



UNIVERSIDADE
ESTADUAL de LONDRINA

HALLYNNEE HÉLLENN PIRES ROSSETTO

**O DESENVOLVIMENTO DE UM FRAMEWORK DE
TRAJETÓRIAS DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE
MATEMÁTICA**

Londrina
2021

HALLYNNEE HÉLLENN PIRES ROSSETTO

**O DESENVOLVIMENTO DE UM FRAMEWORK DE
TRAJETÓRIAS DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE
MATEMÁTICA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Doutor.

Orientadora: Prof.^a Dr.^a Regina Luzia Corio de Buriasco.

Londrina
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Rossetto, Hallynnee Héllenn Pires.

O desenvolvimento de um framework de trajetórias de ensino e aprendizagem de matemática / Hallynnee Héllenn Pires Rossetto. - Londrina, 2021.
91 f.

Orientador: Regina Luzia Corio de Buriasco.

Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2021.

Inclui bibliografia.

1. Educação Matemática - Tese. 2. Educação Matemática Realística - Tese. 3. Trajetória de Ensino e Aprendizagem - Tese. 4. Framework - Tese. I. Buriasco, Regina Luzia Corio de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 37

HALLYNNEE HÉLLENN PIRES ROSSETTO

**O DESENVOLVIMENTO DE UM FRAMEWORK DE TRAJETÓRIAS DE
ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de Doutor.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Profa. Dra. Regina Luzia Corio de
Buriasco
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Profa. Dra. Eliane Scheid Gazire
Pontifícia Universidade Católica de Minas
Gerais – PUC

Prof. Dr. Diego Fogaça Carvalho
Universidade Pitágoras/Unopar

Profa. Dr. André Luis Trevisan
Universidade Tecnológica Federal do Paraná –
UTFPR

Profa. Dra. Pamela Emanuelli Alves Ferreira
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Londrina, 04 de março de 2021.

AGRADECIMENTOS

A Deus e a Nossa Senhora por estarem sempre comigo.

Aos meus pais, Nazaré e Dino, por me apoiarem, por me incentivarem a realizar meus sonhos, pelo colo nos momentos mais difíceis, por todo amor, respeito, carinho.

Aos meus irmãos, Té e Tom, por me incentivarem e torcerem pelo meu sucesso. E à nossa princesinha, Maria, que chegou para unir, mais ainda, nossa família com momentos de confraternização e amor.

Ao Osmar, pela amizade, carinho, atenção, por me incentivar e por todos os momentos compartilhados.

A minha orientadora, professora Regina, por ter aceitado mais uma vez ser minha orientadora, pelas orientações, conversas de pé de orelha, disponibilidade e, principalmente, pela amizade que construímos.

Aos professores da banca, Prof^a. Dra. Eliane Scheid Gazire, Prof. Dr. Diego Fogaça Carvalho, Profa. Dr. André Luis Trevisan, Prof^a. Dra. Pamela Emanuelli Alves Ferreira pelo cuidado em suas leituras e pelas valiosas contribuições.

Ao GEPEMA, pelas conversas, discussões, críticas, incentivo e, principalmente, pelas oportunidades de aprender.

Aos meus familiares, que me incentivaram e torceram por mim.

Aos muitos amigos, de perto e de longe, que estiveram sempre presentes nesta trajetória. Em especial, ao Cristiano, Diego, Etiane, Marcia, Mariana Passos, Mariana Nogueira, Nicole, pelo colo, conversas, desabafos, apoio, incentivo.

Enfim, a todos que, de algum modo, contribuíram para a conquista desse sonho!

ROSSETTO, Hallynnee Héllenn Pires. **O desenvolvimento de um framework de trajetórias de ensino e aprendizagem de matemática.** 2021. 91 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

RESUMO

Esta tese de doutorado teve como objetivo desenvolver um framework com base na abordagem ao ensino de matemática denominada Educação Matemática Realística. Nessa abordagem, o professor é um guia dos processos de ensino e de aprendizagem, e esse guia pode ser planejado por meio da elaboração de Trajetórias de Ensino e de Aprendizagem – TEA. O trabalho foi desenvolvido em uma perspectiva de pesquisa de natureza teórica do tipo especulativa. De maneira geral, as análises mostraram que os elementos presentes no FrameTEA vão além dos elementos da própria TEA, quais sejam, uma trajetória de ensino, trajetória de aprendizagem, o esboço dos conteúdos. O professor, ao utilizar o FrameTEA para elaborar sua trajetória, pode iniciar por qualquer uma das suas fases, o que lhe cabe é ter bem definidos quais são seus objetivos, intenções. O FrameTEA não é uma estrutura que precisa ser seguida, mas, sim, como uma estrutura que pode auxiliá-lo no seu planejamento, nas suas tomadas de decisões no seu trabalho em sala de aula.

Palavras-chave: Educação Matemática. Educação Matemática realística. Trajetória de ensino e aprendizagem. Trajetória hipotética de aprendizagem. Framework.

ROSSETTO, Hallynnee Héllenn Pires. **The development of a framework for teaching and learning mathematics trajectories**. 2021. 91 f. Thesis (Sciences and Mathematics Education Post-Graduate Program) – State University of Londrina, Londrina, 2021.

ABSTRACT

This doctoral thesis aimed to develop a framework based on the approach to teaching mathematics called Realistic Mathematical Education. In this approach, the teacher is a guide to the teaching and learning processes, and this guidance can be planned through the elaboration of Teaching and Learning Trajectories - TEA. The work was developed from a speculative theoretical research perspective. In general, the analyzes showed that the elements present in FrameTEA go beyond the elements of the TEA itself, namely, a teaching trajectory, a learning trajectory, the outline of the contents. The teacher, when using FrameTEA to elaborate his trajectory, can start by any of its phases, what is up to him is to have well defined what his objectives, intentions are. FrameTEA is not a structure that needs to be followed, but rather a structure that can assist you in your planning, in your decision making in your classroom work.

Keywords: Math education. Realistic Math education. Teaching and learning trajectory. Hypothetical learning trajectory. Framework.

LISTA DE FIGURAS

Figura 01	Plano geral da pesquisa especulativa.....	13
Figura 02	<i>Framework</i> TPACK.....	25
Figura 03	<i>Framework</i> “Eu fiz Meu Game”.....	26
Figura 04	<i>Framework</i> FrameVOC.....	27
Figura 05	<i>Framework</i> FACE.....	28
Figura 06	<i>Framework</i> pedagógico para o mobile learning.....	29
Figura 07	<i>Framework</i> para analisar o mobile learning.....	30
Figura 08	<i>Framework</i> contextualizador da aprendizagem nômade.....	31
Figura 09	Ciclo de Ensino de Matemática abreviado.....	40
Figura 10	Ciclo de Ensino de Matemática.....	43
Figura 11	THA – pontos de vista.....	45
Figura 12	Elementos que fazem parte de uma Trajetória de Ensino e de Aprendizagem.....	58
Figura 13	Elementos “outros” que fazem parte de uma Trajetória de Ensino e de Aprendizagem.....	60
Figura 14	Um <i>FrameTEA</i> – fases do processo de produção/elaboração de uma Trajetória de Ensino e de Aprendizagem.....	68
Figura 15	Um outro <i>FrameTEA</i>	75
Figura 16	Um <i>FrameTEA</i>	76

LISTA DE QUADROS

Quadro 01	Quadro com os três pontos da pesquisa especulativa.....	12
Quadro 02	Resultado da pesquisa da palavra <i>framework</i>	15
Quadro 03	Quadro dos filtros aplicados para refinar os resultados da pesquisa da palavra <i>framework</i>	16
Quadro 04	Quadro do primeiro filtro aplicado para refinar os resultados da pesquisa da palavra <i>framework</i>	17
Quadro 05	Quadro do segundo filtro aplicado para refinar os resultados da pesquisa da palavra <i>framework</i>	17
Quadro 06	Quadro do terceiro filtro aplicado para refinar os resultados da pesquisa da palavra <i>framework</i>	18
Quadro 07	Quadro do quarto filtro aplicado para refinar os resultados da pesquisa da palavra <i>framework</i>	19
Quadro 08	Quadro do quinto filtro aplicado para refinar os resultados da pesquisa da palavra <i>framework</i>	19
Quadro 09	Quadro com os trabalhos que continham o termo <i>framework</i>	20
Quadro 10	Quadro com os trabalhos que continham o termo quadro teórico	21
Quadro 11	Princípios da RME X Ensino e Aprendizagem	36
Quadro 12	Resumo dos Princípios da RME	36
Quadro 13	Ações que representam os três pontos de vista da THA	44
Quadro 14	Frases que trazem a presença do professor e aluno nos elementos da TEA.....	65
Quadro 15	Mudança que ocorreu da Figura 12 para a Figura 13	66
Quadro 16	“Olhar para dentro” do frameTEA.....	72
Quadro 17	Quadro dos autores que tratam das fases do FrameTEA	74
Quadro 18	Aspectos desejáveis para uma aula na perspectiva da RME	80

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	9
1	A PESQUISA	12
1.1	UM CAMINHO	15
1.2	OUTRO CAMINHO	22
1.3	MAIS UM CAMINHO.....	23
2	FRAMEWORK OU QUADRO TEÓRICO	24
3	EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA	34
4	TRAJETÓRIAS	39
4.1	TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM.....	39
4.2	TRAJETÓRIA DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM	45
5	A CAMINHO DE UM FRAMEWORK	54
5.1	FRAMEWORK NA TESE.....	54
5.2	UMA PRIMEIRA IDEIA PARA O FRAMEWORK.....	55
5.3	UMA SEGUNDA IDEIA: UM FRAMETEA.....	66
6	ALGUMAS CONSIDERAÇÕES	76
	REFERÊNCIAS	80

INTRODUÇÃO

Desenvolver um *framework* que auxilie professores em seu trabalho em sala de aula é o objetivo desta pesquisa que dá prosseguimento ao estudo desenvolvido para a dissertação da autora (ROSSETTO, 2016), no qual foi analisado de que forma professores que ensinam matemática na Educação Básica lidam com a construção de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem – THA¹. A intenção era que eles vivenciassem, em uma Oficina de Formação, uma oportunidade de aprendizagem utilizando a prática de elaborar uma THA que permitisse um espaço de debate, reflexão e troca de experiência.

Na Oficina, os professores, puderam apresentar estratégias e procedimentos baseados na matemática escolar que é comumente trabalhada na Educação Básica. Houve diversos momentos com troca de ideias, informações, conversas, discussões, debates, argumentação dessas ideias.

Dessa forma, entendeu-se que o professor, ao incluir nas suas práticas a elaboração de Trajetórias de Ensino e de Aprendizagem, pode ter como resultado um instrumento que possibilita uma visão geral dos processos de ensino e de aprendizagem, que pode auxiliar em suas tomadas de decisões a respeito dos conteúdos e tarefas, assim como do que poderá desenvolver com os estudantes.

Com a dissertação, foi possível perceber que, ao elaborarem trajetórias, os professores tiveram momentos de troca de experiências e um espaço de debate, o que, para o GEPEMA – Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação², é entendido como oportunidade de aprendizagem. Outro aspecto apontado foi em relação ao conhecimento específico do professor, uma vez que é desejável que ele reflita, reexamine sua produção, podendo modificá-la quando necessário.

A partir das reflexões suscitadas com a pesquisa de dissertação, com as discussões e trabalhos desencadeados no GEPEMA a respeito dos processos de ensino e de aprendizagem da matemática, emergiu a preocupação com aspectos referentes à sala de aula, tanto de natureza teórica quanto prática.

¹ A partir deste momento, a sigla THA será utilizada no lugar de Trajetória Hipotética de Aprendizagem.

² GEPEMA – Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação, da Universidade Estadual de Londrina. Outras informações em: <http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema/index.html>.

Em consequência, decidiu-se pela continuidade da pesquisa com Trajetórias de Ensino e de Aprendizagem – TEA³ ainda no contexto dos estudos realizados no interior do GEPEMA, particularmente os relacionados às práticas em sala de aula. Essa foi a gênese deste estudo, pois traz aspectos da TEA discutidos na dissertação, ampliando a análise e a discussão na direção de constituir um *framework* que pode ser utilizado para a implementação de Trajetórias de Ensino e de Aprendizagem em sala de aula.

Nesta tese, considera-se *framework* como um arcabouço de ideias, conceitos, pressupostos, princípios que se inter-relacionam de modo que possa ser utilizado para orientar a produção/elaboração/exploração/planejamento/desenvolvimento/tomada de decisão de trajetórias de ensino e de aprendizagem.

A proposta desta tese é desenvolver um *framework* de Trajetória de Ensino e de Aprendizagem na perspectiva da Educação Matemática Realística - RME⁴.

São objetivos específicos da tese:

- inventariar e discutir o que se entende por *framework* com base na literatura alcançada;
- identificar características de um *framework*;
- descrever características da Educação Matemática Realística;
- apresentar características da Trajetória Hipotética de Aprendizagem e da Trajetória de Ensino e de Aprendizagem;
- analisar e discutir um *framework* de Trajetória de Ensino e de Aprendizagem seguindo os princípios da Educação Matemática Realística.

Esta tese está assim estruturada:

Introdução – que traz uma apresentação da pesquisa.

1. **A pesquisa** – informações da trajetória desta investigação.

³ A partir deste momento, a sigla TEA será utilizada no lugar de Trajetória de Ensino e de Aprendizagem.

⁴ Nesta tese será utilizada a sigla RME da expressão *Realistic Mathematics Education*.

2. **Framework e Quadro teórico** – apresenta o que é um *framework* com base na literatura e o *framework* como apoio na elaboração de trajetórias.
3. **Educação Matemática Realística** – capítulo que apresenta um panorama das ideias da RME.
4. **Trajétoria Hipotética de Aprendizagem e Trajetória de Ensino e de Aprendizagem** – contém aspectos da Trajetória Hipotética de Aprendizagem de acordo com Simon (1995) e da Trajetória de Ensino e de Aprendizagem com base em autores da RME.
5. **Uma Análise** – apresenta o recontar da elaboração do *framework* na perspectiva da RME.
6. **Algumas considerações** – são apresentadas algumas considerações relativas à investigação realizada.

1 A PESQUISA

O desenvolvimento desta investigação, de natureza qualitativa, deu-se com base em orientações da pesquisa teórica especulativa. Na pesquisa especulativa, o pesquisador produz seu texto com base em outros textos já produzidos (VAN DER MAREN, 1996). O pesquisador precisa fazer escolhas e, a partir da interpretação dos textos já produzidos, escreve seu próprio texto, interpretando e discutindo o que foi investigado. Ainda assim, a interpretação e a discussão não são o bastante e o pesquisador precisa complementar com o recontar. O texto final é gerado pelo recontar. Esse tipo de pesquisa se resume em três pontos: 1) a interpretação; 2) a argumentação e 3) o recontar (MARTINEAU, SIMARD, GAUTHIER, 2001). O Quadro 01 apresenta características desses três pontos:

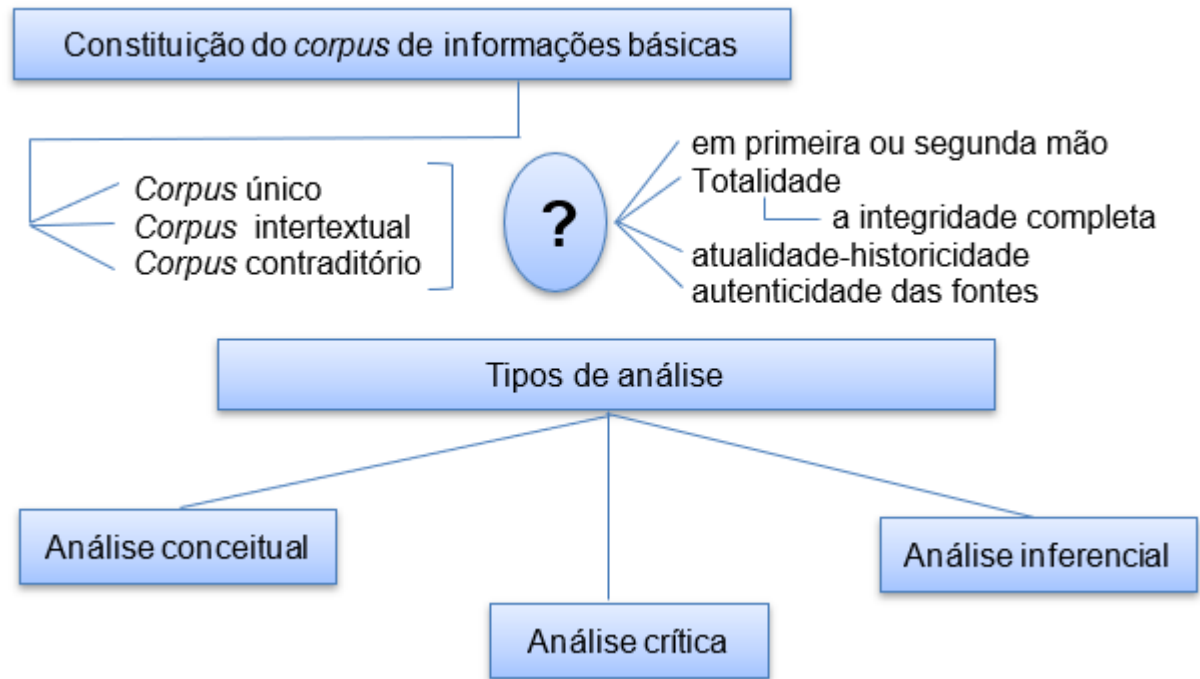
Quadro 01 – Quadro com os três pontos da pesquisa especulativa

Eixo	Significado
A interpretação	O pesquisador, para construir seu texto, precisa interpretar textos de outros pesquisadores para ter uma visão do que está pesquisando. Ele precisa realizar uma leitura hermenêutica nos textos, fazer uma reflexão e interpretar os textos.
A argumentação	O pesquisador deve escrever um texto original, pois apenas interpretar e discutir os textos já produzidos a respeito de determinado assunto não satisfaz esse tipo de pesquisa.
O Recontar	O pesquisador precisa dialogar com a literatura, e a narrativa é um fator de coerência discursiva. O foco desse tipo de pesquisa está na capacidade de o pesquisador formular um problema, propor uma análise e argumentar.

Fonte: autora – baseada em Martineau, Simard, Gauthier (2001)

De acordo com Van der Maren (1996), a constituição do *corpus* de informações básicas e os tipos de análises são os dois momentos da pesquisa especulativa. O plano geral desse tipo de pesquisa pode ser visto na Figura 01.

Figura 01 – Plano geral da pesquisa especulativa



Fonte: Van Der Maren (1996, p. 134, tradução nossa)

A primeira tarefa de uma pesquisa especulativa é a constituição do *corpus* de informações básicas, é o momento em que o pesquisador irá selecionar escritos a partir dos quais a pesquisa será realizada (VAN DER MAREN, 1996). A constituição do *corpus* da pesquisa depende do objeto que se está pesquisando. Pode ser único, intertextual ou contraditório. O *corpus* é único se o objeto de especulação estiver relacionado à interpretação das declarações teóricas de um conceito e de um autor. O *corpus* é intertextual quando o pesquisador identifica o que é comum nas declarações produzidas por vários autores sobre um tema, ou por um autor que aborda diferentes leituras em várias situações, mas também para identificar diferenças nas condições de produção dessas declarações (VAN DER MAREN, 1996). Por fim, o *corpus* contraditório consiste em identificar os diferentes pontos de vista nas declarações de autores. Esse tipo de *corpus* auxilia a clarear as informações divergentes.

Selecionado o *corpus* da pesquisa, o pesquisador precisa definir o tipo de análise que será realizada. Van Der Maren (1996) indica três tipos de análises: a conceitual, a crítica e a inferencial.

Na análise conceitual, o pesquisador, por meio de comparações, procura identificar o que se entende por um conceito, qual a intenção ou compreensão que se tem. É importante que o pesquisador identifique o significado e as possíveis aplicações do conceito. Essas comparações devem ser feitas em diferentes perspectivas: histórica, evolutiva, no nível de discursos teóricos, em relação à operacionalização.

Inicialmente, o pesquisador registra a história do conceito em estudo e, após isso, analisa as relações entre as diferentes ocorrências do conceito teórico feitas por diferentes autores ou contextos na organização da finalidade conceitual do termo em estudo. Com isso, o pesquisador poderá observar claramente o conceito analisado e elaborar uma representação da intenção e do alcance dele (PASSOS, 2015, p. 33-34).

O objetivo da análise crítica é julgar declarações teóricas com a intenção de destacar as suas falhas, contradições, paradoxos, condições, pressupostos, implicações, consequências e, principalmente, o que não foi dito pelos primeiros autores (VAN DER MAREN, 1996). A intenção da análise crítica é condenar uma teoria para substituí-la por outra, ou propor melhorias, mudanças. Após escolhida a teoria que será analisada, o próximo passo do pesquisador é identificar os conceitos mais simples, apontar os problemas encontrados e, por fim, propor novos conceitos que substituirão os anteriores e que serão mais consistentes teoricamente.

A análise inferencial tem por objetivo o desenvolvimento ou a ampliação de uma teoria. Ao adicionar elementos teóricos a essa teoria, temos a ampliação dela. O desenvolvimento é feito por meio da transferência de uma teoria para outro campo, a partir de uma analogia percebida entre outros domínios (VAN DER MAREN, 1996). No caso da ampliação interna de uma teoria, a análise inferencial ocorre por meio do exame do significado, das implicações e consequências de conceitos e da sua operacionalização, assim como pela relevância desta última. Essa revisão aborda a análise crítica, mas com uma perspectiva de ampliação em vez de condenação e substituição. Quando se trata do desenvolvimento de uma teoria, as inferências acontecem, principalmente de maneira analógica, ou seja, em relação à semelhança entre os conceitos. Nesta investigação será esse o tipo de análise utilizada.

O pesquisador descobre, em uma teoria A, obras de outros pesquisadores de uma teoria B e percebe a possibilidade de transferir o domínio B para o domínio A. A validação da nova teoria A deve

seguir os mesmos caminhos da validação de uma nova teoria (PASSOS, 2015, p. 34).

A análise desta pesquisa será realizada por meio da compreensão e consequente reflexão e interpretação do que se entende por *framework* na literatura, bem como o que é uma Trajetória de Ensino e de Aprendizagem com base na perspectiva da RME. O recontar dessas etapas é o texto final aqui apresentado.

1.1 UM CAMINHO

O *corpus* da presente pesquisa é intertextual e foi constituído pela busca do termo *framework* no Catálogo de Teses e Dissertações/CAPES, identificando as pesquisas que abordaram esse assunto. A escolha desse catálogo se deu por ser um banco de dados multidisciplinares, disponibilizado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior — CAPES, que contém informações bibliográficas das dissertações e teses publicadas pelos Programas de Pós-Graduação de todo o país. Essa busca foi realizada no período de 15/08/2018 a 7/11/2018.

Ao acessar o Catálogo de Teses e Dissertações/Capes e realizar a pesquisa da palavra “*framework*”, 18809 trabalhos, entre teses e dissertações de doutorado/mestrado profissional e acadêmico, foram encontrados no período de 1987 a 2018. Essa busca foi realizada por autor, título, instituição, nível e ano de defesa do trabalho, resumo, palavras-chave, biblioteca, linha de pesquisa, área de conhecimento, programa, agência financiadora.

Nesse catálogo é possível refinar os resultados por meio de filtros, tais como: Tipo; Ano; Autor; Orientador; Banca; Grande Área Conhecimento; Área Conhecimento; Área Avaliação; Área Concentração; Nome Programa; Instituição e Biblioteca. O Quadro 02 apresenta os filtros do Catálogo de Teses e Dissertações/Capes.

Quadro 02 – Resultado da pesquisa da palavra *framework*

Filtro	Opções e quantidades⁵
Tipo	DOUTORADO (5211) MESTRADO (11244) MESTRADO PROFISSIONAL (2253) PROFISSIONALIZANTE (101)
Ano	1987 (2) 1990 (1) 1994 (1) 1995 (5) 1996 (8) 1997 (15) 1998 (21) 1999 (21) 2000 (32) 2001 (57) 2002 (54) 2003 (70) 2004 (89) 2005 (103)

⁵ Os números que aparecem no Quadro 02 entre parênteses referem-se à quantidade de cada filtro.

	2006 (106) 2007 (114) 2008 (137) 2009 (161) 2010 (134) 2011 (164) 2012 (231) 2013 (2004) 2014 (2900) 2015 (3426) 2016 (3979) 2017 (3548) 2018 (1426)
Autor	(19057)
Orientador	(12421)
Banca	(30684)
Grande Área Conhecimento	CIÊNCIAS AGRÁRIAS (157) CIÊNCIAS BIOLÓGICAS (190) CIÊNCIAS DA SAÚDE (1402) CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA (2346) CIÊNCIAS HUMANAS (4367) CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS (4872) ENGENHARIAS (1548) LINGÜÍSTICA, LETRAS E ARTES (1590) LINGÜÍSTICA, LETRAS E ARTES (17) MULTIDISCIPLINAR (2337)
Área Conhecimento	(276)
Área Avaliação	(92)
Área Concentração	(2353)
Nome Programa	(1309)
Instituição	(408)
Biblioteca	(4251)

Fonte: autora.

Após realizada a pesquisa com o termo *framework*, foram aplicados alguns filtros, pois havia trabalhos que não interessavam a este estudo. O Quadro 03 apresenta os filtros aplicados para refinar os resultados da pesquisa da palavra *framework*.

Quadro 03 – Quadro dos filtros aplicados para refinar os resultados da pesquisa da palavra *framework*

Filtro	Aplicado
Tipo	x
Ano	
Autor	
Orientador	
Banca	
Grande Área Conhecimento	x
Área Conhecimento	x
Área Avaliação	x
Área Concentração	x
Nome Programa	
Instituição	
Biblioteca	

Fonte: autora.

O primeiro filtro aplicado foi o tipo de trabalho, com quatro (4) opções de trabalho: doutorado, mestrado, mestrado profissional e profissionalizante. Sendo este um trabalho de doutoramento, optou-se por utilizar apenas os trabalhos de doutorado encontrados na pesquisa. Dos 18809 trabalhos, ficaram 5211.

Quadro 04 – Quadro do primeiro filtro aplicado para refinar os resultados da pesquisa da palavra *framework*

Filtro	Opções e quantidades
Tipo	DOUTORADO (5211)
Ano	1987 (2) 1994 (1) 1995 (2) 1996 (2) 1997 (7) 1998 (4) 1999 (4) 2000 (8) 2001 (12) 2002 (9) 2003 (13) 2004 (20) 2005 (13) 2006 (22) 2007 (17) 2008 (26) 2009 (26) 2010 (27) 2011 (34) 2012 (43) 2013 (535) 2014 (763) 2015 (933) 2016 (1114) 2017 (1113) 2018 (461)
Autor	(5203)
Orientador	(4146)
Banca	(15277)
Grande Área Conhecimento	CIÊNCIAS AGRÁRIAS (79) CIÊNCIAS AGRÁRIAS (2) CIÊNCIAS BIOLÓGICAS (80) CIÊNCIAS BIOLÓGICAS (4) CIÊNCIAS DA SAÚDE (482) CIÊNCIAS DA SAÚDE (4) CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA (412) CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA (134) CIÊNCIAS HUMANAS (1296) CIÊNCIAS HUMANAS (4) CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS (1131) CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS (41) ENGENHARIAS (426) ENGENHARIAS (69) LINGÜÍSTICA, LETRAS E ARTES (485) LINGÜÍSTICA, LETRAS E ARTES (6) MULTIDISCIPLINAR (528) MULTIDISCIPLINAR (28)
Área Conhecimento	(190)
Área Avaliação	(76)
Área Concentração	(1077)
Nome Programa	(527)
Instituição	(184)
Biblioteca	(1488)

Fonte: autora.

O segundo filtro aplicado foi Grande Área Conhecimento, com o qual foram obtidas dezoito (18) opções, mas estavam duplicadas, totalizando nove (9) opções: Ciências Agrárias; Ciências Biológicas; Ciências da Saúde; Ciências Exatas e da Terra; Ciências Humanas; Ciências Sociais Aplicadas; Linguística, Letras e Artes; Engenharias e Multidisciplinar.

O segundo filtro aplicados foram Ciências Humanas e Multidisciplinar. Dos 5211 trabalhos obtidos, ficaram 1856.

Quadro 05 – Quadro do segundo filtro aplicado para refinar os resultados da pesquisa da palavra *framework*

Filtro	Opções e quantidades
Tipo	DOUTORADO (1856)
Ano	1999 (1) 2001 (1) 2004 (1) 2005 (1) 2007 (2) 2008 (7) 2009 (2) 2010 (3) 2011 (6) 2012 (8) 2013 (205) 2014 (297) 2015 (337) 2016 (411) 2017 (425) 2018 (149)
Autor	(1855)
Orientador	(1493)
Banca	(5609)

Grande Área Conhecimento	CIÊNCIAS HUMANAS (1296) CIÊNCIAS HUMANAS (4) MULTIDISCIPLINAR (528) MULTIDISCIPLINAR (28)
Área Conhecimento	(44)
Área Avaliação	(21)
Área Concentração	(286)
Nome Programa	(170)
Instituição	(119)
Biblioteca	(603)

Fonte: autora.

O terceiro filtro aplicado foi Área Conhecimento. No início da pesquisa, havia duzentos e setenta e seis (276) opções para esse filtro, mas, após realizar o primeiro e o segundo filtros, restaram quarenta e quatro (44) opções, e optou-se por utilizar três (3): Ensino de Ciências e Matemática; Ensino e Educação, que são áreas nas quais esta pesquisa se enquadra. Depois de aplicado esse terceiro filtro, dos 1856 trabalhos, ficaram 800.

Quadro 06 – Quadro do terceiro filtro aplicado para refinar os resultados da pesquisa da palavra *framework*

Filtro	Opções e quantidades
Tipo	DOUTORADO (800)
Ano	2008 (1) 2009 (1) 2013 (104) 2014 (137) 2015 (136) 2016 (168) 2017 (186) 2018 (67)
Autor	(800)
Orientador	(612)
Banca	(2303)
Grande Área Conhecimento	CIÊNCIAS HUMANAS (615) CIÊNCIAS HUMANAS (2) MULTIDISCIPLINAR (183)
Área Conhecimento	(4)
Área Avaliação	(3)
Área Concentração	(53)
Nome Programa	(30)
Instituição	(75)
Biblioteca	(213)

Fonte: autora.

O quarto filtro aplicado foi Área Avaliação. Havia, no início da pesquisa, noventa e duas (92) opções, das quais duas (2) foram selecionadas: Ensino e Educação. No Quadro 06 aparecem três (3), pois a opção Educação estava duplicada. Dos 800 trabalhos restantes, ficaram todos.

Quadro 07 – Quadro do quarto filtro aplicado para refinar os resultados da pesquisa da palavra *framework*

Filtro	Opções e quantidades
Tipo	DOUTORADO (800)
Ano	2008 (1) 2009 (1) 2013 (104) 2014 (137) 2015 (136) 2016 (168) 2017 (186) 2018 (67)
Autor	(800)
Orientador	(612)
Banca	(2303)
Grande Área Conhecimento	CIÊNCIAS HUMANAS (615) CIÊNCIAS HUMANAS (2) MULTIDISCIPLINAR (183)
Área Conhecimento	(4)
Área Avaliação	(3)
Área Concentração	(53)
Nome Programa	(30)
Instituição	(75)
Biblioteca	(213)

Fonte: autora.

O quinto e último filtro aplicado foi Área Concentração, com o qual, no início, foram encontradas duas mil trezentos e cinquenta e três teses (2353). Desse montante, foram retiradas as de outras áreas específicas, que não são de Ensino, Educação, Educação Matemática, Ensino de Matemática, restando vinte e sete (27).

Quadro 08 – Quadro do quinto filtro aplicado para refinar os resultados da pesquisa da palavra *framework*

Filtro	Opções e quantidades
Tipo	DOUTORADO (667)
Ano	2013 (82) 2014 (108) 2015 (116) 2016 (151) 2017 (159) 2018 (51)
Autor	(667)
Orientador	(511)
Banca	(1969)
Grande Área Conhecimento	CIÊNCIAS HUMANAS (536) MULTIDISCIPLINAR (128)
Área Conhecimento	(3)
Área Avaliação	(2)
Área Concentração	CIÊNCIA, TECNOLOGIA E EDUCAÇÃO (3) CIÊNCIA, TECNOLOGIA E ENSINO (2) CIÊNCIAS, SOCIEDADE E EDUCAÇÃO (1) CURRÍCULO (21) EDUCAÇÃO (419) EDUCAÇÃO BRASILEIRA (35) EDUCAÇÃO BRASILEIRA: GESTÃO E PRÁTICAS PEDAGÓGICAS (3) EDUCAÇÃO CIENTÍFICA (3) EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E FORMAÇÃO DE PROFESSORES (8) EDUCAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA (6) EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA (7) EDUCAÇÃO ESCOLAR (13) EDUCAÇÃO ESCOLAR E PROFISSÃO DOCENTE (5) EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (41)

	EDUCAÇÃO, SOCIEDADE E PRÁXIS PEDAGÓGICA (15) ENSINO DE CIÊNCIAS E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (6) ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA (44) ENSINO E APRENDIZAGEM (2) ENSINO E APRENDIZAGEM DA MAT. E SEUS FUND. FILOS. CIENTÍFICOS (8) FORMAÇÃO DE PROFESSORES (3) FUNDAMENTOS DA EDUCACAO (2) PENSAMENTO EDUCACIONAL BRASILEIRO E FORMAÇÃO DE PROFESSORES (17) POLÍTICA E ADMINISTRAÇÃO EDUCACIONAL (2) TRABALHO E EDUCAÇÃO (1).
Nome Programa	(18)
Instituição	(65)
Biblioteca	(170)

Fonte: autora.

Depois de aplicados os filtros, verificou-se que havia seiscentos e sessenta e sete (667) trabalhos que continham a palavra *framework*. Construiu-se um arquivo com a referência, o resumo e as palavras-chave de todos esses trabalhos e, em seguida, realizou-se uma busca da palavra *framework*. Com essa busca, foi possível encontrar seis (6) trabalhos que continham esse termo, como é mostrado no Quadro 09.

Quadro 09 – Quadro com os trabalhos que continham o termo *framework*

Referência	Título	Resumo	Palavras-chave
ALVES, Adriana Gomes (2017)	x	x	
SILVA, Adelson de Paula (2016)		x	
ISHIKAWA, Eliana Claudia Mayumi (2018)		x	
CIBOTTO, Rosefran Adriano Gonçalves (2015)		x	
PETIT, Thomas Louis Yvon (2017)		x	
CATHCART, Karla Demonti Passos (2017)		x	

Fonte: autora.

Como, nessa averiguação, foram encontrados poucos textos que apresentavam esse termo, optou-se por pesquisar também, nos mesmos textos, utilizando os mesmos filtros, os vocábulos “quadro teórico”, pois é uma possível tradução para *framework* em Língua Portuguesa. Com essa pesquisa foram obtidas trinta e seis (36) teses como apresentado no Quadro 10.

Quadro 10 – Quadro com os trabalhos que continham o termo quadro teórico

Referência	Título	Resumo	Palavras-chave
BROETTO, Geraldo Claudio (2016)		x	
CARMO, Alex Bellucco do (2015)		x	
CARVALHO, Adriana E Silva Sousa (2018a)		x	
CARVALHO, Francisco de Assis Silva De (2018b)		x	
CATARINO, Giselle Faur de Castro (2013)		x	
CAVALCANTE, Andrea Pinheiro Paiva (2014)		x	
COSTA, Erica Atem Goncalves de Araujo (2015)		x	
DAVILA, Eduardo da Costa Pinto (2018)		x	
DEORCE, Mariluzza Sartori (2014)		x	
ESQUINCALHA, Agnaldo Da Conceição (2015)		x	x
FEITOSA, Raphael Alves (2014)		x	
FIGUEIREDO, Raimundo Otoni Melo (2017)		x	
FRANCA, Indira Alves (2014)		x	
GONCALVES, Jeferson da Silva (2017)		x	
HONORATO, Ilma Celia Ribeiro (2017)		x	
HSIA, Yuk Wah (2013)		x	
JUNGES, Kelen dos Santos (2013)		x	
JUNIOR, Gabriel Dias de Carvalho (2013)		x	
JUNIOR, Valdir Bezerra Dos Santos (2017)		x	
LEAL, Maria Patricia Morais (2017)		x	
MACEDO, Erika Sabino De (2015)		x	
MADEIRA, Maria Cristina (2017)		x	
NASCIMENTO, Juciene Silva de Sousa (2017)		x	
PEREIRA, Angela Maria (2015)		x	
PRIGOL, Edna Liz (2018)		x	
RECK, Andre Muller (2017)		x	
RODRIGUES, Gizella Menezes (2014)		x	
SCHASTAI, Marta Burda (2017)		x	
SILVA, Aline Simas Da (2017)		x	
TREVISAN, Ines (2015)		x	
VENANCIO, Luciana (2014)		x	
VIANA, Flavia Roldan (2016)		x	
VIANA, Gabriel Menezes (2014)		x	

VOOS, Jordelina Beatriz Anacleto (2016)		x	
ZAMARIAN, Maria Jussara (2016)		x	

Fonte: autora.

À vista disso, com quarenta e dois (42) trabalhos para serem analisados, o próximo passo foi realizar um inventário nesses textos com o intuito de obter informações a respeito de *framework* e “quadro teórico”. Em seguida, buscou-se extrair desses inventários, realizados em ordem cronológica, particularidades que fossem significativas para sintetizar como *framework* e “quadro teórico” são entendidos no contexto dos documentos analisados. Em alguns textos, os autores trazem uma definição do que é *framework* em seu trabalho e, também, uma estrutura, um esquema gráfico desse *framework*. Em outros, *framework*, no sentido de “quadro teórico”, é utilizado como base ou aporte teórico, a partir de uma análise teórica, sem apresentar uma estrutura; outros ainda o fazem a partir de um resultado final de uma análise de dados empíricos. Esse passo é importante, pois dá base para saber como é essa estrutura, qual a sua composição, qual o *design* de um *framework*.

Para auxiliar na apresentação dessas particularidades, foram construídos quadros que apresentam as principais características desses dois termos. Em seguida, essas informações foram interpretadas de modo que pudessem apresentar dados para o desenvolvimento do *framework* desta tese.

1.2 OUTRO CAMINHO

Na constituição do *corpus* da pesquisa, para o capítulo que trata da Educação Matemática Realística – RME, também foram realizadas leituras de materiais que trazem referência dessa abordagem e, em seguida, evidenciaram-se informações quanto às suas características.

Nesse sentido, realizaram-se leituras em materiais de autores dessa abordagem de ensino, tais como: De Lange (1999); van den Heuvel-Panhuizen, (1996, 2000a, 2000b, 2001a, 2001b, 2002, 2003a, 2003b, 2005a, 2005b, 2010a, 2010b); Doorman (2002), Doorman *et. al.* (2007), Drijvers (2001); Freudenthal (1968, 1973, 1991); Gravemeijer e Doorman, (1999); Gravemeijer e Terwel (2000); Gravemeijer (2004, 2007) e Treffers e Gofree (1985). Além disso, foram usados o acervo do Subprojeto da RME e parte da dissertação da pesquisadora para a composição desse capítulo.

Paralelamente às discussões e investigações comuns que envolvem todos os integrantes, o grupo tem focado seus estudos em algumas tarefas temáticas mais específicas, desenvolvendo atividades em subprojetos. Atualmente, o grupo desenvolve atividades relacionadas ao subprojeto 1 - Avaliação em Educação Matemática e 2 - Educação Matemática Realística. O objetivo desses subprojetos é manter a atualização dos estudos e pesquisas para as investigações do grupo.

Para a obtenção de informações a respeito da RME, foram realizados inventários a partir dessas leituras. Alguns dos temas encontrados foram: princípios da RME, atividade humana, inversão antdidática, contextos, matematização, reinvenção guiada, formação de modelos, fenomenologia didática, interação, produções dos alunos.

Para a composição de um panorama com as ideias da RME, as informações foram interpretadas e sintetizadas com o objetivo de auxiliar na produção/elaboração de um *framework* nessa perspectiva.

1.3 MAIS UM CAMINHO

Para a elaboração do capítulo que aborda Trajetória Hipotética de Aprendizagem – THA e Trajetória de Ensino e de Aprendizagem – TEA, foram realizadas leituras em materiais de autores que tratam desses temas, tais como: Angiolin, (2009); Pires, (2009); Simon, (1995); Simon e Tzur (2004); Drijvers (2001); Doorman (2002); Keijzer, Van Galen, Oosterwall (2004); Sembiring (2008); Doorman e Gravemeijer (2009); van den Heuvel-Panhuizen (2000a, 2000b, 2001a, 2001b, 2003a, 2003b, 2005a, 2005b, 2010a), van den Heuvel-Panhuizen et al, (2009) e Doorman (2007). Ainda, foram utilizados o acervo do Subprojeto da RME e parte da dissertação da pesquisadora Rossetto (2016) para a composição desse capítulo.

2 FRAMEWORK OU QUADRO TEÓRICO

O objetivo deste capítulo é apresentar o que se entende por *framework* ou quadro teórico com base na literatura alcançada.

Em outubro de 1991, na 13ª reunião *International Group for the Psychology of Mathematics Education - North American – PME*, Margaret Eisenhart apresenta e compara três tipos de *framework* (*theoretical* (teórico), *practical* (prático) e *conceptual* (conceitual)) para a investigação em Educação Matemática.

Para Eisenhart (1991), *framework* teórico é uma estrutura esquelética baseada em teoria, ou teorias bem estabelecidas, que serve para orientar uma pesquisa fundamentada em uma teoria formal. Um *framework* prático é, também, uma estrutura esquelética formada pela acumulação de “conhecimento prático”, ou seja, de ideias, pressupostos e conceitos derivados ou construídos mais pelos práticos e pelas práticas, do que por teorias formalmente estabelecidas na comunidade de investigação. Pode-se dizer que é uma estrutura que orienta uma pesquisa usando “o que funciona”. *Framework* conceitual é uma estrutura esquelética de justificação e não de explicação baseada em alguma teoria formal (ou em mais de uma) ou em conhecimento profissional. Esse tipo de estrutura engloba diferentes pontos de vista e justifica a escolha de alguns aspectos e não de outros. Por sua vez, esses aspectos ou conceitos adotados servem tanto como guias para a coleta de informações de um determinado estudo como para sua análise e discussão.

Segundo Pitacas e Pedro (2008, p.6), *framework* conceitual pode ser entendido como uma “rede de conceitos que se relacionam, sem necessidade de ser tão potente ou abrangente como uma teoria”. Ele é utilizado para guiar, organizar, dar sentido aos elementos e variáveis, mas não restringe para onde olhar, o que olhar e com que sentido olhar.

Pode-se considerar o *framework* uma rede argumentativa acerca dos conceitos escolhidos para a investigação ou interpretação (e sobre as suas relações mútuas) sustentando coerentemente que não só são apropriados à investigação, mas também que se constituem em ferramenta analítica útil em função do problema e das questões definidas para a investigação. O *framework* pode basear-se em várias teorias e em vários aspectos do conhecimento dependendo daquilo que os investigadores entenderem como relevante e importante para abordar o problema num dado momento histórico-cultural.

framework que propiciasse a criação de jogos digitais com e por crianças no contexto da escola inclusiva. A Figura 03 apresenta o *framework* “Eu fiz Meu Game”.

Figura 03 – *Framework* “Eu fiz Meu Game”



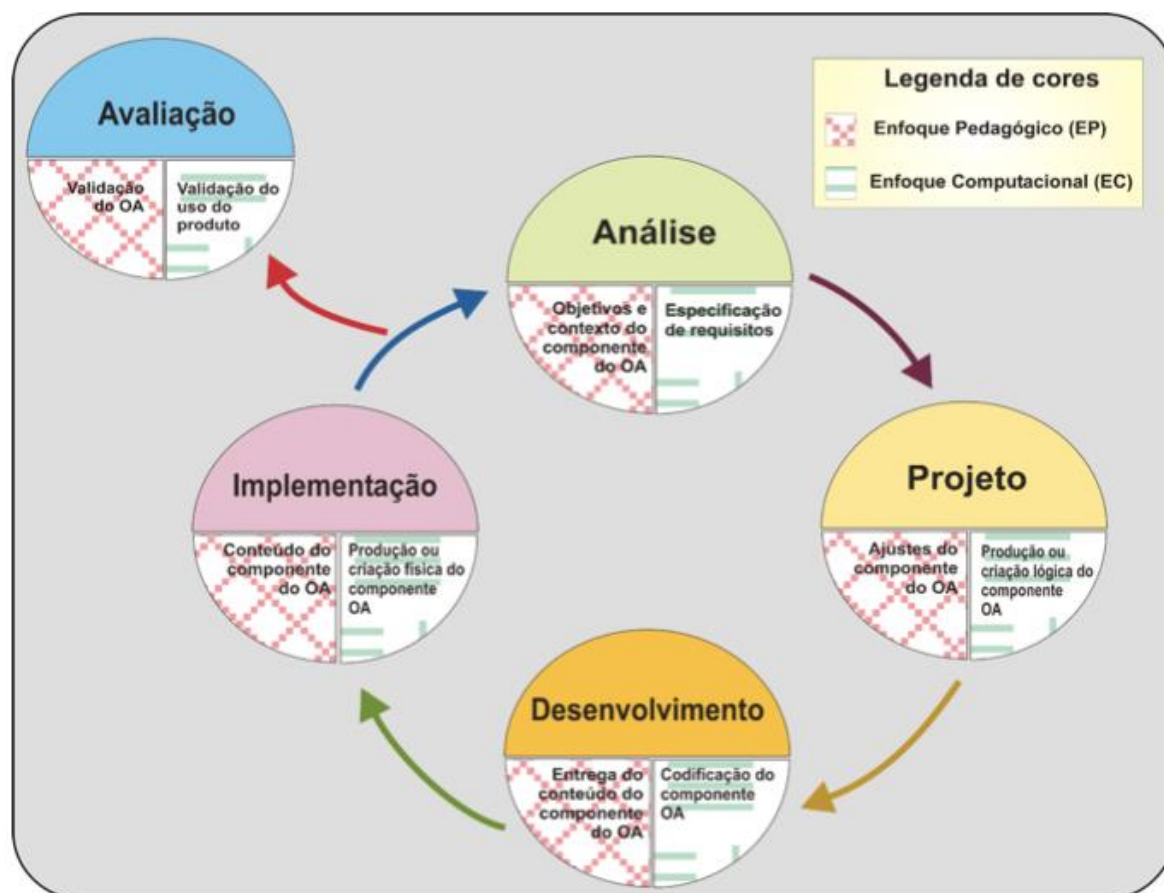
Fonte: Alves (2017, p. 61).

A autora se baseou no *framework Child-Centered Game Development* (CCGD) de Moser (2015) e no *Learner Design Educational Game* (LDEG) de Li (2014). O *framework Child-Centered Game Development* (CCGD) divide-se em fases e cada uma dessas fases inclui técnicas de *design*. As fases que compõem esse *framework* são: análise, conceito, *design*, implementação e avaliação.

Para Ishikawa (2018, p. 84), *framework* conceitual “é um conjunto de conceitos usado para resolver um problema de um domínio específico e atua onde há funcionalidades em comum a várias aplicações”. Em sua tese, criou o Objeto Virtual de Aprendizagem Colaborativa (OVAC), denominado *Collabora*. Esse objeto foi desenvolvido com base no *FrameVOC* (*Framework Virtual Object Collaboration*), que é um processo de desenvolvimento fundamentado nos processos de desenvolvimento de *software* e na metodologia ADDIE (*Analyze, Design, Develop, Implement and Evaluate*).

O *FrameVOC* é um *framework* de processos que pode ser utilizado para o desenvolvimento de um objeto virtual colaborativo cujo objetivo é o ensino, a aprendizagem e avaliação de colaboração. Independentemente da área de aplicação, tamanho ou complexidade, ele pode ser utilizado. A Figura 04 ilustra o *FrameVOC*.

Figura 04 – Framework FrameVOC

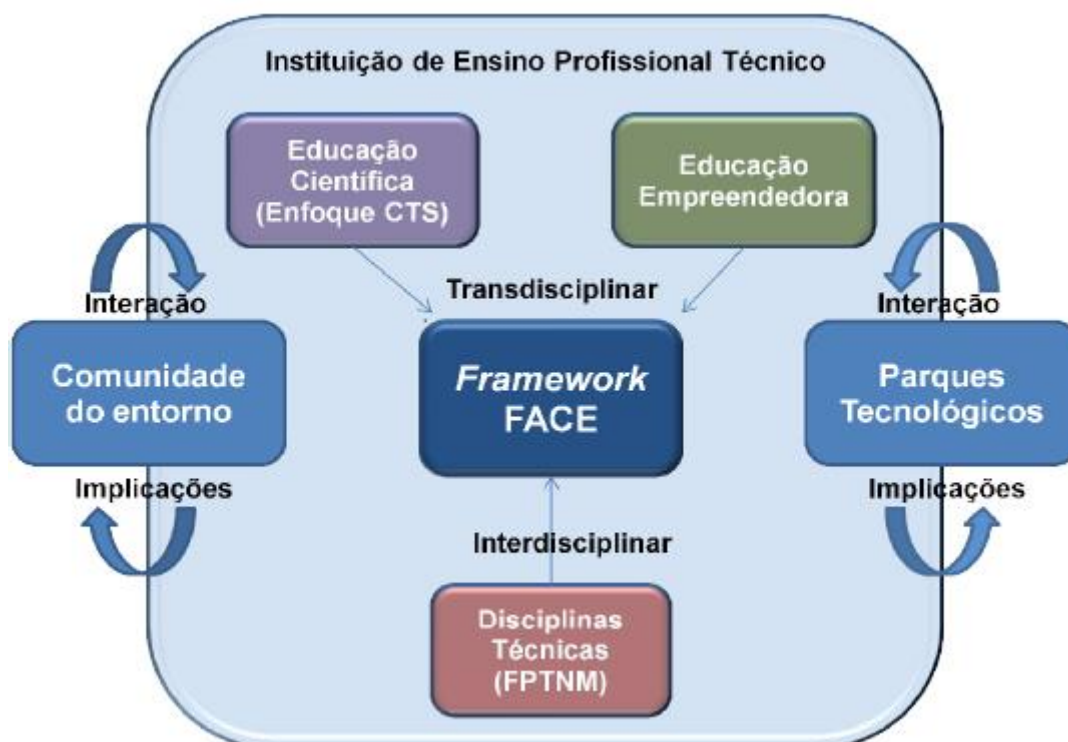


Fonte: Ishikawa (2018, p. 82).

Silva (2016) vai ao encontro do que é proposto por Ishikawa (2018) e toma *framework* como “um conjunto de conceitos aplicados à solução de problema dentro de um domínio específico” (SILVA, 2016, p. 158). O *framework* proposto em sua tese possui uma classificação híbrida, pois apresenta uma base conceitual e uma referência aplicada, na qual define uma configuração de domínio estático. Ele se fundamenta em Shehabudeen (1999) e Jabaren (2009) para a elaboração desse *framework*.

O *framework* FACE é uma estrutura que apresenta o relacionamento entre vários conceitos, como apresentado na Figura 05.

Figura 05 – Framework FACE



Fonte: Silva (2016, p. 161).

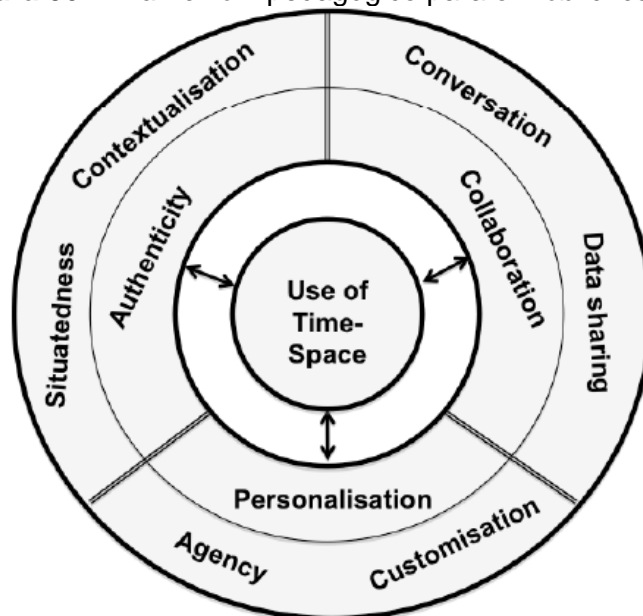
Ao analisar a tese de Cathcart (2017), não foram encontrados trechos que apresentassem definição de *framework* em seu trabalho. No entanto, a autora trabalhou em parceria com Alves (2017) no desenvolvimento do *framework* metodológico e colaborativo “Eu fiz meu game”, e seu trabalho se deu a partir da análise do processo de aprendizagem e elaboração conceitual de crianças com e sem deficiência intelectual em atividades colaborativas de criação de jogos digitais por meio desse *framework*.

Petit (2017) apresentou três *frameworks* em seu trabalho: o *Framework* Pedagógico para o *mobile learning* proposto por Kearney *et al.* (2012); o *FRAME* de Koole (2009) e o *Framework* para analisar o *mobile learning* de Sharples *et al.* (2007).

No *framework* de Kearney *et al.* (2012), o tempo e o espaço são o núcleo central, seguido de uma base estrutural formada pela personalização, autenticidade e colaboração, como apresentado na Figura 06. Os autores relacionam com a camada interna, que é a base estrutural, seis subescalas: conversação, compartilhamento, customização, agência, situação, contextualização. As setas

bidirecionais são apresentadas com a intenção de trazer a relação de simbiose entre os termos.

Figura 06 – *Framework pedagógico para o mobile learning*

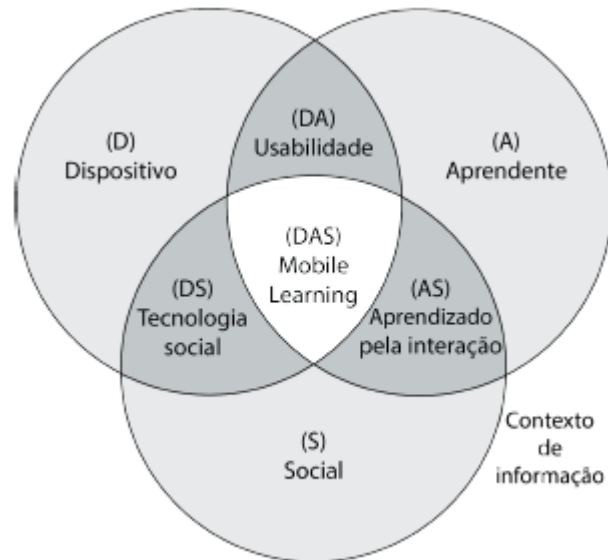


Fonte: Kearney *et al.* (2012, p. 9).

O *framework FRAME* apresenta uma forma na qual os alunos podem movimentar, participar e interagir com outras pessoas, sistemas e informações a qualquer momento ou lugar (KOOLE, 2009). Nesse modelo, as experiências de aprendizado móvel acontecem dentro de um contexto de informação e o estudante tem a oportunidade de criar, agir e inventar.

No modelo FRAME, as experiências de aprendizado móvel são vistas como existentes dentro de um contexto de informação. Coletiva e individualmente, os alunos consomem e criam informações. A interação com a informação é mediada pela tecnologia. É por meio das complexidades desse tipo de interação que a informação se torna significativa e útil. Dentro desse contexto de informação, o modelo FRAME é representado por um diagrama de Venn-Euler em que três aspectos se cruzam (Figura 07).

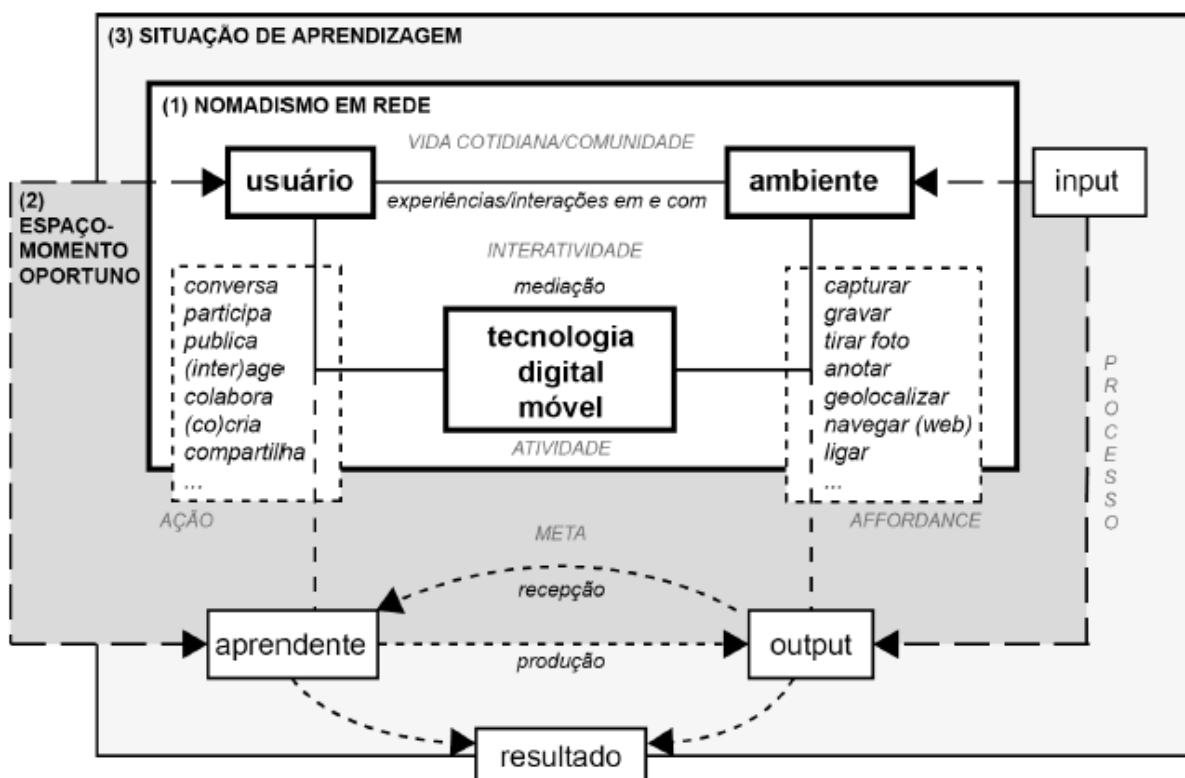
Figura 07 – Framework para analisar o *mobile learning*



Fonte: Koole (2009, p. 77).

Petit (2017), em seu trabalho, apresenta um *framework* contextualizador que se baseia no nomadismo em rede, ponto de partida para a aprendizagem nômade. Três elementos o compõem: um usuário, a sua tecnologia digital móvel e o ambiente (PETIT, 2017, p. 82). A Figura 08 apresenta o *Framework* contextualizador da aprendizagem nômade.

Figura 08 – Framework contextualizador da aprendizagem nômade



Fonte: Petit (2017, p. 83).

Os outros trabalhos aqui apresentados não apresentam uma estrutura ou esquema gráfico, eles estão relacionados ao termo “quadro teórico” que se considera uma possível tradução para *framework*.

Hsia (2013) realizou um estudo bibliográfico que buscou tecer um quadro teórico de resolução de problemas com as características inerentes à cultura de três países diferentes: Estados Unidos, China e Brasil. A utilização do quadro teórico nessa tese foi de fundamentação, trazendo o que é tomado, entendido como resolução de problemas nos três países.

Schastai (2017) utilizou o quadro teórico do Desenvolvimento do Pensamento Matemático de David Tall. Ela buscou identificar a existência ou não de aproximações entre esse quadro teórico e a abordagem para o ensino de matemática Educação Matemática Realística. O quadro teórico proposto por David Tall pode ser utilizado como referência para o processo de ensino e aprendizagem, assim como para pesquisas. Pode, também, ser utilizado como análise da aprendizagem e do pensamento matemático.

Esquinhalha (2015) trouxe o quadro teórico *Technological Pedagogical Content Knowledge* – TPACK para a formação de tutores e vai além, pois propõe uma expansão desse quadro com a introdução de um quarto tipo de

conhecimento, o afetivo-atitudinal, propondo um novo termo o *Technological Pedagogical Content Knowledge-Online Teacher Education* – TPACK-OTE. O quadro teórico é utilizado para análise.

Gonçalves (2017) apresentou o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática proposto por David Tall. O objetivo era compreender a relação existente entre as funções composta e inversa por meio de um enfoque diferenciado e de que forma poderia contribuir para que os alunos caminhassem pelos mundos da Matemática e para a construção da relação entre esses objetos. O quadro teórico foi utilizado tanto para a elaboração da proposta, como para a análise das produções, dessa forma como fundamentação e análise.

Os quadros teóricos da tese de Venâncio (2014) foram a teoria da relação com o saber de Bernard Charlot e as ideias de Paulo Freire. A autora realizou um debate “entre a teoria da noção de relação com o saber, baseada em Bernard Charlot, e os saberes necessários para uma prática educativa crítica e emancipatória, propostos por Paulo Freire” (VENÂNCIO, 2014, p. 9).

Na tese de Pereira (2015), foi utilizado o quadro teórico do Interacionismo Sociodiscursivo – ISD articulado com a teoria da Gramática do Design Visual – GDV. A união do quadro teórico com a teoria resultou em um instrumento analítico utilizado na análise do trabalho.

Madeira (2017) trouxe, em sua tese, quadros teóricos a respeito de “Pedagogias da Infância, Abordagens Italianas de Educação Infantil, Estudos da Infância e autores da Educação e da Filosofia” (MADEIRA, 2017, p. 8). O objetivo foi “compreender quais foram os tensionamentos, desafios e avanços evidenciados no processo de elaboração de uma pedagogia da infância pautada na experiência, na comunicação e nas relações do ponto de vista dos sujeitos que dela participaram” (MADEIRA, 2017, p. 172).

Nascimento (2017, p.7), em sua pesquisa, teve por objetivo “analisar se há (des)consideração da diversidade de concepções de identidades negra e reafirmação de outras que possibilitem que a escola se distancie do reconhecimento de uma identidade híbrida do negro brasileiro”. Utilizou o quadro teórico com o tema Educação das Relações Étnico-Raciais com base nos autores: Bhabha (2010, 2013), Hall (2006, 2013), Burke (2005), Chartier (2002), Bakhtin (2014, 2015), Rodrigues (2006), García (2003), Moehlecke (2016), Oliveira (2003), Silva (2007) e Barros (2013).

Zamarian (2016) utilizou, em seu trabalho, o quadro teórico do Interacionismo Sociodiscursivo, cujo objetivo era entender como se dão as orientações para o ensino da leitura para alunos da Educação Infantil e do Ensino Fundamental – Anos Iniciais.

O objetivo de Broetto (2016) foi diagnosticar e analisar a ideia de números racionais e irracionais trazidas por licenciandos calouros do curso de matemática. Para isso, utilizou os quadros teóricos da “imagem do conceito (TALL; VINNER, 1981), compreensão instrumental e relacional (SKEMP, 1976), exemplos protótipos e associações com atributos relevantes e irrelevantes (HERSHKOWITZ, 1994)” (BROETTO, 2016, p. 9).

Com o *corpus* de *framework* constituído a partir da interpretação dos textos dos diferentes autores, o próximo passo foi constituir o *corpus* da Educação Matemática Realística.

3 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA

A Educação Matemática Realística – RME, uma abordagem para o ensino de Matemática desenvolvida na Holanda, teve como precursor o matemático *Hans Freudenthal* (1905 – 1990), que adotou como princípio a “matemática como atividade humana”, uma atividade social e natural, que está entre as primeiras atividades cognitivas das crianças. Para ele, a matemática é conectada à realidade, deve ser relevante para a sociedade, assim como ser útil e ficar próxima das crianças.

Para Freudenthal (1968, p. 7), “o que os seres humanos têm de aprender não é a matemática como um sistema fechado, mas sim como uma atividade, o processo de matematização da realidade”. Dessa forma, a matemática não deve ser vista como um conteúdo a ser transmitido, nem como algo que está pronto e acabado tomado como o *start* para o ensino. Esse autor considera que tomar o conteúdo matemático como o ponto de partida para o ensino da matemática para, depois, aplicá-lo em outras situações é uma inversão antididática, o que é incompatível com ensino.

A matemática é entendida na RME como o resultado da ação de matematizar – a matematização (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2010a) de cada indivíduo, sendo assim, a matemática é aprendida matematizando. À vista disso, cada indivíduo elabora sua matemática e, a partir do momento que essa matemática é validada socialmente, tem-se o conhecimento matemático.

Para Freudenthal (1968), há uma distinção entre a matemática e o conhecimento matemático. O conhecimento matemático, desenvolvido e validado, tem um importante papel na RME, uma vez que o professor tem como base esse conhecimento acumulado e validado ao longo da história da humanidade para guiar/auxiliar os estudantes a matematizarem na direção dele (SILVA, 2018).

Uma ação essencial na RME é a matematização, uma vez que é por meio dela que o estudante produzirá sua matemática, guiado pelo professor. A matematização é uma atividade de organização, segundo a qual os estudantes utilizam seus conhecimentos e habilidades para descobrir regularidades, relações e estruturas desconhecidas (TREFFERS; GOFFREE, 1985, p. 109).

Em relação ao processo de matematização, de acordo com De Lange (1987), podem ser requeridas várias ações, tais como:

- identificar a matemática específica em um contexto qualquer;
- esquematizar;
- formular e visualizar um problema de diferentes formas;
- descobrir relações;
- descobrir regularidades;
- reconhecer aspectos isomorfos em diferentes problemas;
- traduzir um problema real em um problema matemático;
- traduzir um problema real em um modelo matemático conhecido.
- representar uma relação em uma fórmula;
- provar regularidades;
- refinar e ajustar modelos;
- usar diferentes modelos;
- combinar e integrar modelos;
- formular um novo conceito matemático;
- generalizar.

Dessa forma, ao propor um problema a um estudante, espera-se que ele aceite resolvê-lo e que essas ações, assim como outras, aconteçam. Nesse processo, o estudante também pode desenvolver outros conceitos matemáticos, diferentes dos que ele já conhece, um conhecimento novo para ele. O trabalho de organização e produção de um conhecimento novo é chamado, na RME, de matematização conceitual (DE LANGE, 1987).

Nessa perspectiva, os estudantes são participantes ativos nos processos de ensino e de aprendizagem e não meros receptores de uma matemática pronta. Segundo van den Heuvel-Panhuizen (2000a), a educação deve fornecer aos estudantes a oportunidade “guiada” para “reinventar” a matemática, colocando a “mão na massa”.

Freudenthal (1991) propõe que se deve dar aos estudantes a oportunidade de serem autores do seu conhecimento por meio do que ele denomina reinvenção guiada. Sendo assim, o estudante possui diversos papéis no processo de aprendizagem, entre eles, ser ativo, ser autor e responsável pelo seu conhecimento matemático, desenvolver atitudes que contribuam para a reflexão e o interesse em novas estratégias de resolução, estar atento às discussões, buscando entender as resoluções dos outros estudantes e justificando suas estratégias (ROSSETTO, 2016).

À vista disso, no desenvolvimento do trabalho em sala de aula, parece não fazer sentido o professor mostrar aos alunos exatamente o que quer que eles

aprendam ou dizer quais ações eles precisam ter. É desejável que o professor antecipe entendimentos, dúvidas dos alunos para que possa interagir com eles, intervir, como parte da reinvenção guiada. É isso que indica o Princípio da Orientação.

A RME adota seis princípios e cada um reflete uma parte da sua identidade. Alguns desses princípios estão relacionados com a aprendizagem; outros estão ligados à perspectiva de ensino, como é mostrado no Quadro 11.

Quadro 11 – Princípios da RME X Ensino e Aprendizagem

Ensino	Aprendizagem
Princípio da Realidade Princípio do Entrelaçamento Princípio da Orientação	Princípio da Atividade Princípio da Interatividade Princípio dos Níveis

Fonte: autora.

Os princípios da RME podem ser vistos como uma rede de relações entre cada aspecto da aprendizagem e cada aspecto do ensino, relacionados entre si, entrelaçados (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2000a). Os seis princípios são apresentados no Quadro 12.

Quadro 12 – Resumo dos Princípios da RME

Princípio	Característica
(1) da Atividade	Garante que, como uma atividade humana, a matemática seja impulsionada pelo ato de matematizar e, sendo assim, os alunos são tratados como participantes ativos no processo de aprendizagem e aprendem matemática fazendo-a.
(2) da Realidade	Estabelece que, desde o seu início, o processo de aprendizagem é marcado por tarefas com contextos ricos e que necessitam de certa organização matemática para que aos alunos seja oportunizado o lidar com o conhecimento matemático em situações realísticas, ou seja, imagináveis por eles.
(3) de Níveis	Os alunos, na aprendizagem da matemática, passam por diferentes níveis de compreensão desde o desenvolvimento de resoluções informais, relacionadas ao contexto, até as mais sofisticadas para conhecer as relações entre os conceitos e estratégias.
(4) do Entrelaçamento	Há uma integração entre os diferentes domínios do conhecimento matemático. Aos alunos devem ser propostas tarefas nas quais possam utilizar vários conhecimentos e ferramentas matemáticas.

(5) da Interatividade	Refere-se às oportunidades dadas aos alunos para que compartilhem com seus colegas suas estratégias, invenções e descobertas. A aprendizagem da matemática não acontece apenas em uma atividade pessoal, mas também em uma atividade social.
(6) de Orientação	Os trabalhos são desenvolvidos no sentido de “guiar” os alunos para “reinventar” a matemática e está relacionado com a Reinvenção Guiada, método de ensino da RME.

Fonte: autora – baseada em Forster (2020).

O papel do professor na RME é de guia dos processos de ensino e de aprendizagem, aquele que auxilia o aluno, não como detentor e transmissor de conhecimento, mas como orientador do processo de aprendizagem (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2000b), criador de ambientes, gerador de discussões que oportunizem refletir, considerar situações próximas e, ainda, planejar todas essas ações.

Para Gravemeijer (1994), uma das funções do professor é a de selecionar tarefas que oportunizem as construções matemáticas dos estudantes.

Propor aos estudantes tarefas matemáticas que apresentem contextos diversos é uma alternativa para que possam ampliar seus conhecimentos, pois, mais do que aprender a operar dados, o ensino da matemática deveria propiciar que os alunos pudessem resolver tarefas com mais referência em sua realidade do que aquelas apenas do tipo “efetue”, “some”, “divida”, “calcule a seguinte regra de três”, apresentadas rotineiramente nas escolas. Até porque a aprendizagem escolar pode se constituir como uma base para que nossos alunos continuem aprendendo, dentro e fora da escola, para que tenham uma participação efetiva na sociedade (FERREIRA, 2013, p. 39-40).

Espera-se que as tarefas suscitem o maior número de resoluções distintas possível para serem exploradas pelo professor, que promoverá uma discussão entre os estudantes, destacando as diferenças entre os conteúdos matemáticos subjacentes às resoluções (SILVA, 2015).

Também é função do professor o “estabelecimento de normas sociais e matemáticas claras e um ambiente propício de aprendizagem, estimulando e orientando os processos de aprendizagem e mantendo os estudantes envolvidos” (AMERON, 2002, p. 160).

Uma característica essencial na RME é a interação entre alunos e professores, pois a discussão e a colaboração oportunizam a reflexão sobre o trabalho que estão desenvolvendo (WIDJAJA; HECK, 2003), podendo propor novos

encaminhamentos e sugestões. Os alunos devem ter oportunidades para compartilhar suas estratégias e invenções com outros alunos (VAN DEN HEUVELPANHUIZEN, 2010a).

Na RME, cada aluno segue seu próprio caminho de aprendizagem, participando ativamente no processo educacional, tendo a oportunidade de partilhar suas estratégias e descobertas podendo analisá-las e discuti-las com os demais colegas.

O ambiente escolar é interativo. Os estudantes, ainda que construtores do próprio conhecimento, são solicitados a todo momento a compartilharem suas reflexões (explicações, justificativas, conjecturas), produções com os demais alunos, apresentando, muitas vezes, diferentes estratégias, reflexões e ideias em diversos níveis (ROSSETTO, 2016, p. 45).

É papel do professor utilizar essas informações de modo a proporcionar um ambiente de aprendizagem produtivo, propício à matematização. Segundo Oliveira (2014), professor e aluno trabalham em parceria construindo um ambiente de interação social, uma vez que a aprendizagem da matemática além ser uma atividade pessoal, é, também, uma atividade social.

Com o *corpus* de aspectos da RME constituído, o próximo passo foi compor o *corpus* de trajetórias.

4 TRAJETÓRIAS

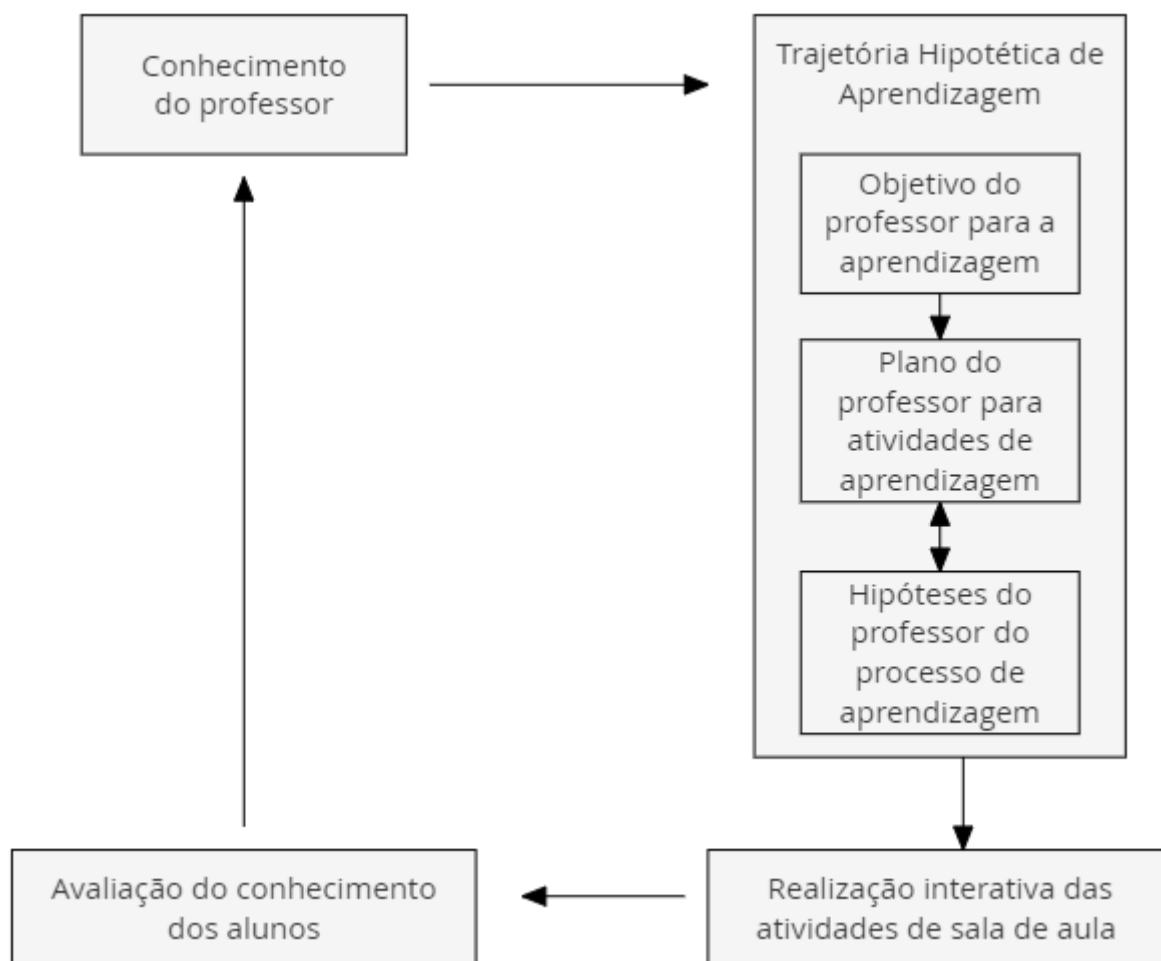
Este capítulo apresenta uma discussão das características da Trajetória Hipotética de Aprendizagem – THA e da Trajetória de Ensino e de Aprendizagem – TEA.

4.1 TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM

Em 1995, o pesquisador americano Martin Simon publicou o artigo *Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective*, no qual apresenta uma experiência de ensino que está focada na tomada de decisões do professor em relação ao conteúdo e às tarefas matemáticas para a sala de aula. Para ele, é um desafio a tarefa de reconstrução de uma “Pedagogia da Matemática”. O termo “pedagogia” destina-se a significar todas as contribuições da Educação Matemática para os estudantes na sala de aula: o trabalho multifacetado do professor, o currículo a ser construído e o desenvolvimento de materiais de ensino (SIMON, 1995).

Em suas experiências com alunos, questionava “como poderia entender o pensamento daqueles estudantes e como poderia trabalhar com eles para verificar se seriam capazes de desenvolver raciocínios mais poderosos?” (SIMON, 1995, p. 129-130). O autor, ao analisar essas experiências, desenvolveu o Ciclo de Ensino de Matemática abreviado (Figura 09) como um modelo em forma de esquema com as inter-relações entre aspectos do conhecimento do professor, seu pensamento, reflexões e tomada de decisões.

Figura 09 - Ciclo de Ensino de Matemática abreviado



Fonte: Simon (1995, p. 136, tradução nossa).

O Ciclo de Ensino de Matemática abreviado retrata uma visão de aspectos relacionados à sala de aula: o conhecimento do professor, o objetivo de aprendizagem, o plano de atividades, as hipóteses do professor do processo de aprendizagem e, também, à avaliação do conhecimento dos alunos (ROSSETTO, 2016). O professor desenvolve um plano para a atividade em sala de aula e, à medida que esse plano é colocado em prática, há interação do professor com os alunos, momentos que constituem uma experiência coletiva, por vezes, diferente daquela que o professor previu. Para Simon (1995), quando o professor se dá conta do que aconteceu em sala de aula, há uma modificação em suas ideias e no seu conhecimento. Uma ação central do modelo é a criação e modificação contínua da Trajetória Hipotética de Aprendizagem – THA⁶.

⁶ A partir deste momento, a sigla THA será utilizada no lugar de Trajetória Hipotética de Aprendizagem.

Eu uso o termo "trajetória hipotética de aprendizagem" tanto para me referir à previsão do professor como para a trajetória que possibilitará a aprendizagem. É hipotética, porque a verdadeira trajetória de aprendizagem não é cognoscível antecipadamente. Isso caracteriza uma expectativa. A aprendizagem individual dos estudantes ocorre de forma idiossincrática, embora muitas vezes em trajetos semelhantes (SIMON, 1995, p. 135).

Para explicar melhor o termo, Simon (1995, p. 136-137) propõe uma analogia:

[...] considere que você tenha decidido viajar ao redor do mundo para visitar, na sequência, lugares que você nunca tinha visto. Ir para a França, depois Havaí, depois Inglaterra, sem uma série de itinerário a seguir. Antes, você adquire conhecimento relevante para planejar sua possível jornada. Você faz um plano. Você pode inicialmente planejar toda a viagem ou uma única parte dela. Você estabelece sua viagem de acordo com seu plano. No entanto, você deve fazer constantes ajustes, por causa das condições que irá encontrar. Você continua a adquirir conhecimento sobre a viagem e sobre as regiões que você deseja visitar. Você muda seus planos a respeito da sequência do seu destino. Você modifica o tamanho e a natureza de sua visita, de acordo com o resultado da interação com as pessoas no decorrer do caminho. Você adiciona destinos à sua viagem que não eram de seu conhecimento. O caminho que você utilizará para viajar é sua "trajetória". O caminho que você antecipa em algum ponto é a sua "trajetória hipotética".

Desse modo, por mais que o planejamento seja detalhado, podem ocorrer imprevistos que exijam novas decisões para a continuidade da viagem. Algo semelhante ocorre com a THA, mesmo que o professor desenvolva um plano para a sala de aula, ele poderá ser repensado, modificado continuamente, pois as interações professor e aluno e as observações do professor fazem com que isso ocorra (ROSSETTO, 2016). Essa modificação da THA não ocorre somente durante o planejamento entre as aulas, pois

o professor está continuamente empenhado em ajustar a trajetória de aprendizagem que ele "hipotetizou" alterações e modificações podem ser feitas em um ou todos os três componentes da trajetória hipotética de aprendizagem: a meta, as atividades, ou o processo hipotético de aprendizagem (SIMON, 1995, p. 138).

A THA, uma alternativa para o professor em sala de aula, é constituída por três componentes:

1. objetivo do professor com direções definidas para a aprendizagem de seus alunos;

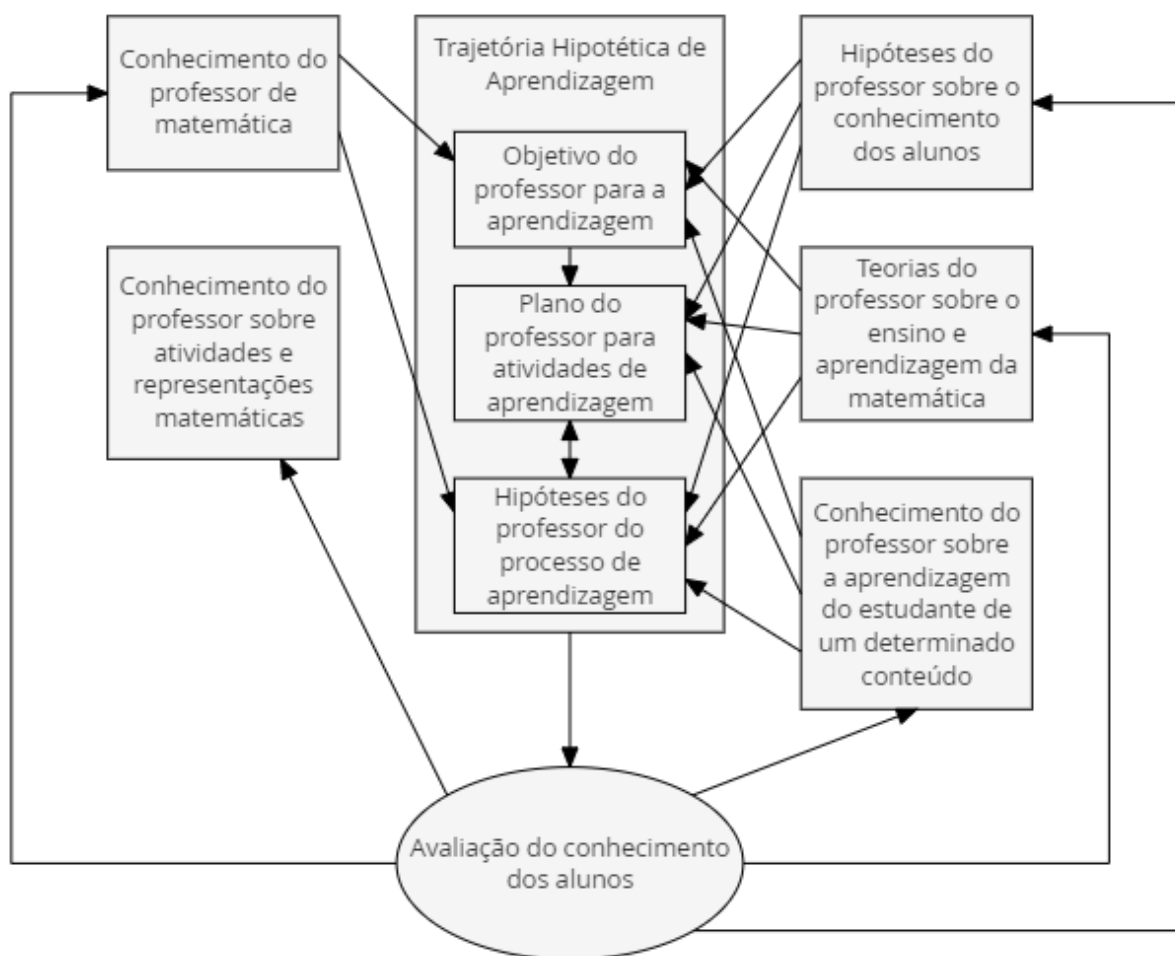
2. as atividades de ensino;
3. processamento hipotético de aprendizagem (uma suposição de como o pensamento e o entendimento dos alunos serão colocados em ação no contexto de aprendizagem das atividades) (SIMON, 1995, p. 136).

Durante o desenvolvimento da THA em sala de aula, as perguntas e dúvidas previstas ou não na elaboração dela podem permitir ao professor maior segurança no gerenciamento da execução da proposta. Ao relatar as hipóteses, professores podem utilizar diálogos hipotéticos com os alunos para prever perguntas que possam levá-los a refletir, pensar a respeito da tarefa (ROSSETTO, 2016).

A proposta de THA enfatiza a importância de ter objetivos e argumentos para as intenções/decisões de ensino e a hipótese desse percurso da aprendizagem, uma vez que não há intenção de que o professor aborde um objetivo de cada vez. Para Simon (1995), há uma relação simbiótica entre o desenvolvimento de uma THA e o desenvolvimento das tarefas de aprendizagem: a origem das ideias para a elaboração das tarefas de aprendizagem depende das hipóteses do professor a respeito do desenvolvimento do pensamento e da aprendizagem dos alunos.

Simon (1995) apresenta outro Ciclo de Ensino de Matemática, esse mais detalhado, no qual descreve a relação entre os vários domínios do conhecimento do professor, a THA e as interações com os alunos, como mostra a Figura 10.

Figura 10 – Ciclo de Ensino de Matemática



Fonte: Simon (1995, p. 136, tradução nossa).

O Ciclo de Ensino de Matemática é uma maneira de pensar sobre o ensino de matemática e retrata uma visão da tomada de decisão do professor em relação a conteúdos e tarefas. Para que o professor defina seus objetivos de aprendizagem, é necessário que haja uma interação entre seu conhecimento de matemática e suas hipóteses a respeito desse mesmo conhecimento.

Com base nesse ciclo, vários aspectos podem contribuir para o desenvolvimento de tarefas que podem levar o professor a refletir a respeito de suas atitudes frente à THA, possibilitando ajustá-la. Dessa forma, a trajetória pode ser modificada antes, durante e após as aulas.

Para Rossetto (2016, p. 26), “é possível olhar para a THA sob três pontos de vista: da elaboração (planejamento), da execução (processo) e para depois da execução (replanejamento)”, como apresentado no Quadro 13.

Quadro 13 – Ações que representam os três pontos de vista da THA

ELABORAÇÃO (planejamento)	<ul style="list-style-type: none"> • as tomadas de decisões do professor a respeito dos conteúdos e das tarefas; • previsão do professor sobre a trajetória que possibilitará a aprendizagem; • diálogos hipotéticos entre professor e alunos; • previsão de perguntas que podem levar os alunos a refletirem, pensarem a respeito da tarefa.
EXECUÇÃO (processo)	<ul style="list-style-type: none"> • o pensamento/entendimento dos estudantes tem lugar central na estruturação e implementação das tarefas de ensino; • podem ocorrer imprevistos que exijam novas decisões para a continuidade do trabalho; • o professor está continuamente empenhado em ajustar a trajetória de aprendizado que ele “hipotetizou”; • os estudantes também fazem perguntas, e o professor que encaminha a THA a partir das possíveis dúvidas e perguntas deles.
DEPOIS DA EXECUÇÃO (avaliação)	<ul style="list-style-type: none"> • a avaliação do conhecimento do aluno pode trazer ajustes a respeito de qualquer conhecimento do professor; • alterações e modificações podem ser feitas em um ou todos os três componentes da trajetória hipotética de aprendizagem; • o plano para sala de aula poderá ser repensado, modificado, pois as interações professor – aluno e as observações do professor podem fazer com que isso ocorra.

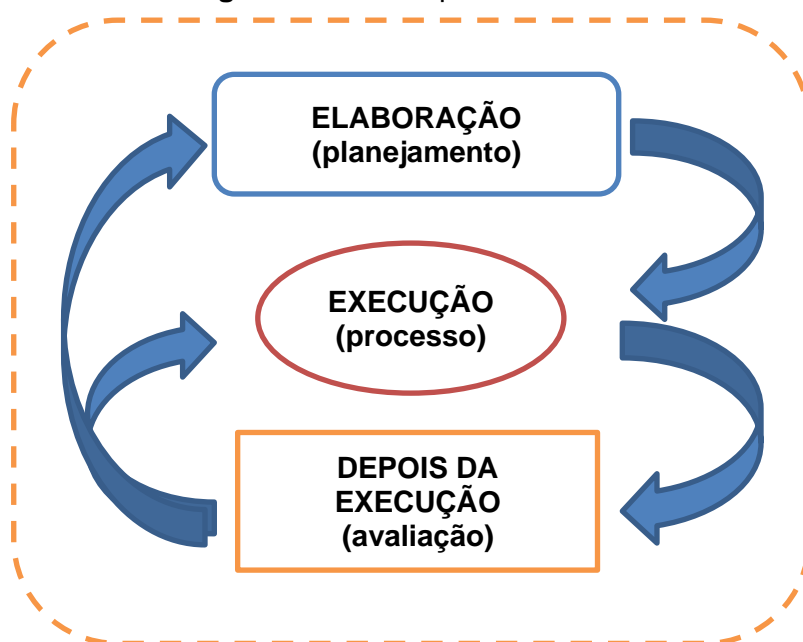
Fonte: Rossetto (2016, p. 26).

É possível observar que algumas ações descritas no momento da elaboração (planejamento) também podem ser observadas no momento da execução (processo) e vice-versa. Pode-se observar isso na ação de prever perguntas que levam os alunos a refletir, pensar a respeito da tarefa. Essa ação aparece no momento da elaboração (planejamento), mas poderia ser pensada na execução (processo), pois é importante que o professor faça perguntas que auxiliem os estudantes na resolução da tarefa (ROSSETTO, 2016, p. 26).

Simon e Tzur (2004, p. 93) apresentam características de uma THA inseridas no ciclo de ensino de Matemática:

1. A construção de uma THA é baseada na compreensão do conhecimento atual dos estudantes envolvidos.
2. Uma THA é um veículo para o planejamento da aprendizagem de conceitos matemáticos específicos.
3. Tarefas matemáticas proporcionam ferramentas para promover a aprendizagem de determinados conceitos matemáticos e, assim, são uma parte fundamental do processo de ensino.
4. Devido à natureza hipotética e inerentemente incerta desse processo, o professor está frequentemente envolvido na modificação de todos os aspectos da THA.

Figura 11 - THA – pontos de vista



Fonte: baseado Rossetto (2016, p. 27).

Para Simon (1995), podem ser formas de pensar o ensino de matemática quando o professor elabora Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem e analisa conceitualmente a matemática que ensina (ROSSETTO, 2016).

4.2 TRAJETÓRIA DE ENSINO E DE APRENDIZAGEM

Trajetória de Ensino e de Aprendizagem – TEA⁷ pode ser utilizada como uma ferramenta utilizada para traçar o caminho para o ensino de matemática nas escolas primárias holandesas (van den HEUVEL-PANHUIZEN; WIJERS, 2005). O desenvolvimento dessas trajetórias teve início em 1997 com o Projeto TAL⁸, cujo objetivo era contribuir para o aprimoramento da prática em sala de aula com a elaboração e implementação de trajetórias de ensino e aprendizagem para todo o currículo da escola primária (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2001a, 2000a, 2000b). Esse projeto foi realizado pelo Instituto Freudenthal e pelo Instituto Nacional de Desenvolvimento Curricular Holandês - SLO⁹ em colaboração com o Centro de

⁷ Neste trabalho a sigla TEA será utilizada para se referir à Trajetória de Ensino e de Aprendizagem.

⁸ O projeto TAL é um projeto que apresenta objetivos intermediários para o ensino de matemática como complemento dos objetivos fundamentais estabelecidos para o final da educação primária.

⁹ Dutch Institute for Curriculum Development.

Serviços Educacionais de Rotterdam - CED¹⁰ (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2000a, 2000b, 2001a, 2003b, 2005a, 2008).

O Projeto TAL apresenta objetivos intermediários para o ensino de matemática como complemento dos objetivos fundamentais estabelecidos para o final da educação primária. Esses objetivos intermediários estão inseridos em uma Trajetória de Ensino e de Aprendizagem, uma das razões pelas quais o projeto chama-se TAL, pois, em holandês, significa *Tussendoelen Annex Leerlijnen*, em inglês *Intermediate Attainment Targets in Learning-Teaching Trajectories*, e, em português, “Objetivos Intermediários das Trajetórias de Ensino e Aprendizagem”. A letra do meio da TAL também pode ser considerada como uma referência a *Afbeeldingen* (Representações), pois indica que muitos exemplos de estratégias de alunos e professores fazem parte da descrição das trajetórias de ensino e aprendizagem (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2008, 2010a). As trajetórias desenvolvidas no Projeto TAL tiveram como temas cálculo de números inteiros; medidas e geometria; e frações, decimais e porcentagens (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2001a, 2001b, 2003a).

A TEA, como é elaborada no Projeto TAL, apresenta alguns elementos ou características que vão além dos objetivos educacionais, isso a torna um “novo fenômeno educacional” (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2000a, 2000b, 2001a, 2003b, 2008). A perspectiva longitudinal, considerada a primeira característica, leva em consideração os processos de ensino e de aprendizagem a longo prazo dando uma visão geral desses processos e podendo ser um guia para as tomadas de decisões didáticas.

É essa característica longitudinal que difere a Trajetória de Ensino e de Aprendizagem da Trajetória Hipotética de Aprendizagem (SIMON, 1995), pois esta última refere-se apenas a ciclos curtos, com aulas tendo uma ou duas tarefas e o plano do professor no contexto da sua própria sala de aula (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2003a). Outro aspecto é que a TEA apresenta elementos a mais que a THA, tais como:

o objetivo da THA, o papel do professor, diferentes resoluções, trabalho com tarefas, descrição da trajetória, visão geral dos processos, dinâmica da aula, diferentes níveis de compreensão, explorando resoluções. Na TEA, o que não está presente é a avaliação. Há mais elementos para serem considerados na

¹⁰ School Advisory Center for the city Of Rotterdam.

elaboração de uma Trajetória de Ensino e de Aprendizagem (ROSSETTO, 2016, p. 97).

A segunda característica é a sua dupla perspectiva de possuir, por um lado, objetivos intermediários que são pontos de referência para os quais as práticas de ensino são orientadas e, por outro lado, de ser uma estrutura para o ensino que pode servir de apoio aos professores, subsidiando a formulação desses objetivos. A Trajetória de Ensino e de Aprendizagem não apenas descreve os pontos de referência para os quais as práticas de ensino são orientadas, mas também retrata possíveis ações que os levam a esses pontos de referência (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2000a, 200b1, 2003a, 2010a).

A terceira característica é a diferença nos níveis de compreensão. A aprendizagem matemática passa por diferentes níveis, o que é aprendido em um nível é entendido e executado em um nível superior. Essas transições de um nível de compreensão para outro formam o elemento de conexão na trajetória (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2000b, 2001a, 2003a, 2008). Outro ponto dessa característica de nível é que alunos podem entender algo em diferentes níveis, ou seja, podem trabalhar na mesma tarefa sem estar no mesmo nível de compreensão.

A quarta e última característica da TEA é a forma como ela é apresentada. O novo formato é o esboço de uma descrição narrada do desenvolvimento contínuo, completada com muitos exemplos do que ocorre nos processos de ensino e de aprendizagem (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2000a, 2001b, 2003a, 2008). A descrição não é uma simples lista de conhecimentos e habilidades que precisam ser alcançados, mas uma narrativa com exemplos (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2000a, 2001b, 2003a, 2008, 2010a).

Fazer uma descrição dos processos de ensino e de aprendizagem é essencial para guiar o professor em suas práticas. Nenhuma descrição dos processos de ensino e de aprendizagem, por mais detalhada que seja, fará jus às sutilezas do que realmente acontece na prática da sala de aula, uma vez há várias pessoas envolvidas, várias vidas, culturas, momentos históricos. A descrição não é rígida, visto que os processos reais de aprendizagem são complexos para serem delimitados.

A equipe do Projeto TAL concluiu que o trabalho com trajetórias não era apenas uma questão de escrever o que já era conhecido e acessível do conhecimento dos professores da sala de aula, mas resultou em novas ideias a respeito do Ensino de Matemática. Outro ponto apresentado pela equipe é que a

qualidade na educação pode ser “melhorada”, uma vez que, ao elaborar trajetórias, o professor pode ter “*insights*” dos processos de ensino e de aprendizagem, ter apoio na utilização de livros didáticos e, também, ser utilizada como uma estrutura conceitual para a tomada de decisão (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2000a, 2001b, 2003a, 2005b, 2008; VAN DEN AKKER *et al.*, 2006).

A expressão Trajetória de Ensino e Aprendizagem pode ser encontrada com outras denominações: THA (DE LANGE, 1999; GRAVEMEIJER e DOORMAN, 1999; GRAVEMEIJER e TERWEL, 2000; AMERON, 2002; KWON, 2002; BAKKER, DOORMAN e DRIJVERS, 2003; GRAVEMEIJER, 2004; VAN DEN AKKER, 2006; GRAVEMEIJER, 2007); Trajetória de Aprendizagem (DRIJVERS, 2001; DOORMAN, 2002; KEIJZER, VAN GALEN, OOSTERWALL, 2004); SEMBIRING, 2008); GRAVEMEIJER e DOORMAN, 2009); Trajetória de Ensino-Aprendizagem (VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN 2000a, 2000b, 2001a, 2001b, 2003a, 2003b, 2005a, 2005b, 2010a; VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN *et al.*, 2009; DOORMAN, 2007).

Para van den Heuvel-Panhuizen (2000a, 2000b, 2001a, 2001b), uma trajetória de ensino e de aprendizagem é uma descrição de caminhos que podem ser percorridos nos processos de aprendizagem e de ensino. Há que ter um entrelaçamento entre três aspectos

- uma trajetória de aprendizagem dá uma visão geral do processo de aprendizagem dos alunos;
- uma trajetória de ensino consiste em indicações didáticas que descreve como o ensino pode se articular de maneira mais eficaz com o próprio processo de aprendizagem dos alunos, estimulando-os;
- um delineamento do conteúdo programático, pois indica quais são os elementos centrais do currículo de matemática a serem propostos (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2010a, p. 28).

De modo geral, o primeiro aspecto diz respeito aos hipotéticos caminhos que os estudantes podem seguir e, com isso, o professor pode partir de diferentes estratégias de resolução que imagina que os estudantes utilizarão (ROSSETTO, 2016). Pode basear suas hipóteses em experiências anteriores de aulas do mesmo conteúdo ou, ainda, em experiências de outros professores e pesquisadores que abordaram os mesmos assuntos (SILVA, 2015).

O segundo aspecto, trajetória de ensino, é uma descrição dos “passos iniciais que o professor seguirá para trabalhar com os conteúdos propostos, possíveis encaminhamentos a partir do tipo de estratégias que os estudantes podem usar” (SILVA, 2015, p. 58), bem como uma descrição das tarefas a serem trabalhadas e dos objetivos pretendidos (SANTOS, 2014).

O terceiro e último aspecto diz respeito ao conteúdo programático, um esquema com assuntos e indicações dos elementos centrais do currículo de matemática, que o professor pode trabalhar em sala de aula, uma vez que diferentes conteúdos podem surgir, dependendo do caminho percorrido (ROSSETTO, 2016). Os estudantes não necessariamente utilizarão os conteúdos listados pelo professor, eles podem utilizar estratégias que possibilitem o trabalho com outros conteúdos (SILVA, 2015).

É necessário que a trajetória de ensino e de aprendizagem seja baseada em uma abordagem de ensino interativo, que, por meio de discussões e interações com o grupo, propicie aos estudantes entender melhor as próprias estratégias e as que foram utilizadas por outros e, assim, avançar para um outro nível de desenvolvimento (NELISSEN; TREFFERS, 2010). Ainda, com essas discussões e interações, os alunos têm a oportunidade de utilizar a linguagem, o que pode levar ao desenvolvimento do pensamento matemático, mostrando a importância da linguagem e da comunicação na aprendizagem da matemática.

Em uma Trajetória de Ensino e de Aprendizagem, não deve haver contradição entre a aprendizagem individual e independente e a aprendizagem colaborativa e interativa. Para Nelissen e Treffers (2010), frequentemente essa contradição refere-se às interpretações que são dadas a esses termos.

A aprendizagem individual pode ser interpretada de duas maneiras: primeiro, como um sistema no qual tem lugar central o trabalho independente com o material, no próprio nível e ritmo; e, segundo, como uma forma de oferecer ao aluno o espaço para continuar a sua própria maneira informal de trabalhar e de pensar com base nos resultados que encontrou e em construções baseadas em experiências significativas (do seu sentido comum) (NELISSEN; TREFFERS, 2010, p.399).

A aprendizagem social também pode ser vista de duas maneiras:

primeira, como a ideia de que todos os alunos trabalham com o material ao mesmo tempo, da mesma maneira e com a mesma velocidade, e, ao fazê-lo, seguem as estratégias prescritas pelo professor para toda a classe. Ou, de outra forma, a aprendizagem

social pode apontar para uma prática letiva que pode caracterizar-se como "ensino interativo" (NELISSEN; TREFFERS, 2010, p. 399).

Ao analisar a primeira interpretação, tanto da aprendizagem individual quanto da social, é possível identificar uma contradição entre os enfoques, pois não é possível combinar o enfoque da aprendizagem individual e da aprendizagem social com o enfoque da aprendizagem colaborativa do grupo (NELISSEN; TREFFERS, 2010). Entretanto, se a aprendizagem individual for interpretada como aquela em que o aluno parte de suas próprias estratégias e a social como aquela em que ele critica essas estratégias por meio da reflexão, essa contradição desaparece.

O aluno, no seu tempo, percebe que existem outras estratégias, talvez melhores que as suas, e isso lhe dá a oportunidade de aprender com seus colegas. O professor é o guia que vai orientar a discussão no grupo incentivando a reflexão por meio de perguntas. Com o tempo, por meio "dos olhos dos outros", os alunos aprendem a observar suas estratégias e seu processo de pensamento (NELISSEN; TREFFERS, 2010, p. 397). Esse diálogo que tem consigo mesmo é chamado de reflexão. A reflexão pode conduzir a um nível mais elevado de compreensão, uma vez que o aluno toma consciência de sua forma de pensar ou vê que vale a pena adotar a maneira dos outros.

A aprendizagem matemática é vista como um processo cíclico, pois relaciona a produção/elaboração, maneira própria de o aluno trabalhar e seguir sua estratégia informal, com a reflexão a respeito dela. Para que a reflexão aconteça, é preciso que haja momentos de interação.

As aulas na perspectiva da RME levam em consideração a interação nesse processo, pois, na maioria das vezes, ela acontece em pequenos grupos (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2000a, 2000b, 2005b) que podem trabalhar nos mesmos problemas sem estar no mesmo nível de compreensão, cada um seguindo seu caminho de aprendizagem (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2000a, 2000b, 2005b). "Fazer" matemática são atividades humanas, que, também, se dão na interação social (NELISSEN; TREFFERS, 2010).

Uma aula na perspectiva da RME apresenta algumas características:

- a maneira como o ambiente escolar é organizado tende a proporcionar maior interação entre os estudantes, permitindo que eles participem ativamente da aula e é comum trabalharem em grupos;

- é frequente as aulas serem “barulhentas”, com conversas, discussões e debates por parte dos alunos;
- a troca de informações entre aluno e aluno e aluno e professor é constante;
- o professor tem o papel de guia durante as aulas, fazendo os encaminhamentos necessários para que os alunos continuem trabalhando;
- é possível que diferentes alunos estejam trabalhando em diferentes soluções para os problemas, pois os conteúdos não são trabalhados de forma estanque (OLIVEIRA, 2014, p. 47).

Ao realizar uma tarefa, por exemplo, valoriza-se o fato de os alunos seguirem suas próprias estratégias e procedimentos, uma vez que, sendo objetos de discussão e interação, podem servir como estímulo para avançarem de nível. Assim, os alunos têm a oportunidade de trabalhar cada um no seu nível.

Segundo Nelissen e Treffers (2010), é possível distinguir entre interação horizontal e a vertical. Na interação horizontal, as discussões se iniciam com uma intervenção do professor, mas o trabalho de lidar e analisar suas ideias acontece entre aluno e aluno, aluno e pequenos grupos ou aluno com toda a classe. A interação vertical inclui o professor e pode ser de três maneiras:

- ✓ entre o professor e um aluno;
- ✓ entre o professor e um pequeno grupo de alunos (o grupo pode ser heterogêneo levando em consideração idade e nível);
- ✓ entre o professor e toda a turma (NELISSEN; TREFFERS, 2010, p. 393).

Quanto ao papel do professor, além de ele ter a função de orientar o processo de aprendizagem dos estudantes (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2000a, 200b), deve criar ambientes que oportunizem discussões, que levem os estudantes a refletir, considerar situações próximas e, ainda, planejar, todas essas ações. O professor, quando planeja suas aulas, já está delineando um caminho, uma trajetória que pretende seguir com os estudantes (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2010a).

Uma característica altamente desejável para o professor é saber fazer perguntas e aprender a ouvir perguntas e respostas para ter a oportunidade de saber o que levou o aluno a pensar em determinada estratégia, ou o que o fez dar tal resposta.

Elaborar uma TEA dá oportunidade ao professor de tentar antecipar mentalmente ações que os estudantes podem realizar ao resolver determinadas tarefas (GRAVEMEIJER, 2004, 2007). O professor imagina uma possível trajetória que o estudante percorrerá até chegar à solução de uma tarefa. Essa antecipação envolve as reações dos estudantes (AMERON, 2002) e deve também levar em conta a situação da sala de aula atual e os seus próprios objetivos (GRAVEMEIJER e TERWEL, 2000).

Utilizar uma TEA implica que o trabalho com as tarefas tenha uma perspectiva longitudinal, ou seja, o trabalho com as tarefas não se limita a resolvê-las e a discutir as resoluções, compreende, também, a exploração dos conteúdos matemáticos envolvidos, nas diferentes estratégias e possibilidades de matematização a partir das resoluções dos alunos (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2000a, 200b).

O principal objetivo de uma TEA é a possibilidade de o professor ter, por meio de uma descrição, uma visão geral do que poderá desenvolver com os estudantes. A TEA serve como um guia, dá uma visão geral dos processos de ensino e de aprendizagem e fornece aos professores um "mapa mental educacional", além de ajudá-los a tomar decisões didáticas (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2000a, 2001a).

Ao elaborar as trajetórias, o professor pensa em diferentes resoluções que os estudantes podem apresentar ao lidar com uma tarefa (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2001b). Ele tenta prever, levanta conjecturas a respeito do que pode ocorrer em sala de aula e de como ele pode agir frente a isso. A descrição da TEA proporciona uma visão da situação em que a classe se encontra (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2001b, 2010a).

Para explorar as resoluções que o aluno apresenta, o professor pode convidá-lo regularmente para apresentar aos colegas suas ideias e soluções, para discuti-las com a classe e relacioná-las umas com as outras (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2001b). Esse procedimento coloca as soluções propostas à disposição de todo o grupo, o que cria possibilidades de progresso (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2010a). Isso só pode funcionar bem se o professor tiver uma visão clara da trajetória de aprendizagem e souber em que momento certas ideias e soluções podem ser esperadas.

Uma TEA não deve ser considerada como um regime passo a passo, estritamente linear, nem como um livro de receitas. Deve ser vista de forma mais ampla e levar em conta:

- a singularidade dos processos de aprendizagem de cada aluno;
- as descontinuidades nos processos de aprendizagem, já que às vezes os alunos progredem em saltos e outras vezes podem ter recaídas;
- o fato de que os alunos são capazes de aprender múltiplas habilidades simultaneamente e que diferentes conceitos podem estar em desenvolvimento ao mesmo tempo, tanto dentro como fora da área de matemática;
- as diferenças que podem aparecer no processo de aprendizagem na escola como resultado de disparidades em situações de aprendizagem fora da escola;
- os diferentes níveis de domínio de certas habilidades que os alunos possuem (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2010a, p. 28).

Trabalhar com trajetórias de ensino e aprendizagem não implica em construir uma sequência de passos que serão rigidamente seguidos pelo professor ou pelos estudantes, até porque não há garantia de que seguirão o mesmo caminho na mesma velocidade no desenvolvimento da trajetória de aprendizagem, ou de que os conteúdos previstos pelo professor serão abordados pelos estudantes em suas resoluções (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2000a; BAKKER; DOORMAN; DRIJVERS, 2003).

Com o *corpus* da tese constituído, o próximo passo foi escrever um *framework* analisando, discutindo, interpretando e recontando os diferentes conceitos, aspectos e características que o compõem.

5 A CAMINHO DE UM *FRAMEWORK*

Neste capítulo será desenvolvido, apresentado, discutido e analisado um/alguns *frameworks* que servirão como apoio para a produção/elaboração de Trajetórias de Ensino e de Aprendizagem – TEA para aulas de matemática tendo como base os princípios e propósitos da Educação Matemática Realística – RME.

5.1 *FRAMEWORK* NA TESE

De acordo com Eisenhart (1991), o *framework* proposto nesta tese pode ser entendido como um *framework* conceitual, pois se baseia em uma perspectiva para o ensino de Matemática (RME) que tem como base princípios que servem como guia para análise e discussão deste trabalho.

Ao olhar para o que Pitacas e Pedro (2008) entendem como *framework*, é possível relacioná-lo ao desta tese, uma vez que os elementos da TEA se relacionam aos princípios da RME formando uma rede de conceitos relacionados. O *framework* pode ser utilizado para guiar o professor em sala de aula, auxiliando na organização dos processos de ensino e de aprendizagem, dando abertura para que ele escolha o caminho que achar mais proveitoso para o momento. Esse caminhar poderá ser realizado pelo professor sob diversas perspectivas, sendo desejável que seu olhar não fique restrito a um só lugar, ou a uma só situação ou um só sentido. Esse caminho percorrido pelo professor vai ao encontro da reinvenção guiada, o método de ensino da RME.

Para Cibotto (2015), *framework* é um conjunto de conceitos que se relacionam e que explicam determinado fenômeno, situação, acontecimento. Isso acontece nesta tese ao relacionar os elementos de uma TEA com os princípios da RME, sendo possível explicar o fenômeno *FrameTEA*.

O *FrameTEA* pode ser entendido como uma representação de um processo que envolve um conjunto de tarefas que direcionarão o trabalho do professor em sala de aula, o que vai ao encontro das ideias de Alves¹¹ (2017). Essas tarefas podem auxiliar nas tomadas de decisões em diferentes contextos e condições. Nesse processo, estão presentes diferentes ações do professor, como planejamento,

¹¹ Uma abstração de que envolve etapas como: envolvimento, experiência, transposição e criação de jogos digitais (ver p.27 desta tese).

execução das tarefas e, também, um replanejamento a partir de uma avaliação dessas ações.

Pode-se olhar o *FrameTEA* como o relacionamento entre vários conceitos que poderão auxiliar na solução de problemas referentes a aspectos da sala de aula, tanto de natureza teórica quanto prática. Essas ideias corroboram com Ishikawa¹² (2018) e Silva¹³ (2016).

Mesmo havendo diferentes definições de *framework*, alguns termos foram comuns, como: conceitos, processo, relacionar, intenção.

Sendo assim, *framework* é tomado, nesta tese, como um arcabouço de ideias, conceitos, pressupostos e princípios que se inter-relacionam de modo que possa ser utilizado para orientar a produção/elaboração/exploração/planejamento/desenvolvimento/tomada de decisão de trajetórias de ensino e de aprendizagem e, também, como referência para planejar ou tomar decisões sobre aspectos relacionados à dinâmica da sala de aula. Pode, ainda, auxiliar a:

- retomar pontos que acabaram sendo deixados de lado em sala de aula, como um objetivo do professor, uma tarefa pertinente, uma dúvida de um estudante;
- ser um guia para explorar e orientar princípios;
- ser um instrumento que pode ser utilizado por professores, alunos, pesquisadores, desenvolvedores de currículo para diferentes fins.

5.2 UMA PRIMEIRA IDEIA PARA O *FRAMEWORK*

Como o objetivo é desenvolver um *framework* que auxilie na produção/elaboração de uma TEA, foi preciso partir de algum lugar, uma vez que é um trabalho teórico com hipóteses e esclarecimentos. Uma primeira ideia foi retomar a dissertação da autora, na qual ela analisou como professores que ensinam matemática na Educação Básica lidam com a construção de uma THA na perspectiva

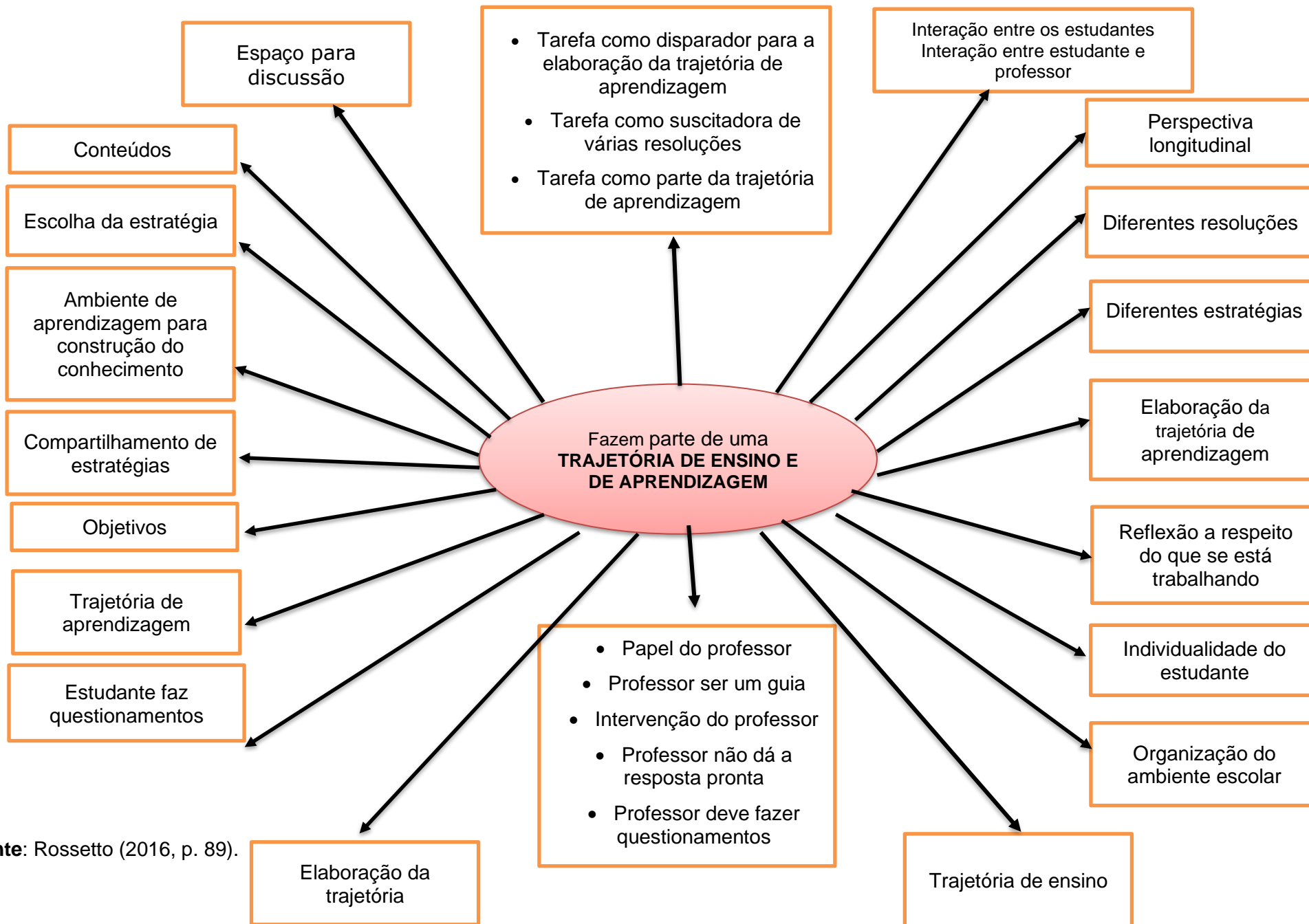
¹² Um conjunto de conceitos usado para resolver um problema de um domínio específico e atua onde há funcionalidades em comum a várias aplicações (ver p. 28 desta tese).

¹³ Um conjunto de conceitos aplicados à solução de problema dentro de um domínio específico (ver p.29 desta tese).

da RME. Com o acompanhamento desses professores, foi possível realizar observações, anotações, que auxiliarão no desenvolvimento desse *framework*.

Um fato que ajudou a desenvolver essa primeira ideia foi retomar a Figura 12, que apresenta a configuração de uma TEA e traz “elementos importantes que fazem parte e podem estar presentes na elaboração de uma Trajetória de Ensino e de Aprendizagem” (ROSSETTO, 2016, p. 88).

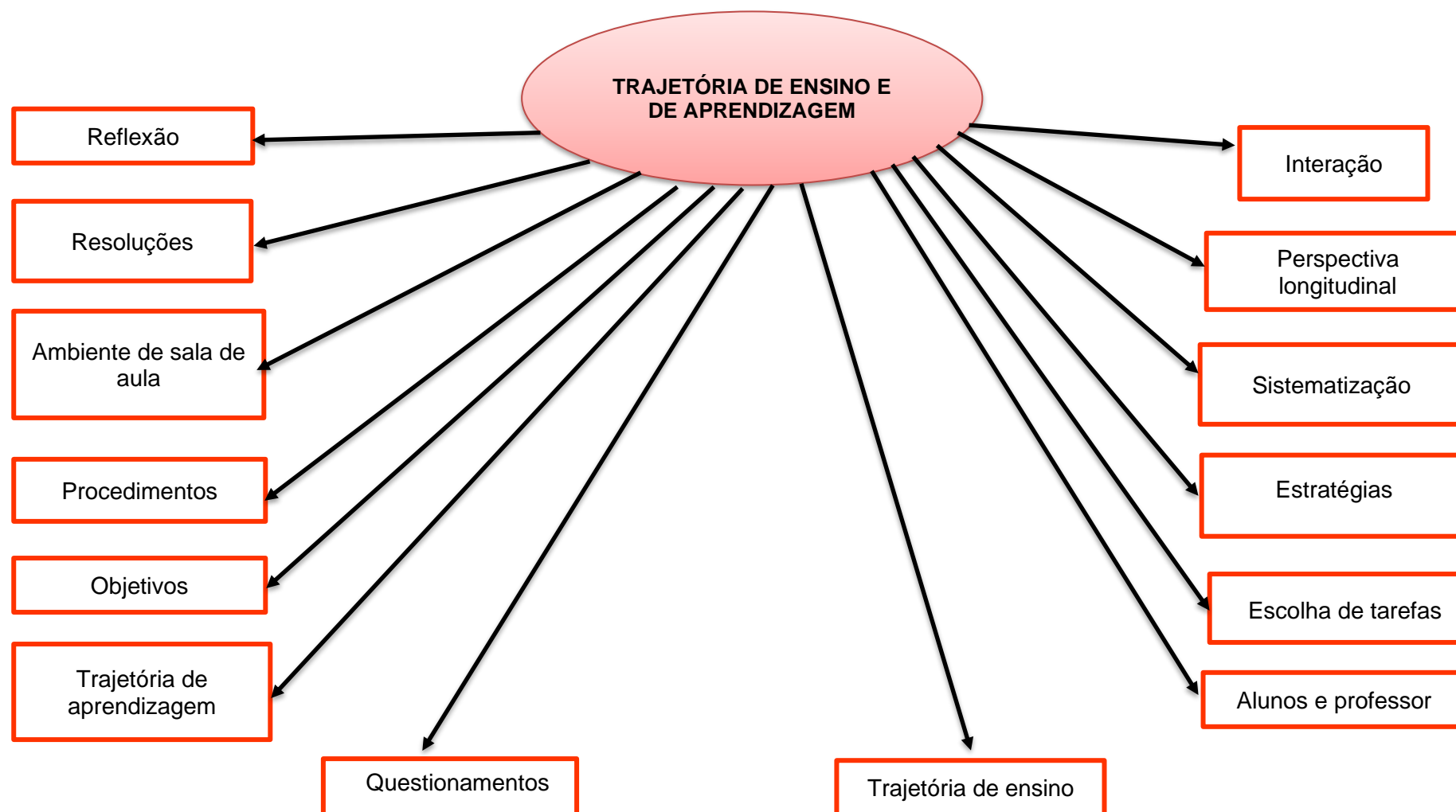
Figura 12 – Elementos que fazem parte de uma Trajetória de Ensino e de Aprendizagem



Fonte: Rossetto (2016, p. 89).

Após a retomada da Figura 12, depois dos estudos realizados para esta tese, verificou-se que era possível modificar a figura de forma que uma apresentação mais sucinta, com o agrupamento de elementos, a reescrita de outros pudessem levar à elaboração da TEA e ajudar no desenvolvimento do *framework*. Essa “nova forma” é apresentada na Figura 13.

Figura 13 – Elementos “outros” que fazem parte de uma Trajetória de Ensino e de Aprendizagem



Fonte: autora.

Ao analisar a Figura 13, é possível perceber que houve algumas mudanças em relação à Figura 12. Os elementos perspectiva longitudinal, trajetória de aprendizagem, trajetória de ensino e objetivos permaneceram os mesmos.

A perspectiva longitudinal é a característica mais importante da TEA (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2000, 2001, 2003, 2008). A trajetória precisa ser pensada a longo prazo, levar em consideração os processos de ensino e de aprendizagem e os elementos que fazem parte dele, dar uma visão geral desses processos e ser um guia para as tomadas de decisões didáticas.

Dar aos professores uma visão geral de como a compreensão matemática das crianças pode se desenvolver e de como a educação pode contribuir para esse desenvolvimento.

Pretende-se fornecer aos professores um “mapa educacional mental” que os ajude a tomar decisões didáticas

Ter uma visão geral do processo pelo qual os alunos passam é muito importante para trabalhar no progresso da compreensão dos alunos.

Para tomar decisões adequadas sobre ajudas e dicas, o professor deve ter uma boa ideia dos objetivos, do caminho que pode levar a esses objetivos e dos marcos que os alunos passarão de uma forma ou de outra ao longo do percurso, ao selecionar novos problemas.

Avaliar as estratégias dos alunos e prever onde e quando se podem antecipar os entendimentos e as habilidades dos alunos

Sem esta perspectiva longitudinal, não é possível orientar a aprendizagem dos alunos (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2008, p. 18).

A trajetória de aprendizagem está relacionada aos hipotéticos caminhos que os estudantes podem seguir para a aprendizagem. O professor pode partir de diferentes estratégias de resolução que imagina que os estudantes utilizarão.

A trajetória de ensino é uma descrição dos passos que o professor pode seguir para trabalhar situações, tarefas, problemas planejados; executar os possíveis encaminhamentos programados; propiciar momentos de interação e reflexão; planejar um ambiente propício à matematização.

O objetivo pode ser visto sob algumas perspectivas:

- da própria TEA – dar ao professor a possibilidade de ter uma visão geral do que poderá desenvolver com os estudantes, dos processos de ensino e de aprendizagem;
- do professor – desejar que o aluno aprenda; ter pontos de referência para os quais as práticas de ensino são orientadas;

- da tarefa – propiciar a matematização.

O termo sistematização está presente na “nova forma” apresentada, pois entende-se que uma das ações do professor é oportunizar momentos para que o aluno abstraia, esquematize, formalize, sistematize uma situação ou algo com o qual ele se depara. Para Freudenthal (1968, p. 07),

A sistematização é uma grande virtude da matemática e, se possível, o aluno também precisa aprender essa virtude, a própria atividade de sistematizar, não o seu resultado. O resultado é um sistema, um belo sistema fechado, sem entrada e saída. [...] O que os humanos precisam aprender não é a matemática como um sistema fechado, mas como uma atividade, o processo de matematizar a realidade e, se possível, até o de matematizar a matemática.

O elemento reflexão, na Figura 13, substitui a expressão “reflexão a respeito do que se está trabalhando”. Essa mudança se dá por entender que o termo reflexão possibilita um olhar mais abrangente, uma vez que a ação de refletir precisa ser realizada por todos os envolvidos nos processos. Para Nelissen (1999, p. 16), a reflexão é o “diálogo internalizado”, uma ação inicialmente inter-individual para depois passar a intra-individual e, por meio dela, os alunos se tornam menos dependentes do professor, podem analisar suas próprias ações de forma crítica e, com essa análise, desenvolver “novas construções, cada vez em um nível superior ao anterior. Em suma, refletir é desenvolver-se”.

A ideia é análoga para o termo interação. Na Figura 12, era especificada a “interação entre os estudantes” e “interação entre estudante e professor”. Para Nelissen e Treffers (2010, p. 393), a interação se dá de três formas:

- a. entre o professor e um aluno;
- b. entre o professor e um grupo pequeno de alunos (o grupo pode ser heterogêneo em relação a idade e nível) e,
- c. entre o professor e toda a turma.

Assim, inspirada nas ideias desses autores, o termo interação, na Figura 13, indica que, além da interação alunos e professor e alunos entre si, há interação entre os alunos e diferentes materiais de apoio. Ameron (2002), Widjaja e Heck (2003) defendem a importância da interação, seja ela qual for, socializar suas produções, justificar as estratégias escolhidas, explicar procedimentos utilizados, são formas de aprender com o outro.

A palavra questionamentos também aparece na “nova forma”, na Figura 13. Na Figura 12, estava como “estudante faz questionamentos” e “professor precisa fazer questionamentos”. É desejável que todos os atores envolvidos nesse processo façam questionamentos. O professor pode fazer questionamentos, intervenções, durante e após o trabalho dos alunos, explorar suas resoluções, as diferenças entre elas, discutir aspectos que sejam relevantes para a aprendizagem. Não dar a resposta pronta para o aluno pode fazer com que ele questione, que ele explore outros meios que achar necessário, seja uma pesquisa, uma pergunta para um colega. O professor pode utilizar perguntas como:

[...] por que você pensou isso? Isso foi pedido? Você poderia utilizar outra estratégia? Você poderia utilizar outro procedimento? Você conhece alguma situação em que isso se aplique? Nesse procedimento que você utilizou, qual seria um erro comum? Você acha que aprendeu algo? O quê? Em que outra situação você utilizaria a mesma estratégia? (FORSTER, 2020, p. 86).

A expressão resoluções está presente nas duas figuras. Pedir para que o aluno apresente diferentes resoluções de uma tarefa, de um problema pode propiciar a exploração de conteúdos matemáticos envolvidos, bem como as diferentes estratégias e possibilidades de matematização (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2000a, 2000b). O professor pode convidar os estudantes para compartilhar suas resoluções com os outros colegas, para discuti-las e relacioná-las umas com as outras (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2001b). Compartilhar as resoluções com todo o grupo pode criar possibilidades de progresso (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2010a), já que um aluno pode aproveitar esse momento para tirar uma dúvida, retomar alguma estratégia ou procedimento, reconhecer, ou não, qual estratégia parece mais adequada.

Na Figura 12, aparecem os termos “escolha da estratégia”, “compartilhamento de estratégias” e “diferentes estratégias”. Na “nova forma”, esses termos são substituídos por estratégias e procedimentos, um único termo que engloba a escolha, o compartilhamento e as diferentes estratégias.

A estratégia é entendida como “o que”, qual instrumental será utilizado para resolver uma tarefa. Considerando, por exemplo, uma pessoa que, ao ler uma tarefa, entende que, para resolvê-la, precisa utilizar um sistema de equações do primeiro grau, essa seria a estratégia selecionada. O procedimento é o “como” a estratégia será desenvolvida. Considerando, por exemplo, que a estratégia utilizada foi sistema de equação do primeiro grau e que esse foi resolvido pelo método da adição, esse é o procedimento (ROSSETTO, 2016, p. 57).

É desejável que o professor conheça e compreenda as diferentes estratégias e procedimentos utilizados pelos alunos. Primeiro, porque pode gerar uma discussão proveitosa quando apresentadas e comparadas com as outras estratégias e procedimentos. Segundo, porque os alunos têm a oportunidade de aprender com os colegas, uma vez que podem analisar, avaliar, ver que há diferentes estratégias, talvez mais adequadas que as suas, estratégias e procedimentos (NELISSEN; TREFFERS, 2010).

“Tarefa como disparador para e elaboração da trajetória de aprendizagem”, “tarefa como suscitadora de várias resoluções” e “tarefa como parte da trajetória de aprendizagem” foram substituídos por escolha de tarefas. As tarefas, quando bem escolhidas pelo professor, podem possibilitar:

- a matematização;
- construções matemáticas;
- informações das aprendizagens dos estudantes;
- oportunidade de aprendizagem;
- pensar, refletir, criticar, analisar, fazer conjecturas, levantar hipótese;
- obter informações a respeito do que os estudantes sabem.

A partir da escolha de tarefas, propostas pelo professor ou aluno, o professor pode explorá-las, promover discussões, guiar os estudantes a analisá-las e organizá-las e, também, selecionar tarefas acessíveis, convidativas, que valem a pena resolver.

Propor aos estudantes tarefas matemáticas que apresentem contextos diversos é uma alternativa para que possam ampliar seus conhecimentos, pois, mais do que aprender a operar dados, o ensino da matemática deveria propiciar que os alunos pudessem resolver tarefas com mais referência em sua realidade do que aquelas apenas do tipo “efetue”, “some”, “divida”, “calcule a seguinte regra de três”, apresentadas rotineiramente nas escolas (FERREIRA, 2013, p. 39-40).

Os termos “espaço para discussão”, “ambiente de aprendizagem para construção do conhecimento” e “organização da sala de aula”, na Figura 12, foram modificados para ambiente de sala de aula na Figura 13. Entende-se que essa alteração engloba as outras.

O ambiente escolar é interativo. Os estudantes, ainda que construtores do próprio conhecimento, são solicitados a todo momento

a compartilhem suas reflexões (explicações, justificativas, conjecturas), produções com os demais alunos, apresentando, muitas vezes, diferentes estratégias, reflexões e ideias em diversos níveis. Destacamos a importância de essas informações serem articuladas pelo professor e utilizadas por ele visando proporcionar um ambiente de aprendizagem produtivo baseado na atividade dos alunos (ROSSETTO, 2016, p. 45).

Na Figura 13, foi utilizada a expressão alunos e professor, uma vez que ambos têm papel ativo nos processos de ensino e de aprendizagem; logo vão se tornando autores responsáveis pelo seu conhecimento matemático.

Com a descrição e a análise dos elementos: perspectiva longitudinal; trajetória de ensino; trajetória de aprendizagem; objetivos; sistematização; reflexão; interação; questionamentos; resoluções; estratégias e procedimentos; escolha de tarefas e ambiente de sala de aula, é possível identificar a presença do aluno e do professor em cada um desses termos. O Quadro 14, a seguir, apresenta algumas frases que corroboram essa inferência.

Quadro 14 – Frases que trazem a presença do professor e do aluno nos elementos da TEA

- A escola deve ser um lugar onde aluno e professor sejam protagonistas de sua aprendizagem (FORSTER, 2020, p. 84).
- A interação entre professor e estudantes também se dá por meio de comunicação não verbal (SILVA, 2018, p. 87)
- O trabalho em sala de aula precisa contar com cooperação, solidariedade e respeito mútuo entre professor e estudantes (SILVA, 2018, p. 106)
- Cabe ao professor e aos estudantes, organizar o ambiente de sala de aula (SILVA, 2018, p. 107).

Fonte: autora.

O Quadro 15 apresenta a mudança que ocorreu da Figura 12 para a Figura 13.

Quadro 15 – Mudança que ocorreu da Figura 12 para a Figura 13

Como era	Como ficou
Perspectiva longitudinal	Perspectiva longitudinal
Trajectoria de aprendizagem	Trajectoria de aprendizagem
Trajectoria de ensino	Trajectoria de ensino
Objetivos	Objetivos
-	Sistematização
Reflexão a respeito do que se está trabalhando	Reflexão
Interação entre os estudantes Interação entre estudante e professor	Interação
Estudante faz questionamentos Professor deve fazer questionamentos Professor não dá a resposta pronta	Questionamentos
Resoluções	Resoluções
Escolha da estratégia Compartilhamento de estratégias Diferentes estratégias	Estratégias e procedimentos
Tarefa como disparador para a elaboração da trajetória de aprendizagem Tarefa como suscitadora de várias resoluções Tarefa como parte da trajetória de aprendizagem	Escolha de tarefas
Espaço para discussão Ambiente de aprendizagem para a construção do conhecimento Organização da sala de aula	Ambiente de sala de aula
-	Alunos e professor

Fonte: autora.

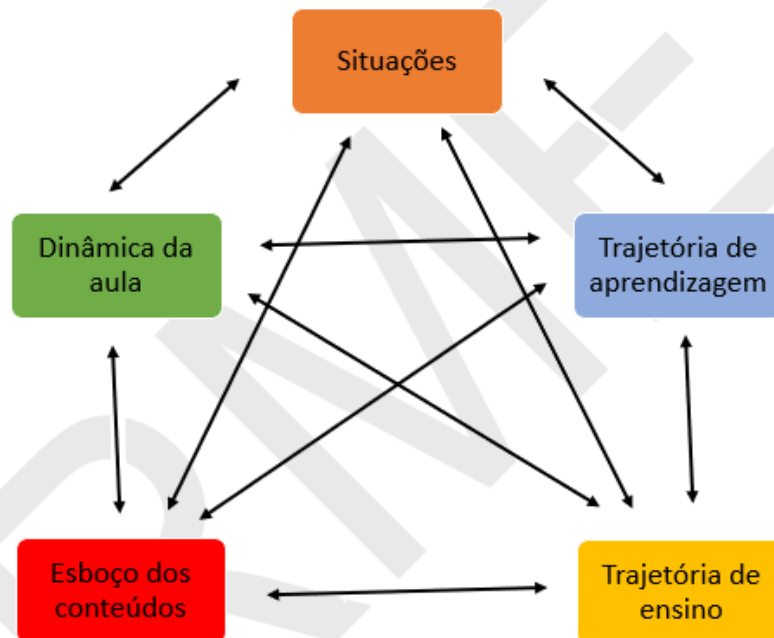
Conhecidos esses termos e com a “nova forma” em mãos, precisava-se pensar como desenvolver o *framework*, uma vez que os elementos de uma TEA eram conhecidos, mas faltava conciliar com os princípios da RME. Mesmo sabendo

que já estavam presentes, falar deles era preciso. O próximo passo, então, foi construir um *framework* alinhando esses elementos da TEA e da RME com o *corpus* de *framework*.

5.3 UMA SEGUNDA IDEIA: UM *FRAMETE*A

A proposta, nesta seção, é apresentar uma estrutura que envolva aspectos da TEA e princípios/elementos da RME como a base teórica desse *framework*. O *FrameTEA* foi pensado por meio da relação de cinco fases, Situações, Trajetória de Aprendizagem, Trajetória de Ensino, Esboço de assuntos, Dinâmica da Aula, com a base teórica Educação Matemática Realística - RME e professor e alunos perpassando todas elas, como ilustrado na Figura 14. Essas fases não são independentes umas das outras, devem ser vistas como um processo, relacionadas entre si de tal modo que se influenciam e se completam.

Figura 14 – Um *FrameTEA* – fases do processo de produção/elaboração de uma Trajetória de Ensino e de Aprendizagem



Fonte: A autora.

Ao olhar para o *FrameTEA*, como uma rede de conceitos que se inter-relacionam, esse percurso, de processos de ensino e de aprendizagem, não deve ser visto como um passo a passo para ser seguido, uma vez que cada passo não é necessariamente seguido pelo passo seguinte de modo linear.

Não há uma indicação de onde começar a desenvolver a TEA, a escolha é do professor. Um pode começar por Situações e priorizar aquelas que oportunizem a matematização; outro poderá começar pelos elementos do currículo, e elencar qual conteúdo poderá trabalhar em sala de aula. Há ainda quem queira começar pela dinâmica da aula, podendo pensar em um ambiente que propicie interações, discussões e, também, a matematização. Enfim, a escolha é de quem fará a TEA.

A fase **Situações** está relacionada com a escolha do professor em relação às situações que serão propostas em sala de aula, uma vez que elas podem propiciar a matematização, ação essencial na RME. Nessa abordagem, o processo de aprendizagem matemática acontece na sala de aula, a partir da exploração de situações que possibilitam aos estudantes “reinventar” a matemática.

Essas situações precisam ser próximas dos alunos, significativas e acessíveis, podem ser exploradas, abordadas de maneiras diferentes, propiciar diversas interpretações em diferentes níveis de compreensão.

A outra fase, **Trajectoria de Aprendizagem**, diz respeito ao processo de aprendizagem dos estudantes, uma descrição de possíveis percursos dos alunos durante a reinvenção guiada. Nessa fase, o professor:

- poderá partir das diferentes estratégias de resolução escolhidas pelos alunos, consideradas corretas ou não, que podem dar pistas do caminho que ele percorrer;
- pode tomar como base, por exemplo, experiências que já teve em aulas do mesmo conteúdo ou ainda experiências de outros professores e pesquisadores que já trabalharam com esses mesmos assuntos;
- os caminhos desenhados e/ou descritos por ele não são rígidos, ou seja, os estudantes podem seguir diferentes caminhos no trabalho com as tarefas (SILVA, 2015, p. 57).

Entretanto, o professor precisa estar ciente de que os estudantes não seguirão sempre o mesmo caminho ou na mesma velocidade. Cada um segue seu caminho de aprendizagem, possivelmente em diferentes velocidades, porque podem

estar em diferentes níveis, e o processo de aprendizagem de cada aluno é singular. Outro aspecto é a descontinuidade no processo de aprendizagem, dado que, às vezes, os estudantes podem progredir com saltos; em outras, podem ter recaídas (van den HEUVEL-PANHUIZEN, 2010a).

Nessa fase, o professor pode elencar possíveis obstáculos que os alunos encontrariam referentes aos conteúdos, matemáticos ou não, de maneira que ofereça possibilidades para superá-los. Ele pode, ainda, recorrer às heurísticas da Educação Matemática Realística – reinvenção guiada, fenomenologia didática e modelos emergentes –, que podem orientá-lo no trabalho com a trajetória.

É possível relacionar a fase trajetória de aprendizagem com os modelos emergentes,

pois auxiliam o professor na elaboração de tarefas e questionamentos e a “prever” como os estudantes podem lidar com essas tarefas, ao passo que lida com os conhecimentos informais do estudante e com a transição de modelos informais para matemática formal (SILVA, 2015, p. 59).

Na fase, **Trajétoria de Ensino**, o professor fará indicações relacionadas ao processo de ensino relacionando-o com o processo de aprendizagem. Essa fase conterà as tarefas a serem utilizadas, as intenções do professor, os possíveis encaminhamentos que ele fará frente às estratégias e aos procedimentos apresentados pelos alunos, além dos possíveis questionamentos que poderá fazer.

Segundo Oliveira (2014, p. 48), a trajetória de ensino refere-se “ao planejamento do professor, que, dentre outras coisas, aponta possíveis caminhos pelos quais os alunos poderão percorrer para desenvolver matemática”, assim como “a conhecer a história do desenvolvimento de conceitos matemáticos de modo que essas informações o auxiliem a projetar os passos da reinvenção”.

Silva (2015, p. 59) vai ao encontro de Oliveira (2014) quando coloca que uma trajetória de ensino pode descrever os “passos iniciais que o professor seguirá para trabalhar com os conteúdos propostos, encaminhamentos possíveis a partir de cada tipo de estratégias que os estudantes podem usar, tarefas que lhes serão apresentadas, materiais que serão utilizados”.

A heurística da RME que pode ser relacionada com a fase trajetória de ensino é a reinvenção guiada

uma vez que se refere às ações do professor relacionadas com o processo de aprendizagem dos estudantes [...] por direcionar o professor em relação aos caminhos que os estudantes podem percorrer em relação ao processo histórico de elaboração do conhecimento matemático da humanidade (SILVA, 2015, p. 59).

Na fase, **Esboço dos Assuntos**, o professor elenca conteúdos que poderá trabalhar em sala de aula, já que, dependendo do caminho, diferentes conteúdos poderão surgir. Para Silva (2014, p. 58), o “professor elenca conteúdos que espera que sejam trabalhados em sala de aula, e que direcionarão a escolha de tarefas e alguns encaminhamentos”. No entanto, o professor precisa estar ciente de que os estudantes poderão trabalhar com outros conteúdos, diferentes dos elencados por ele.

A fenomenologia didática é a heurística da RME que pode ser relacionada com a fase elementos do currículo “uma vez que tem por objetivo estudar como objetos do pensamento podem organizar fenômenos” (SILVA, 2015, p. 59).

A fase **Dinâmica da Aula** é a forma como o professor colocará em prática o que ele já vem planejando desde o início desse *framework*. Essa dinâmica tem o objetivo de oportunizar aos estudantes um ambiente no qual eles possam matematizar.

Na RME, “a maneira como o ambiente escolar é organizado tende a proporcionar maior interação entre os alunos, permitindo que eles participem ativamente da aula” (OLIVEIRA, 2014, p. 47), e o professor tem um papel essencial. Ele não é mais aquele que valida o conhecimento ou um transmissor, ele é o guia dos processos de ensino e de aprendizagem; um criador de ambientes; um provocador de discussões, interações, reflexões; explorador de situações, de modo que gerem diferentes estratégias, procedimentos.

Assim como o *FrameTEA* não deve ser visto como um passo a passo para ser seguido, não são apenas esses os elementos que o compõem, visto que vários outros estão relacionados. Outro aspecto que está presente em todas as fases é a reflexão, pois é o momento em que o professor retoma as fases do *framework*, regula os processos de ensino e de aprendizagem, articula todas as fases e realiza uma avaliação, uma reflexão crítica de sua prática.

Ao “olhar para dentro” das fases do *FrameTEA*, é possível enxergar outros envolvidos, outros elementos que também estão presentes nele, assim como

o que esses elementos podem propiciar, quais ações poderão acontecer, como sintetizado-no Quadro 16.

Quadro 16 – “Olhando para dentro” do *frameTEA*

Fases	Envolvidos	Propicia:
Situações	<ul style="list-style-type: none"> • Professor. • Aluno. • Princípio da Realidade. 	<ul style="list-style-type: none"> • a matematização; • tarefas com contextos ricos; • estratégias e procedimentos; • diferentes resoluções; • aos estudantes lidarem com outras situações que venham a encontrar em suas vidas; • reflexão.
Trajetória de aprendizagem	<ul style="list-style-type: none"> • Professor. • Aluno. • Princípio da Atividade. • Princípio da Interatividade. • Princípio dos Níveis. 	<ul style="list-style-type: none"> • a aprendizagem dos estudantes – processo singular. • diferenças individuais. • desenvolvimento individual e social. • reflexão.
Trajetória de ensino	<ul style="list-style-type: none"> • Professor. • Aluno. • Princípio da Realidade. • Princípio do Entrelaçamento. • Princípio da Orientação. 	<ul style="list-style-type: none"> • o processo de ensino; • a reinvenção guiada; • tarefas com contextos ricos; • intenções e objetivos; • encaminhamentos com questionamentos. • sistematização. • reflexão.
Esboço de assuntos	<ul style="list-style-type: none"> • Professor. • Aluno. • Princípio do Entrelaçamento. 	<ul style="list-style-type: none"> • o <i>design</i>; • conteúdo; • entrelaçamentos dos eixos do conhecimento matemático; • novos conceitos; • reflexão.
Dinâmica da aula	<ul style="list-style-type: none"> • Professor. • Aluno. • Princípio da Atividade. • Princípio da Interatividade. • Princípio dos Níveis. • Princípio da Realidade. • Princípio do Entrelaçamento. 	<ul style="list-style-type: none"> • aprendizagem matemática; • um ambiente para matematizar; • o trabalho por meio da reinvenção guiada; • o trabalho ativo dos estudantes; • atitudes do professor; • diferentes estratégias e procedimentos; • interação entre estudantes e professor e estudantes;

	<ul style="list-style-type: none">• Princípio da Orientação.	<ul style="list-style-type: none">• o desenvolvimento da linguagem;• reflexão.
--	--	---

Fonte: A autora.

Ao analisar o Quadro 16, pode-se verificar que, dentro de cada fase do *framework*, há os envolvidos no processo e as ações que esses envolvidos podem suscitar. O professor e o aluno, assim como o termo reflexão, aparecem em todas as fases do *FrameTEA*. Isso se dá, porque professor e aluno são os atores envolvidos nesse processo e se fazem presentes em todo ele. O mesmo acontece com a reflexão, uma vez que é desejável que tanto professor quanto aluno reflitam em suas ações, suas estratégias, seus procedimentos.

A partir do Quadro 16, o qual apresenta o “Olhar para dentro” do *frameTEA*, foi possível construir um quadro teórico, referenciando autores que abordam as fases do *frameTEA* em seus textos (Quadro 17).

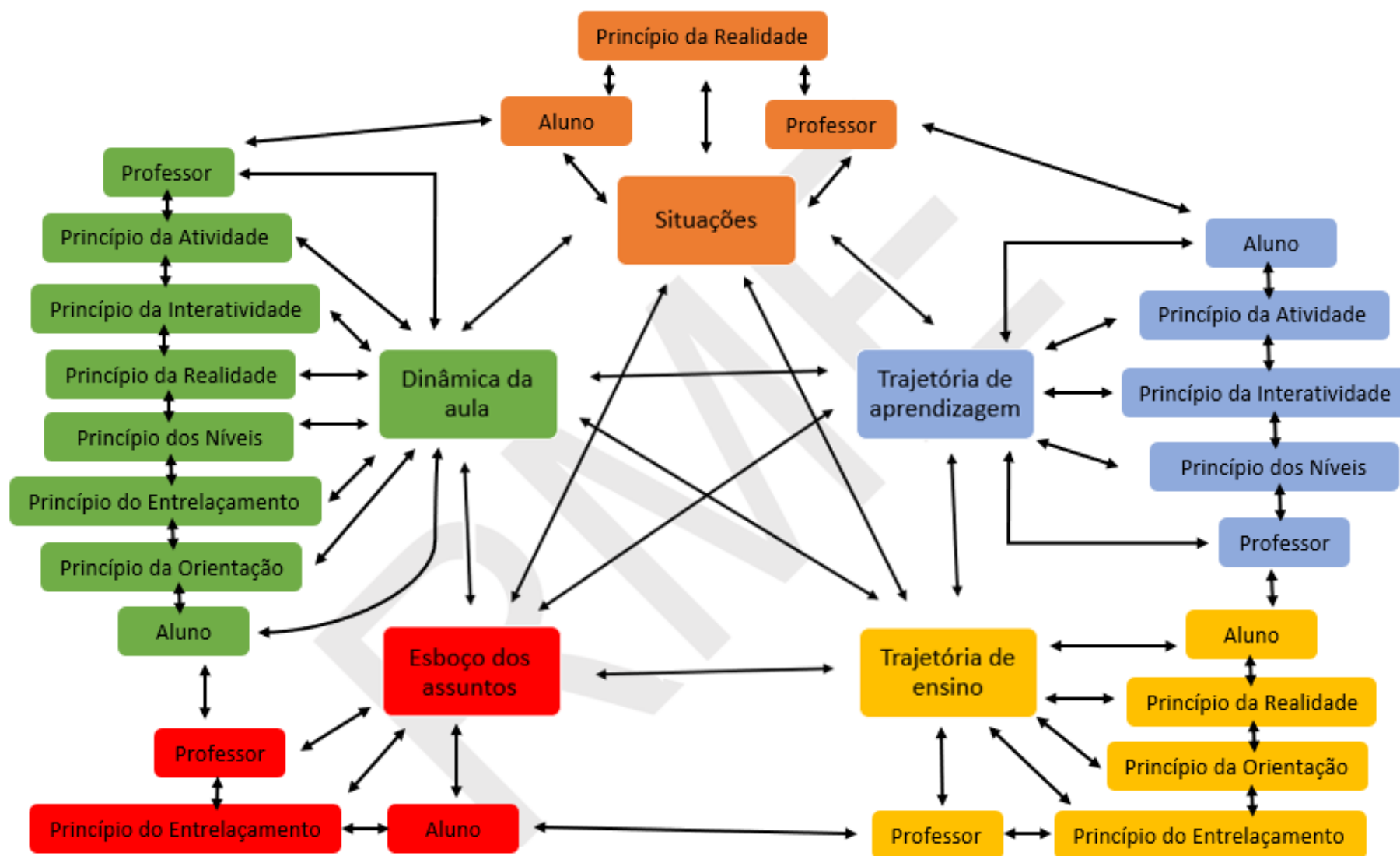
Quadro 17 – Quadro dos autores que tratam das fases do *FrameTEA*

Fases	Autores ¹⁴
Situações	Freudenthal (1973); Treffers e Goffre (1985); Treffers (1987); Gravemeijer (1994); Van den Heuvel-Panhuizen (1996); De Lange (1999); Gravemeijer e Terwel (2000); De Lange (2003); Ciani (2012); Pires (2013); Trevisan (2013); Ferreira, (2013); Santos (2014); Mendes (2014); Passos (2015); Schastai (2017); Silva (2018); Pedrochi Junior (2018); Forster (2020).
Trajatória de aprendizagem	Van Den Heuvel-Panhuizen (2012, 2010, 2008, 2005b, 2005a, 2003b, 2003a, 2001b, 2001a, 2000b, 2000a); Drijvers (2001); Doorman (2002); Keijzer (2004); Doorman (2007); Sembiring (2008); Nelissen e Treffers (2010).
Trajatória de ensino	Van Den Heuvel-Panhuizen (2000a, 2000b, 2001a, 2001b, 2003a, 2003b, 2005a, 2005b, 2008, 2010, 2012); Van Den Akker <i>et al</i> (2006); Doorman (2007); Nelissen e Treffers (2010).
Esboço de assuntos	Gravemeijer e Doorman (1999); Van Den Heuvel-Panhuizen (2000a, 2000b, 2001a, 2001b, 2003a, 2003b, 2005a, 2005b, 2008, 2010, 2012); Nelissen e Treffers (2010).
Dinâmica da aula	Ciani (2012); Passos (2015); Santos (2014); Schastai (2017), Silva (2018); Pedrochi Junior (2018); Forster (2020).

Fonte: autora.

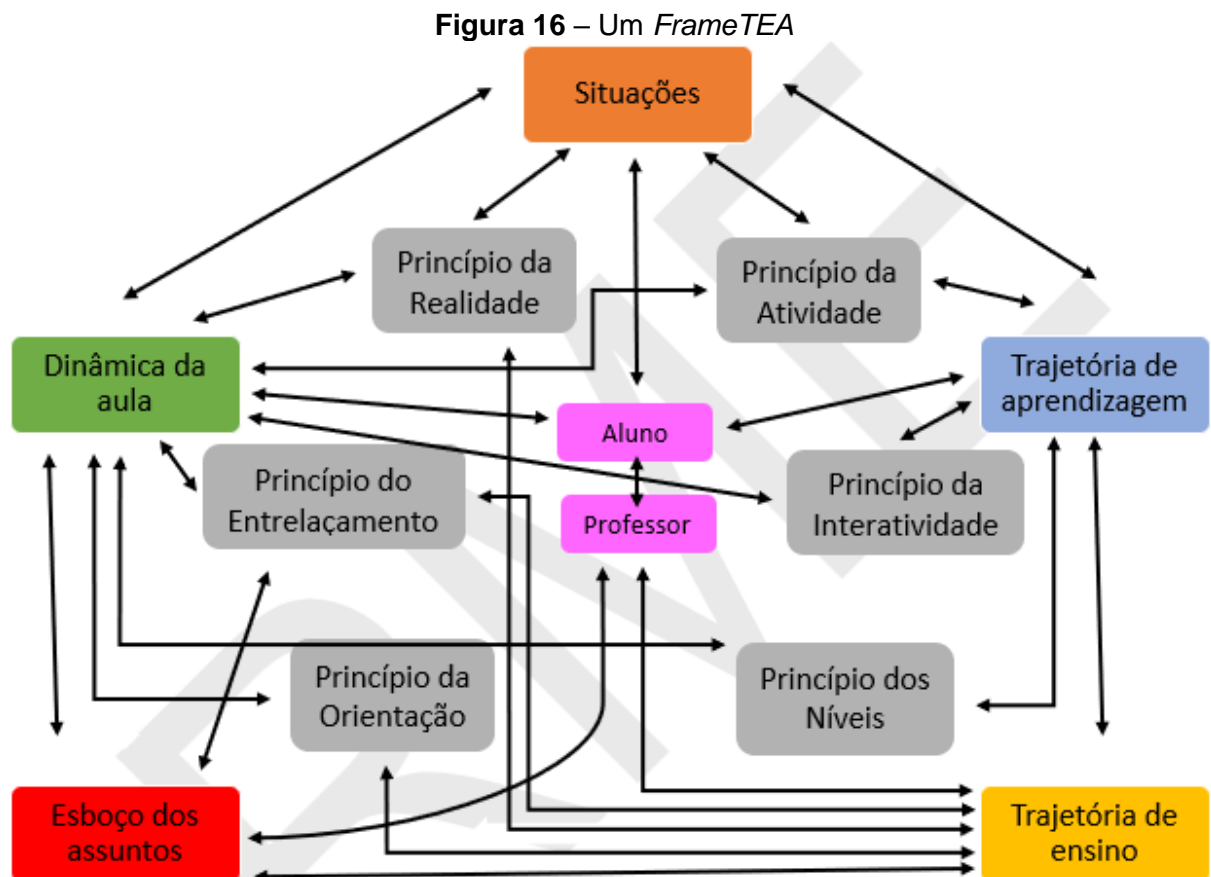
Assim, é possível construir uma outra estrutura ou esquema gráfico do *FrameTEA* levando em consideração a Figura 14 e o Quadro 16.

¹⁴ Os autores presentes nesse quadro são autores do GEPEMA e da RME.

Figura 15 – Um outro *FrameTEA*

Fonte: A autora.

Ao analisar a Figura 15, é possível perceber que ela possui elementos que se repetem, como professor, aluno e os princípios da RME. Para evitar essa repetição, a figura foi reorganizada de modo que professor e aluno ficaram no centro do processo, com os princípios da RME ao redor deles e, por fim, as fases do *FrameTEA*. Isso é apresentado na Figura 16.



Fonte: A autora.

Essa estrutura envolve aspectos da Trajetória de Ensino e de Aprendizagem assim como princípios/elementos da RME, base teórica desse *framework*. Essa é a versão tomada como final – até o momento.

6 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Esta pesquisa teve como objetivo principal desenvolver um *framework* que pudesse auxiliar professores em seu trabalho na sala de aula. Para alcançá-lo elencaram-se os seguintes objetivos específicos:

- inventariar e discutir o que se entende por *framework* apontado pela literatura alcançada;
- identificar características de um *framework*;
- descrever características da Educação Matemática Realística;
- apresentar características da Trajetória Hipotética de Aprendizagem e da Trajetória de Ensino e de Aprendizagem;
- analisar e discutir um *framework* de Trajetória de Ensino e de Aprendizagem seguindo os princípios da Educação Matemática Realística.

No intuito de atingir o primeiro e o segundo objetivos específicos, foi realizado um inventário das teses encontradas com a busca do termo *framework* no Catálogo de Teses e Dissertações/CAPES. Em seguida, realizou-se uma discussão do que se entende por *framework* com base nessa literatura. Mesmo havendo diferentes definições de *framework*, alguns termos foram comuns, como: conceitos, processo, relacionar, intenção. Esses termos também foram usados no *FrameTEA*, uma vez que podem ser entendidos como uma rede argumentativa acerca dos conceitos escolhidos para a investigação ou interpretação (e sobre as suas relações mútuas) sustentando coerentemente que não só são apropriados à investigação, mas também que se constituem em ferramenta analítica útil em função do problema e das questões definidas para a investigação. O *framework* pode basear-se em várias teorias e em vários aspectos do conhecimento dependendo daquilo que os investigadores entenderem como relevante e importante para abordar o problema num dado momento histórico-cultural.

O terceiro objetivo foi atingido com a discussão apresentada no Capítulo 3 desta tese. A Educação Matemática Realística – RME é uma abordagem para o ensino de matemática, a qual tem como principal característica e princípio

fundamental a matemática como uma atividade humana. Ao analisar esse princípio, é possível trazer outras características dessa abordagem, por exemplo: ver a matemática como uma atividade humana carrega uma ação, a atividade do homem, que é o matematizar, cujo resultado é a matemática. Nessa discussão, foi possível evidenciar os princípios da RME:

- A matemática é aprendida no fazer, na ação: Princípio da atividade.
- A realidade é utilizada como fonte para aprender: Princípio da realidade.
- Ao aprender, é possível passar por vários níveis de compreensão: Princípio de níveis.
- Aprender envolve diferentes domínios do conhecimento matemático: Princípio do entrelaçamento.
- O aprender é uma ação que se dá no social: Princípio da interatividade.
- A aprendizagem se dá por meio da reinvenção guiada: Princípio da orientação.

Ao analisar e apresentar as características da TEA e da THA, quarto objetivo, foi possível identificar um aspecto que as difere: a perspectiva longitudinal da TEA. A THA possui o ponto de referência em ciclos curtos, com aulas tendo uma ou duas tarefas, e o plano do professor abrangendo o contexto da sua própria sala de aula. A TEA vai além disso, pois leva em consideração os processos de ensino e de aprendizagem a longo prazo, pode dar uma visão geral desses processos e ser um guia para as tomadas de decisões didáticas.

Outro aspecto que as diferencia é o fato de haver mais elementos para serem considerados na elaboração de uma TEA. Além do objetivo, que está presente em ambas as trajetórias, outros elementos a compõem: perspectiva longitudinal, trajetória de aprendizagem, trajetória de ensino, sistematização, reflexão, interação, questionamentos, resoluções, estratégias e procedimentos, escolha de tarefas, ambiente de sala de aula, alunos e professor.

A análise presente no Capítulo 5 possibilitou contemplar o quinto objetivo. Nesse capítulo, além do desenvolvimento do *FrameTEA*, foi possível analisar

e discutir seus elementos com base nos princípios da RME. Também outros pontos podem ser destacados com a análise do Capítulo 5.

- Os elementos presentes no *FrameTEA* vão além dos elementos da própria TEA, uma vez que a TEA tem como elementos a trajetória de ensino, a trajetória de aprendizagem, o esboço dos conteúdos. O professor, ao considerar mais elementos na preparação da sua trajetória, pode se sentir mais seguro, mais preparado para lidar com as situações que poderão surgir na sala de aula. Elaborar uma trajetória não significa que o professor precisa seguir à risca o que planejou, ela pode ser modificada, repensada, alterada.
- O professor, ao utilizar o *FrameTEA* para elaborar sua trajetória, pode iniciar por qualquer um dos elementos, pois cabe a ele saber quais são seus objetivos, suas intenções. O desejável é que ele não esqueça ou deixe de lado algum dos elementos. Para que isso não aconteça, o professor pode utilizá-lo como suporte para seu trabalho em sala de aula, um guia, por exemplo, se ele deixasse de lado a dinâmica da aula. Não levar em consideração esse aspecto poderia prejudicar os processos de ensino e de aprendizagem, já que não haveria uma preocupação por um ambiente propício à matematização, a diferentes estratégias e procedimentos, à interação entre estudantes e professor e estudantes.
- O *FrameTEA* não é uma estrutura que deve ser utilizada pelo professor como uma receita de bolo que precisa ser seguida. É uma estrutura que pode auxiliá-lo no seu planejamento, nas suas tomadas de decisões. Na RME, não há um conjunto de procedimentos que precisam ser seguidos em sala de aula. Sua essência está nas atitudes do professor ao orientar os processos de ensino e de aprendizagem.

O *framework* apresentado nesta tese (Figura 16) carrega vários aspectos desejáveis para uma aula na perspectiva da RME, detalhados no Quadro 18.

Quadro 18 – Aspectos desejáveis para uma aula na perspectiva da RME

- | | |
|--|--|
| <ul style="list-style-type: none"> • a matematização; • tarefas com contextos ricos; • diferentes resoluções; • os estudantes lidarem com outras situações que venham a encontrar em suas vidas; • reflexão; • a aprendizagem dos estudantes – processo singular; • diferenças individuais; • desenvolvimento individual e social; • o processo de ensino; • a reinvenção guiada; • intenções e objetivos; • encaminhamentos com questionamentos; • sistematização; | <ul style="list-style-type: none"> • o design; • conteúdos; • entrelaçamentos dos eixos do conhecimento matemático; • novos conceitos; • aprendizagem matemática; • um ambiente para matematizar; • o trabalho por meio da reinvenção guiada; • o trabalho ativo dos estudantes; • atitudes do professor; • diferentes estratégias e procedimentos; • interação entre estudantes e professor e estudantes; • o desenvolvimento da linguagem. |
|--|--|

Fonte: autora.

Enfim, esta é a pesquisa desenvolvida. Espera-se que esta tese possa servir como suporte para futuras investigações relacionadas às práticas em sala de aula, bem como que professores incluam nas suas práticas a elaboração de trajetórias, pois entende-se que esse instrumento possibilita elaborar uma visão geral dos processos de ensino e de aprendizagem, do que poderá desenvolver com os estudantes, além de auxiliar nas tomadas de decisões. Espera-se, também, que contribua para o ensino e para a aprendizagem de matemática.

Esse é apenas um *FrameTEA*, entre outros que podem ser feitos, a partir de um estudo da RME. Outra pessoa, com outro olhar, pode construir um outro.

REFERÊNCIAS

- ALVES, A. G. **Eu fiz meu game um framework para criação de jogos digitais por crianças**. 2017. 288 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade do Vale do Itajaí, Itajaí, UNIVALI, Itajaí, 2017.
- AMERON, B. A. V. **Reinvention of early algebra**: developmental research on the transition from arithmetic to algebra [S.l.]: [s.n.] - Tekst. - Proefschrift Universiteit Utrecht, 2002.
- ANGIOLIN, A. G. **Trajetórias hipotéticas de aprendizagem sobre funções exponenciais**. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2009.
- BAKKER, A.; DOORMAN, M.; DRIJVERS, P. Design research on how IT may support the development of symbols and meaning in mathematics education. **Onderwijs Research Dagen (ORD)**, 2003.
- BROETTO, G. C. **O ensino de números irracionais para alunos ingressantes na licenciatura em matemática**. 2016. 422 f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2016.
- CARMO, A. B. DO. **Argumentação matemática em aulas investigativas de física**. 2015. 251 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.
- CARVALHO, A. E S. S. **As condições de trabalho de professores do ensino médio em escolas públicas estaduais da cidade de Teresina – PI**. 2018. 306 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade de Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2018a.
- CARVALHO, F. de A. S. DE. **Filmes e o exercício do filosofar em sala de aula**. 2018. 162 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Nove de Julho, São Paulo, 2018b.
- CATARINO, G. F. DE C. **A aula de física como gênero discursivo**: reflexões sobre educação científica formal, não formal e outras formas. 2013. 247 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2013.
- CAVALCANTE, A. P. P. **Multiletramentos mediados pelo computador em sala de aula**: a perspectiva das culturas juvenis em fluxo. 2014. 336 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014.
- CATHCART, K. D. P. **Criação de jogos digitais por crianças: processos colaborativos de aprendizagem na escola inclusiva**. 2017. 290 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade do Vale do Itajaí, Itajaí, 2017.
- CIANI, A. B. **O realístico em questões não-rotineiras de matemática**. 2011. 166f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

CIBOTTO, R. A. G. **O uso pedagógico das tecnologias da informação e comunicação na formação de professores**: uma experiência na licenciatura em matemática. 2015. 273 f. Tese de Doutorado. Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2015.

COSTA, E. A. G. DE A. **Com que diferenças se fazem adultos e crianças: uma analítica das identidades escolarizadas**. 2015. 313 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2015.

DAVILA, E. DA C. P. **O modelo gerencialista de políticas públicas do brasil**: um estudo sobre a Educação Ambiental na prefeitura do Rio de Janeiro. 2018. 181 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

DEORCE, M. S. **Caminhos para uma educação ambiental crítica como centro de forças no currículo do curso técnico em Mecânica do Ifes/campus Vitória**. 2014. 129 f. Tese (Doutorado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014.

DE LANGE, J. **Mathematics, Insight and Meaning**. Utrecht: OW &OC, 1987.

DE LANGE, J. **Framework for classroom assessment in mathematics**. Madison: WCER, 1999.

DE LANGE, J. Mathematics for literacy. In: MADISON, B. L.; STEEN, L.A. (Ed.). **Quantitative literacy**: why numeracy matters for schools and colleges. Princeton: The National Council on Education and the Disciplines, 2003. p. 75 – 89. Disponível em: <http://www.maa.org/external_archive/QL/pgs75_89.pdf>. Acesso em: 15 nov. 2020.

DOORMAN, M. How to guide students? A reinvention course on modeling motion. In: LIN, F. L. (Eds.), **Common sense in Mathematics Education**, Taipei, Taiwan: National Taiwan Normal University, p. 97-114, 2002.

DOORMAN, M. *et al.* Problem solving as a challenge for mathematics education in The Netherlands. **ZDM**, v. 39, n. 5-6, p. 405-418, 2007.

DOORMAN, M.; GRAVEMEIJER, K. P. E. Emergent modeling: discrete graphs to support the understanding of change and velocity. **ZDM**, v. 41, n. 1-2, p. 199-211, 2009.

DRIJVERS, P. The concept of parameter in a computer algebra environment. In: **PME CONFERENCE**. 2001. p. 2-385.

EISENHART, M. **Conceptual frameworks for research circa 1991**: Ideas from a cultural anthropologist; implications for mathematics education rese. 1991.

ESQUINCALHA, A. DA C. **Conhecimentos revelados por tutores em um curso de formação continuada para professores de matemática na modalidade a**

distância. 2015. 170 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

FEITOSA, R. A. **O currículo como mandala**: um estudo de caso sobre a formação do licenciado em ciências biológicas fortaleza. 2014. 265 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014.

FERREIRA, P. E. A. **Enunciados de tarefas de matemática**: um estudo sob a perspectiva da Educação Matemática Realística. 2013, 121f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2013.

FIGUEIREDO, R. O. M. **Intercontextualidade na prática educativa de iniciação à docência em Matemática para a educação básica**. 2017. 198f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Universidade Federal do Pará, Belém, 2017.

FORSTER, C. **Um olhar realístico para tarefas de função afim em livros didáticos**. 2020. 112f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

FRANCA, I. A. **Estratégias de Gestão de Programas de Excelência na Área da Educação**: quatro estudos de caso. 2014. 249 f. Tese (Doutorado em Educação) Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

FREUDENTHAL, H. Why to teach mathematics so as to be useful. **Educational Studies in Mathematics**. Holanda, v. 1, n. 1-2, p. 3-8, 1968.

FREUDENTHAL, H. **Mathematics as an educational task**. Dordrecht: Reidel Publis, 1973.

FREUDENTHAL, H. **Revisiting Mathematics Education**. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

GONCALVES, J. DA S. **Relações entre funções inversa e composta: uma proposta de exploração dos conceitos com o auxílio do software GeoGebra**. 2017. 466 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2017.

GRAVEMEIJER, K. **Developing realistic mathematics education**. Freudenthal Institute. Utrecht, The Netherlands, 1994.

GRAVEMEIJER, K. P. E. Creating opportunities for students to reinvent mathematics. In: **Regular lecture at the 10th International Congress on Mathematical Education (ICME 10)**, Copenhagen, Denmark, Copenhagen, 2004.

GRAVEMEIJER, K. Emergent modeling and iterative processes of design and improvement in mathematics education. In: **APEC - Tsukuba International Conference III**, Tokyo Kanazawa and Kyoto, Japão, 2007. **Proceedings...**

GRAVEMEIJER, K.; DOORMAN, M. Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example. **Educational Studies in Mathematics**, v. 39, n. 1, p. 111-129, jan. 1999.

GRAVEMEIJER, K.; TERWEL, J. Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. **Journal of Curriculum Studies**, v. 32, n. 6, p. 777-796, nov-dez. 2000.

HONORATO, I. C. R. **As representações sociais dos acadêmicos do curso de licenciatura em educação física sobre o que é ser professor**. 2017. 182 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Estadual De Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2017.

HSIA, Y. W. **Resolução de problemas: um estudo sobre seu processo evolutivo nos Estados Unidos, na China e no Brasil**. 2013. 187 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica De São Paulo, São Paulo, 2013.

ISHIKAWA, E. C. M. **Objeto virtual de aprendizagem colaborativa (collabora): estudo na disciplina de probabilidade e estatística no ensino superior**. 2018. 202 f. Tese (Doutorado em Ensino De Ciência E Tecnologia) – Universidade Tecnológica Federal Do Paraná, Ponta Grossa, 2018.

JUNGES, K. DOS S. **Desenvolvimento profissional de professores universitários: caminhos de uma formação pedagógica inovadora**. 2013. 224 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica Do Paraná, Curitiba, 2013.

JUNIOR, G. D. DE C. **Invariantes operatórios na transição entre dois campos conceituais: o caso do tempo relativo**. 2013. 231 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal De Minas Gerais, Belo Horizonte, 2013.

JUNIOR, V. B. DOS S. **Juros simples e compostos: análise ecológica, praxeológica e um Percurso de Estudo e Pesquisa**. 2017. 495 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Anhanguera De São Paulo, São Paulo, 2017.

KEARNEY, M.; SCHUCK, S.; BURDEN, K.; AUBUSSON, P. Viewing mobile learning from a pedagogical perspective. **Research In Learning Technologies**, Stockholm, v. 20, n. 1, fev. 2012.

KEIJZER, R.; VAN GALEN, F.; OOSTERWALL, L. **Reinvention revisited: learning and teaching decimals as an example**. Paper presented at the ICME 10, 2004.

KOOLE, M. L. A model for framing mobile learning. In: ALLY, M. (Ed.). **Mobile learning: transforming the delivery of education and training**. Edmonton: AU Press, 2009. cap. 2.

KWON, O. N. Conceptualizing the realistic mathematics education approach in the teaching and learning of ordinary differential equations. **Proceedings of the 2nd**

International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level. Hersonissos. Greece. University of Crete, 2002.

LEAL, M. P. M. **História e memória da criação da Funeduce e Uece:** entre narrativas e documentos oficiais. 2017. 131 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2017.

LI, Q. **Learning through digital game design and building in a participatory culture:** na inactivist approach. New York: Peter Lang, v. 14, 2014.

MACEDO, E. S. DE. **Leitura de imagem, dialogismo e grafitti:** contribuições para o ensino da arte. 2015. 303 f Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2015.

MADEIRA, M. C. **Uma escola municipal de educação infantil como lugar de experiência, comunicação e relações:** contribuições para a construção de uma Pedagogia da Infância. 2017. 203 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal De Pelotas, Capão do Leão, 2017.

MARTINEAU, S.; SIMARD, D.; GAUTHIER, C. Recherches théoriques et spéculatives: considérations méthodologiques et épistémologiques. **Recherches Qualitatives**, Montreal, v. 22, n. 3, p. 32, 2001.

MENDES, M. T. **Utilização da Prova em Fases como recurso para regulação da aprendizagem em aulas de cálculo.** 2014. 275f. Tese de doutorado (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, 2014.

MISHRA, P.; KOEHLER, M. J. Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. **Teachers college record**, v. 108, n. 6, p. 1017-1054, 2006.

MOSER, C. **Child-Centered Game Development.** Salzburg: [s.n.], 2015. 225 p. Tese de doutorado.

NASCIMENTO, J. S. DE S. **Ações para implementação da lei 10.639/03: a (des)consideração da identidade híbrida do negro contemporâneo.** 2017. 281 f. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2017.

NELISSEN, J. M. C. **Thinking skills is realistic mathematics**, 1999. Disponível em < <http://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/literatuur/6259.pdf>>. Acesso em 29 novl. 2020.

NELISSEN, J.; TREFFERS, A. Marco de Enseñanza. In: VAN DEN HEUVEL-PANHIZEN, M. **Los niños aprenden matemáticas: una trayectoria de aprendizaje-enseñanza con objetivos intermedios para el cálculo con números naturales en la escuela primaria** . tr. del inglés Fernanda Gallego y Betina Zolkower; tr. del neerlandés Cornelis van der Meer, México: Correio del maestro: La Vasija, 2010.

OLIVEIRA, R. C. de. **Matematização**: estudo de um processo. 2014. 62f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2014.

PASSOS, A. Q. **Van Hiele, Educação Matemática Realística e GEPEMA**: algumas aproximações. 2015. 147 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

PEDROCHI JUNIOR, O. **A Avaliação Formativa como Oportunidade de Aprendizagem**: fio condutor da prática pedagógica escolar. 2018. 67 f. Tese (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

PEREIRA, A. M. **Anúncios publicitários divulgados na internet: a elaboração do modelo didático como contribuição para o letramento escolar**. 2015. 159 f. Tese (Doutorado em Educação) Universidade São Francisco, Itatiba, 2015.

PETIT, T. L. Y. **O smartphone e a educação pelas línguas-culturas: design e desenvolvimento do MapLango na perspectiva da aprendizagem nômade em rede**. 2017. 171 f. Tese (Doutorado em Educação) Universidade de Brasília, Brasília, 2017.

PIRES, C. M. C. Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações de Martin Simon. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 11, n. 1, p. 145 – 166, 1o quadrimestre 2009.

PIRES, M. N. M. **Oportunidade para aprender: uma Prática da Reinvenção Guiada na Prova em Fases**. 2013. 122f. Tese (Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

PITACAS, J. F. M.; PEDRO, N. De <https://repositorio.ul.pt/handle/10451/5301> que falamos quando falamos de framework na investigação em educação (matemática)? In: **Investigación en educación matemática XII**. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM, 2008. p. 48. Disponível em: <<https://repositorio.ul.pt/handle/10451/5301>>. Acesso em: jul. 2019.

PRIGOL, E. L. **Pensamento complexo e transdisciplinar**: ecologia dos saberes docentes na prática pedagógica. 2018. 276 f. Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2018.

RECK, A. M. **Narrativas religiosas no ensino superior em música: uma abordagem autobiográfica**. 2017. 206 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal De Santa Maria, Santa Maria, 2017.

REIS, C. S. **Trajetórias em contraponto**: uma abordagem microssociológica da formação superior em piano em duas universidades brasileiras. 2014. 311 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2014.

RODRIGUES, G. M. **Desenho e validação de uma sequência de ensino aprendizagem sobre os estados físicos da matéria com base na teoria da atividade e na teoria da formação das ações mentais por etapas**. 2014 undefined f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal Rural De Pernambuco, Recife, 2014.

ROSSETTO, H. H. P. **Trajetória Hipotética de Aprendizagem sob um olhar realístico**. 2016. 104f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

SANTOS, E. R. dos. **Análise da produção escrita em matemática: de estratégia de avaliação a estratégia de ensino**. 2014. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2014.

SCHASTAI, M. B. **TALL e Educação Matemática Realística: algumas aproximações**. 2017. 179 f. Tese (Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2017.

SEMBIRING, R. K.; HADI, S.; DOLK, M. Reforming mathematics learning in Indonesian classrooms through RME. **ZDM**, v. 40, n. 6, p. 927-939, 2008.

SHARPLES, M.; TAYLOR, J.; VAVOULA, G. A Theory of Learning for the Mobile Age. In: ANDREWS, R.; HAYTHORNTHWAITE, C. (Eds.). **The Sage Handbook of e-learning Research**. London: Sage, 2007. p. 221-247.

SHEHABUDDEEN, N., *et al.* Representing and approaching complex management issues: Part 1 - Role and definition. **Centre for Technology Management (CTM) Working Paper**, n.2000/03, 1999.

SILVA, G. S.E. **Uma configuração da reinvenção guiada**. 2015. 94f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2015.

SILVA, A. DE P. **Formação Profissional Técnica, CTS e Educação Empreendedora: Implicações com os Parques Tecnológicos**. 2016. 239 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, 2016.

SILVA, A. S. DA. **Atividades multimodais em uma abordagem partitiva para a divisão de frações**. 2017. 289 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo, 2017.

SILVA, G. DOS S. E. **Um olhar para os processos de aprendizagem e de ensino por meio de uma trajetória de avaliação**. 2018. 166f. Tese de Doutorado (Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2018.

SIMON, M. A. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. **Journal for Research in Mathematics Education**, vol. 26, n. 2, pp. 114-145. 1995.

SIMON, M. A. e TZUR, R. Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, vol. 6, n. 2, pp. 91-104, 2004.

TREFFERS, A. **Three dimensions**: a model of goal and theory description in mathematics instruction – the wiskobas project. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1987.

TREFFERS, A.; GOFREE, F. **Rational analysis of realistic mathematics education – the wiskobas program**. 1985. Disponível em: <<https://docs.google.com/file/d/0B4o6aVujDKNpY1dQSTBqNEo4b1E/edit>>. Acesso em: 21/05/15.

TREVISAN, A. L. **Prova em fases e um repensar da prática avaliativa em Matemática**. 2013. 168f. Tese de doutorado (Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013.

TREVISAN, I. **A aula de campo**: espaço de formação inicial de professores de Ciências/Biologia. 2015. 201 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) – Universidade Federal do Pará, Cuiabá, 2015

VAN DEN AKKER, J. et al. (Ed.). **Educational design research**. Routledge, 2006.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. **Assessment and Realistic Mathematics Education**. Utrecht: CD-β Press/Freudenthal Institute, Utrecht University. 1996.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. Freudenthal Institute. Cd-rom for **ICME9**. Utrecht: Utrecht University, 2000a.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. Realistic Mathematics Education as work in progress. In: LIN, F. L. (Ed.). *Common Sense in Mathematics Education*. Proceedings of 2001. **The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics**. Taipei, Taiwan, p. 1-43, November 2000b.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. A learning-teaching trajectory description as a hold for mathematics teaching in primary schools in the Netherlands. In: M. Tzekaki Ed. **Didactics of Mathematics and Informatics in Education**. 5th Panhellenic Conference with International Participation, pp. 21-39. Thessaloniki: Aristotle University of Thessaloniki / University of Macedonia/ Pedagogical, 2001a.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. **Children learn mathematics**: a learning-teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school. Groningen, The Netherlands: Wolters Noordhoff, 2001b.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. Guides for didactical decision making in primary school mathematics education: the focus on the content domain of estimation. *Skriptserie for Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplaeringen*, 1, 139-152, 2003a.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. The didactical use of models in Realistic Mathematics Education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. **Educational Studies in Mathematics**, v. 54, n.1, p. 09-35, nov. 2003b.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. The role of contexts in assessment problems in mathematics. **For the Learning Mathematics**, v. 25, n. 2, 2005a, p. 2-9.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. Can scientific research answer the 'what' question of mathematics education? **Cambridge Journal of Education**, v. 35, n. 1, p. 35-53, 2005b.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. **Los niños aprenden matemáticas: una trayectoria de aprendizaje-enseñanza con objetivos intermedios para el cálculo con números naturales en la escuela primaria**. tr. del inglés Fernanda Gallego y Betina Zolkower; tr. del neerlandés Cornelis van der Meer, México: Correio del maestro: La Vasija, 2010a.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. Reform under attack – Forty Years of Working on Better Mathematics Education thrown on the Scrapheap? No Way! In: SPARROW, Len; KISSANE, Barry; HURST, Chris (Eds.). **Proceedings of the 33th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia**. Fremantle: MERGA, 2010b.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M; WIJERS, M. Mathematics standards and curricula in the Netherlands. **ZDM**, v. 37, n. 4, p. 287-307, 2005.

VAN DER MAREN, J.-M. **Méthodes de recherche pour l'éducation**. Bruxelles: De Boeck and Larcier, 1996.

VENANCIO, L. **O que nós sabemos? Da relação com o saber na e com a educação física em um processo educacional-escolar**. 2014. 311 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual Paulista Júlio De Mesquita Filho, Presidente Prudente, 2014.

VIANA, F. R. **Análise do desenvolvimento do processo de autorregulação por alunos com deficiência intelectual: implicações dos princípios de mediação de feuerstein na intervenção pedagógica tutorada**. 2016. 319 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal Do Ceará, Fortaleza, 2016.

VIANA, G. M. **Construção de relações teoria-prática na formação de professores de Ciências e Biologia**. 2014. 319 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2014.

VOOS, J. B. A. **Políticas de permanência de estudantes na educação superior: em exame as universidades comunitárias catarinenses**. 2016. 165 f. Tese (Doutorado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2016.

WIDJAJA, Y. B.; HECK, A. How a Realistic Mathematics Education approach and microcomputer-based laboratory worked in lessons on graphing at an Indonesian

Junior High School. **Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia**, Amsterdam, v. 26, n. 2, p. 1-51, 2003.

ZAMARIAN, M. J. **A revista avisa lá e a formação de professores no campo da leitura**. 2016. 263 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade São Francisco, Itatiba, 2016.