



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

MARIANY LAYNE DE SOUZA

**DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR: UM ESTUDO A
RESPEITO DAS DIFICULDADES E CONCEPÇÕES DE
LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA**

MARIANY LAYNE DE SOUZA

**DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR: UM ESTUDO A
RESPEITO DAS DIFICULDADES E CONCEPÇÕES DE
LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Angela Marta Pereira das Dores Savioli

Londrina
2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Souza, Mariany Layne de.

Dependência e independência linear : um estudo a respeito das dificuldades e concepções de licenciandos em Matemática / Mariany Layne de Souza. - Londrina, 2016.
126 f. : il.

Orientador: Angela Marta Pereira das Dores Savioli.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2016.

Inclui bibliografia.

1. Educação Matemática - Teses. 2. Matemática - Estudo e ensino (Superior) - Teses. 3. Álgebra Linear - Teses. 4. Dependência e independência linear - Formação de conceitos - Teses. I. Savioli, Angela Marta Pereira das Dores. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

MARIANY LAYNE DE SOUZA

**DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR: UM ESTUDO A
RESPEITO DAS DIFICULDADES E CONCEPÇÕES DE
LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Angela Marta Pereira
das Dores Savioli
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Prof^a. Dr^a. Barbara Lutaif Bianchini
Pontifícia Universidade Católica –PUC/ São
Paulo

Prof^a. Dr^a. Simone Luccas
Universidade Estadual do Norte do Paraná -
UENP

Londrina, 24 de fevereiro de 2016

*Dedico este trabalho à minha família pelo amor
e apoio incondicional.*

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pelo seu amor infinito, por guiar e iluminar sempre meus passos, por me dar forças para conseguir alcançar meus objetivos.

Agradeço aos meus pais João Marcos e Vilma por todo amor, apoio, incentivo, compreensão, por sempre me ajudarem durante todos os momentos, por sempre estarem em minha vida. Sem eles essa pesquisa não seria possível!

Agradeço à minha irmã Jacqueline pela amizade, apoio, incentivo, paciência, compreensão e por ser sempre minha companheira.

Agradeço ao meu noivo Lucas, por sempre estar ao meu lado, me apoiando e incentivando em minhas escolhas, por me ajudar nos momentos de desespero, por tudo!

Agradeço à minha orientadora prof.^a Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli, pela confiança, pela dedicação, pelos conselhos, por compartilhar comigo seus conhecimentos e possibilitar que realizasse um dos meus sonhos. Tenho grande admiração e respeito por ela!

Agradeço aos amigos do Grupo de Estudo e Pesquisa do Pensamento Matemático (GEPPMat) pelas discussões e contribuições à minha pesquisa.

Agradeço a todos meus amigos, os de antes do mestrado, pela amizade fiel e pelo incentivo, e aos feitos durante o mestrado pelos bons momentos que passamos juntos. Agradeço, especialmente, ao Marcelo, meu “irmãozinho de orientação”, pela amizade, pelo apoio, pelas conversas e contribuições com a minha pesquisa.

Agradeço às professoras, Prof.^a Dr.^a Barbara Lutaif Bianchini e Prof.^a Dr.^a Simone Luccas, por aceitarem fazer parte da banca e pelas valiosas contribuições dadas a esta pesquisa.

Agradeço aos professores do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL), em especial à Prof.^a Dr.^a Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino e à Prof.^a Dr.^a Regina Luzia Corio de Buriasco, por possibilitarem o enriquecimento de meus conhecimentos

acerca da Educação Matemática.

Agradeço aos participantes da pesquisa, por aceitarem fazer parte deste trabalho.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo auxílio financeiro.

Enfim, agradeço a todos que contribuíram de uma forma ou de outra para a realização deste trabalho.

*“Ninguém caminha sem aprender a caminhar,
sem aprender a fazer o caminho caminhando,
refazendo e retocando o sonho pelo qual se pôs
a caminhar.”*

Paulo Freire

SOUZA, Mariany Layne de. **Dependência e independência linear**: um estudo a respeito das dificuldades e concepções de licenciandos em Matemática. 2016. 126f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

RESUMO

Esta pesquisa tem por objetivo investigar dificuldades e concepções referentes aos conceitos de dependência e independência linear de licenciandos em Matemática. Para tanto, elaborou-se um instrumento com cinco questões e aplicou-o em uma turma do segundo ano de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade do norte do Paraná. Para análise dos registros escritos dos licenciandos recorreu-se à análise textual discursiva para identificar e discutir as dificuldades, e à Teoria APOS (ação-processo-objeto-esquema) para identificar e discutir as concepções. Na análise das dificuldades elencou-se quatro subcategorias: linguagem, entendimento dos conceitos de Dependência e Independência Linear, identificação de conjuntos linearmente independentes e linearmente dependentes e reconhecimento da representação gráfica. Com essas subcategorias percebeu-se que grande parte dos participantes da pesquisa apresentou alguma dificuldade, sendo que essa pode estar atrelada tanto à natureza da Álgebra Linear quanto a um caráter subjetivo. Em relação às concepções, segundo a Teoria APOS, ao analisar os registros escritos, obteve-se as concepções ação e processo para os conceitos de dependência e independência linear, sendo que a concepção ação foi a concepção mais manifestada pelos licenciandos, revelando que os mesmos ainda possuem uma noção elementar dos conceitos investigados nessa pesquisa.

Palavras-chave: Educação matemática. Dificuldades. Teoria APOS. Álgebra linear. Dependência e independência linear.

SOUZA, Mariany Layne de. **Linear dependence and independence: a study about the difficulties and undergraduate concepts in mathematics.** 2016. 126p. Dissertation (Master of Science in Education and Mathematics Education) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

ABSTRACT

This research aims to investigate problems and concepts related to the concepts of linear dependence and independence of undergraduates in Mathematics. For analysis of the written records of licensees resorted to the discursive textual analysis to identify and discuss the difficulties and APOS Theory (action-process-object-schema) to identify and discuss the concepts. To examine any difficulties listed out are four sub-categories: language, understanding of the concepts of dependence and independence Linear, identification of linearly independent sets and linearly dependent and recognition of the graphical representation. With these subcategories it can be seen that most of the survey participants had some difficulty, and this may be linked to both the nature of linear algebra as a subjective character. In relation to the conceptions, according to APOS Theory, when analyzing the written records, we obtained the action and process concepts to the concepts of dependence and linear independence, and the action concept was to design more expressed by undergraduates, revealing that they still they have an elementary notion of the concepts investigated in this research.

Keywords: Mathematics education. Difficulties. APOS theory. Linear algebra. Linear dependence and independence.

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 –	O quadro Teoria APOS-Três mundos para dependência e independência linear	21
Quadro 2 –	Pesquisas realizadas no Brasil a respeito da álgebra linear	23
Quadro 3 –	Síntese das dificuldades	33
Quadro 4 –	Pesquisas a respeito da Teoria APÓS	44
Quadro 5 –	Relação de estudantes que farão parte do corpus de análise	60
Quadro 6 –	Unidades de análise efetivas da subcategoria linguagem	65
Quadro 7 –	Unidades de análise efetivas da subcategoria entendimento dos conceitos de dependência e independência linear	68
Quadro 8 –	Unidades de análise efetivas da subcategoria identificação de um conjunto LI e LD	71
Quadro 9 –	Unidades de análise efetivas da subcategoria reconhecimento da representação gráfica	80
Quadro 10 –	Concepções, segundo a Teoria APOS, evidenciadas nos licenciandos	112

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Gráfico representando vetores LD no R^2	36
Figura 2 – Gráfico representando vetores LD no R^3	36
Figura 3 – Desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado	39
Figura 4 – Componentes do quadro de desenvolvimento curricular	47
Figura 5 – Construção do conhecimento matemático	49
Figura 6 – Decomposição genética dos conceitos dependência e independência linear	52
Figura 7 – Subcategorias de análise da categoria dificuldades.....	65
Figura 8 – Unidades de análise prévias da subcategoria linguagem	65
Figura 9 – Unidades de análise prévias da subcategoria entendimento dos conceitos de dependência e independência linear	67
Figura 10 – Unidades de análise prévias da subcategoria identificação de um conjunto LI e LD	71
Figura 11 – Unidades de análise prévias da subcategoria reconhecimento da representação gráfica.....	80
Figura 12 – Registro escrito da questão 2 do estudante E1	86
Figura 13 – Registro escrito da questão 5 do estudante E1.....	88
Figura 14 – Registro escrito da questão 2 do estudante E2	89
Figura 15 – Registro escrito da questão 5 do estudante E2.....	90
Figura 16 – Registro escrito da questão 2 do estudante E3.....	92
Figura 17 – Registro escrito da questão 5 do estudante E3.....	93
Figura 18 – Registro escrito da questão 2 do estudante E4.....	94
Figura 19 – Registro escrito da questão 3 do estudante E4.....	95
Figura 20 – Registro escrito da questão 5 do estudante E4.....	96
Figura 21 – Registro escrito da questão 2 do estudante E5.....	97
Figura 22 – Registro escrito da questão 3 do estudante E5	98
Figura 23 – Registro escrito da questão 5 do estudante E5.....	98
Figura 24 – Registro escrito da questão 2 do estudante E6.....	99
Figura 25 – Registro escrito da questão 5 do estudante E6.....	101
Figura 26 – Registro escrito da questão 3 do estudante E7.....	102
Figura 27 – Registro escrito da questão 5 do estudante E7.....	103
Figura 28 – Registro escrito da questão 3 do estudante E8.....	104

Figura 29 – Registro escrito da questão 4 do estudante E8.....	105
Figura 30 – Registro escrito da questão 5 do estudante E8.....	105
Figura 31 – Registro escrito da questão 5 do estudante E9.....	106
Figura 32 – Registro escrito da questão 2 do estudante E10.....	108
Figura 33 – Registro escrito da questão 5 do estudante E10.....	109
Figura 34 – Registro escrito da questão 2 do estudante E11.....	110
Figura 35 – Registro escrito da questão 5 do estudante E11.....	111

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	14
CAPÍTULO 1 - ENSINO E APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA LINEAR	17
1.1 ENSINO E APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA LINEAR: UMA BREVE DISCUSSÃO	17
1.2 DIFICULDADES EM ÁLGEBRA LINEAR.....	27
CAPÍTULO 2 - DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR	34
2.1 OS CONCEITOS DE DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR	34
CAPÍTULO 3 - TEORIA APÓS	38
3.1 PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO: UMA BREVE CARACTERIZAÇÃO.....	38
3.2 ALGUMAS PESQUISAS RELACIONADAS À TEORIA APÓS	41
3.3 TEORIA APOS: DESENVOLVIMENTO E CARACTERÍSTICAS	45
3.4 DECOMPOSIÇÃO GENÉTICA DOS CONCEITOS DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR.....	52
CAPÍTULO 4 - PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	54
4.1 NATUREZA DA PESQUISA	54
4.2 O INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS	55
4.3 OS PARTICIPANTES DA PESQUISA	58
4.4 COLETA DE DADOS: O MOMENTO DA APLICAÇÃO DO INSTRUMENTO.....	58
4.5 ANÁLISE DOS DADOS.....	59
4.5.1 Critérios adotados para seleção do <i>corpus</i> de análise dos dados	59
4.5.2 Procedimentos utilizados para investigar as dificuldades dos estudantes	60
4.5.3 Procedimentos adotados para investigar as concepções dos estudantes, de acordo com a Teoria APÓS.....	63

CAPÍTULO 5 - ANÁLISES E DISCUSSÕES DOS DADOS	64
5.1 UM OLHAR PARA AS DIFICULDADES	64
5.1.1 Síntese dos dados: o metatexto.....	81
5.2.1 Estudante E1	85
5.2.2 Estudante E2	88
5.2.3 Estudante E3	90
5.1.4 Estudante E4	94
5.2.5 Estudante E5	96
5.2.6 Estudante E6	99
5.2.7 Estudante E7	101
5.2.8 Estudante E8	103
5.2.9 Estudante E9	106
5.2.10 Estudante E10	107
5.2.11 Estudante E11	109
5.2.12 Síntese das concepções, segundo a Teoria APOS, evidenciadas nos licenciandos.....	111
CONSIDERAÇÕES FINAIS	113
REFERÊNCIAS	116
APÊNDICES	122
APÊNDICE A - DOCUMENTO ENVIADO À INSTITUIÇÃO DE ENSINO SUPERIOR	123
APÊNDICE B - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	124
APÊNDICE C - CARACTERIZAÇÃO DOS ESTUDANTES	125
APÊNDICE D - INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS.....	126

INTRODUÇÃO

A álgebra linear é um assunto muito importante não apenas na Matemática, mas também no que diz respeito à sua aplicação em diversas áreas do conhecimento, como por exemplo, Física, Química, Economia, dentre outras (DORIER, 2000).

As preocupações com o ensino e a aprendizagem da disciplina de Álgebra Linear podem decorrer devido a sua ampla gama de utilização em diversas áreas do conhecimento e também por ser evidente em diversas pesquisas, como a de Celestino (2000), que ela está entre as disciplinas que mais causam reprovação, refletindo, assim, as dificuldades que os estudantes apresentam com sua aprendizagem.

Com isso, muitas pesquisas têm sido realizadas em vários países, como França, Canadá, México, Estados Unidos e Brasil, com o intuito de compreender e encontrar novas alternativas para a sala de aula, a fim de auxiliar no ensino e na aprendizagem dos conceitos da álgebra linear. Essas pesquisas evidenciam diferentes causas para as dificuldades dos estudantes, como por exemplo, o formalismo e a variedade de linguagens que são empregadas nos estudos dos conceitos.

Desta forma, escolheu-se realizar esta pesquisa, cujo tema é a aprendizagem da álgebra linear no Ensino Superior. Além disso, teve-se como motivação uma questão pessoal despertada pelo estudo dos conteúdos da álgebra linear e pela oportunidade de ser docente desta disciplina em um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública do norte do Paraná enquanto cursava o primeiro ano do mestrado, o que trouxe à pesquisadora a possibilidade de vivenciar novamente as dificuldades que os estudantes apresentam ao estudar essa disciplina.

Sendo assim, procurou-se por trabalhos que tratassem dessa temática e de uma teoria que possibilitasse compreender como os conceitos matemáticos são construídos. Em uma busca inicial nas pesquisas realizadas pelo Grupo de Estudo e Pesquisa do Pensamento Matemático (GEPPMat), na Universidade Estadual de Londrina (UEL), encontrou-se a pesquisa de Elias (2012), que serviu de inspiração para a elaboração desta dissertação. O estudo de Elias (2012) utilizava a Teoria APOS (ação-processo-objeto-esquema), desenvolvida por Dubinsky e seus colaboradores (ASIALA *et al.* 1996) e que possibilita compreender a construção dos conceitos matemáticos. Depois de escolher a teoria que seria abordada nesta investigação,

buscou-se por mais trabalhos que abordassem a APOS, a fim de possibilitar entendimento a respeito da mesma.

Ao longo da investigação, com o intuito de delimitar o que seria pesquisado, definiram-se os conceitos da álgebra linear que serviriam como objetos de análise. A escolha pelos objetos matemáticos “dependência e independência linear” deu-se pelo fato de serem considerados “[...] conceitos elementares que constituem os fundamentos da teoria dos espaços vetoriais”¹ (DORIER, 2000, p. 3, tradução nossa), possibilitando a compreensão, por exemplo, do conceito de base.

A partir disso, tem-se como objetivo geral investigar dificuldades e concepções referentes aos conceitos de dependência e independência linear de licenciandos em Matemática, e como objetivos específicos:

- Identificar e discutir as dificuldades que podem ser manifestadas por licenciandos em Matemática.
- Identificar e discutir as concepções, segundo a Teoria APOS, de licenciandos em Matemática.

A opção por pesquisar licenciandos em Matemática reside no fato de a pesquisadora ter sido docente da disciplina em um curso de Licenciatura em Matemática e, principalmente, por concordar com Machado e Bianchini (2012, p.70), que dizem a que álgebra linear

[...] constitui um assunto essencial para a formação do professor de matemática. Sua aprendizagem fornece uma poderosa ferramenta para a matemática superior, desenvolve a capacidade e habilidade de demonstrações matemáticas, explicita e exemplifica a ligação entre álgebra e geometria, entre outras coisas. É importante lembrar que os conhecimentos dos conceitos básicos de Álgebra Linear dão ao professor subsídios para a compreensão da importância de certos temas abordados na Educação Básica, como matrizes, sistemas de equações etc.

A pergunta que orienta esta pesquisa é a seguinte: Existem dificuldades e concepções a respeito dos conceitos de dependência e independência linear que podem ser evidenciadas em registros escritos de licenciandos em Matemática?

As concepções que serão discutidas ao longo da dissertação referem-se a um termo utilizado na Teoria APOS que busca ver como o estudante está construindo um

¹ [...] elementary concepts which constitute the foundations of the theory of vector spaces.

conceito matemático. Esta pesquisa foi estruturada em seis capítulos que serão descritos nos próximos parágrafos.

No capítulo um são abordados o ensino e a aprendizagem da álgebra linear. Inicialmente apresenta-se uma breve discussão relacionada a questões do ensino e da aprendizagem dessa disciplina e em seguida é dado foco à questão das dificuldades apresentadas pelos estudantes, para tanto, valeu-se principalmente do trabalho de Dorier e Sierpinska (2001).

No segundo capítulo aborda-se o objeto matemático escolhido para realizar esta pesquisa, apresentando a definição, algumas características e exemplos dos conceitos de dependência e independência linear.

No capítulo três o enfoque é a Teoria APOS, descrevendo de forma breve como surgiu e se desenvolveu. Ainda nesse capítulo será apresentada uma decomposição genética dos conceitos de dependência e independência linear.

No capítulo quatro são explicitados os procedimentos metodológicos, trazendo esclarecimentos quanto à natureza da pesquisa, os participantes, o instrumento de coleta de dados, o momento da aplicação, bem como as escolhas metodológicas para a análise dos dados coletados.

No quinto capítulo são apresentadas as análises dos dados. Recorreu-se nesse capítulo à análise textual discursiva para investigar as dificuldades e à uma descrição das resoluções dos estudantes, seguidas das análises e inferências das concepções, segundo a APOS, manifestadas pelos participantes da pesquisa.

E por fim, nas considerações finais são apresentadas as reflexões e conclusões acerca das dificuldades que os estudantes apresentaram e das concepções, de acordo com a APOS, evidenciadas nos licenciandos em Matemática em relação à dependência e independência linear.

CAPÍTULO 1

ENSINO E APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA LINEAR

Neste capítulo, visando a atender a uma parte da problemática e do objetivo desta pesquisa, serão abordadas questões relativas ao ensino e à aprendizagem da álgebra linear, como por exemplo, dificuldades que os estudantes podem vir a apresentar ao estudar essa disciplina.

Desse modo, será apresentada na primeira seção uma breve discussão a respeito de questões sobre o ensino e a aprendizagem da álgebra linear, com a finalidade de mostrar as pesquisas que foram desenvolvidas na área. Na segunda seção serão descritas algumas dificuldades relacionadas à aprendizagem dessa disciplina, sendo que as dificuldades descritas nessa parte servirão para nortear as análises.

1.1 ENSINO E APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA LINEAR: UMA BREVE DISCUSSÃO

Questões relacionadas ao ensino e aprendizagem da álgebra linear são discutidas por diversos autores, como Dorier (2002), Hillel e Sierpinska (1994), Stewart (2008), dentre outros.

Harel (2000), inspirado em Piaget (1977), apresenta três princípios para o ensino e aprendizagem de álgebra linear; esses princípios são o da concretização, da necessidade e da generabilidade.

No princípio da concretização o estudante, para abstrair alguma estrutura matemática, precisa que os elementos do modelo da estrutura sejam como um objeto cognitivo, que servirá de entrada para a abstração. Segundo Harel (2000), um exemplo de concretização seria o uso da geometria, que possibilitaria ao estudante uma base para a construção do conhecimento referente a alguns conceitos da álgebra linear. A partir de Oliveira (2005), vê-se que Harel (2000) explica que para que um estudante construa o seu conhecimento acerca de um objeto matemático é preciso que ele se baseie em algo que esteja em um contexto concreto para si.

Com relação ao princípio da necessidade, o estudante aprende quando vê uma necessidade intelectual naquilo que está sendo ensinado. Esse princípio está aliado à teoria de Piaget e à teoria de situações didáticas de Brousseau, a partir da ideia de que o conhecimento se desenvolve como uma solução para um problema. Ao

mobilizar conhecimentos para resolver um problema, o estudante, quando se deparar com um conflito cognitivo, pode vir a modificar sua concepção. (HAREL, 2000)

O último princípio, o da generabilidade ou possibilidade de generalização, complementa os outros dois. Nesse princípio, "quando o ensino está preocupado com um modelo concreto, que é um modelo que satisfaz o princípio da concretização, as atividades de ensino dentro desse modelo devem permitir e incentivar a generalização do conceito"² (HAREL, 2000, p. 187, tradução nossa).

Esses princípios apresentados por Harel (2000) possibilitam que os estudantes compreendam alguns conceitos de álgebra linear, uma vez que obterão um sentido no que estão estudando.

Dorier (2002) comenta que há duas principais formas de ensino da álgebra linear: uma que privilegia o estudo formal dos espaços vetoriais e outra que tem um foco mais analítico, baseado no estudo do R^n e no cálculo matricial. Todavia, é ressaltado que nessas duas orientações de ensino existe uma série de modelos que recorrem mais a uma do que a outra forma.

O pesquisador ainda comenta que a álgebra linear é reconhecidamente difícil, os estudantes não veem ligação com outros conhecimentos. Desse modo, várias pesquisas buscam mostrar e discutir formas de amenizar essa situação. Entre elas está a de Dorier *et al.* (1999), que busca entender o chamado "obstáculo do formalismo" encontrado no ensino e na aprendizagem dessa disciplina.

O obstáculo do formalismo refere-se a uma confusão em relação aos objetos matemáticos; nele os estudantes fazem referência a expressões que não possuem relação com significado algum. Um sintoma da confusão está entre as categorias de objetos matemáticos, como por exemplo, conjuntos serem tratados como elementos dos conjuntos (SIERPINSKA, DREYFUS, HILLEL, 1999, p. 12).

Sierpinska *et al.* (1999) apresentam uma pesquisa que se utiliza da Engenharia Didática³ para permitir que os estudantes evitem o "obstáculo do formalismo"; para tanto, mostram a introdução do conceito de transformação linear pelo *software Cabri-Géomètre*⁴. Os pesquisadores perceberam que o *Cabri* realmente possibilitou evitar o

² When instruction is concerned with a "concrete" model, that is a model that satisfies the Concreteness Principle, the instructional activities within this model should allow and encourage the generalizability of concepts.

³ A engenharia didática pode ser tomada como uma "metodologia de pesquisa suscetível de fazer aparecer fenômenos didáticos em condições mais próximas possíveis do funcionamento de uma sala de aula clássica" (ALMOULOU, SILVA, 2012, p. 26).

⁴ Software de geometria dinâmica.

“obstáculo do formalismo” e que os estudantes participantes da pesquisa conseguiram construir diferentes objetos matemáticos, percebendo as conversões de registro nas diferentes representações.

Dorier *et al.* (1999) mostram em sua pesquisa duas estratégias que podem ser utilizadas para introduzir a teoria dos espaços vetoriais: uma experimental, que apresenta inicialmente situações lineares em diversos contextos para depois apresentar a teoria geral, revelando assim o caráter unificador e generalizador da álgebra linear. A outra forma é com as “alavancas-meta”⁵ (DORIER *et al.*, 1999, p. 105, tradução nossa), em que o estudante é colocado na atividade matemática, refletindo a respeito dos objetos matemáticos. Para se chegar a ter uma alavanca meta no ensino, têm-se os recursos-meta, termo utilizado por Oliveira (2005), inspirado no trabalho de Robert e Robinet (1993), que são informações matemáticas que possibilitam aos estudantes refletirem a respeito do que está sendo visto. Dentre esses recursos, pode ser citado o discurso do professor da disciplina.

Algumas pesquisas brasileiras, como a de Padredi (2003) e a de Oliveira (2005), utilizam as alavancas-meta, a partir de análises do discurso de professores, que seriam recursos-meta.

No trabalho de Padredi (2003), foram destacados alguns termos que seis professores participantes da pesquisa utilizaram em suas falas nas aulas, que poderiam ser recursos-meta. Por exemplo, algumas analogias utilizadas por eles, como “vetores bem comportados” e os elementos de uma base, que podem se tornar alavancas-meta para o ensino e a aprendizagem do conceito de base.

A pesquisa de Oliveira (2005) buscou investigar quais recursos-meta usados no discurso do professor na aula de Álgebra Linear se tornaram alavancas-meta para os alunos. Constando que, para a amostra dos estudantes pesquisados, foram poucos os recursos-meta que não se tornaram alavancas-meta.

Ainda com relação às formas de como se ensinar álgebra linear, Dubinsky (1997) apresenta uma discussão entre algumas recomendações feitas pelo *Linear Algebra Curriculum Study Group* (LACSG)⁶ e outras presentes em um artigo de Carlson publicado em 1993.

O LACSG, em suas recomendações, de uma forma geral aborda três aspectos para o ensino de álgebra linear:

⁵ Meta lever.

⁶ Grupo de Estudo do Currículo da Álgebra Linear.

- Recomenda-se que o curso deva ser reconhecido como um curso de serviço e deve se relacionar estreitamente para aplicações de álgebra linear.
- Recomenda-se que o curso deva ser orientado para matriz.
- Um programa bastante detalhado é proposto. (DUBINSKY, 1997, p. 88, tradução nossa)⁷

Dubinsky (1997) considera que alguns pontos abordados pelo LACSG não visam a amenizar as dificuldades dos estudantes, e também não concorda com alguns pontos do que é proposto por Carlson (1993), uma vez que ambos propõem um trabalho com a álgebra linear mais voltado às suas aplicações. Sendo assim, o aquele pesquisador propõe como alternativa abordar os conceitos de álgebra linear utilizando a Teoria APOS, adotando diferentes estratégias pedagógicas e o uso de computadores.

Karrer (2006), em sua tese, apresenta uma abordagem de ensino com o conceito de transformações lineares planas, que buscou, ao utilizar o *software Cabri-Géomètre*, trabalhar as mudanças de registros de representação semiótica, com base em Duval (1995, 2000, 2003), em uma turma do curso de Ciência da Computação. Em sua pesquisa, Karrer (2006) constatou que sua abordagem de ensino possibilitou mudanças favoráveis das relações entre os sujeitos e o objeto matemático, percebendo também que algumas dificuldades em relação à conversão de registros de representação semiótica, que corresponde à transformação de um registro para outro, conseguiram ser superadas. Desse modo, a pesquisadora contribuiu com um material que possibilita subsidiar práticas docentes, apresentando um cenário um pouco diferente para o ensino de álgebra linear, por meio da utilização de *software*.

Outro trabalho que busca apresentar uma alternativa para o ensino e aprendizagem da álgebra linear é o de Stewart (2008). Nessa pesquisa, foi elaborado um quadro que aborda os três mundos da matemática de Tall (2004) – conceitual corporificado, simbólico procedimental e axiomático formal – e a Teoria APOS para o ensino de conceitos da álgebra linear.

No quadro desenvolvido, a pesquisadora propiciou uma visão mais abrangente de alguns conceitos vistos em álgebra linear (espaço vetorial, combinação linear,

⁷ It is recommended that the course should be recognized as a service course and should relate closely to applications of linear algebra. It is recommended that the course should be matrix-oriented. A fairly detailed syllabus is proposed.

dependência e independência linear, base e subespaço, autovalores e autovetores), a fim de contribuir com professores e pesquisadores no momento que lecionarão tais conceitos:

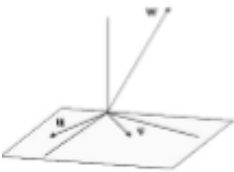
[...] o quadro pode ser usado para descobrir as habilidades de raciocínio dos alunos. Ao descobrir pontos fracos de compreensão e pensamento deles, o professor pode ver as áreas que precisam de melhorias, e como lidar com elas. Além disso, a partir de um ponto de vista do ensino a estrutura foi projetada para se certificar de que todos os aspectos do conceito mencionado nas células do quadro são abordados nas aulas. Isso deve contribuir para dar aos alunos uma visão geral de cada um dos conceitos, auxiliando-os a construir conhecimentos de álgebra linear que possam ajudá-los a alcançar pensamento formal (STEWART, 2008, p. 96, tradução nossa)⁸.

Como exemplo dos quadros elaborados por Stewart (2008), será apresentado o quadro que a pesquisadora fez para os conceitos de dependência e independência linear (Quadro 1), uma vez que esses são os conceitos escolhidos para realizar esta investigação.

Quadro 1 – O quadro Teoria APOS-Três mundos para dependência e independência linear

Mundos APÓS	Mundo corporificado	Mundo simbólico		Mundo formal
		Representação algébrica	Representação matricial	
Ação	<p>Pode desenhar dois vetores linearmente independentes específicos.</p>	<p>Pode organizar $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$ para obter uma combinação linear</p> $v_1 = \frac{c_2}{c_1}v_2 - \frac{c_3}{c_1}v_3,$ $c_1 \neq 0$ <p>(Para mostrar a dependência linear)</p>	$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ <p>Esta equação matricial apresenta a solução trivial, onde $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.</p> <p>Também</p> $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ <p>Vetores não são múltiplos, ou combinação linear entre si.</p>	

⁸ [...] the framework can be used to discover students' thinking abilities. By finding out weak points in a student's understanding and thinking, the instructor can see the areas that need improvement, and how to address them. Moreover, from a teaching point of view the framework was designed to make sure that every aspect of the concept mentioned in the cells of the framework is covered in the lectures. This should help to give students an overall view of each of the concepts and help them to build linear algebra knowledge that might assist them to reach formal world thinking.

Processo	<p>Pode mostrar três vetores quaisquer linearmente independentes.</p> 	<p>Pode ver que para vetores linearmente dependentes, um vetor sempre pode ser escrito como uma combinação linear dos outros.</p>	<p>Pode relacionar dependência e independência linear com a redução de uma linha pela forma escalonada de uma matriz.</p>	<p>Pode ver processos que relacionam a independência linear com outros conceitos da álgebra linear, tais como: combinação linear, espaço, posto de matriz e base.</p>
Objeto	<p>Quaisquer dois vetores definem um plano, e se um terceiro vetor não estiver no mesmo plano, os vetores são linearmente independentes.</p>	<p>Pode pensar em um conjunto de vetores linearmente independentes, v_i, como uma entidade, e pode usá-los, por exemplo, como uma base.</p>	<p>Pode pensar em uma matriz como um conjunto de vetores linearmente independentes $(a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}, \dots, a_{ni})$ e como uma entidade, e pode usar, por exemplo, como uma base.</p>	<p>Conhecimento da definição formal, onde a equação $c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n = 0$ tem apenas a solução trivial $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. $v_i \in V, c_i \in F$</p>

Fonte: Adaptado de Stewart, 2008, p. 94.

Por meio da breve discussão, pode-se perceber que o intuito dos pesquisadores, abordados nesta seção, é buscar soluções para o ensino, com a finalidade de amenizar as questões das dificuldades apresentadas pelos estudantes ao participarem de um primeiro curso de álgebra linear. Essas questões, como foi possível perceber, não são recentes e são discutidas em vários países, como França, Estados Unidos, Brasil, entre outros.

Ao longo desta seção foram apresentados alguns trabalhos realizados no Brasil com enfoque na álgebra linear (OLIVEIRA, 2005; PADREDI, 2003; KARRER, 2006). Assim, com a finalidade de complementar o que se trouxe aqui, será apresentado um quadro (Quadro 2) com trabalhos nacionais (teses e dissertações) produzidos em um período de 10 anos (2005-2015). Para realizar esse levantamento foi feita uma busca no Banco de Dissertações e Teses da Capes e na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, com o buscador “*álgebra linear, educação matemática*”. A escolha por esse buscador teve o intuito de restringir a pesquisa a respeito daquilo que estava sendo desenvolvido no âmbito da Educação Matemática com relação à álgebra linear e ao domínio público com o buscador “*álgebra linear*”. Alterou-se o buscador usado no domínio público, pois ao utilizar “*álgebra linear, educação*

matemática” não foi encontrada pesquisa alguma. Após essa busca inicial, foi realizada a leitura dos resumos e das palavras-chave, a fim de selecionar apenas os trabalhos que se relacionassem às questões do ensino e da aprendizagem da álgebra linear. Os trabalhos apresentados no quadro são aqueles que foram acessados na íntegra.

Quadro 2 – Pesquisas realizadas no Brasil a respeito da álgebra linear

Título do trabalho	Autor	Ano da defesa	Instituição	Objetivo
Transformações lineares em um curso de Licenciatura em Matemática: uma estratégia didática com uso de tecnologias digitais	Eliza Souza da Silva	2015	Pontifícia Universidade Católica (PUC)/SP	Investigar se uma sequência didática baseada na teoria das situações didáticas, envolvendo o uso do <i>software</i> GeoGebra 5, propicia aos alunos da licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará a construção do conceito de transformações lineares nos \mathbb{R} -espaços vetoriais \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 . (SILVA, 2015, p. 28)
Parametrização e movimentação de curvas e superfícies para uso em Modelação Matemática	Marcos de Miranda Paranhos	2015	Pontifícia Universidade Católica (PUC)/SP	Desenvolver atividades de Modelação Matemática para alunos do Ensino Superior da área de Ciências Exatas, realizando a sistematização, a articulação e a aplicação de objetos matemáticos estudados nas disciplinas de CDI [Cálculo Diferencial e Integral], GA [Geometria Analítica] e AL [Álgebra Linear], promovendo o aprofundamento e o significado do estudo dessas disciplinas. (PARANHOS, 2015, p. 6)
Esquemas cognitivos e mente matemática inerentes ao objeto matemático autovalor e	Joelma Iamac Nomura	2014	Pontifícia Universidade Católica (PUC)/SP	Investigar as estruturas cognitivas envolvidas na construção do objeto matemático autovalor e autovetor nas fases inicial e final de formação

autovetor: traçando diferenciais na formação do engenheiro				do aluno dos cursos de Engenharia. (NOMURA, 2014, p. 36)
Pensamento matemático avançado em tarefas envolvendo transformações lineares	Alessandra Senes Marins	2014	Universidade Estadual de Londrina (UEL)	Identificar e discutir que indícios/características de processos do Pensamento Matemático Avançado são manifestados por estudantes do curso de Matemática da Universidade Estadual de Londrina ao lidarem com tarefas referentes ao conteúdo de transformações lineares. (MARINS, 2014, p. 16)
Ensino e aprendizagem de Álgebra Linear: uma discussão acerca de aulas tradicionais, reversas e de vídeos digitais	Valdinei Cezar Cardoso	2014	Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP)	Investigar em que medida o material didático e a metodologia de ensino podem contribuir para a conceitualização em AL [Álgebra Linear]. (CARDOSO, 2014, p.28)
O uso dos softwares Winplot e Winmat no curso de Licenciatura em Matemática: potencialidades, possibilidades e desafios	Egídio Rodrigues Martins	2013	Centro Universitário UNIVATES	Discutir as potencialidades, possibilidades e os desafios da implantação dos softwares matemáticos <i>Winmat</i> e <i>Winplot</i> no Curso de Licenciatura em Matemática no IFNMG – Campus Januária. (MARTINS, 2013, p. 18)
Uma tecnologia para redação Matemática e seu uso na elaboração de um curso de Álgebra Linear	Rodrigo Gomes Devolder	2012	Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)	Propor “uma tecnologia para redação de textos matemáticos” e apresentar “uma descrição funcional de sua implementação através da integração de duas plataformas computacionais: um Sistema de Gestão da Aprendizagem (LMS) e um Sistema de Computação Algébrica (CAS)”. (DEVOLDER, 2012, p. 1)
Os conhecimentos supostos disponíveis na	Sérgio Destácio Faro	2011	Universidade Bandeirante	A proposta de estudar a noção de sistemas de equações lineares na

<p>transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior: o caso da noção de sistemas de equações lineares</p>			<p>de São Paulo (UNIBAN)/SP</p>	<p>transição entre o Ensino Médio e o Superior é verificar se as dificuldades dos estudantes do Ensino Superior em relação a esse objeto matemático estão associadas à falta de conhecimentos prévios que, em geral, são supostos disponíveis pelos professores do Ensino Superior. O que pode também ser considerado como uma proposta de reflexão sobre quais conhecimentos podem servir de base para o trabalho com estudantes do Ensino Superior. (FARO, 2011, p. 31)</p>
<p>Projetos de Modelagem Matemática e sistemas lineares: contribuições para a formação de professores de Matemática</p>	<p>Walter Sérvulo Araújo Rangel</p>	<p>2011</p>	<p>Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP)/MG</p>	<p>– Apresentar e discutir a Modelagem Matemática e a Educação Matemática no Ensino Superior, especificamente o ensino de Álgebra Linear, como tendências da Educação Matemática; – Identificar as contribuições de Projetos de Modelagem Matemática relacionados a Sistemas Lineares para a formação de professores em cursos de Licenciaturas em Matemática; – Desenvolver Projetos de Modelagem Matemática relacionados a conteúdos de Álgebra Linear trabalhados nos Ensino Médio e Superior (Sistemas Lineares), com alunos de Licenciatura em Matemática. (RANGEL, 2011, p. 22)</p>
<p>Alunos que completaram um curso de extensão em Álgebra Linear e suas concepções</p>	<p>Eneias de Almeida Prado</p>	<p>2010</p>	<p>Pontifícia Universidade Católica (PUC)/SP</p>	<p>Identificar a concepção que os alunos que concluíram um curso de Álgebra Linear têm sobre a noção de base de um</p>

sobre base de um espaço vetorial				espaço vetorial. (PRADO, 2010, p. 22)
Como sobrevivem as diferentes noções de Álgebra Linear nos cursos de Engenharia Elétrica e nas instituições	Joelma Iamac Nomura	2008	Pontifícia Universidade Católica (PUC)/SP	Responder às seguintes indagações: Por que e Como deve ser lecionada a disciplina Álgebra Linear em uma graduação de Engenharia Elétrica? (NOMURA, 2008, p. 20)
Alguns aspectos problemáticos relacionados ao ensino-aprendizagem da Álgebra Linear	Jarbas Lima Coimbra	2008	Universidade Federal do Pará (UFPA)	Investigar os obstáculos, e por factibilidade de realização de nossa pesquisa, dada a amplitude e complexidade que o assunto remete, restringimos a nossa pesquisa à questão "Quais são os obstáculos mais evidentes na conceituação de espaço vetorial?" (COIMBRA, 2008, p. 8)
Conceitos fundamentais de álgebra linear: uma abordagem integrando geometria dinâmica	Michele Viana Debus de França	2007	Pontifícia Universidade Católica (PUC)/SP	Investigar em que medida um tratamento geométrico e a articulação entre registros de representação (algébrico, gráfico e geométrico), auxiliados pelo ambiente Cabri-Géomètre, influenciam as concepções dos estudantes após terem cursado esta disciplina. (FRANÇA, 2007, p. 12)
O conceito de independência e dependência linear e os registros de representação semiótica nos livros didáticos de Álgebra Linear	André Lucio Grande	2006	Pontifícia Universidade Católica (PUC)/SP	Diagnosticar e analisar nos livros didáticos de Álgebra Linear selecionados neste trabalho quais são os registros de representação semiótica utilizados nas definições, exemplos e exercícios propostos a respeito das noções de independência e dependência linear. (GRANDE, 2006, p. 15)
Articulação entre Álgebra Linear e Geometria - um	Monica Karrer	2006	Pontifícia Universidade	[...] elaboração, aplicação e avaliação de uma abordagem de ensino do

Estudo sobre as Transformações Lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica			Católica (PUC)/SP	objeto matemático "transformações lineares planas", incorporando mudanças de registros e o auxílio do <i>software Cabri-Géomètre</i> , tendo por foco as conversões envolvendo principalmente o registro gráfico (KARRER, 2006, p. 6)
A noção de base de um espaço vetorial é trabalhada como "ferramenta explícita" para os assuntos de Ciência da Computação?	Carlos Eduardo da Silva	2005	Pontifícia Universidade Católica (PUC)/SP	Investigar a concepção de base dos alunos após terem cursado uma ou mais disciplinas específicas de sua área [Ciência da Computação] que exigissem em seus programas a Álgebra Linear como co ou pré-requisitos. (SILVA, 2005, p. 17)
Como funcionam os recursos-meta em aula de Álgebra Linear	Luis Carlos Barbosa de Oliveira	2005	Pontifícia Universidade Católica (PUC)/SP	Investigar quais recursos-meta são utilizados pelo professor de Álgebra Linear ao desenvolver a noção de base de um espaço vetorial, têm efeito de alavanca-meta para seus alunos. (OLIVEIRA, 2005, p. 18)

Fonte: a autora

Este levantamento mostra, de certa forma, a preocupação dos pesquisadores brasileiros com questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem da álgebra linear, uma vez que, como é possível ver nos objetivos apresentados no Quadro 2, na grande maioria dos trabalhos almeja-se propor e/ou desenvolver uma proposta de ensino a fim contribuir com a aprendizagem dos conceitos abordados em álgebra linear.

Na próxima seção será dado foco à questão das dificuldades que podem ser apresentadas pelos estudantes.

1.2 DIFICULDADES EM ÁLGEBRA LINEAR

Dorier e Sierpinska (2001) comentam em seu artigo “*Research into the teaching and learning of Linear Algebra*”⁹ que as dificuldades que os estudantes apresentam podem ter dois tipos de origens: uma associada à dificuldade conceitual, que se relaciona à natureza da álgebra linear, e outra, à dificuldade cognitiva, que se refere aos tipos de pensamento necessários para o conhecimento da álgebra linear.

Com relação ao primeiro tipo, os pesquisadores inicialmente abordam uma análise histórica e epistemológica, em que é evidenciado o caráter generalizador, unificador e simplificador da álgebra linear, aspectos esses que os estudantes podem não perceber ao realizar um primeiro curso. Assim, para superar/amenizar tal situação, sugerem o uso das alavancas-meta.

Outro aspecto abordado a respeito da natureza da álgebra linear é a linguagem utilizada, que apresenta um caráter formal. Segundo pesquisas realizadas na França por Dorier *et al.* (1987, 1994), de acordo com Dorier e Sierpinska (2001), esse é um grande problema para os alunos que não compreendem a especificidade do uso do formalismo, gerando assim o “obstáculo do formalismo” (DORIER; SIERPINSKA, 2001). Comentou-se a respeito desse obstáculo na seção anterior.

Outras linguagens que são comentadas referem-se à geométrica, algébrica e abstrata. Essas linguagens são discutidas por Hillel e Sierpinska (1994), que mostram três tipos de linguagem em álgebra linear, sendo elas a linguagem abstrata da teoria abstrata geral, como por exemplo, espaços vetoriais, a linguagem algébrica do R^n e a linguagem geométrica dos espaços de duas ou três dimensões.

Hillel e Sierpinska (1994) fundamentam as linguagens citadas no parágrafo anterior com as noções dos níveis intra-, inter- e trans-objetal; apresentadas no trabalho de Piaget e García (2004, p. 33), tais níveis correspondem, respectivamente, à análise do objeto, estudo das relações e transformações e construção das estruturas.

É comentado por Hillel e Sierpinska (1994) que a dificuldade de entender a linguagem usada na álgebra linear está no fato de que os conceitos da disciplina utilizam diversos tipos de linguagem e que os estudantes necessitam vê-las como uma forma de representação para superar essas dificuldades.

Dorier e Sierpinska (2001) tratam de mais um tipo de linguagem, agora referindo-se aos registros gráfico, tabular e simbólico. Para tanto, os pesquisadores

⁹ Pesquisas a respeito do ensino e aprendizagem da álgebra linear

abordam as representações semióticas definidas por Duval (1995) e as diferentes conversões necessárias em algumas atividades matemáticas.

Com relação à dificuldade cognitiva, que se refere às características do pensamento necessário para o conhecimento da álgebra linear, Dorier e Sierpinska (2001) abordam inicialmente a flexibilidade cognitiva, e para tanto, valem-se da pesquisa de Alves Dias (1993), em que se generaliza que as conversões de registros são essenciais, evidenciando a necessidade da flexibilidade cognitiva:

[...] a álgebra linear, sendo um modelo para vários contextos matemáticos, lida com vários quadros [no sentido de Douady (1986)], registros de representação semiótica e pontos de vista e, ao mesmo tempo, exige que o aluno seja capaz de mover-se livremente entre eles¹⁰ (DORIER; SIERPINSKA, 2001, p. 261, tradução nossa).

Como é possível perceber na citação anterior, o estudante de álgebra linear é, de certo modo, “obrigado” a passar por diferentes mudanças de representações e a ter uma “flexibilidade cognitiva” para poder transitar adequadamente por todas elas, sem necessariamente ter essa flexibilidade. Reforçando essa ideia, Alves Dias (1993) comenta que a maioria dos estudantes é “muito limitada em termos de flexibilidade”¹¹ (DORIER; SIERPINSKA, 2001, p. 261, tradução nossa). Por isso, de acordo com Dorier e Sierpinska (2001), Alves Dias, em sua pesquisa, desenvolveu uma série de tarefas que possibilitassem aos estudantes mobilizar mais mudanças de registros.

Dorier e Sierpinska (2001) abordam ainda o nível trans-objetual de pensamento, que já foi brevemente comentado nesta seção. Todavia, será apresentado agora o porquê da dificuldade dos estudantes chegar nesse nível. Segundo os pesquisadores, a dificuldade está no fato de os estudantes desenvolverem um “mecanismo de defesa” para sobreviver ao curso, no qual eles produzem ou realizam o que é solicitado, mas sem a atribuição de significado para os símbolos e as terminologias que estão utilizando.

Os pesquisadores abordam o pensamento prático em oposição ao teórico, em que os estudantes mostram uma tendência a basear sua compreensão em exemplos, ao invés de basear-se na definição do objeto matemático. A questão da dificuldade

¹⁰ Linear algebra being a model for various mathematical contexts, it deals with several frameworks, registers of semiotic representation, and viewpoints at the same time, and requires the learner to be able to move freely between them.

¹¹ [...] very limited in terms of flexibility.

fica no campo dessa necessidade do “pensamento prático”, ao qual os estudantes acabam se prendendo.

Por fim, Dorier e Sierpinska (2001) tratam dos modos do pensamento em álgebra linear, sendo eles o aritmético-analítico e o estrutural-analítico. Esses tipos de pensamento, juntamente com o geométrico-sintético, segundo Dorier e Sierpinska (2001), foram propostos por Sierpinska *et al.* (1997) em paralelo às linguagens propostas por Hillel (2000). Os pesquisadores abordam nesse momento os pensamentos analíticos, pois, por meio deles, é possível fazer referência ao desenvolvimento histórico, além de “analítico” corresponder a como os objetos podem ser concebidos e construídos em uma linguagem e um sistema conceitual, podendo também partir de uma definição ou um conjunto de propriedades. As dificuldades desses modos de pensamento estão relacionadas, algumas vezes, às atividades que apresentam, assim, retorna-se à questão da flexibilidade cognitiva que é necessária ao estudante.

Outro pesquisador que trata da questão de dificuldade é Dubinsky, em seu artigo de 1997, em que é apresentada uma interpretação dos quatro motivos, segundo Carlson (1993), para as dificuldades com subespaço, dependência e independência linear:

1. O curso é ensinado muito cedo e os estudantes são imaturos.
2. As dificuldades têm a ver com os conceitos e os estudantes têm pouca experiência com ideias de aprendizagem, ao contrário do que acontece com os algoritmos computacionais, que são menos difíceis.
3. Os estudantes não têm experiência com o uso – muito menos com a determinação – de diferentes algoritmos para trabalhar com um conceito em diferentes contextos.
4. Os conceitos são introduzidos sem nenhuma conexão substancial com as experiências prévias dos estudantes¹² (DUBINSKY, 1997, p. 89, tradução nossa).

Essas dificuldades, de acordo com Dubinsky (1997), são muito gerais e não se apresentam formas para que possam ser superadas.

¹² 1. The course is taught too early and the students are unsophisticated. 2. The difficulties have to do with concepts and students have little experience with learning ideas as opposed to the less difficult computational algorithms. 3. Students are not experienced with the using - much less the determining - of different algorithms to work with a concept in different settings. 4. Concepts are introduced without substantial connection with students' prior experience.

Stewart (2008) também apresenta algumas razões para as dificuldades dos estudantes com a álgebra linear: sua natureza abstrata (que já foi, de certo modo, apresentada nesta seção), a falta de problemas adequados para o desenvolvimento do curso de álgebra linear e o papel das definições no conhecimento matemático.

Com relação à falta de problemas adequados, a pesquisadora comenta que é difícil encontrar problemas para cada novo conceito e que assim, os estudantes acabam se queixando de o curso ser tão abstrato. Stewart (2008) comenta ainda a respeito da interpretação de Dubinsky (1997) para com as recomendações do LACSG, em que o pesquisador ressalta que os professores podem entender erroneamente essas recomendações e cair em uma armadilha, por acreditarem que é necessário trabalhar com vários aplicativos de computadores.

Stewart (2008), além disso, discute que o papel das definições e se suas interpretações por parte dos estudantes podem ser causas de dificuldades. Para tanto, Stewart (2008) vale-se de diversos autores, dentre eles Tall e Vinner (1981) e suas definições de conceito definição e conceito imagem. A pesquisadora comenta, por fim, que a definição pode salvar o estudante de muitas armadilhas, no que se refere a aplicações posteriores, e que se essa imagem não for baseada no conceito definição, então podem surgir vários erros.

Para finalizar essa parte em que foram apresentadas algumas dificuldades da álgebra linear, será abordado um trabalho que investiga as dificuldades com os conceitos de dependência e independência linear. O trabalho em questão é a dissertação de Andreoli (2009), que faz uma análise dos obstáculos encontrados pelos alunos ao estudarem tais conceitos.

Andreoli (2009) apresenta algumas considerações a respeito dos conceitos de dependência e independência, mostrando por meio de algumas definições, expressões que podem causar obstáculos na aprendizagem desses conceitos, como por exemplo, “ao menos um” e “os restantes”.

A autora comenta que alguns obstáculos, com relação a expressões que levam a outros entendimentos, estão “vinculados a dificuldades que derivam da quantificação das proposições”¹³ (ANDREOLI, 2009, 142, tradução nossa).

¹³ [...] vinculados a las dificultades que derivan de la cuantificación de proposiciones.

Ao longo da análise das informações coletadas, Andreoli (2009) constatou, além de obstáculos, algumas concepções errôneas que os estudantes apresentaram. Dentre elas estão

- O caso da independência linear se reduz a observar que a cardinalidade do conjunto de vetores é igual à dimensão do espaço.
- A demonstração de que um vetor não é combinação linear de outros, se reduz a:
 - Verificar que a soma dos outros não resulta no primeiro
 - Impor um par de escalares arbitrários e observar que a combinação linear desses vetores, com esses escalares, não dá como resultado o primeiro vetor.
 - Observar que nenhum dos dois vetores é múltiplo do primeiro.
- A demonstração de que um conjunto de vetores é linearmente independente se reduz a:
 - Exibir a combinação linear nula trivial
 - Obter a expressão $0 = 0$, depois de apresentar uma combinação linear nula genérica¹⁴ (ANDREOLI, 2009, p. 144-145, tradução nossa).

Essas concepções citadas são apenas algumas das que apareceram nas conclusões de Andreoli (2009). Decidiu-se por apresentá-las pelo fato de que essas dificuldades poderão abranger as que possivelmente surgirão nesta pesquisa.

Com relação aos obstáculos, Andreoli (2009, p. 145, tradução nossa) observou que dentre os mais relevantes encontram-se:

- A dialética entre o geral e o particular.
- Encerramento no uso das definições de LD e LI como única ferramenta possível.
- Impedimento para reconhecer que, a não ser no caso de vetor nulo, as CL's [combinações lineares] se apresentam ao menos, em pares.
- A escassa flexibilidade cognitiva entre as ideias do campo conceitual descrito e entre os distintos registros de representação semiótica.
- Resistência em aceitar a ideia de que a dependência e a independência linear são características excludentes dos conjuntos de vetores.

¹⁴ - El caso de la independencia lineal se reduce a observar que el cardinal del conjunto de vectores sea igual a la dimensión del espacio. - La demostración de que un vector no es combinación lineal de otros, se reduce a: verificar que la suma de éstos, no resulta el primeiro. Imponer un par de escalares arbitrarios y observar que la combinación lineal de esos vectores, con esos escalares, no da por resultado el primer vector. - Observar que ninguno de los dos vectores es múltiplos del primero. - La demostración de que un conjunto de dos vectores es linealmente independiente se reduce a: exhibir la combinación lineal nula trivial; obtener la expresión $0 = 0$, luego de plantear una combinación lineal nula genérica de los vectores.

- A não-inclusão da solução trivial entre as infinitas soluções de um sistema homogêneo indeterminado.
- Não conseguir conceber a ideia de que um vetor que é combinação linear de outro é do conjunto de vetores.
- Rejeitar a possibilidade de incluir as combinações lineares, algum vetor com coeficiente nulo¹⁵.

A seguir, será apresentado um quadro-síntese (Quadro 3) com as dificuldades elencadas nesta seção, a fim de contribuir no momento das análises dos registros escritos dos participantes da pesquisa.

Quadro 3 – Síntese das dificuldades

Dificuldade com a natureza da álgebra linear	Caráter formal da linguagem empregada na álgebra linear.
	Diferentes linguagens empregadas nos conceitos (algébrica, geométrica, abstrata).
Dificuldade subjetiva	Flexibilidade cognitiva para transitar entre as diferentes formas de registros (gráfico, tabular, simbólico).
	Não-atribuição de significado para os símbolos e as terminologias utilizadas.
	Interpretação das definições dos conceitos.
	Estratégias para identificar vetores LI e LD.

Fonte: a autora

Com esta seção, foi possível perceber que as dificuldades presentes na álgebra linear vão desde sua natureza até as dificuldades subjetivas que os estudantes podem apresentar ao estudá-la.

O próximo capítulo versará a respeito dos conceitos escolhidos para realizar esta investigação, sendo eles a dependência e a independência linear.

¹⁵ - La dialéctica entre lo general y lo particular. - Encerramiento en el uso de las definiciones de DL e IL como única herramienta posible. - Impedimento para reconocer que, salvo el caso del vector nulo, las CLs se presentan al menos, en parejas. - La escasa flexibilidad cognitiva entre las ideas del campo conceptual descrito y entre los distintos registros de representación semiótica. - Resistencia a aceptar la idea de que la dependencia e a independencia lineal son características excluyentes de los conjuntos de vectores. - La no inclusión de la solución trivial entre las infinitas soluciones de un sistema homogêneo indeterminado. - No lograr concebir la idea de que um vector que es combinación lineal de otro, es del conjunto de vectores. - Rechazar la posibilidad de incluir em las combinaciones lineales, algún vector con coeficiente nulo.

CAPÍTULO 2

DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR

Neste capítulo serão abordados os objetos matemáticos escolhidos para realizar a investigação deste trabalho, sendo eles os conceitos de dependência e independência linear. Dessa forma, será apresentada a definição e alguns exemplos desses objetos matemáticos.

2.1 OS CONCEITOS DE DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR

Os conceitos de dependência e independência linear podem ser definidos da seguinte forma:

Sejam V um espaço vetorial e $v_1, \dots, v_n \in V$. Dizemos que o conjunto $\{v_1, \dots, v_n\}$ é *linearmente independente* (LI), ou que os vetores v_1, \dots, v_n são LI, se a equação

$$a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$$

implica que $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$. No caso em que exista algum $a_i \neq 0$, dizemos que $\{v_1, \dots, v_n\}$ é *linearmente dependente* (LD), ou que os vetores v_1, \dots, v_n são LD. (BOLDRINI *et al.*, 1986, p. 114)¹⁶

O exemplo que se segue é o de um conjunto LI:

Exemplo 1 – No espaço vetorial do R^3 o conjunto $A = \{(1,2,4), (8,4,2), (1,1,1)\}$ é LI.

De fato, fazendo

$$a_1(1,2,4) + a_2(8,4,2) + a_3(1,1,1) = (0,0,0) \quad (1)$$

com $a_1, a_2, a_3 \in R$

tem-se:

$$(a_1, 2a_1, 4a_1) + (8a_2, 4a_2, 2a_2) + (a_3, a_3, a_3) = (0,0,0) \quad (2)$$

Igualando os componentes correspondentes, tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_1 + 8a_2 + a_3 = 0 \\ 2a_1 + 4a_2 + a_3 = 0 \\ 4a_1 + 2a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

¹⁶ Apesar de na definição Boldrini *et al.* (1986) não ser especificado o conjunto ao qual pertencem os escalares, na página 112 os autores comentam que os mesmos são reais ou complexos.

Resolvendo o sistema, obtém-se a solução trivial, ou seja, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Logo, o conjunto A é LI.

Com relação à dependência linear, tem-se uma “formulação alternativa e útil” (POOLE, 2004, p. 402) que é apresentada pelo seguinte teorema: “Um conjunto de vetores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é linearmente dependente, em um espaço vetorial V , se, e somente se, pelo menos um dos vetores puder ser expresso como uma combinação linear dos demais”. Esse teorema, segundo Boldrini *et al.* (1986, p. 114-115), tem a possibilidade de ser provado da seguinte forma:

Sejam v_1, \dots, v_n LD e

$$a_1 v_1 + \dots + a_j v_j + \dots + a_n v_n = 0$$

Segundo a definição dada, um dos coeficientes deve ser diferente de zero. Suponhamos que $a_j \neq 0$. Então

$$v_j = -\frac{1}{a_j} (a_1 v_1 + \dots + a_{j-1} v_{j-1} + a_{j+1} v_{j+1} + \dots + a_n v_n)$$

e, portanto,

$$v_j = -\frac{a_1}{a_j} v_1 + \dots - \frac{a_n}{a_j} v_n$$

Logo, v_j é uma combinação linear dos outros vetores.

Por outro lado, se tivermos $\{v_1, \dots, v_j, \dots, v_n\}$, tal que para algum j ,

$$v_j = b_1 v_1 + \dots + b_{j-1} v_{j-1} + b_{j+1} v_{j+1} + \dots + b_n v_n$$

temos

$$b_1 v_1 + \dots - 1 v_j + \dots + b_n v_n = 0 \text{ com } b_j = -1 \text{ e,}$$

portanto, $\{v_1, \dots, v_n\}$ é LD.

Por meio desse teorema, tem-se o seguinte equivalente: “Um conjunto de vetores é LI se, e somente se, nenhum deles for uma combinação linear dos outros” (BOLDRINI *et al.*, 1986, p. 115).

O exemplo seguinte mostra um caso referente ao teorema apresentado anteriormente, em que os vetores são LD, pois é possível escrever um dos vetores como combinação linear dos outros:

Exemplo 2 – O conjunto $B = \{(4,8,6), (1,2,3), (6,12,12)\}$ do R^3 é LD, pois

$$(6,12,12) = 1(4,8,6) + 2(1,2,3) \quad (4)$$

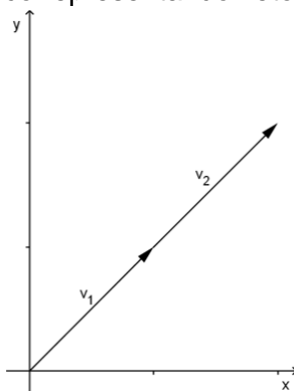
ou seja,

$$v_3 = 1v_1 + 2v_2 \quad (5)$$

A dependência e a independência linear no R^2 e no R^3 possuem uma interpretação geométrica útil para identificá-las. Tais interpretações serão comentadas nos próximos parágrafos.

No R^2 , para os vetores serem LD necessitam estar na mesma reta que passa pela origem, ou seja, um vetor é múltiplo escalar do outro ($v_1 = kv_2$), como é possível ver na Figura 1. Se os vetores não estiverem na mesma reta, então eles serão LI.

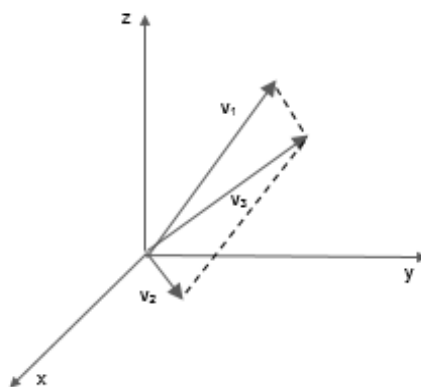
Figura 1 – Gráfico representando vetores LD no R^2



Fonte: a autora

Já no R^3 , para três vetores serem LD precisam estar representados no mesmo plano que passa pela origem, ou seja, os vetores precisam ser coplanares (Figura 2); caso contrário, serão LI.

Figura 2 – Gráfico representando vetores LD no R^3



Fonte: a autora

Ao longo da seção, os vetores abordados pertenciam ao espaço vetorial R^n , porém os vetores escolhidos poderiam pertencer a um outro espaço vetorial, como o matricial de ordem $m \times n$, representado por $M(m, n)$. O exemplo a seguir refere-se ao espaço matricial.

Exemplo 3 – No espaço vetorial $M(2,2)$, o conjunto $A = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é LD. (STEINBRUCH; WINTERLE, 2009, p. 57)

De fato, escrevendo

$$a_1 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

com $a_1, a_2, a_3 \in R$

ou escrevendo de modo equivalente, tem-se

$$\begin{bmatrix} -a_1 + 2a_2 + 3a_3 & 2a_1 - 3a_2 - 4a_3 \\ -3a_1 + 3a_2 + 3a_3 & a_1 + a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Igualando os elementos correspondentes, tem-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \\ 2a_1 - 3a_2 - 4a_3 = 0 \\ -3a_1 + 3a_2 + 3a_3 = 0 \\ a_1 + a_3 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Resolvendo-se o sistema, obtém-se como solução $a_1 = -a_3$ e $a_2 = -2a_3$. Logo, o conjunto A é LD.

Conforme o que já foi exposto nesta parte, abordou-se a definição e algumas características da dependência e independência linear, sendo esses os objetos matemáticos escolhidos para a pesquisa, além de a definição e as características serem necessárias para a resolução do instrumento para coleta dos dados.

No próximo capítulo, será apresentada a Teoria APOS, que possibilitará atingir a outra parte do objetivo desta dissertação, que corresponde a “investigar [...] concepções referentes aos conceitos de dependência e independência linear de licenciandos em Matemática”.

CAPÍTULO 3

TEORIA APOS

Neste capítulo será apresentada a Teoria APOS (Ação-Processo-Objeto-Esquema), de Dubinsky e seus colaboradores (Asiala *et al.*, 1996), que serviu de base para atingir uma parte do objetivo deste trabalho: investigar as dificuldades e concepções de licenciandos em Matemática referentes aos conceitos de dependência e independência linear.

Antes de abordarmos a Teoria APOS, serão apresentadas algumas seções. Na primeira, serão abordadas de forma breve as caracterizações do Pensamento Matemático Avançado (PMA), uma vez que o trabalho de Dubinsky e seus colaboradores foi realizado voltado a esse tipo de pensamento. Na segunda seção serão discutidos alguns trabalhos (teses e dissertações) que utilizaram tal teoria e foram importantes para esta dissertação, pois colaboraram para o entendimento da APOS, dentre os quais estão o trabalho de Prado (2010), Elias (2012) e Nomura (2014). Na terceira seção será apresentada a Teoria APOS, como ela surgiu e se desenvolveu. Por fim, na quarta seção será apresentada a decomposição genética dos conceitos de dependência e independência linear.

3.1 PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO: UMA BREVE CARACTERIZAÇÃO

Vários pesquisadores têm-se esforçado para entender o desenvolvimento do pensamento matemático evidenciando diversas características (DOMINGOS, 2006), dentre os quais estão Tall (1995, 2002), Dreyfus (2002) e Gray *et al.* (1999).

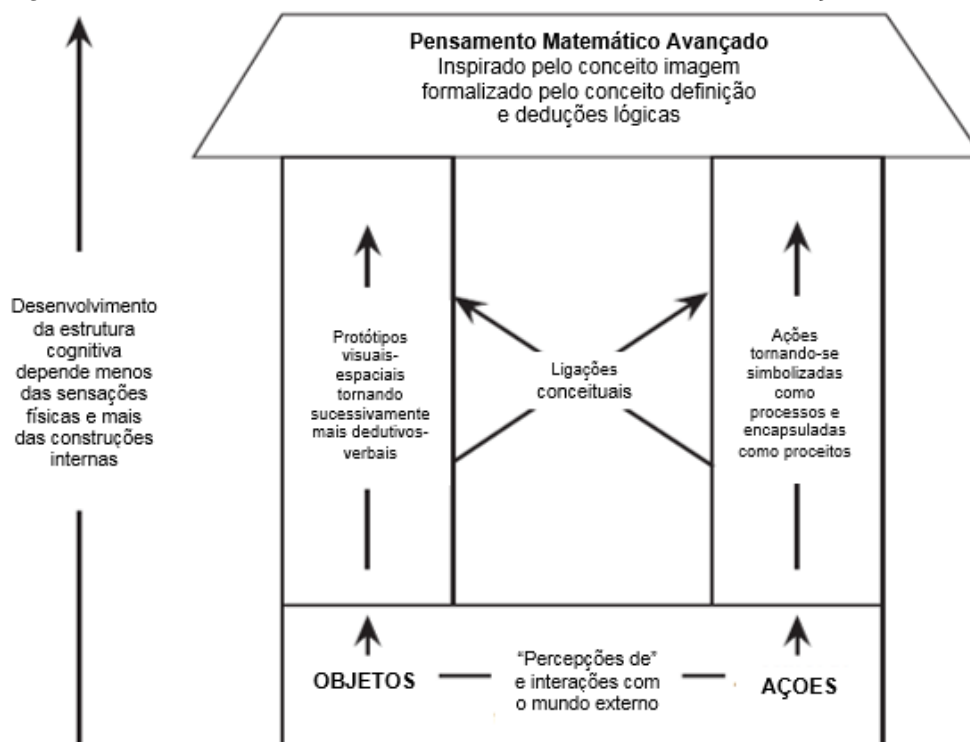
O Pensamento Matemático Avançado (PMA), de acordo com Tall (1995, p. 3, tradução nossa), “envolve o uso de estruturas cognitivas produzidas por uma ampla gama de atividades matemáticas para a construção de novas ideias que se baseiam em estender um sistema cada vez maior de teoremas estabelecidos”¹⁷.

Tall (1995) ainda considera que o PMA pode começar com a “percepção de” e “ação em” objetos do mundo externo, acontecendo sua construção por meio de dois desenvolvimentos paralelos: um espacial visual, para dedução verbal, e outro a partir da encapsulação de processo-a-conceito, usando, para tanto, símbolos manipuláveis.

¹⁷ [...] involves using cognitive structures produced by a wide range of mathematical activities to construct new ideas that build on and extend an ever-growing system of established theorems.

Por meio desse desenvolvimento é inspirado o pensamento criativo “baseado em objetos formalmente definidos e provas sistemáticas”¹⁸ (1995, p. 3, tradução nossa). O autor apresenta a seguinte figura (Figura 3), exemplificando como se dá o desenvolvimento do PMA:

Figura 3 – Desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado



Fonte: Adaptado de Tall (1995, p. 4)

Por meio da Figura 3, percebe-se que Tall (1995) parte da hipótese de que o PMA desenvolve-se passando inicialmente pelas “percepções de” e interações de ações e objetos com o mundo exterior. Estes passam por desenvolvimentos paralelos que se relacionam mediante ligações conceituais, para assim, chegar a um pensamento baseado por objetos formais e deduções lógicas.

O PMA, para Tall (1995), distingue-se do Pensamento Matemático Elementar (PME) por definir um objeto, no qual as características e propriedades são obtidas por meio da própria definição, enquanto o PME descreve o objeto, e essa descrição é feita por meio da experiência do sujeito com o objeto.

Tall (2002, p. 20) mostra que a transição do PME para o PMA envolve uma mudança interessante, por partir do descrever para o definir, do convencer para a

¹⁸ [...] based on formally defined objects and systematic proof.

prova lógica baseada em definições. Tall (1995) ainda comenta que se pode traçar uma linha entre o PMA e o PME quando o objeto matemático é um conceito definido construído por definições verbais.

Em contrapartida, Dreyfus (2002, p. 26, tradução nossa) acredita que não há uma distinção nítida entre os processos envolvidos no PME e no PMA. Entretanto, afirma que a Matemática avançada possui maior foco nas “abstrações da definição e dedução”¹⁹. Uma diferença que Dreyfus (2002) comenta a respeito desses pensamentos relaciona-se com a complexidade com que os conceitos matemáticos são tratados, ou seja, quanto mais complexo o tratamento com os conceitos, mais eles se aproximam do PMA.

Dreyfus (2002) mostra ainda que o desenvolvimento do PMA envolve alguns processos, entre eles, os de representar, visualizar, generalizar, sintetizar etc. Todavia, o autor afirma que, desses processos, os que permitem gerenciar o nível de complexidade são a abstração e a representação.

Outro entendimento a respeito do PMA é apresentado por Gray *et al.* (1999, p. 122, tradução nossa), em que os autores comentam que tal pensamento possui um foco maior no “pensamento criativo de matemáticos profissionais”. Os autores mostram que o PMA é utilizado no pensamento dos estudantes a respeito dos axiomas e definições criados por outras pessoas.

A distinção entre o PMA e o PME, apresentada por Gray *et al.* (1999, p.116, tradução nossa), concentra-se no contexto formal, “em que objetos são criados a partir de propriedades (axiomas) em vez de propriedades deduzidas (manipuladas) de objetos”²⁰.

Para Gray *et al.* (1999), o movimento *construção do objeto* \implies *definição* para a *construção definição* \implies *objeto* é essencial para a transição do PME para o PMA, em que a passagem da *construção definição* \implies *objeto* é considerada essencial, por envolver a seleção e o uso de definições que podem acarretar a inversão de experiências anteriores de relações, e com isso, uma transposição da estrutura do conhecimento.

Os autores apresentados nesta seção possuem diversas perspectivas a respeito do PMA, mas de modo geral, pode-se dizer que tal pensamento corresponde

¹⁹ [...] abstractions of definition and deduction.

²⁰ [...] in which objects are created from properties (axioms) instead of properties deduced from (manipulating) objects

a ações mentais que envolvem certa complexidade, visando a construir um objeto matemático. Corroborando com isso, Domingos (2006) comenta que o PMA “trata-se de um pensamento em que os processos envolvidos são complexos”. O autor ainda comenta que esse pensamento pode “manifestar-se em conceitos matemáticos bastante elementares”, assim, como ressaltado pelo autor, esse entendimento afasta-se do que é proposto por Tall (1995, 2002), pois este argumenta que o PMA se manifesta em atividades da matemática axiomática.

Após essa breve caracterização do PMA, serão abordadas no próximo tópico algumas pesquisas que utilizaram a Teoria APOS.

3.2 ALGUMAS PESQUISAS RELACIONADAS À TEORIA APOS

Nesta seção, serão abordadas brevemente as pesquisas de Prado (2010), Elias (2012) e Nomura (2014), que utilizaram a Teoria APOS em seu referencial. Essas pesquisas foram selecionadas por meio de buscas no Banco de Teses e Dissertações da CAPES, Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações e no Domínio Público, com o buscador “*Teoria APOS*”. Escolheu-se descrever apenas esses três trabalhos, pois foram os primeiros lidos pela pesquisadora e auxiliaram no entendimento da Teoria APOS. Entretanto, no final da seção será apresentado um quadro com as teses e dissertações encontradas em âmbito nacional.

Dos trabalhos descritos nesta seção, apenas o de Elias (2012) não é referente à álgebra linear, entretanto, tornou-se importante para esta pesquisa por ter sido uma das primeiras leituras realizadas e motivador do uso da APOS nesta dissertação. As pesquisas serão descritas seguindo o ano em que foram defendidas, assim, será descrita inicialmente a pesquisa de Prado (2010), depois a de Elias (2012), e por fim, a de Nomura (2014).

Prado (2010, p. 23), em sua dissertação, utilizou a Teoria APOS para “identificar a concepção que os alunos que concluíram um curso de Álgebra Linear têm sobre a noção de base de um espaço vetorial”.

Nessa pesquisa, o autor fez uma decomposição genética do conceito de base, para tanto, descreveu uma decomposição a respeito desse conceito realizada por outros autores, Euán (2007) e Euán *et al.* (2008), para assim, apresentar um refinamento, utilizando como parâmetro três concepções pelas quais concebe o conceito de base, a saber: “um conjunto minimal gerador, um conjunto maximal de

vetores linearmente independentes e a justaposição entre um conjunto minimal gerador e um conjunto maximal de vetores linearmente independentes” (PRADO, 2010, p. 64).

Prado (2010) constatou em sua pesquisa que a maioria dos estudantes por ele entrevistados, mesmo a maior parte tendo concluído mais de um curso de álgebra linear, concebe base como sendo um conjunto gerador linearmente independente. Além disso, percebeu que as construções mentais realizadas pelos alunos podem ser feitas por correlações entre noções elementares da álgebra linear, como por exemplo, “conceber base como sendo um conjunto linearmente independente (ou gerador) com o número de vetores, exatamente, igual à dimensão do espaço” (2010, p. 169).

O próximo trabalho a ser abordado é o de Elias (2012, p. 14), que se valeu da Teoria APOS para “identificar e interpretar dificuldades apresentadas por estudantes de Matemática da Universidade Estadual de Londrina na compreensão de conceitos de grupo e/ou isomorfismo de grupos”, uma vez que essa teoria cognitiva, juntamente com a teoria da reificação de Sfard (1991), permitiria “perceber e interpretar dificuldades dos estudantes ao trabalharem com os conceitos abstratos de grupos e isomorfismo de grupos (ELIAS, 2012, p.140).

Em sua pesquisa, o autor listou vinte e nove dificuldades que foram identificadas por meio dos erros, equívocos ou falas confusas dos estudantes, estas últimas evidenciadas nas entrevistas. Essas dificuldades foram agrupadas em quatro grupos amplos, e dentro deles foram elaborados subgrupos contendo dificuldades específicas.

A partir das dificuldades identificadas e apoiado na Teoria APOS, Elias (2012) inferia a concepção que cada estudante apresentava. É possível ver a forma como o autor fazia suas inferências por meio da citação a seguir:

Portanto, a noção equivocada de grupo como um conjunto, a limitação aos conjuntos numéricos e operações mais comuns, a dificuldade em reconhecer e lidar com o conjunto $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, a dificuldade em lidar com o conjunto \mathbb{Z}_4 , nos levam a dizer que o estudante E7 possui uma *concepção ação* do conceito de grupo. (ELIAS, 2012, p. 136)

O autor constatou, em sua pesquisa, que a maioria dos estudantes possuía uma visão elementar da estrutura de grupo e de isomorfismo de grupos, pois, às vezes, os estudantes não dominavam certos objetos matemáticos como conjuntos e funções. Elias (2012, p. 143) destaca a necessidade de se prestar atenção a

“conceitos prévios no ensino de grupo e isomorfismo de grupos”, já que tais conceitos podem influenciar o aprendizado dos estudantes.

O outro trabalho a ser abordado é a pesquisa de doutorado de Nomura (2014), no qual a autora utilizou a Teoria APOS para “investigar as estruturas cognitivas envolvidas na construção do objeto matemático autovalor e autovetor nas fases inicial e final de formação do aluno dos cursos de Engenharia” (NOMURA, 2014, p. 36). Além de utilizar a Teoria APOS, Nomura (2014) usou os conceitos imagem e definição de Vinner (1991) e de Domingos (2003) para atingir o objetivo de sua tese.

A autora, ao realizar suas análises das respostas dos estudantes participantes da pesquisa, em um primeiro momento buscou identificar as concepções que eles apresentavam, para depois verificar o nível do conceito imagem que possuíam. Um exemplo do que foi feito refere-se à primeira fase do Estudo de Caso I (a autora realizou dois estudos de caso, e cada um possuía duas fases), em que Nomura (2014) identificou que os três participantes apresentavam concepção processo do conceito de autovalores e autovetores, além de conceito imagem em nível instrumental. Este conceito ocorre quando “é possível estabelecer processos que conduzam à construção do objeto matemático autovalor e autovetor” (NOMURA, 2014, p. 254).

Nomura (2014) conseguiu constatar que todos os estudantes conseguiram relacionar a disciplina de Álgebra Linear com demais disciplinas do curso de Engenharia, entretanto, os alunos pertencentes à segunda fase dos dois estudos de caso (alunos em fase de conclusão do curso), apresentaram um melhor desempenho com relação a assuntos específicos.

A pesquisadora salienta em suas considerações finais a necessidade de se repensar os cursos de álgebra linear “com base nas situações matemáticas problemáticas, cujas soluções envolvem ações, processos, objetos e relações entre esquemas que se constroem em face de determinada situação” (NOMURA, 2014, p. 302), para assim considerar aspectos inerentes à formação do estudante.

Essas pesquisas que foram abordadas brevemente nos parágrafos anteriores serviram, como já dito, para auxiliar na compreensão da Teoria APOS, possibilitando ver formas de abordagem com essa teoria, contribuindo, assim, para ampliar a visão a respeito da mesma.

Com a finalidade de complementar e apresentar uma síntese dos trabalhos abordados nesta seção, elaborou-se um quadro (Quadro 4), no qual é realizado um levantamento das teses e dissertações que utilizaram a Teoria APOS em seu

referencial. Essas pesquisas foram encontradas nos portais já citados no início da seção, tendo sido produzidas no Brasil em um período de 10 anos (2005-2015). Os trabalhos apresentados no quadro são aqueles que foram acessados na íntegra.

Quadro 4 – Pesquisas a respeito da Teoria APOS

Título do trabalho	Autor	Ano de defesa	Instituição	Objetivo
Esquemas cognitivos e mente matemática inerentes ao objeto matemático autovalor e autovetor: traçando diferenciais na formação do engenheiro	Joelma Iamac Nomura	2014	Pontifícia Universidade Católica (PUC)/SP	Investigar as estruturas cognitivas envolvidas na construção do objeto matemático autovalor e autovetor nas fases inicial e final de formação do aluno dos cursos de Engenharia. (NOMURA, 2014, p. 36)
Dificuldades de estudantes de licenciatura em matemática na compreensão de conceitos de grupo e/ou isomorfismo de grupo	Henrique Rizek Elias	2012	Universidade Estadual de Londrina (UEL)	Identificar e interpretar dificuldades apresentadas por estudantes de Matemática da Universidade Estadual de Londrina na compreensão de conceitos de grupo e/ou isomorfismo de grupos. (ELIAS, 2012, p. 14)
As operações com números naturais e alunos em dificuldades do 8º ano do Ensino Fundamental	Natália Coelho Soares	2012	Pontifícia Universidade Católica (PUC)/SP	Investigar se e como alunos do 8º ano, que apresentam dificuldades na resolução de atividades matemáticas que envolvem operações com os números naturais, aprofundam seus conhecimentos, quando lhes é dada a oportunidade do uso de tecnologias não-usuais em sala de aula. (SOARES, 2012, p. 16)
Concepções de divisibilidade de alunos do 1º ano do Ensino Médio sob o ponto de vista da Teoria APOS	Rogério Osvaldo Chaparin	2010	Pontifícia Universidade Católica (PUC)/SP	Investigar qual é a concepção de divisibilidade dos estudantes que ingressam no Ensino Médio. (CHAPARIN, 2010, p. 19)
Alunos que completaram um curso de extensão em Álgebra Linear e suas concepções sobre base de um espaço vetorial	Eneias de Almeida Prado	2010	Pontifícia Universidade Católica (PUC)/SP	Identificar a concepção que os alunos que concluíram um curso de Álgebra Linear têm sobre a noção de base de um espaço vetorial (PRADO, 2010, p. 23)

Divisão de números naturais: concepções de alunos de 6ª série	Cristiane Attili Castela	2005	Pontifícia Universidade Católica (PUC)/SP	Investigar as concepções do aluno de sexta série, no que diz respeito à divisão de Números Naturais. (CASTELA, 2005, p. 35)
---	--------------------------	------	---	---

Fonte: a autora

Depois dessa breve descrição e da apresentação das pesquisas, a próxima seção deste capítulo será referente à Teoria APOS.

3.3 TEORIA APOS: DESENVOLVIMENTO E CARACTERÍSTICAS

A Teoria APOS, segundo Dubinsky (2001), é uma teoria construtivista que se baseia na hipótese de que o conhecimento matemático consiste em uma “tendência do indivíduo em lidar com percepções matemáticas em situações-problema através da construção mental *ações, processos e objetos*, além de organizá-los em *esquemas* para dar sentido às situações e resolver problemas” (DUBINSKY; MCDONALD, 2001, p. 2, tradução nossa)²¹.

Essa teoria foi desenvolvida por um grupo de pesquisadores chamado *Research in Undergraduate Mathematics Education Community*²² (RUMEC). Este grupo buscou compreender a abstração reflexionante (*réfléchissante*) introduzida por Piaget (1972), uma vez que em seus estudos foi dito que tal abstração, em sua forma mais avançada, possibilita a conversão dos processos em objetos matemáticos (DUBINSKY, 2002). Piaget (1995) diferencia três tipos de abstração: a empírica (*empirique*), a pseudo-empírica (*pseudo-empiriques*) e a reflexionante, que serão detalhadas nos próximos parágrafos.

A abstração empírica apoia-se em objetos físicos, em suas propriedades, características, ou seja, o sujeito tira suas informações da observação dos objetos. Para ocorrer essa abstração, Piaget (1995, p. 5) comenta que “é necessário utilizar de saída instrumentos de assimilação (estabelecimento de relações, significados, etc), oriundos de ‘esquemas’ (*schèmes*) sensório-motores ou conceptuais não fornecidos por este objeto, porém, construídos anteriormente pelo sujeito”. Todavia, Piaget

²¹ [...] in an individual's tendency to deal with perceived mathematical problem situations by constructing mental *actions, processes, and objects* and organizing them in *schemas* to make sense of the situations and solve the problems.

²² Comunidade de Pesquisa em Educação Matemática na Graduação.

ressalta que mesmo estes esquemas sendo importantes, a abstração empírica não se refere a eles, mas sim, às formas que podem possibilitar ao que é exterior.

A abstração pseudo-empírica é intermediária à abstração empírica e à reflexionante, consistindo na necessidade de o sujeito utilizar objetos materiais para realizar construções. Nessa abstração, a leitura dos resultados constatáveis “se faz a partir de objetos materiais, como se tratassem de abstrações empíricas, as propriedades constatadas são na realidade, introduzidas nestes objetos por atividades do sujeito” (PIAGET, 1995, p. 6). Tal abstração pode ser considerada, como comenta Piaget (1995, p. 274), “um caso particular de abstração reflexionante”, já que as constatações feitas são “produtos da coordenação das ações do sujeito”.

A abstração reflexionante, ao contrário da empírica, apoia-se nas atividades cognitivas do sujeito (esquemas) para retirar características dos objetos e utilizá-los de outra forma. Nessa abstração, o sujeito transfere o que é tirado de um nível inferior para um nível superior, conseguindo chegar a “composições novas e generalizadoras” (PIAGET, 1995, p. 5).

A abstração reflexionante comporta sempre dois aspectos inseparáveis: o reflexionamento (*réfléchissement*), que corresponde a uma “projeção (como através de um refletor) sobre um patamar superior daquilo que foi tirado do patamar inferior [...]” (PIAGET, 1995, p. 274), e a reflexão (*réflexion*), entendida “como ato mental de reconstrução e reorganização sobre o patamar superior daquilo que foi assim transferido do inferior” (PIAGET, 1995, p. 274).

Dubinsky (2002) comenta que há quatro tipos de abstração reflexionante que são importantes para o Pensamento Matemático Avançado, entretanto, adicionou uma quinta (reversibilidade), que Piaget não considerou, mesmo tendo sido longamente analisada por ele:

- Interiorização que ocorre quando o indivíduo, usando símbolos, consegue construir processos internos a fim de dar sentido aos fenômenos observados (DUBINSKY, 2002).
- Encapsulação, que de acordo com Dubinsky (2002, p. 101, tradução nossa), é a “[...] conversão de um processo (dinâmico) em um objeto (estático)”²³.

²³ [...] conversion of a (dynamics) process into a (static) object.

- Generalização, que segundo Dubinsky (2002, p. 101, tradução nossa), acontece quando o indivíduo “[...] aplica um esquema existente para uma ou para uma vasta coleção de fenômenos”²⁴.
- Coordenação, que de acordo com Dubinsky (2002, p. 101, tradução nossa), é “a composição ou coordenação de dois ou mais processos para construir um novo”²⁵.
- Reversibilidade, que para Dubinsky (2002), é um novo processo que consiste em reverter o processo original.

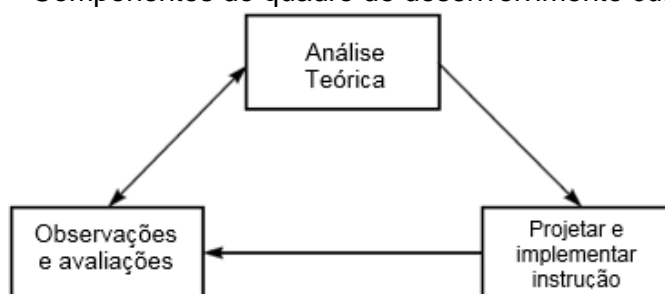
A abstração reflexionante é considerada por Dubinsky (2002) como sendo a construção mental dos objetos. Assim, o pesquisador isolou os tipos desta abstração para que no contexto do PMA fosse possível construir novos objetos a partir dos existentes.

Dubinsky e Lewin (1986, p.62, tradução nossa) comentam que os diferentes tipos da abstração reflexionante podem ser combinados,

[...] por exemplo, uma ou mais estruturas podem ser refletidas para um plano superior por meio da generalização e então coordenadas para formar uma nova estrutura, cujos componentes são reconhecidos como, mas diferentes de, estruturas já existentes²⁶.

O RUMEC, depois de desenvolver a Teoria APOS, utilizou-a em uma ampla pesquisa e em um quadro de desenvolvimento curricular (DUBINSKY; MCDONALD, 2001). Este quadro é discutido em Asiala *et al.* (1996), sendo mostrado que consiste de três componentes, como representado na Figura 4:

Figura 4 – Componentes do quadro de desenvolvimento curricular



Fonte: Adaptado de Asiala *et al.* (1996, p. 5)

²⁴ [...] to apply an existing schema to wider collection of phenomena.

²⁵ [...] composition or *coordination* of two or more processes to construct a new one.

²⁶ For instance, one or more structures can be reflected onto a higher plane through generalization and then coordinated to form a new structure whose components are recognizable as, but different from, previously existing structures.

A análise teórica se vale da busca em compreender o que significa um conceito e como ele pode ser construído pelo aluno, tendo como resultado uma *decomposição genética* deste. Asiala *et al.* (1996, p.7, tradução nossa) comentam que “uma decomposição genética do conceito é um conjunto de estruturas de construções mentais que podem descrever como esse conceito pode se desenvolver na mente de um indivíduo”²⁷. O outro componente do quadro – projetar e implementar instrução – baseia-se na análise teórica, consistindo em desenvolver situações almejando que os estudantes usem e apliquem as construções feitas a fim de compreender o conceito. E por fim, o terceiro componente – observações e avaliações – visa a testar e refinar tanto a análise teórica quanto a instrução.

Nesta pesquisa não se seguirá totalmente esse quadro, uma vez que não se intenta desenvolver um instrumento para que os estudantes façam construções, visto que uma parte do objetivo deste trabalho é investigar as concepções referentes aos conceitos de dependência e independência linear de licenciandos em Matemática. Sendo assim, os participantes da pesquisa já tiveram contato com tais conceitos.

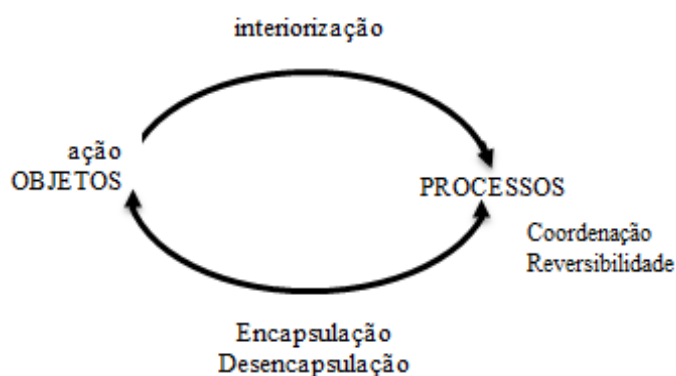
Com relação à construção do conhecimento matemático, Asiala *et al.* (1996, p. 9, tradução nossa) comentam que a compreensão de um conceito matemático começa com a:

[...] manipulação de objetos mentais ou físicos, previamente elaborados, para formar ações; as ações são, em seguida, interiorizadas para formar processos que serão então encapsulados para formar objetos. Os objetos podem ser desencapsulados de volta para os processos dos quais eles foram formados. Finalmente, ações, processos e objetos podem ser organizados em esquemas.

A Figura 5, a seguir, retrata um esquema da construção do conhecimento matemático:

²⁷ [...] a genetic decomposition of a concept is a structured set of mental constructs which might describe how the concept can develop in the mind of an individual

Figura 5 – Construção do conhecimento matemático



Fonte: Adaptado de Asiala *et al.*, 1996, p. 9.

Mediante a Figura 5, é possível perceber que o conhecimento matemático passa pelas etapas ação, processo, objeto e esquema. Nos próximos parágrafos, com base nos trabalhos de Dubinsky (2002), Dubinsky e McDonald (2001) e Asiala *et al.* (1996), serão descritas cada uma dessas etapas.

A ação corresponde a uma transformação que o indivíduo realiza sobre um objeto matemático. Essa transformação acontece devido à reação dada às indicações, que são obtidas, às vezes, quando o indivíduo recorre à sua memória. Essas indicações fornecem o passo a passo a respeito de como realizar uma operação. Ao recorrer à sua memória, pode ser que o indivíduo não tenha controle consciente do que está fazendo. Quando ele se limita a realizar ações, restringindo-se a fazer transformações apenas por estímulos externos que dão o passo a passo, diz-se que apresenta uma *concepção-ação* do objeto.

Um exemplo de ação referente ao conceito de base é apresentado no trabalho de Kú *et al.* (2008, p. 76, tradução nossa):

[...] a concepção-ação do conceito de base se põe em evidência quando o estudante verifica se um vetor concreto pode ser escrito como combinação linear de outros vetores que pertencem a um conjunto S dado e quando se verifica se o conjunto de vetores dados é ou não linearmente independente em termos da aplicação da definição correspondente²⁸.

²⁸[...] la concepción acción del concepto de base se pone en evidencia cuando el estudiante verifica si un vector concreto puede escribirse como combinación lineal de otros vectores que pertenecen a un conjunto S dado y cuando verifica si el conjunto de vectores dado es o no linealmente independiente en términos de la aplicación de la definición correspondiente

Outro exemplo de concepção-ação, agora em relação ao conceito de transformação linear, é mostrado no trabalho de Nomura (2014, p. 233), em que o estudante “restringe-se a encontrar os autovalores e autovetores associados. O aluno pode aplicar uma transformação específica e multiplicar o vetor por um escalar específico”.

O processo é uma construção interna que ocorre quando uma ação é repetida várias vezes e o indivíduo reflete a respeito dela, assim, essa ação é interiorizada em processo. No processo, o indivíduo consegue realizar uma transformação sem ter estímulos externos, isto quer dizer que ele passa a fazer uma transformação consciente, podendo descrever o passo a passo sem explicitá-lo. Dubinsky e McDonald (2001, p. 3, tradução nossa) comentam que “um indivíduo pode pensar em realizar um processo sem realmente fazê-lo, e portanto, pode pensar em invertê-lo e compô-lo com outros processos”²⁹. Quando um estudante, ao resolver um problema, evidenciar indícios de processo, pode ser dito que apresenta *concepção-processo* do conceito em questão.

Um exemplo de concepção-processo é mostrado no trabalho de Prado (2010, p. 84):

[...] um sujeito que demonstra possuir **concepção processo sobre a noção de dimensão** é capaz de, por exemplo, dizer qual o menor número de vetores necessários para gerar o espaço vetorial em questão e, também, qual o maior número de vetores linearmente independentes que podem ser obtidos para um determinado espaço vetorial.

Outro exemplo de concepção processo é apresentado no trabalho de Nomura (2014, p. 234):

[...] é possível que o aluno realize transformações e apresente os vetores como caso geral. Os alunos podem perceber que há infinitos autovetores associados ao autovalor e compreender o processo de encontrá-los com base em uma matriz A qualquer. Assim, começam a estabelecer conexões com outros exemplos, situações e contextos, e deparam-se com possíveis representações do objeto matemático.

²⁹ An individual can think of performing a process without actually doing it, and therefore can think about reversing it and composing it with other processes.

O objeto refere-se a uma reflexão que o indivíduo realiza no processo, ou seja, o indivíduo vê o processo como um todo e percebe que pode fazer transformações conscientes no objeto, por meio de ações e/ou processos. Quando o indivíduo consegue realizar essas transformações de forma consciente, diz que “[...] o processo foi encapsulado em objeto”³⁰ (ASIALA *et al.*, 1996, p. 11, tradução nossa).

Um exemplo da concepção-objeto é apresentada no trabalho de Nomura (2014, p. 234):

[...] os vetores são transformados por uma matriz e esticados ou contraídos na mesma direção por um escalar. O aluno entende os efeitos da multiplicação pela matriz A em relação aos vetores. [...] O aluno compreende a definição de autovalores e autovetores e torna-se consciente do processo como totalidade, tendo a capacidade de realizar ações sobre o objeto e relacionar suas propriedades.

Outro exemplo é mostrado em Bianchini e Machado (2013, p. 151), em que o estudante, ao considerar “que um dado vetor R^3 seja combinação linear de outros, é necessário verificar se existem escalares que tornam esse fato verdadeiro”, mostra ter concepção-objeto sobre combinação linear.

O esquema é formado por uma coleção de ações, processos e objetos que são organizados de forma estruturada na mente do indivíduo. Um exemplo de esquema é apresentado em Asiala *et al.* (1996, p. 9, tradução nossa):

[...] as funções podem ser formadas em conjuntos, operações nestes conjuntos podem ser introduzidas, e as propriedades das operações podem ser verificadas. Tudo isso pode ser organizado para construir um esquema de espaço funcional que pode ser aplicado a conceitos, tais como espaços duais, espaços de mapeamento lineares e funções algébricas³¹.

Após esta descrição daquilo a que se refere a Teoria APOS, será apresentada na próxima seção a decomposição genética dos conceitos de dependência e independência linear que auxiliará nas análises.

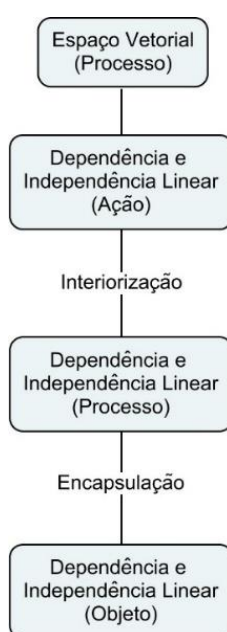
³⁰ [...] the process has been encapsulated to an object

³¹ [...] functions can be formed into sets, operations on these sets can be introduced, and properties of the operations can be checked. All of this can be organized to construct a schema for function space which can be applied to concepts such as dual spaces, spaces of linear mappings, and function algebras.

3.4 DECOMPOSIÇÃO GENÉTICA DOS CONCEITOS DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR

Buscando compreender como os estudantes constroem o conceito de dependência e independência linear, será apresentada sua decomposição genética. Inicialmente, assim como em Kú *et al.* (2008), será apresentado um esquema (Figura 6) de como os alunos podem construir tais conceitos:

Figura 6 – Decomposição genética dos conceitos dependência e independência linear



Fonte: Adaptado de Kú, Trigueros, Okaç, 2008, p. 71.

Concordando com Kú *et al.* (2008), considera-se necessário que o estudante tenha uma concepção processo do conceito de espaço vetorial. Esta concepção se caracteriza “pela boa manipulação das operações entre vetores, incluindo a multiplicação por um escalar”³² (p. 71, tradução nossa).

Depois dessa consideração, como é sugerido em Prado (2010), a partir do trabalho de Euán (2007), o indivíduo realizará ações nos vetores de determinado espaço vetorial escolhido. Dentre as ações que poderão ser realizadas para se obter uma concepção-objeto dos conceitos de dependência e independência linear, estão a de identificar quais vetores podem ser escritos como combinação linear do vetor nulo

³² [...] lo que incluye un buen manejo de las operaciones entre vectores, incluida la multiplicación por un escalar

e os subconjuntos em que há apenas uma combinação linear que resulte no vetor nulo (KÚ *et al.*, 2008; STEWART, 2008; PRADO, 2010).

Essas ações podem ser interiorizadas no processo de determinar se um conjunto de vetores é linearmente independente (LI) ou linearmente dependente (LD). Como exemplo de uma concepção-processo dos conceitos de dependência e independência linear, um indivíduo pode “decidir quais vetores podem ser retirados de um conjunto para reduzi-lo a um conjunto linearmente independente”³³ (KÚ *et al.*, 2008, tradução nossa). Outro exemplo da concepção-processo ocorre quando o sujeito consegue perceber que para se ter vetores LD, um vetor pode ser escrito como combinação linear dos outros (STEWART, 2008). Nessa concepção, o indivíduo conseguiria descrever o que é necessário para se ter um conjunto de vetores LD ou LI, sem ter, necessariamente, um conjunto de vetores para demonstrar.

Esses processos podem ser encapsulados no objeto dependência e independência linear de um conjunto de vetores. Uma concepção-objeto, por exemplo, pode ser evidenciada quando um indivíduo consegue perceber os conceitos em sua totalidade, ou seja, esses conceitos possuem características próprias, conseguindo visualizar tais características em representações gráficas, ou até mesmo podendo associar a questão de dimensão de um espaço vetorial para identificar se um conjunto pode ser LI ou LD.

Após a apresentação do referencial utilizado nesta pesquisa, o próximo capítulo versará a respeito dos procedimentos metodológicos adotados neste trabalho.

³³ [...]decidir cuáles vectores se pueden quitar de un conjunto para reducir lo a un conjunto linealmente independiente

CAPÍTULO 4

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este capítulo tem por finalidade descrever os procedimentos metodológicos adotados na pesquisa, bem como o contexto em que ela foi desenvolvida. Na primeira seção, será explorada a natureza da pesquisa, na segunda, o instrumento utilizado para coletar os dados, na terceira seção, os participantes da pesquisa, na quarta, o momento da aplicação do instrumento e na quinta seção será abordado o recurso metodológico adotado para a análise dos dados.

4.1 NATUREZA DA PESQUISA

Esta pesquisa é de natureza qualitativa, possuindo algumas das características citadas em Bogdan e Biklen (1994, p. 47-50):

1) Na investigação qualitativa, a fonte direta dos dados é o ambiente natural, constituindo o pesquisador o instrumento principal [...]; 2) A investigação qualitativa é descritiva [...]; 3) Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos [...]; 4) Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva [...]; 5) O significado é de importância vital na abordagem qualitativa.

Nesta pesquisa, algumas dessas características serão abordadas, uma vez que:

- 1) A coleta de dados ocorreu por meio dos registros escritos dos estudantes do segundo ano de um curso de Licenciatura em Matemática, ao resolverem as questões do instrumento.
- 2) Os registros escritos foram analisados de forma minuciosa, tomando-se como base o referencial teórico adotado no trabalho, buscando as dificuldades e as concepções dos estudantes a respeito dos conceitos de dependência e independência linear.
- 3) Será levado em consideração todo o processo de coleta de dados, uma vez que podem surgir indícios por meio das atitudes dos participantes que poderão vir a contribuir para a análise.

4.2 O INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS

Tendo em vista o objetivo desta pesquisa, o instrumento de coleta de dados foi elaborado de modo que os estudantes pudessem resolver e justificar o que fizeram. Após elaborar o instrumento que seria aplicado aos estudantes, ele foi submetido à análise intersubjetiva do GEPPMat, que buscou verificar se as questões selecionadas contribuiriam para investigar as dificuldades e as concepções dos estudantes.

Cada uma das questões do instrumento³⁴, bem como seu objetivo, será descrita a seguir.

1) O que significa dizer que vetores são linearmente dependentes ou linearmente independentes?

O objetivo da questão um é investigar como o estudante compreende os conceitos de dependência e independência linear, a fim de verificar se ele entende esses conceitos como objetos matemáticos que possuem características próprias.

O estudante, nesta questão, poderia recorrer à definição para dar sua resposta, bem como dizer, por exemplo, que um conjunto de vetores é linearmente dependente se há a possibilidade de escrever pelo menos um vetor como combinação linear dos outros, e que ele não ocorre com um conjunto de vetores linearmente independentes.

2) Identifique dentre os conjuntos $A = \{(1,2), (2,4), (3,6)\}$ e $B = \{(1,1,1), (3,-1,2), (0,-4,-1)\}$ quais possuem vetores linearmente dependentes. Por quê? (Adaptado de OLIVEIRA, 2005, p. 111).

A questão dois teve como objetivo investigar se os alunos veem a necessidade de utilizar a definição ou algum outro recurso, como escrever um dos vetores como combinação linear dos outros dois, usar a dimensão dos conjuntos, fazer um desenho para verificar se o conjunto de vetores do R^2 e do R^3 é linearmente dependente (LD) ou linearmente independente (LI). Essa questão foi adaptada do trabalho de Oliveira (2005), em que para a pergunta utilizada no instrumento desta investigação, escolheram-se dois dos quatro conjuntos apresentados pelo pesquisador.

³⁴ No apêndice D encontra-se o instrumento completo.

Alguns dos possíveis modos que os estudantes poderiam resolver essa questão serão apresentados a seguir:

Conjunto $A = \{(1,2), (2,4), (3,6)\}$:

1º Possibilidade	2º Possibilidade	3º Possibilidade
$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$ $a_1, a_2 \text{ e } a_3 \in \mathbb{R}$ $a_1(1,2) + a_2(2,4) + a_3(3,6) = (0,0)$ $\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \\ 2a_1 + 4a_2 + 6a_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$ Logo, o conjunto A é L.D.	$a_1, a_2 \text{ e } a_3 \in \mathbb{R}$ $a_1(1,2) + a_2(2,4) = (3,6)$ $a_1 = 1 \text{ e } a_2 = 1$ Logo, o conjunto A é L. D.	A dimensão do conjunto A é dois; como há três vetores, então o conjunto A é L.D.

Conjunto $B = \{(1,1,1), (3,-1,2), (0,-4,-1)\}$

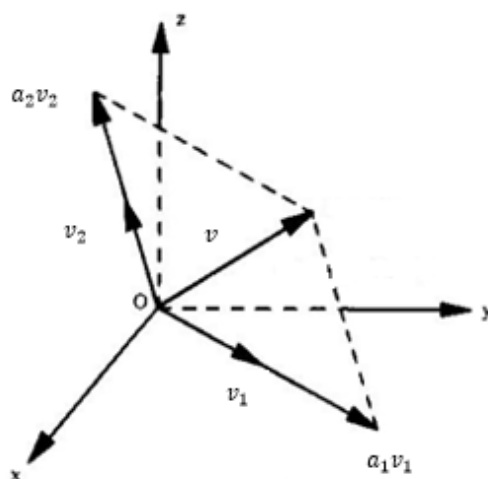
1º Possibilidade	2º Possibilidade
$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$ $a_1, a_2 \text{ e } a_3 \in \mathbb{R}$ $a_1(1,1,1) + a_2(3,-1,2) + a_3(0,-4,-1) = (0,0,0)$ $\begin{cases} a_1 + 3a_2 = 0 \\ a_1 - a_2 - 4a_3 = 0 \\ a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 = -3a_2 \\ a_1 - a_2 - 4a_3 = 0 \\ a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 = -3a_2 \\ -4a_2 - 4a_3 = 0 \\ -a_2 - a_3 = 0 \end{cases}$ $S = \{-3a_2, a_2, -a_2\}$ Logo, o conjunto B é L.D.	$a_1, a_2 \text{ e } a_3 \in \mathbb{R}$ $a_1(1,1,1) + a_2(3,-1,2) = (0,-4,-1)$ $a_1 = -3 \text{ e } a_2 = 1$ Logo, o conjunto B é L. D.

3) Um aluno da disciplina de Álgebra Linear fez o seguinte comentário: “Os elementos do conjunto $A = \{(1,2,1), (1,-1,0), (2,3,4)\}$, contido em R^3 , são linearmente independentes, porque podem ser escritos como uma combinação linear”. Você concorda com esta afirmação? Justifique.

A terceira questão, assim como a segunda, visa a investigar se os estudantes recorrem às suas compreensões sobre LI e LD no R^3 para justificar o erro cometido na afirmação. O erro nessa afirmação está no fato de que, se os vetores são

linearmente independentes, não é possível escrever um vetor do conjunto como combinação linear dos outros dois.

- 4) Os vetores v, v_1 e v_2 representados na figura abaixo são linearmente independentes? Justifique.



Fonte: STEINBRUCH; WINTERLE, 2009, p. 43.

Na quarta questão, o objetivo é identificar se o estudante reconhece a interpretação geométrica de vetores LI no R^3 . No caso desta pergunta, os vetores são LD, assim os estudantes precisam reconhecer isso, para dizer que não se trata de uma interpretação geométrica da independência linear.

- 5) Mostre que os vetores $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ são linearmente independentes. (Adaptado de BOLDRINI *et al.*, 1986, p. 130).

A última pergunta foi sugerida pelo GEPPMat, com a finalidade de perceber como os estudantes lidam com questões que não envolvem o R^2 e o R^3 , mas sim, o espaço vetorial $M(2,2)$ sobre R . Uma possível resolução dessa questão é a seguinte:

$$a_1, a_2, a_3 \text{ e } a_4 \in \mathbb{R}$$

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por meio da igualdade de matrizes, tem-se $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$ e $a_4 = 0$. Logo, os vetores são linearmente independentes.

4.3 OS PARTICIPANTES DA PESQUISA

Esta pesquisa foi realizada com estudantes do segundo ano de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública do norte do Paraná. Os participantes da pesquisa foram convidados a participar pela pesquisadora que ministrava aulas de Álgebra Linear para os licenciandos. No momento do convite, foi explicado aos estudantes o objetivo da pesquisa, bem como a forma como seria realizada; nesse momento, foi comentado que se manteria o compromisso ético de não divulgar os nomes dos participantes, sendo dito que se utilizaria de códigos para identificá-los, e estes seriam de conhecimento apenas da pesquisadora e de sua orientadora.

Todos os estudantes se prontificaram a participar, em um total de 17. Depois de feito o convite, a pesquisadora marcou um dia para se realizar a pesquisa, sendo este o dia 10 de outubro de 2014. Nesta data estavam presentes 16 estudantes. Juntamente com o instrumento, foram coletadas algumas informações dos estudantes como: se eles possuíam outra graduação, a quantidade de vezes que cursaram a disciplina de Álgebra Linear, o que acharam ou estão achando da disciplina (Apêndice C). Dos estudantes que estavam presentes, nenhum havia feito a disciplina mais de uma vez, sendo assim, aquele era o primeiro curso de Álgebra Linear de que estavam participando, e nenhum dos deles tinha outra graduação. Para resguardar a identidade dos participantes, adotou-se de forma aleatória a letra E, referente aos estudantes, e um número para diferenciá-los.

Após esta breve caracterização dos participantes da pesquisa, na próxima seção descrever-se-á como se deu a coleta de dados.

4.4 COLETA DE DADOS: O MOMENTO DA APLICAÇÃO DO INSTRUMENTO

A aplicação do instrumento de coleta de dados foi realizada no dia 10 de outubro de 2014, após a leitura e explicação do termo de consentimento (Apêndice B). Cada estudante resolveu individualmente as questões propostas, não podendo consultar outro material (cadernos, livros, ou internet).

Depois da aplicação do instrumento, em um primeiro momento, a pesquisadora e a professora orientadora viram os registros escritos obtidos e observaram que a maioria dos estudantes não conseguiu entender a última questão do instrumento, uma vez que o conjunto apresentado não estava entre chaves, o que pode ter gerado o entendimento de que era necessário ver se cada matriz era ou não LI. Sendo assim, decidiu-se por reaplicar somente essa questão, informando aos estudantes que a questão se referia a um conjunto de matrizes.

A questão cinco foi reaplicada no dia 18 de novembro de 2014, novamente na aula de Álgebra Linear, nas mesmas condições da primeira aplicação. No dia dessa segunda aplicação, havia 16 estudantes novamente, entretanto não foram os mesmos que participaram da primeira aplicação, já que o estudante que faltou na primeira estava presente na segunda aplicação, e um que estava na primeira aplicação faltou na segunda. Sendo assim, um dos critérios adotados para delimitar o *corpus* de análise foi ter participado das duas aplicações.

A próxima seção abordará a forma como ocorreu a análise dos dados.

4.5 ANÁLISE DOS DADOS

A análise dos dados coletados foi realizada em duas etapas. A primeira teve por objetivo investigar as dificuldades que os estudantes apresentaram e a segunda objetivou investigar as concepções dos estudantes, a partir da Teoria APOS. Antes de detalhar cada uma dessas etapas, será apresentada a forma como foram selecionados os registros escritos dos estudantes que iriam compor o *corpus* de análise dos dados.

4.5.1 Critérios adotados para seleção do *corpus* de análise dos dados

Após a coleta de dados, foi realizada uma leitura, estabelecendo, assim, um primeiro contato com o material a ser analisado, o que possibilitou as primeiras impressões e orientações.

Desse modo, intentou-se olhar quais estudantes responderam a todas as questões do instrumento, ou os que lhes responderam parcialmente, com a finalidade de se ter material necessário para poder realizar inferências quanto às dificuldades e

concepções, para assim, começar a delimitar o *corpus*, que é “um conjunto dos documentos”, que “representa as informações da pesquisa” (MORAES; GALIAZZI, 2007, p.16) e será submetida à análise.

Nessa primeira delimitação, quatro estudantes não farão parte do *corpus*. Um, por ter comentado que não se recordava de como resolver a maioria das questões. Ele respondeu apenas à questão 5 no segundo dia de aplicação, e outros três por terem respondido somente à questão 1 e iniciado a questão 2. Com isso, percebeu-se que com as respostas dadas por esses quatro estudantes não seria possível inferir a concepção que apresentavam.

Além disso, observou-se quais estudantes participaram dos dois dias de aplicação e quais assinaram o termo de consentimento livre e esclarecido. Neste segundo caso, mais dois estudantes não puderam fazer parte do *corpus*; um, por ter faltado no segundo dia de aplicação, e outro, por ter faltado no primeiro dia e, conseqüentemente, não ter assinado o termo, pois na segunda aplicação este não foi levado.

Sendo assim, elaborou-se o Quadro 5 para mostrar a relação de estudantes que farão parte do *corpus* de análise, totalizando 11 licenciandos.

Quadro 5 – Relação de estudantes que farão parte do corpus de análise

Estudantes que resolveram as questões do instrumento	
Totalmente	Parcialmente
E1, E3, E4, E5	E2, E6, E7, E8, E9, E10, E11

Fonte: a autora

Depois de abordar os critérios de seleção do *corpus* de análise, nas duas próximas seções serão apresentadas as formas que serão buscadas para investigar as dificuldades e as concepções dos participantes da pesquisa, de acordo com a Teoria APOS.

4.5.2 Procedimentos utilizados para investigar as dificuldades dos estudantes

Esta etapa procurou, por meio da análise dos registros escritos, identificar as dificuldades que os estudantes pudessem apresentar com relação à dependência e independência linear.

Em vista disso, optou-se por utilizar a análise textual discursiva, uma vez que tal análise possibilita “produzir novas compreensões sobre os fenômenos e discursos” (MORAES, GALIAZZI, 2007, p. 7).

A análise textual discursiva, segundo Moraes e Galiazzi (2007, p. 112), “pode ser entendida como um processo de desconstrução, seguido de reconstrução, de um conjunto de materiais linguísticos e discursivos, produzindo-se, a partir disso, novos entendimentos sobre os fenômenos e discursos investigados”.

Sendo assim, viu-se com esse tipo de análise uma possibilidade de apresentar novas compreensões a respeito das dificuldades que os estudantes poderiam manifestar.

Esse tipo de análise inicia-se com o processo de desconstrução do material que faz parte do *corpus*. “Essa desconstrução consiste na fragmentação das informações, desestruturando sua ordem, produzindo um conjunto desordenado e caótico de elementos unitários” (MORAES; GALIAZZI, 2007, p. 42). Dessa desconstrução é que irão surgir as unidades de análise, que são “identificadas em função de sentido pertinente aos propósitos da pesquisa” (MORAES; GALIAZZI, 2007, p. 19).

A análise textual discursiva tem mostrado que esse caminho de unificar pode ser realizado em dois momentos.

No primeiro, definem-se unidades mais amplas, dando origem a um conjunto de unidades iniciais de amplitude relativamente grande e que podem apresentar elementos de mais de uma categoria. Essas unidades, uma vez classificadas, são então reinterpretadas, visando à construção de unidades menores, as subunidades, agora já produzidas com um foco específico na categoria a que pertencem. (MORAES; GALIAZZI, 1997, p. 68)

As unidades de análise desta pesquisa foram elencadas por meio das dificuldades que poderiam aparecer; para tanto, apoiou-se no referencial adotado que trata das dificuldades.

Após realizar esse “recorte ou fragmentação dos materiais do ‘corpus’” (MORAES; GALIAZZI, 2007, p. 50), a análise textual discursiva caminha para o estabelecimento de relações ou categorização, que tem a “finalidade de organizar uma estrutura para a organização de metatextos, textos que pretendem apresentar

novas compreensões dos documentos analisados e dos fenômenos investigados” (MORAES; GALIAZZI, 2007, p. 50).

As categorias são produzidas por meio de três métodos diferentes: dedutivo, indutivo e o intuitivo. No processo do método dedutivo, o pesquisador chega às categorias antes mesmo de iniciar a análise, correspondendo às categorias *a priori*; para tanto, ele utiliza o referencial teórico para deduzi-las. Essas categorias podem ser comparadas a caixas nas quais as unidades de análise serão colocadas. No método indutivo, as categorias são levantadas por meio da análise do *corpus*, elas surgem mediante comparação das unidades de análise e são denominadas categorias emergentes. Já no método intuitivo, as categorias surgem por meio de *insights* do pesquisador. Pretende-se, com isso, dar sentido ao fenômeno analisado como um todo, apresentando um caráter que leva em conta a fenomenologia. (MORAES, 2003; MORAES; GALIAZZI, 2007).

Moraes e Galiazzi (2007, p. 78) ressaltam que o processo da categorização “requer esforço e envolvimento”, nos quais o pesquisador necessita retornar sempre que necessário às informações, além de uma intensa atenção para não perder de foco os objetivos da pesquisa. As categorias deste trabalho foram elaboradas com base no referencial, caracterizando-se como categorias *a priori*.

O próximo passo da análise textual discursiva “é a comunicação das novas compreensões atingidas” (MORAES; GALIAZZI, 2007, p. 43), concretizando-se na forma de metatexto. O metatexto, de acordo com Moraes e Galiazzi (2007, p. 37), “constitui-se num esforço para expressar intuições e entendimentos atingidos a partir da impregnação intensa com o ‘corpus’ da análise”.

O metatexto é uma produção do pesquisador, de suas reflexões e compreensões dos dados analisados, sendo feita mediante a descrição e interpretação, além da teorização dos fenômenos investigados (MORAES, 2003; MORAES; GALIAZZI, 2007).

Neste trabalho, o metatexto produzido buscará apresentar as interpretações obtidas por meio da análise dos dados, utilizando o referencial adotado para auxiliar essas interpretações.

Na próxima seção serão apresentados os procedimentos utilizados para investigar as concepções dos estudantes a respeito dos conceitos de dependência e independência linear.

4.5.3 Procedimentos adotados para investigar as concepções dos estudantes, de acordo com a Teoria APOS

Esta etapa visou a analisar os registros escritos dos participantes da pesquisa, a fim de encontrar indícios que possibilitassem realizar inferências referentes às concepções que os estudantes pudessem apresentar, de acordo com a Teoria APOS. Para tanto, utilizou-se a decomposição genética, apresentada na seção 3.4, dos conceitos de dependência e independência linear, com a finalidade de nortear a busca por evidências das concepções nas resoluções e nas justificativas dadas pelos participantes da pesquisa, bem como os aspectos da Teoria APOS que caracterizam cada concepção.

Depois desse olhar para as concepções manifestadas por cada estudante, intentou-se ver de forma geral para, assim, realizar inferências e interpretações com relação a construção dos conceitos de dependência e independência linear pelos licenciandos.

Ainda nessa etapa, apresentou-se o que cada participante achou da disciplina de Álgebra Linear, com base em suas respostas a uma pergunta realizada na caracterização (Apêndice C).

Mesmo com o foco de investigar concepções, foram feitos comentários de algumas dificuldades com relação à resolução das questões e a linguagem utilizada em álgebra linear pelos licenciandos participantes da pesquisa.

No próximo capítulo serão apresentadas as análises e as discussões realizadas a partir dos registros escritos produzidos pelos estudantes.

CAPÍTULO 5

ANÁLISES E DISCUSSÕES DOS DADOS

Neste capítulo serão realizadas as análises, bem como a discussão dos registros escritos dos licenciandos em Matemática, a fim de investigar as dificuldades e a concepção, à luz da Teoria APOS, de cada participante da pesquisa com relação aos conceitos de dependência e independência linear.

Este capítulo está dividido em duas seções. Na primeira, será apresentada a análise textual discursiva das questões visando a investigar as dificuldades, e na segunda, discutir-se-ão as concepções, para tanto, todas as questões resolvidas por cada licenciando serão comentadas e se fará a inferência a respeito da concepção que ele apresenta, segundo a interpretação da pesquisadora.

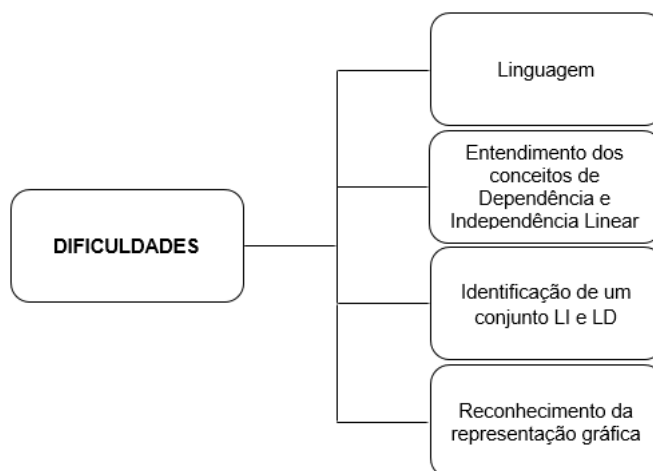
5.1 UM OLHAR PARA AS DIFICULDADES

Nesta seção, direciona-se um olhar para as dificuldades dos licenciandos em Matemática para os conceitos de dependência e independência linear. Para tanto, utiliza-se a análise textual discursiva.

A fim de facilitar a análise, adotou-se um código para as questões. Com isso, a questão 1 será Q1, a questão 2, Q2, e assim sucessivamente. No caso da Q2, que apresenta dois conjuntos de vetores, adota-se o código Q2A e Q2B.

Para a análise textual discursiva, elencou-se a categoria *dificuldades*, que visa a identificar e discutir as dificuldades dos licenciandos em Matemática com relação aos conceitos de dependência e independência linear. A categoria *dificuldades* apresentou quatro subcategorias de análise, como é possível ver na Figura 7:

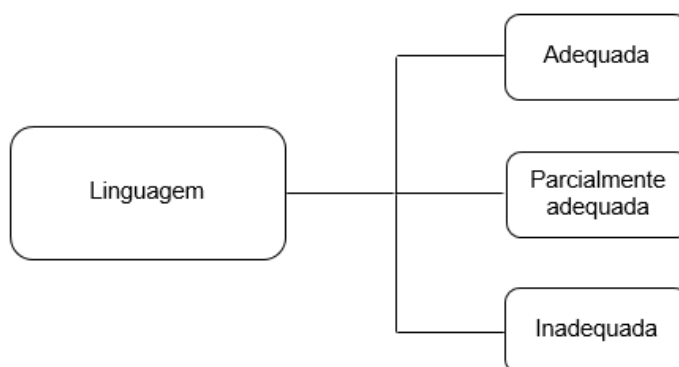
Figura 7 – Subcategorias de análise da categoria dificuldades



Fonte: a autora

Por meio da subcategoria *linguagem*, busca-se identificar como os estudantes valem-se da linguagem utilizada na álgebra linear para responder as questões do instrumento de coleta de dados. Tal subcategoria possui três unidades de análise (Figura 8):

Figura 8 – Unidades de análise prévias da subcategoria linguagem



Fonte: a autora

Para esta subcategoria foram efetivadas duas unidades de análise: adequada e inadequada.

Quadro 6 – Unidades de análise efetivas da subcategoria linguagem

Unidade: Adequada

Nesta unidade será verificado se os estudantes utilizam de forma adequada a linguagem empregada em álgebra linear.

“Linearmente independente quando multiplicamos os vetores por um escalar qualquer e o resultado desses se iguala a zero. [...]. Linearmente dependente: quando a multiplicação do escalar pelos vetores resulta em diferente de zero, ou seja, seus resultados são diferentes de zero”. (E3, Q1)

“Nenhum. Pois os dois zeraram os escalares”. (E3, Q2)

“Não. Pois para serem linearmente independentes além de serem escritos como uma combinação linear, a multiplicação dos escalares deve dar resultado 0 em todos”. (E3, Q3)

“Vetores lineares dependentes é os vetores que dependem de outro para se obter o resultado e independente é o contrário”. (E4, Q1)

“Não concordo, pois o determinante não dá 0”. (E4, Q3)

“[...] independentes eles se anulam, são opostos” (E4, Q4)

“Linearmente dependentes são aqueles que assumem valores de dependência próprios, tem um valor estabelecido. Linearmente independentes são aqueles que assumem valores não definidos, não há dependência”. (E8, Q1)

“É linearmente dependente quando pode ser escrito em uma combinação linear. É linearmente independente quando $a_i \neq 0$ ”. (E9, Q1)

“Não, porque só quando é linearmente dependente que pode ser escrito em uma combinação linear”. (E9, Q3)

“Linearmente dependentes que dependem um do outro, linearmente independente não depende”. (E11, Q1)

Unidade: Inadequada

Nesta unidade será verificado se os estudantes utilizam de forma inadequada a linguagem empregada em álgebra linear.

“Para ser linearmente independente os vetores gerados, todos têm que corresponder a zero. E no linearmente dependentes os vetores possuem resultados diferentes”. (E1, Q1)

“[...] é necessário que os vetores se igualem a zero”. (E1, Q3)

“Os vetores linearmente dependentes são vetores que podem ser escritos como combinação linear, ou seja, irão depender dos números reais que multiplicam esses vetores”. (E2, Q1)

“[...] vetor v_2 ao ser multiplicado pelo número real a_2 ”. (E2, Q4)

“Quer dizer que seus coeficientes lineares dependem ou não dos valores dos outros coeficientes para sabermos seus valores”. (E5, Q1)

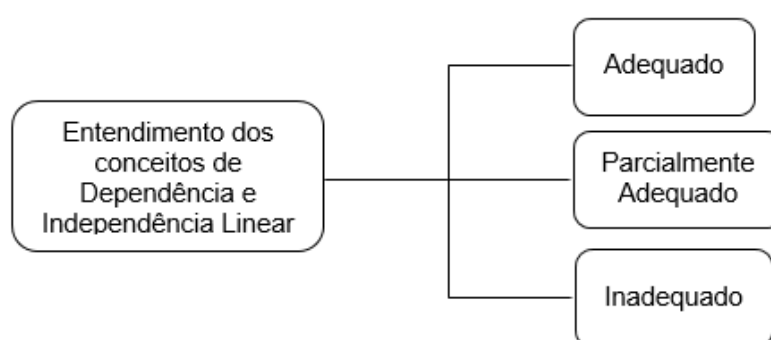
“[...] não acontece quando são independentes, pois os vetores são igualados a zero”. (E6, Q1)

“Linearmente dependente é quando os valores dos resultados são diferentes. Linearmente independente é quando os valores dos resultados são iguais à zero”. (E7, Q1)

Fonte: a autora

A subcategoria *entendimento dos conceitos de dependência e independência linear*, que visa a verificar como os estudantes interpretam e entendem tais conceitos, apresentou três unidades de análise prévias, como é possível ver na Figura 9:

Figura 9 – Unidades de análise prévias da subcategoria entendimento dos conceitos de dependência e independência linear



Fonte: a autora

Para esta categoria foram efetivadas as três unidades de análise: adequado, parcialmente adequado e inadequado.

Quadro 7 – Unidades de análise efetivas da subcategoria entendimento dos conceitos de dependência e independência linear

<p>Unidade de análise: Adequado</p> <p>Nesta unidade de análise, será verificado se a interpretação e o entendimento a respeito dos conceitos são adequados.</p>
<p><i>“Não, pois se é linearmente independente <u>não</u> pode ser escrito como combinação linear”.</i> (E2, Q3)</p> <p><i>“Linearmente independente quando multiplicamos os vetores por um escalar qualquer e o resultado desses se iguala a zero. Não esquecendo de somar as coordenadas correspondentes dos vetores. Linearmente dependente: quando a multiplicação do escalar pelos vetores resulta em diferente de zero ou seja seus resultados são diferentes de zero”.</i> (E3, Q1)</p> <p><i>“Quer dizer que seus coeficientes lineares dependem ou não dos valores dos outros coeficientes para sabermos seus valores”.</i> (E5, Q1)</p> <p><i>“Não concordo, pois esta afirmação refere-se a vetores linearmente dependentes”.</i> (E6, Q3)</p> <p><i>“Linearmente dependentes são aqueles que assumem valores de dependência próprios, tem um valor estabelecido. Linearmente independentes são aqueles que assumem valores não definidos, não há dependência”.</i> (E8, Q1)</p>
<p>Unidade de análise: Parcialmente adequado</p> <p>Nesta unidade de análise, será verificado se a interpretação e o entendimento a respeito dos conceitos são parcialmente adequados.</p>
<p><i>“Para ser linearmente independente os vetores gerados, todos têm que corresponder a zero. E no linearmente dependentes os vetores possuem resultados diferentes”.</i> (E1, Q1)</p> <p><i>“Não. Pois para ser linearmente independente não basta ser combinação linear é necessário que os vetores se igualem a zero”.</i> (E1, Q3)</p> <p><i>“Os vetores linearmente dependentes são vetores que podem ser escritos como combinação linear, ou seja, irão depender dos números reais que multiplicam esses</i></p>

vetores. Os vetores linearmente independentes não podem ser escritos como combinação linear". (E2, Q1)

"Vetores lineares dependentes é os vetores que dependem de outro para se obter o resultado e independente é o contrário". (E4, Q1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Det} = -4 + 3 + 2 - 8 \\ \text{Det} = -7 \end{array}$$

"Não concordo, pois o determinante não dá 0". (E4, Q3)

$$\begin{aligned} a_1(1, 2, 1) + a_2(1, -1, 0) + a_3(2, 3, 4) &= 0 \\ \begin{cases} a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \rightarrow -4a_3 + 5a_3 + 2a_3 = 0 \rightarrow 3a_3 = 0 \\ 2a_1 - a_2 + 3a_3 = 0 \rightarrow -8a_3 - a_2 + 3a_3 = 0 \rightarrow a_2 = -5a_3 \\ a_1 + 4a_3 = 0 \rightarrow a_1 = -4a_3 \end{cases} \end{aligned}$$

"Concordo, pois a afirmação pode ser confirmada a partir dos cálculos acima". (E5, Q3)

"Quando os vetores são linearmente dependentes é porque há combinação linear entre eles, o que não acontece quando são independentes, pois os vetores são igualados a zero". (E6, Q1)

"Linearmente dependente é quando os valores dos resultados são diferentes. Linearmente independente é quando os valores dos resultados são iguais à zero". (E7, Q1)

$$\begin{aligned} &a_1(1, 2, 1) + a_2(1, -1, 0) + a_3(2, 3, 4) \\ &\begin{cases} a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 & L_1(-1) + L_3 \\ 2a_1 - a_2 + 3a_3 = 0 \\ a_1 + 4a_3 = 0 \end{cases} \begin{cases} -a_2 - 2a_3 = 0 \\ 2a_1 - a_2 + 3a_3 = 0 \\ a_1 + 4a_3 = 0 \\ -a_2 + 2a_3 \end{cases} \begin{cases} 2a_1 - a_2 + 3a_3 = 0 \\ -a_2 + 3a_3 = 0 & L_2(-1) + L_1 \\ 2a_1 - a_3 = 0 \end{cases} \\ &\rightarrow \begin{cases} 2a_1 - a_2 + 3a_3 = 0 \\ a_3 - a_2 + 3a_3 = 0 \\ 4a_3 - a_2 = 0 \\ 4a_3 = a_2 \end{cases} \begin{cases} a_3 - 4a_3 + 3a_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad 2a_1 = a_3 \\ &\text{Concordo pois o resultado é } \underline{\underline{0}} \end{aligned}$$

(E7,

Q3)

"Não concordo, porque se faz combinação linear para saber se é LI ou LD". (E8, Q3)

“É linearmente dependente quando pode ser escrito em uma combinação linear. É linearmente independente quando $a_i \neq 0$ ”. (E9, Q1)

“Não, porque só quando é linearmente dependente que pode ser escrito em uma combinação linear”. (E9, Q3)

“Linearmente dependentes que dependem um do outro, linearmente independente não depende”. (E11, Q1)

“Sim. Porque se eles podem ser descritos em uma combinação linear e se suas somas são iguais a zero eles são linearmente dependentes”. (E11, Q3)

Unidade de análise: Inadequado

Nesta unidade de análise, será verificado se a interpretação e o entendimento a respeito dos conceitos são inadequados.

“Não. Pois para serem linearmente independentes além de serem escritos como uma combinação linear, a multiplicação dos escalares deve dar resultado $\underline{0}$ em todos”. (E3, Q3)

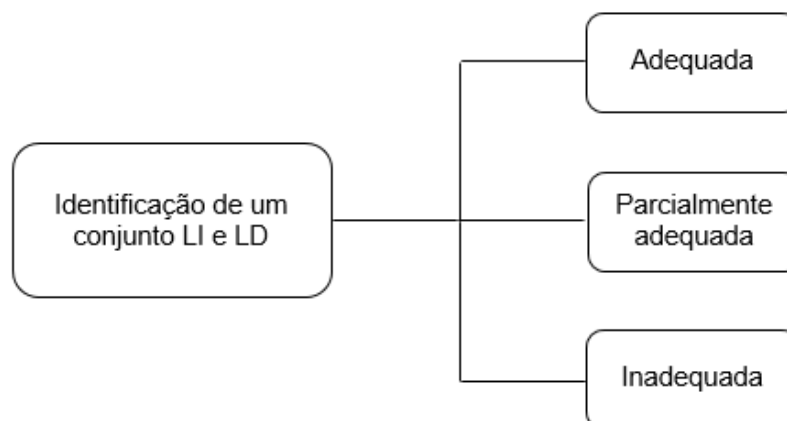
“Para eles serem linearmente dependentes, eles tem que ser igualado a zero”. (E10, Q1)

“Sim, se são combinação linear, automaticamente também são LI”. (E10, Q3)

Fonte: a autora

Na subcategoria *identificação de um conjunto LI e LD*, que intenta observar como os estudantes identificam e mostram tais conceitos, foram elencadas três unidades prévias de análise, como é possível ver na Figura 10:

Figura 10 – Unidades de análise prévias da subcategoria identificação de um conjunto LI e LD



Fonte: a autora

Nesta subcategoria foram efetivadas todas as unidades de análise e foi necessário elaborar uma unidade emergente com relação à não-identificação.

Quadro 8 – Unidades de análise efetivas da subcategoria identificação de um conjunto LI e LD

Unidade de análise: Adequada

Nesta unidade será apurado se os estudantes identificam de forma adequada quando um conjunto é LI ou LD

$$a_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$a_1 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$a_1 = 0$$

$$0 + a_2 + 0 + 0 = 0$$

$$a_2 = 0$$

$$0 + 0 + a_3 + 0 = 0$$

$$a_3 = 0$$

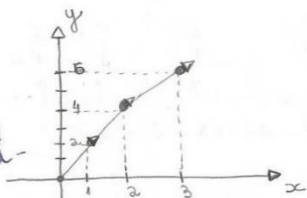
$$0 + 0 + 0 + a_4 = 0$$

$$a_4 = 0$$

(E1, Q5)

$$\begin{aligned}
 a(1, 2) + b(2, 4) + c(3, 6) &= 0 \\
 (a, 2a) + (2b, 4b) + (3c, 6c) &= 0 \\
 (a + 2b + 3c, 2a + 4b + 6c) &= 0 \\
 \begin{cases} a + 2b + 3c = 0 \\ 2a + 4b + 6c = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

∇
 Sistema possível e indeterminado.



~~0~~ vetor

O conjunto A possui vetores linearmente dependentes, visto o gráfico.

(E2, Q2A)

$$\begin{aligned}
 a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + a_3 \cdot v_3 + a_4 \cdot v_4 &= 0 \\
 a_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= 0 \\
 \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_4 \end{bmatrix} &= 0 \\
 \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ a_1 + a_4 = 0 \rightarrow a_4 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

(E3, Q5)

$$\begin{aligned}
 a_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= 0 \\
 \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_3 & 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_4 \end{bmatrix} &= 0 \\
 0 + 0 + 0 + 0 &= 0 \\
 \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = 0 & \quad \boxed{0=0}
 \end{aligned}$$

(E4, Q5)

$$\begin{aligned}
 a_1(1, 2) + a_2(2, 4) + a_3(3, 6) &= (0, 0) \\
 \begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \\ 2a_1 + 4a_2 + 6a_3 = 0 \end{cases} \\
 0 &= 0 \\
 \text{L.D.} &
 \end{aligned}$$

(E5, Q2A)

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = 0$$

Portanto $a_1=0$, $a_2=0$, $a_3=0$ e $a_4=0$, Logo é
linearmente independente

(E5, Q5)

$$a_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 0$$

$$a_3 = 0$$

$$a_4 = 0$$

Logo é linearmente

independente, pois os escalares são iguais a zero.

(E6, Q5)

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\boxed{0=0}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = 0$$

(E7, Q5)

$$B = a_1(1, 1, 1) + a_2(3, -1, 2) + a_3(0, -4, -1)$$

$$a_1 + 3a_2 = 0 \quad a_1 = -3a_2$$

$$\begin{cases} a_1 - a_2 - 4a_3 = 0 \\ a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow -3a_2 - a_2 - 4a_3 = 0$$

$$= -4a_2 - 4a_3 = 0$$

$$-4a_3 = 4a_2$$

$$a_3 = \frac{-4a_2}{4}$$

$$a_3 = -a_2$$

$$a_2 = -a_3$$

Logo \rightarrow

Porque a_1, a_2, a_3 não são $\neq 0$

LD

(E8, Q2B)

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + a_4v_4 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} a_1 = x \\ a_2 = y \\ a_3 = z \\ a_4 = t \end{array} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ a_4 = 0 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

\rightarrow LI

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

$$\text{Logo } \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = z \\ t = t \end{cases}$$

(E8, Q5)

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 + 0 + 0 + 0 = 0 & a_1 = 0 \\ 0 + a_2 + 0 + 0 = 0 & a_2 = 0 \\ 0 + 0 + a_3 + 0 = 0 & a_3 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + a_4 = 0 & a_4 = 0 \end{cases}$$

(E9, Q5)

$$a_1(1, 1, 1) + a_2(3, -1, 2) + a_3(0, -4, 1)$$

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 + 0 = 0 \\ a_1 + a_2 - 4a_3 = 0 \\ a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= 3a_2 & 3a_2 - a_2 - 4a_3 &= 0 \\ 3a_2 + 2a_2 - a_3 &= 0 & 4a_3 &= \frac{2a_2}{2} \\ 2a_2 - \frac{5a_2}{2} & & a_3 &= \frac{a_2}{2} \end{aligned}$$

(E10, Q2B)

Unidade de análise: Parcialmente adequada

Nesta unidade será apurado se os estudantes identificam de forma parcialmente adequada quando um conjunto é LI ou LD

$$\rightarrow A = a_1(1, 2) + a_2(2, 4) + a_3(3, 6) = (0, 0)$$

$$\rightarrow \begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \quad (-2) \quad a_1 = -2a_2 + 3a_3 \\ 2a_1 + 4a_2 + 6a_3 = 0 \quad \rightarrow 2(-2a_2 + 3a_3) + 4a_2 + 6a_3 \\ \quad -4a_2 + 6a_3 + 4a_2 + 6a_3 = 0 \\ \quad 12a_3 = 0 \\ \quad a_3 = 0 \end{cases}$$

$$-2a_1 - 4a_2 - 6a_3 = 0 \quad 6a_3 + 6a_3 = 0$$

$$2a_1 + 4a_2 + 6a_3 = 0 \quad 12a_3 = 0$$

$$a_3 = 0$$

$$0 + 0 + 0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 0$$

$$a_3 = 0$$

LI (todos os escalares
são zero)

(E3, Q2A)

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \\ 3x + 6y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \\ -3x - 6y = 0 \end{cases}$$

$$0 = 0$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ -4y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \quad E_1 - 3E_2 \\ 4y - z = 0 \end{cases}$$

$$0 = 0$$

(E4, Q2A, Q2B)

$$a_1(1, 1, 1) + a_2(3, -1, 2) + a_3(0, -4, -1) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 = 0 \rightarrow a_1 = -3a_2 \\ a_1 - a_2 - 4a_3 = 0 \rightarrow -3a_2 - a_2 - 4a_3 = 0 \rightarrow a_3 = -a_2 \\ a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 \rightarrow -3a_2 + 2a_2 + a_3 = 0 \\ = 0 \end{cases}$$

$$[-3a_2, a_2, -a_2]$$

L.I.

$$-3a_2(1, 1, 1) + a_2(3, -1, 2) + a_2(0, -4, -1) = (x, y, z)$$

$$\begin{cases} -3a_2 + 3a_2 + \\ \end{cases}$$

(E5, Q2B)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad D = 2 + 0 - 12 + 3 + 8 + 0 = -1$$

$$B = \{(1, 1, 1), (3, -1, 2), (0, -4, -1)\} \text{ é LI, pois } D \neq 0.$$

(E6, Q2B)

$$A = a_1(1, 2) + a_2(2, 4) + a_3(3, 6)$$

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \quad (1)$$

$$2a_1 + 4a_2 + 6a_3 = 0$$

$$-2a_1 - 4a_2 - 6a_3 = 0$$

$$2a_1 + 4a_2 + 6a_3 = 0 \quad \text{Logo}$$

0 = 0 LI

Para ser LI todos

$$a_1, a_2 \text{ e } a_3 \neq 0$$

(E8, Q2A)

$$a_1(1, 2) + a_2(2, 4) + a_3(3, 6)$$

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \\ 2a_1 + 4a_2 + 6a_3 = 0 \end{cases}$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 0 \quad \text{LI}$$

$$a_3 = 0$$

(E10, Q2A)

Unidade de análise: Inadequada

Nesta unidade será apurado se os estudantes identificam de forma inadequada quando um conjunto é LI ou LD

$$A = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$$

$$\begin{cases} 1x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \\ 3x + 6y = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{0+0+0-0-0-0}{4+6+12-12-6-4} = \frac{0}{0} = 0$$

$$y = \frac{0+0+0-0-0-0}{4+6+12-12-6-4} = \frac{0}{0} = 0$$

Continua...

$$B = \{(1, 1, 1), (3, -1, 2), (0, -4, -1)\}$$

$$\begin{cases} 1x + 1y + 1z = 0 \\ 3x - 1y + 2z = 0 \\ -4y - z = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{0+0+0-0-0-0}{1+0-12+0+0+0} = \frac{0}{0} = 0$$

$$y = \frac{-0+0+0-0-0-0}{1+0-12+0+0+0} = \frac{0}{0} = 0$$

$$z = \frac{0+0+0-0-0-0}{1+0-12+0+0+0} = \frac{0}{0} = 0$$

Continua...

2) B

$$B = \{(1, 1, 1), (3, -1, 2), (0, -4, -1)\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-0+0+0+0-0-0}{1+0-12+0+0+3} = \frac{0}{0}$$

$$A = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{0+0+0-0-0-0}{4+6+12-12-6-4} = \frac{0}{0} = 0$$

"Não possui vetores linearmente dependentes, pois todas equações são igualadas a zero [...]" (E1, Q2A, Q2B)

$$a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+0+0+0 & 0+b+0+0 \\ 0+0+c+0 & 0+0+t+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$$

(E2, Q5)

$$B = a_1(1,1,1) + a_2(3,-1,2) + a_3(0,-4,-1) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 = 0 & (-2) \\ a_1 - a_2 - 4a_3 = 0 \\ a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 \end{cases} \quad (1: \text{m'todo})$$

$$\begin{array}{r} -2a_1 - 6a_2 = 0 \\ a_1 - a_2 - 4a_3 = 0 \\ \hline a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 \\ \hline -5a_2 - 5a_3 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{array}$$

$$-5a_2 = 5a_3$$

$$a_2 = \frac{5a_3}{-5}$$

$$a_2 = -a_3 \Rightarrow 0$$

$$a_1 + a_3 - 4a_3 = 0 \quad a_1 + 2a_2 - a_3 = 0$$

$$a_1 = 3a_3 \Rightarrow 0 \quad 3a_3 + (-2a_3) - a_3 = 0$$

$$a_3 = 0$$

②

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 = 0 \\ a_1 - a_2 - 4a_3 = 0 \\ a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 \end{cases}$$

2: metodo = B (Prova real)

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0}{1 - 12 + 0 + 0 + 8 + 0} = \frac{0}{-3} = 0$$

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{1 - 12 + 0 + 0 + 8 + 0} = \frac{0}{-3} = 0$$

$$a_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-3} = 0$$

(LI) = todos os escalares denam valor zero.

(E3, Q2B)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$1 - 1 = 0$$

(E10, Q5)

$$A = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$$

$$B = \{(1, 1, 1), (3, -1, 2), (0, -4, -1)\}$$

$$A = (1+2+3, 2+4+6)$$

$$(6, 12)$$

$$(18)$$

$$B = (1+3+0, 1-1-4, 1+2-1)$$

$$(4, -5, 2)$$

$$(4-5+2)$$

$$(-1)$$

Os dois possuem vetores linearmente dependentes. Porque a soma dos seus vetores é diferente de zero.

(E11, Q2A, Q2B)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 0$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$$

$$0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$0 = 0$$

(E11, Q5)

Unidade de análise: não identificou

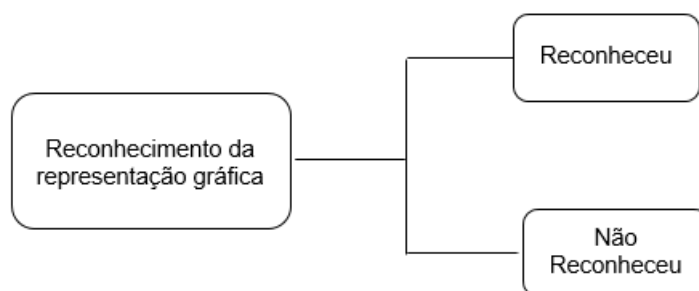
"Não lembro como se resolve". (E7, Q2)

"Não lembro". (E9, Q2)

Fonte: a autora

Para a última subcategoria, *reconhecimento da representação gráfica*, que visa a verificar se os estudantes conseguem reconhecer a representação gráfica de vetores LI, foram previstas duas unidades de análise, como é possível observar na Figura 11:

Figura 11 – Unidades de análise prévias da subcategoria reconhecimento da representação gráfica



Fonte: a autora

Na subcategoria reconhecimento da representação gráfica, as duas unidades de análise foram efetivadas.

Quadro 9 – Unidades de análise efetivas da subcategoria reconhecimento da representação gráfica

<p>Unidade de análise: reconheceu</p> <p>Nesta unidade de análise, intenta-se verificar se os estudantes conseguiram reconhecer a representação gráfica</p>
<p><i>“Não. Pois os vetores são dois acima de zero e um abaixo, onde o valor dividido por zero mantém o valor”. (E1, Q4)</i></p> <p><i>“Não, pois o vetor v_1 segue a mesma direção de $a_1 v_1$ o mesmo acontece com o vetor v_2 ao ser multiplicado pelo número real a_2”. (E2, Q4)</i></p> <p><i>“Acredito que sejam Linearmente dependentes, pela sua disposição no gráfico [...]”. (E3, Q4)</i></p>
<p>Unidade de análise: não reconheceu</p> <p>Nesta unidade de análise, intenta-se verificar se os estudantes não conseguiram reconhecer a representação gráfica</p>
<p><i>“[...] são [...] independentes eles se anulam, são opostos” (E4, Q4)</i></p>

“São, pois de acordo com o gráfico eles geram o vetor v ”. (E5, Q4)

“Se [...] fossem ortogonais seriam linearmente independente, porque $v_1 v_2 = 0$ ”. (E6, Q4)

“Não sei identificar”. (E7, Q4)

“Não lembro”. (E8, Q4)

“É linearmente independente”. (E9, Q4)

“Sim, porque todos tendem a zero”. (E10, Q4)

“Não lembro [...]”. (E11, Q4)

Fonte: a autora

5.1.1 Síntese dos dados: o metatexto

A categoria *dificuldades* visava a identificar as dificuldades que os estudantes poderiam apresentar com relação aos conceitos de dependência e independência linear. Esta categoria contemplou quatro subcategorias: *linguagem*, *entendimento dos conceitos de dependência e independência linear*, *identificação de um conjunto de vetores LI e LD* e *reconhecimento da representação gráfica*.

Na subcategoria *linguagem*, que buscava identificar como os estudantes valeram-se da linguagem utilizada na álgebra linear para responder as questões do instrumento de coleta de dados, foram efetivadas duas unidades de análise que intentaram observar se os licenciandos apresentaram uma linguagem adequada ou inadequada. Com isso, observou-se que os estudantes em suas respostas ou justificativas associavam a palavra escalares a vetores (E1 e E6), ou a coeficientes (E5), ou a valores dos resultados (E7), bem como utilizaram a expressão *número real* (E2), ao invés de utilizar simplesmente a palavra escalar. Em sua maioria, os estudantes (E3, E4, E8, E9, E10, E11) não mostraram dificuldades com a linguagem empregada na álgebra linear, utilizando-a de forma adequada. Todavia, mesmo sabendo empregar alguns termos, para justificar suas respostas, os licenciandos apresentaram em alguns momentos uma notação confusa ao que se refere a

resoluções das questões, como, por exemplo, igualar uma combinação linear de matrizes a um número real (E3 e E4).

A segunda subcategoria da análise refere-se ao *entendimento dos conceitos de dependência e independência linear*, que visava a verificar como os estudantes interpretam e entendem tais conceitos. Para tanto, como unidade de análise foi visto se o entendimento estava adequado, parcialmente adequado ou inadequado.

Nesta segunda subcategoria, foi possível perceber que poucos estudantes apresentaram um entendimento adequado a respeito dos conceitos quando se tratava da Q1 (E3, E5, E6, E8), isso devido à forma como justificaram suas respostas. Com relação à Q3, a grande maioria apresenta um entendimento parcialmente adequado, pois algumas justificativas eram por meio de cálculos e esses cálculos, por descuido, estavam errados, o que comprometia o entendimento (E4, E7), ou por olhar somente uma parte da afirmativa (E5), ou associar a combinação linear com o vetor nulo, e não com os vetores dados na questão (E1, E8, E11). Com relação à unidade *inadequado*, dois estudantes (E3, E10) apresentaram um entendimento inadequado com relação a vetores LI e E10 apresentou ainda um entendimento inadequado para vetores LD.

A terceira subcategoria, *identificação de um conjunto LI e LD*, referente à observação de como os estudantes identificam e mostram tais conceitos, apresentou quatro unidades de análise: adequada, parcialmente adequada, inadequada e não identificou.

A maioria dos estudantes (E1, E3, E4, E5, E6, E7, E8, E9), nesta subcategoria, revelou uma identificação adequada com relação a mostrar que um conjunto era LI (Q5), porém, alguns licenciandos tiveram certo problema com a notação por igualar uma combinação linear de matrizes a um número real (E3, E4, E5, E6, E7). Nessa questão, também houve estudantes que a realizaram de forma inadequada (E2, E10 e E11), por mostrar que o conjunto gerava o espaço vetorial de matrizes (E2), ou por realizar processos, como fazer uma adição de matrizes e calcular o determinante da soma. Isso pode ser justificado, às vezes, pelo fato de o licenciando não lembrar e confundir os procedimentos que podem ser utilizados para fazer tal verificação (E10), ou calcular o determinante de cada matriz, para mostrar que o conjunto era LI (E11), o que pode ter ocorrido pela lembrança do estudante a respeito do uso do determinante para identificar se um conjunto é LI ou LD, e por ter considerado cada matriz como se fosse um vetor único. O fato de ter realizado a soma dos determinantes mostra uma confusão entre os procedimentos, às vezes, por se recordar que poderia

usar a combinação linear com o vetor nulo, entretanto, E11 esquece dos escalares que seriam multiplicados por cada vetor.

Quanto à Q2, que solicitava aos estudantes identificarem qual dos conjuntos dados era LD, alguns o faziam de forma adequada para um conjunto (E2 e E5, Q2A; E8 e E10, Q2B) e parcialmente para outro (E3, E8 e E10, Q2A; E5, Q2B), por associarem a igualdade $0 = 0$ a vetores LI (E3, E8, E10), ou por descuido, afirmar que eram vetores LI depois de encontrar escalares com valores diferentes de 0. Outros estudantes o faziam apenas de forma parcialmente adequada (E4, Q2A, Q2B; E6, Q2B), por não afirmarem que era LD ou LI (E4), ou realizavam uma parte da questão de forma parcialmente adequada e outra de forma inadequada (E3, Q2B), por errarem o cálculo e chegarem a vetores LI, ou a faziam inadequadamente (E1 e E11, Q2A, Q2B), por utilizarem procedimentos inadequados para dar sua resposta, como considerar que $\frac{0}{0}$, encontrado como resultado dos escalares, referir-se-ia a vetores LI (E1), ou adicionar cada elemento de um vetor com o corresponde do outro vetor, e em seguida realizar a adição da soma de cada elemento, obtendo um único valor, para assim ver se tal soma seria igual ou diferente de zero para afirmar que os conjuntos dados seriam LI ou LD (E11). Houve, além disso, estudantes que não identificaram se os conjuntos dados na questão eram ou não LD, por não se recordarem de como se fazia (E7 e E9).

A quarta e última subcategoria, *reconhecimento da representação gráfica*, que visava a verificar se os estudantes conseguem reconhecer a representação gráfica de vetores LI, apresentou duas unidades de análise: *reconheceu* e *não reconheceu*. A maioria dos estudantes não conseguiu atingir o objetivo da questão, algumas vezes por não se recordar (E8 e E11), outras por confundir as representações gráficas (E4, E5, E6, E9, E10).

Mediante a descrição realizada, foi possível constatar que grande parte dos licenciandos em Matemática, participantes desta pesquisa, apresentou alguma dificuldade com relação à álgebra linear, dificuldade essa que pode estar atrelada tanto à natureza da álgebra linear quanto a um caráter subjetivo.

No que diz respeito à dificuldade com a linguagem, observou-se que alguns estudantes a apresentaram, e como visto no trabalho de Dorier e Sierpinska (2001), essa dificuldade ocorre devido à álgebra linear valer-se de um caráter formal, e que,

algumas vezes, os estudantes não entendem a necessidade da especificidade de tal uso, o que pode caracterizar o “obstáculo do formalismo”.

Percebeu-se com a segunda subcategoria que o entendimento que os licenciandos apresentam a respeito dos conceitos de dependência e independência linear pode fazer com que caiam em certas armadilhas (STEWART, 2008), por não associarem algumas características desses conceitos, uma vez que os estudantes, assim como comentado no trabalho de Stewart (2008), podem ter criado um conceito imagem que não foi baseado no conceito definição.

Com a terceira subcategoria, notou-se que alguns estudantes associaram a igualdade $0 = 0$ à independência linear, do mesmo modo como observado no trabalho de Andreoli (2009). Além disso, verificou-se que a maioria dos estudantes valeu-se do “uso das definições de LD e LI como única ferramenta possível” (ANDREOLI, 2009, p. 145) para identificar e/ou mostrar se um conjunto é LI ou LD. Constatou-se ainda que alguns equívocos quanto às estratégias utilizadas levaram à identificação parcialmente adequada e inadequada dos conceitos, que são objetos de estudo desta pesquisa.

Nessa terceira subcategoria, foi possível observar também alguns problemas com notação utilizada pelos licenciandos ao resolverem as questões, como: igualar um conjunto a uma combinação linear do vetor nulo; igualar uma combinação linear de matrizes com um número real; esquecer de colocar o vetor nulo após a igualdade da equação vetorial, para caracterizar uma combinação linear com esse vetor. Esse problema com a notação pode ser justificado pelo não-entendimento da necessidade do uso do formalismo, o que remete novamente ao “obstáculo do formalismo” (DORIER; SIERPINSKA, 2001). Assim como pode se referir ao fato de os estudantes produzirem ou realizarem o que é solicitado, sem atribuição de significado para os símbolos que estão utilizando nas resoluções das questões (DORIER; SIERPINSKA, 2001).

Quanto à última subcategoria, percebeu-se a dificuldade dos licenciandos em identificarem uma representação gráfica, às vezes, por não associarem as características de vetores LI e LD, o que pode estar relacionado ao entendimento de tais conceitos (STEWART, 2008). Isso pode ter relação com a falta de “flexibilidade cognitiva” (ALVES DIAS, 1993, *apud* DORIER; SIERPINSKA, 2001; ANDREOLI, 2009) necessária para os estudantes transitarem entre os diferentes tipos de registros

de representação semiótica, no caso desta pesquisa, entre o registro simbólico e o registro gráfico.

5.2 UM OLHAR PARA CONCEPÇÕES EVIDENCIADAS NOS LICENCIANDOS

Nesta seção direciona-se um olhar para as concepções dos licenciandos em Matemática. Para tanto, como já afirmado no capítulo 4, na seção 4.5.3, será feito uso da decomposição genética dos conceitos, apresentada na seção 3.4. A fim de investigar cada concepção, segundo a Teoria APOS, serão descritas cada uma das resoluções feitas pelos estudantes. Entretanto, antes de iniciar a descrição das resoluções, será apresentado o que cada licenciando achou da disciplina de Álgebra Linear, por considerar que tal opinião é relevante para a caracterização das concepções. Tais comentários foram extraídos da pergunta realizada na caracterização dos estudantes (Apêndice C).

5.2.1 Estudante E1

O estudante E1 considera que a disciplina de Álgebra Linear é gostosa de se estudar, pois *“aprende realmente de onde surgiu, as maneiras de resolução aplicando a maneira algébrica, para que na sequência possa aplicar os números”*, e comenta que algumas vezes é necessário utilizar a imaginação para visualizar alguns espaços.

Voltando-se às resoluções, E1 resolveu todas as questões do instrumento aplicado. Na resolução da primeira questão, que discutia a respeito do entendimento dos conceitos de dependência e independência linear, E1 comenta: *“Para ser linearmente independente os vetores gerados, todos têm que corresponder a zero. E no linearmente dependentes os vetores possuem resultados diferentes”*. Com esta resposta, é possível inferir que E1 recorre, de certo modo, à definição de vetores LI e LD para explicitar seu entendimento sobre tais conceitos, entretanto pode-se perceber certa dificuldade com a linguagem algébrica, por exemplo, na frase *“[...] todos vetores gerados, todos têm que corresponder a zero”*, E1 poderia estar se referindo aos escalares, que multiplicados pelos vetores, em uma combinação linear igual ao vetor nulo, resulta em todos iguais a zero.

Na segunda questão, E1 escreveu os possíveis sistemas lineares que poderiam ser utilizados para verificar quais dos conjuntos apresentados seriam linearmente

dependentes. Ao resolver os sistemas lineares, E1 utiliza-se da regra de Cramer para resolver os sistemas de equações lineares, como é possível notar em sua resolução, na Figura 12:

Figura 12 – Registro escrito da questão 2 do estudante E1

$A = \{(1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \\ 3x + 6y = 0 \end{cases}$$

$B = \{(1, 1, 1), (3, -1, 2), (0, -4, -1)\}$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ -4y - z = 0 \end{cases}$$

$D = \frac{0+0+0-0-0-0}{4+6+12-12-6-4} = \frac{0}{0} = 0$

$D_x = \frac{0+0+0-0-0-0}{1+0-12+0+8+3} = \frac{0}{0} = 0$

$D_y = \frac{-0+0+0-0-0-0}{1+0-12+0+8+3} = \frac{0}{0} = 0$

$D_z = \frac{-0+0+0-0-0-0}{1+0-12+0+8+3} = \frac{0}{0} = 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

$$D = \frac{-0+0+0+0-0-0}{1+0-12+0+8+3} = \frac{0}{0}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

$$D = \frac{0+0+0-0-0-0}{4+6+12-12-6-4} = \frac{0}{0}$$

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E1

Por meio da resolução, percebe-se que E1 esqueceu-se de que, ao realizar a regra de Cramer, quando se tem $D = 0$, $D_x = 0$, $D_y = 0$ e $D_z = 0$, obtém-se um sistema possível e indeterminado, ou seja, pode-se ter infinitas soluções, não apenas a trivial. Ao realizar esse equívoco, E1 chega à seguinte resposta para a questão 2: “Não possui vetores linearmente dependentes pois todas equações são igualadas a

zero, conseqüentemente os resultados são 0 por 0 que resulta zero". Entretanto, mesmo não chegando à resposta correta, percebe-se que E1 busca utilizar aspectos da definição e da resolução de sistemas lineares que estavam em sua memória para resolver a questão. Além disso, o licenciando já interiorizou a expressão geral que pode possibilitar a verificação dos valores dos escalares, pois não a explicitou.

Com relação à questão 3, E1 responde que não concorda com a afirmação feita, pois *"para ser linearmente independente não basta ser combinação linear é necessário que os vetores se igualem a zero"*.

Percebe-se por meio desta resposta que E1 necessita da constatação de que os escalares devem ser nulos para o conjunto ser LI, todavia, o estudante não fez cálculos para comprovar se a afirmação era verdadeira, recorrendo, possivelmente, à sua memória para identificar o erro na afirmação feita na questão. Por meio da resposta, presume-se que E1 não interiorizou que se um conjunto de vetores é tal que um dos vetores deste conjunto possa ser escrito como uma combinação linear dos outros, então ele é linearmente dependente.

Mais uma vez, E1 utiliza a palavras vetores podendo estar se referindo aos escalares, deixando evidente a possível dificuldade com a linguagem a ser utilizada em álgebra linear.

Na quarta questão, E1 comenta que o gráfico apresentado não corresponde a vetores linearmente independentes, pois *"[...] os vetores são dois acima de zero e um abaixo, onde o valor dividido por zero mantém o valor"*. Com esta resposta, pode-se perceber que E1 tenta achar algum valor zero para afirmar que os vetores são LI, mostrando executar ações para tanto.

A última questão, como comentado no capítulo anterior, foi aplicada duas vezes, sendo assim, será apresentada a resolução apenas da segunda aplicação. Nessa questão, infere-se que E1 compreendeu que cada matriz correspondia a um vetor e realizou a verificação valendo-se da definição. Entretanto, E1 recorreu à expressão (combinação linear) que pode ser utilizada para verificar se um conjunto de vetores é LI ou LD, como é possível ver na Figura 13:

Figura 13 – Registro escrito da questão 5 do estudante E1

$$\alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \alpha_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha_3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \alpha_1 + 0 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + \alpha_2 + 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + \alpha_3 + 0 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + \alpha_4 = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \alpha_4 = 0 \end{array}$$

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E1

O estudante E1 encontrou a resposta de que todos os escalares eram nulos, porém, não a finalizou dizendo se o conjunto de vetores era linearmente independente ou não.

Por meio de cada resposta dada às questões, é possível inferir que E1 apresenta uma concepção-ação, segundo a Teoria APOS, dos conceitos de dependência e independência linear, uma vez que este estudante busca identificar quais vetores podem ser escritos como combinação linear nula, verificando quais escalares se anulam. Ele também mostra indícios de que recorre à memória para realizar suas justificativas, não concebendo ainda os conceitos como objetos matemáticos.

5.2.2 Estudante E2

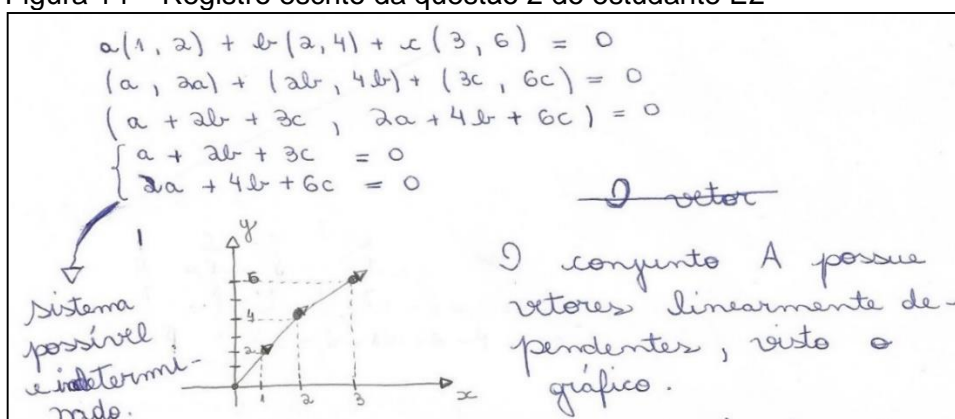
O estudante E2 considera a disciplina de Álgebra Linear interessante, por poder aprofundar os conceitos de sistemas lineares e determinantes, estudados na Educação Básica. Ele comenta ainda que tem dificuldades em entender as demonstrações, mas que às vezes consegue esclarecê-las nos exercícios.

Voltando-se às resoluções, E2 resolveu parcialmente as questões do instrumento aplicado. Na primeira questão E2, comentou que “os vetores *linearmente dependentes* são vetores que podem ser escritos como combinação linear, ou seja, irão depender dos números reais que multiplicam esses vetores. Os vetores *linearmente independentes* não podem ser escritos como combinação linear”. Por meio desta resposta, é possível inferir que E2 consegue estabelecer uma relação

entre a combinação linear e a dependência e independência linear, mostrando seu entendimento da definição usando essa relação.

A segunda questão é resolvida por E2 detalhadamente, deixando explícita a expressão geral, fazendo o passo a passo da multiplicação de vetor por escalar até o sistema de equações lineares. Entretanto, E2 não resolve o sistema linear por perceber que este é um sistema possível e indeterminado, mostrando saber as características de tal sistema linear e não vendo necessidade de prosseguir com os cálculos, uma vez que nessa questão solicita-se apenas que identifique qual conjunto era linearmente dependente (Figura 14):

Figura 14 – Registro escrito da questão 2 do estudante E2



Fonte: Resolução entregue pelo estudante E2

Por meio da resolução de E2 (Figura 14), percebe-se que ele tentou justificar sua resposta utilizando também a representação gráfica do conjunto A, mostrando conhecer possíveis interpretações geométricas da dependência linear. Todavia, E2 comenta que utiliza o gráfico, pois não se lembra de uma explicação formal.

Na questão 3, E2 responde que não concorda com a afirmação feita, pois “[...] se é linearmente independente não pode ser escrito como combinação linear” (grifo do estudante). Por meio de seus dizeres, é possível ver que ele recorre a seu entendimento do que é necessário para que vetores sejam LI ou LD, não sentindo necessidade de comprovar a afirmação feita na questão por meio de cálculos, já que interiorizou que se é possível escrever os vetores como combinação linear, então são LD. Esta inferência pode ser feita, pois o estudante sublinha a palavra “não” para enfatizar que para serem LI os vetores não podem ser escritos como combinação linear de outros vetores do conjunto.

Na quarta questão, E2 afirma que os vetores não são linearmente independentes, pois “[...] o vetor v_1 segue a mesma direção de $a_1 v_1$ o mesmo acontece com o vetor v_2 ao ser multiplicado pelo número real a_2 ”. Com esta resposta, percebe-se que E2 tenta se justificar mostrando que se os escalares multiplicados fizeram com que permanecessem na mesma direção, logo, não são LI, já que os valores de todos os escalares devem ser zero.

Na última questão do instrumento, E2 escreve uma expressão como se fosse mostrar que os vetores dados gerariam o conjunto $M(2,2)$, ao invés de mostrar que os vetores seriam LI, como é possível verificar na Figura 15:

Figura 15 – Registro escrito da questão 5 do estudante E2

$$\begin{array}{l}
 a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} a+0+0+0 & 0+b+0+0 \\ 0+0+c+0 & 0+0+0+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E2

Mesmo não mostrando o que era solicitado nessa questão, E2 demonstra saber efetuar corretamente operações com matrizes (multiplicação por escalar, soma de matrizes) e a igualdade entre matrizes, realizando passo-a-passo suas ações.

Por meio de cada resposta dada por E2 às questões do instrumento, é possível perceber que tal estudante apresenta concepção processo, de acordo com a Teoria APOS, uma vez que interiorizou alguns aspectos da dependência e independência linear, como a expressão que representa a combinação linear com o vetor nulo, a possibilidade de escrever vetores como combinação linear de outros ser uma característica de vetores LD.

5.2.3 Estudante E3

O estudante E3 considera a disciplina de Álgebra Linear muito importante para sua formação, por ter possibilitado o entendimento de formas de resolução que até no momento do curso não tinham sido aprofundadas. E3 ainda comenta que as formas

de resolução são complexas em virtude das propriedades, mas que devido a isso “é difícil de ter erros se compreendermos as mesmas”.

Voltando-se às resoluções, E3 resolveu todas as questões do instrumento aplicado. Na primeira questão, E3 comenta que vetores são “*linearmente independente quando multiplicamos os vetores por um escalar qualquer e o resultado desses se iguala a zero. Não esquecendo de somar as coordenadas correspondentes dos vetores*” e “*linearmente dependente: quando a multiplicação do escalar pelos vetores resulta em diferente de zero ou seja seus resultados são diferentes de zero*”. Por meio desta resposta, é possível inferir que E3 recorre a aspectos da definição para explicitar seu entendimento, utilizando, de certo modo, adequadamente a linguagem algébrica.

Com relação à segunda questão, E3 respondeu que nenhum dos conjuntos apresentados é linearmente dependente, “[...] pois os dois zeraram os escalares”. Nessa questão, E3 apresentou o passo a passo para verificar se os vetores eram LI ou LD, entretanto, ao resolver os sistemas lineares, cometeu alguns equívocos, como admitir um valor único para um sistema linear possível e indeterminado (conjunto A), deixar a_3 igual a zero em uma equação que daria $0 = 0$ e errar o valor de um determinante utilizado para resolver um sistema linear pelo método de Cramer, como é possível notar em seu registro escrito, na Figura 16:

Figura 16 – Registro escrito da questão 2 do estudante E3

$\rightarrow A = a_1(1,2) + a_2(2,4) + a_3(3,6) = (0,0)$

$\rightarrow \begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \quad (-2) & a_1 = -2a_2 + 3a_3 \\ 2a_1 + 4a_2 + 6a_3 = 0 & \rightarrow 2 \cdot (-2a_2 + 3a_3) + 4a_2 + 6a_3 = 0 \\ & -4a_2 + 6a_3 + 4a_2 + 6a_3 = 0 \\ & 12a_3 = 0 \\ & a_3 = 0 \end{cases}$

$-2a_1 - 4a_2 - 6a_3 = 0 \quad 6a_3 + 6a_3 = 0$
 $2a_1 + 4a_2 + 6a_3 = 0 \quad 12a_3 = 0$
 $0 + 0 + 0 = 0$
 $0 = 0$

$a_1 = 0$
 $a_2 = 0$
 $a_3 = 0$

LI (todos os escalares devem resultar 0)

$B = a_1(1,1,1) + a_2(3,-1,2) + a_3(0,-4,-1) = (0,0,0)$

$\begin{cases} a_1 + 3a_2 = 0 \quad (-2) \\ a_1 - a_2 - 4a_3 = 0 \\ a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 \end{cases}$ (1.º método)

$-2a_1 - 6a_2 = 0$
 $a_1 - a_2 - 4a_3 = 0$
 $a_1 + 2a_2 - a_3 = 0$

$-5a_2 - 5a_3 = 0$
 $-5a_2 = 5a_3$
 $a_2 = -a_3$
 $a_2 = -a_3 \rightarrow 0$

$a_1 + a_3 - 4a_3 = 0$
 $a_1 = 3a_3 \rightarrow 0$

$a_1 + 2a_2 - a_3 = 0$
 $3a_3 + (-2a_3) - a_3 = 0$
 $a_3 = 0$

$\begin{cases} a_1 + 3a_2 = 0 \\ a_1 - a_2 - 4a_3 = 0 \\ a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 \end{cases}$ 2.º método = B (Reversa)

$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0}{1 - 12 + 0 + 0 + 8 + 0} = \frac{0}{-3} = 0$

$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{1 - 12 + 0 + 0 + 8 + 0} = \frac{0}{-3} = 0$

$a_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-3} = 0$

(LI) = todos os escalares devem valer zero.

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E3

Mesmo com esses descuidos, ao resolver os sistemas de equações lineares, pode-se verificar que E3 vale-se de aspectos da definição para identificar os conjuntos que possuem vetores linearmente dependentes, e busca mais de um método para comprovar se sua solução está correta, mostrando certo conhecimento nas diferentes formas de resolver um sistema linear.

Na terceira questão, E3 comenta que não concorda com a afirmação, justificando que “[...] para serem linearmente independentes além de serem escritos

como uma combinação linear, a multiplicação dos escalares deve dar resultado 0 em todos”. Com esta resposta é possível inferir que tal estudante remete à definição de que, para ser LI, é necessário que a solução da combinação linear do vetor nulo seja a trivial. Também é possível inferir que E3 não interiorizou que se um conjunto de vetores é tal que um deles pode ser escrito como uma combinação linear dos outros, então ele é linearmente dependente.

Com relação à questão 4, E3 comenta que “acredito que sejam linearmente dependentes, pela sua disposição no gráfico, mas não recordo como resolve”. Com base nesta resposta, percebe-se que E3 sabe reconhecer quando os vetores são linearmente dependentes por meio de seu gráfico, mas verifica-se também que isso estava em sua memória, não conseguindo justificar sua resposta.

Na última questão, E3 recorre novamente ao uso da equação vetorial para mostrar se os vetores são linearmente independentes, porém, não faz corretamente a igualdade, uma vez que iguala uma combinação linear de matrizes a um número real, como é possível ver em sua resolução, na Figura 17:

Figura 17 – Registro escrito da questão 5 do estudante E3

$$\begin{aligned}
 & a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 + a_3 \cdot v_3 + a_4 \cdot v_4 = 0 \\
 & a_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \\
 & \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_4 \end{bmatrix} = 0 \\
 & \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ a_1 + a_4 = 0 \rightarrow a_4 = 0 \end{cases} \\
 & \text{Logo são linearmente independentes.}
 \end{aligned}$$

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E3

Com base nas respostas dadas às questões, observa-se que E3 apresenta uma concepção ação, de acordo com a Teoria APOS, por ter a necessidade de sempre buscar determinar, por meio da verificação, se a combinação linear do vetor nulo admite a solução trivial ou não para identificar se os vetores são LI ou LD. Entretanto, E3 não apresenta muita dificuldade com a linguagem utilizada em álgebra linear.

5.1.4 Estudante E4

O estudante E4 considera a disciplina de Álgebra Linear muito complexa e de difícil entendimento, mas faz uma ressalva comentando que “se você entende, você aprende”.

Voltando-se às resoluções, E4 resolveu todas as questões do instrumento aplicado, entretanto, algumas das questões não apresentaram uma resposta final ao que era solicitado na questão.

Na primeira questão, E4 comenta que “Vetores lineares dependentes é os vetores que dependem de outro para se obter o resultado e independente é o contrário”. Por meio desta resposta, pode-se inferir que E4 associa a questão de um vetor poder ser escrito como combinação linear de outros com a de os vetores serem LD. De certo modo, este estudante apresenta conhecer uma das propriedades da dependência linear.

Na questão 2, E4 resolveu os sistemas de equações lineares resultantes da combinação linear do vetor nulo com os conjuntos de vetores dados na questão. Entretanto, não explicitou tal combinação; com isso, constata-se que E4 interiorizou a equação vetorial que pode ser utilizada para identificar se vetores são LI ou LD, como é possível ver na Figura 18:

Figura 18 – Registro escrito da questão 2 do estudante E4

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \\ 3x + 6y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ -4y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 4y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ -4y - z = 0 \\ -4y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ -4y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E4

Por meio desta resposta, é possível perceber que E4 resolveu os sistemas lineares sem dificuldades, entretanto, não respondeu à pergunta feita na segunda questão do instrumento de coleta de dados.

Com relação à terceira questão, E4 responde que não concorda com a afirmação feita na questão, “[...] pois o determinante não dá 0”, apresentando o seguinte cálculo (Figura 19):

Figura 19 – Registro escrito da questão 3 do estudante E4

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{Det} = -4 + 3 + 2 - 8 \\ \text{Det} = -7 \end{matrix}$$

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E4

Como é possível perceber, E4 sentiu a necessidade de efetuar cálculos para comprovar se a afirmação era verdadeira ou não. Sendo assim, presume-se que ele não interiorizou a máxima de que se um vetor pode ser escrito como combinação linear de outros vetores, então os vetores não podem ser LI. Além disso, este estudante mostrou confundir a resposta, utilizando o processo de calcular o determinante da matriz formada pelos componentes dos vetores para identificar se os vetores são LI ou LD, uma vez que se o determinante possui como resposta o 0, quer dizer que se trata de vetores LD, e não LI. Todavia, mesmo com esse engano, percebe-se que tal estudante conhece e recorda-se de outra forma de identificar se um conjunto de vetores do R^3 é LI ou LD.

Na quarta questão, E4 comenta que os vetores são “[...] independentes eles se anulam, são opostos”. Por meio desta resposta, percebe-se que ele tenta chegar ao valor zero (“eles se anulam”) para dizer se o gráfico corresponde a vetores LI, mesmo não correspondendo. Com isso, percebe-se que este estudante não reconhece a representação gráfica de vetores LI.

Na última questão, E4 apresentou a equação vetorial que poderia ser utilizada para mostrar se os vetores eram linearmente independentes, entretanto, ele a iguala a um número real e não à matriz nula 2 por 2, como é possível verificar em sua resolução na Figura 20:

Figura 20 – Registro escrito da questão 5 do estudante E4

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$0 = 0$$

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E4

Mais uma vez, E4 não apresenta uma resposta final para a questão, não sendo possível identificar se considera os vetores como sendo linearmente independentes ou não. Ainda nessa questão, percebe-se que E4 comete um equívoco ao efetuar a operação de soma de matrizes, deixando de somar cada termo com seu correspondente, o que resultaria na matriz $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, e chega na igualdade $0 = 0$. Todavia, E4 apresenta também uma matriz com os escalares, sendo esta igual a zero. O que se pode presumir disso é que E4 chegou a uma resposta para a soma de matrizes, mesmo com seu descuido.

Com base nas respostas dadas, é possível inferir que o estudante E4 apresenta apenas indícios da concepção ação, segundo a Teoria APOS, uma vez que necessita utilizar a verificação para determinar se vetores são LI ou LD, mas não finaliza algumas de suas respostas, não fornecendo dados para saber se considera os resultados obtidos como LI ou LD.

5.2.5 Estudante E5

O estudante E5 comentou que gosta da disciplina de Álgebra Linear, uma vez que se interessa pelo trabalho com vetores, seus espaços vetoriais etc, assim como por conhecer suas propriedades.

Voltando-se às resoluções, E5 resolveu todas as questões do instrumento aplicado. Ao responder à primeira questão, E5 comenta que “*quer dizer que seus coeficientes lineares dependem ou não dos valores dos outros coeficientes para sabermos seus valores*”. Por meio desta resposta, é possível notar que E5 tenta explicar o processo para verificar se os vetores são LI ou LD, no qual para serem LD,

os “coeficientes lineares” dependem dos outros valores. Com isso, pode-se inferir que tal estudante está fazendo uma associação com o conceito de combinação linear.

Na segunda questão, E5 deixa explícita a expressão que pode ser utilizada para identificar se os vetores são LI ou LD, escreve os sistemas lineares e os resolve. Ao buscar a resolução dos sistemas lineares, comete apenas um descuido na finalização de sua resposta, no que diz respeito ao conjunto B de vetores, uma vez que chega a encontrar que o sistema é possível e indeterminado, mas mesmo colocando as respostas dos escalares em função de a_2 , tal estudante deixou de perceber que haveria infinitos valores para o sistema linear, não apenas o trivial. Assim, o conjunto seria LD (Figura 21):

Figura 21 – Registro escrito da questão 2 do estudante E5

Handwritten work showing two systems of linear equations:

Left system:

$$a_1(4, 2) + a_2(2, 4) + a_3(3, 6) = (0, 0)$$

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \\ 2a_1 + 4a_2 + 6a_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

LD.

Right system:

$$a_1(1, 1, 1) + a_2(3, -1, 2) + a_3(0, -4, -1) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 = 0 \rightarrow a_1 = -3a_2 \\ a_1 - a_2 - 4a_3 = 0 \rightarrow -3a_2 - a_2 - 4a_3 = 0 \rightarrow a_3 = -a_2 \\ a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 \rightarrow -3a_2 + 2a_2 + a_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$[-3a_2, a_2, -a_2]$ L.I.

~~$-3a_2(1, 1, 1) + a_2(3, -1, 2) + a_2(0, -4, -1) = (x, y, z)$~~

~~$-3a_2 + 3a_2 +$~~

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E5

Mesmo com este equívoco, E5 demonstra saber resolver adequadamente um sistema linear, chegando à conclusão da questão sem necessidade de deixar explícitos muitos cálculos, como foi possível ver em sua resolução.

Com relação à questão 3, E5 apenas dá sua resposta depois que realiza os procedimentos necessários para identificar se os vetores são LI ou LD, como é possível na Figura 22:

Figura 22 – Registro escrito da questão 3 do estudante E5

$$a_1(1,2,1) + a_2(1,-1,0) + a_3(2,3,4) = 0$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \rightarrow -4a_3 + 5a_3 + 2a_3 = 0 \rightarrow 3a_3 = 0 \\ 2a_1 - a_2 + 3a_3 = 0 \rightarrow -8a_3 - a_2 + 3a_3 = 0 \rightarrow a_2 = -5a_3 \\ a_1 + 4a_3 = 0 \rightarrow a_1 = -4a_3 \end{cases}$$

Concedido, pois a afirmação pode ser confirmada a partir dos cálculos acima.

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E5

Por meio do dizer de E5, nota-se que ele se confundiu ao dar sua resposta, uma vez que se é possível escrever o vetor nulo do R^3 como combinação linear de outros vetores, sem que os escalares resultem na solução trivial, então, não se tem vetores LI, mas sim LD. Percebe-se que E5 apenas atentou-se ao fato de os vetores serem LI, e não à afirmação de que “[...] são linearmente independentes, porque podem ser escritos como uma combinação linear”.

Na quarta questão, E5 comenta que os vetores são linearmente independentes, “[...] pois de acordo com o gráfico eles geram o vetor v ”. Com isso, percebe-se que ele se equivocou quanto à representação gráfica, uma vez que se eles “geram”, no caso, resultam no vetor v , logo, seriam LD.

Na última questão, E5 escreveu a expressão que poderia ser utilizada para mostrar se os vetores eram LI, entretanto, iguala a combinação linear de matrizes a um número real, porém, mesmo com esse descuido, faz adequadamente as operações com matrizes, concluindo que se tratava de vetores linearmente independentes, pois todos os escalares possuíam valor nulo (Figura 23):

Figura 23 – Registro escrito da questão 5 do estudante E5

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = 0$$

Portanto $a_1=0$, $a_2=0$, $a_3=0$ e $a_4=0$, Logo é linearmente independente

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E5

A partir das respostas dadas às questões, pode-se inferir que E5 possui concepção ação, conforme a Teoria APOS, uma vez que ainda não interiorizou algumas ações, como por exemplo: se é possível escrever um vetor como combinação linear de outros vetores, então, esses vetores são LD.

5.2.6 Estudante E6

O estudante E6 considera a disciplina de Álgebra Linear confusa, por não ter tido outros contatos com esta matéria, o que contribui com um “impacto” quando ela é iniciada. Ele comenta ainda que conforme os conteúdos são trabalhados, percebe-se uma continuidade nos outros que virão, e com isso, afirma que “*deve-se compreender um conteúdo para poder utilizá-lo em outro*”.

Voltando-se às resoluções, E6 fez parcialmente o instrumento aplicado, deixando apenas uma questão sem estar totalmente resolvida. Na primeira questão, E6 comenta que “*quando os vetores são linearmente dependentes é porque há combinação linear entre eles, o que não acontece quando são independentes, pois os vetores são igualados a zero*”. Percebe-se por meio desta resposta que E6 parece conhecer uma das particularidades de vetores LD, na qual pelo menos um dos vetores é combinação linear dos outros. Porém, ao justificar que se um conjunto de vetores é LI, então, não é possível escrever algum vetor deste conjunto como combinação linear dos outros, o estudante comenta que os “*vetores são igualados a zero*”, assim, por meio desta afirmação, é possível observar certa confusão, pois ao usar vetores, E6 pode estar se referindo aos escalares, que precisam ser todos nulos, ou pode estar comentando a respeito da combinação linear do vetor nulo. Por meio disso, é possível inferir que E6 apresenta uma dificuldade em utilizar os termos da álgebra linear.

Na segunda questão, E6 resolveu apenas uma parte, como é possível verificar em seu registro escrito (Figura 24):

Figura 24 – Registro escrito da questão 2 do estudante E6

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad D = 2 + 0 - 12 + 3 + 8 + 0 = -1$$

$$B = \{(1, 1, 1), (3, -1, 2), (0, -4, -1)\} \text{ é LD, pois } D \neq 0.$$

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E6

Ainda com relação a seu registro escrito, é possível notar que este estudante utilizou do cálculo de determinante da matriz formada pelos vetores do conjunto B para identificar se este era LD. Todavia, percebe-se que, mesmo afirmando que era LD, E6 cometeu um equívoco na resolução do determinante (multiplicação na diagonal principal), e chegou a um valor diferente de 0, o que resultaria em um vetor LI, e não LD. Desse modo, pode-se ver que E6 confundiu as respostas, evidenciando ainda não ter interiorizado esse procedimento para identificar vetores LI ou LD do R^3 .

Na questão 3, E6 afirma que não concorda com a afirmação, pois “[...] *esta afirmação refere-se a vetores linearmente dependentes*”. Com sua resposta, percebe-se que ele interiorizou essa propriedade de vetores LD, o que possibilita inferir que E6 conheça as propriedades e saiba se valer delas para identificar e justificar suas respostas, mostrando refletir a respeito da ação feita pelo estudante de álgebra linear apresentado na questão.

Com relação à quarta questão, E6 comenta que os vetores seriam linearmente independentes se “[...] *fossem ortogonais*”, porque “ $v_1 v_2 = 0$ ”, entretanto, afirma não saber “*se há lógica nisso*”. Ele tenta relacionar outros conhecimentos para justificar sua resposta, buscando associar algo que resulte no vetor nulo, deixando de levar em conta os escalares.

Na última questão, E6 utilizou-se da combinação linear com o vetor nulo para resolver a questão. Como é possível verificar em sua resolução, ele evidenciou saber realizar as operações com matrizes, conseguindo mostrar que o conjunto de vetores é linearmente independente, porém, comete um equívoco na igualdade, pois iguala matrizes a um número real, como é possível ver na Figura 25:

Figura 25 – Registro escrito da questão 5 do estudante E6

$$a_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$a_1 = 0$$

$$a_2 = 0$$

$$a_3 = 0$$

$$a_4 = 0$$

Logo é linearmente independente, pois os escalares são iguais a zero.

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E6

Por meio das resoluções apresentadas por E6, é possível inferir que, mesmo equivocando-se com alguns procedimentos operatórios, ele possui a concepção processo dos conceitos de dependência e independência linear, segundo a Teoria APOS, entendendo certas propriedades que caracterizam tais conceitos, não necessitando explicitar detalhadamente muitos passos para identificá-las.

5.2.7 Estudante E7

O estudante E7 considera a disciplina de Álgebra Linear um pouco complicada, pois “suas definições são complexas”. Todavia, comenta que, mesmo com isso, a disciplina é muito interessante.

Voltando-se às resoluções, E7 resolveu parcialmente as questões do instrumento aplicado, argumentando que não se lembrava de como realizar algumas delas. Com relação à primeira questão, que procurava descobrir qual o entendimento do estudante acerca dos conceitos de dependência e independência linear, E7 comentou que “linearmente dependente é quando os valores dos resultados são diferentes. Linearmente independente é quando os valores dos resultados são iguais à zero”. Por meio de sua resposta, pode-se presumir que E7 recorre, de certo modo, à definição dos conceitos, buscando dizer que quando a solução da equação vetorial, utilizada para identificar se os vetores são LI ou LD, for apenas a trivial, então, o conjunto é LI, se não for é LD. Em sua resposta, nota-se certa dificuldade com a

linguagem utilizada em álgebra linear quando diz “valores dos resultados” para se referir aos valores dos escalares.

O estudante E7 não fez a questão 2, comentando que não se lembrava de como resolvê-la. Entretanto, na questão 3, buscou, por meio da aplicação de procedimentos da definição, verificar se a afirmação feita era verdadeira. Isso pode ter ocorrido, pois na questão são dados os vetores e foi comentado a respeito da combinação linear, então, o estudante pode ter se lembrado de como resolver, recorrendo, possivelmente, à sua memória para justificar seu posicionamento (Figura 26):

Figura 26 – Registro escrito da questão 3 do estudante E7

$$a_1(1, 2, 1) + a_2(1, -1, 0) + a_3(2, 3, 4)$$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \\ 2a_1 - a_2 + 3a_3 = 0 \\ a_1 + 4a_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_1(-1) + L_3} \begin{cases} -a_1 - a_2 - 2a_3 = 0 \\ 2a_1 - a_2 + 3a_3 = 0 \\ a_1 + 4a_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_2(-1) + L_1} \begin{cases} 2a_1 - a_2 + 3a_3 = 0 \\ -a_2 + 3a_3 = 0 \\ a_1 + 4a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1 - a_2 + 3a_3 = 0 \\ a_3 - 4a_3 + 3a_3 = 0 \\ 2a_1 = a_3 \end{cases} \quad \begin{matrix} -a_2 + 2a_3 \\ 0 = 0 \end{matrix}$$

Concordo pois o resultado é 0

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E7

Com sua resposta, observa-se que E7 percebeu que o sistema linear resultava em escalares que dependem uns dos outros, e ao aplicar os valores em uma das equações, como se estivesse fazendo uma verificação, chegou à igualdade $0 = 0$, assim, pode ter remetido à ideia de vetores LI, já que o resultado foi zero. Todavia, percebe-se que este estudante se equivocou, uma vez que se um sistema é possível e indeterminado, então, podem-se obter infinitas respostas para a combinação linear do vetor nulo, não apenas a trivial. Além disso, é possível verificar que E7 tenta escrever uma combinação linear, porém, se esquece de igualá-la ao vetor nulo do \mathbb{R}^3 , entretanto, ao buscar os valores dos escalares, igualou cada equação do sistema linear a zero. Esse esquecimento pode ter ocorrido por falta de atenção.

Na última questão, E7 escreve a combinação linear dos vetores dados com o vetor nulo, conseguindo realizar as operações com matrizes, porém, não realiza corretamente a igualdade, uma vez que iguala uma matriz a um número real e não a

uma matriz nula (como é possível observar na Figura 27), e mostra o que foi pedido na questão, mesmo não afirmando ao final se o conjunto era realmente LI:

Figura 27 – Registro escrito da questão 5 do estudante E7

$$\begin{aligned}
 & a_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \\
 & \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_4 \end{bmatrix} = 0 \\
 & 0 + 0 + 0 + 0 = 0 \\
 & \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = 0 \quad \boxed{0=0}
 \end{aligned}$$

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E7

Com base nas respostas dadas por E7, é possível inferir ele apresenta concepção ação, segundo a Teoria APOS, já que suas justificativas são baseadas em ações que estavam em sua memória, mostrando estar em um estágio inicial da construção dos conceitos de dependência e independência linear. Além do mais, este estudante apresenta ainda algumas dificuldades quanto à linguagem utilizada em álgebra linear.

5.2.8 Estudante E8

O estudante E8 considera a disciplina de Álgebra Linear importante para sua formação, entretanto, comenta que é uma disciplina abstrata que não é atrativa.

Voltando-se às resoluções, E8 resolveu parcialmente as questões, por não se recordar da representação gráfica de vetores LI e LD.

Na primeira questão, E8 comentou que vetores “*linearmente dependentes são aqueles que assumem valores de dependência próprios, tem um valor estabelecido*”, enquanto “*linearmente independentes são aqueles que assumem valores não definidos, não há dependência*”. Com sua resposta, pode-se inferir que o estudante tenta associar a ideia de que se há escalares diferentes de zero, então eles são LD, se não, são LI.

Na segunda questão, E8 buscou escrever uma combinação linear com vetores dados, porém, não a igualou ao vetor nulo para identificar se o conjunto de vetores era LI ou LD, colocando a combinação linear igual a B e a A. Mesmo se equivocando,

uma vez que não se pode igualar uma combinação linear a B e nem a A, E8 escreveu os sistemas lineares que poderiam ser utilizados para identificar qual dos vetores eram linearmente dependentes, como é possível ver em seu registro escrito (Figura 28):

Figura 28 – Registro escrito da questão 3 do estudante E8

$B = a_1(1, 1, 1) + a_2(3, -1, 2) + a_3(9, -4, -1)$
 $a_1 + 3a_2 = 0 \quad a_1 = -3a_2$
 $a_1 - a_2 - 4a_3 = 0$
 $a_1 + 2a_2 - a_3 = 0$
 $-3a_2 - a_2 - 4a_3 = 0$
 $-4a_2 - 4a_3 = 0$
 $-4a_3 = 4a_2$
 $a_3 = -\frac{4a_2}{4}$
 $a_3 = -a_2$ logo e-
 $a_2 = -a_3$ LD Porque a_1, a_2, a_3 não são $\neq 0$

$A = a_1(1, 2) + a_2(2, 4) + a_3(3, 6)$
 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \quad (*)$
 $2a_1 + 4a_2 + 6a_3 = 0$
 $-2a_1 - 4a_2 - 6a_3 = 0$ logo e-
 $2a_1 + 4a_2 + 6a_3 = 0$ logo e-
 $0 = 0$ LI
 Para ser LI todos a_1, a_2 e $a_3 = 0$

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E8

Com sua resolução, pode-se verificar que com os vetores do conjunto A, E8 chegou a um sistema possível e indeterminado, entretanto, equivocou-se ao pensar que a igualdade $0 = 0$ resultaria em escalares com valor nulo, então, o conjunto seria LI. Já com o outro sistema linear, E8 também chegou a um sistema possível e indeterminado, mas por ter trabalhado desde o início com um escalar dependendo do outro, supôs que os vetores eram LD.

Na terceira questão, E8 comentou que não concorda com a afirmação feita, “[...] porque se faz combinação linear para saber se é LI ou LD”. Dessa forma, é possível inferir que o estudante considera apenas a combinação linear dos vetores dados com o vetor nulo, não interiorizando que se é possível escrever um vetor de certo conjunto como combinação linear dos outros vetores, então, estes são LD.

Com relação à quarta questão, E8 afirmou não se recordar se o gráfico representaria ou não vetores LI, entretanto, apresentou um registro escrito (Figura 29), no qual chegava à combinação linear do vetor v com os vetores v_1 e v_2 , mostrando tentar, por meio de cálculos, chegar a algo familiar, mesmo não recordando que a representação gráfica não correspondia aos vetores LI:

Figura 29 – Registro escrito da questão 4 do estudante E8

$$\begin{array}{l}
 v_1 = (1, 1) \\
 v_2 = (2, 2) \\
 \textcircled{2} \quad v_1 \quad v_2 \\
 v = a_1 v_1 + a_2 v_2
 \end{array}$$

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E8

Na última questão, E8 mostrou que os vetores eram LI, além de mostrar que eles gerariam $M(2,2)$, como é possível ver em sua resolução (Figura 30):

Figura 30 – Registro escrito da questão 5 do estudante E8

$$\begin{array}{l}
 a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \\
 a_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} a_1 = x \\ a_2 = y \\ a_3 = z \\ a_4 = t \end{array} \right\} \\
 \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \begin{array}{l} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \\ a_4 = 0 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \begin{array}{l} 1^\circ \rightarrow \text{LI} \\ 2^\circ \left\{ \begin{array}{l} x = x \\ y = y \\ z = z \\ t = t \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E8

Por meio de sua resolução, é possível perceber que E8 soube mostrar que o conjunto dado era LI, mesmo tendo escrito inicialmente uma combinação linear com os vetores dados resultando em que gerariam o espaço vetorial tratado na questão, o que evidencia que também sabe operar com matrizes.

Com base em suas respostas, pode-se inferir que E8 apresenta uma concepção ação, segundo a Teoria APOS, uma vez que ainda não interiorizou algumas ações, como a possibilidade de escrever vetores LD como combinação linear. Este estudante ainda mostrou certa dificuldade em sistemas lineares e sua relação com a dependência e independência linear, uma vez que se enganou ao associar um sistema possível e indeterminado com vetores LI.

5.2.9 Estudante E9

O estudante E9 considera a disciplina de Álgebra Linear interessante e importante para seu conhecimento matemático.

Voltando-se às resoluções, E9 resolveu parcialmente as questões do instrumento aplicado, por não se lembrar de como fazer algumas delas. Na primeira questão, comentou que vetores são “*linearmente dependente quando pode ser escrito em uma combinação linear*” e “*linearmente independente quando $a_i \neq 0$* ”. Por meio desta resposta, infere-se que E9 pode estar associando a característica de vetores LD, na qual se há a possibilidade de se escrever um vetor de certo conjunto como combinação linear dos outros vetores, então ele é LD. No entanto, E8 equivocou-se no que diz respeito a vetores LI, já que por seu comentário continua se referindo a uma característica de vetores LD.

Com relação à segunda questão, E9 comentou que não se lembrava como fazia para identificar se os vetores eram LD.

Na terceira questão, E9 disse que não concorda com a afirmação, “[...] *porque só quando é linearmente dependente que pode ser escrito em uma combinação linear*”. Com esta resposta, nota-se que o estudante recorre à característica de vetores LD para justificar sua afirmativa.

Na quarta questão, E9 afirma que a representação gráfica corresponde a vetores linearmente dependentes, entretanto, não apresenta a razão de eles serem LD.

Na questão 5, E9 escreve a equação vetorial que poderia ser feita para demonstrar se os vetores realmente são LI, além de usar um sistema linear para chegar a um resultado, como é possível observar em seu registro escrito (Figura 31):

Figura 31 – Registro escrito da questão 5 do estudante E9

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_1 + 0 + 0 + 0 = 0 & a_1 = 0 \\ 0 + a_2 + 0 + 0 = 0 & a_2 = 0 \\ 0 + 0 + a_3 + 0 = 0 & a_3 = 0 \\ 0 + 0 + 0 + a_4 = 0 & a_4 = 0 \end{cases}$$

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E9

Mesmo chegando a um resultado que mostraria que os vetores do conjunto são LI, E9 não finaliza afirmando se é ou não linearmente independente.

Com base em suas respostas, é possível inferir que E9 apresenta concepção ação dos conceitos de dependência e independência linear, por ainda apresentar certos equívocos com relação a esses conceitos e por, possivelmente, recorrer a fatos de sua memória para dar suas respostas, sem refletir a respeito deles.

5.2.10 Estudante E10

O estudante E10 considera a disciplina de Álgebra Linear muito interessante, pois *“podemos aperfeiçoar nossos saberes matemáticos”*.

Voltando-se às resoluções, E10 resolveu parcialmente as questões do instrumento aplicado, deixando uma questão incompleta. Na questão 1, E10 comenta apenas o que significa dizer que vetores são linearmente dependentes, explicando que *“para eles serem linearmente dependentes, eles tem que ser igualado a zero”*. Por meio desta resposta, presume-se que E10 está se referindo à combinação linear do vetor nulo, que pode ser utilizada para identificar vetores LI e LD, e com isso, não deixa claro seu entendimento a respeito da dependência linear.

Na segunda questão, para identificar se os conjuntos de vetores são LD, E10 apresenta uma combinação linear para os conjuntos A e B, mas se esquece de igualá-la ao vetor nulo do R^2 e R^3 , respectivamente, o que pode ter acontecido por descuido, ou falta de atenção. Todavia, quando traz os possíveis sistemas lineares, iguala a zero cada uma das equações presente neles, como é possível notar em seu registro apresentado na Figura 32:

Figura 32 – Registro escrito da questão 2 do estudante E10

$a_1(1, 2) + a_2(2, 4) + a_3(3, 6)$

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \\ 2a_1 + 4a_2 + 6a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = 0 \end{cases}$$

$a_1(1, 1, 1) + a_2(3, -1, 2) + a_3(0, -4, 4)$

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 + 0 = 0 \\ a_1 + a_2 - 4a_3 = 0 \\ a_1 + 2a_2 - a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 3a_2 \\ 3a_2 - a_2 - 4a_3 = 0 \\ 3a_2 + 2a_2 - a_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_2 = 4a_3 \\ a_2 = 2a_3 \\ a_3 = \frac{a_2}{2} \end{cases}$$

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E10

No sistema linear escrito para o conjunto A, E10 chega à igualdade $0 = 0$, mesmo não a deixando explícita, entretanto, apresenta a solução trivial para os escalares, não levando em conta que se esse sistema linear é possível e indeterminado, então, os vetores são LD. Com relação ao outro sistema linear, E10 consegue resolvê-lo adequadamente. Por meio de suas resoluções, ele chega à conclusão de que “A é LI, porque são igualados a zero, e B não”. Tal estudante mostra que se lembra da necessidade dos escalares serem nulos para o conjunto de vetores ser LI, e que quando não forem, serão LD, porém, em sua conclusão faltou especificar o que precisa ser igualado a zero para ser LI. Isso pode ter acontecido por um descuido ou por não se lembrar do termo escalar.

Com base nessa resolução, percebe-se que o estudante possui certa dificuldade em associar um sistema possível e indeterminado a vetores LD, equivocando-se ao buscar apresentar uma solução única para tal sistema linear. Todavia, mesmo com esse engano, percebe-se que E10 interiorizou alguns procedimentos na resolução, tanto para verificar se vetores são LD ou LI, quanto para resolver sistemas lineares.

Na questão 3, E10 comenta que concorda com a afirmação feita, pois “[...] se são combinação linear, automaticamente também são LI”. Percebe-se, com esta resposta, que o estudante confunde a propriedade de vetores LD, mostrando ainda não tê-la interiorizado.

Com relação à questão 4, E10 afirma que a representação gráfica apresentada corresponde a vetores LI, “porque todos tendem a zero”, o que mostra que este

estudante buscou, de algum modo, o valor zero para fazer sua afirmação, possibilitando inferir que não reconhece a representação gráfica de vetores LI.

Na quinta e última questão, E10 organizou os vetores para ser feita uma adição, e após isso calculou o determinante da matriz soma obtendo o valor 0, como se vê em seu registro escrito (Figura 33):

Figura 33 – Registro escrito da questão 5 do estudante E10

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times$$

$$1 - 1 = 0$$

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E10

Por meio desta resolução, pode-se perceber que E10 tentou chegar a uma matriz única e depois tentou utilizar o processo de usar o determinante para verificar se os vetores são LI ou LD de acordo com seu resultado, mostrando confundir-se quanto aos procedimentos que poderiam ser usados para mostrar que um conjunto de vetores é LI. Entretanto, ele não finalizou sua resposta, afirmando se o valor que achou mostraria que os vetores eram LI.

Com base nas respostas dadas por E10, pode-se inferir que ele apresenta apenas indícios da concepção ação, segundo a Teoria APOS, uma vez que possui entendimentos equivocados a respeito dos conceitos de dependência e independência linear.

5.2.11 Estudante E11

O estudante E11 considera que a disciplina de Álgebra Linear às vezes é complicada, “*com matérias que confundem um pouco*”.

Voltando-se às resoluções, E11 resolveu parcialmente o instrumento, por não se recordar de como era uma representação gráfica de vetores LI. Na primeira questão, ele comenta que vetores linearmente dependentes “[...] *dependem um do outro*” e “*linearmente independente não depende*”. Com esta resposta, nota-se que

E11 não fornece muitas evidências de como seria essa dependência, não deixando claro seu entendimento.

Na segunda questão, E11 efetua a adição dos componentes dos vetores e depois realiza a adição da soma obtida no primeiro procedimento, como é possível ver em seu registro escrito (Figura 34):

Figura 34 – Registro escrito da questão 2 do estudante E11

$A = \{(1,2), (2,4), (3,6)\}$
 $B = \{(1,1,1), (3,-1,2), (0,-4,-1)\}$
 $A = (1+2+3, 2+4+6)$
 $(6, 12)$
 $B = (1+3+0, 1-1-4, 1+2-1)$
 $(4, -5, 2)$
 Os dois possuem vetores linearmente dependentes. Porque a soma dos seus vetores é diferente de zero.

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E11

Com esta resposta, E11 talvez tenha associado, equivocadamente, algum outro conceito visto em álgebra linear, a fim de tentar chegar a uma resposta, ou recordou-se, em partes, da expressão (combinação linear com o vetor nulo) que pode ser utilizada para identificar se os vetores são LI ou LD, tanto que em sua justificativa, o estudante comenta que são linearmente dependentes “*porque a soma de seus vetores é diferente de zero*”.

Na questão 3, E11 revela que concorda com a afirmação, “*porque se eles podem ser descritos em uma combinação linear e se suas somas são iguais a zero eles são linearmente dependentes*”. Mesmo assim, percebe-se que E11 trata em sua resposta de vetores LD, e não LI, como abordado em sua afirmação. Novamente, o estudante comenta sobre a soma ser igual a zero, podendo estar se referindo a algumas partes da combinação linear com o vetor nulo. Ele pode estar fazendo também a associação com fragmentos da definição de vetores LI ou LD, em que o resultado dos escalares, multiplicados com os vetores dispostos em uma combinação

linear com o vetor nulo, tem que ser a trivial para serem LI, e se assim não for, então, são LD.

Em relação à quarta questão, E11 afirmou que não se lembrava de como resolver, o que evidencia que necessitava realizar algum procedimento para dizer se a representação gráfica correspondia ou não a vetores LI.

Na última questão, E11 calculou o determinante de cada componente do vetor, percebendo que todos resultavam em 0 (Figura 35). É possível que E11 tenha executado esse procedimento por se recordar do uso do determinante da matriz dos vetores para identificar se estes eram LI ou LD.

Figura 35 – Registro escrito da questão 5 do estudante E11

The image shows handwritten mathematical work. It consists of four rows, each with a 2x2 determinant and an equals sign followed by a calculation. The determinants are:

- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ with calculation $1 \cdot 0 - 0 = 0$
- $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ with calculation $0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 = 0$
- $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ with calculation $0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 = 0$
- $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ with calculation $0 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 0$

Below these, there are three lines of linear equations:

- $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$
- $0 + 0 + 0 + 0 = 0$
- $0 = 0$

Fonte: Resolução entregue pelo estudante E11

Com base nas respostas apresentadas, nota-se que E11 apresenta alguns conceitos equivocados com relação à dependência e independência linear, apresentando indícios de que ainda está construindo esses conceitos, não sendo possível identificar nenhuma concepção, segundo a Teoria APOS.

5.2.12 Síntese das concepções, segundo a Teoria APOS, evidenciadas nos licenciandos

Após comentar a respeito das resoluções de cada estudante e inferir suas concepções, a partir da Teoria APOS, será apresentado um quadro síntese (Quadro 10) do que foi evidenciado nos licenciandos em Matemática.

Quadro 10 – Concepções, segundo a Teoria APOS, evidenciadas nos licenciandos

Concepções	Estudantes
Concepção Ação	E1, E3, E5, E7, E8, E9
Concepção Processo	E2, E6
Somente indícios da concepção ação	E4, E10, E11

Fonte: a autora

Percebe-se que, dos onze licenciandos investigados, seis apresentaram concepção ação dos conceitos de dependência e independência linear, o que revela que eles ainda possuem uma noção elementar de tais conceitos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa iniciou-se com o objetivo geral de *investigar dificuldades e concepções referentes aos conceitos de dependência e independência linear de licenciandos em Matemática*, para responder a seguinte pergunta norteadora: existem dificuldades e concepções a respeito dos conceitos de dependência e independência linear que podem ser evidenciadas em registros escritos de licenciandos em Matemática?

Para atingir uma parte do objetivo e da pergunta foi realizado um estudo a respeito das dificuldades presentes na aprendizagem da álgebra linear, utilizando para tanto autores como Dorier e Sierpiska (2001), Dubinsky (1997), Stewart (2008), dentre outros, que possibilitou a constatação de que essas podem ter duas origens: uma relacionada a natureza da álgebra linear, abrangendo o formalismo e as diferentes linguagem que são empregadas em seu estudo, e a outra a aspectos subjetivos, correspondendo a flexibilidade cognitiva para transitar nas diferentes formas de registros, a falta de atribuição de significado para os símbolos e terminologias utilizadas na álgebra linear, a interpretação das definições dos conceitos e as estratégias que podem ser adotadas para solucionar tarefas de álgebra linear, como o caso de identificar vetores LI e LD.

A outra parte do objetivo e da problemática foi atingida por meio de um estudo a respeito da Teoria APOS, valendo-se de autores como Asiala *et al.* (1996), Dubinsky (2002), Dubinsky e McDonald (2001), dentre outros, a fim de compreender como os estudantes constroem seus conhecimentos. Sendo assim, apresentou-se uma decomposição genética dos conceitos de dependência e independência linear para descrever um possível caminho que os estudantes poderiam percorrer para construir a noção desses conceitos.

Além disso, elaborou-se um instrumento com cinco questões que foi aplicado em uma turma do segundo ano de um curso de Licenciatura em Matemática. Após a elaboração desse instrumento de coleta de dados, o mesmo foi submetido a uma análise intersubjetiva pelos membros do GEPPMat. Essa primeira análise foi importante para verificar se as questões possibilitariam atingir o objetivo da pesquisa. Todavia, uma questão gerou problema de interpretação por parte dos licenciandos (questão cinco), tendo que ser reaplicada.

Para análise do instrumento de coleta de dados adotou-se a análise textual discursiva com o intuito de auxiliar na investigação das dificuldades, e no que diz respeito às concepções utilizou-se a decomposição genética apresentada na seção 3.4 e as características da Teoria APOS.

Desse modo, a primeira parte do objetivo e da problemática foi alcançada identificando dificuldades quanto à linguagem, ao entendimento dos conceitos de dependência e independência linear, à identificação de conjuntos LI e LD e ao reconhecimento da representação gráfica. Essas dificuldades foram as categorias adotadas para realizar a análise textual discursiva.

Foi possível observar que nessas dificuldades houveram problemas com relação ao formalismo que a álgebra linear exige, alguns licenciandos recorriam a termos equivocados para justificar suas respostas, outros cometiam equívocos quanto a notação, como igualar uma combinação linear de matrizes a um número real, dentre outros. Essa questão do formalismo da álgebra linear é amplamente discutida por diversos pesquisadores, como Dorier e Sierpinska (2001), e vista como uma das causas de dificuldades dos estudantes.

Na caracterização dos licenciandos, apresentada antes de iniciar a descrição das resoluções das questões para inferir a concepção, segundo a Teoria APOS, alguns comentaram sobre o caráter abstrato, complexo da álgebra linear (E3, E4, E7, E8, E11), o que corrobora com as pesquisas já realizadas na área.

Ainda com relação as dificuldades, percebeu-se o problema em transitar em diferentes tipos de registros de representação semiótica (gráfico para simbólico) mostrando que os estudantes não associam as características de vetores LI e LD ou ainda não possuem a “flexibilidade cognitiva” necessária para transitar entre os diferentes tipos de registros.

A segunda parte do objetivo e da problemática foi alcançada, nela identificou-se que os licenciandos em Matemática apresentaram em sua maioria a concepção ação, o que leva à conclusão de que nesse primeiro curso de Álgebra Linear que participaram não construíram uma concepção objeto, de acordo com a APOS, dos conceitos de dependência e independência linear, mostrando ainda um noção elementar destes.

Além disso, pode-se relacionar as dificuldades manifestadas pelos estudantes às concepções apresentadas por eles, uma vez que muitos dos problemas

relacionados ao entendimento e à notação contribuíram para se inferir qual concepção os licenciandos apresentaram.

Entretanto, vale salientar que as dificuldades auxiliaram nas análises para inferir as concepções, mas que essas não são determinantes para tal inferência, ou seja, um estudante pode não apresentar dificuldade aparente, porém pode evidenciar ter a concepção ação, por se restringir a realizar o passo-a-passo para solucionar um problema, sem refletir sobre o que está realizando.

Observou-se também que aqueles que mais mostraram dificuldades são os mesmos que ainda possuem um concepção ação ou são os que apenas apresentaram indícios de que estão construindo os conceitos dos objetos matemáticos escolhidos para realizar essa investigação.

Vê-se com isso, que as dificuldades acabam se entrelaçando com as concepções, segundo a APOS, que podem ser manifestadas pelos estudantes. Dessa forma, com intuito de possibilitar meios que amenizem as dificuldades e contribuam para que os estudantes construam seus conhecimentos dos objetos matemáticos em sua totalidade, é necessário que se leve em conta vários fatores, como o reconhecimento da natureza abstrata da álgebra linear, e se busque refletir a respeito da forma de ensinar tal disciplina, pensando nos diversos rumos que os estudantes podem tomar na construção de seus conhecimentos.

Além dessa reflexão por parte do docente é preciso que se oportunize aos estudantes um momento de reflexão, para que eles possam ver e compreender os objetos matemáticos como um todo, não se restringindo a algumas características, propriedades e/ou a procedimentos e técnicas.

Cabe ressaltar que ao longo da pesquisa foram realizadas novas reflexões e questionamentos acerca do ensino e da aprendizagem dos conceitos abordados na disciplina de Álgebra Linear, principalmente nos cursos de Licenciatura em Matemática. Diante disso, espera-se que essa dissertação provoque inquietações que possam motivar outras pesquisas com a temática da aprendizagem da álgebra linear no Ensino Superior.

Como uma possível continuidade desse trabalho, poderia ser desenvolvida uma proposta de ensino do conteúdo dependência e independência linear que utilize os componentes do quadro de desenvolvimento curricular sugerido pela Teoria APOS.

REFERÊNCIAS

- ANDREOLI, *Análisis de los obstáculos em la construcción del concepto de Dependencia Lineal de vectores em alumnus de primer año de la universidad*. 2009. 194 f. Dissertação (Mestrado em Ciências em Matemática Educativa). Centro de Investigación y em Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional, Distrito Federal – México, 2009. Disponível em: <http://www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/andreoli_2009.pdf>. Acesso em: 20 jan. 2015.
- ASIALA, Mark, et al. A Framework for Research and Curriculum development in Undergraduate Mathematics Education. In: KAPUT, J., et al. (Eds.). *Research in Collegiate Mathematics education*, 2. Washington: American Mathematical Society, 1996, p. 1-32. Disponível em: <<http://www.math.kent.edu/~edd/Framework.pdf>>. Acesso em: 08 jul. 2014.
- AUMOULOUD, Saddo A.; SILVA, Maria José F. Engenharia didática: evolução e diversidade. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 22-52, dez. 2012. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p22/23452>> Acesso em: 07 jul. 2015.
- BIANCHINI, Barbara L.; MACHADO, Silvia D. A. Concepção de base de um espaço vetorial real propiciada por um curso de Álgebra Linear em EAD. In: FROTA, Maria C. R.; BIANCHINI, Barbara L.; CARVALHO, Ana M. F. T. (Orgs.). *Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior*. Campinas: Papirus, 2013, p. 143 – 163.
- BOLDRINI, J. L.; et al. *Álgebra Linear*. 3. Ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1986.
- BOGDAN, Roberto C.; BIKLEN Sari K. *Investigação qualitativa em educação*. Tradução: ALVAREZ, Maria J., SANTOS, Sara B., BAPTISTA, Telmo M. Portugal: Porto Editora, 1994.
- CASTELA, Cristiane A. *Divisão de números naturais: concepções de alunos de 6ª série*. 2005. 152 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.
- CARDOSO, Valdinei C. *Ensino e aprendizagem de álgebra linear: uma discussão acerca de aulas tradicionais, reversas e de vídeos digitais*. 2014. 208 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciência e Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014.

CELESTINO, Marcos R. *Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear: as pesquisas brasileiras na década de 90*. 2000. 114 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

CHAPARIN, Rogério O. *Concepções de divisibilidade de alunos do 1º ano do Ensino Médio sob o ponto de vista da Teoria APOS*. 2010. 150 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

COIMBRA, Jarbas L. *Alguns aspectos problemáticos relacionados ao ensino-aprendizagem da Álgebra Linear*. 2008. 76 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2008.

DEVOLDER, Rodrigo G. *Uma tecnologia para redação Matemática e seu uso na elaboração de um curso de Álgebra Linear*. 2012. 46 p. Dissertação (Mestrado em Ciências em Ensino da Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.

DOMINGOS, António. Teorias cognitivas e aprendizagem dos conceitos matemáticos avançados. In: *SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA*, 17, Setúbal, 2006.

DORIER, Jean-Luc. Use of history in a research work on the teaching of linear algebra. In: KATZ, V. (Ed.). *Using history to teach mathematic – An international perspective*. Washington D.C.: The Mathematical Association of America (Inc.), 2000, p. 99-110. Disponível em: <<https://archive-ouverte.unige.ch/unige:16850>> Acesso: 05 jan. 2015.

_____. Teaching Linear Algebra at University. In: International Congress of Mathematicians, 3, 2002, Pequim. *Proceedings...* Pequim: ICM, 2002, p. 875-884. Disponível em: <<http://arxiv.org/pdf/math/0305018.pdf>> Acesso: 24 jul. 2014.

DORIER, Jean-Luc, *et al.* Teaching and learning linear algebra in first year of French science university. In: SCHWANK, I. *European Research in Mathematics Educations I-Proceedings of the First Conference of the European Society in Mathematics Education*, v. 1, 1, 106-115. Osnabruek, 1999.

DORIER, Jean-Luc; SIERPINSKA, Anna. Research into the teaching and learning of linear algebra. In: HOLTON, Derek *et al.* (Eds). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: an ICMI Study*. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2001. p. 255-273.

DUBINSKY, Ed. Some thoughts on a first course in linear algebra at college level. In: CARLSON, David; et al. (Eds.). *Resources For Teaching Linear Algebra* (MAA Notes), 42, 1997. p. 85-106. Disponível em: <<http://www.math.kent.edu/~edd/LinearAlgebra.pdf>>. Acesso em: 27 jul. 2014.

_____. Using a Theory of Learning in College Mathematics Courses. *MSOR Connections*, v. 1, n. 2, p. 10-15, 2001. Disponível em: <<http://journals.heacademy.ac.uk/doi/pdf/10.11120/msor.2001.01020010>>. Acesso em: 22 jan. 2015.

_____. Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: TALL, David. *Advanced Mathematical Thinking*, Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2002, p. 95-123.

DUBINSKY, Ed., LEWIN, Philip. Reflective Abstraction and Mathematics Education: the genetic decomposition of induction and compactness. *Journal Mathematical Behavior*, v. 5, n. 1, p. 55-92, 1986. Disponível em: <<http://www.math.kent.edu/~edd/RAMED.pdf>>. Acesso em: 08 jul. 2014.

DUBINSKY, Ed., MCDONALD, Michael A. APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergrad Mathematics Education Research. In D. Holton et. (Eds.), *The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, 2001, p. 273-280. Disponível em: <<http://www.math.kent.edu/~edd/ICMIPaper.pdf>>. Acesso em: 08 jul. 2014.

DREYFUS, Tommy. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, David. *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer. 2002. p. 25-41.

ELIAS, Henrique R. *Dificuldades de estudantes de Licenciatura em Matemática na compreensão de conceitos de grupo e/ou isomorfismo de grupos*. 2012. 154 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

FARO, Sérgio D. *Os conhecimentos supostos disponíveis na transição entre o Ensino Médio e o Ensino Superior: o caso da noção de sistemas de equações lineares*. 2011. 224 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2011.

FRANÇA, Michele V. D. *Conceitos fundamentais de Álgebra Linear: uma abordagem integrando geometria dinâmica*. 2007. 138 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

GRANDE, André L. *O conceito de independência e dependência linear e os registros de representação semiótica nos livros didáticos de Álgebra Linear*. 2006. 208 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

GRAY, Eddie; *et al.* Knowledge construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, v. 38, n. 1-3, p. 111-133.1999.

HAREL, Guerson. Three principles of learning and teaching mathematics. In: DORIER, Jean-Luc (Ed). *On the teaching of linear algebra*. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 2000. p. 177-189.

HILLEL, Joel; SIERPINSKA, Anna. On one persistent mistake in linear algebra. In: Annual Meeting of International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), 18, 1994, Lisboa. *Proceedings...* Lisboa, 1994. p. 65-72.

KARRER, Monica. *Articulação entre Álgebra Linear e Geometria um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica*. 2006. 435 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

KÚ, Darly; TRIGUEROS, Maria; OKTAÇ, Asuman. Comprensión del Concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática*, México, v. 20, n.2, 2008, p. 65-89. Disponível em: <<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40512062004>>. Acesso em: 10 jul. 2014.

MARINS, Alessandra S. *Pensamento matemático avançado em tarefas envolvendo transformações lineares*. 2014. 170 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

MARTINS, Egídio R. *O uso dos softwares Winplot e Winmat no Curso de Licenciatura em Matemática: potencialidades, possibilidades e desafios*. 2013. 124 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) – Centro Universitário UNIVATES, Lajeado, 2013.

MACHADO, Silvia D. A.; BIANCHINI, Barbara L. A Álgebra Linear e a concepção de Transformação Linear construída por Estudantes de EAD. *Revemat*, 07, 2, p.69-89, 2012.

MORAES, Roque. Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva. *Ciência & Educação*, Bauru, v.9, n.2, p.191-211, 2003.

MORAES, Roque; GALIAZZI, Maria do C. *Análise textual discursiva*. Ijuí: Ed. Unijuí, 2007.

NOMURA, Joelma I. *Como sobrevivem as diferentes noções de Álgebra Linear nos cursos de Engenharia Elétrica e nas instituições*. 2008. 136 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

NOMURA, Joelma I. *Esquema Cognitivos e Mente Matemática inerentes ao objeto matemático autovalor e autovetor*. traçando diferenciais na formação do engenheiro. 2014. 349 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

OLIVEIRA, Luis C. B. de. *Como funcionam os recursos-meta em aula de Álgebra Linear*. 2005. 132 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

PADREDI, Zoraide L. do N. *As “Alavancas Meta” no discurso do professor de Álgebra Linear*. 2003. 180 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2003.

PARANHOS, Marcos M. *Parametrização e movimentação de curvas e superfícies para uso em Modelação Matemática*. 2015. 154 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

PIAGET, Jean; *et al.* *Abstração reflexionante: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais*. Tradução Fernando Becker e Petronilha Beatriz Gonçalves da Silva. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

PIAGET, Jean; GARCÍA, Rolando. *Psicogénesis e historia de la ciência*. Cidade do México: Siglo veintiuno editores, 2004.

PRADO, Eneias de A. *Alunos que completaram um curso de extensão em Álgebra Linear e suas concepções sobre base de um espaço vetorial*. 2010. 186 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

POOLE, David. *Álgebra Linear*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004.

RANGEL, Walter S. A. *Projetos de Modelagem Matemática e Sistemas Lineares: contribuições para a formação de professores de Matemática*. 2011. 139 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

SIERPINSKA, Anna. DREYFUS, Tommy. HILLEL, Joel. Evaluation of a teaching design in linear algebra: the case of linear transformations. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 19, n. 1, p. 7-40, 1999.

SILVA, Carlos E. *A noção de base de um espaço vetorial é trabalhada como “ferramenta explícita” para os assuntos de Ciência da Computação?* 2005. 93 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SILVA, Eliza S. *Transformações lineares em um curso de Licenciatura em Matemática: uma estratégia didática com uso de tecnologias digitais*. 2015. 197 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

SOARES, Natália C. *As operações com números naturais e alunos em dificuldades do 8º ano do Ensino Fundamental*. 2012. 123 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Álgebra Linear*. São Paulo: Pearson Makron Books, 2009.

STEWART, Sepideh. Understanding linear algebra concepts through the embodied, symbolic and formal words of mathematical thinking. 2008. 300f. Tese (Doctor of philosophy of science in mathematics education) – University of Auckland, Auckland, 2008. Disponível em:
<<https://researchspace.auckland.ac.nz/bitstream/handle/2292/2912/01front.pdf?sequence=1>> Acesso em: 21 maio 2015.

TALL, David. Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In: Annual Meeting of International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), Recife, 19, 1995. *Proceedings...*, Recife, 1995, p. 161-175.

TALL, David. The psychology of advanced mathematical thinking. In: _____, *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer. 2002. p. 3-21.

APÊNDICES

APÊNDICE A
DOCUMENTO ENVIADO À INSTITUIÇÃO DE ENSINO SUPERIOR

Ao ilustríssimo coordenador Prof. Dr. _____.

Comunicamos ao Colegiado de Matemática da

_____,
a realização da pesquisa *Um estudo a respeito dos conceitos de dependência e independência linear com graduandos que já cursaram Álgebra Linear*, de Mariany Layne de Souza do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática – PECEM, da Universidade Estadual de Londrina.

A pesquisa contará com a resolução de problemas matemáticos e entrevista, quando necessário. As informações coletadas serão utilizadas somente para os fins de pesquisa acadêmica e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, preservando a identidade dos participantes.

Mariany Layne de Souza

Prof. Dra. Angela Marta Pereira das Dores Savioli (Orientadora)

Londrina, ____ de dezembro de 2014.

APÊNDICE B
TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Com o objetivo de analisar e discutir as concepções de estudantes da Licenciatura em Matemática referente aos conceitos de Dependência e Independência Linear, gostaríamos de contar com sua participação, que se daria da seguinte forma: resolução de problemas matemáticos e entrevista, quando necessário, a respeito do registro escrito obtido na resolução do problema, bem como com sua autorização para analisar os registros escritos obtidos e gravar em áudio a entrevista com o intuito de esclarecer discussões e resoluções escritas.

Esclarecemos que sua participação é totalmente voluntária, podendo o (a) senhor (a): recusar-se a participar, ou mesmo desistir a qualquer momento, sem que isto acarrete qualquer ônus ou prejuízo à sua pessoa. Esclarecemos, também, que suas informações serão utilizadas somente para os fins de pesquisa acadêmica e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a sua identidade. Os registros gravados serão deletados e apagados após a utilização dos mesmos na pesquisa.

Eu, _____,
tendo sido devidamente esclarecido sobre os procedimentos da pesquisa, concordo em participar **voluntariamente** da pesquisa e autorizo por meio do presente termo a estudante **Mariany Layne de Souza**, do mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, a utilizar integralmente ou em partes meus registros escritos para fins de pesquisa acadêmica, podendo divulgá-los em publicações científicas, com a condição de que estará garantido meu direito ao anonimato.

Assinatura: _____

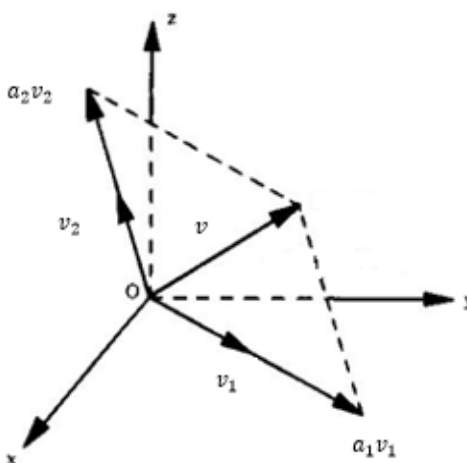
Data: _____

APÊNDICE C
CARACTERIZAÇÃO DOS ESTUDANTES

1) Dados pessoais do respondente: (Os dados preenchidos nesta página não serão divulgados. Servem apenas para esclarecimento para eventuais dúvidas do pesquisador).		
Nome:		
Endereço:		
Telefone:	E-mail:	
Data de Nascimento:	Idade:	
2) Formação Acadêmica		
<input type="checkbox"/> Outro curso de graduação:		
Ano de conclusão:	<input type="checkbox"/> Instituição Pública	<input type="checkbox"/> Instituição Privada
3) Disciplina de Álgebra Linear		
Quantidade de vezes que cursou a disciplina de Álgebra Linear: _____		
O que você achou ou está achando da disciplina de Álgebra Linear? Comente.		
4) Para uso do pesquisador		
Local:	Data:	
Código do respondente (para controle do pesquisador):		

APÊNDICE D
INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS

- 1) O que significa dizer que vetores são linearmente dependentes ou linearmente independentes?
- 2) Identifique dentre os conjuntos $A = \{(1,2), (2,4), (3,6)\}$ e $B = \{(1,1,1), (3,-1,2), (0,-4,-1)\}$ quais possuem vetores linearmente dependentes. Por quê? (Adaptado de Oliveira, 2005, p. 111).
- 3) Um aluno da disciplina de Álgebra Linear fez o seguinte comentário: “Os elementos do conjunto $A = \{(1,2,1), (1,-1,0), (2,3,4)\}$, contido em R^3 , são linearmente independentes, porque podem ser escritos como uma combinação linear”. Você concorda com essa afirmação? Justifique.
- 4) Os vetores v, v_1 e v_2 representados na figura abaixo são linearmente independentes? Justifique.



Fonte: STEINBRUCH; WINTERLE, 2009, p. 43.

- 5) Mostre que os vetores $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ são linearmente independentes. (Adaptado de BOLDRINI *et al.*, 1986, p. 130).