Universidade Estadual de Londrina

MATHEUS TERLESKI SILVA

UMA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM PARA A EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Londrina
2020

MATHEUS TERLESKI SILVA

UMA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM PARA A EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática, por meio do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientadora: Prof. Dra. Pamela Emanueli Alves Ferreira

Londrina
2020

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL.

S586 Silva, Matheus Terleski.
Uma trajetória hipotética de aprendizagem para a educação financeira / Matheus Terleski Silva. - Londrina, 2020.
108 f.

Orientador: Pamela Emanueli Alves Ferreira.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2020.
Inclui bibliografia.

1. Trajetória Hipotética de Aprendizagem - Tese. 2. Educação Financeira - Tese. 3. Resolução de Problemas - Tese. 4. Ensino de Matemática - Tese. I. Emanueli Alves Ferreira, Pamela. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDU 51

MATHEUS TERLESKI SILVA

UMA TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM PARA A EDUCAÇÃO FINANCEIRA

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Matemática por meio do PROFMAT – Mestrado Profissional em Rede Nacional.

BANCA EXAMINADORA

____
Orientadora: Prof. Dra. Pamela Emanueli Alves Ferreira
Universidade Estadual de Londrina - UEL

____
Prof. Dr. George Francisco Santiago Martin
Universidade Estadual do Norte do Paraná - UENP

____
Prof. Dra. Magna Natalia Marin Pires
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 28 de agosto de 2020.

AGRADECIMENTOS

Fazer um mestrado sempre foi um sonho que parecia muito distante, sempre achei que fosse pra quem tivesse recursos financeiros ou fosse muito inteligente, ao qual eu acho que não me enquadro, mas estamos aqui, realizando um sonho com muita gratidão.

Assim como a maioria das pessoas inicia os agradecimentos citando a Deus, gostaria de começar da mesma forma. Obrigado Senhor, principalmente pelo dom da vida, obrigado também pela oportunidade, pelo amparo, pelo amor e pela capacidade que me deu.

Agradeço a meus pais, que mesmo em suas limitações, foram meu sustento, um amparo físico, mental e espiritual, me servindo de base para acreditar que eu era capaz, mesmo sem dizer nada. Em especial à minha mãe, dona Sandra, meu grande exemplo de ser humano.

À minha querida professora doutora Pamela, me orientou, me ensinou, me inspirou e me cativou. Sempre paciente. Obrigado, por ter me aceitado como orientando, e por ter sido professora, sua decisão impactou diretamente a minha vida.

Aos meus outros professores, mestres e doutores, que me guiam desde o começo da minha história, guerreiros e guardiões da educação pública, aos que marcaram de maneira profunda, Selma, Elaine, Joviane, Anália, Daniel, Ana Lúcia, Neuza, e Regina Célia. Em especial, à Magna e ao George, participantes da banca de defesa deste trabalho.

Aos meus colegas e amigos de profissão, professores que me inspiram e me fazem acreditar na educação, em especial ao Jean, Jéssica, Ana Lara, Lucas, Beatriz e Gabriel. Suas presenças foram cruciais para que o tempo de formação fosse agradável.

Aos meus amigos, que me conhecem, me entendem, me suportam e me ajudam, que rezam por mim e me ouvem quando eu preciso, que comemoraram comigo a cada nota de prova bem sucedida. A vocês meu eterno agradecimento. Incapaz de citar todos aqui, quero representá-los nas pessoas da Letícia, Felipe, Claudinei, Wallace, Nayara e Kananda.

Enfim, a todos que passaram pela minha história, que contribuíram com uma palavra de apoio, de incentivo e de fé. Muitas pessoas compõem essa trajetória de esforço e superação. Muito obrigado.

Um servo de Maria, jamais perecerá (Santo Anselmo de Canterbury)

SILVA, Matheus Terleski. **Uma trajetória hipotetica de aprendizagem para a educação financeira**. 2020. 103 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática PROFMAT) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

RESUMO

Neste trabalho apresentamos uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) com três atividades, à luz das ideias de Simon, para a Educação Financeira (EF), através da estratégia metodológica de ensino Resolução de Problemas (RP), nas perspectivas de Polya, Onuchic e Allevatto. O que nos inspirou a realizar esse trabalho foi a necessidade de falar sobre EF e as diversas possibilidades de poupanças e investimentos que surgiram com a evolução dos sistemas e mercados financeiros, vistos como possibilidades para uma melhor qualidade de vida financeira. Para fundamentar essa dissertação, abordamos alguns documentos da Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) para falar sobre Educação Financeira, associamos a RP com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e a Base Nacional Curricular Comum (BNCC) e falamos da THA. Nossa Trajetória parte de três problemas contextualizados, os quais podem ser de muitos dos nossos alunos futuramente. Abordamos sobre opções de poupanças, investimentos e financiamentos, buscamos analisar e lançar um olhar crítico sobre as opções disponíveis, considerando o aluno como construtor do seu conhecimento e o professor como mediador.

Palavras-chave: Trajetória hipotética de aprendizagem. Educação financeira. Resolução de problemas. Matemática financeira. Ensino de Matemática.

SILVA, Matheus Terleski. **A hypothetical learning trajectories for teaching financial education**. 2020. 103 p. Dissertation (Professional Master in Mathematics PROFMAT) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

ABSTRACT

At this work we present a Hypothetical Learning Trajectories (HLT) with three activities presented, about Simon's ideas, for teaching of Financial Education (FE), through the methodological teaching strategy of Problem Solving (PS), in the perspectives of Polya, Onuchic and Allevatto. What inspired us to carry out this work was the need to talk about FE and the various possibilities for savings and investments that emerged with the evolution of financial systems and markets, seen as possible for a better quality of financial life. To support this dissertation, we approached some OECD documents to talk about Financial Education, associated PS with the PCNs and BNCC and talked about HLT. Our Trajectorie starts from three contextualized problems, which may be the many of our students in the future. Adressing savings, investments and financing options, searchers analyze and take a critical look at the available options, considering the student as a builder of their knowledge and the teacher as a mediator.

Keywords: Hypothetical learning trajectories. Financial education. Problem solving. financial Mathematics. Mathematics teaching.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Curricular Comum
DCNEM	Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio
EUA	Estados Unidos da América
INFE	*International Network on Financial Education*
NCTM	*National Council of Teachers of Mathematics*
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
OECD	*Organisation for Economic Co-operation and Development*
OEEC	*Organisation for European Economic Co-operation*
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PISA	*Programme for International Student Assessment*
PNE	Plano Nacional da Educação
RP	Resolução de Problemas
THA	Trajetória Hipotética de Aprendizagem
PG	Progressão Geométrica
SAC	Sistema de Amortização Constante

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Um dos princípios da economia é que os recursos são escassos e nós sabemos que os principais recursos que sustentam a humanidade atualmente, não são renováveis, dentre eles o petróleo, áreas de desmatamento para cultivo agropecuário, extração de minérios e madeira, pesca industrial, entre outros, desencadeando também o aumento de regiões poluídas, sejam elas pela emissão de gás carbônico, escoamento de esgoto em rios, acumulo de lixo, etc. Mas o que isso tem a ver com o tema dessa dissertação? Como uma proposta de ensino pode mudar essa realidade?

Neste trabalho, elaboramos uma proposta de ensino que, de maneira implícita, fala sobre a conscientização na tomada de decisões financeiras. Acreditamos que a conscientização, mesmo que falando em dinheiro, pode gerar responsabilidade, esta, que pode ser capaz de nos fazer repensar o consumo desenfreado precursor de escassez, sendo esse, de recursos financeiros ou físicos. Apesar de abordarmos somente o assunto financeiro, percebemos que está diretamente ligado às necessidades (ou desejos) materiais que as pessoas carregam. O que justifica iniciarmos este texto falando de consumo exacerbado.

Nossa proposta consiste em elaborar algumas Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem (THA), a fim de dar aos professores da Educação Básica e à comunidade científica, novos recursos que possam ser utilizados em sala de aula. Nossa THA utiliza de uma estratégia metodológica de ensino conhecida como Resolução de Problemas (RP), nessa estratégia metodológica, nós partimos de um problema para que haja um ambiente de aprendizagem e o aluno consiga desenvolver seu conhecimento. Essa abordagem de ensino, enxerga o aluno como ser ativo na sua aprendizagem e o professor como um mediador do conhecimento. O que contrapõe uma metodologia mais tradicional de ensino e aprendizagem.

As propostas de aprendizagem que serão apresentadas neste trabalho, sob a luz da Resolução de Problemas, estão associadas à Educação Financeira e à Matemática Financeira. Nós as desenvolvemos a partir de problemas que tratam de situações de poupança e financiamentos, propondo ao aluno que desenvolva um raciocínio capaz de interpretá-las e solucioná-las.

Nessas propostas, também apresentamos dúvidas e resoluções hipotéticas, mostrando sempre a Matemática Financeira envolvida e necessária para o desenvolvimento do processo. Nossos objetivos com as aplicações dessas propostas é ensinar a matemática relacionada a sistemas financeiros e propor o contexto que ela está inserida, permitindo que o aluno possa aprender e refletir sobre sua necessidade.

Vemos neste trabalho a sua contribuição para professores da Educação Básica, que muitas vezes não conhecem Matemática Financeira e/ou não saibam como aplicar e/ou não tem acesso a trabalhos que envolvam situações que se enquadrem nessas estratégias metodológicas desenvolvidas pelas pesquisas (como a RP), e para a comunidade científica, para que possa ser um trabalho que relaciona suas pesquisas a prática do professor da Educação Básica.

Nossa fundamentação teórica aborda quatro assuntos: Educação Financeira, Resolução de Problemas, Trajetória Hipotética de Aprendizagem e Matemática Financeira.

Sobre a Educação Financeira, nós falamos um pouco sobre o que é, sua importância para a vida das pessoas e das economias mundiais e tratamos brevemente sobre as recomendações internacionais para a EF, segundo a OCDE.

A respeito da Resolução de Problemas, trazemos as abordagens de Polya, Onuchic e Allevatto. Polya fala sobre como resolver problemas, as etapas da resolução de problemas, já Onuchic e Allevato, diz sobre o processo de ensinar utilizando a Resolução de Problemas, os momentos de aprendizagem usando essa abordagem que entendemos como estratégia metodológica de ensino, falamos também sobre RP presente nos PCNs e na BNCC.

A Trajetória Hipotética de Aprendizagem é tratada sob as ideias de Simon (1995), ela é comparada a um planejamento de viagem, mas que está aberta a adaptações ao se deparar com a "viagem" em si, consiste nas atividades, nos objetivos e nas hipóteses de "imprevistos que podem surgir durante a viagem".

O texto sobre Matemática Financeira, fala um pouco sobre os procedimentos matemáticos mais ensinados na Educação Básica, com um pouco de sua formalidade e algumas demonstrações, que assumem o caráter desse programa de mestrado, associando a matemática aplicada ao ensino básico.

Como consequência dos resultados obtidos a partir da elaboração dessa proposta, buscaremos responder algumas questões norteadoras, por exemplo: como uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem pode contribuir para o ensino da Educação Financeira na Educação Básica? Consequentemente, afim de nos ajudarem a refletir a THA na Educação

Financeira, outras questões podem ser levantadas e também respondidas, como de que forma nós podemos ensinar Educação Financeira tendo aluno como participante ativo no processo de aprendizagem? Por que é importante ensinar sobre Educação Financeira? Como falar de Educação Financeira em Matemática Financeira? Esperamos que as respostas estejam imersas na própria proposição da THA apresentada, acrescida das reflexões que serão promovidas a partir do desenvolvimento da mesma.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 EDUCAÇÃO FINANCEIRA - O QUE É?

Podemos entender por Educação Financeira as habilidades e a consciência que uma pessoa tem para tomar decisões de cunho financeiro, seja ele qual for. Frente ao desenvolvimento humano e com ele o surgimento de sistemas complexos, necessários à manutenção da sociedade moderna, junto à era tecnológica, os seres humanos se encontram, muitas vezes, sem saber por "onde" ir, estamos em uma época na qual o conhecimento é fundamental e imprescindível e, a falta dele pode nos tornar suscetíveis a prejuízos em muitos aspectos, inclusive, em assuntos financeiros.

A Organização de Cooperação de Desenvolvimento Econômico (OCDE, 2005) define educação financeira como:

> o processo pelo qual consumidores/investidores financeiros melhoram seu entendimento de produtos financeiros, conceitos e riscos e, através de informações, instruções e/ou conselhos objetivos desenvolvem habilidades e confiança para mais situações de riscos e oportunidades financeiras, de fazer escolhas informadas, de saber onde pedir ajuda e tomar outras medidas eficazes para melhorar seu bem-estar financeiro. (2005, p.4, tradução nossa).

Entretanto a Educação Financeira não se resume em informações ou consultoria, não é assunto somente de áreas econômicas, administrativas ou de gestão financeira, ainda para a OCDE (2005, p. 4), "a educação financeira deve ser regulamentada [...] para proteção das pessoas".

Sistemas de capitalização, taxas de juros, impostos, preços de mercadorias, custos de sobrevivência, financiamentos, empréstimos, cartão de crédito, cheque especial, salário, trabalho, emprego, entre outros, são conceitos aos quais estamos habituados, mas, muitas vezes não entendemos seus significados, para que servem ou como. A Educação Financeira, quase não ensinada nas escolas, é tão necessária quanto esses serviços em nossas vidas, sem conhecimento prévio, as pessoas se sujeitam a dívidas infindáveis, e acabam por dedicarem grande parte de suas vidas a trabalharem para pagar juros.

A necessidade de falar sobre Educação Financeira se acentuou com as crises econômicas que tiveram impactos globais nos dois últimos séculos, e com isso, surgiram políticas internacionais sobre conscientização financeira. A OCDE por exemplo, a principal e maior entidade a tratar do assunto mundialmente, incentiva e afere o nível de proficiência financeira periodicamente das maiores potências globais através do *Programme for International Student Assessment* (PISA).

Vale ressaltar que, a Educação Financeira não consiste apenas em saber como funciona as estruturas econômicas do país no qual se está inserido, ela é um conjunto de informações, conhecimento, consciência e principalmente boas atitudes. Vai além de calcular e planejar gastos, são formas de pensar, hábitos de vidas conscientes.

2.1.1 Por Que Falar De Educação Financeira Na Escola?

A falta de conscientização financeira das massas populacionais tem reflexos globais, tanto que a falta de conhecimento sobre estes assuntos tem relação com as grandes crises existentes. Em contra partida, o conhecimento financeiro pode ser um aliado na prevenção de catástrofes econômicas globais, e uma proteção ao complexo sistema financeiro existente, mas essa é uma abordagem macroestrutural, vamos falar da importância disso na vida particular das pessoas.

Para o empresário, investidor e escritor, Kiyosaki (2017, p.75) “[...] os estudantes deixam a escola sem habilidades financeiras, milhões de pessoas instruídas alcançam o sucesso em suas profissões, mas depois se deparam com dificuldades financeiras”. A crítica do autor está sobre o que é ensinado nas escolas: aprende-se muito sobre meio acadêmico, mas muito pouco sobre as necessidades práticas, como a administração dos próprios recursos.

No entanto, Kiyosaki (2017, p. 44) ainda expressa em seu livro na fala de um dos personagens que as dificuldades financeiras são causadas por medos e ignorâncias, e que as atitudes impulsivas que tomamos são por causa de emoções, o que poderia e deveria ser trabalhado na escola, considerando que a mesma é responsável pela formação do cidadão, o qual deve ser inserido na sociedade como um ser racional e crítico. Essa ideia não é uma evidência científica contida na obra do autor, mas não é difícil associarmos a nossa realidade. Essas e outras serão apresentadas nesse trabalho por considerarmos evidentes, dado o notório saber do autor, reconhecido internacionalmente pelo seu livro que trata de educação financeira.

A matemática trabalhada na escola, muitas vezes, é desenvolvida para ela mesma: alguns teoremas e estruturadas demonstrações são apresentadas e estudadas, cada uma delas com sua importância que não será questionada neste trabalho. Entretanto, é evidente que caso o aluno não queira seguir no ramo da pesquisa em matemática, ou áreas afins, o assunto não será tão importante na vida dele. Vemos que inúmeras pessoas tem sua vida organizada e estabilizada sem lidar diretamente com a matemática que aprendemos na escola, como ciência formal, sistematizada e padronizada, por outro lado as habilidades financeiras são necessárias para qualquer ser humano que esteja inserido na sociedade.

Ainda para Kiyosaki (2017, p. 45) "o que aumenta o medo e o desejo é a ignorância". Como vimos anteriormente, o medo nos faz agir por impulso, com emoções, desejos, e esses são alimentados pela ignorância. Segundo o dicionário da língua portuguesa, ignorância pode ser definida como "Estado de ignorante, falta de saber" (ALVES; AMORA, 2003, p.370), tendo a escola como espaço de estudos científicos, socialização, amadurecimento e prática, ela é responsável para que a pessoa não se torne um ser 'ignorante'.

2.1.2 Educação Financeira, os PCNs e a BNCC

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) tratam de Educação Financeira de maneira breve, apenas sugere que o assunto seja tratado dentro das orientações didáticas:

> Para compreender, avaliar e decidir sobre algumas situações da vida cotidiana, como qual a melhor forma de pagar uma compra, de escolher um financiamento etc. é necessário trabalhar situações-problema sobre a Matemática Comercial e Financeira, como calcular juros simples e compostos e dividir em partes proporcionais pois os conteúdos necessários para resolver essas situações já estão incorporados nos blocos. (BRASIL, 1998, p.86)

Esse fragmento aparece como sugestão para conteúdo proposto para o 4º ciclo. Apesar de desconexo, mais adiante, 35 páginas depois, a Educação Financeira é citada mais uma vez: "[...]seu contexto possibilita que os alunos pesquisem e ampliem seus conhecimentos sobre matemática comercial e financeira: taxas, juros, descontos, fatores de conversão, impostos etc." (BRASIL, 1998, p. 121). Tal fragmento está presente dentro de uma sugestão de atividade no assunto de álgebra, em que o documento sugere que a Matemática Financeira[1] esteja relacionada com noções algébricas.

Apesar destes documentos não tratarem a Matemática Financeira de uma maneira específica, como apresentamos neste trabalho, os PCNs (BRASIL, 1998) contribuem muito para nossa fundamentação, pois os motivos que respondem à pergunta do porquê

[1] Conceitos e símbolos matemáticos utilizados para resolver problemas de cunho financeiro.

trabalhar Educação Financeira na escola estão, em sua maioria, presentes nos objetivos gerais do documento citado.

Como nós já buscamos apresentar nesta seção, sobre o dever da escola na preparação do aluno como cidadão, os parâmetros curriculares nos dizem que:

> [...] é papel da escola desenvolver uma educação que não dissocie escola e sociedade, conhecimento e trabalho e que coloque o aluno ante desafios que lhe permitam desenvolver atitudes de responsabilidade, compromisso, crítica, satisfação e reconhecimento de seus direitos e deveres. (BRASIL, 1998, p.27).

O conhecimento financeiro compõe necessidades para uma boa qualidade de vida [financeira] atualmente, faz parte das relações interpessoais e compõe a sociedade moderna. Pessoas que não se preocupam em saber como gastam seu dinheiro e não tem senso crítico diante da estrutura financeira, estão inclinadas a serem vítimas das empresas que lidam com nosso dinheiro, dentre elas, bancos, lojas, financeiras, seguradoras, o próprio estado, entre outros.

De acordo ainda com os PCNs

> A sobrevivência na sociedade depende cada vez mais de conhecimento, pois diante da complexidade da organização social, a falta de recursos para obter e interpretar informações, impede a participação efetiva e a tomada de decisões em relação aos problemas sociais. (BRASIL, 1998, p.26)

Neste trecho, o documento se refere ao surgimento de novas tecnologias, da “chuva” de informações, porém, está incutida a noção da necessidade de falarmos sobre Educação Financeira, o conhecimento é questão de sobrevivência.

No entanto, mesmo diante do fato da Educação Financeira não ser tratada especificamente nas linhas que compõem o documento, sua necessidade e orientações estão nas entrelinhas do documento, quando os PCNs (1998, p.7) tratam de compreensão de cidadania, respeito ao outro, repúdio as injustiças, posicionar-se de maneira crítica e responsável, conhecer as características fundamentais do Brasil, perceber-se integrante, dependente e agente transformador, utilizar diferentes linguagens, fontes de informação e principalmente questionar a realidade cujas competências norteiam o ensino de matemática em geral, mas que também são indissociáveis ao assunto proposto.

É evidente que a Educação Financeira é uma área tão profunda e complexa quanto os sistemas financeiros que fazem parte da organização da sociedade. Não se busca nesse trabalho orientar a formação de economistas no decorrer das atividades propostas, nem tão pouco se quer ensinar a investir na bolsa de valores, por exemplo, o objetivo central (ou objetivos centrais) depende do contexto no qual os alunos estão inseridos ou o que o professor pretende abordar com sua aula. Entretanto, de acordo com os PCNs, buscamos entender os sistemas financeiros e questioná-los, para que assim nossos alunos não sejam seres inerentes e passivos.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) exibe um leque um pouco mais abrangente do que pode e como se pode trabalhar Educação Financeira na Educação Básica. Segundo a BNCC (2000, p.269), podemos verificar que conceitos básicos de finanças e economia é um aspecto a ser considerado na unidade temática dos números, assuntos como juros, inflação, taxas de juros, rendimentos e impostos. Essa unidade temática, segundo a BNCC, ainda pode se relacionar com outras áreas do conhecimento e envolve dimensões culturais, sociais, políticas e psicológicas, envolve questões de consumo, trabalho e dinheiro.

A Educação Financeira aparece como contextualização de diversos assuntos matemáticos, esses que devem ser relacionados a conceitos matemáticos específicos, presentes em todas as séries da Educação Básica, ou seja, não é restrita apenas as séries finais ou quando se ensina sobre Matemática Financeira. A Educação Financeira pode estar presente na leitura de gráficos, noções de proporção, na álgebra, na geometria, raciocínio lógico, entre outros.

Considerando a importância da transdisciplinaridade proposta pelos PCNs, concluímos com uma citação da BNCC, trecho retirado do texto das propostas para ciências humanas e sociais, "[...] cresce a importância da educação financeira e da compreensão do sistema monetário contemporâneo nacional e mundial, imprescindíveis para uma inserção crítica e consciente no mundo atual". (BRASIL, 2000, p. 568)

2.1.3 Os Países Pela Educação Financeira

Como já citada nesse trabalho, a Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) é uma organização internacional com mais de 36 países membros, dispostos em 4 dos 5 continentes, com mais da metade de seus integrantes europeus. Segundo o *website* da organização, seu objetivo é "moldar políticas que promovam prosperidade, igualdade, oportunidade e bem-estar para todos" (OCDE, 2019). Ainda segundo a OCDE (2019, s.n.), eles trabalham "[...] com governos, políticos e cidadãos, no estabelecimento de normas internacionais e na busca de soluções baseadas em evidências para uma série de desafios sociais, econômicos e ambientais".

Após a segunda guerra mundial, de acordo com as informações disponíveis no portal da organização, os países europeus criaram a organização de cooperação econômica (OEEC) para administrar o plano Marshall[2], financiado pelos EUA para a reconstrução dos países devastados. Diante do sucesso e das boas perspectivas, passaram a integrar mais tarde, os EUA e o Canadá, dando início então a OCDE, em dezembro de 1960 (OCDE, 2019).

Hoje em dia, junto com Brasil, Indonésia e África do Sul, a OCDE conta com 39 países, membros e colaborares, discutindo e levando meios de desenvolvimento consciente e sustentável frente aos desafios econômicos internacionais.

A relevância da organização para este trabalho, é a contribuição internacional que ela faz para a educação financeira mundial, componente essencial para o desenvolvimento dos países. Periodicamente, a OCDE movimenta e afere os níveis de conhecimento sobre conscientização e alfabetização financeira[3] pelo mundo todo. Um importante e extenso projeto seu é o PISA, segundo ela:

> O PISA 2012 é o primeiro estudo internacional em larga escala a avaliar as demonstrações financeiras de alfabetização dos jovens. Essa estrutura é o primeiro passo na construção de uma avaliação da alfabetização financeira de âmbito internacional, fornecendo uma articulação para planejar o desenvolvimento de itens, projetar os instrumentos e fornecer uma linguagem para discussão da alfabetização financeira. Essa estrutura fornece uma definição de trabalho para alfabetização financeira e organiza o domínio em torno do conteúdo, processos e contextos relevantes para a avaliação de estudantes de 15 anos de idade. (OCDE, 2013, p.23 – tradução nossa)

A OCDE, é hoje uma grande instituição global preocupada com a educação financeira da população mundial, juntamente com o PISA, existem documentos que propõem um plano de alfabetização financeira para a população dos países, elaborados e endossados após alguns encontros do diversos membros, do órgão responsável pela educação financeira (INFE) e por organizações internacionais, os quais são:

---

[2] Programa econômico norte americano afim de ajudar os países europeus a se reconstruírem após a segunda guerra mundial.
[3] Embora haja discussões de diferentes autores sobre a definição de alfabetização financeira, aqui podemos entender por compreensão e capacidade de decisão financeira.

- *OECD (2005) Recommendation of the Council on Principles and Good Practices on Financial Education and Awareness;*
- *OECD (2008a) Recommendation of the Council on Good Practices for Financial Education relating to Private Pensions;*
- *OECD (2008b) Recommendation of the Council on Good Practices for Enhanced Risk Awareness and Education on Insurance issues;*
- *OECD (2009) Recommendation of the Council on Good Practices on Financial Education and Awareness relating to Credit;*
- *OECD/INFE (2011c) High-level Principles on the Evaluation of Financial Education Programmes and dedicated Guides on Evaluation; and*
- *OECD/INFE (2012, forthcoming) Guidelines for Financial Education in Schools*

Esses documentos reúnem um conjunto de medidas que podem e devem ser tomadas pelos governos e pelos cidadãos em si, para que haja um consumo consciente, responsável e sustentável. Eles são apontados em *OECD/INFE high-level principles on national strategies for financial education* como as principais medidas e estratégias a serem tomadas pelos países para a educação financeira em massa, mas ainda assim, reitera que

> "[...] não existe um modelo único para o desenvolvimento de estratégias nacionais de educação financeira. Eles visam, em vez disso, fornecer orientação geral sobre os principais elementos desejáveis de estratégias nacionais eficientes para educação financeira que devem ser aplicadas levando em consideração as circunstâncias e o contexto dos países." (OCDE/INFE, 2012, p. 3 e 4 - tradução nossa)

O interesse dos países em tratar de educação financeira surge da necessidade de manter sua economia global estável face aos desafios da sociedade moderna. Segundo a OCDE (2012), a alfabetização financeira foi reconhecida cada vez mais como uma habilidade de vida importante na maioria das economias, as razões atreladas a essa política crescente engloba uma ampla gama de riscos financeiros para os consumidores, maior complexidade, rápido desenvolvimento dos sistemas financeiros, rápido crescimento de consumidores/investidores e uma limitada auto-regulamentação do livre mercado na intenção de proteger os consumidores. (2012, p.2 e 3 – tradução nossa)

2.2 Resolução De Problemas

A expressão Resolução de Problemas não é de origem matemática, a ação de resolver problemas esteve presente em todo o processo do desenvolvimento da humanidade, presentes como exemplos: na pré-história quando o homem teve a necessidade de caçar, se aquecer, se comunicar; na idade antiga, quando os gregos precisaram definir conceitos de ética e moral; na idade média, quando o crescimento populacional desafiou os meios de produção agrícola; na idade moderna quando os navegadores precisavam de orientação em alto mar; na idade contemporânea na qual a humanidade já resolveu problemas de diferentes áreas do conhecimento. Essa discussão de cunho histórico-filosófica, produziria muito material, mas não é o nosso objetivo. Vamos, neste trabalho, tratar da Resolução de Problemas (RP) como uma estratégia metodológica de ensino da matemática, que é um dos principais temas de estudo nas pesquisas em Educação Matemática.

Para Stanic e Kilpratick,

> Os problemas ocupam um lugar central nos currículos desde a antiguidade, mas a resolução de problemas não. Só recentemente apareceram educadores matemáticos aceitando a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas merece especial atenção (STANIC; KILPRATICK, 1989, p.1)

A Resolução de Problemas é apresentada de modos semelhantes por alguns autores, para Onuchic e Allevato (2011, p.80) "o problema é visto como ponto de partida para a construção de novos conceitos e novos conteúdos; os alunos sendo co-construtores de seu próprio conhecimento e, os professores, os responsáveis por conduzir esse processo."

Segundo Stanic e Kilpatrick (1989, p.12) a Resolução de Problemas pode ser caracterizada em 3 segmentos. A Resolução de Problemas como **contexto**, como **capacidade** e como **arte**. Como **contexto** ela pode ser subdivida em 5 subtópicos: *justificação*, resolver problemas como justificativa para ensinar matemática; *motivação*, utilização de problemas para motivar o ensino da matemática; *atividade lúdica*, fornece um divertimento com a matemática que aprenderam; *veículo*, utilizar problemas para desenvolver conceitos ou técnicas; *prática*, problemas usados para reforçar capacidades e conceitos ensinados diretamente. Como **capacidade**, entende-se que o ensino da matemática por meio da resolução de problemas melhora o pensamento e a capacidade das pessoas em resolver problemas reais. Como **arte**, uma visão mais profunda e compreensiva da RP, atribuída a Polya, que trouxe a ideia do *saber fazer* a matemática, a arte do descobrimento (heurística), entende-se que a matemática pronta que utilizamos não foi descoberta, mas criada face à diferentes problemas pela qual a humanidade passou. Por essa concepção, a Resolução de Problemas deve fornecer meio para que o aluno não só aprenda a matemática, mas que também seja capaz de fazê-la.

Podemos entender, que a Resolução de Problemas, consiste em uma metodologia ativa, a partir da qual os conceitos, definições e práticas, são ensinadas ao aluno a partir do desenvolvimento de um problema. Ela busca colocar o aluno como ‘cocriador’ do seu conhecimento, permitindo que ele investigue, descubra, sistematize, estabeleça padrões e, assim, não só aprende a matemática, mas aprenda a construir seu próprio conhecimento, evidentemente com o auxílio do professor, mas esse como um mediador. O professor é dono daquilo que sabe, mas aquilo que sabe, na maioria das vezes, são contribuições de outros matemáticos através do tempo.

De fato, é necessário compreender bem o que é um problema. Difere do exercício, de enunciado pronto, em que o objetivo é utilizar os dados fornecidos para se obter uma resposta, em um caminho já existente, ou até mesmo puramente a aplicação de algum algoritmo. O problema, para Van de Walle (2001, apud ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 81) “é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual não se tem métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta”.

De acordo com Onuchic e Allevato (2011, p.81) “é tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer.”

Segundo Pereira et. al. (2002, p.4)

> entendemos que existe um problema quando há um objetivo a ser alcançado e não sabemos como atingir esse objetivo. Em “matematiquês”, existe um problema quando há um resultado – conhecido ou não – a ser demonstrado utilizando a teoria matemática. Um problema é mais valioso à medida que o resolvedor – ou seja, quem está se propondo a encontrar uma solução ao problema - tenha de inventar estratégias e criar ideias. Quem resolve pode até saber o objetivo a ser atingido, mas ainda estará enfrentando um problema se ele ainda não dispõe dos meios para atingir tal objetivo.

Os autores salientam ainda que, a qualidade e a eficiência de um problema estão no grau do envolvimento com a matemática que o problema tem, isto é,

> quanto um problema pode fazer com que entendamos melhor a matemática, o quanto ele contribui para o desenvolvimento dos vários ramos da matemática, os benefícios que ele traz para o resolvedor de problemas no sentido de amadurecer o resolvedor para a habilidade de resolver problemas e ainda a possibilidade de surgimento de novos problemas (PEREIRA *et. al*, 2002, p.5).

Alguns apontamentos são levantados por Pereira et. al. (2002, p.5-6) que dizem respeito à qualidade dos problemas, dentre elas estão:

> tenha enunciado acessível e de fácil compreensão; que exercite o pensar matemático do aluno; que exija criatividade na resolução; que possa servir de 'trampolim' para a introdução ou consolidação de importantes ideias e/ou conceitos matemáticos; não seja muito fácil ou muito difícil e sim natural e interessante.

Onuchic e Allevato (2011, p.81) sugerem que muitos conceitos de problema são encontrados e especificam, adjetivos que os tratam como problemas de fixação, problemas abertos, problemas fechados, exercícios, desafios, entre outros. Para elas, todos esses são problemas, e podem ser utilizados segundo essa metodologia de ensino. No entanto, é preciso preparar ou escolher problemas apropriados para o bom desenvolvimento da aula e atingir os objetivos propostos.

O conceito de problema que vamos utilizar para desenvolver este trabalho, é o mesmo que as autoras citadas anteriormente propõem.

2.2.1 Passos para Resolução de Problemas

Trabalhar com a estratégia metodológica da Resolução de problemas exige do professor uma atitude diferente da qual ele tem, caso ensine a matemática de modo tradicional (expositivo), assumir a posição de mediador e não mais a de "detentor do conhecimento" pode não ser uma tarefa simples, mudar o modo como se trabalha leva o professor a repensar sua prática docente, mas isso não deve impedi-lo. Essa estratégia metodológica vai exigir também do aluno que pense sobre seu papel, é necessário que o mesmo entenda que ele é responsável pela construção do seu conhecimento, com isso, tenha mais interesse, participação e engajamento.

O professor também é um pesquisador pois estar em sala de aula, diante de seres humanos, compreendendo cada um como um ser único, com suas subjetividades, suas experiencias, suas emoções, suas personalidades, seus temperamentos, possuidores também de diferentes maneiras de aprendizagem, o professor está sempre constatando, refletindo e sistematizando no exercício de sua docência. Muitas vezes, tem um currículo para cumprir, a burocracia do ofício, pouco tempo para dar conta e ainda assim se responsabilizar pelo aprendizado de pessoas com diferentes maneiras de aprender.

A Resolução de Problemas pode ser eficiente para o professor que deseja ampliar suas estratégias metodológicas. As autoras, Onuchic e Allevato (2011, p.82), reunindo considerações importantes sobre “razões para fazer esse esforço”, destacam:

> • Resolução de problemas coloca o foco da atenção dos alunos sobre as ideias matemáticas e sobre o dar sentido.
>
> • Resolução de problemas desenvolve poder matemático nos alunos, ou seja, capacidade de pensar matematicamente, utilizar diferentes e convenientes estratégias em diferentes problemas, permitindo aumentar a compreensão dos conteúdos e conceitos matemáticos.
>
> • Resolução de problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer matemática e de que a Matemática faz sentido; a confiança e a autoestima dos estudantes aumentam.
>
> • Resolução de problemas fornece dados de avaliação contínua, que podem ser usados para a tomada de decisões instrucionais e para ajudar os alunos a obter sucesso com a matemática.
>
> • Professores que ensinam dessa maneira se empolgam e não querem voltar a ensinar na forma dita tradicional. Sentem-se gratificados com a constatação de que os alunos desenvolvem a compreensão por seus próprios raciocínios.
>
> • A formalização dos conceitos e teorias matemáticas, feita pelo professor, passa a fazer mais sentido para os alunos.

Entretanto, como o professor deve trabalhar a Resolução de Problemas? As autoras dizem que “não há formas rígidas de se trabalhar através da resolução de problemas em sala de aula de Matemática” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p.82), mas sugerem um roteiro que pode orientar a forma de desenvolver a metodologia, resumo, nós temos:

- Preparação do problema: Elas tratam esse problema como o “problema gerador” e ressaltam que seja um assunto que ainda não foi trabalhado em sala. A importância de um problema adequado foi discutida anteriormente, ele deve propor uma situação onde o aluno consiga aprender (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

- Leitura individual: cada aluno deve ler o exercício sozinho primeiro (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

- Leitura em conjunto: Os alunos podem se reunir e fazer a leitura em grupo. Caso surjam algumas dúvidas na leitura do enunciado, o professor pode auxiliar e um dicionário poderá consultado (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

- Resolução do problema: Depois de ter lido e compreendido bem o problema, agora sem dúvidas, os alunos reunidos em grupos buscam solucionar o problema de maneira com que eles aprendam com isso, lembrando que o professor não deve ajuda-los a resolver o problema (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

- Observar e incentivar: O papel do professor é de incentivar, ele não é mais o detentor do conhecimento. Em suas análises, caso ele constate que há alguma irregularidade, ou não, ele pode indagar os alunos sobre suas formulações, mas não dizer o que está certo ou errado. O professor pode ajudar se aparecerem problemas secundários. Inclusive deve incentivá-los a criarem problemas secundários para os ajudarem no problema gerador (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

- Registro das resoluções na lousa: Os grupos são convidados a apresentarem suas resoluções, da forma como as conseguiram, mesmo com erros ou adequações a serem feitas (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

- Plenária: Momento importante onde os alunos precisam discutir sobre seus resultados, esclarecerem dúvidas, compartilhar suas descobertas e apresentarem suas resoluções, tendo o professor como incentivador e responsável por fazer com que todos os alunos participem de maneira ativa e efetiva (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

- Busca do consenso: Depois das discussões, o professor busca chegar em um consenso com toda a turma (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

- Formalização do conteúdo: Nesse momento, o professor apresenta uma resolução formal do problema, utilizando a linguagem matemática, as técnicas operatórias envolvidas e apresentando os diferentes caminhos que poderiam ser tomados para a resolução do mesmo. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011)

A avaliação dos alunos ao utilizar essa estratégia metodológica deve ser feita durante todo o processo, compreendendo a mesma como parte do processo de aprendizagem.

Na obra a Arte de Resolver Problemas de George Polya (1995, p.12 e 13), o autor fala sobre os passos da resolução de um problema, esses passos se dão em 4 momentos. Em síntese, os passos descritos por Polya (1995, p.12-13) consistem em:

- Compreensão do problema: O autor compreende que o problema deve ser natural e interessante, nem muito fácil, nem muito difícil, e que o aluno, além de compreender bem o problema, deve querer fazê-lo. O aluno também deve ter condições de entender o que se pede, de identificar os pontos principais do problema, indagações do tipo "Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condicionante?" podem surgir para orientar a compreensão do problema (POLYA, 1995).

- Estabelecimento de um plano: Um plano pode ser estabelecido quando já se sabe quais ferramentas serão usadas, quais operações, técnicas e processos metodológicos serão necessários para se resolver o problema, no entanto, conhecer o problema e determinar um plano pode ser um caminho longo e difícil (POLYA, 1995).

Se não conhecemos bem um assunto, é difícil ter uma boa ideia sobre ele. O mesmo vale para resolução de problemas, é difícil ter uma ideia brilhante se as ferramentas necessárias para resolver o problema não forem conhecidas.

Uma estratégia sugerida é utilizar um problema correlato. Existem problemas diferentes que já foram resolvidos que utilizam as mesmas ferramentas de resolução ou até mesmo tem um importante ponto em comum, algumas associações podem ser úteis para estabelecer um plano de resolução para o que se pretende.

Caso não seja possível a utilização de um problema correlato, o problema em questão pode ser reformulado, essa variação faz que tenhamos um problema auxiliar, ao variarmos o problema podemos ter uma generalização, uma particularização, uma analogia, podemos omitir algumas partes da condicionante, entre outros. Mas estar sempre atento a não se distanciar demais do problema inicial.

- Execução do Plano: Esse momento tende a ser o mais tranquilo, porém guarda os detalhes. É muito importante que se tenha muita atenção e que cada passo dado esteja bem compreendido, para que nessas lacunas não haja outros problemas. É possível perceber claramente que o problema está certo? (POLYA, 1995).

- Retrospecto: Há uma propensão dessa etapa ser ignorada, após resolver o problema e escrever sua resolução formal, naturalmente os alunos vão querer ir para o próximo exercício ou fecharem seus livros. No entanto o professor deve encoraja-los a verificarem suas soluções, dessa forma eles poderão consolidar o seu conhecimento e aperfeiçoar a capacidade de resolver problemas. Nenhum problema está sempre esgotado, sempre haverá algo a ser explorado e qualquer resolução pode ser aperfeiçoada (POLYA, 1995).

Considerando e comparando as falas desses autores, organizamos um quadro que compara os passos para a resolução de um problema e o momentos da aula que utiliza a Resolução de Problemas como estratégia de ensino.

Quadro 01 – Comparação entre passos para resolução de um problema e momentos da aula que utiliza Resolução de Problemas

<table>
<tr><th>Polya (1995)</th><th>Onuchic e Allevato (2011)</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Compreensão do problema</td><td>Preparação do problema</td></tr>
<tr><td>Leitura individual</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Leitura coletiva</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Elaboração de uma estratégia</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Resolução do problema</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Execução do plano</td></tr>
<tr><td>Observar e incentivar</td></tr>
<tr><td>Registro das resoluções</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Retrospecto</td><td>Plenária</td></tr>
<tr><td>Busca do consenso</td></tr>
<tr><td>Formalização do Conteúdo</td></tr>
</table>

Fonte: do autor.

Nos associamos a Compreensão do Problema às fases da Preparação do Problema, Leitura individual e Leitura coletiva por que acreditamos que esses momentos da aulas estão associados ao que Polya (1995) entende que o problema deve ser natural e interessante, que o aluno o compreenda bem e seja capaz de fazer indagações.

A Elaboração de uma Estratégia, ao nosso ver, está relacionada à Leitura Coletiva e à Resolução do Problema pois acreditamos que nessas fases da aula segundo Onuchic e Allevato (2011), os alunos começam a ter noções de quais ferramentas ou estratégias serão utilizadas, considerando até mesmo a utilização de problemas correlatos.

Relacionamos a Execução do Plano à Resolução do Problema, à Observar e Incentivar e ao Registo das Resoluções pois entendemos que o professor observa e incentiva os seus alunos no momento em que eles estão engajados na busca por uma solução, bem como o Registro de Resoluções, onde as soluções propostas pelos outros alunos podem contribuir na resolução dos seus colegas.

Entendemos o Retrospecto relacionado à Plenária, à Busca do Consenso e à Formalização do Conteúdo pois para Polya (1995), os alunos devem verificar suas soluções para poderem aperfeiçoá-las, o que está associado ao que Onuchic e Allevato (2011) sugerem na apresentação e discussão dos resultados, proporcionando uma formalização a partir das soluções propostas pelos alunos.

2.2.2 Resolução de Problemas e os Parâmetros Curriculares Nacionais.

Nos PCNs, a expressão Resolução de Problemas como estratégia metodológica de ensino é citada 14 vezes. A primeira, na apresentação indicando a RP como ponto de partida para se ensinar matemática, depois, na análise da trajetória das reformas curriculares, citando a RP como destaque já na "Agenda para ação", um documento norteador das reformas curriculares do Conselho Nacional dos Professores de Matemática dos Estados Unidos (NCTM[4]), documento esse que influenciou e encorajou os brasileiros a elaborarem um documento que tratasse do currículo escolar de domínio nacional, os PCNs.

Ainda sobre a abordagem histórica, a RP é citada mais uma vez, de certa forma, como "elo" entre a matemática e problemas cotidianos, aponta que muitas vezes ela foi utilizada como um "item isolado, desenvolvido paralelamente como aplicação da aprendizagem." (BRASIL, 1998, p.22).

Ao falar sobre os temas transversais, mais especificamente, em um dos temas transversais, trabalho e consumo, o ensino da matemática sob a metodologia da Resolução de Problemas, segundo os PCNs (BRASIL, 1998, p.34), pode dar uma grande contribuição para atender as demandas do mercado de trabalho contemporânea estimulando a capacidade de investigar, argumentar, comprovar, justificar, o trabalho coletivo, criatividade e a iniciativa pessoal.

Na abordagem sobre a relação entre professores e alunos, o documento reitera que a RP possibilita um ambiente que proporciona o contexto necessário para que o aluno seja o construtor do seu conhecimento e o professor um mediador.

Enfim, chegamos em um texto específico sobre a RP, 'a Resolução de Problemas e o ensino-aprendizagem de Matemática', o texto começa reiterando a estratégia metodológica como ponto de partida do ensino, acrescenta ainda que essa ideia dá significado para o assunto matemático abordado e critica a forma tradicional da matemática e papel errôneo que ela dá para os problemas, os resumindo a exercícios de reprodução após um conceito aplicado. Contudo, apresenta a concepção de RP dada pelos educadores matemáticos como uma alternativa na qual

"possibilita aos alunos mobilizar conhecimentos e desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance. Assim, os alunos terão oportunidade de

---

[4] *National Council of Teachers of Mathematics*

ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como de ampliar a visão que têm dos problemas, da Matemática, do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança" (SCHOENFELD, 1985 apud, BRASIL,1998, p.40)Os PCNs (BRASIL, 1998, p.40-41) resumem os princípios da Resolução de Problemas como ponto de partida do ensino-aprendizagem matemática como:

> - a situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição. No processo de ensino e aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las;
>
> - o problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada;
>
> - aproximações sucessivas de um conceito são construídas para resolver um certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros, o que exige transferências, retificações, rupturas, segundo um processo análogo ao que se pode observar na História da Matemática;
>
> - um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações. Assim, pode-se afirmar que o aluno constrói um campo de conceitos que toma sentido num campo de problemas, e não um conceito isolado em resposta a um problema particular;
>
> - a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemáticas.

A respeito da Resolução de Problemas, podemos concluir que o os PCNs esperam que essa estratégia metodológica leve o aluno a descobrir por si só e que o conhecimento já existente, formalizado e sistematizado precisa ter significado para o aluno. A forma como a RP é apresentada, possibilita que o aluno seja o protagonista do aprendizado, proporciona um ambiente no qual o aluno tem condições de desenvolver suas habilidades, explore diferentes caminhos e descubra novos. Segundo os PCNs (BRASIL, 1998, p.42) "nessa forma de trabalho, a importância da resposta correta cede lugar a importância do processo de resolução".

Podemos dizer que o documento sugere que o caminho para aprendizagem já gera o aprendizado, e que o trajeto percorrido pode ser até mais valioso que o próprio 'destino'. De acordo com os PCNs, a Resolução de Problemas "evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela via da ação refletida que constrói conhecimentos.” (BRASIL, 1998, p.42).

2.2.3 Resolução de Problemas e a BNCC

A Base Nacional Curricular Comum (BNCC) é um documento que busca reunir e definir o conjunto de aprendizagens necessárias para a formação e desenvolvimento humano global, em outras palavras, segundo a BNCC,

> A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). (BRASIL, 2017, p.7)

Segundo o documento, o desenvolvimento das aprendizagens que ela caracteriza como essenciais, tem como objetivo central o desenvolvimento de dez competências (BRASIL, 2017, p.8). Não queremos dissertar sobre essas competências nesse trabalho, vamos nos ater a relacioná-las com a Resolução de Problemas.

As competências não fazem conexão direta com a Resolução de Problemas como uma estratégia metodológica de ensino, mas como um objetivo das quais algumas competências apontam. Por exemplo, conforme a 2ª competência geral, é necessário

> Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. (BRASIL, 2017, p.9)

Em síntese, é necessário a curiosidade intelectual para resolver problemas. Neste sentido estamos falando sobre o desenvolvimento de uma competência para resolver um problema, e não sobre ensinar através da Resolução de Problemas para desenvolver uma competência[5].

Mais adiante, na 5ª competência geral:

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir

---

[5] De fato, isso acontece, a utilização da RP permite o desenvolvimento das competências, estamos elucidando as informações contidas na BNCC e comparando-as com a abordagem que estamos apresentando neste trabalho.

> conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva (BRASIL, 2017, p.9)

É o mesmo caso do que falamos anteriormente, aqui a competência aponta que é necessário compreender, utilizar e criar tecnologias para resolver problemas.

As demais competências não citam a resolução de problemas como objetivo ou como estratégia metodológica de ensino, mas diante do que o autor nos traz sobre a utilização da RP como forma de ensinar, nós podemos entender que é possível desenvolver as aprendizagens e as competências abordadas pela BNCC através da RP.

Na etapa da educação fundamental, a matemática é dividida em campos, esses que são: Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade. Inter-relacionando-se com as competências específicas da área com as competências gerais. Essas competências específicas traduzem as competências gerais dentro da área da matemática.

No decorrer das páginas do documento, pudemos detectar a Resolução de Problemas como objetivo, não como estratégia de ensino, como podemos ver em um trecho sobre o que se espera da matemática no Ensino Fundamental.

> Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. (BRASIL, 2017, p.265)

No entanto, ao se referir sobre o letramento matemático, a Resolução de Problemas é apontada como uma forma privilegiada, um objeto e estratégia para aprendizagem, como podemos ler:

> Os processos matemáticos de **resolução de problemas**, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como **formas privilegiadas da atividade matemática**, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, **objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental**. Esses **processos de aprendizagem** são potencialmente **ricos** para o **desenvolvimento de competências fundamentais** para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o desenvolvimento do pensamento computacional. (BRASIL, 2017, p.266, negritos nossos).

A respeito das competências específicas da matemática para o Ensino Fundamental, gostaríamos de destacar duas, as competências 5 e 6, no que dizem:

> 5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.

> 6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados). (BRASIL, 2017, p.267)

A competência número 5, se assemelha com estudo aqui levantado sobre a Resolução de Problemas, utilização de processos e ferramentas matemáticas para resolver problemas possibilita que o aluno desenvolva seu conhecimento sobre algum assunto e também desenvolva a competência.

O sexto apontamento se refere às situações problemas, também discutidas aqui anteriormente. Percebemos que a Resolução de Problemas como estratégia de aprendizagem está associada ao desenvolvimento de tais competências, e não somente a essas aqui citadas.

Posteriormente, o documento volta a subdividir as áreas de conhecimento matemático, agora denominados unidades temáticas (Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística), semelhantes aos campos já tratados anteriormente.

O ensino dessas unidades temáticas é justificado por diferentes fatores, mas um que eles têm em comum e que queremos ressaltar aqui, é de que devem ser ensinados para que o aluno consiga resolver problemas da mesma natureza, por exemplo, de acordo com a BNCC, "a unidade temática Números tem como finalidade desenvolver o pensamento numérico [...], a expectativa é a de que os alunos resolvam problemas com números naturais, inteiros e racionais, envolvendo as operações fundamentais, [...]". (BRASIL, 2017, p.268-269)

Para reiterar o que dissemos, observemos mais alguns exemplos. No que diz respeito à unidade temática Álgebra, temos que

> [...] é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos, bem como criar, interpretar e transitar entre as diversas representações gráficas e simbólicas, **para resolver problemas** por meio de equações e inequações, com compreensão dos procedimentos utilizados. (BRASIL, 2017, p.270, negritos nossos).

A respeito da unidade temática grandezas e medidas, observamos o seguinte

> a expectativa é a de que os alunos reconheçam comprimento, área, volume e abertura de ângulo como grandezas associadas a figuras geométricas e que **consigam resolver problemas** envolvendo essas grandezas com o uso de unidades de medida padronizadas mais usuais (BRASIL, 2017, p.273, negritos nossos)

As unidades Geometria e Probabilidade e Estatística não citam a Resolução de Problemas como objetivo ou como estratégia de ensino.

Ao concluir o texto sobre as habilidades e aprendizagens matemáticas apresentadas nos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental, a BNCC aponta que tais habilidades não devem concorrer para que os alunos aprendam apenas a resolver exercícios, mas que saibam explorá-los e aplica-los, isto é,

> Na Matemática escolar, o processo de aprender uma noção em um contexto, abstrair e depois aplicá-la em outro contexto envolve capacidades essenciais, como formular, empregar, interpretar e avaliar – criar, enfim –, e não somente a resolução de enunciados típicos que são, muitas vezes, meros exercícios e apenas simulam alguma aprendizagem. Assim, algumas das habilidades formuladas começam por: “resolver e elaborar problemas envolvendo...”. Nessa enunciação está implícito que se pretende não apenas a resolução do problema, mas também que os alunos reflitam e questionem o que ocorreria se algum dado do problema fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescida ou retirada. Nessa perspectiva, pretende-se que os alunos também formulem problemas em outros contextos. (BRASIL, 2017, p.277).

No Ensino Médio, as competências gerais apresentadas no Ensino Fundamental continuam a serem desenvolvidas e aprofundadas, visando a formação integral do aluno, isto é, segundo a BNCC

> O conjunto das competências específicas e habilidades definidas para o Ensino Médio concorre para o desenvolvimento das competências gerais da Educação Básica e está articulado às aprendizagens essenciais estabelecidas para o Ensino Fundamental. Com o objetivo de consolidar, aprofundar e ampliar a formação integral [...]. (BRASIL, 2017, p.471).

Nesta etapa, as aprendizagens essenciais estão organizadas por áreas do conhecimento, dentre elas estão Linguagens e suas Tecnologias, Matemática e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Ciências Humanas e Sociais Aplicadas (BRASIL, p.469). Conforme a BNCC, em comparação com a área da matemática do ensino fundamental,

> No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração (BRASIL, 2017, p.471)

O currículo no Ensino Médio é composto pela BNCC e pelos itinerários formativos, esses que flexibilizam a organização curricular nesta etapa da educação. Dessa forma, os estudantes podem escolher o foco em uma área do conhecimento ou na área técnica e profissional (BRASIL, p.476). Pautado na DCNEM (Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio), o itinerário da área aqui em questão, é dado da seguinte forma:

> II – matemática e suas tecnologias: aprofundamento de conhecimentos estruturantes para aplicação de diferentes conceitos matemáticos em contextos sociais e de trabalho, estruturando arranjos curriculares que permitam estudos em resolução de problemas e análises complexas, funcionais e não-lineares, análise de dados estatísticos e probabilidade, geometria e topologia, robótica, automação, inteligência artificial, programação, jogos digitais, sistemas dinâmicos, dentre outros, considerando o contexto local e as possibilidades de oferta pelos sistemas de ensino; (BRASIL, Resolução nº3/2018, Art. 12)

Para garantir o protagonismo do aluno, considerando a realidade da escola, os itinerários formativos devem estar pautados em um ou mais eixos estruturantes. Um desses eixos estruturantes, o de processos criativos

> supõem o uso e o aprofundamento do conhecimento científico na construção e criação de experimentos, modelos, protótipos para a criação de processos ou produtos que atendam a demandas para a resolução de problemas identificados na sociedade. (BRASIL, Resolução nº3/2018, Art. 12, § 2º).

2.2.4 Ensino da Matemática Segundo a BNCC

As habilidades estão organizadas da mesma forma como estavam as áreas da aprendizagem no Ensino Fundamental: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística. Elas sugerem a concretização, ampliação e aprofundamento das aprendizagens essenciais tratadas anteriormente. (BRASIL, 2017, p.527).

As habilidades de aprendizagem analisadas sob o intuito de identificar sua relação direta com a estratégia de aprendizagem Resolução de Problemas, nos mostra que resolver problemas é tido como um objetivo, um motivo para se ensinar tais habilidades, espera-se que o aluno, após estudar sobre determinada área, consiga resolver problemas da mesma natureza. No entanto, a BNCC deixa claro que ela não faria apontamento ou indicação de quais metodologias ou estratégias de ensino seriam as mais adequadas para buscar desenvolver as competências gerais e específicas que ela estabelece.

> [...]as habilidades não descrevem ações ou condutas esperadas do professor, nem induzem à opção por abordagens ou metodologias. Essas escolhas estão no âmbito dos currículos e dos projetos pedagógicos, que, como já mencionado, devem ser adequados à realidade de cada sistema ou rede de ensino e a cada instituição escolar, considerando o contexto e as características dos seus alunos (BRASIL, 2017, p.30)

Com tudo, continuamos buscando prerrogativas para o desenvolvimento da aprendizagem através da Resolução de Problemas, ainda que esteja sob a ótica de fim a ser alcançado, e não como estratégia de ensino.

Ao que se refere das competências específicas desta área, a BNCC propõe 5 competências, e para garantir a concretização do desenvolvimento da mesma, ela diz que os alunos “devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas”. (BRASIL, 2017, p.529).

A competência específica 2, diz que se deve

> Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática. (BRASIL, 2017, p. 534)

Essa habilidade é familiar com a maneira que a Resolução de Problemas se apresenta, o caráter investigativo, análise de problema, a articulação de conceitos, procedimentos e linguagem matemática estão próximos da forma de ensinar utilizando RP. Todavia, consideremos também a competência específica 3:

> Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. (BRASIL, 2017, p.535).

A utilização de estratégias para construir modelos, resolver problemas, argumentar de maneira consistente. Esses elementos estão contidos no desenvolvimento de uma atividade utilizando a Resolução de Problemas. A BNCC (2017, p.535) ressalta que a utilização de problemas cotidianos tem um importante papel na aprendizagem do aluno e nas aplicações da matemática em seus problemas reais.

A respeito ainda do ato de resolver problemas, segundo o documento

> Convém reiterar a justificativa do uso na BNCC de “Resolver e Elaborar Problemas” em lugar de “Resolver Problemas”. Essa opção amplia e aprofunda o significado dado à resolução de problemas: a elaboração pressupõe que os estudantes investiguem outros problemas que envolvem os conceitos tratados; sua finalidade é também promover a reflexão e o questionamento sobre o que ocorreria se algum dado fosse alterado ou se alguma condição fosse acrescentada ou retirada. (BRASIL, 2017, p.536).

De fato, a utilização da Resolução de Problemas como estratégia metodológica de ensino contribuí para o estabelecimento e desenvolvimento das competências gerais e específicas apresentadas pela Base Nacional Curricular Comum. A RP pode ser considerada uma aliada no desenvolvimento das aprendizagens apresentadas pelo documento, especificamente na habilidade de resolver problemas, amplamente citada como objetivos de aprendizagem.

2.3 Trajetória Hipotética de Aprendizagem

A Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA), assim como a Resolução de Problemas, possibilita um “cenário” em que o aluno seja um participante ativo na construção do seu conhecimento. A THA pode ser entendida como uma forma de se pensar e organizar o ensino e a aprendizagem da matemática.

Ao nos lembrarmos de escolas ou professores que conhecemos, os quais mantém sua maneira tradicional de ensinar, no entanto, face as novas estratégias de ensino e aprendizagem que surgem, levantam-se também os questionamentos de como elas podem ser desenvolvidas. Afinal de contas, quem aprendeu o que sabe, tende a reproduzir da forma como aprendeu, a utilização dessas novas tendências pode ser um desafio. Muitas vezes, os professores da Educação Básica se encontram distantes das pesquisas desenvolvidas nas universidades (ou fora delas), essa distância pode fazer com que essas novas tendências não os alcancem.

As elaborações de THA surgem para associar as ideias norteadoras com a prática dos professores em sala de aula, servem também para os professores que a estudam, consigam refletir a sua prática docente.

2.3.1 Perspectiva de Simon

A THA surgiu com Martin A. Simon em uma pesquisa sobre o ensino de matemática, na tentativa de criar uma pedagogia matemática. Segundo Oliveira (2015, p.45)

> Simon (1995) apresentou a trajetória hipotética de aprendizagem por meio do Ciclo de Ensino de Matemática, que ele desenvolveu como um modelo do inter-relacionamento cíclico de aspectos que envolvem o conhecimento do professor, seu pensamento e a tomada de decisões com relação ao seu planejamento.

De acordo com Simon,

> A consideração dos objetivos de aprendizagem, as atividades de aprendizagem e as hipóteses de aprendizagem nos quais os alunos podem se envolver compõem a trajetória hipotética de aprendizagem, uma chave do Ciclo de Aprendizagem Matemática descrito na próxima seção[6] (SIMON, 1995, p.133, tradução nossa).

---

[6] *The consideration of the learning goal, the learning activities, and the thinking and learning in wich students might engage make up the hypotetical learning trajectory, a key part of the Mathematical Learning Cycle described in the next section.*

A THA é composta por três fatores: objetivos de aprendizagem, atividades de aprendizagem e hipóteses de aprendizagem.

Os objetivos de aprendizagem são delimitados pelo professor, ele deve ter uma meta a ser alcançada, como por exemplo, fazer com que seus alunos aprendam determinado conceito ou consigam resolver exercícios de certa natureza/assunto.

As atividades de aprendizagem seriam as ferramentas que ele utilizaria e que mostram como o professor faria para atingir seus objetivos. Isso pode ser a seleção de exercícios propícios, a elaboração de uma situação problema, um desafio proposto, entre outros.

As hipóteses de aprendizagem são as suposições que o professor faz de como seus alunos vão desenvolver as atividades propostas, ele cria hipóteses pois, segundo Simon

> Refiro-me a "hipóteses" sobre o conhecimento dos alunos para enfatizar que o professor não tem acesso direto ao conhecimento dos alunos. Ele deve inferir a natureza do entendimento dos alunos a partir de suas interpretações dos comportamentos de seus alunos, com base em seus próprios esquemas com relação à matemática, aprendizado, alunos e assim por diante.[7] (SIMON, 1995, p.135, tradução nossa).

Entende-se que o professor começa a elaborar suas hipóteses a partir do conhecimento que ele tem sobre o conteúdo, da forma como ele pensa que os alunos aprendem e sua experiencia como professor. Para Pires (2009, p.154)

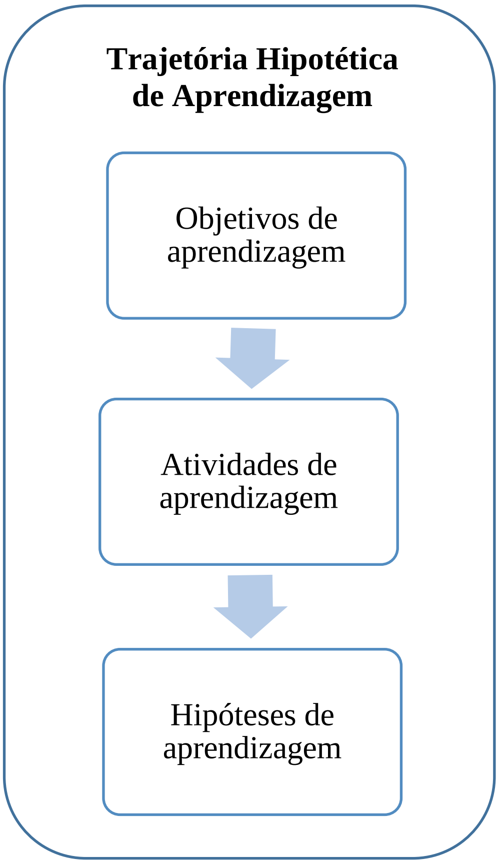
> No que se refere ao conhecimento dos professores de Matemática, além das hipóteses sobre o conhecimento dos alunos, outros diferentes saberes profissionais intervêm, como, por exemplo: teorias de ensino sobre Matemática; representações matemáticas; materiais didáticos e atividades; e teorias sobre como alunos constroem conhecimentos sobre um dado assunto – saberes estes derivados da pesquisa em literatura e/ ou da própria experiência docente.

A Trajetória Hipotética de Aprendizagem é organizada em um fluxograma por Simon da seguinte forma:

---

[7] *I refer to "hypotheses" about students knowledge to emphasize that the teacher has no direct access to students knowledge. He must infer the nature of the students understandings from his interpretations of his students behaviors, based on his own schemata with respect to mathematics, learning, students, and so on.*

Figura 01 – Etapas da Trajetória Hipotética de Aprendizagem



Fonte: do Autor, adaptado de Simon (1995).

No entanto, como as hipóteses são formuladas, pois não há acesso imediato ao conhecimento dos alunos, ao iniciar o desenvolvimento das atividades de ensino, o professor poderá confirmar que suas hipóteses foram confirmadas ou se deparará com situações diferentes das que suas hipóteses previam. Simon previa que a THA deveria estar aberta a reformulações, pois ao se confrontar com o aprendizado dos alunos ela gera novas hipóteses e novos objetivos.

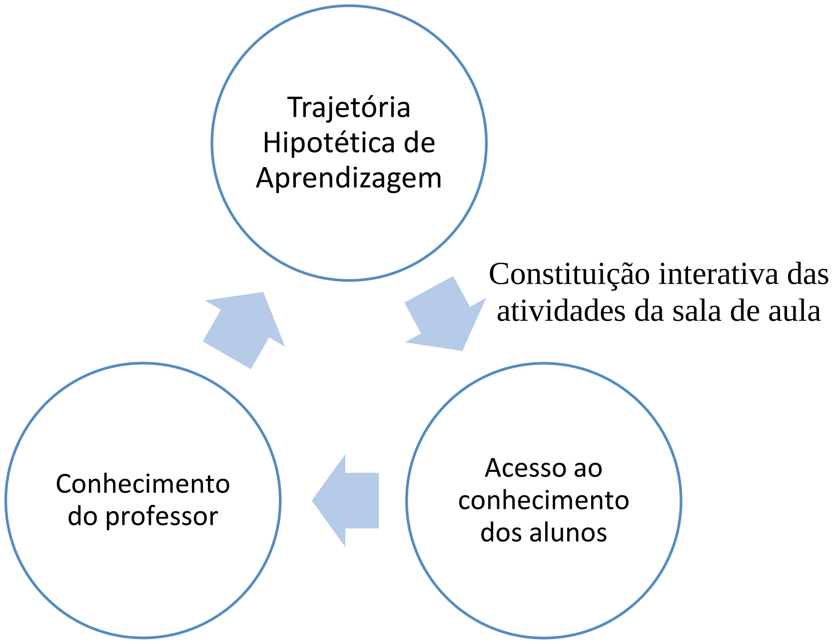
> A noção de uma trajetória hipotética de aprendizado não pretende sugerir que o professor sempre busque um objetivo de cada vez ou que apenas uma trajetória seja considerada. Pelo contrário, pretende sublinhar a importância de ter um objetivo e uma justificativa para as decisões de ensino e a natureza hipotética de tal pensamento.[8] (SIMON, 1995, p.136, tradução nossa).

Com isso, temos um novo fluxograma, no qual o acesso ao conhecimento dos alunos modifica o conhecimento do professor e, consequentemente, as hipóteses e objetivos da aprendizagem.

---

[8] *The notion of a hypothetical learning trajectory is not meant to suggest that the teacher always pursues one goal at a time or that only one trajectory is considered. Rather, it is meant to underscore the importance of having a goal and rationale for teaching decisions and the hypothetical nature of such thinking.*

Figura 02 – Ciclo de ensino da matemática



Fonte: do autor, adaptado de Simon (1995)

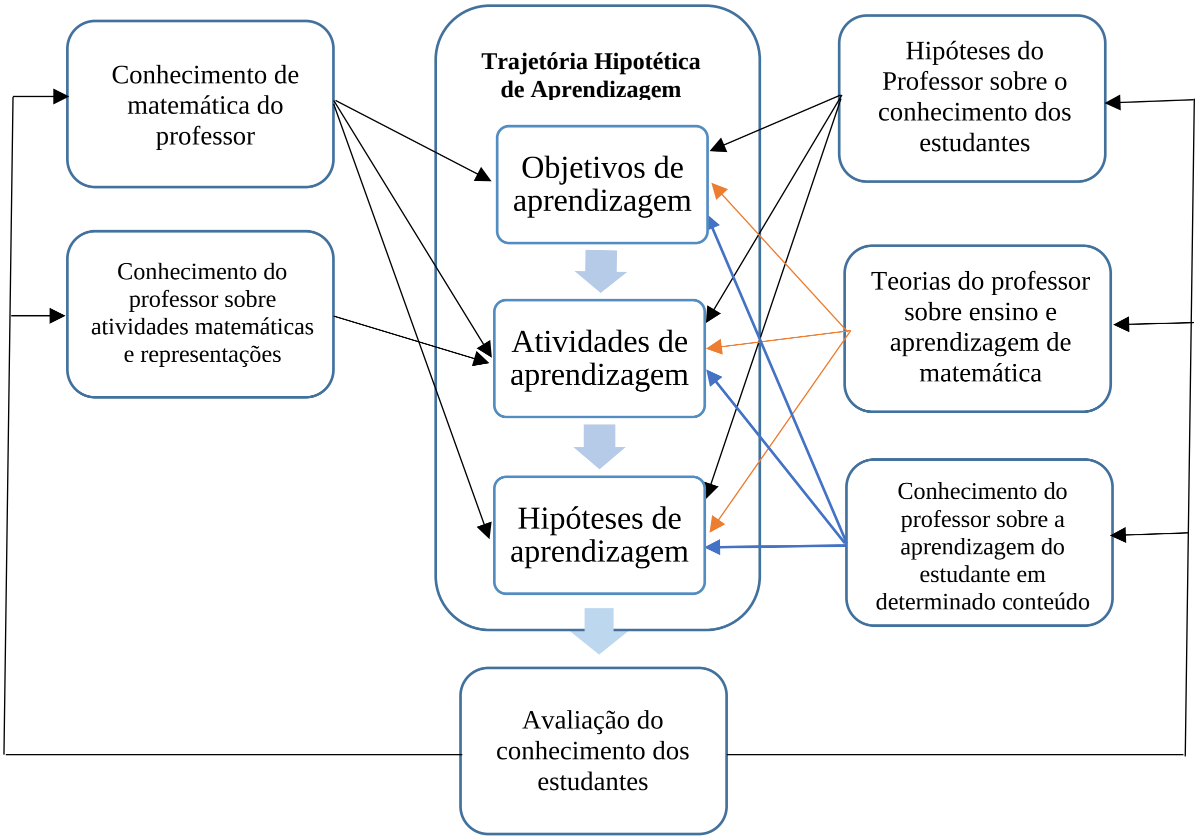
O autor faz uma analogia com o planejamento de uma viagem para exemplificar a THA.

> A escolha da palavra "trajetória" pretende se referir a um caminho, cuja natureza talvez possa ser esclarecida pela seguinte analogia. Considere que você decidiu navegar pelo mundo para visitar lugares que nunca viu. Não se faz isso aleatoriamente (por exemplo, vai para a França, o Havaí e a Inglaterra), mas também não há um itinerário definido a seguir. Em vez disso, você adquire o máximo de conhecimento relevante possível para planejar sua jornada. Você então faz um plano. Inicialmente, você pode planejar a viagem inteira ou apenas parte dela. Você partiu de acordo com seu plano. No entanto, você deve se ajustar constantemente devido às condições que encontrar. Você continua adquirir conhecimentos sobre vela, sobre as condições atuais e sobre as áreas que você deseja visitar. Você muda seus planos com relação à ordem de suas finalizações. Você modifica a duração e a natureza de suas visitas como resultado de interações com pessoas ao longo do caminho. Você adiciona destinos que antes da sua viagem eram desconhecidos para você. O caminho que você percorre é a sua "trajetória" O caminho que você antecipa a qualquer momento é a sua "trajetória hipotética"[9]. (SIMON, 1995, p.136, tradução nossa)

[9] *The choice of the word "trajectory" is meant to refer to a path, the nature of which can perhaps be clarified by the following analogy. Consider that you have decided to sail around the world in order to visit places that you have never seen. One does not do this randomly (e.g., go to France, then Hawaii, then England), but neither is there one set itinerary to follow. Rather, you acquire as much knowledge relevant to planning your journey as possible. You then make a plan. You may initially plan the whole trip or only part of it. You set out sailing according to your plan. However, you must constantly adjust because of the conditions that you encounter. You continue to acquire knowledge about sailing, about the current conditions, and about the areas that you wish to visit. You change your plans with respect to the order of your des tinations. You modify the length and nature of your visits as a result of interactions with people along the way. You add destinations that prior to your trip were unknown to you. The path that you travel is your "trajectory. The path that you anticipate at any point in time is your "hypothetical trajectory.*

Para o autor (SIMON, 1995, p.137), quando o professor interage com os alunos e os observa, existe uma nova experiência, e essa experiência é diferente da que foi prevista na elaboração da THA. Nisso, há uma modificação de ideias e a criação de novas suposições. A figura a seguir, mostra como essas relações podem acontecer.

Figura 03 – Ciclo de ensino da Matemática



Fonte: do autor, adaptado de Simon (1995)

O autor esclarece a figura da seguinte forma:

> Começando pelo topo do diagrama, o conhecimento de matemática do professor em interação com as hipóteses sobre o conhecimento matemático dos estudantes, contribuem para a identificação de um objetivo de aprendizagem. Esses domínios de conhecimento, o objetivo de aprendizagem, o conhecimento de atividades matemáticas e representações do professor, seu conhecimento sobre a aprendizagem dos estudantes de um conteúdo particular, bem como as concepções do professor sobre ensino e aprendizagem (tanto na matemática quanto em geral) contribuem para o desenvolvimento de atividades de aprendizagem e um processo de aprendizagem hipotético. (SIMON, 1995, p.138, tradução nossa)

Acrescenta ainda que a THA precisa ser modificada continuamente, não somente durante o planejamento da aula. A determinação do professor em ajustar suas hipóteses sobre o aprendizado revela o aprimoramento do conhecimento dele e dos alunos. Dele, porque suas hipóteses foram testadas e ele pode perceber se suas suposições estão de acordo a realidade da sala de aula, e dos alunos, porque além de já estarem estudando sobre determinado conteúdo, o professor consegue direcionar melhor a aprendizagem, de forma que ela atenda às necessidades dos estudantes. Alguns ajustes serão necessários, às vezes, outras, a própria essência da aprendizagem pode ser substituída por uma mais adequada. Independente das mudanças elas devem acontecer em qualquer um dos 3 componentes da THA. (SIMON, 1995, p.138)

3 MATEMÁTICA FINANCEIRA – ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

Sabemos que a matemática foi pensada pelo ser humano a partir das necessidades que foram se constituindo ao longo do tempo e evolução histórica. Hoje ela continua a ser desenvolvida como ciência e para atender às necessidades que encontramos face ao desenvolvimento humano.

A Matemática Financeira surgiu também da necessidade da sistematização de situações financeiras, desde a troca de mercadorias excedentes, passando pelos sistemas monetários, pelo surgimento dos bancos e, atualmente, nos complexos sistemas financeiros, associados à tecnologia.

Segundo Georges Ifrah (1997, s.n. apud TORAETE, 2013, p.28), na Grécia pré-helênica o boi foi uma das primeiras moedas de troca. Neste mesmo contexto o sal também foi moeda de troca, devido a sua capacidade de conservar alimentos. Nesse modelo de troca Helênico surgiu a palavra salário (remuneração dada pelo empregador para o empregado como pagamento de serviços prestados). Assim foram surgindo vários padrões de moedas de troca, cada uma com suas características e importâncias para seu tempo histórico.

Para Zentgraf (2003, p.2 apud AMORIM, 2016, p.9), a Matemática Financeira pode ser entendida como uma evolução do dinheiro em decorrer do tempo, uma relação formal do dinheiro associado a datas distintas. No sentido em que a MF se constitui de procedimentos matemáticos que sistematizam e estão envolvidos nessas "relações formais entre o dinheiro e o tempo".

Nós entendemos a matemática financeira como os procedimentos matemáticos envolvidos em situações financeiras, que associam taxas de juros, quantias de dinheiro, tempo, suas relações funcionais, entre outros. Relações essas expressas em fórmulas matemáticas, estratégias de resolução, raciocínio lógico e outros.

3.1 JUROS

De acordo com Morgado e Carvalho (2015, p.86)

> alguém que dispõe de um capital C, empresta-o a outrem por um certo período de tempo, e após esse período, recebe o seu capital C e volta, acrescido de uma remuneração J pelo empréstimo. Essa remuneração é chama de juro [...] A razão $\boldsymbol{i = \frac{J}{C}}$ que é a taxa de crescimento do capital, será sempre referida ao período da operação e chamada de taxa de juros. (2015, p.86, negritos nossos).

E esse capital C não é necessariamente uma certa quantia em dinheiro, mas ela pode ser um bem material como uma casa, um veículo ou um objeto que está sendo alugado. No entanto, o juro e as taxas de juros nesse trabalho tratam de um capital de que se refere a quantias em dinheiro.

Existem duas formas principais de se contabilizar juros de um capital em dinheiro, são conhecidas como Juros Simples e Juros Compostos.

Os Juros Simples tem taxas que incidem sobre o capital inicial. O juro (J) pode ser obtido pela multiplicação da taxa (i) com o capital (C) e a quantia (t) de vezes em que está sendo contabilizado.

$$J = C.i.t$$

O montante (M) é dado pela soma do juro (J) com o capital (C)

$$M = C + J$$

Os Juros Compostos são calculados com taxas de juros que incidem sobre o capital anterior e não sobre o capital inicial. O montante (M) obtido com juros compostos calculado com o capital (C) sobre o tempo (t) com taxa de juros (i) tem a fórmula

$$M = C(1 + i)^t$$

No entanto, precisamos associar o tempo de capitalização dos juros com o número de parcelas que estamos associando, ou seja, se os juros são bimestrais, usamos o número de bimestres no lugar do t, se são semestrais usamos o número de semestres, se anuais usamos a quantia de anos e assim por diante. Diante disso, se as informações fornecidas não estiverem se referindo a mesma quantia de tempo, precisamos transformar.

3.2 Transformações de taxas

A taxas de capitalização de juros podem se apresentar, às vezes, diferente da taxa que gostaríamos de calcular, nesse caso, precisaríamos transformar a taxa fornecida naquela que nos é necessária. Neste caso, gostaríamos de abordar sobre a transformação de taxas em relação ao tempo, e, por exemplo, para transformação de uma taxa anual (I_{12}) em taxa mensal (i) utilizamos a seguinte relação:

$$(1 + I_{12}) = (1 + i)^{12}$$

Isso se dá pois $(1 + i)^{12}$ se refere a taxa mensal em 12 meses, ou seja, 1 ano $(1 + I_{12})$.

Pensemos na relação em uma taxa de juros semestral (I_6) em comparação a uma taxa mensal (i), temos então que:

$$(1 + I_6) = (1 + i)^6$$

Para conversão de uma taxa trimestral em mensal, podemos utilizar:

$$(1 + I_3) = (1 + i)^3$$

É possível também fazer outros tipos de transformações, como por exemplo, a transformação de taxa anual para trimestral

$$(1 + I_{12}) = (1 + I_3)^4$$

A fim de estender essa relação para outras quantias de tempo, temos o seguinte:

$$\left(1 + I_j\right) = (1 + I_k)^{\frac{j}{k}};\ k, j \in \mathbb{R}; k \neq 0; j > k.$$

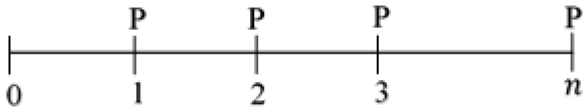
3.3 Séries Uniformes

Segundo Morgado e Carvalho (2015, p.92), “um conjunto de quantias, referidas a épocas diversas, é chamada de série, ou de anuidade ou, ainda, renda. Se esses pagamentos forem iguais e igualmente espaçados no tempo, a série é dita uniforme.” Em outras palavras, uma série uniforme é uma quantia de pagamentos iguais feitos no mesmo intervalo de tempo.

Ainda de acordo com os autores, “o valor de uma série uniforme de n pagamentos iguais a P, um tempo antes do primeiro pagamento, é, sendo i a taxa de juros, igual a $A = P\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$" (MORGADO; CARVALHO, 2015, p.92)

Para demonstrar essa fórmula, consideremos a seguinte linha do tempo, marcada pelos pagamentos iguais P e igualmente espaçados.

Figura 04 – Linha do tempo



Fonte: do autor

Ao anteciparmos todas essas parcelas para o valor na data 0, ou seja, o valor atual (A) dessa sequência de pagamentos, nós temos que:

$$A = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + \cdots \frac{P}{(1+i)^n}$$

Note que isso se refere a soma dos termos de uma PG de razão $q = \frac{1}{1+i}$, primeiro termo $a_1 = \frac{P}{1+i}$ e n termos, ou seja

$$A = a_1 \frac{(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$A = \frac{P}{1+i} . \frac{\left(\left(\frac{1}{1+i}\right)^n - 1\right)}{\frac{1}{1+i} - 1}$$

$$A = \frac{P}{1+i} . \frac{\left(\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}\right)}{\frac{-i}{1+i}}$$

$$A = \frac{P}{1+i} . \left(\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}\right) . \frac{1+i}{-i}$$

$$A = P . \frac{1-(1+i)^n}{-i(1+i)^n}$$

$$A = P . \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}$$

$$A = P\left(\frac{(1+i)^n}{i(1+i)^n} - \frac{1}{i(1+i)^n}\right)$$

$$A = P\left(\frac{1}{i} - \frac{(1+i)^{-n}}{i}\right)$$

$$A = P\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Utilizando a mesma fórmula, podemos encontrar o valor do pagamento P isolando a incógnita.

$$P = A\,\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

Portanto, essas formulas nos proporcionam calcular o valor atual de uma sequência de depósitos ou do valor de uma parcela considerando os dados necessários envolvidos.

Contudo, também é possível calcular o valor do montante final (M) em uma sequência de depósitos (D) a uma taxa de juros i, feitos em n parcelas, com a seguinte fórmula:

$$M = D\left(\frac{(1+i)^n-1}{i}\right)$$

A demonstração dessa fórmula é semelhante com a demonstração anterior, mas neste caso, os pagamentos não são antecipados e cada depósito rende juros até o final da sequência, ou seja, no último depósito, nós temos:

$$M = D + D(1+i) + D(1+i)^2 + \cdots + D(1+i)^{n-2} + D(1+i)^{n-1}$$

Note que, isso é a soma dos termos de uma PG de razão $q = (1+i)$, primeiro termo $a_1 = D$ e n termos. Isto é,

$$M = a_1\,\frac{(q^n-1)}{q-1}$$

$$M = D\,\frac{((1+i)^n-1)}{1+i-1}$$

$$M = D\,\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

3.4 Sistemas de Amortização

Sistemas de amortização são formas de se pagar uma dívida ao qual se tomou por empréstimo, através de pagamentos regulares. Esses pagamentos têm a função de amortizar o saldo devedor e pagar os juros envolvidos.

Existem diferentes tipos de sistemas de amortização, mas segundo Morgado e Carvalho, os mais usuais são o Sistema de Amortização Constante (SAC) e o Sistema de Amortização Francês, conhecido como Tabela *Price*. (2015, p.100)

O SAC consiste em parcelas decrescentes e valor da amortização constante. Conforme ainda Morgado e Carvalho (2015, p.100) "sendo n [$n \in \mathbb{N}$] o número de parcelas e i a taxa de juros temos:

$$A_k = \frac{D_o}{n};\ D_k = \frac{n-k}{n}D_o;\ J_k = iD_{k-1};\ P_k = A_k + J_k\text{"}\ \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Para $k \in \mathbb{Z}$.

Se a dívida inicial (D_o) for paga em n parcelas, temos que cada quota de amortização será

$$A_k = \frac{D_o}{n}$$

Após k amortização, o valor da dívida muda, sendo agora a diferença entre a dívida anterior e a amortização, ou seja,

$$D_k = D_o - kA_k$$

$$D_k = D_o - k\frac{D_o}{n}$$

$$D_k = \frac{nD_o}{n} - k\frac{D_o}{n}$$

$$D_k = \frac{n-k}{n}D_o$$

O juro de cada parcela (k), se dá pelo produto entre a taxa de juros (i) e a dívida anterior (D_{k-1}), ou seja,

$$J_k = iD_{k-1}$$

O valor de cada parcela é obtido pela soma da amortização com o juro da parcela k, isto é,

$$P_k = A_k + J_k$$

Exemplo:

Uma dívida de R$500,00 é paga em 4 meses pelo SAC a uma taxa de juros mensal de 8%, elabore um quadro que expresse essa amortização

Quadro 02 – Exemplo SAC

k	$P_k = A_k + J_k$	$A_k = \frac{D_o}{n}$	$J_k = iD_{k-1}$	$D_k = \frac{n-k}{n} D_o$
0	-	-	-	500
1	165	125	40	375
2	155	125	30	250
3	145	125	20	125
4	135	125	10	0

Fonte: do autor.

A Tabela *Price* possuí parcelas constantes e amortizações crescentes, conforme o Teorema 5.5 de Morgado e Carvalho (2015, p.101), “sendo n o número de pagamentos e i a taxa de juros, temos

$$P_k = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}};\ D_k = D_0 \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}};\ J_k = iD_{k-1}\ e\ A_{[k]} = P_k - J_k"$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

A primeira fórmula já apresentamos e demonstramos anteriormente, para entender a segunda fórmula, note que D_k é o valor da dívida na k-ésima parcela, em outras palavras, é a dívida que será paga, postecipadamente, por $n-k$ parcelas sucessivas de valor P_k. Utilizando ainda a primeira fórmula deste teorema (isolando o valor da dívida D), que já demonstramos anteriormente, temos então que,

$$D_k = P_k \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}$$

Substituindo P_k por sua fórmula, obtemos:

$$D_k = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}} . \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{i}$$

$$D_k = D_0 \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}}$$

O juro de cada parcela (k), se dá pelo produto entre a taxa de juros (i) e a dívida anterior (D_{k-1}), ou seja,

O valor de cada amortização se dá pela diferença entre cada parcela P_k e o juro J_k.

$$A_k = P_k - J_k$$

Exemplo:

Uma dívida de R$500,00 é paga em 4 meses pela Tabela *Price*, a uma taxa de juros mensal de 8%, elabore um quadro que expresse essa amortização

Quadro 03 – Exemplo Tabela *Price*

k	$P_k = D_0 \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$	$A_k = P_k - J_k$	$J_k = iD_{k-1}$	$D_k = D_0 \frac{1-(1+i)^{-(n-k)}}{1-(1+i)^{-n}}$
0	-	-	-	500
1	150,96	110,96	40	389,03
2	150,96	119,83	31,12	269,20
3	150,96	129,42	21,53	139,77
4	150,96	139,77	11,18	0

Fonte: do autor.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este trabalho se trata de uma pesquisa qualitativa, que conforme Bogdan e Biklen (1994, p.11, apud OLIVEIRA, 2015, p.52) a pesquisa qualitativa se interessa mais pelo processo do que pelo resultado, é descritiva, tenta analisar os dados de forma indutiva, dá uma importância vital para o significado. A elaboração deste trabalho será voltada para a prática do professor em sala de aula, se preocupando com o processo de ensinar.

A fundamentação teórica que sustentam este trabalho se baseia na Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) segundo a perspectiva de Simon (1995), na Resolução de Problemas como estratégia metodológica de ensino da matemática de acordo com Onuchic e Allevato (2011), e na Educação Financeira segundo alguns apontamentos da OCDE (Organização de Cooperação e de Desenvolvimento Econômico).

A construção do embasamento teórico da THA, se deu em maior parte, segundo o ponto de vista de Simon (1995), autor propositor desse conceito. Para Simon (1995), a concepção de hipóteses sobre o aprendizado do aluno, juntamente com os objetivos de aprendizagem e as atividades a serem desenvolvidas, concebia a ideia da Trajetória Hipotética de Aprendizagem. Essa ideia da THA surge da tentativa de se criar uma "pedagogia matemática", pedagogia esta que aponta o professor como um mediador e o aluno como um participante ativo na construção do seu conhecimento. A THA torna-se, neste trabalho, uma ferramenta no desenvolvimento desse papel que o aluno e o professor assumem.

Ao falarmos em Resolução de Problemas, encontramos conceitos diferentes. Neste trabalho, falamos sobre como ensinar a resolver problemas (POLYA, 1995), ensinar através da RP (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011) e a Resolução de Problemas como objetivo de aprendizagem (BNCC, 2017). A Arte de Resolver Problemas (How to Solve It) de George Polya (1995) estabelece alguns passos, que segundo ele, são necessários para resolver problemas. Essas concepções foram desenvolvidas a partir de problemas matemáticos, mas também poderiam ser aplicadas para outras áreas do conhecimento. Ensinar através da Resolução de Problemas é uma ideia diferente da que Polya apresenta. Onuchic e Alletavo (2011) trazem esse conceito como, segundo elas, uma estratégia metodológica de ensino-aprendizagem-avaliação (as autoras entendem esse conceito como um fenômeno indissociável), isto é, uma maneira de ensinar e aprender matemática e avaliar o aluno considerando-o com construtor do seu conhecimento e o professor um mediador (ideia contida na THA). Os Parâmetros Nacionais

Curriculares apontam a Resolução de Problemas como uma estratégia favorável de ensino, baseiam-se também, assim como a BNCC, nessa ideia de uma aprendizagem construída.

Na Base Nacional Curricular Comum, não são apontadas estratégias metodológicas de ensino que devem ser usadas, o foco da BNCC é tratar das competências gerais e específicas que devem ser desenvolvidas nos alunos e do conteúdo programático que deve ser desenvolvido. A relação deste documento com a Resolução de Problemas se dá pelo fato de a BNCC apontar a RP como objetivo a ser atingido no ensino dos conteúdos matemáticos, também como competência a ser desenvolvida e aplicada na vida do aluno. Além disso, o desenvolvimento de competências sugerido pela BNCC é totalmente compatível com a perspectiva da Resolução de Problemas aqui adotada.

A Educação Financeira foi para o autor o ponto de partida desde trabalho. Mesmo não sendo o foco da pesquisa, reconhecemos na Educação Financeira a necessidade que as pessoas têm de saber sobre mercados financeiros, principalmente os alunos, futuros cidadãos ativos da sociedade. Considerando que a escola precisa estar inserida na realidade em que ela está alocada, o contato com sistemas financeiros está presente na vida da grande maioria das pessoas. É necessário desenvolver com esses alunos, alguns conceitos importantes sobre os mercados financeiros.

O objetivo geral dessa pesquisa está em apresentar uma proposta que possa responder à pergunta: como uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem pode contribuir para o ensino da Educação Financeira na Educação Básica? No desenvolvimento das Trajetórias, nós vamos associando os elementos da Educação Financeira, da Matemática Financeira e de estratégias de ensino.

Além do objetivo geral, essa pesquisa busca refletir outras questões como:

- De que forma nós podemos ensinar Educação Financeira tendo aluno como participante ativo no processo de aprendizagem?
- Por que é importante ensinar sobre Educação Financeira?
- Como falar de Educação Financeira em Matemática Financeira?

Para buscar responder essas questões, vamos elaborar uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem sobre três Problemas de Matemática Financeira, versando a

Educação Financeira como contexto desses exercícios e utilizando a Resolução de Problemas como estratégia metodológica de aprendizagem.

Esses problemas foram desenvolvidos pelo autor, e mesmo que fictícios, buscam representar situações reais nas quais os alunos podem estar inseridos ou que são de fáceis associações com as suas realidades.

Esperamos contribuir com o professor da Educação Básica de forma com que a THA seja um instrumento na construção da sua prática docente e que também a elaboração dessas Trajetórias contribuía no ensino da Educação Financeira e Matemática Financeira.

5 A PROPOSTA

Nesta seção vamos apresentar três Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem, sobre o ensino de Educação Financeira e Matemática Financeira. Buscamos apresentar problemas que possam estar próximos da realidade dos nossos alunos, que estão cada vez mais inseridos no mercado financeiro.

A THA elabora hipóteses a partir das atividades de ensino e dos objetivos e cria um suposto "caminho" de aprendizagem, no qual nós imaginamos e nos preparamos para o trajeto que vamos percorrer, sempre consciente do papel do professor, do aluno, dos objetivos e dos problemas contextualizados, dispostos sempre a corrigir nossas suposições de acordo com o desenvolvimento do "percurso".

5.1 A TRAJETÓRIA – ATIVIDADE 01

5.1.1 Atividade De Aprendizagem

Nayara é uma profissional recém formada no ramo da educação, decidiu se mudar e acabou de conseguir seu primeiro emprego. Ela trabalha 40 horas por semana, e recebe um salário de aproximadamente R$ 2300,00 reais incluindo vale transporte e vale alimentação. Em média, ela sabe que gasta por mês com aluguel, internet, mercado e vestuário cerca de R$1500,00. Nayara decidiu que quer comprar um carro, e já tem um modelo em mente, sabe que seu valor é de R$ 30000,00, pretende financiá-lo no prazo de 5 anos. Considerando as taxas de financiamento para o veículo disponibilizados no site do Banco Central, o regime de capitalização da tabela *Price* e que Nayara possui contas no Banco Yggdrasil, Banco Box e Ideias Banco, ela deseja fazer a melhor escolha.

Quadro 04 – Taxas de financiamento[10]

	Taxas de juros		
Posição	**Instituição**	**% a.m.**	**% a.a.**
1	BCO YGGRASIL S.A.	1,23	15,78
2	IDEIAS BANCO S.A.	1,51	19,63
3	BANCO BOX S.A.	1,54	20,06

Fonte: do autor

Vamos considerar também que Nayara não é uma pessoa que gosta de pagar juros, e se ela perceber que um financiamento resultar em um valor muito maior que o emprestado, ela pode considerar uma forma pra juntar seu dinheiro, como por exemplo, fazer uma aplicação mensal do valor da parcela em um investimento de baixo risco, como o tesouro Selic.

Em outras palavras, Nayara quer utilizar do conhecimento que tem sobre Educação Financeira, para analisar as opções que estão à disposição dela, isto é, comparar o valor de cada parcela, o montante final de cada financiamento e o tempo necessário para acumular dinheiro suficiente para adquirir o carro.

5.1.2 Objetivos Do Problema

Esse problema foi construído baseado nas experiências de vida do autor, Nayara é uma amiga de longa data, recentemente ela se formou e mudou de cidade, está morando com uma amiga e agora precisa lidar essas situações corriqueiras, dentre elas orçar seus gastos e planejar suas compras. Para os estudantes, será uma situação fictícia, o professor pode ou não dizer se é uma situação real. Entretanto, propõe um problema contextualizado, próximo da realidade, que possibilita um ambiente de aprendizagem, no qual o aluno pode se identificar e conseguir aprender.

Considerando o papel do professor como mediador, ele deve incentivar e orientar seus alunos, de modo que os alunos consigam resolver por si só. Uma atitude favorável nesse ambiente de aprendizagem, seria o professor apresentar problemas secundários, relacionados ao problema apresentado, por exemplo, se uma sequência de depósitos de mesmo

[10] Os nomes destes bancos são fictícios, mas suas taxas são inspiradas em bancos reais.

valor for feita mensalmente, durante poucos meses, qual seria o valor final? Considerando os juros que rendem a cada mês. Ao utilizar logaritmos na resolução de uma questão, pode ser discutido a resolução de uma equação logarítmica.

Incentivar os alunos a criarem problemas secundários é uma atitude que pode ser adotada, isso estimula a exploração do conteúdo, amplia e aprofunda os conteúdos envolvidos na resolução do problema.

A resolução a ser desenvolvida deste problema deve apresentar os valores das parcelas do financiamento, o valor total final pago por essas parcelas e o tempo necessário para poupar o dinheiro necessário. Nós apresentamos uma resolução e acreditamos que os alunos devem obter os mesmos valores, no entanto, os estudantes podem explorar caminhos diferentes para se chegar no mesmo resultado e isso deve ser considerado. A apresentação dessas resoluções, mesmo que possuam alguma inconsistência, promove a reflexão e aprendizagem desses alunos.

A interpretação e o registro dessas resoluções podem exigir dos alunos uma certa seriedade, formalização e organização do raciocínio. Neste sentido, é fundamental que, na sala de aulas, os alunos sejam sempre motivados a realizar uma exploração sistemática dos conteúdos e posterior formalização.

Discutir as resoluções apresentadas promove a reflexão da própria resolução. Ao observar outras resoluções, o estudante pode identificar possíveis erros, semelhanças no raciocínio e as outras possibilidades de resolução, desta forma, contribuindo para a sua aprendizagem.

A utilização de fórmulas, os processos matemáticos envolvidos e as conclusões que o autor utiliza em cada etapa, são esperados nas resoluções dos alunos, mas isso pode não acontecer, caso não aconteça, o professor deve apresentar uma resolução obtida e refletir com seus alunos os resultados e os aspectos da educação financeira envolvida neste problema.

5.1.3 Processo Hipotético

Supomos que possíveis dúvidas dos alunos possam surgir desde o início da resolução do problema, por isso iniciamos o processo hipotético na leitura do mesmo. Estas hipóteses serão apresentadas durante o desenvolvimento do problema, no qual nossas suposições se apresentam como forma de possíveis dúvidas ou como forma de possível resolução.

Durante a leitura do problema, é preciso entender para que servem os dados apresentados, se todos serão necessários e o que se espera de resolução desse problema. De antemão, nem todas os dados fazem parte da resolução.

Professor, vou precisar usar todos os números?

Como dito, as informações compõem o problema e servem para contextualizá-lo, mas nem todas necessariamente farão parte da resolução. Sua carga horária semanal, a elaboração da tabela *Price* e as taxas de juros dos bancos dos quais ela não tem conta são exemplos disso

Professor, o que o problema quer saber?

Essa pergunta mostraria que o aluno não compreendeu bem o problema. É um problema para o qual temos diferentes opções e queremos escolher a que apresenta as melhores condições, sejam elas de menor valor da parcela, menor valor a ser pago no final do financiamento, menor tempo de duração do financiamento ou o tempo necessário para acumular o dinheiro. Perguntas auxiliares podem ser feitas para ajudar a elucidar o problema ou a resolvê-lo: Quanto ela tem para pagar no valor dessas parcelas? Em qual banco elas vai fazer o financiamento? Qual o valor da parcela do financiamento nesses bancos? Quanto ela teria pago no final do pagamento das parcelas? Se ela tivesse investido esse dinheiro, em quanto tempo ela teria esse valor? Todas essas perguntas podem ser feitas pelo professor para orientar seus alunos no entendimento do problema e na busca pela resposta de qual seria a opção mais vantajosa.

Antes de iniciar a resolução deste problema, seria interessante elaborar o que Polya (1995, p.12) chama de estabelecimento de um plano. Pensar nos passos que devemos dar antes de executá-los.

Esta estratégia pode ser montada de acordo com suas expectativas, mas vamos exemplificá-la aqui:

A. calcular o valor disponível para a parcela.
B. calcular o valor da parcela deste financiamento em cada banco.
C. calcular o valor total que seria pago caso fosse feito o financiamento em cada banco.
D. pesquisar o valor da taxa SELIC.
E. calcular o montante de uma sequência de depósitos utilizando a taxa SELIC.
F. interpretar e comparar os resultados.

Após elaborar uma estratégia como hipótese, seguimo-las tentando cumprir os seus passos.

A. Valor disponível para a parcela:

O valor disponível para a parcela seria o que sobra da renda mensal da Nayara, ou seja, a diferença entre seu salário e seus gastos mensais. Sabendo que ela ganha R$2300,00 por mês e possui R$1500,00 de gastos mensais, temos que

$$2300{,}00 - 1500{,}00 = 800{,}00.$$

Logo, Nayara possui no máximo R$800,00 para pagar na prestação do carro.

B. Valor da parcela segundo o financiamento de cada banco:

O valor da parcela seria a prestação do financiamento, oferecido por cada um dos bancos, é o dinheiro pago mensalmente referente ao dinheiro que foi emprestado no financiamento. Para calcular o valor desta parcela, precisamos utilizar a fórmula matemática do valor da parcela, ao qual consideramos ser de conhecimento prévio dos alunos.

$$Vp = Vf . \frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

No qual:

Vp = Valor da parcela

Vf = Valor do financiamento = R$30000,00

i = taxa de juros (depende de cada banco)

n = número de parcelas = 60 meses (5 anos)

Para o Banco **Yggdrasil**, no qual a taxa de juros mensal é de 1,23% (0,0123), temos que

$$Vp = 30000.\frac{0{,}0123}{1-(1+0{,}0123)^{-60}}$$

$$Vp = 30000.\frac{0{,}0123}{1-(1{,}0123)^{-60}}$$

$$Vp = 30000.\frac{0{,}0123}{1-0{,}480226132}$$

$$Vp = 30000.\frac{0{,}0123}{0{,}519773867}$$

$$Vp = 30000.0{,}023664137$$

$$Vp \cong 709{,}92$$

Portanto, o valor da parcela deste financiamento no Banco Yggrasil é de R$709,92.

Para o financiamento no **Banco Box**, sob a taxa de juros de 1,54% (0,0154), temos que

$$Vp = 30000.\frac{0{,}0154}{1-(1+0{,}0154)^{-60}}$$

$$Vp = 30000.\frac{0{,}0154}{1-(1{,}0154)^{-60}}$$

$$Vp = 30000.\frac{0{,}0154}{1-0{,}399733416}$$

$$Vp = 30000.\frac{0{,}0154}{0{,}600266583}$$

$$Vp = 30000.0{,}025655267$$

$$Vp \cong 769{,}66$$

Portanto, o valor da parcela deste financiamento no **Banco Box** é de R$769,66.

Para o financiamento no **Ideias Banco** considere a taxa juros de 1,51% (0,0151). Sendo assim, temos que

$$Vp = 30000.\frac{0{,}0151}{1-(1+0{,}0151)^{-60}}$$

$$Vp = 30000.\frac{0{,}0151}{1-(1{,}0151)^{-60}}$$

$$Vp = 30000.\frac{0{,}0151}{1-0{,}406883738}$$

$$Vp = 30000.\frac{0{,}0151}{0{,}593116261}$$

$$Vp = 30000.0{,}025458752$$

$$Vp \cong 763{,}76$$

Portanto, o valor da parcela deste financiamento no **Ideias Banco** é de R$763,76.

C. Valor total pago

O valor total pago seria o montante final das parcelas pagas, isto é, a quantia em dinheiro da soma de todas as parcelas. Para calcular o valor total pago, basta multiplicar o valor de parcelas pelo número de parcelas, isto é,

$$Vt = Vp.n$$

No qual:

Vt = Valor total

Vp = Valor da parcela

n = Número de parcelas

Desta forma, organizando em uma tabela, temos

Quadro 05 – Valores da parcela e total pago

Banco	Valor da parcela	Valor total
Banco Yggdrasil	R$709,92	R$42595,2
Banco Box	R$769,66	R$46179,6
Ideias Banco	R$763,76	R$45825,6

Fonte: do autor

D. Pesquisar a taxa Selic

Segundo informações do Banco Central do Brasil, Selic significa Sistema Especial de Liquidação e de Custódia e a taxa Selic

> é a taxa básica de juros da economia. É o principal instrumento de política monetária utilizado pelo Banco Central (BC) para controlar a inflação. Ela influencia todas as taxas de juros do país, como as taxas de juros dos empréstimos, dos financiamentos e das aplicações financeiras. (BANCO CENTRAL DO BRASIL, 2020?)

A taxa Selic muda a cada 45 dias, é necessário consultá-la quando precisar. Na data da produção deste trabalho ela está em 3,75% ao ano. (13/04/2020). É um valor baixo se comparado ao valor de datas anteriores, isso se deve à crise econômica decorrente da pandemia do novo Coronavírus, COVID-19. Para este problema, vamos considerar a predominância da taxa no ano de 2019, a cota de 6,5% ao ano, isso equivale à 0,5261% ao mês.

Professor, o que é taxa Selic? Para que serve?

Existem assuntos dentro do mercado financeiro que muitas pessoas não conhecem, a taxa Selic é um deles. O professor pode orientar uma pesquisa sobre a taxa Selic para que fique mais claro. No entanto, basicamente, a taxa Selic é instrumento utilizado pelo Banco Central para controlar a inflação, influenciando outras taxas de juros do Brasil como taxas de juros de financiamento, aplicações e empréstimos.

E. Montante de uma sequência de depósitos:

Ao realizarmos consecutivos depósitos de mesmo valor em uma poupança ou em um investimento, nós temos o que chamamos de sequência de depósitos, onde cada um deles rende uma quantia em dinheiro, associados a taxa de juros envolvidas e o tempo em que o dinheiro está aplicado. Após determinado período, esses depósitos se acumulam, é o que chamamos de montante de uma sequência de depósitos.

É possível descobrir o valor final de uma série de depósitos uniformes que estão rendendo juros, para isso vamos utilizar uma fórmula conhecida como fórmula do valor futuro de depósitos uniformes.

$$Vf = Vd.\frac{[(1+i)^n - 1]}{i}$$

Para isso, vamos considerar o valor do depósito sendo o menor valor da prestação que ela encontrou, isto é, 709,92. Como o valor pretendido é de 30 mil reais, queremos encontrar o número de depósitos necessários para que esse valor seja atingido. Temos então que:

Vf = Valor futuro = 30000

Vd = Valor do depósito = 709,92

i = taxa de rendimentos = 0,5261

n = número de depósitos (queremos encontrar)

logo,

$$30000 = 709{,}92.\frac{[(1+0{,}005261)^n - 1]}{0{,}005261}$$

$$30000 = 709{,}92.\frac{[(1{,}005261)^n - 1]}{0{,}005261}$$

$$\frac{30000.0{,}005261}{709{,}92} = [(1{,}005261)^n - 1]$$

$$0{,}2223208 = [(1{,}005261)^n - 1]$$

$$22{,}23208 + 1 = (1{,}005261)^n$$

$$1{,}2223208 = (1{,}005261)^n$$

$$\log 1{,}2223208 = \log(1{,}005261)^n$$

$$\log 1{,}2223208 = n.\log(1{,}005261)$$

$$n = \frac{\log 1{,}2223208}{\log(1{,}005261)}$$

$$n = \frac{0{,}087185202}{0{,}002278834}$$

$$n \cong 38{,}26$$

Portanto, no 39º depósito, ela teria atingido o valor de R$30000,00.

F. Comparando e interpretando os resultados

De acordo com os valores que nós obtemos nos cálculos desenvolvidos, acreditamos que caso Nayara opte pelo financiamento, poderá utilizar o carro logo e pagar suas 60 parcelas de R$709,62 de acordo com o **Banco Yggdrasil**, pois apresenta o menor valor de parcela e menor montante final. Acreditamos também que se ela esperar, juntar o dinheiro e fizer essas aplicações com o rendimento da taxa Selic, em 39 meses terá o valor do dinheiro para comprar o carro. Uma economia de 21 meses em comparação com o financiamento citado.

Salientamos que essa é a solução encontrada por nós, pois apresenta as condições em que acreditamos ser as mais vantajosas. Entretanto, outras soluções podem ser apontadas e consideradas desde que sejam justificadas.

Professor, não deveríamos considerar o valor gasto com o transporte enquanto ela não compra o carro?

Neste momento, o professor pode argumentar fazendo outras perguntas, como por exemplo: Ela teria outros gastos mesmo se comprasse o carro? Existe outra forma de ir pro trabalho? Espera-se que os alunos considerem os gastos com combustível, manutenção, documentos, entre outros, isto é, o carro acaba custando mais do que o valor de sua parcela. No entanto, ela também recebe vale transporte da empresa que trabalha, logo poderá utilizá-lo para o transporte público.

Se ela comprar o carro, estará pagando por um bem material próprio.

Caso o financiamento seja feito, o carro se torna posse dela, mas não pode ser negociado, ele está alienado, poderá ser negociado quando a dívida for paga.

Essas respostas foram obtidas a partir das informações fornecidas, mas ainda assim, são informações verdadeiras e semelhantes à de uma pessoa na vida real, no entanto, existem outros fatores que influenciam no valor da parcela em um financiamento, isso depende do banco em que será realizado o mesmo. Além disso, as escolhas pessoais também podem exercer uma forte influência na decisão, como a data de aquisição do carro.

Outros fatores também compõem as escolhas e decisões das pessoas, a taxa de juros do banco pode mudar, podem haver outras modalidades de financiamento, a pessoa pode mudar de emprego, ter um imprevisto, ou até mesmo pode ocorrer uma crise econômica em larga escala. Esse problema trouxe uma reflexão a respeito do assunto matemático apresentado e sobre as opções de situações financeiras que uma pessoa pode ter na vida.

Ressaltamos que esse ambiente é apresentado para que possamos utilizar o conhecimento matemático em situações reais da nossa vida. A escolha que apontamos para Nayara fazer é resultado de nossas avaliações, fruto do poder de decisão que temos e que nos é ampliado com o conhecimento matemático que possuímos e/ou desenvolvemos.

5.1.4 Reflexões Sobre Essa Trajetória – Atividade 01

Os financiamentos feitos pelos bancos, possibilitam as pessoas soluções imediatas, no entanto, muitas pessoas não tem consciência sobre o risco que isso traz e podem se envolver em uma dívida considerável, além de estar envolvido com uma dívida maior do que realmente foi solicitado.

Observar as taxas de juros que aparentemente são baixas, menor do que 2% ao mês, não diz realmente que os juros pagos serão baixos. Assim, é preciso conhecer os procedimentos matemáticos envolvidos com o financiamento.

Nossa trajetória envolveu os procedimentos matemáticos necessários para o financiamento junto com a educação financeira envolvida na situação. O professor precisa estar atento aos aspectos financeiros envolvidos, para que as possíveis dúvidas sejam sanadas. Algumas delas podem ser:

Por que o valor pago é maior que o financiado?

Por que eu tenho que saber como funciona um financiamento?

Por que as pessoas financiam se pagam muito a mais?

Consciente do seu papel de mediador, o professor deve esclarecer as dúvidas de seus alunos, devolvendo-as com outras perguntas para incentivar que eles pesquisem. É possível ainda que eles busquem algum orçamento nos sites dos bancos, alguns disponibilizam simulações online.

5.2 A Trajetória – Atividade 02

5.2.1 Atividade De Aprendizagem – Problema 02

Felipe é um jovem recém-chegado no mercado de trabalho, trabalha atualmente no setor administrativo de uma empresa, ganhando um salário de R$1400,00 mais auxílio transporte e auxílio alimentação. O rapaz mora com seus pais, mas possui gastos com vestuário, telefonia e lazer, o que lhes custam em torno de R$500,00. Felipe sempre teve muita vontade de fazer um intercâmbio, por isso esteve acompanhando Blogs de pessoas que falam sobre experiências em intercâmbios. Em suas consultas, Felipe percebeu que teria gastos com documentação, passagem, estadia, entre outros. De acordo com seus cálculos, notou que precisaria de cerca de R$20000,00.

O jovem não está interessado em fazer um financiamento, considerando que ele não possui estabilidade financeira para pagar as parcelas. A melhor opção seria guardar o dinheiro.

Sabe-se que existem muitas formas de guardar dinheiro, mas Felipe está interessado em três delas: (1) guardar em poupança de um Banco físico, (2) fazer uma série de aplicações no Tesouro Direto ou (3) guardar em uma conta digital. Em nenhuma das três são gerados gastos administrativos.

As taxas de rendimentos dessas aplicações são hipotéticas e seguem os valores apresentados no quadro a seguir:

Quadro 06 – Taxas de rentabilidade

Poupança em Banco físico	0,5% ao mês
Tesouro direto	6,5% ao ano
Conta Digital	6% ao ano

Fonte: do autor
Supondo que essas taxas sejam fixas até o valor ser alcançado, e que Felipe não vai sair do seu emprego, quanto tempo Felipe levaria para atingir o valor pretendido em cada uma das opções?

5.2.2 Objetivos De Aprendizagem

Este problema pode expressar a situação de alguns estudantes em determinada fase da vida no qual estão planejando algo. A situação do intercâmbio é uma delas, mas o fato de precisar poupar dinheiro pode estar associado a outras situações. De acordo com a OCDE (2005, p.4, tradução nossa), um dos princípios e boas recomendações "podem incluir aspectos importantes do planejamento da vida financeira, tais como poupança privada, gestão da dívida privada ou seguros, bem como pré-requisitos para consciência, a matemática financeira elementar e a economia." [11]

A ideia do intercâmbio fez se presente no contexto do autor e de seus amigos, os quais encontraram-se com a realidade financeira envolvida no processo. Como são jovens e não possuem recursos imediatos, seria necessário o planejamento para que pudesse ser efetivado, e isso se faria através da poupança do seu dinheiro, fruto de seus esforços.

As modalidades apresentadas aqui também fazem parte da realidade dessas pessoas, que são leigos quando o assunto é mercado de ações ou plataformas de investimento, mas tem alguma noção sobre onde poupar e investimentos em renda fixa[12]. Estas pessoas também percebem que guardar dinheiro em espécie não é uma boa opção, além do risco envolvido, com a inflação o dinheiro desvaloriza com o passar do tempo.

A situação proposta possibilita ao professor um cenário que pode ser explorado no âmbito da Educação Financeira. Incentivar o raciocínio matemático atrelado às noções de poupança, investimento, planejamento e conscientização financeira são possíveis na atuação do professor diante desta proposta.

[11] *may include important aspects of financial life planning such as basic savings, private debt management or insurance as well as pre-requisites for financial awareness such as elementary financial mathematics and economics.*

[12] Tipo de investimento com baixo risco (quase nulo) de perda de capital.

Espera-se que os alunos consigam elaborar um (ou alguns) raciocínio a partir da noção do aumento percentual e desta forma consiga descobrir o que se pede. No entanto, o raciocínio esperado pode ser complexo para os estudantes, desta forma, o professor pode auxiliá-los a elaborar uma fórmula matemática. Mesmo que o professor conduza o processo, é importante que ele conte com a maior ajuda possível dos seus alunos, sempre fazendo perguntas e incentivando o raciocínio matemático.

O resultado final pode ser cenário de discussões e respostas divergentes. Todas devem ser consideradas, refletidas e organizadas para que se tornem consistentes nelas mesmas. No entanto, de antemão, apontamos que os resultados apresentados para a contagem do tempo são valores relativamente próximos. Nessa questão, consideramos mais apropriado o menor valor, mesmo que a diferença pareça irrelevante.

5.2.3 Processo Hipotético

Iniciando nosso processo hipotético pela leitura do problema, é importante que ele seja compreendido e entenda-se qual a relação entre informações fornecidas e o que se pretende alcançar.

Espera-se que os alunos entendam que é necessário utilizar os valores dados para conseguir descobrir quanto tempo, em cada modalidade de poupar, é necessário para obter o valor pretendido.

Diante disso, durante a fase de leitura e compreensão do problema, supomos que algumas dúvidas podem surgir, dentre elas:

Felipe vai guardar todo o salário que sobra? Ou seja, os 900 reais?

O professor pode instigar respostas diferentes para esta pergunta, podendo ele guardar todo dinheiro que não está na previsão de gastos (900) ou fazer uma reserva e guardar um valor mensal menor. Se o aluno decidir que o valor a ser guardado será menor que os 900 reais, os valores vão ter o mesmo comportamento, a modalidade que apresenta menor tempo, continuará tendo o menor tempo. Desde que o valor seja o mesmo para cada situação.

Felipe poderia guardar uma quantia e financiar o resto?

O professor poderia lembrar os alunos do enunciado, foi prescrito que o financiamento não seria uma opção, no entanto qualquer parte que seja guardada antes de um financiamento, deveria ser considerada nas três modalidades, o que apontaria uma solução semelhante ao que propomos, que é com o valor total. No entanto, essa questão se prolongaria a cálculos de financiamento, o que não é o objetivo deste problema.

Dividir o valor pretendido pela quantia que ele guarda mensalmente não seria o suficiente?

Evitando sempre responder as perguntas diretamente e buscando incentivá-los a conceber seu próprio raciocínio, o professor poderia questionar o mesmo: "será que dividir 20000 por 900 já não seria o suficiente?". Devolvendo a pergunta aos alunos, outros questionamentos podem surgir, "então pra que servem as taxas de rentabilidade?", "se a cada depósito feito, ele está rendendo juros, o tempo pra atingir os 20000 reais seria menor?". Com isso, temos a ideia de que apenas dividir 20000 por 900 seria insuficiente, nisto não consideramos os juros que surgiram, precisaríamos calcular.

As taxas estão se referindo a tempos diferentes de capitalizações, devo transformá-las?

De fato, o problema apresenta taxas em capitalização mensal e anual, como os depósitos serão feitos mensalmente, precisamos considerar uma capitalização mensal, mas sem responder isso diretamente, o professor pode devolver essa pergunta da forma "os depósitos são feitos mensalmente ou anualmente?", "eu tenho que esperar um ano inteiro pra render os juros do dinheiro que tenho guardado?". Diante disso, cremos que os alunos concluam que será necessário transformar as taxas para capitalização mensal.

A maioria dos bancos digitais e poupanças de bancos físicos conhecidos, possuí capitalização mensal desses juros, ou seja, se o dinheiro permanecer um mês lá, ele vai render juro, se for removido antes, não. Mas como nem todos os bancos operam da mesma forma, é sempre bom pesquisar como funciona o banco escolhido.

Como transformar essas taxas de capitalização?

Essa é uma dúvida específica, dependendo da série de aplicação do problema, pode ser que eles já saibam como faz esta transformação, cabe ao professor relembrá-los. Caso eles não saibam, o professor pode lhes ensinar. O método da transformação consiste em comparar a taxa anual com a taxa mensal da seguinte forma:

$$(1 + I) \ = \ (1 + i)^{12}$$

Onde I é a taxa anual e i a taxa mensal.

Temos essa igualdade com a taxa mensal elevado a 12 pois são equivalentes.

Para prosseguir com este procedimento, basta substituir I pela taxa anual apresentada e obter o valor de i. Não vamos fazer as transformações neste momento pois ele será apresentado na resolução do problema.

Como calcular a quantia final acumulada depois de todos esses depósitos?

Como calcular o tempo necessário para que essas aplicações atinjam os vinte mil reais?

Apresentadas hipoteticamente as possíveis duvidas que possam surgir durante a leitura do problema, vamos dar início aos nossos pressupostos sobre a forma de resolução deste problema, o que vai responder às duas possíveis dúvidas apontadas antes desse parágrafo.

Nossa trajetória de resolução, assim como o problema anterior, possuí plano de resolução, este plano que vamos apresentar, deve ser seguido para todas as modalidades de poupança apresentadas, afim de serem comparadas quando concluídas.

Nosso plano consiste em:

A. Calcular o valor para depósito.
B. Observar o padrão e elaborar uma fórmula matemática.
C. Aplicar a fórmula para os valores estipulados.
   i. Poupança em Banco físico
   ii. Aplicação no Tesouro Direto
   iii. Conta digital
D. Considerações.

Desta forma, organizamos e apresentamos nossa trajetória.

A. Calcular o valor para depósito

Consideremos que o valor guardado será o total não gasto, isto é,

$$1400 - 500 = 900$$

Portanto, nossos cálculos serão feitos com depósitos de R$900,00.

B. Observar um padrão e elaborar uma fórmula matemática

Para isso, vamos observar o que acontece se fizermos uma série de depósitos $\boldsymbol{A}$ rendendo uma taxa de juros $\boldsymbol{i}$.

Considere que hoje $\boldsymbol{A}$ será depositado, logo, no mês seguinte teremos:

$$A.(1+i)$$

Por que estamos multiplicando por $(1+i)$?

Nesta situação, o professor poderia sugerir para o aluno multiplicar somente pela taxa e pedir para refletir sobre o resultado que obteve, depois disso, para multiplicar utilizando a forma apresentada. Espera-se que aluno observe que ao multiplicar por $(1+i)$ obtemos o valor com acréscimo.

Neste mesmo mês (primeiro mês após o depósito), outro depósito será feito, então teremos

$$A.(1+i) + A$$

Porque estamos usando A no valor da parcela e i na taxa?

Reflita com seus alunos sobre a utilização de símbolos na matemática. Poderíamos utilizar os números da mesma forma, mas como estamos buscando uma generalização, utilizar símbolos se torna mais conveniente.

No próximo mês (segundo mês após o primeiro depósito), esse valor teria contabilizado juros novamente, isto é

$$[A.(1+i) + A](1+i)$$

Professor, adicionar A não seria o suficiente?

A cada ciclo mensal, o valor que está na poupança é quem terá rentabilidade, ou seja, conforme o passar dos meses, o valor que foi depositado no primeiro mês terá contabilizado os juros várias vezes, se somando aos outros depósitos e assim por diante, depósito por depósito. O professor pode instigar esse raciocínio através de problemas auxiliares.

Incluindo o depósito desse mês,

$$[A.(1+i) + A](1+i) + A$$

Observando este padrão, podemos notar que no mês seguinte, teremos

$$\big[[A.(1+i) + A](1+i) + A\big](1+i) + A$$

E assim, sucessivamente.

Para facilitar este processo de simplificação e formulação, vamos substituir $(1+i)$ por $\boldsymbol{x}$, tendo

$$\big[[Ax + A]x + A\big]x + A$$

Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação, iniciando pelo interior da expressão, obtemos:

$$[Ax^2 + Ax + A]x + A$$

$$Ax^3 + Ax^2 + Ax + A$$

$$A(x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$A(1 + x + x^2 + x^3)$$

Isso se deu para 4 parcelas, para n parcelas poderíamos estender o raciocínio da seguinte maneira:

$$\Big[\big[[A.(1+i) + A](1+i) + A\big](1+i) + A\Big](1+i) + \cdots + A$$

$$\Big[\big[[Ax + A]x + A\big]x + A\Big]x + \cdots + A$$

$$\big[[Ax^2 + Ax + A]x + A\big]x + \cdots + A$$

$$[Ax^3 + Ax^2 + Ax + A]x + \cdots + A$$

$$Ax^4 + Ax^3 + Ax^2 + Ax + \cdots + A$$

$$Ax^{n-1} + Ax^{n-1} + \cdots + Ax + A$$

$$A(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$$

$$A(1 + x + \cdots + x^{n-2} + x^{n-1})$$

Porque apareceu x^{n-1} e os outros expoentes com n?

Estamos relacionando o expoente com a quantia de termos, o maior deles depende da quantia de termos que tem, isto é, se tivermos quatro termos, o maior expoente será 3, como no exemplo que fizemos. O professor pode explorar essa situação com outros números para investigar com os alunos este comportamento. Retornando ao raciocínio.

Observe que temos a soma dos termos de uma Progressão Geométrica (PG) dentro dos parênteses. Utilizando a fórmula da soma dos termos (S) de uma PG, onde:

$$S = a_1 \frac{(q^n - 1)}{q - 1}$$

E a_1 é o primeiro termo, q a razão e n o número de termos.

Sendo $a_1 = 1$ e $q = x$, temos

$$A(1 + x + \cdots + x^{n-2} + x^{n-1}) = A\left(1\frac{(x^n-1)}{x-1}\right) = A\left(\frac{x^n-1}{x-1}\right)$$

Como dito anteriormente, tendo $x = 1 + i$, note que

$$A\left(\frac{x^n - 1}{x - 1}\right) = A\left(\frac{(1 + i)^n - 1}{1 + i - 1}\right) = A\left(\frac{(1 + i)^n - 1}{i}\right)$$

Esta fórmula que obtivemos, será utilizada para encontrar o valor do montante final de uma sequência de depósitos, considerando a rentabilidade de taxa $\boldsymbol{i}$.

C. Aplicar a fórmula obtida nos valores estipulados

Após conseguir observar e formular o raciocínio necessário para obter o valor final do montante após muitos depósitos de mesmo valor constantes, aplicados a uma taxa de juros que, supostamente, não se altera, podemos obter o tempo necessário para que nossas considerações sejam dadas.

i. Poupança em Banco físico

Para o caso da poupança em Banco físico, onde a taxa de rentabilidade é de 0,5% a.m (0,005). Podemos encontrar o tempo necessário para que, depósitos de R$900,00 atinjam os R$20.000,00.

Diante disso, temos que o valor do montante final (M), o valor da parcela (A), número de depósitos realizados a cada mês (n), a taxa de rentabilidade (i), se relacionam da seguinte maneira:

$$M = A\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right)$$

Aplicando os valores propostos, temos

$$20000 = 900\left(\frac{(1+0{,}005)^n - 1}{0{,}005}\right)$$

Portanto, para encontrar o número de parcelas necessárias, precisamos encontrar o valor de n.

$$20000 = 900\left(\frac{(1+0{,}005)^n - 1}{0{,}005}\right)$$

$$\frac{20000}{900} = \frac{(1{,}005)^n - 1}{0{,}005}$$

$$\frac{20000}{900} = \frac{(1{,}005)^n - 1}{0{,}005}$$

$$\frac{200}{9}.0{,}005 = (1{,}005)^n - 1$$

$$\frac{1}{9} = (1{,}005)^n - 1$$

$$\frac{1}{9} + 1 = (1{,}005)^n$$

$$\frac{10}{9} = (1{,}005)^n$$

$$\log \frac{10}{9} = \log 1{,}005^n$$

$$\log 10 - \log 9 = n \log 1{,}005$$

$$\frac{\log 10 - \log 9}{\log 1{,}005} = n$$

$$n = \frac{1 - 0{,}954242}{0{,}002166}$$

$$n \cong 21{,}12$$

Isto é, um pouco mais de 21 depósitos, ou certamente dizendo, no 22º depósito o valor será atingido, um ano e 10 meses.

Por que estamos usando logaritmo?

Logaritmo é uma ferramenta que possui uma propriedade que nos permite utilizar o expoente em um produto. Como n é um expoente, fica mais fácil encontrar seu valor caso ele esteja multiplicando. Para isso, o professor pode permitir que seus alunos inspecionem com alguns valores escolhidos.

ii. Tesouro direto

Agora vamos estudar a situação caso os novecentos reais mensais sejam aplicados no Tesouro Direto, porém, antes de utilizarmos a fórmula para calcular o tempo necessário, precisamos que taxa de capitalização anual seja transformada em capitalização mensal.

Como expresso anteriormente, fazemos essa transformação comparando as taxas da seguinte maneira:

$$(1 + I) = (1 + i)^{12}$$

Sendo a taxa anual (I) de 6,5% (0,065), possuímos:

$$(1+0{,}065) = (1+i)^{12}$$

$$(1{,}065) = (1+i)^{12}$$

$$\sqrt[12]{1{,}065} = 1+i$$

$$1{,}005261 = 1+i$$

$$1{,}005261 - 1 = i$$

$$0{,}005261 = i$$

$$i \cong 0{,}52\%$$

Agora que temos a taxa em capitalização mensal, podemos aplicar a fórmula.

$$20000 = 900\left(\frac{(1+0{,}0052)^n - 1}{0{,}0052}\right)$$

$$\frac{20000}{900} = \frac{(1{,}0052)^n - 1}{0{,}0052}$$

$$\frac{20000}{900} = \frac{(1{,}0052)^n - 1}{0{,}0052}$$

$$\frac{20000}{900}.0{,}0052 = (1{,}0052)^n - 1$$

$$\frac{104}{900} = (1{,}0052)^n - 1$$

$$\frac{104}{900} + 1 = (1{,}0052)^n$$

$$\frac{1004}{900} = (1{,}0052)^n$$

$$\log\frac{1004}{900} = \log 1{,}0052^n$$

$$\log 1004 - \log 900 = n\log 1{,}0052$$

$$\frac{\log 1004 - \log 900}{\log 1{,}0052} = n$$

$$n = \frac{3{,}001733 - 2{,}954242}{0{,}002252}$$

$$n = \frac{0{,}047491}{0{,}002252}$$

$$n \cong 21{,}08$$

Da mesma forma, temos um número próximo a 21 depósitos, no entanto mais próximo de 21 do que a modalidade anterior (21,12). Certamente dizendo, com 22 depósitos o valor será atingido, mas ao considerar que depois de 21 depósitos o valor estará muito próximo dos 20 mil reais, bastando que Felipe reserve algumas dezenas de reais extras, o número de depósitos, neste caso, seria 21.

iii. Banco Digital

Alguns bancos digitais fazem com que o dinheiro presente na conta corrente possua alguma rentabilidade, isso sem precisar mudar a especificação para poupança. Vamos aqui calcular a rentabilidade nesta conta digital com a taxa fornecida em 6% ao ano. Mas antes vamos transformar a taxa em capitalização mensal.

$$(1 + 0{,}06) \; = \; (1 + i)^{12}$$

$$(1{,}06) = \; (1 + i)^{12}$$

$$\sqrt[12]{1{,}06} \; = \; 1 + i$$

$$1{,}004867 = \; 1 + i$$

$$1{,}004867 - 1 = \; i$$

$$0{,}004867 = \; i$$

$$i \cong 0{,}49\%$$

Logo, podemos utilizar a formula que obtivemos para descobrir o número de parcelas, ou seja,

$$20000 = 900\left(\frac{(1+0{,}0049)^n - 1}{0{,}0049}\right)$$

$$\frac{20000}{900} = \frac{(1{,}0049)^n - 1}{0{,}0049}$$

$$\frac{20000}{900} = \frac{(1{,}0049)^n - 1}{0{,}0049}$$

$$\frac{20000}{900}.0{,}0049 = (1{,}0049)^n - 1$$

$$\frac{49}{450} = (1{,}0049)^n - 1$$

$$\frac{49}{450} + 1 = (1{,}0049)^n$$

$$\frac{499}{450} = (1{,}0049)^n$$

$$\log\frac{499}{450} = \log 1{,}0049^n$$

$$\log 499 - \log 450 = n\log 1{,}0049$$

$$\frac{\log 499 - \log 450}{\log 1{,}0049} = n$$

$$n = \frac{2{,}6981005 - 2{,}653212}{0{,}002122}$$

$$n = \frac{0{,}0448885}{0{,}002122}$$

$$n \cong 21{,}15$$

Esta resposta continua semelhante as que obtemos anteriormente, no entanto, é maior que a poupança em Banco físico e a aplicação no Tesouro Direto. Certamente, na 22ª parcela o valor será obtido, caso queira considerar apenas 21 parcelas, o valor necessário para completar não será muito se comparado aos 900 reais, mas será maior do que o necessário para atingir 20 mil reais nas outras duas modalidades.

D. Considerações

Apesar das três modalidades apresentarem valores semelhantes, todos atingidos no 22º depósito, e a escolha poder ser influenciada por outros motivos, vamos nos optar pelo menor deles, tanto pelo motivo de poder encerrar no 21º depósito e assim precisar de um valor menor para atingir os 20000 reais ou realizar os 22 depósitos e assim ter um valor excedente aos 20000, maior.

Nosso objetivo é utilizar a situação para estudar os procedimentos matemáticos envolvidos, desta forma associar o ensino da matemática com a Educação Financeira e a realidade do aluno, que pode ser presente ou futura.

5.2.4 Reflexões Sobre Essa Trajetória – Atividade 02

Algumas outras hipóteses poderiam ser levantadas como:

“Porque eu devo aprender isso?”

“Eu não tenho vontade de fazer um intercâmbio!”

“Eu não tenho dinheiro para guardar todo mês.”

“Isso é muito difícil, não consigo desenvolver este raciocínio.”

Como já falamos anteriormente, nos objetivos desta proposta, a utilização da Educação Financeira associada ao ensino da matemática possibilita um cenário de aprendizagem que permite ao aluno desenvolver habilidades em outras áreas da sua vida, ele pode usar estratégia que usamos no intercâmbio em outras situações onde ele vai precisar de recursos financeiros.

O raciocínio matemático envolvidos foi considerado que poderia ser um pouco complexo para alguns alunos, neste caso, seria necessário a intervenção do professor, consciente do seu papel de mediador.

Infelizmente a desigualdade social no nosso país é acentuada, a ideia de um intercâmbio pode não fazer parte da realidade de muitos deles, nem a de conseguir poupar dinheiro, ademais, o autor acredita que o conhecimento é transformador, capaz de muda a nossa realidade. Associado a oportunidade, acreditamos que o conhecimento muda o nosso contexto.

5.3 Trajetória 3 – Atividade 03

5.3.1 Atividade De Aprendizagem – Problema 03

Luana e Rafael são casados há 2 anos, ainda sem filhos, os dois estão se planejando para comprar um imóvel, atualmente alugam uma casa para morar. Luana é analista de sistemas e Rafael é vendedor em uma loja de roupas, suas rendas somadas chegam a R$ 4300,00 e seus gastos com aluguel, alimentação, telefonia, internet, entre outros, não passam de R$ 2300,00. Os dois almejam ter seu apartamento, mas ainda estão estudando as possibilidades. Estima-se que um apartamento novo e ideal para os dois custa em torno de R$200000,00. Segue uma tabela contendo as taxas de juros em alguns dos principais bancos em 2019 para um possível financiamento.

Quadro 07 – Relação entre Bancos e opções de financiamento

Banco	Sistema Financeiro Habitacional (SFH)	Sistema de Financiamento Imobiliário (SFI) - Carta de crédito	pró-cotista FGTS	limite do financiamento
Banco 1	a partir de 8,5% ao ano + TR	a partir de 8,5% ao ano + TR	entre 8,76% e 9,01% ao ano + TR	até 80% do valor para imóveis novos e 70% valor para usados
Banco 2	a partir de 8,49% ao ano + TR	não opera (oferece juros a partir de 8,85% ao ano + TR na Carta Hipotecária)	9% ao ano + TR (disponível para imóveis novos e usados)	de 80% a 90% do valo do imóvel novo ou usa
Banco 3	a partir de 8,3% ao ano + TR	a partir de 8,3% ao ano + TR	não opera	até 82% do valor do imóvel (tanto para nov como usados)
Banco 4	a partir de 8,85% ao ano + TR	a partir de 8,85% ao ano + TR	não opera	até 80% do valor do imóvel novo ou usado
Banco 5	a partir de 8,99% ao ano + TR	a partir de 8,99% ao ano + TR	a partir de 8,49% +TR (limitado a imóveis de construção financiada pelo banco)	até 80% do valor do imóvel novo ou usado

Fonte: Adaptado de Alvarenga (2019).

Mesmo com pouco conhecimento em investimentos, mas como bons entendedores de Matemática, os dois não desconsideram a hipótese de guardar dinheiro e aplicar suas economias em fundos de investimentos de renda fixa, como o investimento no tesouro Selic, por exemplo, cujo a rentabilidade está 6% a.a. em

2019. No final das contas, após muita análise e estudos, o casal vai optar pela forma onde eles acreditam "perder" menos dinheiro. Qual será ela?

Para os cálculos, vamos considerar um financiamento de 20 anos, ou seja, 240 meses e a tabela *Price* de amortização.

5.3.2 Objetivos De Aprendizagem

Esse problema traz uma situação em que muitas pessoas passam em determinado momento da vida. Sair da casa dos pais e morar sozinho traz a necessidade de moradia, no qual a pessoa é responsável por isso. Diante dessa situação, a solução imediata é alugar um imóvel, entretanto, algumas pessoas preferem investir o dinheiro do aluguel nas parcelas de um financiamento, seja ele para comprar ou construir sua residência. Mas de que forma a Matemática pode me ajudar a pensar nisso, o que a Educação Financeira tem a ver com essa decisão?

Comumente, nós podemos ouvir pessoas dizendo que pagar aluguel é um dinheiro que não tem mais volta e que o ideal seria usar o dinheiro para pagar as prestações de um financiamento. Contudo, essa questão pode ser um pouco mais elaborada do que isso. Talvez seja uma decisão considerável a curto prazo, pois o imóvel pode ser adquirido assim que o financiamento é feito, mas e a longo prazo, qual seria o impacto financeiro de um financiamento?

O problema proposto traz essa reflexão importante sobre a decisão de realizar um financiamento, associando os conhecimentos matemáticos e a Educação Financeira.

Dentre nossos objetivos, podemos citar também que queremos proporcionar ao aluno um ambiente de aprendizagem contextualizado, no qual ele faz parte, em que é possível desenvolver sua aprendizagem, com a mediação do seu professor.

Pretendemos também que o aluno desenvolva a capacidade de analisar e interpretar os resultados encontrados em suas resoluções, associando-os às opções que trazem maior benefício ao sujeito em questão.

De fato, muitos fatores compõem a decisão das pessoas, esses podendo influenciar de forma direta a atitude de financiar, talvez pela necessidade imediata de moradia ou pelo anseio de possuir um imóvel. Esse problema convida à uma reflexão a longo prazo sobre a decisão do financiamento. Acreditamos que o conhecimento, a reflexão e o planejamento podem nos ajudar a tomar decisões inteligentes e que nos façam consciente dos nossos atos.

5.3.3 Procedimento Hipotético

Esses elementos apresentados no quadro do enunciado (Quadro 05), podem conter algumas informações que nossos alunos talvez não estejam habituados, acreditamos que muitas pessoas que já concluíram a Educação Básica também não saibam o que significam. Diante disso, conseguimos supor que o estudante pode levantar algumas questões, tais como:

O que é Sistema de Financiamento Imobiliário?

O que é Sistema de Financiamento Habitacional?

Qual a diferença entre eles?

O que é pró-cotista FGTS?

O que é limite de financiamento?

Nós vamos buscar responder essas possíveis dúvidas no desenvolvimento da Trajetória, mas em sala de aula, o professor pode usar esta oportunidade para sugerir uma pesquisa a respeito desses conceitos financeiros. O que pode ser relevante para o assunto de Educação Financeira que queremos incutir nos nossos alunos.

Sistema de Financiamento Habitacional ou SFH é um uma modalidade de financiamento angariado pelo governo, foi estabelecido e regulamentado com a lei 4.380 de 1964 e atende as necessidades habitacionais da população que possui menos recursos.

O Sistema de Financiamento Imobiliário ou SFI possibilita o financiamento de imóveis com recursos da iniciativa privada, possui taxas estipuladas pelo credor responsável.

A diferença entre esses sistemas está nos requisitos necessários para o financiamento, o SFH possui uma série de quesitos para que possa ter acesso, alguns deles são de o valor do imóvel não pode ser superior a R$1500000,00, a taxa de juros não pode ser superior a 12% ao ano e o contratante não pode ser proprietário de um outro imóvel; o SFI é voltado para imóveis com valor de financiamento superior a R$1500000,00, sua taxa de juros pode ser superior a 12% além de outros encargos estipulados pelo credor.

Pro-cotista é uma linha de financiamento na qual o trabalhador tem um vínculo com o FGTS de pelo menos 3 anos de contribuição ou possui pelo menos 10% do valor do imóvel no fundo do FGTS. Não há limite de renda para ser aprovado, no entanto, as mensalidades não podem ser superiores a 30% do salário bruto do contratante (ESTADÃO, 2019, s.n).

Ante as respostas encontradas e a própria tabela fornecida, supomos que outros questionamentos podem se levantar, como por exemplo:

Qual banco é o melhor para o financiamento?

Preciso calcular o financiamento em cada banco?

Por que optar pelo investimento no tesouro direto?

Os alunos precisarão analisar o perfil ao qual o casal se enquadra e discernir qual modalidade/Banco/Sistema de financiamento eles podem utilizar, e quais também apresentam as melhores taxas. O objetivo deste problema não é explorar todas as possibilidades, mas diante de muitas delas, identificar qual mais se encaixa ao perfil e economia para o casal.

Sabemos o valor do imóvel e da renda do casal, isso já nos mostra que eles encaixam no SFH ou pró-cotista FGTS, no entanto, não há informações sobre a contribuição dos dois para o Fundo. Vamos então dedicar nosso raciocínio ao Sistema de Financiamento Habitacional. Resta-nos agora avaliar qual banco apresenta as melhores taxas.

Evidenciamos que os encargos envolvidos no financiamento em cada banco não foi disponibilizado, vamos desenvolver nossa resolução em cima somente das taxas fornecidas, contudo, vamos analisar mais de uma opção, pois, mesmo que a situação real seja diferente da proposta, os financiadores podem ter uma noção do que vão encontrar quando entrarem em contato com estas instituições. Após conhecer as condições apresentadas por elas, poderá decidir caso realize o financiamento.

Note que nenhuma linha de financiamento credita 100% do valor do imóvel, elas variam em 70% a 90% do valor do imóvel, ou seja, será necessário no mínimo 10% do valor total. Se o casal não possuir esse fundo de reserva, precisará acumular esse valor, isto pode ser feito em conta poupança, aplicação no Tesouro Direto (TD) ou alguma outra.

Se o financiamento for descartado, a aplicação no TD pode ser uma opção considerável, vamos desenvolver esta possibilidade para que seja analisada.

Com as nossas considerações iniciais já feitas, vamos traçar um suposto plano de resolução, ele será dividido nas seguintes etapas:

A. Analisar qual linha de financiamento se enquadra em nossa proposta.

B. Analisar quais Bancos apresentam as 3 melhores taxas.

C. Planejar uma forma de acumular o valor que os supostos financiamento não cobrem.

D. Calcular o valor da parcela e valor total pago em cada financiamento que for analisado.

    i. Banco 1

    ii. Banco 2

    iii. Banco 3

E. Calcular o tempo necessário para acumular o dinheiro se o financiamento fosse desconsiderado.

F. Análise de resultados

A. Análise da linha de financiamento.

A partir das considerações iniciais feitas, o valor do financiamento não é superior a R$ 1 500 000,00, logo, sabemos que ele não será feito no Sistema de Financiamento Imobiliário (SFI).

Como citamos sobre não termos informações sobre a contribuição com o FGTS, supomos que o casal não tenha essa possibilidade. Nos resta fazer o planejamento através do Sistema de Financiamento Habitacional (SFH).

B. Análise das taxas dos seus respectivos bancos.

Juros são quantias em dinheiro que pagamos a mais por um valor que emprestamos, logo, quanto menos juros pagamos, melhor, isto é, quão menores as taxas, menos juros pagamos, se analisados nas mesmas circunstâncias.

Diante disso, de acordo com a tabela fornecida, temos os Bancos 1, 2 e 3 oferecendo financiamento com taxas a partir de 8,5; 8,49 e 8,3 respectivamente. Vamos apresentar os cálculos feitos com esses três Bancos.

Professor, por que não fazemos as contas somente com o Banco 3?

Como dissemos anteriormente, os encargos envolvidos não são divulgados e variam de acordo com o Banco e com o perfil do financiador. Consideramos ser importante conhecer mais de um cenário financeiro, para que ao realizar um orçamento, o financiador possa ter argumentos em pedir um desconto, negociar taxas e encargos ou tomar uma decisão diferente.

C. Planejamento da forma de acúmulo do valor que o financiamento não cobre.

O casal precisa encontrar uma solução para apresentar esse valor antes do financiamento. Se eles possuírem um carro ou algum outro imóvel, poderão vendê-lo(s) e dar “de entrada”. Como essa informação não foi fornecida, vamos encontrar o tempo que seria necessário para acumular o valor necessário.

Mas qual o valor necessário para cada modalidade?

Cada banco apresenta o percentual em que é possível se realizar o empréstimo. Sendo o capital de R$200000,00, organizamos o raciocínio em um quadro:

Quadro 08 – Organização dos valores para os financiamentos.

Banco	**Percentual a ser financiado**	**Procedimento**	**Valor de financiamento (R$)**	**Valor da entrada (R$)**
Banco 1	80%	$200000 \times 0,8$	160000	40000
Banco 2	80%	$200000 \times 0,8$	160000	40000
Banco 3	82%	$200000 \times 0,82$	164000	36000

Fonte: do autor

O Banco 3, além de apresentar a melhor taxa de juros, possui o maior valor que pode ser financiado e consequentemente, o menor valor para ser dado de entrada, isso indica que provavelmente vai apresentar os melhores resultados.

Diante da situação de precisar ter esse dinheiro no início do financiamento, e sem saber se o casal pode vender algum bem material, vamos calcular o tempo necessário para juntar esse dinheiro fazendo uma série de aplicações no Tesouro Direto.

Antes de iniciar o procedimento, note que a taxa está em capitalização anual, vamos transformá-la para mensal. Comparando a taxa mensal (i) e anual (I), temos:

$$(1 + I) = (1 + i)^{12}$$

Isto é

$$(1 + 0,06) = (1 + i)^{12}$$

$$(1,06) = (1 + i)^{12}$$

$$\pm\sqrt[12]{1,06} = 1 + i$$

$$1,004867550 = 1 + i$$

$$1,004867550 - 1 = i$$

$$0,004867550 = i$$

$$i \cong 0{,}49\%$$

Considerando o montante final de 36 mil reais, a uma taxa de 0,49% ao mês e depósitos no valor de 2 mil reais, temos:

$$M = A\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right)$$

$$36000 = 2000\left(\frac{(1+0{,}0049)^n - 1}{0{,}0049}\right)$$

$$\frac{36000}{2000} = \frac{(1{,}0049)^n - 1}{0{,}0049}$$

$$18 \times 0{,}0049 = (1{,}0049)^n - 1$$

$$0{,}0882 + 1 = (1{,}0049)^n$$

$$1{,}0882 = (1{,}0049)^n$$

$$\log 1{,}0882 = \log(1{,}0049)^n$$

$$\log 1{,}0882 = n.\log 1{,}0049$$

$$\frac{\log 1{,}0882}{\log 1{,}0049} = n$$

$$n \cong 17{,}29$$

Se considerarmos um número inteiro para os depósitos, temos que no 18º depósito o valor seria atingido, no entanto, mesmo que essas aplicações não fossem feitas, o valor seria atingido em 18 meses de qualquer forma, pois $2000 \times 18 = 36000$.

A situação é semelhante para que tenhamos o valor dos outros financiamentos, que é de R$40000,00. O valor poderia ser alcançado em 20 meses. Caso sejam feitas as aplicações no Tesouro Direto, em 20 parcelas obteríamos R$41917,90, se fossem 19 depósitos teríamos R$39793,25 (faltando R$276,74 para os R$40000,00) pois

$$M = 2000.\left(\frac{(1+0{,}0049)^{20} - 1}{0{,}0049}\right) \cong\ 41917{,}90$$

e

$$M = 2000.\left(\frac{(1+0{,}0049)^{19}-1}{0{,}0049}\right) \cong\ 39793{,}25.$$

Para os próximos cálculos vamos considerar que seriam necessários 18,20 e 20 depósitos para o acumulo do valor de entrada dos Bancos 3, 2 e 1, respectivamente.

D. Cálculo do valor da parcela e do valor total pago em cada financiamento.

Após ter o valor necessário para completar o financiamento e conseguir comprar o apartamento, vamos calcular o valor das parcelas envolvidas em cada financiamento.

i. Banco 1

Antes de calcularmos o valor da parcela, note que a taxa se apresenta em capitalização anual ($I = 8{,}5\%$), vamos transformar em uma capitalização mensal (i):

$$(1+I)\ =\ (1+i)^{12}$$

$$(1+0{,}085)\ =\ (1+i)^{12}$$

$$(1{,}085)\ =\ (1+i)^{12}$$

$$\pm\sqrt[12]{1{,}085}\ =\ 1+i$$

$$\sqrt[12]{1{,}085}\ =\ 1+i$$

$$1{,}006821493\ =\ 1+i$$

$$1{,}006821493-1\ =\ i$$

$$0{,}006821493 =\ i$$

$$i \cong 0{,}6821493\%$$

Os Bancos 1 e 2 apresentam taxas muito próximas, afim de apresentar a sua distinção, mesmo que sutil, vamos mostrar os seus resultados, que são números irracionais, com um maior número de casas para suas aproximações.

Considerando o valor do financiamento (Vf) de 160000, a taxa (i) de $0{,}6821493\%$ e o número de parcelas (n) de 240, temos:

$$Vp = Vf.\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$Vp = 160000.\frac{0{,}006821493}{1-(1+0{,}006821493)^{-240}}$$

$$Vp = 160000.\frac{0{,}006821493}{1-(1{,}006821493)^{-240}}$$

$$Vp = 160000.\frac{0{,}006821493}{1-0{,}195616405}$$

$$Vp = 160000.\frac{0{,}006821493}{0{,}80438359}$$

$$Vp \cong 1356{,}86$$

Portanto, o valor da parcela no financiamento do Banco nas condições dadas é de R$1356,86.

ii. Banco 2

Iniciando pela transformação da taxa anual ($I = 8{,}49\%$) em taxa mensal (i), temos:

$$(1+I) \;=\; (1+i)^{12}$$

$$(1+0{,}0849) \;=\; (1+i)^{12}$$

$$(1{,}0849) \;=\; (1+i)^{12}$$

$$\pm\sqrt[12]{1{,}0849} \;=\; 1+i$$

$$1{,}006813769 \;=\; 1+i$$

$$1{,}006813769-1 \;=\; i$$

$$0{,}006813769 \;=\; i$$

$$i \cong 0{,}6813769\%$$

Com a taxa ($i = 0{,}006813769$) convertida, podemos calcular o valor da parcela (Vp) tendo o valor do financiamento ($Vf = 160.000$) e o número de parcelas ($n = 240$).

$$Vp = Vf.\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$Vp = 160000.\frac{0{,}006813769}{1-(1+0{,}006813769)^{-240}}$$

$$Vp = 160000.\frac{0{,}006813769}{1-(1{,}006813769)^{-240}}$$

$$Vp = 160000.\frac{0{,}006813769}{1-0{,}195976907}$$

$$Vp = 160000.\frac{0{,}006813769}{0{,}80402309}$$

$$Vp \cong 1355{,}93$$

Logo, temos que o valor da parcela seria de R$1355,93 no Banco 2.

iii. Banco 3

Iniciando pela transformação da capitalização de juros anual ($I = 8{,}3\%$) para capitalização mensal (i), temos:

$$(1+I) = (1+i)^{12}$$

$$(1+0{,}083) = (1+i)^{12}$$

$$(1{,}083) = (1+i)^{12}$$

$$\pm\sqrt[12]{1{,}083} = 1+i$$

$$1{,}0066 = 1+i$$

$$1{,}0066 - 1 = i$$

$$0{,}0066 = i$$

$$i \cong 0{,}66\%$$

Podemos então, calcular o valor da parcela (Vp) tendo o valor do financiamento ($Vf = 164.000$), taxa de juros mensal ($i = 0{,}0066$) e o número de parcelas ($n = 240$).

$$Vp = Vf.\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}$$

$$Vp = 164000.\frac{0{,}0066}{1-(1+0{,}0066)^{-240}}$$

$$Vp = 164000.\frac{0{,}0066}{1-(1{,}0066)^{-240}}$$

$$Vp = 164000.\frac{0{,}0066}{1-0{,}2062}$$

$$Vp = 164000.\frac{0{,}0066}{0{,}7937}$$

$$Vp \cong 1363{,}74$$

Portanto, o valor da parcela do financiamento no Banco 3, seria de R$1363,74.

Comparando os valores de parcela obtidos em cada um dos financiamentos, junto com seus respectivos valores finais, temos o seguinte quadro.

Quadro 09 – Organização do valor da parcela e valor final.

Banco	**Valor financiado (R$)**	**Valor da parcela (R$)**	**Valor final pago (R$)**
1	160.000,00	1356,86	325.646,4
2	160.000,00	1355,93	325.423,2
3	164.000,00	1363,74	327.297,6

Fonte: do autor

E. Cálculo do tempo necessário para acumular o dinheiro se o financiamento fosse desconsiderado.

Diante da possibilidade de o financiamento não ser considerado, vamos analisar duas opções: uma em que o valor da parcela é aplicado em sequência constante no Tesouro Direto, outra em que o valor que sobra do salário deles será aplicado integralmente para acumular e terem o dinheiro necessário.

Para isso, considerando depósitos (A) de acordo com a parcela mais barata encontrada anteriormente (1355,93), temos:

$$M = A\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right)$$

$$200000 = 1355{,}93\left(\frac{(1+0{,}0049)^n - 1}{0{,}0049}\right)$$

$$\frac{200000}{1355{,}93} = \frac{(1{,}0049)^n - 1}{0{,}0049}$$

$$147{,}5 \times 0{,}0049 = (1{,}0049)^n - 1$$

$$0{,}7227 + 1 = (1{,}0049)^n$$

$$1{,}7227 = (1{,}0049)^n$$

$$\log 1{,}7227 = \log(1{,}0049)^n$$

$$\log 1{,}7227 = n.\log 1{,}0049$$

$$\frac{\log 1{,}7227}{\log 1{,}0049} = n$$

$$n \cong 111{,}27$$

Portanto, seriam necessários 112 meses para se obter o valor R$200000,00.

Considerando agora os depósitos no valor de R$2000,00, temos:

$$M = A\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right)$$

$$200000 = 2000\left(\frac{(1+0{,}0049)^n - 1}{0{,}0049}\right)$$

$$\frac{200000}{2000} = \frac{(1{,}0049)^n - 1}{0{,}0049}$$

$$100 \times 0{,}0049 = (1{,}0049)^n - 1$$

$$0{,}49 + 1 = (1{,}0049)^n$$

$$1{,}49 = (1{,}0049)^n$$

$$\log 1{,}49 = \log(1{,}0049)^n$$

$$\log 1{,}49 = n.\log 1{,}0049$$

$$\frac{\log 1{,}49}{\log 1{,}0049} = n$$

$$n \cong 81{,}58$$

Logo, seriam necessários 82 depósitos de R$2000,00 para obter o valor pretendido

$$M = A\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right)$$

$$200000 = 1355{,}93\left(\frac{(1+0{,}0049)^n - 1}{0{,}0049}\right)$$

$$\frac{200000}{1355{,}93} = \frac{(1{,}0049)^n - 1}{0{,}0049}$$

$$147{,}5 \times 0{,}0049 = (1{,}0049)^n - 1$$

$$0{,}7227 + 1 = (1{,}0049)^n$$

$$1{,}7227 = (1{,}0049)^n$$

$$\log 1{,}7227 = \log(1{,}0049)^n$$

$$\log 1{,}7227 = n.\log 1{,}0049$$

$$\frac{\log 1{,}7227}{\log 1{,}0049} = n$$

$$n \cong 111{,}27$$

Isto é, seriam necessários 112 meses aplicando R$1355,93 no Tesouro Direto para obter o valor necessário.

F. Análise de resultados

Diante de tantas informações, o aluno pode se questionar:

Afinal de contas, qual seria a melhor opção?

A escolha feita diante das possibilidades de financiamento ou de poupar para comprar o apartamento pode variar de acordo com o perfil de quem está comprando o imóvel. Nesta situação, alguns pontos importantes vão influenciar a decisão da pessoa: a quantia a ser dada de entrada, o valor da parcela, o valor final do financiamento e tempo necessário para poupar o dinheiro.

A escolha feita diante das possibilidades de financiamento ou de poupar para comprar o apartamento pode variar de acordo com o perfil de quem está comprando o imóvel. Nesta situação, alguns pontos importantes vão influenciar a decisão da pessoa: a quantia a ser dada de entrada, o valor da parcela, o valor final do financiamento e tempo necessário para poupar o dinheiro.

A quantia que o financiamento não contempla é presente em todas as modalidades, apesar de relevante, consideramos não ser o fator mais importante na hora de tomar a decisão, até porque a diferença entre as modalidades é de 2 meses, no entanto um permite a possibilidade de financiar 164 mil reais em comparação aos 160 mil reais nos outros 2 Bancos. Se esse fosse o único ponto a ser considerado, supomos que a maior quantia a ser financiada seria escolhida (Banco 3), porém quanto mais se financia, mais juros são pagos.

O valor da parcela em cada financiamento não é acentuado, varia de 1355,93 para 1363,74 fixos em todos os 240 meses. Diante disso, imaginamos que a menor parcela seja escolhida (Banco 2), pois consideramos que ao longo de 240 meses, essa diferença baixa apresenta um valor considerável no final. Entretanto, isso opõe a suposição anterior, a parcela maior se refere ao maior valor financiando. Reiteramos que quão maior o valor financiado, maior os juros a ser pago.

Apesar destas parcelas mostrarem um valor inferior ao que o casal tem disponível mensalmente, ao calcular o valor final pago no financiamento, encontramos valores expressivos, cerca de 100% a mais do valor financiado. Parcelas que "cabem no bolso" são atrativas diante da possibilidade de se comprar um imóvel, no entanto, a quantia de parcelas pagas e o valor final devem ser considerados.

De qualquer modo, supomos que a escolha feita pelo casal seria onde o valor final é menor, isto é, o financiamento no Banco 2.

Na perspectiva da construção de um fundo para levantar o dinheiro e comprar o apartamento, encontramos uma situação atrativa, mas que dedica esforço. Se fossem feitas aplicação de 2 mil reais, em quase 7 anos o casal teria o valor do imóvel. Se os depósitos forem de 1355,93, em pouco mais de 9 anos teríamos o mesmo valor. Comparado aos 20 anos de financiamento, esse tempo é consideravelmente inferior. Acreditamos ser a melhor dentre as opções.

Portanto, apesar de apontarmos as aplicações como a melhor alternativa, se o financiamento fosse a alternativa escolhida, organizamos as nossas considerações para analisar qual Banco possui mais indicações. De acordo com os motivos que julgamos ser relevantes, marcamos o Banco indicado.

Quadro 10 – Relação entre Bancos e opções de financiamento.

Banco	**Valor do financiamento**	**Valor da parcela**	**Valor final pago**
1			
2		x	x
3	x		

Fonte: do autor

Concluímos que o Banco 2, apesar de não ter a melhor taxa de juros, apresenta o maior número de apontamentos de acordo com nossas considerações a respeito de uma escolha inteligente.

5.3.4 Reflexões Sobre Essa Trajetória – Atividade 03

Essa trajetória tenta mostrar ao aluno a importância de guardar dinheiro e o impacto de um financiamento, associados aos procedimentos matemáticos envolvidos. No entanto, apesar de apresentar nossas considerações e apontar quais seriam as nossas escolhas de acordo com o cálculo que desenvolvemos, acreditamos que soluções diferentes podem ser apresentadas, até mesmo mais práticas e/ou com melhor retorno financeiro. Existem também espaço para outras suposições a respeito da renda do casal ou eventos relevantes durante o processo.

A fim de que os objetivos dessa trajetória sejam atendidos, o professor deve estar atendo a considerar o raciocínio dos alunos sem que se perca o foco. Elaborar muitas possibilidades poderiam fazer com o que problema proposto deixe de ser o objetivo principal.

De qualquer modo, alguns questionamentos podem surgir durante essa trajetória. Nós não apresentamos estas possíveis dúvidas para não prolongar esta proposta, porém, elas poderiam ser cenários de pesquisa e discussão no momento da aula, de forma com que contribua para o surgimento de novas ideias. Dentre elas estão:

Professor e se o casal perder o emprego?

E se a taxa Selic mudar?

O tempo de poupança é menor que o necessário para pagar o financiamento, mas ainda assim, em 9 anos as coisas não podem mudar?

Se eles financiarem, o dinheiro gasto na moradia será descontado dos seus gastos mensais, não sobraria mais dinheiro do seu salário?

Vamos deixar essas dúvidas hipotéticas para a reflexão do leitor. Lembramos apenas que o professor não deve ter respostas prontas, mas levar seus alunos a buscarem e refletirem sobre possíveis respostas.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A motivação para a realização deste trabalho, que busca apresentar uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) para o ensino da Educação Financeira (EF), apoiando-se na Resolução de Problemas (RP), está associada à necessidade que as pessoas têm em saber sobre EF e a busca por maneiras de ensiná-la. Por que aprender sobre EF? Por que buscar novas maneiras de ensinar EF? O que os documentos que fundamentam a educação no Brasil dizem sobre Resolução de Problemas? Como a Resolução de Problemas pode ajudar na EF? Como a THA pode ajudar o professor no ensino de Matemática Financeira e Educação Financeira?

No entanto, apesar da motivação para este trabalho estar associada a necessidade de se falar sobre Educação Financeira, a ideia que nos inspirou escrever esse trabalho têm um conjunto de fatores, mas o ponta pé inicial se deu em uma conversa informal do autor com seus amigos. Nos chama atenção como uma simples conversa foi capaz de desencadear um tema para uma dissertação de mestrado. Acreditamos que a conversa foi oportuna, devido estar em busca de um tema para a dissertação e ao mesmo tempo, em um momento de descontração, se deparar com um assunto relevante, profundo e necessário a cidadãos comuns.

Diante disso, adequamos o tema Educação Financeira à natureza do programa do mestrado e sua intencionalidade, que seria de desenvolver algo que estivesse associado ao Ensino da Matemática. Neste momento, de acordo com a sugestão da orientadora, entendemos que a Trajetória Hipotética de Aprendizagem junto à Resolução de Problemas poderia nos dar um aporte necessário para estruturarmos este trabalho e que ambas serviriam de estratégia metodológica para abordarmos a Educação Financeira na Educação Básica.

Questiona-se muitas coisas que são ensinadas na escola, porém, assuntos importantes que precisamos aprender a matematizar, discutir e ter autonomia, como a EF, muitas vezes não é ensinado. Essa comparação traz uma entonação de que muitos assuntos ensinados não são necessários, ou, até mesmo, não há espaço para ensinar sobre EF. Tudo o que é ensinado na escola é dotado de importância e relevância, conteúdos esses que são discutidos por vários especialistas até comporem o currículo escolar.

No entanto, consideramos o fato de que a Educação Financeira é pouco ensinada em algumas escolas, em outras, pode ser que não seja ensinada. Muitos brasileiros não possuem o conhecimento básico necessário para tomar boas decisões financeiras. Reconhecemos na escola a oportunidade de preparar e ensinar os cidadãos para essas situações.

Segundo o *website* do Serasaexperian (2020?) "o número de consumidores inadimplentes no Brasil chegou a 63 milhões em março de 2019 [...]. Isto significa que 40,3% da população adulta do país está com dívidas atrasadas e negativadas."

O conhecimento financeiro não se resume a entender como funciona taxas de juros compostos, sistemas de amortização ou um financiamento, vemos na Educação Financeira a oportunidade de dar às pessoas a capacidade de uma análise crítica, do planejamento financeiro, do poder de decisão, do incentivo a bons hábitos, como o de poupar, investir, entre outros.

Contudo, a Educação Financeira e a THA poderiam ser desenvolvidas e aplicadas de diversas formas, independente das estratégias metodológicas que possam ser utilizadas na sua abordagem. Nós utilizamos a Resolução de Problemas por que nós entendemos que ela poderia nos proporcionar uma conexão satisfatória entre a Educação Financeira e a THA. Mas entendemos também que poderiam ser utilizadas quaisquer outras tendências na Educação Matemática como Modelagem Matemática, Investigação Matemática, Etnomatemática, entre outros.

A Resolução de Problemas como estratégia metodológica de ensino, apesar de conhecida, foi vista por nós como uma maneira eficiente de abordar a Matemática Financeira e a Educação Financeira. Iniciar o assunto, a partir de um problema proposto, que seja condizente com a realidade em que o aluno está inserido, permite que os procedimentos envolvidos ganhem significado e mostre ao aluno que tais "operações" têm impacto direto na sua vida.

Tendo o professor como mediador e orientador do fenômeno educacional, a RP também possibilita que o aluno tenha maior autonomia durante seu processo de aprendizagem, de forma que ele seja corresponsável pela construção do seu conhecimento, ensinando-o a resolver problemas e através da Resolução de Problemas.

A Trajetória Hipotética de Aprendizagem permite que o professor elabore suposições sobre o que estará prestes a ensinar, possibilita que através das atividades de aprendizagem, dos seus objetivos e dos processos hipotéticos, ele trace uma trajetória hipotética sobre a sua atuação em determinados momentos, pensando assim nas dúvidas que pode encontrar, naquilo que ele acha que o aluno sabe, em como eles podem reagir e assim por diante. Ao se deparar com a realidade, pode constatar se suas expectativas foram atendidas, podendo elaborar novamente suas hipóteses e criando assim um ciclo que não se encerra e que coloca o professor em constante aperfeiçoamento de sua prática.

Diante disso, lembramos que um professor também é pesquisador, pois está sempre supondo, constatando e se modificando, e neste sentido a elaboração de Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem pode ser um meio para o professor gerir sua formação continuada. No entanto, reconhecemos também, que existem professores que se encontram distantes das propostas e estratégias metodológicas desenvolvidas pela comunidade científica.

Esta proposta que apresentamos, da abordagem da Educação Financeira, da utilização da Resolução de Problemas como uma estratégia de ensino e aprendizagem, do ciclo da Trajetória Hipotética de Aprendizagem, busca levar para o professor da Educação Básica uma oportunidade para que sua prática esteja em constante renovação, e se consolide como um fator que é capaz de transformar a realidade de seus alunos, e dessa forma, a sociedade que vivemos.

Durante o desenvolvimento deste trabalho, encontramos muitos pontos positivos ao relacionar esses três temas, pois entendemos que eles se complementam e contribuem significativamente para quem os utiliza, sendo na elaboração de um trabalho, como leitor ou utilizando na sua prática docente. A dificuldade que nós encontramos não foi em relacioná-los, mas em justificar a relação que apresentamos. Portanto, lembramos que poderia ser outro assunto se não a Educação Financeira e/ou outra estratégia metodológica se não a Resolução de Problemas.

No que se refere à realização da pesquisa, o material encontrado foi de simples acesso, a maioria dos artigos utilizados foram encontrados nas ferramentas de pesquisa da internet, sendo eles de sites de universidades de domínio público, páginas oficiais das instituições citadas, outros de posse e fornecidos pela orientadora. Toda-via, apesar do material utilizado ser de fácil acesso, encontramos mais materiais desenvolvidos em Educação Financeira e Resolução de Problemas do que sobre Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem, o que nos motivou e justificou, ao nosso ver, a proposição deste trabalho.

Os estudos desses materiais foram longos e proporcionaram uma imersão profunda ao autor, contribuindo expressivamente na sua formação enquanto professor e pesquisador. Com isso, salientando a THA, notamos que muito deste trabalho se volta para o professor. Pensar e elaborar uma trajetória de ensino é papel do professor. Imaginamos que este trabalho apresenta mais contribuição ao professor e à sua atuação do que com o próprio aluno.

Contudo, acreditamos que este trabalho possa servir de inspiração e modelo para que outras THA sejam elaboradas e propostas, abordando temas curriculares e extracurriculares. Desta forma, estaremos proporcionando aos professores da Educação Básica meios para aprimorar seus métodos de ensino e se tornarem autores de suas próprias pesquisas, projetos e desenvolvimentos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALVARENGA, Darlan. **Veja comparativo das taxas de juros cobradas pelos bancos para financiamento de imóveis.** G1, 06 de junho de 2019. Disponível em: <https://g1.globo.com/economia/noticia/2019/06/06/veja-comparativo-das-taxas-de-juros-cobradas-pelos-bancos-para-financiamento-de-imoveis.ghtml>. Acesso em 01/06/2020, às 19:05.

AMORIM, Cristiano Marcell Isquierdo de. **Matemática Financeira - Abordagem voltada para a cidadania**. 2014. 54 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2014. Disponível em < https://impa.br/wp-content/uploads/2016/12/cristiano_marcell.pdf>. Acesso em 11/06/2020.

BANCO CENTRAL DO BRASIL. **Taxa Selic**. Disponível em: <https://www.bcb.gov.br/controleinflacao/taxaselic>. Acesso em 06/06/2020, às 02:30.

BRASIL. **Resolução número 3, de 21 de novembro de 2018**. Diário Oficial da União, Brasília, DF, ano 2018. Edição 224. Seção 1, p.21. Disponível em: <http://www.in.gov.br/materia/-/asset_publisher/Kujrw0TZC2Mb/content/id/51281622>. Acesso em: 01/04/2020.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental. Brasília, 1998. 148 p. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/>. Acesso em: 30 set. 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF. 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf> Acesso em: 03/04/2020.

BRASIL. Mistério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio**. Brasília, DF: MEC, 2000. Disponível em: < http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 30 set. 2019.

KIYOSAKI, Robert Toru. **Pai Rico Pai Pobre: o que os ricos ensinam a seus filhos sobre dinheiro.** 2 ed. Rio de Janeiro, Alta Books, 2000.

OECD (França). **History.** 2019a. Disponível em: <https://www.oecd.org/about/history/>. Acesso em: 30 set. 2019.

OECD (França). **Who we are.** 2019b. Disponível em: <https://www.oecd.org/about/>. Acesso em: 30 set. 2019.

OECD (França). **PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy**, 2013. Disponível em: < https://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/PISA%202012%20framework%20e-book_final.pdf>. Acesso em: 30 set. 2019

OECD. **Recommendation on Principles and Good Practices for Financial Education and Awareness**, 2005. Disponível em: <https://www.oecd.org/finance/publicationsdocuments/bestpracticesguidelines/4/> Acesso em: 30 set. 2019.

OECD/INFE. **High-level principles on national strategies for financial education,** 2005. Disponível em: < https://www.oecd.org/finance/financial-education/OECD-INFE-Principles-National-Strategies-Financial-Education.pdf> Acesso em: 30 set. 2019.

OLIVEIRA, Julio Cezar Rodrigues de. **Uma Trajetória Hipotética De Aprendizagem para o ensino de logaritmos na perspectiva da resolução de Problemas.** 2015. 126 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, CCE, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?code=vtls000203795>. Acesso em: 28 fev. 2020.

ONUCHIC Lourdes de La Rosa. **A resolução de problemas na Educação Matemática: onde estamos? E para onde iremos?** Espaço Pedagógico, v.20, n.1. Passo Fundo. Jan./jun. 2013, p.88-104. Disponível em: <http://anaisjem.upf.br/download/cmp-14-onuchic.pdf>. Acesso em: 02/02/2020.

ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Boletim de Educação Matemática**, vol. 25, núm. 41, dezembro, 2011, pp. 73-98. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Rio Claro, Brasil. Disponível em: <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291223514005>. Acesso em: 02/02/2020.

PEREIRA, Antônio Luiz, et al. **Problemas matemáticos:** caracterização, importância e estratégias de resolução. IME-USP – Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 2002. Disponível em: < http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/Resolucao%20probs/mat450-2001242-seminario-8-resolucao_problemas.pdf>. Acesso em: 02/02/2020.

PIRES, Célia Maria Carolino. Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações de Martin Simon. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 11, n. 1, p. 145 – 166, 2009.

POLYA, George. **A Arte de Resolver Problemas**: um novo aspecto do método matemático. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995. 196 p. Heitor Lisboa de Araújo.

PRÓ-COTISTA: o que é e como funciona. Estadão, 28 de março de 2019, seção imóveis, disponível em: <https://imoveis.estadao.com.br/compra/pro-cotista-o-que-e-e-como-funciona/>. Acesso em 26/05/2020

SIMON, Martin A. Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. **Journal for Research in Mathematics Education**, vol. 26, n. 2, pp. 114-145, 1995.

STANIC, George M. A.; KILPATRICK, Jeremy. Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In: SILVER, R. I. C. E. A. (Ed.). **The Teaching and Assessment of Mathematical Problem Solving.** VA: NCTM; Lawrence Erlbaum, 1989. p. 1-22. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/textos/stanic-kilpatrick%2089.pdf>. Acesso em: 02 fev. 2020.

TORAETE, Henrique Matsumoto. **Matemática financeira**: um conhecimento importante para os estudantes e seu futuro. 2013. 92f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2013. Disponível em < http://www.bibliotecadigital.uel.br/document/?code=vtls000186093>. Acesso em 11/06/2020.