Universidade
Estadual de Londrina

LETÍCIA BARCARO CELESTE OMODEI

AUTENTICIDADE EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA:

DA APRENDIZAGEM PARA O ENSINO EM UM CURSO DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Londrina
2021

LETÍCIA BARCARO CELESTE OMODEI

AUTENTICIDADE EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA:

DA APRENDIZAGEM PARA O ENSINO EM UM CURSO DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Profª. Drª. Lourdes Maria Werle de Almeida

Londrina
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Omodei, Letícia Barcaro Celeste.
AUTENTICIDADE EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA : DA APRENDIZAGEM PARA O ENSINO EM UM CURSO DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES / Letícia Barcaro Celeste Omodei. - Londrina, 2021.
189 f. : il.

Orientador: Lourdes Maria Werle Almeida.
Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2021.
Inclui bibliografia.

1. Educação Matemática - Tese. 2. Modelagem Matemática - Tese. 3. Autenticidade - Tese. 4. Formação de Professores - Tese. I. Almeida, Lourdes Maria Werle. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

CDU 37

LETÍCIA BARCARO CELESTE OMODEI

AUTENTICIDADE EM ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA:

DA APRENDIZAGEM PARA O ENSINO EM UM CURSO DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial para a obtenção do título de Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Orientadora: Profª. Drª. Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina – UEL

Profª. Drª. Andréia Maria Pereira de Oliveira
Universidade Federal da Bahia – UFBA

Profª. Drª. Bárbara Nivalda Palharini Alvim Sousa
Universidade Estadual do Norte do Paraná – UENP

Profª. Drª. Karina Alessandra Pessoa da Silva
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR

Profª. Drª. Susana Paula Graça Carreira
Universidade do Algarve – UALG

Londrina, 22 de junho de 2021.

Dedico este trabalho aos que mais amo: meus filhos, Francisco e Mateus, meu esposo Rafael, meus pais, Graça e Celeste.

AGRADECIMENTO

Um trecho do Livro O Pequeno Príncipe, de Saint-Exupéry, vem à minha mente para escrever neste momento: "Aqueles que passam por nós, não vão sós, não nos deixam sós. Deixam um pouco de si, levam um pouco de nós." É assim que inicio meus agradecimentos, pois considero que cada pessoa que esteve por algum momento em minha vida contribuiu para que esse momento chegasse. Desse modo, agradeço a todas as minhas professoras e meus professores, da Educação Infantil, da Educação Básica, da Graduação, da Pós-graduação.

Agradeço a Deus pela vida maravilhosa que me deu e ao Espírito Santo por iluminar meus passos e minhas escolhas.

Agradeço à minha orientadora, professora Lourdes, pela orientação, pelo incentivo, pelas conversas e pelas aprendizagens proporcionadas.

Agradeço aos meus alunos queridos, que aceitaram fazer parte da minha pesquisa e da minha vida, participando ativamente das aulas de Modelagem Matemática e das Oficinas de Modelagem Matemática na Educação Básica, sempre me ensinando alguma coisa.

Agradeço às professoras Andréia, Bárbara, Karina e Susana, pelas importantes contribuições no exame de qualificação e na avaliação final da pesquisa.

Agradeço aos meus colegas do colegiado de Matemática da Unespar câmpus de Apucarana, em especial aos que estiveram mais próximos, Luciana, Lucineide, Rosângela e Damarli.

Agradeço aos meus colegas do GRUPEMMAT, Ademir, Adriana, Ana Paula, Ariel, Bárbara, Bianca, Camila, Cíntia, Daiany, Dirceu, Élida, Gustavo, Henrique, Jeferson, Joice, Karina, Kassiana, Maria Helena, Michele, Rosângela, Sílvia, Tânia Camila, Thiago, pela convivência agradável e repleta de aprendizagens. Particularmente às minhas amigas que foram luz no meu caminho, Karina, Joice, Élida e Tânia Camila.

Agradeço aos professores e servidores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática – Doutorado e da Secretaria de Pós-Graduação do Centro de Ciências Exatas, especialmente a Cibele, pelo tempo e dedicação dispensados.

Agradeço à minha família, de modo especial, meu pai e minha mãe, Celeste e Graça, por terem me amado e me apoiado incondicionalmente todos os dias da minha vida.

Agradeço ao meu esposo, Rafael, por toda a dedicação, amor, paciência. "O amor é paciente, o amor é bondoso [...] Tudo sofre, tudo crê, tudo espera, tudo suporta".

Agradeço aos meus filhos, Mateus e Francisco, que souberam entender *minha ausência em alguns momentos. E peço desculpas a eles pelas vezes em que os fiz pensar: "A mamãe só estuda".*

Agradeço aos meus sobrinhos, Benjamin, Bernardo, Nicolas, Lucas e Caio, por me fazerem acreditar num futuro melhor.

Agradeço aos meus irmãos, Fabrício, Fernando e Lucila e à minha sogra Sandra, por estarem sempre por perto.

Agradeço a todos que contribuíram para que mais essa conquista fosse obtida, aos que me colocaram em suas orações e me deram incentivo quando eu precisei.

Só faz sentido insistirmos em educação, se for possível conseguir por meio dela um desenvolvimento pleno, e desenvolvimento pleno não significa melhores índices de alfabetização, ou melhores índices econômicos e controle da inflação, ou qualidade total na produção, ou quaisquer dos vários índices propostos por filósofos, políticos, economistas e governantes. Tudo se resume em atingirmos melhor qualidade de vida e maior dignidade da humanidade como um todo, e isso se manifesta no encontro de cada indivíduo com o outro.

Ubiratan D'Ambrosio

OMODEI, Letícia Barcaro Celeste. **Autenticidade em Atividades de Modelagem Matemática:** da aprendizagem para o ensino em um curso de formação de professores. 2021. 189 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

RESUMO

A preocupação com a autenticidade em aulas de matemática teve seu despontar com o uso de problemas com contextos artificiais para aplicar a matemática nas aulas de matemática. Desse modo, a modelagem matemática é vista como um meio para inserir essa autenticidade na sala de aula. Mas como se caracteriza essa autenticidade em atividades de modelagem matemática? Construímos nossa fundamentação teórica sobre autenticidde em atividades de modelagem matemática, modelagem matemática na educação matemática e formação do professor para desenvolver atividades de modelagem na sala de aula. Considerando que as atividades desenvolvidas se caracterizam como uma atividade de modelagem matemática, definimos atributos para conferir a autenticidade a essas atividades. Levando em consideração o arcabouço teórico em que se fundamenta a pesquisa e o objetivo de investigar como se caracteriza a autenticidade em atividades de modelagem matemática desenvolvidas em um curso de formação inicial de professores, foram desenvolvidas atividades de modelagem matemática mediante a caraterização de dois contextos: o Contexto de Aprendizagem e o Contexto de Ensino. De acordo com as análises empreendidas nessa pesquisa, a autenticidade se mostra presente em todo o desenvolvimento da atividade de modelagem, no contexto em que se dá a atividade, mas também no papel do professor, na autonomia dos estudantes, nas decisões que são tomadas, no porquê dessas decisões e o que elas influenciam. As análises das atividades desenvolvidas no Contexto de Aprendizagem mostram que a autenticidade está ligada à autonomia dos estudantes para desenvolverem a atividade, pois o maior nível de autenticidade inclui atividades de 3º momento de familiarização dos estudantes com atividades de modelagem matemática, atividades em que os estudantes de fato percorrem todas as fases de desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. Assim, uma atividade com maior nível de autenticidade exige que os próprios modeladores se envolvam na coleta de dados, conheçam mais profundamente a situação-problema estudada, analisem para buscar e selecionar informações necessárias, quais simplificações são possíveis de se fazer sem que comprometa a autenticidade da situação do mundo real, que hipóteses considerar, para então resolver o problema, construir o modelo matemático e interpretar os resultados, com vistas também às consequências desse modelo e o que os resultados podem trazer para o mundo dentro e fora da sala de aula.

Palavras-chave: modelagem matemática; educação matemática; autenticidade; formação de professores.

OMODEI, Letícia Barcaro Celeste. **Authenticity in Mathematical Modeling Activities:** from Learning to Teaching in a Teacher Training Course. 2021. 189 p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

ABSTRACT

The concern with authenticity in mathematics classes had its emergence with the use of problems with artificial contexts to apply mathematics in mathematics classes. In this way, mathematical modeling is seen as a means to insert this authenticity in the classroom. But how is this authenticity characterized in mathematical modeling activities? We built our theoretical foundation on authenticity in mathematical modeling activities, mathematical modeling in mathematics education and teacher training to develop modeling activities in the classroom. Considering that the activities developed are characterized as a mathematical modeling activity, we define attributes to give authenticity to these activities. Taking into account the theoretical framework on which the research is based and the objective of investigating how authenticity is characterized in mathematical modeling activities developed in an initial teacher training course, mathematical modeling activities were developed through the characterization of two contexts: the Learning Context and the Teaching Context. According to the analyzes undertaken in this research, authenticity is present throughout the development of the modeling activity, in the context in which the activity takes place, but also in the role of the teacher, in the autonomy of the students, in the decisions that are made, why these decisions and what they influence. The analysis of the activities developed in the learning context shows that authenticity is linked to the autonomy of students to develop the activity, since the highest level of authenticity includes activities of the 3rd moment of familiarization of students with mathematical modeling activities, activities in which students in fact, they go through all the development phases of a mathematical modeling activity. Thus, an activity with a higher level of authenticity requires that the modelers themselves are involved in data collection, know more deeply the problem situation studied, analyze to search and select necessary information, which simplifications are possible to do without compromising authenticity. of the real world situation, what hypotheses to consider, to then solve the problem, build the mathematical model and interpret the results, also with a view to the consequences of this model and what the results can bring to the world inside and outside the classroom.

Key words: mathematical modeling; mathematical education; authenticity; teacher training.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Estudos e pesquisas com relação ao ensino e à aprendizagem da modelagem matemática bem como referentes à importância da modelagem na aula de matemática indicam que a sua introdução nas aulas em diferentes níveis de escolaridade tem crescido nas últimas décadas (ALMEIDA; DIAS, 2007; BORROMEO FERRI; BLUM, 2010; ALMEIDA; SILVA, 2015; BLUM, 2015; ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016; SPOONER, 2017; BORROMEO FERRI, 2018; SILVA; ALMEIDA, 2019).

Relativamente à implementação da modelagem matemática em aulas de Matemática, podemos apontar que atividades dessa natureza surgem na Educação Matemática como um meio para trazer aplicações da Matemática para a sala de aula (BEAN, 2001; GUEUDET et al, 2017; VOS, 2018).

Um dos precursores da Modelagem Matemática, Henry Pollak, em seu artigo *How Can We Teach Applications Of Mathematics* (POLLAK, 1969), coloca o uso de aplicações no ensino de Matemática como um desafio para a comunidade de educadores matemáticos, uma vez que são utilizados o que o autor caracteriza como *word-problems*, que, embora indiquem aplicações da matemática, em geral são constituídos de dados que não se referem a uma situação da realidade. Assim, Pollak (1969) sugere a construção de modelos matemáticos nas aulas de matemática.

Ao encontro dessas ideias, autores da Educação Matemática (GUEUDET et al, 2017; KAISER, 2017, VOS, 2018, VERSCHAFFEL et al 2020) afirmam que a modelagem matemática foi inserida no currículo escolar a fim de contrapor os *word-problems*, problemas com contextos, em geral, artificiais. E, como afirmam Verschaffel et al (2020), pesquisas recentes têm apontado a lacuna entre os *word-problems* resolvidos pelos estudantes nas aulas de matemática e situações autênticas de modelagem matemática com as quais são confrontados na vida real.

Essa assertiva de Verschaffel et al (2020) sugere que essa temática para as pesquisas se mostra como potencial: a autenticidade na área da Educação Matemática. De fato, autores da comunidade da Educação Matemática, como Niss (1992), Lesh e Lamon (1992), Kramarski, Mevarech e Arami (2002); Galbraith (2007, 2013, 2015), Palm (2002, 2007, 2009), Kaiser e Schwarz (2010), Vos (2011, 2015, 2018), Villa-Ochoa et al (2017), Carreira e Baioa (2018), já têm apresentado interesse em pesquisas acerca da autenticidade nas atividades incluídas nas aulas de matemática.

Mais precisamente tratando da autenticidade em Modelagem Matemática, Martins, Omodei e Almeida (2017) realizaram um levantamento em produções do ICTMA[1] (*International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications*) e da CNMEM[2] (Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática), no qual indicam que o tema tem recebido atenção de pesquisadores da área, porém ressaltam a necessidade de mais pesquisas, especialmente na comunidade brasileira de modelagem matemática. De acordo com essas autoras, estudos de Niss (1992) alicerçaram outras pesquisas posteriores sobre o tema, pois afirmam que a autenticidade em uma atividade de modelagem matemática advém da origem dos problemas, podendo a atividade ser autêntica para alguns e não para outros (NISS, 1992).

Há na literatura autores que enunciam aspectos que evidenciam a autenticidade em uma atividade desenvolvida na sala de aula. Palm (2009), por exemplo, sugere uma estrutura que descreve atividades autênticas, elencando aspectos de situações da vida real que precisam ser considerados: evento, pergunta, informações, apresentação, estratégias de resolução, circunstâncias, requisitos da resolução e objetivos.

Porém, ao nos atentarmos para essas pesquisas, deparamo-nos com discussões relativas à natureza da atividade e nas quais atividades de modelagem matemática são sugeridas como uma possibilidade para a falta de autenticidade nas aulas de Matemática (LESH; LAMON, 1992; DEPAEPE; DE CORTE; PALM, 2009; SCHWARZKOPF, 2007, VERSCHAFFEL, et al, 2009, 2020; VOS, 2011, 2015, 2018).

Entretanto, para analisar a autenticidade em atividades de modelagem[3] é necessária uma perspectiva em que a natureza da atividade de modelagem matemática não seja ela própria suficiente para caracterizar a autenticidade dessas atividades. Consideramos, então, que é preciso que uma comunidade delibere sobre quais aspectos são autênticos em uma atividade na sala de aula, considerando aspectos apontados por Vos (2013, 2018) que define a autenticidade como uma construção social.

Outros autores também apontam para essa caracterização da autenticidade apontada por Pauline Vos. Strobel et al (2013), por exemplo, sugerem quatro tipos de autenticidade: autenticidade do contexto, autenticidade da tarefa, autenticidade de impacto, autenticidade pessoal (de valor). Essa classificação está próxima às quatro dimensões que Galbraith (2013, 2015) propõe para a autenticidade em atividades nas salas de aula: a

---

[1] Nos livros dos anais do ICTMA o levantamento se deu nas edições 12, 13, 14, 15 e 16 do evento.
[2] Nos anais da CNMEM, a busca se deu nas edições 5, 6, 7 e 9 da conferência.
[3] Nesta tese, o termo modelagem está se referindo à modelagem matemática.

autenticidade do conteúdo, autenticidade do processo, autenticidade da situação e a autenticidade do produto.

Assim, algumas perguntas surgem: Como caracterizar a autenticidade em atividades de modelagem matemática? Por que é importante que uma atividade de modelagem seja autêntica?

Para investigar sobre essas indagações na presente pesquisa, consideramos que essas questões não são independentes daquelas relativas ao fazer modelagem matemática. Assim, para além de considerar as discussões sugeridas no quadro teórico em que se fundamenta essa nossa investigação, realizamos uma pesquisa empírica em que práticas com atividades de modelagem matemática são incluídas no que chamamos de um Programa de Formação de Professores com estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática. Este programa nos permitiu abarcar especificidades do ensinar e do aprender modelagem matemática considerando contextos distintos, caracterizados nesta pesquisa como: Contexto de Aprendizagem e Contexto de Ensino.

Este programa foi planejado considerando que documentos nacionais (não só no Brasil, mas em diversos países) que regem a Educação Básica têm proposto a modelagem matemática como um meio para ensinar matemática e até mesmo a modelagem como disciplina específica do currículo (BRASIL, 2018; POLLAK; GARFUNKEL, 2013; SPOONER, 2017, BIEMGENGUT, 2020). Mas como podem os professores desenvolverem atividades de modelagem matemática em suas aulas se não tiverem uma formação para essa ação?

Para que o professor utilize a modelagem matemática em sala de aula, ele precisa estar preparado para isso (ALMEIDA; DIAS, 2007; ALMEIDA; SILVA, 2015), ou seja, a formação de professor em modelagem matemática deve abordar diferentes aspectos da modelagem e também métodos apropriados para ensinar a modelagem matemática (BLUM, 2015; BORROMEO FERRI; BLUM, 2010; BORROMEO FERRI, 2018).

De acordo com vários autores da comunidade de modelagem matemática (BARBOSA, 2001; BLUM, 2015; BORROMEO FERRI; BLUM, 2010; BORROMEO FERRI, 2018; POLLAK; GARFUNKEL, 2013), a formação do professor em modelagem matemática deve ser vista como uma prioridade para que esta alternativa pedagógica aconteça na sala de aula. Assim, entre as ações para promover essa formação, podemos notar a abordagem da modelagem matemática em grande parte dos cursos de formação de professores de matemática, seja em disciplinas específicas ou seja em tópicos de outras disciplinas (SANTOS JUNIOR; SOARES, 2014; OLIVEIRA, 2016; TRZASKACZ; VERONEZ, 2019).

A formação do professor em modelagem pode acontecer de diferentes maneiras (BLUM; LEIß, 2007, BORROMEO FERRI; BLUM, 2010, BORROMEO FERRI, 2018). Na formação inicial do professor em modelagem matemática, como em uma disciplina específica no curso de Licenciatura em Matemática, defendemos que pode acontecer segundo a estrutura: *aprender sobre* modelagem, *aprender por meio* da modelagem e *ensinar usando* modelagem (DIAS, 2005; ALMEIDA; DIAS, 2007; ALMEIDA; SILVA, 2015; ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016).

No Programa de Formação de Professores estruturado para a nossa pesquisa, o Contexto de Aprendizagem foi caracterizado relativamente às atividades desenvolvidas na disciplina de Modelagem Matemática no quarto ano do curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade Pública. Neste contexto, os estudantes tiveram oportunidade de aprender sobre modelagem matemática e aprender por meio da modelagem matemática. Caracterizamos *aprendizagem*, conforme sugere D'Amore (2007), por comportamentos ou mesmo por modificações de comportamentos identificadas nas ações dos estudantes quando realizam tarefas no contexto escolar ou acadêmico. Para este autor, a aprendizagem matemática guarda uma estreita relação com as condições que determinam essa aprendizagem em contextos escolares. Assim, conforme sugerem Brito e Almeida (2021), dada uma prática na sala de aula pode-se inquirir como ela intermedeia a aprendizagem.

Para o Contexto de Ensino, consideramos a disciplina de Metodologia e Prática de Ensino com Estágio Supervisionado no Ensino Médio, também do quarto ano do curso de Licenciatura em Matemática. Nesta disciplina, cada grupo de estudantes-professores[4] ficou responsável por lecionar em uma turma de 2ª série do Ensino Médio de uma escola pública central da cidade de Apucarana. Para essas aulas, os estudantes-professores elaboraram planos de aula e as atividades escolhidas para serem desenvolvidas durante o estágio, ou seja, nas *Oficinas de Modelagem*, já haviam sido desenvolvidas pelos estudantes-professores durante a disciplina de Modelagem Matemática. Ambas disciplinas eram ministradas pela professora/pesquisadora autora desta tese.

Da articulação entre estes contextos, emergiu o objetivo da pesquisa, o qual consiste em **investigar como se caracteriza a autenticidade em atividades de modelagem matemática desenvolvidas em um curso de formação inicial de professores considerando os contextos de aprendizagem e de ensino.**

[4] Neste relatório de pesquisa, os estudantes do curso de Licenciatura em Matemática são denominados estudantes-professores por fazerem parte do Contexto de Aprendizagem e também do Contexto de Ensino.

Assim, consideramos que o cerne desta pesquisa consiste na análise das atividades de modelagem matemática desenvolvidas por estudantes de um curso de formação inicial de professores de matemática, a partir da construção de atributos que caracterizam a autenticidade, e nas reflexões que emergem acerca da autenticidade em atividades de modelagem matemática na formação de professores. Por isso, consideramos que essa pesquisa seja de natureza qualitativa de caráter interpretativo, desde a coleta de dados até as inferências e considerações relativas às análises.

Este relatório da pesquisa é formado pela introdução e mais seis capítulos. O segundo capítulo traz nossa compreensão de Modelagem Matemática na Educação Matemática bem como a caracterização da autenticidade em atividades de modelagem. Neste capítulo também dissertamos acerca da formação do professor em modelagem matemática. No terceiro capítulo definimos os atributos para conferir autenticidade às atividades de modelagem matemática e identificamos os sujeitos da pesquisa, os procedimentos metodológicos e o desenvolvimento da pesquisa. No quarto capítulo é apresentado o Contexto de Aprendizagem, bem como as atividades desenvolvidas nesta parte da pesquisa. Já o Contexto de Ensino com as atividades relativas a essa parte do programa de formação consta no Capítulo 5. No sexto capítulo são realizadas as análises das atividades desenvolvidas. Em seguida, apresentamos as considerações e contribuições dessa pesquisa para a Educação Matemática. Finalmente, apresentamos as referências usadas na pesquisa.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

2.1 SOBRE O QUE É MODELAGEM MATEMÁTICA

Diversas são as caracterizações de modelagem matemática na literatura da área de Educação Matemática, tanto no Brasil como internacionalmente. De modo geral, a ideia de modelagem matemática está associada a resolver problemas do mundo real por meio da Matemática, ou seja, uma atividade que tem como característica essencial a transição entre a realidade e a Matemática.

Para Bassanezi (2002), a modelagem matemática pode ser entendida como "[...] a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do seu contexto de origem" (BASSANEZI, 2002, p. 16).

Ante a distinção entre dois mundos diferentes, o mundo da Matemática e o resto do mundo caracterizados em Pollak (1979), Maaß (2010) toma a modelagem como relacionada à resolução de um problema do mundo real, excluindo a possibilidade de a modelagem incluir somente contextos internos à matemática e sem conexão com a realidade. Nesse sentido, Barbosa (2006) coloca como limites de uma atividade de modelagem matemática que esta aborde um problema (e não um exercício) e que envolva matemática do cotidiano ou de outras ciências.

English (2003, p. 5) entende que a modelagem matemática estabelece uma ponte entre o sentido do mundo físico e social e a matemática como um conjunto de estruturas abstratas e formais. Nessa perspectiva, para Pollak e Garfunkel (2013, p. 9), "em uma situação de modelagem matemática, a matemática pura perde parte de sua soberania". Esses autores sugerem que os resultados matemáticos precisam responder à situação matemática idealizada e à situação-problema inicial: "se o resultado não fizer sentido em termos da situação original no mundo real, o estudante não terá confrontado a realidade" (POLLAK; GARFUNKEL, 2013, p. 9).

Outros autores, de modo geral, caracterizam modelagem matemática como construção de uma resolução para um problema da realidade (NISS et al, 2007; MAAß, ENGELN, 2018). Meyer (2020) refere-se à modelagem matemática como uma atividade que requer o que o autor denominou de sete passos: ler o mundo (conhecer o problema e seus aspectos mais relevantes); escolher hipóteses simplificadoras do problema original; expressar o problema em linguagem matemática; resolver (com aproximações) o problema; avaliar criticamente os resultados da resolução (aproximada); avaliar criticamente os resultados considerando os muitos aspectos sociais, naturais, humanos; decidir com relação ao problema original a partir de "momentos sociais, situações naturais, contextos políticos – enfim, decisões que levaram à necessidade da modelagem matemática" (MEYER, 2020, p. 145).

Bean (2001) avalia a essencialidade das hipóteses e das simplificações na criação do modelo, pois

> A essência da modelagem matemática consiste em um processo no qual as características pertinentes de um objeto ou sistema são extraídas, com a ajuda de hipóteses e aproximações simplificadoras, e representadas em termos matemáticos (o modelo). As hipóteses e as aproximações significam que o modelo criado por esse processo é sempre aberto à crítica e ao aperfeiçoamento (BEAN, 2001, p. 53)

Considerando que atividades de modelagem matemática podem ser incluídas nas aulas, Malheiros, Souza e Forner (2021, p. 3) entendem a modelagem matemática como uma "abordagem pedagógica que parte de problemas abertos, que podem emergir do cotidiano dos estudantes, com o objetivo de compreendê-los por meio da Matemática". Para esses autores, criticidade, diálogo, investigação, problematização e autonomia são elementos fundamentais em uma atividade de modelagem, a qual proporciona que "verdadeiras mudanças e transformações ocorram na vida dos estudantes e no contexto em que eles estejam inseridos" (FORNER, 2018, p. 23).

Assim, na sala de aula, a Modelagem Matemática pode ser traduzida por uma alternativa pedagógica na qual, a partir de uma situação não necessariamente matemática, emerge um problema a ser resolvido por meio da Matemática (ALMEIDA; BRITO, 2005). A ideia de ser uma alternativa pedagógica está relacionada à uma possibilidade, uma maneira, de conduzir uma aula em que se ensina e se visa aprendizagem por meio de atividades de modelagem matemática, conforme sugerem Almeida e Vertuan (2014).

O desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, neste encaminhamento, "[...] reside na iniciativa e nas ações dos alunos, na dinâmica estabelecida pelo professor e alunos ao lidar com a situação, e nas condições dos alunos, para atuar na situação" (ALMEIDA; VERTUAN, 2014, p. 3-4). Consequentemente, podem se constituir distintas práticas de modelagem matemática na sala de aula considerando interesses do professor e especificidades da situação investigada. E, para Silva e Oliveira (2015), a relação entre a matemática e o cotidiano que se estabelece em atividades de modelagem matemática diferencia a modelagem matemática de outras práticas de sala de aula.

2.1.1 O Encaminhamento de uma Atividade de Modelagem Matemática na Sala de Aula

Considerando a dinâmica de uma atividade de modelagem matemática, Almeida, Silva e Vertuan (2016) caracterizam um ciclo em que se incluem cinco fases para o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática: *Inteiração, Matematização, Resolução, Interpretação de resultados, Validação*.

A *Inteiração* consiste na fase da modelagem em que se buscam informações sobre o tema escolhido, realizando a coleta de dados (ALMEIDA; VERTUAN, 2014). Nessa fase, acontece a formulação de um problema. Kaiser e Schwarz (2010) defendem que definir o problema a ser solucionado é a parte mais importante e mais ambiciosa de um processo de modelagem matemática e que, em geral, é negligenciada em aulas de matemática.

A *Matematização*, segundo Almeida e Vertuan (2014), é a fase na qual acontece a formulação de hipóteses, a seleção de variáveis e simplificações necessárias para a resolução do problema, ou seja, é a conversão da linguagem natural para a linguagem matemática. Cifuentes e Negrelli (2012, p. 798) consideram que a fase em que se elaboram hipóteses e se fazem simplificações se constitui como a "fase essencial na descrição epistemológica do processo de modelagem, servindo, inclusive, para diferenciá-lo de outros processos como a resolução de problemas", por exemplo.

A fase em que se constrói um modelo matemático, por meio do qual se determina a resolução do problema, consiste na *Resolução*. Maaß (2010, p. 287), concordando com Henn (2000), afirma que "um modelo é uma representação simplificada da realidade; tem uma intenção específica e leva em consideração apenas alguns aspectos da realidade". Em consonância com essa caracterização, Almeida e Vertuan (2014) defendem que o modelo matemático se traduz por "um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, que é expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática e que tem por finalidade descrever ou explicar o comportamento de outro sistema, em geral, não matemático" (ALMEIDA; VERTUAN, 2014, p. 2).

É importante ressaltar que essa fase, a resolução, não é a que finaliza a atividade, uma vez que somente os resultados matemáticos, apesar de importantes, não são suficientes para uma atividade de modelagem. Para Borromeo Ferri (2018, p. 17):

> Geralmente os alunos param o processo de modelagem com seus resultados matemáticos, porque é isso que eles sabem ao resolver outras tarefas matemáticas. Mas a Modelagem Matemática é diferente. Se a realidade do resultado matemático não é questionada pelos estudantes, então a Modelagem Matemática não faz sentido.

A fase em que se dá a avaliação dos resultados é denominada por Almeida e Vertuan (2014) *interpretação de resultados*, que depois são validados (ou não). Nesta fase "[...] o aluno se depara com a necessidade de comparação e distinção de ideias, generalização de fatos, articulação de conhecimentos de diferentes áreas" (ALMEIDA; VERTUAN, 2014, p. 7).

Assim como Borromeo Ferri (2018), Almeida, Silva e Vertuan (2016) chamam a atenção para a não linearidade dessas fases, ou seja, é provável que seja necessário retomar algumas fases em vários momentos no desenvolvimento da atividade de modelagem.

Segundo Blum (2011), podem se identificar algumas dificuldades na implementação de atividades de modelagem matemática na sala de aula, pois a modelagem envolve a tradução do mundo extramatemático em matemática e, além de cálculos e raciocínios matemáticos, a atividade envolve a leitura de textos e exigências cognitivas uma vez que é necessário fazer suposições e simplificações para a resolução do problema. Desse modo, a modelagem matemática é uma atividade que, além de contribuir para a aprendizagem da matemática, pode ajudar os estudantes a entenderem melhor o mundo, preparando-os para uma cidadania responsável e para a participação no desenvolvimento da sociedade (BLUM, 2011).

Nesse sentido, Villa-Ochoa (2017, p. 220) considera que, por estarem presentes em diversas atividades sociais, atividades de modelagem contribuem para a "motivação para o estudo da matemática e a criação de uma imagem adequada da matemática em relação ao seu papel na sociedade e na cultura", além da constituição de conhecimento matemático e dos contextos em que a atividade ocorre.

Assim, "a atividade de modelagem matemática não ocorre no vácuo" (GALBRAITH, 2015, p. 342), e sim em algum cenário que depende dos que estão envolvidos nela. Por isso, ao fazer modelagem na sala de aula é necessário que o professor conheça seus estudantes e que esteja preparado para desenvolver a atividade. É conveniente também que os estudantes sejam capacitados para fazer modelagem.

Nesse sentido, Almeida, Silva e Vertuan (2016) propõem momentos de familiarização com a modelagem para que o contato de estudantes iniciantes com esse tipo de atividade aconteça de forma gradativa, conforme sugere o Quadro 1. Os autores consideram que "[...] as atividades devem se configurar como um convite que vai se firmando e se confirmando no decorrer de experiências" (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016, p. 26).

Quadro 1: Momentos de familiarização dos estudantes com atividades de modelagem matemática

	1º momento	**2º momento**	**3º momento**
Introdução da situação - problema	A situação-problema é colocada pelo professor, com os dados e as informações necessárias.	A situação-problema é sugerida pelo professor.	A situação-problema é definida pelos próprios estudantes.
Ação dos estudantes	Desenvolvem as fases da modelagem com auxílio do professor.	De forma mais independente do professor quando comparado ao momento anterior, complementam a coleta de informações, definem as variáveis e formulam hipóteses, obtêm e validam o modelo.	Responsabilidade pela condução da atividade, desde a identificação da situação-problema até a obtenção do modelo e sua comunicação para a comunidade escolar.
Intervenção do professor	Intensa	Menos intensa que no 1º momento.	Quando necessária.

Fonte: Construído com base em Almeida, Silva e Vertuan (2016).

Em atividades de 1º momento de familiarização, os estudantes têm menos autonomia e precisam do auxílio do professor em todo o desenvolvimento da atividade. Já em atividades de 2º momento os estudantes agem de forma mais independente do professor. O 3º momento proposto por Almeida, Silva e Vertuan (2016), no qual os estudantes ficam mais livres e responsáveis pela resolução do problema, parece ir ao encontro do que afirmam Kaiser e Schwarz (2010):

> O processo de ensino e aprendizagem caracteriza-se como uma aprendizagem autônoma e autocontrolada [...] espera-se que os professores ofereçam apenas assistência essencial, se forem necessários meios matemáticos ou se os alunos estiverem indo para um beco sem saída. Com esse tipo de abordagem de ensino, os alunos passam por longas fases de desamparo e insegurança, o que é um aspecto importante da modelagem e uma fase necessária dentro de um processo de modelagem (KAISER; SCHWARZ, 2010, p. 56).

Com base em relatos de experiências e pesquisas realizadas (ALMEIDA; DIAS, 2007; SILVA, 2013; SOUSA, 2017; OLIVEIRA, 2018), ponderamos que essa familiarização auxilia no aprendizado de fazer modelagem. Por isso, adotamos estes momentos gradativos na disciplina de Modelagem Matemática para a formação de professores desta pesquisa.

Pelo exposto, diferentemente de um problema de aplicação rotineiro das aulas de matemática, fazer modelagem na sala de aula pode ser um desafio para os estudantes (e consequentemente para os professores), pois não basta manipular os dados presentes no enunciado ou efetuar algoritmos para obter a resolução para um problema aberto. Em uma atividade de modelagem matemática, os estudantes devem trabalhar matematicamente em uma situação problemática da realidade (BORROMEO FERRI, 2006; BLUM, 2015; ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016; BORROMEO FERRI, 2018).

Por ter essas características e pelo fato de existirem muitos problemas na vida real em que a matemática é necessária, atividades de modelagem matemática têm sido desenvolvidas também "no sentido de reformar a educação matemática e incluir aspectos autênticos nas tarefas" (VOS, 2018, p. 9). Assim, atividades de modelagem matemática viriam solucionar a falta de autenticidade que os *word-problems* (com contextos artificiais) trouxeram para a sala de aula (VOS, 2018). Mas no que consiste essa autenticidade? E por que ela é necessária?

2.2 Autenticidade em Atividades de Modelagem Matemática

A discussão acerca da *autenticidade* na Educação Matemática tem merecido atenção de pesquisadores e professores na área de Educação Matemática (LESH; LAMON, 1992; KRAMARSKI; MEVARECH; ARAMI, 2002; PALM, 2007, 2009; KAISER; SCHWARZ, 2010; GALBRAITH, 2007, 2013, 2015; VOS, 2011, 2015, 2018). Os já reconhecidos *word-problems* usados nas aulas de matemática, muitas vezes se referem a uma situação artificial ou pseudorrealista, conforme sugere Vos (2018).

Gueudet et al (2017) afirmam que, devido às críticas da Educação Matemática aos *word-problems*, esses problemas foram substituídos por outros, possibilitando a ocorrência da modelagem matemática na sala de aula. Em atividades de modelagem matemática, o professor passa a ser encorajado "a criar uma cultura de sala de aula propícia ao desenvolvimento de habilidades, concepções e atitudes que são características da modelagem matemática" (DEPAEPE; DE CORTE; VERSCHAFFEL, 2009, p. 246).

Assim, autores da Educação Matemática, tais como Lesh e Lamon (1992), Depaepe, De Corte e Verschaffel (2009), Palm (2009), Schwarzkopf (2007), Verschaffel, et al (2009, 2020) e Vos (2011, 2015, 2018), sugerem o uso de atividades de modelagem matemática como um meio para solucionar essa falta de autenticidade nas aulas de matemática.

De modo geral, *autenticidade* pode ser considerada uma característica de algo que é verdadeiro, real. De acordo com Michaelis Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa, o termo *autenticidade* consiste na "natureza, propriedade ou condição do que é autêntico" e é derivação de "autêntico", do Latim *authenticus*[5] (autoritário; confiável; válido; verdadeiro; fiel;

[5] https://latin-dictionary.net/definition/5737/authenticus-authentica-authenticum Acesso em 12 ago. 2020.

genuíno) e do Grego *authentikos*[6] (em oposição ao que é uma imitação de outro; que realmente vem daquele a quem o atribuímos; genuíno).

O dicionário etimológico caracteriza *autêntico* como "do grego *authentikó*s de autoridade, que faz autoridade" (NASCENTES, 1955, p. 53).

No dicionário filosófico, o termo *autêntico* indica

> [...] o ser que é próprio do homem, em contraposição à perda de si mesmo ou de sua própria natureza, que é a inautenticidade [...] é o mais profundo, em contraposição ao mais superficial; [...] o que dura contra o que é momentâneo, o que cresceu e se desenvolveu com a própria pessoa contra o que a pessoa acolheu ou imitou (ABBAGNANO, 2007, p. 95).

A partir das definições dos dicionários, a caracterização de autenticidade parece estar relacionada a algo que é verdadeiro, em oposição a ser uma cópia. Nesse sentido, Niss (1992) traz considerações acerca do que é uma autêntica situação extramatemática. Ela se faz presente em uma verdadeira prática existente e trata de objetos, fenômenos, assuntos ou problemas que são próprios para determinada área e reconhecidos como tal por pessoas que nela trabalham (NISS, 1992). Lesh e Lamon (1992) discutem a questão: *o que são atividades matemáticas autênticas?* e deliberam que essas atividades envolvem: "(i) matemática da realidade, (ii) situações reais, (iii) questões ou problemas que podem realmente ocorrer em uma situação da vida real e (iv) ferramentas e recursos reais" (LESH; LAMON, 1992, p. 27).

Nesse sentido, os contextos das atividades de modelagem matemática podem ocorrer na vida real dos estudantes e as questões podem corresponder aos seus interesses e experiências. Lesh e Lamon (1992) defendem que atividades de modelagem matemática exigem mais do que simplesmente responder a uma pergunta específica, mas "[...] envolvem o desenvolvimento de um modelo matemático que pode ser usado para descrever, explicar, manipular ou modificar o comportamento de uma variedade de sistemas que ocorrem em situações cotidianas" (LESH; LAMON, 1992, p. 27).

Quiroz, Orrego e López (2015) relatam a experiência de estudantes colombianos do 10º ano com atividades de modelagem a partir de um contexto que caracterizam como autêntico: a inundação que ocorreu na cidade em que eles residem, mais precisamente na escola em que estudam. É possível inferir que *contexto autêntico* seja um contexto real, já vivido pelos estudantes ou possível de ser vivido por eles, a fim de suscitar interesse pela atividade de modelagem. Para os autores, "este tipo de situação cria uma conexão com experiências, vida cotidiana e conhecimento prévio dos alunos sobre o fenômeno que é objeto de estudo" (QUIROZ; ORREGO; LÓPEZ, 2015, p. 238). Com isso, defendem que essa experiência

---

[6] http://www.greek-language.gr/greekLang/modern_greek/tools/lexica/search.html Acesso em 12 ago. 2020.

autêntica, vivenciada com o contexto de inundações, possibilitou a abordagem da matemática escolar.

Ao encontro das ideias apresentadas, Buchholtz e Mesrogli (2013, p. 308) afirmam que os exemplos autênticos “[...] devem explicar a relevância da Matemática no cotidiano, no meio ambiente e nas ciências e transmitir competências para a aplicação da Matemática”. Esses autores analisam “semanas de modelagem” e ponderam que o uso de problemas autênticos nessas semanas na escola traz resultados positivos para os estudantes nas habilidades matemáticas e na atitude em relação à matemática (BUCHHOLTZ; MESROGLI, 2013).

Kramarski, Mevarech e Arami (2002) investigam métodos de ensino que podem melhorar a capacidade dos estudantes para resolver problemas autênticos. Os autores afirmam que:

> [...] ser autêntico não é uma propriedade de um problema, mas da relação entre o solucionador de problemas e o problema. O problema da pizza [...] pode ser autêntico para os jovens que estão acostumados a ir a restaurantes e comparar preços, mas pode não ser autêntico para estudantes que moram em países onde tais atividades não são comuns (KRAMARSKI; MEVARECH; ARAMI, 2002, p.226).

Esses autores identificam algumas características do que denominam *tarefas autênticas*: elas retratam contextos comuns; empregam dados reais; fornecem informações ricas sobre a situação descrita; incluem dados matemáticos complexos, entre outras (KRAMARSKI; MEVARECH; ARAMI, 2002). Os autores concluem que tarefas autênticas são inseridas com pouca frequência na aula de Matemática, pois as tarefas mais usadas pelos professores “descrevem situações simplificadas, envolvendo alguma informação quantitativa, e para as quais existem algoritmos prontos que os alunos devem aplicar para resolver o problema” (KRAMARSKI; MEVARECH; ARAMI, 2002, p. 226).

Lebow (1993) considera que uma atividade autêntica de aprendizagem envolve “[...] a aplicação e manipulação de conhecimento no contexto das práticas comuns a uma determinada cultura” (LEBOW, 1993, p. 12) e salienta que um indivíduo aprende melhor com experiências de relevância pessoal. Com isso, a ideia de autenticidade aponta para uma relativização: para um grupo uma atividade pode se caracterizar como autêntica, para outro não. Honnebein, Duffy e Fishman (1993) afirmam, em seu capítulo de livro sobre construtivismo e ambientes de aprendizagem, que o conceito de atividade autêntica é relativo no que diz respeito a outra atividade e que, em circunstâncias educacionais, “[...] a autenticidade da atividade de aprendizagem refere-se à ação do estudante no ambiente de aprendizagem tendo em mente o ambiente em que essa aprendizagem será usada (HONNEBEIN; DUFFY; FISHMAN, 1993, p. 89).

Podemos pensar, portanto, a autenticidade como um conceito que depende das pessoas envolvidas, do ambiente e das finalidades para a qual essa atividade é desenvolvida.

Para descrever tarefas autênticas, Palm (2009) sugere a *teoria das situações autênticas de tarefas*. Para isso, o autor considera importante realizar a simulação de alguns aspectos de situações da vida real: o evento, a pergunta, as informações (dados), a apresentação, as estratégias de resolução, circunstâncias, requisitos da resolução, o objetivo.

O *Evento* consiste no acontecimento descrito na tarefa. É um "pré-requisito que o evento descrito na tarefa da escola tenha ocorrido ou tenha uma boa chance de ocorrer" (PALM, 2009, p. 9). A *Pergunta* refere-se à concordância entre a tarefa escolar e esta mesma tarefa em uma situação fora da escola. A tarefa deve estar inserida no evento do mundo real descrito. O aspecto *Informação / dados* refere-se às informações e dados para a realização da tarefa. Palm (2009) pondera que devem ser considerados sua existência, seu realismo e suas especificidades. A *Apresentação* consiste na maneira como a tarefa é transmitida aos alunos: modo e uso da linguagem. Na simulação, "[...] é importante que a linguagem usada na tarefa escolar não seja muito diferente da situação correspondente fora da escola" (PALM, 2009, p. 11). As *Estratégias de resolução* se referem ao papel e ao objetivo de alguém resolver a tarefa. As *Circunstâncias* sob as quais a tarefa deve ser resolvida envolve a disponibilidade de ferramentas externas, a orientação (dicas implícitas ou explícitas), consulta e colaboração (colaboração em grupos e possibilidade de assistência), oportunidades de discussão, tempo, consequências do sucesso (ou falha) da resolução do problema (o que o resultado pode causar na vida real). Os *Requisitos da resolução* "[...] devem ser consistentes com o que é considerado uma resolução apropriada em uma situação correspondente à simulada, e os alunos devem estar cientes disso" (PALM, 2009, p. 13). Outro aspecto consiste em ter um *Objetivo no contexto figurativo*: "[...] em simulações às vezes é essencial que o objetivo da tarefa no contexto figurativo seja tão claro para os alunos quanto para o solucionador na situação simulada" (PALM, 2009, p. 13).

Esta teoria de Palm (2009) foi escrita para *tarefas autênticas* e está diretamente relacionada à crítica aos *word-problems*. Por isso, julgamos que não seja possível utilizá-la para analisar a autenticidade em atividades de modelagem matemática, pois muitas dessas características propostas pelo autor já são intrínsecas à modelagem matemática.

Nosso olhar para a autenticidade em atividades de modelagem matemática se dirige para atributos que não estejam diretamente ligados à natureza da atividade, o que vai ao encontro do que Galbraith (2013, 2015) e Vos (2011, 2015, 2018) defendem.

Segundo Vos (2018), deliberar sobre a autenticidade por um julgamento subjetivo ou por uma interpretação pessoal é inadequado para caracterizar a autenticidade de ambientes de aprendizagem e tarefas. "Nesses casos, queremos que uma comunidade de várias pessoas (alunos, professores, pesquisadores, partes interessadas fora da escola) concorde que algo é autêntico ou não" (VOS, 2018, p. 4). Com isso, a autora define a autenticidade como uma construção social utilizando-se das ideias da arqueologia, na qual a "autenticidade é construída por meio de um ritual para estabelecer a autenticidade da verdade" (VOS, 2018, p. 7), ou seja, uma comunidade determina algumas evidências para que algo seja deliberado como autêntico ou inautêntico, independentemente do julgamento subjetivo de um indivíduo.

Mas, como caracterizar essa autenticidade em atividades de modelagem matemática? Em que medida uma atividade de modelagem matemática deve ser autêntica? Em que aspectos?

Vos (2015) não julga essencial que uma atividade de modelagem matemática possa ser considerada completamente autêntica. A autora chama a atenção para a existência (ou não) de aspectos autênticos nas atividades de modelagem matemática. Segundo Vos (2015), um objeto é autêntico se tiver uma origem verdadeira e não tiver sido copiado (ou forjado). Na definição de autenticidade, Vos (2015, 2018) inovou teoricamente e empiricamente, no sentido de criticar os *word-problems* e fazer uma discussão no âmbito da sociologia, considerando a autenticidade como um constructo social, pois se trata de um acordo alcançado por meio de um processo social.

Para Vos (2011) a definição de autenticidade usada na Educação Matemática deve estar alinhada ao significado da palavra no dicionário, ou seja, de não ser uma cópia, uma vez que "o objeto (tarefa, situação, atividade) se origina de uma realidade fora da escola [...]. O designer de tarefas usa a verdadeira realidade extraescolar para uma tarefa" (VOS, 2011, p. 718).

Um outro olhar relevante na literatura acerca da autenticidade em atividades de modelagem matemática foi descrito por Galbraith (2015). Ele julga importante a definição dos termos *autêntico* e *autenticidade*, tanto na literatura de modelagem matemática como nos documentos curriculares. Em Galbraith (2013) e em Galbraith (2015), o autor propõe que a autenticidade em uma atividade de modelagem na sala de aula seja analisada levando em consideração quatro dimensões: a autenticidade do conteúdo, autenticidade do processo, autenticidade da situação e a autenticidade do produto.

Para o autor, se o problema envolver conexões com o mundo real e os estudantes possuírem conhecimentos matemáticos suficientes para apresentar uma resolução viável, a *autenticidade do conteúdo* é conferida. Nesta dimensão, Galbraith (2013) divide os problemas viáveis em dois gêneros: problemas reais direcionados (problemas definidos com um objetivo específico) e problemas de vida (o contexto é real, mas há liberdade na escolha do problema). Com isso, o autor destaca que "o reconhecimento das questões culturais e sociais e a importância dos valores pessoais são fatores centrais aqui" (GALBRAITH, 2013, p. 33).

A *Autenticidade do processo* "refere-se à condução de um processo de modelagem que resulta em soluções que são defensáveis e robustas em termos dos resultados buscados". (GALBRAITH, 2013, p. 33). Com relação a esta dimensão, o autor defende a importância de se ter um processo (como o ciclo de modelagem) para desenvolver a modelagem, ensinar esse processo, analisar e melhorar os resultados da modelagem.

A *Autenticidade da situação* tem como característica essencial o fato de que o processo de resolução do problema é conduzido por exigências da atividade de modelagem, sendo sobressalente às práticas de ensino tradicionais. "Isso significa que as escolhas educacionais pedagógicas (e outras) serão decididas pelas necessidades do processo de resolução de problemas e não o contrário" (GALBRAITH, 2015, p. 344). Nesta dimensão, o autor defende que a modelagem pode "desafiar algumas normas, pressupostos e estereótipos – matemáticos, situacionais e pedagógicos" (GALBRAITH, 2013, p. 35).

Nesse sentido, Galbraith (2013, p. 34) pondera que "[...] a modelagem como resolução de problemas do mundo real nunca pode ser absorvida inteiramente em sistemas que valorizam apenas o conteúdo matemático curricular prescrito".

A análise dos resultados matemáticos (se não existem erros óbvios e se responde ao problema do mundo real) se referem à *Autenticidade do produto*, de acordo com o tempo disponível para o desenvolvimento da atividade, ou seja, avaliar a autenticidade do produto envolve perguntar o quão bem um resultado obtido pela modelagem atende a questão proposta (GALBRAITH, 2013).

Em Omodei e Almeida (2018, 2019) a autenticidade em atividades de modelagem matemática foi analisada de acordo com as dimensões de Galbraith (2015) e Vos (2015). Omodei e Almeida (2018) analisaram a autenticidade em uma atividade desenvolvida no Brasil, em um período em que aconteceram ocupações nas escolas públicas pelos estudantes devido a mudanças na Educação Básica, em que o que se investigava era: *Que escola os* *estudantes querem para a reforma do Ensino Médio?* (BRITO, 2018). Outra atividade analisada pelas autoras consiste em uma atividade de um artigo do livro da ICTMA: *Railway timetable dynamics* (VOS, 2015).

Para Omodei e Almeida (2018) a análise da autenticidade em uma atividade de modelagem matemática deve considerar condições em que a atividade foi desenvolvida; tempo para esse desenvolvimento, materiais utilizados, conceitos matemáticos necessários para a resolução, informações sobre os modeladores da atividade. As autoras concluem que uma atividade de modelagem matemática pode conter aspectos autênticos e aspectos não autênticos, e ainda assim continua sendo relevante para a aprendizagem de conceitos matemáticos e não matemáticos (OMODEI; ALMEIDA, 2018).

Essa conclusão parece estar de acordo com Vos (2011), a qual defende que, para analisar a autenticidade de uma atividade é necessário haver uma caracterização clara e não contraditória do que é autenticidade; definir se a qualificação de algo como autêntico é relativa ou absoluta, se pode haver uma variação ou não; determinar se uma atividade é autêntica por completo ou se são considerados autênticos apenas alguns aspectos, pois, para a autora, “[...] na educação, não oferecemos tarefas totalmente autênticas, porque queremos permitir que os alunos cometam erros. Ao remover essa responsabilidade da tarefa original, removemos a autenticidade e a tarefa não é mais holisticamente autêntica” (VOS, 2018, p. 6).

Para discutir sobre essa responsabilidade, Vos (2011) exemplifica um simulador de voo como um ambiente de aprendizagem, que, aparentemente, é autêntico, mas que, como não voa, o piloto no simulador não tem responsabilidades como teria o piloto num avião real. Assim,

> [...] se aspectos essenciais da origem foram cortados para fins educacionais, ainda podemos falar de uma tarefa autêntica, de atividades autênticas ou de um autêntico ambiente de aprendizagem? [...] quais são os aspectos essenciais do original que precisam ser considerados na definição e o que pode ser excluído sem perder a qualificação da autenticidade? O exemplo do simulador de voo mostra que excluir a autenticidade não minimiza o valor de um ambiente de aprendizado eficaz: excluir a responsabilidade sobre o material e a vida oferece aos alunos um ambiente seguro para aprender (VOS, 2011, p. 719).

Por isso, para Vos (2011) a simulação da realidade não é uma característica da atividade autêntica. Ela julga que “o objeto (uma tarefa / um ambiente) é uma cópia que simula a realidade de forma fidedigna [...] o objeto não se origina da realidade, mas foi projetado para espelhar a realidade” (VOS, 2011, p. 717).

Porém, entendemos que toda situação-problema abordada na sala de aula será apenas uma simulação da realidade. Ao utilizar simulações em modelagem matemática experimental, Carreira e Baioa (2018) afirmam que a simulação ajuda a “refletir o que está acontecendo no mundo real, além de ser uma adaptação da realidade sob condições controladas, uma busca pela semelhança com a realidade e uma maneira de verificar como a prática funciona na realidade” (CARREIRA; BAIOA, 2018, p. 203).

Considerando que as atividades desenvolvidas nesta pesquisa são atividades de modelagem matemática, esse arcabouço teórico nos permite deliberar que para caracterizar a autenticidade é necessário estabelecer alguns aspectos que são aceitáveis para uma comunidade. Desse modo, na seção 3.2 apresentamos a construção de atributos que indicam a autenticidade em atividade de modelagem matemática.

Ainda com relação à inserção de atividades de modelagem matemática na sala de aula, acreditamos que o professor seja indispensável no desenvolvimento de atividades dessa natureza. De um modo geral, para o aprendizado de Matemática, os professores importam muito, “mais do que outras variáveis, como o tamanho da turma ou o tipo de escola. O que faz a diferença é, obviamente, o modo de ensinar” (BLUM, 2011, p. 22). Concordamos com Ball (2003, p. 1) que “a melhoria da aprendizagem dos estudantes depende de um ensino hábil e de que o ensino hábil depende de professores capazes e do que eles sabem e podem fazer”.

Nesse sentido, a modelagem matemática tem encontrado objeções para ser implementada na sala de aula por ser considerada difícil também para os professores, uma vez que “como o conhecimento do mundo real é necessário, o ensino torna-se mais aberto e menos previsível, e todas as competências exigidas dos estudantes, é claro, devem ser adquiridas pelos próprios professores” (BLUM, 2011, p. 19). Por isso, Forner e Malheiros (2020) sugerem que professores de Matemática “tenham vivências acerca da Modelagem em sala de aula, para que possam compreender suas possibilidades enquanto abordagem pedagógica, além de discutir sobre ela, considerando sua prática em sala de aula” (FORNER; MALHEIROS, 2020, p. 508).

Na mesma direção, Barbosa (2001) e Oliveira, Campos e Silva (2009) consideram que a inserção de atividades de modelagem matemática na sala de aula está diretamente relacionada à formação do professor em modelagem. Por isso, é necessário que o professor de Matemática tenha essa formação.

2.3 Formação do Professor em Modelagem Matemática

A formação do professor em Modelagem Matemática constitui um tema que recebe atenção tanto internacionalmente como no Brasil, uma vez que, se a modelagem está presente nos diferentes currículos e documentos relacionados ao ensino de Matemática, é necessário que o professor se prepare para trabalhar com a prática dessa tendência em sala de aula.

De acordo com Silva e Almeida (2019), "a implementação de atividades de modelagem nas aulas de Matemática pressupõe que os professores estejam preparados para desempenhar um papel ativo na organização, implementação e avaliação destas atividades" (SILVA; ALMEIDA, 2019, p. 3).

Segundo Pollak e Garfunkel (2013), para que os professores se utilizem da modelagem matemática em sala de aula, eles devem ter experiências com a modelagem matemática, ou seja, eles precisam "participar da formulação da situação-problema, decidir o que manter e o que ignorar na criação de um modelo idealizado, fazer a matemática na situação idealizada e depois examinar se os resultados fazem ou não sentido na situação original" (POLLAK; GARFUNKEL, 2013, p. 8).

Barbosa (2001) sugere que o ensino por meio da modelagem matemática se diferencia do *ensino tradicional* que é a perspectiva utilizada mais comum até os dias de hoje nas salas de aulas. "Entre uma abordagem e outra, existe uma considerável diferença e os professores, muitas vezes, não se sentem seguros para desenvolver Modelagem em suas aulas. A tarefa da formação é, portanto, oferecer aos professores a possibilidade de se moverem para esta proposta" (BARBOSA, 2001, p. 7-8).

Assim, em se tratando de uma disciplina no curso de Licenciatura em Matemática para a formação do professor em modelagem, podemos afirmar que sua estrutura pode ocorrer de diversas maneiras (BLUM et al. 2007, BORROMEO FERRI; BLUM, 2010) e não pretendemos apresentar a melhor proposta para formação do professor em modelagem. Porém, acreditamos que, para que o professor possa desenvolver atividades de modelagem nas aulas de matemática, ele precisa estar preparado para isso e defendemos o encaminhamento proposto por Dias (2005), Almeida e Dias (2007), Almeida e Silva (2015), Almeida, Silva e Vertuan (2016), Silva e Almeida (2019). Segundo estes autores, a formação do professor para a modelagem matemática deve considerar *aprender sobre* modelagem, *aprender por meio* da modelagem e *ensinar usando* modelagem.

Desse modo, o professor deve aprender o que é a modelagem e como fazer modelagem para depois desenvolver atividades de modelagem com os estudantes, pois não se pode esperar que os professores realizem na sua prática de sala de aula o que não tiveram oportunidades de aprender, como sugerem Ball (2003), Almeida e Silva (2019), Oliveira (2020). Segundo Ball (2003, p. 9), "melhorar a aprendizagem da matemática [...] depende de tornar centrais as oportunidades de aprendizagem dos nossos professores". Nesse sentido, Oliveira (2020) considera que:

> Se há uma intenção clara de que a Modelagem Matemática tem de ser incorporada às práticas pedagógicas, ela precisa ser incutida, debatida, experienciada e explorada, no campo da formação inicial e continuada de professores, como uma condição para que essas experiências sejam promovidas (OLIVEIRA, 2020, p. 83).

Assim, concordamos com Bisognin e Bisognin (2015) de que a formação de professores se destaca como uma linha de pesquisa com interesse "na compreensão dos processos pelos quais os professores aprendem, nos conhecimentos necessários para a prática da docência e como os professores articulam os diferentes conhecimentos no exercício da profissão" (BISOGNIN; BISOGNIN, 2015, p. 35).

Borromeo Ferri e Blum (2010), Pollak e Garfunkel (2013), Blum (2015), Klüber e Tambarussi (2017) e Borromeo Ferri (2018) defendem que o conhecimento profissional necessário para o professor desenvolver atividades de modelagem na sala de aula seja oportunizado ainda na universidade, durante a formação inicial, com experiências de ensino próprias obrigatórias. Concordando com essa ideia, Oliveira (2020) argumenta acerca da importância em favorecer experiências com modelagem matemática na universidade para o conhecimento do professor em formação inicial "como uma oportunidade para que experiências possam ser articuladas e vividas no momento das práticas de Estágio e encaradas de modo reflexivo" (OLIVEIRA, 2020, p. 75).

Para Barbosa (2001, p. 9) "os programas de formação em Modelagem devem se basear no conhecimento prático - ou profissional – do professor". Ele considera esses conhecimentos como:

> conhecimentos que o professor gera nas situações, nos acertos e dilemas da própria prática de Modelagem na sala de aula. O professor deve ter a oportunidade de refletir sobre as experiências com Modelagem no contexto escolar: como organizaram, que estratégias utilizaram, que dificuldades tiveram, de que forma os alunos reagiram, como foi a intervenção do professor, etc. A reflexão sobre estas vivências possibilita aos professores a geração de conhecimentos que possam subsidiar suas práticas pedagógicas com Modelagem (BARBOSA, 2001, p. 9).

Desse modo, concordamos com Blum (2015, p. 89) que "todos esses elementos devem ser incluídos como componentes obrigatórios na formação de professores e no desenvolvimento profissional".

Assim, conforme já enunciado, acreditamos que a formação do professor em modelagem matemática deve acontecer em três eixos: *aprender sobre* a modelagem matemática; *aprender por meio* da modelagem matemática; *ensinar usando* modelagem matemática (ALMEIDA; DIAS, 2007; DIAS, 2005; ALMEIDA; SILVA, 2015; ALMEIDA;

SILVA; VERTUAN, 2016). Dias (2005) caracteriza esses eixos como oportunidades que devem ser dadas ao professor de matemática durante seu processo de formação.

No primeiro eixo, *aprender sobre* modelagem matemática, é oportunizado que o professor conheça teoricamente o que é modelagem matemática a partir de conceitos teóricos que a caracterizam (DIAS, 2005).

No segundo eixo, *aprender por meio* da modelagem, o professor é incentivado a conhecer como se desenvolve uma atividade de modelagem. Neste eixo, espera-se que o professor identifique, em situações específicas, as características da modelagem matemática apresentadas na dimensão teórica e desenvolva atividades de modelagem enquanto estudante, ou seja, é ele quem procura resolver o problema. Assim, ele deve passar por todas as fases de uma atividade de modelagem. (DIAS, 2005)

No *ensinar usando* a modelagem, o terceiro eixo da formação, o professor desenvolve atividades de modelagem na sua prática docente.

Consideramos essa estrutura baseada nos eixos *aprender sobre* a modelagem matemática; *aprender por meio* da modelagem matemática; *ensinar usando* modelagem matemática no programa de formação de professores desta pesquisa, como é apresentado no próximo capítulo.

3 A PESQUISA DESENVOLVIDA

3.1 ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Na presente pesquisa, que do ponto de vista metodológico está alinhada com uma pesquisa de intervenção, temos como finalidade investigar como se caracteriza a autenticidade em atividades de modelagem matemática desenvolvidas em um curso de formação inicial de professores considerando dois contextos: *Contexto de Aprendizagem*; *Contexto de Ensino*.

3.1.1 Os Contextos da Pesquisa Empírica

A pesquisa empírica foi desenvolvida com nove estudantes, seis mulheres e três homens, do quarto ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Paraná câmpus de Apucarana, nas disciplinas de Modelagem Matemática e de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática com Estágio Supervisionado no Ensino Médio. As duas disciplinas eram ministradas pela pesquisadora desta tese.

A organização da pesquisa ocorreu de modo que os estudantes tivessem sua formação em modelagem matemática considerando o *aprender sobre*, *aprender por meio* e *ensinar usando modelagem matemática*, conforme propostos em Dias (2005), Almeida e Dias (2007), Almeida e Silva (2015), Almeida, Silva e Vertuan (2016), Silva e Almeida (2019).

Constituiu-se então um programa de formação que aconteceu em dois contextos distintos. A primeira parte do programa, cujo contexto é a disciplina de Modelagem Matemática, é relativa ao aprender e constitui o que denominamos *Contexto de Aprendizagem*. Já na segunda parte, referente ao ensinar, o contexto corresponde aos preparativos para o estágio, às oficinas de modelagem, às discussões e aos relatórios alusivos às oficinas, e constitui o que denominamos *Contexto de Ensino*.

Consideramos *oficina* como um espaço de intercâmbio e construção coletiva de saberes, de análise da realidade, de confrontação de experiências (CANDAU; SACAVINO, 2013). Segundo Figueiredo et al (2006), a oficina é um campo para reflexão e ação no qual se faz a ligação entre teoria e prática, entre conhecimento e trabalho e entre a educação e a vida (FIGUEIREDO et al, 2006). Para isso, em uma oficina o aprendizado da teoria é proveniente da prática aliada ao cotidiano dos estudantes, por meio da participação dos grupos (ANDER-EGG, 1991; REGINA et al, 2016).

Assim, decidimos nomear a prática dos estudantes como *oficina de modelagem matemática*. Também levamos em consideração que três estagiários (estudantes-professores) por turma coordenam atividades práticas que envolvem matemática durante dois dias, ou seja, dez aulas (de qualquer disciplina da grade), que foram especialmente planejadas para que fossem ocupadas com atividades de modelagem matemática.

Além disso, o estágio supervisionado no curso de Licenciatura em Matemática em que a pesquisa empírica foi desenvolvida é dividido em: estágio de coparticipação (no qual o estudante observa e auxilia o professor regente da turma com o trabalho da sala de aula), estágio de regência (no qual o professor desenvolve um determinado conteúdo do currículo com os estudantes de uma turma) e oficina (com uma movimentação prática e aberta, diferentemente de uma aula teórica e estanque), conforme regulamento próprio[7].

No Quadro 2 apresentamos os elementos relacionados ao programa de formação do professor em modelagem matemática que usamos nessa pesquisa.

Quadro 2: Eixos e elementos para a formação do professor em modelagem matemática

Eixo	Componentes fundamentais	Contexto	Local de desenvolvimento	Período
Aprender sobre a Modelagem Matemática	O conhecimento do professor sobre o que é Modelagem Matemática no que diz respeito à compreensão de conceitos teóricos que a caracterizam	Disciplina de Modelagem Matemática	Câmpus da Universidade	1º semestre letivo de 2019
Aprender por meio da Modelagem Matemática	O entendimento de como se desenvolve uma atividade de modelagem; a identificação de características da modelagem matemática. O desenvolvimento de atividades de modelagem em que procura resolver um problema; o pensar a situação-problema em todas as fases da modelagem matemática	Disciplina de Modelagem Matemática	Câmpus da Universidade	1º semestre letivo de 2019
Ensinar usando Modelagem Matemática	O desenvolvimento de atividades de modelagem na prática docente	Disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática com Estágio Supervisionado no Ensino Médio – Oficina de Modelagem Matemática	Câmpus da Universidade e Escola	2º semestre letivo de 2019

Fonte: Dados da pesquisa

[7] https://apucarana.unespar.edu.br/graduacao/matematica

Nesta pesquisa os estudantes do curso de Licenciatura em Matemática[8] são designados pelos nomes fictícios: Ana, Eduardo, Fernando, Isabela, Jane, Maria, Mirela, Roberto, Suzi. Como a pesquisadora é a professora de ambas as disciplinas, ela é chamada de Professora no decorrer do presente relatório de pesquisa. Os nove estudantes formaram três grupos no início da disciplina de Modelagem Matemática (Contexto de Aprendizagem) e permaneceram com a mesma composição no decorrer da pesquisa, inclusive no Contexto de Ensino. Os grupos são denominados G1, G2 e G3 e estão constituídos conforme mostramos no Quadro 3. Nos tópicos seguintes, o programa de formação é descrito com mais detalhes.

Quadro 3: Constituição dos grupos de estudantes-professores nos dois contextos

Grupo	**Estudantes**
G1	Eduardo, Maria e Roberto
G2	Ana, Isabela e Jane
G3	Fernando, Mirela e Suzi

Fonte: Dados da pesquisa

A Professora procurou desempenhar um papel de orientação no desenvolvimento das atividades, acompanhando cada grupo e fazendo questionamentos, correções e sugestões que julgou pertinentes.

3.1.1.1 O Contexto de Aprendizagem: o *aprender sobre* e o *aprender por meio* da modelagem matemática

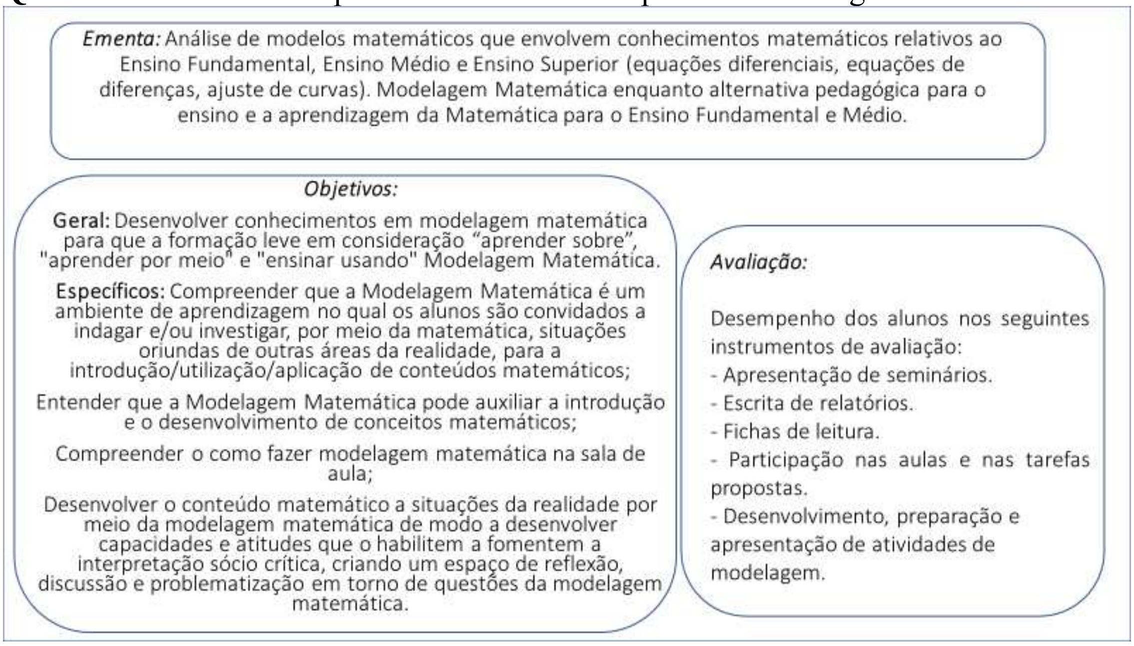
A primeira parte do programa de formação, na disciplina de Modelagem Matemática, aconteceu no 1º semestre do ano letivo de 2019, com quatro aulas semanais, totalizando 72 horas/aulas. As aulas eram geminadas duas a duas. Apresentamos no Quadro 4 elementos relevantes que constam no plano de ensino desta disciplina.

O objetivo da primeira parte do programa, bem como da disciplina de Modelagem Matemática, consistia em os estudantes aprenderem como fazer modelagem. Por isso, foram estudados textos publicados em anais de eventos (comunicação científica e relatos de experiências), além de capítulos de livros e artigos de periódicos, para que pudessem ter uma base teórica do que é Modelagem Matemática na Educação Matemática. Estes estudos aconteceram em pequenos grupos ou com a sala toda reunida fazendo a leitura e discussão dos textos, além de seminários e apresentações em grupos. O livro *Modelagem Matemática na*

[8] No início da pesquisa, os estudantes da Licenciatura em Matemática assinaram um termo de consentimento livre e esclarecido (Apêndice B).

Educação Básica (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016) foi estudado integralmente, pois consta como referência principal da disciplina. Mesmo que esses estudos teóricos realizados no decorrer da disciplina tenham contribuído para a formação desses estudantes em modelagem matemática, não houve uma coleta sistemática dos dados nessas aulas para esta pesquisa.

Quadro 4: Elementos do plano de ensino da disciplina de Modelagem Matemática



Fonte: Dados da pesquisa

Contudo, *aprender sobre* a modelagem não seria suficiente para que o professor em formação estivesse preparado para utilizar a modelagem em suas aulas de Matemática. Portanto, o programa contemplou o *aprender por meio* desde o primeiro contato com a turma, no qual atividades de modelagem matemática foram inseridas de acordo com os momentos de familiarização de Almeida, Silva e Vertuan (2016) destacados na seção de Modelagem Matemática deste trabalho. Algumas dessas atividades desenvolvidas na disciplina de Modelagem Matemática pelos estudantes são apresentadas no Capítulo 4 deste relatório de pesquisa.

3.1.1.2 O Contexto de Ensino: o *Ensinar usando*

A disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática com Estágio Supervisionado no Ensino Médio – contexto da pesquisa na segunda parte do programa de formação, relativa ao *ensinar usando* a Modelagem Matemática - contava com seis aulas semanais e era anual, ou seja, tinha um total de 216 horas/aulas. Apresentamos no Quadro 5 elementos relevantes que constam no plano de ensino desta disciplina.

É importante ressaltar que, apesar de todas as aulas desta disciplina contribuírem de alguma maneira para a realização das oficinas de Modelagem Matemática, parte do estágio supervisionado, a pesquisa empírica não aconteceu em todas as aulas desta disciplina, somente nas orientações para o estágio, nas discussões acerca dos planos de aula, na realização das oficinas de modelagem matemática, que aconteceram durante a segunda parte do estágio supervisionado no Ensino Médio, as rodas de conversa acerca do estágio realizado e a escrita do relatório de estágio. Assim, podemos resumir que esta disciplina foi contexto da nossa pesquisa somente no 2º semestre do ano letivo de 2019 e a coleta sistemática de dados aconteceu somente durante as oficinas de modelagem matemática.

Quadro 5: Elementos do plano de ensino da disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática com Estágio Supervisionado no Ensino Médio

Ementa: Concepções sobre os processos de ensino e de aprendizagem da matemática no Ensino Médio. Estudo de metodologias de ensino e elaboração de propostas para aulas de matemática. Avaliação da aprendizagem escolar de Matemática. Execução e avaliação dos processos de ensino e aprendizagem da Matemática em situações reais de prática pedagógica.

Objetivos:

Geral: Proporcionar uma visão geral dos conteúdos matemáticos, e respectivas intenções, que se destinam ao Ensino Médio, revendo criticamente a prática educativa vigente, no que se refere a conteúdos e metodologias e criando um espaço de reflexão, discussão e problematização em torno de questões da Educação Matemática.

Específicos: Aprender algumas das estratégias de ação educativa para o Ensino Médio;

Oportunizar o conhecimento de elementos básicos nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática;

Desenvolver ideias fundamentais da Matemática do Ensino Médio, almejando uma visão não compartimentada da Matemática;

Estudar a Avaliação como parte integrante e indispensável dos processos de ensino e aprendizagem;

Analisar livros e outros textos didáticos do Ensino de Matemática na Educação Básica;

Dominar métodos e técnicas necessárias para o exercício da prática educativa;

Realizar o "Estágio Supervisionado", sob a orientação do docente desta disciplina

Avaliação:
Desempenho dos alunos nos seguintes instrumentos de avaliação:
- Apresentação de seminários.
- Escrita do relatório de estágio.
- Estágio de observação.
- Estágio supervisionado.
- Fichas de leitura.
- Participação nas aulas e nas tarefas propostas.
- Preparação e apresentação de aula simulada.
- Prova Escrita.
- Resenhas.

Fonte: Dados da pesquisa

Como a escola era parceira da universidade em programas e projetos relativos ao ensino de Matemática, como a Residência Pedagógica e o Programa de Iniciação à Docência (PIBID) e também nos estágios, fomos autorizados a realizar as oficinas de modelagem matemática em duas manhãs seguidas, para as quatro turmas de 2ª série do Ensino Médio da escola. As turmas - com número de alunos entre 35 e 40 - foram sorteadas por cada grupo de estagiários: Grupo 1 ficou com a turma B, Grupo 2 com a turma D e Grupo 3 com a turma C. A turma A ficou com outro grupo, que cursava somente a disciplina relativa ao estágio e, portanto, não participou da pesquisa.

Nesta parte, a coleta de informações se deu por meio de gravações de vídeos durante as oficinas de modelagem (estágio supervisionado), relatórios das oficinas entregues pelos estudantes, questionários respondidos pelos estudantes, diário de campo da pesquisadora.

Assim, o terceiro eixo da formação – *ensinar usando* a modelagem – foi considerado desde a preparação dos planos de aula até os relatórios entregues pelos estudantes, incluindo as oficinas de modelagem realizadas como parte do estágio supervisionado, que aconteceram em duas manhãs seguidas (segunda e terça) do mês de setembro, totalizando dez horas/aulas.

Além da pesquisa empírica, a partir do quadro teórico estruturado no Capítulo 2, definimos seis atributos que caracterizam a autenticidade em atividades de modelagem matemática. A partir desses atributos, são realizadas as análises da autenticidade das atividades desenvolvidas por estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática.

Conforme exposto no capítulo 2, apesar de cada autor considerar uma qualificação para autenticidade, estabelecemos relações mais próximas com o que Galbraith (2013, 2015) e Vos (2011, 2013, 2018) defendem, uma vez que as atividades já se caracterizam como atividades de modelagem matemática, ou seja, características como as definidas por Palm (2009) e Heck (2010) levam em consideração uma tarefa de uma natureza qualquer e não estritamente uma atividade de modelagem matemática.

Assim, vimos a necessidade de apresentar uma caracterização específica para as nossas atividades de modelagem matemática, que admitam a natureza da atividade como sendo de modelagem matemática e que discutam os papéis que o professor e os estudantes desempenham no desenvolvimento da atividade. Esses atributos são apresentados na sequência.

3.2 Como Caracterizar a Autenticidade em Atividades de Modelagem Matemática

Como discutido na seção 2.3, a caracterização da autenticidade em atividades de modelagem matemática tem diferentes abordagens com relação aos diversos objetivos a que se destina o desenvolvimento dessas atividades. Neste capítulo, apresentamos a construção do que denominamos *atributos* da atividade de modelagem matemática para conferir autenticidade às atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos estudantes.

Sabemos que a Modelagem Matemática surgiu no campo da Matemática Aplicada com o objetivo de dar explicações matemáticas - muitas vezes, tidas como exatas - a situações da realidade. Neste campo, a modelagem matemática “é um processo que alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la" (BASSANEZI, 2002, p. 17). Não há entretanto prescrição de um conteúdo matemático que deve ser usado para fomentar mais este entendimento da realidade.

Porém, a Modelagem Matemática na Educação Matemática, pode, em alguns momentos, prever o uso de determinado conteúdo matemático para a resolução do problema. Isso se dá por motivos educacionais, pedagógicos da sala de aula, como o dever de cumprir uma ementa de conteúdos matemáticos e, na tentativa de inovar o ensino e torná-lo mais interessante para os estudantes, utilizam-se de atividades de modelagem matemática para abordar certo conteúdo, mesmo que seja necessário fazer adaptações e simplificações. Assim, "na Educação Matemática, essa mesma concepção de modelagem é mantida em sua essência, passando por adaptações em função das necessidades pedagógicas de cada nível de ensino em que é abordada" (CIFUENTES; NEGRELLI, 2012 p. 796).

Na literatura da modelagem matemática na Educação Matemática há duas conceituações teóricas que podem ser identificadas na implementação da modelagem matemática na sala de aula: *modelagem como conteúdo*, na qual o objetivo da atividade está no desenvolvimento da capacidade para abordar problemas localizados no mundo externo e avaliar a qualidade das soluções desenvolvidas, e *modelagem como veículo*, na qual os problemas do mundo real são usados para motivar e colaborar para o desenvolvimento de conteúdo matemático específico, ou seja, os problemas são selecionados para atender necessidades da matemática curricular (GALBRAITH; 2015).

A crescente publicação de artigos e de eventos na área indica que utilizar-se da modelagem matemática como veículo, ou seja, para ensinar conteúdos pré-definidos, gera bons resultados de aprendizagem, porém, ao nosso ver, perde-se em termos de qualificação da autenticidade, pois a atividade tem em si, além da resolução de um problema cotidiano, muitas vezes simplificado, o objetivo de ensinar um conteúdo matemático particular, e não outro. A partir dessas reflexões, definimos o atributo 1 para caracterizar a autenticidade em atividades de modelagem matemática: *A matemática usada na atividade de modelagem matemática emergiu das necessidades da abordagem matemática da situação*.

Além de técnicas e conceitos matemáticos, a modelagem matemática envolve um pensar matematicamente, interpretar, fazer escolhas, tomar certas atitudes a partir da intuição (CIFUENTES; NEGRELLI, 2012). Nesse sentido, segundo Almeida e Vertuan (2015, p. 26), "a caracterização da atividade reside muito mais nas iniciativas, ações e procedimentos realizados pelo professor e pelos alunos do que em limitações de tempo e de espaço de realização da atividade".

Em sua estrutura que especifica como analisar a autenticidade de uma atividade, Palm (2009) traz o aspecto *estratégias de resolução*, pois para esse autor deve haver correspondências entre estas estratégias disponíveis para os alunos e o modo como as pessoas resolvem o problema na vida real fora da escola.

Considerando estas características desejáveis para inferir autenticidade à atividade de modelagem matemática, definimos o atributo 2: *Os alunos que desenvolvem a atividade experimentam diferentes estratégias e ferramentas (matemáticas, tecnológicas e empíricas), analisam os resultados parciais e os incrementam quando necessário*.

Também é importante lembrar que "a modelagem é eficiente a partir do momento que nos conscientizamos que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade" (BASSANEZI, 2002, p. 24). Para falar dessa *realidade aproximada*, Stillman, Brown e Geiger (2015) afirmam que, em uma atividade de modelagem matemática, das suposições feitas e dos elementos identificados como essenciais, um problema ideal é formulado a partir da situação real, ou seja, ocorre a idealização da situação, pois o problema a ser solucionado sofre uma simplificação e não é mais exatamente o problema como identificado na realidade, apesar de ter surgido da realidade.

Nesse sentido, Cifuentes e Negrelli (2012) discutem o processo de modelagem matemática do ponto de vista epistemológico e também apresentam uma diferenciação entre a realidade inicial (realidade empírica) e a realidade em que o problema da atividade de modelagem matemática é tratado.

> O momento intermediário entre a realidade inicial e o modelo, que consiste na construção da pseudo-realidade, é o momento da problematização. Assim, podemos entender por problematização o processo de construir a pseudo-realidade, processo propiciado pela elaboração de hipóteses e aproximações simplificadoras. Para que a problematização ocorra são necessárias abstrações [...] situando o problema em um outro plano que já não é o da realidade da qual se tratou inicialmente. A problematização pressupõe uma seleção de elementos daquela realidade inicial, os dados, passíveis de serem captados pela percepção e intuição do indivíduo, mas que, por tal motivo, supõe uma interpretação (CIFUENTES; NEGRELLI, 2012, p. 799-800).

É possível perceber que há um esforço na literatura em mostrar que as simplificações e hipóteses são intrínsecas às atividades de modelagem matemática, porém, quanto menos simplificada a situação-problema, mais próxima da realidade ela estará. Para Palm (2009), as informações devem ser reais, com dados iguais ou muito próximos aos da situação real (PALM, 2009). Segundo Kaiser (2007), para garantir a autenticidade da atividade, devem ser realizadas poucas simplificações. Carreira e Baioa (2018) argumentam que devem ser elaboradas somente hipóteses indispensáveis para a resolução do problema na sala de aula.

As argumentações relativas à importância de preservar as características da situação quando se faz modelagem matemática nos levam a definir o atributo 3 para conferir autenticidade à atividade de modelagem matemática: *As simplificações que conduzem a uma situação idealizada não descaracterizam a situação da realidade.*

Almeida e Vertuan (2015, p. 24) deliberam que "a incorporação das atividades de modelagem deve levar em consideração as especificidades do contexto educacional dando atenção aos professores, aos alunos e a própria estrutura escolar". Essas especificidades não podem se sobressair às necessidades da atividade, pois concordamos com Galbraith (2013, 2015) que a autenticidade de uma atividade também está relacionada ao fato de que "os requisitos da tarefa de modelagem conduzem o processo de resolução de problemas e, para esse fim, possuem maior autoridade do que as crenças ou práticas de ensino tradicionais, caso estes comprometam o objetivo" (GALBRAITH, 2013, p. 35). Assim, definimos o atributo 4 para caracterizar a autenticidade: *No desenvolvimento da atividade de modelagem, as escolhas pedagógicas não se sobressaem frente às necessidades da abordagem matemática da situação da realidade.*

Conforme discutido na seção 2.1, de acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2016), a familiarização dos estudantes com a atividade de modelagem matemática pode acontecer, gradativamente, em três momentos. Em atividades do primeiro momento de familiarização, a situação-problema colocada pelo professor contém as informações necessárias e os estudantes desenvolvem as etapas da modelagem, sempre acompanhados pelo professor. De forma mais independente do docente, em atividades do segundo momento, os estudantes complementam a coleta de informações, definem as variáveis, formulam hipóteses, obtém e validam o modelo. Já em atividades de terceiro momento, os estudantes são responsáveis pela condução da atividade, desde a identificação da situação problema até a obtenção do modelo e sua comunicação.

Com relação às diferentes possibilidades de organização curricular da modelagem, mas não necessariamente abordando a familiarização dos estudantes com atividades de modelagem matemática, Barbosa (2001) apresenta três casos. No caso 1, a situação-problema é definida pelo professor, e os estudantes devem resolver o problema com os dados apresentados. No caso 2, os estudantes fazem a coleta das informações necessárias para a resolução do problema. Já no caso 3, os estudantes ficam responsáveis pela coleta de dados, simplificação, formulação e resolução do problema. Desse modo, a participação do professor em todos os casos é importante, porém, "no caso 1, por exemplo, a presença do professor, já que ele fica responsável pela formulação da situação-problema, é mais forte do que no 3, onde isso é compartilhado com os alunos (BARBOSA, 2001, p. 9).

Nesse sentido, consideramos que a atuação do estudante nas atividades de modelagem matemática pode ser mais dependente ou menos dependente do professor, de acordo com a familiaridade que o estudante tem com esse tipo de atividade e com a configuração da atividade. Segundo Borromeo Ferri (2018, p. 87), "o professor precisa reconhecer e observar se um estudante está progredindo enquanto soluciona um problema da vida real e precisa decidir se a intervenção é necessária ou não". Sustentada na taxonomia da assistência (ZECH, 1998) e no princípio da ajuda mínima (AEBLI, 1983) a autora defende que os estudantes devem obter a resolução por conta própria, na medida do possível, sendo apoiados apenas quando necessário (BORROMEO FERRI, 2018).

A partir dessas ponderações, definimos o atributo 5 para conferir autenticidade a atividades de modelagem matemática: *Há um equilíbrio entre a orientação do professor e a autonomia do estudante de modo que prevalece a segunda*.

Os cinco atributos definidos até aqui referem-se ao desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. Consideramos que a autenticidade também está relacionada à relevância dos resultados obtidos na atividade. Strobel et al (2013) referem-se à *autenticidade de impacto* ao definir problemas autênticos como problemas cujo principal objetivo e fonte de existência é "uma necessidade, uma prática, uma tarefa, uma busca e uma sede existentes em um contexto fora dos objetivos escolares e educacionais". Para esses autores, "é difícil acreditar que os sistemas escolares desapareçam para dar espaço a uma versão tão purista da autenticidade" (STROBEL et al, 2013, p. 151). Com a finalidade de conferir a autenticidade em uma atividade de modelagem matemática em relação a esse aspecto, definimos o atributo 6: *Os resultados obtidos pela modelagem matemática da situação alcançam interesses e geram discussões que extrapolam a sala de aula*.

Levando em consideração nossos pressupostos teóricos discutidos na seção 2.3 e a assertiva de Carreira e Baioa (2018, p. 203), de que "[...] há sempre uma dose de ficção no que é desenvolvido em sala de aula, mesmo que seja *baseado em eventos reais*", com base nesses seis atributos, buscamos indícios de autenticidade nas atividades de modelagem matemática desenvolvidas no programa de formação de professores, que constitui a pesquisa empírica em que se apoiam nossas conclusões nesta tese.

3.3 AS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA DESENVOLVIDAS

No contexto das aulas da disciplina de Modelagem Matemática, relativo ao *Contexto de Aprendizagem*, o programa de formação incluiu atividades de modelagem matemática, que foram introduzidas de acordo com os momentos de familiarização de Almeida, Silva e Vertuan (2016) destacados no capítulo 2 deste texto. Dentre as atividades desenvolvidas nesta parte do programa e apresentadas no Quadro 6, analisamos cinco delas nesta pesquisa.

Quadro 6: Atividades desenvolvidas na disciplina de Modelagem para esta pesquisa

Atividade de Modelagem	Monumento ao Boné	Energia Solar	Substituição dos canudinhos Plásticos	Conectando a Cidade Educação: Wi-fi livre no centro da cidade	Pé sujo de barro? Nunca mais!	Fabricação e venda de cookies
Momento de familiarização	1º	2º	2º	3º	3º	3º
Tema proposto por quem?	Professora	Professora	Estudantes	Estudantes	Estudantes	Estudantes

Fonte: Dados da pesquisa

Ao preparar os planos de aula, cada grupo ficou responsável por escolher três atividades de modelagem matemática que tinham sido desenvolvidas durante o ano letivo de 2019, ou seja, já conhecidas pelos estudantes-professores. As atividades selecionadas para as Oficinas de Modelagem Matemática no Ensino Médio constam no Quadro 7.

Quadro 7: Atividades selecionadas para as oficinas de Modelagem Matemática

Grupo (Gn) de estudantes	**Turma da escola**	**Atividades selecionadas**
G1	2ª B	Conectando a Cidade Educação: Wi-fi livre no centro da cidade Fabricação e venda de cookies Alagamento no pátio escolar[9]
G2	2ª D	Fabricação e venda de cookies Energia Solar Substituição dos canudinhos Plásticos
G3	2ª C	Pé sujo de Barro? Nunca mais! Fabricação e venda de cookies Energia Solar Plantando grama em um jardim[10]

Fonte: Dados da pesquisa

A nossa intenção era que fossem desenvolvidas todas as fases de uma atividade de modelagem matemática também com os alunos da Educação Básica. Porém, em apenas dois

[5] A atividade do alagamento foi trabalhada por um dos estudantes-professores desse grupo nas aulas de estágio no 1º semestre do ano letivo, portanto já era conhecida pelo grupo. Apesar de envolver o meio-ambiente e a conscientização sobre o lixo descartado, ela não será analisada nessa pesquisa.

[6] Essa atividade, que consta na dissertação de mestrado de Santos (2008), não será analisada na pesquisa. Ela foi desenvolvida no início da disciplina de Modelagem Matemática como uma atividade de 1º momento.

dias não seria possível a coleta de dados e busca de informações para o desenvolvimento das atividades de modelagem em outros ambientes fora da escola e também em sites da internet durante as oficinas, pois na escola não havia internet *wi-fi* à disposição de todos os alunos, tampouco computadores com acesso à internet. Por isso, os grupos de estudantes-professores pensaram em alternativas para que evitassem levar os dados prontos no enunciado, mas que pudessem envolver os alunos da escola na seleção dos dados para a atividade.

3.4 A NATUREZA DA PESQUISA E A ANÁLISE DOS DADOS

A pesquisa se constituiu por meio de diversas ações realizadas em diferentes (e não estanques) momentos, durante o período de doutoramento da autora. Primeiramente, e também durante toda a pesquisa, aconteceram estudos teóricos acerca dos temas tratados no capítulo anterior. A partir desses estudos, a problemática a ser pesquisada foi formulada e a pesquisa foi planejada com as lentes teóricas assumidas e também do cenário que a professora teria para aquele ano, ou seja, as disciplinas Modelagem Matemática e Metodologia e Prática de Ensino de Matemática no Ensino Médio, ambas do 4º ano do curso de Licenciatura em Matemática, já haviam sido lecionadas por essa professora anteriormente e havia necessidade de serem ministradas novamente por ela em 2019. Por isso, esse foi o cenário da coleta de dados, que se deu durante o Programa de Formação, o qual aconteceu em dois contextos: o Contexto de Aprendizagem e o Contexto de Ensino.

Utilizando as lentes teóricas, que nos oferecem subsídios para a interpretação dos dados e reflexão sobre estes, fizemos a descrição das atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos estudantes-professores e alunos da escola por meio dos dados, que foram obtidos a partir dos relatórios das atividades dos estudantes-professores, dos relatórios de estágio dos estudantes-professores, da gravação de áudios e vídeos durante as aulas de Modelagem Matemática e das oficinas de Modelagem Matemática durante o estágio, de questionários respondidos pelos estudantes-professores nos dois contextos do programa de formação.

A partir dessas descrições demos início aos processos de análises das atividades desenvolvidas pelos grupos G1, G2 e G3 de estudantes-professores durante a disciplina de Modelagem Matemática no curso de Licenciatura em Matemática. Primeiramente, investigamos se (e de que modo) as atividades atendem aos atributos para conferir autenticidade às atividades de modelagem matemática que apresentamos nos capítulos 4 e 5.

Atribuímos valor **0** quando a atividade não atende ao atributo relativo à autenticidade, **1** quando atende parcialmente ao atributo, **2** quando a atividade atende integralmente ao atributo de autenticidade. Isso nos permite inferir que à atividade de modelagem matemática podemos atribuir um nível de autenticidade de modo que, quanto mais ela atende aos atributos, mais elevado é esse nível de autenticidade.

Para mensurar a autenticidade das atividades usamos uma escala em que atribuímos valor à ocorrência da autenticidade. Em cada atividade de modelagem matemática, a pontuação mínima em conformidade com cada atributo é **0** (quando não atende a atributo algum) e a pontuação máxima é **12** (quando atende a todos os atributos integralmente). Assim, consideramos níveis crescentes de autenticidade de modo que o *Nível 1* inclui pontuação de 0 a 3 acerca dos atributos, no *Nível 2* os valores estão entre 4 e 8 e o *Nível 3* está no intervalo de 9 a 12, como esclarecemos no Quadro 8.

Quadro 8: Níveis de autenticidade nas atividades de modelagem matemática

Pontuação da atividade de acordo com os atributos	**Nível de autenticidade**
0 |—| 3	Nível 1
4 |—| 8	Nível 2
9 |—| 12	Nível 3

Fonte: Construído pela autora

Consideramos que o cerne desta pesquisa consiste na análise das atividades de modelagem matemática desenvolvidas por estudantes de um curso de formação inicial de professores de matemática, a partir da construção de atributos que auxiliam na caracterização da autenticidade em atividades de modelagem matemática. Por isso, pressupomos que essa pesquisa seja de natureza qualitativa de caráter interpretativo, desde a coleta de dados até as inferências e considerações relativas às análises, sempre com base no quadro teórico que subsidia a pesquisa.

Assim, essa pesquisa possui características da pesquisa qualitativa, como a interpretação pessoal e específica dos dados coletados; o interesse reside no processo de análise e não no resultado; é bastante descritiva; leva em consideração o arcabouço teórico estruturado no capítulo anterior e o objetivo da pesquisa.

4 O CONTEXTO DE APRENDIZAGEM

A parte da pesquisa empírica relativa ao Contexto de Aprendizagem (*aprender sobre* modelagem e *aprender por meio* da modelagem) aconteceu na disciplina de Modelagem Matemática, no 1º semestre do ano letivo de 2019, com quatro aulas semanais, totalizando 72 horas/aulas. As aulas eram geminadas duas a duas.

No primeiro dia de aula da disciplina os estudantes-professores foram convidados a responder um questionário inicial (Quadro 9), cuja finalidade era obter informações a respeito do conhecimento dos estudantes-professores acerca de modelagem matemática.

Quadro 9: Questionário inicial respondido pelos estudantes-professores

Questionário Inicial
1- O que é Modelagem Matemática? 2- O que é um modelo matemático? 3- Você já teve contato com a Modelagem Matemática? Em que momentos ou situações? 4- É possível desenvolver atividades de Modelagem Matemática na Educação Básica? Como? Por quê? 5- O que você considera relevante em uma atividade desenvolvida na aula de Matemática? 6- Levando em conta a sua formação inicial de professor de Matemática, o que você espera desta disciplina de Modelagem Matemática?

Fonte: Dados da pesquisa

Dos nove estudantes-professores, apenas um informou neste questionário que não teve contato com modelagem matemática anteriormente à disciplina. Todos os outros informaram ter tido pouco contato, seja em uma disciplina específica do curso, seja na participação de um projeto, seja em algum programa como o PIBID (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência) ou a RP (Residência Pedagógica) ou ainda em minicurso da semana da matemática promovida pelo colegiado do curso de Licenciatura em Matemática.

Antes de iniciar as atividades da disciplina, foi apresentado aos estudantes-professores o programa da disciplina e a proposta da realização da presente pesquisa. Todos aceitaram a participação na pesquisa, assinando um termo de consentimento livre e esclarecido[11].

Para o âmbito desta pesquisa, visando buscar e caracterizar indícios de autenticidade nas atividades de modelagem matemática vamos considerar cinco atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos estudantes-professores na parte do programa que denominamos *Contexto de Aprendizagem*. As atividades referem-se às temáticas: *Monumento*

[11] O termo de consentimento consta no apêndice 1.

ao Boné; Substituição dos Canudinhos Plásticos; Conectando a Cidade Educação: Wi-fi livre no centro da cidade; *Fabricação e venda de cookies*; *Pé sujo de barro? Nunca mais!*.

Na disciplina de Modelagem Matemática os estudantes-professores formaram três grupos (G1, G2 e G3) para desenvolver atividades de Modelagem Matemática de acordo com os três momentos de familiarização propostos por Almeida, Silva e Vertuan (2016). Além disso, a professora combinou com os estudantes-professores que eles deveriam desenvolver uma atividade de 3º momento e que esta atividade seria desenvolvida também durante o estágio com os alunos da escola. As atividades foram desenvolvidas integralmente durante as aulas da disciplina de Modelagem Matemática, passando por todas as fases propostas por Almeida, Silva e Vertuan (2016) (Inteiração, Matematização, Resolução, Interpretação de resultados, Validação) como descritas no Capítulo 2 deste texto.

A atividade com tema *Monumento ao Boné* consiste em uma atividade de 1º momento de familiarização dos estudantes com atividades de modelagem matemática. A situação-problema foi proposta pela professora a todos os grupos de estudantes-professores (G1, G2 e G3) e, conforme a necessidade, os dados e as informações necessárias eram obtidas em conjunto e discutidas entre os grupos e com a professora.

A atividade relativa à *Substituição dos Canudinhos Plásticos* foi proposta pela professora (a partir da sugestão de Maria) a todos os grupos de estudantes-professores (G1, G2 e G3). Como uma atividade de 2º momento de familiarização dos estudantes com atividades de modelagem matemática, conforme a necessidade, os dados e as informações necessárias eram buscadas em conjunto e discutidas entre os grupos e com a professora.

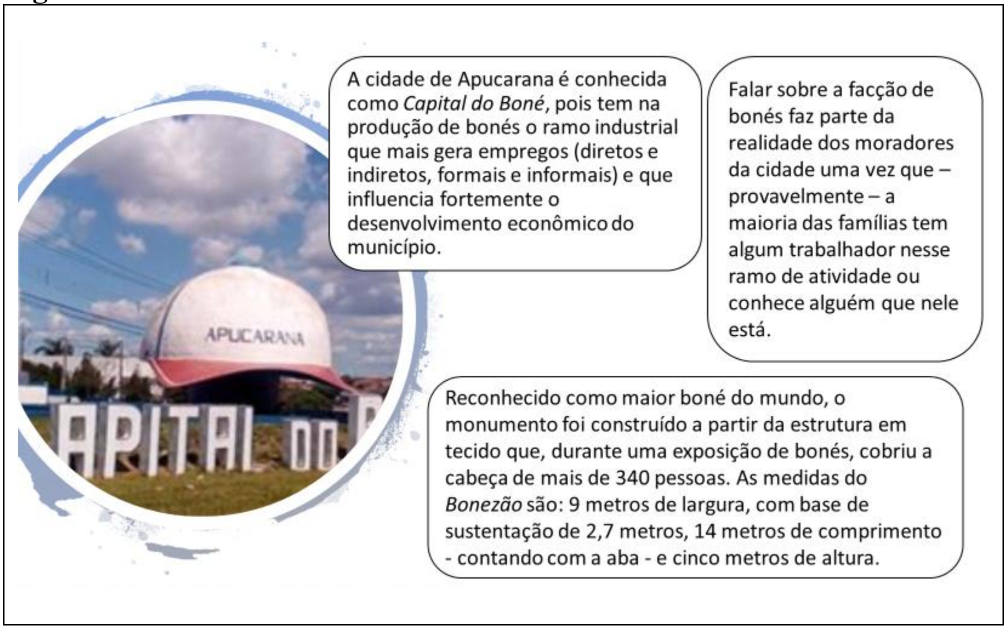
Já as atividades com os temas *Conectando a Cidade Educação: Wi-fi livre no centro da cidade*, *Fabricação e venda de cookies* e *Pé sujo de barro? Nunca mais!*, relativas ao 3º momento de familiarização, foram desenvolvidas, respectivamente, pelos grupos G1 (Maria, Eduardo e Roberto), G2 (Ana, Isabela, Jane) e G3 (Fernando, Mirela, Suzi) e os próprios estudantes-professores foram responsáveis por todas as ações nas diferentes fases da modelagem matemática.

4.1 ATIVIDADE: *MONUMENTO AO BONÉ*

A temática *Monumento ao Boné* foi sugerida pela professora aos estudantes-professores. Trata-se de um assunto bem conhecido para os moradores e estudantes da cidade onde fica o câmpus da universidade, Apucarana – PR, na qual, há um monumento conhecido como *Bonezão*.

A apresentação do tema para os estudantes-professores foi mediada por um conjunto de informações sobre o *Bonezão*, conforme sugere a Figura 1. A partir da discussão sobre o tema com os estudantes-professores e de buscas realizadas em *sites* da internet, surgiram várias questões que os grupos de estudantes-professores poderiam investigar: Quanto de tinta seria necessário para fazer a revitalização do *Bonezão*? Existe uma estátua em algum lugar do mundo que poderia usar o *Bonezão*? Existe uma proporção entre um boné usado por um adulto e o monumento do *Bonezão*? Qual a contribuição das facções de boné para a economia da cidade de Apucarana? As pessoas que moram em Apucarana usam boné? Assim, os estudantes-professores, em grupos, buscaram dados e soluções para alguns desses problemas, como apresentamos na sequência. Inicialmente, a atividade foi planejada para ser desenvolvida durante 4 aulas geminadas (uma noite, cerca de 3horas e 20 minutos), mas não foi possível realizar a apresentação e discussão dos resultados, motivo pelo qual a professora autorizou que a atividade fosse finalizada na semana seguinte.

Figura 1 – O *Bonezão*



Fonte: Dados da pesquisa

4.1.1 G1: Existe uma Estátua em Algum Lugar do Mundo que Poderia Usar o *Bonezão?*

O que este grupo de estudantes-professores (Eduardo, Maria e Roberto) pretende responder nesta atividade é se existe uma estátua em algum lugar do mundo que poderia usar o *Bonezão*.

Assim, primeiramente, realizaram a coleta de dados em *sites* da internet, como o *site* da prefeitura da cidade, e em notícias publicadas no jornal local. Consideraram que o *Bonezão* tem as seguintes dimensões: 9m de largura; 2,7m de base de sustentação; 14m de comprimento (9m de diâmetro e 5 m da aba). O monumento foi construído usando cinco toneladas de ferro.

Além disso, para matematizar a situação, os estudantes-professores também usaram a informação de que, em média, a circunferência da cabeça do brasileiro varia de 54 cm a 65 cm (*site www.minhavida.com*) e a estatura média dos brasileiros é de 1,72m, segundo o IBGE. Essas informações foram necessárias, conforme a fala do estudante Eduardo durante o desenvolvimento da atividade:

> *Eduardo: Para fazer este estudo, temos que primeiro saber qual seria a altura de uma pessoa para vestir o Bonezão. Para isso vai precisar da altura média do brasileiro. Como essa pessoa não vai existir, podemos buscar se existe uma estátua capaz de vestir o Bonezão. A gente podia pensar no Cristo Redentor, procurar o diâmetro da cabeça dessa estátua para saber se cabe o boné nela.*

As hipóteses formuladas pelos estudantes-professores para a situação foram: a estatura de uma pessoa (ou estátua) influencia diretamente no tamanho da sua cabeça; a circunferência da cabeça da estátua é proporcional à circunferência média da cabeça do brasileiro; o boné (exceto a aba) é uma semiesfera e seu diâmetro é a largura (*D = 9 metros*, no caso do *bonezão*). Algumas simplificações foram necessárias, como considerar um intervalo de medidas para a estatura da estátua e a aproximação do valor de π para 3,14.

Para verificar se a estátua do *bonezão* serviria na estátua do Cristo Redentor, tomaram a circunferência média da cabeça do brasileiro, que varia de 54 cm a 65 cm, como 0,595m. Os estudantes-professores então determinaram a estatura de uma estátua em que o *Bonezão* poderia ser ajustado. Conforme indica o Quadro 10, considerando o diâmetro do boné de 9m, determinaram a circunferência do *Bonezão* como sendo de 28,26m e, com essa medida, por meio da regra de três simples, obtiveram a altura da estátua, 81,69m.

Quadro 10 – Resolução do grupo 1

Circunferência do *Bonezão*

$C = \pi . D$

$C = 3{,}14.9$

$C = 28{,}26\ m$

$circunferência$	$altura$
$0{,}595$	$1{,}72$
$28{,}26$	x

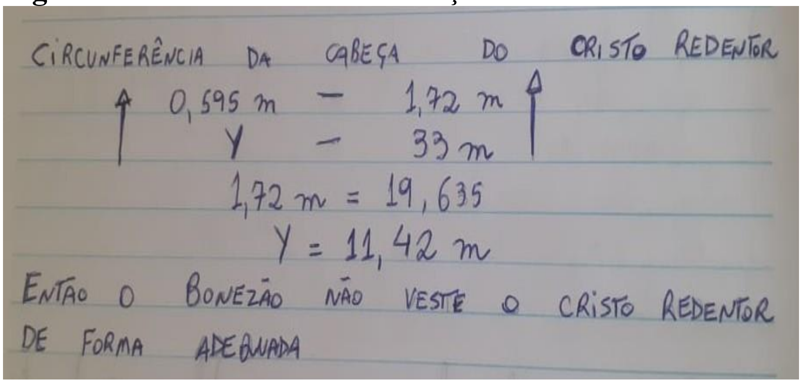
$x = 81{,}69$

Portanto, a altura da estátua em que se ajusta o boné deve ser 81,69m.

Fonte: Dados da pesquisa

G1 considerou que a altura da estátua do Cristo Redentor é de 33 m[12]. Desse modo, o *bonezão* não serviria nela. Mas, para se certificar, os estudantes-professores calcularam a medida da circunferência da estátua com base na circunferência média da cabeça do brasileiro, como mostra a Figura 2.

Figura 2 – Circunferência da cabeça da estátua do Cristo Redentor



Fonte: Dados da pesquisa

Comparando os resultados apresentados na Figura 2 e no Quadro 10, o *bonezão* não serviria no Cristo Redentor. Desse modo, os estudantes-professores pesquisaram outras estátuas para saber em quais delas o boné caberia.

Assim, tiveram que pensar em um intervalo de medidas para a circunferência da cabeça das estátuas. Para isso, mediram a regulagem de um boné que um dos estudantes-professores do grupo usava no dia do desenvolvimento da atividade, conforme Figura 3, e obtiveram que a variação pode ser de 9cm na circunferência da cabeça das pessoas.

Figura 3 – Medida da Regulagem do boné

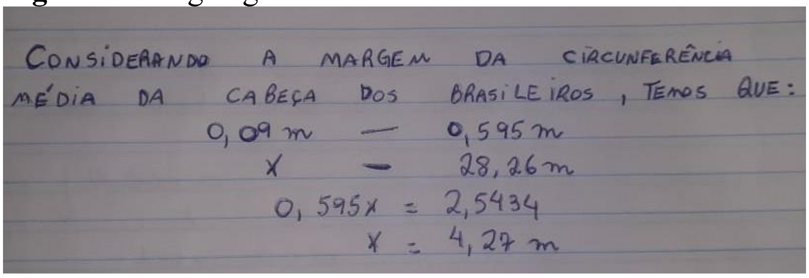
Fonte: Dados da pesquisa

---

12 Essa informação consta no relatório dos estudantes-professores de G1 mas não aparece a fonte.

Considerando essa informação, calcularam qual deveria ser a regulagem do *bonezão*, de modo que houvesse um intervalo para a circunferência da cabeça das estátuas em que o boné poderia servir.

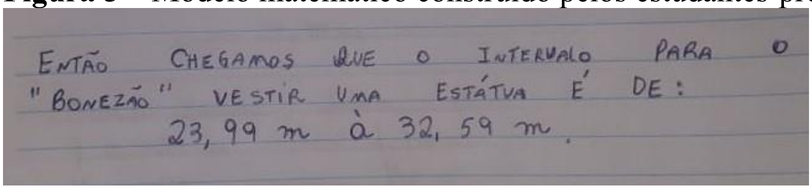
Figura 4 – Regulagem do *bonezão*



Fonte: Dados da pesquisa

Pelo relatório dos estudantes-professores, como mostra a Figura 4, é possível notar que os estudantes-professores de G1 calcularam a proporção, obtendo como resultado que a regulagem do *bonezão* é de 4,27m. Com esse resultado, definiram o intervalo da medida da circunferência da cabeça das estátuas. Utilizaram o comprimento da circunferência do *bonezão* obtido no cálculo do Quadro 10 (28,26m) e consideraram essa regulagem (4,27m). Assim, construíram o modelo matemático, como na Figura 5[13].

Figura 5 – Modelo matemático construído pelos estudantes-professores

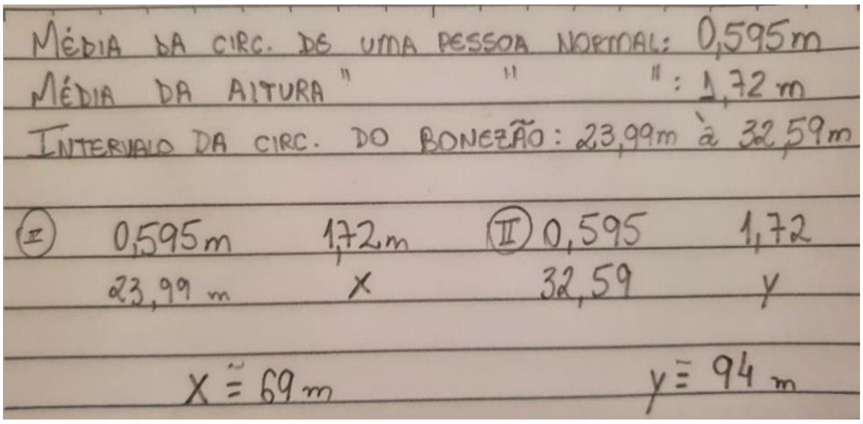


Fonte: Dados da pesquisa

A partir desse modelo, calcularam quais seriam as alturas dessas estátuas, ou seja, um outro intervalo, mas para a medida da altura, como mostra a Figura 6.

[13] A Figura 5 consta no relatório da atividade de G1. Nela há um erro: o resultado da adição 28,26+4,27 é 32,53 e não 32,59.

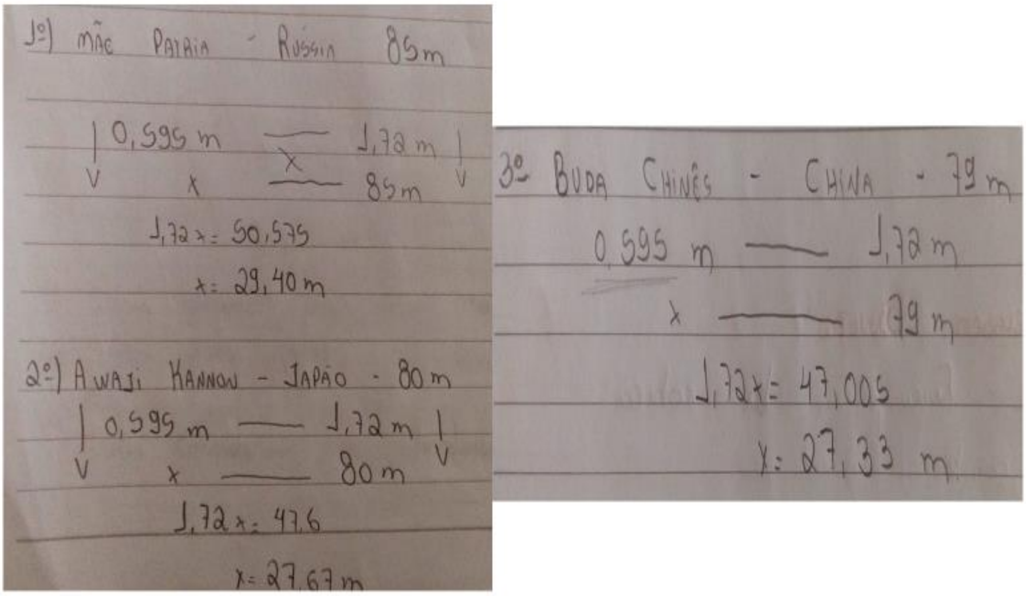
Figura 6: Altura das estátuas



Fonte: Dados da pesquisa

A partir desses resultados, chegaram à conclusão de que a estátua que pode usar o *bonezão* deve ter altura entre 69m e 94m. Para responder ao problema proposto, neste caso, os estudantes-professores precisaram pesquisar sobre estátuas em diferentes lugares e suas respectivas alturas, como por exemplo Mãe Pátria (Rússia) de 85m, Konnon (Japão) de 80m, Buda Chinês (China) de 79m. Para validar os resultados, calcularam a medida da circunferência de todas essas estátuas que estavam no intervalo do modelo obtido, como apresentamos na Figura 7. Com isso, concluíram que o *bonezão* poderia ser usado por todas elas.

Figura 7 – Validação realizada por G1



Fonte: Dados da pesquisa

Os estudantes-professores de G1 não especificaram as fases do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática no relatório e na apresentação da atividade em sala de aula. Esse fato pode ser justificado pela não familiarização com atividades dessa natureza, por se tratar da primeira atividade desenvolvida por eles.

4.1.2 G2: Quanto De Tinta É Necessário Para Fazer A Revitalização Do *Bonezão?*

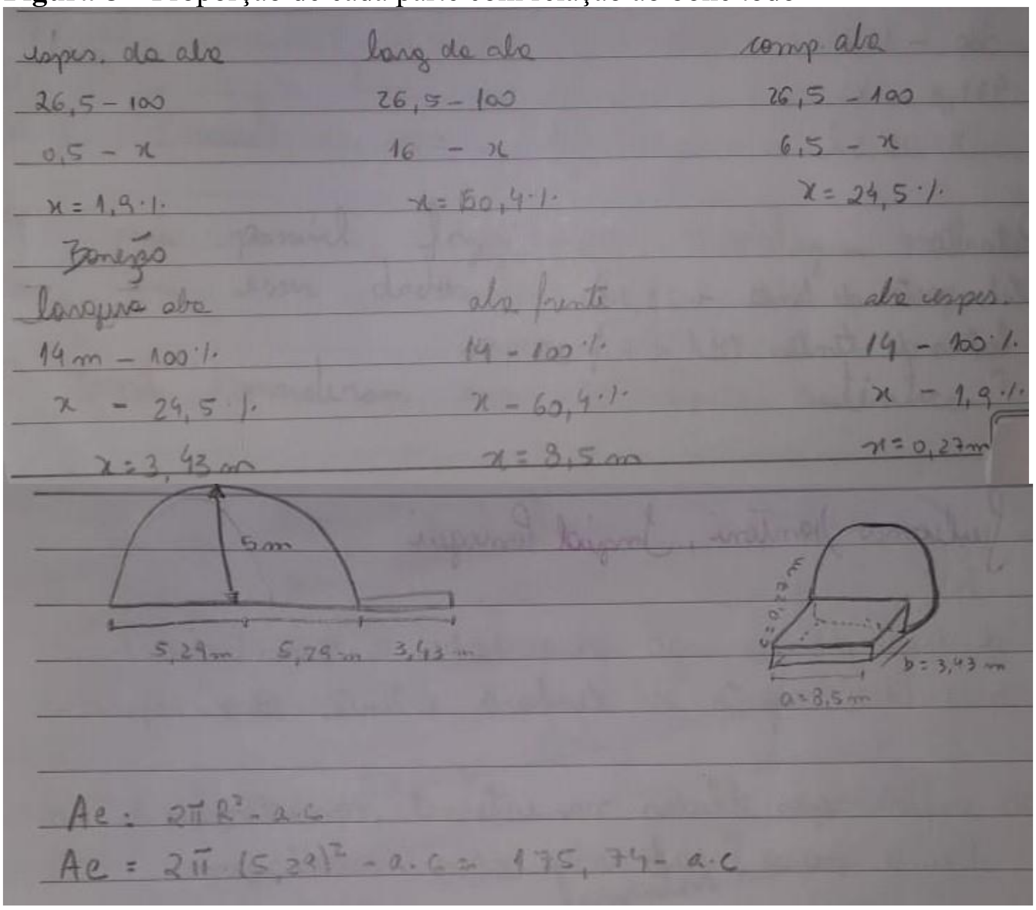
O grupo de estudantes-professoras (Ana, Isabela, Jane) que investigou a questão "Quanto de tinta é necessário para fazer a revitalização do *Bonezão?"* também utilizou os dados da Figura 1 relativos às dimensões do monumento (9m de largura, 14m de comprimento com aba, 5m de altura). Além disso, este grupo também utilizou as medidas de um boné que um dos estudantes da turma utilizava no dia do desenvolvimento da atividade: largura de 26,5 cm, sendo 16 cm da aba; comprimento e espessura da aba: 6,5 cm e 0,5 cm, respectivamente.

A partir desses dados, calcularam a proporção que cada parte do boné representa no todo (Figura 8), para assim compararem com o *bonezão*. Consideraram essas proporções como hipóteses e então obtiveram a medida de cada parte da aba do *Bonezão*: comprimento: 3,43m; largura (frente): 8,5m; espessura: 0,27m. Isso foi necessário, pois os estudantes-professores de G2 queriam fazer a medição no próprio monumento, porém, não teriam possibilidade de ir até o local em um curto prazo, por residirem em outras cidades e apenas estudarem em Apucarana.

Assim, conforme indica o relatório dos estudantes-professores de G2, as hipóteses formuladas por este grupo foram:

> *Hipótese 1: O bonezão é uma semiesfera de raio 5,29m.*
> *Hipótese 2: A aba de um boné tem o formato retangular e suas medidas seguem a seguinte proporção: espessura: 1,9%; largura: 60,4%, comprimento: 24,5%.*

Figura 8 – Proporção de cada parte com relação ao boné todo



Fonte: Dados da pesquisa

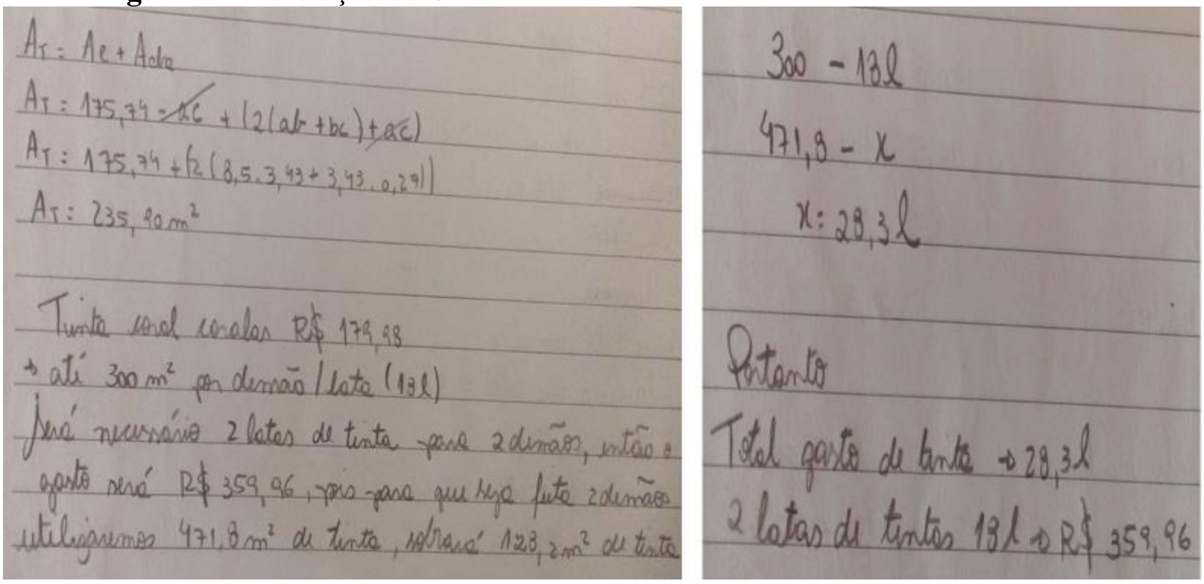
Depois de calculadas as proporções, a estudante Ana explica para a estudante Isabela como deve ser calculada a área que vai receber a tinta:

> *Ana: A área da cabeça* [Ae na Figura 8] *que deve ser pintada é a área de uma semiesfera de raio 5,29m. Entre a área Ae e a área da aba do boné, tem um retângulo* [cuja área é o produto das medidas *a* e *c*, identificadas no desenho da Figura 8]. *Essa área não vai ser pintada por estar entre as partes e deve ser descontada tanto de Ae como da área da aba.*

A partir dessas medidas, as estudantes-professoras determinaram a superfície total (At) do monumento (235,90m^2), que é a área da esfera somada à área da aba, conforme indica a Figura 9. Apesar de estarem no Ensino Superior, as estudantes-professoras utilizaram ferramentas matemáticas já estudadas no Ensino Médio para determinar a área, inclusive na hipótese de que a aba do boné não apresenta curva. Além disso, as estudantes-professoras não mencionam o que é o modelo matemático na atividade. Porém, podemos inferir que o modelo matemático construído está implícito na fala de Ana, quando explica a Isabela sobre os cálculos das áreas.

Considerando a informação do site do fabricante da tinta *Coral Coralar*, de que uma lata de 18 litros de tinta cobre até 300m^2 de área, concluíram que seriam necessários 28,3L de tinta para a revitalização do *Bonezão,* considerando que seriam duas demãos de tinta no monumento.

Figura 9 – Resolução de G2



Fonte: Dados da pesquisa

G2 parece não ter se importado em validar o modelo, pois apenas responderam conforme consta na Figura 9. Durante a apresentação da atividade para a turma, ninguém questionou sobre a validação dos resultados. Esse é um indício de que os estudantes-professores ainda não estavam familiarizados com as fases de uma atividade de modelagem matemática.

4.1.3 G3: O *Bonezão* Precisa Ser Colocado em uma Caixa

Os estudantes-professores (Fernando, Mirela, Suzi) desse grupo tentaram primeiramente buscar a influência que a produção de boné exerce sobre a cidade. Porém, não encontraram dados suficientes para fazer esse estudo e tiveram que formular outro problema, conforme a estudante-professora Mirela:

> *Mirela: A gente até achou dados de 2000, 2004 e bem pouco de 2007. Para trazer para 2019, a gente não conseguiu um padrão para fazer uma previsão. A gente viu que de 2000 para 2004 aumentou muito a produção de bonés e aí fala que o clima interferiu na produção do café, fazendo com que a economia da região Norte do Paraná se voltasse para a indústria Têxtil. Mas aí de 2004 para 2007 a produção foi grande, mas diminuiu um pouco... então mudamos o problema.*
> *Suzi: Como o tempo para a atividade estava se esgotando, decidimos por fazer algo diretamente ligado ao cálculo de volume de paralelepípedos. Então formulamos o problema: O Bonezão precisa ser colocado em uma caixa, a qual será usada para guardar a maior quantidade possível de bonés em caixas de tamanho adulto padrão. Quais as medidas da caixa e quantos bonés podem ser colocados nela?*

Neste grupo, os estudantes-professores utilizaram os mesmos dados dos grupos 1 e 2 relativos às dimensões do monumento (9m de largura, 14m de comprimento com aba, 5m de altura) e consideraram que a caixa deveria ter 1 m a mais em cada uma das dimensões para *sobrar espaço*. Assim, o volume da caixa para colocar o *bonezão* foi calculado pelos estudantes-professores: $V=(9+1)x(14+1)x(5+1)=900m^3$.

Depois, este grupo utilizou as medidas de um boné como sendo: comprimento de 26 cm, largura 16 cm; altura 11 cm. A caixa para colocar uma unidade de boné sem amassar deveria ter 2 cm a mais em cada uma das medidas, porém não consideraram que a altura deveria ser maior. Desse modo, o volume de cada caixinha seria: $V=28\text{x}18\text{x}11=5544cm^3=0{,}005544m^3$. Dividiram o volume da caixa grande pelo volume da caixinha e concluíram que caberiam 162.337 caixas de bonés padrão na caixa grande.

Os estudantes-professores demostraram, ao fim da apresentação, insatisfação com a atividade desenvolvida, provavelmente por levarem muito tempo para desenvolvê-la sem obter sucesso no que buscavam solucionar.

> *Fernando: Entregar qualquer coisa é melhor que não entregar!*
> [...]
> *Mirela: A nossa atividade ficou bem autêntica!* [com ironia]
> *Suzi: A única explicação seria mandar o bonezão para a estátua que o grupo 1 encontrou!* [com risos]

O motivo dessa afirmação de Suzi pode ser o fato de que o problema formulado pelo grupo G3 não consiste em um problema da vida real, pois ninguém enviaria um monumento em formato de boné para outro lugar dentro de uma caixa. O objetivo do problema formulado por G3 seria aplicar a matemática, mais precisamente o cálculo de volume, como afirmaram no início da apresentação, sem envolver uma problemática real a partir da situação-problema abordada, o que vai de encontro aos objetivos de uma atividade de modelagem matemática.

Essa atividade não foi desenvolvida durante o estágio na Educação Básica, somente na disciplina de Modelagem Matemática. Por ser a primeira atividade da pesquisa e por ela se configurar como atividade de 1º momento de familiarização dos estudantes com atividades dessa natureza, ponderamos que os estudantes-professores não se sentiram muito à vontade para desenvolvê-la na prática docente.

4.2 ATIVIDADE: *SUBSTITUIÇÃO DOS CANUDINHOS PLÁSTICOS*

Em uma das aulas da disciplina de Modelagem Matemática, os estudantes-professores foram questionados pela professora acerca dos temas de interesse para desenvolver uma atividade de modelagem matemática. A estudante Maria sugeriu a problemática da poluição do planeta por plásticos e questionou: “Trocar um canudo plástico por um copo descartável é uma solução viável? Na lanchonete da universidade eles não dão o canudinho, mas oferecem um copo descartável!” (Maria, 2019)

Após a sugestão da situação-problema pela estudante, a atividade foi proposta pela professora da disciplina e tinha como tema: *Copo descartável ou canudinho?*. Inicialmente, foi disponibilizado um texto no qual constavam informações sobre a lei contra o uso de canudinhos plásticos, proposta em alguns municípios e estados (inclusive na cidade onde fica o campus da universidade). A apresentação do tema para os estudantes-professores foi mediada por um conjunto de informações, conforme sugere a Figura 10.

Figura 10: Trechos do texto relativo à atividade *Substituição de Canudinhos Plásticos*

Câmara Municipal discute Lei que proíbe fornecimento de canudos plásticos

por imprensa — publicado 12/03/2019 10h55, última modificação 12/03/2019 10h59

Tweetar | Curtir 0 | Compartilhar

A Lei, de autoria do presidente do legislativo vereador Molina e do vereador Edson, foi retomada nesta segunda-feira. Projeto já havia sido discutido no final de 2018

Entrou na pauta desta segunda-feira (11/03), o Projeto de Lei, nº 26/2019, de autoria dos vereadores Luciano Augusto Molina Ferreira, presidente do legislativo e Edson Freitas, que proíbe o fornecimento de canudos confeccionados em material plástico. A medida, se aprovada, será válida para restaurantes, bares, padarias, mercados, quiosques, hotéis, estabelecimentos comerciais, inclusive em estabelecimentos da administração pública municipal, clubes, salão de danças e eventos de qualquer espécie e também por ambulantes no município de Apucarana.

Sessão Ordinária de 11 de Março

Segundo o projeto, em lugar dos canudos de plástico, poderão ser fornecidos canudos em papel reciclável, material comestível, permanente ou biodegradável, embalados individualmente em envelopes hermeticamente fechados, feitos de material similar.

O projeto, que já havia sido discutido no final de 2018, foi retirado de pauta para ajustes. Na tarde de ontem a proposta voltou à pauta, mas foi retirada novamente por um pedido de vista do vereador José Airton Deco de Araújo, que alegou que precisa de um prazo para analisar melhor o conteúdo do projeto.

Segundo Molina, o projeto não tem o intuito de abolir o uso de canudos, "porém que este seja feito de material reciclável, comestível, permanente ou ainda biodegradável, que é feito de decomposição natural", explicou. De acordo ele a degradação demora em média de 45 a 180 dias. "Em Londrina essa lei já foi aprovada e sancionada pelo prefeito em 20 de novembro de 2018 e os estabelecimentos já estão em fase de adaptação. Aqui na cidade, após aprovação, ela será regulamentada no prazo de até 90 dias. E entrará em vigor após 90 dias da sua publicação", completou. "Sei que muitos vão reclamar, mas se nós queremos proteger o meio ambiente, temos, devemos e podemos começar a arrumar nossa casa", observou.

Sabe-se que muitas cidades, estados e até países estão se posicionando contra o uso de canudinhos descartáveis, pois eles não são reutilizados, nem reciclados. A câmara de Apucarana está fazendo um projeto de lei para que seja proibido na cidade o uso de canudinhos plásticos em estabelecimentos comerciais. A reportagem sobre o projeto de lei pode ser lida no site da prefeitura da cidade:

http://www.apucarana.pr.leg.br/institucional/noticias/camara-municipal-discute-lei-que-proibe-fornecimento-de-canudos-plasticos

Em alguns lugares, têm sido oferecidos copos descartáveis, em substituição aos canudinhos. Dessa prática, decorre a problemática: Se os canudinhos plásticos forem proibidos, o uso do copo descartável é uma boa solução?

Fonte: Dados da pesquisa

A partir desta problemática, da discussão sobre o tema com os estudantes-professores e de buscas realizadas em *sites* da internet, a atividade de modelagem matemática teve início. Logo nos primeiros dados coletados, os estudantes-professores perceberam que trocar o canudinho por copo descartável não seria uma boa solução para o problema. Então, foram em busca de outras possibilidades de trocas. G1 sugeriu a troca por canudos de papel, G2 fez o estudo com a troca por canudos feitos a partir do amido do caroço do abacate e G3 sugeriu a troca por canudos de bambu.

Como uma atividade de 2º momento de familiarização dos estudantes com atividades de modelagem matemática, a situação-problema foi proposta pela professora (a partir da sugestão de Maria) a todos os grupos de estudantes-professores (G1, G2 e G3) e, conforme a necessidade, os dados e as informações necessárias eram obtidas em conjunto e discutidas entre os grupos e com a professora.

Essa atividade foi desenvolvida durante 4 aulas geminadas, aproximadamente 3,5 horas, excluindo a apresentação para a turma, que aconteceu no início da aula seguinte. Todos os grupos de estudantes-professores tinham *smartphone* ou *notebook* com acesso à internet *wi-fi* do câmpus da universidade. Na sequência apresentamos o desenvolvimento das atividades por G1, G2 e G3.

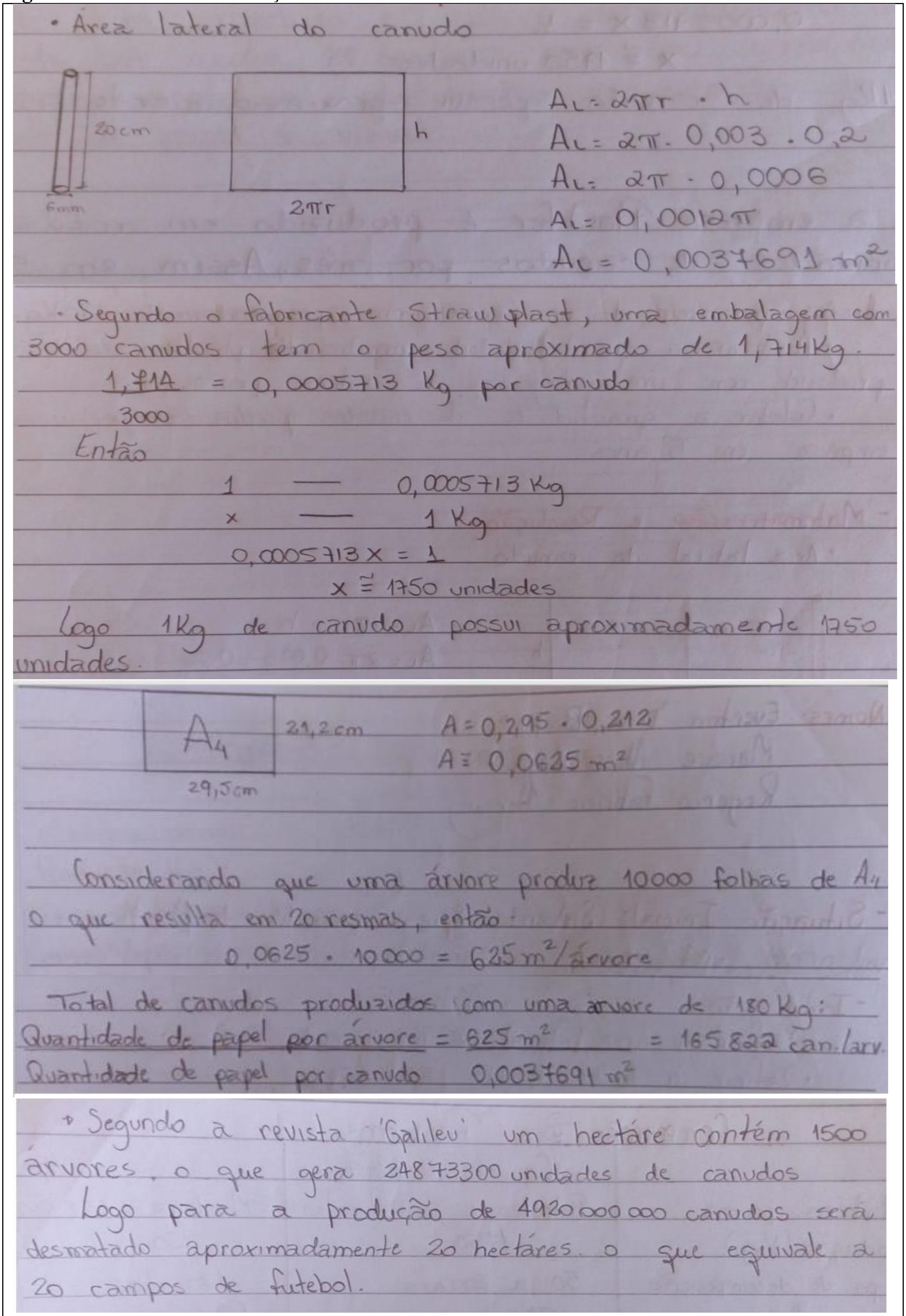
4.2.1 G1: O Uso do Canudo de Papel

O problema formulado por G1 consiste em comparar os efeitos, custos e produção do canudo de papel com o canudo de plástico: *Sabendo que o canudo de plástico é um grande vilão para o meio ambiente, o canudo de papel seria uma boa opção?*. Para isso, primeiramente, eles definiram as ações para o desenvolvimento da atividade, como calcular a área lateral de um canudo e a área de um papel A4; determinar a quantidade de canudos feitos de papel, produzidos por meio de uma árvore com aproximadamente 180kg; analisar a quantidade de canudos de plástico que será produzida com um quilograma de matéria-prima; coletar informações sobre a quantidade de canudos produzidos por uma empresa em 5 anos.

Assim, consideraram que um canudo é um cilindro com dimensões: raio da base 6mm e altura 20cm[14] e com área lateral $AL=0,0037691\ m^2$. Para fazer o canudo de papel, levaram em conta a folha A4 com dimensões 21,2cm X 29,5cm e área de aproximadamente $Af=0,0625m^2$. Na Figura 11, apresentamos trechos do desenvolvimento da atividade que constam no relatório dos estudantes-professores de G1.

[14] Informações encontradas no site https://www.ecycle.com.br/

Figura 11: Atividade *Substituição de Canudinhos Plásticos de G1*



• Area lateral do canudo

$A_L = 2\pi r \cdot h$
$A_L = 2\pi \cdot 0{,}003 \cdot 0{,}2$
$A_L = 2\pi \cdot 0{,}0006$
$A_L = 0{,}0012\pi$
$A_L = 0{,}0037691\ m^2$

• Segundo o fabricante Strawplast, uma embalagem com 3000 canudos tem o peso aproximado de 1,714Kg.

$\frac{1{,}714}{3000} = 0{,}0005713$ Kg por canudo

Então

$1 — 0{,}0005713$ Kg
$x — 1$ Kg

$0{,}0005713x = 1$
$x \cong 1750$ unidades

Logo 1Kg de canudo possui aproximadamente 1750 unidades.

$A = 0{,}295 \cdot 0{,}212$
$A \cong 0{,}0625\ m^2$

Considerando que uma árvore produz 10000 folhas de A_4 o que resulta em 20 resmas, então:

$0{,}0625 \cdot 10000 = 625\ m^2/$árvore

Total de canudos produzidos com uma árvore de 180 Kg:

$\frac{\text{Quantidade de papel por árvore}}{\text{Quantidade de papel por canudo}} = \frac{625\ m^2}{0{,}0037691\ m^2} = 165822$ can./arv.

• Segundo à revista 'Galileu' um hectáre contém 1500 árvores, o que gera 248 73300 unidades de canudos

Logo para a produção de 4920 000 000 canudos será desmatado aproximadamente 20 hectáres. o que equivale a 20 campos de futebol.

Fonte: Dados da pesquisa

A partir da produção escrita dos estudantes-professores e do áudio gravado durante o desenvolvimento da atividade, entendemos que com uma árvore de 180 kg é possível produzir um número de 165.822 canudos, o que resulta em 921 canudinhos de papel produzidos com 1 Kg de papel.

Para fazer a comparação de quantos canudinhos são produzidos com 1 Kg de plástico, encontraram uma informação de que uma embalagem com 3000 canudos de plástico tem o peso aproximado de 1,714Kg. Como o peso de um canudo é 0,0005713Kg, obtiveram que em 1 kg de plástico há 1750 unidade de canudinhos plásticos. Considerando a informação de que uma empresa produz em média 82.000.000 unidades de canudos por mês, em 5 anos a produção seria de 4.920.000.000 canudos.

Já com relação aos canudinhos de papel, como em 1 hectare podem ser plantadas 1500 árvores, seriam produzidas 24.873.300 unidades de canudos, ou seja, para a produção de 4.920.000.000 canudos de papel seriam desmatados aproximadamente 20 hectares.

A partir desses resultados, construíram uma tabela com a comparação entre os dois tipos de canudinhos, como mostramos na Figura 12.

Figura 12: Modelo Matemático construído por G1

COMPARAÇÃO DOS PRODUTOS		
	Canudos de Plástico	Canudos de Papel
Matéria prima	Petróleo e gás natural	Madeira e carvão
Produção (Kg)	1750	920
Tempo de decomposição	50 a 200 anos	180 dias
Custo de fabricação (por unidade)	R$ 0,03	R$ 0,22

Fonte: Dados da pesquisa

A partir do modelo construído, concluíram a atividade com a interpretação dos resultados.

> *Comparando os dados, vimos que financeiramente o canudo de plástico chega a ser R$0,19 por unidade mais barato que para a produção do canudo de papel. Por outro lado, temos que o tempo de decomposição do canudo de plástico varia de 50 a 200 anos, já o de papel leva em média 180 dias.*
> *Tendo em conta que uma empresa específica fabrica em média 4920000000 unidades de canudos de plásticos a cada 5 anos, para produzir a mesma quantidade em canudos de papel seria necessário uma média de 20 hectares a cada 5 anos. Levando em consideração o tempo de decomposição de cada produto e que o desmatamento da Amazônia está em média 19 hectares por dia, acreditamos que ecologicamente a substituição do canudo de plástico pelo de papel é viável.* (Relatório dos estudantes-professores de G1)

É importante ressaltar que em 2019, ano do desenvolvimento desta atividade, o desmatamento na Amazônia teve um aumento de 85% em relação ao ano anterior. Provavelmente por isso G1 tenha relacionado o corte de árvores para a produção de canudos de papel com o desmatamento da Amazônia, concluindo que aquele não seria um número muito alto comparado a esse.

4.2.2 G2: Canudo Feito com Caroço de Abacate

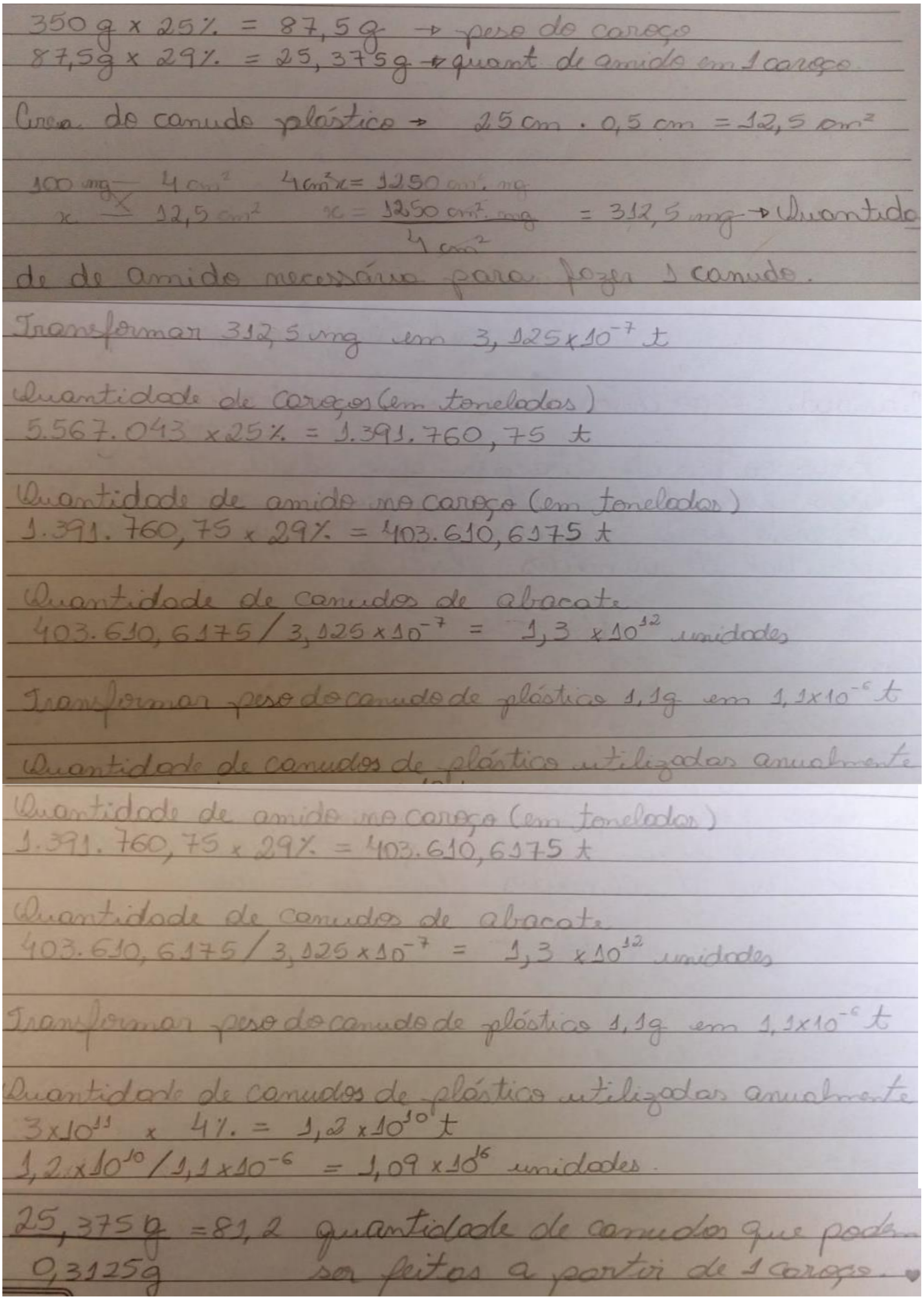
O problema formulado por G2 (*Se todo caroço de abacate que seria destinado ao lixo fosse reaproveitado para a produção de canudo, isso seria suficiente para suprir a demanda mundial de canudos plásticos anuais?*) consiste em prever se a substituição de canudinhos plásticos por canudinhos feitos do caroço de abacate (que seria destinado ao lixo) seria possível em termos de quantidade.

As estudantes-professoras encontraram em *sites* da internet informações como: cada pé de abacate produz em média 500kg do fruto anualmente; em cada hectare é plantado, em média, 200 abacateiros; o peso médio do abacate é de 350g (0,35kg) e o caroço (composto de 29% de amido) representa em média 25% do peso do fruto. A partir dessas informações, procederam no desenvolvimento da atividade, conforme apresentamos na Figura 13.

Multiplicaram o peso médio do abacate pela porcentagem que o caroço representa do fruto para encontrar o peso de um caroço de abacate (87,5g) e multiplicaram este resultado pela porcentagem que representa a quantidade de amido contido em um caroço (87,5g x 29%= 25,375g). Encontraram a área do canudo plástico multiplicando o comprimento da circunferência ($2\pi r$= 2 x π x 0,25= 1,57cm) pela altura (25cm x 1,57cm= 39,25 cm^2). Utilizando proporção, encontraram a quantidade de amido necessário para fazer 1 canudo: 981,25 mg, ou seja, 9,8125 x 10^{-7} toneladas.

Sabendo que a produção mundial (anual) de abacate é de 5.567.043 toneladas, e que o caroço representa 25% do fruto, encontraram a quantidade de caroço (em toneladas) que é produzido anualmente: 5.567.043 x 25%= 1.391.760,75 t. Assim, são produzidos 403.610,6175 toneladas de amido de abacate anualmente. Dividiram essa quantidade pela quantidade de amido necessária para fazer 1 canudo (em toneladas), para encontrarem a quantidade de canudos de abacate que pode ser produzido anualmente: 4,11x10^{11} unidades de canudos. Dividiram também a quantidade de amido por caroço pela quantidade de amido necessária para fazer 1 canudo (em gramas), para encontrar a quantidade de canudos que podem ser feitos a partir de 1 caroço (25,375 g/0,98125g= 25,86 unidades).

Figura 13: Modelo Matemático construído por G2



350 g x 25% = 87,5 g → peso do caroço
87,5 g x 29% = 25,375 g → quant de amido em 1 caroço

Área do canudo plástico → 25 cm . 0,5 cm = 12,5 cm²

100 mg — 4 cm² 4cm² x = 1250 cm². mg
x — 12,5 cm² x = 1250 cm². mg / 4 cm² = 312,5 mg → Quantidade de amido necessário para fazer 1 canudo.

Transformar 312,5 mg em $3,125 \times 10^{-7}$ t

Quantidade de caroços (em toneladas)
5.567.043 x 25% = 1.391.760,75 t

Quantidade de amido no caroço (em toneladas)
1.391.760,75 x 29% = 403.610,6175 t

Quantidade de canudos de abacate
403.610,6175 / $3,125 \times 10^{-7}$ = $1,3 \times 10^{12}$ unidades

Transformar peso do canudo de plástico 1,1g em $1,1 \times 10^{-6}$ t

Quantidade de canudos de plástico utilizadas anualmente

Quantidade de amido no caroço (em toneladas)
1.391.760,75 x 29% = 403.610,6175 t

Quantidade de canudos de abacate
403.610,6175 / $3,125 \times 10^{-7}$ = $1,3 \times 10^{12}$ unidades

Transformar peso do canudo de plástico 1,1g em $1,1 \times 10^{-6}$ t

Quantidade de canudos de plástico utilizadas anualmente
3×10^{11} x 4% = $1,2 \times 10^{10}$ t
$1,2 \times 10^{10} / 1,1 \times 10^{-6}$ = $1,09 \times 10^{16}$ unidades.

$\frac{25,375\,g}{0,3125\,g}$ = 81,2 quantidade de canudos que podem ser feitos a partir de 1 caroço.

Fonte: Dados da pesquisa

Um canudo plástico tem as seguintes dimensões: 25cm de altura, diâmetro de 5mm (0,5 cm) e massa de 1,1g (1,1 x 10^{-6}t) e sabe-se também que o mundo produz cerca de 300 milhões de toneladas (3 x 10^{11} t) de lixo plástico a cada ano, sendo que 4% do lixo plástico produzido é de canudo plástico. Assim, multiplicaram a produção de lixo plástico pela porcentagem da produção de canudos plásticos jogados no lixo e dividiram o resultado pelo peso do canudo (em toneladas) para descobrirem a quantidade de canudos plásticos utilizados anualmente, obtendo 1,09 x 10^{16} unidades.

Com isso, concluíram que com esta produção de abacate não seria possível suprir a demanda anual de canudos plásticos, pois seria necessário produzir mais 1.08996 x 10^{16} canudos de abacate. Decidiram, então, verificar quantos pés da fruta seria necessário produzir para que assim a substituição completa (de canudos de plásticos por canudos de abacate) fosse possível.

Primeiro verificaram quantos caroços seriam necessários. Para isso, dividiram a quantidade de canudos a ser produzida pela capacidade de produção de um caroço de abacate (1.08996 x 10^{16} / 25,86 = 4,21 x 10^{14} caroços) e multiplicaram a quantidade de caroços pelo peso da unidade da fruta, considerando que há apenas 1 caroço em cada abacate (4,21 x 10^{14} x 0,35 kg = 1,475 x 10^{14}kg). Dividiram este valor pela produção de um abacateiro (em kg) e obtiveram a quantidade de árvores que necessitam ser plantadas (1,475 x 10^{14} kg / 500 = 295.039.443.155). Sabendo que em cada hectare é plantado em média 200 árvores, esta quantidade de árvores ocupará cerca de 1.475.197.215.77 hectares.

Com isso, concluem a atividade, com a interpretação dos resultados.

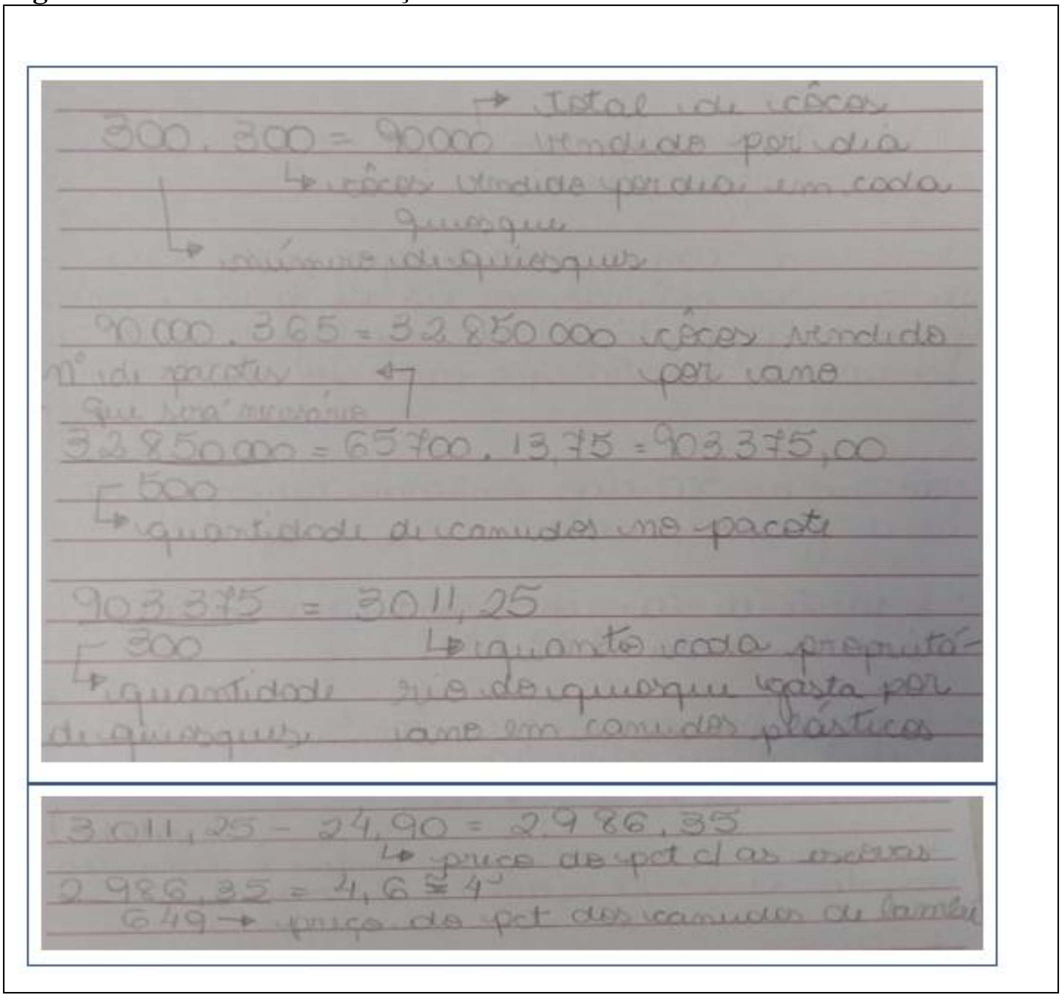
> *A situação final para esse problema é que de fato não será possível fazer a substituição dos canudos plásticos com a produção de abacate que temos no momento, para que seja realizada essa troca será necessário o plantio de mais 295.039.443.155 abacateiros, que ocuparão uma área de 1.710.000.000ha. Para efeito de comparação, esse total de hectares seria um valor próximo ao do território Russo, que possui 17.100.000km² ou 1.710.000.000ha..* (Relatório dos estudantes-professores de G2)

4.2.3 G3: O uso de Canudos de Bambu

Para substituir os canudinhos plásticos, após realizarem pesquisas em sites da internet, os estudantes-professores de G3 decidiram verificar a viabilidade de utilizar canudinhos de bambu. O problema formulado por G3 é: *Com a nova lei que proíbe o uso de canudos plásticos no Rio de Janeiro, é viável para os proprietários dos quiosques substituir os canudos plásticos por canudos de bambu?*.

Para solucionar o problema, consideraram que são vendidos 300 cocos por dia em cada um dos 300 quiosques da orla da cidade do Rio de Janeiro, do Leme ao Pontal. Além disso, fizeram cotações de preços de canudinhos de plástico, canudinhos de bambu e de escovas para a limpeza dos canudinhos de bambu. Obtiveram como preços médios: 1 pacote com 500 unidades de canudinhos plásticos custa R$13,75; 1 pacote com 100 unidades de canudinhos de bambu custa R$649,00; 1 pacote com 4 unidades de escovas para a limpeza dos canudos de bambu custa R$24,90. A partir dessas informações, G3 realizou os cálculos apresentados na Figura 14.

Figura 14: Atividade *Substituição de Canudinhos Plásticos de G3*



Fonte: Dados da pesquisa

Pelos cálculos apresentados por G3 e pelo áudio gravado durante o desenvolvimento da atividade, os estudantes-professores consideraram que são vendidos em média 90 mil cocos por dia na orla considerada, o que resulta em 32.850.000 cocos por ano. Como cada pacote de canudinhos plásticos tem 500 unidades e custa R$13,75, em um ano são gastos R$903.375,00 com canudinhos plásticos descartáveis, ou seja, um gasto médio de R$3.011,25 por quiosque.

Desse valor médio gasto por quiosque com canudos plásticos, os estudantes-professores descontaram o gasto com um pacote de escovas para limpeza e dividiram pelo preço do pacote de canudos de bambu, resultando em 4,6 pacotes, ou seja, com o dinheiro disponibilizado para a compra de canudinhos, seria possível adquirir 4 pacotes com 100 unidades de canudinhos de bambu, que são reutilizáveis, e 4 escovas para limpeza.

O grupo conclui a atividade com a interpretação dos resultados.

> *Mesmo sendo reutilizáveis, não se tem a garantia de que todos os clientes irão devolver os canudos de bambu aos comerciantes após o consumo. Mas, além de prejudicar o meio ambiente, se os quiosques continuarem a ofertar os canudinhos plásticos, podem receber uma multa de até 6 mil reais. Portanto, consideramos a viabilidade de adquirir os canudinhos de bambu em vez dos canudinhos de plástico.* (Relatório dos estudantes-professores de G3)

No Contexto de Aprendizagem, já descrevemos atividades de primeiro e segundo momento desenvolvida por todos os grupos de estudantes-professores (G1, G2, G3). As atividades descritas a seguir pertencem ao terceiro momento de familiarização, pois os estudantes-professores apresentam responsabilidade pela condução da atividade, desde a identificação da situação-problema até a obtenção do modelo e sua comunicação para a turma, com o professor intervindo somente quando necessário (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016). Cada atividade de 3º momento de familiarização dos estudantes-professores com atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas no Contexto de Aprendizagem por somente um grupo. G1 desenvolveu a atividade com tema *Conectando a cidade educação: wi-fi livre no centro da cidade*, G2 desenvolveu a atividade *Fabricação e Venda de Cookies* e G3 desenvolveu a atividade *Pé sujo de barro? Nunca mais!*.

4.3 ATIVIDADE: *CONECTANDO A CIDADE EDUCAÇÃO: WI-FI LIVRE NO CENTRO DA CIDADE*

Com base em uma matéria publicada pela prefeitura municipal de Apucarana (anexo 1), havia a intenção de reformar algumas praças e instalar nelas sistemas de *wi-fi* gratuito. Porém, isso não aconteceu, conforme afirmam os estudantes-professores de G1 (Eduardo, Maria e Roberto) durante a apresentação da atividade para a turma em uma aula da disciplina de Modelagem Matemática:

> *Eduardo: as praças foram reformadas e não houve a instalação da internet. A partir disso, tivemos a ideia de estudar essa situação.*
> [...]

Roberto: Por ser um conteúdo geralmente de interesse de jovens, o acesso à internet, pensamos em desenvolver essa atividade. Outro ponto [...] é que está presente na realidade dos estudantes, pois procuramos desenvolver em uma região da cidade que todos conhecem.

A fala de Roberto apresenta indícios de que o tema foi pensado para ser interessante também para os alunos da escola, quando fossem para o estágio (oficinas de modelagem matemática). Entendemos que esses indícios se mostram relevantes para a formação do professor, pois, como afirmam Oliveira, Campos e Silva (2009, p. 6), "uma importante ação do professor na prática da modelagem é envolver os estudantes de forma que estes se sintam motivados a realizá-la, pois é importante que assumam o processo de investigação". Assim, para os estudantes-professores deste grupo, estar conectado à internet é uma necessidade, como mostramos no Quadro 11.

Quadro 11: Trecho do texto relativo à Situação Inicial da atividade Conectando a Cidade Educação: *Wi-fi* livre no centro da cidade

Atualmente, a população possui a necessidade de sempre estar conectada à internet através de um smartphone ou um computador portátil, utilizando assim para bate papo com amigos, trabalho, estudo. Porém alguns planos de telefonia deixam a desejar nas conexões móveis (3G, 4G) por ser uma rede instável. *Podemos observar que o Brasil é o país que têm o maior número de aparelhos conectados na internet na América Latina (Fonte: Folha de São Paulo), ressaltando assim a necessidade de o brasileiro estar sempre conectado.*

Fonte: Dados da pesquisa

Por se tratar de uma atividade de Modelagem Matemática do 3º momento de familiarização dos estudantes com atividades dessa natureza, as informações e os dados necessários para dar início à atividade são procuradas pelos próprios estudantes. Eles pesquisaram como deveria funcionar um sistema de internet *wi-fi* em um *site*[15] especializado no assunto e obtiveram algumas informações, conforme ilustramos no Quadro 12.

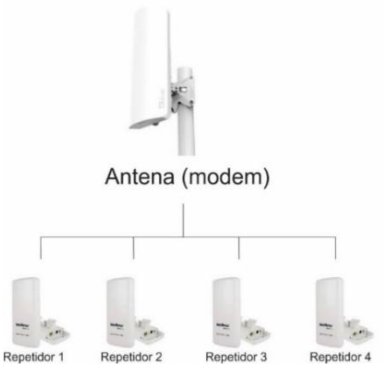
Utilizaram como dados para desenvolver a atividade um mapa do centro comercial de Apucarana (Figura 15), com escala de 1,5cm:100m, disponível no *site*[16] do Iddeplan Apucarana-PR. Desse modo, poderiam definir a área de abrangência do sinal de *wi-fi*.

[15] www.hardware.com.br . Acesso em: 13 jun., 2019.
[16] APUCARANA, Prefeitura Municipal. IDDEPLAN: Plano Preliminar. Disponível em: http://apucarana.pr.gov.br/transparencia/?page_id=156. Acesso em: 13 jun., 2019.

Quadro 12: Trecho do texto relativo à Inteiração na atividade Conectando a Cidade Educação: *Wi-fi* livre no centro da cidade

Segundo o Site hardware.com uma antena chamada modem é responsável por receber o sinal a operadora e transmitir sinal de internet via *wi-fi* em um raio de até 100 metros. Um outro aparelho a ser usado é o repetidor de *wi-fi*, este tem que ficar posicionado dentro do raio de alcance do modem, ele recebe sinal e prolonga o alcance para um raio de 50 metros, na antena (*modem*) de internet é possível conectar nesta rede até 4 repetidores do sinal *wi-fi*, como elaborado no diagrama abaixo.

Diagrama de distribuição de Internet.



Fonte:Hardware.com - Ilustração: os autores

O modem e o repetidor possuem diferentes alcances de sinais de internet, como será demonstrado no gráfico abaixo. Lembrando que a configuração do modem e do repetidor permite um alcance de aproximadamente 100 e 50 metros respectivamente.

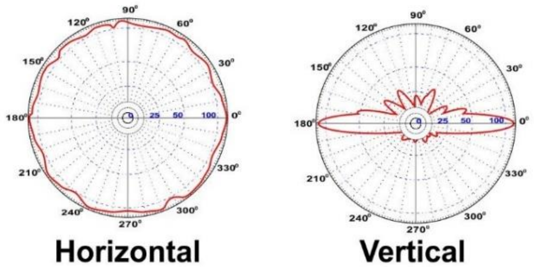
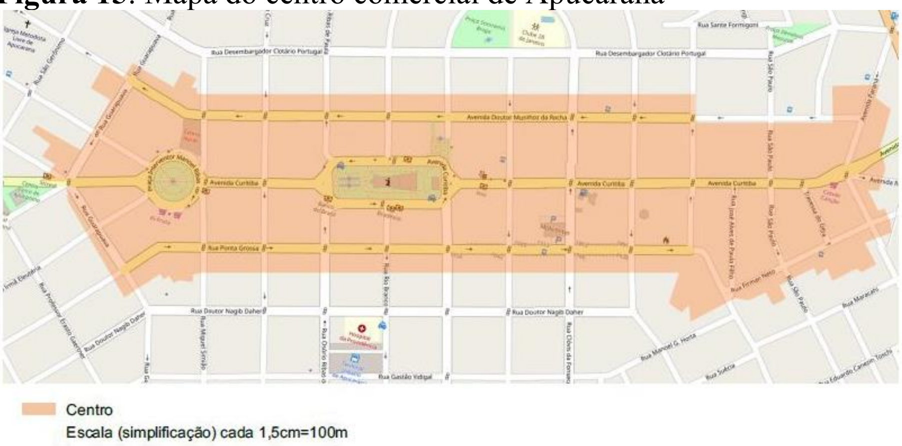


Gráfico de alcance de um modem wi-fi.

Fonte: Hardware.com Ilustração: Os autores

Fonte: Relatório dos estudantes-professores

Figura 15: Mapa do centro comercial de Apucarana



Fonte: Dados da pesquisa

Além disso, fizeram uma cotação[17] dos custos de equipamentos necessários (Figura 16). Optaram por arredondar os valores, obtendo que o custo de um *modem* é R$345,00 e de um repetidor é R$347,00. Já o valor mensal da internet no plano COPEL fibra 150mb é de R$199,90 (Relatório dos estudantes-professores).

Figura 16: Equipamentos cotados

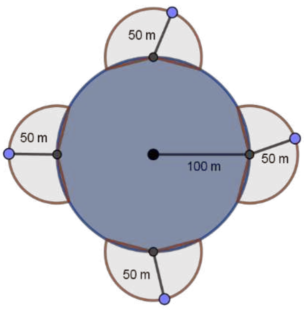
Fonte: Relatório dos estudantes-professores

Com base nas informações da reportagem *Entendendo a questão do alcance em redes wireless*, encontrada no *site hardware.com.br*, os estudantes-professores de G1 elaboraram as seguintes hipóteses, como apresentadas no relatório dos estudantes-professores:

> *Hipótese 1: O alcance de um modem é uma área circular com raio de 100 metros e o repetidor tem uma área parecida com um setor circular de raio 50 metros;*
> *Hipótese 2: A quantidade necessária de equipamentos e como eles estão dispostos é variável.*

Uma informação importante da reportagem citada anteriormente e levada em consideração por G1 é que em um roteador podem ser instalados até 4 repetidores de acordo com o alcance máximo de cada dispositivo, como mostra a Figura 17.

Figura 17: Alcance do *modem* e do repetidor



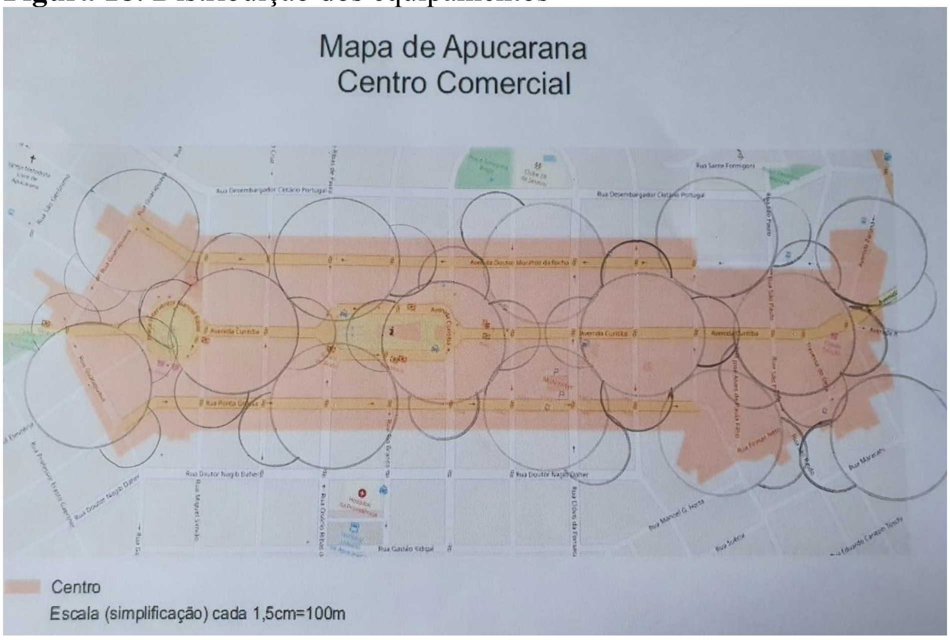
Fonte: Dados da pesquisa

[17] Os estudantes-professores deste grupo buscaram pelos preços dos equipamentos no site “mercado livre” e do plano de internet no site da COPEL TELECOM.

Por isso, considerando que esses roteadores e repetidores sejam instalados apenas nas ruas da região central da cidade, a intenção é construir no mapa uma possível distribuição dos equipamentos para o melhor alcance do sinal de internet no centro de Apucarana. Desse modo, o problema formulado por G1 consiste em *Qual a melhor forma de instalar os equipamentos no centro de Apucarana para que alcance a maior área com menor custo por metro quadrado?* (Relatório dos estudantes-professores).

Para isso, construíram círculos e setores circulares sobre o mapa do centro da cidade para fazer uma possível distribuição dos equipamentos (Figura 18).

Figura 18: Distribuição dos equipamentos



Fonte: Relatório dos estudantes-professores

Foi necessário construir os círculos relativos a 14 *modens* e a 28 repetidores para obter um alcance aproximado da área desejada. G1 construiu a seguinte tabela (Figura 19), mostrando que o total gasto seria de R$17.344,60, nesta praça.

Figura 19: Custo do sistema de internet

Tabela 1: Custo de implantação do sistema de internet

Produto	Valor	Internet	Quantidade	Valor Final
Modem	R$ 345,00	R$ 199,90	14	R$ 7.628,60
Repetidor	R$ 347,00	R$ 0,00	28	R$ 9.716,00
Total	R$ 692,00		42	R$ 17.344,60

Fonte: Copel Telecom – Intelbrás

Fonte: Dados da pesquisa

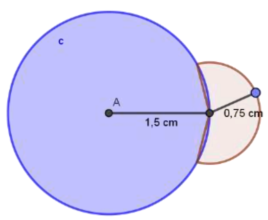
Ao apresentarem esta tabela para a turma, G1 foi questionado sobre o motivo de terem colocado a quantidade de 14 mensalidades de internet. A estudante Maria respondeu de acordo com a inteiração[18] que fizeram da atividade.

> *Maria: Modem é um aparelho que codifica o sinal da tecnologia banda larga. Sem o modem não é possível conectar-se à internet, pois ele é responsável em captar o sinal da tecnologia banda larga e transformá-lo para transmitir dados. Assim, cada modem fica responsável por transmitir os dados de apenas um plano de internet. Por isso, como são necessários 14 modens, são cobrados também 14 planos de internet.*

Ao analisar esse caso, puderam constatar que o custo de instalação e funcionamento no primeiro mês é de R$ 17.344,60 e após essa instalação o custo fixo mensal seria de R$ 2.798,60, relativo a mensalidades de internet (relatório dos estudantes-professores).

Tendo o custo para o caso estudado por eles, calcularam qual seria o alcance de um *modem wi-fi* na escala do mapa (Quadro 13).

Quadro 13: Alcance *modem wi-fi* no mapa

	$\acute{A}rea\ do\ Circulo = \pi \cdot r^2$ $A = \pi \cdot (1{,}5)^2$ $A = \pi \cdot 2{,}25\ cm^2$ $A \cong 7{,}07\ cm^2$

Fonte: Dados da pesquisa

Utilizaram o conceito de razão e proporção, escalas, proporção entre áreas para encontrar o alcance do *modem* e obtiveram que este apresentará um alcance de aproximadamente 31.000 m^2. Para o alcance dos repetidores calcularam a área do setor circular (com raio de 0,75 cm, conforme imagem no Quadro 13) e obtiveram que ele representa uma área de aproximadamente 4.500m^2. Calcularam, depois, a área total de abrangência do sistema de internet. Estes cálculos são apresentados na Figura 20.

---

[18] Os estudantes-professores de G1 referenciam no relatório dois sites para essa informação: http://assinantes.uol.com.br/como-acessar-a-internet/o-que-e-modem.html e https://melhorplano.net/blog/modem-de-internet/. Acesso em: 13 jun., 2019.

Figura 20: Cálculo da área de abrangência do sistema

Àrea A_m de alcance circular de 1 *modem wi-fi* de raio de 100m

$$A_m = \pi \cdot r^2$$

$$A_m = \pi \cdot (100)^2 \rightarrow A_m = 10000\pi$$

$$A_m \cong 31415{,}93\ m^2$$

Àrea de alcance de 1 repetidor: área *As* de um setor circular de raio 50 m e ângulo 209º

Ângulo Central	*Área*
360º	$\pi \cdot 50^2$
209º	*As*

$$\frac{360°}{209°} = \frac{\pi \cdot 2500}{As}$$

$$As \cong 4559{,}67\ m^2$$

Área total de alcance de 14 modens (A_{mt})

$$A_{mt} = 31\,417{,}93 \text{ x } 14$$

$$A_{mt} \cong 439\,851{,}02\ m^2$$

Área total de alcance de 28 repetidores (A_{st})

$$A_{st} = 4\,559{,}67 \text{ x } 28$$

$$A_{st} \cong 127\,679{,}76\ m^2$$

Área total de alcance de internet *wi-fi*

$$A_{Total} = A_{mt} + A_{st}$$

$$A_{Total} = 439\,851{,}02 + 127\,670{,}76$$

$$A_{Total} \cong 567\,521{,}78\ m^2$$

Fonte: Dados da pesquisa

A partir desses cálculos, G1 pode encontrar um modelo matemático para calcular o custo do investimento por metro quadrado em função da quantidade de modens e roteadores (Figura 21).

Figura 21: Modelo Matemático construído por G1

Calculando o custo por metro quadrado

$$Custo_{\,m^2} = \frac{Custo_{Total}}{A_{Total}}$$

$$Custo_{\,m^2} = \frac{17344{,}60}{567521{,}78}$$

$$Custo_{\,m^2} = R\$0{,}03/m^2$$

Generalizando para outras regiões da cidade – modelo matemático

$$Custo_{m^2} = \frac{(Custo\ Modem + Plano\ Internet)x + (Custo\ Repetidor)y}{(A_m)x + (A_s)y}$$

$$Custo_{R\$/m^2} = \frac{(345+199{,}90)x + 347y}{(31417{,}93)x + (4559{,}67)y}$$

em que x é a quantidade de modens
y é a quantidade de repetidores

Fonte: Dados da pesquisa

Para terminar a atividade, concluíram, no relatório que:

> *A quantidade de modem e de roteadores nos auxiliaram a definir o custo de instalação. Assim, com o conceito de área, foi possível relacionar a área de alcance de um roteador.* [...] *Esse é um modelo satisfatório, podendo apresentar um melhor resultado utilizando um software.*

Na discussão com a turma na disciplina de Modelagem Matemática, o estudante Roberto ponderou:

> *Roberto: Como o objetivo nesta atividade era encontrar a melhor distribuição dos equipamentos de internet que proporcionasse a maior cobertura com o menor custo,*

> *esse trabalho poderia ser comparado ao realizado por empresas que participam de uma licitação, neste caso, para implantar a internet wi-fi no centro da cidade.*

Tanto a conclusão da atividade no relatório como a apresentação durante a aula caracterizam a fase de *interpretação de resultados e validação* (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016), pois os estudantes apresentam indícios de que avaliaram os resultados de acordo com o problema definido por eles.

4.4 ATIVIDADE: *FABRICAÇÃO E VENDA DE COOKIES*

O tema para essa atividade é proveniente de um costume das integrantes do grupo 2: comprar e consumir cookies na universidade. A ideia inicial era encontrar o que era mais vantajoso financeiramente: produzir cookies em casa ou comprá-los na universidade. Porém, as estudantes-professoras viram na atividade uma possibilidade de empreendedorismo e decidiram investigar qual deveria ser a produção de cookies para que pudessem deixar seus trabalhos remunerados e passassem a fabricar e vender cookies.

O grupo de estudantes-professoras (Ana, Isabela, Jane) desenvolveu essa atividade durante a disciplina de Modelagem Matemática, como uma atividade de 3º momento de familiarização com atividades dessa natureza, ou seja, a situação-problema foi definida por elas, bem como o problema a ser solucionado, as informações importantes e os dados necessários para dar início à atividade foram procurados pelas próprias estudantes-professoras.

Após definirem o problema, o grupo realizou uma pesquisa sobre as variadas receitas de cookies por intermédio da plataforma digital *YouTube*. Baseado na quantidade de ingredientes juntamente com o orçamento, tempo de forno e de sua produção, optou pela receita do canal *Mania de Formiguinha*, comprou os ingredientes e fez os cookies para testar a receita, o rendimento, o tempo total, o forno, como mostra a Figura 22.

Para explicitar o desenvolvimento da atividade, apresentamos, na Figura 23, trechos e imagens do relatório da atividade entregue pelas estudantes-professoras. Para fazer a receita, as estudantes-professoras utilizaram ingredientes que tinham em casa. Depois, foram a um supermercado da região central da cidade onde fica o câmpus da universidade, para pesquisar os preços desses produtos.

Figura 22: Informações utilizadas na atividade *Fabricação e Venda de Cookies* Desenvolvida pelo grupo G2 na disciplina de Modelagem Matemática

Ingredientes

- 100 g de margarina sem sal em temperatura ambiente;
- 270 g de farinha de trigo peneirada;
- 50g de açúcar cristal com 50g de açúcar refinada;
- 2 ovos
- 120g de chocolate ao leite picado;
- 1 colher de café de fermento com 1 colher de café de bicarbonato;
- Brigadeiro para rechear (1 caixinha de leite condensado e 1 caixinha de creme de leite).

Modo de preparo: montagem
Enrolar os brigadeiros em bolinhas de 15 gramas cada, separar a massa em bolinhas de 30g cada, em seguida colocar as bolinhas de brigadeiro dentro da massa, assar por 15 minutos (min) à temperatura de 230º C.

Modo de preparo: massa
Em uma batedeira, bater a manteiga e o açúcar até que vire um creme, adicionar um ovo e bater até que se misture por completo, em seguida a adicione o segundo ovo e bata novamente até que se misture. Adicione metade da farinha e bata até obter uma massa homogênea, depois coloque o restante da farinha e bata novamente. Colocar o fermento e o bicarbonato e bater apenas para misturar. Adicionar o chocolate picado e mexer com uma espátula. Deixar a massa descansar por 30 minutos.

Modo de preparo: recheio
Em uma panela misture 1 caixinha de leite condensado e 1 caixinha de creme de leite, leve ao fogo, cozinhar mexendo sempre, até obter consistência de brigadeiro de enrolar (ponto Napê).

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 23: Desenvolvimento da atividade *Fabricação e Venda de Cookies* por G2

Antes de iniciar qualquer cálculo fizemos o teste da receita para verificar seu rendimento. Ela rendeu um total de 22 cookies, como no forno cabiam duas formas que comportaram 12 cookies cada uma, foi necessário apenas uma única assada.
Após o teste, atentamos para o valor da hora de serviço de cada uma. E, com uma pesquisa e orientação da professora ficou decidido que para o mês de trabalho seria considerado 4,5 semanas. Assim multiplicamos o total de horas trabalhadas em uma semana por 4,5 e dividimos pelo salário correspondente a cada uma.

Nome	Tempo por mês (h)	Salario mensal (R$)	Valor da hora trabalhada (R$)
Jane	39,74	400,00	10,07
Isabela	109,74	800,00	7,29
Ana	179,24	1000,00	5,58

Para calcular o valor da hora trabalhada de cada integrante, foi utilizada a média aritmética simples, obtendo o valor de R$ 7,65 para cada hora.

$$\text{Valor da hora} = \frac{10{,}07 + 7{,}29 + 5{,}58}{3} = 7{,}65$$

Foi calculado também o tempo de preparo de uma receita: 15min de preparo da massa; 30 min para descanso da massa; 8 min para enrolar os cookies; 15 min para assar os cookies; 3 min para embalar os cookies. Perfazendo assim um total de 1h11min ou 1,18 horas de trabalho para preparar uma receita.

Fonte: Dados da pesquisa

Com os preços e as quantidades necessárias para fazer os cookies, puderam calcular, como mostrado na Figura 24, o custo[19] de produção de cada receita. Para calcular a quantidade de gás, G2 considerou o consumo do forno e dos queimadores do fogão, de acordo com a empresa fabricante do eletrodoméstico. A embalagem para cada cookie custaria R$0,10, ou seja, R$2,20 por receita, segundo orçamento de uma copiadora da região. Para finalizar, as estudantes-professoras calcularam o valor do tempo gasto por uma pessoa para fazer os cookies, com base nos cálculos apresentados na Figura 24. Desse modo, concluíram que o custo total para produção de uma receita era de R$ 16,49.

Figura 24: Cálculos do custo para fazer uma receita

PRODUTO	MARCA	QUANTIDADE	PREÇO
Margarina		500g	3,79
Farinha de trigo		5 kg	11,49
Açúcar cristal		5 kg	9,98
Açúcar refinada		5 kg	12,99
Ovo		30 uni	7,89
Chocolate ao leite		1,050 kg	19,98
Fermento químico		100g	2,18
Bicarbonato		30g	1,38
Leite condensado		395g	3,89
Creme de leite		200g	2,59
Gás		13 kg	75,00

GÁS (PESO KG)	
Tempo (min)	Peso (kg)
60	0,166
15	p
p = 0,0415	

GÁS	
Valor (R$)	Peso (kg)
75,00	13
z	0,0415
z = 0,24	

GÁS (PESO KG)	
Tempo (min)	Peso (kg)
60	0,105
15	p
p = 0,02625	

GÁS	
Valor (R$)	Peso (kg)
75,00	13
z	0,02625
z = 0,15	

FARINHA	
Valor (R$)	Peso (g)
11,49	5000
z	270
Z = 0,62	

CHOCOLATE	
Valor (R$)	Peso (g)
19,98	1050
z	120
Z = 2,28	

FERMENTO	
Valor (R$)	Peso (g)
2,18	100
z	5
z = 0,11	

AÇÚCAR REFINADO	
Valor (R$)	Peso (g)
12,99	5000
z	50
z = 0,13	

MARGARINA	
Valor (R$)	Peso (g)
3,79	500
z	100
z = 0,76	

AÇÚCAR CRISTAL	
Valor (R$)	Peso (g)
9,98	5000
z	50
z = 0,10	

BICARBONATO	
Valor (R$)	Peso (g)
1,38	30
z	5
Z = 0,07	

RECHEIO	
Valor (R$)	Peso (g)
6,48	357
z	15
Z = 0,27	

OVO	
Valor (R$)	Peso (g)
7,89	30
z	2
Z = 0,53	

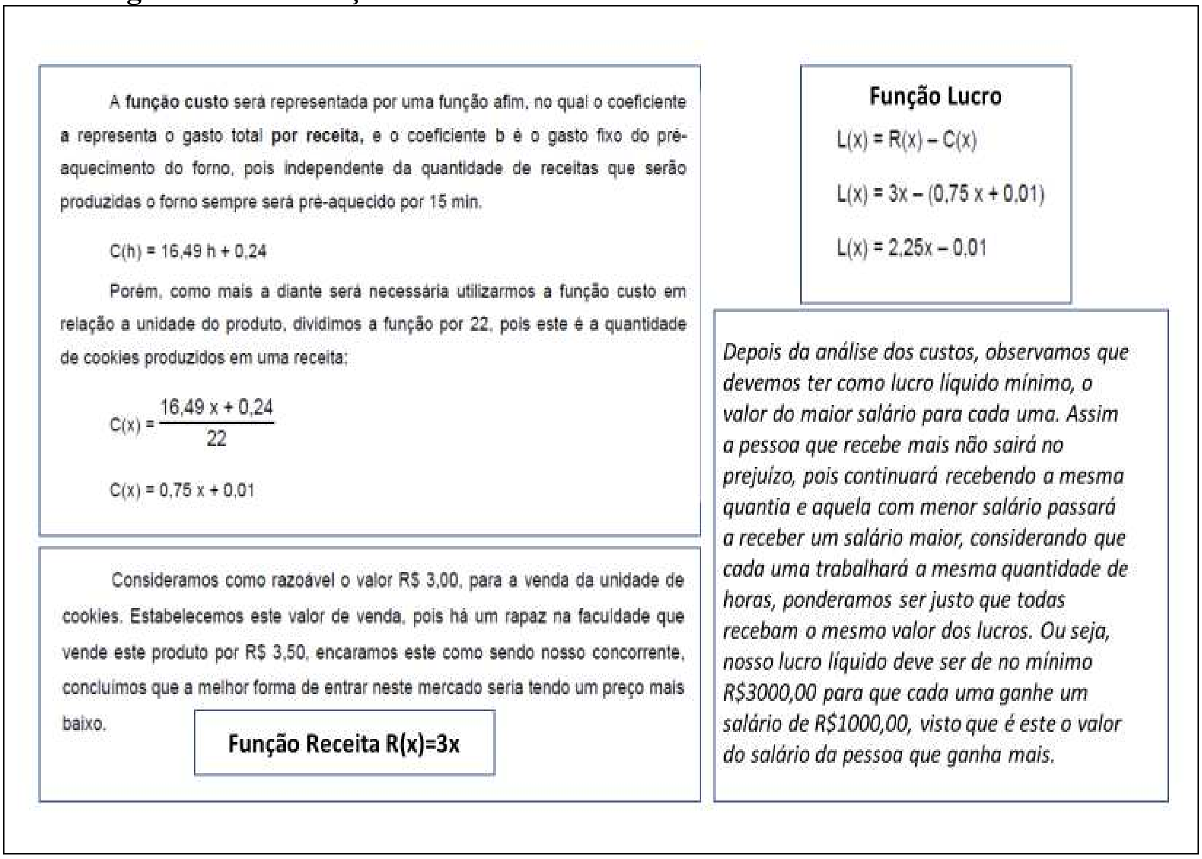
*1,18h (tempo para fazer uma receita) * 7,65 (valor médio da nossa hora) = 9,03*

Fonte: Dados da pesquisa

Como o problema consiste em estimar qual deve ser a produção de cookies para que as estudantes-professoras pudessem deixar seus empregos e passar a fabricar e vender cookies, construíram modelos matemáticos para o custo, a receita e o lucro para que, a partir da quantidade de cookies produzidos e vendidos, pudessem calcular o lucro da venda, como apresentamos na Figura 25.

[19] Esse custo foi calculado com base nos preços dos produtos em 11 de junho de 2019 pesquisados neste supermercado em questão.

Figura 25: Construção dos modelos matemáticos



A **função custo** será representada por uma função afim, no qual o coeficiente **a** representa o gasto total **por receita**, e o coeficiente **b** é o gasto fixo do pré-aquecimento do forno, pois independente da quantidade de receitas que serão produzidas o forno sempre será pré-aquecido por 15 min.

C(h) = 16,49 h + 0,24

Porém, como mais a diante será necessária utilizarmos a função custo em relação a unidade do produto, dividimos a função por 22, pois este é a quantidade de cookies produzidos em uma receita:

$$C(x) = \frac{16{,}49\,x + 0{,}24}{22}$$

C(x) = 0,75 x + 0,01

Consideramos como razoável o valor R$ 3,00, para a venda da unidade de cookies. Estabelecemos este valor de venda, pois há um rapaz na faculdade que vende este produto por R$ 3,50, encaramos este como sendo nosso concorrente, concluímos que a melhor forma de entrar neste mercado seria tendo um preço mais baixo.

Função Receita R(x)=3x

Função Lucro

L(x) = R(x) – C(x)

L(x) = 3x – (0,75 x + 0,01)

L(x) = 2,25x – 0,01

Depois da análise dos custos, observamos que devemos ter como lucro líquido mínimo, o valor do maior salário para cada uma. Assim a pessoa que recebe mais não sairá no prejuízo, pois continuará recebendo a mesma quantia e aquela com menor salário passará a receber um salário maior, considerando que cada uma trabalhará a mesma quantidade de horas, ponderamos ser justo que todas recebam o mesmo valor dos lucros. Ou seja, nosso lucro líquido deve ser de no mínimo R$3000,00 para que cada uma ganhe um salário de R$1000,00, visto que é este o valor do salário da pessoa que ganha mais.

Fonte: Dados da pesquisa

Assim, a partir dos modelos matemáticos construídos, foi possível determinar a quantidade (x) de cookies que deveriam ser produzidos e vendidos para que o lucro total fosse de R$1.000,00 para cada integrante, ou seja, o lucro da empresa deveria ser de R$3.000,00. A quantidade obtida pelo grupo foi de 1334 cookies, ao substituir 3000 no modelo que fornece o lucro.

Durante a apresentação da atividade para a turma, Eduardo levanta a seguinte discussão

> *Eduardo: Vocês sabem quantos cookies têm que vender por dia? E se a capacidade de produção suporta isso? Porque eu fiz as contas aqui e vocês teriam que vender mais de 60 cookies por dia.*
> *Ana: A gente tem que fazer 60 receitas no mês para conseguir esse lucro. Nós achamos que era muito também, mas eu perguntei para os meninos que vendem os cookies para nós e eles disseram que vendem cerca de 1500 cookies no mês só aqui na universidade.*

Isso mostra a validação dos resultados, ou seja, ao questionar um profissional da área, a atividade foi validada de acordo com a realidade da ação.

Ao final da atividade, as estudantes-professoras construíram gráficos (Figura 26) para comparar os resultados e verificar se seria vantajoso financeiramente para elas fazer a troca de serviço.

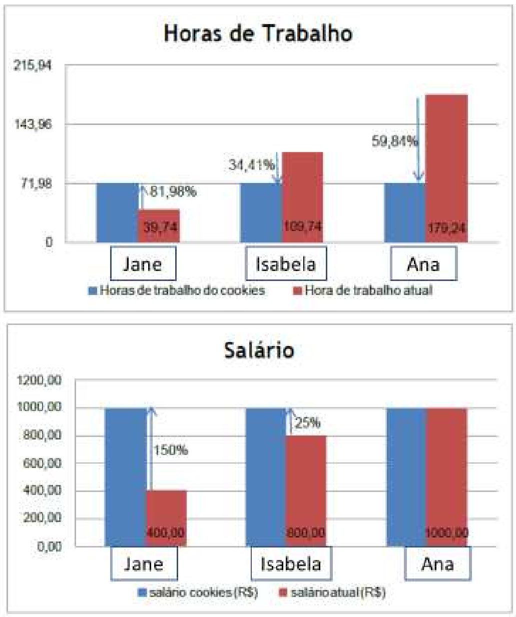
Figura 26: Gráficos para verificação dos resultados

Para saber a quantidade de horas que devemos trabalhar basta dividir o total de cookies por 22 (produção de uma receita), assim obtemos quantas receitas serão necessárias, então multiplicamos esse valor pelo tempo gasto para fazer uma receita.

13334 / 22 = 61

61 * 1,18 = 71,98 h

Obtivemos assim o total de horas que utilizaremos para produzir os cookies, cerca de 71,98h. Se trabalharmos 8 horas diárias, precisaremos trabalhar cerca de 9 dias por mês, considerando que trabalharemos apenas de segunda-feira à sexta-feira.



Fonte: Dados da pesquisa

Porém, as estudantes-professoras se esqueceram de inserir o tempo que teriam que vender os cookies, que também contaria como hora trabalhada. Talvez isso se deva ao fato de que, como elas já têm que ir para o câmpus e a venda aconteceria antes do início das aulas e durante o intervalo entre as aulas, elas não precisariam dispender mais tempo exclusivamente para o trabalho.

Um outro fator que foi desconsiderado foi a mão-de-obra calculada no custo de cada receita, R$9,03 por pessoa. Esse valor se perdeu durante o cálculo do salário de cada integrante. Como o grupo definiu que cada uma deveria lucrar R$1.000,00 com a fabricação e venda de cookies, os R$9,03 a cada 22 cookies produzidos (R$0,41 por cookie) não foram considerados como salário. No caso específico de terem que produzir e vender 1.334 cookies por mês, cada uma deveria produzir 445 cookies em média, ou seja, aproximadamente R$182,00.

Com isso, podemos pensar em construir um outro modelo matemático para calcular o salário, ***S(q)***, de cada integrante. Considerando ***q*** a quantidade de cookies que a integrante do grupo produz, temos que ***S(q)=1000+0,41.q***.

Mesmo sem terem construído este modelo para o salário e considerando o lucro de R$1.000,00 para cada integrante as estudantes-professoras concluem no relatório da atividade[20]:

> *Segundo os cálculos apresentados e os gráficos* [...] *podemos concluir que para nós três seria muito viável deixar nossos trabalhos e passar a vender cookies. Tendo em vista que, para a* [Jane] *as horas de trabalho irão aumentar por volta de 81,13%, porém teria um aumento no salário muito grande cerca de 150%. Já para* [Isabela] *o tempo de serviço irá diminuir, passando a trabalhar em média 34,41% a menos por mês e o seu salário terá um acréscimo de 25%, no que diz respeito ao salário.* [Ana] *permanecerá recebendo o mesmo valor, com tudo seu tempo de serviço diminuirá bastante, aproximadamente 59,84%.*

4.5 ATIVIDADE: *PÉ SUJO DE BARRO? NUNCA MAIS!*

A atividade intitulada *Pé sujo de barro? Nunca mais!* foi desenvolvida pelo grupo G3, como atividade de terceiro momento de familiarização e se remete ao estacionamento do câmpus da universidade, o qual possui apenas algumas pedras em meio à terra vermelha, sem demarcação de vagas e com pouca iluminação. A reclamação dos estudantes, no ano em que a atividade foi desenvolvida, era constante, tanto por ser quase impossível transitar no estacionamento em dias de chuva, como pelos furtos acontecidos naquele local.

Por isso, G3 fez uma pesquisa para saber quais meios de transporte eram utilizados pelos estudantes do período noturno para irem à universidade e quais eram as sugestões de melhorias que eles tinham para fazer, como apresentamos na Figura 27.

Além dos dados obtidos com a pesquisa sobre o estacionamento, G3 utilizou outros dados e informações e organizou a atividade de acordo com as fases da modelagem matemática propostas por Almeida, Silva e Vertuan (2016), como pode ser conferido na Figura 29.

O maior número de respostas se concentrou em van (262), carro (176) e ônibus (141), o que mostra que o estacionamento é utilizado pela maior parte dos estudantes do turno da noite.

De acordo com o relatório da atividade de G3, os maiores problemas destacados pelos participantes da pesquisa foram: a pouca iluminação, a falta de segurança, nos dias de chuva a formação de lamaçal devido ao barro, buracos, mal odor, congestionamento de veículos e falta de uma demarcação de vagas.

---

[20] Os nomes reais das estudantes-professoras foram substituídos pelos nomes fictícios utilizados neste relatório de pesquisa, tanto nos excertos como nos gráficos apresentados no relatório da atividade entregue pelas estudantes-professoras na disciplina de Modelagem Matemática.

Figura 27: Pesquisa sobre o estacionamento do câmpus

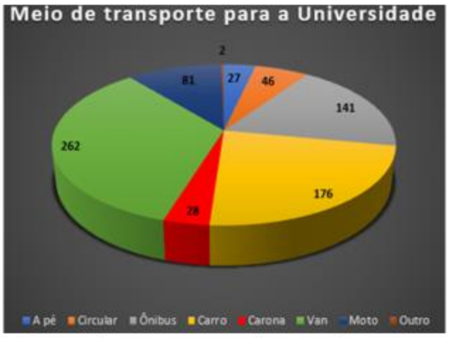
PESQUISA DE MODELAGEM MATEMÁTICA – 4º ANO

1) COMO VOCÊ VEM PARA A UNIVERSIDADE?
( )A PÉ ( )DE CIRCULAR ( )DE ÔNIBUS ( )DE CARRO
( )DE CARONA ( )DE VAN ( )DE MOTO
( ) OUTRO. QUAL?________________

2) ESSE MEIO DE TRANSPORTE FICA ESTACIONADO NAS DEPENDENCIAS DA UNIVERSIDADE?
( ) SIM ( ) NÃO

3) EM CASO AFIRMATIVO À QUESTÃO ANTERIOR, QUAL ESTACIONAMENTO É UTILIZADO?
( ) EM FRENTE AO RESTAURANTE DO CHARLIE
( ) EM FRENTE A ENTRADA PRINCIPAL DA UNIVERSIDADE
( ) NOS FUNDOS DA UNIVERSIDADE, AO LADO DO AUDITÓRIO GRALHA AZUL

4) VOCÊ TEM ALGUMA SUGESTÃO PARA A MELHORIA DAS CONDIÇÕES DOS ESTACIONAMENTOS?



Os questionários foram respondidos por 762 alunos no período noturno nos dias 17 e 18 de junho de 2019.

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 28: Inteiração e Matematização da atividade *Pé sujo de barro? Nunca mais!*

Inteiração

Em busca de dados entramos em contato com uma empresa para asfaltar o estacionamento. A organização realizaria a obra pelo valor de R$ 28 por m² com 4 cm de espessura, acima de 1000m².
O poste de iluminação (Braço + luminária + lâmpada) com três metros de altura com o menor preço encontrado foi de R$ 796,76
A lâmpada Mista para postes de iluminação com potência de 160w foi encontrada no valor de R$ 40,11.
E a lata de tinta para demarcação de vagas é possível adquirir no valor de R$ 280,80.

Matematização

Para efetuar os cálculos decidimos realizar a separação do estacionamento em três partes: em frente ao restaurante do Charlie, Em frente a entrada principal da universidade e dos fundos da universidade.
Criamos variáveis para facilitar a realização dos cálculos: o valor do metro quadrado do asfalto chamamos de a, o valor de cada lâmpada de l, o valor da lata de tinta de t e o valor do poste de p.
Serão considerados os seguintes dados para a realização da demarcação das vagas: para carros 2,50 m de largura e 5,50 m de comprimento, para vans 2,80 m de largura e 7,60 m de comprimento, para micro-ônibus terão 2,80 m de largura e 8,50 m de comprimento e para ônibus 2,80 m de largura e 14,60 m de comprimento.

Fonte: Dados da pesquisa

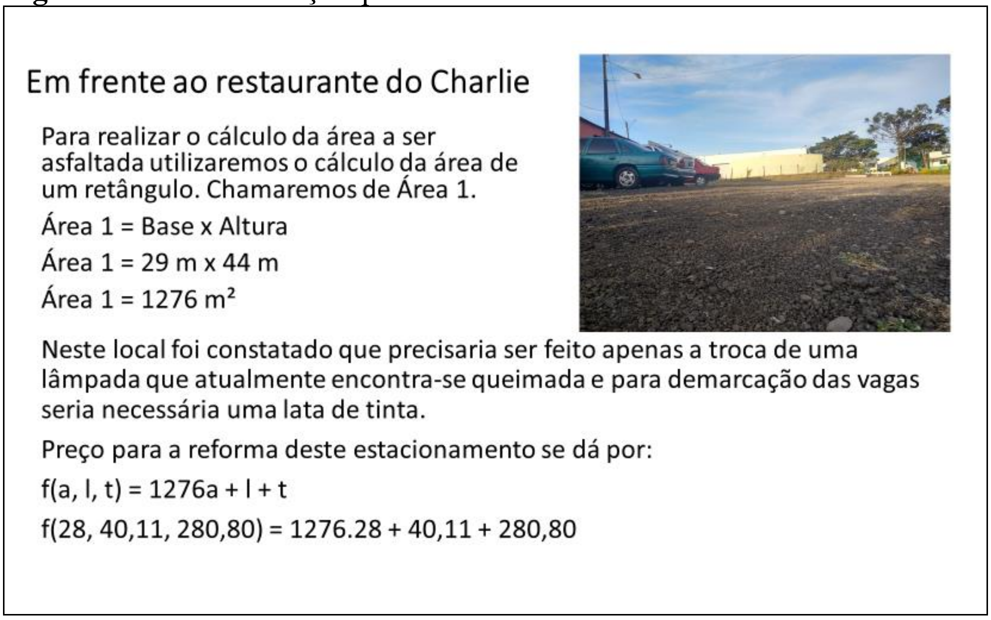
Depois de analisar as respostas, chegaram à conclusão de que deveriam ser realizadas três ações: asfaltamento, implantação de postes de iluminação, demarcação de vagas.

Assim, desenvolveram a atividade de modelagem matemática respondendo ao problema: *Qual seria o gasto mínimo com a reforma dos estacionamentos realizando essas três ações?*.

Na fase *Resolução*, calcularam a área a ser asfaltada dividindo-a em quatro áreas (Área 1, Área 2, Área 3 e Área 4), estimaram a quantidade de postes e lâmpadas que teriam que colocar em cada uma dessas áreas e a quantidade de tinta necessária para a demarcação de vagas.

Na Figura 29 apresentamos a primeira parte da *Resolução*, em que foi calculado o custo para a reforma do estacionamento em frente ao restaurante do Charlie. De acordo com a pesquisa realizada por G3, 50 carros estacionam nesta área.

Figura 29: Fase *Resolução* parte 1



Fonte: Dados da pesquisa

Para determinar o custo para a reforma, escreveram um modelo que depende do preço do asfalto, da instalação de postes ou lâmpadas e da tinta para demarcar as vagas. Substituindo os valores para essas ações, chegaram a um custo de R$36.048,91 para reformar o estacionamento em frente ao restaurante do Charlie.

Na Figura 30, apresentamos a segunda parte da *Resolução*, em que foi calculado o custo para a reforma do estacionamento em frente à entrada principal do câmpus, de forma semelhante ao cálculo anterior, obtendo R$ 50.341,02.

Figura 30: Fase *Resolução* parte 2

Em frente a entrada principal da universidade

Para realizar o cálculo da área a ser asfaltada utilizaremos o cálculo da área de um retângulo. Chamaremos de Área 2.

Área 2 = Base x Altura

Área 2 = 35 m x 51 m

Área 2 = 1785 m²

Neste local foi constatado que precisaria ser feito a troca de duas lâmpadas que atualmente encontram-se queimadas e para demarcação das vagas seria necessária uma lata de tinta.

Preço para a reforma deste estacionamento se dá por:

g(a, l, t) = 1785a + 2l + t

g(28, 40,11, 280,80) = 1785.28 + 2.40,11 + 280,80

g(28, 40,11, 280,80) = 50.341,02

Fonte: Dados da pesquisa

A terceira parte da *Resolução*, cálculo do custo para a reforma do estacionamento dos fundos, é apresentada na Figura 31. A área a ser reformada também foi considerada como retangular, na qual existe um auditório que não receberá a reforma. Diferentemente das outras áreas, nessa também devem ser incluídos 4 postes, que foram inseridos na função, chegando a um custo total de R$187.447,70 para a reforma do estacionamento dos fundos.

Figura 31: Fase *Resolução* parte 3

Fundos

Para realizar o cálculo da área a ser asfaltada utilizaremos o cálculo da área de um retângulo e retiraremos a área do auditório Gralha azul. Chamaremos de Área 3.

Área 3 = (Base x Altura) – Área do Gralha Azul

Área 3 = 87 m x 88 m – (18 m x 63 m)

Área 3 = 7656 m² - 1134 m²

Área 3 = 6522 m²

Neste local foi constatado que precisaria ser feito a troca de seis lâmpadas que atualmente encontram-se queimadas, precisaria também instalar mais quatro postes de luz, para que o estacionamento fique mais iluminado e para demarcação das vagas seria necessárias cinco latas de tinta.

Preço para a reforma deste estacionamento se dá por:

h(a, l, p, t) = 6522a + 6l + 4p + 5t

h(28, 40,11, 796,76, 280,80) = 6522.28 + 6.40,11 + 4.796,76 + 5.280,80

h(28, 40,11, 796,76, 280,80) = 187.447,70

Fonte: Dados da pesquisa

Na Figura 31, apresentamos a quarta parte da *Resolução*, em que os estudantes-professores calcularam o custo para a reforma da curva, não sendo necessária melhoria na iluminação e demarcação de vagas, chegando a um valor de R$ 8.648,36.

Figura 32: Fase *Resolução* parte 4

Curva

O acesso da entrada principal da universidade ao estacionamento dos fundos se dá por meio de uma curva, a qual também precisa de melhorias, portanto, para calcular sua área, que chamaremos de área 4, teremos que considerar duas parábolas, uma maior e outra menor, e calcular a área formada entre elas.

Através das medições, chegamos nas seguintes funções das parábolas:

Parábola maior: $j(x) = -0{,}04x^2 + 1{,}96x$

Parábola menor: $k(x) = -0{,}05x^2 + 2{,}43x - 10{,}95$

Agora, para calcular a área 4 basta resolver as seguintes integrais, e subtrair seus resultados:

$$\int_0^{51} -0{,}04x^2 + 1{,}96x\,dx$$

$$\int_5^{46} -0{,}05x^2 + 2{,}43x - 10{,}95\,dx$$

Área 4 = 780,30 – 471,43

Área 4 = = 308,87 m²

Preço para a reforma dessa área se dá por:

$i(a) = 308{,}87a$

$i(28) = 8.648{,}36$

Fonte: Dados da pesquisa

G3 finalizou a atividade concluindo, em seu relatório que o valor total da reforma do estacionamento seria R$ 282.485,99 e com a seguinte interpretação dos resultados:

> *Embora o valor total para a reforma do estacionamento seja considerável, temos que levar em conta que a educação superior não tem recebido investimentos suficientes para manter atividades que há alguns anos era possível, como por exemplo o envio de verbas para o Restaurante Universitário.*
>
> *A reforma do estacionamento do campus da universidade seria uma conquista para os estudantes que o utilizam. A questão é que a iluminação, requisito mais pedido nas pesquisas, garantiria um pouco mais de segurança. E em alguns casos se trata apenas de trocar algumas lâmpadas. O que não seria um gasto muito alto, e seria uma ótima maneira de iniciar este projeto, mesmo sabendo que o caminho para seu término seja longo.*

5 O CONTEXTO DE ENSINO

A segunda parte do programa de formação, *ensinar usando a modelagem matemática*, refere-se ao *Contexto de Ensino.* Esse contexto é relativo à disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática com Estágio Supervisionado no Ensino Médio e à segunda parte do estágio realizado no Ensino Médio pelos estudantes do 4º ano do curso de Licenciatura em Matemática, no 2º semestre do ano letivo de 2019. Estes estudantes haviam cursado a disciplina de Modelagem Matemática no 1º semestre daquele ano letivo. Por se tratar do Contexto de Ensino, os estudantes do curso de Licenciatura deixam de ser apenas estudantes e começam a ser também professores, por isso são denominados por estudantes-professores.

A disciplina de Metodologia e Prática de Ensino de Matemática com Estágio Supervisionado no Ensino Médio contava com seis aulas semanais, era anual, e com um total de 216 horas/aulas. As aulas que são incluídas nesta pesquisa referem-se às orientações para o estágio, à estruturação dos planos de aula, à realização das oficinas de modelagem matemática com os alunos do Ensino Médio, bem como às rodas de conversa após a realização dessas oficinas e a elaboração do relatório de estágio. Assim, podemos resumir que esta disciplina foi contexto da nossa pesquisa no 2º semestre do ano letivo de 2019.

As oficinas de modelagem matemática foram realizadas em uma escola pública da região central de Apucarana, como parte do estágio supervisionado, e aconteceram em duas manhãs seguidas (segunda e terça) do mês de setembro, totalizando dez horas/aula.

Os estudantes-professores mantiveram os mesmos grupos formados durante a disciplina de Modelagem Matemática para a realização das oficinas com as turmas de 2ª série do Ensino Médio.

Cada grupo de estudantes-professores recebeu uma câmera com a finalidade de gravar a aula. Porém, como a sala de aula é grande e com muitos alunos, não foi possível focar em cada grupo de alunos da escola que apresentava dúvidas e também nem todos os atendimentos dos estudantes-professores aos alunos da escola puderam ser registrados no vídeo.

Para o âmbito desta pesquisa, visando buscar e caracterizar indícios de autenticidade nas atividades de modelagem matemática, vamos considerar três atividades de modelagem matemática desenvolvidas no Contexto de Ensino: *Conectando a Cidade Educação: Wi-fi livre no centro da cidade*, *Fabricação e venda de cookies* e *Pé sujo de barro? Nunca mais!*.

5.1 *Conectando a Cidade Educação: Wi-Fi Livre no Centro da Cidade - No Contexto de Ensino*

A atividade *Conectando a Cidade Educação: Wi-fi livre no centro da cidade,* desenvolvida pelo grupo 1 (G1) na disciplina de Modelagem Matemática, foi escolhida por este mesmo grupo para dar início ao estágio na 2ª série B.

Primeiramente os estudantes-professores se apresentaram e pediram que os alunos da escola formassem grupos[21] de no máximo cinco integrantes e deram início à atividade. Roberto explicou a situação apresentando a reportagem a respeito da instalação de internet *wi-fi* em praças públicas (Anexo A) e as informações relativas à situação contidas no material de apoio que foi entregue aos grupos de alunos (GA), conforme apresentado na Figura 33. Além disso, entregaram um mapa do centro comercial de Apucarana, o mesmo utilizado na atividade desenvolvida na disciplina de Modelagem Matemática (no Contexto de Aprendizagem) apresentado na Figura 14, um compasso, uma régua e um transferidor para cada grupo. Alunos da escola começaram a manipulá-los. Mesmo em contato com o material de apoio e o mapa, os alunos da escola não estavam entendendo o que fazer e, pela gravação do vídeo da aula, é possível ver que solicitavam a ajuda dos estudantes-professores. Estes, a fim de auxiliar os alunos na resolução, foram à frente da sala e explicaram para toda a turma.

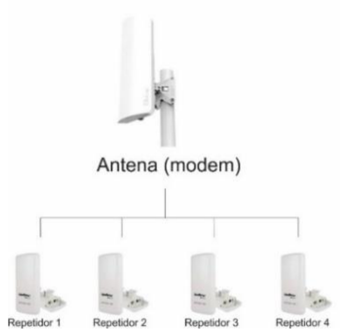
> *Maria: Vocês receberam o mapa central de Apucarana e está demarcado onde deveria ter internet. Então, o problema é fazer uma distribuição de modens e repetidores de sinal para que toda essa região tenha acesso à internet.*
> *Eduardo: Todos entenderam o mapa? Está numa escala de 100 metros para 1,5 cm, tá? Então vocês podem medir com a régua, colocar o compasso com o raio, a partir do diâmetro que está falando aí, para fazer o círculo e ver onde cada um vai pegando. Vocês têm que preencher todo o mapa com o sinal de wi-fi que é um círculo de 50 cm de diâmetro e o outro 100cm, sabendo que cada maior* [modem] *pode ter 4 do menor* [repetidor] *acoplado nele. Vou ajudar. Vou fazer um exemplo aqui. Quero preencher essa área aqui.* [enquanto esboça uma região retangular na lousa]. *Se eu vou pôr um ponto de internet aqui, ela vai pegar essa área* [faz um círculo com centro no ponto de internet dentro da área retangular esboçada]. *Cada um desse maior pode ter quatro, mas como o roteador está aqui no meio, o repetidor tem que receber deste outro ponto. Então vou ter que colocar os quatro aqui* [colocando quatro repetidores sobre a linha do círculo maior, semelhante ao que apresentamos na Figura 17].
> *Roberto: Lembrando que não precisa colocar os 4.*

Eduardo fez esse exemplo porque os alunos estavam colocando o repetidor fora da área de alcance do *modem*, assim, não receberia o sinal emitido por este.

Figura 33: Material de apoio

[21] Os grupos de alunos da escola são chamados de GA e numerados de 1 a 7 nesta atividade.

Atualmente, a população possui a necessidade de sempre estar conectada à internet através de um smartphone ou um computador portátil, utilizando assim para bate papo com amigos, trabalho, estudo. Porém alguns planos de telefonia deixam a desejar nas conexões móveis (3G, 4G) por ser uma rede instável.
Com o programa “Praça Viva” apresentado na reportagem, a prefeitura reformou as praças da cidade, porém não houve a instalação dos equipamentos de internet sem fio. Com isso, foi elaborado o seguinte questionamento: Qual a distribuição de equipamentos de internet *wi-fi* gratuita no centro da cidade de Apucarana-PR, para que haja maior cobertura da área considerada central, utilizando a quantidade mínima possível desses equipamentos para gerar o menor custo por metro quadrado?
Um sistema de internet *wi-fi*, é necessário ter um modem para a conexão com a internet, e através desse modem, é possível conectar até 4 repetidores (aparelhos que aumentam o alcance do sinal de *wi-fi*), conforme apresentado no diagrama abaixo:



O modem tem um alcance circular de aproximadamente 100 metros, e o repetidor tem o alcance circular de 50 metros.
O preço de um plano de internet é de R$ 199,90 (150 mbs/ Copel Telecom), e os aparelhos têm um custo de:

Custo de implantação do sistema de internet

Produto	***Valor***
Modem	R$ 345,00
Repetidor	R$ 347,00
Total	**R$ 692,00**

Fonte: Copel Telecom – Intelbrás

Materiais: Compasso, Transferidor, Mapa de Apucarana

Fonte: Dados da pesquisa

Com as instruções dos estudantes-professores, os grupos de alunos (GA) desenvolveram sua atividade por cerca de duas horas e trinta minutos. Ao término, cada um desses grupos foi solicitado a apresentar para todos os alunos da sala seu encaminhamento para obter uma solução para o problema.

Exibimos na sequência os mapas[22] produzidos pelos grupos de alunos (GA), as produções escritas e as transcrições das falas de cada GA durante sua apresentação.

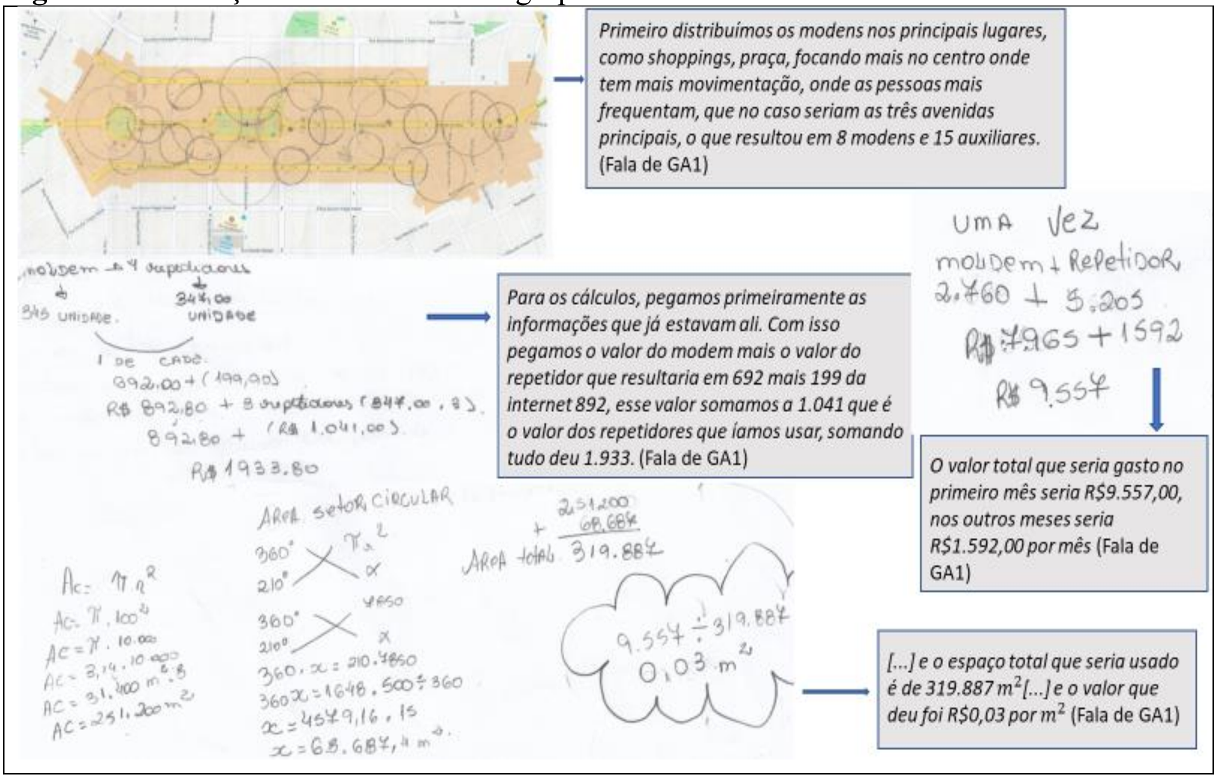
5.1.1 As Produções dos Grupos de alunos na atividade *Conectando a Cidade Educação: Wi-fi livre no centro da cidade* durante a oficina do grupo G1

[22] Fonte: relatório entregue pelos alunos da escola durante as oficinas de Modelagem Matemática.

Como o objetivo da pesquisa consiste em investigar como se caracteriza a autenticidade em atividades de modelagem matemática desenvolvidas em um curso de formação inicial de professores nos contextos de aprendizagem e de ensino, a produção dos alunos da escola não é nosso objeto de pesquisa, porém, o que os estudantes-professores fazem com essa produção, constitui nosso *corpus*. Por esse motivo, mostramos a produção de cada GA e em seguida salientamos a análise[23] que o grupo de estudantes-professores (G1) fez da atividade desenvolvida na sala de aula. Os estudantes-professores (G1) optaram por distinguir as fases de uma atividade de modelagem matemática na atividade entregue pelos alunos.

Apresentamos na Figura 34 o desenvolvimento da atividade pelo grupo de alunos GA1 e na Figura 35 a análise desse desenvolvimento pelo grupo de estudantes-professores G1.

Figura 34: Produção dos estudantes do grupo GA1



Fonte: Dados da pesquisa.

[23] Fonte: relatório de estágio entregue pelos estudantes-professores no final do ano letivo de 2019.

Figura 35: Análise da produção de GA1 por G1

- Inteiração: Com a leitura do texto de apoio, os estudantes realizaram a coleta de dados e a interpretação do texto. No mapa impresso, os equipamentos foram inseridos e em lugares com bastante movimento de pessoas.
- Matematização: Os estudantes utilizaram área de círculos e setor circular, regra de três ("contas cruzadas" – segundo os estudantes). Com o auxílio de régua e compasso, os estudantes confeccionaram círculos para representar a área de um modem e semicírculos para representar área de um repetidor. Com o auxílio de um transferidor, foi necessário medir o ângulo internet do setor circular para calcular a sua área.
- Resolução: O GA1, com a disposição dos equipamentos chegou à conclusão que seriam necessários 8 modens que abrangem uma área de 251.200m² e 15 repetidores totalizando uma área de 68.687,4 m². A área total será de 319.887 m².
- Interpretação e Validação: O grupo apresentou seus resultados aos colegas. O custo de implantação será de R$9.557,00 já considerando um mês de internet. (8 modens e 15 repetidores). O GA1 calculou o custo por m² chegando a R$ 0,03 por m².

Análise dos Resultados: O GA1 resolveu os cálculos de maneira correta. O grupo utilizou simplificações, como: valor do $\pi \cong 3,14$ e o ângulo interno do setor circular como 210º.
Poderia tomar um certo cuidado com o tamanho dos círculos, pois alguns apresentam um tamanho inferior ao que foi solicitado, sendo que estudantes apresentavam os materiais necessários para a confecção de maneira correta.

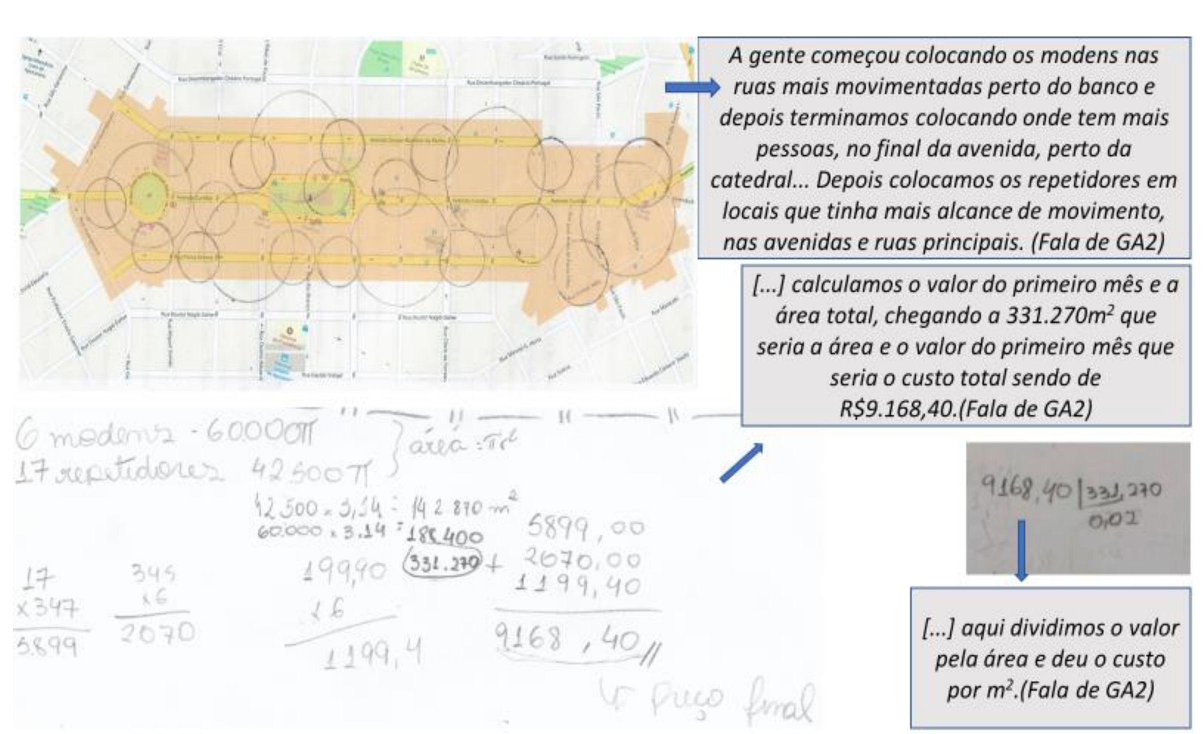
Fonte: Relatório de estágio dos estudantes-professores de G1

Pela análise realizada por G1 no relatório de estágio apresentada na Figura 36, é possível notar que GA1 resolveu corretamente os cálculos matemáticos chegando a uma solução correta para o problema. Os estudantes-professores não demonstraram, na análise que fizeram da atividade desenvolvida por GA1, que a localização dos *modens* e repetidores era relevante, ou seja, não analisaram as escolhas dos alunos em colocar na área abrangente os lugares com maior movimentação de pessoas, como shopping e as principais ruas de comércio.

O grupo de alunos GA2 apresenta uma outra configuração para a localização dos modens e repetidores de sinais, conforme mostramos na Figura 36, abrangendo inclusive áreas fora da parte hachurada do mapa.

Como podemos ver na Figura 37, houve um erro na resolução do grupo, pois eles calcularam a área total de cada repetidor de sinal, havendo áreas de cobertura de internet sobrepostas. Os estudantes-professores notaram esse erro no momento da apresentação do grupo para a turma. Enquanto outros grupos apresentavam, o estudante-professor Eduardo sentou-se junto com o grupo GA2 para auxiliá-los a corrigir e refazer os cálculos. Assim, GA2 chegou também a R$ 0,03 por m^2.

Figura 36: Produção dos estudantes do grupo GA2



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 37: Análise da produção de GA2 por G1

Inteiração: Com a leitura do texto de apoio, os estudantes realizaram a coleta de dados e a interpretação do texto. Os repetidores foram inseridos somente em lugares necessários para o maior alcance.

Matematização: Os estudantes utilizaram área de círculos. Com o auxílio de régua e compasso, os estudantes confeccionaram círculos para representar a área de um modem e semicírculos para representar área de um repetidor.

Resolução: O GA2, com a disposição dos equipamentos chegou à conclusão que seriam necessários 6 modens que abrangem uma área de 188.400m², 17 repetidores que foram calculados a área total resultando em 142.870 m², somando as áreas resultou em 331.270m².

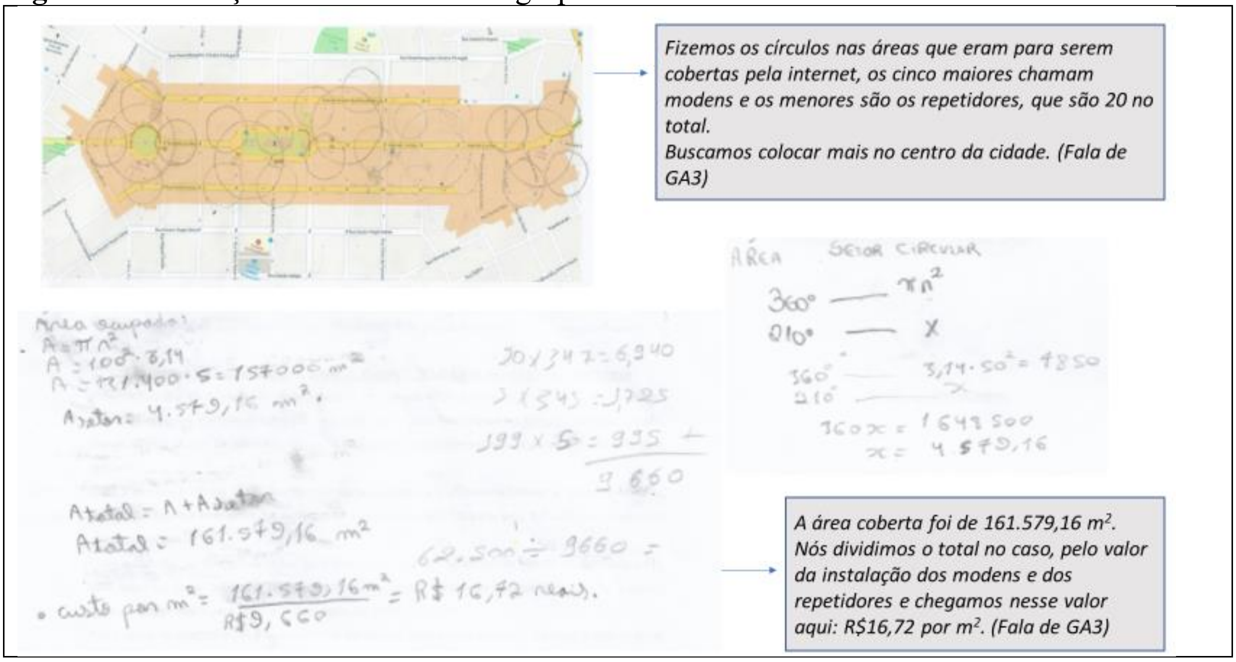
Interpretação e Validação: O grupo apresentou seus resultados aos colegas. O custo de implantação será de R$9.168,40 já considerando um mês de internet. (6 modens e 17 repetidores). GA2 calculou o custo por m² chegando a R$ 0,02 por m².

Análise dos Resultados: O GA2 resolveu os cálculos de maneira incorreta pois consideraram a área total dos repetidores. O grupo utilizou simplificação para o valor do $\pi \cong 3{,}14$.
Poderia tomar um certo cuidado com o tamanho dos círculos e a posição dos repetidores, pois alguns apresentam um tamanho inferior ao que foi solicitado e alguns repetidores não estavam no alcance do moldem para que possam compartilhar a internet.

Fonte: Relatório de estágio dos estudantes-professores de G1

Apresentamos na Figura 38 o desenvolvimento da atividade pelo grupo de alunos GA3 e na Figura 39 a análise desse desenvolvimento pelo grupo de estudantes-professores G1.

Figura 38: Produção dos estudantes do grupo GA3



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 39: Análise da produção de GA3 por G1

Inteiração: Com a leitura do texto de apoio, os estudantes realizaram a coleta de dados e a interpretação do texto. Os equipamentos foram inseridos nas ruas mais movimentadas de centro de Apucarana, os modens foram alinhados na mesma direção um do outro.

Matematização: Os estudantes utilizaram área de círculos e setor circular. Com o auxílio de régua e compasso, os estudantes confeccionaram círculos para representar a área de um modem e semicírculos para representar área de um repetidor. Com o auxílio de um transferidor, foi necessário medir o ângulo internet do setor circular para calcular a sua área.

Resolução: O GA3, com a disposição dos equipamentos, chegou à conclusão que seriam necessários 5 modens que abrangem uma área de 157.000m² e 20 repetidores. A área total apresentada pelo grupo é de 161.579,16m².

Interpretação e Validação: O grupo apresentou seus resultados aos colegas. O custo de implantação será de R$9.660,00 já considerando um mês de internet. (8 modens e 15 repetidores). O G3 calculou o custo por m² chegando a R$ 16,72 por m².

Análise dos Resultados: O GA3 não resolveu alguns cálculos de maneira correta. Na soma da área total, o grupo apresentou uma desatenção somando apenas na área total um repetidor, ou seja, somou apenas uma unidade do repetidor a área final. Assim, apresentando uma diferença no valor final. Também calcularam o custo por metro quadrado ao contrário, dividindo o valor em metros pelo custo.

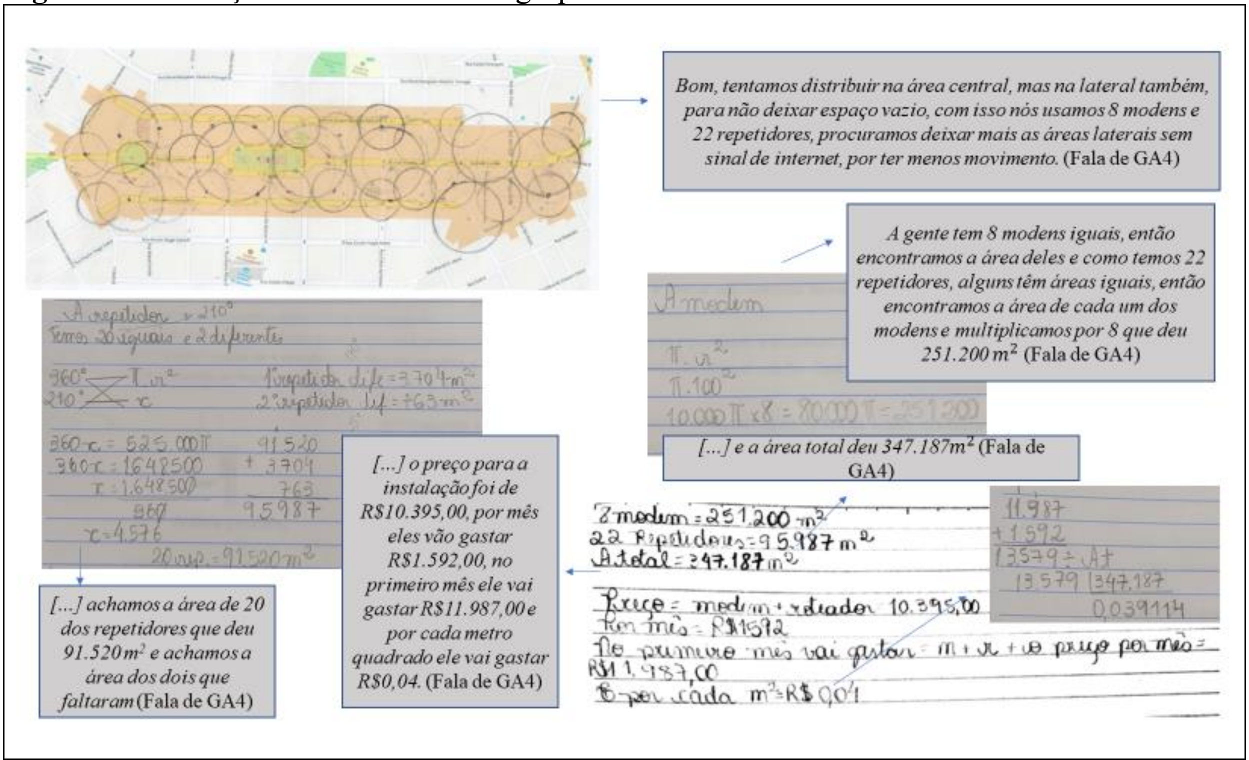
O grupo utilizou simplificações, como: valor do $\pi \cong 3{,}14$ e o ângulo interno do setor circular como 210°. O grupo poderia ter realizado uma melhor distribuição dos círculos para cobrir uma maior área.

Fonte: Relatório de estágio dos estudantes-professores de G1

Como mostra a Figura 39, na análise de resultados os estudantes-professores demonstraram analisar cuidadosamente a resolução e, dessa forma, notaram os erros, como o cálculo da área total e do custo por m². Porém, esses erros não foram observados durante a oficina, mas somente durante a escrita do relatório de estágio.

A Figura 40 contém o desenvolvimento da atividade pelo grupo de alunos GA4 e a Figura 42 a análise desse desenvolvimento pelo grupo de estudantes-professores G1.

Figura 40: Produção dos estudantes do grupo GA4



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 41: Análise da produção de GA4 por G1

Inteiração: Com a leitura do texto de apoio, os estudantes realizaram a coleta de dados e a interpretação do texto. No mapa impresso, os equipamentos foram inseridos de forma que abrangesse a maior área possível.

Matematização: Os estudantes utilizaram área de círculos e setor circular, regra de três. Com o auxílio de régua e compasso, os estudantes confeccionaram círculos para representar a área de um modem e semicírculos para representar área de um repetidor. Com o auxílio de um transferidor, foi necessário medir o ângulo internet do setor circular para calcular a sua área.

Resolução: O GA4, com a disposição dos equipamentos chegou à conclusão que seriam necessários 8 modens que abrangem uma área de 251.200m² e 22 repetidores totalizando uma área de 95.987 m². A área total será de 347.187 m².

Interpretação e Validação: O grupo apresentou seus resultados aos colegas. O custo de implantação será de R$11.987,00 já considerando um mês de internet. (8 modens e 22 repetidores). O GA4 calculou o custo por m² chegando a R$ 0,04 por m².

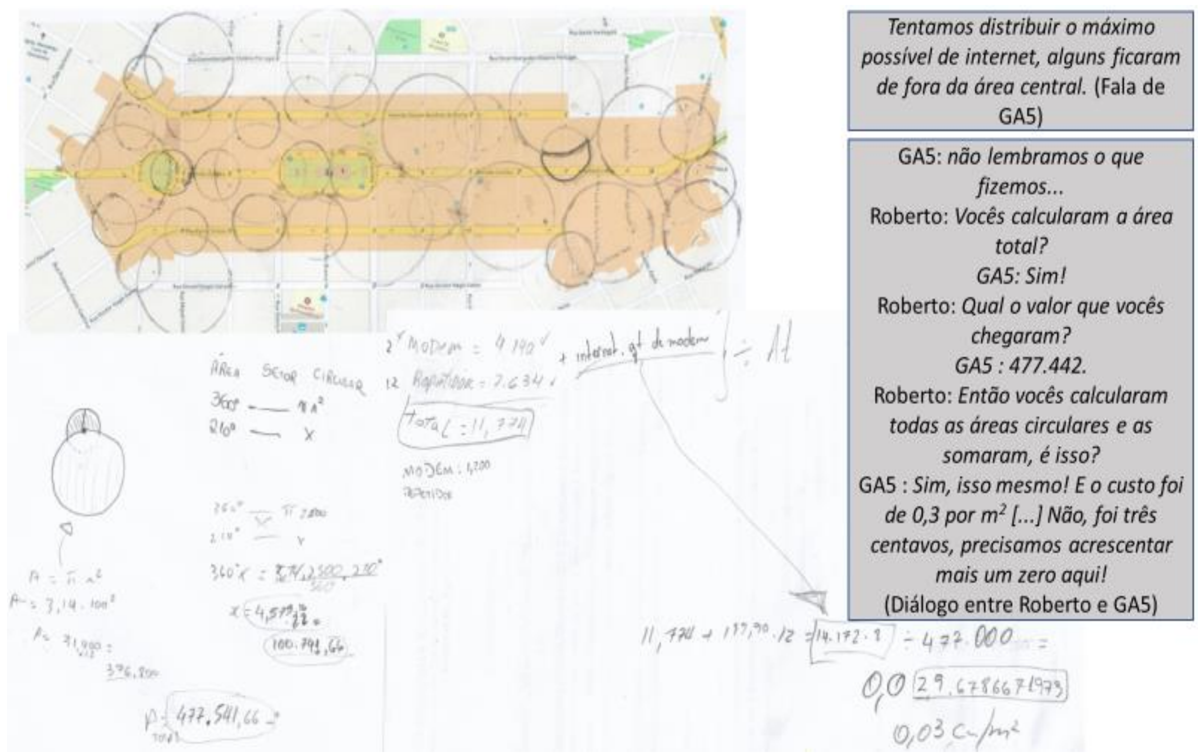
Análise dos Resultados: O GA4 resolveu os cálculos de maneira correta. O grupo utilizou simplificações, como: valor do $\pi \cong 3{,}14$ e os ângulos internos dos setores circulares sendo 20 medindo 210°, um 170° e um medindo 35°.

Fonte: Relatório de estágio dos estudantes-professores de G1

É possível notar, pela produção escrita do grupo de estudantes na Figura 40, que houve um erro no cálculo do custo do m^2: o custo mensal foi adicionado duas vezes. Porém, os estudantes-professores não notaram esse erro, acharam que a obtenção do valor 0,04 era uma *aproximação ruim* somente.

A produção do grupo de alunos GA5 é mostrada na Figura 42. Essa produção é analisada por G1 e evidenciada na Figura 43.

Figura 42: Produção dos estudantes do grupo GA5



Fonte: Dados da pesquisa

Apesar de não constar no relatório de estágio dos estudantes-professores, no vídeo gravado das oficinas de modelagem é possível notar que o grupo GA5 estava tímido para a apresentação da atividade. Desse modo, um dos estudantes-professores (Roberto) tomou a frente e fez perguntas para direcionar os alunos a apresentarem o que fizeram, como mostramos na Figura 42.

Figura 43: Análise da produção de GA5 por G1

Inteiração: Com a leitura do texto de apoio, os estudantes realizaram a coleta de dados e a interpretação do texto. No mapa impresso, o grupo desenvolveu a estratégia de distribuir modens partindo de uma extremidade.

Matematização: Os estudantes utilizaram área de círculos e setor circular. Com o auxílio de régua e compasso, os estudantes confeccionaram círculos para representar a área de um modem e semicírculos para representar área de um repetidor. Com o auxílio de um transferidor, foi necessário medir o ângulo internet do setor circular para calcular a sua área.

Resolução: O GA5, com a disposição dos equipamentos chegou à conclusão que seriam necessários 12 modens que abrangem uma área de 376.800m² e 22 repetidores com área de 100.741,66m². A área total apresentada pelo grupo é de 477.541,66m².

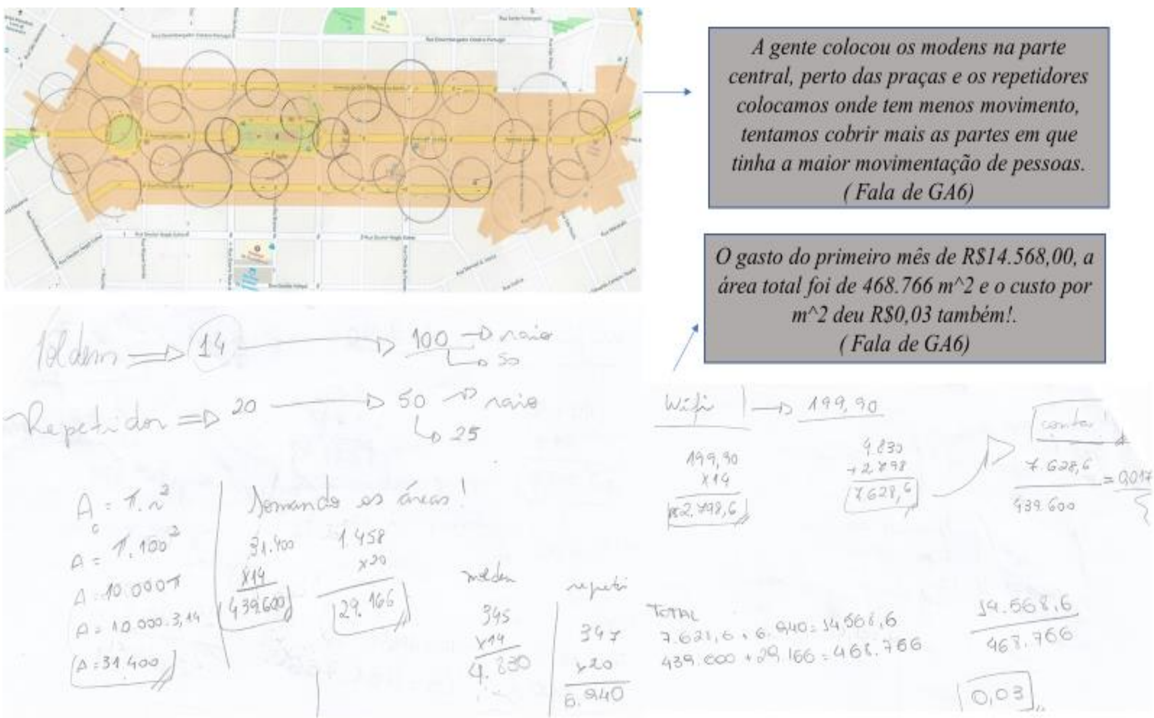
Interpretação e Validação: O grupo apresentou seus resultados aos colegas. O custo de implantação será de R$14.172,80 já considerando um mês de internet. (12 modens e 22 repetidores). O GA5 calculou o custo por m² chegando a R$ 0,03 por m².

Análise dos Resultados: O GA5 resolveu os cálculos de maneira correta. Fez uma distribuição de equipamentos bem equilibrada, só deveria tomar cuidado em alguns pontos de instalação, e com o tamanho das circunferências realizadas. O grupo utilizou simplificações, como: valor do $\pi \cong 3,14$ e o ângulo interno do setor circular como 210º.

Fonte: Relatório de estágio dos estudantes-professores de G1

A Figura 44 contém o desenvolvimento da atividade pelo grupo de alunos GA6 e a Figura 45 a análise desse desenvolvimento pelo grupo de estudantes-professores G1.

Figura 44: Produção dos estudantes do grupo GA6



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 45: Análise da produção de GA6 por G1

Inteiração: Com a leitura do texto de apoio, os estudantes realizaram a coleta de dados e a interpretação do texto. Com o mapa impresso, os estudantes desenvolveram da seguinte maneira: Justificaram o critério de maior aglomeração de pessoas para dispor os aparelhos, porém seu desenho não condiz, algumas ruas principais não estão bem cobertas pelo sinal da internet.

Matematização: Os estudantes utilizaram regra de três, área de círculos e área do setor circular. Com o auxílio de régua e compasso, os estudantes confeccionaram círculos para representar a área de um modem e semicírculos para representar área de um repetidor. Com o auxílio de um transferidor, foi necessário medir o ângulo interno do setor circular para calcular a sua área.

Resolução: O GA6, com a disposição dos equipamentos chegou à conclusão que seriam necessários 14 modens que abrangem uma área de 439.600 m² e 20 repetidores totalizando uma área de 29.166m². A área total será de 468.766 m².

Interpretação e Validação: O grupo apresentou seus resultados aos colegas. O custo de implantação será de R$14.568,00 já considerando um mês de internet. (14 modens e 20 repetidores). O GA7 calculou o custo por m² chegando a R$ 0,03 por m².

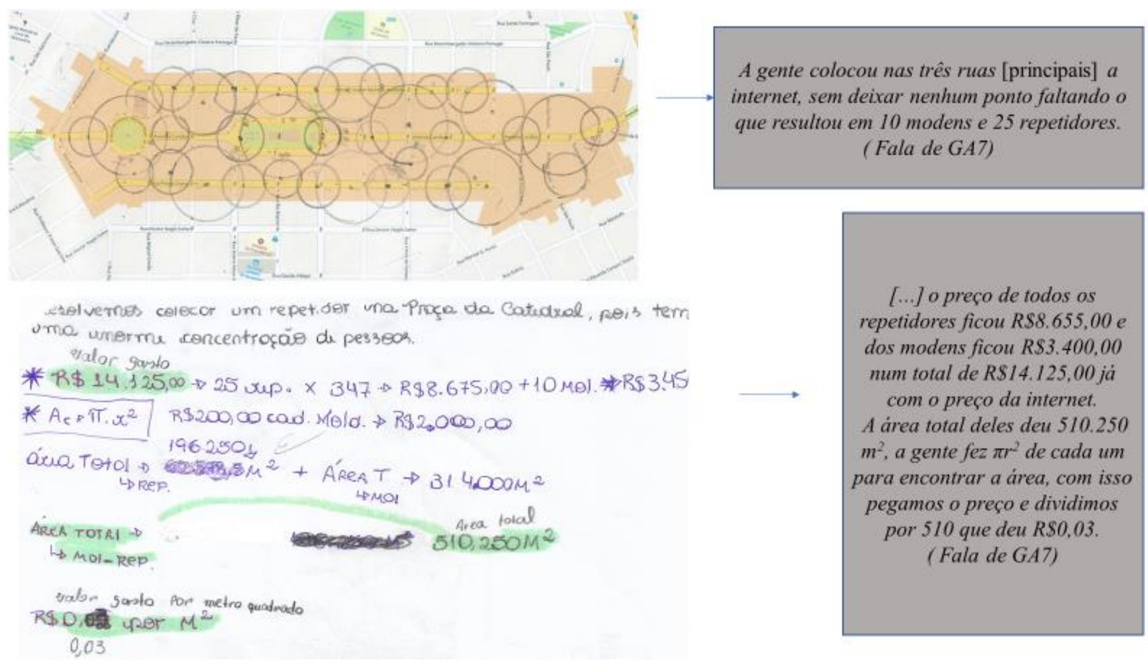
Análise dos Resultados: O GA6 resolveu os cálculos de maneira correta. O grupo utilizou simplificações, como: valor do $\pi \cong 3{,}14$ e o ângulo interno do setor circular como 210°. As disposições dos círculos de alcance dos aparelhos não atingem grande parte da área central.

Fonte: Relatório de estágio dos estudantes-professores de G1

A análise realizada por G1 mostra que os alunos resolveram o problema de forma correta. Os estudantes-professores não apresentam indícios de avaliar as justificativas da localização dos *modens* e repetidores, que são explicações extramatemáticas, como podemos ver na Figura 45. Entendemos que isso pode ter sido uma falha dos estudantes-professores uma vez que apenas os cálculos matemáticos corretos não apresentam uma resolução viável para uma atividade de modelagem matemática, ou seja, "ser capaz de fazer os cálculos é insuficiente para ser capaz de responder bem" (BALL, 2003, p. 2).

Apresentamos na Figura 46 o desenvolvimento da atividade pelo grupo de alunos GA7 e na Figura 47 a análise desse desenvolvimento pelo grupo de estudantes-professores G1.

Figura 46: Produção do grupo GA7



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 47: Análise da produção de GA7 por G1

Inteiração: Com a leitura do texto de apoio, os estudantes realizaram a coleta de dados e a interpretação do texto. Com o mapa impresso, os estudantes desenvolveram da seguinte maneira: começaram com modens na praça e no redondo por ser as áreas de mais concentração de pessoas, se preocuparam em cobrir as ruas principais

Matematização: Os estudantes utilizaram área de círculos. Com o auxílio de régua e compasso, os estudantes confeccionaram círculos para representar a área de um modem e semicírculos para representar área de um repetidor.

Resolução: O GA7, com a disposição dos equipamentos, chegou à conclusão que seriam necessários 10 modens que abrangem uma área de 314.400m² e 25 repetidores totalizando uma área de 196.250 m² (nesta parte erraram no cálculo pois consideraram toda a área do círculo e não apenas o setor circular). A área total será de 510.250 m².

Interpretação e Validação: O grupo apresentou seus resultados aos colegas.

O custo de implantação será de R$14.125,00 já considerando um mês de internet. (10 modens e 25 repetidores). O GA7 calculou o custo por m² chegando a R$ 0,03 por m².

Análise dos Resultados: O GA7 não usou área do setor circular. O grupo utilizou simplificações, como: valor do $\pi \cong 3{,}14$.

As disposições dos círculos de alcance dos aparelhos foram colocadas de maneira bem elaborada, para que se encaixassem sem muita sobreposição e espaços vagos. As contas de setor circular não aparecem nas folhas entregue embora estejam com resultados corretos.

Fonte: Relatório de estágio dos estudantes-professores de G1

Segundo Ball (2003, p. 3), “um professor também precisa entender rapidamente qual é o erro matemático” e isso não aconteceu no momento da aula com G1. Talvez pela falta de experiência com o ensino, por se tratarem de aulas no decorrer do estágio supervisionado na formação inicial, os estudantes-professores observaram o erro do grupo GA7 somente depois das oficinas de modelagem, pois o resultado foi 0,028, ou seja, aproximadamente R$0,03 por m^2. Porém, na correção do desenvolvimento da atividade (Figura 48), notaram que a área estava incorreta. Os alunos obtiveram uma área maior do que deveria ser, pois em vez de calcularem a área do setor circular, calcularam a área do círculo completo.

Encerrando-se as apresentações dos grupos de alunos, os estudantes-professores conversaram com a turma toda:

> *Eduardo: Bom pessoal, vocês viram que os valores variaram pouco, né?! Tanto a quantidade de metros quanto o valor por m^2. Por quê?*
> *Alunos: Sim!* [mas não explicaram o porquê]
> *Eduardo: Porque se fôssemos escrever um modelo do que vocês fizeram, foi praticamente a mesma coisa, pegamos o total do valor dos modens mais a internet mais o total do valor dos repetidores e a gente dividia pelo total da área dos modens mais o total da área dos repetidores... Como todo mundo fez praticamente o mesmo cálculo não variaria muito esse valor!*
> *Maria: Lembrando também que no começo quando vocês foram fazer nós falamos que não tinha forma certa ou errada para que vocês realizassem isso, era para que vocês escolhessem uma forma de posicionar todos os modens e repetidores e fazer os cálculos.* [...] *se não tivesse nenhum erro de matemática básica, todos os de vocês estariam corretos. Então após alguns ajustes que fizemos, vocês vieram aqui,* [...] *alguns abrangendo uma área maior, outros menor, mas todos alcançaram o objetivo dessa atividade.*
> [...]
> *Maria: Esse daqui foi o que nós fizemos antes de trazer essa atividade para vocês* [apresentando a distribuição dos equipamentos que o próprio G1 fez na disciplina de Modelagem Matemática], *o mesmo mapa que entregamos a vocês foi o que utilizamos, essa imagem representa a forma que colocamos cada aparelho, sendo os maiores os modens e os menores os repetidores, havia alguns sobrepostos igual ao de vocês, buscando abranger a maior área, chegando no que a maioria da sala chegou que foi um total de R$0,03 por m^2* [mostrando o modelo matemático obtido, como uma generalização do que todos os grupos fizeram...].

Assim, G1 finaliza a primeira atividade de modelagem matemática na 2ª série B durante o estágio supervisionado na escola. O desenvolvimento dessa atividade apresenta indícios de que os estudantes-professores, mesmo com pouca experiência e quase nenhuma prática com o *ensinar usando* modelagem matemática, souberam lidar com a atividade, atingindo, em partes, o objetivo proposto no plano de aula para o estágio, como apresentamos no Quadro 14.

A atividade desenvolvida foi considerada uma atividade de 1º momento de familiarização pelos estudantes-professores de G1 como responderam à questão 7 do Questionário pós-oficinas[24]. Desse modo, os estudantes-professores levaram os dados e o problema a ser solucionado. Porém, foi possível discutir com os alunos a respeito da situação,

[24] Apêndice 4.

bem como cada GA construir o seu modelo, ficando para os estudantes-professores a generalização dos resultados e a construção de um modelo matemático geral.

Quadro 14: Objetivos da atividade definidos por G1

4. Objetivos

4.1 Objetivo geral

Desenvolver atividades de Modelagem Matemática, indagar e investigar por meio da matemática situações oriundas de outras áreas da realidade.

4.2 Objetivos específicos

- Inteirar-se da situação do cotidiano a ser estudado.
- Coletar dados para auxiliar no desenvolvimento.
- Definir o problema a ser solucionado.
- Matematizar os dados apresentados ou buscados na situação inicial.
- Desenvolver um modelo matemático para resolver a situação-problema.
- Interpretar e validar os resultados matemáticos encontrados.
- Apresentar o resultado final para a comunidade.

Fonte: Plano de aula de G1

5.2 *FABRICAÇÃO E VENDAS DE COOKIES - NO CONTEXTO DO ENSINO*

A atividade *Fabricação e Vendas de Cookies,* desenvolvida pelo grupo 2 (G2) na disciplina de Modelagem Matemática, foi escolhida por todos os grupos (G1, G2, G3) para constituir as oficinas de Modelagem Matemática durante o estágio supervisionado.

5.2.1 Grupo G1 – 2ª série B

G1 desenvolveu essa atividade com a 2ª série B no segundo dia das oficinas de modelagem matemática. Foi a última atividade desenvolvida. Entregaram aos alunos da escola folhetos com propaganda de supermercado e a receita para fazer 22 cookies. Os panfletos eram de 5 supermercados diferentes da cidade onde fica a escola. A estudante-professora Maria fez a leitura da situação-problema com os alunos da escola e sugeriu o seguinte:

> *Maria: Imaginem que vocês precisem trabalhar, mas não conseguem encontrar um emprego formal... sabemos que está difícil se colocar no mercado de trabalho, ainda mais sem uma formação para isso. Então, pensem que vocês decidiram se sustentar financeiramente, ou pelo menos ajudar na renda da família, fazendo e vendendo cookies. Para isso vocês vão precisar de algumas informações que constam nesse material que entregamos a vocês.*

O material de apoio entregue aos alunos está representado na Figura 48.

Figura 48: Material de apoio[25]

Fabricação e venda de Cookies

Com a taxa de desemprego no Brasil por volta de 12% atingindo cerca de 13 milhões de pessoas, muitos desempregados buscam uma solução para a falta de oportunidade de emprego, abrindo um negócio próprio. Uma das possibilidades de empreendimento é no ramo alimentício, imagine que você é um desses empreendedores e pretende fabricar e vender cookies recheados, o que seria necessário para que isso acontecesse?

Modo de preparo: massa

Em uma batedeira bater a manteiga e os açúcares até que vire um creme, adicionar um ovo e bater até que se misture por completo, em seguida adicione o segundo ovo e bata novamente até que se misture. Adicione metade da farinha e bata até obter uma massa homogênea, depois coloque o restante da farinha e bata novamente. Coloque o fermento e o bicabornato e bata apenas para misturar. Adicionar o chocolate picado e mexer com uma espátula. Deixe a massa descansar por 30 minutos.

Receita – Rendimento: 22 cookies

Produto	Quantidade
Manteiga sem sal	200g
Farinha de trigo	295g
Açúcar cristal	135g
Açúcar mascavo	90g
Ovo	2 unidades
Chocolate ao leite	300g
Fermento químico	10g
Bicabornato	10g
Leite condensado	395g
Creme de leite	200g
Gás	13kg

Modo de preparo: recheio

Em uma panela, misture uma caixinha de leite condensado e uma caixinha de creme de leite, leve ao fogo, cozinhe mexendo sempre, até obter consistência de brigadeiro de enrolar (ponto Napê).

Modo de preparo: montagem

Enrolar o recheio em bolinhas de 15 gramas cada, separe a massa em bolinhas de 300 gramas cada, em seguida coloque o recheio dentro da massa, asse por 15 minutos à 230°C.

Consumo do gás:
Em uma hora, o consumo médio do forno é de 0,166kg
O rendimento médio dos queimadores é de 63% do consumo médio do forno
Consumo do Micro-ondas:
1,4kwh;
Valor unitário do kwh: R$0,79.
Tempo:
Preparo de massa: 15 min;
Descanso da massa: 30 min;
Enrolar a massa: 8 min;
Assando a massa: 15 min;
Empacotamento: 3 min.

Fonte: Dados da pesquisa

Para responder ao questionamento *O que seria necessário para que isso acontecesse?* Maria deu algumas dicas do que poderiam fazer:

> *Maria: vocês podem tomar as decisões que acharem necessário, como por exemplo qual o salário de cada um, o quanto vão produzir. Podem procurar o que for necessário, pois vocês serão como uma empresa. Para a escolha dos ingredientes, vocês podem escolher o mais barato, o da marca que quiserem, o do mercado mais perto de casa.*
> *A1: Essa receita é de verdade? Pode fazer em casa? Posso tirar uma foto?*
> *Maria: Sim.*
> *A2: Pode pegar um panfleto de cada mercado?*
> *Maria: Pode pegar quantos precisar.*
> *A1: Pode fazer parte do clube de desconto do mercado? Porque tem produto que sai mais barato.*
> *Roberto: Pode.*
> *A2: Olha a manteiga. Vê se você acha mais barato.* [Disse A2 para os outros alunos de seu GA. E assim foram pesquisando nos panfletos os preços dos produtos].

Os grupos de alunos (GA) desenvolveram a última atividade da oficina por cerca de duas horas. Após chegarem a uma solução, cada um desses grupos foi solicitado a apresentar para todos os alunos da sala seu encaminhamento para solucionar o problema.

Como o objetivo da pesquisa consiste em investigar como se caracteriza a autenticidade em atividades de modelagem matemática desenvolvidas em um curso de

[25] Esse quadro representa as informações, os dados e o problema utilizado por todos os grupos (G1, G2 e G3) durante as oficinas.

formação inicial de professores considerando dois contextos: *Contexto de Aprendizagem*; *Contexto de Ensino,* a produção dos alunos da escola não é nosso objeto de pesquisa, porém, o que os estudantes-professores fazem com essa produção, constitui nosso *corpus*. Por esse motivo, mostramos a descrição da atividade desenvolvida por cada GA que o grupo de estudantes-professores (G1) apresentou no relatório de estágio.

Figura 49: Descrição da atividade desenvolvida por GA1

Após a pesquisa de preços em panfletos de mercado, o grupo 1 chegou a um custo de R$17,73 por receita. O grupo definiu também que é possível fazer 10 receitas por dia, trabalhando 22 dias em um mês, tendo a produção total de 4.840 cookies [22x22x10]. O custo de produção será de R$3.900,60. Assim o grupo apresentou que o custo de produção de cada cookie seria de aproximadamente R$0,80.

O salário mensal estipulado pelos integrantes do grupo seria de R$998,00, como eram em 5 integrantes, totalizando R$4.990.00 e o preço de venda de cada cookie seria de R$4,00, obtendo um lucro de R$3,20 por unidade.

Vendendo toda a produção mensal, e descontando o custo de produção, o grupo apresentou o seguinte valor:

$$4.840 \cdot R\$3{,}20 = R\$15.488{,}00$$

Descontando o salário inicial, o grupo apresentou a seguinte resolução:

$$R\$15.488{,}00 - R\$4.990{,}00 = R\$10.498{,}00$$

Os estudantes dividiram esse lucro entre os integrantes:

$$R\$10.498{,}00 \div 5 = R\$2.099{,}60$$

Somando o valor do Lucro com o salário inicial, cada integrante do grupo deveria receber:

$$R\$998{,}00 + R\$2.099{,}60 = R\$3.097{,}60 \; por \; mês$$

A equipe criou um logo e um nome fictício para a empresa.

Fonte: Dados da pesquisa

Analisando a descrição realizada por G1, apresentada na Figura 49, podemos notar que os alunos consideraram importante que cada membro da equipe recebesse um salário mínimo e que o lucro fosse dividido igualmente por todos eles. Além disso, estabelecendo o salário mínimo para cada membro, o lucro poderia ser utilizado para investimentos ou a contratação de funcionários, como podemos verificar na transcrição do áudio gravado durante a apresentação do GA1.

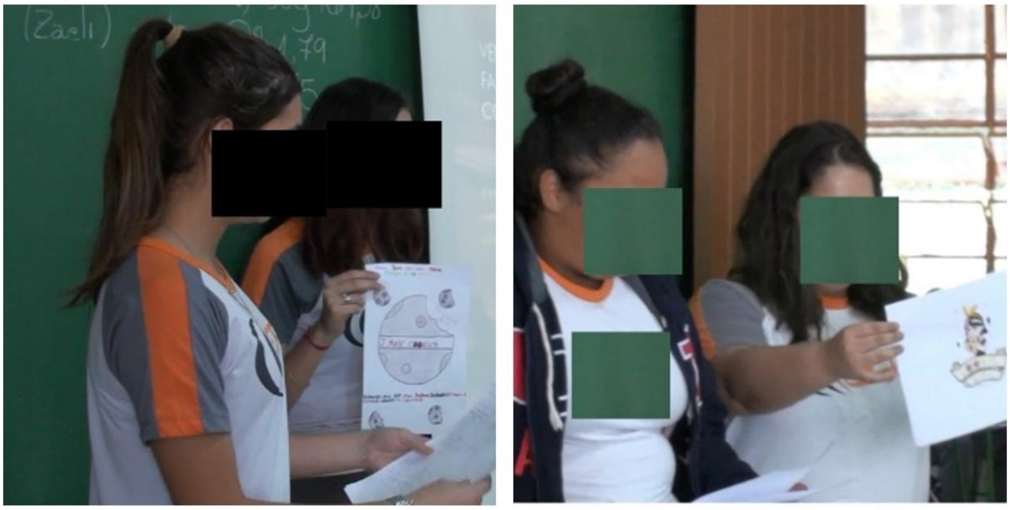
> *A3: Não entendi como vocês vão achar tempo para fazer 10 receitas por dia e ainda venderem.*
> *A10: com a parte do lucro é possível pensar em contratar empregados para trabalharem para nós.*
> *A3: Nossa! Empregado? Que palavra feia! Mas a ideia é boa!*
> *Roberto: Colaboradores, fica melhor.*
> *A3: E por que vão trabalhar só 22 dias e não 30?*
> *A10: Por que decidimos não trabalhar de sábado e domingo.*
> *Eduardo: Muito bem pensado!*

A partir da descrição apresentada e da conversa transcrita, podemos inferir que os alunos utilizaram conhecimentos não matemáticos e cotidianos para encontrar uma solução, como o descanso semanal ao qual os trabalhadores têm direito.

Os estudantes-professores de G1 parecem não notar que poderiam ter ajudado os alunos a construir um modelo matemático geral, uma função afim, na qual o salário de cada um dependeria da quantidade de cookies fabricada e vendida, inclusive com o salário mínimo como parte fixa. Porém, os professores-estudantes verificam que os alunos apresentam uma resolução correta para a situação-problema. Talvez isso se deva a não terem experiência com a sala de aula, em serem professores em formação inicial.

Na Figura 50 mostramos imagens de grupos de alunos durante a apresentação da atividade para a turma.

Figura 50: Alunos da 2ªB na atividade *Fabricação e Venda de cookies*

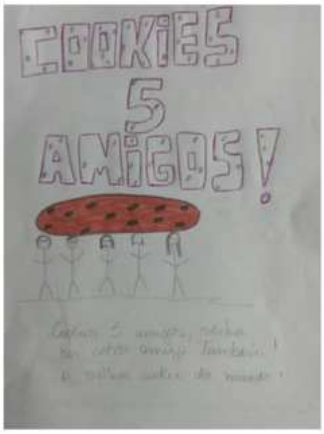


Fonte: Dados da pesquisa

Na Figura 51 apresentamos a descrição feita por G1 da atividade desenvolvida por GA2.

Figura 51: Descrição da atividade desenvolvida por GA2

O grupo 2, após selecionar os ingredientes, chegou a um custo de R$19,74 por receita, aproximadamente R$0,90 por cookie. Então o grupo decidiu fazer 6 receitas por dia, que totaliza 4 horas e 50 minutos de produção, e outras 4 horas seriam destinadas a venda dos produtos.



Com base nos cálculos, a empresa decidiu vender cada unidade a R$ 3,00. Como iriam produzir 6 receitas por dia, a produção diária seria de 132 cookies, trabalhando durante 21 dias por mês, a produção mensal seria de 2.772 cookies.

O valor total da venda de cookies no mês seria de R$8.316,00 e o Custo de Produção seria de R$2.787,00. Logo o lucro seria de:

R$8.316,00-R$2.487,00=R$5.829,00

Como o grupo não definiu os salários, então optaram por dividir o lucro no número de integrantes do grupo:

R$5.829,00÷5=R$1.165,80

A equipe criou um logo e um nome fictício para a empresa.

Fonte: Dados da pesquisa

Neste caso, os estudantes-professores de G1 também poderiam ter ajudado os alunos a construírem um modelo matemático geral, uma função afim, para calcularem o custo de produção e o lucro. Porém, esses estudantes-professores pareciam ter em vista que os alunos chegassem a uma solução específica para o problema com aqueles números e aquelas variáveis. O objetivo deles, aparentemente, não consistia na construção de um modelo matemático geral.

Na Figura 52 apresentamos a descrição que G1 fez da atividade de GA3.

Figura 52: Descrição da atividade desenvolvida por GA3

O grupo 3 [...] afirmou que cada integrante do grupo pode produzir 4 receitas por dia, totalizando 88 cookies [pois cada receita demora em média 1h e 11 min para ser feita]. Estipularam o preço de R$5,00, assim a sua receita seria de aproximadamente, R$ 440,00 por dia.

Uma compra que totalizou R$ 1.096,20 foi dividida em 4 integrantes:

$$R\$1.096{,}20 \div 4 = R\$\ 274{,}05$$

A compra, segundo os integrantes do grupo, era possível fazer até 4 receitas cada integrante do grupo. Logo o total de cookies seria de $88 \times 4 = 352\ cookies/dia$.

O valor arrecado pelo grupo seria de aproximadamente R$1.760,00, assim o grupo chegou à seguinte conclusão:

$$Vendas - Compra = Lucro$$
$$R\$1.760{,}00 - 1.096{,}20 = R\$663{,}80$$

Dividiram o lucro em 4:

$$R\$663{,}80\ \div 4 = R\$165{,}95$$

O grupo 3 apresentou somente essa compra, e assim tinha alguns erros de interpretação e cálculos, visto que os cálculos certos estão apresentados aqui na resolução, para efeito de comparação. Como não era necessário fazer o logo ou criar o nome de empresa, o grupo optou em não apresentar esses dados.

Fonte: Dados da pesquisa

Os estudantes-professores não notaram os erros nos cálculos durante a oficina, somente depois na análise das atividades desenvolvidas para a escrita do relatório de estágio. O erro ao qual eles se referem na Figura 53 é relativo ao cálculo do valor da compra para cada integrante da equipe, ou seja, a divisão de 1096 por 4. Apesar de os alunos não apresentarem os cálculos para se chegar à solução, eles respondem:

> *Vendemos cada cookie a 5 reais e tivemos um resultado de 1760 reais. Dividindo por 4, cada integrante ganhou 440 reais e descontamos as despesas de 364,40 reais. Como começamos agora ganhamos 313 reais mas conforme formos crescendo iremos aumentar os meios de produção e iremos lucrar mais.*

Com esse trecho, é possível notar que a partir do valor errado das despesas eles também erram o valor do lucro para cada integrante.

Na análise da atividade desenvolvida por GA4, os estudantes-professores notaram o erro, mas este não afetou os outros cálculos. Os alunos apenas se utilizaram de operações aritméticas, ou seja, da matemática já aprendida, não sendo necessário que os estudantes-professores apresentassem um conteúdo matemático novo. Porém, no caso deste grupo, também poderiam ter estimulado os alunos a construir um modelo matemático que generalizasse o ganho de cada um a partir da quantidade de cookies fabricada e vendida.

A descrição da atividade *Fabricação e Venda de cookies* desenvolvida por GA4 escrita por G1 consta na Figura 53.

Figura 53: Descrição da atividade desenvolvida por GA4

O grupo 4 decidiu vender os cookies a R$3,50, obtendo uma receita de R$231,00 ao dia, pois fariam 3 receitas (66 cookies) diariamente. O grupo também calculou que o custo de uma receita é de R$ 21,43, como seriam produzidas 3 receitas ao dia, o total diário de custo seria de R$ 64,30.

O custo mensal é de aproximadamente: $R\$\ 64{,}30 \times 21 = R\$1.350{,}30$

Como a empresa optou trabalhar 21 dias por mês, sua produção seria de 1.386 cookies ao mês. Logo sua receita será de:

$$1386 \times R\$3{,}50 = R\$4.851{,}00$$

Então o Lucro seria de: $R\$4.851{,}00 - R\$1.350{,}30 = R\$3.500{,}70$

O grupo resolveu que somente duas pessoas iriam trabalhar com a fabricação e vendas de cookies: $R\$3.599{,}70 \div 2 = R\$1.750{,}35$

Cada pessoa iria investir R$675,00 todo mês na empresa, então o salário final seria de R$1.075,35.

Vale a pena destacar que o grupo apresentou algumas informações de forma equivocada como por exemplo o valor de custo de cada cookie por R$2,12 sendo que apresentou o custo de uma receita como R$21,43, assim:

$$R\$21{,}43 \div 22 \cong R\$0{,}98$$

A estratégia do grupo foi fazer três fábricas, onde cada uma era administrada por dois integrantes e independentes uma da outra. Os estudantes também desenvolveram um logo para a empresa.

Fonte: Dados da pesquisa

Nas Figuras 54 e 55 apresentamos a descrição escrita por G1 da atividade *Fabricação e Venda de cookies* desenvolvida, respectivamente, por GA5 e GA6.

Figura 54: Descrição da atividade desenvolvida por GA5

Após as pesquisas dos ingredientes, o custo de cada receita seria de R$17,20, e como cada receita produz 22 cookies, o custo de cada cookie seria de R$0,78.

A estratégia do grupo foi vender os cookies em pacotes com mais unidades. O pacote com 10 unidades tem um custo de R$7,80 e preço de venda de R$15,00, já o pacote com 5 unidades tem um custo de R$3,90 e o preço de venda é de R$10,00.

O grupo acredita que é possível produzir 30 pacotes com 10 unidades por dia e 30 pacotes com 5 unidades por dia, totalizando a produção de 900 cookies.

A receita diária é de R$750,00 e o custo de produção será de R$ 399,00 (contando com a embalagem).

Assim o lucro diário será de:

R$750,00-R$399,00=R$351,00

Como alguns grupos, o grupo 5 elaborou um logotipo para a empresa.

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 55: Descrição da atividade desenvolvida por GA6

O grupo 6, com 5 integrantes, chegou à conclusão, após a pesquisa de preços, que o custo de uma receita que produz 22 cookies é de R$17,52.

O preço de venda de cada cookie seria de R$3,00 e o custo de produção de cada cookie seria de R$0,79. Como um dos integrantes do grupo possui um forno industrial que em cada fornada, é possível comportar até 4 formas, então a equipe iria produzir um total de 24 formas ao dia, totalizando 528 cookies.

O lucro mensal será de aproximadamente R$30.323,00 (trabalhando 26 dias por mês), onde esse lucro seria dividido em 6, onde 1 parcela para cada integrante do grupo, e a parcela que sobra seria investido na empresa.

Assim cada integrante do grupo, teria um salário de R$5.053,83.

Os estudantes também desenvolveram um logotipo e um nome para a empresa.

Fonte: Dados da pesquisa

Durante as apresentações desses grupos, os estudantes-professores chamam a atenção para a diferença da resolução desses grupos para os demais. GA5 pensa na estratégia de vender os cookies em pacotes. Assim, poderiam lucrar com a venda e também vender por um preço mais barato para quem compra vários cookies. Já GA6 utiliza um forno industrial, o que pode reduzir significativamente o consumo de gás e o tempo para assar os cookies.

A descrição da atividade desenvolvida por GA7 consta na Figura 56.

Figura 56: Descrição da atividade desenvolvida por GA7

O grupo 7 chegou a um custo de R$153,51 totalizando 66 cookies que seriam produzidos com essa receita.

O grupo desenvolveu vários cenários possíveis e definiu que o preço ideal de venda dos cookies seria R$5,00. O Lucro por dia das receitas seria de R$176,48. O grupo decidiu que seriam trabalhados aproximadamente 24 dias em um mês, logo o lucro mensal seria de: $R\$176{,}48 \times 24 = R\$\ 4.235{,}52$

Decidiram depois que iam produzir 198 cookies por dia. Logo, o custo seria de R$460,53, e o lucro seria de R$529,47. Então o Lucro mensal seria de R$12.707,28.

Assim, o grupo pensou em abrir algumas filiais pelo estado do Paraná, para a venda e fabricação de cookies. As cidades escolhidas foram Londrina, Maringá e Curitiba, como descrito na tabela abaixo:

Grupo 7 - Filiais							
Filiais	**Lojas**	**Funcionários**	**Lucro Bruto**	**Aluguel**	**Salários**	**Lucro**	**Prod. Mensal**
Londrina	1	3	R$ 12.707,28	R$ 1.000,00	R$ 3.600,00	R$ 8.107,28	198
Maringá	1	3	R$ 12.707,28	R$ 1.000,00	R$ 3.600,00	R$ 8.107,28	198
Curitiba	2	6	R$ 25.414,56	R$ 4.000,00	R$ 12.000,00	R$ 9.414,56	396
		Total	**R$ 50.829,12**	**R$ 6.000,00**	**R$ 19.200,00**	**R$ 25.629,12**	**792**

Então o grupo calculou, o lucro mensal da empresa de Apucarana somando com os das Filiais:

R$12.707,28+R$25.629,12=R$38.336,40

Então o lucro para cada integrante do grupo seria de R$12.778,80.

Fonte: Dados da pesquisa

Nesse caso os alunos já iniciam uma generalização ao testar os valores dos preços. Porém, não é possível notar se os estudantes-professores incentivam (ou não) os alunos a generalizarem os resultados, obtendo um modelo matemático que fornece o lucro. Na descrição, G1 destaca a produção da planilha com as filiais da empresa, com aluguel e salários.

Após a apresentação de todos os grupos de alunos, os estudantes-professores de G1 finalizam a oficina de Modelagem Matemática conversando com a turma:

> *Roberto: tivemos aqui a apresentação de cada grupo e cada um teve a sua ideia para reduzir o custo ou para alcançar clientes. O importante é que cada um fez do seu jeito e todos estavam corretos.*
> *Maria: vocês precisaram de matemática para resolver? Usaram apenas um conceito para resolver o problema? Vocês gostaram dessa atividade?*
> *A1: Sim.*
> *Maria: A nossa intenção era trazer uma situação do dia a dia para envolver vocês e acho que nosso objetivo foi atingido.*

No relatório de estágio, os estudantes-professores concluem:

Nessa atividade, os grupos estavam livres para tomar suas próprias decisões e assim surgiram resultados positivos. As equipes então desenvolveram suas estratégias, e muitos desenvolveram um logotipo para a empresa que não era um item obrigatório. Muitos grupos desenvolveram estratégias interessantes e modelos satisfatórios, sendo que muitos pensaram na oportunidade de empreender na venda de cookies.

Essa atividade foi desenvolvida também durante a oficina de G2 e G3.

5.2.2 Grupo G2 – 2ª série D

A atividade *Fabricação e Venda de Cookies* foi desenvolvida por G2 (Ana, Isabela e Jane) na 2ª série D no primeiro dia das oficinas de modelagem matemática. Como foi a primeira atividade desenvolvida, G2 explicou que eles desenvolveriam atividades diferentes das que estão acostumados a fazer na sala de aula, atividades de modelagem matemática, naqueles dois dias. Para dar início, as estudantes-professoras entregaram (em um papel) aos alunos da escola o problema[26] a ser solucionado por eles e pediram que lessem, pensassem em estratégias para a resolução e que anotassem tudo o que fosse necessário para o desenvolvimento da atividade.

Depois, entregaram aos alunos da escola uma lista com os ingredientes (de marcas, preços e pesos diferentes), apresentada no Quadro 15, a partir da qual os alunos deveriam fazer a escolha dos produtos necessários para fazer a receita de cookies (também cedida por G2) e calcular o custo de produção dessa receita.

Essa atividade foi desenvolvida durante toda a manhã do primeiro dia de oficina, ou seja, por aproximadamente 4 horas.

O grupo G2 de estudantes-professoras elaborou um texto com a descrição e análise do desenvolvimento da atividade de cada grupo de alunos (GA)[27] para apresentar no relatório de estágio, como mostramos no Quadro 16.

[26] Com a taxa de desemprego no Brasil por volta de 12% atingindo cerca de 13 milhões de pessoas, muitos desempregados buscam uma solução para a falta de oportunidade de emprego, abrindo um negócio próprio. Uma das possibilidades de empreendimento é no ramo alimentício, imagine que você é um desses empreendedores e pretende fabricar e vender cookies recheados, o que seria necessário para que isso acontecesse?

[27] Para a descrição das atividades da oficina de G2, os grupos de alunos foram numerados de GA8 a GA15.

Quadro 15: Lista de produtos

Produto	Marca	Quantidade	Preço (R$)
Margarina	Doriana	500g	3,79
Margarina	Qualy	500g	5,49
Farinha de trigo	Arapongas	5 kg	11,49
Farinha de trigo	Anaconda	5 kg	12,89
Açúcar cristal	Alto Alegre	5 kg	9,98
Açúcar cristal	D 'Ouro	5 kg	6,89
Açúcar refinado	União	5 kg	12,99
Açúcar refinado	Alto Alegre	5 kg	10,75
Ovo	Marutani	30 unidades	7,89
Ovo	Marutani	12 unidades	4,79
Chocolate ao leite	Harald	1,050 kg	19,98
Chocolate ao leite	Garoto	500g	27,99
Fermento químico	Dona Benta	100g	2,18
Fermento químico	Royal	100g	2,29
Bicarbonato	Andorinha	30g	1,38
Bicarbonato	Zaeli	40g	1,79
Leite condensado	Piracanjuba	395g	3,89
Leite condensado	Moça	395g	4,69
Creme de leite	Líder	200g	2,59
Creme de leite	Glória	200g	1,89
Gás	----	13 kg	75,00

Fonte: Dados da pesquisa

Quadro 16: Descrição da atividade desenvolvida por GA8

Para solucionar a atividade, o grupo escolheu utilizar produtos mais baratos. Depois através da regra de três descobriram a quantidade de cada produto para fazer uma receita e quanto gastariam de gás. Usufrui-se do micro-ondas para fazer o recheio, para chegar no gasto do eletrodoméstico, o aluno fez um cálculo distinto, dividiu o consumo de uma hora por um quarto de hora, em seguida multiplicou pelo valor de quilowatt hora. O que estava correto.
Em seguida, somaram todos os custos com a produção incluindo a embalagem, totalizando R$ 12,81 por receita. Na sequência, dividiram o custo por uma receita que rende vinte e dois cookies, assim, o preço de custo deu R$ 0,58 a unidade. Os alunos decidiram ter um lucro seis vezes maior que o seu custo, então multiplicaram seu custo por 600%, obtendo o valor de venda de R$ 3,48, arredondando para R$3,50, terá um lucro de R$ 2,90 por cookie.
A equipe calculou o lucro bruto por receita e o lucro líquido, porém denominaram erroneamente, invertendo-os. Posteriormente, dividiram o lucro líquido que queriam ter no final de cada mês por R$ 63,80 (lucro líquido por receita), logo, eles decidiram ter um lucro líquido de R$ 3.000,00 por mês, e então descobriram o quanto cada um iria ganhar. Não é possível saber como o grupo calculou a quantidade de dias e horas trabalhadas, inferimos que os cálculos realizados foram multiplicando as quarenta e sete receitas pelo tempo de produção de uma receita, resultando 55,46 horas, dividindo esse valor pela quantidade de horas trabalhadas por dia, obtiveram o total de 11 dias a ser trabalhados por mês.
Para fazer a produção de quarenta e sete receitas, serão gastos R$ 602,07 que produzirá 1.034 cookies. Conclui-se que os alunos desenvolveram a atividade de forma plausível, realizaram os cálculos matemáticos corretamente se assemelhando com o nosso trabalho final da disciplina de modelagem matemática.

Fonte: Dados da pesquisa

Analisando essa descrição feita por G2, vemos que as estudantes-professoras notaram erros dos alunos e também interpretaram todo o desenvolvimento da atividade, inclusive perceberam semelhanças com a atividade inicialmente desenvolvida por elas na disciplina de Modelagem Matemática. A partir dos dados coletados, não é possível inferir se as estudantes-professoras incentivaram (ou não) a construção de um modelo matemático geral para a obtenção do lucro com a venda dos cookies e do custo total para a produção de uma receita, como elas mesmas fizeram na primeira parte do programa.

No Quadro 17 apresentamos a descrição feita por G2 da atividade desenvolvida por GA9.

Quadro 17: Descrição da atividade desenvolvida por GA9

O grupo determinou os produtos considerando a sua qualidade, além dos produtos presentes na tabela, adicionaram dois produtos o Ovomaltine (500 gramas, R$ 13,00) e Nutella (350 gramas, R$ 23,00). *Os alunos consideraram o valor integral de cada ingrediente mais o gás, para fazer no máximo dez receitas, para saber tal custo eles apenas somaram os valores, não se atentaram que alguns produtos iriam ter uma sobra e outros seriam insuficientes, necessitando fazer a compra novamente. Foi elaborado pela equipe, um suposto plano de venda contendo a quantidade de receitas para o dia, local de venda, tempo de preparo e para a venda.* *Para vender os cookies foram escolhidos valores aleatoriamente, variando de R$ 2,00 a R$ 3,50, contendo sete sabores. Já para o salário, foi calculado uma saída de 20 cookies por dia. Utilizaram quatro possibilidades de venda:* *1) Se cada pessoa comprar um cookie do mais caro por dia;* *2) Se cada pessoa comprar apenas o mais barato;* *3) Se cada pessoa comprar um cookie mais barato e um do mais caro;* *4) Se cada pessoa comprar dois cookies de valores intermediários.* *Em relação aos cálculos, todos foram efetuados com o mesmo raciocínio, multiplicam o valor do cookie por vinte pessoas, em seguida, por cinco dias na semana, posteriormente, por quatro devido ao mês. Contudo, notam-se uns erros, em todas as possibilidades multiplicam por vinte novamente causando um erro no salário, visto que, pegaram todas as possibilidades e subtraiu-se pelo custo de dez receitas, depois dividiram por quatro, com esses valores em mãos fizeram uma média aritmética para descobrir o salário dos quatro integrantes do grupo.* *A partir dessa atividade foi possível perceber que os alunos desse grupo sabem fazer as operações básicas de aritmética, mas apresentaram dificuldades em interpretar os próprios cálculos, visto que realizaram operações desnecessárias, aparentemente sem justificativas, obtendo assim o valor de seus salários de forma errônea, pois este se tornou mais elevado do que realmente deveria ser.*

Fonte: Dados da pesquisa

As estudantes-professoras não notaram os erros cometidos pelos alunos durante a oficina, mas somente depois, quando analisaram o desenvolvimento da atividade para a escrita do relatório de estágio. Isso pode ter ocorrido pelo fator *tempo* da oficina ser curto e por terem pouca experiência com a sala de aula, inclusive com atividades dessa natureza. Elas percebem também que os alunos sabem fazer as operações aritméticas com os números que lhes são dados, porém não sabem o que fazer com os resultados, ou seja, não fazem uma relação correta da matemática com a realidade, apesar de terem algum conhecimento extramatemático para lidar com o problema.

A descrição feita por G2 da atividade desenvolvida por GA10 consta no Quadro 18.

Quadro 18: Descrição da atividade desenvolvida por GA10

O grupo era composto por cinco integrantes e cada um faria duas receitas. Utilizaram tantos produtos baratos quanto mais caros e com isso realizaram uma aproximação das quantidades de produtos necessários para produzirem dez receitas. Considerando a embalagem pelo preço de R$ 1,00, e o valor do cookie por R$ 3,50 a unidade. *Por conseguinte, somaram os valores dos produtos e dividiram por 220 cookies, tentaram calcular o custo do consumo de gás, mas não obtiveram sucesso.* *A tática de venda foi distinta, pois cada membro deveria vender quatro caixas contendo dez cookies, assim o lucro total seria de R$ 770,00, descontando o custo, o lucro líquido total será de R$ 510,35, gerando um salário de R$ 102,00 para cada membro da equipe.*

Fonte: Dados da pesquisa

Por essa descrição é possível inferir que as estudantes-professoras poderiam ter auxiliado o grupo de alunos com o cálculo do consumo de gás, mas por algum motivo isso não aconteceu. Elas não explicam no relatório e no vídeo da oficina não é possível saber se os alunos questionaram sobre o cálculo do consumo de gás.

Em um trecho da oficina, destacamos o seguinte diálogo da estudante-professora com uma aluna de GA10:

> *Ana: Mas R$102,00 para cada um está bom? É suficiente?*
> *A42: Nós só vamos trabalhar para ajudar em casa, porque temos que estudar. O mês que precisar mais, a gente vende mais. Ou se alguém pedir... se quiser comprar, a gente faz.*

Atentamos para este caso que não havia a variável *tempo* no sentido de dias trabalhados, mas sim a variável *quantidade de caixas que as alunas deveriam vender*. A pergunta da estudante-professora talvez estivesse direcionada para o salário mensal, como os outros grupos fizeram, porém, pela resposta da aluna é possível entender que não definiram a quantidade de dias em que vão trabalhar em um mês pois o salário depende indiretamente da necessidade de ajudar financeiramente a família, colocando também a importância do estudo em suas rotinas.

Na Figura 57 apresentamos uma imagem dos alunos desenvolvendo atividades de modelagem matemática durante a oficina de G2.

Figura 57: Alunos desenvolvendo atividades de modelagem matemática

Fonte: Dados da pesquisa

No Quadro 19 apresentamos a descrição feita por G2 da atividade desenvolvida por GA11.

Quadro 19: Descrição da atividade desenvolvida por GA11

O grupo era composto por três integrantes, cada um iria produzir 366 cookies por mês. Foram utilizados produtos baratos e caros. Pretendiam vender 1100 cookies, totalizando a produção de 50 receitas. A venda da unidade do cookie seria de R$ 3,00, tendo um custo médio de R$ 17,39 por receita. *A equipe calculou um salário médio de R$ 953,00 por pessoa, contudo, não consideraram o custo de 50 receitas, e somente para 5 receitas. Consideraram o uso de dois botijões de gás e R$ 110,00 de embalagem. Não apresentaram os cálculos, somente os dados prontos, dificultando o entendimento da matematização.* *O grupo apresentou uma ideia de venda interessante, chegando inicialmente próximo do custo estipulado pelo trabalho final de modelagem, porém descartaram esse valor, visto que quando foram verificar o lucro que obteriam por unidade de cookie os alunos apenas retiraram R$ 0,40 de custo por cookie, quando na verdade este valor teria que ser R$ 0,79.*

Fonte: Dados da pesquisa

Nesta descrição, do Quadro 19, G2 também percebe semelhanças do que GA11 fez com a atividade desenvolvida pelo próprio G2. Assim como aconteceu com outros grupos, os erros cometidos pelos alunos no desenvolvimento da atividade só foram notados após a oficina. As estudantes-professoras utilizam o termo *matematização* na descrição da atividade, mas não é possível inferir se entendem como uma fase da atividade, na qual se fazem hipóteses e simplificações, ou como o trabalho matemático com as operações.

No Quadro 20, apresentamos a descrição da atividade desenvolvida por GA12.

Durante a apresentação de GA12 para turma, destacamos o seguinte diálogo:

Isabela: Quanto é o preço de venda?
A47: R$2,00.
Isabela: Que barato!
A48: É que é um cookie pequenininho!
Isabela: Qual foi o custo por unidade?
A47: R$0,82.
Isabela: Está bem.

Se dividirmos o custo de uma receita (R$18,00) pelo rendimento (22 cookies) temos R$0,82 que é o custo por unidade, ou seja, cada cookie tem o mesmo tamanho dos cookies dos demais grupos. Assim, a justificativa da aluna não está correta. Porém, as estudantes-professoras não atentaram para isso e a discussão foi encerrada neste momento.

Quadro 20: Descrição da atividade desenvolvida por GA12

O grupo era composto por quatro integrantes. Iniciaram fazendo um plano do que seria necessário para abrir uma fábrica de cookies. Os integrantes optaram pelos ingredientes mais baratos. Fizeram a proporção dos ingredientes, para saber o custo exato na quantidade necessária para fazer uma receita. Chegando a um valor de R$ 18,00, incluindo nesta conta o consumo do gás e desconsideraram o gasto com a embalagem. *Os discentes decidiram produzir/vender 110 receitas por mês, o que segundo eles teriam que vender em média cinco receitas por dia e trabalhariam para isso de 5 a 6 horas por dia.* *Para conhecer os seus salários o grupo não indicou os cálculos realizados, apenas apresentou os valores de renda bruta mensal, o lucro total e a renda de cada um, cerca de R$ 705,00, porém tentando reproduzir os possíveis cálculos, verificamos que pode haver um erro, pois o salário obtido a partir das nossas contas seria de R$ 715,00.* *O valor estipulado para venda foi de R$ 2,00 a unidade do cookie, o preço de custo por unidade foi de R$ 0,82, assim o lucro líquido por receita é de R$ 26,00.*

Fonte: Dados da pesquisa

A descrição da atividade desenvolvida por GA13 consta no Quadro 21. Aparentemente os alunos deste grupo não justificam o motivo da escolha dos produtos, pois havia produtos mais caros e outros mais baratos, segundo as estudantes-professoras. G2 afirma que refez os possíveis cálculos realizados pelos alunos, nos casos em que estes não são apresentados, e puderam constatar que provavelmente tenha havido alguns erros.

Quadro 21: Descrição da atividade desenvolvida por GA13

Este grupo não apresentou cálculos, apenas os valores em tópicos e enunciaram o que tais valores seriam. Os produtos escolhidos foram de acordo com o gosto pessoal dos alunos, pois optaram tanto por produtos caros quanto por baratos. Os integrantes decidiram trabalhar apenas nos finais de semanas, vendendo 8 receitas semanalmente, cerca de 32 receitas mensalmente, totalizando 176 cookies por semana. Trabalhando 32h por mês, 5h por dia. Com esta produção a equipe apresentou um custo semanal de R$ 96,15 sem o consumo do gás e um custo mensal de R$ 460,00, para tanto inferimos que eles consideraram a utilização de um botijão de gás por mês, que foi adicionado à conta mensal. Como não foi descrito o valor de venda da unidade do cookie, realizamos alguns cálculos e verificamos que este é de R$4,00. Com uma receita de R$2.816,00 e um custo de R$460,00, o grupo obteve um lucro de R$2.356,00, que foi dividido igualmente entre os quatro integrantes, totalizando R$585,00. *Analisando os valores apresentados pelos alunos e tentando realizar os possíveis cálculos utilizados, percebemos que existem pequenos erros, como por exemplo, o salário que deveria ser de R$589,00 para cada membro, e a quantia de horas trabalhadas, se trabalharem 5h diárias nos fins de semana, considerando quatro ao mês, teriam que trabalhar 40h e não 32, como foi mencionado.*

Fonte: Dados da pesquisa

No Quadro 22 apresentamos a descrição do desenvolvimento da atividade de GA14. Este grupo também não apresentou os cálculos, apenas fez indicações, e o motivo da escolha dos produtos não foi o preço. Porém, eles apresentaram resultados corretos de acordo com as informações e suposições consideradas.

Quadro 22: Descrição da atividade desenvolvida por GA14

O grupo era composto por três integrantes, iniciaram elencando alguns pontos necessários para a fabricação dos cookies. Os ingredientes escolhidos pelos mesmos não seguiram um padrão de preço, acreditamos que tenham escolhido aqueles que sejam mais conhecidos por eles. *Apesar de não apresentar conta alguma, os alunos calcularam o custo de cada ingrediente, na medida necessária para se fazer uma receita, adicionaram também o consumo de gás, obtendo assim R$ 16,19 de custo.* *O grupo estipulou que cada integrante teria um salário de R$ 1.000,00, por serem quatro integrantes, o lucro líquido deve ser de R$ 4.000,00. Para saber qual deveria ser sua produção, eles descobriram que o preço de custo da unidade do cookie seria de R$ 0,85, logo seu lucro seria de R$ 2,15 por unidade, com isso dividiram o lucro desejado por 2,15. Os cálculos apresentados por este grupo estavam todos corretos.* *Esta equipe apresentou um pensamento distinto, pois consideraram que em uma forma caberia uma receita, nesta forma eles teriam um lucro bruto de R$ 66,00 e um lucro líquido de R$ 47,30. E venderiam 4 formas por dia, ou seja, 88 cookies.*

Fonte: Dados da pesquisa

Apresentamos a descrição da atividade desenvolvida por GA15 no Quadro 23. Na descrição feita por G2 existem indícios de que este grupo possui conhecimentos extramatemáticos acerca da situação, como o valor gasto com o ponto comercial.

Quadro 23: Descrição da atividade desenvolvida por GA15

O grupo, primeiramente elencou tópicos importantes para abrir uma loja física e um pequeno plano de vendas. Na sequência foram escolhidos os ingredientes. Os integrantes escolheram os ingredientes de forma aleatória segundo seu gosto pessoal. *O grupo calculou o valor dos ingredientes na quantia necessária para fazer uma receita, determinaram também do consumo do gás. Houve um erro de interpretação e cálculo, pois a equipe considerou o tempo de consumo de gás como 1h e 11min, quando na verdade seria de apenas 15min. O custo por receita ficou sendo então R$ 18,72.* *A equipe considerou fazer oito receitas por dia, trabalhando em média 9h diárias, durante vinte e dois dias por mês, tendo um custo mensal de R$ 3.297,72. O cookie seria vendido por R$ 3,50, obtendo um lucro bruto de R$ 77,00 por receita, e mensalmente este lucro seria de R$13.552,00. Diante disso, retirando o custo com a produção da receita e o gasto com o ponto comercial, restou para eles R$ 7.000,00, a divisão deste valor se deu da seguinte forma: R$ 2.500,00 para o dono do negócio (uma das alunas da equipe) e R$ 900,00 para cada funcionário (outros membros do grupo e pessoas que seriam contratadas).* *O grupo apresentou um pensamento distinto dos demais, pois na sequência imaginaram que seu negócio havia ficado conhecido, então passaram a vender os cookies a R$ 6,00, vendendo 132 receitas por mês, seguindo o mesmo raciocínio anteriormente mencionado inferiram que cada funcionário teria um salário de R$ 2.000,00 e o dono receberia R$ 8.258,00.*

Fonte: Dados da pesquisa

As estudantes-professoras terminam a descrição dessa atividade no relatório de estágio concluindo o que os alunos aparentemente demonstram saber:

> *É possível afirmar, com base nas resoluções, que a maioria dos estudantes demostrou saber fazer as quatro operações, regra de três e a premissa de um planejamento de vendas, mas alguns não lembravam de como efetuar uma divisão com duas casas decimais e apresentaram dificuldades no uso da calculadora. A atividade foi importante para eles pois retrata uma alternativa de profissão, tendo em vista a taxa de desemprego no Brasil por volta de 12%, muitos desempregados buscam uma solução para falta de oportunidade de emprego, abrindo um negócio próprio.*

O grupo G3 também desenvolveu essa atividade com os alunos da 2ª série C durante a oficina de Modelagem Matemática.

5.2.3 Grupo G3 – 2ª série C

A atividade *Fabricação e Venda de Cookies* foi a segunda atividade desenvolvida por G3 (Fernando, Mirian, Susi) na 2ª série C no primeiro dia das oficinas de modelagem matemática.

Cada grupo recebeu um material de apoio que continha a receita para a fabricação dos cookies, uma lista com duas marcas diferentes de cada um dos ingredientes e seus preços para que eles tivessem a liberdade de escolher, como apresentado na Figura 58.

Figura 58: Material de Apoio

FABRICANDO COOKIES

O **salário mínimo** corresponde ao menor valor que o empregador pode pagar aos seus funcionários. Neste ano de 2019 este valor foi fixado em R$998,00. Mas nem todos os brasileiros conseguem suprir suas necessidades financeiras com este salário. Pensando nisto, uma possível fonte de renda foi encontrada, se trata da fabricação e venda de cookies. Mas qual deve ser a produção mínima de cookies para que se receba um salário que ultrapasse o valor do salário mínimo?

Ingredientes retirados do YouTube do canal "Mania de Formiguinha"

- 100 g de margarina sem sal em temperatura ambiente;
- 270 g de farinha de trigo peneirada;
- 50g de açúcar cristal com 50g de açúcar refinada;
- 2 ovos;
- 120g de chocolate ao leite picado;
- 1 colher de café de fermento com 1 colher de café de bicarbonato;

Brigadeiro para rechear:

- 1 caixinha de leite condensado;
- 1 caixinha de creme de leite).

OBS: Rende 22 cookies.

PRODUTO	MARCA	QUANTIDADE	PREÇO (R$)
Margarina	Qualy	500g	5,89
	Doriana	500g	3,79
Farinha de trigo	Sol	5kg	12,99
	Arapongas	5 kg	11,49
Açúcar cristal	Estrela	5kg	7,89
	Alto Alegre	5 kg	9,98
Açúcar refinado	Alto Alegre	1 kg	1,89
	União	1 kg	2,19
Ovo	Caramuru	30 uni	10,98
	Marutani	30 uni	7,89
Chocolate ao leite	Confeiteiro	1,050 kg	27,99
	Harald	1,050 kg	19,98
Fermento químico	Royal	100 g	2,99
	Dona Benta	100g	2,18
Bicarbonato	Kinino	70 g	3,34
	Andorinha	30g	1,38
Leite condensado	Moça	395 kg	4,28
	Piracanjuba	395g	3,89
Creme de leite	Tirol	200 g	2,29
	Líder	200g	2,59
Gás	—	13 kg	75

Fonte: Dados da pesquisa

Ao entregarem o material, Fernando começou a explicar a atividade.

Fernando: Vamos ler juntos e conversar um pouco para vocês entenderem a atividade. [Enquanto lia em voz alta, Fernando parava para conversar com a turma.]
Fernando: Todos sabem o que é cookie? Já comeram? A atividade quer propor de vocês fabricarem cookies. Alguém aqui trabalha? [Alguns poucos alunos levantam a mão.] *Recebem um salário mínimo? Não neh, deve ser menos, porque é só meio período, neh? Mas, o salário mínimo... Vamos dizer assim que é o que estipula o quanto cada pessoa vai receber por determinada função. Uma profissão recebe 1 salário mínimo, outra 2, outra 3. Esse valor mínimo foi fixado em janeiro de 2019 em R$ 998,00. Mas nem todos os brasileiros conseguem suprir as necessidades de suas famílias com esse salário, neh? Pensando nisso, um grupo de meninas da nossa sala, que desenvolveu essa atividade, questionou se daria certo fazer cookies para sobreviver, ou seja, montar uma fábrica de cookies.*
A72: Depende se vai conseguir vender... depende se é gostoso... depende do preço!
Fernando: Então, depende de todas essas variáveis. Pensando nisso, a gente vai ter que tentar fazer um modelo matemático.
A73: Vish! [provavelmente sem saber o que é um modelo matemático]
Fernando: Primeiro vamos pensar qual vai ser a produção mínima para que cada um ganhe um salário mínimo. Conseguem pensar nisso através desses dados? Vocês vão escolher qual marca do ingrediente vocês vão usar, se é o mais barato, o mais conhecido, ou qualquer outro motivo. Prestem também atenção nas quantidades que são necessárias para fazer uma receita.

Os alunos da escola começaram a desenvolver a atividade, com as informações apresentadas no material de apoio, no final do primeiro dia de oficina. No início do 2º dia, essa atividade foi retomada e, após os alunos finalizarem a atividade, os estudantes-professores encaminharam uma discussão sobre os resultados de cada GA.

O grupo de estudantes-professores (G3) fez algumas considerações sobre o desenvolvimento da atividade por GA[28] no relatório de estágio. Apresentamos no Quadro 24 a descrição do desenvolvimento da atividade de GA16.

Quadro 24: Descrição da atividade desenvolvida por GA16

Este grupo tentou realizar a atividade de duas formas: na primeira tentativa, selecionaram a quantidade de ingredientes necessários para fazer 5 receitas e calcularam seus custos. Acrescentaram o valor da embalagem e do forno, e chegaram que ao realizar 5 fornadas por dia iriam obter um lucro de R$ 374,50. Ao vender todos os cookies por R$ 5,50 e realizando a fabricação de segunda a sexta, cada participante do grupo obteria um salário mensal de R$1.490,00. Na segunda tentativa, tentaram chegar no custo unitário de cada cookie. Mas existiram muitos erros de cálculo, o que culminou em resultados incoerentes.

Fonte: Dados da pesquisa

A descrição do desenvolvimento da atividade de GA17 consta no Quadro 25, da atividade de GA18 no Quadro 26 e da atividade de GA19 no Quadro 27.

[28] Os grupos de alunos desta oficina são numerados de GA16 a GA23.

Quadro 25: Descrição da atividade desenvolvida por GA17

Este grupo dividiu todos os ingredientes proporcionalmente para saber qual era o custo de cada fornada e chegaram que cada fornada teria o custo de R$ 11,66, com os ingredientes escolhidos por eles. Decidiram então, fazer 5 fornadas nos dias úteis do mês. Vendendo os cookies a R$ 5,00 cada, obterão um montante de R$ 11.000,00 e, descontando os gastos dos ingredientes, um salário de R$ 2393,00 para cada participante do grupo. Os cálculos realizados foram corretos.

Fonte: Dados da pesquisa

Quadro 26: Descrição da atividade desenvolvida por GA18

Este grupo dividiu todos os ingredientes proporcionalmente para saber qual era o custo de cada fornada e de cada cookie. Concluindo que cada cookie teria um custo de R$0,38. Vendendo os cookies a R$ 5,00, descobriram que teriam que vender 1083 cookies para cada integrante do grupo receber R$ 1000,00, ao final do mês. As estudantes realizaram um cálculo para saber o custo para saber o custo do gás por receita, mesmo com a gente fornecendo esse dado na lousa. O que pode ter ocasionado uma diferença no custo final.

Fonte: Dados da pesquisa

Quadro 27: Descrição da atividade desenvolvida por GA19

Este grupo calculou quantas receitas uma unidade de cada ingrediente conseguiria render e chegaram à conclusão que com R$245,00 produziriam 16 receitas. Acrescentaram o valor da embalagem e do pré-aquecimento do forno, mas não finalizaram a conta. Decidiram vender os Cookies a R$ 3,00 por unidade. Acredito que esse grupo teve um erro na interpretação do exercício e chegaram à quantidade de cookies necessário para ganhar R$ 1056,00 para o grupo todo e não individualmente como era pedido. Não relataram nenhum cálculo.

Fonte: Dados da pesquisa

Apresentamos nos Quadro 28, 29, 30 e 31 as descrições dos desenvolvimentos da atividade de GA20, GA21, GA22 e GA23, respectivamente.

Quadro 28: Descrição da atividade desenvolvida por GA20

Calcularam o custo de cada receita e da unidade do cookie. Obtendo que cada cookie teria o custo de R$ 0,68. Vendendo a unidade do cookie por R$4,50 obteriam um lucro de RS 84,04 caso vendessem 100 cookies. Pensaram em vender 10.000 cookies ao mês para obter um lucro de RS 38.200,00. Fixaram o salário de cada participante em RS 7.000,00 e com o dinheiro que sobraria investiriam na empresa. Realizaram os cálculos corretamente.

Fonte: Dados da pesquisa

Quadro 29: Descrição da atividade desenvolvida por GA21

Este grupo calculou qual o custo de cada receita, que seria de R$ 12,44. Descobrindo que a cada fornada obteriam um lucro de R$ 75,56. Decidiram então realizar 66 receitas por mês, sendo de 3 a 4 por dia. Para obter um salário próximo a R$ 1000,00 para cada funcionário. Na folha de resposta, existiam apenas seis cálculos para saber o custo de cada ingrediente por receita, que estavam corretos.

Fonte: Dados da pesquisa

Quadro 30: Descrição da atividade desenvolvida por GA22

Este grupo decidiu realizar 25 receitas por semana, com o intuito de produzir 2200 cookies por mês. Vendendo cada cookies por R$ 4,50, obteriam um lucro de R$ 8.360,00, descontando as despesas calculadas anteriormente. Indo além do proposto, estes estudantes imaginaram como seria com o passar do tempo o futuro da empresa criadas por eles intitulada como "Paku-Cookies". Os cálculos foram realizados de forma organizado e correto.

Fonte: Dados da pesquisa

Quadro 31: Descrição da atividade desenvolvida por GA23

Este grupo calculou o custo de cada receita e de cada cookie, acrescentando o valor da embalagem e do pré-aquecimento do forno. Nós tínhamos fornecido o dado na qual 15 minutos de pré-aquecimento do forno era suficiente, mas nesse grupo disseram que 10 minutos era suficiente então consideraram que o custo ao pré-aquecer o forno seria de R$ 0,16. Chegando assim que cada cookie teria o custo de R$ 0,68, vendendo cada unidade por R$ 2,00 e produzir 756 cookies para receber R$ 1.020,60 de lucro. Como o grupo 4, realizaram o cálculo para o grupo ganhar um salário mínimo, e não individualmente como pedia no enunciado. Alguns cálculos para saber o custo de cada cookie estavam incorretos, o que influenciou em todos os outros cálculos.

Fonte: Dados da pesquisa

Analisando as descrições feitas por G3, podemos notar que os estudantes-professores deste grupo se preocuparam na escrita do relatório, na maioria das vezes, apenas com a parte matemática da atividade, com os conhecimentos matemáticos desenvolvidos, mas não com os conhecimentos extramatemáticos, como a estratégia utilizada, as escolhas feitas pelos grupos de alunos. Por outro lado, pelos dados coletados e analisados, não é possível afirmar que eles incentivaram (ou não) os alunos a fazerem um modelo matemático que generalizasse a situação.

Ao final da atividade, após as apresentações dos grupos de alunos, no segundo dia de oficina, os estudantes-professores de G3 conversaram sobre a atividade com os alunos:

> *Mirela: Depois nós vamos analisar com calma as resoluções de vocês, se não teve nenhum erro nas contas... Vocês podem ver que os resultados são até próximos, mas não deu exatamente igual. Cada grupo calculou de uma forma diferente, com marcas diferentes, com salário diferente. Esse tipo de atividade que a gente fez ontem e hoje chama modelagem matemática. Alguém, através disso que eu falei e das atividades que vocês fizeram, consegue me dizer o que entenderam por modelagem matemática?*
> *A72: Trabalhar com coisas mais práticas e não só com o conteúdo?*
> *Mirela: Pode ser também neh?* [olhando para os colegas estudantes-professores de G3] *A modelagem matemática envolve uma situação do cotidiano, nossa, nesse caso de vocês, neh? É uma coisa que pode fazer parte da realidade de vocês. A modelagem matemática é quando você resolve coisas do seu dia a dia usando matemática... é resolver um problema usando matemática... e, se as continhas estiverem certas, provavelmente vai estar certa a atividade, porque depende do que cada grupo considerou. Então, mesmo que os resultados sejam diferentes, todos podem estar corretos, dependendo do que cada grupo usou.*

Além de comentar brevemente a atividade de cada GA, G3 fez observações gerais no relatório de estágio, como mostramos no Quadro 32.

Quadro 32: Observações e conclusões de G3

Esta foi a segunda atividade realizada na oficina e aconteceu depois do intervalo. Os alunos demonstraram bastante interesse nesta atividade em que tiveram que calcular a quantidade necessária de cookies para serem fabricados e vendidos, de forma que o lucro atingisse ou ultrapassasse o valor do salário mínimo atualizado em janeiro de 2019. *No decorrer da atividade dois alunos decidiram que queriam trabalhar seis dias na semana e calcularam quanto teriam que fabricar e vender para ganharem R$ 8.000,00 reais por mês. Outros pensaram em trabalhar de segunda a sexta-feira e calcularam a quantidade necessária de fabricação e venda para que cada integrante obtivesse pelo menos um salário mínimo.* *Durante a resolução dos cálculos um grupo pensou no custo do gás não somente para assar os cookies, pois essa informação já lhes fora oferecida, mas também no custo do pré-aquecimento do forno.* *Ao final do dia, alguns grupos ainda não tinham concluído a modelagem então propusemos disponibilizar 10 minutos no dia seguinte para todos finalizarem. E em seguida, realizar as discussões.* *Nestas discussões apareceram cookies de R$2,00 até R$4,50 reais, sendo que alguns pensavam nos ingredientes mais caros para fabricação e outros intercalavam entre um mais caro e outro mais barato, e isso influenciou no preço de venda de cada cookie. Alguns alunos comentaram que seria legal abrir uma empresa, mas não aprofundaram seus cálculos sobre essa ideia. Outros calcularam para trabalharem individualmente, enquanto alguns pensavam em todos os integrantes dos grupos trabalhando ao mesmo tempo.* *A atividade foi concluída de forma satisfatória para os professores estagiários e aparentemente para os alunos, pois o processo de resolução apresentou bastante participação dos estudantes e a discussão foi interativa e produtiva.* *Os resultados obtidos foram produtivos, pois já tinham uma noção de como trabalhar com modelagem. Alguns esquecerem de entregar os cálculos e apresentaram apenas alguns dos resultados, outros não produziram cookies suficientes para obterem pelo menos um salário mínimo, e uma solução talvez seria aumentar o valor de produto. E, ainda, outros erraram na soma dos ingredientes. Por outro lado, alguns alunos consideraram que o custo de pré-aquecimento do gás deveria ser considerado, outros pensaram que seria interessante abrir uma empresa no qual deram o nome de Paku-Cookies, mas não foram mais além do nome. E ainda outros iniciaram a atividade obtendo o valor dos ingredientes por receita. De modo geral, esta atividade foi a que obteve melhor participação e aceitação da turma, o que rendeu melhores resultados.*

Fonte: Dados da pesquisa

Essas observações apresentadas por G3 apresentam indícios de que a atividade *Fabricação e Venda de Cookies* teve a participação dos alunos, pois poderia fazer parte da realidade deles e era a segunda atividade da oficina. Porém, alguns alunos não se atentaram para o que era pedido, como um salário mínimo para cada integrante, e outros cometeram erros nos cálculos.

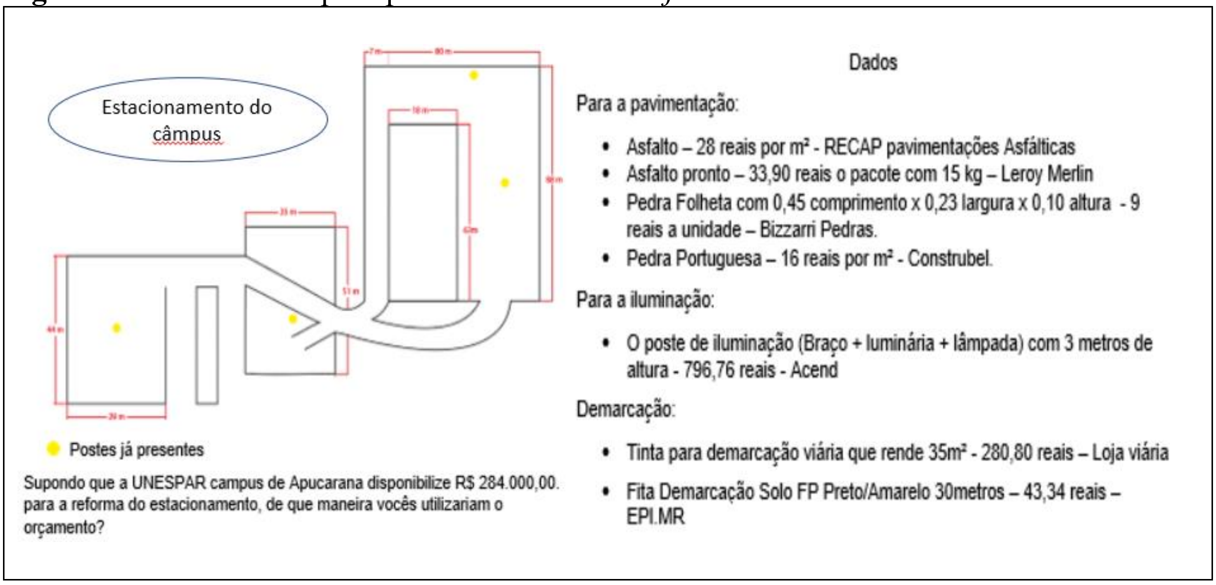
5.3 *PÉ SUJO DE BARRO? NUNCA MAIS!* - NO CONTEXTO DE ENSINO

A atividade *Pé sujo de barro? Nunca mais!,* desenvolvida por G3 na disciplina de Modelagem Matemática, foi escolhida por este mesmo grupo para dar início ao estágio na 2ª série C.

Primeiramente os estudantes-professores se apresentaram e pediram que os alunos da escola formassem grupos de no máximo cinco integrantes e deram início à atividade sobre a reforma do estacionamento da universidade. Como muitos alunos daquela turma não conheciam o câmpus, os estudantes-professores mostraram fotos e falaram um pouco sobre a universidade, desde sua fundação até o momento atual, e os cursos oferecidos, pois em breve aqueles alunos poderiam cursar uma graduação naquele câmpus. Com isso, os estudantes-professores queriam motivar os alunos para a atividade de modelagem matemática.

Apresentaram, utilizando o projetor, as informações necessárias para a realização da primeira atividade, os resultados da pesquisa sobre o estacionamento realizada com os estudantes do câmpus (que continham os tipos de transportes utilizados pelos universitários do período noturno, algumas sugestões destes universitários para melhoria dos estacionamentos do campus, melhor iluminação, segurança e etc.) e explicaram como chegaram à problemática: *Supondo que o câmpus da universidade disponibilize R$ 300.000,00 para a reforma do estacionamento, de que maneira vocês utilizariam o orçamento?* Entregaram aos alunos uma folha contendo o desenho do estacionamento da universidade e dados que poderiam ser úteis para o desenvolvimento da atividade, como mostramos na Figura 59.

Figura 59: Material de apoio para a atividade *Pé sujo de barro? Nunca mais!*



Fonte: Dados da pesquisa

A atividade foi desenvolvida por aproximadamente duas horas. Nos primeiros instantes, era possível perceber expressões de dúvidas por parte dos alunos da turma em como prosseguir a atividade. Segundo o relatório de estágio dos próprios estudantes-professores, “esses questionamentos aos poucos foram sendo sanados com mais perguntas, realizadas por nós, a fim de estimular os alunos a pensarem e desenvolverem formas autorais para a solução da problemática” (Relatório de estágio de G3).

Essa dificuldade encontrada pelos alunos da escola em desenvolver a atividade pode ser justificada à falta de familiaridade com esse tipo de atividade e também à ansiedade e falta de experiência dos estudantes-professores em conduzirem atividade de modelagem matemática, pois até o momento eles tinham desenvolvido atividades dessa natureza enquanto estudantes, mas não como professores. Isso pode ser confirmado por trechos dos relatórios de estágio de G3 com relação a essa atividade, apresentados no Quadro 33.

Quadro 33: Conclusões sobre o desenvolvimento da atividade

Nessa primeira modelagem, os estudantes estavam um pouco “perdidos” por não saberem o que era exatamente uma atividade de modelagem matemática.

O início pareceu confuso, pois os alunos ainda não haviam trabalhado com a modelagem e precisaram ser norteados, e então foram auxiliados pelos professores neste processo.

Embora os professores estivessem sempre auxiliando de grupo em grupo, eles se sentiram cansados e alguns até desanimados, mas todos os grupos concluíram a atividade.

No decorrer da atividade eles nos questionavam bastante se estavam fazendo de forma correta.

[...] foi realizado um momento de discussão dos resultados obtidos. Nesta discussão nenhum grupo ultrapassou o valor máximo estipulado para ser gasto com a reforma, mas alguns exageraram na quantidade de postes a serem colocados. De forma geral, os resultados foram bons.

Eles apresentaram dificuldades com o cálculo de uma das áreas que se tratava de uma curva, mas foram orientados a tratar como círculo ou aproximarem como retângulo, e com a demarcação das vagas para os estacionamentos.

Os resultados obtidos foram razoáveis, e isso não tem relação com os cálculos errados de alguns grupos, ou erro na substituição de algumas fórmulas. Mas se deve ao fato de que a metodologia de modelagem era uma experiência nova para os alunos, e também para os professores estagiários.

[...] explicamos então o que era a modelagem matemática, falamos que cada grupo resolveria de uma forma, que mesmo os resultados estando diferentes, não significava que estavam errados.

*[...] no decorrer da modelagem, percebemos que existiam falhas nesta atividade elaborada por nós. Falta de alguns dados e discrepâncias no desenho apresentado foram as maiores falhas cometidas por nós, por falta de experiência[...]
Mas contornamos a situação colocando os dados no quadro e corrigindo o desenho em todos os grupos.*

Apesar de ser uma atividade trabalhosa e de todos os percalços, os estudantes se mostraram empenhados em resolver e os grupos obtiveram resultados e percepções diferentes em relação a modelagem.

Fonte: Dados da pesquisa

Apresentamos no Quadro 34 algumas considerações sobre o desenvolvimento da atividade por GA[29] que constam no relatório de estágio de G3.

[29] Os grupos de alunos desta oficina são numerados de GA16 a GA23.

Quadro 34: Descrição da atividade desenvolvida pelos 8 grupos de alunos da 2ª C

Os estudantes apresentaram corretamente o cálculo das áreas, exceto da curva pois utilizaram a fórmula do comprimento da circunferência ao invés da fórmula da área do círculo. Não apresentaram os cálculos que justifiquem os resultados finais obtidos acerca da demarcação das vagas, e não relataram a quantidade de postes escolhida, apresentaram apenas o resultado do custo. E o gasto total para a reforma dos estacionamentos foi de R$282.963,00.

Este grupo apresentou corretamente o cálculo de todas as áreas, das demarcações e da iluminação. Obteve um gasto total de R$173.644,34.

Alguns resultados parecem corretos, mas os cálculos não são apresentados. Chegam a um gasto total de R$203.615,00.

O cálculo das áreas foi efetuado corretamente, exceto da curva pois na tentativa de aproximar com a área de um retângulo somado com a área de um trapézio, não efetuaram primeiro a soma que deveria estar entre parênteses na substituição, mas fizeram a multiplicação primeiro. E isso resultou em uma área total incorreta. Quanto a demarcação das vagas, foram feitos cálculos corretos. Utilizaram quatro postes para solucionar o problema da iluminação. E o gasto total para a reforma foi de R$164.983,00.

Os únicos cálculos apresentados no trabalho deste grupo foi o da demarcação das vagas, e o resultado de uma das áreas. A demarcação das vagas está correta, mas a área não, pois o que pode ter acontecido é que eles não tenham subtraído a área do auditório Gralha Azul. Na soma total dos gastos um valor foi apresentado sem justificativa, mas como existem quatro pontos espalhados no desenho dos estacionamentos, pode ter acontecido de terem escolhido quatro postes para melhorar a iluminação, pois se multiplicado o custo de um poste por quatro, o resultado é igual ao apresentado na soma total.

Existe erro apenas na área da curva e na demarcação das vagas. O erro na área da curva se deu ao considerarem como área de um trapézio, e se esqueceram que era necessário multiplicar por ½ de acordo com a fórmula. E sobre a demarcação das vagas, pode ter acontecido de não considerarem o fato de que, para fazer duas vagas não são necessárias quatro faixas, mas somente 3, pois uma das faixas estará no meio dos carros. É importante observar que consideraram o valor dos postes de iluminação como R$800,00, isto é, pagaram R$22,68 a mais do que o necessário.

Os cálculos das áreas estão corretos, mas ao calcularem o custo para a demarcação das vagas, não observaram que existe uma quantidade de vagas que cabem em cada área. Aparentemente, esta quantidade foi escolhida de forma aleatória.

As somas do valor total para a pavimentação foram efetuadas erradas, e faltam cálculos que justifiquem alguns resultados apresentados.

Fonte: Dados da pesquisa

A partir das observações dos estudantes-professores sobre essa atividade, é possível notar que houve preocupação com cálculos incorretos, os quais não foram notados durante a oficina, mas somente depois quando fizeram a correção da atividade para colocar no relatório de estágio. Houve também a preocupação com conhecimentos extramatemáticos, como a colocação dos postes ou a faixa para divisão das vagas do estacionamento.

Finalizaram a atividade com a apresentação de todos os grupos e explicando para os alunos um pouco sobre o que entendem por modelagem matemática e que aquela era uma atividade dessa natureza.

No relatório de estágio, os estudantes-professores consideraram ainda que a atividade teve outros pontos positivos como "[...] a revisão de alguns conteúdos matemáticos, a apresentação do câmpus da universidade aos alunos, de modo que todos pudessem conhecer os cursos oferecidos, e um pouco de sua história. Aprendemos com esta nova experiência, e isso contribuiu para as outras atividades" (Relatório de estágio de G3).

Na Figura 60 apresentamos uma imagem dos alunos da 2ª C desenvolvendo atividades de modelagem matemática, com o auxílio dos estudantes-professores.

Figura 60: Alunos da 2ª C desenvolvendo atividades de modelagem matemática

Fonte: Dados da pesquisa

6 AUTENTICIDADE NAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA DESENVOLVIDAS NOS DOIS CONTEXTOS

Neste capítulo analisamos as atividades de modelagem matemática desenvolvidas nos dois contextos, o *Contexto de Aprendizagem* e o *Contexto de Ensino*, com a finalidade de buscar nos procedimentos dos estudantes (estudantes-professores) indícios de autenticidade nas atividades desenvolvidas.

Para buscar evidências de autenticidade nas atividades de modelagem matemática nestes dois contextos, usamos os seis atributos elaborados e apresentados no Capítulo 3 deste relatório, bem como a sua valoração conforme discutimos naquele capítulo. Os seis atributos são:

(1) A matemática usada na atividade de modelagem matemática emergiu das necessidades da abordagem matemática da situação.

(2) Os estudantes que desenvolvem a atividade experimentam diferentes estratégias e ferramentas (matemáticas, tecnológicas e empíricas), analisam os resultados parciais e os incrementam quando necessário.

(3) As simplificações que conduzem a uma situação idealizada não descaracterizam a situação da realidade.

(4) No desenvolvimento da atividade de modelagem, as escolhas pedagógicas não se sobressaem frente às necessidades da abordagem matemática da situação da realidade.

(5) Há um equilíbrio entre a orientação do professor e a autonomia do estudante de modo que prevalece a segunda.

(6) Os resultados obtidos pela modelagem matemática da situação alcançam interesses e geram discussões que extrapolam a sala de aula.

Atribuímos valor **0** quando a atividade não atende ao atributo relativo à autenticidade, **1** quando atende parcialmente ao atributo, **2** quando a atividade atende integralmente ao atributo de autenticidade. Isso nos permite inferir que à atividade de modelagem matemática podemos atribuir um nível de autenticidade de modo que quanto mais ela atende aos atributos, mais elevado é esse nível de autenticidade.

Para mensurar a autenticidade das atividades usamos uma escala em que atribuímos valor à ocorrência da autenticidade. Em cada atividade de modelagem matemática, a pontuação mínima em conformidade com cada atributo é **0** (quando não atende a atributo algum) e a pontuação máxima é **12** (quando atende a todos os atributos integralmente). Assim, consideramos níveis crescentes de autenticidade de modo que o *Nível 1* inclui pontuação de 0 a 3 acerca dos atributos, no *Nível 2* os valores estão entre 4 e 8 e o *Nível 3* está no intervalo de 9 a 12, como esclarecemos no Quadro 8, da página 49.

6.1 No Contexto De Aprendizagem

Realizamos nesta seção a análise de cada uma das atividades descritas no Capítulo 4.

6.1.1 Autenticidade na Atividade *Monumento ao Boné*

A atividade com o tema *Monumento ao Boné* refere-se ao 1º momento de familiarização dos alunos com a modelagem matemática. Conforme descrito na seção 4.1, cada grupo formulou um problema diferente a partir da temática sugerida pela professora. Trata-se de um tema interessante para as pessoas que moram ou estudam na cidade de Apucarana, considerando sua relevância para a situação econômica da cidade. Por isso, podemos afirmar que esta situação faz parte da realidade desses estudantes-professores, pois todos sabem que a produção de bonés é importante para a economia do município.

A partir da discussão sobre o tema com os estudantes-professores e de buscas realizadas em sites da internet, G1 queria saber se o boné serviria na estátua do Cristo Redentor. Com cálculos simples de proporção, chegaram à conclusão de que deveria ser uma estátua maior. Por isso, pesquisaram as alturas de outras estátuas famosas no mundo e calcularam as medidas das circunferências das cabeças dessas estátuas por proporção. Desse modo, a resolução do problema formulado se deu a partir das informações obtidas e da matematização, ou seja, o conteúdo matemático não foi pré-definido para essa atividade.

Da mesma forma, o grupo G2 utilizou matemática da Educação Básica para solucionar o problema (Quanto de tinta é necessário para fazer a revitalização do *Bonezão?)*, que é possível de acontecer na realidade, considerando a necessidade de manutenção no monumento. A coleta de dados foi realizada no site da prefeitura da cidade, e em notícias publicadas no jornal local. Além disso, este grupo também utilizou as medidas de um boné usado por um dos estudantes-professores da turma no dia do desenvolvimento da atividade. As estudantes-professoras calcularam as proporções do boné com relação ao todo para determinarem a área total da semiesfera e do prisma retangular.

Assim, o atributo 1 de autenticidade (A matemática usada na atividade de modelagem matemática emergiu das necessidades da abordagem matemática da situação) é integralmente contemplado na atividade dos grupos G1 e G2. Porém, na atividade do grupo G3 este atributo não é contemplado. Primeiramente porque o problema formulado por G3 (O *Bonezão* precisa ser colocado em uma caixa, a qual será usada para guardar a maior quantidade possível de bonés em caixas de tamanho adulto padrão. Quais as medidas da caixa e quantos bonés podem ser colocados nela?) é praticamente impossível de acontecer na vida real e pode comprometer a atividade quanto a sua natureza, por se assemelhar a um problema de aplicação. Além disso, a fala dos estudantes-professores de G3 durante a apresentação da atividade deixa indícios de que o problema foi formulado com vistas a aplicar o conteúdo matemático (cálculo de volume).

Os estudantes-professores de G3 consideraram que é necessário colocar os bonés em caixas em formato de prisma retangular e por isso seria necessário encontrar o volume dessas caixas. Como o problema parece ser "fechado", é possível inferir que não houve tentativas de estratégias diferentes para a obtenção do modelo matemático e, por isso, o atributo 2 (Os estudantes que desenvolvem a atividade experimentam diferentes estratégias e ferramentas (matemáticas, tecnológicas e empíricas), analisam os resultados parciais e os incrementam quando necessário) também não é contemplado na atividade de G3.

Já nas atividades desenvolvidas por G1 e G2 o atributo 2 é parcialmente contemplado. Ambos os grupos utilizaram matemática da Educação Básica para solucionar o problema e não fizeram outras tentativas ou incrementos na resolução do problema. Como são estudantes do Ensino Superior, poderiam ter utilizado ferramentas matemáticas para calcular a área da curva que representa a aba do boné, mas utilizaram-se apenas da matemática estudada na Educação Básica para determinar a área.

Os estudantes-professores de G1 mediram a regulagem de um boné que um dos estudantes-professores do grupo usava no dia do desenvolvimento da atividade para calcular um intervalo de medidas para a circunferência da cabeça das estátuas, pois chegaram ao resultado de que o *bonezão* não serviria no Cristo Redentor, ou seja, a partir de um primeiro resultado, buscaram outra estratégia para construir o modelo e resolver o problema. A estratégia de medir um boné usado por um estudante também foi utilizada por G2 e foi importante para se obter as proporções de cada parte do boné com relação ao todo e, portanto, para o cálculo das áreas e para a obtenção do modelo matemático.

As hipóteses formuladas pelas estudantes-professoras de G2 para a situação foram: o *bonezão* é uma semiesfera de raio 5,29m; a aba de um boné tem o formato retangular e suas medidas seguem a seguinte proporção: espessura: 1,9%; largura: 60,4%, comprimento: 24,5%. As estudantes-professoras de G2 queriam fazer a medição no próprio monumento, porém, não teriam possibilidade de ir até o local em um curto prazo, por residirem em outras cidades e estudarem em Apucarana. Por isso, praticamente todas as medidas utilizadas para o cálculo das áreas foram obtidas por meio das simplificações realizadas e hipóteses assumidas, como considerar que a aba do boné teria formato de um prisma retangular e desconsiderar as diferentes cores de tintas necessárias para pintar o monumento.

Ponderamos, portanto, que as hipóteses e simplificações podem ter afetado a autenticidade e, desse modo, consideramos que o atributo 3 (As simplificações que conduzem a uma situação idealizada não descaracterizam a situação da realidade) não foi atendido.

A atividade desenvolvida por G3 também não atendeu ao atributo 3, pois as simplificações ocorreram nos dados utilizados e na formulação do próprio problema.

Já a atividade desenvolvida por G1 contempla parcialmente o atributo 3, uma vez que foram feitas algumas aproximações importantes para o desenvolvimento da atividade, mas que podem distorcer a situação da realidade, como haver um intervalo de medidas para a circunferência da cabeça da estátua que vai *vestir* o *Bonezão*.

Conforme apresentado no Capítulo 4, o grupo G3 pretendia investigar a influência econômica da produção de bonés para o município, porém, por falta de dados disponíveis na internet e tempo insuficiente, G3 teve que formular outro problema para resolver e finalizar a atividade. Além disso, o desenvolvimento da atividade entregue por G3 foi influenciado pela escolha do conteúdo matemático, pois o problema foi formulado aparentemente com vistas ao cálculo de volume de um paralelepípedo.

Por isso, consideramos que o atributo 4 (No desenvolvimento da atividade de modelagem, as escolhas pedagógicas não se sobressaem frente às necessidades da abordagem matemática da situação da realidade) não foi atendido na atividade de G3 e foi parcialmente atendido na atividade de G2. Aspectos como: o espaço da sala de aula, o câmpus ser afastado do centro da cidade, a impossibilidade de buscar informações em outros ambientes que não fossem sites da internet e por se tratar de um curso no período noturno, pode ter afetado a autenticidade na atividade para os grupos G2 e G3, mesmo que eles tivessem no mínimo 3 horas para o desenvolvimento da atividade (excluindo a apresentação e discussão com a turma) e o fato de todos os grupos terem celular ou notebook com acesso à internet *wi-fi* do câmpus da universidade. Desse modo, podemos inferir que as escolhas pedagógicas parecem ter influenciado os desenvolvimentos da atividade dos dois grupos. Já a análise dos dados coletados sobre o desenvolvimento da atividade de G1 não nos possibilita inferir que as escolhas pedagógicas se sobressaíram às outras escolhas para o desenvolvimento da atividade. Portanto, consideramos que o atributo 4 foi integralmente atendido no desenvolvimento da atividade de G1.

O atributo 5 (Há um equilíbrio entre a orientação do professor e a autonomia do estudante de modo que prevalece a segunda) foi considerado parcialmente contemplado nas atividades dos três grupos, pois este atributo está relacionado à autonomia dos estudantes-professores frente à atividade e ao posicionamento da professora. Por se tratar de uma atividade de 1º momento de familiarização dos alunos com a modelagem matemática, a situação-problema e os dados foram propostos pela professora. A professora deixou que os estudantes-professores ficassem livres para desenvolver a atividade, de modo que cada grupo elaborasse o problema que queria solucionar, e os orientava quando questionavam algo sobre os dados ou a situação.

A professora considera que poderia ter incentivado os estudantes-professores de G3 a formular outro problema, uma vez que o problema formulado dificilmente seria necessário solucionar na vida real, o que nos leva a ponderar que o atributo 6 (Os resultados obtidos pela modelagem matemática da situação alcançam interesses e geram discussões que extrapolam a sala de aula) não foi contemplado na atividade de G3.

Apesar de as discussões extramatemáticas promovidas por esta atividade serem bastantes relevantes, para qualquer nível de escolaridade e também para o curso de formação de professores, os grupos G1 e G2 também não discutiram os resultados com base nos impactos que uma atividade de modelagem matemática pode gerar fora da escola. Na atividade de G1, a realidade e a matemática foram relacionadas em alguns momentos: concepção do tema (monumento); informações utilizadas, com exceção de algumas aproximações realizadas, o final da atividade (busca da estátua). Porém, consideramos que o problema formulado por G1 também não é coerente com a realidade, pois seria praticamente impossível alguém querer saber em qual estátua o boné serviria. Essa questão surgiu a partir da discussão sobre o tema com os estudantes-professores e de buscas realizadas em sites da internet. Há também a possibilidade de estes estudantes-professores terem sido influenciados pela atividade apresentada no texto de Blum (2015) *Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do?* na qual se evidencia a busca pelo gigante que seria dono de uma escultura em forma de picareta na cidade de Kassel.

Na atividade de G2, o atributo 6 foi parcialmente contemplado, pois o grupo chegou à conclusão de que seriam necessárias 2 latas de tinta para duas demãos, mas não levaram em conta que a pintura deveria ser em cores diferentes.

É possível que, por ter sido a primeira atividade desenvolvida e os entendemos que os estudantes-professores não estarem familiarizados com as fases do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, não houve no relatório dos estudantes-professores menção às fases da modelagem matemática.

Nos Quadros 35, 36 e 37 apresentamos os valores conferidos a cada atributo de autenticidade, juntamente com a sua justificativa e o nível resultante, na atividade de G1, G2 e G3, respectivamente. A partir da análise dos atributos de autenticidade na atividade *Monumento ao Boné* desenvolvida por cada grupo, estabelecemos os níveis de autenticidade.

Quadro 35: Autenticidade na atividade *Monumento ao Boné* desenvolvida por **G1** no Contexto de Aprendizagem

	Atributos de autenticidade	**Valor atribuído**	**Descrição**
1	A matemática usada na atividade de modelagem matemática emergiu das necessidades da abordagem matemática da situação.	2	A partir da discussão sobre o tema com os estudantes e de buscas realizadas em sites da internet, G1 queria saber se o boné serviria na estátua do Cristo Redentor. Com cálculos simples de proporção, chegaram à conclusão de que deveria ser uma estátua maior. Por isso, pesquisaram as alturas de outras estátuas famosas no mundo e calcularam as medidas das circunferências das cabeças dessas estátuas por proporção. O conteúdo matemático não foi pré-definido para essa atividade. A resolução se deu a partir das informações obtidas e da matematização.
2	Os estudantes que desenvolvem a atividade experimentam diferentes estratégias e ferramentas (matemáticas, tecnológicas e empíricas), analisam os resultados parciais e os incrementam quando necessário.	1	O grupo utilizou apenas matemática da Educação Básica para solucionar o problema. Como o *bonezão* não serviria no Cristo Redentor, os estudantes-professores mediram a regulagem de um boné que um dos estudantes-professores do grupo usava no dia do desenvolvimento da atividade para calcular um intervalo de medidas para a circunferência da cabeça das estátuas. Ou seja, a partir de um primeiro resultado, buscaram outra estratégia para construir o modelo e resolver o problema.
3	As simplificações que conduzem a uma situação idealizada não descaracterizam a situação da realidade.	1	As hipóteses formuladas pelos estudantes-professores para a situação foram: a estatura de uma pessoa (ou estátua) influencia diretamente no tamanho da sua cabeça; a cabeça é uma esfera; a circunferência da cabeça da estátua é proporcional à circunferência média da cabeça do brasileiro; o boné (exceto a aba) é uma semiesfera e seu diâmetro é a largura. Algumas simplificações foram necessárias, como considerar um intervalo de medidas para a estatura da estátua.
4	No desenvolvimento da atividade de modelagem, as escolhas pedagógicas não se sobressaem frente às necessidades da abordagem matemática da situação da realidade.	2	Os conteúdos matemáticos envolvidos na atividade são todos da Educação Básica, como razão e proporção e comprimento da circunferência. Por isso, a atividade pode contribuir para os estudantes-professores ensinarem e até mesmo aprenderem matemática. Os grupos tiveram no mínimo 3 horas para o desenvolvimento da atividade, excluindo a apresentação e discussão com a turma. Todos os grupos tinham celular e notebook com acesso à internet *wi-fi* do campus da universidade, o que possibilitou ampla pesquisa sobre o assunto.
5	Há um equilíbrio entre a orientação do professor e a autonomia do estudante de modo que prevalece a segunda.	1	A situação-problema e os dados foram propostos pela professora. Os estudantes-professores ficaram livres para desenvolver a atividade, de modo que cada grupo elaborasse o problema que queria solucionar. A professora os orientava quando questionavam algo sobre os dados ou a situação.
6	Os resultados obtidos pela modelagem matemática da situação alcançam interesses e geram discussões que extrapolam a sala de aula.	0	A realidade e a matemática foram relacionadas em alguns momentos: concepção do tema (monumento); informações utilizadas, com exceção de algumas aproximações realizadas, o final da atividade (busca da estátua). Porém, consideramos que o problema formulado pelos estudantes-professores não é coerente com a realidade, pois seria praticamente impossível alguém querer saber em qual estátua o boné serviria.
	Resultado	**7**	**Nível 2 de autenticidade**

Fonte: Dados da pesquisa

Quadro 36: Autenticidade na atividade *Monumento ao Boné* desenvolvida por **G2** no Contexto de Aprendizagem

	Atributos de autenticidade	Valor Atribuído	Descrição
1	A matemática usada na atividade de modelagem matemática emergiu das necessidades da abordagem matemática da situação.	2	O conteúdo matemático não foi pré-definido para essa atividade. A resolução se deu a partir das informações obtidas e da matematização. O grupo utilizou apenas matemática da Educação Básica para solucionar o problema formulado, o qual pode ocorrer na vida real. A coleta de dados foi realizada em sites da internet, como o site da prefeitura da cidade, e em notícias publicadas no jornal local. Além disso, este grupo também utilizou as medidas de um boné que um dos estudantes da turma utilizava no dia do desenvolvimento da atividade. As estudantes calcularam as proporções do boné com relação ao todo para calcularem a área total da semiesfera e do prisma retangular. Assim, puderam saber quanto de tinta seria necessário para a revitalização do monumento.
2	Os estudantes que desenvolvem a atividade experimentam diferentes estratégias e ferramentas (matemáticas, tecnológicas e empíricas), analisam os resultados parciais e os incrementam quando necessário.	1	O modelo matemático construído para calcular a área total do monumento, ou seja, útil para solucionar o problema, não está destacado como um modelo, mas implícito na fala de uma das estudantes-professoras. Ele consiste na soma das áreas (semiesfera e prisma retangular) obtidas, excluídas duas vezes a área entre esses dois sólidos. A estratégia de medir um boné usado por um estudante foi importante para se obter as proporções de cada parte do boné com relação ao todo e, portanto, para o cálculo das áreas.
3	As simplificações que conduzem a uma situação idealizada não descaracterizam a situação da realidade.	0	As hipóteses formuladas pelas estudantes-professoras para a situação foram: O bonezão é uma semiesfera de raio 5,29m. A aba de um boné tem o formato retangular e suas medidas seguem a seguinte proporção: espessura: 1,9%; largura: 60,4%, comprimento: 24,5%. As estudantes-professoras de G2 queriam fazer a medição no próprio monumento, porém, não teriam possibilidade de ir até o local em um curto prazo, por residirem em outras cidades e apenas estudarem em Apucarana.
4	No desenvolvimento da atividade de modelagem, as escolhas pedagógicas não se sobressaem frente às necessidades da abordagem matemática da situação da realidade.	1	Aspectos como: o espaço da sala de aula, o câmpus ser afastado do centro da cidade, a impossibilidade de buscar informações em outros ambientes que não fossem sites da internet e por se tratar de um curso no período noturno, pode ter afetado a autenticidade na atividade de G2. Para calcularem a área que receberia a pintura, o ideal seria medir o monumento original, mas pelo fator tempo e disponibilidade não foi possível fazer a medição. Então tiveram que fazer uma comparação com um boné no tamanho "normal", o que pode levar a resultados não tão exatos.
5	Há um equilíbrio entre a orientação do professor e a autonomia do estudante de modo que prevalece a segunda.	1	A professora deixou que os estudantes-professores ficassem livres para desenvolver a atividade, de modo que cada um elaborasse o problema que queria solucionar, e os orientava quando questionavam algo sobre os dados ou a situação. Os grupos tiveram no mínimo 3 horas para o desenvolvimento da atividade, excluindo a apresentação e discussão com a turma. Todos os grupos tinham celular e notebook com acesso à internet *wi-fi* do campus da universidade, o que possibilitou ampla pesquisa sobre o assunto.
6	Os resultados obtidos pela modelagem matemática da situação alcançam interesses e geram discussões que extrapolam a sala de aula.	1	As discussões extramatemáticas promovidas por esta atividade são bastantes relevantes, para qualquer nível de ensino e também para o curso de formação de professores. G2 não validou o modelo e nem o identificou. Chegaram à conclusão de que seriam necessárias 2 latas de tinta para duas demãos, mas não levaram em conta que a pintura deveria ser em cores diferentes.
	Resultado	**6**	**Nível 2 de autenticidade**

Fonte: Dados da pesquisa

Quadro 37: Autenticidade na atividade *Monumento ao Boné* desenvolvida por **G3** no Contexto de Aprendizagem

	Atributos de autenticidade	**Valor Atribuído**	**Descrição**
1	A matemática usada na atividade de modelagem matemática emergiu das necessidades da abordagem matemática da situação.	0	A coleta de dados foi realizada em *sites* da internet, como o *site* da prefeitura da cidade, e em notícias publicadas no jornal local. G3 considerou que o *Bonezão* tem as seguintes dimensões: 9m de largura; 2,7m de base de sustentação; 14m de comprimento (9m da aba e 5 m de altura) e consideraram que a caixa deveria ter 1 m a mais em cada uma das dimensões. A fala dos estudantes-professores de G3 durante a apresentação da atividade deixa indícios de que o problema foi formulado com vistas a aplicar o conteúdo matemático (cálculo de volume). O problema formulado por G3 é praticamente impossível de acontecer na vida real e pode comprometer a atividade quanto a sua natureza, por se assemelhar a um problema de aplicação.
2	Os estudantes que desenvolvem a atividade experimentam diferentes estratégias e ferramentas (matemáticas, tecnológicas e empíricas), analisam os resultados parciais e os incrementam quando necessário.	0	Os estudantes-professores não formularam hipóteses. Apenas consideram que é necessário colocar os bonés em caixas em formato de prisma retangular. O modelo matemático construído consiste em uma expressão para calcular o volume das caixas em formato de paralelepípedos
3	As simplificações que conduzem a uma situação idealizada não descaracterizam a situação da realidade.	0	As simplificações ocorreram nos dados utilizados e na formulação do próprio problema.
4	No desenvolvimento da atividade de modelagem, as escolhas pedagógicas não se sobressaem frente às necessidades da abordagem matemática da situação da realidade.	0	O problema foi formulado aparentemente com vistas ao cálculo de volume de um paralelepípedo, ou seja, o desenvolvimento da atividade foi influenciado pela escolha do conteúdo matemático. Além disso, a falta de dados para o problema inicialmente pensado pelo grupo no tempo estipulado pode ter contribuído para que a atividade desse grupo não tenha atingido o sucesso esperado.
5	Há um equilíbrio entre a orientação do professor e a autonomia do estudante de modo que prevalece a segunda.	1	Os grupos tiveram no mínimo 3 horas para o desenvolvimento da atividade, excluindo a apresentação e discussão com a turma. Todos os grupos tinham celular e notebook com acesso à internet *wi-fi* do campus da universidade, o que possibilitou ampla pesquisa sobre o assunto. A professora deixou que os estudantes-professores ficassem livres para desenvolver a atividade, de modo que cada um elaborasse o problema que queria solucionar, e os orientava quando questionavam algo sobre os dados ou a situação. A professora poderia ter incentivado os estudantes-professores a formularem outro problema.
6	Os resultados obtidos pela modelagem matemática da situação alcançam interesses e geram discussões que extrapolam a sala de aula.	0	O problema formulado dificilmente serio necessário solucionar na vida real, ou seja, o objetivo da atividade desenvolvida seria aplicar a matemática, mais precisamente o cálculo de volume, como afirmaram no início da apresentação.
	Resultado	**1**	**Nível 1 de autenticidade**

Fonte: Dados da pesquisa

Pelos quadros enumerados de 35 a 37 temos evidências de que nem todos os atributos indicativos de autenticidade são integralmente identificados nas atividades desenvolvidas, dependendo do problema formulado, do grupo que desenvolveu a atividade, das hipóteses formuladas, de possíveis efeitos dos resultados encontrados para a situação-problema fora da sala de aula, do auxílio da professora.

6.1.2 Autenticidade na Atividade *Substituição dos Canudinhos Plásticos*

A atividade com o tema *Substituição dos Canudinhos Plásticos* refere-se ao 2º momento de familiarização dos estudantes com a modelagem matemática. Cada grupo formulou um problema específico para resolver a partir da temática que era noticiada com frequência na época da coleta de dados. Um projeto de lei na cidade de Apucarana proibiu a distribuição de canudinhos plásticos em estabelecimentos comerciais.

A partir da discussão sobre o tema com os estudantes-professores e de buscas realizadas em *sites* da internet, G1 se propôs a pesquisar a substituição de canudinhos plásticos por canudinhos de papel. Para isso utilizaram cálculo de áreas e proporções, de modo que pudessem fazer essas comparações a partir dos dados que tinham. Utilizaram-se de matemática já conhecida por eles e o conteúdo matemático não foi pré-definido para essa atividade, ou seja, a resolução se deu a partir das informações coletadas e da matematização.

O grupo G2 também utilizou conteúdos de matemática da Educação Básica para solucionar o problema que buscava verificar se a produção mundial de abacates seria suficiente para fazer a substituição dos canudinhos plásticos por canudinhos feitos de caroço de abacate. Da mesma forma, G3 fez cálculos de proporções e porcentagens para solucionar o problema que seria verificar a viabilidade da substituição dos canudinhos de plástico por canudinhos de bambu, mas pensaram especificamente para a orla das praias do Rio de Janeiro.

Assim, o atributo 1 para inferir autenticidade à atividade (A matemática usada na atividade de modelagem matemática emergiu das necessidades da abordagem matemática da situação) é integralmente atendido nas atividades de G1, G2 e G3.

As estratégias e ferramentas utilizadas pelos grupos não foram variadas, mas pertinentes para a solução do problema que cada grupo formulou. Como são estudantes do Ensino Superior, poderiam ter utilizado outras ferramentas matemáticas para os cálculos. Por isso, o atributo 2 (Os estudantes que desenvolvem a atividade experimentam diferentes estratégias e ferramentas (matemáticas, tecnológicas e empíricas), analisam os resultados parciais e os incrementam quando necessário) é contemplado parcialmente na atividade de G1, G2 e G3.

No desenvolvimento das atividades de G1, G2 e G3, aparentemente, não houve uma simplificação que pudesse interferir na autenticidade da situação-problema. Foram utilizadas as informações coletadas e uma matemática simples para resolver cada problema. Assim, o atributo 3 (As simplificações que conduzem a uma situação idealizada não descaracterizam a situação da realidade) foi integralmente contemplado.

Nas atividades desenvolvidas por G1, G2 e G3 os três grupos buscaram as informações na internet, durante o período da aula, para formular o problema e apresentar uma solução para ele. Diferentemente da atividade *Monumento ao Boné*, escolhas pedagógicas como: fontes de pesquisa, tempo e o ambiente da sala de aula parecem não ter influenciado o desenvolvimento da atividade de modo que se sobressaíssem a outras escolhas. Outro aspecto importante para analisar nesta atividade é que ela foi desenvolvida sem vistas às atividades que estariam presentes nas oficinas de modelagem matemática, como no caso das atividades de terceiro momento analisadas na sequência. Apesar de um dos grupos ter desenvolvido essa atividade com os alunos no Contexto de Ensino, ao desenvolver as atividades de primeiro e segundo momento na disciplina de Modelagem Matemática, os estudantes-professores não tinham a preocupação em utilizar-se somente de conteúdos matemáticos da Educação Básica devido ao estágio, de modo que os conteúdos matemáticos abordados na atividade não deveriam ser necessariamente da Educação Básica. Consideramos, portanto, que nessas atividades o atributo 4 (No desenvolvimento da atividade de modelagem, as escolhas pedagógicas não se sobressaem frente às necessidades da abordagem matemática da situação da realidade) é verificado integralmente.

Por se tratar de uma atividade de segundo momento de familiarização com atividades de modelagem matemática, os estudantes-professores já estavam um pouco familiarizados com atividades dessa natureza, porém ainda existia uma dependência grande da professora para ratificar o que cada grupo está desenvolvendo. A professora deixou que os estudantes-professores ficassem livres para desenvolver a atividade, de modo que cada grupo elaborasse o problema que queria solucionar, e os orientava quando questionavam algo sobre os dados ou a situação. Assim, o atributo 5 (Há um equilíbrio entre a orientação do professor e a autonomia do estudante de modo que prevalece a segunda) foi considerado parcialmente atendido nas atividades dos três grupos, pois este atributo está relacionado à autonomia dos estudantes-professores frente à atividade e ao posicionamento da professora.

Como descrito na Seção 4.2, a atividade surgiu de um acontecimento cotidiano de um das estudantes-professores. Na época do desenvolvimento da atividade várias cidades e estados estavam deliberando sobre a proibição do uso dos canudinhos plásticos, por poluírem o meio-ambiente, principalmente os oceanos. Os resultados foram ao encontro dessa discussão, pois a substituição dos canudinhos plásticos por canudinhos de papel, de bambu ou ainda de amido do caroço de abacate, apesar de ter um custo maior, são compostos por materiais que se decompõem rapidamente em comparação ao plástico e, desse modo, prejudicariam menos o meio ambiente.

No caso dos canudinhos feitos do amido do caroço do abacate também seria aproveitada a matéria já existente e que iria para o lixo, o caroço. Já os canudinhos de bambu são reutilizáveis, o que gera menos lixo. Assim, as discussões extramatemáticas promovidas por esta atividade são bastante relevantes, para qualquer nível de escolaridade e também para o curso de formação de professores. Por esses motivos, o atributo 6 (Os resultados obtidos pela modelagem matemática da situação alcançam interesses e geram discussões que extrapolam a sala de aula) recebeu valor 2 nas atividades desenvolvidas pelos três grupos.

Ao analisar essa atividade, percebemos que os valores conferidos a cada atributo são os mesmos para as atividades desenvolvidas pelos três grupos e, consequentemente, o nível de autenticidade estabelecido também é o mesmo. Por isso, no Quadro 38 apresentamos os valores conferidos a cada atributo de autenticidade, juntamente com a sua justificativa e o nível resultante, nas atividades de G1, G2 e G3.

Quadro 38: Autenticidade na atividade *Substituição dos canudinhos plásticos* desenvolvida por **G1, G2 e G3** no Contexto de Aprendizagem

	Atributos de autenticidade	Valor atribuído	Descrição
1	A matemática usada na atividade de modelagem matemática emergiu das necessidades da abordagem matemática da situação.	2	A partir da discussão sobre a proibição do fornecimento de canudinhos em lanchonetes e restaurantes da cidade e de buscas realizadas em sites da internet, G1 queria saber se a substituição dos canudinhos plásticos por canudinhos de papel seria viável. Para isso utilizaram cálculo de áreas e proporções, de modo que pudessem fazer essas comparações a partir dos dados que tinham. Uma solução encontrada por G2 seria substituir os canudinhos de plástico por canudinhos feitos de caroço de abacate. A intenção era encontrar se a produção mundial de abacates seria suficiente para fazer essa substituição. Já G3 pensou que uma solução seria substituir os canudinhos de plástico por canudinhos de bambu, mas pensaram especificamente para a orla das praias do Rio de Janeiro. Assim, o conteúdo matemático não foi pré-definido para essa atividade. A resolução se deu a partir das informações coletadas e da matematização. Os grupos utilizaram apenas matemática da Educação Básica, como cálculo de áreas, proporções e porcentagens para solucionar o problema formulado.
2	Os estudantes que desenvolvem a atividade experimentam diferentes estratégias e ferramentas (matemáticas, tecnológicas e empíricas), analisam os resultados parciais e os incrementam quando necessário.	1	Os problemas formulados por cada grupo são diferentes, mas envolvem praticamente as mesmas estratégias e ferramentas matemáticas para as soluções.
3	As simplificações que conduzem a uma situação idealizada não descaracterizam a situação da realidade.	2	Aparentemente, não houve uma simplificação que prejudicasse a autenticidade da situação-problema.
4	No desenvolvimento da atividade de modelagem, as escolhas pedagógicas não se sobressaem frente às necessidades da abordagem matemática da situação da realidade.	2	A intenção dos grupos era comparar os dois tipos de canudinhos para ver se seria viável a substituição. Não havia um conteúdo matemático pré-definido, não havia a previsão de desenvolver essa atividade durante o estágio. O tempo foi suficiente para que encontrassem o modelo e fizessem a interpretação dos resultados.
5	Há um equilíbrio entre a orientação do professor e a autonomia do estudante de modo que prevalece a segunda.	1	A situação-problema foi proposta pela professora com sugestão de uma das estudantes. Os estudantes-professores ficaram livres para desenvolver a atividade, de modo que cada grupo elaborasse o problema que queria solucionar. A professora os orientava quando questionavam algo sobre a situação.
6	Os resultados obtidos pela modelagem matemática da situação alcançam interesses e geram discussões que extrapolam a sala de aula.	2	A atividade surgiu de um acontecimento cotidiano de um dos estudantes-professores. Na época do desenvolvimento da atividade várias cidades e estados estavam deliberando sobre a proibição do uso dos canudinhos plásticos, por poluírem o meio-ambiente, principalmente os oceanos. Os resultados foram ao encontro dessa discussão, pois a substituição dos canudinhos plásticos por canudinhos de papel de bambu ou de abacate, apesar de ter um custo um pouco maior, seria importante para a diminuição da poluição por plásticos.
	Resultado	**10**	**Nível 3 de autenticidade**

Fonte: Dados da pesquisa

6.1.3 Autenticidade na Atividade *Conectando a Cidade Educação: Wi-fi livre no centro da cidade*

Essa atividade foi desenvolvida pelo grupo G1, formado por Eduardo, Maria e Roberto, e tem como temática a reforma das praças públicas disponibilizando internet *wi-fi* gratuita na região central da cidade de Apucarana e refere-se ao terceiro momento de familiarização dos estudantes com atividades de modelagem matemática. A origem desta atividade reside no que levou à escolha do tema: uma notícia no site da prefeitura da cidade (Anexo A).

A atividade é, portanto, proveniente de *fora da escola* e envolve aspectos reais relativos à situação, como a instalação de *wi-fi* em praças da cidade e a necessidade de as pessoas estarem conectadas. Além disso, a escolha do tema para esta atividade partiu inteiramente dos estudantes-professores componentes de G1, isto é, era de interesse do grupo desenvolver esta atividade de modelagem matemática.

No que se refere aos dados usados para a investigação da situação, os estudantes-professores pesquisaram em *sites* especializados acerca do funcionamento de um sistema de internet *wi-fi* e obtiveram algumas informações, conforme ilustramos no Quadro 12, no Capítulo 4. Os estudantes-professores utilizaram como dados para desenvolver a atividade um mapa do centro comercial de Apucarana, com escala de 1,5cm:100m, disponível no *site* do Iddeplan (Instituto de Desenvolvimento, Pesquisa e Planejamento) da cidade de Apucarana-PR, por meio do qual poderiam definir a área de abrangência do sinal de *wi-fi*. Assim, os dados usados na atividade de modelagem matemática são de fontes reais.

Para o problema formulado por G1, *Qual a melhor forma de instalar os equipamentos no centro de Apucarana para que alcance a maior área com menor custo por metro quadrado?*, não havia, de fato, uma solução já conhecida ou sugerida pelos órgãos oficiais da prefeitura da cidade. Na sua resolução, os estudantes-professores consideraram que "o alcance de um *modem* é uma área circular com raio de 100 metros e o repetidor tem uma área parecida com um setor circular de raio 50 metros" (Relatório dos estudantes-professores). Somente após obter essas informações os estudantes-professores s conseguiram visualizar uma estratégia de resolução, fazendo o desenho de círculos e setores circulares sobre o mapa do centro da cidade.

De fato, os estudantes-professores desenharam os círculos sobre o mapa após obter a informação de que os alcances dos equipamentos são circulares e conhecerem a distância máxima que podem ficar um do outro. Depois disso, contam a quantidade de equipamentos e calculam o custo total, para enfim calcular a área abrangida e o custo por metro quadrado. Ou seja, eles não colocaram como meta usar um conteúdo matemático específico, mas, conforme a necessidade, utilizaram a matemática que conheciam para solucionar o problema. Isso está de acordo com Almeida (2018, p. 21), pois "os conceitos e ferramentas matemáticos não podem ser escolhidos anteriormente, mas, pelo contrário, a matemática apropriada para resolver o problema emerge do próprio problema e de suas especificidades".

Com base nessa análise, podemos afirmar que o atributo 1 para inferir autenticidade (A matemática usada na atividade de modelagem matemática emergiu das necessidades da abordagem matemática da situação) é atendido integralmente nessa atividade.

Já o atributo 2 (Os estudantes que desenvolvem a atividade experimentam diferentes estratégias e ferramentas (matemáticas, tecnológicas e empíricas), analisam os resultados parciais e os incrementam quando necessário) está contemplado parcialmente na atividade de G1, pois, pelos dados coletados, não há indícios de que foram utilizadas diferentes estratégias para a resolução do problema. A construção de círculos (no *GeoGebra* e com lápis e papel) sobre o mapa para obter a cobertura da internet *wi-fi* foi o procedimento usado. A partir das estratégias escolhidas foram utilizados diferentes conteúdos matemáticos para a solução, como proporção, cálculo de área do círculo e do setor circular.

Depois de o problema ser formulado, a modelagem exige a transformação da linguagem natural em linguagem matemática, que consiste na fase da *matematização*. Segundo Almeida (2018, p. 2), "a matematização é um aspecto relevante no desenvolvimento de atividades de modelagem". Nesta fase, hipóteses são elaboradas, variáveis são selecionadas, além de serem realizadas simplificações necessárias para a resolução do problema (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2016). Assim, para se desenvolver uma atividade de modelagem, de modo geral, faz-se necessário elaborar hipóteses e fazer simplificações, restringindo o que se vai modelar. Nesta fase, "há construção de um recorte, que é um ato de interpretação, promovido por meio da elaboração de hipóteses que realizam simplificação na situação inicial" (CIFUENTES, NEGRELLI, 2012, p. 797).

Com relação à hipótese definida pelos estudantes-professores e às simplificações realizadas por eles para resolver o problema, elas possibilitaram aos estudantes-professores construir uma configuração para a distribuição dos modens e repetidores de modo a cobrir toda a região a ser atendida pelo serviço de internet. Assim, se em Kaiser (2007) e em Wedelin e Adawi (2015) é apontado que problemas autênticos não podem ser demasiadamente simplificados, mas devem se tornar acessíveis para os fins educacionais, podemos inferir que as simplificações relativas ao uso de valores inteiros em vez de aproximados para ângulos e medidas das regiões circulares não comprometeram a autenticidade da atividade no sentido de considerar as características da situação em estudo. Entretanto, os alunos não esclarecem como sobreposições de áreas atendidas pelos modens e pelos repetidores seriam consideradas. Essa simplificação pode ter influência sobre o número necessário de equipamentos bem como sobre os gastos com as instalações. Os alunos apresentam uma solução para o problema de estimar o custo por metro quadrado para a instalação de um sistema de internet *wi-fi* e, conforme inserem em seu relatório, “Determinar a quantidade de modens e repetidores nos permitiu encontrar os custos para o município relativos ao fornecimento de internet no centro da cidade. Nós conseguimos fazer isso usando cálculos de áreas” (Relatório dos estudantes-professores).

O esforço dos estudantes-professores para a construção de um modelo matemático que pode também determinar esses custos para outras regiões da cidade também é um indicativo de que suas simplificações não comprometeram a matematização e a resolução e também viabilizaram obter uma solução para o problema proposto. Todavia, a simplificação com relação aos círculos e setores circulares sem considerar possíveis sobreposições pode ter alguma influência sobre a área abrangida pelo sinal de internet. Assim, podemos inferir que a atividade atende parcialmente o atributo 3 (As simplificações que conduzem a uma situação idealizada não descaracterizam a situação da realidade).

Os estudantes-professores do grupo tinham a intenção de, na disciplina de Modelagem Matemática, desenvolver atividades de modelagem que posteriormente, durante o estágio, pudessem ser desenvolvidas também pelos alunos do Ensino Médio. Assim, estruturar uma resolução que envolve cobrir a área de interesse com regiões circulares e calcular a área dessas regiões foi satisfatório para esses estudantes-professores. Embora fizessem uso também do software GeoGebra para construir suas representações, os estudantes-professores não investigaram a possiblidade de usar algum outro conteúdo, como exemplo teoria de grafos, para determinar uma solução para o que queriam estudar nessa situação da realidade. Assim, a matemática (re)aprendida por eles nesta atividade é a matemática que teriam que ensinar nas aulas de estágio: cálculo de área de círculo e de setor circular. Portanto, podemos considerar que escolhas pedagógicas como planejar a atividade de modelagem matemática com vistas ao estágio, podem ter influenciado o desenvolvimento da atividade, o que nos faz considerar que o atributo 4 para inferir autenticidade (No desenvolvimento da atividade de modelagem, as escolhas pedagógicas não se sobressaem frente às necessidades da abordagem matemática da situação da realidade) foi parcialmente atendido.

Para o desenvolvimento desta atividade coube aos estudantes-professores decidirem a situação a ser estudada, a coleta de dados bem como todo o encaminhamento da definição e resolução do problema proposto. Neste sentido, os eles tinham autonomia para tomar as decisões que lhes parecessem adequadas e, buscar na professora orientações ou validações dos procedimentos usados. Neste sentido, podemos inferir que houve equilíbrio entre a orientação do professor e a autonomia do estudante de modo que prevaleceu a segunda, o que indica que este atributo foi integralmente atendido na atividade.

No que se refere ao atributo 6 (Os resultados obtidos pela modelagem matemática da situação alcançam interesses e geram discussões que extrapolam a sala de aula) há indícios, nos procedimentos dos estudantes-professores, de que nessa atividade as discussões, em alguma medida, se estenderam para além da sala de aula. De fato, a escolha dessa temática se deu a partir de uma reportagem do site da prefeitura da cidade de modo que a situação tinha relação com a vida das pessoas fora da sala de aula. Por outro lado, a análise da resposta obtida pelos estudantes-professores os levou a sugerir que ações como a realizada nessa atividade poderiam ser usadas nos processos de licitação para a prestação de serviços em órgãos públicos. A transcrição da fala do aluno Roberto na apresentação da atividade para todos os alunos da disciplina ilustra esta ideia dos alunos:

> *Roberto: Como o objetivo nesta atividade era encontrar a melhor distribuição dos equipamentos de internet para proporcionar a maior cobertura com o menor custo, esse trabalho poderia ser comparado ao realizado por empresas que participam de uma licitação, neste caso, para implantar a internet wi-fi no centro da cidade.*

Não houve, entretanto, alguma interlocução com agentes externos à sala de aula, como por exemplo, algum setor da prefeitura ou alguma prestadora de serviço de internet na cidade, para a discussão dos resultados. Assim, podemos ponderar que este atributo foi parcialmente atendido na atividade.

Apresentamos no Quadro 39 uma síntese da análise da autenticidade na atividade Conectando a Cidade Educação: *Wi-fi* livre no centro da cidade desenvolvida pelo grupo G1 no Contexto de Aprendizagem, mostrando que todos os atributos construídos nessa pesquisa com relação à autenticidade em uma atividade de modelagem matemática são conferidos, mesmo que parcialmente, na atividade *Conectando a Cidade Educação: Wi-fi livre no centro da cidade* no Contexto de Aprendizagem, o que resultou no nível 2 de autenticidade.

Quadro 39: Autenticidade na atividade *Conectando a Cidade Educação: Wi-fi livre no centro da cidade* desenvolvida por G1 no Contexto de Aprendizagem

	Atributos de autenticidade	**Valor atribuído**	**Descrição**
1	A matemática usada na atividade de modelagem matemática emergiu das necessidades da abordagem matemática da situação.	2	O conteúdo matemático não foi pré-definido para essa atividade. A resolução se deu a partir das informações obtidas e da matematização. Somente depois de conhecer o funcionamento de um sistema de internet *wi-fi* é que os estudantes-professores pensaram em desenhar círculos sobre o mapa, de acordo com o alcance dos modens e repetidores de sinal.
2	Os estudantes que desenvolvem a atividade experimentam diferentes estratégias e ferramentas (matemáticas, tecnológicas e empíricas), analisam os resultados parciais e os incrementam quando necessário.	1	Pelos dados coletados, não é possível notar que foram utilizadas diferentes estratégias para a solução do problema. Apenas a construção de círculos (no GeoGebra e com lápis e papel) sobre o mapa para obter a cobertura da internet *wi-fi*. A partir das estratégias escolhidas foram utilizados diferentes conteúdos matemáticos para a solução, como proporção, cálculo de área do círculo e do setor circular.
3	As simplificações que conduzem a uma situação idealizada não descaracterizam a situação da realidade.	1	Algumas simplificações e hipóteses foram necessárias: a quantidade necessária de equipamentos e como eles estão dispostos é variável e que o alcance do sinal de internet é circular. A partir disso, construíram no mapa uma possível distribuição dos equipamentos para o melhor alcance do sinal de internet no centro de Apucarana. Com o mapa construído e os cálculos de área e de custo, foram obtidos o modelo e a solução do problema. O modelo matemático mostra a relação entre o custo da instalação e a área abrangida, a partir dos equipamentos e serviço considerados. Os estudantes-professores não apresentam o motivo da escolha dos equipamentos e do plano de internet e porquê consideraram áreas sobrepostas.
4	No desenvolvimento da atividade de modelagem, as escolhas pedagógicas não se sobressaem frente às necessidades da abordagem matemática da situação da realidade.	1	Os grupos tiveram várias aulas disponibilizadas para a atividade, fora o tempo extraclasse, que envolveu algumas semanas. Todos os grupos tinham celular e notebook com acesso à internet *wi-fi*, o que possibilitou ampla pesquisa sobre o assunto. Havia a preocupação em utilizar a atividade de 3º momento que cada grupo desenvolveu na segunda parte do estágio. Desse modo, o tema e os conteúdos matemáticos pensados tinham como objetivo não somente a atividade de modelagem matemática, mas também nas oficinas de modelagem matemática. Essas escolhas pedagógicas podem ter influenciado o desenvolvimento da atividade.
5	Há um equilíbrio entre a orientação do professor e a autonomia do estudante de modo que prevalece a segunda.	2	Por se tratar de uma atividade de 3º momento de familiarização, a professora deixou que os estudantes-professores ficassem livres para desenvolver a atividade, de modo que cada um pensasse até mesmo na situação-problema que seria abordada e elaborasse o problema que queria solucionar, e os orientava quando questionavam algo sobre os dados ou a situação.
6	Os resultados obtidos pela modelagem matemática da situação alcançam interesses e geram discussões que extrapolam a sala de aula.	1	As discussões extramatemáticas promovidas por esta atividade são bastantes relevantes, para qualquer nível de ensino e também para o curso de formação de professores, uma vez que a realidade e a matemática foram relacionadas em vários momentos: concepção do tema (reportagem); informações utilizadas, com exceção de algumas aproximações realizadas, o final da atividade (assemelham o trabalho realizado às licitações feitas), mas sem a validação de alguém da área.
	Resultado	**8**	**Nível 2 de autenticidade**

Fonte: Dados da pesquisa

6.1.4 Autenticidade na Atividade *Fabricação e Venda de Cookies*

Essa atividade foi desenvolvida pelo grupo G2, formado por Ana, Isabela e Jane, e tem como temática a venda de cookies como um meio para obter renda para se sustentar financeiramente. Essa escolha partiu inteiramente dos estudantes-professores componentes de G2, isto é, era de interesse do grupo desenvolver esta atividade de modelagem matemática por terem o costume de comprar e consumir cookies. Desse modo, a atividade é de *fora da escola* e envolve aspectos reais relativos à situação.

No que se refere aos dados usados para a investigação da situação, as estudantes-professoras pesquisaram na internet e diretamente no supermercado. Nesta atividade, o problema consiste em estimar qual deve ser a produção de cookies para que as estudantes-professoras pudessem deixar seus empregos e passar a fabricar e vender cookies. Para isso, elas construíram modelos matemáticos para o custo, a receita e o lucro para que, a partir da quantidade de cookies produzidos e vendidos, pudessem calcular o lucro da venda. G2 seguiu todas as fases de uma atividade de modelagem matemática e apresentou, tanto no relatório quanto na apresentação, cada fase discutida com a sala.

A partir do relatório dos estudantes-professores é possível inferir que o atributo 1 para inferir autenticidade (A matemática usada na atividade de modelagem matemática emergiu das necessidades da abordagem matemática da situação) é atendido. De fato, o conteúdo matemático não foi pré-definido para essa atividade. A resolução se deu a partir das informações obtidas e da matematização. As estudantes-professoras apresentaram gráficos e tabelas para apresentar as informações. Ou seja, elas não colocaram como meta desenvolver um conteúdo matemático específico, mas, conforme a necessidade, utilizaram a matemática que conheciam para solucionar o problema.

No decorrer do tempo, o problema formulado pelas estudantes-professoras foi melhorado, conforme elas desenvolviam a atividade. Pelos dados coletados e analisados, não é possível notar que foram utilizadas diferentes estratégias para a resolução do problema, mas a partir das estratégias escolhidas foram utilizados diferentes conteúdos matemáticos para a resolução, como proporção e função afim. Os resultados foram apresentados por meio de gráficos e tabelas. Desse modo, consideramos que o atributo 2 para inferir autenticidade (Os estudantes que desenvolvem a atividade experimentam diferentes estratégias e ferramentas (matemáticas, tecnológicas e empíricas), analisam os resultados parciais e os incrementam quando necessário) é atendido integralmente na atividade.

As estudantes-professoras consideraram que o custo para a produção de cookies, o preço de venda e o lucro obtido com a venda dos cookies dependem da quantidade de cookies produzidas e vendidas e que uma receita tem rendimento de 22 cookies. Para responder o problema, construíram modelos matemáticos para o custo, a receita e o lucro para que, a partir da quantidade de cookies produzidos e vendidos, pudessem calcular o lucro da venda. Também consideraram que o lucro líquido mínimo da empresa seria igual ao valor do maior salário para cada uma e que a quantidade de horas trabalhadas seria a mesma para as três estudantes-professoras. Com os modelos construídos a partir das hipóteses, foi obtida a solução do problema.

Neste sentido, consideramos que o atributo 3 (As simplificações que conduzem a uma situação idealizada não descaracterizam a situação da realidade) é atendido integralmente nesta atividade.

Ponderamos que essa construção dos modelos está de acordo com a afirmação de Lesh e Lamon (1992) de que a autenticidade também reside no fato de a atividade não requerer apenas uma resposta para uma pergunta específica, mas exigir o desenvolvimento de um modelo para "descrever, explicar, manipular ou modificar o comportamento de uma variedade de sistemas que ocorrem em situações cotidianas" (LESH; LAMON, 1992, p. 27).

A atividade proporcionou que as estudantes-professoras aprendessem um pouco mais de conteúdos matemáticos já conhecidos por elas, mas que foram importantes para a preparação do estágio: porcentagens, funções. Mesmo que a atividade não tenha proporcionado que os estudantes-professores aprendessem um novo conteúdo de matemática, relacionado ao Ensino Superior, eles puderam aprender a ensinar os alunos a fazerem modelagem matemática, com a possibilidade de ensinar também um conteúdo matemático. G2, assim como G1, não pensou em um conteúdo matemático que pudesse gerar uma atividade de modelagem, mas sim em um tema que pudesse desenvolver um conteúdo matemático da Educação Básica e que fosse do interesse dos alunos da escola, pois já pensavam em desenvolver essa atividade durante o estágio. Por isso, atribuímos valor 1 ao atributo 4 para inferir autenticidade (No desenvolvimento da atividade de modelagem, as escolhas pedagógicas não se sobressaem frente às necessidades da abordagem matemática da situação da realidade), ou seja, consideramos que essa escolha pode ter influenciado na matemática utilizada na atividade.

Com relação ao atributo 5 (Há um equilíbrio entre a orientação do professor e a autonomia do estudante de modo que prevalece a segunda) consideramos que ele foi integralmente atendido na atividade desenvolvida por G2. O grupo teve várias semanas para pensar no tema, dentro e fora da sala de aula, e desenvolver a atividade. Desse modo, as estudantes-professoras puderam fazer pesquisas tanto na internet como em outros lugares. Além disso, o auxílio da professora se deu de modo que os estudantes-professores ficassem independentes para decidirem acerca do tema de interesse, formularem o problema que quisessem solucionar e realizassem as pesquisas para o levantamento de dados. Ela os orientava quando questionavam algo sobre os dados, a situação, a matematização, a relação com os conteúdos matemáticos do Ensino Médio.

Os conteúdos matemáticos envolvidos na atividade são todos da Educação Básica. Por isso, a atividade pode contribuir para os estudantes ensinarem e até mesmo aprenderem matemática. As discussões extramatemáticas promovidas por esta atividade são bastantes relevantes, desde se tratar de um costume das estudantes-professoras, ou seja, a situação-problema fazia parte da realidade delas, até os resultados, que mostraram como elas poderiam se tornar empreendedoras, em uma época de desemprego.

Um fato importante é que os demais grupos de estudantes-professores também se interessaram pela atividade de G2 e se dispuseram a desenvolvê-la também durante o estágio. Esta foi a única atividade que foi desenvolvida no Contexto de Aprendizagem e em todas as turmas no Contexto de Ensino.

Desse modo, podemos considerar que o atributo 6 para conferir autenticidade (Os resultados obtidos pela modelagem matemática da situação alcançam interesses e geram discussões que extrapolam a sala de aula) está integralmente presente na atividade.

Apresentamos no Quadro 40 uma síntese da análise da autenticidade na atividade *Fabricação e Venda de cookies* desenvolvida pelo grupo G2 no Contexto de Aprendizagem, mostrando que todos os atributos construídos nessa pesquisa com relação à autenticidade de uma atividade de modelagem matemática estão presentes na atividade, resultando assim no nível 3 de autenticidade.

Quadro 40: Autenticidade na atividade *Fabricação e Venda de Cookies* desenvolvida por **G2** no Contexto de Aprendizagem

	Atributos de autenticidade	Valor atribuído	Descrição
1	A matemática usada na atividade de modelagem matemática emergiu das necessidades da abordagem matemática da situação.	2	O conteúdo matemático não foi pré-definido para essa atividade. A resolução se deu a partir das informações obtidas e da matematização. As estudantes-professoras apresentaram gráficos para apresentar as informações.
2	Os estudantes que desenvolvem a atividade experimentam diferentes estratégias e ferramentas (matemáticas, tecnológicas e empíricas), analisam os resultados parciais e os incrementam quando necessário.	2	Pelos dados coletados, não é possível notar que foram utilizadas diferentes estratégias para a solução do problema, mas este foi incrementado no decorrer do tempo. A partir das estratégias escolhidas foram utilizados diferentes conteúdos matemáticos para a solução, como proporção e função afim. Os resultados foram apresentados por meio de gráficos e tabelas.
3	As simplificações que conduzem a uma situação idealizada não descaracterizam a situação da realidade.	2	As simplificações realizadas consistem em escolher uma receita, considerar determinados produtos, o tempo de preparo, o forno e o rendimento de cada receita. Como o problema consistia em estimar qual deve ser a produção de cookies para que as estudantes-professoras pudessem deixar seus empregos e passar a fabricar e vender cookies, construíram modelos matemáticos para o custo, a receita e o lucro para que, a partir da quantidade de cookies produzidos e vendidos, pudessem calcular o lucro da venda.
4	No desenvolvimento da atividade de modelagem, as escolhas pedagógicas não se sobressaem frente às necessidades da abordagem matemática da situação da realidade.	1	Os grupos tiveram várias aulas disponibilizadas para a atividade, fora o tempo extraclasse, que envolveu algumas semanas. Todos os grupos tinham celular e notebook com acesso à internet *wi-fi*, o que possibilitou ampla pesquisa sobre o assunto. Somente conteúdos matemáticos da Educação Básica foram abordados na atividade, pois este grupo também demonstrou preocupação com o fato de a atividade ser desenvolvida no Contexto do Ensino. Essa escolha pedagógica parece ter influenciado o desenvolvimento da atividade.
5	Há um equilíbrio entre a orientação do professor e a autonomia do estudante de modo que prevalece a segunda.	2	Por se tratar de uma atividade de 3º momento de familiarização, a professora deixou que os estudantes-professores ficassem livres para desenvolver a atividade, de modo que cada um pensasse até mesmo na situação-problema que seria abordada e elaborasse o problema que queria solucionar, e os orientava quando questionavam algo sobre os dados ou a situação.
6	Os resultados obtidos pela modelagem matemática da situação alcançam interesses e geram discussões que extrapolam a sala de aula.	2	As discussões extramatemáticas promovidas por esta atividade são bastantes relevantes, desde se tratar de um costume das estudantes-professoras, ou seja, a situação-problema fazia parte da realidade delas, até os resultados, que mostraram como elas poderiam se tornar empreendedoras, em uma época de desemprego.
	Resultado	**11**	**Nível 3 de autenticidade**

Fonte: Dados da pesquisa

6.1.5 Autenticidade na Atividade *Pé Sujo de Barro? Nunca Mais!*

Essa atividade foi desenvolvida pelo grupo G3, formado por Fernando, Mirela e Susi, e tem como temática a reforma do estacionamento do câmpus da universidade onde estudam. Essa escolha partiu inteiramente dos estudantes-professores componentes de G3, pois quando chovia era difícil passar pelo estacionamento cheio de barro, além dos furtos que aconteceram por falta de iluminação e segurança. A partir de uma pesquisa com os estudantes do turno da noite do câmpus, G3 teve acesso a quantos carros, motos, vans e ônibus o estacionamento deveria comportar (aproximadamente) e às melhorias sugeridas pelos estudantes.

Desse modo, podemos afirmar que a temática era de interesse de G3 e da comunidade acadêmica daquele câmpus. No que se refere aos dados usados para a investigação da situação, os estudantes-professores pesquisaram em sites da internet (como www.leroymerlin.com.br), entraram em contato por e-mail com a empresa de pavimentação asfáltica *RECAP*, fotografaram e mediram os estacionamentos de modo que conseguissem as informações necessárias. Nesta atividade, o problema consiste em determinar o gasto mínimo com a reforma dos estacionamentos realizando três ações: asfaltamento, implantação de postes de iluminação, demarcação de vagas. Para isso, os estudantes de G3 construíram modelos matemáticos para os cálculos do custo dessas ações em cada parte do estacionamento. G3 também seguiu todas as fases do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática e apresentou, tanto no relatório quanto na apresentação, cada fase discutida com a sala.

A partir do relatório dos estudantes-professores é possível considerar que ao atributo 1 para inferir autenticidade (A matemática usada na atividade de modelagem matemática emergiu das necessidades da abordagem matemática da situação) pode ser conferido o valor 2, pois o conteúdo matemático não foi pré-definido para essa atividade. Conforme os estudantes-professores coletavam as informações, faziam a matematização e resolução do problema.

Pelos dados coletados e analisados, podemos afirmar que os estudantes-professores utilizaram diferentes estratégias e ferramentas para a resolução do problema. Como conteúdos matemáticos, utilizaram cálculo de área do retângulo, cálculo de área por determinantes, cálculo de área utilizando a integral de uma função, construção de gráficos e tabelas para análise de dados. A pesquisa sobre o estacionamento também consiste em uma estratégia diferente das utilizadas em outras atividades, que pode contribuir para a autenticidade da atividade. Desse modo, consideramos que o atributo 2 para inferir autenticidade (Os estudantes que desenvolvem a atividade experimentam diferentes estratégias e ferramentas (matemáticas, tecnológicas e empíricas), analisam os resultados parciais e os incrementam quando necessário) é atendido integralmente na atividade.

Algumas simplificações, como definir três ações para a reforma do estacionamento, e aproximações para os cálculos das áreas foram realizadas, mas todas foram consideradas pertinentes por nós, por serem necessárias para a obtenção dos modelos.

Neste sentido, consideramos que o atributo 3 (As simplificações que conduzem a uma situação idealizada não descaracterizam a situação da realidade) é atendido integralmente nesta atividade.

Os dados analisados também refletem que G3 não demonstrou preocupação em fazer uma atividade de modelagem matemática que envolvesse somente conteúdos matemáticos da Educação Básica, ou seja, mesmo que fosse realizada também no Contexto de Ensino, durante o estágio supervisionado, com os alunos da escola, poderiam fazer aproximações diferentes que fossem pertinentes ao outro nível de escolaridade. Por isso, atribuímos valor 2 ao atributo 4 para inferir autenticidade (No desenvolvimento da atividade de modelagem, as escolhas pedagógicas não se sobressaem frente às necessidades da abordagem matemática da situação da realidade.).

Com relação ao atributo 5 (Há um equilíbrio entre a orientação do professor e a autonomia do estudante de modo que prevalece a segunda) consideramos que ele foi integralmente atendido na atividade desenvolvida por G3. Por se tratar de uma atividade de modelagem de terceiro momento de familiarização, os estudantes-professores ficaram responsáveis por todo o desenvolvimento da atividade, desde a proposição do tema até as interpretações dos resultados, sendo a intervenção da professora somente realizada quando requerido pelos estudantes-professores.

O grupo G3 teve várias semanas para pensar no tema, dentro e fora da sala de aula, fazer pesquisas na internet e no próprio estacionamento do câmpus. Além disso, o auxílio da professora se deu de modo que os estudantes-professores ficassem independentes para decidir acerca do tema de interesse, formular o problema que quisessem solucionar e realizar as pesquisas para o levantamento de dados. Ela os orientava quando questionavam algo sobre informações coletadas, a situação, a matematização.

Essa atividade fez com que os estudantes-professores pudessem refletir o que poderia ser feito no estacionamento do câmpus mas também levar em consideração que não seria possível transformar completamente o estacionamento por motivos financeiros, como apresentado na conclusão da descrição da atividade na seção 4.5 desta tese. Portanto, também podemos considerar que o atributo 6 para inferir autenticidade (Os resultados obtidos pela modelagem matemática da situação alcançam interesses e geram discussões que extrapolam a sala de aula) está integralmente presente na atividade.

A atividade como um todo se mostra como uma oportunidade para fazer discussões extramatemáticas relevantes para os estudantes envolvidos, que estão embasadas na matemática, não só nos resultados, mas em todo o processo, desde a coleta das informações, alcançando assim objetivos de uma atividade de modelagem matemática.

Com isso, apresentamos no Quadro 41 uma síntese da análise da autenticidade na atividade *Pé Sujo de Barro? Nunca Mais!* desenvolvida pelo grupo G3 no Contexto de Aprendizagem. A partir da análise dessa atividade, podemos concluir que todos os atributos definidos nessa pesquisa para inferir autenticidade em uma atividade de modelagem matemática estão integralmente presentes na atividade, resultando assim no maior valor para todos os atributos e no nível 3 de autenticidade.

Na seção seguinte apresentamos a análise das atividades *Conectando a Cidade Educação: Wi-fi livre no centro da cidade*, *Fabricação e Venda de cookies* e *Pé Sujo de Barro? Nunca Mais!* no Contexto de Ensino, desenvolvidas pelos alunos do Ensino Médio durante o estágio dos estudantes-professores de G1, G2 e G3.

Quadro 41: Autenticidade na atividade *Pé Sujo de Barro? Nunca Mais!* desenvolvida por **G3** no Contexto de Aprendizagem

	Atributos de autenticidade	**Valor atribuído**	**Descrição**
1	A matemática usada na atividade de modelagem matemática emergiu das necessidades da abordagem matemática da situação.	2	O conteúdo matemático não foi pré-definido para essa atividade. Conforme os estudantes-professores coletavam as informações, faziam a matematização e resolução do problema.
2	Os estudantes que desenvolvem a atividade experimentam diferentes estratégias e ferramentas (matemáticas, tecnológicas e empíricas), analisam os resultados parciais e os incrementam quando necessário.	2	Os estudantes-professores utilizaram diferentes estratégias e ferramentas para a solução do problema. Como conteúdos matemáticos, utilizaram cálculo de área do retângulo, cálculo de área por determinantes, cálculo de área utilizando a integral de uma função, construção de gráficos e tabelas para análise de dados. A pesquisa sobre o estacionamento também consiste em uma estratégia diferente das utilizadas em outras atividades.
3	As simplificações que conduzem a uma situação idealizada não descaracterizam a situação da realidade.	2	Algumas simplificações, como definir três ações para a reforma do estacionamento, e aproximações para os cálculos das áreas foram realizadas, mas todas foram consideradas pertinentes por nós, por serem necessárias para a obtenção dos modelos.
4	No desenvolvimento da atividade de modelagem, as escolhas pedagógicas não se sobressaem frente às necessidades da abordagem matemática da situação da realidade.	2	Os grupos tiveram várias aulas disponibilizadas para a atividade, fora o tempo extraclasse, que envolveu algumas semanas. Todos os grupos tinham celular e notebook com acesso à internet *wi-fi*, o que possibilitou ampla pesquisa sobre o assunto. G3 não demonstrou preocupação em fazer uma atividade de modelagem matemática que fosse realizada também no estágio supervisionado, com os alunos da escola, mas na própria atividade em si.
5	Há um equilíbrio entre a orientação do professor e a autonomia do estudante de modo que prevalece a segunda.	2	Por se tratar de uma atividade de 3º momento de familiarização, a professora deixou que os estudantes-professores ficassem livres para desenvolver a atividade, de modo que cada um pensasse até mesmo na situação-problema que seria abordada e elaborasse o problema que queria solucionar, e os orientava quando questionavam algo sobre os dados ou a situação.
6	Os resultados obtidos pela modelagem matemática da situação alcançam interesses e geram discussões que extrapolam a sala de aula.	2	A atividade como um todo se mostra como uma oportunidade para fazer discussões extramatemáticas relevantes para os estudantes-professores envolvidos, que estão embasadas na matemática, não só nos resultados, mas em todo o processo, desde a coleta das informações.
	Resultado	**12**	**Nível 3 de autenticidade**

Fonte: Dados da pesquisa

6.2 NO CONTEXTO DE ENSINO

Nesta seção são analisadas atividades desenvolvidas durante as Oficinas de Modelagem Matemática, no Contexto de Ensino, descritas no Capítulo 5, com a finalidade de inferir sobre a autenticidade nas atividades de modelagem matemática usando os seis atributos definidos. Neste contexto, os estudantes do curso de Licenciatura em Matemática são denominados *estudantes-professores*. Já os estudantes da escola são chamados de *alunos*.

6.2.1 Autenticidade na Atividade *Conectando a Cidade Educação: Wi-fi livre no centro da cidade* no Contexto de Ensino

Apesar de termos analisado com relação à autenticidade a atividade *Conectando a Cidade Educação: Wi-fi livre no centro da cidade* no Contexto de Aprendizagem, procedemos a análise dessa atividade no Contexto de Ensino, pois os modeladores são outro, o ambiente não é o mesmo, os objetivos também são distintos, o que pode resultar em caracterizações diferentes no que se refere à autenticidade na atividade.

Para iniciar a Oficina de Modelagem Matemática, os estudantes-professores apresentaram a situação-problema, os dados e o problema formulado. Assim, os alunos da escola não tiveram a possibilidade de escolher ou de refletir sobre a seleção desses elementos da atividade. Porém, a situação-problema faz parte da realidade dos alunos e foi pensada pelos estudantes-professores ainda na disciplina de Modelagem Matemática, como mostra a fala de Roberto, em vídeo gravado em aula durante a apresentação da atividade por G1 aos demais estudantes.

> *Roberto: Por ser um conteúdo geralmente de interesse de jovens, que é o acesso à internet, pensamos em desenvolver essa atividade. Outro ponto [...] é que está presente na realidade dos estudantes, pois procuramos desenvolver em uma região da cidade que todos conhecem.*

Os alunos inicialmente não sabiam o que fazer para resolver o problema e que conteúdos matemáticos poderiam ser utilizados. Mesmo em contato com o material de apoio e o mapa, os alunos não estavam entendendo o que fazer e chamavam os estudantes-professores a todo momento para esclarecer as dúvidas. Como os alunos da escola apresentavam dificuldades em desenvolver a atividade, os estudantes-professores explicaram na lousa e exemplificaram como ficaria o desenho no mapa. Desse modo, os alunos não tiveram que refletir sobre o que considerar, quais hipóteses formular e quais simplificações fazer. Pela fala transcrita a seguir, temos indícios de como os estudantes-professores procederam.

> *Eduardo: Pessoal, vou dar um exemplo aqui. Quero preencher essa área aqui.* [enquanto esboça uma região retangular na lousa]. *Se eu vou pôr um ponto de internet aqui, ela vai pegar essa área* [faz um círculo com centro no ponto de internet dentro da área retangular esboçada]. *Cada um desse maior pode ter quatro, mas como o roteador está aqui no meio, o repetidor tem que receber deste outro ponto. Então vou ter que colocar os quatro aqui* [colocando quatro repetidores sobre a linha do círculo maior].

Somente a partir das informações dadas pelos estudantes-professores e também dos exemplos dados por estes, é que os alunos da escola puderam entender a situação e solucionar o problema, como verificamos no vídeo da oficina.

Eles não sabiam como calcular a área do círculo e do setor circular, o que foi ensinado pelos estudantes-professores durante o desenvolvimento da atividade. Assim, podemos considerar que o atributo 1 para inferir autenticidade (A matemática usada na atividade de modelagem matemática emergiu das necessidades da abordagem matemática da situação) não está presente na atividade, pois os alunos fizeram o que os estudantes-professores falavam e não pensaram em uma outra solução para o problema. Talvez isso tenha ocorrido devido à falta de familiaridade com atividades dessa natureza.

O atributo 2 para inferir autenticidade (Os estudantes que desenvolvem a atividade experimentam diferentes estratégias e ferramentas (matemáticas, tecnológicas e empíricas), analisam os resultados parciais e os incrementam quando necessário) está parcialmente presente na atividade desenvolvida, pois a matematização da situação-problema foi toda feita e explicada aos alunos pelos estudantes-professores. Ao fazer o desenho de como deveria ser colocado o *modem* e o repetidor, e esboçando o círculo representando a área de alcance, os alunos perderam grande parte da atividade em si. A partir do mapa construído e dos cálculos de área e de custo, foram obtidos o modelo e a solução do problema. Assim, cada GA (grupo de alunos) apresentou um mapa e uma solução de acordo com as quantidades de equipamentos que julgaram necessárias e a área de abrangência considerada.

Algumas simplificações e hipóteses foram apresentadas pelos estudantes-professores aos alunos: a quantidade necessária de equipamentos e como eles estão dispostos é variável (de acordo com o que considerassem importante, eles fariam essa distribuição como quisessem) e o alcance do sinal de internet é circular. A partir disso, os alunos construíram no mapa uma possível distribuição dos equipamentos para o melhor alcance do sinal de internet no centro de Apucarana. Com o mapa construído e os cálculos de área e de custo, foram obtidos o modelo e a solução do problema.

Desse modo, o atributo 3 que caracteriza autenticidade (As simplificações que conduzem a uma situação idealizada não descaracterizam a situação da realidade) foi atendido integralmente.

Essas simplificações realizadas pelos estudantes-professores podem não ter afetado a obtenção da solução pelos alunos, mas, com relação ao atributo 4 (No desenvolvimento da atividade de modelagem, as escolhas pedagógicas não se sobressaem frente às necessidades da abordagem matemática da situação da realidade.), consideramos que o fato de todas as informações necessárias para a resolução estarem disponíveis no material de apoio e o modo como os estudantes-professores conduziram a atividade, como fazer o desenho do alcance do *modem* e do repetidor a fim de que os alunos chegassem a uma solução, tiveram maior relevância quando comparadas às necessidades da situação. Além disso, os estudantes-professores tinham em seu planejamento 3 atividades para os dois dias de oficina. Assim, essas escolhas pedagógicas, como tempo, quantidade de atividades, e a falta de familiaridade com atividades de modelagem matemática podem ter influenciado o desenvolvimento da atividade, o que nos fez conferir valor 1 ao atributo 4 para inferir autenticidade.

O atributo 5 (Há um equilíbrio entre a orientação do professor e a autonomia do estudante de modo que prevalece a segunda) também foi parcialmente atendido. Os estudantes-professores atenderam os alunos nas carteiras, esclarecendo dúvidas e auxiliando na resolução. Porém, eles explicaram praticamente toda a atividade aos alunos, o que tirou um pouco a autonomia deles para a resolução, principalmente na elaboração de hipóteses e simplificações. Com isso, a atividade perdeu algumas de suas características essenciais, assemelhando-se a um problema de aplicação.

As discussões extramatemáticas promovidas por esta atividade são relevantes para os alunos da escola, uma vez que a realidade e a matemática foram relacionadas em momentos como: concepção do tema (reportagem); informações utilizadas; o final da atividade. Além de aprenderem a calcular área de círculo e área de setor circular, conteúdo previsto para a série em que eles estavam, os alunos tiveram uma ideia, mesmo que simplificada, de como é um processo de licitação, ou seja, proporcionar a maior área de cobertura com o menor preço. Desse modo, consideramos que o atributo 6 para inferir autenticidade (Os resultados obtidos pela modelagem matemática da situação alcançam interesses e geram discussões que extrapolam a sala de aula) está integralmente presente na atividade.

Para sintetizar a presença dos atributos que caracterizam a autenticidade na atividade no Contexto de Ensino, elaboramos o Quadro 51. De acordo com a soma dos valores conferidos aos atributos, a atividade se enquadra no nível 2 de autenticidade.

Quadro 42: Autenticidade na atividade *Conectando a Cidade Educação: Wi-fi livre no centro da cidade* no Contexto de Ensino

	Atributos de autenticidade	Valor atribuído	Descrição
1	A matemática usada na atividade de modelagem matemática emergiu das necessidades da abordagem matemática da situação.	0	A resolução do problema se deu a partir das informações repassadas aos alunos pelos estudantes-professores. Os alunos não sabiam como calcular a área do círculo e do setor circular, o que foi ensinado pelos estudantes-professores durante o desenvolvimento da atividade. Os alunos não conheciam previamente uma solução para o problema e nem que conceitos matemáticos poderiam ser utilizados. Porém, eles fizeram o que os estudantes-professores falavam e não pensaram em uma outra solução para o problema.
2	Os estudantes que desenvolvem a atividade experimentam diferentes estratégias e ferramentas (matemáticas, tecnológicas e empíricas), analisam os resultados parciais e os incrementam quando necessário.	1	Os alunos receberam a informação de que a quantidade necessária de equipamentos e como eles estão dispostos é variável. A partir disso, construíram no mapa uma possível distribuição dos equipamentos para o melhor alcance do sinal de internet no centro de Apucarana. Porém, a matematização foi toda feita e explicada pelos estudantes-professores. Ou seja, ao fazer o desenho de como deveria ser colocado o modem e o repetidor, e colocando o círculo representando a área de alcance, os alunos perderam grande parte da atividade em si. A partir do mapa construído e dos cálculos de área e de custo, foram obtidos o modelo e a solução do problema. Cada GA apresentou um mapa e uma solução de acordo com as quantidades de equipamentos e área consideradas, que pode ser considerado como modelo matemático. O modelo matemático geral foi exibido pelos estudantes-professores e mostra a relação entre o custo da instalação e a área abrangida, a partir dos equipamentos e serviço considerados
3	As simplificações que conduzem a uma situação idealizada não descaracterizam a situação da realidade.	2	Algumas simplificações e hipóteses foram apresentadas pelos estudantes-professores aos alunos: a quantidade necessária de equipamentos e como eles estão dispostos é variável e que o alcance do sinal de internet é circular. A partir disso, os alunos construíram no mapa uma possível distribuição dos equipamentos para o melhor alcance do sinal de internet no centro de Apucarana. Com o mapa construído e os cálculos de área e de custo, foram obtidos o modelo e a solução do problema.
4	No desenvolvimento da atividade de modelagem, as escolhas pedagógicas não se sobressaem frente às necessidades da abordagem matemática da situação da realidade.	1	O fato de todas as informações necessárias para a resolução estarem disponíveis no material de apoio, sem necessidade de pesquisa ou de escolha, e o modo como os estudantes-professores conduziram a atividade, como fazer o desenho do alcance do modem e do repetidor a fim de que os alunos chegassem a uma solução, tiveram maior relevância quando comparadas às necessidades da situação. Os estudantes professores tinham em seu planejamento 3 atividades para os dois dias de oficina. Essas escolhas pedagógicas podem ter influenciado o desenvolvimento da atividade.
5	Há um equilíbrio entre a orientação do professor e a autonomia do estudante de modo que prevalece a segunda.	1	Os estudantes-professores atenderam os alunos nas carteiras, esclarecendo dúvidas e auxiliando na resolução. Os alunos não tiveram a oportunidade de fazer escolhas, hipóteses e simplificações. A única autonomia dos alunos consistiu em escolher os pontos para colocar os modens e repetidores.
6	Os resultados obtidos pela modelagem matemática da situação alcançam interesses e geram discussões que extrapolam a sala de aula.	2	As discussões extramatemáticas promovidas por esta atividade são relevantes para os alunos da escola, uma vez que a realidade e a matemática foram relacionadas em momentos como: concepção do tema (reportagem); informações utilizadas; o final da atividade. Além de aprenderem a calcular área de círculo e área de setor circular, conteúdo previsto para a série em que eles estavam, os alunos tiveram uma ideia, mesmo que simplificada, de como é um processo de licitação, ou seja, proporcionar a maior área de cobertura com o menor preço.
	Resultado	**7**	**Nível 2 de autenticidade**

Fonte: Dados da pesquisa

6.2.2 Autenticidade na Atividade *Venda e Fabricação de Cookies* no Contexto de Ensino

Olhamos agora para a atividade *Venda e Fabricação de Cookies* desenvolvida por G1, na 2ª série B, por G2 na 2ª série D e por G3 na 2ª série C, no Contexto de Ensino. Com a finalidade de buscar indícios de autenticidade na atividade desenvolvida, consideramos os atributos que caracterizam a autenticidade em atividades de modelagem matemática estabelecidos por nós no Capítulo 3.

O atributo 1 para inferir autenticidade (A matemática usada na atividade de modelagem matemática emergiu das necessidades da abordagem matemática da situação) está integralmente presente na atividade desenvolvida por G1, G2 e G3, pois os alunos da escola utilizaram naturalmente os conhecimentos matemáticos que possuíam, mesmo que fossem operações aritméticas, como multiplicações e divisões, ou cálculos de proporção, para desenvolver a atividade. Desse modo, conforme a necessidade de prosseguir na atividade, os alunos faziam os cálculos que achavam conveniente. Os estudantes-professores não precisaram ensinar um conteúdo matemático novo para que os alunos chegassem a uma solução para o problema.

Para o atributo 2 (Os estudantes que desenvolvem a atividade experimentam diferentes estratégias e ferramentas (matemáticas, tecnológicas e empíricas), analisam os resultados parciais e os incrementam quando necessário) conferimos o valor 2 para a atividade de G1, G2 e G3, uma vez que os vários grupos de alunos (GA) pensaram em estratégias diferentes para produzir e vender os cookies, como utilizar forno industrial, produzir combos, estabelecer um salário fixo ou contratar funcionários, como relatado na Seção 5.2.1.

Como em toda atividade de modelagem matemática, simplificações e suposições foram necessárias. Os alunos puderam usar a imaginação e se sentiram como empreendedores. Além das simplificações já propostas nas informações como receita, rendimento, preços de produtos, constantes no material de apoio para o desenvolvimento da atividade, os alunos criaram marcas para seus produtos, estipularam salários e os preços de venda. Desse modo, podemos considerar que o atributo 3 para inferir autenticidade (As simplificações que conduzem a uma situação idealizada não descaracterizam a situação da realidade) está presente nas atividades dos três grupos de estudantes-professores.

Essa foi a última atividade da oficina proposta por G1 e foi desenvolvida pelos grupos de alunos (GA) por cerca de duas horas. Na oficina de G2, essa foi a primeira atividade e foi desenvolvida durante quatro horas pelos alunos da 2ª D. Já na oficina de G3, a atividade foi desenvolvida no final do primeiro dia e, no início do 2º dia de oficina, foi retomada e realizada a discussão sobre os resultados de cada GA.

Nas três turmas, após chegarem a uma solução, cada GA foi solicitado a apresentar para todos os alunos da sala seu encaminhamento para solucionar o problema. Apesar dos alunos não terem feito os cookies com as próprias mãos, como faria um empreendedor iniciante, e terem recebido os dados prontos, pelos desenvolvimentos das atividades apresentados no Capítulo 5 é possível inferir que houve um envolvimento grande por parte da maioria dos grupos de alunos da escola. Com isso, escolhas pedagógicas tais como: tempo, espaço da sala de aula, instrumentos para obtenção de dados, tiveram interferência na autenticidade da atividade, mas dentro das possibilidades e condições que os estudantes-professores tinham para desenvolver a atividade com a turma, podemos considerar que o atributo 4 para inferir autenticidade (No desenvolvimento da atividade de modelagem, as escolhas pedagógicas não se sobressaem frente às necessidades da abordagem matemática da situação da realidade) está parcialmente presente na atividade das três turmas.

Os estudantes-professores atenderam os alunos nas carteiras, esclarecendo dúvidas e auxiliando na resolução. Os alunos tiveram a oportunidade de fazer escolhas dos ingredientes, hipóteses e simplificações. Essa autonomia dos alunos permitiu que eles se vissem como empreendedores. Essa ação foi diferente das ações dos alunos nas outras atividades desenvolvidas no Contexto de Ensino, pois nas outras atividades houve uma grande dependência por parte dos alunos para fazer a matematização e a resolução. Nesse caso, por envolver uma matemática conhecida por eles, a autonomia dos alunos com relação ao auxílio dos estudantes-professores foi maior. Desse modo, conferimos valor 2 para o atributo 5 (Há um equilíbrio entre a orientação do professor e a autonomia do estudante de modo que prevalece a segunda) na atividade desenvolvida por G1, G2 e G3.

Além dessa independência para o desenvolvimento da atividade, as discussões realizadas acerca do novo empreendimento podem gerar efeitos na vida dos alunos, pois desde o início da atividade, até mesmo no material de apoio, foram tratados assuntos como desemprego ou possibilidade de ter uma renda e contribuir para o sustento da família. Com base nos trechos dos relatórios dos alunos apresentados no Capítulo 5, podemos conferir valor 2 também ao atributo 6 para inferir autenticidade (Os resultados obtidos pela modelagem matemática da situação alcançam interesses e geram discussões que extrapolam a sala de aula) nas atividades desenvolvidas por G1, G2 e G3.

Segundo o relatório de estágio dos estudantes-professores de G1, G2 e G3, essa atividade obteve os melhores resultados no sentido da participação e envolvimento dos alunos, pois eles tinham autonomia para tomar suas decisões.

No Quadro 43 apresentamos um resumo das descrições dos atributos presentes na atividade de G1, G2 e G3, e podemos verificar que o resultado dos valores conferidos caracteriza a atividade no nível 3 de autenticidade.

Quadro 43: Autenticidade na atividade *Venda e Fabricação de Cookies* desenvolvida por **G1, G2 e G3** no Contexto de Ensino

	Atributos de autenticidade	**Valor atribuído**	**Descrição**
1	A matemática usada na atividade de modelagem matemática emergiu das necessidades da abordagem matemática da situação.	2	A resolução do problema se deu a partir das informações disponibilizadas pelos estudantes-professores. Os alunos da escola utilizaram conhecimentos matemáticos que possuíam para desenvolver a atividade. Os estudantes-professores não precisaram ensinar um conteúdo matemático novo ou sugerir outro conteúdo para que os alunos chegassem a uma solução para o problema.
2	Os estudantes que desenvolvem a atividade experimentam diferentes estratégias e ferramentas (matemáticas, tecnológicas e empíricas), analisam os resultados parciais e os incrementam quando necessário.	2	Os grupos de alunos pensaram em estratégias diferentes para produzir e vender os cookies, como utilizar forno industrial, produzir combos, estabelecer um salário fixo ou contratar funcionários, sempre com base nos objetivos.
3	As simplificações que conduzem a uma situação idealizada não descaracterizam a situação da realidade.	2	Além das simplificações já propostas nas informações tais como receita, rendimento, preços de produtos, constantes no material de apoio para o desenvolvimento da atividade, os alunos criaram marcas para seus produtos, estipularam salários e os preços de venda.
4	No desenvolvimento da atividade de modelagem, as escolhas pedagógicas não se sobressaem frente às necessidades da abordagem matemática da situação da realidade.	1	Os grupos de alunos tiveram cerca de 2 horas para o desenvolvimento e apresentação da atividade. Todas as informações necessárias estavam disponíveis no material de apoio, para que fosse agilizado o desenvolvimento da atividade. Apesar dos alunos não terem feito os cookies com as próprias mãos e a coleta de dados, é possível inferir que houve um envolvimento grande por parte da maioria dos grupos de alunos da escola.
5	Há um equilíbrio entre a orientação do professor e a autonomia do estudante de modo que prevalece a segunda.	2	Os estudantes-professores atenderam os alunos nas carteiras, esclarecendo dúvidas e auxiliando na resolução. Os alunos tiveram a oportunidade de fazer escolhas dos ingredientes, hipóteses e simplificações. Essa autonomia dos alunos permitiu que eles se vissem como empreendedores.
6	Os resultados obtidos pela modelagem matemática da situação alcançam interesses e geram discussões que extrapolam a sala de aula.	2	Além dessa independência para o desenvolvimento da atividade, as discussões realizadas acerca do novo empreendimento podem gerar efeitos na vida dos alunos, pois desde o início da atividade, até mesmo no material de apoio, foram tratados assuntos como desemprego ou possibilidade de ter uma renda e contribuir para o sustento da família.
	Resultado	**11**	**Nível 3 de autenticidade**

Fonte: Dados da pesquisa

6.2.3 Autenticidade na Atividade *Pé sujo de barro? Nunca mais!* no Contexto de Ensino

Para iniciar a Oficina de Modelagem Matemática na 2ª série C, os estudantes-professores de G3 apresentaram a situação-problema, os dados e o problema formulado para que os alunos pudessem desenvolver a atividade. Assim como na atividade analisada anteriormente, foi possibilitado aos alunos refletir sobre a seleção de alguns elementos da atividade e fazer a escolha que julgassem melhor. Como alguns alunos não conheciam o campus da universidade, os estudantes-professores falaram que em breve eles poderiam estudar em algum dos cursos oferecidos pela instituição.

Os alunos inicialmente não sabiam o que fazer para resolver o problema e que conteúdos matemáticos poderiam ser utilizados, por isso, chamavam os estudantes-professores a todo momento para esclarecerem as dúvidas. Somente a partir do auxílio individual dos estudantes-professores a cada GA é que os alunos da escola puderam entender a situação e solucionar o problema, como verificamos no vídeo da oficina.

Assim, mesmo que os estudantes-professores tenham falado para os alunos como fazer alguns cálculos de áreas, podemos considerar que o atributo 1 para conferir autenticidade (A matemática usada na atividade de modelagem matemática emergiu das necessidades da abordagem matemática da situação) está parcialmente presente na atividade, pois os alunos fizeram algumas opções e aproximações que poderiam resultar em cálculo de áreas de superfícies diferentes.

O atributo 2 para conferir autenticidade (Os estudantes que desenvolvem a atividade experimentam diferentes estratégias e ferramentas (matemáticas, tecnológicas e empíricas), analisam os resultados parciais e os incrementam quando necessário) também está parcialmente presente na atividade desenvolvida, pois a matematização da situação-problema foi explicada pelos estudantes-professores aos alunos que apresentavam dificuldade em entender o que estava sendo pedido. Desse modo, mesmo que apresentassem estratégias e ferramentas diferentes, estas foram direcionadas pelos estudantes-professores.

A partir da escolha do material a ser utilizado, de onde seriam colocados os postes de iluminação e dos cálculos das áreas e dos custos, foram obtidos o modelo e a solução do problema, as aproximações já realizadas pelos estudantes-professores (como o desenho do estacionamento) e as que os alunos julgaram necessárias foram úteis para a solução do problema. Desse modo, o atributo 3 que caracteriza autenticidade (As simplificações que conduzem a uma situação idealizada não descaracterizam a situação da realidade) foi atendido integralmente.

Com relação ao atributo 4 para inferir autenticidade (No desenvolvimento da atividade de modelagem, as escolhas pedagógicas não se sobressaem frente às necessidades da abordagem matemática da situação da realidade), conferimos valor 1 para a atividade desenvolvida. Os estudantes-professores queriam que os alunos chegassem a uma solução para o problema. Assim, quando havia muitas dúvidas de como proceder, em alguns momentos, direcionaram a resolução para os conteúdos que pretendiam abordar. Os grupos de alunos (GA) tiveram cerca de 2 horas para o desenvolvimento e apresentação da atividade, pois os estudantes-professores tinham em seu planejamento mais uma atividade para aquele dia de oficina. Essas escolhas pedagógicas, como tempo, quantidade de atividades, e a falta de familiaridade dos alunos com atividades de modelagem matemática podem ter influenciado o desenvolvimento da atividade.

Conferimos valor 1 também ao atributo 5 para inferir autenticidade (Há um equilíbrio entre a orientação do professor e a autonomia do estudante de modo que prevalece a segunda). Os estudantes-professores atenderam os alunos nas carteiras, esclarecendo dúvidas e auxiliando na resolução durante toda a atividade, o que mostrou grande dependência por parte dos alunos.

As discussões extramatemáticas promovidas por esta atividade são relevantes para os alunos da escola, pois a atividade se referia a um local em que possivelmente eles estudariam em alguns anos, mas também porque poderiam pensar em outros lugares que necessitariam de reformas, segurança, iluminação. Ponderamos ser importante também o fato de ter um teto de gastos, para que os alunos pudessem fazer discussões e realmente refletir sobre o que seria necessário. Desse modo, consideramos que o atributo 6 para conferir autenticidade (Os resultados obtidos pela modelagem matemática da situação alcançam interesses e geram discussões que extrapolam a sala de aula) está integralmente presente na atividade.

Para sintetizar a presença dos atributos que caracterizam a autenticidade na atividade no Contexto de Ensino, elaboramos o Quadro 44. De acordo com a soma dos valores conferidos aos atributos, a atividade se enquadra no nível 2 de autenticidade.

A partir das análises das atividades desenvolvidas e apresentadas nas seções 6.1 e 6.2, na seção 6.3 realizamos uma análise geral segundo os níveis de autenticidade.

Quadro 44: Autenticidade na atividade *Pé sujo de Barro? Nunca mais!* no Contexto de Ensino

	Atributos de autenticidade	Valor atribuído	Descrição
1	A matemática usada na atividade de modelagem matemática emergiu das necessidades da abordagem matemática da situação.	1	A resolução do problema se deu a partir da escolha dos dados e das aproximações realizadas para o cálculo de áreas. Os alunos não conheciam previamente uma solução para o problema e nem que conceitos matemáticos poderiam ser utilizados.
2	Os estudantes que desenvolvem a atividade experimentam diferentes estratégias e ferramentas (matemáticas, tecnológicas e empíricas), analisam os resultados parciais e os incrementam quando necessário.	1	A matematização da situação-problema foi explicada pelos estudantes-professores, pois os alunos apresentavam dificuldade em entender o que estava sendo pedido. Desse modo, mesmo que apresentassem estratégias e ferramentas diferentes, estas foram direcionadas pelos estudantes-professores.
3	As simplificações que conduzem a uma situação idealizada não descaracterizam a situação da realidade.	2	As aproximações já realizadas pelos estudantes-professores (como o desenho do estacionamento) e as que os alunos julgaram necessárias, foram úteis para a solução do problema.
4	No desenvolvimento da atividade de modelagem, as escolhas pedagógicas não se sobressaem frente às necessidades da abordagem matemática da situação da realidade.	1	Os grupos de alunos (GA) tiveram cerca de 2 horas para o desenvolvimento e apresentação da atividade, pois os estudantes-professores tinham em seu planejamento mais uma atividade para aquele dia de oficina. Além disso, era o primeiro contato dos alunos com atividades de modelagem matemática e com os estudantes-professores.
5	Há um equilíbrio entre a orientação do professor e a autonomia do estudante de modo que prevalece a segunda.	1	Os estudantes-professores atenderam os alunos nas carteiras, esclarecendo dúvidas e auxiliando na resolução durante toda a atividade, o que mostrou grande dependência por parte dos alunos.
6	Os resultados obtidos pela modelagem matemática da situação alcançam interesses e geram discussões que extrapolam a sala de aula.	2	As discussões extramatemáticas promovidas por esta atividade são relevantes para os alunos da escola, pois a atividade se referia a um local em que possivelmente eles estudariam em alguns anos, mas também porque poderiam pensar em outros lugares que necessitariam de reformas, segurança, iluminação. Ponderamos ser importante também o fato de ter um teto de gastos, para que os alunos pudessem fazer discussões e realmente refletir sobre o que seria necessário.
	Resultado	**8**	**Nível 2 de autenticidade**

Fonte: Dados da pesquisa

6.3 Níveis de Autenticidade Nas Atividades de Modelagem Matemática

Levando em consideração a valoração das atividades em relação à autenticidade que realizamos nas seções anteriores, alocamos as atividades em diferentes níveis de autenticidade. Conforme definido no Capítulo 3, às atividades de modelagem matemática são atribuídos níveis de autenticidade, conforme indica o Quadro 45.

Quadro 45: Níveis de autenticidade nas atividades de modelagem matemática

Pontuação da atividade de acordo com os atributos	Nível de autenticidade
0 |—| 3	Nível 1
4 |—| 8	Nível 2
9 |—| 12	Nível 3

Fonte: Construído pela autora

Usando esta valoração, os níveis de autenticidade das atividades se caracterizam conforme indica o Quadro 46.

Quadro 46: Autenticidade em atividades de modelagem matemática

<table>
<tr><th>Nível de autenticidade</th><th>Atividades</th><th>Momento de familiarização</th><th>Grupo</th><th>Soma de atributos</th><th>Contexto</th></tr>
<tr><td>Nível 1</td><td>Monumento ao Boné (1)</td><td>1º</td><td>G3</td><td>1</td><td>Aprendizagem</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Nível 2</td><td>Monumento ao Boné (2)</td><td>1º</td><td>G2</td><td>6</td><td>Aprendizagem</td></tr>
<tr><td>Monumento ao Boné (3)</td><td>1º</td><td>G1</td><td>7</td><td>Aprendizagem</td></tr>
<tr><td>Conectando a Cidade Educação: Wi-fi livre no centro da cidade (4)</td><td>1º</td><td>G1</td><td>7</td><td>Ensino</td></tr>
<tr><td>Pé sujo de Barro? Nunca mais! (5)</td><td>2º</td><td>G3</td><td>8</td><td>Ensino</td></tr>
<tr><td>Conectando a Cidade Educação: Wi-fi livre no centro da cidade (6)</td><td>3º</td><td>G1</td><td>8</td><td>Aprendizagem</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Nível 3</td><td>Substituição dos canudinhos Plásticos (7)</td><td>2º</td><td>G1, G2 e G3</td><td>10</td><td>Aprendizagem</td></tr>
<tr><td>Fabricação e venda de cookies (8)</td><td>2º</td><td>G1, G2 e G3</td><td>11</td><td>Ensino</td></tr>
<tr><td>Fabricação e venda de cookies (9)</td><td>3º</td><td>G2</td><td>11</td><td>Aprendizagem</td></tr>
<tr><td>Pé sujo de Barro? Nunca mais! (10)</td><td>3º</td><td>G3</td><td>12</td><td>Aprendizagem</td></tr>
</table>

Fonte: Dados da pesquisa

A partir das informações do Quadro 46, é possível identificar uma relação entre a autenticidade da atividade e a familiarização dos estudantes com atividades de modelagem matemática. No Nível 1 de autenticidade temos uma atividade de 1º momento. No nível 2 de autenticidade temos duas atividades de 1º momento, duas de 2º momento e uma de terceiro momento. Já no Nível 3 temos uma atividade de 2º momento e duas atividades do 3º momento de familiarização com atividades de modelagem matemática.

Assim, podemos inferir que, nesta pesquisa, atividades de 3º momento de familiarização contemplam mais atributos que caracterizam autenticidade, quando comparadas às de 2º momento e, da mesma forma, quando comparadas às de 1º momento. Ou seja, quanto maior a familiaridade com atividades de modelagem e maior a autonomia dos estudantes para desenvolver a atividade, maior também é o nível de autenticidade da atividade.

Ao comparar ainda os atributos contemplados em atividades de diferentes momentos, elaboramos o Quadro 47 com todos os valores conferidos aos atributos em todas as atividades desenvolvidas, as quais foram numeradas de 1 a 10 no quadro anterior.

Quadro 47: Autenticidade nas atividades desta pesquisa

Atributos de autenticidade	Valor atribuído (1)	Valor atribuído (2)	Valor atribuído (3)	Valor atribuído (4)	Valor atribuído (5)	Valor atribuído (6)	Valor atribuído (7)	Valor atribuído (8)	Valor atribuído (9)	Valor atribuído (10)
1- A matemática usada na atividade de modelagem matemática emergiu das necessidades da abordagem matemática da situação.	0	2	2	0	1	2	2	2	2	2
2- Os estudantes que desenvolvem a atividade experimentam diferentes estratégias e ferramentas (matemáticas, tecnológicas e empíricas), analisam os resultados parciais e os incrementam quando necessário.	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2
3- As simplificações que conduzem a uma situação idealizada não descaracterizam a situação da realidade.	0	0	1	2	2	1	2	2	2	2
4- No desenvolvimento da atividade de modelagem, as escolhas pedagógicas não se sobressaem frente às necessidades da abordagem matemática da situação da realidade.	0	1	2	1	1	1	2	1	1	2
5- Há um equilíbrio entre a orientação do professor e a autonomia do estudante de modo que prevalece a segunda.	1	1	1	1	1	2	1	2	2	2
6- Os resultados obtidos pela modelagem matemática da situação alcançam interesses e geram discussões que extrapolam a sala de aula.	0	1	0	2	2	1	2	2	2	2
Soma dos atributos	**1**	**6**	**7**	**7**	**8**	**8**	**10**	**11**	**11**	**12**
Contexto	**A**	**A**	**A**	**E**	**E**	**A**	**A**	**E**	**A**	**A**
Nível de autenticidade	**Nível 1**	**Nível 2**					**Nível 3**			

Fonte: Dados da pesquisa

Nas quatro atividades de 1º momento, o atributo 5 (Há um equilíbrio entre a orientação do professor e a autonomia do estudante de modo que prevalece a segunda) recebeu valor 1, em uma atividade de 2º momento o atributo 5 recebeu valor 1 e nas outras duas recebeu valor 2. Já nas três atividades de 3º momento o atributo 5 recebeu valor 2. A mesma proporção acontece com o atributo 2 (Os estudantes que desenvolvem a atividade experimentam diferentes estratégias e ferramentas (matemáticas, tecnológicas e empíricas), analisam os resultados parciais e os incrementam quando necessário), com a diferença que em uma das atividades de 1º momento esse atributo não foi contemplado.

Esses indícios reforçam a inferência de que existe uma relação diretamente proporcional entre os momentos de familiarização dos alunos com atividades de modelagem matemática e a autenticidade da atividade de modelagem matemática. Como sugerem Almeida, Silva e Vertuan (2016), em atividades de 3º momento de familiarização os estudantes se envolvem em todas as fases do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática.

Podemos estabelecer também uma relação entre esses resultados com a dimensão de *autenticidade de processo* proposta por Galbraith (2013, 2015), uma vez que para que o desenvolvimento da atividade de modelagem resulte em soluções defensáveis e robustas, é importante ter "uma base acordada e testada para aplicar o processo de modelagem, ensinar o processo de modelagem e analisar e melhorar os resultados da modelagem" (GALBRAITH, 2013, p. 33-34). Com isso, inferimos que a familiarização com atividades de modelagem contribui para que os estudantes aprendam o processo de modelagem e, consequentemente, desenvolvam atividade com maior nível de autenticidade.

O atributo 4 (No desenvolvimento da atividade de modelagem, as escolhas pedagógicas não se sobressaem frente às necessidades da abordagem matemática da situação da realidade) foi o único que recebeu valor 1 em duas atividades de 3º momento. Isso se deve ao fato de que havia uma preocupação pedagógica de G1 e G2 ao desenvolverem a atividade, que consiste na previsão dessas atividades serem desenvolvidas também durante o estágio. Dessa análise emerge também a relação com *a autenticidade da situação*. Por se tratar de uma situação-problema de fora da escola e envolver conexões com o mundo real, as necessidades exigidas pela atividade devem se sobressair a outras decisões (GALBRAITH, 2013, 2015). Ou seja, a autenticidade da atividade ficou fragilizada por haver certo controle (o desenvolvimento da atividade no Contexto de Ensino) que se sobrepôs ao desenvolvimento da atividade de 3º momento no Contexto de Aprendizagem.

Com relação ao atributo 3 (As simplificações que conduzem a uma situação idealizada não descaracterizam a situação da realidade), fazer simplificações e elaborar hipóteses é uma característica intrínseca à atividade de modelagem matemática, ou seja, segundo Cifuentes e Negrelli (2012) é a característica que a diferencia de uma atividade de resolução de problemas, por exemplo. Desse modo, seria muito difícil desenvolver uma atividade de modelagem em que não houvesse simplificações e hipóteses.

Das 10 atividades desenvolvidas, 8 delas contemplaram esse atributo, de modo que as simplificações realizadas eram necessárias para o desenvolvimento da atividade. O que está de acordo com Wedelin e Adawi (2015, p. 435): "[...]a simplificação em si é claramente para fins educacionais, a fim de criar problemas menores para destacar aspectos importantes de interesse e explorar a variação". Para esses autores, fazer simplificações em problemas do mundo real podem torná-los mais simples, mantendo características importantes, de modo que a solução para o problema ainda seja de interesse prático ou teórico.

Todas as atividades de 2º e duas atividades de 3º momentos contemplaram integralmente o atributo 6 (Os resultados obtidos pela modelagem matemática da situação alcançam interesses e geram discussões que extrapolam a sala de aula). Já nas de 1º momento não houve essa regularidade de modo que foram conferidos valores 0 para 2/10, 1 para 1/10 e 2 para 1/10. Esse atributo (6) evidenciou semelhanças com a *autenticidade de produto*, dimensão de autenticidade proposta por Galbraith (2013, 2015), segundo a qual os resultados matemáticos devem estar corretos e apresentarem solução viável para a situação do mundo real, e também com a *autenticidade de impacto*, tipo de autenticidade de Strobel et al (2013), que se concentra nos impactos que uma atividade pode gerar.

O atributo 1 (A matemática usada na atividade de modelagem matemática emergiu das necessidades da abordagem matemática da situação) é contemplado integralmente em todas as atividades do Nível 3 de autenticidade. Esse indício sugere que apesar de a matemática não ser a que mais influencia na autenticidade de uma atividade, o fato dela emergir da necessidade da atividade e não ser imposta ou pré-definida exerce influência na autenticidade da atividade.

Para este atributo (1), evidenciamos uma relação com a *autenticidade do conteúdo*, dimensão de autenticidade proposta por Galbraith (2013, 2015) segundo a qual a atividade deve satisfizer critérios realistas e os estudantes devem possuir conhecimentos matemáticos suficientes para apresentarem uma solução viável. Se o estudante já conhece a Matemática necessária para a solução, basta que ele a aplique. Se o estudante não conhece a matemática em questão, ele terá que aprender sobre ela.

As atividades do Contexto de Ensino foram classificadas pelos estudantes-professores de acordo com os momentos de familiarização dos alunos com atividades de modelagem, com base na proposta de Almeida, Silva e Vertuan (2016).

No Contexto de Ensino não foram desenvolvidas atividades de 3º momento por motivos educacionais, como tempo, possibilidade de pesquisar dados e também pela falta de familiaridade dos alunos com atividade dessa natureza. Somente a atividade relativa à *fabricação e venda de cookie*s está no nível 3 de autenticidade, pois os alunos puderam escolher os ingredientes de acordo com seus critérios, simularam a criação de uma empresa, tendo assim mais autonomia para desenvolver a atividade.

Além disso, a diferenciação entre 1º e 2º momento se deu pelo grau de intervenção do estudante-professor para que os alunos solucionassem o problema. Por isso, G1, G2 e G3 classificaram as atividades em que os alunos mostraram mais necessidade da ajuda do professor como de 1º momento e quando os alunos tiveram um pouco mais de independência como de 2º momento.

As análises evidenciam que nem sempre ao se fazer modelagem matemática é possível ensinar ou aprender um conteúdo matemático novo. Para exemplificar, as atividades de modelagem matemática de nível 3 de autenticidade não proporcionaram aprender a matemática curricular do Ensino Superior, mas proporcionaram outros conhecimentos, como alternativas para o uso de canudinhos plásticos, possibilidade de obter uma renda a partir da fabricação de cookies, licitações em serviços públicos. Essas evidências também são encontradas em Strobel et al (2013), que sugerem que em atividades autênticas o principal objetivo não é ensinar ou fornecer uma situação de aprendizado; o principal objetivo é uma necessidade, uma prática, uma busca e uma sede existentes em um contexto fora dos objetivos escolares e educacionais.

É possível inferir também que as atividades de modelagem matemática com maior nível de autenticidade possuem uma preocupação com o impacto dos resultados na vida das pessoas, ou seja, uma preocupação social. Isso está de acordo com Galbraith (2013) que sugere que o reconhecimento de questões culturais e sociais e a importância dos valores pessoais são fatores centrais para a autenticidade em atividades de modelagem matemática. Com isso, consideramos que a o ambiente educacional exige adaptações ou descaracterizações na atividade de modelagem matemática, havendo a necessidade de considerar que uma atividade não pode ser completamente autêntica, mas atender a atributos para inferir a autenticidade, da mesma forma como Vos (2018) afirma sobre o simulador de voo e, portanto, confirmamos que a autenticidade é um construto social. Assim, a autenticidade depende da situação abordada, da conjuntura histórica, do cenário educacional em que a atividade de modelagem matemática foi desenvolvida e dos modeladores que a desenvolveram.

Assim como sugere Vos (2018), alguns aspectos em uma tarefa ou ambiente de aprendizagem podem ser autênticos, enquanto outros não. Uma atividade que incluir aspectos autênticos tende a ser mais aberta, ter espaço para a criatividade, colaboração, investigação.

É possível estabelecer algumas ocorrências que podem ter interferido na autenticidade nas atividades de modelagem matemática do Contexto de Aprendizagem e no Contexto de Ensino: a liberdade que a pesquisadora tinha com a sua própria turma em contraposição aos estudantes-professores atuarem em turmas praticamente desconhecidas e serem supervisionados durante o estágio; a disciplina do Contexto de Aprendizagem era Modelagem Matemática, o objetivo era fazer modelagem matemática e o assunto principal da disciplina era modelagem matemática; a disciplina do Contexto de Ensino era Matemática, os alunos não sabiam o que era modelagem matemática e não estavam acostumados a desenvolver atividades dessa natureza; a duração da disciplina era de um semestre letivo, enquanto que a duração das oficias foram de 10 horas. Assim, com base nos atributos para inferir autenticidade construídos nesta pesquisa, acreditamos que esses fatores tiveram influência sobre a autenticidade das atividades desenvolvidas.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Levando em consideração o quadro teórico em que se fundamenta a pesquisa e o objetivo de investigar como se caracteriza a autenticidade em atividades de modelagem matemática desenvolvidas em um curso de formação inicial de professores, foram desenvolvidas atividades de modelagem matemática mediante a caraterização de dois contextos: o Contexto de Aprendizagem e o Contexto de Ensino.

O Programa de Formação de Professores foi assim constituído a partir da perspectiva de formação em modelagem matemática sugerida em Almeida e Dias (2007), de aprender sobre modelagem matemática, aprender por meio de atividades de modelagem matemática e ensinar usando modelagem matemática.

Com essa configuração, o objetivo também foi fornecer caminhos para que o professor em formação se sentisse capaz de oportunizar a educação matemática da mais ampla população possível. E, assim, mostrar que “a matemática tem aplicações cada vez mais úteis para mais questões sociais e econômicas, coisas na vida normal das pessoas” (GARFUNKEL, 2001, p. 4).

A partir do quadro teórico, consideramos que a preocupação com a autenticidade teve seu despontar com o uso de problemas com contextos artificiais para aplicar a matemática nas aulas de matemática. A modelagem matemática é vista como um meio para inserir essa autenticidade na sala de aula. Assim, considerando que as atividades desenvolvidas se caracterizam como uma atividade de modelagem matemática definimos atributos que julgamos necessários para conferir a autenticidade a essas atividades.

Para fazer a construção dos atributos que conferem autenticidade a uma atividade de modelagem matemática, foram consideradas as circunstâncias apontadas por Omodei e Almeida (2018), Vos (2011, 2018), Galbraith (2011, 2013, 2018) como as condições em que a atividade foi desenvolvida; tempo para esse desenvolvimento, materiais utilizados, conceitos matemáticos necessários para a resolução, informações sobre os estudantes e sobre como os professores conduziram a atividade. Além disso, abordamos outros aspectos considerados por Vos (2011, 2018), Strobel et al (2017), Palm (2009), como a necessidade de seguir o currículo escolar e ter uma certa obrigatoriedade em usar um conteúdo matemático específico para o desenvolvimento da atividade, o que interfere na autenticidade da atividade.

Consideramos as diferentes estratégias e ferramentas utilizadas para a resolução do problema e para a validação do modelo matemático, em conformidade com Palm (2009) sobre a importância de haver correspondências entre as estratégias de resolução na sala de aula e o modo como as pessoas resolvem o problema na vida real fora da escola.

Também foi importante analisar as simplificações realizadas no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, de modo que estas não comprometam a situação da realidade, o que está de acordo com Kaiser (2007) e Carreira e Baioa (2018).

A definição dos atributos para inferir autenticidade às atividades de modelagem matemática também considerou que, mesmo que houvesse especificidades para desenvolver uma atividade no contexto escolar, essas não poderiam ter maior relevância que as necessidades para o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, pois a autenticidade fica comprometida quando o desenvolvimento da atividade está submetido a essas outras condições (GALBRAITH, 2013).

Desse modo, a maioria das atividades não atendeu ao atributo 4 integralmente, pois a condução da atividade deveria ter como preocupação o próprio desenvolvimento da atividade. E, na sala de aula, muitas vezes há outras influências como tempo, espaço, fonte de pesquisa, que comprometem o objetivo da atividade. Vos (2018) também sugere essa falta de autenticidade na sala de aula por motivos educacionais: “para tornar a tarefa mais compreensível, melhor se adequar a um período de tempo limitado, melhor se adequar aos níveis dos alunos ou fisicamente viável dentro do ambiente escolar” (VOS, 2018, p. 5).

Apoiados em Borromeo Ferri (2018) ponderamos que, como o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática está centrado no estudante, a autenticidade está sustentada também na autonomia que este mostra ao desenvolver atividades de modelagem matemática. E, para finalizar a definição dos atributos que conferiram autenticidade às atividades de modelagem matemática, consideramos que a autenticidade também está presente na relevância dos resultados obtidos na atividade e na sua relação com o que podem gerar fora da escola no mundo real.

Usamos os atributos construídos para analisar cinco atividades de modelagem matemática desenvolvidas no Contexto de Aprendizagem pelos três grupos G1, G2 e G3 e três atividades desenvolvidas no Contexto de Ensino e conduzidas por estes grupos. As atividades desenvolvidas no Contexto de Ensino já eram conhecidas dos estudantes-professores, uma vez que foram desenvolvidas por eles na disciplina de Modelagem Matemática.

Ao pensarmos nas raízes da modelagem matemática na Educação Matemática, vemos que para desenvolver uma atividade de modelagem é necessário passar (e repassar) por todas as fases de desenvolvimento de uma atividade dessa natureza. Principalmente em conhecer a situação-problema e levantar problemáticas para ser resolvidas.

No que tange às motivações para pesquisar sobre a temática da autenticidade em atividades de modelagem matemática, uma delas consiste em nos deparamos (diversas vezes) com atividades de modelagem que mais se assemelhavam a problemas interessantes de se resolver, mas que para a resolução havia um conteúdo matemático pré-definido ou um contexto com muitas simplificações. Então buscamos o que seria essa autenticidade em atividades de modelagem matemática e, no decorrer do tempo, percebemos que não se trata apenas de desenvolver uma atividade de modelagem com um contexto autêntico, que pode acontecer na vida real dos envolvidos.

O que aconteceu na atividade *Monumento ao Boné* desenvolvida pelo grupo G3 pode ilustrar essa motivação. O desenvolvimento da atividade foi semelhante a um episódio narrado por Araújo e Barbosa (2005, p. 15) no qual "ao invés de partir de uma situação não-matemática da realidade, o grupo considerou a Matemática a ser explorada para formular uma situação semi-real", o qual foi denominado pelos autores como estratégia inversa. A formulação do problema se deu no sentido contrário ao caminho sugerido pelo professor, o que afetou a autenticidade da atividade.

De acordo com as análises empreendidas nessa pesquisa, a autenticidade se mostra presente em todo o desenvolvimento da atividade de modelagem, nesse contexto em que se dá a atividade, mas também no papel do professor, na autonomia dos estudantes, nas decisões que são tomadas, no porquê dessas decisões e o que elas influenciam. A autenticidade está no currículo, no planejamento das aulas, no objetivo de se fazer modelagem. A autenticidade está na prática de sala de aula e tudo isso interfere no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. Essas conclusões se mostram relevantes por também estarem de acordo com as dimensões de autenticidade propostas por Galbraith (2013, 2015).

As análises das atividades desenvolvidas no Contexto de Aprendizagem mostram que a autenticidade está ligada à autonomia dos estudantes-professores para desenvolver a atividade, pois o maior nível de autenticidade inclui atividades de 3º momento de familiarização dos estudantes com atividades de modelagem matemática, atividades em que os estudantes de fato percorrem todas as fases de desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, de acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2016).

Assim, uma atividade com maior nível de autenticidade exige que os próprios modeladores se envolvam na coleta de dados, conheçam mais profundamente a situação-problema estudada, analisem para buscar e selecionar informações necessárias, quais simplificações são possíveis de se fazer sem que comprometa a autenticidade da situação do mundo real, que hipóteses considerar, para então resolver o problema, construir o modelo matemático e interpretar os resultados, com vistas também às consequências desse modelo e o que os resultados podem trazer para o mundo dentro e fora da sala de aula.

É importante lembrar que, com relação às atividades utilizadas para ensinar matemática, não foi nossa intenção relacionar o nível de autenticidade a um grau de importância dessas atividades. Em uma sala de aula, diferentes perspectivas de ensino e alternativas pedagógicas podem coexistir. Porém, consideramos que atividades de modelagem matemática com um nível maior de autenticidade, contempla mais características de uma atividade de modelagem matemática em que os estudantes se envolvem em todas as fases, podendo aprender conceitos matemáticos e conceitos extramatemáticos envolvidos na situação-problema.

Com base na literatura estudada, é possível utilizar vários tipos de atividades, dependendo dos objetivos do professor e da oportunidade da aprendizagem. Assim, considerando a turma em que as atividades foram desenvolvidas, o estágio e a formação do professor, avaliamos que as atividades do nível 3 de autenticidade foram mais relevantes para os estudantes, porém, elas não seriam possíveis se não fossem as demais atividades.

Desenvolver cada atividade foi valoroso para a formação no sentido proposto, pois se os estudantes-professores não tivessem percorrido esse caminho e desenvolvido as atividades mais simples e com menos aspectos autênticos, provavelmente não teriam desenvolvido as atividades do nível 3 de autenticidade e não estariam preparados para desenvolver atividades de modelagem matemática com os alunos da escola.

Assim, concordamos com Vos (2018) que em alguns momentos é necessário fazer alterações nas atividades mesmo que essas ações diminuam a quantidade de atributos de autenticidade contemplados na atividade. Porém, isso não pode acontecer sempre. Atividades de modelagem matemática com atributos de autenticidade precisam estar presentes nas aulas de matemática, para que de fato os estudantes possam aprender a resolver problemas por meio da matemática.

As análises das atividades desenvolvidas no Contexto de Ensino mostram que quanto mais atributos que conferem autenticidade forem atendidos, maior o envolvimento dos alunos, como a atividade *Fabricação e Venda de Cookies* desenvolvida nas três turmas durante as Oficinas de Modelagem Matemática. Essa conclusão está de acordo com Quiroz, Orrego e López (2015) pois trabalhar em um contexto interessante para os alunos pode ter contribuído para abordarem a matemática escolar, mas principalmente por se sentirem capazes de desenvolver a atividade, de fazer escolhas, de chegar a um resultado satisfatório, evidenciando o papel da matemática na sociedade, o que para Forner e Malheiros (2020) constitui uma das principais características da modelagem.

Na literatura, a autenticidade em Educação Matemática normalmente está relacionada a uma profissão, por exemplo, nos cursos de engenharia, ao trabalharem com atividades que estejam o mais próximo possível da realidade que vão enfrentar nessa profissão, como mostram Carreira e Baioa (2018), Vos (2011, 2013, 2018). Nesses cursos, as atividades precisam ter atributos de autenticidade pois o objetivo é proporcionar a prática aos futuros engenheiros ou profissionais, ou seja, apesar de consistir em uma simulação, a autenticidade permite que a atividade seja muito próxima da prática real do trabalho que vão exercer.

Da mesma forma, a autenticidade em atividades de modelagem matemática é importante para a formação de professores, pois também está inserida na prática (presente ou futura) de um professor, que ensina matemática aos estudantes da Educação Básica e tem como objetivo relacionar a matemática ao mundo real e a outros conceitos exteriores à matemática, contribuindo para formar um estudante socialmente crítico. Isso está de acordo com Barbosa (2001, p. 14), ao sugerir que a formação de professores deve exceder as experiências matemáticas com a modelagem matemática, "[...] é necessário envolvê-los com conhecimentos associados às questões curriculares, didáticas e cognitivas da Modelagem na sala de aula, os quais só têm sentido na própria prática ".

No nosso caso, as atividades foram desenvolvidas com e por estudantes do curso de Licenciatura em Matemática, professores em formação inicial. Consideramos importante que os professores em formação aprendam a fazer modelagem matemática com a maioria de atributos de autenticidade possível, pois como mostramos, mesmo que fique em segundo plano por conta do currículo, do conteúdo a ser ensinado, de decisões pedagógicas, do tempo, a autenticidade deve ser uma característica intrínseca à modelagem matemática.

Na sala de aula, foi possível notar que a preparação para o trabalho com atividades de modelagem matemática na aula de matemática pode não ter sido suficiente para que os estudantes-professores estimulassem os alunos a construírem um modelo matemático geral, para descrever a situação-problema. É necessário ter óculos que te façam enxergar de outra perspectiva, não da perspectiva de um aluno passivo, no qual os outros apresentam e ele, por falta de conhecimento na maioria das vezes, não questiona. Ao utilizar os óculos do professor, o estudante-professor pode ter uma visão diferente, com vistas a um conteúdo matemático para ser desenvolvido a partir da atividade e que tenha surgido da própria situação-problema.

Um outro ponto que deve ser levado em consideração foi o fato de os estudantes-professores não notarem os erros nas resoluções dos alunos durante as oficinas de modelagem matemática. Os erros só foram notados a partir de uma análise cuidadosa e reflexiva, o que pode ser difícil para o professor fazer durante a aula, pelo próprio encaminhamento de uma aula em que ele não sabe exatamente como vai acontecer.

Assim, como consequência dessa pesquisa, é possível refletir sobre nossa prática enquanto professores, ao desenvolver atividades de modelagem, fazendo com que elas contribuam para o aprendizado da matemática e também de conceitos externos a ela. A partir das atividades com atributos para inferir autenticidade contemplados, é possível mostrar que a matemática está na maioria das situações que temos ao nosso redor, às vezes uma matemática mais simples, outras vezes uma matemática mais sofisticada, mas sem precisar forçar um contexto ou uma matemática a ser ensinada.

Foram apresentados não só os resultados da experiência que estudantes-professores tiveram com a inserção de atividades de modelagem matemática durante o Estágio Supervisionado, mas também os caminhos seguidos por eles ao desenvolverem as atividades com atributos que caracterizam autenticidade enquanto estudantes.

Assim, é possível afirmar que a familiarização com atividades de modelagem matemática durante o Contexto de Aprendizagem contribuiu para que o estudante-professor desenvolvesse no Contexto do Ensino atividades de modelagem com os alunos da escola.

Consideramos que essa tese pode contribuir para o desenvolvimento de atividades com atributos que caracterizam autenticidade na formação de professor e na sala de aula da Educação Básica, por meio dos exemplos de atividades, das reflexões suscitadas e de pontos positivos e negativos apontados durante o processo da pesquisa.

Encerramos com um trecho de Pollak e Garfunkel (2014, p. 12), que retrata um pouco do que concluímos em nossa pesquisa:

> Para onde vamos daqui? Acredito que os problemas de modelagem devem ser problemas do mundo real e acredito que podemos ensinar esses problemas. Existem bons problemas ao nosso redor: muitas pessoas, inclusive eu, colocamos muito esforço para encontrar esses problemas. Mas acredito que ensinar um verdadeiro problema de modelagem leva tempo. Já vi exemplos de sistemas de ensino de matemática em que não é possível encontrar um período inteiro, quanto mais uma semana, para os alunos discutirem uma situação de modelagem, formularem um modelo idealizado, fazerem a matemática relevante e, em seguida, examinarem o sucesso do que foi realizado. Devemos evitar que a modelagem matemática ganhe a reputação de apenas uma terminologia mais sofisticada para os mesmos velhos *word-problems*. Devemos, de alguma forma, encontrar tempo para percorrer o ciclo completo de modelagem. Provavelmente não sempre, mas podemos ter três ou quatro horas a cada poucos meses para fazer a modelagem em escala real? Essa pode ser uma batalha dentro do sistema de ensino de matemática, mas, em minha opinião, deve ser travada.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia**. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

AEBLI, H. **Zwölf Grundformen des Lernens**: Eine allgemeine Didaktik auf psychologischer Grundlage (Vol. 1). Stuttgart: Klett-Cotta, 1983.

ALMEIDA, L. M. W. de; SILVA, K. A. P. da; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2016.

ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S. Atividades de modelagem matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir? **Ciência & Educação** (Bauru). v.11, n.3, p. 483-498, 2005.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Modelagem Matemática em cursos de formação de professores. In: BARBOSA, J.; ARAÚJO, J. L.; CALDEIRA, A. D. (Org.). **Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira**: pesquisas e práticas educacionais. 1ed. Recife: Biblioteca do Educador Matemático, 2007, v. 03, p. 253-268.

ALMEIDA, L. M. W. ; SILVA, K. A. P. Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de modelagem matemática: um olhar sobre os modos de inferência. **Ciência e Educação** (UNESP. Impresso), v. 18, p. 623-642, 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K.A. P. . Práticas de professores com Modelagem Matemática: algumas configurações. **Educação Matemática em Revista**, v. 1, p. 6-15, 2015

ALMEIDA, L. M. W. VERTUAN, R. E. Modelagem Matemática na Educação Matemática. In: ALMEIDA, L. M. W., SILVA, K. A. P. **Modelagem Matemática em Foco.** Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2014. p. 1 – 21.

ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E.. Discussões sobre "como fazer" modelagem matemática na sala de aula. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. **Práticas de modelagem matemática na Educação Matemática**, Londrina: EDUEL, 2015. p. 19-44

ARAÚJO, J. L; BARBOSA, J. C. Face a Face com a Modelagem Matemática: como os alunos interpretam essa atividade?. **Boletim de Educação Matemática**, v. 18, n. 23, 2005.

AUTENTICIDADE. In Michaelis Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa, Editora Melhoramentos, 2020. Disponível em http://michaelis.uol.com.br/. Acesso em 12 ago. 2020.

BALL, D. L. **What mathematical knowledge is needed for teaching mathematics?** Paper presented at the U.S. Department of Education, Secretary's Mathematics Summit,Washington DC, February 6, 2003.

BALL, D. L. Uncovering the Special Mathematical Work of Teaching. In G. Kaiser (ed.), **Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education**, ICME-13 Monographs. 2017. P. 11-34

BALL, D. L., THAMES, M. H., PHELPS, G. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, vol 59 n. 5, 389–407, 2008.

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática e os professores: a questão da formação. ***Bolema***, Rio Claro, n. 15, p. 5-23, 2001.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. **Reunião anual da ANPED**, v. 24, n. 7, p. 1-15, 2001.

BARBOSA, J. C. Modelagem Matemática: O que é? Por que? Como? **Veritati**, n. 4, p. 73-80, 2004.

BARBOSA, J.C. Modelagem matemática em sala de aula: uma perspectiva sócio-crítica e discursiva. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik** 38, 293–301, 2006.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BAUMERT, J; KUNTER, M. The COACTIV Model of Teachers' Professional Competence. In: Kunter, M.; Baumert, J; Blum, W; Klusmann, U.; Krauss, S.; Neubrand, M. (Eds). **Cognitive Activation in the Mathematics Classroom and Professional Competence of Teachers**: Results from the COACTIV Project. Springer, Heidelberg. 2013. p. 25-48

BEAN, D. O que é modelagem matemática. **Educação matemática em revista**, v. 8, n. 9/10, p. 49-57, 2001

BIEMBENGUT, M. S. Modelagem na Educação Matemática, das ideias às proposições oficiais. **Com a Palavra, o Professor**, v. 5, n. 11, p. 136-139, 2020.

BISOGNIN, E., BISOGNIN, V. Modelagem Matemática em Cursos de Formação de Professores: Uma Contribuição para a Construção do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo. In: **Educação Matemática em Revista**, v. 1, p. 35-43, 2015.

BLUM, W. Can modelling be taught and learnt? Some answers from empirical research. In Kaiser, G.; Blum, W.; Ferri, R. B.; Stillman, G. (Eds.). **Trends in teaching and learning of mathematical modelling**. New York: Springer. 2011. P. 15-30

BLUM, W.. Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do?. In: CHO, S. (eds) **The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education**. Springer, Cham, fev. 2015. p. 73-96

BLUM, W.; LEIß, D. How do students and teachers deal with modelling problems? In C. Haines et al. (Eds.), **Mathematical modelling**: Education, engineering and economic. Chichester: Horwood, 2007, p.222-231.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação**. Portugal: Porto Editora, 1994.

BONOTTO, C. How To Replace Word Problems With Activities of Realistic Mathematical Modelling.. In BLUM, W.; GALBRAITH, P.; HENN, W.; NISS, M. (Eds.). **Modelling and applications in mathematics education**: The 14th ICMI study. New York: Springer. 2007. p. 185-192.

BORROMEO FERRI, R.Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, v. 38, n. 2, p. 86-95, 2006.

BORROMEO FERRI, R. **Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education**. 1ed. Springer International Publishing: 2018.

BORROMEO FERRI, R.; BLUM, W. Mathematical Modelling in Teacher Education – Experiences from a Modelling Seminar. In: Durand-Guerrier, V., Soury-Lavergne, S. & Arzarello, F. (Eds), CERME-6 – **Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education**. INRP, Lyon 2010, p. 2046-2055.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília: MEC/SEB, 2018. 600p.

BUCHHOLTZ, N.; MESROGLI, S. A Whole Week of Modelling – Examples and Experiences of Modelling for Students in Mathematics Education. In: STILLMAN, G. A.; KAISER, G.; BLUM,W.; BROWN, J. P. (Eds) **Teaching Mathematical Modelling**: Connecting to Research and Practice. Holanda: Springer, 2013. p. 307-316.

BURAK, D. Modelagem Matemática nos diferentes níveis de ensino: uma perspectiva. In: Encontro Paranaense De Modelagem Em Educação Matemática, 12, 2014. **Anais**... Campo Mourão, 2014.

CALDEIRA, A. D. Modelagem Matemática: um outro olhar. **Alexandria** Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.2, n.2, p.33-54, jul. 2009.

CARREIRA, S.; BAIOA, A. M.. Mathematical modelling with hands-on experimental tasks: on the student's sense of credibility. **ZDM - The International Journal on Mathematics Education.** Springer Berlin Heidelberg. vol. 50, n. 1, jan - 2018. p. 201–215

CAVEY, L. O.; CHAMPION, J. Learning Secondary School Mathematics through Authentic Mathematical Modeling tasks. In. HIRSCH, C. R.,; MCDUFFIE, A. R., (Eds), **Annual Perspectives in Mathematics Education 2016**: Mathematical Modeling and Modeling Mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2016. p. 131-141

CIFUENTES, J.C.; NEGRELLI, L. G. Uma Interpretação Epistemológica do Processo de Modelagem Matemática: implicações para a matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 26, n. 43, p. 791-815, ago. 2012.

COHEN, D. K., RAUDENBUSCH, S., & BALL, D. L. Resources, instruction, and research. **Educational Evaluation and Policy Analysis**, vol. 25, n. 2, 2003. p. 119–142.

DEPAEPE, F., DE CORTE, E., VERSHAFFEL, L. The Realistic Nature of Word Problems in Upper ElementaryMathematics Education in Flanders. In VERSCHAFFEL, L.; GREER, B.; VAN DOOREN, W; MUKHOPADHYA, S (Eds). **Words and worlds: Modeling verbal descriptions of situations**. Sense Publishers; Rotterdam. 2009; p. 245-263

DIAS, M. R. **Uma Experiência com Modelagem Matemática na Formação Continuada de Professores**. 2005. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2005.

ENGLISH, L. Mathematical Modelling With Young Learners. In LAMON, S.J. PARKER, W. A, HOUSTON, S. K. (Eds.), **Mathematical modelling**: A way of life. Chichester, UK: Horwood. 2003. p. 3–18.

FORNER, R.; MALHEIROS, A. P. S. Constituição da Práxis Docente no contexto da Modelagem Matemática. **Bolema**. Rio Claro, SP. v. 34, n. 67, p. 501-521, ago. 2020.

GALBRAITH, P. Authenticity and goals: Overview. In BLUM, W.; GALBRAITH, P.; HENN, W.; NISS, M. (Eds.). **Modelling and applications in mathematics education**: The 14th ICMI study. New York: Springer. 2007. p. 181-184.

GALBRAITH, P. From Conference to Community: An ICTMA Journey— The Ken Houston Inaugural Lecture. In: STILLMAN, G. A.; KAISER, G.; BLUM, W.; BROWN, J. P. (Eds) **Teaching Mathematical Modelling**: Connecting to Research and Practice. Holanda: Springer, 2013. p. 27-45.

GALBRAITH, P. Modelling, Education, and the Epistemic Fallacy. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds) **Mathematical Modelling in Education Research and Practice** - Cultural, Social and Cognitive Influences. Suíça: Springer, 2015. p. 339-349.

GARCÍA, F. J.; MAAß, K.; WAKE, G. Theory Meets Practice: Working Pragmatically Within Different Cultures and Traditions. In: LESH, R.; GALBRAITH, L.; HAINES, C.R.; HURFORD, A. (Eds). **Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies**: ICTMA 13. New York: Springer. 2010. p.445-458.

GARFUNKEL, S. A.; GODBOLD, L.; POLLAK, H. **Mathematics**: Modeling our world (COMAP). 2000.

GARNICA, A. V. M. História Oral e educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

GUEUDET, G., BOSCH, M.,DISESSA, A. A, KWON, O. N., VERSCHAFFEL, L. Transitions in Mathematics Education: The Panel Debate. In. KAISER, G. (ed.), **Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education**, ICME-13 Monographs. Cham, Switzerland, 2017. p. 101-117. DOI 10.1007/978-3-319-62597-3_7

HENN, H.-W. Warum manchmal Katzen vom Himmel fallen . . . oder . . . von guten und von schlechten Modellen. In H. Hischer (Ed.) **Modellbildung, Computer und Mathematikunterricht**. Hildesheim: Franzbecker. 2000. p. 9-17.

HONEBEIN, P. C., DUFFY, T. M., FISHMAN, B. J. Constructivism and the design of learning environments: Context and authentic activities for learning. In DUFFY, T. M. et al. (Eds.), **Designing environments for constructivist learning**. Heidelberg, Springer-Verlag, Berlin, 1993. p. 87-108.

JULIE, C., MUDALY, V. Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), **Modelling and applications in mathematics education**: The 14th ICMI study (pp. 503–510). New York: Springer, 2007.

KAISER, G. Modelling and modelling competencies in school. In: HAINES, C.; GALBRAITH, P.; BLUM, W.; KHAN, S. (eds) **Mathematical Modelling (ICTMA 12)**: Education, Engineering and Economics. Inglaterra: Horwood Publishing Limited, 2007. p. 110-119.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **ZDM**, v. 38, n. 3, p. 302-310, 2006.

KAISER, G., SCHWARZ, B. Authentic modelling problems in mathematics education – Examples and experiences. **Journal für Mathematik-Didaktik**, vol. 31, 2010. p. 51–76.

KAISER, G.; SCHWARZ, B.; BUCHHOLTZ, N. Authentic Modelling Problems in Mathematics Education. In: KAISER, G.; BLUM, W.; FERRI, R. B.; STILLMAN, G. A. (Eds). **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling**: ICTMA 14. Holanda: Springer. 2011. p.591-602.

KAISER, G.; STENDER, P. Complex Modelling Problems in Co-operative, Self-Directed Learning Environments. In: STILLMAN, G. A.; KAISER, G.; BLUM, W.; BROWN, J. P. (Eds) **Teaching Mathematical Modelling**: Connecting to Research and Practice. Holanda: Springer, 2013. p. 277-294.

KLÜBER, T. E.; TAMBARUSSI, C. M. A formação de professores em Modelagem Matemática na Educação Matemática: uma hermenêutica. **Acta Scientiae**. Canoas. v. 19; n. 3; p. 412-426. 2017

KRAMARSKI, B., MEVARECH, Z. R., & ARAMI, V. The effects of metacognitive instruction on solving mathematical authentic tasks. **Educational Studies in Mathematics**, vol. 49, 2002. p. 225–250.

LEBOW, D. G. Constructivist values for instructional systems design: Five principles toward a new mindset. **Educational Technology Research & Development**, v. 41, n.3, 1993. p. 4-16.

LESH, R., LAMON, S. (Eds.). **Assessment of authentic performance in school mathematics**. Washington: American Association for the Advancement of Science. 1992.

LÜDKE, M., ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação**: Abordagens Qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MAAß, K. Classification scheme for modelling tasks. **Journal für Mathematik-Didaktik**, v. 31, n. 2, p. 285-311, 2010.

MAAß, K.; ENGELN, K. Impact of professional development involving modelling on teachers and their teaching. **ZDM - The International Journal on Mathematics Education.** Springer Berlin Heidelberg. vol. 50, n. 1, jan - 2018. p. 273-285.

MALHEIROS, A. P. S., SOUZA, L. B., FORNER, R. Olhares de docentes sobre as possibilidades da Modelagem nas aulas de Matemática. In: **REnCiMa**, São Paulo, v. 12, n. 2, p. 1-22, mar. 2021

MARTINS, B. O. M.; OMODEI, L. B. C; ALMEIDA, L. M. W. A autenticidade em atividades de modelagem matemática. In: X CNMEM – Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática – Modelagem matemática na Educação Matemática brasileira: história, atualidades e projeções. n. 10, 2017, Maringá-PR. **Anais...** Maringá: Universidade Estadual de Maringá. p. 1-15.

MEYER, J.F.C.A. Modelagem Matemática: O desafio de se 'fazer' a Matemática da necessidade… In: **Com a Palavra o Professor**, Vitória da Conquista (BA), v.5, n.11, janeiro-abril / 2020. p. 140-149.

MUTTI, G. S. L. **Práticas pedagógicas de professores da educação matemática num contexto de formação continuada em modelagem matemática na educação matemática**. 2016. 236 f. Dissertação (Mestrado em Ensino) - Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Foz do Iguaçu, 2016.

NASCENTES, A. Dicionário Etimológico da Língua Portuguesa. TOMO I, PRIMEIRA EDIÇÃO. SEGUNDA TIRAGEM. Rio de Janeiro, 1955.

NISS, M. O papel das aplicações e da Modelação na Matemática Escolar. Trad. de Paulo Abrantes. **Educação e Matemática** (p. 1-2), n. 23, 3º trim. 1992.

NISS, M., BLUM, W., GALBRAITH, P. Introduction. In W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.) **Modelling and applications in mathematics education** (pp. 3–32). New York: Springer. 2007

OLIVEIRA, A. M. P.; CAMPOS, I. S.; SILVA, M. S. As estratégias do professor para desenvolver modelagem matemática na sala de aula. **Boletim GEPEM**, Rio de Janeiro, v. 55, n. 3, p. 175-192, 2009.

OLIVEIRA, C. F. O. **A Terapia de Wittgenstein e o Conceito de Função**: Uma Investigação com Modelagem Matemática. 2018. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de londrina, Londrina, 2018.

OLIVEIRA, W. P. **Modelagem matemática nas licenciaturas em matemática das universidades estaduais do Paraná**. 2016. 155 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação. Área de concentração: Sociedade, Estado e Educação, Linha de Pesquisa: Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Cascavel, PR, 2016.

OLIVEIRA, W. P. **Modelagem Matemática No Estágio Pedagógico:** uma investigação fenomenológica. 2020. 504 f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática. Universidade estadual de Maringá – UEM, Maringá, PR, 2020.

OMODEI, L.B.C.; ALMEIDA, L.M.W. Aspectos Autênticos Em Atividades De Modelagem Matemática. In: VIII EPMEM – Encontro Paranaense de Modelagem Matemática – Modelagem e a Sala de Aula. n. 8, 2018, Cascavel – PR. **Anais...** Cascavel: Universidade Estadual do Oeste do Paraná. p. 1-13.

OMODEI, L.B.C.; ALMEIDA, L.M.W. Uma Atividade De Modelagem Matemática Com Aspectos Autênticos. In: XIII ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática – Educação Matemática com as Escolas da Educação Básica: interfaces entre pesquisas e salas de aula. n. 13, 2019, Cuiabá – MT. **Anais...** Cuiabá: SBEM, 2019, p. 1-15.

PALM, T. **The realism of mathematical schools tasks** – Features and consequences. Ph.D. thesis, Umeå University, Umeå, Sweden, 2002.

PALM, T. Features and impact of the authenticity of applied mathematical school tasks. In BLUM, W. et al. (Eds.), **Modelling and applications in mathematics education**. New York: Springer. 2007. p. 201–208.

PALM, T. Theory of Authentic Task Situations. In Verschaffel, L.; Greer, B.; Van Dooren, W; Mukhopadhya, S (Eds). **Words and worlds:** Modeling verbal descriptions of situations. Sense Publishers; Rotterdam. 2009; p. 3-20.

PERRENET, J.; ZWANEVEL, D. The Many Faces of the Mathematical Modeling Cycle. **Journal of Mathematical Modelling and Application**. v.1, n.1, 3-21, 2012.

POLLAK, H. O. How can we teach applications of mathematics? **Educational Studies in Mathematics**. Vol. 2, No. 2/3, Addresses of the First International Congress on Mathematical Education. Springer. Dec., 1969, pp. 393-404

POLLAK, H. O. The interaction between mathematics and other school subjects. In: UNESCO (Ed.) **New trends in mathematics teaching**. Paris: UNESCO, p. 232-248, 1979.

POLLAK, H., GARFUNKEL, S. A View of Mathematical Modeling in Mathematics Education. **Journal of Mathematics Education at Teachers College**. Mathematical Modeling. 2013. DOI: 10.7916 / jmetc.v0i0.658

QUIROZ, S. M. R; ORREGO, S. M. L.; LÓPEZ, C. M. J. Measurement of Area and Volume in an Authentic Context: An Alternative Learning Experience Through Mathematical Modelling. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds) **Mathematical Modelling in Education Research and Practice** - Cultural, Social and Cognitive Influences. Suíça: Springer, 2015. p. 229-240.

REUSSER, K.; STEBLER, R.. Every Word Problem Has A Solution-The Social Rationality of Mathematical Modeling in Schools. **Learning and Instruction**. Elsevier Science Ltd, Vol. 7, No. 4, 1997. p. 309-327. DOI:10.1016/S0959-4752(97)00014-5

SANTOS, F. V. **Modelagem Matemática e Tecnologias de Informação e Comunicação**: o que os alunos fazem do computador em atividades de modelagem. 2008. 176 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2008.

SANTOS JUNIOR, G.; SOARES, M. R. A Modelagem Matemática nos cursos de Licenciatura em Matemática do Estado do Paraná. **Revista Dynamis**. FURB, Blumenau, v. 20, n. 2, p. 29–46, 2014

SCHWARZKOPF, R. Elementary Modelling In Mathematics Lessons: The Interplay Between "Real-World" Knowledge And "Mathematical Structures" In BLUM, W.; GALBRAITH, P.; HENN, W.; NISS, M. (Eds.). **Modelling and applications in mathematics education**: The 14th ICMI study. New York: Springer. 2007. p. 185-192.

SILVA, K. A. P. **Uma interpretação semiótica de atividades de Modelagem Matemática**: implicações para a atribuição de significado. 2013. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de londrina, Londrina, 2013.

SILVA, K. A. P.; ALMEIDA, L. M. W. Formação Do Professor De Matemática No Contexto De Atividades De Modelagem Matemática In: XIII ENEM – Encontro Nacional de Modelagem na Educação Matemática n. 13, 2019, Cuiabá-MT. **Anais...**Barra dos Bugres – MT: Universidade Estadual do Mato Grosso – UNEMAT, p. 1-14.

SILVA, L. A; OLIVEIRA, A. M. P. Quando a escolha do tema em atividades de modelagem matemática provém do professor: o que está em jogo?. **Acta Scientiae**, v. 17, n. 1, 2015.

SILVEIRA, E.; CALDEIRA, A. D. Modelagem na Sala de Aula: resistências e obstáculos. **Bolema** [online]. 2012, vol.26, n.43, pp.1021-1047.

SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

SHULMAN, L. S. Knowledge and teaching: foundations of the new reform. **Harvard Educational Review**, v. 57, n. 1, p. 1-22, Feb. 1987.

SOUSA, B. N. P. A. **A Matemática em atividades de modelagem matemática: uma perspectiva wittgensteiniana**. 2017. 316p. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, UEL, Londrina, 2017.

SPOONER K. Authentic Mathematical Modelling Experiences of Upper Secondary School: A Case Study. In: Stillman G., Blum W., Kaiser G. (eds) Mathematical Modelling and Applications. **International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling.** Springer, Cham. 2017. p. 627-636.

STILLMAN, G. A.; BROWN, J. P.; GEIGER, V. Facilitating Mathematisation in Modelling by Beginning Modellers in Secondary School In: STILLMAN, G.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Ed.) **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: cultural, social and cognitive influences. New York: Springer, 2015. p. 93-104.

STROBEL, J. et al. The role of authenticity in design-based learning environments: The case of engineering education. **Computers & Education**, v. 64, 2013, p. 143-152.

TAMBARUSSI, C. M.; KLÜBER, T. E.. A pesquisa em Modelagem Matemática na Educação Matemática: sobre as atividades de formação continuada em teses e dissertações. **REVEMAT**, Florianópolis (SC), v. 9, Ed. Temática, p. 38-56, jun. 2014.

TRZASKACZ, A. J.; VERONEZ, M. R. D. A Modelagem Matemática nos Cursos de Licenciatura em Matemática das Universidades Públicas Paranaenses. In: XV Encontro Paranaense de Educação Matemática – EPREM n. 15, 2019, Londrina-PR. **Anais...** Londrina: Universidade Estadual de Londrina (UEL) e Universidade Tecnológica Federal do Paraná campus Londrina (UTFPR), p. 1-14. 2019;

VERSCHAFFEL, L., DE CORTE, E. **A decade of research on word-problem solving in Leuven**: Theoretical, methodological and practical outcomes. Educational Psychology Review, 5, 239–256. 1993.

VERSCHAFFEL, L.; DE CORTE, E. Word problems: A vehicle for promoting authentic mathematical understanding and problem solving in the primary school. In T. Nunes & P. Bryant (Eds.), **Learning and teaching mathematics**: An international perspective Hove, East Sussex, U.K.: Psychology Press. 1997. (pp. 69–97).

VERSCHAFFEL, L. et al. **Words and worlds**: Modeling verbal descriptions of situations. BRILL, 2009.

VERSCHAFFEL, L. et al. Word problems in mathematics education: a survey. **ZDM**, v. 52, n. 1, p. 1-16, 2020.

VILLA-OCHOA, J. A.; Castrillón-Yepes, A. Sánchez-Cardona, J. TIPOS DE TAREAS DE MODELACIÓN PARA LA CLASE DE MATEMMATICA. **Espaço Plural**, Cascavel – PR, Nº 36, p.219 251, 1º Semestre 2017.

VOS, P. What Is 'Authentic' in the Teaching and Learning of Mathematical Modelling? In: KAISER, G.; BLUM, W.; FERRI, R. B.; STILLMAN, G. A. (Eds). **Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling**: ICTMA 14. Holanda: Springer. 2011. p. 713-722.

VOS, P. Authenticity in Extra-curricular Mathematics Activities: Researching Authenticity as a Social Construct. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds) **Mathematical Modelling in Education Research and Practice** - Cultural, Social and Cognitive Influences. Suíça: Springer, 2015. p. 105-113.

VOS, P. "How Real People Really Need Mathematics in the Real World"—Authenticity in Mathematics Education. **Education Sciences**, v. 8, n. 4, p. 195, 2018.

VOS, P. Task Contexts in Dutch Mathematics Education. In: VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, M. (ed.), **National Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics**, ICME-13 Monographs, Springer, Cham, 2020, p. 31-53. https://doi.org/10.1007/978-3-030-33824-4_3

WEDELIN, D.; ADAWI, T. Applied Mathematical Problem Solving: Principles for Designing Small Realistic Problems. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds) **Mathematical Modelling in Education Research and Practice** - Cultural, Social and Cognitive Influences. Suíça: Springer, 2015. p. 417-426.

ZECH, F. **Grundkurs Mathematikdidaktik**. Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik. Weinheim/Basel: Beltz. 1998.

APÊNDICES

APÊNDICE A

Termo de consentimento livre e esclarecido

Título da pesquisa: Autenticidade em Modelagem Matemática
Pesquisa realizada por: profa Ma. Letícia Barcaro Celeste Omodei
Orientadora: Profa Dra. Lourdes Werle de Almeida

TERMO DE CONSENTIMENTO

Como participante da pesquisa intitulada: **AUTENTICIDADE EM MODELAGEM MATEMÁTICA**, vinculada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática – PECEM, orientada pela Prof. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida da Universidade Estadual de Londrina – UEL, e que tem como pesquisadora a prof. Ma. Letícia Barcaro Celeste Omodei, autorizo a divulgação dos dados concedidos em material escrito, imagens, áudio ou vídeo para a pesquisa. Sendo assim, eu,

....

declaro que fui devidamente esclarecido e concordo em divulgar os dados na pesquisa.

______________________________________ **Data:……………………..**
(Assinatura ou impressão datiloscópica)

APÊNDICE B

Questionário Inicial

Questionário Inicial

1- O que é Modelagem Matemática?
2- O que é um modelo matemático?
3- Você já teve contato com a Modelagem Matemática? Em que momentos ou situações?
4- É possível desenvolver atividades de Modelagem Matemática na Educação Básica? Como? Por quê?
5- O que você considera relevante em uma atividade desenvolvida na aula de Matemática?
6- Levando em conta a sua formação inicial de professor de matemática, o que você espera desta disciplina de Modelagem Matemática?

APÊNDICE C

Questionário Pré – estágio

Estudante:____ Data:

Questionário Pré-estágio

1- Você se sente preparado para utilizar a modelagem matemática como alternativa pedagógica? Justifique.
2- Quais dificuldades você tem enfrentado no planejamento das aulas?
3- Como você imagina que os estudantes da escola vão "encarar" as oficinas de modelagem?
4- Que resultados você espera obter?

APÊNDICE D

Questionário Pós – estágio

Questionário Pós – oficinas de Modelagem

1- Em que você considera que as oficinas de modelagem matemática contribuíram para sua formação?
2- Com qual parte do estágio (aulas ou oficinas) você mais se identificou enquanto professor? Justifique.
3- Você se sentiu preparado para trabalhar com a Modelagem Matemática na sala de aula? Por que?
4- Em que momentos ou situações você notou que precisaria de mais preparação? Justifique.
5- Levando em conta a sua formação inicial de professor de matemática, você julga ser possível desenvolver atividades de Modelagem Matemática na Educação Básica? Como? Por quê?
6- Houve necessidade de explicar algum conteúdo matemático que os alunos desconheciam? Qual? Como isso aconteceu?
7- Com o plano de aula em mãos, classifique as atividades de acordo com os momentos propostos por Almeida, Silva e Vertuan (2016).

Quadro 1: Momentos de familiarização com a atividade de Modelagem Matemática elaborado com base em Almeida, Silva e Vertuan (2016, p. 26).

	1º momento	**2º momento**	**3º momento**
Introdução da situação - problema	A situação-problema colocada pelo professor contém os dados e as informações necessárias	A situação-problema é sugerida pelo professor.	A situação problema é definida pelos próprios alunos.
Papel dos alunos	Desenvolvem as etapas da modelagem, sempre acompanhados pelo professor.	Em grupos, de forma mais independente do professor quando comparado ao momento anterior, complementam a coleta de informações, definem as variáveis e formulam hipóteses, obtém e validam o modelo.	Em grupos, são responsáveis pela condução da atividade, desde a identificação da situação problema até a obtenção do modelo e sua comunicação para a comunidade escolar.

8- Faça uma avaliação dos resultados finais dos trabalhos dos alunos.
9- Faça uma avaliação de todo o processo das oficinas de Modelagem.
10- Faça uma avaliação do seu trabalho enquanto professor da turma em que realizou o estágio e dos seus companheiros de grupo. Dê uma nota para cada um.
11- Cite partes do estágio que você faria diferente, justificando cada uma delas.

ANEXOS

ANEXO A

Reportagem a respeito da instalação de internet wi-fi em praças públicas

- Prefeitura Municipal de Apucarana - http://www.apucarana.pr.gov.br/site -

Apucarana lança o programa "Praça Viva"

Publicado Por *Maria Estela Zanchin* Em 30 de agosto de 2017 08:34 Em Notícias

O Instituto de Desenvolvimento, Pesquisa e Planejamento de Apucarana (Ideepplan) está finalizando os projetos do primeiro lote de praças públicas que receberão investimentos, com revitalização e novos equipamentos. O programa, anunciado ontem pelo prefeito Beto Preto, em reunião no gabinete municipal, é denominado "Praça Viva" e prevê investimentos de cerca de R$ 500 mil até abril de 2018, quando devem ser concluídas melhorias em vinte espaços públicos no centro e em bairros.

"Nossa proposta é reurbanizar e valorizar estes espaços públicos, tornando-os mais atrativos e agradáveis para a convivência dos apucaranenses, seja nos bairros como também no centro", informa o prefeito Beto Preto. Segundo ele já está definido um primeiro lote de seis praças, para dar início ao programa.

"Nós vamos garantir um sistema de iluminação mais eficiente, melhorar o paisagismo, implantar rampas de acessibilidade, lixeiras e agregar novos equipamentos como parques infantis, academias ao ar livre e mesinhas e bancos para jogos", adianta o prefeito. Ele acrescenta ainda que em algumas praças de maior freqüência, a prefeitura quer implantar sinal de internet gratuito (wi-fi), mediante parcerias com a Copel e outras empresas.

As arquitetas Carolina Zanchin e Priscila Kempf, do Ideepplan, revelam que nesta primeira etapa estão inclusas a Praça Demétrio Mazurok (ao lado do Sesc); praça Miguel Ballak (junto à Capela Mortuária Central); Praça da Bíblia (ao lado do Parque Biguaçú); Praça Vale Verde (no bairro que leva o mesmo nome); Praça Duque de Caxias (ao lado do colégio São José; e a praça da rotatória da UTFPR. Também pode entrar neste pacote a Praça Nova (na Rua Pedro Menegazzo, região da "Igrejinha").

Beto Preto diz que pretende levar melhorias, gradativamente, para cerca de 50 praças nos próximos anos, incluindo também núcleos e vilas mais distantes do centro. "Nosso objetivo é valorizar mais estes espaços públicos, tornando-os convidativos para todas as faixas etárias, desde as crianças até os idosos", argumenta.

O programa será executado por equipes da prefeitura e também por empresas contratadas para plantio de grama, concretagem de passeios e instalação de equipamentos como postes e luminárias.

Da reunião em que foram definidos os primeiros projetos a serem executados também participaram o vice-prefeito Junior da Femac, os secretários Herivelto Moreno (obras), Laércio de Morais (governo) e Otoniel Gonçalves (Assuntos Estratégicos); e os engenheiros Lafayete Luz e Helligton Martins.

Compartilhe
Share List

Artigo impresso de Prefeitura Municipal de Apucarana:
http://www.apucarana.pr.gov.br/site

URL do artigo: **http://www.apucarana.pr.gov.br/site/apucarana-lanca-o-programa-praca-viva/**