



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

**THIAGO GILBERTO DO PRADO**

**MODELOS COSMOLÓGICOS EM (2+1) DIMENSÕES: UM  
COMPARATIVO ENTRE RELATIVIDADE GERAL E TEORIA  
DE BRANS-DICKE**

---

Londrina  
2008

**THIAGO GILBERTO DO PRADO**

**MODELOS COSMOLÓGICOS EM (2+1) DIMENSÕES: UM  
COMPARATIVO ENTRE RELATIVIDADE GERAL E TEORIA  
DE BRANS-DICKE**

Tese apresentada ao Programa de Pós- Graduação,  
em Física da Universidade Estadual de Londrina,  
como requisito parcial à obtenção do título de  
Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Andrey A. Bytsenko

Londrina  
2008

**THIAGO GILBERTO DO PRADO**

**MODELOS COSMOLÓGICOS EM (2+1) DIMENSÕES: UM  
COMPARATIVO ENTRE RELATIVIDADE GERAL E TEORIA  
DE BRANS-DICKE**

Tese apresentada ao Programa de Pós- Graduação,  
em Física da Universidade Estadual de Londrina,  
como requisito parcial à obtenção do título de  
Doutor em Física.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Prof. Dr. Antonio Edson Gonçalves – UEL

---

Profa. Dr. José Abdala Helayel Neto – CBPF

---

Prof. Dr. Rosevaldo de Oliveira – UEL

---

Prof. Dr. Renio dos Santos Mendes – UEM

---

Prof. Dr. Mario Gotto – UEL

---

Prof. Dr. Luis Carlos Malacarne – UEM

---

Prof. Dr. Andrey Aleksandrovich Bytsenko  
Orientador – UEL

Londrina, 30 de junho de 2008.

Ao meu tio

## AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me concedido toda inteligência e saúde necessária para terminar mais esta etapa de meus estudos.

Aos meus pais Gilberto e Ilze pelo incentivo, amizade, carinho, e pelo grande auxílio à minha educação e todas as vezes que precisei.

Ao meu Tio, que não pôde estar aqui.

A minha esposa Josiane pelo carinho, atenção e compreensão ao escutar minhas intermináveis discussões sobre Física.

A meus amigos Jair, Thiago, Eduardo, Junior e Emerson.

Ao Prof. Dr. Andrey A. Bytsenko pela orientação.

Ao Prof. Dr. Antonio Edson Gonçalves pela amizade.

Ao Prof. Dr. Manuel Simões.

Aos meus amigos Zhanna, Vanderlei, André, Kleber, Rogério e Marcelo pelo apoio moral e cultural no decorrer do meu doutorado.

A todos meus colegas de mestrado e doutorado.

Aos professores do departamento de física da UEPG que me ensinaram a base necessária para que eu conseguisse chegar até aqui, em especial Prof. Dr. Sergio da Costa Saab e Prof. Dr. André Mauricio Brinatti que deram o empurrão inicial para que eu me tornasse doutor.

Aos professores do mestrado e doutorado em física da Uel, em especial prof. Dr. Mário Goto e Prof. Dr. Veríssimo de Aquino pelas discussões sobre física e cosmologia.

A CAPES pela bolsa concedida a mim ao qual sem esta não poderia ter concretizado mais esta etapa de meus estudos.

PRADO, Thiago Gilberto do. **Modelos cosmológicos em (2+1) dimensões: Um comparativo entre relatividade geral e teoria de Brans-Dicke**. 2008. 47f. Tese (Doutorado em Física) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

## RESUMO

Observações recentes de supernovas do tipo IA, associada com estrutura de grande escala (LSS), e anisotropias na radiação de cósmica de fundo (CMB) feitas pelo telescópio WMAP, tem sido a principal evidência de que o universo está experimentando uma era de aceleração cósmica. A análise combinada de observações cosmológicas, sugere que o universo consiste de 70% de energia escura e 30 % de matéria onde apenas 1% desta matéria seria visível, e 29% seria composta por matéria escura fria. No entanto os modelos cosmológicos conhecidos fundamentados na relatividade geral, não possuem respostas quanto a aceleração cósmica e a energia escura. Neste trabalho faremos uma comparação entre os resultados obtidos a partir da relatividade geral, e uma de suas principais teorias alternativas; A teoria de Brans-Dicke, ambas reduzidas dimensionalmente para (2+1) dimensões. A partir destes resultados comparativos, observaremos se existe ou não a necessidade de correções nos modelos quanto a termos de energia escura, introduzidos diretamente no tensor energia momento, existindo esta necessidade utilizaremos o modelo de energia escura holográfica que esta fundamentado principalmente no princípio holográfico, que restringe a densidade de energia contida em uma dada região do espaço como não sendo maior que a densidade de energia de um buraco negro que ocupe a mesma região do espaço.

**Palavras-chave:** Relatividade geral. Cosmologia. Teoria de Brans-Dicke. Energia escura. Holografia.

PRADO, Thiago Gilberto do. **Cosmological models in (2+1) dimensions: a compare between general relativity and Brans-Dicke theory.** 2008. 47f. Thesis (Doctor in Physics) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

### **ABSTRACT**

Recent observations from type IA supernovae associated with Large Scale Structure and Cosmic Microwave Background anisotropies have provided main evidence for the cosmic acceleration. The combined analysis of cosmological observations suggests that the universe consists of about 70% of dark energy and 30% of dust energy where only 1% of this dust energy is visible and 29% is composed of cold dark matter. However the well known cosmological models, based on general relativity, do not answer questions about dark energy and cosmic acceleration. In this work we compare general relativity and the gravitational alternative theory called Brans-Dicke theory, both with dimensional reduction to (2+1) dimensions. From this we compare results and find out if there is a need for corrections in models regarding dark energy, which would be introduced in the energy-momentum tensor. If such need is found we may use the holographic dark energy model, which is fundamented in the holgraphic principle. This constrain the energy density in a region of space which must be smaller than the energy density of a black hole occupying the same region of space.

**Keywords:** General relativity. Cosmology. Brans-Dicke theory. Dark energy. Holography.

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	8
<b>2 TEORIAS GRAVITACIONAIS EM (2 + 1) DIMENSÕES</b> .....	11
2.1 RELATIVIDADE GERAL .....	11
2.2 BRANS-DICKE .....	12
<b>3 MODELOS COSMOLÓGICOS (2 + 1) DIMENSIONAIS</b> .....	14
3.1 RELATIVIDADE GERAL .....	14
3.2 BRANS-DICKE .....	17
<b>4 ENERGIA ESCURA</b> .....	24
4.1 CONSTANTE COSMOLÓGICA .....	24
4.2 ENERGIA ESCURA HOLOGRÁFICA .....	25
<b>5 MODELOS COSMOLÓGICOS (2 + 1) DIMENSIONAIS CORRIGIDOS POR     MODELO DE ENERGIA ESCURA HOLOGRÁFICA</b> .....	26
5.1 RELATIVIDADE GERAL .....	26
5.2 TEORIA DE BRANS-DICKE.....	28
<b>6 DISCUSSÃO</b> .....	32
<b>7 CONCLUSÃO</b> .....	34
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	36
<b>APÊNDICES</b> .....	41
Apêndice A.....	42
Apêndice B .....	45

## 1 INTRODUÇÃO

O problema da constante cosmológica é um dos maiores problemas enfrentados pela física teórica na atualidade. Contudo a importância de sua compreensão aumentou nos últimos anos, devido a dados obtidos experimentalmente sobre a radiação cósmica de fundo **CMB** (Cosmic Microwave Back-ground), e estrutura de grande escala feitos pelo telescópio **WMAP**<sup>1</sup> [41, 2,6, 59].

Estes dados levaram á evidências sobre a existência de 70% a mais de energia no universo, do que era esperado pelo modelo cosmológico padrão. Além disso este déficit de energia não se encaixava nos aspectos de matéria bariônica visível, ou matéria escura fria [4, 31, 11].

A partir destes dados físicos teóricos, teriam pela primeira vez que identificar as origens de uma energia que não foi prevista pelo modelo Einstein-de Sitter. Pelas propriedades desconhecidas desta energia a chamaram de energia escura.

A primeira escolha lógica e mais simples como candidata à essa energia escura é a constante cosmológica. Contudo embora esta proposta seja razoavelmente boa, esta possui duas desvantagens teóricas: Em primeiro lugar, o valor teórico para o campo quântico relacionado a constante cosmológica é 123 vezes maior em magnitude do que seu valor observado experimentalmente. Segundo, este acarreta o problema da coincidência cósmica [5]: Por que as densidades de energia do vácuo e matéria são precisamente da mesma magnitude nos dias atuais? Estes duas desvantagens fazem com que a constante cosmológica, seja pouco utilizada como candidata a responder pelo problema da energia escura, abrindo assim um vasto campo para propostas que possam solucionar o problema.

Outro grande problema que também ficou evidenciado com as observações do **WMAP**, foi que o universo atualmente está experimentando uma fase de expansão acelerada [4]. Esta conclusão foi obtida á partir das seguintes medidas: Desvio para o vermelho de supernovas do tipo IA<sup>2</sup> cosmológicamente distantes; a observação do primeiro pico acústico para **CMB**; estimativa para quantidades de massa a nível cosmológico e correlações das anisotropias da **CMB** para estrutura de grande escala.

---

<sup>1</sup> **WMAP**: Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (sonda de anisotropia de microondas Wilkinson)

<sup>2</sup> Supernova tipo IA: Se uma anã branca de oxigênio carbono consegue capturar matéria o bastante para atingir o limite de Chandrasekhar em torno de 1,8 massas solares, esta pode não suportar seu próprio peso e começar a colapsar. No entanto a visão atual e de que este limite não é normalmente atingido aumentando a temperatura e a densidade da coroa estelar ocasionando a ignição da fusão do carbono, produzindo energia o bastante para a estrela explodir em uma supernova, ocasionando um intenso aumento na luminosidade da estrela.

Estas medidas sugerem que o universo é espacialmente plano ou muito próximo disso. Esta aceleração vem sendo atribuída a componente da energia escura que possui uma pressão negativa, que poderia estar induzindo uma gravidade repulsiva, o que levaria a uma expansão acelerada do universo [31]. No entanto estes dados não são compatíveis com os valores previstos do modelo Einstein-de Sitter, que previam uma taxa de expansão desacelerada para o estágio atual do universo (era dominada pela matéria).

O modelo Einstein-de Sitter construído á partir da relatividade geral, não prevê nada sobre o que seria esta energia escura ou porque o universo atualmente experimenta uma taxa de expansão acelerada. Contudo diversos autores vem propondo diferentes soluções, que tentam corrigir as falhas do modelo, a .m de descrever os resultados obtidos pelo **WMAP** [15, 3, 9, 45, 58, 57, 30, 21, 39]. Estes modelos normalmente trabalham com um termo aditivo ao tensor energia momento, correspondendo ao termo de energia escura. Este termo de energia escura também deve possuir uma correspondente pressão negativa com o objetivo de obtermos uma taxa de expansão acelerada.

A adição destes termos ao tensor energia momento se torna necessária já que a energia escura corresponde á aproximadamente 70% de toda a energia contida no universo, e os 30% restantes correspondem a matéria aglomerada (matéria escura fria mais matéria bariônica), e radiação que para o atual período do universo possui uma colaboração desprezível.

Devido as estimativas incorretas quanto aos dados obtidos pelo **WMAP**, para a densidade de energia e taxa de expansão encontradas utilizando o modelo Einstein-de Sitter, construído á partir da relatividade geral, o estudo de outras teorias gravitacionais se tornou um campo promissor com o objetivo de corrigir as estimativas incorretas da teoria da relatividade geral, quanto a quantidade de energia e taxa de expansão. Alguns autores [40, 22, 20, 42, 61, 43, 34, 21], vem tentando conciliar estas teorias alternativas aos modelos propostos para a energia escura.

Entretanto um comparativo entre os resultados obtidos por estas propostas se vê necessário, para que possamos ter uma idéia de qual teoria gravitacional melhor responde aos dados experimentais. Porém a principal desvantagem em utilizar estas teorias gravitacionais alternativas, é que normalmente estas vem acrescidas de novos parâmetros, tornando assim ainda mais complicada a solução das equações de movimento obtidas a partir delas.

Uma possível solução para as complicações causadas por este maior número de parâmetros, seria estudar estas teorias alternativas, em um espaço de dimensão menor. Já é

conhecido que o estudo de teorias gravitacionais clássicas e quânticas é viável, e possui resultados satisfatórios, sem as complicações de se trabalhar com mais dimensões [35, 36, 18, 19, 26, 27, 17, 7].

Faremos aqui primeiramente uma comparação entre os resultados obtidos pelos modelos cosmológicos construídos a partir da relatividade geral, e da teoria alternativa conhecida como teoria de Brans-Dicke, que leva em conta a adição de um campo escalar não minimamente acoplado, a ação de Einstein Hilbert [10, 62], ambos reduzidos dimensionalmente para  $(2 + 1)$  dimensões.

Isto será feito com os objetivos de: Comparar as duas teorias quando reduzidas dimensionalmente; verificar se existe a necessidade da utilização de modelos de energia escura para a teoria de Brans-Dicke com redução dimensional, ou se esta se comporta como uma pura teoria de  $k$ -essência em dimensão menor exatamente como em  $(3 + 1)$  dimensões.

Para as devidas correções com respeito a energia escura, estaremos focados no modelo de Energia escura holográfica [3, 39]. O modelo de energia escura holográfica está fundamentado em considerações termodinâmicas. Este modelo aparece devido a considerações do princípio holográfico [18, 19, 33, 32, 48, 49, 50], que declara que o número de graus de liberdade de um sistema físico, deve estar relacionado a área e não ao volume do sistema em estudo, e que este deve ser limitado por um cutoff infravermelho<sup>3</sup> [3]. Em base disso foi proposto um limite para a densidade de energia [39], que para uma teoria  $(2 + 1)$  dimensional é  $\rho_\Lambda \leq c^2 M_p^2 L^{-1}$ , onde  $c$  é uma constante adimensional,  $M_p$  é conhecido como a massa de Planck<sup>4</sup> e  $L$  é o raio do cutoff infravermelho que deve ser escolhido de maneira propícia. O sinal de igualdade aparece apenas quando o limite é saturado.

Faremos também uma comparação entre os resultados obtidos para relatividade geral e teoria de Brans-Dicke quando estas teorias são corrigidas pelo modelo de energia escura holográfica. Com isto estaremos encontrando um resultado comparativo, indicando qual teoria gravitacional reduzida dimensionalmente é mais eficaz em responder as tendências de aceleração e energia obtidas pelo **WMAP**. Este resultado poderá nos trazer um bom indicativo sobre qual será a teoria que trará os melhores resultados para o caso de dimensão maior.

---

<sup>3</sup> Cutoff infravermelho: é valor mínimo para a energia ou o valor máximo para o comprimento que pode ser levado em conta.

<sup>4</sup> Massa de Planck: é a unidade de massa para o sistema natural de unidades.

## 2 TEORIAS GRAVITACIONAIS EM (2 + 1) DIMENSÕES

### 2.1 RELATIVIDADE GERAL

Modelos gravitacionais com redução dimensional vem sendo amplamente estudados nos últimos anos, principalmente após o trabalho de M. Banãdos, C.

Teitelboim e J. Zanelli [35]. Estes puderam constatar em seu trabalho que as fascinantes propriedades destes análogos de dimensão menor, podem exibir propriedades características da teoria, sem as complicações desnecessárias do estudo em espaços com um número maior de dimensões espaciais. A redução da dimensão também produz uma redução nos graus de liberdade da teoria que para (2 + 1) dimensões passa a possuir apenas um grau de liberdade.

A teoria da relatividade geral com certeza é a teoria gravitacional clássica mais utilizada e aceita até os dias atuais. As equações de campo ou também chamadas equações de Einstein, podem ser derivadas diretamente do princípio variacional [55, 53, 56, 54] fazendo-se a variação da ação

$$S_G = \frac{1}{16\pi} \int d^3x \sqrt{g} [\mathcal{R} + 16\pi \mathcal{L}_M], \quad (1)$$

a equação acima é conhecida como ação gravitacional, que é obtida a partir da soma da ação e Einstein Hilbert com a ação de matéria. Nesta  $R$  é o escalar de curvatura,  $G$  é a constante de Newton,  $g$  é o determinante do tensor métrico e  $L_M$  é a densidade Lagrangeana devido aos campos de matéria. Como a ação é estacionária sob pequenas variações do tensor métrico [16], a variação de 1 com relação ao tensor métrico nos leva diretamente as equações de Einstein para o campo gravitacional

$$G_{ab} = 8\pi T_{ab}^M, \quad (2)$$

onde

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} \mathcal{R}. \quad (3)$$

Sendo  $R_{ab}$  o tensor de Ricci e  $T_{ab}^M = p g_{ab} + (\rho + p) U_a U_b$  o tensor energia momento. A densidade total de energia  $\rho$  esta relacionada a pressão  $P$  por uma equação de estado que governa o tipo de fluido perfeito sobre consideração  $p = \omega_M \rho$ ,  $U_a$  é a 4-velocidade definida como  $\bar{U}_a = \frac{dx^a}{d\tau} \equiv (1, 0, 0, 0)$ , e  $\tau$  é o tempo próprio. O lado esquerdo de (2) representa a

geometria do espaço considerado, e o lado direito representa a distribuição de energia de um fluido perfeito [44], podemos observar que os campos de matéria são a fonte do campo gravitacional.

Para (2 + 1) dimensões não existe diferença aparente nas equações de campo exceto pela integração em (2 + 1) dimensões na ação gravitacional, as diferenças se tornam evidentes na escolha da solução e nas equações de movimento obtidas a partir da solução escolhida. Contudo as propriedades físicas do espaço não são alteradas, fazendo disso a principal vantagem em se estudar espaços com redução dimensional.

## 2.2 BRANS-DICKE

As teorias escalares tensoriais foram concebidas originalmente por Jordan [47], que iniciou por mergulhar uma variedade curva de quatro dimensões em um espaço plano de cinco dimensões. Ele mostrou que um vínculo na formulação geométrica projetiva pode ser um campo escalar em quatro dimensões, o que nos permite escrever a "constante" gravitacional como uma função do tempo.

Esta idéia está em total acordo com a proposta feita por P.A.M. Dirac [46] em que a constante gravitacional deve possuir uma dependência temporal.

A teoria de Brans-Dicke é a mais simples destas teorias escalares tensoriais. O espírito desta extensão da relatividade geral é tentar incorporar o princípio de Mach<sup>5</sup> [55] e a hipótese de Dirac, em que a constante gravitacional possui uma dependência temporal. As equações de campo desta teoria, podem ser obtidas a partir da variação da ação

$$S_G = \frac{1}{16\pi} \int d^3x \sqrt{g} \left[ \phi R - \omega \frac{\nabla_a \phi \nabla^a \phi}{\phi} + 16\pi \mathcal{L}_M \right]. \quad (4)$$

A equação acima é conhecida como ação de Brans-Dicke. Nesta  $R$  é o escalar de curvatura,  $\phi$  é o campo de Brans-Dicke que pode ser dependente com todas as coordenadas espaciais e temporais,  $\omega$  é um parâmetro adimensional da teoria. A Lagrangeana de matéria não possui dependência com o campo de Brans-Dicke, isto é necessário para garantir que o princípio da

---

<sup>5</sup> Princípio de Mach: A hipótese de que existe a influência da massa da Terra e de outros corpos celestes que determinam um referencial inercial é chamado princípio de Mach.

equivalência fraco<sup>6</sup> seja satisfeito. Sendo assim, a Lagrangeana de matéria possui a mesma forma que em relatividade geral. Como a ação (4) é estacionária sobre pequenas variações do tensor métrico, podemos á partir do princípio variacional encontrar as equações de movimento para a teoria de Brans-Dicke. Estas possuem a seguinte forma

$$\begin{aligned} G_{ab} &= \frac{8\pi}{\phi} T_{ab}^M + 8\pi T_{ab}^{BD}, \\ \nabla_a \nabla^a \phi &= \frac{1}{(3 + 2\omega)} T_a^{Ma}. \end{aligned} \quad (5)$$

Onde

$$\begin{aligned} G_{ab} &= R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R, \\ T_{ab}^M &= p g_{ab} + (\rho + p) U_a U_b, \\ T_{ab}^{BD} &= \frac{1}{8\pi} \left[ \frac{\omega}{\phi^2} \left( \nabla_a \phi \nabla_b \phi - \frac{1}{2} g_{ab} \nabla_c \phi \nabla^c \phi \right) + \frac{1}{\phi} \left( \nabla_a \nabla_b \phi - g_{ab} \nabla_c \nabla^c \phi \right) \right], \end{aligned}$$

temos que  $\rho$  e  $p$  são a densidade de energia e a pressão devido a toda radiação e matéria aglomerada  $\rho = \rho_{rad} + \rho_m$ , e ambas estão relacionadas pela equação de estado  $p = \omega_M \rho$  e  $U_a$  é a 4-velocidade onde  $U_a = (1; 0; 0; 0)$ . Podemos notar que  $T_{ab}^M = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta \sqrt{g} \mathcal{L}_M}{\delta g_{ab}}$ , más o tensor energia momento devido ao campo de Brans-Dicke não pode ser obtido de maneira similar, devido ao acoplamento não mínimo do campo escalar ao escalar de curvatura, que não permite a separação da Lagrangeana do campo escalar à do campo gravitacional.

Contudo exatamente da mesma maneira que a pressão e densidade de matéria estão relacionadas por uma equação de estado,  $\rho_{BD}$  que é identificada como a componente temporal do tensor energia momento relativo ao campo de Brans-Dicke, e  $p_{BD}$  que é identificada como as componentes espaciais do tensor energia momento de Brans-Dicke, estão relacionados por uma equação de estado  $p_{BD} = \omega_{BD} \rho_{BD}$ , da mesma maneira que a densidade de energia dos campos de matéria e a pressão estão relacionadas. Isto ocorre para garantir que a distribuição de energia seja homogênea e isotrópica.

As equações de movimento serão utilizadas no sistema físico de Jordan, possibilitando assim que os resultados possam ser comparados com os obtidos pela relatividade geral. O campo escalar de Brans-Dicke é identificado como um campo escalar sem massa, o que o faz ser desacoplado a lagrangeana de matéria de modo a não violar o princípio da equivalência fraco [10, 62].

---

<sup>6</sup> Princípio fraco da equivalência: qualquer objeto sobre influência somente de forças gravitacionais caem localmente com uma aceleração comum.

### 3 MODELOS COSMOLÓGICOS (2 + 1) DIMENSIONAIS

#### 3.1 RELATIVIDADE GERAL

Dados obtidos pelo **WMAP** [4] sobre a anisotropia da **CMB** proeminente da era do desacoplamento entre radiação e matéria, confirmam que a distribuição de matéria e radiação no universo pode ser considerada como sendo homogênea e isotrópica. No entanto, somente isto não garante que o universo seja topologicamente suave<sup>7</sup> por inteiro, garantindo apenas que uma região grande o bastante como nosso volume de Hubble<sup>8</sup> seja aproximadamente suave. Assim podemos propor, o universo em grandes escalas como sendo homogêneo, isotrópico e suave. Esta homogeneidade e isotropia é conhecida como princípio cosmológico.

Em cosmologia devemos assumir uma solução para (2) que esteja de acordo com o princípio cosmológico [55]. Esta simetria do universo em grande escala é expressa pelo elemento de linha **FLRW**. Para nosso caso de interesse em (2 + 1) dimensões, temos

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\phi^2 \right], \quad (6)$$

$\alpha(t) \equiv a$  é o fator de escala do universo e  $k$  é a constante de curvatura que determina se o modelo é aberto  $k = -1$ , plano  $k = 0$  e fechado  $k = 1$ . Substituindo (6) em (2) e considerando que o tensor energia momento se comporta como um fluido perfeito que permeia o espaço tempo (2 + 1) dimensional da seguinte maneira  $T_{\nu}^{\alpha} = \text{diag}(\rho, -p, -p)$ ; encontramos que as equações de movimento do campo gravitacional para o espaço tempo descrito pela métrica (6); são escritas como

---

<sup>7</sup> Topologicamente suave: Um espaço topológico é dito ser topologicamente suave se este é do tipo  $C^1$  (esteja livre de singularidades)

<sup>8</sup> Volume de Hubble: Volume delimitado pelo tempo de Hubble ou raio de Hubble que é o tempo de expansão do universo.

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = 8\pi G_0 \rho, \quad (7)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -8\pi G_0 p, \quad (8)$$

subtraindo (7, 8) obtemos

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k}{a^2} = -8\pi(\rho + p), \quad (9)$$

definimos o parâmetro de Hubble como  $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ , este parâmetro determina a taxa com que o universo se expande. Podemos então reescrever (7; 9) da seguinte maneira

$$H^2 + \frac{k}{R^2} = 8\pi\rho, \quad (10)$$

$$\dot{H} - \frac{k}{R^2} = -8\pi(\rho + p). \quad (11)$$

As equações (10; 11) são as equações de Friedmann para o espaço tempo (2 + 1) dimensional. Pelas observações feitas pelo **WMAP** [41, 2, 6, 59, 14] constatou-se que a curvatura do universo é aproximadamente plana i.e.  $\Omega_k \equiv \frac{k}{aH^2} \approx 0 \pm_{0,01}^{0,01}$ , assim podemos considerar a constante de curvatura  $k$  como sendo nula nas equações de Friedmann [24, 41]. Multiplicando (10) por  $H^2$ , e definindo a densidade crítica<sup>9</sup> como  $\rho_c = \frac{H^2}{8\pi}$ ,  $\Omega_m = \frac{\rho}{\rho_c}$  e  $\Omega_k = \frac{k}{H^2 a^2}$  podemos reescrever (10) como  $\Omega_k = \Omega_m - 1$ . Como  $k \approx 0$ , então  $\Omega_m \approx 1$  para que a equação anterior seja verdadeira. Escrita desta maneira é possível observar a dependência de (10) com a densidade crítica.

Utilizando a identidade de Bianchi em (2); obtemos que  $T_{;b}^{ab} = 0$ , encontrando assim a seguinte equação de estado para a densidade de matéria

$$\dot{\rho} + 2H(\rho + p) = 0. \quad (12)$$

Notamos que dois termos contribuem para as mudanças de densidade. O primeiro termo corresponde a diluição na densidade conforme a área aumenta, enquanto o segundo termo descreve a perda de energia ocasionada pelo trabalho que a matéria realiza para o aumento de área. Esta energia é transformada em potencial gravitacional. Porém observações revelam que para a presente era do universo (era dominada pela matéria) a pressão é muito menor que a densidade de energia devido a matéria esta condição é conhecida

---

<sup>9</sup> Densidade crítica: densidade de energia necessária para que a curvatura do universo seja plana.

como condição de energia dominante<sup>10</sup>. Portanto podemos considerar que a pressão  $p$  é nula para a era presente. Assim integrando (12) obtemos

$$\rho = \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-2}. \quad (13)$$

Podemos notar que o resultado obtido para a densidade de energia é inversamente proporcional ao quadrado do fator de escala. Este resultado é esperado para  $(2 + 1)$  dimensões, logo que a densidade de energia neste caso é superficial e não volumétrica.

Utilizando a condição de energia forte<sup>11</sup>, obtemos o parâmetro de desaceleração para um espaço tempo  $(2 + 1)$  dimensional na era dominada pela matéria. Logo temos

$$q = \frac{\Omega_m}{4}. \quad (14)$$

O valor de  $\Omega_m$  não é bem conhecido, contudo sabemos que seu valor é de aproximadamente 30% do total de toda energia contida no universo, sendo estes compostos por 1% de matéria bariônica visível e radiação e os 99% restantes por matéria escura  $\Omega_m = \Omega_{ME} + \Omega_{MB}$ , aqui  $\Omega_{ME}$  é a densidade de matéria escura e  $\Omega_{MB}$  é a densidade de matéria barionica. Logo as observações do **WMAP** indicam um universo muito próximo do plano, fazendo com que a igualdade na equação de Friedmann  $\Omega_k = \Omega_m - 1$  não seja satisfeita. Esta falha indica uma defasagem de 70% na energia total no universo. Esta energia que falta para que a equação de Friedmann seja satisfeita é conhecida como energia escura.

Outra falha do modelo aparece na equação (14). Como a densidade de energia é positiva definida o parâmetro de desaceleração também é positivo, o que indica uma taxa de expansão desacelerada<sup>12</sup>. Porém as medidas feitas pelo **WMAP**, constataram uma taxa acelerada de expansão<sup>13</sup> o que levaria ao parâmetro de desaceleração ser negativo e não positivo para estar em concordância com as medidas.

Portanto o modelo cosmológico construído com base na relatividade geral reduzida dimensionalmente possui o mesmo comportamento que seu análogo de dimensão

<sup>10</sup> Condição de energia dominante: Todo campo que satisfaz a condição  $-1 \leq \omega \leq 1$ , onde  $\omega$  é o parâmetro que relaciona a densidade de energia a pressão na equação de estado, é dita obedecer a condição de energia dominante porque  $\rho \geq |p|$ .

<sup>11</sup> Condição de energia forte:  $R_{ab}\xi^a\xi^b = M_p^{-2} (T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T_c^c)\xi^a\xi^b \geq 0$ , onde  $\xi^a$  é um vetor tipo tempo  $R_{ab}$  é o tensor de Ricci e  $T_{ab}$  é o tensor energia momento. Assim dizemos que se o tensor energia momento satisfaz a condição acima ele satisfaz a condição de energia forte.

<sup>12</sup> \* Uma taxa de expansão desacelerada levaria a uma concordância com o modelo do Big Crunch (grande contração ou modelo oscilante).

<sup>13</sup> \*\*Uma taxa de expansão acelerada leva a concordância com o modelo Big R.I.P., onde o universo teria um final frio onde todos os pontos estariam muito a distantes uns dos outros.

maior, não respondendo ao problema da energia escura e taxa de expansão acelerada. Logo um modelo de energia escura se vê necessário, para corrigir as falhas quanto a energia total do universo e a taxa de expansão do modelo cosmológico.

### 3.2 BRANS-DICKE

Considerações quanto homogeneidade e isotropia, são igualmente válidas para as teorias escalares tensoriais incluindo a teoria de Brans-Dicke. Sendo assim a métrica (6) também é válida como solução para um universo homogêneo e isotrópico na teoria de Brans-Dicke, da mesma forma como é solução para relatividade geral.

Consideremos o campo escalar de Brans-Dicke como possuindo uma dependência puramente temporal  $\phi = \phi(t)$ , com isto ele possuirá um comportamento de escala nas equações de movimento. Levando em conta também que o campo escalar não possui massa, garantindo que não exista interação direta entre o campo escalar e os campos de matéria, assim o princípio da equivalência fraco será satisfeito pela teoria. Esta é a principal diferença, entre o campo de Brans-Dicke e os campos escalares de outras teorias escalares tensoriais como a teoria de Kaluza-Klein, teoria de cordas entre outras, onde existe a interação direta do campo escalar como campos de matéria [8, 13, 28, 29, 37, 38, 12], o que faz com que o princípio da equivalência fraco seja muitas vezes não satisfeito por essas teorias.

Utilizando (6) ; considerando  $\phi = \phi(t)$ , e substituindo em (5), obtemos

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2} + \frac{k}{\alpha^2} = \frac{8\pi}{\phi} \rho + 8\pi \rho_{BD}, \quad (15)$$

$$\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} = -\frac{8\pi}{\phi} p - 8\pi p_{BD}, \quad (16)$$

$$\ddot{\phi} + 2\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\dot{\phi} = \frac{8\pi}{(3+2\omega)} (\rho - 2p), \quad (17)$$

Estas são as equações de Friedmann para a teoria de Brans-Dicke em (2 + 1) dimensões. Nestas  $\omega$  é o parâmetro adimensional da teoria,  $\rho_{BD}$  a densidade de energia relacionada ao campo escalar e  $p_{BD}$  é a pressão relacionada ao campo escalar, sendo que ambos estão relacionados pela equação de estado  $p_{BD} = \omega_{BD} \rho_{BD}$ , e são definidos como sendo

$$\rho_{BD} = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{\omega \dot{\phi}^2}{2\phi^2} - 2\frac{\dot{\alpha}\dot{\phi}}{\alpha\phi} \right), \quad (18)$$

$$p_{BD} = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{\dot{\alpha}\dot{\phi}}{\alpha\phi} + \frac{\omega \dot{\phi}^2}{2\phi^2} + \frac{\ddot{\phi}}{\phi} \right). \quad (19)$$

As equações (15; 16; 17) devem ser complementadas pelas equações de estado obtidas a partir da conservação do tensor energia momento. Como o campo escalar é sem massa e não interage diretamente com os campos de matéria, podemos estudá-lo primeiro sozinho e retirar qualquer campo relacionado a matéria, fazendo com que  $\rho$  seja nulo, isto equivale a estudarmos a teoria no vácuo. Com isto poderemos descobrir se o campo escalar possui alguma conexão direta, com a energia escura para o presente estágio de evolução do universo. Neste contexto o campo escalar pode ser observado como algum campo exótico que pode estar compondo a energia escura.

Porém, o parâmetro  $\omega$  da teoria se torna desconhecido, se tornando assim um parâmetro a ser determinado. Fazendo  $\rho = 0$  e considerando que o universo seja aproximadamente plano,  $k = 0$  [24, 41], podemos reescrever (15; 16; 17) como

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2} = 8\pi\rho_{BD}, \quad (20)$$

$$\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} = -8\pi p_{BD}, \quad (21)$$

$$\ddot{\phi} + 2\frac{\dot{\alpha}\dot{\phi}}{\alpha} = 0. \quad (22)$$

Para que possamos resolver estas equações diferenciais acopladas, assumimos que o seguinte ansatz para o campo escalar seja válida

$$\phi(t) = \phi_0 \alpha^n(t), \quad (23)$$

onde  $\phi_0 = \frac{1}{G_0}$ <sup>14</sup>. Substituindo (23) em (20) obtemos

$$\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} + (n-1)\frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2} = 0. \quad (24)$$

Utilizando a equação anterior obtemos a seguinte relação  $n = \frac{2 \pm \sqrt{4+2\omega}}{\omega}$ .

Considerando o seguinte ansatz para o fator de escala

$$\alpha(t) = \alpha_0 t^\alpha, \quad (25)$$

onde  $\alpha > 0$ . Substituindo (25) em (24) encontramos

$$\alpha = \frac{1}{(n+2)},$$

---

<sup>14</sup>  $G_0$  é o valor atual da constante gravitacional.

com a restrição de que  $(n + 2) > 0$ . Portanto (23; 25) podem ser escritas como

$$\phi(t) = \phi_0 \alpha_0^n t^{\frac{n}{n+2}}, \quad \alpha(t) = \alpha_0 t^{\frac{1}{n+2}}. \quad (26)$$

Contudo agora possuímos dois parâmetros desconhecidos  $\omega$  e  $n$ . A determinação dos valores destes parâmetros se torna necessária, para que possamos constatar se o campo escalar pode ou não ser um campo que compõem a energia escura para o espaço tempo  $(2 + 1)$  dimensional. A partir da conservação do tensor energia momento, encontramos a equação de estado para o campo escalar como sendo

$$\dot{\rho}_{BD} + 2\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}(\rho_{BD} + p_{BD}) = 0. \quad (27)$$

Substituindo (26) em (18; 19), encontramos

$$\begin{aligned} \rho_{BD} &= \frac{1}{8\pi} \left( \frac{\omega n^2}{2} - 2n \right) \frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2}, \\ p_{BD} &= \frac{1}{8\pi} \left[ \left( \frac{\omega n^2}{2} + n^2 \right) \frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2} + n \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} \right], \\ \dot{\rho}_{BD} &= \frac{1}{8\pi} \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} (\omega n^2 - 4n) \left( \frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} - \frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2} \right). \end{aligned}$$

Reescrevendo as equações acima em termos do campo escalar  $\phi$  e substituindo em (27) temos

$$\frac{1}{8\pi} \left( \frac{\omega n - 4}{n} \right) \frac{\dot{\phi}}{\phi} \left( \frac{\ddot{\phi}}{\phi} - \frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} \right) = -\frac{1}{8\pi} \frac{2\dot{\phi}}{n\phi} \left( \frac{\ddot{\phi}}{\phi} + \frac{\omega n - 1}{n} \frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} \right),$$

de onde obtemos

$$\omega = -2, \quad n = -1. \quad (28)$$

Estes resultados são coincidentes com a relação  $n = \frac{2 \pm \sqrt{4+2\omega}}{\omega}$ , encontrada a partir das equações de campo, o que leva também ao valor de  $\alpha = 1$  para  $(2 + 1)$  dimensões. Este resultado está em acordo com a condição imposta inicialmente para o parâmetro  $\alpha$ . Substituindo (28) em (26), temos

$$\phi(t) = \phi_0 \alpha_0^{-1} t^{-1}, \quad \alpha(t) = \alpha_0 t. \quad (29)$$

Podemos observar que conforme o universo se expande, o campo escalar diminui seu valor com o inverso do valor do fator de escala. Aplicando (29) nas equações para  $\rho_{BD}$  e  $p_{BD}$  encontramos que  $\rho_{BD} = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{\alpha_0}{\alpha(t)} \right)^2$  e  $p_{BD} = 0$ , levando a conclusão que  $\omega_{BD} = 0$ . Este resultado mostra que para  $(2 + 1)$  dimensões, o campo escalar de Brans-Dicke não constitui um campo componente da energia escura. Contudo este campo pode ser

analisado como uma componente da matéria escura, já que  $\rho_{BD}$  possui comportamento análogo ao da densidade de energia  $\rho$  para o caso (2 + 1) dimensional. Para que o campo escalar se comportasse como um campo de energia escura seria necessário que  $p_{BD} < 0$  e que  $\omega_{BD} < 0$ .

Para que possamos ter total certeza sobre resultado, devemos então incluir os campos de matéria nas equações de campo. Isto tornara as equações de campo mais complicadas de serem resolvidas, contudo trará resultados mais realísticos. Assim utilizando (15; 16; 17) para o universo plano na era dominada pela matéria, obtemos

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2} = \frac{8\pi}{\phi} \rho + 8\pi \rho_{BD}, \quad (30)$$

$$\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} = -8\pi p_{BD}, \quad (31)$$

$$\ddot{\phi} + 2\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\dot{\phi} = \frac{8\pi}{(3+2\omega)}\rho, \quad (32)$$

onde  $\rho_{BD}$  e  $p_{BD}$  possuem a mesma forma como em (18; 19). Usando a identidade de Bianchi nas equações de campo obtemos as equações de estado para os campos de matéria e escalares

$$\dot{\rho} + 2\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\rho = 0, \quad (33)$$

$$\dot{\rho}_{BD} + 2\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}(\rho_{BD} + p_{BD}) = \frac{\dot{\phi}}{\phi^2}\rho. \quad (34)$$

Como o campo escalar não possui massa e não interage diretamente com os campos de matéria, vemos que (33) manteve sua forma original, preservando assim o princípio da equivalência fraco. Porém a equação de estado do campo escalar possui um termo acoplado aos campos de matéria. Isto ocorre devido ao fato de que como indicado por (32)  $\rho$  é a fonte do campo escalar, e mesmo sem o campo escalar possuir massa ou estar contido na lagrangeana de campos de matéria, ainda existem termos de mistura devido ao acoplamento não mínimo a lagrangeana do campo gravitacional, que produzem esses termos de acoplamento tanto em (32) como em (34).

Como feito anteriormente propomos o ansatz para o campo escalar e fator de escala, sendo estas

$$\phi(t) = \phi_0 t^\gamma, \quad \alpha(t) = a_0 t^\beta. \quad (35)$$

Substituindo (35) em (30; 32) obtemos

$$\beta = \frac{(3+2\omega)}{(4+4\omega)}, \quad \gamma = \pm \frac{(3+2\omega)\sqrt{12+10\omega}}{(4+4\omega)(6+5\omega)}. \quad (36)$$

Usando (36) podemos reescrever (35) como

$$\phi(t) = \phi_0 t^{\frac{(3+2\omega)}{(4+4\omega)} \frac{\sqrt{12+10\omega}}{(6+5\omega)}}, \quad \alpha(t) = \alpha_0 t^{\frac{(3+2\omega)}{(4+4\omega)}}. \quad (37)$$

Como  $\beta > 0$ , porém finito os valores singulares de  $\omega$  devem ser excluídos, portanto  $(4 + 4\omega) > 0$  levando a obtermos que  $\omega > -1$  é a primeira condição para que o sistema seja finito. Usando (37) em (18), obtemos

$$\rho_{BD} = \pm \frac{1}{8\pi} \frac{(3+2\omega)^2 \sqrt{12+10\omega}}{(4+4\omega)^2 (6+5\omega)} \left( \pm \frac{\omega \sqrt{12+10\omega}}{(6+5\omega)} - 2 \right) t^{-2}, \quad (38)$$

Contudo possuímos duas escolhas de sinal para (38). No entanto devemos levar em consideração que a densidade de energia do campo escalar deve ser positiva definida, para que esta satisfaça a condição de energia fraca<sup>15</sup> possuindo assim algum significado físico, assim podemos excluir a solução  $\gamma_+$ , levando em consideração apenas a solução  $\gamma_-$  que garante assim a positividade da densidade de energia. Portanto podemos reescrever (37) e (38) como

$$\phi(t) = \phi_0 t^{-\frac{(3+2\omega)}{(4+4\omega)} \frac{\sqrt{12+10\omega}}{(6+5\omega)}}, \quad \alpha(t) = \alpha_0 t^{\frac{(3+2\omega)}{(4+4\omega)}} \quad (39)$$

$$\rho_{BD} = \frac{1}{8\pi} \frac{(3+2\omega)^2 \sqrt{12+10\omega}}{(4+4\omega)^2 (6+5\omega)} \left( \frac{\omega \sqrt{12+10\omega}}{(6+5\omega)} + 2 \right) t^{-2}, \quad (40)$$

Ao usar (39) em (19); obtemos

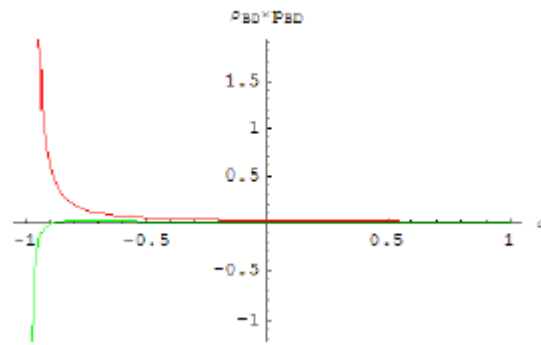
$$p_{BD} = \frac{1}{8\pi} \frac{(3+2\omega)^2 \sqrt{12+10\omega}}{(4+4\omega)^2 (6+5\omega)} \left( -1 + \frac{(4+4\omega)}{(3+2\omega)} + \left( \frac{\omega}{2} + 1 \right) \frac{\sqrt{12+10\omega}}{(6+5\omega)} \right) t^{-2}. \quad (41)$$

O valor para a pressão devido ao campo escalar pode ser positivo ou negativo dependendo exclusivamente do parâmetro adimensional  $\omega$ .

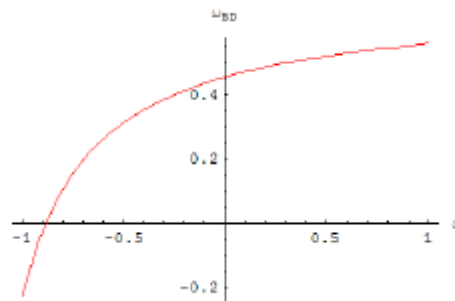
Ao analisarmos a figura 1 podemos constatar que  $\rho_{BD}$  é positivo para valores próximos de  $\omega \approx -1$  e decresce assintoticamente para um valor positivo próximo de zero para grandes valores de  $\omega$ . Para  $p_{BD}$  podemos observar que este é negativo para valores  $\omega < -0,9$  e se torna positivo para valores maiores de  $\omega$ . Ambos  $\rho_{BD}$  e  $p_{BD}$  tendem assintoticamente a valores muito próximos

---

<sup>15</sup> Condição de energia fraca: requerimento de que a densidade de energia seja sempre positiva.



**Figure 1** – comparativo entre  $\rho_{BD}$  (vermelho) e  $p_{BD}$  (verde):

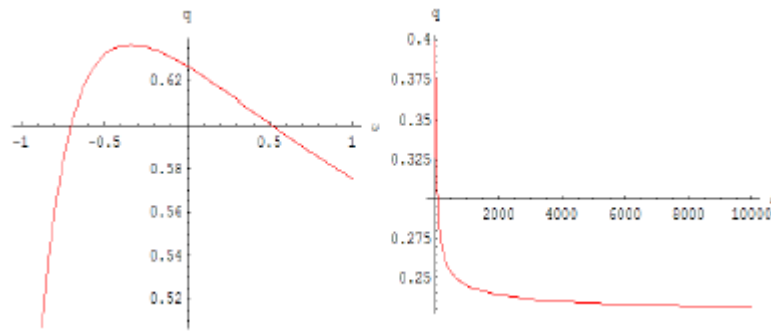


**Figure 2** –  $\omega_{BD}$  em termos do parâmetro adimensional  $\omega$ .

de zero para grandes valores de  $\omega$ . A partir da equação de estado que relaciona  $\rho_{BD}$  e  $p_{BD}$  encontramos que  $\omega_{BD} = \frac{p_{BD}}{\rho_{BD}}$ , onde  $\omega_{BD}$  é o parâmetro na equação de estado que relaciona a densidade de energia do campo escalar com sua respectiva pressão.

Pode-se constatar a partir da figura 2 que para valores de  $\omega < -0,9$  o parâmetro que relaciona a densidade de energia a pressão do campo escalar possui valores negativos. Contudo estes valores negativos, podem não ser grandes o suficiente ao ponto de que a correção aos termos de energia escura se torne desnecessária.

Assim de maneira similar ao feito em relatividade geral obtemos a seguinte



**Figure 3** – Gráfico do parâmetro de desaceleração  $q$  em termos do parâmetro  $\omega$ . A figura do lado direito mostra o comportamento de  $q$  próximo de seu valor máximo. A figura do lado esquerdo mostra o comportamento assintótico de  $q$  em termos de  $\omega$ .

expressão para o parâmetro de desaceleração<sup>16</sup>

$$q = \frac{2\pi}{\phi H^2} \rho + \frac{2\pi}{H^2} (1 + 2\omega_{BD}) \rho_{BD} = \frac{\Omega_m}{4\phi} + \frac{2\pi}{H^2} (1 + 2\omega_{BD}) \rho_{BD}. \quad (42)$$

Como era esperado o parâmetro de desaceleração possui dependência com relação ao parâmetro  $\omega$  para a teoria de Brans-Dicke.

Ao fazer uma análise da figura 3, constatamos que independente do valor de  $\omega$ , sempre teremos valores positivos para o parâmetro de desaceleração  $q$ , este comportamento pode ser observado ao analisarmos o comportamento assintótico de  $q$ , que sempre possuíra valores apenas positivos até para grandes valores de  $\omega$ . Comparando com os resultados obtidos para pressão e densidade de energia do campo escalar mostrados na figura 1, os resultados para o parâmetro de desaceleração da figura 3 só confirmam o esperado, já que a densidade de energia e pressão do campo escalar tendem assintoticamente a zero para grandes valores de  $\omega$ . Portanto os resultados obtidos com a teoria de Brans-Dicke não estão em acordo com os dados sobre densidade de energia e taxa de expansão obtidos pelo **WMAP** [41, 2, 6, 59].

Com isto podemos comprovar que o modelo cosmológico construído a partir da teoria de Brans-Dicke em (2 + 1) dimensões, não se comporta como uma teoria pura de energia escura. Portanto modelos construídos com base na teoria de Brans-Dicke em (2 + 1) dimensões também necessitam de correções quanto a energia escura. Porém para pequenos valores do parâmetro  $\omega$  a densidade de energia do campo escalar funciona como um termo de matéria escura, acrescentando valores positivos para a densidade de energia  $\rho$ .

<sup>16</sup> Detalhes apêndice A

## 4 ENERGIA ESCURA

### 4.1 CONSTANTE COSMOLÓGICA

Existem várias observações cosmológicas que sugerem a existência de uma constante cosmológica não nula, vinculada a energia do vácuo ou energia de Casimir com diferentes níveis de realidade. Muitas destas determinam tanto a densidade de energia, devido a matéria bariônica e escura  $\Omega$  como alguma combinação entre a densidade de energia devido ao vácuo  $\Omega_\Lambda$  e  $\Omega$ . Estas evidências quando combinadas com observações da **CMB**, que levam a dizer que a densidade de energia total  $\Omega_t$  é aproximadamente igual a 1 ou alguma estimativa independente de  $\Omega$ , nos levam a um valor não nulo da constante cosmológica.

Modelos teóricos mostram que a evolução temporal de um universo que possui uma constante cosmológica não nula, ocorre de uma fase com expansão desacelerada para acelerada devido ao valor negativo da componente topológica da energia do vácuo ou energia de Casimir<sup>17</sup> [60, 1]. No entanto as medidas feitas pelo **WMAP** sobre a **CMB** e supernovas do tipo IA, indicam que o valor esperado para a constante cosmológica, é 123 vezes menor que o seu valor teórico calculado a partir da energia de Casimir.

Com isto a constante cosmológica passa a possuir apenas uma pequena parcela de toda a energia contida no universo, não apresentando assim uma fase de expansão acelerada como prevista pelo modelo teórico. Isto leva o modelo teórico a discordar completamente com os resultados experimentais obtidos pelo **WMAP**. Assim existe a necessidade de que outros modelos sejam propostos com o objetivo de corrigir as anomalias dos modelos teóricos quanto as medidas do **WMAP**.

---

<sup>17</sup> Detalhes apêndice B

## 4.2 ENERGIA ESCURA HOLOGRÁFICA

Á poucos anos foi sugerido com base no princípio holográfico [50, 48, 49], que para uma teoria quântica de campos um cut-off de curta distância (UV **cut-off**<sup>18</sup>) esta relacionado a um cut-off de longa distância (**IR cut-off**), devido ao limite produzido pela formação de um buraco negro [3]. Este limite primeiro impõem uma restrição em que a entropia máxima em uma dada região do espaço, não deve exceder a entropia de um buraco negro que ocupe a mesma região, este limite restringe a entropia máxima de uma dada região do espaço como sendo  $S_{max} \leq S_{bh}$ .

Esta relação para a entropia leva a uma restrição para a energia contida em uma certa região. Se  $\rho_\Lambda$  é a densidade de energia de ponto zero causado por um cut-off de curta distância, a energia total em uma região de tamanho  $L$  não deve exceder a massa de um buraco negro que ocupe a mesma região. Assim para  $(2 + 1)$  dimensões temos  $L^3 \rho_\Lambda \leq LM_p^2$ . Esta relação indica que a densidade superficial de energia de uma certa região do espaço, não deve exceder a massa de um buraco negro que ocupe essa mesma região [15]. Portanto ao saturarmos esta desigualdade obtemos

$$\rho_\Lambda = c^2 M_p^2 L^{-1}, \quad (43)$$

$c$  é uma constante adimensional e  $M_p = 8\pi G$  é a massa de Planck. Contudo a escolha de um limite superior para o cut-off de longa distância se torna necessária. A escolha mais lógica é o raio de Hubble  $H^{-1}$  que indica o atual tamanho do universo: Logo (43) pode ser escrita como

$$\rho_\Lambda = c^2 M_p^2 H. \quad (44)$$

Esta densidade superficial de energia é conhecida como energia escura holográfica, devido a esta ser obtida á partir de considerações do princípio holográfico. Exatamente da mesma maneira que a densidade de energia  $\rho$  para a matéria, a densidade de energia escura também está relacionada a pressão por meio de uma equação de estado  $p_\Lambda = \omega_\Lambda \rho_\Lambda$ .

Este termo de energia escura é utilizado de maneira a compensar os 70% de energia, que estão faltando nos modelos cosmológicos para que a equação de Friedmann seja satisfeita, e estabelecendo assim um parâmetro de desaceleração negativo (taxa de expansão acelerada) como constatado a partir das medidas feitas pelo **WMAP**.

---

<sup>18</sup> Cut-off ultravioleta: é o valor máximo permitido para energia ou valor mínimo permitido para distâncias muito pequenas normalmente da ordem de Planck.

## 5 MODELOS COSMOLÓGICOS (2 + 1) DIMENSIONAIS CORRIGIDOS POR MODELO DE ENERGIA ESCURA HOLOGRÁFICA

### 5.1 RELATIVIDADE GERAL

Para suprir a necessidade observada na seção 3.1, quanto á correção a energia escura para o modelo cosmológico fundamentado na relatividade geral, utilizaremos o modelo de energia escura holográfica discutido anteriormente.

Para isto iniciaremos por redefinir  $\rho \rightarrow \rho_m + \rho_\Lambda$ , em (7) ; logo temos

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2} &= M_p^{-2} (\rho_m + \rho_\Lambda), \\ M_p^2 H^2 &= \rho_m + \rho_\Lambda, \\ \rho_m &= M_p^2 H^2 - \rho_\Lambda,\end{aligned}\tag{45}$$

Substituindo (44) em (45) ; encontramos

$$\rho_m = M_p^2 (H^2 - c^2 H)\tag{46}$$

Utilizando a identidade de Bianchi encontramos as equações de estado para o sistema do fluido perfeito. A equação de estado com relação a matéria (12) ; permanece sem alterações, isto ocorre devido a energia escura não interagir diretamente com os campos de matéria. Porém agora possuímos uma nova equação de estado com relação a energia escura, que possui a forma

$$\dot{\rho}_\Lambda + 2\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}(\rho_\Lambda + p_\Lambda) = 0.\tag{47}$$

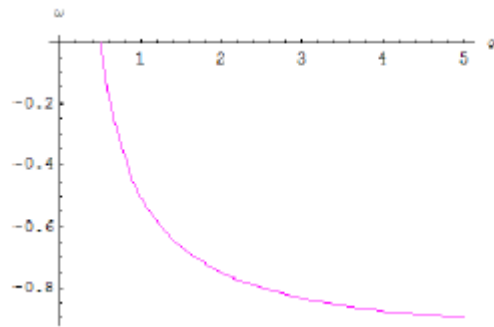
onde  $\rho_\Lambda$  e  $p_\Lambda$  são a densidade de energia e a pressão, ambas quantidades estão relacionadas pela equação  $p_\Lambda = \omega_\Lambda \rho_\Lambda$ . Podemos escrever o fator de escala na forma do seguinte ansatz

$$\alpha(t) = \alpha_0 t^\alpha,\tag{48}$$

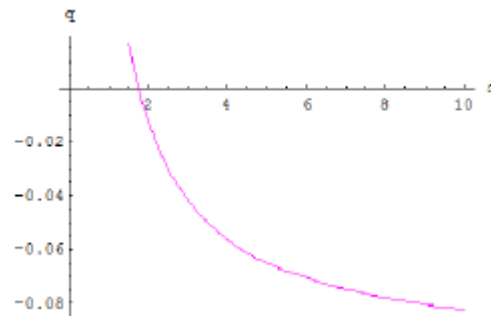
onde  $\alpha$  é um parâmetro a ser determinado. Substituindo (48) em (47), obtemos a seguinte relação entre  $\omega_\Lambda$  e o parâmetro  $\alpha$

$$\omega_\Lambda = -\frac{1}{2} \left( \frac{\alpha - 1}{\alpha} + 1 \right).\tag{49}$$

Podemos utilizar a condição de que a pressão deve ser negativa para que a taxa de expansão do universo seja acelerada, para determinar o valor mínimo



**Figure 4** – Gráfico de  $\omega_\Lambda$  em termos do parâmetro  $\alpha$ .



**Figure 5** – Gráfico do parâmetro de desaceleração  $q$  em termos do parâmetro  $\alpha$ .

de  $\alpha$  para que a pressão com relação a energia escura seja negativa. Usando esta condição em (49), obtemos que  $\alpha > \frac{1}{2}$  é o valor mínimo para que a pressão seja negativa. Isto é necessário para que o modelo possua o mesmo comportamento observado pelo **WMAP**.

Pela análise comparativa dos dados do **WMAP** [41] para o valor do parâmetro  $\omega_\Lambda \approx -0.72^{+0.34}_{-0.27}$  com os valores obtidos para  $\omega_\Lambda$  pela figura 4, podemos concluir que o valor mais provável para o parâmetro  $\alpha \approx 1.75^{+0.25}_{-0.25}$ .

Somente a condição de negatividade da pressão não garante que a taxa de expansão seja acelerada, para garantir que isto ocorra é necessário que a condição de energia forte não seja satisfeita. Para isto temos

$$\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} = -2\pi G (\rho_m + \rho_\Lambda + 2p_\Lambda) < 0,$$

levando a

$$\rho_m + \rho_\Lambda + 2p_\Lambda < 0. \quad (50)$$

Resolvendo a inequação acima, obtemos que o valor mínimo do parâmetro  $\alpha$  é  $\alpha > 1.75$ , estando assim dentro do valor obtido anteriormente pela figura 4. Logo podemos reescrever (48) como

$$a(t) = \alpha_0 t^\alpha, \text{ onde } \alpha > 1.75. \quad (51)$$

Com isto garantimos que a taxa de expansão do universo seja acelerada. O parâmetro de desaceleração com energia escura obtido á partir da condição de energia forte, possui a forma

$$q = \frac{2\pi G}{H^2} (\rho_m + \rho_\Lambda + 2p_\Lambda) = \frac{\Omega_m}{4} + (1 + 2\omega_\Lambda) \frac{\Omega_\Lambda}{4}. \quad (52)$$

Podemos notar que o parâmetro de desaceleração possui dependência indireta com o parâmetro  $\alpha$ , logo que as densidades  $\rho_m, \rho_\Lambda$  e a pressão  $p_\Lambda$  dependem diretamente com  $\alpha$ .

Podemos observar na figura 5 que para valores maiores de  $\alpha = 1.75$  o parâmetro de desaceleração  $q$  possui apenas valores negativos, o que esta em acordo com as observações do **WMAP**. Para grandes valores de  $\alpha$  o parâmetro  $q$  tende ao valor assintótico constante  $q \simeq -0.1$ .

## 5.2 TEORIA DE BRANS-DICKE

Utilizando (15; 17) e fazendo  $\rho \rightarrow \rho_m + \rho_\Lambda$  obtemos

$$\frac{\dot{\alpha}^2}{\alpha^2} = \frac{8\pi}{\phi} (\rho_m + \rho_\Lambda) + 8\pi\rho_{BD}, \quad (53)$$

$$\ddot{\phi} + 2\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}\dot{\phi} = \frac{8\pi}{(3 + 2\omega)} (\rho_m + \rho_\Lambda - 2p_\Lambda), \quad (54)$$

estas são as equações de Friedmann para teoria de Brans-Dicke (2 + 1) dimensional com energia escura. Como  $\rho_m$  não interage diretamente com o campo escalar a equação de estado com relação a matéria permanece a mesma. Contudo a equação de estado que diz respeito a densidade de energia do campo escalar na era dominada pela matéria (34) se torna

$$\dot{\rho}_{BD} + 2\frac{\dot{\alpha}}{\alpha}(\rho_{BD} + p_{BD}) = \frac{\dot{\phi}}{\phi^2} (\rho_m + \rho_\Lambda - 2p_\Lambda). \quad (55)$$

Uma nova equação de estado com relação a energia escura é necessária devido a conservação do tensor energia momento, esta equação é dada por

$$\dot{\rho}_\Lambda + 2\frac{\dot{a}}{a}(\rho_\Lambda + p_\Lambda) = 0.$$

Esta é a mesma equação (47) obtida para relatividade geral. Esta mantém sua forma devido à energia escura não possuir interação direta com o campo escalar. Para resolvermos (53; 54) propomos o seguinte ansatz

$$\phi(t) = \phi_0 t^\gamma, \quad \alpha(t) = \alpha_0 t^\beta. \quad (56)$$

Substituindo (56) em (53; 54), obtemos

$$\beta = \frac{(3+2\omega)}{(4+4\omega)}, \quad \gamma = \pm \frac{(3+2\omega)\sqrt{10\omega+12}}{(4+4\omega)(6+5\omega)}, \quad (57)$$

onde a solução positiva de  $\gamma$  é excluída devida a condição de positividade de  $\rho_{BD}$ . Substituindo (57) em (56), temos

$$\phi(t) = \phi_0 t^{-\frac{(3+2\omega)\sqrt{10\omega+12}}{(4+4\omega)(6+5\omega)}}, \quad \alpha(t) = \alpha_0 t^{\frac{(3+2\omega)}{(4+4\omega)}}. \quad (58)$$

As mesmas condições para o parâmetro adimensional  $\omega$  obtidas na seção 3.2 são válidas aqui, inclusive o comportamento de  $\omega_{BD}$ . Isto era esperado já que o campo escalar não possui interação direta com a energia escura e matéria.

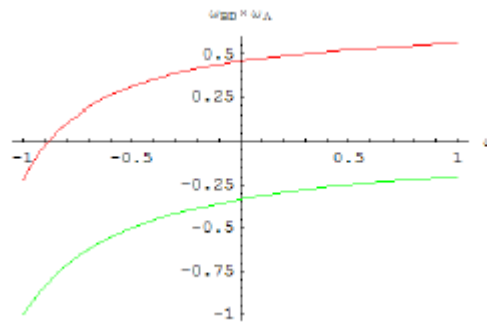
Substituindo (58) em (47) obtemos

$$\omega_\Lambda = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\beta-1}{\beta} + 1 \right], \quad (59)$$

podemos notar que (59) e (49) possuem a mesma forma, no entanto agora o parâmetro  $\beta$  depende do parâmetro adimensional  $\omega$  da teoria de Brans-Dicke.

Podemos observar na figura 6 que  $\omega_\Lambda$  possui valores negativos para uma grande variação de  $\omega$ , no entanto para grandes valores de  $\omega$  seus valores tendem a zero. Isto não acontece para  $\omega_{BD}$ , o que já era esperado já que a teoria de Brans-Dicke não se comporta como uma teoria de quinta-essência em  $(2+1)$  dimensões.

Porém para grandes valores de  $\omega$  ele tende a um valor positivo. Conforme as observações do **WMAP** o valor esperado para o parâmetro é  $\omega_\Lambda \approx -0.72^{+0.34}_{-0.27}$ , ao observarmos a 6 podemos notar que este intervalo ocorre



**Figure 6** – Gráfico comparativo entre  $\omega_{BD}$  (vermelho) e  $\omega_{\Lambda}$  (verde) ambos descritos em termos do parâmetro adimensional  $\omega$ .

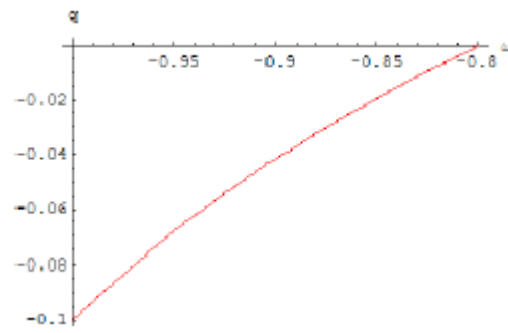
para os valores  $\omega = -0.9^{+0.1}_{-0.1}$ . Utilizando a condição de energia forte obtemos o parâmetro de desaceleração

$$q = \frac{2\pi}{\phi H^2} [\rho_m + (1 + 2\omega_{\Lambda}) \rho_{\Lambda}] + \frac{2\pi}{H^2} (1 + 2\omega_{BD}) \rho_{BD} \quad (60)$$

$$= \frac{\Omega_m}{4\phi} + (1 + 2\omega_{\Lambda}) \frac{\Omega_{\Lambda}}{4\phi} + \frac{2\pi}{H^2} (1 + 2\omega_{BD}) \rho_{BD}. \quad (61)$$

O parâmetro de desaceleração será negativo, i.e. a taxa de expansão do universo será acelerada, devido a correção com relação a termos de energia escura feito no modelo cosmológico. Isto pode ser concluído devido a que  $\Omega_{\Lambda}$  possui aproximadamente 70% de toda energia contida no universo, sendo assim a densidade de energia do campo escalar concentra apenas um pequeno percentual dos 30% restantes da energia.

Como  $\omega_{\Lambda}$  possui um valor negativo logo podemos concluir que o parâmetro de desaceleração  $q$  também deve ser negativo para alguns valores de  $\omega$ , concordando assim com os dados do **WMAP** [41]. Podemos também constatar analisando a figura 7 que o parâmetro de desaceleração possui valores negativos apenas para os valores  $\omega < -0.8$ , este valor também esta em concordância com o valor esperado encontrado a partir da figura 6 para o parâmetro  $\omega$ .



**Figure 7** – Gráfico do parâmetro de desaceleração  $q$  em termos do parâmetro  $\omega$ .

## 6 DISCUSSÃO

Para o modelo cosmológico fundamentado na teoria da relatividade geral em  $(2 + 1)$  dimensões, observamos as duas principais falhas que também são observadas em modelos em  $(3 + 1)$  dimensões; A falha quanto a energia contida no universo, já que o tensor energia momento considera somente campos de matéria que correspondem a apenas 30% de toda energia; A falha quanto ao modelo de Einstein-de Sitter que prevê uma taxa de expansão negativa (desaceleração) para o universo, sendo que as medidas feitas pelo **WMAP** indicam uma taxa positiva (aceleração) de expansão. Para isto ocorrer o modelo devia prever a existência de uma nova componente para o tensor energia momento, que possuísse uma pressão negativa a qual levaria o parâmetro de desaceleração a possuir um valor negativo, concordando assim com as medidas experimentais.

No modelo construído a partir da teoria de Brans-Dicke, observamos inicialmente que o parâmetro  $\omega_{BD}$  pode vir a possuir valores negativos quando  $\omega < -0,9$ , levando o modelo a possuir uma pressão negativa. No entanto como mostrado na figura 3, para qualquer valor do parâmetro  $\omega$  os valores obtidos para o parâmetro de desaceleração são positivos, levando assim a um modelo com expansão desacelerada. A razão disto ocorrer é devido a pressão gerada pelo campo escalar de Brans-Dicke, não possuir um valor negativo o bastante a ponto de anular a atratividade dos campos de matéria.

Se isto ocorresse poderíamos então considerar a teoria de Brans-Dicke em  $(2 + 1)$  dimensões, como sendo uma pura teoria de quinta-essência, no entanto o campo escalar pode ser considerado como um campo componente da matéria escura já que como mostrado na figura 1 a densidade de campo escalar possui apenas valores positivos para pequenos valores do parâmetro  $\omega$ . Entanto para valores assintóticos do parâmetro  $\omega$ , a densidade de campo escalar e a pressão devido a esses campos tendem ao valor zero da figura 3, também constatamos que o parâmetro de desaceleração tende ao mesmo valor encontrado pela relatividade geral, estes resultados estão em total acordo com a teoria já que no limite em que  $\omega \rightarrow \infty$  a teoria de Brans-Dicke se reduz exatamente a relatividade geral.

Para os dois modelos anteriores foi constatada a necessidade de correção quanto a termos de energia escura no tensor energia momento. Para estas correções no tensor energia momento, utilizamos o modelo de energia escura holográfica discutido na seção 4.

Para o modelo corrigido fundamentado na relatividade geral, constatamos que o parâmetro da equação de estado de energia escura  $\omega_\Lambda$  depende com o parâmetro  $\alpha$  que indica a potência quanto a dependência temporal do fator de escala. Ao comparar os valores obtidos para  $\omega_\Lambda$  mostrados na figura 4 com os resultados experimentais de  $\omega_\Lambda \approx -0.72^{+0.34}_{-0.27}$  obtidos pelo **WMAP** [41], encontramos que o valor mais provável para o parâmetro é  $\alpha \approx 1.75^{+0.25}_{-0.25}$ . Estes valores levariam o modelo a uma total concordância com os dados experimentais para  $\omega_\Lambda$ . Na figura 5 constatamos que o parâmetro de desaceleração  $q$  possui valores apenas negativos qualquer que seja o valor do parâmetro  $\alpha$ , e que para valores muito grande de  $\alpha$  o parâmetro  $q$  tende ao valor assintótico  $-0.1$ .

No modelo corrigido construído a partir da teoria de Brans-Dicke observamos que a dependência do parâmetro  $\omega_\Lambda$  com o parâmetro  $\beta$  é exatamente a mesma como em relatividade geral, entanto agora  $\beta$  é dependente do parâmetro  $\omega$ , trazendo assim as principais diferenças entre as duas teorias. No comparativo entre  $\omega_\Lambda$  e  $\omega_{BD}$  da figura 6 encontramos que o valor mais provável para o parâmetro  $\omega = -0.9^{+0.1}_{-0.1}$ , este valor levaria a uma concordância do modelo com os dados experimentais [41], para valores assintóticos de  $\omega$  o parâmetro  $\omega_\Lambda$  tende a zero e  $\omega_{BD}$  tende ao valor positivo 1, isto é esperado já que para valores assintóticos de  $\omega$  a densidade de campo escalar e sua pressão tendem a um mesmo valor. Quanto ao parâmetro de desaceleração este também possui valores negativos para o valor mais provável de  $\omega$ ; para grandes valores de  $\omega$  seu valor tende a um valor negativo constante muito próximo de zero.

## 7 CONCLUSÃO

O modelo cosmológico construído à partir da relatividade geral em  $(2 + 1)$  dimensões, possui as mesmas falhas quanto a quantidade de energia e a taxa de expansão que seu análogo de dimensão maior, precisando assim de correções.

O modelo cosmológico construído à partir da teoria de Brans-Dicke, falha com relação as questões que a relatividade geral também deixa em aberto. Contudo mesmo a teoria de Brans-Dicke em  $(2 + 1)$  dimensões não tendo se comportado como uma teoria única de quinta-essência, ela pode para certos valores do parâmetro  $\omega$  se comportar como um campo componente da matéria escura, assim da mesma maneira como a relatividade geral, a teoria de Brans-Dicke possui a necessidade de correções para a energia escura.

O modelo cosmológico corrigido pelo modelo de energia escura holográfica, trabalha bem no aspecto de corrigir as anomalias encontradas para a relatividade geral, trazendo assim as correções necessárias para a quantidade de energia, e também fazendo com que o parâmetro de desaceleração possua valor negativo concordando assim com os dados obtidos pelo **WMAP**. Comparando os resultados obtidos com os do **WMAP** podemos constatar que o valor mais provável para a potência temporal do fator de escala para um modelo em  $(2 + 1)$  dimensões é  $\alpha \approx 1.75_{-0.26}^{+0.26}$ .

O modelo de Brans-Dicke corrigido também corrigiu as anomalias encontradas anteriormente para o modelo. Trouxe também as devidas correções quanto a quantidade de energia e o parâmetro de desaceleração. Ao comparar os resultados obtidos com os dados do **WMAP** encontramos que o valor mais provável para o parâmetro adimensional da teoria de Brans-Dicke para  $(2 + 1)$  dimensões, esta compreendido entre  $\omega = -0.9_{-0.1}^{+0.1}$ , com este valor de  $\omega$  o modelo estaria em acordo com os dados experimentais.

Comparando as teorias gravitacionais podemos concluir que, mesmo sem a teoria de Brans-Dicke ser uma teoria pura de quinta-essência  $(2 + 1)$  dimensões, corrigindo assim por si só as anomalias da relatividade geral ela ainda é melhor no aspecto de trazer correções quanto a campos que possam compor a componente da matéria escura, o que a relatividade geral não traz. Também foi possível observar que bons resultados podem ser obtidos com teorias gravitacionais reduzidas dimensionalmente, as grandes vantagens quanto a se trabalhar com estes modelos é: Descomplicações nas equações de movimento devido a se trabalhar com espaços de dimensão menor; Uma maior facilidade em resolver as mesmas

equações diferenciais resolvidas para o caso de dimensão maior; Trazer resultados que podem servir como indicativo do comportamento do modelo para o caso de maior dimensão.

## REFERENCES

- [1] A. A. Bytsenko, M. E. X. Guimarães, V. S. Mendes. Casimir Effect for Gauge Fields in Spaces with Negative Constant Curvature. *Eur. Phys. J. C* 39, 249 (2005).
- [2] A. Bernui, B. Mota, M. J. Rebouças, R. Tavakol. Mapping the Large Scale Anisotropy in the WMAP Data. *astro-ph/0511666*.
- [3] A. G. Cohen; D. Kaplan; A. E. Nelson. Effective Field Theory, Black Holes and the Cosmological Constant. *Phys. Rev. Lett.* 82, 4971 (1999).
- [4] A. G. Riess et al. *Astron. J.* 116, 1009 (1998).
- [5] A. H. Guth. Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems. *Phys. Rev. D* 23, 347 (1981).
- [6] A. O. Costa, et al. The significance of the Largest Scale CMB Fluctuations in WMAP. *astro-ph/0307282*.
- [7] B. Wang, E. Abdalla. Holography in (2+1) Dimensional Cosmological Models. *hep-th/9910185*.
- [8] B. Zwiebach. *A First Course in String Theory*. CUP, 2004.
- [9] C. Armendariz, V. Mukhanov, P. J. Steinhardt. Essential of k-Essence. *Phys. Rev. D* 63, 103510 (2001).
- [10] C. Brans, C. H. Dicke. *Phys. Rev.* 124, 925 (1961).
- [11] C. L. Bennett et al. *astro-ph/0302207*.
- [12] C. Johnson. *D-Branes*. Cup (2002).
- [13] D. Bailin, A. Love. *Cosmology in Gauge Field Theory and String Theory*. IoP, Bristol (2004).

- [14] D. Fried. *Invent. Math.* 84, 523 (1986).
- [15] D. Pavón, W. Zimdahl. *Interacting Holographic Dark Energy*. [astro-ph/0606555](#).
- [16] E. W. Kolb, M. S. Turner. *The Early Universe*. Addison-Wesley Publishing Company, (1990).
- [17] E. Witten, A. Maloney. *Quantum Gravity Partition Functions in Three Dimensions*. [hep-th/07120155](#).
- [18] G. t .Hooft, *Dimensional Reduction in Quantum Gravity*, in *Salamfestschrift: a Collection of Talks*, eds. A. Ali, J. Ellis e S. Randjabar-Daemi, World Scientific, 1993; preprint [gr-qc/9310026](#).
- [19] G. t .Hooft, *The Holographic Principle*, Erice 1999, *Basics and Highlights in Fundamental Physics*, 72; preprint [hep-th/0003004](#).
- [20] H. Kim, H. W. Lee, Y. S. Myung. *Holographic Energy Density in the Brans Dicke Theory*. [hep-th/0501118](#).
- [21] H. Kim. *Brans-Dicke Scalar Field as a Unique k-Essence*. *Phys. Lett. B* 606, 223 (2005).
- [22] H. Kim, H. W. Lee, Y. S. Myung. *Role of the Brans Dicke scalar in the Holographic Description of Dark Energy*. [gr-qc/050701](#)
- [23] J. D. Bekenstein. *Universal Upper Bound on the Entropy-to-Energy Ratio for Bounded Systems*. *Phys. Rev. D* 23, 287 (1981).
- [24] J. F. Uzan, U. Kirchmer, G. F. R. Ellis. *WMAP data and the Curvature of space*. [astro-ph/0302597](#).
- [25] J. L. Friedman, K. Schleich, D. M. Witt. *Topological Censorship*. *Phys. Rev. Lett.* 71, 1486 (1993).
- [26] J. Maldacena, *The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity*, *Adv. Theor. Math. Phys.* 2, 231 (1998); preprint [hep-th/9711200](#).

- [27] J. Maldacena, O. Aharony, S. S. Gubser, H. Ooguri, Y. Oz. Large N Field Theories, String Theory and Gravity. Phys. Reports 323, 183 (2000).
- [28] J. Polchinski. String Theory vol 1. CUP (1998).
- [29] J. Polchinski. String Theory vol 2. CUP (1998).
- [30] L. Amendola. Coupled Quintessence. Phys. Rev. D 62, 043511 (2000).
- [31] L. Perivolaropoulos. Talk at the Third Aegean Summer School .The Invisible Universe, Dark Matter and Dark Energy. astro-ph/0601014.
- [32] L. Susskind. The World as a Hologram, J. Math. Phys. 36, 6337 (1995); preprint hep-th/9409089.
- [33] L. Susskind, J. Lindesay. An Introduction to Black Holes, Information, and the String Theory Revolution (The Holographic Universe). World Scientific Publish, (2005).
- [34] M. Arik, M. C. Çalic, M. B. Sheftel. Friedmann Equation for Brans Dicke Cosmology. gr-qc/060482.
- [35] M. Banãdos, C. Teitelboim, J. Zanelli. Black Hole in Tree-Dimensional Spacetime. Phys. Rev. Lett. 69, 1849 (1992).
- [36] M. Bãnados, M. Henneaux, C. Teitelboim, J. Zanelli. Geometry of the 2+1 Black Hole. Phys. Rev. D. 48,1506 (1993).
- [37] M. Green, J. Schwarz, E. Witten. Superstring Theory, vol 1. Introduction. (CMMP, CUP, 1987).
- [38] M. Green, J. Schwarz, E. Witten. Superstring Theory, vol 2. Loop Amplitudes, Anomalies, Phenomenology. (CMMP, CUP, 1987).
- [39] M. Li. A Model of Holographic Dark Energy. hep-th/0403127.
- [40] M. Setare. The Hlographic Dark Energy in Non Flat Brans Dicke Cosmology. hep-th/0610190.

- [41] M. Tegmark, et. al. Cosmological Parameters from SDSS and WMAP. astro-ph/0310723.
- [42] N. Banerjee, D. Pavón. A Quintessence Scalar Field in Brans Dicke Theory. gr-qc/0012098.
- [43] N. Banerjee, D. Pavón. Holographic Dark Energy in Brans Dicke Theory. gr-qc/0702110.
- [44] N. Bretón, J. L. Cervantes-Cota, M. Salgado. The Early Universe and Observational Cosmology. Springer (2004).
- [45] O. Bertolami, P. J. Martins. Nonminimal Coupling and Quintessence. Phys. Rev. D 61, 064007 (2000).
- [46] P. A. M. Dirac . Proc. Roy. Soc. A 165, 199 (1938).
- [47] P. Jordan . *Schwerkraft und Weltall* (Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig) (1955).
- [48] R. Bousso. A Covariant Entropy Conjecture. JHEP 07, 004. preprint: hep-th/9905177.
- [49] R. Bousso. Holography in General Space-times. JHEP 06, 028. preprint: hep-th/9906022.
- [50] R. Bousso. The Holographic Principle. preprint hep-th/0203101 v2.
- [51] R. Brustein, gr-qc/9904061; R. Brustein, S. Ferrara, R. Sturani, hep-th/9907032.
- [52] R. Miatello. Trans. Am. Math. Soc. 260, 1 (1980).
- [53] R.M.Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, (1984).
- [54] S. M. Carroll. *Lecture Notes on General Relativity*. gr-qc/9712019.
- [55] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology*. Wiley, New York (1972).
- [56] S. W. Hawking, G. F. R. Ellis. *The large Structure of Space Time*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, (1973).

- [57] T. Chiba. Tracking k-Essence. *Phys. Rev. D* 66, 063514 (2002).
- [58] T. Chiba, T. Okabe, M. Yamaguchi. Kinetically Driven Quintessence. *Phys. Rev. D* 62, 023511 (2000).
- [59] U. Kirchner, F. R. Ellis. WMAP Data and the Curvature of Space. [astro-ph/0302597](#).
- [60] V. S. Mendes, T. G. Prado. Casimir Effect for Differential Forms in Real Compact Hyperbolic Spaces. *Brazilian Journal of Physics*, vol. 35 4B, 1104 (2005).
- [61] Y. Gong. Einstein Brans Dicke Cosmology. [gr-qc/9809015](#).
- [62] Y. Fujii, K. Maeda. *The Scalar Tensor Theory of Gravitation*. Cambridge University Press, (2004).

## APÊNDICES

## **APÊNDICE A**

## Apêndice A

Utilizando a equação (5) temos

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = \frac{8\pi}{\phi}T_{ab}^M + 8\pi T_{ab}^{BD}, \quad (62)$$

multiplicando ambos os lados de (62) por  $g^{ab}$  obtemos

$$R_{ab}g^{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}g^{ab}R = \frac{8\pi}{\phi}T_{ab}^M g^{ab} + 8\pi T_{ab}^{BD} g^{ab},$$

obtendo que

$$R = - \left( \frac{8\pi}{\phi}T^M + 8\pi T^{BD} \right). \quad (63)$$

Substituindo (63) em (62) obtemos

$$\begin{aligned} R_{ab} + \frac{1}{2}g_{ab} \left( \frac{8\pi}{\phi}T^M + 8\pi T^{BD} \right) &= \frac{8\pi}{\phi}T_{ab}^M + 8\pi T_{ab}^{BD}, \\ R_{ab} &= \frac{8\pi}{\phi}T_{ab}^M + 8\pi T_{ab}^{BD} - \frac{1}{2}g_{ab} \left( \frac{8\pi}{\phi}T^M + 8\pi T^{BD} \right), \\ R_{ab} &= \frac{8\pi}{\phi} \left( T_{ab}^M - \frac{1}{2}g_{ab}T^M \right) + 8\pi \left( T_{ab}^{BD} - \frac{1}{2}g_{ab}T^{BD} \right). \end{aligned} \quad (64)$$

Utilizando vetores do tipo tempo<sup>19</sup>  $\xi^a$ , para efetuar a contração de índices em (64) obtemos

$$R_{ab}\xi^a\xi^b = \frac{8\pi}{\phi} \left( T_{ab}^M - \frac{1}{2}g_{ab}T^M \right) \xi^a\xi^b + 8\pi \left( T_{ab}^{BD} - \frac{1}{2}g_{ab}T^{BD} \right) \xi^a\xi^b. \quad (65)$$

Utilizando a condição de energia forte obtemos

$$R_{ab}\xi^a\xi^b = \frac{8\pi}{\phi} \left( T_{ab}^M - \frac{1}{2}g_{ab}T^M \right) \xi^a\xi^b + 8\pi \left( T_{ab}^{BD} - \frac{1}{2}g_{ab}T^{BD} \right) \xi^a\xi^b \geq 0. \quad (66)$$

Considerando que o tensor energia momento descreve a distribuição de energia de um fluido perfeito para um espaço em  $(2 + 1)$  dimensões, temos as seguintes relações

$$T_{00}^M \xi^0 \xi^0 = \rho, \quad (67)$$

---

<sup>19</sup> Vetor tipo tempo: No espaço tempo de Minkowski a norma de um vetor é definido por  $\xi^2 = g_{ab}\xi^a\xi^b = \xi_a\xi^a$ . Um vetor é dito ser temporal se  $\xi^2 > 0$ , espacial se  $\xi^2 < 0$ , e nulo se  $\xi^2 = 0$ .

$$T^{\mathcal{M}} = (-\rho + 2p), \quad (68)$$

$$T_{00}^{BD} \xi^0 \xi^0 = \rho_{BD}, \quad (69)$$

$$T^{BD} = (-\rho_{BD} + 2p_{BD}). \quad (70)$$

Utilizando a métrica de Robertson-Walker em  $(2 + 1)$  dimensões temos que a componente temporal do tensor de Ricci possui a forma

$$R_{00} = -2\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha}. \quad (71)$$

Substituindo (67; 68; 69; 70; 71) em (66) obtemos

$$\frac{\ddot{\alpha}}{\alpha} = -\frac{2\pi}{\phi} (\rho + 2p) - 2\pi (\rho_{BD} + 2p_{BD}) \geq 0. \quad (72)$$

Multiplicando (72) por  $-H^{-2}$  encontramos

$$q = \frac{2\pi}{\phi H^2} (\rho + 2p) - \frac{2\pi}{H^2} (\rho_{BD} + 2p_{BD}) \geq 0. \quad (73)$$

Para a era dominada pela matéria temos que

$$p = 0, \quad p_{BD} = \omega_{BD} \rho_{BD}.$$

Logo (73) se torna

$$q = \frac{2\pi}{\phi H^2} \rho - \frac{2\pi}{H^2} (1 + 2\omega_{BD}) \rho_{BD} \geq 0.$$

Esta é a equação de aceleração para um universo descrito pela métrica de Robertson-Walker em  $(2 + 1)$  dimensões para a teoria de Brans-Dicke.

**APÊNDICE B**

## Apêndice B

A expressão formal para energia de Casimir pode ser escrita como

$$E_v = \frac{1}{2} \sum \lambda_j^{\frac{1}{2}},$$

onde  $\{\lambda_j\}_{j \geq 0}^{\infty}$  é o conjunto de auto valores do operador de Laplace Beltrani  $\mathcal{L}_p^{(CE)}$ , atuando na parte co-exata das p-formas. Para obtermos o valor da energia de Casimir utilizaremos do método da função zeta onde obtemos

$$E_v = \frac{1}{2} \zeta \left( s, \mathcal{L}_p^{(CE)} \right) \Big|_{s=\frac{1}{2}}.$$

O cálculo da função zeta  $\zeta \left( s, \mathcal{L}_p^{(CE)} \right)$  pode iniciar a partir da representação

$$\zeta \left( s, \mathcal{L}_p^{(CE)} \right) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} dt t^{s-1} \text{Tr} e^{-t\mathcal{L}_p^{(CE)}},$$

onde o traço do heat kernel  $\mathcal{K}_t = e^{-t\mathcal{L}_p^{(CE)}}$ , pode ser calculado usando a fórmula de Fried [14]. Levando em conta os graus de liberdade físicos obtemos

$$\text{Tr} \mathcal{K}_t = I_{\Gamma}^{(p)}(\mathcal{K}_t) + H_{\Gamma}^{(p)}(\mathcal{K}_t).$$

O primeiro termo do lado direito é a contribuição do elemento identidade do grupo de isometria  $\Gamma$ , e este é dado por

$$I_{\Gamma}^{(p)}(\mathcal{K}_t) = \frac{\chi(1) \text{Vol}(\Gamma/G)}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} dr \mu_{\sigma_p}(r) e^{-t(r^2+p+r^2)}.$$

O segundo termo é a contribuição restante para os elementos do grupo de isometrias

$$H_{\Gamma}^{(p)}(\mathcal{K}_t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \sum_{\gamma \in \mathcal{C}_{\Gamma} - \{1\}} \frac{\chi(\gamma)}{j(\gamma)} t_{\gamma} C(\gamma) \chi_{\sigma_p}(m_{\gamma}) e^{-t(p+r^2)} - \frac{t}{4\pi}.$$

Aqui  $\chi$  é o homeomorfismo  $\Gamma \rightarrow S^1$ . Para mais detalhes e notações ver [1]. As propriedades espectrais do operador de Laplace Beltrami são controladas pela medida de Harish-Chandra-Plancherel  $\mu_{\sigma_p}(r)$  que é dada por

$$\mu_{\sigma_p}(r) = C_p^{N-1} C_G \pi \begin{cases} \sum_{l=0}^{n-1} a_{2l} \tanh(\pi r) r^{2l+1} & , \text{ para } N = 2n \\ \sum_{l=0}^n a_{2l} r^{2l} & , \text{ para } N = 2n + 1 \end{cases},$$

onde  $C_G^{-1} = 2^{2N-4} \Gamma^2(N/2)$  e  $a_{2l}$  são os coeficiente de Miatello [52].

A função zeta relacionada a identidade  $I_{\Gamma}^{(p)}(\mathcal{K}_t)$  é calculada como sendo

$$\begin{aligned} \zeta^{(2n)}(s, \mathcal{L}_p^{(CE)}) &= \frac{\pi}{8} \chi(1) \text{Vol}(\Gamma/G) C_\Gamma C_p^{N-1} \sum_{l=0}^{n-1} a_{2l} l! \\ &\times \sum_{j=0}^l \frac{\mathcal{K}_{l-1}(s-j-1; (\rho_0-p)^2, \pi)}{(l-j)! (s-1)(s-2)\dots(s-(j+1))} + \\ &+ \frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)} \int_0^\infty \frac{\psi_\Gamma(\rho_0+t+\rho_0-p)}{(2t(\rho_0-p)+t^2)^s}, \end{aligned}$$

onde  $k_m(s; \delta, \alpha) \equiv \int_{\mathbb{R}} dr r^{2m} (\delta + r^2)^{-s} \text{sech}^2(\alpha r)$ , e  $\psi_\Gamma(z)$  é o logaritmo derivado da função zeta de Selberg. Para dimensão ímpar temos

$$\begin{aligned} \zeta^{(2n+1)}(s, \mathcal{L}_p^{(CE)}) &= \frac{\chi(1) \text{Vol}(\Gamma/G)}{4\Gamma(s)} C_\Gamma C_p^{2n} \\ &\times \sum_{l=0}^n \frac{a_{2l} \Gamma(j + \frac{1}{2})}{(\rho_0-p)^{2s-2j-1}} \Gamma\left(s-l-\frac{1}{2}\right) \\ &+ \frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)} \int_0^\infty \frac{\psi_\Gamma(\rho_0+t+\rho_0-p)}{(2t(\rho_0-p)+t^2)^s}, \end{aligned}$$

Para dimensão ímpar existe polos para  $s = -\frac{1}{2}$ . Portanto a energia de Casimir  $E_V^{(2n+1)}$  não pode ser obtida por meios de regularização via função zeta.

Para espaço de dimensão par a energia de Casimir possui a forma

$$\begin{aligned} E_V^{(2n)} &= \frac{\pi}{8} \chi(1) \text{Vol}(\Gamma/G) C_\Gamma C_p^{2n-1} \sum_{l=0}^{n-1} a_{2l} l! \\ &\times \sum_{j=0}^l \frac{\mathcal{K}_{l-1}(-j-\frac{3}{2}; (\rho_0-p)^2, \pi)}{(l-j)! (s-1)(s-2)\dots(s-(j+1))} + \\ &- \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\psi_\Gamma(\rho_0+t+\rho_0-p)}{(2t(\rho_0-p)+t^2)^{-\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Contudo mesmo a energia de Casimir possuindo uma componente negativa de pressão o valor teórico discorda das medidas, fazendo com que esta possibilidade seja descartada para o problema de energia escura.