,0 \cdot 10^9$	$t \approx 14,0 \cdot 10^9$

estes dados são mostrados na Fig. 7, onde temos um gráfico da densidade em função do fator de escala.

Relações entre densidades de matéria, radiação e constante cosmológica, em função do fator de escala. Com a tabela acima, podemos traçar um gráfico relacionando a densidade de energia com o fator de escala. Sendo a_{eq} o valor do fator de escala equivalente, ou seja, quando a radiação e a matéria possuem a mesma densidade, $\rho_m(a_{eq}) = \rho_r(a_{eq})$.

Figura 7 – Diferentes regimes no universo.



Neste gráfico podemos verificar a evolução da densidade da radiação, da matéria e da constante cosmológica com o fator de escala, como sabemos relacionar o fator de

escala com o tempo físico, vemos então, como estes elementos estão evoluindo com o passar do tempo. Podemos verificar que hoje, a densidade da constante cosmológica é o elemento principal do universo e que a densidade da radiação tem um valor muito pequeno. A tendência para o futuro é que a densidade da matéria também se torne insignificante, onde vai imperar apenas a constante cosmológica, fazendo com que o universo se expanda indefinidamente.

Neste Capítulo vimos conceitos básicos de cosmologia, o MCP, a evolução do fator de escala, do parâmetro de Hubble e o redshift, tudo isso em um universo homogêneo e isotrópico. Agora, precisamos estender tudo isso para um universo de acordo com a realidade, onde temos inhomogeneidades geradas por perturbações durante a época do universo primordial. É isso que será estudado no Capítulo 2, com as perturbações lineares das equações de Einstein. Levaremos em consideração um universo composto de radiação e matéria, pois vamos estudar o universo em eras primordiais.

2 Teoria de Perturbação Cosmológica Linear

Sabemos que o universo não é perfeitamente homogêneo e isotrópico, pois a matéria está agrupada aleatoriamente em galáxias. Porém, como já foi visto, em escalas superiores a 100 Mpc, estas inhomogeneidades são pequenas o suficiente a ponto de admitirem uma descrição linear. Então, a métrica do nosso universo pode ser escrita como uma métrica de fundo mais pequenas perturbações:

$$g_{\mu\nu} = {}^{(0)}g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} \quad (2.1)$$

assumindo que $|\delta g_{\mu\nu}| \ll |{}^{(0)}g_{\mu\nu}|$. O índice superior (0) é em relação à métrica de fundo.

A teoria relativística de perturbações lineares é uma ferramenta fundamental para a cosmologia. A proposta da teoria de perturbações lineares é explicar o crescimento e evolução das perturbações primordiais [18]. A RCF com variações de temperatura da ordem de 0,001%, é a principal evidência do caráter linear das perturbações, uma vez que mostra um universo aproximadamente homogêneo e isotrópico.

Por que razão usamos a teoria “linear”? Como vimos acima as variações de perturbação são muito pequenas. Usando o desenvolvimento em série destas perturbações, temos que $f(x + \epsilon) = f(x) + \epsilon f'(x) + (\epsilon^2/2!)f''(x) + \dots$, os termos de segunda ordem, como $\epsilon^2 = 10^{-10}$, são muito pequenos, não influenciando de maneira apreciável o resultado final. Por isso usamos os termos da série até primeira ordem.

O pioneiro nos estudos das perturbações cosmológicas foi Evgeny Lifshitz que, em 1946, publicou seu trabalho baseado em modelos cosmológicos FRW. Este trabalho foi corrigido e melhorado em 1963 pelo próprio Lifshitz e Khalatnikov. Entretanto, estes trabalhos não trataram adequadamente a liberdade de gauge, ou calibre, pois foi escolhido o gauge síncrono, tornando complicada a interpretação física das perturbações. Este gauge não fixa completamente as coordenadas, facilitando o surgimento de modos fictícios (não físicos) de perturbação. Vamos falar mais sobre gauge na subseção 2.1.2. Outros físicos apresentaram trabalhos com o objetivo de eliminar as perturbações não físicas, entre 1963 e o final da década de 1970, porém sem sucesso. Somente em 1980, com James Bardeen, a formulação das equações para as perturbações, tiveram uma interpretação física objetiva [19].

Com o desenvolvimento da teoria de perturbações lineares cosmológicas, baseado no modelo FRW, foi possível construir um modelo para acompanhar o crescimento linear das estruturas do universo, e também comparar com os dados cosmológicos observados atualmente, obtendo assim uma compreensão melhor da dinâmica do universo no regime linear.

2.1 Parametrização das Perturbações

A análise da instabilidade gravitacional newtoniana tem suas limitações. Ela falha para perturbações em escalas maiores do que o raio Hubble. No caso de um fluido relativístico é necessário usar a RG, tanto para curtos como para longos comprimentos de onda. Esta teoria nos dá uma descrição unificada para as perturbações em todas as escalas. Infelizmente, a interpretação física dos resultados obtidos é menos transparente na RG do que na teoria newtoniana, sendo que o principal problema é a liberdade na escolha das coordenadas utilizadas para descrever as perturbações. Em contraste com o universo homogêneo e isotrópico, onde o sistema de coordenadas é sugerido pelas propriedades de simetria da RCF, não há coordenadas preferíveis para analisar estas perturbações [5].

As teorias de gauge, se baseiam na ideia de que as transformações podem ser locais ou globais. Isso pode ser visto como uma generalização do princípio de equivalência da RG, onde, em qualquer ponto do espaço-tempo é permitida a escolha de um referencial local.

Para verificar isso, vamos considerar um universo homogêneo e isotrópico em que uma função escalar $\rho(t)$ é a densidade de energia de um fluido. Na RG qualquer sistema de coordenadas é permitido, e podemos, em princípio, decidir usar uma nova coordenada de tempo \tilde{t} tal que $\tilde{t} = t + \delta t(\mathbf{x}, t)$, então a densidade de energia $\rho(t(\tilde{t}, \mathbf{x})) \equiv \tilde{\rho}(\tilde{t}, \mathbf{x})$ na hipersuperfície com \tilde{t} constante, depende, geralmente, da coordenada espacial \mathbf{x} . Uma hipersuperfície de tempo constante é um subconjunto de pontos no espaço-tempo que possuem a mesma coordenada temporal. Supondo $\delta t \ll \tilde{t}$, temos:

$$\rho(t(\tilde{t}, \mathbf{x})) = \tilde{\rho}(\tilde{t} + \delta t) \simeq \tilde{\rho}(\tilde{t}) - \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} \delta t \equiv \tilde{\rho}(\tilde{t}) + \delta \rho(\mathbf{x}, t), \quad -\delta \rho = \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \tilde{t}} \delta t$$

onde $\tilde{\rho}(\tilde{t})$ corresponde à densidade de energia de fundo nas novas coordenadas, e $\delta \rho(\mathbf{x}, t)$ é uma perturbação linear. Esta perturbação é fictícia e aparece devido à escolha do novo tempo perturbado. Assim, podemos produzir perturbações fictícias simplesmente perturbando as coordenadas. Esta perturbação é um resultado matemático das novas coordenadas. Analogamente, podemos remover uma perturbação real na densidade de energia, escolhendo as hipersuperfícies de tempo constante para serem as mesmas que as hipersuperfícies de energia constante. Neste caso $\delta \rho = 0$, apesar da presença real de inhomogeneidades. Para distinguir modos de perturbação reais e fictícias na RG é necessário ter um conjunto das perturbações das métricas. Vamos introduzir variáveis invariantes de gauge que não dependem da escolha de coordenadas, a fim de termos uma interpretação física concisa com a situação [19].

2.1.1 Perturbações

Quando existem inhomogeneidades na matéria temos perturbações na métrica. Estas perturbações podem ser decompostas em partes irredutíveis. Diferentes tipos de pertur-

bações lineares (escalares, vetoriais e tensoriais) podem evoluir de forma independente e, por conseguinte, podem ser analisadas separadamente.

Classificações das Perturbações.

Com o objetivo de parametrizar os graus de liberdade das perturbações da métrica FRW, podemos escrever

$$ds^2 = \left[{}^{(0)}g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} \right] dx^\mu dx^\nu, \quad (2.2)$$

onde ${}^{(0)}g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ é dado pela Eq. (1.5) e $|\delta g_{\mu\nu}| \ll 1$. As perturbações da métrica, $\delta g_{\mu\nu}$ são classificadas em: escalares, vetoriais e tensoriais. Estas classificações são baseadas em simetrias da seção espacial da métrica de Friedmann.

A componente δg_{00} se comporta como um escalar sob rotações espaciais, então [5]

$$\delta g_{00} \equiv 2a^2 \phi, \quad (2.3)$$

onde ϕ é um escalar. As componentes δg_{0i} são decompostas como sendo a soma de um gradiente de um escalar (B), com um 3-vetor (C_i), de divergência nula, tal que [5]

$$\delta g_{0i} \equiv a^2 (\partial_i B + C_i) \quad (2.4)$$

onde $\partial_i C^i = 0$. Da mesma maneira, para o tensor δg_{ij} , temos sua decomposição em parte irreduzível como [5]:

$$\delta g_{ij} \equiv a^2 (2\psi \delta_{ij} + 2\partial_j \partial_i E + \partial_i F_j + \partial_j F_i + h_{ij}) \quad (2.5)$$

onde, ψ e E são funções escalares, $\partial_i F^i = 0$ (vetor transversal), h_{ij} é um tensor com $\partial_i h^i_j = 0$ (transverso) e $h = h^i_i = 0$ (traço nulo). Como resultado temos:

Perturbações Escalares: quatro perturbações (ϕ , ψ , B , E), fornecendo 4 graus de liberdade (componentes independentes). Estas perturbações são as mais importantes porque elas representam a instabilidade gravitacional nas distribuições de matéria e energia, as quais estão diretamente ligadas ao processo de formação de estruturas pela ação gravitacional.

Perturbações Vetoriais: duas perturbações (F_i , C_i), fornecendo 4 graus de liberdade, duas para cada, pois é necessário conhecer duas componentes, já que a terceira é obtida da condição de divergência nula. Estas perturbações estão associadas a observáveis vetoriais, tais como campos magnéticos e velocidades peculiares de galáxias. Tipicamente estas quantidades não são excitadas em um universo de FRW, de modo que atualmente, as perturbações vetoriais da métrica não representam um papel dinâmico importante na formação de estruturas.

Perturbações tensoriais: uma perturbação (h_{ij}), fornecendo dois graus de liberdade, pois a simetria elimina três, a condição de traço nulo elimina uma e a condição

transversalidade elimina três. Essas perturbações não tem análogo em teoria newtoniana, pois descrevem ondas gravitacionais, que são os graus de liberdade do próprio campo gravitacional.

No total, temos 10 graus de liberdade, que coincide com os graus de liberdade do tensor de perturbação da métrica $\delta g_{\mu\nu}$. A decomposição das perturbações da métrica, em partes escalares, vetoriais e tensoriais é útil pois no regime das perturbações lineares não há acoplamento entre perturbações de naturezas distintas, o que torna o problema ideal para uma análise de Fourier. No nosso estudo não iremos utilizar as perturbações vetoriais e tensoriais pois não representam um papel dinâmico importante na formação de estruturas.

2.1.2 Transformações de gauge e variáveis invariantes de gauge

Troca de coordenadas:

Nesta seção iremos ilustrar como uma troca de coordenadas pode afetar os graus de liberdade de $\delta g_{\alpha\beta}$. Considerando um transformação infinitesimal de coordenada

$$x^\alpha \rightarrow \tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha, \quad |\xi^\alpha| \ll 1 \quad (2.6)$$

onde ξ^α é uma função das coordenadas do espaço-tempo. Dado um sistema de coordenadas x^ρ do espaço-tempo, o tensor métrico no sistema de coordenadas \tilde{x}^ρ , pode ser calculado usando a lei de transformação

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}^\alpha) = \frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\delta}{\partial \tilde{x}^\nu} g_{\gamma\delta}(x^\alpha). \quad (2.7)$$

onde $\frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\mu} = (\delta_\mu^\gamma - \partial_\mu \xi^\gamma)$, que, substituindo em (2.6) e expandindo $g_{\gamma\delta}$ em torno de ξ^α , temos

$$g_{\gamma\delta}(x^\alpha) = {}^{(0)}g_{\gamma\delta}(x^\alpha) + \delta g_{\gamma\delta},$$

substituindo este resultado na Eq. (2.6) e aplicando a lei de transformação (2.7) chegamos em

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}^\alpha) \approx {}^{(0)}g_{\mu\nu}(x^\alpha) + \delta g_{\mu\nu} - {}^{(0)}g_{\mu\delta}(x^\alpha) \partial_\nu \xi^\delta - {}^{(0)}g_{\gamma\nu}(x^\alpha) \partial_\mu \xi^\gamma, \quad (2.8)$$

sendo que nesta passagem foram desprezados os termos quadráticos em ξ^α . Mantendo apenas os termos lineares em $\delta g_{\mu\nu}$ e ξ e reescrevendo $\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}^\alpha)$ como soma da métrica de fundo e perturbação, obtemos:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}^\alpha) &= {}^{(0)}g_{\mu\nu}(\tilde{x}^\alpha) + \delta \tilde{g}_{\mu\nu} \\ &= {}^{(0)}g_{\mu\nu}(x^\alpha + \xi^\alpha) + \delta \tilde{g}_{\mu\nu} \\ &\approx {}^{(0)}g_{\mu\nu}(x^\alpha) + \xi^\gamma \partial_\gamma {}^{(0)}g_{\mu\nu} + \delta \tilde{g}_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Comparando as Eqs. (2.8) e (2.9) obtemos a lei de transformação de gauge para o tensor métrico

$$\delta g_{\mu\nu} \rightarrow \delta \tilde{g}_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} - {}^{(0)}g_{\mu\delta}(x^\alpha) \partial_\nu \xi^\delta - {}^{(0)}g_{\gamma\nu}(x^\alpha) \partial_\mu \xi^\gamma - \xi^\gamma \partial_\gamma {}^{(0)}g_{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

A equação acima diz como uma perturbação da métrica se comporta em uma mudança infinitesimal de coordenadas.

Com estas transformações de gauge podemos agora ver como as perturbações na métrica se transformam ao trocarmos de coordenadas. Mais uma vez devemos decompor as quantidades em partes irredutíveis, de modo que o vetor infinitesimal será reescrito como $\xi^\mu = (\xi^0, \xi^i)$, onde $\xi^i = \xi_\perp^i + \partial^i \zeta$, onde ξ_\perp^i é um 3-vetor com divergente zero ($\partial_i \xi_\perp^i = 0$) e ζ é uma função escalar.

No universo FRW, partindo de

$$\delta \tilde{g}_{00} = \delta g_{00} - {}^{(0)}g_{0\delta} \partial_0 \xi^\delta - {}^{(0)}g_{\gamma 0} \partial_0 \xi^\gamma - \xi^\gamma \partial_\gamma {}^{(0)}g_{00},$$

chegamos em:

$$\delta \tilde{g}_{00} = \delta g_{00} - 2a \partial_0 (a \xi^0). \quad (2.11)$$

Para $\delta \tilde{g}_{0i}$, partindo de $\delta \tilde{g}_{0i} = \delta g_{0i} - {}^{(0)}g_{0\delta} \partial_i \xi^\delta - {}^{(0)}g_{\gamma i} \partial_0 \xi^\gamma - \xi^\gamma \partial_\gamma {}^{(0)}g_{0i}$,

$$\delta \tilde{g}_{0i} = \delta g_{0i} + a^2 \left[\partial_i \xi_\perp^i + \partial_i (\partial_0 \zeta - \xi^0) \right]. \quad (2.12)$$

Finalmente, para $\delta \tilde{g}_{ij}$, partindo de $\delta \tilde{g}_{ij} = \delta g_{ij} - {}^{(0)}g_{i\delta} \partial_j \xi^\delta - {}^{(0)}g_{\gamma j} \partial_i \xi^\gamma - \xi^\gamma \partial_\gamma {}^{(0)}g_{ij}$, encontramos

$$\delta \tilde{g}_{ij} = \delta g_{ij} + a^2 \left[2 \frac{a'}{a} \delta_{ij} \xi^0 + 2 \partial_j \partial_i \zeta + (\partial_j \xi_\perp^i + \partial_i \xi_\perp^j) \right]. \quad (2.13)$$

Já vimos que as perturbações na métrica podem ser escritas pelas Eq. (2.2), (2.3), (2.4), (2.5), podemos então, representar as perturbações escalares através da seguinte equação [18] (desprezando os modos vetoriais e tensoriais):

$$\delta g_{\alpha\beta} = a^2(\eta) \begin{pmatrix} -2\phi & \partial_i B \\ \partial_i B & 2(\psi \delta_{ij} + \partial_i \partial_j E) \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Aplicando as transformações de gauge vemos que, através das Eq. (2.3) e (2.11), temos,

$$\tilde{\phi} = \phi - \frac{1}{a} (a \xi^0)'. \quad (2.15)$$

Através das Eq. (2.4) e (2.12), temos,

$$\tilde{B} = B + \zeta' - \xi^0. \quad (2.16)$$

Finalmente, através das Eq. (2.5) e (2.13)

$$2\tilde{\psi} \delta_{ij} + 2\partial_j \partial_i \tilde{E} = 2\psi \delta_{ij} + 2\partial_j \partial_i E + 2 \frac{\dot{a}}{a} \delta_{ij} \xi^0 + 2\partial_j \partial_i \zeta + (\partial_j \xi_\perp^i + \partial_i \xi_\perp^j),$$

logo

$$\tilde{\psi} = \psi + \frac{a'}{a} \xi^0, \quad (2.17)$$

e

$$\tilde{E} = E + \zeta. \quad (2.18)$$

Assim somente o termos ξ^0 e ζ contribuem para as transformações das perturbações escalares e com uma escolha apropriada destes termos podemos eliminar duas das quatro funções (ψ , ϕ , B , E). Combinando linearmente estas quatro funções podemos construir funções invariantes por transformações de gauge, por exemplo [5]:

$$\Phi \equiv \phi - \frac{1}{a} [a(B - E)]', \quad (2.19)$$

e

$$\Psi \equiv \psi - \frac{a'}{a} (B - E). \quad (2.20)$$

Verificando que Φ e Ψ são de fato invariantes, a Eq. (2.19) pode ser escrita como $\Phi = \phi - \frac{a'}{a} (B - E)' - (B - E)'$, usando as transformações de gauge,

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\phi} - \frac{a'}{a} (\tilde{B} - \tilde{E})'$$

fazendo as substituições:

$$\tilde{\Phi} = \phi - \frac{1}{a} (a\xi^0)' - \frac{a'}{a} (B - \xi^0 - E) - (B - \xi^0 - E)',$$

chegamos em

$$\tilde{\Phi} = \Phi, \quad (2.21)$$

de forma similar chegamos a

$$\tilde{\Psi} = \Psi. \quad (2.22)$$

Estas expressões são importantes, pois podemos agora caracterizar as perturbações de maneira livre de ambiguidades. Existe um número infinito de variáveis invariantes de gauge, uma vez que qualquer combinação de Φ e Ψ também será invariante de gauge. No entanto a escolha de Φ e Ψ é conveniente, pois como veremos no paragrafo seguinte, para um determinado gauge elas se igualam aos potenciais gravitacionais no limite clássico. Por essa razão esse gauge recebe o nome de gauge newtoniano.

Liberdade de gauge

A liberdade de gauge pode ser usada para impor condições sobre as funções ϕ , ψ , B , E . Isso só é possível desde que se tenha a liberdade para escolher as duas funções ξ^0 e ζ . Impor as condições de gauge é equivalente a fixação do sistema de coordenadas. Existem diversos tipos de gauge, essas diversas opções são usadas para calcular as métricas e

perturbações em sistemas de coordenadas, tornando o cálculo mais simples, de acordo com o sistema de coordenadas utilizados e o gauge apropriado à situação. Neste trabalho usaremos o gauge longitudinal ou newtoniano. O gauge newtoniano é definido pelas condições [5]

$$B = E = 0,$$

de modo que as perturbações escalares da métrica da Eq. (2.14) sejam diagonais. Assim, sob tal condição, com a Eq. (2.18) temos que $\zeta = 0$ e a Eq. (2.16) implica em $\xi^0 = 0$; portanto este gauge fixa completamente o sistema de coordenadas. Então, da Eq. (2.14) podemos escrever o elemento de linha associado às perturbações como

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[- (1 + 2\phi) d\eta^2 + (1 - 2\psi) \delta_{ij} dx^i dx^j \right]. \quad (2.23)$$

Se a parte espacial do tensor energia-momento é diagonal, isto é $\delta T_j^i \propto \delta_j^i$, temos $\phi = \psi$ [5], restando apenas uma variável escalar. Fazendo $\Phi = \phi$ e $\Psi = \psi$, obtemos

$$ds^2 = a^2(\eta) \left[- (1 + 2\Phi) d\eta^2 + (1 - 2\Psi) dx^2 \right], \quad (2.24)$$

que é o elemento de linha com as perturbações adotadas na Eq. (2.14) com a utilização do gauge newtoniano.

2.1.3 Equações para perturbações cosmológicas, em modos escalares

Para se obter as equações de perturbações devemos linearizar as equações de Einstein. Para isso temos que linearizar: o tensor métrico, os símbolos de Christoffel, o tensor de Ricci, o escalar de Ricci (de curvatura), o tensor de Einstein e o tensor de fluido perfeito. Estes cálculos estão desenvolvidos no apêndice A.

Perturbação na equação de Einstein

A dinâmica do universo é dada pelas equações de Einstein que relacionam a distribuição de matéria e energia, $[T_\nu^\mu]$, com as propriedades geométricas do espaço-tempo, $\left[R_\nu^\mu - \frac{1}{2} g_\nu^\mu R \right]$, através da relação

$$R_\nu^\mu - \frac{1}{2} R g_\nu^\mu = \kappa T_\nu^\mu.$$

De acordo com a Eq. (2.1), para pequenas perturbações na métrica, podemos escrever o tensor de Einstein como:

$$G_\nu^\mu = {}^{(0)}G_\nu^\mu + \delta G_\nu^\mu. \quad (2.25)$$

Da mesma maneira, podemos decompor o tensor energia-momento T_ν^μ , de modo que:

$$T_\nu^\mu = {}^{(0)}T_\nu^\mu + \delta T_\nu^\mu. \quad (2.26)$$

Dessa forma, relacionando os termos correspondentes podemos linearizar as equações de Einstein, de modo que a dinâmica do espaço-tempo de fundo respeite as equações

$${}^{(0)}G_{\nu}^{\mu} = \kappa {}^{(0)}T_{\nu}^{\mu}, \quad (2.27)$$

então, a evolução das pequenas perturbações primordiais, na métrica FRW, são descritas pelas equações

$$\delta G_{\nu}^{\mu} = \kappa \delta T_{\nu}^{\mu}. \quad (2.28)$$

As componentes $\delta G_{\mu\nu}$ e $\delta T_{\mu\nu}$ não são variáveis invariantes de gauge, e, para resolvermos a equação das perturbações linearizadas é necessário construir variáveis invariantes de gauge. Se combinarmos $\delta G_{\mu\nu}$ e $\delta T_{\mu\nu}$ com suas perturbações métricas, podemos construir quantidades variáveis invariantes de gauge [5]. Porém, como adotamos o gauge newtoniano ($B = E = 0$), temos [18]:

$$\delta \bar{G}_0^0 = \delta G_0^0, \quad \delta \bar{G}_i^0 = \delta G_i^0, \quad \delta \bar{G}_j^i = \delta G_j^i,$$

onde a barra superior ($\bar{\quad}$), significa que a componente é uma variável invariante de gauge. Usando também as relações para o tensor energia-momento, temos

$$\delta \bar{G}_{\nu}^{\mu} = \kappa \delta \bar{T}_{\nu}^{\mu}$$

que pode ser escrita como [5]:

$$\delta G_{\nu}^{\mu} = \kappa \delta T_{\nu}^{\mu}. \quad (2.29)$$

As componentes do tensor $\delta T_{\mu\nu}$ estão calculadas no Apêndice A.

Temos então os componentes do tensor de Einstein perturbados: *para o componente* δG_0^0 reescrevendo a Eq. (A.36), temos

$$\delta G_0^0 = \frac{2}{a^2} [\Delta \Psi - 3\mathcal{H}(\Psi' + \mathcal{H}\Phi)],$$

substituindo estes dados na Eq. (2.29) temos

$$[\Delta \Psi - 3\mathcal{H}(\Psi' + \mathcal{H}\Phi)] = \frac{\kappa}{2} a^2 \delta T_0^0. \quad (2.30)$$

Para o componente δG_i^0 , reescrevendo a Eq. (A.37),

$$\delta G_i^0 = \frac{2}{a^2} \partial_i (H\Phi + \Psi'),$$

e, substituindo na Eq. (2.29) temos

$$\partial_i (H\Phi + \Psi') = \frac{\kappa}{2} a^2 \delta T_i^0. \quad (2.31)$$

Para o componente δG_j^i , reescrevendo a Eq. (A.38),

$$\delta G_j^i = \frac{2}{a^2} \left[\Psi'' + \mathcal{H} (2\Psi + \Phi)' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) \Phi + \frac{1}{2} \Delta (\Phi - \Psi) \right] \delta_j^i - \frac{1}{2} \partial_i \partial_j (\Phi - \Psi)$$

e, substituindo na Eq. (2.29) temos

$$\left[\Psi'' + \mathcal{H} (2\Psi + \Phi)' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) \Phi + \frac{1}{2} \Delta (\Phi - \Psi) \right] \delta_j^i - \frac{1}{2} \partial_i \partial_j (\Phi - \Psi) = -\frac{\kappa}{2} a^2 \delta T_j^i. \quad (2.32)$$

Desde que $\delta T_j^i = 0$ se $i \neq j$ temos que $\partial_i \partial_j (\Phi - \Psi) = 0$, portanto $\Phi = \Psi$, identidade essa que vamos adotar de agora em diante. Substituindo a Eq. (A.33) na Eq. (2.30) encontramos

$$\Delta \Phi - 3\mathcal{H} (\Phi' + \mathcal{H}\Phi) = \frac{\kappa}{2} a^2 \delta \rho, \quad (2.33)$$

substituindo a Eq. (A.34) na Eq. (2.31) temos

$$\partial_i (a\Phi)' = \frac{\kappa}{2} a^2 (\rho + P) \delta u_i, \quad (2.34)$$

onde δu_i é a perturbação espacial da velocidade. Finalmente, substituindo a Eq. (A.35) na Eq. (2.32), temos

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) \Phi = \frac{\kappa}{2} a^2 \delta P. \quad (2.35)$$

Se o universo é estático ($\mathcal{H} = 0$), a Eq. (2.33) tem a forma clássica da equação de Poisson,

$$\Delta \Phi = \frac{\kappa}{2} a^2 \delta \rho, \quad (2.36)$$

que também pode ser escrita como

$$\Delta \Phi = \frac{\kappa}{2} a^2 \rho \delta, \quad (2.37)$$

onde δ é o contraste de densidade, que é definido como sendo:

$$\delta(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{\rho(\mathbf{x}, t) - \bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}(t)}, \quad (2.38)$$

sendo: $\rho(\mathbf{x}, t)$ a densidade local e $\bar{\rho}(t)$ a densidade média do universo. A equação acima pode ser usada na forma simplificada, como a Eq. (A.18).

Percebemos neste ponto que existe um problema, pois temos mais variáveis: Φ , $\delta\rho$, δP , δu_i , que equações. Devemos então, introduzir uma equação de estado para o fluido, sendo que a pressão deve depender da densidade de energia e também da entropia do fluido, $P = P(\rho, S)$. Então, a flutuação da pressão δP pode ser expressa como:

$$\begin{aligned} \delta P &= \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_S \delta \rho + \left(\frac{\partial P}{\partial S} \right)_\rho \delta S, & \frac{\partial P}{\partial S} \delta S &\equiv P\Gamma \\ \delta P &\equiv c_s^2 \delta \rho + P\Gamma, \end{aligned} \quad (2.39)$$

sendo que c_s^2 é a velocidade do som neste fluido, definida na Eq. (A.17) e Γ é definido na relação acima como sendo a perturbação da entropia, que pode tomar a seguinte forma [14].

$$\omega\Gamma = \frac{1}{\rho}(\delta P - c_s^2\delta\rho), \quad (2.40)$$

sendo que para perturbações adiabáticas, $\Gamma = 0$ e $c_s^2 = \delta P/\delta\rho$.

Podemos então reescrever a *EPerturbações Escalares*: quatro perturbações (ϕ , ψ , B , E), fornecendo 4 graus de liberdade (componentes independentes). Estas perturbações são as mais importantes porque elas representam a instabilidade gravitacional nas distribuições de matéria e energia, as quais estão diretamente ligadas ao processo de formação de estruturas pela ação gravitacionalq. (2.33) com os dados da Eq. (2.39)

$$\Delta\Phi - 3\mathcal{H}(\Phi' + \mathcal{H}\Phi) = \frac{\kappa}{2}a^2 \left(\frac{\delta P - \Gamma\delta S}{c_s^2} \right),$$

então

$$c_s^2\Delta\Phi - 3\mathcal{H}c_s^2(\Phi' + \mathcal{H}\Phi) + \frac{\kappa}{2}a^2\Gamma\delta S = \frac{\kappa}{2}a^2\delta P. \quad (2.41)$$

Igualando a Eq. (2.41) com a (2.35) temos

$$\Phi'' + 3\mathcal{H}\Phi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi = c_s^2\Delta\Phi - 3\mathcal{H}c_s^2(\Phi' + \mathcal{H}\Phi) + \frac{\kappa}{2}a^2\Gamma\delta S,$$

que também pode ser escrita como [14]

$$\Phi'' + 3(1 + c_s^2)\mathcal{H}\Phi' - c_s^2\Delta\Phi + [2\mathcal{H}' + (1 + 3c_s^2)\mathcal{H}^2]\Phi = \frac{\kappa}{2}a^2P\Gamma, \quad (2.42)$$

que é a equação de evolução do potencial gravitacional.

2.1.4 Perturbações da equação de conservação de um fluido

Assim como as equações de Einstein, a equação de conservação de um fluido, Eq. (1.17), também deve ser linearizada, ficando dessa forma:

$$\nabla_\mu(\delta T_\nu^\mu) = \delta T_{\nu,\mu}^\mu + \delta\Gamma_{\alpha\mu}^\mu T_\nu^\alpha + \Gamma_{\alpha\mu}^\mu \delta T_\nu^\alpha - \delta\Gamma_{\mu\nu}^\alpha T_\alpha^\mu - \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \delta T_\alpha^\mu = 0, \quad (2.43)$$

esta equação gera duas equações escalares e uma vetorial para as perturbações hidrodinâmicas.

No modo escalar, as perturbações do fluido obedecem a equação de continuidade e a equação de Euler [14, 20], então:

$$\frac{d\delta}{d\eta} + 3\mathcal{H}(c_s^2 - \omega)\delta = -(1 + \omega)(\Delta V - 3\Phi') - 3\mathcal{H}\omega\Gamma, \quad (2.44)$$

onde V é a velocidade peculiar. Esta equação pode ser escrita na forma [14, 20]:

$$\left(\frac{\delta}{1 + \omega} \right)' = -(\Delta V - 3\Phi') - 3\mathcal{H} \left(\frac{\omega}{1 + \omega} \right) \Gamma, \quad (2.45)$$

que é a equação $\nabla_\mu \delta T_\nu^\mu = 0$, para o caso em que $\nu = 0$. A outra equação escalar obtida, que é análoga à equação de Euler, é dada por [20]

$$V' + \mathcal{H} (1 - 3c_s^2) V = -\Phi - \frac{c_s^2}{1 + \omega} \delta - \frac{\omega}{1 + \omega} \Gamma \quad (2.46)$$

2.1.5 Evolução das perturbações

Com as equações para as perturbações já calculadas anteriormente, é possível usá-las para estudar alguns casos simples. A maneira mais prática de resolvê-las é no espaço de Fourier. Seja f uma função escalar que dependa da posição e do tempo conforme, $f(\mathbf{x}, \eta)$, como estas equações envolvem derivadas espaciais através do operador laplaciano, elas se reduzirão a equações diferenciais ordinárias no espaço de Fourier da seguinte forma [14]:

$$f(\mathbf{x}, \eta) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k f_{\mathbf{k}}(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \quad (2.47)$$

sendo k o número conforme de onda, e, \mathbf{k} o vetor de onda conforme da perturbação, o comprimento de onda conforme da perturbação é $\lambda \propto \frac{1}{k}$, com $k = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})^{1/2}$, e, através do Laplaciano, temos a seguinte identificação

$$\nabla^2 f \rightarrow -k^2 f,$$

com estas situações, as equações para as perturbações dependerão de termos relacionados com o número de onda k e termos relacionados com o parâmetro conforme de Hubble \mathcal{H} , em muitos casos vamos distinguir dois regimes, ver Fig. 6:

- *modo super-Hubble* (ou super-horizonte), em que o comprimento de onda das perturbações é maior que o raio de Hubble, $\lambda > H^{-1}$,

- *modo sub-Hubble* (ou sub-horizonte), em que o comprimento de onda das perturbações é menor que o raio de Hubble, $\lambda < H^{-1}$.

No espaço de Fourier, a Eq. (2.42) para perturbações adiabáticas, $\delta S = 0$, fica

$$\Phi_{\mathbf{k}}'' + 3 \left(1 + c_s^2\right) \mathcal{H} \Phi_{\mathbf{k}}' + c_s^2 k^2 \Phi_{\mathbf{k}} + \left[2\mathcal{H}' + \left(1 + 3c_s^2\right) \mathcal{H}^2\right] \Phi_{\mathbf{k}} = 0. \quad (2.48)$$

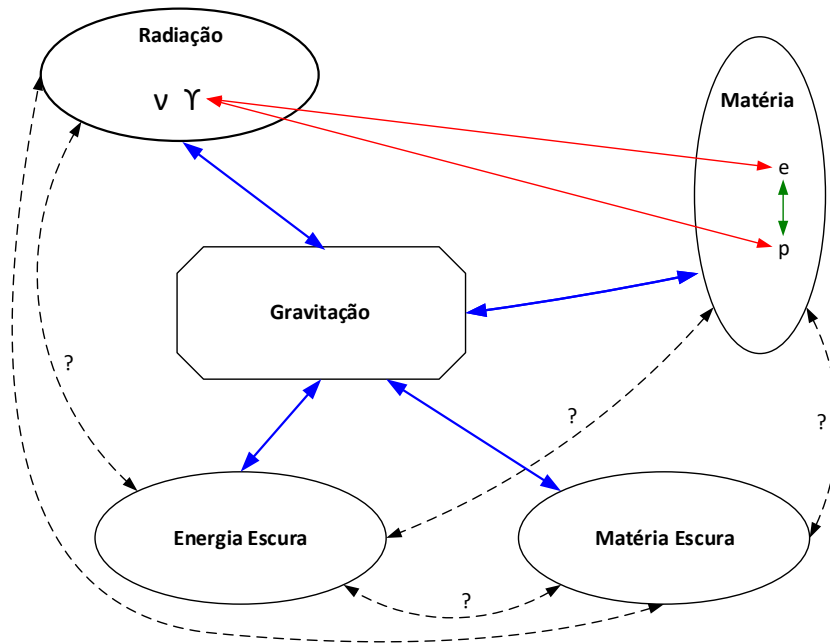
Nota-se que para diferentes fluidos e diferentes números de onda, temos diferentes evoluções do potencial gravitacional, $\Phi_{\mathbf{k}}$.

2.1.6 Mistura de diversos fluidos

No contexto cosmológico atual, devemos considerar vários fluidos, já definidos no modelo cosmológico Λ CDM. Estes diferentes fluidos interagem através da gravidade, mas também podem ser acoplados por meio de forças não gravitacionais. A Fig. 8 resume os principais componentes que devem ser considerados e suas interações potenciais, que podem

ser resumidos da seguinte forma: elétrons e bárions são acoplado através da força de Coulomb; fótons interagem com a matéria carregada através do espalhamento de Compton; a matéria escura só interage gravitacionalmente com a matéria comum; não é de excluir que energia escura interage com a matéria comum ou com a matéria escura de uma forma ainda desconhecida.

Figura 8 – Interação entre fluidos cosmológicos.



Fonte: Referência [14].

No caso mais geral de acoplamento, a conservação do tensor energia-momento só é válida para o tensor total, considerando que a conservação do tensor energia-momento, acontece pela conservação de cada elemento do tensor, satisfazendo as equações de conservação na forma:

$$\nabla_{\mu} T_a^{\mu\nu} = Q_a^{\nu}$$

onde, Q_a^{ν} representa as forças que atuam sobre a componente de um fluido. Evidentemente, Q_a^{ν} deve ser tal que $\sum_a Q_a^{\nu} = 0$.

Sistema de fluidos interagindo gravitacionalmente

Considerando o caso simplificado em que um conjunto de fluidos interage somente através da gravitação, $Q_a^{\mu} = 0$ para cada fluido e, o tensor energia-momento é assim a soma dos tensores de energia-momento de cada fluido, então, $T^{\mu\nu} = \sum_a T_a^{\mu\nu}$. Cada tensor energia-momento, pode ser decomposto, de modo que a densidade e pressão total podem ser definidas como

$$\rho = \sum_a \rho_a, \quad P = \sum_a P_a, \quad (\rho + P) v^i = \sum_a (\rho_a + P_a) v_a^i$$

então

$$\Omega\omega = \sum_a \Omega_a \omega_a \quad (2.49)$$

sendo Ω_a a densidade de energia (adimensional), definido na Eq. (A.12), que combinando com a Eq. (A.17), chegamos a

$$c_s^2 = \frac{P'}{\rho'} = \frac{\left(\sum_a P_a\right)'}{\rho'} = \frac{\left(\sum_a \omega_a \rho_a\right)'}{\rho'} = \frac{\sum_a \omega'_a \rho_a + \sum_a \omega_a \rho'_a}{\rho'}.$$

Como a Eq. (1.21) pode ser escrita como $\rho' + 3\mathcal{H}(1 + \omega)\rho = 0$, então é válida também a equação $\rho'_a + 3\mathcal{H}(1 + \omega_a)\rho_a = 0$. Combinando estes resultados com as Eqs. (A.14) e (A.19) na equação acima, temos

$$\Omega c_s^2 = \frac{\sum(1 + \omega_a)\Omega_a c_a^2}{(1 + \omega)} \quad (2.50)$$

Como em grandes escalas apenas a matéria e a radiação, ou a matéria e a constante cosmológica, desempenham papel relevante, vamos considerar um sistema de dois fluidos. Ele será descrito por duas densidades, δ_a e δ_b , e por dois campos de velocidade, v_a^i e v_b^i . Isto é conveniente para transformar essas variáveis em um conjunto de variáveis, δ e v , descrevendo as propriedades totais do fluido e um conjunto de variáveis S_{ab} e V_{ab}^i , descrevendo sua propriedades relativas.

As definições das Eq. (2.49) implicam que: $\Omega\delta = \sum_a \Omega_a \delta_a$ e $\Omega(1 + \omega)v = \sum_a \Omega_a(1 + \omega_a)v_a$, para modos escalares. Estas quantidades satisfazem as Eq. (2.44) e (2.46).

A perturbação na entropia, Γ , pela relação da Eq. (2.40), para uma mistura de fluidos, toma a forma

$$\Omega\omega\Gamma = \sum_a \Omega_a \omega_a \Gamma_a + \sum_a (c_s^2 - c_a^2) \Omega_a \delta_a. \quad (2.51)$$

O primeiro termo, do lado direito da equação, corresponde à contribuição da entropia dos componentes da mistura e, o segundo termo, que não desaparece mesmo se $\Gamma_a = 0$ para um dado componente, representa a entropia da mistura. Podemos verificar que esta segunda contribuição é um invariante de gauge [14].

Neste ponto podemos reescrever a parte da direita da Eq. (2.37), usando a Eq. (A.14), e $\Omega\delta = \sum_a \Omega_a \delta_a$, chegamos a

$$\Delta\Phi = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2 \sum_a \Omega_a \delta_a. \quad (2.52)$$

Definindo as relações de entropia entre dois fluidos, de forma que, partindo da Eq. (2.51), fazendo $\Gamma = \Gamma_a$. Ficamos então com $\sum_a (c_s^2 - c_a^2) \Omega_a \delta_a$, fazendo em seguida a soma de $[a, b]$ e aplicando a Eq. (2.50), igualando-a a zero, chegamos em

$$S_{ab} \equiv \left(\frac{\delta_a}{1 + \omega_a}\right) - \left(\frac{\delta_b}{1 + \omega_b}\right) \quad (2.53)$$

e

$$V_{ab} \equiv v_a - v_b. \quad (2.54)$$

As Eqs. (2.53) e (2.54) são, por definição, invariantes de gauge. Usando as relações da Eq. (2.51) podemos facilmente obter a relação inversa

$$\left[\left(\frac{\Omega_b}{1 + \omega_a} \right) + \left(\frac{\Omega_a}{1 + \omega_b} \right) \right] \delta_a = \left(\frac{\Omega}{1 + \omega_b} \right) \delta + \Omega_b S_{ab}$$

e analogamente, obtemos δ_b , trocando a por b . A evolução das equações para as quantidades S_{ab} e V_{ab} são obtidas pela combinação das Eq. (2.45) e (2.46), para cada fluido, temos então

$$S'_{ab} = -\Delta V_{ab} - 3\mathcal{H}\Gamma_{ab} \quad (2.55)$$

e

$$V'_{ab} = -3\mathcal{H}V_{ab} - (c_a^2 - c_b^2) \left(\frac{\delta}{1 + \omega} \right) - \left[c_a^2 (1 + \omega_b) \frac{\Omega_b}{\Omega} + c_b^2 (1 + \omega_a) \frac{\Omega_a}{\Omega} \right] \frac{S_{ab}}{1 + \omega} - \Gamma_{ab}, \quad (2.56)$$

com a seguinte definição:

$$\Gamma_{ab} \equiv \left(\frac{\omega_a}{1 + \omega_a} \right) \Gamma_a - \left(\frac{\omega_b}{1 + \omega_b} \right) \Gamma_b.$$

Para resolver completamente a evolução gravitacional de um sistema de dois fluidos interagentes, temos que resolver a evolução da Eq. (2.42), onde Γ agora é dado pela relação da Eq. (2.51) em conjunto com o par de Eqs. (2.55) e (2.56).

2.1.7 Modos adiabáticos e de isocurvaturas

Dois tipos diferentes de condições iniciais podem ser distinguidos num sistema de dois fluidos. Podemos decidir que a perturbação da entropia desapareça inicialmente (condições iniciais adiabáticas), ou, providenciar que o potencial gravitacional inicialmente desapareça, ou seja, o equilíbrio das perturbações de densidade, de modo que $\delta = 0$, que é a condição inicial de isocurvatura. Podemos definir os dois regimes limitantes como:

Adiabático: presumimos que $\Gamma = S_{ab} = 0$, na Eq. (2.53). Como $S_{ab} = 0$, temos que

$$\frac{\delta_a}{1 + \omega_a} = \frac{\delta_b}{1 + \omega_b}$$

Isocurvatura: neste caso, impomos que $\Phi = 0$, na Eq. (2.52) temos que $\sum_a \Omega_a \delta_a = 0$ então,

$$\Omega_a \delta_a + \Omega_b \delta_b = 0 \quad (2.57)$$

Desde que a evolução das equações sejam lineares, qualquer sistema pode sempre ser decomposto em uma combinação linear de um sistema inicialmente adiabático e um sistema inicialmente de isocurvatura.

2.1.8 Mistura de dois fluidos perfeitos

A discussão no parágrafo anterior é muito geral. Na prática, estamos interessados em casos particulares mais simples. Vamos considerar uma mistura de dois fluidos perfeitos, basicamente matéria e radiação, onde $\Gamma_a = 0$. Usando as Eq. (2.49) e (2.50) a relação (2.51) se reduz a

$$\omega\Gamma = \frac{\Omega_a\Omega_b(1+\omega_a)(1+\omega_b)}{\Omega^2(1+\omega)}(c_a^2 - c_b^2)S_{ab}. \quad (2.58)$$

Podemos trabalhar no lado direito da Eq. (2.42), $\left(\frac{\kappa}{2}a^2P\Gamma\right)$, usando as Eq. (A.14) e (A.11), chegamos a

$$\frac{\kappa}{2}a^2P\Gamma = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\Omega\omega\Gamma$$

que substituindo em (2.58) nos leva a

$$\frac{3}{2}\mathcal{H}^2\omega\Gamma = \left(\frac{3}{2}\mathcal{H}^2\right) \frac{\Omega_a\Omega_b(1+\omega_a)(1+\omega_b)}{\Omega(1+\omega)}(c_a^2 - c_b^2)S_{ab}.$$

Igualando esta equação à Eq. (2.42), temos :

$$\begin{aligned} \Phi'' + 3\mathcal{H}(1+c_s^2)\Phi' + [2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2(1+3c_s^2)]\Phi - c_s^2\Delta\Phi = \\ \frac{3}{2}\mathcal{H}^2 \frac{\Omega_a\Omega_b(1+\omega_a)(1+\omega_b)}{\Omega(1+\omega)}(c_a^2 - c_b^2)S_{ab}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Partindo da Eq. (2.37) substituindo a Eq. (A.14), temos

$$\Delta\Phi = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2\Omega\delta. \quad (2.60)$$

Usando a Eq. (2.37) e, trabalhando com o lado direito $\left(\frac{\kappa}{2}a^2\rho\delta^C\right)$, usando as Eq. (A.14) e (2.58) temos

$$S''_{ab} + \mathcal{H}S'_{ab} - \left[\frac{\Omega_a(1+\omega_a)c_b^2 + \Omega_b(1+\omega_b)c_a^2}{\Omega(1+\omega)} \right] \Delta S_{ab} = (c_a^2 - c_b^2) \frac{\Delta\delta}{1+\omega}. \quad (2.61)$$

As Eqs. (2.59), (2.60) e (2.61) se reduzem a um sistema de duas equações diferenciais acopladas de segunda ordem. Vamos utilizar estas equações nas próximas seções para ver como é a evolução das perturbações num universo com radiação e matéria.

Matéria e radiação

Considerando que o universo é constituído de matéria escura fria e radiação, podemos analisar a situação deste dois fluidos na evolução de suas perturbações. Introduzindo o parâmetro y , normalizado no instante a_{eq} , ver Fig. 7, temos

$$y \equiv \frac{a}{a_{eq}} = \frac{\rho_m}{\rho_r}.$$

Podemos verificar que, se $y = 1$, temos a situação em que a densidade de energia da matéria é igual a densidade de energia da radiação, se $y \gg 1$ temos o predomínio da matéria e se $y \ll 1$ temos o predomínio da radiação. A equação de Friedmann, (1.19), com o fator de escala y normalizado no instante de equivalência a_{eq} , sendo \mathcal{H}_{eq} o valor de \mathcal{H} em a_{eq} , fica:

$$\mathcal{H}_{eq}^2 = \frac{\kappa}{3} a_{eq}^2 (\rho_m + \rho_r)_{eq},$$

isolando $\frac{\kappa}{3}$ nesta equação e na Eq. (1.19), igualando os termos, e usando as relações $\rho_m \sim a^{-3}$ e $\rho_r \sim a^{-4}$, chegamos a

$$\mathcal{H}^2 = \frac{\mathcal{H}_{eq}^2 (1 + y)}{2 y^2}. \quad (2.62)$$

Introduzindo o valor k_{eq} como sendo o número de onda correspondente ao comprimento do raio de Hubble no instante de equivalência, então:

$$k_{eq} = \mathcal{H}_{eq}^{-1}$$

Podemos calcular a equação de estado (A.11) em função de y , seguindo o raciocínio: como $\rho = \rho_m + \rho_r$, $P = P_m + P_r$, $P_m = 0$ e $P_r = \rho_r/3$, substituindo em (A.11), temos

$$\omega = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 + y} \right), \quad (2.63)$$

vale notar que se $y \gg 1$, temos que $\omega = 0$, tendo o predomínio da matéria, se $y \ll 1$, temos que $\omega = 1/3$, tendo o predomínio da radiação. Da mesma forma podemos calcular a velocidade do som, c_s^2 , definida em (A.17), usando as relações

$$\frac{\delta \rho_m}{\rho_m} = \frac{3 \delta \rho_r}{4 \rho_r} = \frac{3}{4} y \quad e \quad \frac{\rho'_m}{\rho'_r} = \frac{\delta \rho_m}{\delta \rho_r} = \frac{3}{4} y,$$

substituindo em (A.17), temos

$$c_s^2 = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{3}{4} y \right)^{-1} \quad (2.64)$$

Duas abordagens equivalentes:

Podemos seguir duas abordagens para estudar um sistema físico com matéria e radiação. A primeira é a de considerar as quatro equações de evolução para os contrastes de densidades, as perturbações de velocidade de cada fluido e a equação de Poisson. A segunda é usar os resultados do parágrafo anterior para o contraste de densidade total e as perturbações de entropia. Vamos usar um ou o outro caso, dependendo da situação.

Evolução do contraste de densidade: Nosso sistema é composto de uma mistura de radiação e matéria que apenas interage gravitacionalmente, de modo que o sistema de equações é deduzido das Eq. (2.44) e (2.46), que em modos de Fourier, se reduzem a [14]

$$\delta'_m = k^2 V_m + 3\Phi', \quad (2.65)$$

$$\delta'_r = \frac{4}{3}k^2 V_r + 4\Phi', \quad (2.66)$$

$$V'_m = -\mathcal{H}V_m - \Phi, \quad (2.67)$$

$$V'_r = -\Phi - \frac{1}{4}\delta_r. \quad (2.68)$$

Uma outra equação deve ser adicionada para determinar o potencial gravitacional, escolhendo utilizar a equação de Poisson, temos [14]

$$-k^2\Phi = \frac{3}{2}\mathcal{H}^2 \left[\Omega_m \delta_m + \Omega_r \delta_r - 3\mathcal{H} \left(\Omega_m V_m + \frac{4}{3}\Omega_r V_r \right) \right]. \quad (2.69)$$

Evolução do potencial gravitacional e da entropia: Iremos agora simplificar a Eq. (2.59), introduzindo o parâmetro y e usando as relações das Eqs. (2.62) a (2.64) e (A.20). Convertendo para o espaço de Fourier, essa álgebra nos leva finalmente a

$$\ddot{\Phi} + \frac{1}{2y} \left(7 - \frac{1}{1+y} + \frac{8}{4+3y} \right) \dot{\Phi} + \frac{\Phi}{y(1+y)(4+3y)} = \frac{2}{(4+3y)y^2} \left[\delta - \left(\frac{y}{1+y} \right) S \right]. \quad (2.70)$$

Introduzindo o parâmetro y na Eq. (2.60), usando as relações das Eqs. (2.62) a (2.64), (A.14) e a igualdade $\Omega = 1$, temos:

$$\frac{2}{3}k^2\Phi = \mathcal{H}^2\delta = \mathcal{H}_{eq}^2 \frac{1+y}{2y^2}\delta,$$

com um pouco de álgebra, chegamos a

$$\delta = -\frac{4}{3} \left(\frac{k}{k_{eq}} \right)^2 \left(\frac{y^2}{1+y} \right) \Phi. \quad (2.71)$$

Se $\frac{k}{k_{eq}} \gg 1$ temos a situação de pequeno comprimento de onda, e, se $\frac{k}{k_{eq}} \ll 1$ temos a situação de grande comprimento de onda. Para a Eq. (2.61), com o parâmetro y , vamos utilizar as Eqs. (2.65) a (2.68) sabendo que $S = \delta_m - \frac{3}{4}\delta_r$, e também as relações de y já utilizada anteriormente, temos então:

$$\ddot{S} + \left[\frac{(3y+2)}{2y(1+y)} \right] \dot{S} = \frac{2}{(4+3y)} \left(\frac{k}{k_{eq}} \right)^2 \left[\delta - \left(\frac{y}{1+y} \right) S \right]. \quad (2.72)$$

Com as Eqs. (2.70), (2.71) e (2.72) podemos verificar a evolução do potencial Φ , da entropia S , do potencial e da entropia acoplados e do contraste de densidade δ , relacionando com número de onda k e fator de escala a relacionados ao instante a_{eq} .

Trabalhando com as Eq. (2.70) e (2.72).

Substituindo a Eq. (2.71) na Eq. (2.70) temos,

$$\ddot{\Phi} + \frac{1}{2y} \left(7 - \frac{1}{1+y} + \frac{8}{4+3y} \right) \dot{\Phi} + \frac{\Phi}{y(1+y)(4+3y)} + \frac{8}{3} \Phi \left[\frac{1}{(1+y)(4+3y)} \right] \left(\frac{k}{k_{eq}} \right)^2 + \left[\frac{1}{y(1+y)(4+3y)} \right] S = 0, \quad (2.73)$$

e, substituindo a Eq. (2.71) na Eq. (2.72) temos,

$$\ddot{S} + \left[\frac{(3y+2)}{2y(1+y)} \right] \dot{S} + \frac{8}{3} \left[\frac{y^2}{(1+y)(4+3y)} \right] \left(\frac{k}{k_{eq}} \right)^4 \Phi + \left[\frac{2y}{(1+y)(4+3y)} \right] \left(\frac{k}{k_{eq}} \right)^2 S = 0. \quad (2.74)$$

Condições iniciais:

Para resolver os sistemas de Equações de (2.70) a (2.72) as condições iniciais para as perturbações precisam ser impostas. Estas condições iniciais são fixadas na era de radiação, quando $y \ll 1$, e, para os modos super-Hubble, quando $k/\mathcal{H} \ll 1$. Como visto anteriormente, podemos distinguir dois tipos de condições iniciais:

Adiabáticas: os modos super-Hubble são considerados constantes, em outras palavras, o modo de decaimento teve tempo suficiente para se anular, e, por definição, temos, $\Phi = \Phi_i$, $\dot{\Phi} = 0$, $S = S_i$, $\dot{S} = 0$, que alteram as Eq. (2.70) a (2.72) [14]. o que fixa completamente as condições iniciais adiabáticas, para o sistema de Eq. (2.70) a (2.72).

Isocurvas: assumimos ainda que os modos super-Hubble são constantes e definimos $\Phi = \Phi_i$, $\dot{\Phi} = 0$, $S = S_i$, $\dot{S} = 0$ [14]. O que fixa completamente as condições iniciais de isocurvatura, para o sistema de Eq. (2.70) a (2.72).

2.1.9 Estudos sobre a evolução das perturbações num universo com radiação e matéria.

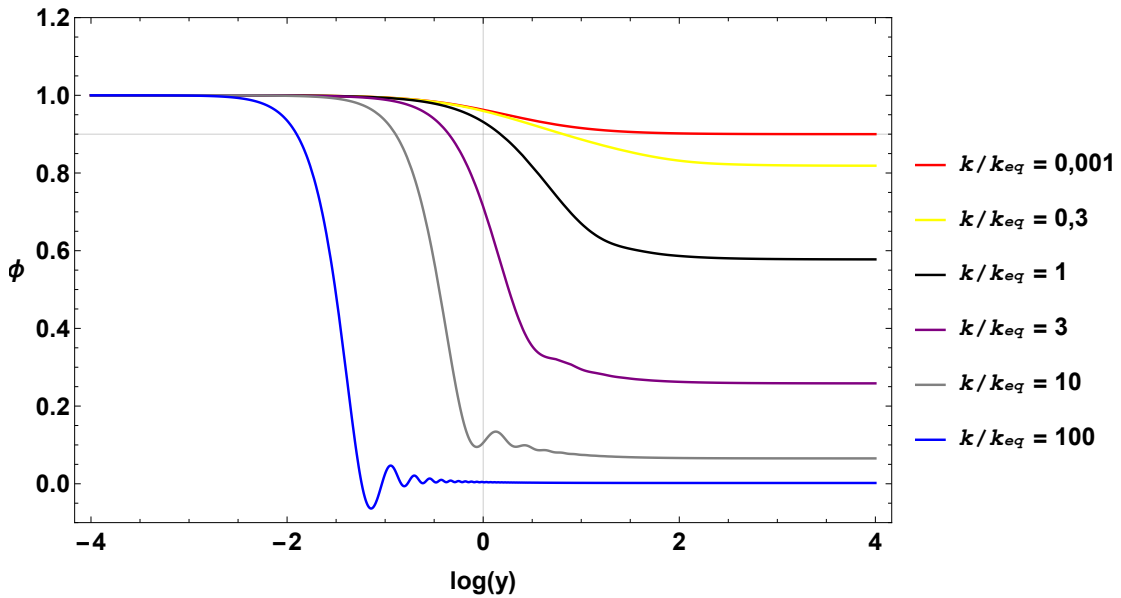
Nos gráficos a seguir, resolveremos numericamente as Eq. (2.70), (2.71) e (2.72), juntamente com suas variações (2.73) e (2.74), em diferentes cenários.

Temos diversos parâmetros a serem considerados para as condições iniciais adiabáticas e/ou de isocurvatura; esses parâmetros são: $\Phi_{inicial}$, $\dot{\Phi}_{inicial}$, $S_{inicial}$, $\dot{S}_{inicial}$, y e $\frac{k}{k_{eq}}$. Vamos procurar impor situações onde possamos tirar algumas informações úteis. Em todas as situações a seguir iremos considerar um universo composto de matéria e radiação.

Solução numérica para o potencial gravitacional com condições iniciais adiabáticas.

Resolvendo as Eqs. (2.73) e (2.74), com condições adiabáticas. Como temos uma EDO de segunda ordem para ser resolvida numericamente, devemos fixar o potencial e sua primeira derivada, de forma que: $\Phi(10^{-4}) = 1$, $\dot{\Phi}(10^{-4}) = 0$, $S(10^{-4}) = \dot{S}(10^{-4}) = 0$, com o fator y variando de $(10^{-4}, 10^4)$ e o fator $\frac{k}{k_{eq}}$ com os seguintes valores (0,001; 0,3; 1; 3; 10; 100). Por que fixamos $\Phi(10^{-4}) = 1$? Por uma questão de simplicidade e melhor visualização do gráfico, é um valor que vai influenciar na amplitude, mas não na forma do gráfico, que é o que nos interessa. E o valor de y variando de $(10^{-4}, 10^4)$? Como y se relaciona com o fator de escala no momento da equivalência, e com as densidade de matéria e radiação, ao tomarmos um y pequeno, $y \ll 1$, garantimos que estamos na era pura da radiação, e quando $y \gg 1$ estamos na era da matéria. O fator $\frac{k}{k_{eq}}$ vai nos mostrar a forma do gráfico em relação a grandes ou pequenos comprimentos de onda.

Figura 9 – Potencial gravitacional com condições iniciais adiabáticas.



Para pequenos comprimentos de onda $k/k_{eq} \gg 1$, no gráfico acima $k/k_{eq} = 100$, o modo Φ_k , “entra” no raio de Hubble muito cedo, então todo processo ocorre na era de domínio da radiação, $y \ll 1$, o potencial oscila em torno de zero, até finalmente zerar na era da matéria, $y \gg 1$. Nesta situação, a atração gravitacional faz com que o fluido se contraia, enquanto que a pressão de radiação faz com que ele se distenda, causando uma oscilação tipo um movimento harmônico forçado.

Podemos fazer outras abordagens estes gráficos, como por exemplo: trabalhando com a Eq. (2.42), fazendo $\Gamma = 0$, temos:

$$\Phi'' + 3(1 + c_s^2) \mathcal{H} \Phi' - c_s^2 \Delta \Phi + [2\mathcal{H}' + (1 + 3c_s^2) \mathcal{H}^2] \Phi = 0,$$

para a era do domínio da matéria, temos: $c_s^2 = 0$, e $\mathcal{H} = 2/\eta$, substituindo essas igualdades na Eq.(2.42), chegamos a:

$$\Phi'' + \frac{6}{\eta} \Phi' = 0, \quad (2.75)$$

esta equação tem a solução:

$$\Phi(\eta) = C_1(\mathbf{x}) + \frac{C_2(\mathbf{x})}{\eta^5},$$

onde C_1 e C_2 são constantes de integração, neste caso teremos os gráficos para $\frac{k}{k_{eq}} < 1$ na Fig. 9.

Para a era do domínio da radiação, temos: $c_s^2 = 1/3$ e $\mathcal{H} = 1/\eta$, substituindo estes valores na Eq.(2.42), chegamos a:

$$\Phi'' + \frac{4}{\eta} \Phi' + \frac{k^2}{3} \Phi = 0, \quad (2.76)$$

que tem solução através das funções de Bessel:

$$\Phi_{\mathbf{k}} = \eta^{-\nu} [C_1 J_{\nu} x + C_2 Y_{\nu} x]$$

para esta situação, temos: $x = k\eta/3$, $\nu = 3/2$ e $J_{\nu} Y_{\nu}$ são funções de Bessel de ordem ν . A solução dessa equação fica:

$$\Phi_{\mathbf{k}} = \frac{1}{x^2} \left[C_1 \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x \right) + C_2 \left(\frac{\cos x}{x} + \sin x \right) \right],$$

A Eq. (2.76) é semelhante à equação de um movimento harmônico forçado

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0 x = 0,$$

onde γ é a intensidade de amortecimento do movimento, e ω_0 é a frequência natural. No nosso caso, como o sistema oscila com uma frequência decrescendo a zero, temos o regime subcrítico, onde $\gamma^2 < \omega_0^2$.

Na Fig. 9, os gráficos para $\frac{k}{k_{eq}} > 10$ mostram esta situação, quanto menor o comprimento de onda, mais o potencial oscilará em torno de zero até que a era da matéria domine e o potencial caia a zero.

Para valores intermediários de comprimentos de onda, $\frac{k}{k_{eq}} = 0,3$, o modo Φ_k , “entrará” na era da radiação mais próximo da transição entre a radiação e a matéria, e de forma suave. Como a pressão do fluido é pequena, o potencial não oscilará.

Podemos verificar também esta abordagem: para grandes comprimentos de onda, $k/k_{eq} \ll 1$, é possível obter uma solução analítica do potencial Φ_k . Neste caso a Eq. (2.73), fica,

$$\ddot{\Phi} + \frac{1}{2y} \left(7 - \frac{1}{1+y} + \frac{8}{4+3y} \right) \dot{\Phi} + \frac{\Phi}{y(1+y)(4+3y)} = 0,$$

para ser resolvida, faz-se $\Phi_1(y) = \phi \frac{\sqrt{1+y}}{y^3}$ [14], e, através de substituições e integrais, chega-se a

$$\Phi_k = \frac{\Phi_{k0}}{10y^3} (16\sqrt{1+y} + 9y^3 + 2y^2 - 8y - 16), \quad (2.77)$$

sendo Φ_{k0} uma constante da integração. Fazendo Φ_k como o potencial na era da matéria ($y \gg 1$) e Φ_{k0} o potencial na era da radiação ($y \ll 1$) podemos relacionar estes dois parâmetros na equação acima e obtermos

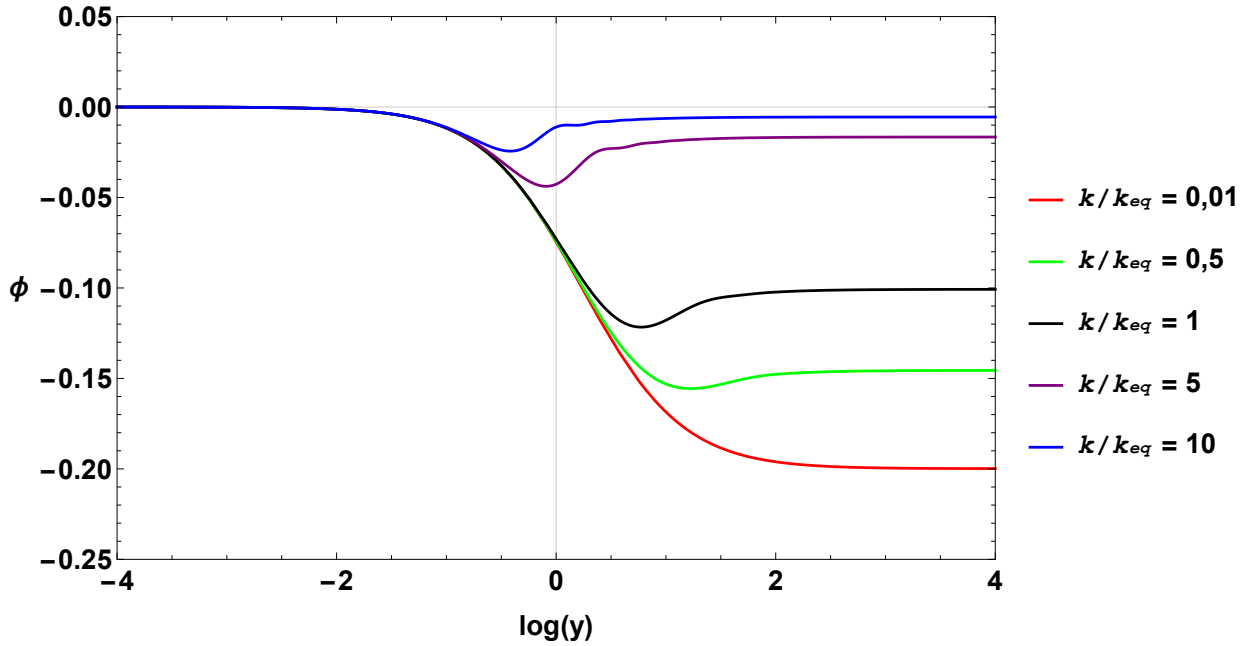
$$\frac{\Phi_k}{\Phi_{k0}} = \frac{9}{10} \quad \text{ou} \quad \Phi(y \gg 1) = \frac{9}{10} \Phi(y \ll 1),$$

no gráfico da Fig. 9, para $k/k_{eq} = 0,001$, ou seja para grandes comprimentos de onda, o potencial na era da matéria é $\frac{9}{10}$ da era da radiação, sendo este, um caso especial na transição da dominação da radiação para a matéria [14].

Solução numérica para o potencial gravitacional com entropia e condições iniciais de isocurvatura.

Neste caso as condições iniciais são: $\Phi(10^{-4}) = \Phi'(10^{-4}) = 0$, $S(10^{-4}) = 1$, $S'(10^{-4}) = 0$, com o fator y variando de $(10^{-4}, 10^4)$ e o fator $\frac{k}{k_{eq}}$ com os seguintes valores $(0,001; 0,5; 1; 5; 10)$.

Figura 10 – Potencial gravitacional com entropia e condições iniciais de isocurvatura.



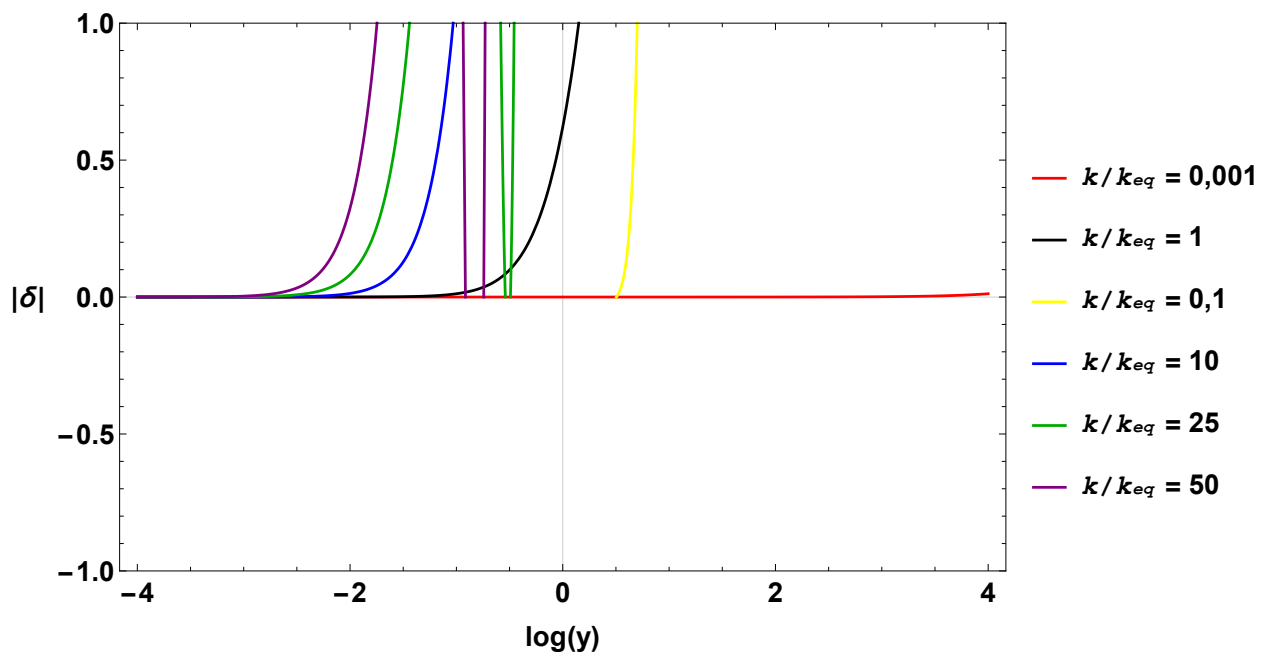
Levando a entropia em consideração e condições iniciais de isocurvatura, notamos, que o potencial será sempre negativo. Para grandes comprimento de onda o potencial decai mais que para pequenos comprimentos de onda.

Os modos Φ_k passam da era da radiação para a matéria e os potenciais permanecem constantes, sem sofrer alterações.

Solução numérica para o contraste de densidade com condições iniciais adiabáticas.

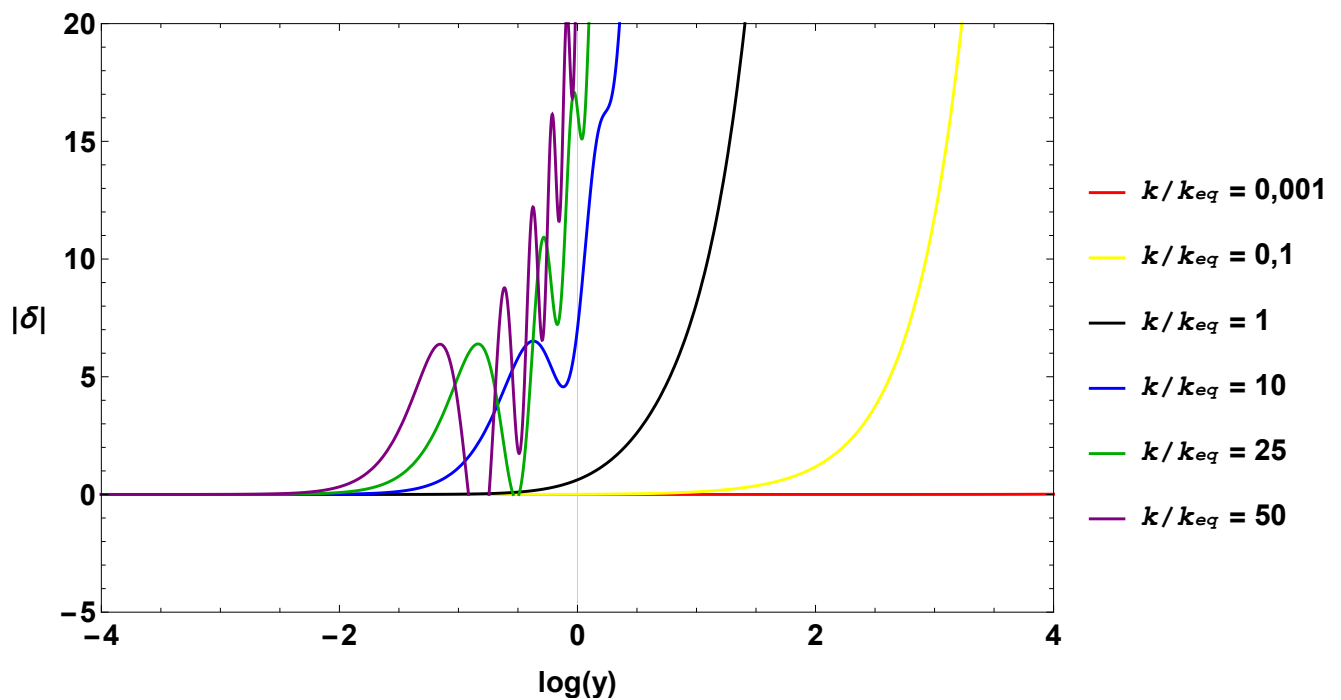
Neste caso as condições iniciais são: $\Phi(10^{-4}) = 1$, $\dot{\Phi}(10^{-4}) = 0$, $S(10^{-4}) = \dot{S}(10^{-4}) = 0$, com o fator y variando de $(10^{-4}, 10^4)$ e o fator $\frac{k}{k_{eq}}$ com os seguintes valores (0,001; 0,1; 1; 10; 25; 50)

Figura 11 – Contraste de densidade com condições iniciais adiabáticas - entre (-1,1)



Este gráfico nesta escala não permite uma análise do que está ocorrendo. No gráfico a seguir, em uma escala maior, consegue-se analisar melhor a evolução do contraste da densidade para os diversos comprimentos de onda.

Figura 12 – Módulo do Contraste de densidade com condições iniciais adiabáticas, com entropia



Como já vimos, para o regime de perturbação linear, a perturbação na métrica deve obedecer a condição $|\delta g_{\mu\nu}| \ll 1$, notamos que no gráfico acima, esta condição não é válida, pois qualquer modo de comprimento de onda, sai rapidamente do regime linear.

Para pequenos comprimentos de onda, no gráfico acima $k/k_{eq} > 10$, o contraste de densidade, ainda na era da radiação, oscila e cresce rapidamente, entrando na era da matéria com pouca oscilação, mas ainda crescente. Com valores intermediários de comprimentos de onda, $k/k_{eq} = 1$ e $0,1$ o contraste de densidade entrará na era matéria com valores crescentes. Já para grandes comprimentos de onda, $k/k_{eq} \ll 1$, o contraste de densidade é zero.

Conclusões sobre as soluções numéricas:

Nas soluções numéricas que estudamos, os gráficos indicam como é a dinâmica dos modos de onda no espaço de Fourier de acordo com as condições estabelecidas em cada solução numérica. Estes gráficos estão de acordo com os gráficos da referência [14]. Notamos que quando a dinâmica se desenvolve na era da radiação, não existe possibilidades de formação de estruturas. Na era da radiação, o potencial gravitacional permanece aproximadamente constante ou decai a zero. Na era da matéria, nos casos analisados, o potencial gravitacional atenua ou permanece constante.

3 Conclusão

O estudo sobre diversos conceitos relacionados à cosmologia, tais como: matéria bariônica, matéria escura, energia escura, modelo Λ CDM, MCP, inflação cósmica, RCF, princípio cosmológico, métrica FRW, elemento de linha, linha de mundo, tempo conforme, coordenadas comóveis, fator de escala, parâmetro de Hubble, horizonte de partículas, eventos, geodésicas, cone de luz, ondas de pequeno e grande comprimento, redshift cosmológico, tensor fluido perfeito, e outros temas, nos deu a base para um entendimento sobre o universo que vivemos.

Deduzimos as equações de Friedmann a partir das equações de Einstein, e verificamos seu potencial, onde através da solução destas equações, calculamos a relação entre as taxas de expansão de um universo só com radiação e um universo só com matéria. Chegamos a valores compatíveis com dados observacionais, levando em conta o modelo Λ CDM, quando calculamos os valores para o redshift e o tempo físico em que ocorreram, para as épocas da equivalência, da recombinação e a idade do universo.

Estudamos também a teoria de perturbações cosmológicas lineares, desde seu ponto básico que é a perturbação da métrica de fundo. Verificamos sua parametrização bem como a classificação destas perturbações em, perturbações escalares (as mais importantes), vetoriais e tensoriais (não utilizadas neste estudo).

Fizemos os cálculos das perturbações nas equações de Einstein, para isso, linearizamos os símbolos de Christoffel, o tensor e o escalar de Ricci, o tensor fluido perfeito e o tensor de Einstein, chegando na equação de evolução do potencial gravitacional, com soluções para a mecânica Newtoniana e para a RG. Para um universo de matéria e radiação, introduzimos o parâmetro y , que relaciona a densidade de matéria com a densidade de radiação, e reescrevemos a equação de evolução do potencial, do contraste da densidade e da entropia em função deste novo parâmetro. Com isso, verificamos a importância da teoria de perturbações lineares onde, num universo com radiação e matéria, pudemos verificar a dinâmica e o comportamento desses fluidos em modos de Fourier, através do estudo de três situações envolvendo o potencial gravitacional e o contraste de densidade. Notamos que, quando a dinâmica se desenvolve na era da radiação, não existe possibilidades de formação de estruturas, já que o potencial gravitacional permanece aproximadamente constante ou decai a zero. Neste trabalho, não podemos tirar conclusões do desenvolvimento do potencial gravitacional que possa gerar a formação de estruturas, mesmo na era da matéria, pois nos casos analisados o potencial gravitacional atenua ou permanece constante.

Assim, verificamos que este trabalho fornece a base para que este estudo possa ser ampliado, tendo em vista uma descrição mais detalhada do universo, que leve em consideração: outros modelos cosmológicos; estudo de anisotropias; estudos mais profundos sobre a formação de estruturas, incluindo a constante cosmológica e verificar a sua contribuição

na dinâmica das perturbações; importância das perturbações vetoriais e tensoriais, e outros assuntos relacionados.

Referências

- [1] AGHANIM, N. et al. Planck 2015 results. xi. cmb power spectra, likelihoods, and robustness of parameters. *arXiv:1507.02704*, 2015.
- [2] RIAZULELO, A. Marcas do invisível. *Scientif American - Brasil - Especial de Astronomia*, v. 62, p. 20–25, 2014.
- [3] VELTEN, H. Mond: uma alternativa à mecânica newtoniana. *MOND: an alternative to Newtonian mechanics) Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 30, n. 3, p. 3314, 2008.
- [4] WEBER, F. Introdução a relatividade geral e a física de estrelas compactas. Editora Livraria da Física, 2015.
- [5] MUKHANOV, V. *Physical foundations of cosmology*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005.
- [6] GUTH, A. H. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Physical Review D, APS*, v. 23, n. 2, p. 347, 1981.
- [7] RIAZULELO, A. Planck: géomètre de l' univers primordial. *Pour la Science*, v. 427, p. 44–51, 2013.
- [8] MUKHANOV, V. *CMB, quantum fluctuations and the predictive power of inflation*. [S.l.], 2003.
- [9] WEINBERG, S. Steven weinberg: Cosmology. *General Relativity and Gravitation*, 2008.
- [10] KEEL, W. C. *The road to galaxy formation*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2007.
- [11] KAY, D. *Schaum's Outline of Tensor Calculus*. [S.l.]: McGraw Hill Professional, 2011.
- [12] SCHUTZ, B. *A first course in general relativity*. [S.l.]: Cambridge university press, 2009.
- [13] MISNER, C. W. Kip. S. Thorne, John. Archibald. Wheeler, "Gravitation". [S.l.]: San Francisco, Freeman, 1973.
- [14] PETER, P.; UZAN, J.-P. *Primordial cosmology*. [S.l.]: Oxford University Press, 2013.
- [15] DAVIS, T. M.; LINEWEAVER, C. H. Expanding confusion: common misconceptions of cosmological horizons and the superluminal expansion of the universe. *Publications of the Astronomical Society of Australia, CSIRO*, v. 21, n. 1, p. 97–109, 2004.

-
- [16] EISBERG, R.; RESNICK, R. *Quantum Physics of Atoms, Molecules, Solids and Nuclei*. [S.l.]: Wiley: New York, 1974.
- [17] ADE, P. et al. Planck 2013 results. xvi. cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, EDP Sciences, v. 571, 2014.
- [18] MUKHANOV, V. F.; FELDMAN, H. A.; BRANDENBERGER, R. H. Theory of cosmological perturbations. *Physics Reports*, Elsevier, v. 215, n. 5, p. 203–333, 1992.
- [19] BARDEEN, J. M. Gauge-invariant cosmological perturbations. *Physical Review D*, APS, v. 22, n. 8, p. 1882, 1980.
- [20] PEREIRA, T. d. S. *Teoria inflacionária em universos anisotrópicos*. Tese (text) — Universidade de São Paulo, dez. 2008. Disponível em: <<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/43/43134/tde-02032009-151808/>>.

Apêndice

APÊNDICE A – Quantidades e Relações úteis

Geometria:

A representação matricial do tensor métrico é:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}$$

A métrica do universo plano para FRW, no tempo conforme (η) é:

$$g_{\mu\nu} = a^2(\eta) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g_{00} = -a^2, \quad (\text{A.1})$$

$$g_{0i} = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$g_{ij} = a^2 \delta_{ij}, \quad (\text{A.3})$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Da relação $g^{\alpha\gamma} g_{\gamma\beta} = \delta_{\beta}^{\alpha}$, obtemos a métrica inversa

$$g^{00} = -a^{-2}, \quad (\text{A.4})$$

$$g^{0i} = 0, \quad (\text{A.5})$$

$$g^{ij} = a^{-2} \delta^{ij}, \quad (\text{A.6})$$

Levantamento e baixamento de índices, alguns exemplos

$$T^{\mu\nu\alpha} = g^{\mu\beta} T_{\beta}^{\nu\alpha}$$

$$T_{\nu\alpha}^{\mu} = g_{\nu\beta} T_{\alpha}^{\mu\beta}$$

$$T_{\mu\nu\alpha} = g_{\mu\beta} T_{\nu\alpha}^{\beta}$$

$$T_{\mu\nu\alpha} = g_{\mu\beta} g_{\nu\gamma} T_{\alpha}^{\beta\gamma}$$

Matéria

O tensor energia-momento para um fluido perfeito, Eq. (1.16), $T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_\mu u_\nu + Pg_{\mu\nu}$, com a normalização da 4-velocidade $u_\mu u^\mu = -1$, temos

$$u^0 = \frac{1}{a}, \quad u^i = 0, \quad u_0 = -a, \quad u_i = 0, \quad (\text{A.7})$$

os componentes que não desaparecem do tensor são:

$$T_{00} = \rho a^2, \quad T_{ij} = Pa^2 \delta_{ij}, \quad (\text{A.8})$$

ou

$$T_0^0 = -\rho, \quad T_j^i = P\delta_j^i \quad (\text{A.9})$$

a equação de conservação para um fluido é

$$\rho' + 3\mathcal{H}(\rho + P) = 0, \quad (\text{A.10})$$

onde a equação de estado ω , é dada por

$$\omega \equiv \frac{P}{\rho}, \quad (\text{A.11})$$

definindo a densidade de energia relativa como sendo

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_{crit}}, \quad (\text{A.12})$$

onde ρ_{crit} é a densidade critica, que na atualidade tem a forma

$$\rho_c^0 = \frac{3\mathcal{H}^2}{\kappa a^2}, \quad (\text{A.13})$$

com $\kappa = 8\pi G$. O índice $(^0)$ indica a época atual, onde temos que $\rho_c^0 = 8,51802 \cdot 10^{-27} \text{ Kg} \cdot \text{m}^{-3}$. A densidade de energia relativa para a matéria ou radiação

$$\Omega_{m,r} = \frac{\kappa \rho a^2}{3\mathcal{H}^2}, \quad (\text{A.14})$$

A densidade de energia relativa para a constante cosmológica

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda a^2}{3\mathcal{H}^2}, \quad (\text{A.15})$$

a densidade de energia para a constante de curvatura

$$\Omega_K = -\frac{\kappa a^2}{3\mathcal{H}^2}, \quad (\text{A.16})$$

a velocidade do som, c_s é definida como

$$c_s^2 = \frac{P'}{\rho'}, \quad (\text{A.17})$$

o contraste de densidade vale

$$\delta = \frac{\delta\rho}{\rho}, \quad (\text{A.18})$$

relacionando as equações acima, temos uma equação útil

$$\omega' = -3\mathcal{H}(1 + \omega)(c_s^2 - \omega), \quad (\text{A.19})$$

expressando a densidade e a pressão como funções de quantidades geométricas, temos

$$\kappa\rho a^2 = 3\mathcal{H}^2, \quad (\text{A.20})$$

$$\kappa(\rho + 3P)a^2 = -6\mathcal{H}', \quad (\text{A.21})$$

A equação de Einstein

Para resolvermos a equação de Einstein precisamos de alguns cálculos prévios, que são: o tensor métrico, os símbolos de Christoffel, o tensor de Riemann, o tensor de Ricci, o escalar de Ricci (de curvatura) e o tensor fluido perfeito. Vamos fazer uma verificação destes cálculos.

Símbolo de Christoffel (ou conexão): a interpretação do símbolo de Christoffel é dada por $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$, que é obtido relacionando

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \vec{e}_\alpha = \frac{\partial \vec{e}_\mu}{\partial x^\nu},$$

onde $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ é o α -ésimo componente de $\frac{\partial \vec{e}_\mu}{\partial x^\nu}$; μ é o vetor de base a ser derivado, ν é a coordenada em relação a qual o vetor de base está sendo derivado e, α é a componente resultante da derivada do vetor [12].

Os símbolos de Christoffel são resolvidos a partir da métrica, usando a relação

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}), \quad (\text{A.22})$$

para a métrica que estamos usando, os termos não nulos são:

$$\Gamma_{00}^0 = \mathcal{H}, \quad \Gamma_{ij}^0 = \mathcal{H} \delta_{ij}, \quad \Gamma_{0i}^j = \mathcal{H} \delta_i^j.$$

Tensor de Riemann (ou tensor de curvatura), é um tensor de 4a. ordem, com 256 componentes, que, devido às propriedades de simetria, antissimetria e ciclicidade se reduzem a 20. As suas componentes são definidos pela equação:

$$R_{\mu\nu\alpha}^{\beta} = \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\beta} - \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\beta} + \Gamma_{\sigma\nu}^{\beta}\Gamma_{\mu\alpha}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\alpha}^{\beta}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}, \quad (\text{A.23})$$

e as componentes não nulas

$$R_{i0j}^0 = \mathcal{H}'\delta_{ij}, \quad R_{00j}^i = \mathcal{H}'\delta_j^i, \quad R_{jlm}^i = \mathcal{H}^2(\delta_m^i\delta_{jl} - \delta_l^i\delta_{jm}),$$

propriedades do tensor de Riemann:

- simetria: $R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}$,
- antissimetria: $R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu} = R_{\beta\alpha\nu\mu}$,
- ciclicidade: $R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0$,

as identidades de Bianchi surgem das derivadas covariantes da propriedade de ciclicidade do tensor de Riemann.

Tensor de Ricci, é resolvido pela contração do tensor de Riemann, resultando em 10 componentes,

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\sigma\alpha}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha}\Gamma_{\mu\alpha}^{\sigma}, \quad (\text{A.24})$$

as componentes não nulas são

$$R_{00} = -3\mathcal{H}', \quad R_{ij} = (2\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}')\delta_{ij}. \quad (\text{A.25})$$

Escalar de Ricci, ou escalar de curvatura, especifica um número real em cada ponto da variedade (manifold) em estudo, determinando a curvatura intrínseca da variedade nesse ponto. É obtido pela contração do tensor de Ricci

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \quad (\text{A.26})$$

o valor do escalar de curvatura, para o universo em estudo, é

$$R = 6(\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}')a^{-2}. \quad (\text{A.27})$$

Tensor energia-momento de um fluido perfeito, usando a Eq. (1.16), $T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_{\mu}u_{\nu} + Pg_{\mu\nu}$, e os valores já foram calculados em (A.7), (A.8) e (A.9).

Com estes tensores e valores, podemos construir o tensor de Einstein, que é definido como

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} \quad (\text{A.28})$$

usando os valores calculados acima, temos

$$G_{00} = \frac{3}{a^2} (\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}), \quad G_{0i} = 0, \quad G_{ij} = -(\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}'), \quad (\text{A.29})$$

com índices mistos, temos

$$G_0^0 = 3\mathcal{H}^2, \quad G_0^i = 0, \quad G_j^i = \frac{1}{a^2} (\mathcal{H}^2 + \mathcal{H} + 2\mathcal{H}'), \quad (\text{A.30})$$

E, a equação de campo de Einstein fica:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (\text{A.31})$$

Incluindo a constante Cosmológica, Λ , temos:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (\text{A.32})$$

Perturbações

Para obtermos a equação de Einstein perturbada, temos que perturbar: o tensor métrico, os símbolos de Christoffel, o tensor de Ricci, o escalar de Ricci e o tensor fluido perfeito.

Perturbação na métrica: para uma perturbação na métrica, conforme a Eq. (2.1), $g_{\mu\nu} = {}^{(0)}g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$, temos como valores de perturbações

$$\begin{aligned} \delta g_{00} &\equiv -2a^2\Phi, \\ \delta g_{0i} &\equiv a^2 B_i, \\ \delta g_{ij} &\equiv a^2 h_{ij}, \end{aligned}$$

para as perturbações inversas da métrica, usamos a relação

$$\delta g^{\mu\nu} = \delta g_{\alpha\beta} {}^{(0)}g^{\mu\alpha} g^{\beta\nu},$$

obtendo

$$\begin{aligned} \delta g^{00} &= 2a^{-2}\Phi, \\ \delta g^{0i} &= a^{-2}B_i, \\ \delta g^{ij} &= a^{-2}h^{ij}. \end{aligned}$$

Perturbação no símbolo de Christoffel: perturbando o símbolo de Christoffel, $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(g_{\beta\mu,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\beta})$, temos

$${}^{(0)}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} \left({}^{(0)}g^{\alpha\rho} + \delta g^{\alpha\rho} \right) \left[\partial_{\mu} \left({}^{(0)}g_{\rho\nu} + \delta g_{\rho\nu} \right) + \partial_{\nu} \left({}^{(0)}g_{\rho\mu} + \delta g_{\rho\mu} \right) - \partial_{\rho} \left({}^{(0)}g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} \right) \right],$$

resolvendo, chegamos a

$$\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2} \left[g^{\alpha\rho} (\partial_{\mu}\delta g_{\rho\nu} + \partial_{\nu}\delta g_{\rho\mu} - \partial_{\rho}\delta g_{\mu\nu}) \right] - \frac{1}{2} \left[\delta g^{\alpha\rho} (\partial_{\mu}g_{\rho\nu} + \partial_{\nu}g_{\rho\mu} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}) \right].$$

desta equação podemos chegar aos seguintes valores

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_{00}^0 &= \phi', \\ \delta\Gamma_{0i}^0 &= \partial_i(\phi - \mathcal{H}B), \\ \delta\Gamma_{00}^i &= \partial^i(\phi - B' - \mathcal{H}B), \\ \delta\Gamma_{ij}^0 &= -2\mathcal{H}\phi\delta_{ij} - \mathcal{H}h_{ij} - \frac{1}{2}h'_{ij} + \partial_i\partial_j B, \\ \delta\Gamma_{0j}^i &= -\frac{1}{2}h_j^{i'}, \\ \delta\Gamma_{jk}^i &= \mathcal{H}\partial^i B\delta_{jk} - \partial_{(j}h_{k)}^i + \frac{1}{2}\partial^i h_{jk}. \end{aligned}$$

Perturbação no tensor de Ricci: perturbando o tensor de Ricci, Eq. (A.27), $R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^{\alpha} - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^{\alpha} + \Gamma_{\sigma\alpha}^{\alpha}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} - \Gamma_{\sigma\nu}^{\alpha}\Gamma_{\mu\alpha}^{\sigma}$, temos

$$\begin{aligned} {}^{(0)}R_{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu} &= \partial_{\alpha} \left({}^{(0)}\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \right) - \partial_{\nu} \left({}^{(0)}\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} + \delta\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} \right) + \\ &\quad \left[\left({}^{(0)}\Gamma_{\alpha\lambda}^{\alpha} + \delta\Gamma_{\alpha\lambda}^{\alpha} \right) \left({}^{(0)}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \right) \right] - \\ &\quad \left[\left({}^{(0)}\Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha} + \delta\Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha} \right) \left({}^{(0)}\Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda} + \delta\Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda} \right) \right], \end{aligned}$$

resolvendo, chegamos a

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_{\alpha} \left(\delta\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \right) - \partial_{\nu} \left(\delta\Gamma_{\alpha\mu}^{\alpha} \right) + \left({}^{(0)}\Gamma_{\alpha\lambda}^{\alpha} \delta\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \right) + \left(\delta\Gamma_{\alpha\lambda}^{\alpha} {}^{(0)}\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \right) - \left({}^{(0)}\Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha} \delta\Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda} \right) - \left(\delta\Gamma_{\nu\lambda}^{\alpha} {}^{(0)}\Gamma_{\alpha\mu}^{\lambda} \right),$$

através desta equação chegamos aos valores das componentes:

$$\begin{aligned} \delta R_{00} &= 3\mathcal{H}\phi' + \Delta(\phi - B' - \mathcal{H}B) + \frac{1}{2}(h'' + \mathcal{H}h'), \\ \delta R_{0i} &= 2\mathcal{H}\partial_i\phi - (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\partial_i B - \frac{1}{2}(\partial_j h_i^{j'} - \partial_i h'), \\ \delta R_{ij} &= - \left[2(2\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}')\phi + \mathcal{H}\phi' - \mathcal{H}\Delta B + \frac{1}{2}h'\mathcal{H} \right] \delta_{ji} - \partial_i\partial_j\phi + \partial_j\partial_i(2\mathcal{H}B + B') \\ &\quad - (2\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}')h_{ji} - \mathcal{H}h_{ji}' - \frac{1}{2}h_{ji}'' - \partial_{(i}\partial_k h_{j)}^k + \frac{1}{2}\Delta h_{ji} + \frac{1}{2}\partial_j\partial_i h. \end{aligned}$$

Perturbação no escalar de Ricci: Perturbando o escalar de Ricci, Eq. (A.28), $R = R_{\mu}^{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, temos

$${}^{(0)}R + \delta R = \left({}^{(0)}g^{\mu\nu} + \delta g^{\mu\nu} \right) \left({}^{(0)}R_{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu} \right),$$

resolvendo, chegamos a

$$\delta R = \left({}^{(0)}g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \right) - \left(\delta g^{\mu\nu} {}^{(0)}R_{\mu\nu} \right),$$

para calcular o valor da perturbação vamos usar os resultados já calculados, obtendo

$$\begin{aligned} \delta R = & \frac{2}{a} [(h'' + 3\mathcal{H}h' - \Delta h + \partial^i \partial^k h_{ki} + 2\Delta\phi \\ & + 12(\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}')\phi + 6\mathcal{H}\phi' - 2\Delta(B' + 3\mathcal{H}B)]. \end{aligned}$$

Perturbação do tensor energia-momento: perturbando o tensor energia-momento, a partir da Eq (1.16) $T_{\mu\nu} = (\rho + P)u_{\mu}u_{\nu} + Pg_{\mu\nu}$, temos

$${}^{(0)}T_{\mu\nu} + \delta T_{\mu\nu} = (\rho_0 + \delta\rho + P_0 + \delta P) \left({}^{(0)}u^{\mu} + \delta u^{\mu} \right) \left({}^{(0)}u_{\nu} + \delta u_{\nu} \right) + (P + \delta P) \left({}^{(0)}g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} \right),$$

resolvendo, chegamos a

$$\delta T_{\mu\nu} = (\delta\rho + \delta P) {}^{(0)}u_{\mu} {}^{(0)}u_{\nu} + \delta P {}^{(0)}g_{\mu\nu} + 2(\rho + P) {}^{(0)}u_{(\mu} \delta u_{\nu)} + P \delta g_{\mu\nu},$$

ou, para índices mistos, podemos construir as perturbações invariantes por gauge, usando as relações $u^{\alpha} = {}^{(0)}u^{\alpha} - \delta u^{\alpha}$, satisfazendo a condição $u^{\alpha}u_{\beta} = \delta_{\beta}^{\alpha}$, de forma que.

$$T_{\nu}^{\mu} = (\rho + P) u^{\mu}u_{\nu} - p\delta_{\nu}^{\mu},$$

$${}^{(0)}T_{\nu}^{\mu} + \delta T_{\nu}^{\mu} = (\rho_0 + \delta\rho + P_0 + \delta P) \left({}^{(0)}u^{\mu} - \delta u^{\mu} \right) \left({}^{(0)}u_{\nu} + \delta u_{\nu} \right) - (P + \delta P) \delta_{\nu}^{\mu},$$

as perturbações da quadri-velocidade, devem satisfazer a relação

$$2{}^{(0)}u_{\mu}\delta u^{\mu} + \delta g_{\mu\nu} {}^{(0)}u^{\mu} {}^{(0)}u^{\nu} = 0,$$

o que significa que $\delta u_0 = -a\phi$, a componente espacial é definida como sendo $\delta u^i \equiv a^{-1}v^i = a^{-1}(\partial^i v + \bar{v}^i)$, sendo v^i sendo a velocidade própria do fluido. Então, as perturbações da quadri-velocidade serão:

$$\delta u^{\mu} = a^{-1}(-\phi, v^i) \quad \delta u_{\mu} = a(-\phi, v^i + C_i),$$

sendo que $u_{\mu} = g_{\mu\nu}u^{\nu}$ leva a

$$\delta u_{\mu} = {}^{(0)}g_{\mu\nu}\delta u^{\nu} + \delta g_{\mu\nu}u^{\nu},$$

resolvendo as equações acima, chegamos aos seguintes valores:

$$\begin{aligned}\delta T_{00} &= \rho a^2 (\delta + 2\Phi), \\ \delta T_{0i} &= -\rho a^2 [(1 + \omega)(\partial^i v + \bar{v}_i) + \partial^i B + C^i], \\ \delta T_{ij} &= P a^2 \left(h_{ij} + \frac{\delta P}{P} \delta_{ij} \right),\end{aligned}$$

ou, através de índices mistos

$$\delta T_0^0 = \rho \delta, \quad (\text{A.33})$$

$$\delta T_i^0 = \frac{1}{a} (\rho_0 + P_0) \delta u_i, \quad (\text{A.34})$$

$$\delta T_j^i = \delta P \delta_j^i. \quad (\text{A.35})$$

Perturbação no tensor de Einstein: Perturbando o tensor de Einstein, Eq. (A.31),

$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$, temos

$${}^{(0)}G_{\mu\nu} + \delta G_{\mu\nu} = \left({}^{(0)}R_{\mu\nu} + \delta R_{\mu\nu} \right) - \frac{1}{2} \left[\left({}^{(0)}g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} \right) \left({}^{(0)}R + \delta R \right) \right],$$

resolvendo, chegamos a

$$\delta G_{\mu\nu} = \delta R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left[{}^{(0)}g_{\mu\nu} \delta R + \delta g_{\mu\nu} {}^{(0)}R \right].$$

Para calcularmos os valores das componentes perturbadas, devemos usar os valores já calculados e o valor do traço do tensor h_{ij} que vale $h = 6\psi + 2\Delta E$, temos então:

$$\begin{aligned}\delta G_{00} &= -6\mathcal{H}\psi' + 2\Delta\psi + 2\mathcal{H}\Delta(B - E'), \\ \delta G_{0i} &= \partial_i \left[2\mathcal{H}\phi + 2\psi' + (2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2) B \right], \\ \delta G_{ij} &= \left[\Delta(E'' + 2\mathcal{H}E') - \Delta(B' + 2\mathcal{H}B) + 2\psi'' \right. \\ &\quad \left. + 4\mathcal{H}\psi' + \Delta(\phi - \psi) + 2(\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}')(\phi + \psi) + 2\mathcal{H}\phi' \right] \delta_{ij} \\ &\quad + \partial_j \partial_i \left[-E'' - 2\mathcal{H}E' + 2(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)E + B' + 2\mathcal{H}B - \phi + \psi \right],\end{aligned}$$

ou através de índices mistos, usando a relação

$$\delta G_\alpha^\alpha = {}^{(0)}g^{\alpha\beta} \delta G_{\beta\alpha} - \delta g^{\alpha\beta} {}^{(0)}G_{\beta\alpha},$$

e os resultados da Eq. (A.29), obtendo

$$\delta G_0^0 = \frac{2}{a^2} \left(-3\mathcal{H}^2 \phi - 3\mathcal{H}\psi' + \Delta\psi \right), \quad (\text{A.36})$$

$$\delta G_i^0 = \frac{2}{a^2} \partial_i (\mathcal{H}\phi + \psi'), \quad (\text{A.37})$$

$$\delta G_j^i = \frac{1}{a^2} \{ \delta_j^i [2\psi'' - 4\mathcal{H}\psi' - \Delta(\phi - \psi) - 2(\mathcal{H}^2 + 2\mathcal{H}')\psi - 2\mathcal{H}\phi'] + \delta g_\nu^\mu \partial^i \partial_j (\phi - \psi) \}. \quad (\text{A.38})$$