



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

VICTOR EZEQUIEL DE LA HOZ CORONELL

**O EFEITO CASIMIR NO ESPAÇO-TEMPO DE KERR**

VICTOR EZEQUIEL DE LA HOZ CORONELL

## **O EFEITO CASIMIR NO ESPAÇO-TEMPO DE KERR**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Edson Gonçalves.

Londrina  
2017

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Coronell, Victor Ezequiel De La Hoz Coronell.

O Efeito Casimir no espaço-tempo de Kerr / Victor Ezequiel De La Hoz Coronell Coronell. - Londrina, 2017.  
79 f. : il.

Orientador: Antonio Edson Gonçalves Gonçalves.

Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2017.

Inclui bibliografia.

1. quantum field theory in curved spacetime - Tese. 2. Casimir energy - Tese. 3. Regularization - Tese. I. Gonçalves, Antonio Edson Gonçalves. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

VICTOR EZEQUIEL DE LA HOZ CORONELL

**O EFEITO CASIMIR NO ESPAÇO-TEMPO DE KERR**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Departamento de Física da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Física.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Orientador: Prof. Dr. Antônio Edson Gonçalves.  
Universidade Estadual de Londrina – UEL

---

Prof. Dr. Rodrigo Luna  
Universidade Estadual de Londrina – UEL

---

Prof. Dr. Pedro Gomes  
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Londrina, 10 de março de 2017.

## AGRADECIMENTOS

The order of the following acknowledgments have no importance in the sense that both, the first and the last are equally important. In first place I want to thank in these brief lines to mi advisors, the professors Antonio Gonçalves and Andrey Bytsenko for their orientation in this dissertation. Also I want give a thanks to the jury evaluators: Professors Pedro Gomes and Rodrigo Luna, for their recommendations when evaluating this work. Also I want to thanks in last place but not least to the Brazilian goverment especially to entity Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), for the scholarship that I received for two years, without which would not have been possible the advance in this investigation.

V. D. CORONELL. **The Casimir effect in the Kerr spacetime**. 77 p. Senior Thesis (Master Science in Physics) – State University of Londrina, Londrina–PR, 2017.

## ABSTRACT

We research the regularized vacuum energy for a massive scalar field on Casimir cavity that is inside two parallel plates that are moving in a circular equatorial orbit in the neighborhood of Kerr spacetime. We find this energy for massless and massive case and we see that in the ZAMO limit the energy return to the Casimir in flat space for the massless field. We generalized the Sorge paper due to we find the Casimir energy for a massive scalar field and taking the limit  $m \rightarrow 0$  we returning to the Sorge result [22].

**Keywords:** Casimir effect. Kerr spacetime. Klein-Gordon equation.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Cavidade com campo escalar orbitando uma fonte gravitacional girante. 22

# SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	11
2	O EFEITO CASIMIR NO ESPAÇO-TEMPO PLANO . . . . .	13
2.1	A energia de Casimir no espaço de Minkowski . . . . .	13
2.2	Condições de contorno tipo Dirichlet para o Campo Escalar . . . . .	15
2.3	Regularização da Energia do Vácuo . . . . .	17
3	O ESPAÇO-TEMPO DE KERR E EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON EM ESPAÇOS CURVOS . . . . .	21
3.1	O espaço de Kerr . . . . .	21
3.2	Referencial Próprio . . . . .	22
3.3	O Campo Escalar no Espaço Curvo . . . . .	23
3.4	Modos Normais do Campo Escalar não Massivo . . . . .	24
3.4.1	Normalização das soluções . . . . .	24
4	TENSOR DE ENERGIA-MOMENTO NO ESPAÇO DE KERR E A ENERGIA DE CASIMIR . . . . .	27
4.1	Densidade Hamiltoniana para o nosso sistema . . . . .	27
4.2	Cálculo da energia de Casimir no espaço-tempo de Kerr . . . . .	28
4.3	Regularização da densidade de Energia . . . . .	29
5	ENERGIA DE CASIMIR PARA O CAMPO ESCALAR MASSIVO NO ESPAÇO DE KERR . . . . .	33
5.1	A equação de Klein-Gordon e regularização da energia de Casimir . . . . .	33
6	CONCLUSÕES . . . . .	39
	REFERÊNCIAS . . . . .	41
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	<b>43</b>
	APÊNDICE A – HAMILTONIANO PARA A ENERGIA DE CASIMIR EM ESPAÇO PLANO . . . . .	45
	APÊNDICE B – TOPICOS DE FUNÇÕES ESPECIAIS . . . . .	51
B.1	A função Gama . . . . .	51

B.1.1	Definição da função gama . . . . .	51
B.1.2	Equações funcionais satisfeitas pela função $\Gamma(z)$ . . . . .	52
B.2	A função zeta . . . . .	54
B.2.1	A função zeta de Riemann . . . . .	54
B.2.2	A função zeta de Hurwitz . . . . .	57
B.3	A função zeta de Epstein . . . . .	58
APÊNDICE C – ALGUMAS OBSERVAÇÕES SOBRE A SOLUÇÃO DE KERR . . . . .		59
C.1	Condições para a velocidade angular $\Omega$ . . . . .	60
APÊNDICE D – SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON NO ESPAÇO DE KERR . . . . .		63
APÊNDICE E – FORMALISMO DE TÉTRADAS . . . . .		65
E.1	Cálculo da integral de Superfície . . . . .	68
APÊNDICE F – CÁLCULO DE TENSOR ENERGIA-MOMENTO NO ESPAÇO DE KERR . . . . .		71
APÊNDICE G – ANÁLISE DIMENSIONAL . . . . .		77

# 1 INTRODUÇÃO

O efeito Casimir toma o nome do físico holandês H. Casimir que, em 1948 Publicou um documento chamado *attraction of two neutral metallic plates*, na Academia de Ciências dos Países Baixos [1]. Neste artigo, Casimir baseou seus argumentos na quantização do campo eletromagnético e mostrou que existe uma força atrativa entre duas placas condutoras neutras no vácuo impondo as condições de fronteira tipo Dirichlet para o campo dentro da cavidade. A introdução destas placas (fronteiras) altera o espectro inicial da energia do ponto zero ou energia do vácuo [24], portanto, é necessário definir a energia de Casimir do vácuo como segue

$$E_c(\partial\Gamma) = E_0(\partial\Gamma) - E_0(0), \quad (1.1)$$

onde  $\partial\Gamma$  representa as condições de contorno específicas do problema ou modelo em consideração, e o segundo termo na equação (1.1) é a energia usual do vácuo. Esta equação é uma simples subtração de dois infinitos, ou seja, para obter uma expressão finita, é necessário adicionar um método de regularização para obter uma interpretação física, portanto, a energia física de Casimir é a equação acima mais um método de regularização. Tendo já uma expressão regularizada da energia é fácil encontrar a força de Casimir que tem um alcance de  $0.3 - 0.6 \text{ nm}$ , daí o efeito Casimir é uma pequena força atrativa que surge das flutuações quânticas do vácuo entre duas placas condutoras neutras paralelas que são muito próximas, no contexto da física de partículas, o efeito Casimir para bósons tem uma força atrativa e para fermiões e repulsiva [12], e para a supersimetria não há efeito de Casimir porque, para cada bóson, existe um fermiões de forma que essas duas contribuições cancelem o efeito Casimir. Isso significa que, se existir a supersimetria, deve ser uma simetria quebrada. Desde o aparecimento do trabalho pioneiro de H. B. G. Casimir [1] uma extensa literatura sobre o assunto foi publicada, da qual citamos somente aquelas mais diretamente encaminhadas na nossa linha de estudos. Diversos trabalhos teóricos estendendo o conceito da energia de Casimir [11, 12], e diversas aplicações considerando diferentes condições de contorno planas, curvas, condições de contorno mixtas, espaços com singularidades cônicas, espaços com curvaturas positivas e negativas, como também o desenvolvimento de experimentos comprovando a existência do efeito cuja origem está nas flutuações quânticas do vácuo e desta forma proporcionando, além da comprovação experimental per se [13, 14, 15].

Neste trabalho calculamos em detalhes a densidade de energia de Casimir para um campo massivo no interior de uma cavidade retangular que está orbitando uma fonte de campo gravitacional com massa  $M$  e velocidade angular constante, no plano equatorial. Para performar este cálculo a solução aproximada e normalizadas da equação de Klein-Gordon para o campo escalar massivo e sem massa no interior da cavidade. Apresenta-se também

um cálculo detalhado na métrica de Kerr na representação não-coordenadas (Vierbeins) para o cálculo da quadrivelocidade, volume invariante e hipersuperfície tipo tempo, normal ao volume invariante. Todos necessários para o cálculo da densidade de energia de Casimir no interior da cavidade retangular e para obter uma solução que não tenha problemas de evolução.

As soluções normalizadas são utilizadas para o cálculo do valor invariante da densidade de energia, valor esperado do tensor de energia-momento, no vácuo, para um observador próprio. A densidade de energia do vácuo, no interior da cavidade, a qual obviamente é uma quantidade infinita, necessita de significado físico. Para isto é necessário regularizar este resultado a fim de se obter um valor finito para a densidade de energia de Casimir, para isto obta-se por utilizar o método de regularização via função zeta de Riemann[11], dado que é o único método livre de (quase todas) ambiguidades em espaços curvos [6, 11, 12]. Na sequência obtêm-se a densidade de energia do campo escalar sem massa e com massa.

Um dos objetivos deste trabalho foi o cálculo detalhado da densidade de energia de Casimir no interior de uma cavidade retangular, entretanto o principal objetivo e resultado foi a análise da influência da massa na densidade de energia de Casimir, ou seja, a massa pode-se ver como um regulador infra-vermelho para massas muito grandes, os resultados bem como as futuras perspectivas são discutidos no capítulo 5.

## 2 O EFEITO CASIMIR NO ESPAÇO-TEMPO PLANO

Neste capítulo calculamos a energia de Casimir no espaço-tempo plano usando como método de regularização a função zeta de Riemann. Existem diversos métodos de regularização equivalentes em espaços planos de se obter a densidade de energia do vácuo correspondente ao efeito de Casimir. Em particular utilizaremos o método da função zeta devido a que este é válido em espaços curvos. O efeito Casimir é um das mais simples e interessantes manifestações da estrutura do vácuo em teoria quântica de campos, foi primeiramente demonstrado por Casimir e verificado experimentalmente que a densidade de energia do vácuo entre duas placas condutoras, paralelas e neutras de extensão infinita é diferente de zero quando a energia do vácuo na ausência das placas é nula. Em outras palavras o efeito é devido as condições de fronteira impostas sobre a configuração do vácuo. Foi verificado também que a mudança nas condições de contorno, diferentes condições de fronteira, altera a força associada ao efeito Casimir de atrativa para repulsiva [17] sendo o caso mais simples o de uma esfera. Entretanto estas previsões são teóricas devido a que a realização de experimentos para a verificações destes comportamentos é extremamente difícil devido a realização dessa condição de fronteira.

### 2.1 A energia de Casimir no espaço de Minkowski

Primeiro encontramos a energia Casimir em espaço plano para encontrá-la mais tarde em um espaço curvo. O ponto principal aqui é considerar a Lagrangeana do campo escalar real e sua respectiva equação de movimento que resolvemos impondo as condições de fronteira tipo Dirichlet e depois procedemos a quantiza-lo. Depois disso, consideramos o tensor energia-momentum para este campo e calcular a sua densidade Hamiltoniana por meio da definição do campo  $\varphi$  e o momento conjugado  $\pi$  como operadores. A Lagrangeana para um campo escalar real possui a seguinte forma [19]

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi - m^2\varphi^2). \quad (2.1)$$

A equação de Euler-Lagrange para esta Lagrangiana fornece a equação de Klein-Gordon<sup>1</sup> para o campo  $\varphi(x)$  como segue

$$\square\varphi(x) + m^2\varphi(x) = 0, \quad (2.2)$$

O objetivo é encontrar a solução para o campo e depois encontrar o tensor energia-momento que nos fornece a informação sobre a energia do sistema. O correspondente

---

<sup>1</sup>  $\square = \partial_\mu\partial^\mu$

tensor de energia-momento para o campo escalar (2.1) é

$$\begin{aligned}\theta^{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \partial^\nu \varphi - g^{\mu\nu} \mathcal{L} \\ &= \partial^\mu \varphi \partial^\nu \varphi - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial^\alpha \varphi \partial_\alpha \varphi - m^2 \varphi^2).\end{aligned}\tag{2.3}$$

Tendo o tensor energia-momento podemos encontrar a densidade de energia dada pela componente temporal do tensor energia-momento, ou seja,

$$\begin{aligned}\theta^{00} &= \mathcal{H} = \pi^2 - \frac{1}{2} (\partial^\alpha \varphi \partial_\alpha \varphi - m^2 \varphi^2), \\ &= \frac{1}{2} \pi^2 + |\nabla \varphi|^2 + \frac{m^2}{2} \varphi^2,\end{aligned}\tag{2.4}$$

se nós integramos esta densidade de energia eq (2.4), obtemos à Hamiltoniana do sistema que é dada por

$$H = \int d^3x \theta^{00}.\tag{2.5}$$

Para encontrar a solução da equação de Klein-Gordon eq (2.2), podemos reescrevê-la como<sup>2</sup>

$$(\partial_0^2 - \nabla^2 + m^2)\varphi = 0,\tag{2.6}$$

que admite solução da forma

$$\varphi(x) = A e^{\alpha_\mu x^\mu}.\tag{2.7}$$

Se substituimos a eq (2.7) na equação de Klein-Gordon eq (2.6), obtemos a seguinte condição

$$\begin{aligned}\alpha_0^2 - (\alpha_i)^2 + m^2 &= 0, \Rightarrow \\ \alpha_0^2 &= \pm \sqrt{(\alpha_i)^2 - m^2},\end{aligned}$$

nestas circunstâncias, podemos reescrever o campo (2.7) como

$$\varphi(x) = A e^{\pm \sqrt{(\alpha_i)^2 - m^2} t} e^{-\alpha^i x^i}.\tag{2.8}$$

De modo que para obter a solução completa do campo, é necessário impor a condição de contorno tipo Dirichlet por causa de que as placas são neutras.

---

<sup>2</sup> here we use signature  $-2$  and  $\hbar = c = 1$

## 2.2 Condições de contorno tipo Dirichlet para o Campo Escalar

Antes de discutir as condições de contorno de Dirichlet, vamos primeiro apresentar O caso periódico, e depois estender a idéia à condição de contorno de Dirichlet. Impondo a condição periódica na variável  $x$  do campo eq (2.8) obtemos

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z, t) &= \varphi(x + L, y, z, t), \quad \text{condição de periodicidade,} \\ A e^{\pm\sqrt{(\alpha_i)^2 - m^2}t} e^{-\alpha^x x - \alpha^y y - \alpha^z z} &= A e^{\pm\sqrt{(\alpha_i)^2 - m^2}t} e^{-\alpha^x(x+L) - \alpha^y y - \alpha^z z}, \\ e^{-\alpha^x x} &= e^{-\alpha^x(x+L)} \Rightarrow \\ e^{-\alpha^x L} &= 1 \Rightarrow \alpha^x = i k_x = \frac{2n\pi}{L} i.\end{aligned}$$

Para obter soluções consistentes é necessário definir,

$$\alpha^y \rightarrow i k^2, \quad \alpha^z \rightarrow i k^3,$$

Isso implica a seguinte forma para o campo escalar (2.8)

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) &= e^{\pm i\sqrt{\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 + k_y^2 + k_z^2 + m^2}t} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \\ &= e^{-i\omega_n t} e^{i\left(\frac{2n\pi}{L}\right)x} e^{i(k_y y + k_z z)},\end{aligned}\tag{2.9}$$

onde

$$\omega_n = \sqrt{\left(\frac{2n\pi}{L}\right)^2 + k_y^2 + k_z^2 + m^2},\tag{2.10}$$

É a frequência do campo sujeita à condição periodica. Se considerarmos agora as condições de contorno tipo Dirichlet em (2.9), isto é,

$$\varphi(x = 0, y, z, t) = \varphi(x = L, y, z, t) = 0, \quad \text{condição de Dirichlet,}\tag{2.11}$$

Obtemos a seguinte solução

$$\varphi_n(x) = \sin\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\right] e^{-i\omega_n t} e^{i(k_y y + k_z z)},\tag{2.12}$$

onde  $k_x = n\pi/L$ , então a frequência (2.10) pode ser reescrita como

$$\omega_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + k_y^2 + k_z^2 + m^2}.\tag{2.13}$$

Esta é a frequência do campo quando considera-se as condições de Dirichlet. Precisamos da equação de campo normalizada eq (2.12), por isso é necessário considerar condições de ortogonalidade do campo [9], para esta solução consideremos as seguintes propriedades

$$\begin{aligned}\frac{1}{L} \int_0^L e^{i\frac{2\pi}{L}(n-m)x} dx &= \delta_{mn}, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(mx) dx = \pi\delta_{mn}, \\ \int_0^L \sin(nx) \cos(mx) dx &= 0, \quad \forall n, m, \in \mathbb{Z}.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Ao realizar a seguinte mudança de variável

$$x \rightarrow x' = \frac{\pi}{L}x, \Rightarrow dx \rightarrow \frac{\pi}{L}dx, \quad (2.15)$$

Pode-se reescrever a eq de ortogonalidade (2.14) como

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = L\delta_{mn}. \quad (2.16)$$

Enquanto às variáveis contínuas, usamos a representação da função delta de Dirac dada por

$$\delta^{(4)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip_\mu x^\mu}. \quad (2.17)$$

A solução (2.12) em uma base discreta é dada por

$$\varphi_n(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\right] e^{-i\omega_n t} e^{i(k_y y + k_z z)}. \quad (2.18)$$

Impondo a normalização encontramos que  $A_n = \sqrt{2/L}$ . Os fatores  $1/2\pi$  que serão introduzidos posteriormente, decorrem da definição da função delta, portanto a solução geral da equação de Klein-Gordon (2.18) pode ser escrita como uma expansão na base da função Sen numa integração nos momentos (veja quantização do campo escalar na referência [19])

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^2k}{\sqrt{2\omega_{nk}}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ &\times \left[ a_n(k) e^{i(k_y y + k_z z)} e^{-i\omega_{nk} t} + a_n^\dagger(k) e^{-i(k_y y + k_z z)} e^{i\omega_{nk} t} \right], \end{aligned} \quad (2.19)$$

Onde  $a_n(k)$  e  $a_n^\dagger(k)$  são os operadores de criação e destruição que satisfazem determinadas regras de comutação [19]. Uma notação mais adequada para o campo escalar pode ser construída definindo-se as funções

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \\ \int_0^L u_n(x) u_m(x) dx &= \delta_{nm}, \\ f_k(x) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{nk}}} e^{i(k_y y + k_z z)} e^{-i\omega_{nk} t} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{nk}}} e^{-ik_T x}. \\ k_T x &= k_0 x^0 - k_y y - k_z z, \end{aligned} \quad (2.20)$$

Desta forma a expressão para o campo  $\varphi(x)$  é

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int d^2k \left[ a_n(k) f_k(x) + a_n^\dagger(k) f_k^*(x) \right] u_n(x). \quad (2.21)$$

Para obter a Hamiltoniana usando a eq (2.5), nós podemos usar a eq (2.4) na seguinte forma

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2, \\ \mathcal{H} &= \mathcal{H}_\pi + \mathcal{H}_{\nabla\varphi} + \mathcal{H}_\varphi, \\ H &= \int d^3x \mathcal{H}_\pi + \int d^3x \mathcal{H}_{\nabla\varphi} + \int d^3x \mathcal{H}_\varphi,\end{aligned}\tag{2.22}$$

onde,

$$\mathcal{H}_\pi = \frac{1}{2}\pi^2, \quad \mathcal{H}_{\nabla\varphi} = |\nabla\varphi|^2, \quad \mathcal{H}_\varphi = \frac{m^2}{2}\varphi^2,\tag{2.23}$$

assim,

$$H_\pi = \int d^3x \frac{1}{2}\pi^2, \quad H_{\nabla\varphi} = \int d^3x |\nabla\varphi|^2, \quad H_\varphi = \int d^3x \frac{m^2}{2}\varphi^2.\tag{2.24}$$

O cálculo detalhado desta Hamiltoniana é apresentado no apêndice (A). Obtendo a seguinte energia de vácuo

$$\begin{aligned}\langle 0|H|0\rangle &= \frac{1}{2} \sum_n \int d^2k \delta^{(2)}(0) \omega_n(k), \\ \delta^{(2)}(0) &= \delta^{(2)}(k-k) \rightarrow \frac{L_y L_z}{2\pi 2\pi},\end{aligned}\tag{2.25}$$

onde  $L_y$  and  $L_z$  são as dimensões correspondentes as componentes transversais do momento, ou seja  $k_y, k_z$ . A expressão (2.25) obviamente é divergente. Para obter uma solução regular da energia do vácuo, procedemos usar alguma técnica matemática de modo a obter um resultado regular para esta energia.

### 2.3 Regularização da Energia do Vácuo

Para calcularmos a integral no espaço de momentos (número de ondas) que aparece na Eq (2.25), usamos a seguinte formula

$$\int_0^\infty d^D r f(r) = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)} \int_0^\infty dr r^{D-1} f(r),\tag{2.26}$$

onde  $r = \sqrt{x^i x^i}$   $i = 1, \dots, D$ . Utilizando este resultado na energia do vácuo (2.25) teremos

$$\begin{aligned}\langle 0|H|0\rangle &= \frac{1}{2} \frac{L_y L_z}{(2\pi)^2} \sum_n \int d^2k \omega_n(k), \\ &= \frac{1}{2} \frac{L_y L_z}{(2\pi)^2} \sum_n \int d^2k \sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + k_y^2 + k_z^2 + m^2}, \\ &= \frac{1}{2} \frac{L_y L_z}{2\pi} \sum_n \int_0^\infty dk_T k_T \sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + k_T^2 + m^2},\end{aligned}\tag{2.27}$$

A integração na variável  $k_T$  pode ser efetuada diretamente via mudança de variável, entretanto o resultado fornece um valor infinito para a energia. Para regularizar este infinito adotamos o seguinte procedimento: calculamos a integral

$$\mathcal{I} = \int_0^\infty dk_T k_T \left[ \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + k_T^2 + m^2 \right]^{-s/2}, \quad (2.28)$$

A qual retorna à eq (2.27) quando  $s = -1$ . Fazemos a substituição

$$\begin{aligned} u &= \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + k_T^2 + m^2, \\ du &= 2 k_T dk, \end{aligned} \quad (2.29)$$

obtendo

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \frac{1}{2} \int_{u(0)}^\infty du u^{-s/2} = \frac{1}{2} \left[ \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u^{-s/2+1}}{-s/2+1} - \frac{[u(0)]^{-s/2+1}}{-s/2+1} \right], \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\frac{[u(0)]^{-s/2+1}}{-s/2+1} \right], \quad \text{if } \Re s > 2, \\ &= \frac{1}{2} \frac{\left[ \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + m^2 \right]^{1-s/2}}{s/2-1} = \frac{\left[ \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + m^2 \right]^{1-s/2}}{s-2}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

e com isto a “energia do vácuo” será

$$\langle 0 | H | 0 \rangle \equiv \mathcal{E}(s) = \frac{1}{4\pi} L_y L_z \sum_n \frac{\left[ \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + m^2 \right]^{1-s/2}}{s-2}, \quad (2.31)$$

Considere o campo escalar com massa nula,  $m = 0$ , neste caso teremos

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(s) &= \frac{1}{4\pi} \frac{L_y L_z}{s-2} \sum_n \left[ \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \right]^{1-s/2}, \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{L_y L_z}{s-2} \sum_{n=1}^\infty \left( \frac{n\pi}{L} \right)^{2-s}, \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{L_y L_z}{s-2} \left( \frac{\pi}{L} \right)^{2-s} \sum_{n=1}^\infty n^{-(s-2)}, \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{L_y L_z}{s-2} \left( \frac{\pi}{L} \right)^{2-s} \zeta(s-2). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Esta expressão, Eq. (2.32), não é de fato a energia do vácuo que tentamos calcular. Isto porque para recuperarmos a expressão da energia do vácuo, é necessário fazermos nesta equação  $s = -1$ , entretanto esta expressão não está definida para este valor de  $s$  conforme a Eq. (2.30). Para isto fazemos a continuação analítica da função zeta [11] e utilizamos o apêndice (B) para calcularmos

$$\zeta(-1-2) = -\frac{B_4}{4} = -\frac{1}{4} \left( -\frac{1}{30} \right) = \frac{1}{120}, \quad (2.33)$$

Utilizando este resultado na Eq. (2.32) teremos

$$\mathcal{E}(-1) \equiv E_C(L) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{L_y L_z}{-3} \right) \left( \frac{\pi}{L} \right)^3 \frac{1}{120} = -L_y L_z \frac{\pi^2}{1440 L^3} \quad (2.34)$$

que é a energia do vácuo para o campo escalar de massa nula sujeito a condições de fronteira de Dirichlet. Podemos calcular a densidade de energia, dada por

$$\varepsilon_C(L) = \frac{1}{L_y L_z L} E_C(L) = -\frac{\pi^2}{1440 L^4}, \quad (2.35)$$

que é a densidade de energia do vácuo para o campo escalar não massivo. Podemos ver que esta energia é a metade da energia para o campo eletromagnético, isto é devido aos dois graus de liberdade do campo eletromagnético, isto é, a energia de Casimir para o campo eletromagnético é dada por

$$\varepsilon_C^{elec}(L) = -2 \frac{\pi^2}{1440 L^4} = -\frac{\pi^2}{720 L^4}. \quad (2.36)$$

Se nós calculamos a força de Casimir para o campo escalar eq (2.35), dada por  $F_C = -\frac{\partial}{\partial L} E_C$ , encontramos a pressão o força por unidade de superfície como segue

$$P_C = \frac{F_C}{L_y L_z} = -\frac{\pi^2}{480} \frac{1}{L^4}, \quad (2.37)$$

onde a sinal negativo indica que a pressão e causada por uma força atrativa. A ideia proxima e explorar a solução da equação de Klein-Gordon em espaços mais gerais devido a que desta maneira podemos encontrar um analogo da energia de Casimir mas em espaços curvos, especificamente estudaremos a solução da equação no espaço de Kerr, por isto e necessario introducir algumas propriedades importantes no próximo capítulo.



### 3 O ESPAÇO-TEMPO DE KERR E EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON EM ESPAÇOS CURVOS

O espaço-tempo de Kerr é uma solução da equação de campo de Einstein para  $R = 0$ , ou seja, é uma solução de vácuo. Esta solução representa um objeto gravitacional maciço rotativo. Nosso objetivo é encontrar a energia Casimir nas vizinhanças desta fonte rotativa, mas primeiro é necessário estudar algumas propriedades da solução Kerr antes de construir a expressão correta para a energia do vácuo.

#### 3.1 O espaço de Kerr

Consideremos um espaço curvo específico tal como o espaço de Kerr, o qual possui a seguinte métrica nas coordenadas de Boyer-Lindquist [2] com assinatura  $-2$ , é dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 + \frac{4Mar}{\Sigma} \sin^2 \theta dt d\varphi - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \frac{A \sin^2 \theta}{\Sigma} d\varphi^2, \quad (3.1)$$

onde  $a = J/M$  é o momento angular por unidade de massa e

$$\Sigma \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta \equiv r^2 + a^2 - 2Mr, \quad A \equiv (r^2 + a^2)\Sigma + 2Mra^2 \sin^2 \theta. \quad (3.2)$$

O tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  é dado pela equação (C.1) no apêndice (C). Assumimos que as placas estão se movendo numa órbita circular ( $r = \text{const}$ ) e no plano equatorial ( $\theta = \pi/2$ ) com velocidade angular  $\Omega = d\varphi/dt$ . Com estas condições a eq (3.2) toma a forma

$$\Sigma = r^2, \quad \Delta = r^2 + a^2 - 2Mr, \quad A = (r^2 + a^2)r^2 + 2Mra^2, \quad (3.3)$$

e a métrica (3.1) transforma-se de acordo a

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{4Ma}{r} dt d\varphi - \frac{A}{r^2} d\varphi^2. \quad (3.4)$$

a quadrivelocidade é definida como  $u^\mu = dx^\mu/d\tau$  onde  $\tau$  é o tempo próprio, ou seja, o tempo medido por um observador inercial. Se  $\tau$  é o tempo próprio, então podemos parametrizar com o arco de longitude  $ds$ , com isto pode-se escrever a quadrivelocidade como

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}. \quad (3.5)$$

Usando o resultado obtido na eq (3.4) e o fato que as placas estão se movimentando numa órbita equatorial circular com velocidade  $\Omega$  obtemos

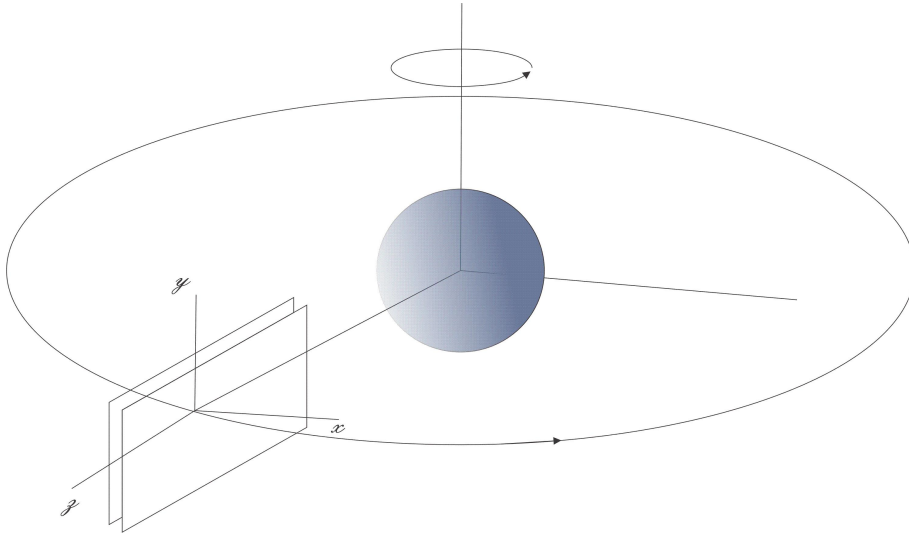
$$u^\mu = C(\Omega)(1, 0, 0, \Omega), \quad (3.6)$$

onde  $C(\Omega)$  é especificado na Eq (C.12).

### 3.2 Referencial Próprio

Nosso objetivo é estudar a energia de Casimir do campo escalar dentro de uma cavidade retangular rotando ao redor de um corpo de massa  $M$ , numa órbita circular movimentandose no plano equatorial. A ideia então é introduzir um dado sistema de coordenadas fixo na cavidade, ou em outras palavras, um sistema que esta-se comovimentando com a cavidade como mostra a figura, dado também que a caixa é retangular

Figura 1 – Cavidade com campo escalar orbitando uma fonte gravitacional girante.



Fonte: Autor.

torna-se adequado a utilização de coordenadas cartesianas no referencial próprio. Considerando a origem do sistema em uma das placas, teremos então as seguintes coordenadas

$$\begin{aligned} t' &= t, \\ r' &= r, \\ \theta' &= \theta, \\ \varphi' &= \varphi - \Omega t. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Nestas condições o tensor métrico nas novas coordenadas é calculado via

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}, \tag{3.8}$$

os elementos não nulos são

$$\begin{aligned} g'_{tt} &= C^{-2}(\Omega), \\ g'_{t\varphi} &= g_{\varphi\varphi}(\Omega - \omega_d), \\ g'_{rr} &= g_{rr}, \quad g'_{\varphi\varphi} = g_{\varphi\varphi}, \quad g'_{\theta\theta} = g_{\theta\theta}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Tendo esses novos elementos, podemos reescrever a eq métrica (3.4) usando eq (3.9) no referencial proprio como

$$ds'^2 = C^{-2}(\Omega)dt'^2 + 2\frac{A}{r^2}(\omega_d - \Omega)dt'd\varphi' - \frac{r^2}{\Delta}dr'^2 - r^2d\theta' - \frac{A}{r^2}d\varphi'^2. \quad (3.10)$$

Dado que a cavidade é retangular, podemos usar coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  no referencial proprio eq (3.10) como  $dx = r d\varphi'$ ,  $dy = -rd\theta'$ ,  $dz = dr'$ ,  $dt = dt'$  e obter a métrica em termos dessas cordenadas cartesianas, isto é  $\hat{g}_{\mu\nu}$  tal que

$$d\hat{s}^2 = C^{-2}(\Omega)dt^2 + 2\frac{A}{r^3}(\omega_d - \Omega)dt dx - \frac{A}{r^4}dx^2 - dy^2 - \frac{r^2}{\Delta}dz^2, \quad (3.11)$$

onde podemos ver que neste novo sistema de coordenadas o tensor métrico  $\hat{g}_{\mu\nu}$  possui determinante  $\det(\hat{g}_{\mu\nu}) = -1$ , daí a métrica inversa  $\hat{g}^{\mu\nu}$  é

$$\hat{g}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{A}{r^2\Delta} & (\omega_d - \Omega)\frac{A}{r\Delta} & 0 & 0 \\ (\omega_d - \Omega)\frac{A}{r\Delta} & -\frac{r^2}{\Delta}C^{-2}(\Omega) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\Delta}{r^2} \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Neste ponto, é necessário especificar que a distância entre as placas, figura (1) é muito pequena em comparação com as dimensões das placas, este fato é de importancia devido a que na seção (3.4) nos tomamos a aproximação do campo gravitacional ( $\hat{g}_{\mu\nu} \simeq const$ ) dentro da cavidade, isto garante a linearidade do campo gravitacional no sentido de obter uma solução de onda plana para o campo dentro da cavidade. É necessário introduzir o análogo da equação de Klein-Gordon (2.2) mas agora no espaço-tempo curvo de Kerr.

### 3.3 O Campo Escalar no Espaço Curvo

Considere um espaço-tempo de dimensão arbitraria  $D = d + 1$  com assinatura métrica  $(-, + \dots +)$  [20][21]. A ação funcional para O campo escalar real num espaço curvo é dada por

$$S = \int d^D x \sqrt{|g|} \frac{1}{2} [g^{\mu\nu} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi - (m^2 + \xi R) \psi^2], \quad (3.13)$$

daí a equação de movimento será

$$(\square + m^2 + \xi R) \psi = 0, \quad \square = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \partial_\nu. \quad (3.14)$$

Onde  $\xi$  é uma constante de acoplamento entre O campo escalar e curvatura. Para O caso  $\xi = 0$  é denominado acoplamento mínimo, mas no nosso caso  $R = 0$ , portanto não temos acoplamento mínimo. Também podemos comprovar que quando  $m = 0$  existe invariância conforme [21] para a ação (3.13). Nosso objetivo agora é encontrar a solução para um campo escalar sem massa no espaço-tempo Kerr, portanto é necessário resolver eq (3.14) submetida a condições de contorno tipo Dirichlet.

### 3.4 Modos Normais do Campo Escalar não Massivo

Consideremos que O campo escalar está confinado dentro das placas e além as placas estão orbitando um objeto massivo de massa  $M$  como mostra a figura (1), O nosso objetivo é solucionar a equação de Klein-Gordon no espaço de Kerr eq (3.14) para um campo escalar não massivo  $m = 0$ . Para isto consideramos a aproximação  $\hat{g}_{\mu\nu} \simeq const$  dentro da cavidade. Com estas considerações a eq (3.14) fica

$$\hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \psi = 0. \quad (3.15)$$

Esta equação pode ser resolvida usando O método de separação de variáveis apresentado no apêndice (D). A solução para O campo dentro da cavidade é

$$\psi(x, y, z, t) = N_n e^{-\omega_n t} e^{i(k_y y + k_z z)} e^{-i\beta_n x} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad (3.16)$$

onde  $N_n$  é uma constante de normalização que foi calculada na seção (3.4.1). As frequências próprias são dadas por

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{r}{\sqrt{\Delta} C^2(\Omega)} \left[ \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{\Delta}{r^2} C^2(\Omega) \left(k_y^2 + \frac{\Delta}{r^2} k_z^2\right) \right]^{1/2}, \\ b_n &= \omega_n C^2(\Omega), \\ &= \frac{r}{\sqrt{\Delta}} \left[ \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{\Delta}{r^2} C^2(\Omega) \left(k_y^2 + \frac{\Delta}{r^2} k_z^2\right) \right]^{1/2}, \\ \beta_n &= \frac{b_n A}{r^3} (\omega_d - \Omega), \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde os detalhes do cálculos são feitos no apêndice (D.13). As frequências (3.17) dependem da velocidade angular do objeto massivo  $\omega_d$  e a velocidade angular da cavidade  $\Omega$ , a qual é válida para rádios fora do horizonte da fonte massiva, ou seja ( $r > r_+$ ), veja [22] para mais detalhes. Para obter uma solução normalizada da equação (3.16) é necessário usar O produto interno da solução de Klein-Gordon em espaços curvos a qual é feita na próxima seção.

#### 3.4.1 Normalização das soluções

Para a normalização das soluções  $\psi_n$  da equação de Klein-Gordon, podemos tomar O produto escalar definido por [21]

$$(\psi_n, \psi_m) = i \int_S [(\partial_\mu \psi_n) \psi_m^* - \psi_n (\partial_\mu \psi_m^*)] \sqrt{\hat{g}_S} n^\mu dS. \quad (3.18)$$

O problema neste produto é a escolha da superfície  $S$  para não ter problemas de causalidade. Para isto nos escolhemos uma superfície tipo espaço, portanto a métrica induzida na superfície é dada por  $\hat{g}_S = -\hat{g}/\hat{g}_{00}$ ,  $n^\mu$  é um vetor tipo tempo dirigido ao futuro ortogonal

a  $S$  [22]. Daí  $dS = dx dy dz$ , veja O apêndice (E) para mais detalhes. Desta forma obtemos

$$n^\mu = \left[ \frac{1}{r} \sqrt{\frac{A}{\Delta}}, \sqrt{\frac{A}{\Delta}} (\omega_d - \Omega), 0, 0 \right], \quad (3.19)$$

veja eq (E.15), com isto a condição de ortogonalidade fornece

$$(\psi_n, \psi_m) = \delta^{(2)}(\vec{k}_{\perp,n} - \vec{k}_{\perp,m}) \delta_{mn}, \quad (3.20)$$

cuja constante de normalização é

$$N_n^2 = \frac{1}{(2\pi)^2 L \omega_n} \frac{1}{r} \sqrt{\frac{A}{\Delta}} C^{-3}(\Omega). \quad (3.21)$$

Com isto temos determinada completamente a solução para o campo escalar (3.16), procedemos então a calcular a densidade Hamiltoniana análoga a (2.4) para assim calcular o estado de vácuo do sistema. Devido a problemas no estado de vácuo do sistema, usamos a função  $\zeta$  de Riemann como método de regularização, como fizemos para o espaço plano no capítulo (2), desta forma encontramos uma expressão regular para a energia de Casimir.



## 4 TENSOR DE ENERGIA-MOMENTO NO ESPAÇO DE KERR E A ENERGIA DE CASIMIR

Estabelecemos aqui a relação entre os capítulos (2) e (3), isto é, neste capítulo calculamos a energia de Casimir para um campo massivo e não massivo dentro da cavidade de Casimir, veja figura (1). Para o caso massivo é necessário introduzir a continuação analítica da função zeta Epstein-Hurwitz e também damos argumentos físicos para desprezar alguns termos sem significância física.

### 4.1 Densidade Hamiltoniana para o nosso sistema

Agora, procedemos a encontrar o tensor energia momento do sistema em consideração. Tendo nossa solução para o campo (3.16) onde a constante de normalização  $N_n$  é dada por (3.21), podemos calcular a densidade Hamiltoniana, isto é, a componente temporal do tensor de energia momento análogo a (2.3). Portanto, o tensor energia momento para O campo escalar não massivo é dado por

$$\theta_{00} = \partial_0 \psi_n \partial_0 \psi_n^* - \frac{1}{2} \hat{g}_{00} (\hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \psi_n \partial_\nu \psi_n^*), \quad (4.1)$$

onde  $\psi_n$  e  $\psi_n^*$  são especificados na equação (3.16). Se calcularmos a densidade Hamiltoniana eq (4.1) (veja o apêndice (F para mais detalhes) encontramos a seguinte expressão

$$\theta_{00} = \frac{1}{2} N_n^2 \left[ \mathcal{F}_n \sin^2 \left( \frac{n\pi}{L} x \right) + \mathcal{G}_n \cos^2 \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \right], \quad (4.2)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n &= \omega_n^2 + \frac{\omega_n}{b_n} \left( k_y^2 + \frac{\Delta}{r^2} k_z^2 \right), \\ \mathcal{G}_n &= \frac{\omega_n^2 r^2}{b_n^2 \Delta} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Tendo calculado a densidade Hamiltoniana, nosso passo a seguir é calcular a energia de Casimir. Desenvolvemos esses argumentos na próxima seção.

## 4.2 Cálculo da energia de Casimir no espaço-tempo de Kerr

A densidade de energia do vácuo para o campo escalar dentro da cavidade medida pelo observador de comovimento  $\hat{u}$  na Eq (3.6), é [22]

$$\langle \varepsilon_{vac} \rangle = \frac{1}{V_p} \int_V dx dy dz \sqrt{g_S} \hat{u}^\mu \hat{u}^\nu \langle 0 | T_{\mu\nu} | 0 \rangle, \quad (4.4)$$

onde  $V_p = \int_V dx dy dz \sqrt{g_S}$  é o volume próprio da cavidade medido pelo observador de comovimento, e  $g_S$  é a métrica induzida na superfície.

$$\langle \varepsilon_{vac} \rangle = \frac{C^2(\Omega)}{L} \int_0^L dx \sum_n \int d^2 k_T \theta_{00}(\psi_n, \psi_n^*), \quad (4.5)$$

substituindo eq (4.2) na eq (4.5) tornou-se

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{vac} \rangle &= \frac{C^2(\Omega)}{L} \int_0^L dx \sum_n \int d^2 k_T \frac{1}{2} N_n^2 \left[ \mathcal{F}_n \sin^2 \left( \frac{n\pi}{L} x \right) + \mathcal{G}_n \cos^2 \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \right] \\ &= \frac{C^2(\Omega)}{L} \sum_n \int d^2 k_T \frac{1}{2} N_n^2 \int_0^L dx \left[ \mathcal{F}_n \sin^2 \left( \frac{n\pi}{L} x \right) + \mathcal{G}_n \cos^2 \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \right], \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{vac} \rangle &= \frac{C^2(\Omega)}{L} \sum_n \int d^2 k_T \frac{1}{2} N_n^2 \left[ \mathcal{F}_n \frac{L}{2} + \mathcal{G}_n \frac{L}{2} \right], \\ &= \frac{C^2(\Omega)}{4} \sum_n \int d^2 k_T N_n^2 [\mathcal{F}_n + \mathcal{G}_n], \end{aligned} \quad (4.7)$$

introduzindo a constante de normalização dada pela eq (3.21), obtemos

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{vac} \rangle &= \frac{C^2(\Omega)}{4} \sum_n \int d^2 k_T \left[ \frac{1}{(2\pi)^2 L \omega_n} \frac{1}{r} \sqrt{\frac{A}{\Delta}} C^{-3}(\Omega) \right] [\mathcal{F}_n + \mathcal{G}_n], \\ &= \frac{C^{-1}(\Omega)}{4} \frac{1}{(2\pi)^2 L r} \sqrt{\frac{A}{\Delta}} \sum_n \int d^2 k_T \frac{1}{\omega_n} [\mathcal{F}_n + \mathcal{G}_n], \\ &= \frac{C^{-1}(\Omega)}{4} \frac{1}{(2\pi)^2 L r} \sqrt{\frac{A}{\Delta}} \sum_n \int d^2 k_T \frac{1}{\omega_n} \left[ \omega_n^2 + \frac{\omega_n}{b_n} \left( k_y^2 + \frac{\Delta}{r^2} k_z^2 \right) + \frac{\omega_n^2 r^2}{b_n^2 \Delta} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Agora, pode-se usar a eq (F.11) para simplificar a eq (4.8)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n + \mathcal{G}_n &= \omega_n^2 + \frac{\omega_n}{b_n} \left( k_y^2 + \frac{\Delta}{r^2} k_z^2 \right) + \frac{\omega_n^2 r^2}{b_n^2 \Delta} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2, \\ &= \omega_n^2 + \frac{\omega_n}{\omega_n C^2(\Omega)} \left( k_y^2 + \frac{\Delta}{r^2} k_z^2 \right) + \frac{\omega_n^2 r^2}{\omega_n^2 C^4(\Omega) \Delta} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2, \\ &= \omega_n^2 + C^{-2}(\Omega) \left( k_y^2 + \frac{\Delta}{r^2} k_z^2 \right) + C^{-4}(\Omega) \frac{r^2}{\Delta} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2, \\ &= \omega_n^2 + C^{-4}(\Omega) \frac{r^2}{\Delta} \underbrace{\left[ \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + C^2(\Omega) \frac{\Delta}{r^2} \left( k_y^2 + \frac{\Delta}{r^2} k_z^2 \right) \right]}_{\omega_n^2 \text{ see (D.13)}}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\mathcal{F}_n + \mathcal{G}_n = 2\omega_n^2.$$

E obter o valor médio da energia de Casimir dado por

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon_{vac} \rangle &= \frac{C^{-1}(\Omega)}{A} \frac{1}{(2\pi)^2 L r} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_n \int d^2 k_T \frac{1}{\omega_n} 2\omega_n', \\ \langle \varepsilon_{vac} \rangle &= \frac{C^{-1}(\Omega)}{2} \frac{1}{(2\pi)^2 L r} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_n \int d^2 k_T \omega_n(k).\end{aligned}\quad (4.10)$$

Se olhamos a forma explícita de (4.10), podemos verificar que corresponde a uma quantidade divergente. Portanto, para obter uma energia regular, usamos a função zeta de Riemann (B) para obter uma expressão finita da energia. Desta forma na próxima seção nós calculamos a energia regularizada de Casimir fazendo uso desta ferramenta matemática.

### 4.3 Regularização da densidade de Energia

A energia de densidade que aparece em (4.10) é divergente na soma sobre  $n$  e na integral. Para calcular um valor finito para a energia do vácuo consideramos a extensão da integral para  $s$  dimensões e a continuação analítica da soma para isso, seja

$$\sum_n \int d^2 k_T \omega_n = \sum_n \int d^2 k_T C^{-1}(\Omega) \left[ \frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega) \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + k_y^2 + \frac{\Delta}{r^2} k_z^2 \right]^{1/2}, \quad (4.11)$$

nós realizamos a seguinte mudança de variável para simplificar os cálculos, ou seja

$$\begin{aligned}\tilde{k}_y &= k_y, \\ \tilde{k}_z &= \frac{\sqrt{\Delta}}{r} k_z, \text{ then;} \\ \tilde{k}_T^2 &= \tilde{k}_y^2 + \tilde{k}_z^2, \quad d^2 \tilde{k}_T = d\tilde{k}_y d\tilde{k}_z, \text{ therefore,} \\ d^2 k_T &= dk_y dk_z = \frac{r}{\sqrt{\Delta}} d\tilde{k}_y d\tilde{k}_z = \frac{r}{\sqrt{\Delta}} d^2 \tilde{k}_T,\end{aligned}\quad (4.12)$$

substituindo a eq (4.12) na eq (4.11)

$$\sum_n \int d^2 k_T \omega_n = \frac{r}{\sqrt{\Delta}} \sum_n \int d^2 \tilde{k}_T C^{-1}(\Omega) \left[ \frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega) \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + \tilde{k}_T^2 \right]^{1/2}, \quad (4.13)$$

o primeiro passo é usar a formula dada na equação (2.26), portanto  $d^2 \tilde{k}_T = 2\pi \tilde{k}_T d\tilde{k}_T$ , desta forma tomando só os numeros de onda positivos, então  $d^2 \tilde{k}_T = \frac{2\pi}{4} \tilde{k}_T d\tilde{k}_T = d^2 \tilde{k}_T = \frac{\pi}{2} \tilde{k}_T d\tilde{k}_T$ . Outro ponto importante é que em vez de calcular (4.13) nós calculamos a seguinte integral

$$\mathcal{I}_n(s) = \frac{r}{\sqrt{\Delta}} \frac{\pi}{2} \sum_n \int \tilde{k}_T d\tilde{k}_T C^{-1}(\Omega) \left[ \frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega) \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + \tilde{k}_T^2 \right]^{-s/2}, \quad (4.14)$$

que torna-se em (4.13) para o caso quando  $s = -1$ , portanto

$$\begin{aligned}
u &= \frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega) \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + \tilde{k}_T^2, \\
du &= 2\tilde{k}_T d\tilde{k}_T, \\
\mathcal{I}_n(s) &= \frac{r}{\sqrt{\Delta}} \pi C^{-1}(\Omega) \int_{u(0)}^{\infty} du u^{-s/2} = \pi \left[ \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u^{-s/2+1}}{-s/2+1} - \frac{(u(0))^{-s/2+1}}{-s/2+1} \right], \\
&= -\frac{r}{\sqrt{\Delta}} \pi C^{-1}(\Omega) \frac{(u(0))^{-s/2+1}}{-s/2+1}, \quad \text{if } \Re s > 2, \\
&= \frac{r}{\sqrt{\Delta}} \pi C^{-1}(\Omega) \frac{\left[ \frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega) \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \right]^{1-s/2}}{s/2-1},
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
\sum_n \mathcal{I}_n(s) &= \frac{r}{\sqrt{\Delta}} \pi C^{-1}(\Omega) \frac{\left[ \frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega) \right]^{1-s/2}}{s/2-1} \sum_n \left( \frac{n\pi}{L} \right)^{2-s} \\
&= \frac{r}{\sqrt{\Delta}} \pi C^{-1}(\Omega) \frac{\left[ \frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega) \right]^{1-s/2}}{s/2-1} \left( \frac{\pi}{L} \right)^{2-s} \sum_{n=1}^{\infty} n^{(2-s)} \\
&= \frac{r}{\sqrt{\Delta}} \pi C^{-1}(\Omega) \frac{\left[ \frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega) \right]^{1-s/2}}{s/2-1} \left( \frac{\pi}{L} \right)^{2-s} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(s-2)} \\
&= \frac{r}{\sqrt{\Delta}} \pi C^{-1}(\Omega) \frac{\left[ \frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega) \right]^{1-s/2}}{s/2-1} \left( \frac{\pi}{L} \right)^{2-s} \zeta(s-2)|_{s=-1} \\
&= \frac{r}{\sqrt{\Delta}} \pi C^{-1}(\Omega) \frac{\left[ \frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega) \right]^{3/2}}{-3/2} \left( \frac{\pi}{L} \right)^3 \underbrace{\zeta(-3)}_{\frac{1}{120}} \\
\sum_n \mathcal{I}_n(s) &= -\frac{\pi^4 r^4}{180 \Delta^2 C^4(\Omega) L^3},
\end{aligned} \tag{4.16}$$

onde  $\zeta(s)$  é a função zeta de Riemann, veja o apêndice (B) para mais detalhes. Se nós agora, substituimos (4.16) na Eq (4.10), obtemos a energia Casimir regularizada no espaço Kerr, que é dada por

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon_{vac} \rangle |_{reg} &= \left( \frac{C^{-1}(\Omega)}{2} \frac{1}{(2\pi)^2 L} \frac{1}{r} \sqrt{\frac{A}{\Delta}} \right) \left( -\frac{\pi^4 r^4}{180 \Delta^2 C^4(\Omega) L^3} \right) \\
\langle \varepsilon_{vac} \rangle |_{reg} &= -\frac{\pi^2 r^3}{1440 \Delta^2 L^4 C^5(\Omega)} \sqrt{\frac{A}{\Delta}}.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Aqui  $L$  é apenas o comprimento da coordenada, ou seja, não físico. A fim de ter uma descrição física da energia usamos o comprimento proprio da cavidade  $L_p$  [4], isto é

$$L_p = C(\Omega) \frac{\sqrt{\Delta}}{r} L, \tag{4.18}$$

desta forma, se nós substituimos a eq (4.18) na eq (4.19) obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \varepsilon_{vac} \rangle |_{reg} &= -\frac{\pi^2 r^3}{1440 \Delta^2 \left( \frac{r L_p}{C(\Omega \sqrt{\Delta})} \right)^4 C^5(\Omega)} \sqrt{\frac{A}{\Delta}}, \\
&= -\frac{\pi^2}{1440 L_p^4} \sqrt{\frac{A}{\Delta r^2}} C^{-1}(\Omega), \\
&= -\frac{\pi^2}{1440 L_p^4} \sqrt{\frac{A}{\Delta r^2}} \left[ \frac{\Delta r^2}{A} \left( 1 - \frac{A^2}{\Delta r^4} (\Omega - \omega_d)^2 \right) \right]^{1/2}, \\
\langle \varepsilon_{vac} \rangle |_{reg} &= -\frac{\pi^2}{1440 L_p^4} \left[ 1 - \frac{A^2}{\Delta r^4} (\Omega - \omega_d)^2 \right]^{1/2},
\end{aligned} \tag{4.19}$$

esta é a energia do vácuo de Casimir regularizada em termos do comprimento próprio da cavidade. Para o caso do observador sem momento angular (ZAMO do inglês zero angular momentum observer) tem-se  $\Omega = \omega_d$ , a energia Casimir no espaço Kerr toma a forma da energia Casimir no espaço plano (2.35). Este resultado é de acordo com o trabalho de Sorge [22] que é uma extensão da energia Casimir em espaço plano. Podemos argumentar aqui que a dinâmica imposta pelo espaço-tempo Kerr é que, neste caso, a energia eq (4.19) depende das velocidades angulares das placas e do objeto massivo. Agora podemos fazer a seguinte pergunta. Como mudamos nossa energia se considerarmos agora um campo escalar massivo?. No próximo capítulo encontramos uma expressão para a energia de um campo escalar massivo. Para este caso, procederemos do mesmo modo que fizemos até agora.



## 5 ENERGIA DE CASIMIR PARA O CAMPO ESCALAR MASSIVO NO ESPAÇO DE KERR

Permitimos estudar agora nesta seção o caso massivo no contexto de Kerr, a fim de Generalizar o trabalho feito por Sorge. A sutileza aqui é a introdução da continuação analítica da função zeta de Epstein-Hurwitz que aparece pelo termo de massa do campo.

### 5.1 A equação de Klein-Gordon e regularização da energia de Casimir

Nosso objetivo neste capítulo é calcular a energia de Casimir no espaço-tempo de Kerr para um campo escalar massivo localizado entre duas placas paralelas. Tomando a equação de Klein-Gordon (3.14) com a aproximação  $\hat{g}_{\mu\nu} \simeq const$  dentro da cavidade, obtemos

$$(\hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + m^2)\psi = 0, \quad (5.1)$$

Um cálculo semelhante foi feito no Apêndice (D). Se você proceder da mesma maneira neste apêndice, quando incluímos a massa  $m$ , achamos que a frequência é agora

$$\omega_n(k) = \frac{r}{\sqrt{\Delta}} C^{-2}(\Omega) \sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{\Delta}{r^2} C^2(\Omega) \left(k_y^2 + \frac{\Delta}{r^2} k_z^2 + m^2\right)}. \quad (5.2)$$

A energia de Casimir pode ser calculada considerando a diferença entre a energia do vácuo com as condições de contorno impostas ao sistema e a energia do vácuo sem condição de contorno, ou seja,

$$\varepsilon_{cas} = \varepsilon_{vac}(\Gamma) - \varepsilon_{vac}(0), \quad (5.3)$$

onde  $\Gamma$  representa as condições de contorno especificadas no problema. Para o nosso caso, o valor médio da energia de Casimir com condições de contorno, análogamente a (4.10), torna-se

$$\langle \varepsilon_{vac}(\Gamma) \rangle = \frac{C^{-1}(\Omega)}{2} \frac{1}{(2\pi)^2 L r} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_n \int d^2 k_T \omega_n(k). \quad (5.4)$$

Essa energia é divergente na soma e integral, por isso é necessário introduzir algum método matemático para encontrar uma energia regular. Nós consideramos primeiro o seguinte

$$\sum_n \int d^2 k_T \omega_n(k) = \sum_n \int d^2 k_T C^{-1}(\Omega) \left[ \frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + k_y^2 + \frac{\Delta}{r^2} k_z^2 + m^2 \right]^{1/2}, \quad (5.5)$$

fazendo a seguinte mudança de variável, temos

$$\begin{aligned}\tilde{k}_y &= k_y, \\ \tilde{k}_z &= \frac{\sqrt{\Delta}}{r} k_z, \text{ then;} \\ \tilde{k}_T^2 &= \tilde{k}_y^2 + \tilde{k}_z^2, \quad d^2 \tilde{k}_T = d\tilde{k}_y d\tilde{k}_z, \text{ therefore,} \\ d^2 k_T &= dk_y dk_z = \frac{r}{\sqrt{\Delta}} d\tilde{k}_y d\tilde{k}_z = \frac{r}{\sqrt{\Delta}} d^2 \tilde{k}_T,\end{aligned}\tag{5.6}$$

substituindo esses resultados na equação (5.5), obtemos

$$\sum_n \int d^2 k_T \omega_n(k) = \frac{r}{\sqrt{\Delta}} \sum_n \int d^2 \tilde{k}_T C^{-1}(\Omega) \left[ \frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega) \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + \tilde{k}_T^2 + m^2 \right]^{1/2}.\tag{5.7}$$

a qual é divergente. Para regularizar esta quantidade, procedemos da seguinte forma: O primeiro passo é usar (2.26) na integral sobre o número de onda  $\tilde{k}_T$ , veja a seção anterior para mais detalhes e, depois, usamos a função zeta de Riemann para regularizar a soma na eq (5.7). Portanto, seguindo nossa discussão, obtemos

$$\sum_n \int d^2 k_T \omega_n(k) = \frac{r}{\sqrt{\Delta}} \frac{\pi}{2} \sum_n \int \tilde{k}_T d\tilde{k}_T C^{-1}(\Omega) \left[ \frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega) \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + \tilde{k}_T^2 + m^2 \right]^{1/2},\tag{5.8}$$

por simplicidade definamos a seguinte função

$$\mathcal{I}_n(s) = \frac{r}{\sqrt{\Delta}} \frac{\pi}{2} \sum_n \int \tilde{k}_T d\tilde{k}_T C^{-1}(\Omega) \left[ \frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega) \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + \tilde{k}_T^2 + m^2 \right]^{-s/2},\tag{5.9}$$

que torna-se a (5.8) para o caso  $s = -1$ . Neste ponto podemos fazer a seguinte mudança de variável

$$u = \frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega) \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + \tilde{k}_T^2 + m^2,$$

$$du = 2\tilde{k}_T d\tilde{k}_T,$$

$$\mathcal{I}_n(s) = \frac{r}{\sqrt{\Delta}} \pi C^{-1}(\Omega) \int_{u(0)}^{\infty} du u^{-s/2} = \pi \left[ \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u^{-s/2+1}}{-s/2+1} - \frac{(u(0))^{-s/2+1}}{-s/2+1} \right],\tag{5.10}$$

$$= -\frac{r}{\sqrt{\Delta}} \pi C^{-1}(\Omega) \frac{(u(0))^{-s/2+1}}{-s/2+1}, \text{ if } \Re s > 2,$$

$$= \frac{r}{\sqrt{\Delta}} \pi C^{-1}(\Omega) \frac{\left[ \frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega) \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + m^2 \right]^{1-s/2}}{s/2-1},$$

$$\begin{aligned}\sum_n \mathcal{I}_n(s) &= \frac{r}{\sqrt{\Delta}} \pi C^{-1}(\Omega) \sum_n \frac{\left[ \frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega) \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 n^2 + m^2 \right]^{1-s/2}}{s/2-1}, \\ &= \frac{r}{\sqrt{\Delta}} \pi C^{-1}(\Omega) \sum_n \frac{\left[ \frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega) \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \left( n^2 + \frac{\Delta}{r^2} C^2(\Omega) \left( \frac{L}{\pi} \right)^2 m^2 \right) \right]^{1-s/2}}{s/2-1},\end{aligned}\tag{5.11}$$

$$\sum_n \mathcal{I}_n(s) = \frac{r}{\sqrt{\Delta}} \pi C^{-1}(\Omega) \frac{\left[ \frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega) \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 \right]^{1-s/2}}{s/2-1} \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + \alpha^2)^{-(s/2-1)},$$

onde

$$\alpha = \frac{\sqrt{\Delta} L}{r \pi} C(\Omega) m. \quad (5.12)$$

Para realizar a soma eq (5.11), usamos a função “Epstein-Hurwitz”[24], que têm a forma

$$Z(l, \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 + \alpha^2)^{-l}, \quad \Re l > 1/2, \quad (5.13)$$

Comparando com nosso resultado, e usando a continuação analítica [24] em eq (5.13) torna-se

$$Z(s/2 - 1, \alpha) = -\frac{1}{2}\alpha^{2-s} + \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{s-3}\Gamma(\frac{s}{2}-1)} \left[ \Gamma\left(\frac{s}{2} - \frac{3}{2}\right) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi\alpha)^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} K_{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}}(2n\pi\alpha) \right]. \quad (5.14)$$

onde  $K_\nu$  é a função de Bessel modificada. Portanto, nossa energia em (5.4) produz

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{vac}(\Gamma) \rangle &= \frac{C^{-1}(\Omega)}{2} \frac{1}{(2\pi)^2 L r} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_n \mathcal{I}_n(s)|_{s=-1}, \\ &= \frac{C^{-1}(\Omega)}{2} \frac{1}{(2\pi)^2 L r} \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \frac{\pi r}{\Delta} C^{-1}(\Omega) \frac{[\frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega)]^{3/2}}{-3/2} \left(\frac{\pi}{L}\right)^3 Z(-3/2, \alpha), \\ &= -\frac{\pi^2 r^3}{12\Delta^2 C^5(\Omega) L^4} \sqrt{\frac{A}{\Delta}} Z(-3/2, \alpha). \end{aligned} \quad (5.15)$$

A forma explícita da energia do vácuo com condições de contorno usando eq (5.14) é,

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{vac}(\Gamma) \rangle &= -\frac{\pi^2 r^3}{12\Delta^2 C^5(\Omega) L^4} \sqrt{\frac{A}{\Delta}} \\ &\times \left( -\frac{1}{2}\alpha^3 + \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{-4}\Gamma(-\frac{3}{2})} \left[ \Gamma(-2) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi\alpha)^{-2} K_{-2}(2n\pi\alpha) \right] \right) \end{aligned} \quad (5.16)$$

usando os resultados de Elizalde [24] encontramos o valor médio da densidade de energia de Casimir (5.3), dada por

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{cas} \rangle &= \langle \varepsilon_{vac}(\Gamma) \rangle - \langle \varepsilon_{vac}(0) \rangle \\ &= -\frac{\pi^2 r^3}{12\Delta^2 LC^5(\Omega)} \sqrt{\frac{A}{\Delta}} \frac{1}{L^3} \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{\Delta} LC(\Omega)}{\pi r} m \right)^3 \right. \\ &\quad + \frac{\sqrt{\pi}}{2 \left( \frac{\sqrt{\Delta} LC(\Omega)}{r\pi} m \right)^{-4} \Gamma(-\frac{3}{2})} \\ &\quad \times \left. \left( \Gamma(-2) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi\alpha)^{-2} K_{-2}(2n\pi\alpha) \right) \right] \\ &\quad - \left( -\frac{\pi^2 r^3}{12\Delta^2 LC^5(\Omega)} \sqrt{\frac{A}{\Delta}} \frac{1}{L^3} \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{\Delta} LC(\Omega)}{\pi r} m \right)^3 + \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(-2)}{2 \left( \frac{\sqrt{\Delta} C(\Omega)}{\pi r} m \right)^3 \Gamma(-\frac{3}{2})} \right] \right). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Sabemos que o efeito Casimir depende do parâmetro regulador  $L$ , portanto, os termos independentes de  $L$  não têm significado físico, o termo  $\Gamma(-2)$  que é acompanhado de  $L$  fornece uma energia infinita que está relacionada com a energia do vácuo sem condições de contorno, portanto, este termo é removido devido a pertencer aos modos zero sobre a integral dos momentos. Portanto, simplificando a expressão em (5.17) e usando o fato de que  $\Gamma(-3/2) = 4\sqrt{\pi}/3$ , obtemos energia fisicamente relevante

$$\langle \varepsilon_{cas} \rangle = -\frac{\pi^2 r^3}{8\Delta^2 L^4 C^5(\Omega)} \sqrt{\frac{A}{\Delta}} \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi)^{-2} \alpha^2 K_2(2n\pi\alpha). \quad (5.18)$$

A equação (5.18) é a expressão correta para a energia de um campo escalar massivo dentro de uma cavidade orbitando um objeto massivo que pode ser descrito pela métrica de Kerr, podemos ver que isso tem uma forma similar da equação do caso não massivo (4.17) multiplicada por um fator corretivo que depende da massa. Nós podemos tomar o limite para  $m \rightarrow 0$ . Desta forma podemos expandir  $K_2(x)$  para pequenos argumentos, veja [26] para mais detalhes, a energia na eq (5.18) torna-se

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow 0} \langle \varepsilon_{cas} \rangle &= -\frac{\pi^2 r^3}{8\Delta^2 L^4 C^5(\Omega)} \sqrt{\frac{A}{\Delta}} \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi)^{-2} \alpha^2 \frac{1}{2} \Gamma(2) \left( \frac{2n\pi\alpha}{2} \right)^{-2}, \\ &= -\frac{\pi^2 r^3}{16\Delta^2 L^4 C^5(\Omega)} \sqrt{\frac{A}{\Delta}} \pi^{-4} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4}, \\ &= -\frac{r^3}{16\pi^2 \Delta^2 L^4 C^5(\Omega)} \sqrt{\frac{A}{\Delta}} \zeta(4), \\ &= -\frac{r^3}{16\pi^2 \Delta^2 L^4 C^5(\Omega)} \sqrt{\frac{A}{\Delta}} \frac{\pi^4}{90}, \\ &= -\frac{\pi^2 r^3}{1440\Delta^2 L^4 C^5(\Omega)} \sqrt{\frac{A}{\Delta}}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

esta é a mesma expressão para o caso do campo escalar não massivo eq (4.17), se colocarmos eq (5.19) em termos do comprimento próprio eq (4.18), obtemos

$$\lim_{m \rightarrow 0} \langle \varepsilon_{cas} \rangle = -\frac{\pi^2}{1440L_p^4} \left[ 1 - \frac{A^2}{\Delta r^4} (\Omega - \omega_d)^2 \right]^{1/2}, \quad (5.20)$$

esta é a mesma energia para o campo escalar não massivo confinado na cavidade de Casimir a qual esta rotando ao redor de uma fonte gravitacional. Se nós associamos a massa com o comprimento, ou seja  $m = l_0^{-1}$ , veja o apêndice (G) para mais detalhes, então para o limite  $m \rightarrow 0$  temos  $l_0 \rightarrow \infty$ , se nós trocamos  $m$  por  $l_0^{-1}$  na equação (5.18) obtemos o mesmo resultado obtido na equação (5.20) tomando o limite  $l_0 \rightarrow \infty$ , desta forma  $m$  é um regulador infravermelho devido a que leva em conta longo comprimentos de onda, isto é equivalente a ter baixas energias. Daí a eq (5.20) é válida para baixas energias.

Agora, nós levamos o limite de massa grande, isto é, usando o comportamento assintótico da função Bessel para grandes argumentos. Isto é,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \varepsilon_{cas} \rangle &= -\frac{\pi^2 r^3}{8\Delta^2 L^4 C^5(\Omega)} \sqrt{\frac{A}{\Delta}} \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi)^{-2} \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha^2 K_2(2n\pi\alpha), \\ &= -\frac{\pi^2 r^3}{8\Delta^2 L^4 C^5(\Omega)} \sqrt{\frac{A}{\Delta}} \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi)^{-2} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\alpha^2}{\sqrt{4n\alpha}} e^{-2n\pi\alpha} \left( 1 + \frac{15}{16n\pi\alpha} + \dots \right). \end{aligned} \quad (5.21)$$

Como resultado desta expressão observa-se que a densidade de energia de Casimir tende a anular-se fortemente devido à dependência da energia na exponencial decrescente  $e^{-2n\pi\alpha}$ . Se nós associamos a massa com o comprimento, ou seja  $m = l_0^{-1}$ , na eq (5.18), então para o limite  $m \rightarrow \infty$  tem-se  $l_0 \rightarrow 0$ , desta forma  $L/l_0 \gg 1$  portanto na eq (5.18) temos  $\langle \varepsilon_{cas} \rangle \rightarrow 0$ , Para esse caso, o comprimento típico de Casimir  $L$  é muito maior do que o Tamanho típico associado à massa do campo  $l_0$ , o que significa que, experimentalmente, não poderíamos medir esse efeito sob este limite, ou, em outras palavras, sabemos que o efeito Casimir é um efeito quântico, portanto,  $m$  grande implica uma massa clássica, ou seja, as escalas de  $L$  e  $l_0$  estão desacopladas no sentido de que diferentes escalas de comprimento não podem afetar-se, por isso o efeito Casimir não existe nesse limite. Para campos muitos massivos e o mais importante, vê-se da equação a impossibilidade de alterar a natureza do campo de atrativo para repulsivo como uma consequência do aumento da massa do campo escalar. Considerando-se o comportamento assintótico da função de Bessel especial de orden  $\nu$ , dada pela equação

$$K_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left( 1 + \frac{4\nu^2 - 1}{8z} + \dots \right), \quad z \rightarrow \infty. \quad (5.22)$$

No artigo de Elizalde [24]  $\nu$  está relacionada com a dimensão do problema, se tomamos o caso geral para  $\nu$  qualquer, a única possibilidade de mudar a força de sinal de atrativa para repulsiva é no termo  $4\nu^2 - 1$  o que não faz sentido para dimensões inteiras do espaço e mesmo que esta condição seja satisfeita, o termos  $\frac{4\nu^2 - 1}{16n\pi\alpha}$  será muito pequeno frente a 1, consequentemente não acontecendo uma inversão do sinal da energia e portanto mantendo a natureza da força de Casimir atrativa.



## 6 CONCLUSÕES

Uma análise detalhada da influência da geometria do campo gravitacional (métrica de Kerr) na densidade da energia de Casimir no interior de uma cavidade retangular orbitando o plano equatorial de uma fonte de campo gravitacional com massa  $M$  e velocidade angular  $\Omega$ , foi feita na Ref. [22]. Neste trabalho generalizamos o trabalho de Sorge considerando o caso massivo. Como resultado da Eq. (5.21) observa-se que a densidade de energia de Casimir tende a anular-se fortemente devido à dependência na exponencial decrescente, para campos muito massivos o que é coerente com o fato que neste caso, as flutuações no vácuo tendem a desaparecer, o qual é equivalente a desacoplar as escalas nesse limite. Vê-se também desta equação, a impossibilidade de alterar a natureza do campo de atrativo para repulsivo como uma consequência do aumento da massa do campo escalar, pelo menos para as condições de contorno impostas, neste problema.

Um estudo detalhado deste fenômeno no presente contexto é um problema rico tanto do ponto de vista teórico quanto experimental.

- No contexto Teórico deve ser estudado cuidadosamente o problema da singularidade cônica que mesmo não se inserindo no contexto do problema atual é de interesse teórico quando trata-se da quantização de campos em espaços que exibam essa singularidade. [25].
- A solução exata da equação de Klein-Gordon na métrica de Kerr é conhecida. [27] e portanto uma comparação da solução exata com a aproximada que foi discutida neste trabalho é pertinente.



## REFERÊNCIAS

- [1] H. B. G. Casimir. **On the attraction between two perfectly conducting plates**. Kon. Ned. Akad. Wetensch. Proc. 100N3-4 (1997) 61-63.
- [2] S. Chandrasekhar. **The Mathematical Theory of Black Holes**. Oxford University Press. 1983.
- [3] Pietro Giuseppe Frè. **Gravity, a Geometrical Course VOL II**. Springer. 2013.
- [4] L. D. Landau. E. M. Lifshitz. **THE CLASSICAL THEORY OF FIELDS**. Pergamon 1975.
- [5] Pierre Ramond. **Field Theory A Modern Primer**. Frontiers in Physics; 51-1981.
- [6] S. W. Gibbons, S. W. Hawking, **Action integrals and partition functions in quantum gravity**, Phys. Rev. D15 (1997).
- [7] V. Mukhanov and S. Winitzki. **Introduction to quantum effects in gravity**. Cambridge University press 2007.
- [8] Philip. M. Morse. Herman. Feshbach. **Methods of Theoretical Physics**. McGRAW-HILL, 1953.
- [9] K. T. Tang. **Mathematical Methods for Engineers and Scientists I**. Springer.
- [10] W. Greiner. J. Reinhardt K. **Field quantization**. Springer.
- [11] E. Elizalde. *et al.*, **Zeta Regularization Techniques with Applications**. World Scientific Publishing Company, 1994.
- [12] E. Elizalde, **Ten physical applications of spectral zeta functions**, Vol. 855, 2012.
- [13] S. Lamoreaux **Demonstration of the Casimir Force in the 06 to 06 $\mu$ m Range**. *Phys. Rev* **78** (1997).
- [14] G. C. G. Bressi, **Measurement of the casimir force between parallel metallic surfaces**, Phys. Rev. Lett 88 (2002) 041804.
- [15] Z. M. J. Zou, **Casimir forces on a silicon micromechanical chip**, Nature Communications 4 (2013) 1845.
- [16] A. A. Bytsenko. *et al.*, **Quantum Fields and Extended Objects in Space-Times with Constant Curvature Spatial Section**. Physics Reports 266 ( 1996) 1-126.

- [17] Günter Plunien. *et al.*, **The Casimir Effect**. Physics Reports 134 (1986) 87—193.
- [18] K. T. Tang. **Mathematical Methods for Engineers and Scientists III**. Springer.
- [19] Ashok. Das. **Lectures on Quantum Field Theory**. World Scientific 2008.
- [20] T. Jacobson. **Introduction to quantum fields in curved spacetime and the Hawking effect**. Class. Quant. Grav. Lectures (2005) 39.
- [21] N. D. Birrell. P. C. W. Davies. **Quantum Fields in Curved Space**. Cambridge University Press 1982.
- [22] F. Sorge. **Casimir energy in Kerr space-time**. Phys Rev D 90 (2014).
- [23] Øyvind. Grøn. Sigbjørn. Hervik **Einstein's General Theory of Relativity**. Springer (2007).
- [24] E. Elizalde. *et al.* **Expressions for the zeta-function regularized Casimir energy**. J. Math. Phys. 30 (5), (1989).
- [25] S. Hawking. G. F. R. Ellis. **The Large Scale Structure of Space-Time**. Cambridge University Press 1973.
- [26] M. Abramowitz. And A. Stegun. **Handbook of mathematical functions**. National Bureau of Standards 1972.
- [27] L. H. Ford. **Quantization of a scalar field in the Kerr spacetime**. Phys. Rev. D12 (1975).

## Apêndices



## APÊNDICE A – HAMILTONIANO PARA A ENERGIA DE CASIMIR EM ESPAÇO PLANO

A idéia é encontrar as expressões que aparecem na eq (2.24) a partir da eq (2.23) para obter o Hamiltoniano  $H$  da equação (2.5). Nós sabemos que  $\pi = \dot{\varphi}(x)$ , então derivando a eq (2.19) obtemos

- Calculating  $H_\pi$

$$\pi = i \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -a_n(k) f_k(x) + a_n^\dagger(k) f_k^*(x) \right] u_n(x) \omega_n(k), \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\pi &= \frac{1}{2} \left[ i \sum_{n=1}^{\infty} \int d^2k \left[ -a_{nk} f_k(x) + a_{nk}^\dagger f_k^*(x) \right] u_n(x) \omega_{nk} \right] \\ &\quad \times \left[ i \sum_{m=1}^{\infty} \int d^2l \left[ -a_{ml} f_l(x) + a_{ml}^\dagger f_l^*(x) \right] u_m(x) \omega_{ml} \right], \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{m,n} \int d^2k d^2l \left[ -a_{nk} f_k(x) + a_{nk}^\dagger f_k^*(x) \right] \\ &\quad \times \left[ -a_{ml} f_l(x) + a_{ml}^\dagger f_l^*(x) \right] u_n(x) u_m(x) \omega_{nk} \omega_{ml}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} H_\pi &= -\frac{1}{2} \sum_{m,n} \int d^3x \int d^2k d^2l \left[ -a_{nk} f_k(x) + a_{nk}^\dagger f_k^*(x) \right] \\ &\quad \times \left[ -a_{ml} f_l(x) + a_{ml}^\dagger f_l^*(x) \right] u_n(x) u_m(x) \omega_{nk} \omega_{ml}, \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{m,n} \int dx dy dz \int d^2k d^2l \left[ -a_{nk} f_k(x) + a_{nk}^\dagger f_k^*(x) \right] \\ &\quad \times \left[ -a_{ml} f_l(x) + a_{ml}^\dagger f_l^*(x) \right] u_n(x) u_m(x) \omega_{nk} \omega_{ml}, \end{aligned}$$

a função  $f_k(x)$  só depende das variáveis  $(t, y, z)$ , então a integral sob  $x$  fica na função  $u_n(x)$ , veja eq (2.20), portanto

$$\begin{aligned} H_\pi &= -\frac{1}{2} \sum_{m,n} \int dy dz \int d^2k d^2l \left[ -a_{nk} f_k(x) + a_{nk}^\dagger f_k^*(x) \right] \\ &\quad \times \left[ -a_{ml} f_l(x) + a_{ml}^\dagger f_l^*(x) \right] \omega_{nk} \omega_{ml} \underbrace{\int_0^L dx u_n(x) u_m(x)}_{\delta_{mn}}, \\ &= -\frac{1}{2} \sum_n \int dy dz \int d^2k d^2l \left[ -a_{nk} f_k(x) + a_{nk}^\dagger f_k^*(x) \right] \\ &\quad \times \left[ -a_{nl} f_l(x) + a_{nl}^\dagger f_l^*(x) \right] \omega_{nk} \omega_{nl}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Considere uma das expressões, e focando somente na integração espacial, teremos

$$\begin{aligned}
\int d^2x f_k(x) f_l(x) &= \left( \frac{1}{2\pi\sqrt{2\omega_{nk}}} \right) \left( \frac{1}{2\pi\sqrt{2\omega_{nl}}} \right) e^{-i\omega_{nk}t} e^{-i\omega_{nl}t} \int dy e^{i(k_y+l_y)y} \int dz e^{i(k_z+l_z)z}, \\
&= \left( \frac{1}{2\pi\sqrt{2\omega_{nk}}} \right) \left( \frac{1}{2\pi\sqrt{2\omega_{nl}}} \right) e^{-i\omega_{nk}t} e^{-i\omega_{nl}t} 2\pi \delta(k_y + l_y) 2\pi \delta(k_z + l_z), \\
&= \left( \frac{1}{\sqrt{2\omega_{nk}}} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2\omega_{nl}}} \right) e^{-i\omega_{nk}t} e^{-i\omega_{nl}t} \delta(k_y + l_y) \delta(k_z + l_z),
\end{aligned} \tag{A.4}$$

a integração sobre os momentos é nula devido a que  $k_i, l_i$  estão em coordenadas esféricas, ou seja, nós integramos sobre  $0 < k_i < \infty$  então a função delta é válida quando  $k_y = -l_y$  e  $k_z = -l_z$  o que fornece valores negativos para  $k$  e  $l$ , desta forma temos

$$\begin{aligned}
\sum_n \int_0^\infty d^2k d^2l a_n(k) a_n(l) \int d^2x f_k(x) f_l(x) &= \sum_n \int_0^\infty dk_y dk_z \int_0^\infty dl_y dl_z a_n(k) a_n(l) \\
&\times \left( \frac{1}{\sqrt{2\omega_{nk}}} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2\omega_{nl}}} \right) e^{-i\omega_{nk}t} e^{-i\omega_{nl}t} \delta(k_y + l_y) \delta(k_z + l_z) = 0,
\end{aligned} \tag{A.5}$$

O mesmo acontecerá com o termo proporcional a  $a^\dagger a^\dagger$ . Os termos não nulos são os termos cruzados, fornecendo

$$H_\pi = -\frac{1}{2} \sum_n \int dy dz \int d^2k d^2l \left[ -a_{nk} f_k(x) a_{nl}^\dagger f_l^*(x) - a_{nk}^\dagger f_k^*(x) a_{nl} f_l(x) \right] \omega_{nk} \omega_{nl} \tag{A.6}$$

Novamente calculando

$$\begin{aligned}
\int dy dz f_k(x) f_l^*(x) &= \left( \frac{1}{2\pi\sqrt{2\omega_{nk}}} \right) \left( \frac{1}{2\pi\sqrt{2\omega_{nl}}} \right) e^{-i\omega_{nk}t} e^{i\omega_{nl}t} \int dy e^{i(k_y-l_y)y} \int dz e^{i(k_z-l_z)z}, \\
&= \left( \frac{1}{2\pi\sqrt{2\omega_{nk}}} \right) \left( \frac{1}{2\pi\sqrt{2\omega_{nl}}} \right) e^{-i\omega_{nk}t} e^{i\omega_{nl}t} 2\pi \delta(k_y - l_y) 2\pi \delta(k_z - l_z), \\
&= \left( \frac{1}{\sqrt{2\omega_{nk}}} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2\omega_{nl}}} \right) e^{-i\omega_{nk}t} e^{i\omega_{nl}t} \delta(k_y - l_y) \delta(k_z - l_z),
\end{aligned} \tag{A.7}$$

substituindo eq (A.7) na eq (A.6)

$$\begin{aligned}
H_\pi &= \frac{1}{2} \sum_n \int_0^\infty dk_y dk_z \int_0^\infty dl_y dl_z \left[ a_{nk} a_{nl}^\dagger + a_{nk}^\dagger a_{nl} \right] \omega_{nk} \omega_{nl} \\
&\times \left( \frac{1}{\sqrt{2\omega_{nk}}} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2\omega_{nl}}} \right) e^{-i\omega_{nk}t} e^{i\omega_{nl}t} \delta(k_y - l_y) \delta(k_z - l_z), \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^\infty \int d^2k \left[ a_n(k) a_n^\dagger(k) + a_n^\dagger(k) a_n(k) \right] \frac{\omega_n(k)}{2}, \\
H_\pi &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^\infty \int d^2k \left[ a_n(k) a_n^\dagger(k) + a_n^\dagger(k) a_n(k) \right] \omega_n(k),
\end{aligned} \tag{A.8}$$

- $H_{\nabla\varphi}$

A próxima contribuição é do gradiente do campo, por isto calculamos

$$|\nabla\varphi(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} \int d^2k \left[ a_n(k) \nabla f_k(x) + a_n^\dagger(k) \nabla f_k^*(x) \right] u_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \int d^2k \left[ a_n(k) f_k(x) + a_n^\dagger(k) f_k^*(x) \right] \nabla u_n(x). \quad (\text{A.9})$$

fazendo as derivadas na eq (2.20)

$$\begin{aligned} \nabla f_k(x) &= i(k_y + k_z) f_k(x), \\ \nabla f_k^*(x) &= -i(k_y + k_z) f_k^*(x), \\ \nabla u_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{n\pi}{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \equiv \frac{n\pi}{L} g_n(x), \\ g_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} |\nabla\varphi(x)|^2 &= \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \int d^2k \left[ a_{nk} f_k - a_{nk}^\dagger f_k^* \right] i(k_y + k_z) u_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \int d^2k \left[ a_{nk} f_k + a_{nk}^\dagger f_k^* \right] \frac{n\pi}{L} g_n(x) \right] \\ &\times \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \int d^2l \left[ a_{ml} f_l - a_{ml}^\dagger f_l^* \right] i(l_y + l_z) u_m(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \int d^2k \left[ a_{ml} f_l + a_{ml}^\dagger f_l^* \right] \frac{m\pi}{L} g_m(x) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} |\nabla\varphi(x)|^2 &= \sum_{n,m=1}^{\infty} \left[ \int d^2k \left[ a_{nk} f_k - a_{nk}^\dagger f_k^* \right] i(k_y + k_z) u_n(x) + \int d^2k \left[ a_{nk} f_k + a_{nk}^\dagger f_k^* \right] \frac{n\pi}{L} g_n(x) \right] \\ &\times \left[ \int d^2l \left[ a_{ml} f_l - a_{ml}^\dagger f_l^* \right] i(l_y + l_z) u_m(x) + \int d^2k \left[ a_{ml} f_l + a_{ml}^\dagger f_l^* \right] \frac{m\pi}{L} g_m(x) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

usamos a eq (2.22)  $H_{\nabla\varphi} = \int d^3x |\nabla\varphi(x)|^2$  integramos sob  $x$  e usamos as condições de ortogonalidade (2.14) and (2.15) olhando que os termos cruzados  $u_n g_m$  na eq (A.12) são nulos, e  $n = m$

$$\begin{aligned} H_{\nabla\varphi} &= \frac{1}{2} \int dydz |\nabla\varphi(x)|^2, \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int dydz \int d^2k \int d^2l \left[ a_{nk} f_k - a_{nk}^\dagger f_k^* \right] \left[ a_{nl} f_l - a_{nl}^\dagger f_l^* \right] [-(k_y + k_z)(l_y + l_z)] \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int dydz \int d^2k \int d^2l \left[ a_{nk} f_k + a_{nk}^\dagger f_k^* \right] \left[ a_{nl} f_l + a_{nl}^\dagger f_l^* \right] \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

os termos proporcionais a  $a a$  e  $a^\dagger a^\dagger$  são nulos quando integramos nas variáveis  $y, z$  eq (A.4), só os termos cruzados são não nulos na eq (A.7)

$$\begin{aligned}
H_{\nabla\varphi} &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int d^2k \int d^2l \left[ -a_{nk} a_{nl}^\dagger - a_{nk}^\dagger a_{nl} \right] [-(k_y + k_z)(l_y + l_z)] \\
&\quad \times \left( \frac{1}{\sqrt{2\omega_{nk}}} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2\omega_{nl}}} \right) e^{-i\omega_{nk}t} e^{i\omega_{nl}t} \delta(k_y - l_y) \delta(k_z - l_z) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \int d^2k \int d^2l \left[ a_{nk} a_{nl}^\dagger + a_{nk}^\dagger a_{nl} \right] \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \\
&\quad \times \left( \frac{1}{\sqrt{2\omega_{nk}}} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{2\omega_{nl}}} \right) e^{-i\omega_{nk}t} e^{i\omega_{nl}t} \delta(k_y - l_y) \delta(k_z - l_z),
\end{aligned} \tag{A.14}$$

$$H_{\nabla\varphi} = \frac{1}{4} \int d^2k \left[ a_n(k) a_n^\dagger(k) + a_n^\dagger(k) a_n(k) \right] \frac{1}{\omega_n(k)} \left[ \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + k_y^2 + k_z^2 \right], \tag{A.15}$$

usando um procedimento similar podemos calcular o termo massivo  $H_\varphi$  na eq (2.24)

$$H_\varphi = \frac{1}{4} \int d^2k \left[ a_n(k) a_n^\dagger(k) + a_n^\dagger(k) a_n(k) \right] \frac{m^2}{\omega_n(k)}, \tag{A.16}$$

substituindo as equações (A.15), (A.16) e eq (A.8) em eq (2.22) temos

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{4} \int d^2k \left[ a_n(k) a_n^\dagger(k) + a_n^\dagger(k) a_n(k) \right] \left[ \omega_n(k) + \frac{m^2}{\omega_n(k)} + \frac{1}{\omega_n(k)} \left[ \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + k_y^2 + k_z^2 \right] \right], \\
&= \frac{1}{4} \int d^2k \left[ a_n(k) a_n^\dagger(k) + a_n^\dagger(k) a_n(k) \right] \left[ \omega_n(k) + \frac{1}{\omega_n(k)} \underbrace{\left[ \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 + k_y^2 + k_z^2 + m^2 \right]}_{\omega_n^2(k)} \right], \\
&= \frac{1}{4} \int d^2k \left[ a_n(k) a_n^\dagger(k) + a_n^\dagger(k) a_n(k) \right] 2\omega_n(k), \\
H &= \frac{1}{2} \int d^2k \left[ a_n(k) a_n^\dagger(k) + a_n^\dagger(k) a_n(k) \right] \omega_n(k),
\end{aligned} \tag{A.17}$$

usamos as relações de comutação dos operadores  $\varphi$  e  $\pi$  [19]

$$\begin{aligned}
[\varphi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] &= i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
[\varphi(\mathbf{x}, t), \varphi(\mathbf{y}, t)] &= [\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)] = 0,
\end{aligned} \tag{A.18}$$

e a condição da ortogonalidade da base

$$\begin{aligned}
i \int d^3x f_k^*(\mathbf{x}, t) \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}(\mathbf{x}, t) &= \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\
i \int d^3x f_k(\mathbf{x}, t) \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}(\mathbf{x}, t) &= 0,
\end{aligned} \tag{A.19}$$

onde

$$a(t) \overleftrightarrow{\partial}_0 b(t) = a(t) \frac{\partial b(t)}{\partial t} - \frac{\partial a(t)}{\partial t} b(t),$$

fornecendo

$$a(t) = i \int d^3x f_k^*(\mathbf{x}, t) \overleftrightarrow{\partial}_0 \varphi(\mathbf{x}, t). \quad (\text{A.20})$$

Também usamos a relações de comutação dos operadores  $a$  and  $a^\dagger$

$$\begin{aligned} [a(k), a^\dagger(k')] &= i \int d^3x f_k^*(\mathbf{x}, t) \overleftrightarrow{\partial}_0 f_{k'}(\mathbf{x}, t) = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ [a(k), a(k')] &= [a^\dagger(k), a^\dagger(k')] = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

com isto a Hamiltoniana eq (A.17) fica

$$H = \frac{1}{2} \sum_n \int d^2k \left[ 2a_n^\dagger(k) a_n(k) + \delta^{(2)}(0) \right] \omega_n(k), \quad (\text{A.22})$$

calculamos a energia do vácuo

$$\begin{aligned} \langle 0 | H | 0 \rangle &= \frac{1}{2} \sum_n \int d^2k \delta^{(2)}(0) \omega_n(k), \\ \delta^{(2)}(0) &= \delta^{(2)}(k - k) \rightarrow \frac{L_y L_z}{2\pi 2\pi}, \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

onde  $L_y$  and  $L_z$  são os comprimentos que correspondem às componentes transversais do momento, ou seja  $k_y, k_z$ , que é a expressão em eq (2.25).



## APÊNDICE B – TOPICOS DE FUNÇÕES ESPECIAIS

### B.1 A função Gama

#### B.1.1 Definição da função gama

A função  $\Gamma(z)$  pode ser definida por uma das seguintes expressões

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = \int_0^1 \left[ \log \left( \frac{1}{t} \right) \right]^{z-1} dt, \quad \text{Re}(z) > 0, \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}, \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z}{z(1+z)(1+\frac{1}{2}z)\dots(1+\frac{z}{n})}, \\ &= z^{-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^z \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} \right], \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}, \quad (\text{B.3})$$

onde

$$\gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sum_{n=1}^m \frac{1}{n} - \log m \right) = 0.5772156649 \dots \quad (\text{B.4})$$

denota a constante de Euler-Mascheroni constant. A definição (B.1) foi usada por Euler, mais a eq (B.2) é uma notação um pouco diferente usada por Gauss e eq (B.3) usada por Weierstrass. Fazendo a mudança de variável na eq (B.1)  $t \rightarrow st$  (onde  $s$  é um número positivo real) temos

$$\Gamma(z) = s^z \int_0^{\infty} dt e^{-st} t^{z-1}, \quad \text{Re}(z) > 0. \quad (\text{B.5})$$

Pode-se mostrar que esta fórmula é válida para valores complexos de  $s$ , para um caminho de integração ao longo da reta que vai da origem até  $\infty e^{i\delta}$ . Desta forma, temos

$$\Gamma(z) = s^z \int_0^{\infty e^{i\delta}} dt e^{-st} t^{z-1}, \quad -\left(\frac{1}{2}\pi + \delta\right) < \arg(s) < \left(\frac{1}{2}\pi - \delta\right), \quad \text{Re}(z) > 0. \quad (\text{B.6})$$

Esta equação é válida para  $\arg(s) + \delta = \pm \frac{1}{2}\pi$  se  $0 < \text{Re}(z) < 1$ . De (B.2) e (B.3) vemos que a função gama é analítica, e suas únicas singularidades são  $z = 0, -1, -2, \dots$ , portanto

$$\Gamma(z) = \int_0^1 dt e^{-t} t^{z-1} + \int_1^{\infty} dt e^{-t} t^{z-1} = P(z) + Q(z), \quad (\text{B.7})$$

sendo  $Q(z)$  uma função integral. Expandindo  $e^{-t}$  em série de potência e integrando termo a termo

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [n!(z+n)]^{-1}. \quad (\text{B.8})$$

Desta forma segue que  $(-1)^n/n!$  é o resíduo de  $\Gamma(z)$  no pólo simples  $z = -n$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ). Mostraremos que as expressões (B.1), (B.2), e (B.3) representam a mesma função. Para um inteiro positivo  $n$  e  $Re(z) > 0$ , repetidas integrações por partes conduzem a

$$\int_0^n (1 - t/n)^n t^{z-1} dt = \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n)},$$

de forma que, pelo teorema de Tannery

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n (1 - t/n)^n t^{z-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n)}.$$

deste modo (B.1) é equivalente a (B.2). A equação (B.3) pode ser obtida da (B.2)

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} z(1+z) \left(1 + \frac{1}{2}z\right) \cdots \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z \log n},$$

ou

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ z(1+z) e^{-z} \left(1 + \frac{1}{2}z\right) e^{-\frac{1}{2}z} \cdots \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} e^{z(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} \log n)} \right],$$

e, finalmente

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n}.$$

Se a parte real de  $z$  é negativa, e  $n+1 > Re(-z) > n$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )  $\Gamma(z)$  pode ser representada por uma integral, devida a Cauchy Saalschütz (Whittaker-Watson, 1927, p. 243),

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \left[ e^{-t} - \sum_{m=0}^n \frac{(-t)^m}{m!} \right] t^{z-1} dt, \quad -(n+1) < Re(z) < -n. \quad (\text{B.9})$$

### B.1.2 Equações funcionais satisfeitas pela função $\Gamma(z)$

Integrando (B.1) por partes

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} \int_0^\infty e^{-t} t^z dt = \frac{1}{z} \Gamma(1+z),$$

ou

$$\Gamma(1+z) = z\Gamma(z), \quad (\text{B.10})$$

e, desse modo, se  $n$  é um inteiro positivo

$$\Gamma(z+n) = z(z+1)(z+2) \cdots (z+n-1)\Gamma(z), \quad (\text{B.11})$$

de modo que

$$\frac{\Gamma(z)}{\Gamma(z-n)} = (z-1)(z-2) \cdots (z-n) = \frac{(-1)^n \Gamma(-z+n+1)}{\Gamma(-z+1)}, \quad (\text{B.12})$$

$$\frac{\Gamma(-z+n)}{\Gamma(-z)} = (-1)^n z(z-1) \cdots (z-n+1) = \frac{(-1)^n \Gamma(z+1)}{\Gamma(z-n+1)}. \quad (\text{B.13})$$

como,

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1,$$

temos

$$\Gamma(n+1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!,$$

de (B.3)

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -z^{-2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)^{-1},$$

e como

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right),$$

(Bromwich, 1947, P. 249) we have

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\pi z^{-1} \csc(\pi z), \quad (\text{B.14})$$

de forma que

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi \csc(\pi z), \quad (\text{B.15})$$

ou

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - z\right) = \pi \sec(\pi z). \quad (\text{B.16})$$

de (B.14) e (B.11)

$$\frac{\Gamma(n+z)\Gamma(n-z)}{[(n-1)!]^2} = \frac{\pi z}{\sin(\pi z)} \prod_{m=1}^{n-1} \left(1 - \frac{z^2}{m^2}\right), \quad m = 1, 2, \dots, n-1. \quad (\text{B.17})$$

de (B.16), (B.11) e (B.12) obtemos

$$\frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2} + z\right)\Gamma\left(n + \frac{1}{2} - z\right)}{\left[\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]^2} = \frac{1}{\cos(\pi z)} \prod_{m=1}^n \left[1 - \frac{4z^2}{(2m-1)^2}\right]. \quad (\text{B.18})$$

De (B.15) e (B.10), com  $z = 1/2$ , segue que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-\nu^2} d\nu = \sqrt{\pi}. \quad (\text{B.19})$$

Agora provaremos a fórmula de multiplicação de Gauss e Legendre

$$\prod_{r=0}^{m-1} \Gamma\left(z + \frac{r}{m}\right) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(m-1)} m^{\frac{1}{2}-mz} \Gamma(mz), \quad m = 2, 3, 4, \dots \quad (\text{B.20})$$

de (B.2) definimos

$$H(z) = \prod_{r=0}^{m-1} \Gamma\left(z + \frac{r}{m}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{mz + \frac{1}{2}(m-1)} (n!)^m N^{-1}, \quad (\text{B.21})$$

onde

$$N = mz(mz+1) \cdots (mz+mn)(mz+mn+1) \cdots (mz+mn+m-1)m^{-m(n+1)},$$

como

$$\Gamma(mz) = \lim_{n \rightarrow \infty} (mn)^{mz} (mn)! [mz(mz+1) \cdots (mz+mn)]^{-1},$$

temos

$$m^{-mz} \frac{\Gamma(mz)}{H(z)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2}(m+1)} (mn-1)! (n!)^{-m} m^{-mn} = \frac{1}{K}. \quad (\text{B.22})$$

É evidente que  $K$  é independente de  $z$ , e pode ser calculado, por exemplo, fazendo-se  $z = 1/m$  em (B.22), desse modo

$$\Gamma(1) \frac{K}{m} = H\left(\frac{1}{m}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{2}{m}\right) \cdots \Gamma\left[\left(\frac{m-1}{m}\right)\right] \Gamma(1),$$

ou

$$\frac{K}{m} = \Gamma\left(1 - \frac{1}{m}\right) \Gamma\left(1 - \frac{2}{m}\right) \cdots \Gamma\left[\left(1 - \frac{m-1}{m}\right)\right].$$

Multiplicando-se as duas últimas equações e usando (B.15)

$$m^2 \pi^{m-1} = K^2 \prod_{r=1}^{m-1} \sin\left(\frac{\pi r}{m}\right),$$

de forma que

$$K^2 = m(2\pi)^{m-1}. \quad (\text{B.23})$$

Uma vez que  $K$ , conforme (B.22), é certamente positivo (B.21), (B.22) e (B.23) provam (B.20). O caso  $m = 2$  na eq (B.20) é a fórmula de duplicação de Legendre

$$\Gamma(2z) = 2^{2z-1} \pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right). \quad (\text{B.24})$$

## B.2 A função zeta

### B.2.1 A função zeta de Riemann

Uma vez que  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$ , quando  $|x| < 1$ . Para todo número primo  $p$  ( $p \neq 1$ ),

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots,$$

Podemos multiplicar esta equação para todos os números primos, lembre-se de que todo número primo  $n$  pode ser colocado como um produto de seus fatores primos, portanto,

$$\begin{aligned} \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} &= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots\right), \\ &= (1 + 2^{-s} + (2^2)^{-s} + \cdots)(1 + 3^{-s} + (3^2)^{-s} + \cdots) \\ &\times (1 + 5^{-s} + (5^2)^{-s} + \cdots) \times \cdots \\ &= 1 + 2^{-s} + 3^{-s} + 4^{-s} + 5^{-s} + (2 \cdot 3)^{-s} + \cdots \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

$$\prod_p (1 - p^{-s})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 1,$$

do lado direito podemos definir a função zeta de Riemann dada por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}, \quad s \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(s) > 1. \quad (\text{B.26})$$

Esta série converge apenas se  $\operatorname{Re}(s) > 1$ , porém a representação integral fazendo a mudança de variável  $t \rightarrow n\alpha$ ,  $n \in \mathbb{N}$  na eq (B.1)

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}, \quad (\text{B.27})$$

mostra que (B.27) pode ser prolongada analiticamente [8], e que, em  $s = 1$ , possui um pólo simples com residuo 1. O prolongamento analítico é feito através da separação da integral em  $\int_0^1$  e  $\int_1^{\infty}$ , e utilizando-se

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^k \rightarrow \frac{1}{e^t - 1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^{k-1}, \quad (\text{B.28})$$

onde  $B_k$  são os números de Bernoulli. Fazendo-se a primeira integral termo a termo para ( $s \neq 1$ ), e usando (B.28)

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 dt \frac{1}{e^t - 1} t^{s-1} + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^{\infty} dt \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}, \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^1 dt \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^{k-1} t^{s-1} + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^{\infty} dt \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}, \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \int_0^1 dt t^{k-1} t^{s-1} + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^{\infty} dt \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}, \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \int_0^1 dt t^{k+s-2} + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^{\infty} dt \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}, \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \frac{t^{k+s-2+1}}{k+s-2+1} \Big|_0^1 + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^{\infty} dt \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}, \\ \zeta(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \frac{1}{k+s-1} + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_1^{\infty} dt \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}, \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

quando

$$s = -m + \epsilon, \quad m \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{\Gamma(-m + \epsilon)} = (-1)^m m! \epsilon (1 + \mathcal{O}(\epsilon))$$

Uma vez que a integral restante é sempre finita, o segundo termo desaparece quando  $\epsilon \rightarrow \infty$ . Como ocorre para a série, o pólo que surge com o termo  $k = m + 1$  é equilibrado com o zero da expansão acima, conduzindo ao limite finito

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \zeta(-m + \epsilon) = (-1)^m \frac{B_{m+1}}{m+1}. \quad (\text{B.30})$$

Podemos agora obter alguns valores particulares

$$\begin{aligned} \zeta(0) &= -\frac{1}{2}, \\ \zeta(-2n) &= 0, \\ \zeta(1 - 2n) &= -\frac{B_{2n}}{2n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

A série de Laurent de  $\zeta(s)$  em torno de  $s = 1$  (devido a Stieltjes) é

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{1}{s-1} + \gamma + \gamma_1(s-1) + \gamma_2(s-1)^2 + \dots, \\ \gamma &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\log \nu)^k}{\nu} - \frac{1}{k+1} (\log n)^{k+1} \right].\end{aligned}\tag{B.32}$$

outra consequência de (B.31) é a equação funcional (fórmula de reflexão)

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s) \zeta(1-s),\tag{B.33}$$

que também pode ser escrita como

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \pi^{\frac{s-1}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s).\tag{B.34}$$

Uma outra fórmula muito utilizada e a fórmula de duplicação da função zeta de Riemann

$$\zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots\tag{B.35}$$

Os zeros de  $\zeta$  em  $s = -2, -4, -6, \dots$ , são os únicos zeros reais. Além desses,  $\zeta$  não possui zeros fora da faixa  $0 < \text{Re}(s) < 1$ , mas existem infinitos zeros complexos dentro dela.

Pode-se mostrar que

$$\zeta(s) = \frac{e^b}{2(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)} \prod_{p \text{ complex zeros of } \zeta} \left[ \left(1 - \frac{s}{p}\right) e^{\frac{s}{p}} \right]\tag{B.36}$$

onde

$$b = \log 2\pi - 1 - \frac{\gamma}{2}.$$

De todas as propriedades da função zeta, estabelecidas, sem demonstração, por Riemann, apenas uma ainda espera por uma prova definitiva, chamada conjectura de Riemann, ela afirma que todos os zeros complexos de  $\zeta(s)$  possuem parte real igual a  $\frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-s},$$

converge para  $\text{Re } s > \frac{1}{2}$ , onde  $\mu(n)$  é a função de the Möbius's [11] que é definida para  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$

$$\mu(1) = 1, \quad \mu(n) = \begin{cases} (-1)^\nu, & \text{if } a_1 = a_2 = \dots = a_\nu = 1, \\ 0, & \text{de outra forma} \end{cases}\tag{B.37}$$

$$\begin{aligned}N_0(T) &> AT \log T, \\ 2\pi N(T) &= T \log T - (1 + \log 2\pi)T + \mathcal{O}(\log T), \\ N(\sigma, T) &= \mathcal{O}(T^{3\frac{1-\sigma}{2}} (\log T)^5), \quad \frac{1}{2} < \sigma < 1, \sigma \text{ fixo},\end{aligned}\tag{B.38}$$

$$\begin{aligned} P(x) &= \mathcal{O}(x^{1/2} \log x), \text{ for } x \rightarrow \infty, \\ P(x) &= \mathcal{O}(x^{\frac{1}{2}+\epsilon}), \end{aligned} \quad (\text{B.39})$$

$$\begin{aligned} \zeta(s, \nu) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n + \nu)^{-s}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1, \quad \nu \neq 0, -1, -2, \dots, \\ \zeta(s, \nu) &= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} \frac{e^{-t\nu}}{1 - e^{-t}} \quad \operatorname{Re}(s) > 1, \quad \operatorname{Re}(\nu) > 0. \\ \zeta(1 + \epsilon, \nu) &= \frac{1}{\epsilon} - \psi(\nu) + \mathcal{O}(\epsilon). \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

$$\begin{aligned} \zeta(0, \nu) &= \frac{1}{2} - \nu, \\ \zeta(-m, \nu) &= -\frac{B_{m+1}(\nu)}{m+1}, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

### B.2.2 A função zeta de Hurwitz

A função zeta de Hurwitz ou zeta generalizada é definida, pela equação

$$\zeta(s, \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + \nu)^{-s}, \quad \nu \neq 0, -1, -2, \dots \quad (\text{B.42})$$

Ela satisfaz a equação funcional

$$\gamma(s, \nu) = \gamma(s, m + \nu) + \sum_{n=0}^{m-1} (n + \nu)^{-s}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.43})$$

Como  $\operatorname{Re}(s) > 1$  e  $\operatorname{Re}(\nu) > 0$ , portanto podemos fazer a continuação analítica, fazendo a mudança  $t \rightarrow t' = (n + \nu)t$ , e  $z \equiv s$  na função gama (B.1) temos

$$\Gamma(s)\zeta(s, \nu) = \int_0^{\infty} t^{s-1} \frac{e^{-\nu t}}{1 - e^{-t}} = \int_0^1 dx \frac{x^{\nu-1}}{1-x} \left[ \log \left( \frac{1}{x} \right) \right]^{s-1}, \quad \operatorname{Re}(s) > 1, \quad \operatorname{Re}(\nu) > 0. \quad (\text{B.44})$$

considerando  $\int_C dt t^{s-1} e^{-\nu t} (1 - e^{-t})^{-1}$  tomada ao longo do contorno de um setor circular, centrado na origem, temos a representação mais geral

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\zeta(s, \nu) &= \int_0^{\infty e^{i\beta}} dt t^{s-1} \frac{e^{-\nu t}}{1 - e^{-t}}, \\ \operatorname{Re}(s) > 1, \quad -\frac{1}{2}\pi < \beta < \frac{1}{2}\pi, \quad -\left(\frac{1}{2}\pi + \beta\right) < \arg(\nu) < \frac{1}{2}\pi - \beta. \end{aligned} \quad (\text{B.45})$$

com o auxílio da fórmula da soma plana [11], obtemos

$$\zeta(s, \nu) = \frac{1}{\nu^s} + \frac{\nu^{1-s}}{s-1} + 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin \left[ s \arctan \left( \frac{t}{\nu} \right) \right]}{(\nu^2 + t^2)^{\frac{1}{2}s}} \frac{dt}{e^{2\pi t} - 1}, \quad s \neq 1, \quad \operatorname{Re}(\nu) > 0. \quad (\text{B.46})$$

Considerando a função de Hurwitz (B.44) vemos que possui apenas uma singularidade (um pólo simples com resíduo igual a 1) na região finita do plano  $s$

### B.3 A função zeta de Epstein

A função de Epstein  $p$ -dimensional, denotamos por

$$Z_p \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_p \\ h_1 & \cdots & h_p \end{pmatrix} (\alpha, u), \quad (\text{B.47})$$

onde  $g_i$  e  $h_i$  são números reais,  $Re(\alpha) > 1$ .  $Z_p$ , é associada a forma quadrática  $u(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_px_p^2$ . A função é definida como segue

$$Z_p \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_p \\ h_1 & \cdots & h_p \end{pmatrix} (\alpha, u) = \sum_{n_i \in \mathbb{Z}} [a_1(n_1 + g_1)^2 + \cdots + a_p(n_p + g_p)^2]^{-\frac{p\alpha}{2}} \times \exp[2\pi i(n_1h_1 + \cdots + n_ph_p)] \quad (\text{B.48})$$

o símbolo de soma indica que os termos que satisfazem a condição  $(n_1, \dots, n_p) = -(-g_1, \dots, -g_p)$  devem ser omitidos se todos os  $g_i$ 's forem inteiros. A função  $Z_p(\vec{g}, \vec{h})$  pode ser estendida analiticamente para  $Re(\alpha) < 1$ . A seguinte equação funcional fornece a continuação analítica de  $Z_p(\vec{g}, \vec{h})$  como definida pelo lado direito da equação (B.48)

$$Z_p \begin{pmatrix} g_1 & \cdots & g_p \\ h_1 & \cdots & h_p \end{pmatrix} (\alpha, u) = (\det a)^{-\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{p}{2}(1-2\alpha)} \frac{\Gamma[\frac{1}{2}p(1-\alpha)]}{\Gamma(\frac{1}{2}p\alpha)} \times \exp[-2\pi i(g_1h_1 + \cdots + g_ph_p)] Z_p \begin{pmatrix} h_1 & \cdots & h_p \\ -g_1 & \cdots & -g_p \end{pmatrix} (1-\alpha, v), \quad (\text{B.49})$$

onde a forma quadrática  $v$  é dada por  $v(x) = a_1^{-1}x_1^2 + a_2^{-2}x_2^2 + \cdots + a_p^{-p}x_p^2$ .  $Z_p(\alpha.u)$  uma função inteira no plano complexo  $\alpha$ , exceto para o caso em que todos os  $h_i$  são inteiros. Neste caso  $Z_p(\alpha.u)$  possui um pólo simples em  $\alpha = -1$ .

$$p = 1, \vec{g} = \vec{h} = 0, a_1 = 1, \quad Z_1 \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix} (\alpha, u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}/0} (n^2)^{-\frac{\alpha}{2}} = \sum_n n^{-\alpha} = 2\zeta(\alpha), \quad (\text{B.50})$$

$$\vec{g} = \vec{h} = 0, u = a_ix_i^2, i = 1, \dots, p \quad Z_1 \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix} (\alpha, u) = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^p/\vec{0}} (a_1n_1^2 + a_2n_2^2 + \cdots + a_pn_p^2)^{-\frac{p\alpha}{2}}. \quad (\text{B.51})$$

## APÊNDICE C – ALGUMAS OBSERVAÇÕES SOBRE A SOLUÇÃO DE KERR

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2Mr}{\Sigma} & 0 & 0 & \frac{2Mar}{\Sigma} \sin^2 \theta \\ 0 & \frac{-\Sigma}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Sigma & 0 \\ \frac{2Mar}{\Sigma} \sin^2 \theta & 0 & 0 & \frac{-A \sin^2 \theta}{\Sigma} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

cujo determinante é

$$g = -\Sigma^2 \sin^2 \theta, \quad (\text{C.2})$$

$$\det(g^{\mu\nu}) = -\frac{1}{\Sigma^2 \sin^2 \theta}.$$

A métrica inversa é portanto

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} g^{00} & 0 & 0 & g^{03} \\ 0 & g^{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^{22} & 0 \\ g^{30} & 0 & 0 & g^{33} \end{bmatrix}, \quad (\text{C.3})$$

onde

$$g^{00} = \frac{A}{\Delta\Sigma}, \quad g^{30} = g^{03} = \frac{2Mar}{\Delta\Sigma},$$

$$g^{11} = -\frac{\Delta}{\Sigma}, \quad g^{22} = -\frac{1}{\Sigma}, \quad (\text{C.4})$$

$$g^{33} = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) \frac{1}{\Delta \sin^2 \theta} = \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Delta\Sigma \sin^2 \theta}.$$

O comprimento do arco eq (3.4) é

$$ds = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right) + \frac{4Ma}{r}\Omega - \frac{A}{r^2}\Omega^2} dt \quad (\text{C.5})$$

onde  $t = \tau$  é o tempo próprio, de modo que

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \left[ \left(1 - \frac{2M}{r}\right) + \frac{4Ma}{r}\Omega - \frac{A}{r^2}\Omega^2 \right]^{-1/2} \left( \frac{dx^0}{dt}, 0, 0, \frac{dx^3}{dt} \right),$$

$$= \left[ \left(1 - \frac{2M}{r}\right) + \frac{4Ma}{r}\Omega - \frac{A}{r^2}\Omega^2 \right]^{-1/2} (1, 0, 0, \Omega) \quad (\text{C.6})$$

$$C(\Omega) = \left[ \left(1 - \frac{2M}{r}\right) + \frac{4Ma}{r}\Omega - \frac{A}{r^2}\Omega^2 \right]^{-1/2},$$

$$= [g_{33}\Omega^2 + 2g_{03}\Omega + g_{00}]^{-1/2}.$$

Outra forma para obter a mesma expressão em (C.6) é apenas considerando a condição,  $u^\mu u_\mu = 1$  isto significa que a quadri-velocidade é um vetor tipo-tempo.

## C.1 Condições para a velocidade angular $\Omega$

Na equação (C.6) observamos que deve ser satisfeito algumas condições para ser um real constante, isso é

$$g_{33}\Omega^2 + 2g_{03}\Omega + g_{00} > 0, \implies \Omega_{\pm} = -\frac{g_{03}}{g_{33}} \pm \sqrt{\left(\frac{g_{03}}{g_{33}}\right)^2 - \frac{g_{00}}{g_{33}}}, \quad (\text{C.7})$$

seja

$$\omega_d = -\frac{g_{03}}{g_{33}}, \quad (\text{C.8})$$

É denominado como velocidade angular de arrastamento, é a velocidade angular da fonte rotativa.

$$\begin{aligned} \left(\frac{g_{03}}{g_{33}}\right)^2 - \frac{g_{00}}{g_{33}} &= \omega_d^2 + \frac{r(r-2M)}{A} = \frac{4M^2a^2r^2}{A^2} + \frac{r(r-2M)}{A}, \quad \frac{g_{00}}{g_{33}} = -\frac{r(r-2M)}{A}, \\ &= \frac{4M^2a^2r^2}{A^2} + \frac{rA(r-2M)}{A^2}, \\ &= \frac{1}{A^2} [4M^2a^2r^2 - 2MAr + r^2A], \\ &\stackrel{(3.3)}{=} \frac{1}{A^2} [4M^2a^2r^2 - 2M((r^2+a^2)r^2 + 2Mra^2)r \\ &\quad + r^2((r^2+a^2)r^2 + 2Mra^2)], \\ &= \frac{1}{A^2} [\cancel{4M^2a^2r^2} - \cancel{4M^2a^2r^2} - 2Mr^3(r^2+a^2) \\ &\quad + r^4(r^2+a^2) + 2Mr^3a^2], \\ &= \frac{1}{A^2} [-2Mr^5 - \cancel{2Mr^3a^2} + r^4(r^2+a^2) + \cancel{2Mr^3a^2}], \\ &= \frac{1}{A^2} [r^4(r^2+a^2-2Mr)], \\ &\stackrel{(3.3)}{=} \frac{r^4\Delta}{A^2}, \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

substituindo este resultado na eq (C.7) obtemos

$$\Omega_{\pm} = \omega_d \pm \frac{r^2}{A} \sqrt{\Delta}, \quad (\text{C.10})$$

Retornando ao cálculo de  $C(\Omega)$  em (C.6)

$$\begin{aligned}
\left(1 - \frac{2M}{r}\right) + \frac{4Ma}{r}\Omega - \frac{A}{r^2}\Omega^2 &= -\frac{A}{r^2} \left[ \Omega^2 - \frac{r^2}{A} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) - \Omega \frac{r^2}{A} \left(\frac{4Ma}{r}\right) \right], \\
&= -\frac{A}{r^2} \left[ \Omega^2 - \frac{r^2}{A} + \frac{2Mr}{A} - \frac{4Mar}{A}\Omega \right], \\
&\stackrel{(C.8)}{=} -\frac{A}{r^2} \left[ \underbrace{\Omega^2 - 2\omega_d\Omega}_{(\Omega - \omega_d)^2 - \omega_d^2} - \frac{r^2}{A} + \frac{2Mr}{A} \right], \\
&= -\frac{A}{r^2}(\Omega - \omega_d)^2 + \frac{A}{r^2} \left( \omega_d^2 + \frac{r^2}{A} - \frac{2Mr}{A} \right), \\
&= -\frac{A}{r^2}(\Omega - \omega_d)^2 + \frac{A}{r^2} \left( \omega_d^2 + \frac{r(r - 2M)}{A} \right), \\
&\stackrel{(C.8)}{=} -\frac{A}{r^2}(\Omega - \omega_d)^2 + \frac{A}{r^2} \left( \frac{r^4\Delta}{A^2} \right), \\
&= -\frac{A}{r^2}(\Omega - \omega_d)^2 + \frac{r^2\Delta}{A}, \\
&= \frac{r^2\Delta}{A} \left( 1 - \frac{A^2}{r^4\Delta}(\Omega - \omega_d)^2 \right),
\end{aligned} \tag{C.11}$$

substituindo em (C.6) obtemos

$$C(\Omega) = \left[ \frac{r^2\Delta}{A} \left( 1 - \frac{A^2}{r^4\Delta}(\Omega - \omega_d)^2 \right) \right]^{-1/2}. \tag{C.12}$$



## APÊNDICE D – SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON NO ESPAÇO DE KERR

Para resolver (3.15), precisamos da métrica inversa (3.12), então, substituindo (3.12) na (3.15) obtemos a seguinte equação diferencial

$$\left[ \frac{A}{r^2 \Delta} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{2A}{r \Delta} (\omega_d - \Omega) \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y^2} - \frac{\Delta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \psi = 0, \quad (\text{D.1})$$

Consideramos a seguinte solução na forma de separação de variáveis

$$\psi(x, y, z, t) = \chi(x)Y(y)Z(z)T(t), \quad (\text{D.2})$$

Que nos dá

$$\frac{A}{r^2 \Delta} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} + \frac{2A}{r \Delta} (\omega_d - \Omega) \frac{1}{T \chi} \frac{d\chi}{dx} \frac{dT}{dt} - \frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega) \frac{1}{\chi} \frac{d^2 \chi}{dx^2} - \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{\Delta}{r^2} \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0, \quad (\text{D.3})$$

podemos fazer a seguinte escolha

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} &= -\omega^2, \longrightarrow T(t) = T_0 e^{-i\omega t} \\ \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} &= -k_y^2, \longrightarrow Y(y) = Y_0 e^{ik_y y} \\ \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} &= -k_z^2, \longrightarrow Z(z) = Z_0 e^{ik_z z} \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

substituindo na (D.3) obtemos

$$a \frac{d^2 \chi}{dx^2} + b \frac{d\chi}{dx} + c\chi = 0, \quad (\text{D.5})$$

onde

$$\begin{aligned} a &= \frac{A}{r^2 \Delta}, \\ b &= 2i\omega \frac{A}{r \Delta} (\omega_d - \Omega), \\ c &= \left[ \omega^2 \frac{A}{r^2 \Delta} - k_y^2 - \frac{\Delta}{r^2} k_z^2 \right], \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

que admite solução da forma

$$\chi(x) = \chi_0 e^{\alpha x}, \quad (\text{D.7})$$

onde

$$\alpha = -\frac{i\omega A (\omega_d - \Omega)}{r^3 C^{-2}(\Omega)} \pm \frac{i\Delta C^2(\Omega)}{r^2} \sqrt{\left[ \omega (\Omega - \omega_d) \frac{A}{r \Delta} \right]^2 + \frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega) \left[ \omega^2 \frac{A}{r^2 \Delta} - k_y^2 - \frac{\Delta}{r^2} k_z^2 \right]}. \quad (\text{D.8})$$

Podemos simplificar esta equação introduzindo  $C^{-2}(\Omega)$  em (C.12) para obter

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{i\omega A(\omega_d - \Omega)}{r^3 C^{-2}(\Omega)} \pm \frac{i\Delta C^2(\Omega)}{r^2} \left( \frac{r^2}{\Delta} \left[ \omega^2 - C^{-2}(\Omega) \left( k_y^2 + \frac{\Delta}{r^2} k_z^2 \right) \right] \right)^{1/2}, \\ &= -\frac{i\omega A(\omega_d - \Omega)}{r^3 C^{-2}(\Omega)} \pm i \left( \frac{\Delta C^4(\Omega)}{r^2} \left[ \omega^2 - C^{-2}(\Omega) \left( k_y^2 + \frac{\Delta}{r^2} k_z^2 \right) \right] \right)^{1/2},\end{aligned}\quad (\text{D.9})$$

Portanto, substituindo esta última equação em (D.7) obtemos

$$\chi(x) = \chi_0 e^{-\frac{i\omega A(\omega_d - \Omega)}{r^3 C^{-2}(\Omega)} x} \left[ C_1 e^{i\sqrt{\left(\frac{\Delta C^4(\Omega)}{r^2} [\omega^2 - C^{-2}(\Omega) (k_y^2 + \frac{\Delta}{r^2} k_z^2)]\right)} x} + C_2 e^{-i\sqrt{\left(\frac{\Delta C^4(\Omega)}{r^2} [\omega^2 - C^{-2}(\Omega) (k_y^2 + \frac{\Delta}{r^2} k_z^2)]\right)} x} \right], \quad (\text{D.10})$$

impondo condições de contorno tipo Dirichlet (2.11) temos

$$\chi(0) = \chi(L) = 0, \quad \longrightarrow C_1 = -C_2, \quad (\text{D.11})$$

mas, pela condição  $\chi(L) = 0$ , então

$$\sqrt{\left(\frac{\Delta C^4(\Omega)}{r^2} \left[ \omega^2 - C^{-2}(\Omega) \left( k_y^2 + \frac{\Delta}{r^2} k_z^2 \right) \right]\right)} L = n\pi, \quad (\text{D.12})$$

desta equação, obtemos as frequências do campo confinado na cavidade orbitando a fonte gravitacional

$$\omega \equiv \omega_n = \frac{r}{\sqrt{\Delta}} C^{-2}(\Omega) \sqrt{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \frac{\Delta}{r^2} C^2(\Omega) \left( k_y^2 + \frac{\Delta}{r^2} k_z^2 \right)}. \quad (\text{D.13})$$

Então, a solução completa de (D.1) é dada por

$$\psi = N_n e^{-i\omega_n t} e^{i(k_y y + k_z z)} e^{-i\beta_n x} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \quad (\text{D.14})$$

Onde  $N_n$  é uma constante de normalização que é calculada no apêndice (E)

$$\begin{aligned}\beta_n &= \frac{b_n A}{r^3} (\omega_d - \Omega), \\ b_n &= \omega_n C^2(\Omega)\end{aligned}\quad (\text{D.15})$$

## APÊNDICE E – FORMALISMO DE TÊTRADAS

As coordenadas de t etradas também denominadas Vierbein (4-dimensional) da métrica (3.11)

$$d\hat{s}^2 = C^{-2}(\Omega)dt^2 - 2\frac{A}{r^3}(\Omega - \omega_d)dtdx - \frac{A}{r^4}dx^2 - dy^2 - \frac{r^2}{\Delta}dz^2. \quad (\text{E.1})$$

A base no formalismo t etradas são 1-formas, mas no segundo termo desta métrica cont em um termo cruzado, devemos tentar completar o quadrado neste termo e encontrar uma forma quadrática para isso, desta forma eliminamos o termo cruzado. Escolhendo o segundo e o terceiro termo produz

$$\begin{aligned} -\beta dx^2 - \alpha dtdx &= -\beta \left( dx^2 + \frac{\alpha}{\beta} dtdx \right) = -\beta \left( dx^2 + \gamma dx \right) \\ \alpha &= 2\frac{A}{r^3}(\Omega - \omega_d), \quad \beta = \frac{A}{r^4}, \quad \gamma = \frac{\alpha}{\beta} dt = 2r(\Omega - \omega_d)dt \\ -\beta dx^2 - \alpha dtdx &= -\beta \left( dx^2 + \gamma dx + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \right) \\ &= -\beta \left[ \left( dx + \frac{\gamma}{2} \right)^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \right] \\ &= -\frac{A}{r^4} \left[ (dx + r(\Omega - \omega_d)dt)^2 - r^2(\Omega - \omega_d)^2 dt^2 \right] \\ &= -\frac{A}{r^4} (dx + r(\Omega - \omega_d)dt)^2 + \frac{A}{r^2} (\Omega - \omega_d)^2 dt^2. \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Substituindo na métrica obtemos

$$\begin{aligned} d\hat{s}^2 &= C^{-2}(\Omega)dt^2 - \frac{A}{r^4} (dx + r(\Omega - \omega_d)dt)^2 + \frac{A}{r^2} (\Omega - \omega_d)^2 dt^2 - dy^2 - \frac{r^2}{\Delta} dz^2, \\ &= \left( C^{-2}(\Omega) + \frac{A}{r^2} (\Omega - \omega_d)^2 \right) dt^2 - \frac{A}{r^4} (dx + r(\Omega - \omega_d)dt)^2 - dy^2 - \frac{r^2}{\Delta} dz^2. \\ d\hat{s}^2 &= r^2 \frac{\Delta}{A} dt^2 - \frac{A}{r^4} (dx + r(\Omega - \omega_d)dt)^2 - dy^2 - \frac{r^2}{\Delta} dz^2. \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Introduzindo os vetores coframe ou vetores bases [2], obtemos

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{ab} e^a e^b = (e^1)^2 - (e^2)^2 - (e^3)^2 - (e^4)^2, \\ &= (e^1_\mu dx^\mu)^2 - (e^2_\mu dx^\mu)^2 - (e^3_\mu dx^\mu)^2 - (e^4_\mu dx^\mu)^2, \\ &= (e^1_t dt + e^1_x dx + e^1_y dy + e^1_z dz)(e^1_t dt + e^1_x dx + e^1_y dy + e^1_z dz) \\ &\quad - (e^2_t dt + e^2_x dx + e^2_y dy + e^2_z dz)(e^2_t dt + e^2_x dx + e^2_y dy + e^2_z dz) \\ &\quad - (e^3_t dt + e^3_x dx + e^3_y dy + e^3_z dz)(e^3_t dt + e^3_x dx + e^3_y dy + e^3_z dz) \\ &\quad - (e^4_t dt + e^4_x dx + e^4_y dy + e^4_z dz)(e^4_t dt + e^4_x dx + e^4_y dy + e^4_z dz) \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

comparando (E.4) com (E.3) tem-se

$$\begin{aligned}
e_t^1 &= r\sqrt{\frac{\Delta}{A}}, \quad e_x^1 = e_y^1 = e_z^1 = 0, \\
e_t^2 &= \frac{\sqrt{A}}{r}(\Omega - \omega_d), \quad e_x^2 = \frac{\sqrt{A}}{r^2}, \quad e_y^2 = e_z^2 = 0, \\
e_t^3 &= 0, \quad e_x^3 = 0, \quad e_y^3 = 1, \quad e_z^3 = 0, \\
e_t^4 &= 0, \quad e_x^4 = 0, \quad e_y^4 = 0, \quad e_z^4 = \frac{r}{\sqrt{\Delta}},
\end{aligned} \tag{E.5}$$

as tétradas são

$$(e_\mu^a) = \begin{pmatrix} r\sqrt{\frac{\Delta}{A}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{A}}{r}(\Omega - \omega_d) & \frac{\sqrt{A}}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r}{\sqrt{\Delta}} \end{pmatrix}, \tag{E.6}$$

e as bases coframe são  $e^a = e_\mu^a dx^\mu$

$$\begin{aligned}
e^1 &= r\sqrt{\frac{\Delta}{A}}dt, \\
e^2 &= \frac{\sqrt{A}}{r}(\Omega - \omega_d)dt + \frac{\sqrt{A}}{r^2}dx, \\
e^3 &= dy \\
e^4 &= \frac{r}{\sqrt{\Delta}}dz,
\end{aligned} \tag{E.7}$$

Utilizando estas bases constrói-se o volume forma

$$dV = e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 \wedge e^4 \tag{E.8}$$

$$\begin{aligned}
dV &= r\sqrt{\frac{\Delta}{A}}dt \wedge \frac{\sqrt{A}}{r} \left[ (\Omega - \omega_d)dt + \frac{dx}{r} \right] \wedge dy \wedge \frac{r}{\sqrt{\Delta}}dz, \\
dV &= dt \wedge dx \wedge dy \wedge dz,
\end{aligned} \tag{E.9}$$

que concorda com o fato que

$$\det[e_\mu^a] = 1. \tag{E.10}$$

portanto pode-se construir as seguintes hipersuperfícies

$$dS_a = \frac{1}{3!} \varepsilon_{abcd} e^b \wedge e^c \wedge e^d, \tag{E.11}$$

em particular para uma superfície tipo espaço teremos

$$\begin{aligned}
dS^1 &= e^2 \wedge e^3 \wedge e^4, \\
&= \frac{\sqrt{A}}{r} \left[ (\Omega - \omega_d)dt + \frac{dx}{r} \right] \wedge dy \wedge \frac{r}{\sqrt{\Delta}}dz, \\
&= \sqrt{\frac{A}{\Delta}}(\Omega - \omega_d)dt \wedge dy \wedge dz + \frac{1}{r} \sqrt{\frac{A}{\Delta}} dx \wedge dy \wedge dz,
\end{aligned} \tag{E.12}$$

que define as seguintes duas superfícies

- superfície tipo espaço na direção de um vetor tipo tempo

$$dS_t^1 = dx \wedge dy \wedge dz, \rightarrow n^\mu = \left( \frac{1}{r} \sqrt{\frac{A}{\Delta}}, 0, 0, 0 \right) \quad (\text{E.13})$$

- Superfície nula na direção do vetor nulo

$$dS_x^1 = dy \wedge dt \wedge dz, \rightarrow n^\mu = \left( 0, -\sqrt{\frac{A}{\Delta}}(\Omega - \omega_d), 0, 0 \right) = \left( 0, \sqrt{\frac{A}{\Delta}}(\omega_d - \Omega), 0, 0 \right). \quad (\text{E.14})$$

Pode-se considerar então o vetor

$$n^\mu = \left( \frac{1}{r} \sqrt{\frac{A}{\Delta}}, \sqrt{\frac{A}{\Delta}}(\omega_d - \Omega), 0, 0 \right) \quad (\text{E.15})$$

mas sabemos que

$$\hat{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} C^{-2}(\Omega) & (\omega_d - \Omega) \frac{A}{r^3} & 0 & 0 \\ (\omega_d - \Omega) \frac{A}{r^3} & -\frac{A}{r^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{r^2}{\Delta} \end{pmatrix}. \quad (\text{E.16})$$

portanto

$$n_\mu = \hat{g}_{\mu\nu} n^\nu \quad (\text{E.17})$$

dsta forma tem-se

$$\begin{aligned} n_0 &= \hat{g}_{0\nu} n^\nu = \sqrt{\frac{A}{\Delta}} \frac{1}{r} \left[ C^{-2}(\Omega) + \frac{A}{r^2} (\Omega - \omega_d)^2 \right] = \sqrt{\frac{A}{\Delta}} \frac{1}{r} \left[ r^2 \frac{\Delta}{A} \right] \\ n_0 n^0 &= \sqrt{\frac{A}{\Delta}} \frac{1}{r} \left[ r^2 \frac{\Delta}{A} \right] \frac{1}{r} \sqrt{\frac{A}{\Delta}} = 1. \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

$$n_1 = \hat{g}_{1\nu} n^\nu = -(\Omega - \omega_d) \frac{A}{r^4} \sqrt{\frac{A}{\Delta}} + (\Omega - \omega_d) \frac{A}{r^4} \sqrt{\frac{A}{\Delta}} = 0, \quad (\text{E.19})$$

então ao invés de usar (E.15) podemos usar só

$$n^\mu = \left( \frac{1}{r} \sqrt{\frac{A}{\Delta}}, 0, 0, 0 \right) \quad (\text{E.20})$$

onde

$$n_\mu n^\mu = 1 \quad (\text{E.21})$$

Então  $n^\mu$  é um vetor tipo tempo. Uma hipersuperfície  $\mathcal{N}$  é chamada de tipo espaço, se o vetor  $N_x$  é normal em cada ponto  $x \in \mathcal{N}$ . É tipo tempo se,  $g(N_x, N_x) > 0$  com assinatura  $(+, -, -, -)$ <sup>1</sup>

<sup>1</sup> se a assinatura é  $(-, +, +, +)$  então o vetor é tipo tempo se  $g(N_x, N_x) < 0$ .

## E.1 Cálculo da integral de Superfície

a ideia é calcular a integral de superfície que aparece no produto de Klein-Gordon eq (3.18)

$$(\psi_n, \psi_m) = i \int_S [(\partial_\mu \psi_n) \psi_m^* - \psi_n (\partial_\mu \psi_m^*)] \sqrt{\hat{g}_S} n^\mu dS, \quad (\text{E.22})$$

usamos o vetor unitário (E.15) e o seguinte determinante da métrica induzida [23]

$$(\hat{g}_{\mu\nu}) = \begin{bmatrix} C^{-2}(\Omega) & -(\Omega - \omega_d) \frac{A}{r^3} & 0 & 0 \\ -(\Omega - \omega_d) \frac{A}{r^3} & -\frac{A}{r^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{r^2}{\Delta} \end{bmatrix}.$$

$$\hat{g} = 1 = g_{tt}g_S - g_{tx}g_{S1} + 0g_{S2} + 0g_{S3}$$

como o vetor esta na direção do tempo, então qualquer vetor em uma outra direção é ortogonal ao este vetor, portantoo  $dxdt = 0$ , desta forma tem-se

$$\hat{g} = 1 = g_{tt}\hat{g}_S \implies \hat{g}_S = \frac{1}{\hat{g}_{tt}} = C^2(\Omega).$$

usamos também a solução do campo escalar (3.16) dada por

$$\begin{aligned} \psi_n &= N_n e^{-i\omega_n t} e^{i(k_y y + k_z z)} e^{-i\beta_n x} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \\ \psi_n^* &= N_n e^{i\omega_n t} e^{-i(k_y y + k_z z)} e^{i\beta_n x} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right). \end{aligned} \quad (\text{E.23})$$

e o vetor unitário (E.15)

$$n^\mu = \left( \frac{1}{r} \sqrt{\frac{A}{\Delta}}, \sqrt{\frac{A}{\Delta}} (\omega_d - \Omega), 0, 0 \right). \quad (\text{E.24})$$

Pela eq (E.24) vemos que a integral de superfície nas componentes  $n^2 = n^3 = 0$  é nula, portantoo o produto interno (E.22) só contribui em  $n^0$  and  $n^1$ . Desta forma calcularmos as seguintes derivadas

$$\begin{aligned} \partial_0 \psi_n &= -i\omega_n \psi_n, \\ \partial_0 \psi_n^* &= i\omega_n \psi_n^*, \\ \partial_1 \psi_n &= -i\beta_n \psi_n + N_n e^{-i\omega_n t} e^{i(k_y y + k_z z)} e^{-i\beta_n x} \left(\frac{n\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \\ \partial_1 \psi_n^* &= i\beta_n \psi_n^* + N_n e^{i\omega_n t} e^{-i(k_y y + k_z z)} e^{i\beta_n x} \left(\frac{n\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right), \end{aligned} \quad (\text{E.25})$$

escrevendo (E.22) da forma

$$(\psi_n, \psi_m) = \imath(\mathcal{I}_0 + \mathcal{I}_1), \quad (\text{E.26})$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_0 &= \int_S [(-\imath\omega_n)\psi_n\psi_m^* - (\imath\omega_m)\psi_n\psi_m^*] C(\Omega) \sqrt{\frac{A}{\Delta}} \frac{1}{r} dx dy dz, \\ &= C(\Omega) \sqrt{\frac{A}{\Delta}} \frac{1}{r} [-\imath(\omega_n + \omega_m)] \int_S \psi_n\psi_m^* dx dy dz, \end{aligned} \quad (\text{E.27})$$

usando (E.23) e separando as integrais em  $x, y, z$  obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_0 &= C(\Omega) \sqrt{\frac{A}{\Delta}} \frac{1}{r} [-\imath(\omega_n + \omega_m)] N_n N_m e^{\imath(\omega_m - \omega_n)} \underbrace{\int_0^L dx e^{\imath(\beta_m - \beta_n)} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)}_{\frac{L}{2} \delta_{mn}} \\ &\quad \times \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{\imath(k_y - k'_y)y}}_{2\pi\delta(k_y - k'_y)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dz e^{\imath(k_z - k'_z)z}}_{2\pi\delta(k_z - k'_z)}, \\ &= -\imath(\omega_n + \omega_m) C(\Omega) \sqrt{\frac{A}{\Delta}} \frac{1}{r} N_n N_m e^{\imath(\omega_m - \omega_n)} \frac{L}{2} \delta_{mn} 2\pi\delta(k_y - k'_y) 2\pi\delta(k_z - k'_z), \\ &= -\imath(\omega_n + \omega_m) C(\Omega) \sqrt{\frac{A}{\Delta}} \frac{1}{r} \frac{L}{2} (2\pi)^2 N_n N_m e^{\imath(\omega_m - \omega_n)} \delta_{mn} \delta(k_y - k'_y) \delta(k_z - k'_z), \end{aligned} \quad (\text{E.28})$$

comparando com (3.20) a qual é a condição de ortogonalidade dos modos, tem-se

$$\mathcal{I}_0 = -\imath\omega_n C(\Omega) \sqrt{\frac{A}{\Delta}} \frac{1}{r} L (2\pi)^2 N_n^2. \quad (\text{E.29})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \int_S \left[ \left[ -\imath\beta_n \psi_n + N_n e^{-\imath\omega_n t} e^{\imath(k_y y + k_z z)} e^{-\imath\beta_n x} \left(\frac{n\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] \psi_m^* \right. \\ &\quad \left. - \psi_n \left[ \imath\beta_m \psi_m^* + N_m e^{\imath\omega_m t} e^{-\imath(k'_y y + k'_z z)} e^{\imath\beta_m x} \left(\frac{m\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \right] \right] C(\Omega) \sqrt{\frac{A}{\Delta}} (\omega_d - \Omega) dx dy dz, \end{aligned} \quad (\text{E.30})$$

esta integral contém termos cruzados de  $\sin(n\pi) \cos(m\pi)$  que são zero pela condição de ortogonalidade, portanto, esta integral é reduzida a

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &= \int_S [-\imath\beta_n \psi_n \psi_m^* - \imath\beta_m \psi_n \psi_m^*] C(\Omega) \sqrt{\frac{A}{\Delta}} (\omega_d - \Omega) dx dy dz \\ &= C(\Omega) \sqrt{\frac{A}{\Delta}} (\omega_d - \Omega) (-\imath\beta_n - \imath\beta_m) \int \psi_n \psi_m^* dx dy dz \end{aligned} \quad (\text{E.31})$$

A integral que aparece em (E.31) foi calculada acima, é

$$\int \psi_n \psi_m^* dx dy dz = N_n N_m e^{\imath(\omega_m - \omega_n)} \frac{L}{2} (2\pi)^2 \delta_{mn} \delta(k_y - k'_y) \delta(k_z - k'_z), \quad (\text{E.32})$$

Substituindo em (E.31), obtemos

$$\mathcal{I}_1 = -i\beta_n C(\Omega) \sqrt{\frac{A}{\Delta}} (\omega_d - \Omega) (2\pi)^2 L N_n^2, \quad (\text{E.33})$$

substituindo (E.33) e (E.29) na eq (E.26)

$$\begin{aligned} (\psi_n, \psi_m) &= i \left[ -i\omega_n C(\Omega) \sqrt{\frac{A}{\Delta}} \frac{1}{r} L (2\pi)^2 N_n^2 - i\beta_n C(\Omega) \sqrt{\frac{A}{\Delta}} (\omega_d - \Omega) (2\pi)^2 L N_n^2 \right], \\ &= C(\Omega) \sqrt{\frac{A}{\Delta}} L (2\pi)^2 N_n^2 \left[ \frac{\omega_n}{r} + \beta_n (\omega_d - \Omega) \right] = C(\Omega) \sqrt{\frac{A}{\Delta}} \frac{1}{r} L (2\pi)^2 N_n^2 [\omega_n + r\beta_n (\omega_d - \Omega)]. \end{aligned} \quad (\text{E.34})$$

$\beta_n$  é dado em (3.17) por

$$\begin{aligned} \beta_n &= \frac{b_n A}{r^3} (\omega_d - \Omega), \\ b_n &= \omega_n C^2(\Omega), \\ \beta_n &= \omega_n C^2(\Omega) \frac{A}{r^3} (\omega_d - \Omega), \\ [\omega_n + r\beta_n (\omega_d - \Omega)] &= \omega_n + \omega_n C^2(\Omega) \frac{A}{r^2} (\omega_d - \Omega)^2, \\ &= \omega_n C^2(\Omega) \left[ C^{-2}(\Omega) + \frac{A}{r^2} (\omega_d - \Omega)^2 \right], \\ &= \omega_n C^2(\Omega) \left[ \frac{\Delta r^2}{A} - \frac{A}{r^2} (\omega_d - \Omega)^2 + \frac{A}{r^2} (\omega_d - \Omega)^2 \right], \\ &= \omega_n C^2(\Omega) \frac{\Delta r^2}{A} \end{aligned} \quad (\text{E.35})$$

desta modo substituindo em (E.36)

$$(\psi_n, \psi_m) = C(\Omega) \sqrt{\frac{A}{\Delta}} \frac{1}{r} L (2\pi)^2 N_n^2 \omega_n C^2(\Omega) \frac{\Delta r^2}{A}, \quad (\text{E.36})$$

portanto a constante de normalização é dada por

$$N_n^2 = \frac{1}{(2\pi)^2 L \omega_n r} \sqrt{\frac{A}{\Delta}} C^{-3}(\Omega), \quad (\text{E.37})$$

que concorda com (3.21).

## APÊNDICE F – CÁLCULO DE TENSOR ENERGIA-MOMENTO NO ESPAÇO DE KERR

$$\begin{aligned}\psi_n &= N_n e^{-i\omega_n t} e^{i(k_y y + k_z z)} e^{-i\beta_n x} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \\ \psi_n^* &= N_n e^{i\omega_n t} e^{-i(k_y y + k_z z)} e^{i\beta_n x} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).\end{aligned}\tag{F.1}$$

$$\begin{aligned}\partial_0 \psi_n &= -i\omega_n \psi_n, \\ \partial_0 \psi_n^* &= i\omega_n \psi_n^*, \\ \partial_1 \psi_n &= -i\beta_n \psi_n + N_n e^{-i\omega_n t} e^{i(k_y y + k_z z)} e^{-i\beta_n x} \left(\frac{n\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \\ \partial_1 \psi_n^* &= i\beta_n \psi_n^* + N_n e^{i\omega_n t} e^{-i(k_y y + k_z z)} e^{i\beta_n x} \left(\frac{n\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \\ \partial_2 \psi_n &= ik_y \psi_n, \\ \partial_2 \psi_n^* &= -ik_y \psi_n^*, \\ \partial_3 \psi_n &= ik_z \psi_n, \\ \partial_3 \psi_n^* &= -ik_z \psi_n^*,\end{aligned}\tag{F.2}$$

calculando o segundo termo da direita em (4.1)

$$\hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \psi_n \partial_\nu \psi_n^* = \hat{g}^{0\nu} \partial_0 \psi_n \partial_\nu \psi_n^* + \hat{g}^{1\nu} \partial_1 \psi_n \partial_\nu \psi_n^* + \hat{g}^{2\nu} \partial_2 \psi_n \partial_\nu \psi_n^* + \hat{g}^{3\nu} \partial_3 \psi_n \partial_\nu \psi_n^*.\tag{F.3}$$

$$\begin{aligned}\hat{g}^{0\nu} \partial_0 \psi_n \partial_\nu \psi_n^* &= \hat{g}^{00} \partial_0 \psi_n \partial_0 \psi_n^* + \hat{g}^{01} \partial_0 \psi_n \partial_1 \psi_n^* + \hat{g}^{02} \partial_0 \psi_n \partial_2 \psi_n^* + \hat{g}^{03} \partial_0 \psi_n \partial_3 \psi_n^* \\ &= \frac{A}{r^2 \Delta} \omega_n^2 \psi_n \psi_n^* + \frac{A}{r \Delta} (\omega_d - \Omega) (-i\omega_n \psi_n) \left[ i\beta_n \psi_n^* + N_n e^{i\omega_n t} e^{-i(k_y y + k_z z)} e^{i\beta_n x} \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{n\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] \\ &= \frac{A}{r^2 \Delta} \omega_n^2 \psi_n \psi_n^* + \frac{A}{r \Delta} (\omega_d - \Omega) \left[ \omega_n \beta_n \psi_n \psi_n^* - \omega_n N_n^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right].\end{aligned}\tag{F.4}$$

$$\begin{aligned}
\hat{g}^{1\nu} \partial_1 \psi_n \partial_\nu \psi_n^* &= \hat{g}^{10} \partial_1 \psi_n \partial_0 \psi_n^* + \hat{g}^{11} \partial_1 \psi_n \partial_1 \psi_n^* + \hat{g}^{12} \partial_1 \psi_n \partial_2 \psi_n^* + \hat{g}^{13} \partial_1 \psi_n \partial_3 \psi_n^* \\
&= \frac{A}{r\Delta} (\omega_d - \Omega) \left[ -i\beta_n \psi_n + N_n e^{-\omega_n t} e^{i(k_y y + k_z z)} e^{-i\beta_n x} \right. \\
&\quad \times \left. \left( \frac{n\pi}{L} \right) \cos \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \right] (\omega_n \psi_n^*) - \frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega) \left[ -i\beta_n \psi_n \right. \\
&\quad \left. + N_n e^{-\omega_n t} e^{i(k_y y + k_z z)} e^{-i\beta_n x} \left( \frac{n\pi}{L} \right) \cos \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \right] \times \\
&\quad \left[ i\beta_n \psi_n^* + N_n e^{\omega_n t} e^{-i(k_y y + k_z z)} e^{i\beta_n x} \left( \frac{n\pi}{L} \right) \cos \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \right] \\
&= \frac{A}{r\Delta} (\omega_d - \Omega) \left[ \omega_n \beta_n \psi_n \psi_n^* + \omega_n N_n^2 \left( \frac{n\pi}{L} \right) \sin \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \right] \\
&\quad - \frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega) \left[ \beta_n^2 \psi_n \psi_n^* + N_n^2 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \cos^2 \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \right].
\end{aligned} \tag{F.5}$$

$$\begin{aligned}
\hat{g}^{2\nu} \partial_2 \psi_n \partial_\nu \psi_n^* &= \hat{g}^{20} \partial_2 \psi_n \partial_0 \psi_n^* + \hat{g}^{21} \partial_2 \psi_n \partial_1 \psi_n^* + \hat{g}^{22} \partial_2 \psi_n \partial_2 \psi_n^* + \hat{g}^{23} \partial_2 \psi_n \partial_3 \psi_n^* \\
&= -(ik_y \psi_n)(-ik_y \psi_n^*) \\
&= -k_y^2 \psi_n \psi_n^*.
\end{aligned} \tag{F.6}$$

$$\begin{aligned}
\hat{g}^{3\nu} \partial_3 \psi_n \partial_\nu \psi_n^* &= \hat{g}^{30} \partial_3 \psi_n \partial_0 \psi_n^* + \hat{g}^{31} \partial_3 \psi_n \partial_1 \psi_n^* + \hat{g}^{32} \partial_3 \psi_n \partial_2 \psi_n^* + \hat{g}^{33} \partial_3 \psi_n \partial_3 \psi_n^* \\
&= -\frac{\Delta}{r^2} (ik_z \psi_n)(-ik_z \psi_n^*) \\
&= -\frac{\Delta}{r^2} k_z^2 \psi_n \psi_n^*.
\end{aligned} \tag{F.7}$$

substituindo (F.4), (F.5), (F.6), (F.7) em (F.3), obtemos

$$\begin{aligned}
\hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \psi_n \partial_\nu \psi_n^* &= \frac{A}{r^2 \Delta} \omega_n^2 \psi_n \psi_n^* + \frac{A}{r\Delta} (\omega_d - \Omega) \left[ \omega_n \beta_n \psi_n \psi_n^* - \omega_n N_n^2 \left( \frac{n\pi}{L} \right) \sin \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \right] \\
&\quad + \frac{A}{r\Delta} (\omega_d - \Omega) \left[ \omega_n \psi_n \psi_n^* + \omega_n N_n^2 \left( \frac{n\pi}{L} \right) \sin \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \right] \\
&\quad - \frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega) \left[ \beta_n^2 \psi_n \psi_n^* + N_n^2 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \cos^2 \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \right] \\
&\quad - k_y^2 \psi_n \psi_n^* - \frac{\Delta}{r^2} k_z^2 \psi_n \psi_n^*.
\end{aligned} \tag{F.8}$$

$$\begin{aligned}
\hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \psi_n \partial_\nu \psi_n^* &= \frac{A}{r^2 \Delta} \omega_n^2 \psi_n \psi_n^* + \frac{A}{r \Delta} (\omega_d - \Omega) \omega_n \beta_n \psi_n \psi_n^* \\
&\quad - \frac{A}{r \Delta} (\omega_d - \Omega) \omega_n N_n^2 \left( \frac{n\pi}{L} \right) \sin \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \\
&\quad + \frac{A}{r \Delta} (\omega_d - \Omega) \omega_n \beta_n \psi_n \psi_n^* + \frac{A}{r \Delta} (\omega_d - \Omega) \omega_n N_n^2 \left( \frac{n\pi}{L} \right) \sin \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \\
&\quad - \frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega) \left[ \beta_n^2 \psi_n \psi_n^* + N_n^2 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \cos^2 \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \right] \\
&\quad - k_y^2 \psi_n \psi_n^* - \frac{\Delta}{r^2} k_z^2 \psi_n \psi_n^*. \\
&= \left[ \frac{A}{r^2 \Delta} \omega_n^2 + 2 \frac{A}{r \Delta} (\omega_d - \Omega) \omega_n \beta_n - \frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega) \beta_n^2 - k_y^2 - \frac{\Delta}{r^2} k_z^2 \right] \psi_n \psi_n^* \\
&\quad - \frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega) N_n^2 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \cos^2 \left( \frac{n\pi}{L} x \right).
\end{aligned} \tag{F.9}$$

Substituindo eq (F.9), eq (F.2) em (4.1), obtem-se

$$\begin{aligned}
\theta_{00} &= \omega_n^2 \psi_n \psi_n^* - \frac{1}{2} C^{-2}(\Omega) (\hat{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \psi_n \partial_\nu \psi_n^*), \\
&= \omega_n^2 \psi_n \psi_n^* - \frac{1}{2} C^{-2} \left( \left[ \frac{A}{r^2 \Delta} \omega_n^2 + 2 \frac{A}{r \Delta} (\omega_d - \Omega) \omega_n \beta_n - \frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega) \beta_n^2 - k_y^2 - \frac{\Delta}{r^2} k_z^2 \right] \psi_n \psi_n^* \right. \\
&\quad \left. - \frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega) N_n^2 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \cos^2 \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \right).
\end{aligned} \tag{F.10}$$

Usando o fato que

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \frac{b_n A}{r^3} (\omega_d - \Omega); \quad b_n = \omega_n C^2(\Omega) \\
\frac{\omega_n}{b_n} &= C^{-2}(\Omega),
\end{aligned} \tag{F.11}$$

portanto

$$\begin{aligned}
2 \frac{A}{r \Delta} (\omega_d - \Omega) \omega_n \beta_n &= 2 \frac{A}{r \Delta} (\omega_d - \Omega) \omega_n \frac{b_n A}{r^3} (\omega_d - \Omega) \\
&= 2 \frac{A}{r \Delta} (\omega_d - \Omega) \omega_n \frac{\omega_n C^2(\Omega) A}{r^3} (\omega_d - \Omega) \\
&= \frac{2A^2}{r^4 \Delta} (\omega_d - \Omega)^2 \omega_n^2 C^2(\Omega),
\end{aligned} \tag{F.12}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega) \beta_n^2 &= \frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega) \left( \frac{b_n A (\omega_d - \Omega)}{r^3} \right)^2, \\
&= \frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega) \frac{b_n^2 A^2 (\omega_d - \Omega)^2}{r^6}, \\
&= \frac{C^{-2}(\Omega)}{\Delta} \frac{\omega_n^2 C^4(\Omega) A^2 (\omega_d - \Omega)^2}{r^4}, \\
&= \frac{A^2}{r^4 \Delta} (\omega_d - \Omega)^2 \omega_n^2 C^2(\Omega).
\end{aligned} \tag{F.13}$$

usando este resultado na densidade Hamiltoniana em (F.10) torna-se

$$\begin{aligned}
\theta_{00} &= \omega_n^2 \psi_n \psi_n^* + \frac{1}{2} C^{-2}(\Omega) \left( \omega_n^2 \left[ -\frac{A}{r^2 \Delta} - 2 \frac{A^2}{r^4 \Delta} (\omega_d - \Omega)^2 C^2(\Omega) + \frac{A^2}{r^4 \Delta} (\omega_d - \Omega)^2 C^2(\Omega) \right] \psi_n \psi_n^* \right. \\
&\quad \left. + \left[ k_y^2 + \frac{\Delta}{r^2} k_z^2 \right] \psi_n \psi_n^* + \frac{r^2}{\Delta} C^{-2}(\Omega) N_n^2 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \cos^2 \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \right), \\
&= \omega_n^2 \psi_n \psi_n^* + \frac{1}{2} \left( \omega_n^2 \psi_n \psi_n^* \left[ -\frac{A}{r^2 \Delta} C^{-2}(\Omega) - \frac{A^2}{r^4 \Delta} (\omega_d - \Omega)^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[ k_y^2 + \frac{\Delta}{r^2} k_z^2 \right] \psi_n \psi_n^* C^{-2}(\Omega) + \frac{r^2}{\Delta} C^{-4}(\Omega) N_n^2 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \cos^2 \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \right).
\end{aligned} \tag{F.14}$$

Substituindo a forma explícita de  $C(\Omega)$  da eq (C.12), e usando a equação (F.14), obtem-se

$$\begin{aligned}
\frac{A}{r^2 \Delta} C^{-2}(\Omega) &= \frac{A}{r^2 \Delta} \left[ \frac{r^2 \Delta}{A} \left( 1 - \frac{A^2}{r^4 \Delta} (\Omega - \omega_d)^2 \right) \right], \\
&= 1 - \frac{A^2}{r^4 \Delta} (\Omega - \omega_d)^2.
\end{aligned} \tag{F.15}$$

substituindo eq (F.15) em eq (F.14) tem-se

$$\begin{aligned}
\theta_{00} &= \omega_n^2 \psi_n \psi_n^* + \frac{1}{2} \left( \omega_n^2 \psi_n \psi_n^* \left[ -1 + \frac{A^2}{r^4 \Delta} (\Omega - \omega_d)^2 - \frac{A^2}{r^4 \Delta} (\omega_d - \Omega)^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[ k_y^2 + \frac{\Delta}{r^2} k_z^2 \right] \psi_n \psi_n^* C^{-2}(\Omega) + \frac{r^2}{\Delta} C^{-4}(\Omega) N_n^2 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \cos^2 \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \right),
\end{aligned} \tag{F.16}$$

ou

$$\begin{aligned}
\theta_{00} &= \omega_n^2 \psi_n \psi_n^* - \frac{1}{2} \omega_n^2 \psi_n \psi_n^* + \frac{1}{2} \left[ k_y^2 + \frac{\Delta}{r^2} k_z^2 \right] \psi_n \psi_n^* C^{-2}(\Omega) + \frac{1}{2} \frac{r^2}{\Delta} C^{-4}(\Omega) N_n^2 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \cos^2 \left( \frac{n\pi}{L} x \right), \\
&= \frac{1}{2} \omega_n^2 \psi_n \psi_n^* + \frac{1}{2} \left[ k_y^2 + \frac{\Delta}{r^2} k_z^2 \right] \psi_n \psi_n^* C^{-2}(\Omega) + \frac{1}{2} \frac{r^2}{\Delta} C^{-4}(\Omega) N_n^2 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \cos^2 \left( \frac{n\pi}{L} x \right).
\end{aligned} \tag{F.17}$$

Usando (F.11) podemos apresentar a equação (F.17) na forma

$$\begin{aligned}
\theta_{00} &= \frac{1}{2} \left[ \omega_n^2 + \frac{\omega_n}{b_n} \left( k_y^2 + \frac{\Delta}{r^2} k_z^2 \right) \right] \psi_n \psi_n^* + \frac{1}{2} \frac{r^2}{\Delta} \frac{\omega_n^2}{b_n^2} N_n^2 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \cos^2 \left( \frac{n\pi}{L} x \right), \\
&= \frac{1}{2} \left[ \omega_n^2 + \frac{\omega_n}{b_n} \left( k_y^2 + \frac{\Delta}{r^2} k_z^2 \right) \right] N_n^2 \sin^2 \left( \frac{n\pi}{L} x \right) + \frac{1}{2} \frac{r^2}{\Delta} \frac{\omega_n^2}{b_n^2} N_n^2 \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \cos^2 \left( \frac{n\pi}{L} x \right), \\
\theta_{00} &= \frac{1}{2} N_n^2 \left[ \mathcal{F}_n \sin^2 \left( \frac{n\pi}{L} x \right) + \mathcal{G}_n \cos^2 \left( \frac{n\pi}{L} x \right) \right]
\end{aligned} \tag{F.18}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_n &= \omega_n^2 + \frac{\omega_n}{b_n} \left( k_y^2 + \frac{\Delta}{r^2} k_z^2 \right), \\
\mathcal{G}_n &= \frac{\omega_n^2}{b_n^2} \frac{r^2}{\Delta} \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2.
\end{aligned} \tag{F.19}$$



## APÊNDICE G – ANÁLISE DIMENSIONAL

Em unidades naturais  $[\hbar] = [c] = 1$ , portanto

$$[E] = M, \quad L = T \tag{G.1}$$

mas sabemos que a ação é definida como

$$S = \int dt L_{lagrangian}, \quad [S] = [E][T], \tag{G.2}$$

Para obter a ação sem dimensões  $[S] = 1$  então

$$[E] = T^{-1} = L^{-1}. \tag{G.3}$$

Para a densidade Lagrangeana, tem-se

$$S = \int dt \int d^3x \mathcal{L} = \int d^4x \mathcal{L}, \tag{G.4}$$

$$[\mathcal{L}] = \frac{[L_{lagrangian}]}{L^3} = \frac{[E]}{L^3} = \frac{1}{L^4} = [E^4]$$

onde  $\mathcal{L}$  é a densidade Lagrangeana. Isto mostra que

$$\frac{1}{2} [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi] = \frac{1}{L^2} [\phi^2] = [E^4], \tag{G.5}$$

$$[\phi^2] = [E^4] L^2 = [E^4] [(E)^{-1}]^2 = [E^2], \quad [\phi] = [E] = M.$$

As dimensões das funções ortogonais e do campo são

$$[\phi] = [E] = M = L^{-1},$$

$$[u] = \frac{1}{L^{1/2}} = [E^{1/2}], \tag{G.6}$$

$$[f] = L^{1/2} = [E^{-1/2}],$$

$$[a^\dagger] = L = [E^{-1}].$$

As dimensões de  $\hbar$  são as mesmas dimensões da ação (G.2)

$$E = hf,$$

$$[E] = [h][f], \tag{G.7}$$

$$[h] = [E][T],$$

Lembre-se de que as unidades da frequência são  $T^{-1}$ .