Universidade Estadual de Londrina

EMERSON TORTOLA

CONFIGURAÇÕES DE MODELAGEM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Londrina
2016

EMERSON TORTOLA

CONFIGURAÇÕES DE MODELAGEM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida.

Londrina
2016

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

Tortola, Emerson.

Configurações de Modelagem Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental / Emerson Tortola. - Londrina, 2016.

304 f. : il.

Orientador: Lourdes Maria Werle de Almeida.

Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2016.

Inclui bibliografia.

1. Educação Matemática - Tese. 2. Modelagem Matemática - Tese. 3. Linguagem - Tese. 4. Anos Iniciais do Ensino Fundamental - Tese. I. Almeida, Lourdes Maria Werle de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. III. Título.

EMERSON TORTOLA

CONFIGURAÇÕES DE MODELAGEM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática.

COMISSÃO EXAMINADORA

Lourdes Maria Werle

Profa Dra. Lourdes Maria Werle de Almeida
Universidade Estadual de Londrina

Ana Paula dos S. Malheiros

Profa. Dra. Ana Paula dos Santos Malheiros
Universidade Estadual Paulista

Prof. Dr. André Gustavo Oliveira da Silva
Universidade Estadual do Paraná

Jonei Cerqueira Barbosa

Prof. Dr. Jonei Cerqueira Barbosa
Universidade Federal da Bahia

Profa. Dra. Magna Natalia Marin Pires
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 12 de dezembro de 2016.

Aos meus sobrinhos,
André, Ana Julia e Rafaela,
na esperança de mostrar-lhes que
trabalhar para conquistar nossos sonhos
vale a pena!

Agradecimentos

Quando nos aventuramos em um empreendimento como o doutorado, nunca estamos sós, sempre há um pouco de alguém que se importa com nós. Portanto, esse momento de agradecer é muito emocionante para mim, pois me mostra quantos anjos Deus colocou em minha vida, e, agora, quero humildemente lhes agradecer. Espero que gostem e que sintam em seus corações a alegria que estou sentindo, pois “de todas as coisas que nos oferece a sabedoria, a maior é a aquisição da amizade” (*Epicuro*).

Portanto, agradeço, em primeiro lugar, à Deus pelas oportunidades que tive na vida, as quais me agarrei e me dediquei sem mesmo, às vezes, ter uma certeza de quão longe eu poderia chegar. Obrigado Deus por nunca me desamparar nas dificuldades, por me dar forças para enfrentar os desafios e por me proporcionar muitos momentos de alegria tornando essa caminhada mais agradável.

À minha família, pelo apoio concedido, palavras de incentivo, paciência e amor. Aos meus pais, por confiarem em mim, por me ensinarem a respeitar as pessoas e que com elas temos muito a aprender, por me ensinarem que sonhos podem sim ser realizados quando trabalhamos por isso, por aqueles abraços quando tudo parecia tão difícil, por me amarem incondicionalmente e sempre acreditarem na minha capacidade. Às minhas irmãs, por todo incentivo e ajuda recebida, muitas vezes deixando seus compromissos de lado para me ajudarem a cumprir os meus. Aos meus sobrinhos, por encherem meu coração de felicidade e amor e por me inspirarem a querer ser um exemplo para eles. Aos meus padrinhos por sempre me acolherem tão bem em sua casa, a qual também posso chamar de minha, por toda a paciência e carinho recebido nesses anos, serei eternamente grato a vocês. Ao meu primo Eric, um irmão e parceiro que muitas vezes me fez companhia até tarde da noite, mesmo cansado, só para não me deixar sozinho e não me deixar desanimar. Amo muito vocês.

À pessoa que tornou esse sonho possível, simplesmente por acreditar e confiar em um rapaz, com desejo de estudar, se aperfeiçoar e de realizar pesquisas no âmbito da Educação Matemática. Um obrigado mais que especial à minha querida orientadora

Lourdes Maria Werle de Almeida. Seus ensinamentos me inspiram e me fazem querer ser um profissional melhor. O doutorado serviu para aumentar ainda mais minha admiração pela profissional que tu és.

À família GRUPEMMAT, pela amizade, apoio, conversas e discussões. Uma família com a qual eu aprendi, ensinei e compartilhei momentos de angústia e de descontração, de sonhos, de esperanças e de conquistas. Vocês acompanharam minha jornada e os momentos que compartilhamos me ajudaram a amadurecer e me tornar um profissional melhor. Tenho orgulho de dizer que faço parte desse grupo. Levo cada um de vocês no meu coração, agradecido por ter lhes conhecido e por tudo que aprendi com vocês. Em especial, gostaria de agradecer à Bárbara, minha irmãzinha de orientação, pelo companheirismo, pelas conversas e por toda a ajuda recebida. Graças à cumplicidade que construímos nos tornamos pesquisadores e pessoas melhores. Que tenhamos, ainda, muitos projetos juntos e muitas viagens! À Karina, meu anjo da guarda, que sempre me orientou em momentos que me senti perdido, pelo carinho e pelas conversas de descontração. À Ângela, pela amizade, pela torcida, pelas conversas e pelas caronas para termos mais conversas.

Aos professores Ana Paula dos Santos Malheiros, André Gustavo Oliveira da Silva, Jonei Cerqueira Barbosa e Magna Natália Marin Pires, componentes da banca, pelas valiosas considerações no exame de qualificação e na defesa. Suas contribuições tornaram meu trabalho melhor.

Aos alunos, sujeitos da pesquisa, pelos ricos dados produzidos, pela espontaneidade nas aulas e pelo envolvimento nas atividades. Minha dedicação às aulas, sem dúvida, foi motivada pela participação de vocês. Às professoras regentes e à equipe escolar que me acolheram tão bem e deram o suporte necessário para a realização da pesquisa.

Aos garis que se dispuseram a conversar com os alunos a respeito de seu trabalho, tornando mais interessante a discussão a respeito da coleta de lixo.

Aos professores da UEL que compartilharam suas valiosas experiências, não apenas dentro da sala de aula, mas também nos corredores e eventos que participamos.

Aos professores da graduação, em particular, à professora Veridiana, um exemplo de profissional, que acreditou em mim e me incentivou a seguir a carreira acadêmica.

Aos colegas de trabalho da UTFPR que me acolheram tão bem na instituição e desde os primeiros momentos me ajudaram com as tarefas, viabilizando a realização de meu doutoramento. Agradeço, especialmente, ao grupo de professores da Educação Matemática que aceitaram assumir minhas aulas para viabilizar meu afastamento. É uma satisfação fazer parte desse grupo.

Aos meus amigos Diego e Paulo Henrique, por me ouvirem nos momentos de desespero e angústia, pelos conselhos e pelos momentos de descontração quando eu mais precisava dar um tempo. Às minhas amigas Camila e Talita pelos momentos de diversão, pela força, incentivo e pelo companheirismo. Às minhas amigas da graduação Adriana, Bárbara, Gedilaine, Letícia e Paula que sempre acreditaram que eu era capaz e que ainda hoje mostram-se orgulhosas de mim. Vocês foram fundamental para eu chegar até aqui.

À minha amiga Kelly, a melhor, que me amparou nos momentos em que eu mais precisei, por estar sempre disposta a sair comigo, por me proporcionar inúmeros momentos de diversão, por me ouvir e me apoiar, por estar sempre presente, mesmo quando não estávamos tão perto.

E por fim, agradeço ao Julio, meu melhor amigo, companhia de todas as horas, meu companheiro fiel, embora também cheio de compromissos, sempre esteve me apoiando, incentivando, mesmo que por Skype. Porque quando eu estava triste, você estava comigo e porque quando eu compartilhava meus sonhos e anseios, você me apoiava e acreditava que eu era capaz. Você acreditou em mim, mesmo quando eu mesmo não acreditava. Para você meu muito obrigado! Para sempre *obrigado*.

A bem da verdade, eu não consigo expressar com palavras tamanha gratidão que sinto por vocês. Portanto, peço a Deus sempre que abençoe e ilumine seus passos e suas vidas, que Ele olhe sempre por vocês e que vocês sempre tenham alguém para lhes ajudar, assim como vocês me ajudaram.

Obrigado, obrigado, obrigado...

"A vida não me cansa
porque amanhã ainda tenho um bocado de ilusões
e um sonho doido para dar certo"

Ita Portugal

TORTOLA, Emerson. **Configurações de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2016. 304 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

Resumo

O uso da modelagem matemática como uma alternativa pedagógica para o ensino e a aprendizagem de matemática oferece aos alunos e professores a oportunidade de promover discussões e reflexões acerca de conceitos matemáticos a partir de seus usos na interpretação, análise e investigação de problemas provenientes de situações reais. Contudo, o uso da modelagem matemática parece ser ainda pouco explorado nas práticas associadas aos anos iniciais do Ensino Fundamental, deixando muitas questões em aberto com relação ao seu desenvolvimento. Nosso interesse é investigar o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, especificamente, que configurações elas podem assumir quando desenvolvidas por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental? Assim, estamos interessados em olhar para como alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental realizam ações características do procedimento que envolve o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Para esse olhar tomamos como ponto de partida as fases de uma atividade de modelagem matemática caracterizadas em Almeida, Silva e Vertuan (2012). Para isso, propomos a 5 turmas dos anos iniciais do Ensino Fundamental, 1º ao 5º ano, o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, que foi por nós observado e registrado. Os dados que constituem nossa pesquisa consistem nos diálogos e registros produzidos pelos alunos durante as atividades de modelagem e foram coletados por meio de áudio, vídeo, imagens e diário de campo do professor/pesquisador. Empreendemos sobre os dados uma análise qualitativa, fundamentados nos pressupostos e indicações da Análise de Conteúdo e embasados na literatura a respeito da modelagem matemática e nas considerações filosóficas de Ludwig Wittgenstein a respeito da linguagem. Os resultados indicam três configurações do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Essas configurações revelam especificidades relativas aos usos da linguagem, ao modo como os alunos lidam com os símbolos matemáticos, à caracterização do modelo matemático e à definição de temas de interesse em cada ano desse nível de escolaridade. Levando em consideração essas configurações, refletimos a respeito da identidade do fazer modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Palavras-Chave: Educação Matemática. Modelagem Matemática. Linguagem. Matemática. Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

TORTOLA, Emerson. **Mathematical Modelling configurations in the first years of Elementary School**. 2016. 304 f. Tesis (Doctoral in Teaching Science and Mathematics Education) –Londrina State University, Londrina, 2016.

Abstract

The use of mathematical modeling as a pedagogical alternative for the teaching and the learning of mathematics offers students and teachers the opportunity to promote discussions and reflections about mathematical concepts from their uses in the interpretation, analysis and investigation of problems arising from real situations. However, the use of mathematical modeling seems to be little explored in the practices associated with the early years of Elementary School, leaving many questions open with regard to its development. Our interest is to investigate the development of mathematical modeling activities, specifically, what configurations can they assume when developed by students in the early years of Elementary School? Thus, we are interested in looking at how students from the early years of Elementary School perform actions characteristic of the procedure that involves the development of mathematical modeling activities. For this look we take as a starting point the phases of a mathematical modeling activity characterized in Almeida, Silva and Vertuan (2012). For this, we propose to 5 classes from the first years of Elementary School, 1st to 5th Grade, the development of mathematical modeling activities, which we observed and recorded. The data that constitute our research consists of the dialogues and records produced by the students during the modeling activities and they were collected through audio, video, images and field diary of the teacher / researcher. We undertake on the data a qualitative analysis, based on the assumptions and indications of Content Analysis and based on literature on mathematical modeling and on the philosophical considerations of Ludwig Wittgenstein on language. The results indicate three configurations of the development of mathematical modeling activities. These configurations reveal specificities related to the uses of language, how students deal with mathematical symbols, characterization of the mathematical model and definition of topics of interest in each Grade of this level of education. Taking these configurations into account, we reflect on the identity of doing mathematical modeling in the early years of Elementary School.

Key-words: Mathematical Education. Mathematical Modeling. Language. Mathematics. Early Years of Primary School.

Lista de Figuras

Lista de Quadros

Sumário

Capítulo 1

A pesquisa e seus delineamentos

1.1 Uma Conversa Inicial

Pesquisar com modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental foi um desafio com o qual nos[1] deparamos ao olhar para as produções disponíveis a respeito da modelagem matemática na literatura – livros, artigos de congressos e de periódicos, teses e dissertações. E, mediante o considerável número de trabalhos que abordam a modelagem matemática no âmbito da Educação Matemática, que vem crescendo, tanto em nível nacional (SILVEIRA, 2007; BIEMBENGUT, 2009; MALHEIROS, 2012) quanto em nível internacional (STILLMAN; BLUM; BIEMBENGUT, 2015), observamos (TORTOLA; ALMEIDA, 2013), assim como já apontam alguns autores (STILLMAN, 1998; ENGLISH, 2003; ENGLISH; WATTERS, 2005; LUNA; ALVES, 2007; SILVA; KLÜBER, 2012), que há ainda poucos estudos e pesquisas a respeito da prática da modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Diante disso algumas inquietações surgiram e têm nos levado à reflexão de algumas questões, como: por que ainda há poucas pesquisas a respeito da modelagem matemática nesse contexto? Haveria alguma especificidade nos anos iniciais do Ensino Fundamental que causa estranheza a ponto de poucos pesquisadores se ocuparem com esse tema? Seria questionável a viabilidade do fazer modelagem matemática nas aulas dos anos iniciais do Ensino Fundamental? Afinal, o que sabem de matemática os alunos nesse período escolar que pode ajudá-los na solução de problemas provenientes de situações reais? Ou, ainda, como esses

[1] Refiro-me a “nós” pois considero a participação de minha orientadora na construção e no encaminhamento da pesquisa. Essa consideração se estende ao longo do texto, reservando apenas alguns momentos a que me refiro a atividades, particularmente, referentes a mim.

alunos usam a matemática para lidar com situações que se deparam em sua vida fora da escola?

Tais inquietações surgiram a partir de nossas experiências com a modelagem matemática por meio de estudos e pesquisas que temos desenvolvido recentemente (TORTOLA, 2012; TORTOLA; ALMEIDA, 2013; ALMEIDA; TORTOLA, 2014) e a partir da prática da modelagem matemática sob diferentes circunstâncias, seja como modeladores, professores ou orientadores em diferentes níveis de escolaridade. Além disso, pode-se acrescentar à lista a participação nas discussões engendradas em congressos e eventos da área[2], que ao oportunizar o diálogo entre pesquisadores, professores e estudantes da Educação Matemática, particularmente, da modelagem matemática, permitiu-nos observar uma ausência de debate quanto às práticas de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Nesse sentido, experiências vivenciadas no âmbito do Grupo de Pesquisa sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática (GRUPEMMAT)[3], da Universidade Estadual de Londrina, coordenado pela Professora e Pesquisadora Doutora Lourdes Maria Werle de Almeida, do qual participo há alguns anos sob sua orientação, contribuíram para a legitimação dessas inquietações e reflexões e nos encaminharam à realização desta pesquisa que, em linhas gerais, busca uma compreensão do fazer modelagem matemática como uma alternativa para as práticas pedagógicas associadas aos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Bicudo e Klüber (2011), ao discutirem as pesquisas a respeito da modelagem matemática no Brasil, apontam que, embora já exista uma caminhada no que se refere à produção a respeito da modelagem matemática, ela é ainda uma área em consolidação no âmbito da Educação Matemática e, portanto, "requer compreensão das concepções assumidas e das práticas educacionais desenvolvidas, solicitando um olhar filosófico sobre as pesquisas que são realizadas nessa abordagem de produção matemática e do ensino dessa ciência" (BICUDO; KLÜBER, 2011, p. 906).

---

[2] Eventos como: Encontro Paranaense de Educação Matemática (EPREM), Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática (EPMEM), Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (CNMEM), Conferência Internacional sobre Ensino de Modelagem Matemática e Aplicações (ICTMA).

[3] Nos encontros do grupo discutimos, entre outros temas, a modelagem matemática sob diferentes olhares e perspectivas nos diferentes níveis de escolaridade, o que tem oportunizado diálogos e reflexões sobre como levar a modelagem matemática aos alunos dos primeiros anos da Educação Básica.

Outros autores também abordam a modelagem matemática sob uma perspectiva filosófica (QUARTIERI, 2012; ALMEIDA, 2014), ou ainda, trazem a filosofia para provocar e/ou promover discussões e reflexões quanto à epistemologia associada à matemática – ou da própria filosofia –, por intermédio da modelagem matemática (LEVY; SANTO, 2006; KLÜBER, 2007; ENGLISH, 2013; MEERWALDT; BORROMEO FERRI; NEVERS, 2013).

English (2013), por exemplo, propõe a modelagem matemática como um meio de implementar a investigação filosófica no currículo de matemática. De acordo com a autora, a atividade de desenvolver modelos matemáticos é uma ferramenta poderosa e deveria constar entre os objetivos da Educação Matemática desde os primeiros anos escolares. Segundo a autora, o uso da investigação filosófica pelos alunos em suas experiências com a modelagem a partir de contextos pode contribuir para a aprendizagem matemática, favorecendo o compartilhamento e o questionamento das ideias e das criações uns dos outros.

Almeida (2014), por sua vez, faz uma interpretação filosófica da prática associada à modelagem matemática. A autora, pautada em uma perspectiva wittgensteiniana da filosofia da linguagem, tece argumentações a respeito da produção de significados durante uma atividade de modelagem matemática desenvolvida em dois contextos distintos e conclui que o encaminhamento da atividade conduz a significados que dizem respeito não apenas à matemática escolar, mas "adiciona significados específicos para a matemática, para o problema, e até mesmo para a própria modelagem matemática" (ALMEIDA, 2014, p. 111)[4].

Além disso, "a matemática é fonte constante de questionamentos que transbordam os seus limites e requerem um contexto propriamente filosófico para serem adequadamente tratados" (SILVA, 2007, p. 15). E, segundo Bicudo e Garnica (2011, p. 25), reflexões filosóficas nos conduzem a entendimentos "do conhecimento sobre o mundo, do cultural, das ciências, [...], da arte, do humano" etc. Particularmente, à filosofia associada à Educação Matemática "cabe a análise crítica e reflexiva das propostas e ações educacionais no tocante ao ensino e à aprendizagem da matemática nos diferentes contextos em que ocorrem" (BICUDO; GARNICA, 2011, p. 48).

Levando em consideração essas argumentações com relação às possibilidades de contribuições da filosofia para com a modelagem matemática, nesta pesquisa lançamos um

[4] Tradução de: [...] add specific meaning to mathematics, to the problem, and even mathematical modeling itself.

olhar filosófico sobre a problemática em questão, que sugere a investigação da prática da modelagem matemática associada aos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Para fundamentar esse olhar para a prática da modelagem matemática nos anos iniciais[5], buscamos nas considerações de Ludwig Wittgenstein, filósofo contemporâneo da linguagem, argumentos para subsidiar a compreensão pretendida nesta pesquisa. Essa opção se justifica por considerar, assim como argumenta Almeida (2014, p. 99)[6], que "olhar para o que aluno e professor fazem, e como eles o fazem durante o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática [...] nos conduz ao uso que nós fazemos da linguagem, da matemática, em tal desenvolvimento".

Nesse sentido, usar a filosofia da linguagem como lente para olhar para os encaminhamentos que alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental promovem para fazer modelagem matemática ajuda a lançar luz sobre as inquietações colocadas inicialmente e na definição e no delineamento da presente pesquisa.

1.2 ALGUMAS INQUIETAÇÕES, RUMO À UMA PESQUISA

É no âmago do desassossego da mente que surgem problemas interessantes, que valem a pena ser investigados. E é com esse pensamento que esse espaço é dedicado à discussão e reflexão das inquietações iniciais na tentativa de oferecer uma justificativa para a gênese desta pesquisa, de modo a clarificar como se deu sua construção e encaminhamento.

Primeiramente, a inquietação *por que ainda há poucas pesquisas a respeito da modelagem matemática nesse contexto?* revela uma lacuna[7] existente na literatura a respeito da modelagem matemática e surgiu com a constatação de que poucas pesquisas abordam essa "maneira" de fazer matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

---

[5] Na esperança de evitar que o texto torne-se repetitivo e sua leitura maçante, por vezes optamos por usar apenas a expressão anos iniciais para nos referir ao nível de escolaridade anos iniciais do Ensino Fundamental. Assim como fazemos com o termo modelagem, usado em alguns momentos para nos referir à modelagem matemática.

[6] Tradução de: Looking at what the student and the teacher do, and how they do it during the development of mathematical modeling activity […] addresses us to the use we do of language, of mathematics, in such development.

[7] Essa lacuna também foi observada por Silva e Klüber (2012) ao olharem para as pesquisas brasileiras sobre modelagem matemática na Educação Matemática.

É possível conjecturar que uma das razões para a existência dessa lacuna está associada ao interesse de pesquisa. De fato, o ato de pesquisar não é uma atividade neutra (MEKSENAS, 2002; GARNICA, 2004), ele vem revestido de interesses e concepções daquele que o realiza, "pode estar a serviço da reprodução ou da transformação social na qual o pesquisador está inserido" (MEKSENAS, 2002, p. 51). Como os pesquisadores, em geral, concentram-se nas universidades e mantêm sua prática de pesquisa voltada a seus interesses, essencialmente, em questões que permeiam suas atividades (LÜDKE, 2001), as pesquisas em modelagem matemática até então têm-se dedicado, principalmente, a compreender o uso da modelagem nos anos finais do Ensino Fundamental, no Ensino Médio e na Educação de Jovens e Adultos (SILVA; KLÜBER, 2012, NAZARÉ; SOUZA, 2015). Falta, portanto, uma política de incentivo profissional e governamental para a prática da pesquisa por professores da Educação Básica, particularmente, dos anos iniciais do Ensino Fundamental, que seriam os principais interessados nesse contexto (LÜDKE, 2001).

A segunda inquietação manifesta pela questão *haveria alguma especificidade nos anos iniciais do Ensino Fundamental que causa estranheza a ponto de poucos pesquisadores se ocuparem com esse tema?* sugere e procura por especificidades para a prática da modelagem matemática nos anos iniciais.

Em estudos anteriores (TORTOLA, 2012; ALMEIDA; TORTOLA; MERLI, 2012; ALMEIDA; TORTOLA, 2014) constatamos a linguagem como sendo uma dessas especificidades, concluindo que a linguagem tem um papel fundamental nas atividades de modelagem matemática, o de fornecer subsídios à construção de modelos, atividade que suscita diferentes usos da linguagem, em diferentes contextos, e que dá suporte para a aprendizagem da linguagem matemática (TORTOLA, 2012).

Nesta pesquisa temos a intenção de retomar essa discussão relacionada às especificidades e/ou particularidades que são manifestas por meio da linguagem e identificar outras a partir da prática da modelagem nos anos iniciais, a fim de elaborar compreensões acerca de como atividades de modelagem matemática configuram-se nesse contexto.

A terceira questão *seria questionável a viabilidade do fazer modelagem matemática nas aulas dos anos iniciais do Ensino Fundamental?* deve receber de imediato uma resposta negativa. Ainda que haja poucos relatos na literatura, não se pode dizer que a prática da modelagem matemática nos anos iniciais é inviável, ou que ela não ocorre, pois às vezes, mesmo que o professor não conheça modelagem, ele pode desenvolver atividades com seus alunos que se aproximam do que chamamos de modelagem, como indicam Silveira e Caldeira (2010).

Além disso, há estudos e pesquisas que se dedicam a refletir e a promover a prática da modelagem matemática nos anos iniciais. English (2003) argumenta que embora seja considerada uma atividade complexa para alunos desse nível de escolaridade, dado o suporte apropriado eles são capazes de engajarem-se em complexas investigações científicas e matemáticas, uma vez que os alunos nesse momento já têm condições para desenvolver uma atividade de modelagem matemática (ENGLISH; WATTERS, 2004).

Há, portanto, um esforço para afirmar a pertinência da modelagem matemática às práticas associadas aos anos iniciais do Ensino Fundamental. Abordar a matemática da forma como a modelagem matemática o faz é imperativo nas escolas, especialmente nos anos iniciais (SILVA; KLÜBER, 2014), como também o é abordar a própria modelagem matemática, considerando a formação[8] dos professores que atuam nesse nível de escolaridade e sua estrutura organizacional.

Várias pesquisas têm apontado para essa direção. English e Watters (2005) relatam que alunos de 8 anos justificaram suas escolhas e soluções por meio da redação de uma carta; Luna e Alves (2007) apresentam uma pesquisa em que alunos de 9 a 11 anos produziram um relatório com os conteúdos estudados e com reflexões a respeito do tema; Almeida e Tortola (2014) trabalharam com alunos de 8 a 9 anos que usaram estratégias numéricas para criar uma regra para expressar as relações envolvidas nas situações investigadas; Butcke e Tortola (2015), indicam que alunos de 7 a 8 anos forneceram explicações a respeito de um fenômeno por meio de desenhos e textos.

[8] No Brasil, os professores dos anos iniciais são frequentemente chamados de professores polivalentes, uma vez que possuem habilitação para o exercício da docência em várias disciplinas, inclusive a matemática, “adquirida em uma formação de nível médio, o antigo Curso de Habilitação ao Magistério, acrescida [...] de uma formação universitária predominantemente em Pedagogia ou Curso Normal Superior” (GINO; GOMES, 2014, p. 472). Contudo, isso faz com que a carga horária destinada à discussão de questões matemáticas seja reduzida (NACARATO; MENGALI; PASSOS, 2011). E, nesse sentido, sobra pouco tempo para o estudo de alternativas pedagógicas para o ensino e a aprendizagem de matemática, como é a modelagem matemática.

De acordo com English (2003, p. 4)[9] a modelagem matemática, nesse contexto, exige que importantes processos matemáticos que são subutilizados no currículo de matemática sejam desenvolvidos, tais como “construir, explicar, justificar, prever, conjecturar e representar, junto com quantificar, coordenar, organizar e representar dados”, além de requerer que os alunos trabalhem em projetos de modo colaborativo em que ações como planejar, monitorar, avaliar e comunicar resultados são essenciais. Tais exigências levam English (2003) a defender não apenas a viabilidade, mas a necessidade da modelagem matemática nos primeiros anos escolares, em que os alunos podem desenvolver componentes associadas a essa prática, isto é,

> [...] eles precisam reconhecer a utilidade dos modelos matemáticos no mundo atual, desenvolver e usar modelos para interpretar e explicar sistemas estruturalmente complexos, desenvolver fluência representacional, raciocinar matematicamente de diversas maneiras e utilizar equipamentos e recursos sofisticados (ENGLISH, 2003, p. 4)[10].

Outros autores também defendem a inserção da modelagem matemática desde os primeiros anos escolares, considerando suas potenciais contribuições para o ensino e a aprendizagem de matemática. Silva e Klüber (2014, p. 21), por exemplo, argumentam que “a inserção da modelagem nos anos iniciais pode favorecer a criação de espaços dialógicos e interdisciplinares”; Malheiros (2014) considera a modelagem como um caminho para que os objetivos enunciados nos documentos curriculares para o ensino da matemática sejam alcançados, defendendo inclusive a inserção da modelagem matemática na formação de futuros professores para esse nível de escolaridade. Burak e Martins (2015), por sua vez, sinalizam a necessidade de discussões a respeito do tema, de modo a refletir estratégias que possam favorecer o pensar e o fazer matemático.

Se, de fato, é a modelagem uma alternativa viável para as práticas associadas aos anos iniciais, surge a quarta inquietação: *Afinal, o que sabem de matemática os alunos nesse período escolar que pode ajudá-los na solução de problemas provenientes de situações reais? Ou, ainda, como esses alunos usam a matemática para lidar com situações que se deparam em sua vida fora da escola?*

---

[9] Tradução de: [...] constructing, explaining, justifying, predicting, conjecturing and representing, together with quantifying, coordinating, organising, and representing data.

[10] Tradução de: [...] they need to recognise the usefulness of models in today’s world, to develop and use models to interpret and explain structurally complex systems, to develop representational fluency, to reason in mathematically diverse ways, and to use sophisticated equipment and resources.

"Se compreendermos que as crianças não precisam, primeiramente, aprender as letras para só depois aprenderem números, formas e outros entes matemáticos" (MORETTI; SOUZA, 2015, p. 16), será coerente afirmar que o aluno "antes mesmo de sua inserção na escola, já possui contato com a matemática" (SILVA; KLÜBER, 2014, p. 10). "São conhecimentos matemáticos informais que estão presentes no seu dia a dia, nas brincadeiras e nas necessidades em lidar com as situações que convivem em família" (MENDES; SANTOS FILHO; PIRES, 2011, p. 7).

Embora os alunos dos anos iniciais estejam no início de sua vida escolar, diferentes situações de suas vidas os levam a conhecer, ainda que informalmente, a matemática, a vivenciar problemas e, a seus modos, tentar solucioná-los (SILVA; KLÜBER, 2014). Por outro lado, é no ambiente escolar que os alunos têm acesso ao conhecimento sistematizado, têm a oportunidade de produzir novos conhecimentos, de criar novas estratégias para lidar com diferentes situações e de se preparar para o mercado de trabalho (BRASIL, 2013). "Esses conhecimentos devem ser levados em conta pelo professor ao organizar sua proposta de trabalho para a sala de aula" (MENDES; SANTOS FILHO; PIRES, 2011, p. 7). Integrar tais conhecimentos pode ser um caminho para a aprendizagem matemática dos alunos, auxiliando-os na solução de problemas de naturezas diversas (AUSUBEL, 2000).

Uma maneira de promover essa integração é recorrer ao uso da modelagem matemática (BORSSOI, 2004; ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012), que ao mesmo tempo que trata de problemas advindos de situações reais, requer dos alunos o uso da matemática para resolvê-los, o que pode se configurar como um meio de levar os alunos a experienciar novos usos da matemática, de sua linguagem.

Nesse sentido, Moretti e Souza (2015, p. 10) parecem ter razão ao afirmar que "ensinar matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental consiste em frequente desafio para os professores, tanto como é desafiante o ensino da língua materna", pois a linguagem matemática envolve não só signos próprios, mas toda uma gramática que orienta seus usos e nos insere em uma prática, em uma atividade (WITTGENSTEIN, 2012).

Com base nessas reflexões e nas argumentações apresentadas, pode-se alegar que essas inquietações sugerem diferentes encaminhamentos para as atividades de modelagem matemática nos diferentes níveis de escolaridade. E, considerando a lacuna observada e as especificidades apontadas à respeito da prática de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, essas inquietações sinalizam a necessidade de uma pesquisa que busque por compreensões do fazer modelagem matemática nesse contexto, isto é, de como os alunos dos anos iniciais encaminham essas atividades, que configurações elas assumem e como eles as compreendem.

1.3 Definições da pesquisa

Muitas são as contribuições, muitos são os autores. E, apesar dos avanços que hoje podemos apontar no que diz respeito à modelagem matemática no âmbito da Educação Matemática, as reflexões que viabilizaram esses avanços também deixaram dúvidas, questões a serem investigadas, quem sabe respondidas, mas, sobretudo, que precisam ser discutidas.

Nossa pesquisa se localiza entre uma dessas questões, que intenciona investigar a prática da modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

> Embora a modelagem matemática seja geralmente associada a cursos terciários [Ensino Superior] ou, de forma crescente, com o nível de educação secundário [Ensino Médio], uma exposição inicial das ideias essenciais de modelagem pode fornecer uma base sólida para aplicar matemática competentemente já no nível da escola primária [anos iniciais do Ensino Fundamental] (DOOREN et al., 2011, p. 47-48)[11].

English (2003) argumenta que mesmo os períodos de reforma, que iluminaram muitos aspectos da matemática nos anos iniciais, parecem não ter sido suficientes para fornecer aos alunos acesso a ideias fundamentais e processos-chave que eles precisam para lidar com situações complexas que vão para além da escola. A modelagem matemática, segundo a autora, é um veículo capaz de conduzir os alunos a desenvolver tais ideias e processos.

Diante dessas argumentações, a pergunta que ecoa por detrás dessas ideias é: se os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental têm condições de fazer modelagem matemática (ENGLISH, 2003), se a estrutura organizacional e a formação dos professores podem favorecer a promoção de discussões em que diferentes conhecimentos são mobilizados para a

[11] Tradução de: Although mathematical modelling is generally associated with courses at the tertiary or, to an increasing extent, secondary level of education, an early exposure to essential modelling ideas can provide a solid base for competently applying mathematics even at the primary school level.

resolução de um problema (MORETTI; SOUZA, 2015), como requer esse tipo de atividade (BASSANEZI, 2004), por que, então, a prática da modelagem matemática tem chegado tão timidamente às salas de aula dos anos iniciais (ENGLISH, 2003)?

De fato, “cada atividade de modelagem matemática traz consigo conceitos, linguagens, problemáticas e interesses daqueles que a desenvolvem” (ALMEIDA; SOUSA; TORTOLA, 2015, p. 3). Diferentes sujeitos e, por conseguinte, diferentes níveis de escolaridade podem conduzir a diferentes encaminhamentos para a atividade, diferentes modos de ver, como sugere Wittgenstein (2012).

“Nesse contexto a modelagem matemática viabiliza uma leitura, ou até mesmo uma interpretação, ainda que parcial e idiossincrática, de fenômenos não matemáticos com o apoio da matemática” (ALMEIDA; SOUSA; TORTOLA, 2015, p. 3). Ou seja, trata-se de uma interpretação dos sujeitos que realizam a modelagem, a partir de seus conhecimentos de matemática e de mundo.

Sob essa perspectiva, identificamos a necessidade de lançar um olhar para o uso da modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, de modo a compreender como ocorrem atividades dessa natureza nesse período escolar. E considerando o papel da linguagem em atividades de modelagem matemática, optamos por fundamentar nosso olhar em uma perspectiva filosófica de Wittgenstein, aquela em que ele considera a linguagem como uma atividade, cujos significados são produzidos nos seus usos, imersos em seus respectivos contextos.

Com esses vislumbres em mente, nossa pesquisa é orientada pela questão: *Que configurações podem assumir atividades de modelagem matemática desenvolvidas por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental?*

Quando nos propomos investigar *configurações* de modelagem matemática sinalizamos nossa intenção em conhecer a forma que tomam atividades de modelagem quando desenvolvidas por alunos dos anos iniciais e identificar características que essas atividades apresentam. Assim, estamos interessados em olhar para como alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental realizam ações características do procedimento que envolve o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. Para isso, tomamos como ponto de partida as fases de uma atividade de modelagem matemática caracterizadas em Almeida, Silva e Vertuan (2012).

Para isso, optamos por desenvolver atividades de modelagem com diferentes turmas dos anos iniciais do Ensino Fundamental, nas quais observamos os caminhos, as abordagens, os encaminhamentos matemáticos adotados por alunos dos anos iniciais ao desenvolverem atividades de modelagem matemática, suas ações, suas escolhas, suas argumentações, o modo como eles lidam com a matemática, com sua linguagem, e como eles entendem esse tipo de atividade e seu desenvolvimento, de modo a delinear que configurações de modelagem matemática emergem nessa prática.

1.4 O CAMINHAR DA PESQUISA: OS PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS ADOTADOS

Delinear configurações de modelagem matemática a partir de sua prática nos anos iniciais do Ensino Fundamental requer um olhar de perto, um olhar para o fazer dos alunos, para suas ações, suas escolhas, suas argumentações, enfim, para seus encaminhamentos.

Nesse sentido, optamos pela realização de observações diretas no lócus da investigação, as quais têm caráter de observações participantes, de uma pesquisa de intervenção, isto é, eu, na qualidade de pesquisador, assumi durante um certo período de tempo o papel de professor.

Desempenhar simultaneamente os papéis de professor e pesquisador constituiu um desafio com o qual assumi a responsabilidade de lidar ao optar por realizar uma pesquisa de intervenção no âmbito da Educação Matemática. Por mais que minha intenção, como pesquisador, foi me inserir no ambiente da sala de aula, particularmente para a coleta de dados para minha pesquisa, eu tive consciência de que meus resultados só seriam confiáveis e fidedignos se eu desempenhasse o mais fielmente possível – dentro de minhas condições – o papel de professor, sem, claro, me despir de minhas intenções como pesquisador.

Desse modo, minhas preocupações durante o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática com os alunos dos anos iniciais foram: Como fazer para envolvê-los no desenvolvimento das atividades? Eles estão aprendendo? O que estão aprendendo? Estão sendo trabalhados e sistematizados conteúdos indicados no currículo, particularmente, os indicados para aquele ano escolar? Como posso orientar meus alunos de modo a promover aprendizagem matemática? Enfim, preocupações que cabem a qualquer professor interessado na aprendizagem de seus alunos e comprometido com sua profissão.

Foi sob essa perspectiva, que nossas intenções de pesquisa nos direcionaram para a realização de uma pesquisa de campo sob uma abordagem qualitativa.

Embora o entendimento de pesquisa qualitativa esteja sempre em movimento (BORBA, 2004), Garnica (1997, p. 111) argumenta que nessa abordagem a pesquisa se configura como

> uma trajetória [...] em torno do que se deseja compreender, não se preocupando única e/ou aprioristicamente com princípios, leis e generalizações, mas voltando o olhar à qualidade, aos elementos que sejam significativos para o observador-investigador. Essa "compreensão", por sua vez, não está ligada estritamente ao racional, mas é tida como uma capacidade própria do homem, imerso num contexto que constrói e do qual é parte ativa.

É nesse contexto que diversos autores afirmam que não há neutralidade no olhar do pesquisador (BOGDAN; BIKLEN, 1994; GARNICA, 1997; LÜDKE; ANDRÉ, 2013), pois "ele atribui significados, seleciona o que do mundo quer conhecer, interage com o conhecido e se dispõe a comunicá-lo. Também não haverá 'conclusões', mas uma 'construção de resultados', posto que compreensões, não sendo encarceráveis, nunca serão definitivas" (GARNICA, 1997, p. 111).

A pesquisa é, assim, uma forma de descortinar o mundo (GARNICA, 1997).

No caso desta pesquisa, o contexto "construído" pelo pesquisador diz respeito ao desenvolvimento de atividades de modelagem matemática com alunos de cinco turmas dos anos iniciais do Ensino Fundamental, turmas de 1º ao 5º ano, com idades predominantemente pertencentes à faixa etária de 6 a 10 anos, que foram assim escolhidas na tentativa de prezar pela representatividade desse nível de escolaridade e a fim de podermos observar as especificidades não só dos anos iniciais do Ensino Fundamental como um todo, mas de cada ano escolar mediante o fazer modelagem matemática.

Entretanto, para se chegar a essa definição, um longo caminho foi percorrido e diante dos inúmeros caminhos para os quais a pesquisa poderia ser direcionada, uma descrição do caminho escolhido precisa ser realizada. Esta seção, portanto, é dedicada a expor as opções e justificativas metodológicas adotadas e indica os rumos tomados pela pesquisa.

Antes de prosseguir, porém, salientamos que embora o tipo de pesquisa adotada esteja alinhada a orientações do que comumente chamamos de pesquisa qualitativa, “isso não quer dizer que se deva ignorar qualquer dado do tipo quantitativo ou mesmo qualquer pesquisa que seja feita baseada em outra noção de conhecimento” (BORBA, 2004, p. 2). Porém, ainda que dados dessa natureza sejam recolhidos, é preciso assumir o compromisso de analisá-los criticamente, não acreditando que os números falam por si, mas questionando o que eles revelam para a pesquisa (BOGDAN; BIKLEN, 1994).

A seguir fazemos uma exposição do caminhar da pesquisa, detalhando as ações empreendidas. Organizamos essa exposição em sete etapas, as quais não ocorreram de modo linear, mas conforme foram necessárias. Assim, uma etapa não termina necessariamente quando outra começa.

1ª Etapa: Estudo bibliográfico

A primeira etapa de uma pesquisa é geralmente o estudo de bibliografias, elas nos permitem conhecer o mundo e elaborar compreensões a respeito dele. Nessa linha de raciocínio um aspecto importante na realização de uma pesquisa é a familiaridade com o tema que se deseja pesquisar, o conhecimento da prática, experiências que por meio de reflexões direcionam o sujeito-pesquisador a olhar para as situações não apenas a partir dos olhares de outros, mas sob o seu olhar. Sua visão de mundo. Sua visão dos fenômenos.

Conhecer... é o conhecimento que nos orienta, que nos leva a perceber sutilezas por outros não percebidas. É o que nos abre os olhos para identificar problemas nas atividades que nos rodeiam e querer investigá-las, que nos provocam inquietações que nos movem em busca de compreensões, de novos conhecimentos. É o estudo de bibliografias que nos fornece subsídios para fundamentar o problema de pesquisa e justificar a relevância de sua investigação e, uma vez definida a pesquisa, a busca em livros, teses, dissertações, artigos de congressos e de periódicos é um primeiro passo para elaborar compreensões acerca do problema e traçar caminhos pelos quais podemos obter soluções.

Nesse sentido, buscamos na literatura bibliografias que oferecessem suporte a respeito da modelagem matemática, da modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental e da filosofia da linguagem na perspectiva de Wittgenstein. Essa busca resultou em compreensões que constituem o referencial teórico que orientou nossas análises. Essa etapa se estendeu por toda a pesquisa.

2ª Etapa: Pedido de autorização para a coleta de dados

Optamos por desenvolver a pesquisa em uma escola pública e municipal da região Centro-Ocidental do Estado do Paraná – Brasil. Essa opção se justifica por ser uma escola em que já atuei como professor e, desse modo, eu não era um desconhecido para a equipe escolar. As devidas providências foram tomadas para que a realização da pesquisa fosse possível. A fim de respeitar o compromisso com a ética profissional e de pesquisa elaboramos documentos com um pedido de autorização que foram entregues às autoridades competentes. Dois ofícios foram elaborados, um deles entregue à Secretaria Municipal de Educação da cidade (Apêndice A) e o outro à direção da Escola em que foi desenvolvida a pesquisa (Apêndice B).

Além disso, obtivemos também autorizações assinadas pelos pais dos alunos para que eles pudessem participar da pesquisa e para que as aulas pudessem ser registradas. As autorizações foram disponibilizadas pela escola (modelo disponível no Anexo A), que as recolhem todo início de ano para o desenvolvimento de pesquisas.

3ª Etapa: Observação de aulas para conhecimento das turmas

Com as devidas autorizações, solicitamos à diretoria da escola que disponibilizasse para acompanhamento cinco turmas, uma de cada série, preferencialmente com diferentes professores. Em uma reunião foram expostos aos professores da escola nossos interesses de pesquisa e as ações planejadas e deixamos que eles decidissem quais turmas participariam da pesquisa. Assim, três turmas foram do período matutino, 1º, 3º e 4º ano, e duas turmas do período vespertino, 2º e 5º ano. Definidas as turmas, convidamos suas professoras regentes para que participassem da coleta de dados, deixando-as à vontade para participarem nas discussões, ou se preferissem, apenas observassem. As cinco professoras das turmas aceitaram o convite, cada uma se envolvendo à sua maneira.

Ao todo, 118 alunos atuaram como sujeitos da pesquisa por um período aproximado de três meses: 23 alunos do 1º ano – idade predominante: 6 anos; 21 alunos do 2º ano – idade predominante: 7 anos; 26 alunos do 3º ano – idade predominante: 8 anos; 31 alunos do 4º ano – idade predominante: 9 anos; e 17 alunos do 5º ano – idade predominante: 10 anos. A primeira ação foi a observação de algumas aulas nessas turmas com a finalidade de conhecer os alunos, suas atividades e seus interesses e, também, para que os alunos se familiarizassem comigo, não como um pesquisador, mas como um novo professor. Para isso, fui me inserindo em suas atividades, auxiliando-os em suas tarefas. Contudo, a aceitação dos alunos foi muito boa e não demorou muito para que eu pudesse iniciar a coleta de dados.

4ª Etapa: Desenvolvimento das atividades com os alunos

À cada turma foi proposto o desenvolvimento de algumas atividades de modelagem matemática, sob a orientação do pesquisador – nesse momento atuando como professor[12]. O desenvolvimento das atividades de modelagem matemática com as turmas foi organizado em conformidade com os 3 momentos de familiarização, sugeridos por Almeida e Dias (2004).

1º momento: o professor propõe aos alunos um tema, não necessariamente matemático, com um problema formulado e cujos dados necessários para sua resolução são disponibilizados por meio de algum material, seja um texto, um vídeo, uma reportagem etc. Fica a cargo dos alunos articular as informações, selecionar as variáveis, formular hipóteses e realizar simplificações com vistas a obter uma resposta para o problema, que será apresentada por meio do uso de uma estrutura matemática, o modelo matemático. Esse, deverá ser validado pela turma, considerando as informações acerca do tema investigado. Essas ações deverão ser orientadas e avaliadas pelo professor.

2º momento: os alunos de posse de um problema, geralmente fornecido pelo professor, devem coletar dados, ou complementar a coleta, e seguir os mesmos procedimentos elencados no momento anterior – seleção de variáveis, formulação de hipóteses, simplificações e produção de (ao menos) um modelo matemático considerado válido para a situação.

[12] De agora em diante, referimo-nos ao pesquisador como professor e às professoras da turma como professoras regentes.

3º momento: os alunos são nesse momento, sob supervisão e orientação do professor, os responsáveis pela atividade de modelagem matemática. A escolha do tema fica a critério dos alunos – embora muitos autores consideram que a responsabilidade dessa escolha possa também ser compartilhada com o professor –, bem como as ações já mencionadas nos momentos anteriores, isto é, a formulação do problema, o levantamento de hipóteses, a seleção de variáveis e as simplificações devem ser providenciadas com a intenção de produzir um modelo matemático apropriado para a situação, findando com a comunicação dos resultados obtidos na investigação para a comunidade escolar – colegas de classe e/ou outras turmas e/ou pais ou responsáveis e comunidade em geral envolvida com a escola.

Esses momentos não devem entendidos como etapas engessadas que devem ser seguidas à risca, mas como um *continuum* de ações que oferece aos alunos a oportunidade de, atividade a atividade, familiarizarem-se com os procedimentos do fazer modelagem matemática, conquistando a cada momento mais autonomia e habilidades com relação a esse fazer, o que, segundo Almeida e Dias (2004), pode viabilizar a inserção de atividades de modelagem matemática em sala de aula.

As atividades desenvolvidas com os alunos de todas as turmas se configuram como atividades de primeiro e de segundo momento de familiarização com a modelagem matemática e tiveram os temas escolhidos pelo professor com base nas observações realizadas, em assuntos atuais no momento da coleta de dados e em temas geralmente abordados nos anos iniciais. As informações disponibilizadas aos alunos, bem como os materiais utilizados em cada atividade, foram discutidos com antecedência em reuniões do GRUPEMMAT.

As atividades referentes ao terceiro momento tiveram os temas escolhidos pelos alunos, que partilharam com o professor a responsabilidade pela coleta de dados e informações. Esse momento configurou-se como uma oportunidade de inserção dos alunos em atividades de pesquisa, sendo para alguns o primeiro contato com esse tipo de atividade.

As temáticas das atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos alunos foram:

- Atividade 1: Crescimento das unhas

Nessa atividade os alunos estudaram como se dá o crescimento das unhas com o passar dos meses e, mediante esse comportamento, determinaram de quanto em quanto tempo eles devem cortar suas unhas.

- Atividade 2: Desafio do balde de gelo

Os alunos, inspirados no desafio viral que rolou pela internet no ano de 2014, calcularam quanto de água foi ou seria desperdiçada, aproximadamente, em algumas situações e quantos dias todos eles levariam para participar do desafio, de acordo com suas regras.

- Atividade 3: Coleta de lixo

A partir de uma palestra com dois garis, os alunos estudaram diferentes problemas associados ao tema, desde qual caminho indicariam para os lixeiros fazer a coleta de lixo, até estimar a quantidade de lixo produzida na sua cidade, por habitante e nas suas casas.

- Atividade 4: Tema de escolha dos alunos

Neste momento, os alunos tiveram a oportunidade de escolher temas segundo seus interesses, curiosidades e/ou que ocupam um lugar em suas atividades. A escolha contemplou temas como: neve, animais, recordes mundiais, evolução do homem, sono, cabelo, futebol e plantas.

5ª Etapa: Coleta de dados

Esta etapa ocorreu junto à etapa anterior e contempla a gravação em áudio e em vídeo dos encontros em que as atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas pelos alunos, bem como registros fotográficos das atividades desenvolvidas. A coleta de dados iniciou em setembro de 2015 e foi finalizada em novembro do mesmo ano.

Durante o desenvolvimento das atividades, as professoras regentes que optaram por ficar na sala foram orientadas, principalmente, para não fornecerem respostas de antemão. Os alunos foram organizados em grupos, em alguns momentos formados por 4 alunos, outros por 2 alunos e algumas vezes o grupo foi constituído pela sala toda. Isso porque, ainda que em grupos, em vários momentos as discussões envolviam todos os alunos.

Os instrumentos utilizados na coleta de dados foram: gravadores de áudio, câmera filmadora, câmera fotográfica, diário de campo do pesquisador e produções escritas dos alunos. Outros materiais também foram utilizados para o desenvolvimento das atividades, em conformidade com as necessidades de cada turma e de cada situação e problema definidos para investigação, dentre os quais, citamos: notebook, projetor multimídia, folhas com informações a respeito do tema da atividade, folhas de sulfite em branco para anotações, quadro, giz, lápis, borracha, caneta, lápis de cor, tesoura, cola, fita métrica, balde de água, material dourado, E.V.A., régua, folha quadriculada, folha milimetrada etc.

Ao final do desenvolvimento das atividades correspondentes ao primeiro e ao segundo momento de familiarização com o fazer modelagem matemática (ALMEIDA; DIAS, 2004), alguns questionamentos foram feitos aos alunos:

1) *Vocês estão gostando das atividades? Estão aprendendo? O que estão aprendendo?*
2) *Essas atividades são como outras que vocês costumam fazer em sala de aula? Se não, o que há de diferente?*
3) *Descreva como são as atividades que desenvolvemos.*
4) *Há algum tema que vocês gostariam de estudar?*

As respostas a essas questões forneceram uma visão geral do que os alunos estavam pensando a respeito das atividades e indícios de seus entendimentos a respeito de como se faz modelagem matemática. Serviram também como ponto de partida para o desenvolvimento das atividades de terceiro momento, cujos temas foram escolhidos pelos alunos. Apenas as respostas para a questão 3 foram registradas pelos alunos. Algumas turmas anotaram em folhas de papel e entregaram, outras registraram no quadro com o auxílio do professor. Na turma do 4º ano os alunos apresentaram dificuldades para responder essa questão e para ajudá-los foi proposta uma questão auxiliar: *Escolha uma das atividades desenvolvidas e fale a seu respeito*. Depois pedimos a eles que pensassem como tal atividade foi desenvolvida, que pensassem nas outras atividades e respondessem, por fim, a questão 3.

Os temas escolhidos pelos alunos foram: peixes e neve no 1º ano; joaninha e tigres no 2º ano; recordes mundiais no 3º ano; animais em extinção, evolução do homem e sono, no 4º ano; e futebol, animais de estimação, crescimento das árvores e crescimento dos cabelos no 5º ano. Os alunos foram questionados a respeito do porquê da escolha de tais temas e as respostas, de modo geral, indicaram interesse e/ou curiosidade como justificativa. Para o desenvolvimento dessas atividades os alunos foram agrupados segundo seus interesses e foram auxiliados pelo professor e pelas professoras regentes no caso do 1º e 2º ano.

Após o desenvolvimento dessas atividades, novamente os questionamentos a respeito do que eles aprenderam e como são as atividades que eles desenvolveram foram realizados. Dessa vez, os registros foram realizados no quadro com o auxílio do professor e resultou em uma lista de características do fazer modelagem matemática apontadas pelos alunos.

6ª Etapa: Análise dos dados

Com a intenção de identificar *que configurações podem assumir atividades de modelagem matemática desenvolvidas por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental*, os dados para análise foram constituídos pelos diálogos registrados durante o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, provenientes das discussões a respeito delas, pelos registros produzidos pelos alunos e pelas imagens registradas nos vídeos e fotografias.

Para análise dos dados, seguimos princípios e orientações metodológicas da análise de conteúdo, usando como referências Bardin (2011) e Moraes (1999).

De acordo com Bardin (2011, p. 15), a análise de conteúdo é "um conjunto de instrumentos metodológicos cada vez mais sutis em constante aperfeiçoamento, que se aplicam a 'discursos' (conteúdos e continentes) extremamente diversificados".

> [...] constitui uma metodologia de pesquisa usada para descrever e interpretar o conteúdo de toda classe de documentos e textos. Essa análise, conduzindo a descrições sistemáticas, qualitativas ou quantitativas, ajuda a reinterpretar as mensagens e a atingir uma compreensão de seus significados num nível que vai além de uma leitura comum (MORAES, 1999, p. 9).

Isto é, ela nos permite, desde o momento da coleta de dados, interpretar as informações obtidas e, sistematicamente, conduz o pesquisador a uma imersão nos dados, fornecendo-lhe interpretações que vão além do que está explícito, interpretações que, se analisadas minuciosamente e exaustivamente, podem se consolidar em compreensões.

Vale salientar, assim como afirma Moraes (1999), que os "discursos" podem ser analisados sob diferentes perspectivas e, de certo modo, essa análise é uma interpretação pessoal do pesquisador, é sua percepção dos dados conforme seus interesses de pesquisa. Nesse sentido, como argumenta o autor, a pesquisa precisa de uma clara explicitação de seus objetivos.

> O contexto dentro do qual se analisam os dados deve ser explicitado em qualquer análise de conteúdo. Embora os dados estejam expressos diretamente no texto, o contexto precisa ser reconstruído pelo pesquisador. Isto estabelece certos limites. Não é possível incluir, nessa reconstrução, todas as condições que coexistem, precedem ou sucedem a mensagem, no tempo e no espaço. Não existem limites lógicos para delimitar o contexto da análise. Isto vai depender do pesquisador, da disciplina e dos objetivos propostos para a investigação, além da natureza dos materiais sob análise (MORAES, 1999, p. 5).

Esse contexto, explicitado por nós no item anterior referente à coleta de dados, nos encaminha para a análise dos dados. Com base em Bardin (2011), os dados foram inicialmente submetidos a uma leitura flutuante, a partir da qual formulamos nossas primeiras impressões a respeito das atividades. Os registros e diálogos referentes ao desenvolvimento das atividades de modelagem, particularmente aqueles que apresentaram indicativos do modo como os alunos as desenvolveram, as entenderam e de como eles lidaram com a matemática que surgiu, foram selecionados para constituir o *corpus* da pesquisa – conjunto de materiais a ser analisado. Os dados selecionados foram fragmentados em unidades de análise, codificados e agrupados segundo características que se revelaram comuns ou semelhantes. Recorremos então a argumentos teóricos que sustentassem nossos agrupamentos como categorias emergentes. Essas categorias foram cuidadosamente explicadas e exemplificadas fazendo citações diretas dos dados originais (MORAES, 1999). Por fim, um olhar global foi lançado sobre as categorias, de modo a compreender sua construção e discutir suas implicações.

Outros detalhes e informações são apontados no Capítulo 4, no momento da análise.

7ª Etapa: Redação da tese

Após uma longa jornada, chegamos à última etapa, a redação do texto que constitui a tese. Neste texto são expressos: parte de nossas experiências e reflexões, que tivemos ao longo do caminho; conhecimentos que esperamos contribuir para a consolidação da modelagem matemática como área de pesquisa e como prática efetiva nos anos iniciais do Ensino Fundamental. É claro que muitas discussões ainda devem surgir, mas o que apresentamos aqui é resultado de um olhar lançado para a problemática, o nosso olhar.

Mediante essas etapas, apresentamos na sequência a estrutura do texto que constitui este relatório de pesquisa.

1.5 O QUE VEM ADIANTE?

A estrutura da tese está organizada em cinco capítulos: um capítulo introdutório, dois capítulos teóricos, um capítulo analítico e um capítulo com reflexões e construção de resultados. Prosseguem esses capítulos as referências, apêndices e anexos.

O capítulo 1 "A pesquisa e seus delineamentos" apresenta por meio de uma conversa inicial o desafio de desenvolver uma pesquisa a respeito da modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental e transformá-la em uma tese. Contextualiza a pesquisa desenvolvida, justifica a opção pelo tema e argumenta pela necessidade de sua investigação. Além disso, apresenta as opções e justificativas metodológicas e descreve os encaminhamentos da pesquisa.

O capítulo 2 "Modelagem Matemática: práticas e possibilidades" traz entendimentos sobre o fazer modelagem matemática a partir de olhares de diferentes autores e pesquisadores. Discute questões associadas à modelagem matemática como um meio de fazer matemática e à sua prática no âmbito da Educação Matemática. Uma apresentação geral do procedimento envolvido em atividades de modelagem matemática é realizada e um (re)pensar a respeito de suas práticas é proposto. Nesse contexto, o capítulo promove discussões e reflexões acerca da prática de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Argumentações são tecidas no sentido de justificar o porquê pesquisar modelagem matemática nessa fase escolar e um panorama geral a respeito das pesquisas envolvendo esse tema é apresentado.

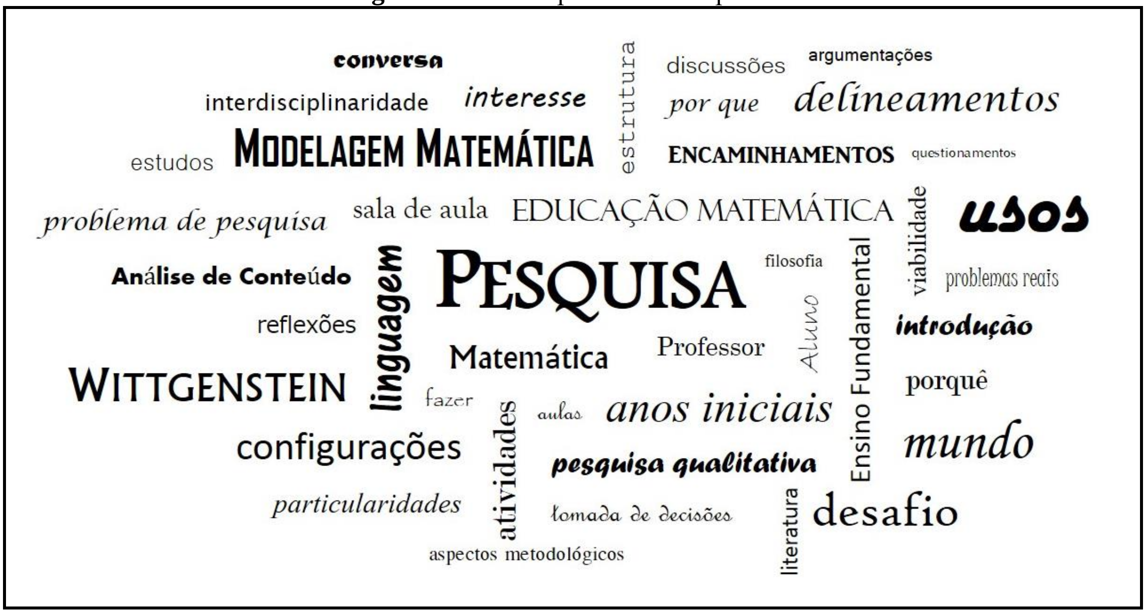
O capítulo 3 "Linguagem e Linguagem Matemática: a perspectiva filosófica de Wittgenstein" apresenta considerações a respeito de linguagem e linguagem matemática sob uma perspectiva filosófica wittgensteiniana. A ideia de *jogo de linguagem*, que fundamenta essa perspectiva, orienta o olhar para a linguagem, matemática e mundo e nos fornece argumentos para compreender como os alunos fazem modelagem matemática nos anos iniciais e para fomentar a prática de modelagem nesse contexto.

O capítulo 4 “O Fazer Modelagem Matemática nos Anos Iniciais: uma análise dos encaminhamentos dos alunos” apresenta as atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos alunos e as análises estruturadas a partir de dados associados a elas com vistas à questão de pesquisa. É nesse capítulo que são apresentadas as categorias emergentes que indicam como os alunos dos anos iniciais fazem modelagem matemática, que entendimentos eles produzem acerca desse tipo de atividade e como eles lidam com a matemática e com sua linguagem nesse contexto.

Por fim, o capítulo 5, “ Discussão e construção de resultados: a modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental” tece reflexões a respeito da pesquisa, constrói conclusões a partir da investigação realizada e faz apontamentos com relação à problemática definida. Sinaliza contribuições da tese para a modelagem na Educação Matemática, no que diz respeito à inserção de atividades de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, e aponta perspectivas de pesquisas futuras.

Cada um dos capítulos está estruturado como descrito a seguir: uma teia de palavras, que fornece um panorama a respeito do que é discutido no capítulo – como mostra a Figura 1; uma apresentação do conteúdo; um índice das seções que constituem o capítulo e os textos que compõem essas seções.

Figura 1 – Teia de palavras do Capítulo 1



Fonte: Do autor.

Aproveitamos esse momento e usamos uma metáfora como a do filósofo Michael Dummet em um de seus textos ao referir-se a Frege: as produções dos alunos, que são a força motriz de nossas análises, não são todas ouro, mas há ouro nelas. Uma de nossas tarefas nesta pesquisa foi, portanto, extrair o ouro. É com esse pensamento que nos encaminhamos para a fundamentação teórica da pesquisa, que abarca discussões a respeito da modelagem matemática no âmbito da Educação Matemática, da modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental e da linguagem sob uma perspectiva filosófica de Wittgenstein.

Capítulo 2

Modelagem Matemática:

práticas e possibilidades

Neste capítulo discutimos modelagem matemática sob a perspectiva da Educação Matemática e tecemos considerações a respeito da modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

A modelagem matemática é proposta como uma alternativa para as práticas pedagógicas associadas à sala de aula, práticas que visam promover o ensino e a aprendizagem de matemática e uma formação na qual os alunos são preparados para atuar de forma crítica e autônoma na sociedade.

Para tanto, abordamos inicialmente a prática da modelagem matemática sob as 'vozes' de diversos autores da literatura e indicamos aspectos e elementos considerados característicos do procedimento que constitui atividades de modelagem matemática, sinalizando uma maneira, entre muitas, de fazer modelagem.

Nesse contexto voltamos nosso olhar para a modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Olhar para a modelagem matemática nesse período escolar, contudo, requer um (re)pensar sobre questões que abarcam sua prática e seu entendimento. Nesse sentido as questões: como alunos dos anos iniciais lidam e entendem atividades de modelagem matemática? Por que inserir essa prática nesse período escolar? Há peculiaridades nesse contexto que precisam ser discutidas? são questões que orientam discussões deste capítulo.

Argumentações são realizadas de modo a justificar a necessidade de pesquisar a modelagem matemática no contexto dos anos iniciais do Ensino Fundamental e de colocar os alunos diante de situações mediadas pela modelagem matemática desde os primeiros anos escolares.

Sob essa perspectiva, pesquisas a respeito da modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental são abordadas e características dessa prática são trazidas à tona para fomentar nosso olhar para os encaminhamentos dos alunos e para delinear configurações do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática nesse contexto.

Índice do Capítulo

2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA: UM CAMINHO PARA FAZER MATEMÁTICA

O estudo de temas e problemas a respeito da matemática ou por meio dela advém, muitas vezes, de nossa preocupação com relação ao seu entendimento e, consequentemente, com relação ao seu ensino e sua aprendizagem. Advém ainda de nossa motivação para entender o que já se tem construído a seu respeito, bem como elaborar e realizar novas construções.

Ao longo dos anos, muitos se aventuraram na busca por ferramentas que sustentassem a atividade matemática e seu desenvolvimento, nomes como Euclides (300 a.C.), Fibonacci (1170-1250), Descartes (1596-1650), Newton (1642-1727), Euler (1707-1783), Gauss (1777-1855), Riemann (1826-1866), Dedekind (1831-1916) e, recentemente, Andrew Wiles. Nas salas de aula, porém, temos enfrentado muitas dificuldades no que diz respeito ao ensino e à aprendizagem da matemática, a ponto de Miguel (2014) indagar: Será a educação matemática um problema para a escola ou a escola um problema para a educação matemática? Com essa pergunta o autor sugere "não apenas que a escola pode ser um empecilho para a promoção de uma educação matemática democrática e socialmente emancipadora, mas também que a educação matemática pode ocorrer para além dos muros da escola" (MIGUEL, 2014, p. 5)[13].

Tal colocação aponta para a necessidade de mudança na forma como concebemos a formação matemática de nossos alunos. Será que temos proporcionado condições para que eles não apenas estudem os conteúdos, mas possam utilizar a matemática para além do contexto escolar e, além disso, sejam capazes de produzir novos conhecimentos matemáticos e científicos?

Comenius, já no século XVII, em seu livro Didática Magna, sinalizou a importância de dar vez e voz aos alunos.

> Pretendemos apenas que se ensine a todos a conhecer os fundamentos, as razões e os objetivos de todas as coisas principais, tanto das que existem na natureza, como das que se fabricam, pois somos colocados no mundo não somente para que nos façamos de espectadores, mas também de atores (COMENIUS, 2001, p. 146, Original publicado entre 1621 e 1657).

Nesse sentido, vislumbramos mudanças no que diz respeito às práticas matemáticas em sala de aula. Esperamos despertar nos alunos atitudes críticas e autônomas, que eles desempenhem

[13] Tradução de: […] not only that schools can hamper the promotion of a democratic and socially emancipatory mathematics education, but also that mathematics education can occur beyond school walls.

um papel ativo na construção de seus conhecimentos. Com essa intenção novas alternativas, estratégias ou metodologias têm sido pensadas para o ensino e para a aprendizagem de matemática e novos "caminhos para fazer matemática" (BRASIL, 1997) têm sido propostos tanto para ambientes de aprendizagem constituídos no âmbito das aulas regulares, quanto para aqueles que se configuram como tal em projetos extraclasses – que levam os alunos a estudar matemática em diferentes contextos.

> Fazer matemática é expor ideias próprias, escutar as dos outros, formular e comunicar procedimentos de resolução de problemas, confrontar, argumentar e procurar validar seu ponto de vista, antecipar resultados de experiências não realizadas, aceitar erros, buscar dados que faltam para resolver problemas, entre outras coisas. Dessa forma as crianças poderão tomar decisões, agindo como produtoras de conhecimento e não apenas executoras de instruções (BRASIL, 1998, p. 207).

Um desses caminhos para fazer matemática é a modelagem matemática.

Consideramos a modelagem matemática uma prática alternativa às práticas habituais de sala de aula[14], que leva os alunos, sob a orientação do professor, a problematizar situações reais e a pensar e discutir meios, fundamentados na matemática, de solucionar problemas. Esse encaminhamento, em linhas gerais, conduz os alunos a realizar uma leitura da realidade e a produzir uma estrutura matemática para expressar suas impressões e conclusões a respeito dos fenômenos que investigam.

Sob esse entendimento, modelagem matemática pode ser concebida como "um procedimento criativo e interpretativo que faz uso ou estabelece uma estrutura matemática que deve incorporar, com certo nível de fidelidade, características essenciais do fenômeno, indicando uma possível solução para um problema associado a esse fenômeno" (ALMEIDA, SOUSA, TORTOLA, 2015, p. 3).

Procedimento criativo, pois remete aos objetivos, conhecimentos e valores do modelador (MELILLO; BEAN, 2011) e quando engajados com o fazer modelagem matemática os alunos podem desenvolver soluções múltiplas, originais e úteis, características que particularmente na modelagem matemática, segundo Wessels (2014), configuram-se como indícios de criatividade. Ou seja, por meio da modelagem matemática os alunos têm oportunidades de

[14] Alternativa, pois embora já tenha mais de trinta anos de discussão (BIEMBENGUT, 2009), a modelagem matemática, conforme indicam Bicudo e Klüber (2011), é ainda uma área de pesquisa em consolidação e os resultados das investigações a seu respeito não têm chegado, muitas vezes, nas salas de aula.

resolver problemas de diferentes maneiras e reconhecê-las como soluções de um mesmo problema; de produzir soluções nunca antes pensadas, seja por eles ou por outros; e de produzirem soluções que podem ser úteis para o contexto em investigação.

Nesse sentido, a modelagem matemática pode ser utilizada como uma alternativa pedagógica[15] para o ensino e a aprendizagem de matemática (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012), uma alternativa que aborda, por meio da matemática, situações advindas de diferentes contextos, sejam eles do meio institucional, político, estrutural, organizacional, administrativo, financeiro, social, físico etc. (BLUM, 2002).

Questões como as que seguem são apenas alguns exemplos de situações que podem ser investigadas e vir a constituir atividades de modelagem matemática: Qual o risco de acidentes por ingestão de bebidas alcoólicas? Quanto tempo leva para a eliminação do álcool ingerido de um organismo? (BASSANEZI, 2004); Quanto lixo pode se acumular nas ruas de um bairro? Casa própria: será que com o salário dá? (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012); Como estabelecer uma medida para a variação evidente de peso em e entre populações humanas? Como construir um índice que pode capturar a desigualdade de renda em uma população? (NISS, 2015).

“Nenhuma dessas questões pode ser respondida apenas por meios matemáticos. Por outro lado, nenhuma delas, também, pode ser respondida, de maneira satisfatória, sem o envolvimento de algum tipo e quantidade de matemática” (NISS, 2015, p. 67). Em outras palavras, fazer modelagem matemática requer não apenas conhecimentos matemáticos, mas também conhecimentos associados ao fenômeno sob investigação (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012), de modo que o modelador – aquele que faz a modelagem – seja capaz de utilizar ou estabelecer uma estrutura matemática e, ainda, manter, fidedignamente, características essenciais do fenômeno.

Fazer modelagem matemática, portanto, constitui um meio de “obtermos alguma explicação ou entendimento de determinadas situações reais” (BASSANEZI, 2015, p. 15). É importante salientar que

[15] Isto é, trata-se de uma alternativa pedagógica, pois consiste em uma prática que não se restringe às aulas regulares, às paredes da sala de aula. Pode ser utilizada para o encaminhamento de cursos de formação, grupos de estudos e pesquisas, tarefas e projetos extraclasses ou mesmo por interesse dos estudantes.

> modelagem matemática é, sem dúvida, muito mais do que apenas tomar uma situação, geralmente do mundo real, e usar variáveis e uma ou mais funções elementares que se ajustam ao fenômeno sob consideração para se chegar a uma conclusão que pode, então, ser interpretada à luz da situação original (LINGEFJÄRD, 2006, p. 96)[16];

Fazer modelagem matemática não pode se reduzir à produção de modelos matemáticos. Essa prática está associada a "observar um fenômeno, conjecturar relações, aplicar análises matemáticas (equações, estruturas simbólicas etc.), obter resultados matemáticos e reinterpretar o modelo" (LINGEFJÄRD, 2006, p. 96)[17].

Lidar com uma situação real não é tarefa simples, geralmente envolve tantas facetas que não podemos levar todas em consideração, é preciso decidir quais aspectos são mais importantes e mantê-los (POLLAK, 2012). A situação precisa ser simplificada, estruturada, submetida a condições e pressupostos apropriados, tornar-se mais precisa aos olhos do modelador de acordo com seus interesses (BLUM; NISS, 1991). Proceder dessa maneira é uma forma de obter uma versão idealizada da situação do mundo real (POLLAK, 2012; HUSSERL, 2012). Essa versão idealizada da situação, por um lado contém características essenciais da situação original, mas por outro lado foi esquematizada de tal forma que permite uma abordagem com meios matemáticos (BLUM; NISS, 1991), que admite ser traduzida em termos matemáticos (POLLAK, 2012). Entra em jogo a linguagem matemática e a atividade é encaminhada para a produção de um modelo matemático.

Para a produção do modelo matemático diferentes conhecimentos matemáticos podem ser utilizados, e, nesse empreendimento, ganha espaço a criatividade. Um espaço para soluções e procedimentos variados, em que estruturas matemáticas são construídas em conformidade com o que os sujeitos sabem e/ou procuram aprender para resolver a situação-problema; para que, no âmbito da sala de aula, os modelos produzidos por uns possam ser comparados com os produzidos por outros; para que a utilidade dos modelos possa ser discutida e avaliada. Nesse momento o sujeito produz interessantes *insights*, exemplos, aproximações, teoremas, algoritmos, que devem ser traduzidos de volta para a situação do mundo real, para que uma solução para o problema que orienta a investigação seja apresentada (POLLAK, 2012).

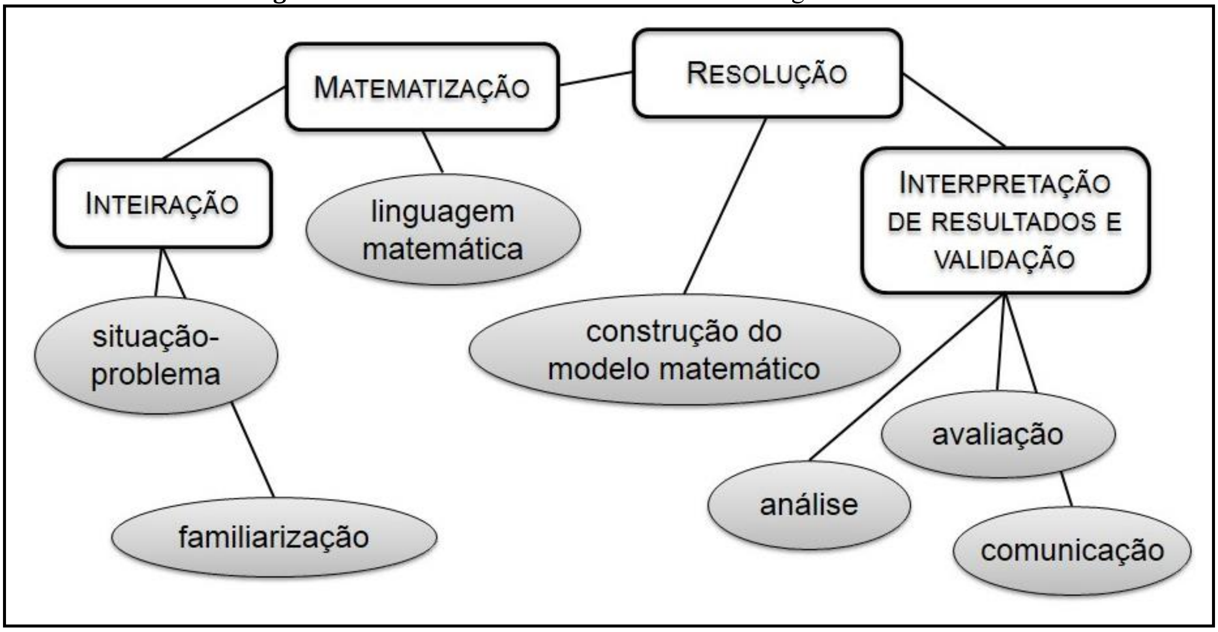
---

[16] Tradução de: Mathematical modeling is beyond doubt much more than just taking a situation, usually one from the real world, and using variables and one or more elementary functions that fit the phenomena under consideration to arrive at a conclusion that can then be interpreted in light of the original situation.
[17] Tradução de: […] observing a phenomenon, conjecturing relationships, applying mathematical analyses (equations, symbolic structures, etc.), obtaining mathematical results, and reinterpreting the model.

Esse procedimento, por fim, precisa ser revisto, precisa ser verificado. O modelador precisa se perguntar: “são os resultados práticos, as respostas razoáveis, as consequências aceitáveis? Se assim o for, ótimo! Se não, tome um outro olhar para as escolhas feitas inicialmente, e tente de novo” (POLLAK, 2012, p. viii).

O procedimento descrito constitui uma atividade de modelagem matemática. Geralmente, na literatura, esse procedimento é organizado em algumas fases, como mostra a Figura 2, que indicam elementos e ações características da prática de modelagem matemática.

Figura 2 – Elementos de uma atividade de modelagem matemática



Fonte: Adaptado de Almeida, Silva e Vertuan (2012) e Biembengut (1999)

Embora a figura sugira uma ordem para as ações, não há necessidade de seguir a ordem apresentada, não há linearidade nas ações ou um caminho predeterminado, a qualquer momento da atividade o modelador pode retomar uma ação ou partir para outra, tomando caminhos diferentes.

> A prática de modelagem matemática é um método iterativo que tem como ponto de partida a realidade, a partir da qual selecionamos parâmetros, construímos um modelo, procedemos para sua análise matemática, verificamos resultados por meio de procedimentos de controle e reformulamos o modelo, repetindo a análise e o controle até chegarmos a uma percepção satisfatória dos fatos e fenômenos selecionados (D’AMBROSIO, 2015, p. 44)[18].

[18] Tradução de: The practice of mathematical modelling is an iterative method starting with reality, with which we started by selecting parameters, constructing a model, proceeding to its mathematical analysis, verifying

Diante do procedimento descrito, observa-se que uma atividade de modelagem matemática abrange mais do que estudar conteúdos matemáticos, mas também o desenvolvimento de competências matemáticas e do próprio fazer modelagem (BLOMHØJ; JENSEN, 2003; MAAß, 2006). Isto é, além de aprender matemática, os alunos podem aprender também tomar atitudes com relação a determinadas atividades matemáticas e tornarem-se capazes de conduzir, de forma autônoma e perspicaz, o procedimento envolvido em uma atividade de modelagem matemática, em determinados contextos (BLOMHØJ; JENSEN, 2003).

É preciso, entretanto, ressaltar que embora o olhar para determinadas situações do mundo real, proporcionado por atividades de modelagem, venha imbricado por conhecimentos e pressupostos matemáticos, isso não garante que a atividade realizada pelo sujeito leve-o à aprendizagem de novos conhecimentos matemáticos, ele pode apenas – e não podemos encarar isso de forma simplória – utilizar conhecimentos já produzidos (BARBOSA, 2003). Nesse contexto é fundamental a mediação do professor (MORETTI; SOUZA, 2015), que ele não dê respostas prontas e acabadas, mas oriente, faça perguntas, sugira procedimentos; que não aceite o que não está bom, mas que indique caminhos, que atue lado a lado com o aluno, sem, contudo, despir-se da autoridade de professor (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

Atitudes provenientes do fazer modelagem matemática levam a uma mudança na prática pedagógica e, conforme adverte Bassanezi (2015, p. 14) "o início de alguma mudança pedagógica é quase sempre marcado por euforismos e/ou frustrações". Nesse sentido, preocupações com o que é modelagem matemática, como fazer e por que fazer são frequentemente colocadas em discussão na literatura (NISS, 1989; BARBOSA, 2004; ALMEIDA; VERTUAN, 2011). Assim também o é com a diferenciação ou a associação da modelagem matemática com outras alternativas para o ensino e à aprendizagem de matemática (BEAN, 2001; BORBA, 2009; LESH; YOON, 2007; POLLAK, 2012; BORSSOI, 2013; KNIJNIK, 2015), uma vez que problemas de modelagem não são os únicos baseados em situações reais (MAAß, 2006).

Diferentemente de outras alternativas, a modelagem matemática parte do mundo real com uma situação *inédita* – mesmo que apenas para os alunos – e requer a formulação de um

---

results through control procedures and reformulating the model, repeating the analyses and control until we reach a satisfactory perception of the selected facts and phenomena.

problema que, após resolvido, deve ter seus resultados considerados em seu contexto original (POLLAK, 2012).

Essa discussão acaba se estendendo em direção a uma distinção da modelagem matemática, que preza por pontuar aspectos que lhe são característicos, que acabam por contribuir para a construção de uma identidade para a modelagem matemática e sua prática. Para Barbosa (2003, p. 2), por exemplo, a atividade de modelagem matemática está associada à problematização e à investigação, ou seja, "ao ato de criar perguntas e/ou problemas" e "à busca, seleção, organização e manipulação de informações e reflexão sobre elas". Bean (2001), por sua vez, alega que o que diferencia a modelagem matemática de outras práticas é a realização de hipóteses e simplificações com relação à situação investigada.

Alinhadas a essa discussão, pesquisas atuais têm-se dedicado a compreender os pormenores envolvidos no desenvolvimento de uma atividade de modelagem, isto é, compreender aspectos associados à escolha de um tema (HERMÍNIO, 2009); à formulação e à significação do problema (DOWNTON, 2013; ALMEIDA; SILVA, 2015); ao que deve ser levado em consideração para desenvolver uma atividade de modelagem (ARAÚJO; CAMPOS, 2015); à como estabelecer um plano de solução (SCHUKAJLOW; KOLTER, BLUM, 2015); a clarificações a respeito de hipóteses, premissas e pressupostos (BEAN, 2012); ao papel das hipóteses e seus desdobramentos para a atividade de modelagem (ALMEIDA; SOUSA; TORTOLA, 2015); à resolução do problema (GREEFRATH, 2015); à produção e ao papel dos modelos matemáticos (BARBOSA, 2009; LEISS et al., 2010; DOERR; LESH, 2011); e à avaliação, tanto dos procedimentos utilizados na modelagem, como da aprendizagem matemática (LINGEFJÄRD, 2002; FIGUEIREDO; KATO, 2012; FREJD, 2013).

Tais pesquisas parecem contemplar questões que provocam incômodos em professores e pesquisadores da área da modelagem; trazem à tona questionamentos epistemologicamente e ontologicamente distintos; e revelam um *movimento* que orienta o modo de ver e (re)pensar a prática da modelagem a fim de contribuir com sua implementação no contexto escolar.

2.2 UM (RE)PENSAR SOBRE A PRÁTICA DA MODELAGEM MATEMÁTICA

Diferentes perspectivas de modelagem matemática podem ser identificadas na literatura (KAISER; SRIRAMAN, 2006) e, consequentemente, diferentes entendimentos e modos de praticar modelagem matemática (SOUZA; LUNA, 2015).

Há aqueles professores que, quando seus alunos fazem modelagem, preferem dar ênfase nas discussões quanto às aplicações da matemática em situações do mundo real, outros nos conteúdos que emergem a partir da busca por uma solução para o problema, outros, ainda, no papel da matemática e dos modelos matemáticos na sociedade, entre outros aspectos, o que dá margem a uma variedade de abordagens para a construção de modelos e para o desenvolvimento de atividades de modelagem.

> Os termos *modelos* e *modelagem* são definidos de forma variada na literatura, inclusive com referência à resolver de problemas [...], conduzir simulações matemáticas, criar representações de situações-problema (inclusive construir explicações de fenômenos naturais), e criar representações internas e psicológicas, enquanto se resolve um problema particular (ENGLISH, 2010, p. 288, grifos da autora)[19].

Nesse sentido, há muitas situações que podem dar origem a atividades de modelagem matemática, situações geralmente associadas à *realidade*. Costuma-se nas definições de modelagem matemática usar o termo ‘realidade’ para se referir aos contextos dos quais se originam a situação-problema – “arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos [...]” (BASSANEZI, 2004, p. 24); “[...] situações com referência na realidade” (BARBOSA, 2003, p. 3); “[...] problema cuja origem está, de modo geral, associada a uma situação da realidade” (ALMEIDA; SOUSA; TORTOLA, 2015, p. 2).

Há, contudo, uma complexidade que se mostra a partir dos usos do termo *realidade*[20]. Não se tem bem definidos os limites e as fronteiras do que a constitui ou não. Nesse sentido, alguns autores afirmam não existir apenas uma, mas diferentes realidades (CIFUENTES; NEGRELLI, 2011), diferentes entendimentos de realidade (BEAN, 2001), ou, diferentes esferas da realidade (BERGER; LUCKMANN, 2008).

---

[19] Tradução de: The terms, *models* and *modeling*, have been defined variously in the literature including with reference to solving […] problems, conducting mathematical simulations, creating representations of problem situations (including constructing explanations of natural phenomena), and creating internal, psychological representations while solving a particular problem.

[20] Berger e Luckmann (2008, p. 11) tratam a realidade como “uma qualidade pertencente a fenômenos que reconhecemos terem um ser independente de nossa própria volição (não podemos desejar que não existam)”.

Assumir tal pluralidade para o termo ‘realidade’ implica abrir um leque de possibilidades de situações para serem analisadas por meio da matemática e que podem envolver problematização e investigação, formulação de hipóteses e realização de simplificações, que de acordo com Bean (2001) e Barbosa (2003) são características que distinguem a modelagem matemática de outras práticas de resolução de problemas provenientes de situações reais.

A escolha das situações está, dessa forma, condicionada ao que o sujeito entende por realidade e, nesse sentido, as situações-problema investigadas por meio da modelagem matemática podem ser de naturezas diversas (BLUM, 2002).

Almeida (2010), por exemplo, analisa uma atividade de modelagem matemática na qual alunos de um curso de licenciatura em matemática investigaram a necessidade de instalação de um semáforo em um cruzamento de sua cidade. Dados foram recolhidos junto aos órgãos competentes e usando procedimentos estatísticos obtiveram um modelo matemático que indicou a necessidade da instalação. Graças a essa investigação, o semáforo foi instalado.

Zill (2014) descreve um método para determinar a idade aproximada de fósseis, utilizando como meio o carbono radioativo. O método baseia-se no conhecimento de sua meia-vida (5600 anos) e assume como hipótese que a variação do carbono com relação ao tempo é proporcional à quantidade remanescente, o que pode ser expresso por meio de uma equação diferencial, cuja solução possibilita estimar a idade do fóssil.

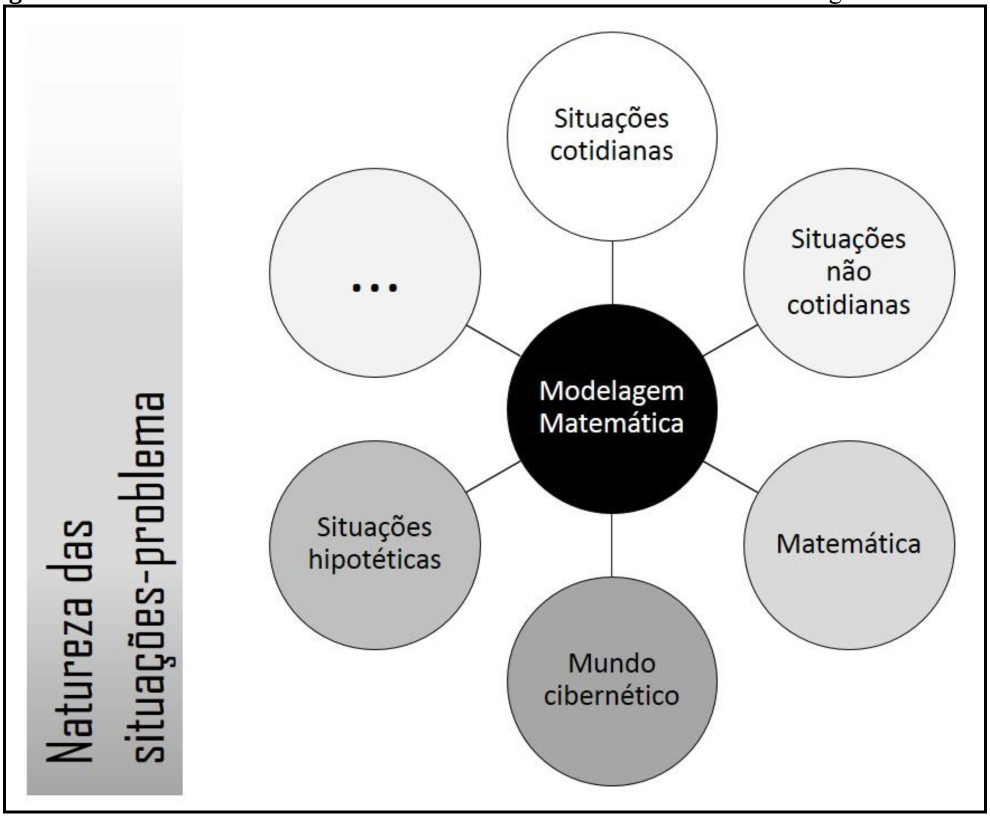
Cifuentes e Negrelli (2011) discutem a possibilidade de construir modelos matemáticos para desempenharem a função de teoria, utilizando como exemplo o lançamento de um projétil. Os autores assumiram alguns pressupostos matemáticos, estipularam alguns parâmetros e obtiveram uma equação de segundo grau como modelo matemático. Essa equação pode ser utilizada para prever diversos fatos relacionados com o fenômeno em estudo: o alcance, a altura máxima, o tempo de percurso etc.

Dalla Vecchia e Maltempi (2012) descrevem um estudo no qual alunos de um curso de engenharia filmaram o movimento de ondulação de uma corda e com o auxílio do computador coletaram dados associados à situação. Utilizando conceitos de funções trigonométricas eles produziram o modelo matemático para representar o movimento da corda.

Wooley et al. (2014) modelam matematicamente um ataque zumbi. Para isso, utilizam equações de difusão – equações diferenciais parciais que descrevem o movimento aleatório de uma população de regiões de alta para baixa densidade. Essa formulação matemática, segundo os autores, permite saber horários exatos e aproximados de encontro, o que conduz a conclusões sobre a melhor forma de atrasar o inevitável sob uma onda de infecção.

Em linhas gerais, pode-se dizer, ao olhar para essas cinco situações, que atividades de modelagem matemática envolvem investigação e interpretação de problemas provenientes de diferentes meios que compõem a realidade, ou de diferentes realidades, conforme ilustra a Figura 3.

Figura 3 – Realidades associadas ao desenvolvimento de atividades de modelagem matemática



Fonte: Do autor.

São elas:

i. situações-problema com as quais nos deparamos no decorrer de nossas atividades e que precisam ser analisadas por nós com a intenção de deliberar com mais segurança sobre elas, como é o caso da situação 1, em que os alunos investigaram uma situação do seu meio, de sua cidade, com a qual se deparam em seu cotidiano;

ii. situações que dão margem a estudos e investigações futuras, como na situação 2, que possibilita determinar a idade de fósseis e que, embora possa não fazer parte do cotidiano do aluno, pode ser muito útil no contexto de origem;
iii. situações que podem emergir na própria matemática e contribuir para o desenvolvimento de teorias, como no caso da situação 3, que possibilita o estudo da trajetória a partir do lançamento de um projétil qualquer;
iv. situações que registradas em vídeo e com o auxílio do computador podem gerar dados para estudar o comportamento de fenômenos, como é o caso da situação 4 que estuda o movimento de ondulação de uma corda;
v. situações que permitem estudar contextos hipotéticos, como é o caso da situação 5, que diz respeito ao estudo de um apocalipse zumbi.

Essas cinco situações, são apenas alguns exemplos possíveis colocados para ilustrar a pluralidade associada ao termo realidade, outros contextos, podem conduzir a atividades de modelagem com outras características. Diante disso, questionamos como serão, então, atividades de modelagem matemática desenvolvidas por alunos dos anos iniciais? Será que alunos desse nível de escolaridade têm condições de resolver situações-problema como essas? Isto é, será que eles têm condições de utilizar tal procedimento, que chamamos modelagem matemática?

English (2010, p. 288)[21] argumenta que não apenas a modelagem matemática tem sido tradicionalmente reservada aos anos finais da Educação Básica e ao Ensino Superior, mas existe também a crença de que "alunos dos primeiros anos escolares são incapazes de desenvolver seus próprios modelos e sistemas que fazem sentido para lidar com situações complexas".

Contudo, a leitura da situação-problema, que a modelagem matemática proporciona, vem revestida das crenças e opiniões do sujeito que a faz, coloca em jogo seus conhecimentos matemáticos e sua visão de mundo. E, nesse sentido, "[...] a modelagem pode ser adotada em qualquer situação ou ambiente educacional, desde que se use, evidentemente, um conteúdo compatível com o estágio de desenvolvimento dos alunos" (BASSANEZI, 2015, p. 11-12), ou

---

[21] Tradução de: […] primary school children are incapable of developing their own models and sense-making systems for dealing with complex situations.

seja, é preciso respeitar as estratégias que os alunos propõem, sugerir caminhos que estão ao seu alcance, discutir a matemática de modo que eles tenham condições de compreender.

Sob essa perspectiva, uma (des)construção é necessária. É preciso ver a modelagem matemática em um processo de transformação (DALLA VECCHIA; MALTEMPI, 2012). E considerar a modelagem matemática como uma área em transformação é considerar que a modelagem está aberta a novos usos, a adaptações e a atribui mais flexibilidade. Não flexibilidade no sentido de ceder ou modificar suas bases teóricas ou ontológicas, mas no sentido de funcionar de maneiras diferentes em contextos diferentes.

> Há muito que se conhecer; muitos fatos a serem levantados. Partindo dessa condição, servir do conhecimento produzido e reordenar alguns setores deste conhecimento para criar novos sentidos, [...] que possam servir a outrem, outros conhecimentos. Em outras palavras, saber gerar conhecimentos novos sobre questões educacionais, [...] que permitam ver novas realidades, presentes, mas talvez incapazes de ganhar visibilidade significativa para a melhoria da educação. Conhecer e compreender como estes se dão efetivamente, como as concepções, os objetivos e os ideais que orientam professores pesquisadores de modelagem matemática no ensino podem permitir delinear caminhos para melhorar a Educação Matemática brasileira e, por extensão, a sociedade (BIEMBENGUT, 2009, p. 29).

Assim, uma desconstrução é necessária no sentido de pensar a prática de modelagem matemática direcionada apenas para aqueles que já possuem uma longa caminhada no estudo da matemática; de concebê-la como um procedimento complexo que alunos dos anos iniciais podem não dar conta. É preciso uma desconstrução do olhar que vai nessa direção, em que há apenas uma maneira de fazer modelagem e, desse modo, estariam obrigados os alunos dos anos iniciais a agir de acordo com as ações tomadas por alunos de outros níveis de escolaridade. Pensar dessa forma é, de certa maneira, ir de encontro com os princípios da modelagem matemática no âmbito da Educação Matemática, em que se defende que o aluno seja o ator, que ele trace seu caminho sob a orientação do professor. É claro que não se pode também levar ao extremo tais argumentações e esperar que esse aluno seja capaz de resolver qualquer problema, é nesse momento que entra em ação o papel do professor como mediador, é o professor que deve dosar a complexidade do problema, para que, ao invés de possibilitar aprendizagem, a investigação não termine em frustração, assim como é o papel do professor em outros contextos escolares.

Como temos argumentado, alunos dos anos iniciais são sim capazes de fazer modelagem matemática nos anos iniciais, eles podem encaminhar uma solução para problemas mediados pela modelagem, segundo seus conhecimentos.

Nesse sentido uma construção também é necessária, de modo a incluir a modelagem matemática nas práticas dos anos iniciais, respeitando suas peculiaridades, aceitando que os conhecimentos dos alunos dão-lhes, de fato, o suporte necessário para colocarem em prática o que sabem e para aprenderem novos conhecimentos; uma construção em que a modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental seja entendida como uma prática a mais nesse leque de possibilidades de fazer matemática, uma possibilidade viável e pertinente às aulas nesse contexto escolar.

Mas que modo peculiar é esse dos alunos dos anos iniciais fazerem modelagem matemática? A resposta para essa pergunta é uma das expectativas que se cria com esta pesquisa, uma vez que poucas são as investigações na literatura que vão nessa direção. Algumas pesquisas abordam ambientes que se constituem nos anos iniciais e que são mediados pela modelagem matemática; discutem contribuições dessa prática e alguns aspectos pontuais; sinalizam orientações e apontam características da formação que se espera para os alunos mediante o fazer modelagem; nenhuma pesquisa, porém, dedica-se a compreender os encaminhamentos que alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental dão para atividades de modelagem matemática, que configurações podem assumir tais atividades quando desenvolvidas por alunos desse período escolar, como eles entendem tais atividades e como eles lidam com a matemática e com a linguagem que emerge dessas atividades, questões que nos propomos a investigar nesta pesquisa.

Colocamos, assim, em discussão a modelagem matemática como um campo aberto a uma multiplicidade de práticas, sob diferentes olhares e perspectivas e que, uma dentre as várias práticas possíveis para as atividades escolares seja a modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

2.3 POR QUE MODELAGEM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS?

Como finalidades para o ensino de matemática no Ensino Fundamental, os PCN indicam, entre outras questões, que os alunos tornem-se capazes de identificar os conhecimentos matemáticos como um meio para compreender e transformar o mundo à sua volta, resolver problemas, validar estratégias e resultados, fazer observações sistemáticas, estabelecer relações, comunicar-se matematicamente, estabelecer conexões entre matemática e outras áreas do conhecimento etc. (BRASIL, 1997).

De acordo com Cerquetti-Aberkane e Berdonneau (1997, p. 22),

> uma das maiores dificuldades encontradas pelas crianças no decorrer de toda a sua escolaridade é a resolução de problemas. Quando o enunciado é apresentado sob a forma de um texto escrito, as crianças não estabelecem vínculo entre a situação real e sua descrição no texto. Enquanto que frequentemente elas são capazes de resolver problemas reais, por outro lado não conseguem encontrar uma solução coerente para um problema escrito.

Greer, Verschaffel e Mukhopadhyay (2007, p. 90) afirmam que na literatura há muitos exemplos de situações em que crianças são colocadas diante de problemas e apresentam "uma aparente disposição em ignorar coisas que elas sabem sobre mundo, linguagem e lógica". Os autores apontam como exemplo uma pesquisa francesa na qual a alunos dos primeiros anos escolares foi proposta a questão: *Há 26 ovelhas e 10 cabras em um navio. Qual é a idade do capitão?* De acordo com os autores, a maioria dos alunos fornece uma resposta numérica, enquanto poucos questionam se uma resposta é possível.

Para English (2010) as formas tradicionais de resolução de problemas, que predominam as salas de aula, têm limitado as oportunidades dos alunos explorarem dados complexos, desorganizados, provenientes do mundo real, e construírem seus próprios meios para a resolução de problemas autênticos.

> Na resolução de problemas escolares tradicionais, os alunos geralmente se engajam em um processo de um ou dois passos para mapear as informações do problema com quantidades e operações aritméticas. Na maioria dos casos, as informações do problema já foram cuidadosamente matematizadas para o aluno. O objetivo do aluno é desmascarar a matemática ao mapear as informações do problema de tal maneira que uma resposta pode ser

> produzida utilizando quantidades e operações básicas conhecidas (DOERR; ENGLISH, 2003, p. 113)[22].

A forma habitual com que, particularmente, as aulas de matemática são conduzidas não dá margem aos alunos para que possam expressar seus pensamentos, levantar e testar hipóteses, explorar e investigar conceitos, diferente do que ocorre para além da escola.

> Fora da sala de aula, as crianças vivenciam situações significativas envolvendo contagens, relações entre quantidades, noções de espaço, deslocamento etc. Por isso é importante que elas sejam motivadas a construir e testar estratégias que as levem a solucionar situações-problema desde o início de sua vida escolar (CENTURIÓN; SCALA; RODRIGUES, 2011, p. 10).

Ainda que tragam de casa conhecimentos matemáticos provenientes de suas atividades e interações com aqueles que os cercam, os alunos precisam desenvolver o pensar e o agir diante de diferentes situações (BRASIL, 2013). É dessa maneira que eles podem desenvolver seu senso investigativo e tornar-se sujeitos ativos diante das situações que se colocam diante deles.

Além disso, a visão de matemática que os alunos têm é aquela que praticam em sala de aula, de uma matemática idealizada, que é utilizada para solucionar problemas também idealizados e para obter respostas exatas, o que destoa, e muito, do mundo real. Muitas vezes as respostas que precisamos e que podemos obter são aproximações, que são suficientes para a tomada de decisões. Usos como esse, da matemática, muitas vezes são deixados de lado no contexto escolar.

Pollak (2015) chama atenção, por exemplo, para alguns aspectos associados às operações elementares que os alunos podem não aprender nos anos iniciais do Ensino Fundamental, pois diante do currículo a cumprir acabam ficando em segundo plano:

> se você adiciona dois números A e b, em que A é grande e b é pequeno, a precisão de b, e, provavelmente, b, não importa no todo. Se você subtrai B de A, em que A e B são quase iguais, a resposta pode ser insignificante. Dividir por 0 é proibido, mas dividir por quase 0, embora não seja proibido é, provavelmente, estúpido. Esses instintos devem ser adquiridos nos anos

[22] Tradução de: In solving traditional school word problems, students generally engage in a one- or two-step process of mapping problem information onto arithmetic quantities and operations (English& Halford,1 995). In most cases, the problem information has already been carefully mathematized for the student. The student’s goal is to unmask the mathematics by mapping the problem information in such a way that an answer can be produced using familiar quantities and basic operations.

> iniciais do Ensino Fundamental. Um caminho muito bom para adquiri-los é a partir de experiências com modelagem (POLLAK, 2015, p. 272)[23].

"A modelagem matemática fornece às crianças ricas oportunidades para experienciar dados complexos em contextos desafiadores e, ainda, significativos" (ENGLISH, 2010, p. 288)[24]. A modelagem coloca os alunos diante de situações em que eles precisam ser os atores, eles precisam compreender uma situação-problema, analisá-la, fazer conjecturas, formular hipóteses, elaborar estratégias de resolução, observar regularidades, generalizar, sintetizar, argumentar, criticar; e precisam, constantemente, ter em vista a situação à qual o problema está associado, o que parece ir ao encontro do que argumentam Centurión, Scala e Rodrigues (2011, p. 3) no "manual de orientação para os professores" de seu livro didático destinado aos anos iniciais do Ensino Fundamental:

> Por mais diversificadas que sejam as concepções e práticas pedagógicas de ensino e aprendizagem, consideramos que elas devem contribuir para o desenvolvimento de capacidades básicas do pensamento autônomo e crítico do aluno, como as capacidades de compreender, analisar, classificar, sintetizar, formular hipóteses, planejar, argumentar, generalizar e criticar, todas elas possibilitando o aprendizado de diferentes objetos do conhecimento.

A abordagem que os alunos fazem em atividades de modelagem, segundo English (2010), sugere que a resolução de problemas reais vai para além dos objetivos determinados nas orientações curriculares para a educação matemática. Atividades de modelagem matemática oportunizam aos alunos desenvolverem habilidades para agir em um mundo que demanda pensadores matemáticos e solucionadores de problemas mais flexíveis, criativos e preparados para o futuro (FOX, 2006).

De acordo com English (2010), diante das mudanças no mundo precisamos, mais do que nunca, repensar a natureza das experiências de resolução de problemas matemáticos que proporcionamos aos nossos alunos. Defende-se a prática da modelagem como responsável por inúmeras contribuições para o ensino e a aprendizagem de matemática, então, perguntamos: por que privar os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental de tal prática?

---

[23] Tradução de: If you add two numbers A and b, where A is large and b is small, the precision of b, and probably b itself, do not matter at all. If you subtract B from A, where A and B are almost equal, the answer may be meaningless. Dividing by 0 is forbidden, but dividing by almost 0, while not forbidden, is probably stupid. These instincts should be acquired in elementary school. A very good way to acquire them is from modelling experiences.

[24] Tradução de: […] mathematical modeling provides rich opportunities for children to experience complex data within challenging, yet meaningful contexts.

Uma reação ao fato de que as investigações, discussões, e esforços de formação para a modelagem matemática serem, quase exclusivamente, destinadas aos anos finais da Educação Básica e Ensino Superior, Greer, Verschaffel e Mukhopadhyay (2007) apelam para que a modelagem seja levada mais a sério já no contexto dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Tal apelo tem que ser reforçado nos dias atuais, uma vez que nossos alunos “têm acesso muito cedo à tecnologia informática e exposição diária aos meios de comunicação de massa, em que várias exibições de dados e relatórios relacionados podem facilmente mistificar ou desinformar, ao invés de informar, suas mentes jovens” (ENGLISH, 2010, p. 287)[25].

Ademais, com base nos objetivos apontados pelos PCN para os anos iniciais do Ensino Fundamental e nas colocações a respeito da necessidade de se trabalhar com problemas matemáticos baseados em situações reais, a modelagem matemática não pode ser ignorada nesse contexto de escolaridade (BAHMAEI, 2014).

Os alunos precisam aprender desde cedo a se comunicar matematicamente, se valer da linguagem matemática, não como códigos que precisam ser decifrados ou traduzidos, mas para registrar resultados de experiências e comunicá-los de modo a ser compreendido (BRASIL, 1997). A modelagem matemática oportuniza que tais habilidades sejam exploradas e desenvolvidas, pois como argumenta Bassanezi (2004) a modelagem matemática “alia teoria e prática, motiva seu usuário na procura do entendimento da realidade que o cerca e na busca de meios para agir sobre ela e transformá-la”.

Silva e Klüber (2014) apontam cinco aspectos que justificam o uso da modelagem matemática nos anos iniciais. Esses aspectos, embora não sejam baseados em práticas de atividades de modelagem matemática – devido à pouca quantidade de trabalhos que abordam a modelagem nos anos iniciais –, estão fundamentados, principalmente, em pesquisas sobre modelagem matemática e suas relações com as propostas curriculares dos anos iniciais do Ensino Fundamental. São eles: o professor como mediador do processo, ensino interdisciplinar, o aluno como sujeito da aprendizagem, ensino problematizador e ensino dialógico e investigativo. Segundo os autores tratam-se de aspectos interdependentes, isto é, eles devem coexistir em um ambiente mediado por atividades de modelagem matemática.

[25] Tradução de: […] have early access to computer technology and daily exposure to the mass media where various displays of data and related reports can easily mystify or misinform, rather than inform, their young minds.

Tais características da modelagem matemática vão ao encontro dos objetivos estabelecidos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais e dos princípios nos quais eles estão embasados, bem como das Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica, que pregam a atividade matemática escolar não como pronta e definitiva, mas que envolve a construção de conhecimentos pelo aluno, dos quais ele se servirá para compreender, atuar e transformar sua realidade (BRASIL, 1997; 2013).

Cabe esclarecer que não defendemos a modelagem matemática como uma obrigatoriedade para o ensino de matemática nos anos iniciais, como ‘a metodologia’ que deve ser adotada pelos professores para resolver os problemas de ensino e de aprendizagem de matemática, até porque Bassanezi (2004) nos chama atenção que a modelagem matemática não é a solução para *todos* os problemas da Educação Matemática. Quem dera! Obstáculos e dificuldades também são apontados pelos professores mediante a prática da modelagem (CEOLIM, 2015); tensões transparecem em seus discursos (OLIVEIRA; 2010); e preocupações são observadas de tal modo que chegam a se manifestar na forma de resistência à sua inserção nas aulas. Pensamos, porém, que a modelagem matemática pode ser mais uma alternativa para professores e alunos dos anos iniciais para ensinar e aprender matemática em um contexto que foge aos moldes tradicionais de organização de uma aula, que nós, pesquisadores, professores e alunos, tanto criticamos. Uma alternativa que pode contribuir para a superação de uma questão tão discutida no âmbito da Educação Matemática, que diz respeito à extensão do uso da matemática para além da escola, de modo que ela não caia no esquecimento e tenha um fim junto com o encerramento da jornada escolar, mas que sirva como um meio pelo qual problemas reais possam ser investigados e, quem sabe, solucionados.

Portanto, mediante as considerações apresentadas, rebatemos a questão inicial, título desta seção, com outra questão: Por que não modelagem matemática nos anos iniciais?

2.4 MODELAGEM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS

A discussão a respeito da modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental vem revestida de interrogações. Há muitas questões em aberto: Como os alunos lidam com as informações? Como usam a matemática e como são os modelos matemáticos produzidos por eles? Como justificam suas ações e como são sistematizados os conteúdos? Como entendem o procedimento envolvido no desenvolvimento de atividades de modelagem? etc. Por outro lado, há também questões já colocadas em debate nos últimos anos e que revelaram características dessa prática. É a respeito dessas características que discutimos nesta seção, na tentativa de conhecer e compreender a modelagem matemática nesse contexto.

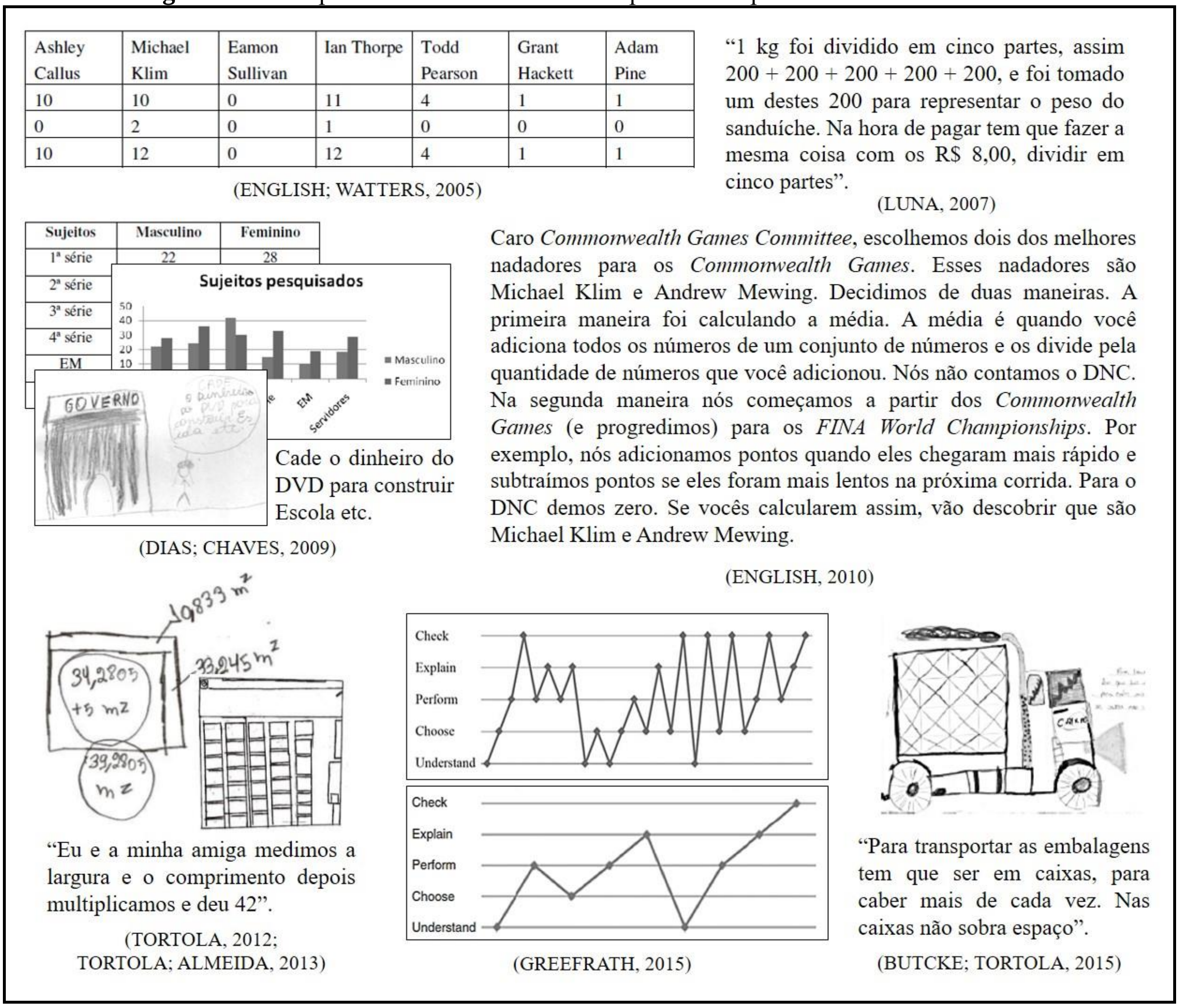
A modelagem matemática, como apontamos anteriormente, pode se apresentar sob várias faces (LINGEFJÄRD, 2006; GALBRAITH, 2012), sob diferentes enfoques e perspectivas (KAISER; SRIRAMAN, 2006). Nesse sentido, podemos dizer que mesmo no contexto da própria modelagem as ideias, pressupostos e encaminhamentos podem ser modificados, aperfeiçoados, em conformidade com o modo de ver a escola, o mundo e a relação entre esses elementos em cada época. Ou seja, a modelagem matemática é uma área ainda em transformação (DALLA VECCHIA; MALTEMPI, 2012).

English (2003), por exemplo, argumenta que a modelagem matemática tem sido inserida tradicionalmente nos primeiros anos escolares com foco em problemas associados à aritmética, que podem ser representados por materiais concretos e modelados por regras operacionais abstratas. Resolver esses problemas, segundo a autora, implicaria um mapeamento entre a estrutura da situação-problema e a estrutura de uma expressão matemática simbólica. Como exemplo a autora cita um problema como o seguinte: *Suzie economizou R$ 12,00. Lillian economizou 3 vezes essa quantia. Quanto Lillian economizou?* que pode ser modelado pela expressão 12 x 3 = 36.

Mas será que essa é a modelagem matemática que frequentemente encontramos na literatura brasileira e/ou internacional? Será que é assim que funciona o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática nos anos iniciais? De acordo com English (2003), esse tipo de problema não se configura, muitas vezes, como uma atividade de modelagem matemática para os alunos, mas como um problema no qual eles se baseiam em pistas sintáticas para sua resolução, isto é, em palavras-chave ou frases do enunciado, como menos, mais, vezes, menor etc.

Além disso, há na literatura exemplos de modelos matemáticos desenvolvidos por alunos dos primeiros anos escolares – anos iniciais do Ensino Fundamental – que vão para além de expressões aritméticas, que manifestam por meio de diferentes registros as relações observadas no contexto da situação-problema. A Figura 4 mostra alguns desses exemplos, que incluem tabelas, gráficos, desenhos, relatórios etc.

Figura 4 – Exemplos de modelos matemáticos produzidos por alunos dos anos iniciais



Fonte: Do autor.

Com relação às práticas atuais, English (2003) afirma que a modelagem matemática é frequentemente associada à construção de um link ou de uma ponte entre matemática como um meio de compreender situações do mundo físico e social, e matemática como um conjunto de estruturas formais e abstratas. Ou seja, matemática como um meio de compreender problemas por um lado, e investigar situações-problema para aprender matemática por outro – matemática como um meio e matemática como um fim.

Independente do propósito com que se usa a modelagem matemática, essa prática oportuniza aprendizagens que contemplam diferentes conhecimentos matemáticos e, também, conhecimentos que não se restringem à matemática, elucidando o caráter interdisciplinar que atividades de modelagem podem assumir (ENGLISH, 2009).

Doerr e English (2003), por exemplo, desenvolveram um conjunto de atividades com alunos de 10 a 13 anos, que além de explorar ideias como a de classificação, seriação, seleção e uso de dados qualitativos e não quantitativos, abordaram uma discussão a respeito de fatores que podemos considerar na hora de comprar um par de tênis, de escolher um restaurante para jantar, ou de escolher uma cidade para viver com base em suas informações climáticas.

Luna e Alves (2007), por sua vez, discutiram com alunos de um 5º ano, com idades entre 9 e 11 anos, a respeito do tema anorexia. A partir de uma reportagem que narra um caso de anorexia e as complicações que dele decorreram, os alunos discutiram questões associadas a relações sociais, peso padrão, saúde, funcionamento do organismo etc. sob a orientação de um profissional especializado – um fisiologista. Essas discussões desencadearam um estudo a respeito do modelo matemático índice de massa corporal (IMC), que fomentou a discussão da questão: ser magro significa ser saudável?

English (2009) investigou com alunos de um 3º ano, de 7 a 8 anos de idade, duas situações: o índice de poluição de um riacho e a dinâmica de pontuação em um programa de leitura de verão. Tais situações envolveram a interpretação e a manipulação de dados complexos. Eles lidaram com intervalos, frequências, frequências acumuladas e calcularam taxas de medidas informais, além de discutir questões ambientais e questões associadas às suas atividades escolares.

Luna, Souza e Lima (2012) discutiram com alunos de 9 a 11 anos, que cursavam o 5º ano do Ensino Fundamental a questão da pirataria, especificamente, os impactos da aprovação de uma lei antipirataria. O cálculo de porcentagens e de operações elementares da matemática, como a subtração e a divisão, orientou a investigação.

Tortola (2012) desenvolveu um conjunto de atividades de modelagem matemática com alunos de um 4º ano, 9 a 10 anos de idade. Essas atividades oportunizaram a investigação de questões como: Qual o tamanho de anel apropriado para seu dedo? Quanto de energia você gasta ao tomar banho e ao assistir seu desenho animado favorito? Qual o tamanho de caixa d’água deve ter na sua casa, considerando o número de moradores? entre outras. Essas investigações contemplaram o uso das operações elementares da matemática, a organização de dados em tabelas, a produção de gráficos pictóricos etc.

Greefrath (2015) determinou com alunos do 4º ano, com 10 anos de idade, a altura de uma pessoa, fictícia, para a qual serviria um chinelo gigante apresentado em uma imagem. O estudo envolveu estimativas, medidas e proporções.

Além dessas, outras pesquisas também abordam atividades de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental que viabilizaram a discussão de temas como: crescimento dos feijões do tipo manteiga (ENGLISH; WATTERS, 2004), escolha de um atleta de natação para participação nas olimpíadas (ENGLISH; WATTERS, 2005), construção de um guia de consumidor (ENGLISH, 2006), pirataria e qualidade de vida (DIAS; CHAVES, 2009), construção de cisternas (LUNA; SOUZA; SANTIAGO, 2009), investimento e esgotamento das reservas de gás natural (MOUSOULIDES; ENGLISH, 2011), análise do comportamento dos motoristas no trânsito (SOUZA; SANTIAGO; LUNA, 2011), formato das embalagens (BUTCKE; TORTOLA, 2015), água eliminada no ar condicionado (GEROLOMO; MILANI; ALMEIDA, 2015), entre outros temas[26].

Sob uma perspectiva diferente, Larsen (2001) investigou que ferramentas de um computador poderiam contribuir com a promoção da habilidade de construir modelos matemáticos de alunos dos primeiros anos escolares. Lamon (2003), por sua vez, apresentou várias situações que foram investigadas com alunos de 3º, 4º e 5º ano, como por exemplo, o problema do esquilo que envolve geometria, o dos gêmeos que envolve taxa de crescimento, o de subir escadas que envolve teoria dos números, entre outros. Murata e Kattubadi (2012) estudaram os processos de matematização de alunos do 3º ano ao modelarem situações-problema que envolvem diferentes tipos de subtração. Souza e Luna (2014) discutiram o papel do professor na produção dos discursos de alunos do 4º ano do Ensino Fundamental ao desenvolverem uma atividade de modelagem a respeito do tema água virtual[27].

---

[26] Souza e Luna (2014) apresentam um panorama de pesquisas brasileiras a respeito da modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, tomando como fonte de dados publicações em anais de três eventos: CNMEM, ENEM e SIPEM.

[27] O conceito de água virtual refere-se àquela água que o ser humano utiliza em suas produções e que o consumo acaba passando despercebido. O site PlanetAtivo, disponível em: http://planetativo.com/2010/2013/03/o-que-e-agua-virtual/, exemplifica esse conceito com o seguinte fato: “Um computador consome 1.500 quilos de água porque os materiais usados na sua fabricação precisam de várias lavagens em água muito pura”.

As pesquisas relatadas apontam para o uso da modelagem matemática em diferentes ocasiões e sinalizam a pluralidade de oportunidades que essa alternativa traz para as aulas. É possível utilizar a modelagem matemática nos anos iniciais para ensinar os alunos a tomar decisões com base em dados, como é o caso da atividade associada à escolha de uma caixa d'água para a casa (TORTOLA, 2012), a lidar com dados complexos e a orientar-se por critérios de avaliação, como é o caso da indicação de um atleta de natação para participar das olimpíadas (ENGLISH; WATTERS, 2005), ou ainda, a fazer suposições e verificá-las, como quando alunos calcularam o tamanho do pé para o qual serviria um "chinelo gigante" (GREEFRATH, 2015). Além de promover o uso de ferramentas como o computador para aprender matemática (LARSEN, 2001).

Nesse contexto, a modelagem matemática, quando proposta a alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, tem se orientado em alguns princípios, com a intenção de que as oportunidades de aprendizagem matemática sejam estendidas para todos os alunos. Tais princípios de acordo com English (2010, p. 288-289) incluem:

(a) *Princípio da significação pessoal*: os problemas são projetados de modo que os alunos possam relacionar e compreender situações;
(b) *Princípio da construção do modelo*: uma atividade de modelagem requer que os alunos desenvolvam uma construção matemática por meio de um sistema complexo que serve para descrever, explicar e prever aspectos associados à situação, que destaca características estruturais, ideias-chave e suas relações;
(c) *Princípio da documentação do modelo*: problemas de atividades de modelagem devem encorajar os alunos a externalizar seus pensamentos e raciocínios tanto quanto possível em uma variedade de maneiras, incluindo a criação de listas, tabelas, gráficos, diagramas e desenhos. A obrigação de incluir descrições e explicações sobre os passos que resultam na construção de seus modelos é também uma característica importante;
(d) *Princípio da autoavaliação*: o delineamento do problema deve incluir critérios suficientes para possibilitar que os alunos determinem se seu modelo final é efetivo e adequado para as necessidades da situação. Tais critérios devem também possibilitar que os alunos avaliem e revisem progressivamente suas criações e como eles trabalharam o problema;
(e) *Princípio da generalização do modelo*: os modelos criados devem ser aplicáveis a outras situações-problema relacionadas.

Esses princípios, organizados por Ensligh (2010), atendem a várias indicações presentes em propostas e documentos curriculares, como podemos observar ao compará-los com os aspectos apresentados por Silva e Klüber (2014), que foram organizados a partir de tais documentos.

Os princípios de English (2010) também situam o "professor como mediador do processo" ao citar a necessidade de o professor "projetar o problema". É importante esclarecer que projetar o problema não significa delimitar os caminhos pelos quais os alunos devem percorrer, como indicam Almeida, Silva e Vertuan (2012), mas pensar o problema de modo que seja compreensível a eles, pensar possibilidades e traçar estratégias para orientá-los, conscientes de que outros caminhos podem ser tomados e que diferentes questões podem surgir.

Reconhecer essa variedade de caminhos e questões resulta na imprevisibilidade como uma característica do procedimento associado a modelagem, que não deve ser encarada com receio, mas como uma oportunidade de quebrar o engessamento do currículo e ensinar matemática de uma forma dinâmica, aproximando seu uso ao uso que fazemos em nossa vida, ao utilizar a matemática para resolver problemas, pois de acordo com os PCN, "A atividade matemática escolar não é 'olhar para coisas prontas e definitivas', mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade" (BRASIL, 1997, p. 19).

Outra característica, indicada por Silva e Klüber (2014), que identificamos nos princípios de English (2010) diz respeito ao "ensino interdisciplinar". English (2010) propõe o princípio da significação como sendo uma maneira dos alunos relacionarem e compreenderem situações. Essas situações, por sua vez, podem contemplar as mais variadas temáticas, como podemos observar nos exemplos de temas abordados em atividades de modelagem matemática que citamos, os quais contemplam desde a construção de um guia para o consumidor (ENGLISH, 2006) até a análise do comportamento dos motoristas no trânsito (SOUZA; SANTIAGO; LUNA, 2011). A abordagem dessas temáticas pode promover o estudo de conteúdos associados a diferentes disciplinas, trazendo à tona seu caráter interdisciplinar.

Esse caráter pode ser associado ainda ao princípio da generalização do modelo, que sugere que os modelos matemáticos produzidos pelos alunos sejam pensados de modo a serem utilizados, com os devidos ajustes, a outras situações, que guardem semelhanças com a situação que deu origem aos modelos matemáticos. Nesse empreendimento, diferentes discussões podem surgir, superando “a visão disciplinar que tem predominado no ensino de matemática” (BURAK; KAVIATKOVSKI, 2014, p. 61). Nesse contexto “a gestão do conhecimento parte do pressuposto de que os sujeitos são agentes da arte de problematizar e interrogar, e buscam procedimentos interdisciplinares capazes de acender a chama do diálogo entre diferentes sujeitos, ciências, saberes e temas” (BRASIL, 2013, p. 29).

Essa gestão do conhecimento, citada pelas Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Básica, coloca o “aluno como sujeito da aprendizagem” e revela um “ensino problematizador”, “dialógico e investigativo” (SILVA; KLÜBER, 2014). Esses aspectos são observados nos princípios de English (2010) que indicam que em atividades de modelagem matemática, particularmente, os alunos devem ser encorajados a externalizar seus pensamentos e raciocínios, e devem ser orientados a incluir descrições e explicações sobre o desenvolvimento que deu origem à produção do modelo. Nesse contexto, eles precisam também estar em constante avaliação, não aquela do professor sobre o aluno, mas uma autoavaliação, a partir da qual o aluno pode avaliar se seu modelo é efetivo e adequado para as necessidades da situação-problema e podem revisar progressivamente, como argumenta English (2010), suas criações e como trabalharam o tema.

Esses aspectos, por sua riqueza e potencial em atender a orientações presentes em documentos curriculares (MALHEIROS, 2014), têm sido discutidos nos últimos anos com professores em cursos de formação para os anos iniciais do Ensino Fundamental, como indicam pesquisas como as de Erdogan (2010), Luna, Santiago e Andrade (2013), Rehfeldt, Giongo e Quartieri (2013) e Malheiros (2014), que defendem que a modelagem deve ser apresentada aos professores já no curso de formação inicial.

Essa inserção pode ser uma saída para superar a complexidade com que é encarada a prática da modelagem matemática nos anos iniciais. Uma vez que atividades de modelagem matemática, segundo English (2003), têm como um de seus objetivos o desenvolvimento de sistemas conceituais generalizados – por meio dos modelos matemáticos – é preciso colocar os alunos diante de situações-problema a partir das quais eles possam identificar aspectos matemáticos que são generalizáveis e produzir modelos que têm potencial para serem utilizados em outras situações, com características semelhantes. Utilizar um modelo ou um caso conhecido para a solução de novos problemas, porém, não é um processo simples para os alunos dos anos iniciais. É, de fato, como argumenta English (2003), uma atividade multifacetada que requer que os alunos sejam hábeis para:

(a) construir modelos que compreendem os elementos estruturais necessários que lhes permitem raciocinar analogicamente com esses modelos;
(b) conhecer para procurar estruturas relacionadas ao lidar com problemas;
(c) conhecer como e quando utilizar seus modelos existentes na resolução de novos problemas e, nesse sentido, é importante que os alunos sejam capazes de antecipar situações e identificar casos em que um modelo pode ser utilizado;
(d) fazer as modificações necessárias em um modelo existente ao utilizá-lo em um novo problema.

Trabalhar com atividades de modelagem matemática desde os primeiros anos escolares pode contribuir para que essas habilidades sejam desenvolvidas e que, com isso, os alunos desenvolvam uma maturidade com relação à produção e ao uso de modelos matemáticos.

A orientação do professor nesse momento é imprescindível para ajudar as crianças conhecerem e identificarem tais aspectos, de modo que os alunos se movam para além do pensar sobre os seus modelos, para também pensar com eles, de modo que seu uso se configure como uma maneira de pensar (ENGLISH, 2003).

Uma sugestão é que essas discussões sejam inseridas no momento que os alunos compartilham seus modelos com a classe, em que eles expõem suas ações, seus resultados e recebem críticas construtivas dos colegas, além de eles criticarem seus próprios modelos, vislumbrando possibilidades de refiná-los. Quando os alunos trabalham de modo colaborativo na construção dos modelos, para atender aos critérios colocados tanto pela situação-problema, quanto pela matemática, eles se enchem de questões e conjecturas, envolvem-se em ações em que argumentações são requeridas e aprendem como resolver situações de desacordo. Em razão disso, os alunos conhecem diferentes pontos de vista e diferentes maneiras de pensar, o que os ajudam a tornar mais flexíveis seus padrões de pensamento (ENGLISH, 2003).

A modelagem matemática, portanto, apresenta potencial para discutir matemática e explorar sua linguagem, sendo uma oportunidade para os alunos de todos os níveis de escolaridade, dentre os quais destacamos os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Entendemos a linguagem como um aspecto que deve ser considerado, uma vez que perpassa por todos os outros, pois, como afirma Wittgenstein, nada existe fora da linguagem. Nesse sentido, é a partir desse aspecto que analisamos as produções de alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental ao desenvolverem atividades de modelagem matemática, e é a respeito desse aspecto, da linguagem na perspectiva de Wittgenstein, que dedicamos as discussões do próximo capítulo.

Capítulo 3

Linguagem e Linguagem Matemática:

a perspectiva filosófica de Wittgenstein

Matemática, linguagem e mundo são componentes que constituem questões que há muito tempo configuram-se como interesse de pesquisas e de discussões que ocorrem no âmbito da filosofia e da matemática. Considerar tais componentes pode agregar valores à discussão a respeito da modelagem matemática, pois é na linguagem e por meio dela que se usa a matemática para abordar situações provenientes do mundo real, ou seja, que se estrutura o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. São essas componentes que abordamos neste capítulo.

Partimos do pressuposto de que a matemática é manifesta por meio de uma linguagem que lhe é característica, com usos e regras próprios, segundo uma gramática que orienta seus usos.

Nesse sentido, linguagem e linguagem matemática são discutidas neste capítulo sob uma perspectiva filosófica de linguagem, fundamentada nas investigações do filósofo contemporâneo Ludwig Wittgenstein. Nossas argumentações, discussões e reflexões, portanto, vêm revestidas e pautadas por estudos de um filósofo que revolucionou a forma de olhar para a linguagem e de compreender sua relação com o mundo; que entende a linguagem como parte de uma atividade, a partir de seus usos, dos *jogos de linguagem*.

Linguagem e matemática são ainda discutidas olhando, particularmente, para usos que geralmente alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental fazem, sinalizando como a linguagem é apreendida e significada.

Por fim, a modelagem matemática é colocada em discussão à luz da perspectiva filosófica de Wittgenstein, como uma atividade que oportuniza diferentes usos da linguagem matemática.

Índice do Capítulo

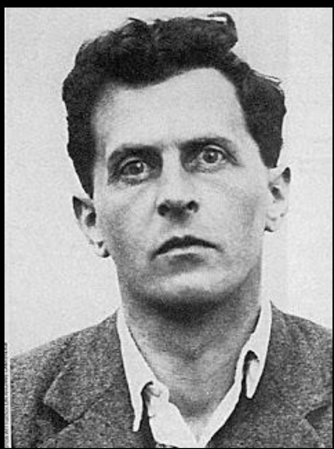
3.1 LINGUAGEM E LINGUAGEM MATEMÁTICA: UMA DISCUSSÃO À LUZ DAS CONSIDERAÇÕES FILOSÓFICAS DE WITTGENSTEIN

Linguagem e mundo é uma relação que movimentou (e ainda movimenta) muitas das discussões no âmbito da Filosofia. Foi um tema que inspirou muitos filósofos e, dentre eles, Wittgenstein (Quadro 1), que em seus estudos acerca da linguagem ofereceu contribuição ímpar para o entendimento dessa questão, lançando luz sobre as sombras que a obscureciam.

Quadro 1 – Quem é Wittgenstein?

Ludwig Joseph Johann Wittgenstein

(1889-1951)



Filósofo austríaco e um dos principais ícones da filosofia da linguagem, Wittgenstein revolucionou o modo de pensar a linguagem, entendendo a filosofia como uma atividade.
Sob essa perspectiva, personificada particularmente por sua obra póstuma *Investigações Filosóficas*, a busca metafísica por uma essência e por uma explicação fundamentada em argumentos lógicos do que é linguagem tem um fim. Ao invés disso, Wittgenstein sugere que olhemos para a linguagem em seu funcionamento, a partir dos *jogos de linguagem*.
Suas contribuições para a matemática e para a filosofia são incontestáveis.

Fonte: Do autor.

A busca por compreender, explicar e representar o mundo por meio da linguagem orientou o pensamento de Wittgenstein de duas maneiras, como sinaliza o Quadro 1 e que, geralmente, são destacadas pelos autores que pesquisam a seu respeito.

Em um primeiro momento, caracterizado pela obra '*Tractatus Logico-philosophicus*' (1921), cujas ideias foram influenciadas por nomes como Russel e Frege, Wittgenstein procurou, por meio da lógica, uma essência para a linguagem, com o pensamento de que existe por trás da linguagem uma estrutura universal, que transcende as diferenças sutis que nela observamos. Essa ideia, metafísica, que buscou estabelecer os limites da linguagem e, de certa forma, os limites do pensamento, foi contraposta pelo autor, em um segundo momento, personificado por sua obra póstuma 'Investigações Filosóficas' (1953), sinalizando que o entendimento da linguagem só pode se dar de uma maneira pragmática, a partir de seus usos, no seu funcionamento (WITTGENSTEIN, 2012). É nessa prática, do uso da linguagem, que Wittgenstein estruturou sua filosofia e revolucionou o modo como a linguagem é entendida.

Discussões, sob essa perspectiva, nos encaminham a reflexões como as engendradas pelo filósofo Michael Dummett sobre a natureza da matemática, que nos levam a ponderar sobre a tão famosa dicotomia presente nas questões apontadas por Otte e Barros (2015): Será a matemática fruto da criação humana, influenciada por fatores históricos, políticos e sociais, como defendiam os construtivistas e como indicou Galileu ao dizer que a “Matemática é um reflexo da atividade humana no mundo”? Ou terá a matemática um desenvolvimento independente das influências e intenções dos seres humanos, já existente em “algum lugar” deste ou de um outro mundo – mundo das ideias, por exemplo –, como defendia Platão, que concebeu a “Matemática como ciência da unidade e da ordem deste universo”?

Essa discussão é, de fato, abrangente e vai além de nossos interesses de pesquisa, porém, usar como referencial teórico a perspectiva de Wittgenstein, ícone da filosofia da linguagem, provoca em nós inquietações nesse sentido, particularmente, quando nosso interesse está no fazer modelagem matemática, que envolve uma maneira de analisar e interpretar situações do mundo real com as quais nos deparamos, fazendo uso da linguagem matemática. É nesse contexto que nos encontramos com essa discussão, que pode influenciar a maneira como a modelagem matemática é praticada no âmbito da sala de aula.

Embora em um primeiro momento de sua filosofia, Wittgenstein tenha se direcionado a uma perspectiva que buscou uma essência, uma explicação metafísica para a relação linguagem e mundo, aproximando-se, de certa maneira, às ideias platonistas, especificamente no que se refere à crença de que há algo além da linguagem que nossa percepção possa explicar, Wittgenstein sempre defendeu a linguagem como uma construção humana (IZMIRLI, 2013), e sendo a matemática uma linguagem, ou, portadora de uma linguagem, ela também o é. “O matemático é um inventor, não um descobridor” (WITTGENSTIEN, 1994, I-168)[28].

Para Wittgenstein usamos axiomas estipulados e regras sintáticas de transformação para inventar verdades matemáticas e falsidades matemáticas (IZMIRLI, 2013). Os números não estão em algum lugar esperando que utilizemos algum tipo de representação para expressá-

[28] Tradução de: The mathematician is a inventor, not a discoverer.

los, torná-los presentes, os números estão na representação, estão na linguagem (WAISMANN, 1979 *apud* IZMIRLI, 2013). É nesse contexto que Wittgenstein afirmou, já no *Tractatus*, que tudo que 'existe' só pode ser explicado na linguagem. "Os *limites da minha linguagem* são os limites do meu mundo" (WITTGENSTEIN, 2010, 5.6, grifos do autor).

Vejamos o exemplo da palavra 'vermelho' apresentado por Wittgenstein: "o vermelho existe"? Dizer que ele existe "em si e por si", nada diz. Como alguém vai saber o que eu tenho em mente quando eu digo a palavra 'vermelho' caso ele nunca tenha visto nada vermelho? O mesmo pode ser dito se esquecermos que cor tem tal nome, nesse caso não terá significado para nós dizer "o vermelho existe". Por outro lado, ainda que um objeto vermelho seja destruído, o vermelho não será, "daí que o significado da palavra 'vermelho' é independente da existência de uma coisa vermelha" (WITTGENSTEIN, 2012, § 57). De acordo com Wittgenstein (2012, § 58) queremos, na verdade "interpretar 'o vermelho existe' apenas como a asserção: a palavra 'vermelho' tem um significado". "Sem a linguagem não poderíamos fazer-nos entender" (WITTGENSTEIN, 2012, § 491). Somos seres linguísticos e as palavras, os signos, a linguagem, são significados no uso, dentro de um determinado contexto, de uma atividade, de uma "forma de vida" (WITTGENSTEIN, 2012, § 23).

Wittgenstein usou a expressão *forma de vida* para referir-se às atividades da linguagem associadas à uma determinada prática e cultura, na qual governa um conjunto de regras compartilhado pelos integrantes de uma ou mais comunidades, que orienta e regula as ações simbólicas individuais ou coletivas que se realizam em um tempo-espaço determinado. Uma forma aberta e historicamente situada de organização socialmente instituída de interações humanas (MIGUEL, 2014).

Vamos pensar, por exemplo, no símbolo $f(x)$. Sem dúvida em Matemática ele diz respeito a uma função, mais especificamente, ao valor de uma função em x, mas será esse o significado para um leigo em Matemática? Caso o sujeito não tenha conhecimento sobre função, provavelmente o símbolo não passará de letras do alfabeto. Ou, caso o sujeito, por qualquer que seja o motivo, não conheça o alfabeto, o símbolo não passará de um conjunto de rabiscos ou algo do tipo. Mas, independentemente do caso, no âmbito da matemática o símbolo $f(x)$ diz respeito a uma função! Ou seja, ainda que um sujeito não consiga entender o significado do símbolo $f(x)$, ele tem seu significado convencionado no âmbito da matemática, socialmente instituído, compartilhado por uma *forma de vida*.

Entender uma linguagem, portanto, envolve não somente concordar com as definições, mas também nos julgamentos. Não nas opiniões, mas nas *formas de vida*, que constituem o sistema de referência por meio do qual interpretamos uma linguagem (WITTGENSTEIN, 2012). São as *formas de vida* que determinam o conjunto de regras, uma "gramática", que orienta as atividades associadas a um determinado contexto (WITTGENSTEIN, 2012, § 496).

Vamos analisar as seguintes situações:

i. Eu envio alguém às compras. Dou-lhe uma folha de papel onde se encontram os signos: "cinco maçãs vermelhas". Ele leva o papel ao comerciante. Este abre a gaveta sobre a qual está o signo "maçã". Ele procura a palavra "vermelho" numa tabela e encontra defronte a ela uma amostra de cores. Ele diz a sequência dos numerais – suponho que ele a saiba de cor – até a palavra "cinco", e a cada número tira da gaveta uma maçã que tem a cor da amostra (WITTGENSTEIN, 2012, § 1).
ii. Um cliente pergunta a um feirante: quanto custa o abacaxi? O feirante responde: um abacaxi custa três reais, dois custam cinco reais.

Observe que em ambas as situações não se fala sobre qual é o significado da palavra "cinco", apenas como essa palavra é *utilizada* no contexto de cada situação.

Os signos "cinco maçãs vermelhas" escritos na folha de papel entregue ao comerciante, na situação i., indica-lhe que desejo que ele me venda a quantidade de cinco maçãs, resultado da contagem de 1 a 5, e que estas cinco maçãs sejam da cor "vermelha". Nada precisa ser dito ao comerciante além dos signos presentes na folha de papel, nada precisa ser explicado. Ele age de acordo com a forma como foi educado culturalmente para executar essas atividades, "para reagir dessa maneira" aos signos entregues a ele (WITTGENSTEIN, 2012, § 6).

Na situação ii., por sua vez, a palavra "cinco" também é utilizada para indicar uma quantidade, um valor. Contudo, as regras pelas quais essa quantidade foi obtida não são as mesmas que na primeira situação. Enquanto o "cinco" da situação i. faz referência à sequência dos números naturais, seguindo a ordem "+1", o "cinco" da situação ii. segue a regra de que 'um abacaxi custa três reais, dois custam cinco reais'.

Mas $2 \times 3 = 5$? Isso é possível? No caso dos feirantes, dois abacaxis de três reais custarão sim 5 reais, mas isso, de forma alguma, invalida a matemática! Isto é, na matemática 2×3 é sempre igual a 6, isso é uma regra, uma convenção da gramática associada à matemática. Qualquer afirmação diferente desta estará incorreta. Nesse caso, a própria linguagem matemática pode ser tomada como padrão de correção, pois ‘$2 \times 3 = 6$’ é uma regra matemática e deve ser seguida nesse contexto por todos os participantes dessa *forma de vida* (WRIGHT, 1980; WITTGENSTEIN, 2012).

Poderíamos dizer então que os feirantes estão trabalhando com uma matemática diferente, assim como o faz Vilela (2007), que afirma a existência de diferentes matemáticas? Particularmente, não colocaríamos dessa maneira, uma vez que acreditamos que os feirantes têm consciência das regras matemáticas, eles simplesmente a utilizam de uma maneira diferente. Eles têm consciência que $2 \times 3 = 6$. Mas eles também têm consciência de que 5 é maior que 3 e que um *desconto* como esse chama atenção dos clientes para comprar mais. Afinal, antes dar um desconto e vender mais, do que correr o risco de vender menos e, também, lucrar menos. É diferente dizer ‘dois abacaxis em que cada um custa 3 reais custam 5 reais’ e escrever ‘$2 \times 3 = 5$’. São contextos diferentes. O primeiro está associado aos feirantes e o segundo à matemática, e embora apresentem certas semelhanças, assumem significados diferentes.

Dessa forma, identificamos nas duas situações *formas de vida* diferentes: do comerciante, dos feirantes, da matemática. Cada *forma de vida* age em conformidade a suas regras, e o que é permitido em uma pode não ser permitido em outra. Temos, portanto, exemplos de diferentes usos da linguagem, usos que Wittgenstein denomina “jogos de linguagem” (WITTGENSTEIN, 2012, § 7).

É com essa ideia que Wittgenstein revolucionou o modo como a linguagem é entendida. Ao discutir as duas situações, por exemplo, não precisamos explicar o significado das palavras, ou “o que é a linguagem”, mas analisamos seu uso, seu funcionamento, os *jogos de linguagem*. É nos *jogos de linguagem* que a linguagem tem significado.

Para Wittgenstein (2012, § 43) “o significado de uma palavra é seu uso na linguagem”. E podemos estender essa colocação também aos signos, às frases etc. Disse Wittgenstein (2012, § 7): “Chamarei de ‘jogo de linguagem’ também a totalidade formada pela linguagem e pelas atividades com as quais ela vem entrelaçada”. Dessa forma, “a expressão ‘jogo de linguagem’ deve salientar aqui que falar uma língua é parte de uma atividade ou de uma forma de vida" (WITTGENSTEIN, 2012, § 23).

Vamos pensar, por exemplo, nos possíveis usos da palavra 'meia'. Podemos falar em meia hora, meia dúzia, ramal dois meia dois sete, meia-vida, meia noite, meia para vestir... há uma pluralidade de usos, que só podem ser significados no conjunto das atividades com as quais a linguagem está associada, ou seja, nos *jogos de linguagem*. Vejamos outro exemplo.

> E se eu perguntasse: Enquanto proferimos as frases "Este bastão mede 1m" e "Aqui está 1 soldado", mostra-se claro para nós que temos em mente coisas diferentes com "1", que "1" tem diversos significados? – Não absolutamente. – Diga, por exemplo, uma frase como "A cada 1m está um soldado, a cada 2m, portanto, 2 soldados". Se nos perguntam "Você tem em mente a mesma coisa com os dois uns?", responderíamos, talvez: "Evidentemente, tenho em mente a mesma coisa: um!" (Talvez levantando um dedo para o alto.)
> O "1" tem um significado distinto quando usado uma vez como medida e outra vez como algarismo? Se a questão é colocada deste modo, a resposta então será afirmativa (WITTGENSTEIN, 2012 § 552-553).

O trecho mostra, por um lado, que ambos os "uns" dizem respeito a uma unicidade, mas, por outro, enquanto o primeiro "um" indica uma medida, o segundo indica um algarismo. Ambos os usos são permitidos na linguagem, na matemática. Assim como existem outros usos possíveis e que preservam semelhanças com os *jogos de linguagem* citados.

Wittgenstein afirma que as espécies de números formam uma família e questiona: por que chamamos algo de "número"?

> Ora, talvez porque tem um-direto-parentesco com alguma coisa que até agora se chamou de número; e pode-se dizer que através disso adquire um parentesco com uma outra coisa que também chamamos assim. E alargamos nosso conceito de número do mesmo modo que, ao tecermos um fio, traçamos fibra por fibra. E a robustez do fio não consiste em que uma fibra qualquer perpasse toda sua extensão, mas em que muitas fibras se sobreponham umas às outras (WITTGENSTEIN, 2012, § 67).

Há, portanto, entre as espécies de números semelhanças, ou parentescos, que são descritos por Wittgenstein (2012, § 67) como *semelhanças de família*, uma vez que há entre alguns *jogos de linguagem* "uma complicada rede de semelhanças que se sobrepõem umas às outras e se entrecruzam. Semelhanças em grande e em pequena escala", como as semelhanças de uma família: "estatura, traços fisionômicos, cor dos olhos, andar, temperamento etc. etc.".

"Os jogos de linguagem estão aí muito mais como *objetos de comparação*, os quais, por semelhança e dissemelhança, devem lançar luz nas relações de nossa linguagem" (WITTGENSTEIN, 2012, §130). Constituem o meio pelo qual se dá a formação de conceitos.

3.2 LINGUAGEM E MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS

A matemática está presente nos currículos desde os primeiros anos escolares, independentemente de raças, credos ou sistemas políticos. É, em geral, considerada fundamental para a formação de cidadãos críticos, capazes de, junto com a língua materna, se expressarem e se fazerem entendidos, de compreenderem a realidade, em seus múltiplos aspectos, e agirem sobre ela (MACHADO, 2011).

Diante de tal importância, é preciso que a criança aprenda a lidar com problemas desde cedo. Apesar da crença que aflora do senso comum de que para aprender matemática o sujeito precisa primeiro ser alfabetizado, conforme observam Moretti e Souza (2015) é preciso refletir se aprender a ler, ou aprender os números, é realmente condição necessária para que os alunos possam entender os problemas e seus enunciados.

De acordo como o Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil, "a conservação do número não é um pré-requisito para trabalhar com os números e, portanto, o trabalho com conteúdos didáticos específicos não deve estar atrelado à construção das noções e estruturas intelectuais mais gerais" (BRASIL, 1998, p. 210). Além disso,

> As crianças, desde o nascimento, estão imersas em um universo do qual os conhecimentos matemáticos são parte integrante. As crianças participam de uma série de situações envolvendo números, relações entre quantidades, noções sobre espaço. Utilizando recursos próprios e pouco convencionais, elas recorrem a contagem e operações para resolver problemas cotidianos, como conferir figurinhas, marcar e controlar os pontos de um jogo, repartir as balas entre os amigos, mostrar com os dedos a idade, manipular o dinheiro e operar com ele etc. Também observam e atuam no espaço ao seu redor e, aos poucos, vão organizando seus deslocamentos, descobrindo caminhos, estabelecendo sistemas de referência, identificando posições e comparando distâncias (BRASIL, 1998, p. 207).

Isto é, antes mesmo de ir para a escola os alunos já têm contato com situações-problema em que eles precisam elaborar estratégias para solucioná-los.

Resolver problemas envolve ações que vão para além da compreensão da situação desencadeadora, como "analisar dados, relacioná-los com o conceito matemático presente no problema, levantar hipóteses, testá-las, avaliar os resultados e reorganizar as ações caso o resultado não seja viável" (MORETTI; SOUZA, 2015, p. 36).

O procedimento descrito envolve ações que precisam ser aprendidas pela criança. A inserção da modelagem matemática no contexto escolar desde os primeiros anos pode ajudar no desenvolvimento de habilidades que viabilizam essas ações, uma vez que em uma atividade de modelagem matemática os dados para resolver o problema não estão explícitos no enunciado, que aliás, não vem, de modo geral, estampado nas páginas de um livro, é formulado de acordo com as características da situação investigada. Desse modo, é preciso buscar informações, avaliar quais dados podem contribuir com a solução do problema, ou ainda, se necessário, produzir tais dados, utilizando instrumentos apropriados para a coleta. Esses dados, submetidos a uma análise matemática, podem resultar na formulação de hipóteses e simplificações, que orientam o uso da matemática para a produção do modelo matemático, o qual deve ser avaliado com a intenção de verificar se os resultados obtidos são plausíveis ou necessitam de revisões. No último caso, a produção do modelo matemático deve ser retomada, as hipóteses modificadas, ou, se preciso for, novos dados devem ser coletados.

O desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, portanto, oportuniza que o sujeito desenvolva habilidades necessárias para lidar com a matemática na resolução de problemas.

> Lidar com a matemática é, antes de tudo, oferecer à criança a oportunidade de agir, e posteriormente levá-la a refletir acerca de suas ações: reviver em pensamento os acontecimentos que acabaram de se desenvolver, antecipar o que poderia vir a acontecer, procurar prever... (CERQUETTI-ABERKANE; BERDONNEAU, 1997, p. 4).

Nesse contexto, o uso da linguagem matemática é o meio pelo qual os alunos podem sistematizar ideias, orientar investigações e comunicar resultados. A escola é uma instituição que se destina a promover situações em que o esse uso se faz necessário (BRASIL, 1997).

> A escola marca a transição de um contexto familiar, onde as relações são marcadas pela proximidade, pela segurança que esse ambiente conhecido pela criança proporciona a ela, para outro influenciado pela cultura, com outros códigos e possibilidades de interação. A matemática surge como uma possibilidade para trabalhar novas competências e estratégias próprias do mundo escolar (MENDES; SANTOS FILHO; PIRES, 2011, p. 7).

É na escola que as crianças, na condição de alunos, são orientadas para aprender a utilizar a linguagem matemática, é nesse contexto que os símbolos matemáticos são significados, mediante seus usos e à inserção da criança em diferentes *jogos de linguagem*.

Segundo Wittgenstein essa 'orientação' que a criança recebe na escola é parte de um *treinamento*. "Ensinar a linguagem aqui não é explicar, mas treinar" (WITTGENSTEIN, 2012, § 5). Não um treino na perspectiva do behaviorismo de Skinner, de estímulo-resposta, mas um treino que podemos interpretar como uma formação.

Esse treinamento consiste, em linhas gerais, na inserção da criança em novos *jogos de linguagem*, uma vez que Wittgenstein (2012) defende que é a partir de novos usos da linguagem que ocorre a compreensão do significado em suas diferentes facetas, ampliando o entendimento das frases, palavras, símbolos, enfim, da linguagem.

Para Wittgenstein (2012) esse treinamento começa com o uso da linguagem em sua forma mais primitiva, na qual o uso das palavras repousa sobre os objetos aos quais denominam. De acordo com Wittgenstein (2012, § 5) "quando aprende a falar, a criança emprega tais formas primitivas de linguagem". A linguagem dos construtores, apresentada por Wittgenstein (2012, § 2) exemplifica esse tipo de uso, no qual basta o pedreiro gritar 'lajota' para que seu ajudante saiba que lajotas devem ser levadas até ele. Assim como faz o médico durante uma cirurgia, por exemplo, ele não precisa dizer ao enfermeiro 'passa-me o bisturi', pronunciar 'bisturi' será suficiente para que essa solicitação seja entendida e atendida.

Esse é o tipo de sistema de comunicação descrito por Santo Agostinho, ao qual Wittgenstein se empenha em criticar com a ideia de *jogos de linguagem*. Ele, contudo, não nega esse tipo de uso como um sistema de comunicação, mas alega que "nem tudo o que chamamos de linguagem é este sistema" (WITTGENSTEIN, 2012, § 3). Ou seja, a linguagem envolve uma complexidade que não pode ser reduzida a uma associação biunívoca entre palavra e objeto que ela representa, ainda que uma parte importante do treinamento de uma criança consista em apontar para objetos, dirigir sua atenção para eles enquanto proferimos uma palavra e mostramos a ela suas formas. A isto Wittgenstein (2012, § 6) chama de "ensino ostensivo das palavras".

Essa é uma atitude comum no contexto da matemática, uma vez que sua linguagem é resultado de um processo histórico, convencionado por uma comunidade. Dizemos frequentemente coisas do tipo “Este é o número dois”, “Este é o sinal de adição”, “Isto é perímetro”, “Esta figura é triangular”, “Este é o numerador e este é o denominador” etc.

“Dar nome”, segundo Wittgenstein (2012, § 15), é uma atitude semelhante a fixar uma etiqueta em algo. Somos educados e treinados para perguntar: “Como se chama isto?” (WITTGENSTEIN, 2012, § 27). Essa atitude para Wittgenstein (2012, § 26) pode ser entendida como uma “preparação para o uso de uma palavra”.

Também fazem parte dessa preparação, desse treinamento, os processos de repetição. Na sala de aula, por exemplo, é um exercício comum os alunos repetirem as palavras que o professor pronuncia, repetir um procedimento matemático, um cálculo (WITTGENSTEIN, 2012).

A explicação ostensiva vai ajudar na compreensão da palavra, mas não oferece todo o suporte para o entendimento de seu uso.

> Pode-se então definir ostensivamente um nome próprio, um nome de cor, um nome de material, um numeral, o nome de um ponto cardeal etc. A definição do número dois “Isto significa ‘dois’” – enquanto se mostram duas nozes – é perfeitamente exata – Mas se pode definir o dois assim? (WITTGENSTEIN, 2012, § 28).

A questão colocada por Wittgenstein chama atenção para o fato de que não podemos nos deixar iludir e acreditar que apontar para dois objetos garantirá o entendimento do que significa “dois”. Wittgenstein (2012, § 29) sugere que o dois até pode ser definido ostensivamente da seguinte maneira “Este *número* se chama ‘dois’”. Há contudo, a necessidade da criança saber o que significa ‘número’, pois a asserção ‘número’ apenas indica um lugar da linguagem, da gramática, em que colocamos a palavra. De fato, Wittgenstein reconhece que isso evitaria alguns mal-entendidos de modo que ficaria claro que a palavra ‘dois’ diz respeito a um número e não a uma cor, por exemplo (WITTGENSTEIN, 2012).

Mas seria essa a maneira de compreender a palavra ‘número’, que pode expressar ora uma quantidade, ora uma medida, ora uma posição...? O conceito de número, como explica Wittgenstein (2012) não pode ser considerado como a soma lógica desses conceitos individuais, pois se assim o fosse estaríamos estabelecendo limites rígidos para esse conceito. Na concepção de Wittgenstein (2012, § 68), os conceitos não podem ser encarados dessa forma, é possível usar a palavra ‘número’ “de tal modo que a extensão do conceito *não* seja fechada por um limite”.

Para que se possa compreender essa ideia, Wittgenstein nos sugere que pensemos no uso da palavra ‘jogo’. Seríamos capazes de indicar seus limites? Ou de dizer o que é ainda um jogo e o que não é mais? Segundo Wittgenstein, podemos traçar alguns, mas somente no caso de nenhum ainda ter sido traçado. No caso da palavra ‘número’, porém, temos já limites estabelecidos, convencionados, para o que chamamos de números reais, números racionais, números cardinais etc. e sua compreensão trata-se, portanto, de uma definição, que para Wittgenstein (2012) exerce uma função de regra. Ou seja, com relação à compreensão da palavra ‘número’, na asserção “Este *número* se chama ‘dois’” temos primeiro que explicar o que significa a palavra número.

> É evidente que temos que explicá-la. – Portanto, explicar mediante outras palavras! O que acontece com a última explicação nesta corrente? (Não diga “não há uma ‘última’ explicação”. Isto é exatamente como se você quisesse dizer: “Não há uma última casa nesta rua; pode-se sempre construir uma outra”).
> Se a palavra “número” é necessária na definição ostensiva do dois, depende se uma pessoa a concebe, sem essa palavra, de um modo diferente do que eu quero. E isto dependerá certamente das circunstâncias em que é dada, e da pessoa, a quem a dou.
> E o modo como ele ‘concebe’ a explicação se mostra no modo como ele faz uso da palavra explicada (WITTGENSTEIN, 2012, § 29).

São nos usos da palavra que se revelam a compreensão e a necessidade de outras explicações. Os *jogos de linguagem* servem, pois, como meio de regulação e os padrões de correção são as regras da gramática, no caso da linguagem matemática, as definições, os teoremas etc.

> [...] há certos critérios de comportamento para dizer que alguém não entende uma palavra: que a palavra não lhe diz nada, se ele não sabe o que fazer com ela. E critérios para ele “acreditar entender” a palavra, para vincular-lhe um significado, mas não o significado correto. E, finalmente, critérios para ele entender a palavra corretamente (WITTGENSTEIN, 2012, § 269).

Pode-se dizer que os significados são aprendidos nos *jogos de linguagem* que a criança domina. E os diferentes exemplos de uso que esses *jogos de linguagem* proporcionam sinalizam não um único significado para cada palavra, mas uma família de significados, que se entrecruzam por meio de algumas semelhanças – *semelhanças de família*.

É a ampliação desses usos, desses *jogos de linguagem*, de uma linguagem primitiva – associada aos processos de denominação e de repetição – a novos usos em diferentes contextos, que Wittgenstein (2012) considera que constitui o ensino de uma linguagem.

Os textos matemáticos, portanto, devem surgir nos processos de ensino como necessidade de comunicação de eventos (MORETTI; SOUZA, 2015), assim como a modelagem matemática o faz, e a utilização de símbolos específicos da linguagem matemática deve ser incorporada a esses textos por meio de um trabalho minucioso e frequente, como se pode observar no 'treinamento' explicado por Wittgenstein (2012) com relação ao ensino e, por conseguinte, à aprendizagem de uma linguagem.

3.3 LINGUAGEM E MODELAGEM MATEMÁTICA

O fazer modelagem matemática, no âmbito da Educação Matemática, em particular, na sala de aula, é uma atividade que, de certo modo, visa preparar o aluno para lidar com diferentes situações, fazendo o uso da linguagem matemática como meio de análise e argumentação. É nesse contexto que muitos autores apontam o fazer modelagem matemática como uma prática para as aulas de matemática e para a vida.

Assim como os exemplos apresentados por Wittgenstein (2012, § 23):

> Ordenar, e agir segundo as ordens -
> Descrever um objeto pela aparência ou pelas suas medidas -
> Produzir um objeto de acordo com uma descrição (desenho) -
> Relatar um acontecimento -
> Fazer suposições sobre o acontecimento -
> Levantar uma hipótese e examiná-la -
> Apresentar os resultados de um experimento por meio de tabelas e diagramas
> Inventar uma história; e ler -
> Representar teatro -
> Cantar cantiga de roda -
> Adivinhar enigmas -
> Fazer uma anedota; contar -
> Resolver uma tarefa de cálculo aplicado -
> Traduzir de uma língua para outra -
> Pedir, agradecer, praguejar, cumprimentar, rezar.

Usar a matemática e sua linguagem para interpretar situações-problema reais, ou seja, fazer modelagem matemática, também constitui um *jogo de linguagem*.

Há regras a serem seguidas, não um roteiro, mas um procedimento que, embora não seja rígido e cujo encaminhamento não pode ser determinado de antemão, orienta o modelador a agir em conformidade com esse *jogo de linguagem*. Esse *jogo* requer que a linguagem matemática – uma linguagem normativa que determina o modo como a linguagem deve ser utilizada em atividades matemáticas – seja utilizada para matematizar situações-problema não pertencentes à *forma de vida* associada à matemática, que envolvem um modo característico de agir e de usar a linguagem.

Sob essa perspectiva, conjecturamos que o *jogo de linguagem* que se constitui ao fazer modelagem matemática, está associado tanto à matemática quanto ao fenômeno sob investigação, no qual a linguagem matemática é utilizada para matematizar uma situação-problema e obter resultados matemáticos, em que características e atividades associadas ao fenômeno sob investigação são consideradas para o levantamento de hipóteses e o encaminhamento matemático da solução, além de servirem como meio de avaliação dos resultados matemáticos obtidos, uma vez que o problema provém desse fenômeno e requer que a solução também seja tratada nesses termos (TORTOLA, 2012).

Essas atividades que constituem o fazer modelagem matemática são indissociavelmente articuladas, e por serem atividades que são desenvolvidas de uma maneira que é específica desse fazer, que envolvem um determinado uso da linguagem matemática, um uso que lhe é característico, elas atribuem ao fazer modelagem matemática o caráter de *jogo de linguagem*.

> Em muitos casos, a introdução de um simbolismo matemático exagerado pode ser mais destrutivo que esclarecedor (seria o mesmo que utilizar granadas para matar pulgas!) O conteúdo e a linguagem matemática utilizados devem ser equilibrados e circunscritos tanto ao tipo de problema como ao objetivo que se propõe alcançar (BASSANEZI, 2004, p. 25).

Esse trecho revela que não basta usar a linguagem matemática, é preciso ter discernimento para *dosar* o uso da matemática de acordo com a situação-problema e conforme o modelador, uma vez que um modelo matemático não é caracterizado pelo uso em excesso do simbolismo matemático, que o torna cada vez mais complexo, mas caracteriza-se pelo uso de uma estrutura matemática de maneira simples, que serve aos propósitos do modelador de interpretar a situação sob investigação (BASSANEZI, 2004).

Essa complexidade além de variar de modelador para modelador, devido a bagagem de conhecimentos matemáticos de cada um, está, em grande medida, associada aos usos da linguagem matemática, que perpassam por toda a atividade de modelagem. A linguagem matemática, portanto, revela-se como o fio condutor que conduz o modelador da problemática em investigação à uma resposta para o problema, obtida por meio de um modelo matemático.

Para começar, os alunos precisam buscar informações e se inteirar com o fenômeno, para que o problema possa ser identificado. Dados e informações devem ser selecionados para a resolução do problema. Entra em jogo a linguagem matemática. Com a intenção de matematizar a situação, ou seja, de escrever a situação em termos matemáticos, descontextualizando-a para que técnicas e métodos matemáticos possam ser empreendidos, variáveis são definidas, hipóteses levantadas e simplificações realizadas.

As hipóteses direcionam o encaminhamento matemático da resolução e apresentam indicativos de como usar a matemática para resolver o problema. Para isso, um modelo matemático é produzido, o qual é estruturado matematicamente por meio da linguagem e apresenta certo nível de abstração e de generalização. Esse modelo matemático deve ser avaliado usando as informações disponíveis a respeito do fenômeno, de modo a confirmar sua validade ou indicar a necessidade de reformulação.

Modelos matemáticos, devido a essa característica de generalização que a linguagem matemática permite expressar, servem não apenas para uma situação em particular, mas seu uso pode ser estendido para várias situações cujas características apresentam certas semelhanças, sendo apenas necessárias algumas modificações no que se refere ao contexto da situação.

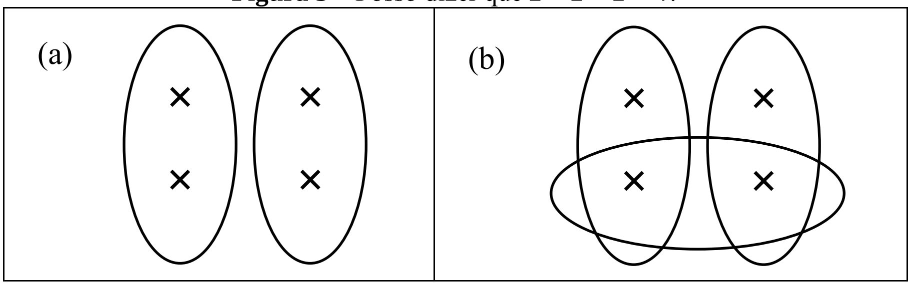
Por fim, deve ser realizada a comunicação dos resultados, de modo que a solução para o problema, suas implicações e o modo como essa solução foi obtida sejam expostos. É nessa exposição que os alunos revelam o que compreenderam ou não, pois segundo Wittgenstein (2012) é no uso que a compreensão se explicita. A matemática funciona aqui como meio de regulação nesse *jogo de linguagem*, uma vez que nesse momento o professor avalia os usos da linguagem pelos alunos, avaliando sua pertinência nessa *forma de vida*.

Nesse viés filosófico, Souza e Luna (2015), com base nas considerações de Wittgenstein, fazem uma intepretação da modelagem matemática, apontando-a como uma maneira de organizar nossas experiências com o mundo.

Para Wittgenstein, sendo a matemática uma linguagem normativa, seus usos devem estar de acordo com a gramática que a rege, portanto, enunciados matemáticos são enunciados gramaticais. A crença de Wittgenstein quanto à matemática ser uma construção humana e seu desenvolvimento se dar na linguagem e pela linguagem revela-se também nesse momento, uma vez que, sendo os enunciados gramaticais, não há situação empírica que invalide a matemática caso algo não ocorra conforme o esperado. Isto é, se alguém envia 2 e-mails e depois envia mais 2, independentemente se esses e-mails chegaram ao seu destino, 4 e-mails foram enviados. Ainda que um e-mail, porventura, se perca na rede, não podemos dizer no âmbito da matemática que “2 + 2 = 3”! Como colocou Wright (1980), esse seria um uso incorreto da linguagem matemática. Todavia, só podemos dizer que 4 e-mails foram enviados pois usamos a matemática como meio de organização de situações empíricas.

Suponhamos que alguém olhe para a Figura 5 (a) e afirme que 2 + 2 = 4 e que ao olhar para a Figura 5 (b) afirme que 2 + 2 + 2 = 4.

Figura 5 – Posso dizer que 2 + 2 + 2 = 4?



Fonte: Wittgenstein (1994, I-38).

Caso isso ocorra, pode-se dizer que o sujeito não está jogando segundo regras da matemática (GOTTSCHALK, 2008), uma vez que no âmbito da matemática as imagens apresentadas na Figura 5 referem-se a conjuntos e, conforme a teoria dos conjuntos, o número de elementos pertencentes a união de conjuntos é a soma do número de elementos pertencentes a cada conjunto, excluindo-se os elementos que se repetem.

A matemática, portanto, é utilizada para organizar nossas experiências com o mundo (GOTTSCHALK, 2008), e por conseguinte, a modelagem matemática, que faz uso da matemática, também pode assim ser considerada, conforme Souza e Luna (2015).

Contudo, no *jogo de linguagem* que diz respeito ao fazer modelagem matemática, trabalhamos com questões de natureza empírica, portanto, para que o uso da linguagem matemática seja possível algumas idealizações têm de ser realizadas. E, nesse sentido, as respostas obtidas para os problemas, por meio da modelagem matemática, não são preestabelecidas ou esperadas, nem são respostas exatas, são respostas como as obtidas a partir de outros meios que utilizamos em nossa vida, que nos fornecem subsídios para ler e interpretar situações-problema e, se for o caso, tomar decisões.

E, dependendo do problema com o qual o sujeito se depara, pode não haver uma teoria matemática que dê conta de produzir um modelo matemático e resolver o problema, sendo necessário o seu desenvolvimento – o que não acontece todo dia, principalmente no meio escolar, em que há o engessamento do que deve ser estudado pelos alunos, sobrando pouco espaço para o desenvolvimento de sua criatividade matemática.

Assim, para Bassanezi (2004), a modelagem matemática apresenta potencial para o desenvolvimento da matemática. Além disso, ajuda a driblar o engessamento curricular, que encontramos nas escolas, oferecendo aos alunos oportunidades de discutir como usar a matemática para resolver problemas.

É sob essa perspectiva que investigamos o *jogo de linguagem* constituído pelo uso da linguagem matemática em atividades de modelagem matemática desenvolvidas por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Capítulo 4

O Fazer Modelagem Matemática nos Anos Iniciais:

uma análise dos encaminhamentos dos alunos

Neste capítulo analisamos registros produzidos por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental ao desenvolverem de atividades de modelagem matemática com a intenção de elaborar compreensões a respeito da questão:

Que configurações podem assumir atividades de modelagem matemática desenvolvidas por alunos dos anos iniciais do Ensino fundamental?

A análise de conteúdo é utilizada para orientar o movimento que constitui nossas análises e os pressupostos teóricos adotados, a respeito da modelagem matemática e da linguagem, são trazidos para fundamentar e argumentar nossas inferências e reflexões.

Configurações de modelagem matemática são apontadas por meio das categorias emergentes a partir das análises dos encaminhamentos dos alunos. Esses encaminhamentos são colocados em discussão, em busca de compreensões e aproximações, com a finalidade de delinear configurações para a prática da modelagem matemática no âmbito dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Por fim, reflexões são tecidas a respeito das implicações das configurações caracterizadas para a prática da modelagem matemática e sua identidade.

Índice do Capítulo

4.1 AS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA DESENVOLVIDAS

Fazer modelagem matemática é como montar um quebra-cabeça, porém, nesse quebra-cabeça as peças não são determinadas *a priori*, elas são construídas no decorrer do caminho. Isso porque analisar situações-problema em busca de explicações sobre um fenômeno não é um procedimento linear e bem delimitado, os caminhos possíveis não se limitam a um só. Por um lado, um modelador pode adotar hipóteses diferentes e ser conduzido a encaminhamentos distintos; por outro lado diferentes modeladores podem adotar diferentes abordagens matemáticas e obter, ainda que diferentes, resultados que se aproximam (BASSANEZI, 2004).

Há, por assim dizer, diferentes maneiras de desenvolver uma atividade de modelagem matemática, de usar a matemática para resolver um problema constituído a partir de situações que se encontram ao nosso redor. Estamos interessados neste capítulo em analisar os caminhos, as abordagens, os encaminhamentos matemáticos adotados por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental ao desenvolverem atividades de modelagem matemática, suas ações, suas escolhas, suas argumentações, o modo como eles lidam com a matemática, com sua linguagem, e como eles entendem esse tipo de atividade e seu desenvolvimento. Estamos, portanto, interessados no que os alunos fazem, em como fazem e no entendimento deles a respeito do que fazem ao desenvolverem atividades de modelagem matemática, nas configurações de modelagem matemática que emergem a partir desse desenvolvimento.

Para isso, foram desenvolvidas atividades de modelagem com cinco turmas desse nível de escolaridade, 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental. Essas atividades foram desenvolvidas pelos alunos durante o horário de aula, sendo orientadas pelo professor/pesquisador e foram acompanhadas, na maior parte do tempo, pelas professoras regentes das turmas. No total, os alunos participaram do desenvolvimento de quatro atividades, sendo três propostas pelo professor e uma delas com o tema escolhido por eles, em conformidade com seus interesses. As atividades foram desenvolvidas em grupos, formados por 2, 3, 4 ou todos os alunos, dependendo da atividade, do ano escolar e das circunstâncias.

Totalizam quinze as atividades de modelagem matemática desenvolvidas no âmbito da pesquisa: três atividades com temas propostos pelo professor, desenvolvidas por todos os alunos, e doze atividades com temas escolhidos pelos alunos, sendo duas desenvolvidas por alunos do 1º ano, duas do 2º ano, uma do 3º ano, três do 4º ano e quatro do 5º ano. O Quadro 2 apresenta as temáticas abordadas nas atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos alunos.

Quadro 2 – Temáticas das atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos alunos

Temática da atividade	Turma que desenvolveu a atividade	Faixa etária predominante
Atividade 1: Crescimento das unhas **Atividade 2**: Desafio do balde de gelo **Atividade 3**: Coleta de lixo	Todas as turmas	6 a 10 anos
Atividade 4.1: Neve **Atividade 4.2**: Peixes	1º ano	6 anos
Atividade 4.3: Joaninha **Atividade 4.4**: Tigres	2º ano	7 anos
Atividade 4.5: Recordes	3º ano	8 anos
Atividade 4.6: Animais em extinção **Atividade 4.7**: Evolução do homem **Atividade 4.8**: Sono	4º ano	9 anos
Atividade 4.9: Animais de estimação **Atividade 4.10**: Cabelos **Atividade 4.11**: Futebol **Atividade 4.12**: Plantas	5º ano	10 anos

Fonte: Do autor.

Essas atividades – e com “atividades” nos referimos a todos os diálogos, imagens e registros escritos produzidos durante o desenvolvimento das atividades de modelagem – constituem o que Bardin (2011) denomina “corpus” da pesquisa. A constituição do corpus envolve a escolha e a definição do material a ser analisado de acordo com os objetivos definidos para a pesquisa, e consiste no “conjunto dos documentos tidos em conta para serem submetidos aos procedimentos analíticos” (BARDIN, 2011, p. 126).

Dentre essas atividades seis são descritas e analisadas neste capítulo: uma dentre as atividades cujos temas foram escolhidos pelo professor e que foram desenvolvidas pelas cinco turmas, referente ao *crescimento das unhas*; e cinco com temas escolhidos pelos alunos: uma do 1º ano com o tema *neve*, uma do 2º ano com o tema *Tigres*, uma do 3º ano com o tema *recordes*, uma do 4º ano com o tema *evolução do homem* e uma do 5º ano com o tema *animais de estimação*. As demais atividades, embora não sejam descritas na íntegra, são também consideradas para as análises e para a constituição e caracterização dos encaminhamentos dos alunos e para a construção das configurações de modelagem matemática emergentes. Uma breve descrição dessas atividades é realizada no Apêndice D.

O Quadro 3 sumariza as atividades de modelagem matemática que são analisadas na tese, e indica em que medida elas são analisadas.

Quadro 3 – Análise das atividades

Turma que desenvolveu a atividade	Temática	Análise
Todas as turmas	**Atividade 1**: Crescimento das unhas	Descrita e analisada
	Atividade 2: Desafio do balde de gelo	Considerada nas análises
	Atividade 3: Coleta de lixo	Considerada nas análises
1º ano	**Atividade 4.1**: Neve	Descrita e analisada
	Atividade 4.2: Peixes	Considerada nas análises
2º ano	**Atividade 4.3**: Joaninha	Considerada nas análises
	Atividade 4.4: Tigres	Descrita e analisada
3º ano	**Atividade 4.5**: Recordes	Descrita e analisada
4º ano	**Atividade 4.6**: Animais em extinção	Considerada nas análises
	Atividade 4.7: Evolução do homem	Descrita e analisada
	Atividade 4.8: Sono	Considerada nas análises
5º ano	**Atividade 4.9**: Animais de estimação	Descrita e analisada
	Atividade 4.10: Cabelos	Considerada nas análises
	Atividade 4.11: Futebol	Considerada nas análises
	Atividade 4.12: Plantas	Considerada nas análises

Fonte: Do autor.

Para apresentar e caracterizar as seis atividades indicadas, fazemos uma descrição detalhada de cada uma delas, explicitando os caminhos percorridos pelos alunos em busca de soluções para os problemas investigados.

Para preservar a identidade dos alunos, sujeitos da pesquisa, nessas descrições atribuímos a cada aluno um código, de acordo com a atividade desenvolvida, o qual utilizamos para nos referir a ele. O código indica: a atividade, A para a primeira atividade desenvolvida pelo aluno, B para a segunda, C para a terceira e D para a quarta; a série, 1 para o 1º ano, 2 para o 2º ano, e assim por diante; e o aluno, cuja numeração está de acordo com a ordem em que seu nome aparece na lista de nomes de cada turma fornecida pela escola ao pesquisador. Dessa forma, chamamos de A1.3, por exemplo, o 3º aluno da lista de nomes do 1º ano, referente à sua atuação na primeira atividade.

Referimo-nos ao professor pesquisador utilizando a letra P, independente da atividade ou turma, e às professoras regentes utilizando as letras PR, adicionando a elas o número correspondente à série em que a professora leciona. PR2, por exemplo, refere-se à professora regente do 2º ano.

4.1.1 Atividade proposta pelo professor para todas as turmas: *crescimento das unhas*

Essa foi a primeira atividade de modelagem desenvolvida pelos alunos (Atividade A) e contempla um tema escolhido pelo professor, configurando-se como uma atividade do primeiro momento de familiarização do aluno com a modelagem matemática, conforme argumentam Almeida e Dias (2004). Trata-se, portanto, de uma atividade cujo encaminhamento foi mais direcionado pelo professor. É importante esclarecer que esse direcionamento não deve ser entendido como uma condução na qual o professor determina e delimita os caminhos a seguir, mas como uma orientação por meio da qual questiona os alunos sobre como proceder, tira dúvidas, indica possíveis caminhos, dá o suporte necessário para que os alunos consigam desenvolver a atividade e resolver o problema (ALMEIDA; SILVA, VERTUAN, 2012).

O *crescimento das unhas* é uma temática associada ao corpo e aos hábitos de higiene, geralmente estudados nos anos iniciais do Ensino Fundamental, conforme indicações dos PCN (BRASIL, 1997). O tema foi pensado de modo a abarcar um fenômeno conhecido pelos alunos e que, de alguma maneira, pudesse despertar seu interesse.

Entretanto, o tema não é condição suficiente para que os alunos se envolvam na investigação. O professor, ao escolher um tema para a atividade, deve estar ciente de que está sujeito ao risco de os alunos não se interessarem e não se envolverem no seu desenvolvimento (HERMÍNIO, 2009), o que pode comprometer a dinâmica que requer uma atividade de modelagem matemática. É preciso, portanto, criar estratégias para provocar o interesse dos alunos e mantê-lo durante o desenvolvimento da atividade.

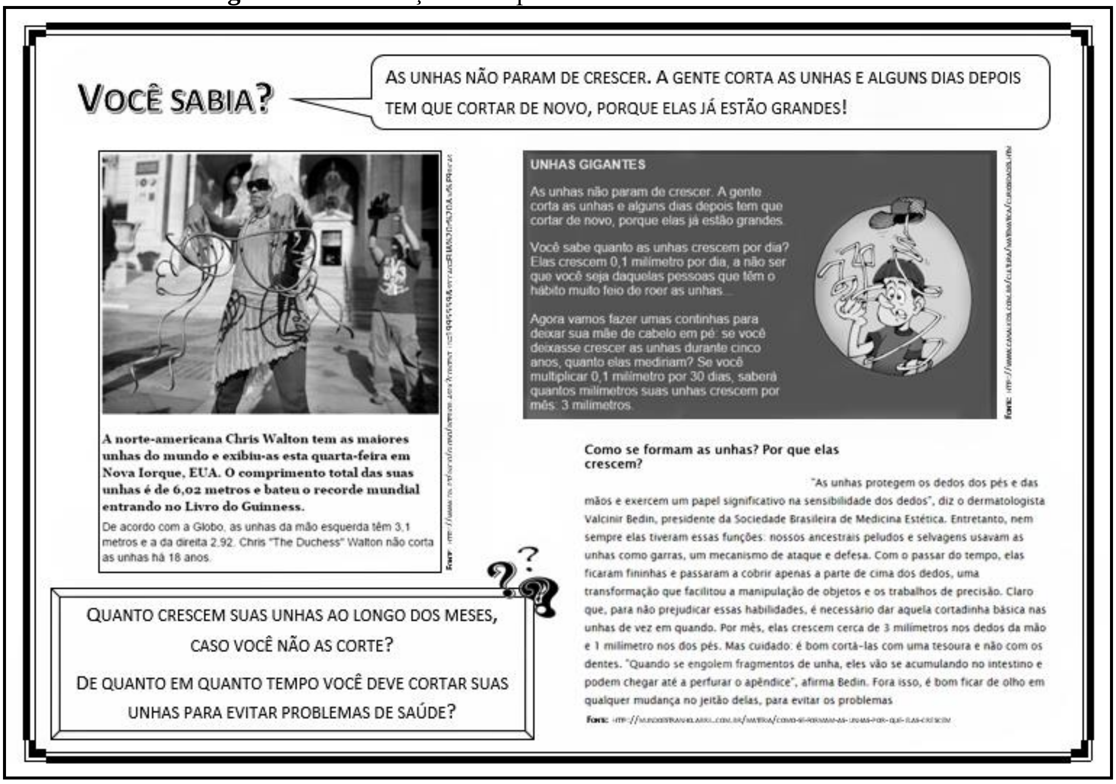
Com essa intenção o tema *crescimento das unhas* foi apresentado aos alunos por meio de um vídeo, um trecho de um programa infantil, que aborda a importância de cortar as unhas. O vídeo está disponível no YouTube, no canal do Quintal da Cultura[29], e conta a história de quatro amigos que estão brincando de bola e, como um deles não cortava as unhas há algum tempo, acaba arranhando os colegas, mesmo sem ter essa intenção. Diante dessa situação, os personagens discutem a necessidade de cortar as unhas.

[29] O vídeo pode ser acessado através do link: https://www.youtube.com/watch?v=FSToendzvjs.

Após assistirem o vídeo os alunos tiveram a oportunidade de fazer comentários, expor suas opiniões e entendimentos sobre o assunto. Os alunos, de modo geral, eram participativos e quase todos queriam falar, mesmo que para contar alguma história. Para direcionar as discussões algumas perguntas foram feitas aos alunos, como: Vocês já pensaram sobre como crescem nossas unhas? Vocês cortam suas unhas? Quais cuidados devemos ter com nossas unhas e ao cortá-las? Cortar as unhas dói? Vocês têm medo de cortar as unhas? Precisa ter medo de cortar as unhas? Por que é necessário cortar as unhas? O que acontece com as unhas caso elas não sejam cortadas?

A discussão foi orientada pelo professor usando alguns slides (Apêndice E) com informações associadas ao tema e que foram impressas e disponibilizadas aos alunos (Apêndice D). A Figura 6 apresenta em tamanho reduzido uma foto da folha com essas informações.

Figura 6 – Informações a respeito do tema *crescimento das unhas*



VOCÊ SABIA?

AS UNHAS NÃO PARAM DE CRESCER. A GENTE CORTA AS UNHAS E ALGUNS DIAS DEPOIS TEM QUE CORTAR DE NOVO, PORQUE ELAS JÁ ESTÃO GRANDES!

A norte-americana Chris Walton tem as maiores unhas do mundo e exibiu-as esta quarta-feira em Nova Iorque, EUA. O comprimento total das suas unhas é de 6,02 metros e bateu o recorde mundial entrando no Livro do Guinness.

De acordo com a Globo, as unhas da mão esquerda têm 3,1 metros e a da direita 2,92. Chris "The Duchess" Walton não corta as unhas há 18 anos.

UNHAS GIGANTES

As unhas não param de crescer. A gente corta as unhas e alguns dias depois tem que cortar de novo, porque elas já estão grandes.

Você sabe quanto as unhas crescem por dia? Elas crescem 0,1 milímetro por dia, a não ser que você seja daquelas pessoas que têm o hábito muito feio de roer as unhas...

Agora vamos fazer umas continhas para deixar sua mãe de cabelo em pé: se você deixasse crescer as unhas durante cinco anos, quanto elas mediriam? Se você multiplicar 0,1 milímetro por 30 dias, saberá quantos milímetros suas unhas crescem por mês: 3 milímetros.

Como se formam as unhas? Por que elas crescem?

"As unhas protegem os dedos dos pés e das mãos e exercem um papel significativo na sensibilidade dos dedos", diz o dermatologista Valcinir Bedin, presidente da Sociedade Brasileira de Medicina Estética. Entretanto, nem sempre elas tiveram essas funções: nossos ancestrais peludos e selvagens usavam as unhas como garras, um mecanismo de ataque e defesa. Com o passar do tempo, elas ficaram fininhas e passaram a cobrir apenas a parte de cima dos dedos, uma transformação que facilitou a manipulação de objetos e os trabalhos de precisão. Claro que, para não prejudicar essas habilidades, é necessário dar aquela cortadinha básica nas unhas de vez em quando. Por mês, elas crescem cerca de 3 milímetros nos dedos da mão e 1 milímetro nos dos pés. Mas cuidado: é bom cortá-las com uma tesoura e não com os dentes. "Quando se engolem fragmentos de unha, eles vão se acumulando no intestino e podem chegar até a perfurar o apêndice", afirma Bedin. Fora isso, é bom ficar de olho em qualquer mudança no jeitão delas, para evitar os problemas

QUANTO CRESCEM SUAS UNHAS AO LONGO DOS MESES, CASO VOCÊ NÃO AS CORTE?

DE QUANTO EM QUANTO TEMPO VOCÊ DEVE CORTAR SUAS UNHAS PARA EVITAR PROBLEMAS DE SAÚDE?

Fonte: Do autor.

Ao receber a folha os alunos se interessaram em fazer a leitura. De modo a explorar essa iniciativa tomada por eles, algumas informações, selecionadas pelo professor, foram lidas. A leitura das demais informações ficou a cargo dos alunos a ser realizada em um momento posterior, ou durante a atividade, ou no recreio, ou em casa, sozinho ou com a ajuda de parentes e/ou amigos.

Após a leitura, o professor questionou os alunos se eles haviam entendido as informações, esclarecendo eventuais dúvidas que surgiram e que foram apontadas por eles. Durante as discussões os alunos mostraram ter consciência da necessidade de cortar as unhas para manter a higiene. De modo geral eles citaram cuidados básicos com as unhas, como cortá-las frequentemente e lavar bem as mãos dando atenção às unhas.

Essas discussões constituíram o ponto de partida para proposição do problema *Quanto crescem suas unhas ao longo dos meses, caso você não as corte? De quanto em quanto tempo você deve cortar suas unhas para evitar problemas de saúde?*

Várias questões associadas ao tema e à matemática emergiram, como a discussão sobre unidades e instrumentos de medida, uma vez que o milímetro foi apresentado pela primeira vez aos alunos e, nesse contexto, eles discutiram também como usar a régua; surgiram também questões associadas ao calendário, pois as turmas de 1º e 2º ano ainda não tinham desenvolvido algumas noções associadas ao tempo, como por exemplo, reconhecer que um mês tem 30 dias e saber que quantidade indica tal número; as noções de espaço também emergiram já que os alunos não tinham noção da medida correspondente a 6,02 metros referente ao comprimento das unhas das mãos da recordista mundial apresentada em uma das reportagens (Figura 6 e Apêndice D).

Ações como mostrar o calendário, contar os dias com os alunos, usar uma trena ou fita métrica para indicar espaços, distâncias etc. foram necessárias para o engajamento dos alunos na atividade e compreensão do problema. O diálogo[30] a seguir, ocorrido no 1º ano, ilustra tais ações.

P: *Vocês sabem o que é 3 milímetros?*
Alunos: *Não.*
P: *Olha, um metro é isso aqui (mostra a medida na fita métrica). [...] Estão vendo esse monte de números dividindo o metro?*
Alunos: *Sim.*
P: *Um, dois, três, quatro, cinco, até o cem. O metro é dividido em cem centímetros. Então cada espacinho desse, igual da régua, quem tem régua? [...] Cada pedacinho desse, dividindo a régua ou a fita métrica, é um centímetro [...] Estão vendo esse espacinho desse número até esse (indica*

[30] Devido a característica dos alunos, de serem muito participativos, muitas vezes nos diálogos os alunos falavam juntos, alguns respondendo, outros apenas pensando alto. Para que os diálogos ficassem compreensíveis, eliminamos as falas que se transcritas iriam apenas dar volume e em nada contribuiriam para o entendimento de seus conteúdos.

dois números consecutivos na fita métrica)?

Alunos: *Sim.*

P: *Mas esse espacinho, olha só esse espacinho aqui (mostra na fita métrica) está dividido em vários pedacinhos. [...] Cada pedacinho desse representa um milímetro. Então, sabem quanto a unha cresce por mês? Em média...*

A1.10: *Três.*

P: *Três milímetros. Então é daqui (aponta o zero na fita métrica) até um, dois, três. É esse espacinho aqui (mostra o espaço na fita métrica).*

Uma questão para a qual o professor chamou atenção é que as informações indicavam que as unhas cresciam *em média* três milímetros por mês, ou seja, pode ser que em um mês ela cresça três milímetros, mas em outro ela cresça um pouco mais ou um pouco menos. Foi preciso, nesse momento, fazer um acordo, uma simplificação da situação, uma idealização. Nesse sentido, uma hipótese simplificadora da situação foi "As unhas das mãos crescem por mês 3 milímetros e as unhas dos pés 1 milímetro. Outra hipótese simplificadora, já sinalizada no texto do problema, foi: "as unhas não serão cortadas ou quebradas". Assumir tais hipóteses encaminhou os alunos para a resolução e para a produção de modelos matemáticos para a situação-problema. O diálogo a seguir, com alunos do 2º ano, apresenta o contexto em que essas hipóteses foram definidas.

P: *Vamos supor que alguém não queira cortar as unhas. O que vai acontecer com as unhas?*

A2.2: *A unha vai ficar muito grande...*

A2.12: *Vai crescer.*

A2.2: *Vai arranhar uma pessoa...*

A2.6: *Vai entrar sujeira.*

[...]

A2.13: *A unha fica desse jeito (abre os braços indicando um tamanho).*

P: *Será que fica tão grande assim?*

A2.2: *Você está doido?*

P: *O que vocês acham, será que a unha pode ficar tão grande assim?*

Alunos: *Não.*

P: *Não? Será que ela vai parar de crescer algum dia?*

Alunos: *Não.*

P: *E não pode ficar grande assim (abre os braços repetindo o gesto de A2.13)?*

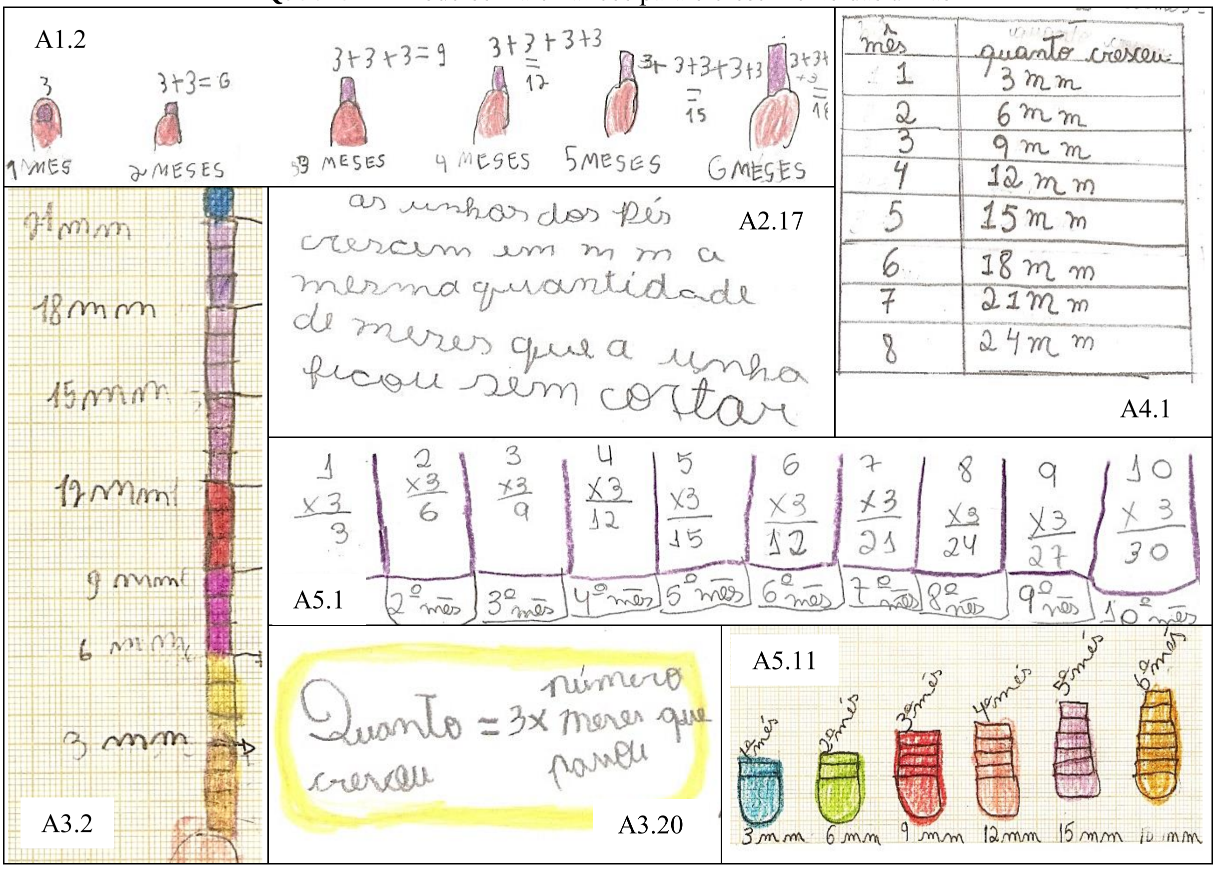
Alunos: *Não.*

P: *Ué, mas ela não vai parar de crescer e não pode ficar grande assim?*
Não (alguns) / Pode (outros).

A2.6: *Ela pode, mas se nós não cortarmos ela pode, mas se nós cortarmos ela, não pode.*

A informação "a cada mês as unhas das mãos crescem 3 milímetros e as unhas dos pés crescem 1 milímetro" foi a chave para a resolução. A partir dessa informação os alunos construíram desenhos que indicam as unhas crescendo a cada mês, gráficos utilizando papéis quadriculados, tabelas indicando o crescimento das unhas por mês, textos explicativos e descritivos, sequências de operações que sinalizam o raciocínio empreendido na construção de seus modelos, entre outros. O Quadro 4 apresenta alguns dos modelos matemáticos produzidos para descrever o crescimento das unhas ao longo do tempo.

Quadro 4 – Modelos matemáticos para o crescimento das unhas



Fonte: Do autor.

Com base nos registros apresentados no Quadro 4, podemos afirmar que os alunos conseguiram identificar que variáveis deveriam ser levadas em consideração na resolução do problema, a saber o crescimento da unha, em milímetros, e o tempo, em meses.

A construção desses modelos matemáticos promoveu a discussão de várias questões e de como usar a matemática na resolução do problema. O diálogo a seguir, por exemplo, indica o momento em que o professor discutiu com os alunos do 4º ano uma maneira de resolver diferente das que eles apresentaram e uma aluna percebeu que ao invés de 'adicionar 3' todo mês, eles poderiam multiplicar por 3 a quantidade de meses que a unha ficou sem cortar.

P:	*Olha só gente, agora eu vou precisar da ajuda de vocês, quanto cresceu no primeiro mês?*
Alunos:	*Três milímetros.*
P:	*E no segundo mês?*
Alunos:	*Seis.*
P:	*Seis. Por que que foi seis mesmo? (Silêncio) Porque já tinha três do primeiro mês que cresceu e cresceu três de novo, não foi? Que deu...*
Alunos:	*Seis.*
P:	*E no terceiro mês?*
A4.21:	*Cresceu nove.*
P:	*Por que nove?*
A4.13:	*Três mais três mais três.*
P:	*Isso, os três mais três que é o seis que tínhamos do mês anterior, mais três desse mês.*
A4.13:	*Nove.*
P:	*E no quarto mês?*
A4.18:	*Doze (fala baixo).*
P:	*Três mais três mais três mais três, que deu...*
Alunos:	*Doze.*
A4.13:	*Professor, não é mais fácil olhar na tabuada três vezes o quatro doze.*
P:	*Verdade, por que você acha que pode olhar na tabuada?*
A4.13:	*É porque daí fica fazendo três mais três mais três mais três...*
P:	*Quantas vezes eu tenho o três aqui (aponta para a resolução no quadro)?*
A4.13:	*Na primeira um.*
P:	*No primeiro mês? Uma vez só, né?*
A4.13:	*Então é três vezes o um.*
P:	*E aqui quantas vezes apareceu o três?*
Alunos:	*Duas vezes (falam baixo).*
P:	*No segundo mês apareceu quantas vezes?*
Alunos:	*Dois.*
A4.13:	*Coloca o dois vezes o três (fala baixo). Não, é três vezes o dois não é?*
P:	*É, tanto faz né? Porque apareceu duas vezes o três.*

Essa discussão, associada à identificação de regularidades na situação, ocorreu em todas as turmas e auxiliou os alunos a caminharem em direção a uma generalização da situação. Essa generalização foi realizada em conformidade com os conhecimentos matemáticos dos alunos em cada turma. O diálogo a seguir, por exemplo, ocorreu também no 4º ano e mostra a explicação de uma aluna a respeito de como proceder para determinar o quanto as unhas crescem após um determinado número de meses.

P:	*Então o que eu tenho sempre que fazer? Pegar a quantidade de meses e fazer o que com ela?*
A4.13:	*Qualquer quantidade de meses tem que fazer vezes o três.*
P:	*Vezes o três? Por que vezes o três?*
A4.13:	*Porque é o quanto a unha cresce.*

Os alunos do 4º ano e do 5º ano, além de identificar a possibilidade de fazer multiplicações entre o quanto a unha cresce em um mês e a quantidade de meses, associaram essas multiplicações à tabuada, como podemos observar no diálogo apresentado na sequência.

P: *Isso lembra o que? Essas continhas que vocês estão fazendo?*
A5.17: *Tabuada do 3.*
A5.10: *É... Tabuada.*
P: *Ah, lembra a tabuada. Então a tabuada ajuda vocês a responderem o problema?*
Alunos: *Sim.*

Os alunos do 1º ano, por sua vez, que ainda não conheciam a multiplicação, também recorreram à essa ideia para fazer a generalização, mas de forma intuitiva. Os alunos observaram e identificaram que a quantidade de *vezes* que os "3 milímetros" eram somados correspondia à quantidade de meses que passaram. Contudo, para eles chegarem a essa quantidade de *vezes* as ideias de adição e de contagem foram utilizadas.

Outras discussões também surgiram, associadas ao infinito, a conversões de medidas, a frações, às regularidades presentes na situação etc. e foram essas discussões que contribuíram para a compreensão dos alunos e resolução do problema.

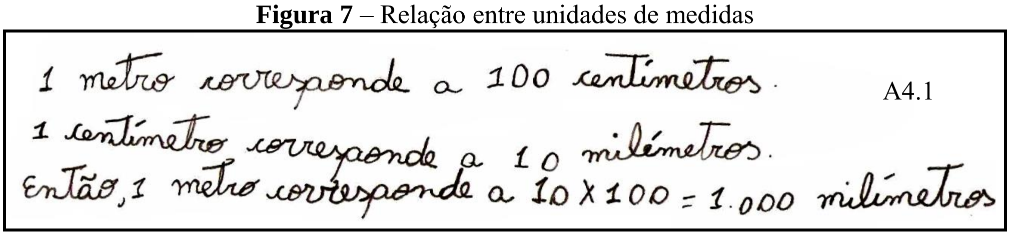
A noção de infinito emergiu quando os alunos começaram a se questionar até quando eles precisavam calcular o tamanho das unhas. Não ter um "ponto final" pré-estabelecido provocou um estranhamento pelos alunos e desencadeou uma discussão a respeito dessa ideia.

P: *Não? Tem um fim os números?*
Alunos: *Não.*
P: *Tem fim o tempo?*
Alunos: *Não.*
A1.17: *Porque eles são infinitos.*
P: *Ah, então dá para fazer para todos? (Alguns alunos respondem sim).*
P: *Dá para fazer para todos? (Repete a pergunta).*
Alunos: *Não.*
P: *Não, a gente vai ficar fazendo, fazendo... vai acabar?*
Alunos: *Não.*
A1.17: *Dá para fazer de noite.*
P: *Então o que a gente pode fazer? De noite? Será que até de noite a gente acaba?*
Alunos: *Não.*
P: *Se não tem fim, não acaba, né?*

Nesse momento os alunos perceberam que não adiantaria ficar até "de noite" pois não haveria tempo suficiente para mostrar o crescimento das unhas no caso delas não serem nunca mais cortadas e não parassem mais de crescer, uma vez que esse crescimento só seria interrompido quando a pessoa morresse. A ideia de infinito nesse caso, surgiu de uma situação hipotética, não há como saber quanto tempo a unha vai crescer, pois não sabemos quanto tempo uma pessoa tem de vida, portanto, a unha continuará a crescer. Claro que não infinitamente, mas até a pessoa morrer ou a unha quebrar, por exemplo, mas e se...? Foi essa pergunta que fomentou as discussões, pelo menos intuitiva, de infinito.

Com relação às conversões e medida, foram necessárias, desde o início da atividade, para a compreensão do que é "três milímetros". O uso da régua nesse momento foi importante para que os alunos conhecessem o espaço que corresponde a essa medida. Porém, o milímetro não é uma unidade de medida que eles estudam logo nos primeiros anos. Além disso, a reportagem utilizada para a inteiração com a situação trouxe como informação uma medida em metros. Foi, dessa forma, necessário o estabelecimento de relações entre as unidades de medida. Alguns alunos, inclusive, anotaram em seus registros as conversões que aprenderam. A Figura 7 apresenta um exemplo.

Figura 7 – Relação entre unidades de medidas


1 metro corresponde a 100 centímetros.
1 centímetro corresponde a 10 milímetros.
Então, 1 metro corresponde a 10 X 100 = 1.000 milímetros

A4.1

Fonte: Do autor.

As frações, por sua vez, foram abordadas para responder o problema. Depois de prontos os modelos matemáticos a questão de pesquisa foi retomada e os alunos diante de suas construções determinaram de quanto em quanto tempo suas unhas deveriam ser cortadas. Para isso utilizaram seus modelos matemáticos, auxiliados pelo uso da folha milimetrada ou de uma régua. Eles colocaram seus dedos na base dos gráficos ou no ponto inicial da régua e acrescentaram a medida de três milímetros, que é o quanto as unhas das mãos crescem em um mês – um procedimento análogo foi feito com as unhas dos pés. Os alunos avaliaram essa medida de 3 mm e os que a consideraram grande, ou seja, que não poderiam deixar suas unhas crescer esse comprimento, avaliaram frações dessa medida – 1 mm, 1,5 mm e 2 mm. Desse modo, de acordo com a medida que os alunos consideraram o comprimento máximo que suas unhas poderiam crescer, eles responderam que devemos cortar as unhas depois de 10 dias (1 mm), 15 dias (1,5 mm), 20 dias (2 mm) e 30 dias ou 1 mês (3 mm). Os alunos do 1º, 2º e 3º ano usaram ainda os termos “metade” e “meio”. Já as turmas de 4º e 5º ano usaram frações como “um terço do mês” para 10 dias, “meio mês” para 15 dias, “dois terços do mês” para 20 dias, e “três terços do mês ou um mês” para 30 dias, ou seja, um mês inteiro.

Um ponto interessante dessa atividade é que a resposta para o problema, orientada pelo uso da matemática, levou em consideração as experiências pessoais dos alunos, isto é, o problema deu margem a diferentes respostas, conforme o interesse de cada um. Algumas alunas, por exemplo, alegaram que deixariam as unhas crescer mais tempo, para que pudessem pintá-las e enfeitá-las, outros alunos já defenderam a necessidade de cortar as unhas com mais frequência, para não correr o risco de juntar sujeira e ter problemas posteriores.

A socialização dos resultados foi realizada por meio de apresentações nas quais cada grupo ou aluno apresentou sua resolução. Nesse momento, questionamentos foram feitos aos alunos para auxiliá-los na exposição e os diferentes caminhos tomados por eles foram comparados, encaminhando para a avaliação e validação dos resultados. Essa validação foi, de modo geral, realizada de maneira subjetiva, levando em conta as experiências e interesses dos alunos. A matemática serviu também como parâmetro para a validação dos resultados, uma vez que muitos alunos relacionaram o modelo matemático da situação com a tabuada, além de observarem a regularidade nos gráficos construídos.

P: *Aí vai ficar esquisito, já pensou? Passou um mês e a unha fica menor? Só se cortou. Quem mais? Vocês também fizeram um gráfico de barras [...]. Olha que legal o que parece isso aqui?*
A3.4: *Uma rampa.*
A3.24: *Uma escada (alguns alunos falam junto).*
[...]
P: *Guardem essa ideia, está crescendo sempre de quanto em quanto?*
Alunos: *Três.*
P: *Aí aqui a mesma coisa (referindo-se ao gráfico dos pés), só que aqui está crescendo de um em um. Aí lembra... verdade, lembra uma rampa e lembra uma escada. Para ser a rampa aqui para ser uma rampa a gente teria que passar um tracinho ligando os pontos ali, ligando os quadradinhos, aí seria uma rampa. Porque já pensou? Se fosse uma rampa e fosse descer uma bicicleta, aí não tem o traço o que vai acontecer?*
A3.12: *Vai pulando.*
P: *Vai pulando, e se tem o traço o que vai acontecer?*
A3.12: *Vai reto.*

Após a atividade o professor retomou com os alunos o modo como a atividade foi desenvolvida e o caminho percorrido.

> *P:* *Explica para a gente o que vocês fizeram aí.*
> *A3.4:* *Eu nem sei explicar o que eu fiz.*
> *P:* *Ué, o que você desenhou aí?*
> *A3.4:* *Ah, um montão de mão.*
> *P:* *E por que você desenhou um montão de mão?*
> *A3.4:* *É que eu queria saber quanto crescem [as unhas] em meio ano.*
> *P:* *E o que é diferente de uma mão para outra?*
> *A3.4:* *É que aqui cresce três.*

Nesse momento, comparações entre os modelos matemáticos formulados foram realizadas a fim de chamar atenção dos alunos para as diferenças e para as características de cada tipo de modelo, discutindo as vantagens de cada modelo para estudar a situação-problema. O Quadro 5 mostra as conclusões dos alunos com relação a investigação sobre o crescimento das unhas.

Quadro 5 – Conclusões dos alunos quanto ao crescimento das unhas

<table>
<tr><td>A2.6
As unhas dos pés crecem em mm a mesma quantidade de meses que a unha ficou sem cortar</td><td>eu acho que meio mês
A3.9</td></tr>
<tr><td>As unhas dos pés crescem em mm a mesma quantidade de meses que a unha ficou sem cortar</td><td>Eu acho que meio mês</td></tr>
<tr><td colspan="2">R: Eu acho que devemos cortar as unhas em 10 em 10 dias ou $\frac{1}{3}$ do mês
A5.9</td></tr>
<tr><td colspan="2">Eu acho que devemos cortar as unhas em 10 em 10 dias ou $\frac{1}{3}$ do mês</td></tr>
<tr><td colspan="2">Eu penso que u tenho que cortar as unhas
A3.4</td></tr>
<tr><td colspan="2">Eu penso que eu tenho que cortar as unhas</td></tr>
</table>

Fonte: Do autor.

De modo geral, os alunos afirmaram ter gostado de investigar a situação-problema e mostraram-se animados para as próximas atividades.

4.1.2 Atividade do 1º ano: *neve*

O tema *neve* foi escolhido por um dos grupos de alunos do 1º ano (Atividade D1) e tal escolha foi justificada pelo interesse que, segundo os alunos, teria surgido a partir de um filme de animação que teve boa repercussão no público infantil. Trata-se de um filme da Disney, que aborda uma história que ocorre em um cenário constituído por neve.

A maior parte dos alunos do 1º ano tinha 6 anos de idade e, ainda que orientados a fazer pesquisas sobre o tema, não trouxeram informações. Conscientes de que isso poderia acontecer, pois de acordo com a professora regente da turma esse é um tipo de tarefa que eles não estão acostumados a realizar, optamos por levar algumas reportagens e informações acerca do tema *neve* para que eles pudessem se familiarizar e definir um problema para investigar.

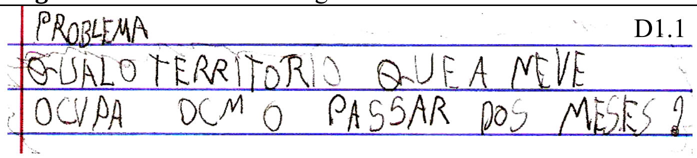
Selecionamos, na verdade, algumas reportagens, privilegiando aquelas com uma linguagem acessível e, preferencialmente, direcionada ao público infantil. As reportagens foram entregues aos alunos, que foram orientados a fazer a leitura. Assim, os já alfabetizados leram alguns trechos para os colegas. O diálogo a seguir mostra a empolgação da aluna que sugeriu o tema ao tomar conhecimento de algumas informações.

D1.7: *Gente eu sei como se faz a neve.*
Alunos: *Como?*
D1.7 *(Começa a ler) A neve é formada nas camadas mais altas das nuvens, quando a temperatura lá em cima está abaixo de zero (ri). As gotas de água congelam-se e transformam-se em flocos de neve.*
D1.7: *Agora eu sei!*

Após um tempo, o professor ajudou os alunos com a leitura e as informações obtidas foram discutidas com o grupo. Discussões associadas a como se forma a neve, por que não neva no Brasil, a respeito de temperaturas, de estações do ano, foram realizadas. As informações consideradas importantes pelos alunos foram registradas com o auxílio do professor.

Foi no âmbito dessas discussões que foi definido o problema para investigação. A Figura 8 apresenta o problema em termos escritos pelos alunos.

Figura 8 – Problema investigado na atividade com o tema *neve*

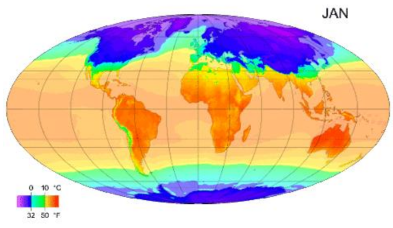
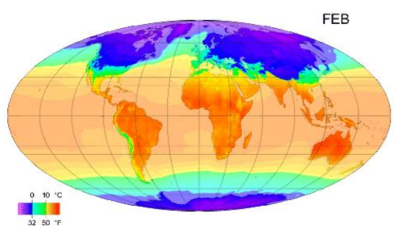
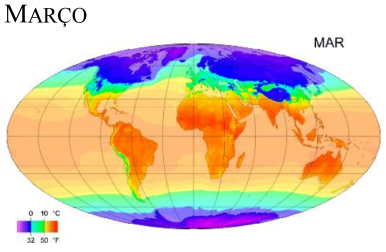
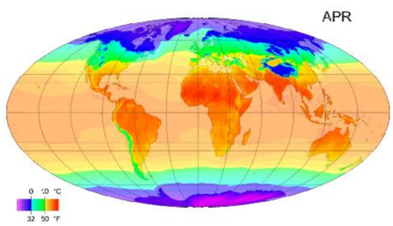
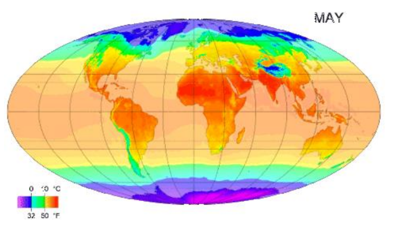
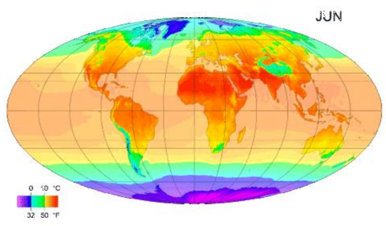
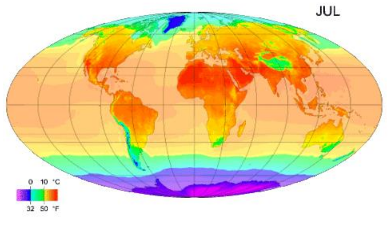
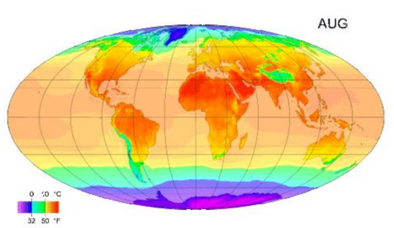
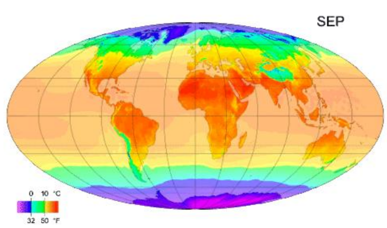
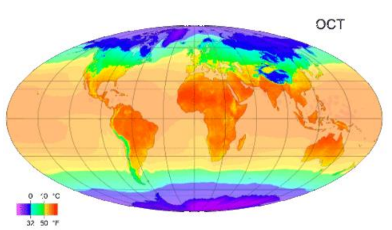
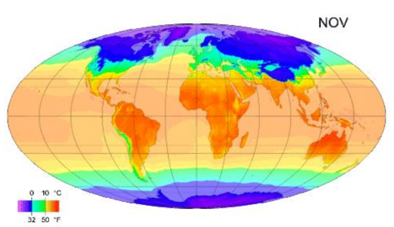
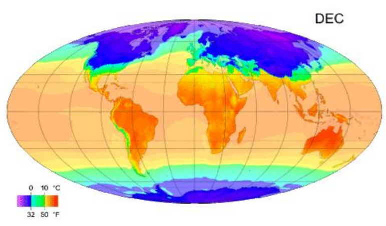


Qual o território que a neve ocupa com o passar dos meses?

Fonte: Do autor.

Com essa pergunta os alunos, na verdade, investigaram a questão: *Qual é a área do território mundial que é ocupada por neve ao longo do tempo?* O problema foi inspirado particularmente em um *gif* animado[31] que mostra a temperatura média do ar da superfície mundial mês a mês de maneira dinâmica. O Quadro 6 mostra as imagens apresentadas pelo *gif*, em tamanho reduzido.

Quadro 6 – Temperatura média do ar da superfície mundial ao longo dos meses

JANEIRO 	FEVEREIRO 	MARÇO 
ABRIL 	MAIO 	JUNHO 
JULHO 	AGOSTO 	SETEMBRO 
OUTUBRO 	NOVEMBRO 	DEZEMBRO 

Fonte: Do autor (Adaptado do site Wikipédia).

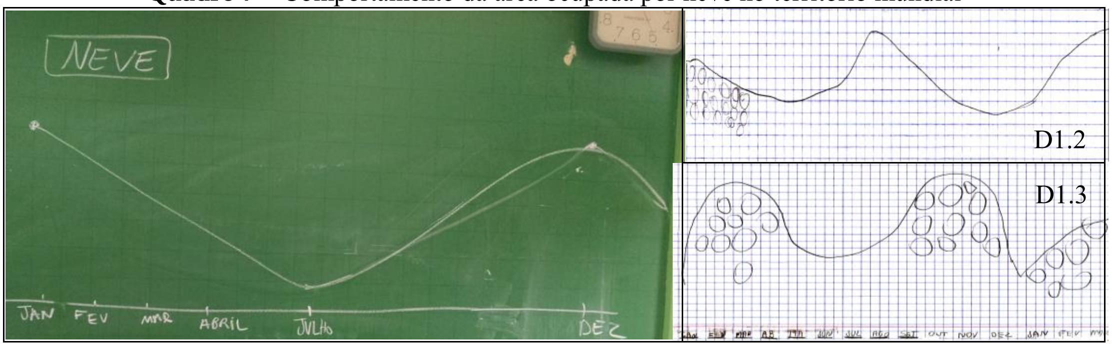
[31] Disponível em: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b3/MonthlyMeanT.gif.

De acordo com a legenda do *gif* as cores azul e roxo indicam temperaturas abaixo de 0 º C e, considerando a informação registrada por eles que neva apenas em lugares cuja temperatura do ar está abaixo de 0 ºC, eles inferiram que essas cores indicam também, ao longo dos meses, a área ou extensão do território mundial que é ocupada por neve.

P: *Conforme vai chegando no verde, vai ficando mais frio. E o azul...*
D1.7: *É quanto está muito, muito, muito muito, muito, muito frio.*
P: *É quando está muito frio. É quando está abaixo de zero a temperatura.*
D1.7: *Daí neva.*

Comparando as imagens apresentadas pelo *gif*, os alunos observaram quais são as áreas em que neva mês a mês e, diante disso, descreveram esse comportamento a partir de alguns esboços, que se aproximam de gráficos (Quadro 7).

Quadro 7 – Comportamento da área ocupada por neve no território mundial



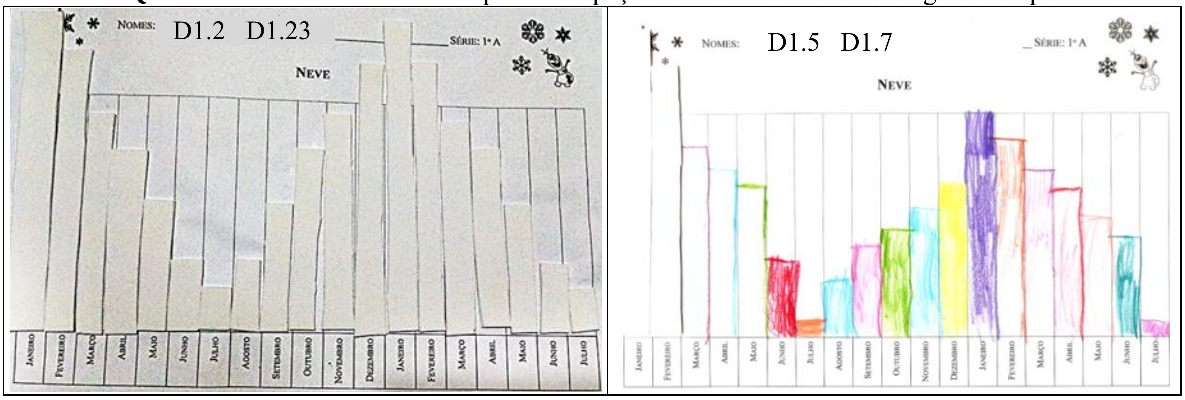
Fonte: Do autor.

Para a construção desse "gráfico", o professor colocou o giz em um determinado ponto do quadro e questionou os alunos:

P: *Qual mês pode nevar mais?*
Alunos: *Janeiro.*
P: *Isso. Então janeiro vai estar bem alto. E o que acontece, fevereiro aumenta ou diminui?*
D1.7: *Diminui.*
P: *E março?*
D1.7: *Diminui.*
[...]
P: *Agosto?*
D1.7: *[...]*
P: *D1.7: Aumentou.*
[...]
P: *Julho, agosto, setembro, outubro, novembro, dezembro. Aí o que acontece depois? Janeiro, fevereiro, março, ... o que acontece?*
A1.7: *Diminui, daí sobe de novo, daí diminui, daí sobe de novo, diminui...*

Esses esboços, contudo, para atender as formalidades matemáticas, precisavam de algumas adequações. Com essa intenção, elaboramos uma estrutura para que os alunos pudessem construir com o auxílio de material manipulável um gráfico que descrevesse a situação. Foram disponibilizadas aos alunos barras, feitas de E.V.A, de diferentes alturas, as quais os alunos utilizaram para expressar o comportamento do fenômeno. Esses gráficos consistem no modelo matemático para a situação (Quadro 8).

Quadro 8 – Modelo matemático para a ocupação territorial da neve ao longo do tempo



Fonte: Do autor.

O modelo sinaliza a periodicidade associada ao fenômeno, e para sua construção os alunos utilizaram, principalmente, conceitos associados à ordenação e à comparação. Conceitos como crescente, decrescente, maior, menor, tempo, temperatura e até mesmo a noção de números negativos foram discutidos.

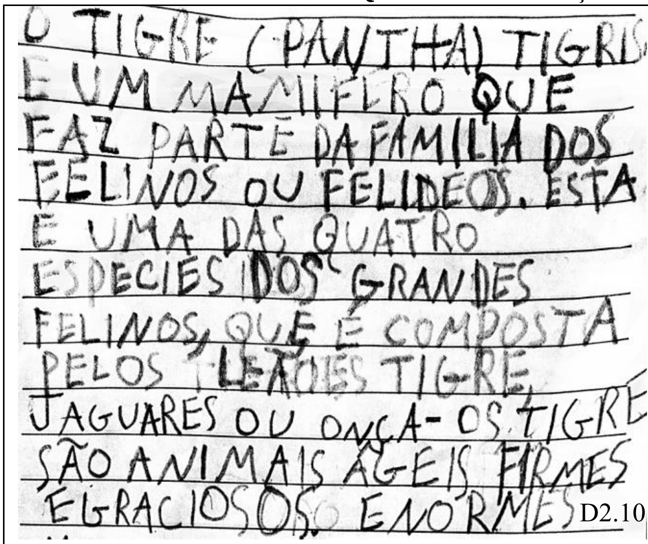
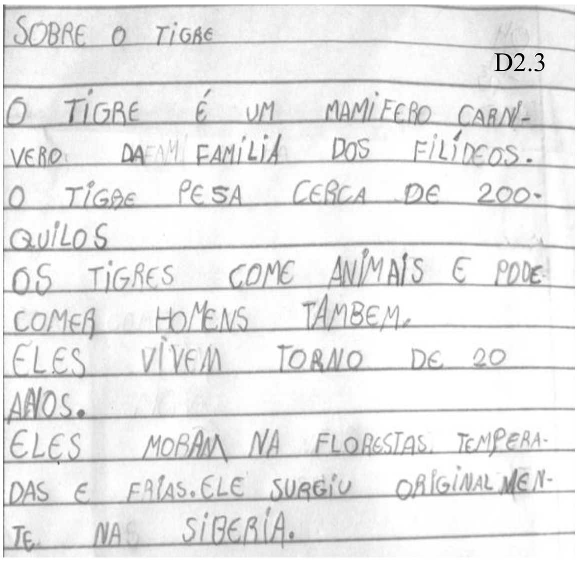
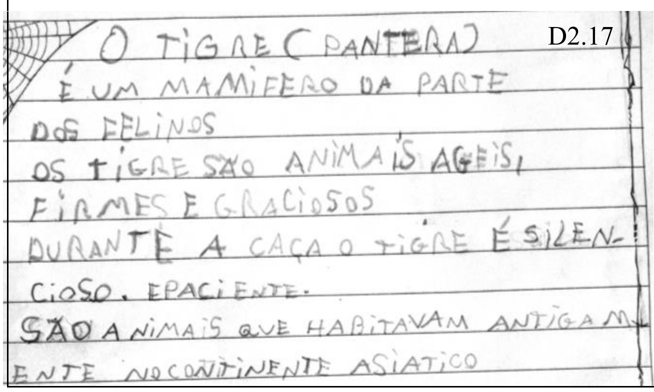
Os resultados foram apresentados para os colegas, que tiveram a oportunidade de comentar e tirar dúvidas.

4.1.3 Atividade do 2º ano: *tigres*

O interesse de alunos do 2º ano em estudar animais se destacou no momento em que temas foram sugeridos por eles para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Formigas, minhocas, cachorros, jacarés são alguns exemplos desses temas. Outros temas como escola, pessoas e aeronaves também foram sugeridos, mas devido a condição colocada pelo professor de escolha de dois temas para o desenvolvimento das investigações, os temas *tigres* e *joaninhas* foram os escolhidos. Os alunos, com idade predominante de 7 anos, foram organizados em dois grupos, segundo seus interesses pelos temas determinados. Nessa seção descrevemos a atividade de modelagem com o tema *tigres* (Atividade D2).

Após a definição do tema os alunos foram orientados pelo professor a pesquisarem informações a respeito. Essa orientação foi reforçada pela professora regente, que se responsabilizou em lembrar os alunos dessa tarefa. No dia do desenvolvimento da atividade, alguns alunos trouxeram recortes de reportagens, trechos de textos da internet ou de livros, com informações que contribuíram com a discussão a respeito do tema. O Quadro 9 apresenta algumas das informações obtidas pelos alunos.

Quadro 9 – Informações a respeito do tema *tigres*

 D2.10	*O tigre (pantha) tigris. É um mamífero que faz parte da família dos felinos ou felídeos. Esta é uma das quatro espécies dos grande felinos, que é composta pelo leão, tigre, jaguar ou onça. Os tigres são animais ágeis, firmes e graciosos. Enormes.*
Sobre o tigre *O tigre é um mamífero carnívoro da família dos felídeos. O tigre pesa cerca de 200 quilos.* *Os tigres comem animais e podem comer homens também.* *Eles vivem em torno de 20 anos.* *Eles moram nas florestas temperadas e frias. Ele surgiu originalmente na Sibéria.*	 D2.3
 D2.17	*O tigre (pantera) é um mamífero da parte dos felinos.* *Os tigre são animais ágeis, firmes e graciosos.* *Durante a caça o tigre é silencioso e paciente.* *São animais que habitavam antigamente no continente asiático.*

Fonte: Do autor.

A busca por informações foi também realizada pelo professor, com a intenção de complementar as informações obtidas pelos alunos. O Quadro 10 sintetiza as informações fornecidas pelo professor aos alunos. Essas informações foram lidas com os alunos e discutidas a fim de tirar dúvidas e realizar eventuais esclarecimentos.

Quadro 10 – Informações disponibilizadas pelo professor

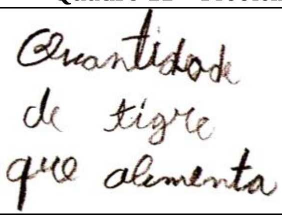
A respeito dos Tigres

- Classe: Mamíferos
- Ordem: Carnívoros
- Comprimento: Varia de 1,42 m a 2,60 m, até a raiz da cauda. A cauda pode ter mais de 1 metro.
- Altura: 90 a 100 cm
- Período de gestação: 100 a 108 dias
- Filhotes: 1 ninhada (1 a 4 filhotes) a cada 3 anos.
- Tempo de vida: O tempo de vida médio de um tigre é de 20 anos.
- As listras da cara do tigre são como a impressão digital de uma pessoa. Não há duas pessoas com a mesma impressão, assim como não há dois tigres com o mesmo padrão de listras.
- Quando faminto, um tigre pode comer até 45 quilos de carne em uma só refeição. Isso equivale a 1/5 do seu próprio peso.
- Os tigres são suficientemente fortes para arrastar grandes presas por longas distâncias. Um único tigre, por exemplo, pode puxar um búfalo-indiano que pesa cerca de 900 quilos. Para locomover um peso tão grande seriam necessários cerca de 14 homens fortes.

Fonte: Adaptado do site Saúde Animal.

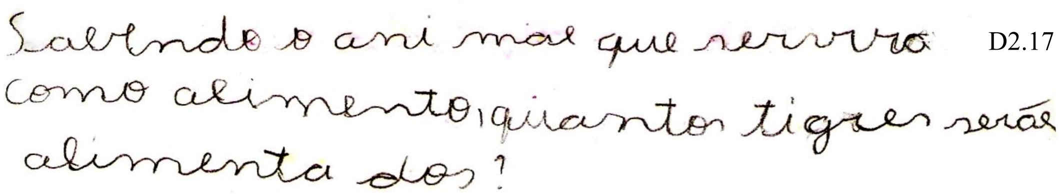
Durante as discussões, em vários momentos o professor questionou os alunos em busca do que poderia ser investigado a respeito do tema. E mediante o interesse dos alunos na alimentação dos tigres, um problema a esse respeito foi definido com os alunos. O Quadro 11 apresenta o problema escrito nas palavras de um aluno e o problema escrito pela turma com a ajuda do professor.

Quadro 11 – Problema investigado na atividade com o tema *tigres*



D2.6

Quantidade de tigre que alimenta



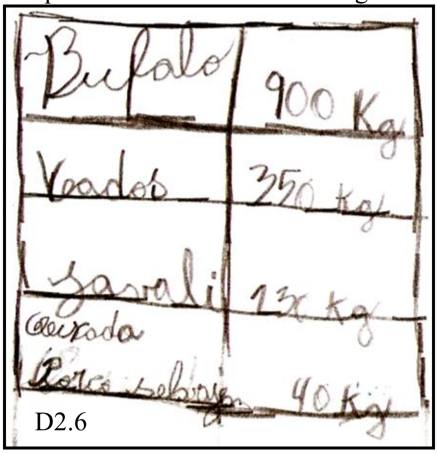
D2.17

Sabendo o animal que servirá como alimento, quantos tigres serão alimentados?

Fonte: Do autor.

Para responder a esse problema, outras informações foram necessárias, como de que animais se alimentam os tigres e qual o peso[32] desses animais. Essas informações foram obtidas por meio de diferentes reportagens e organizadas em uma tabela, como mostra a Figura 9.

Figura 9 – Animais que servem de alimento aos tigres e seus pesos médios



Búfalo	900 Kg
Veados	350 Kg
Javali	130 Kg
Queixada Porco selvagem	40 Kg

D2.6

Fonte: Do autor.

Para resolver o problema proposto os alunos escolheram inicialmente um dos animais da tabela, o búfalo. A primeira ação realizada por eles foi representar o peso médio do búfalo por meio do material dourado, conforme diálogo.

P: *Essa placa aqui (mostra o material dourado) tem quantas unidades?*
Alunos: *Cem.*
P: *Olha, cada um desses aqui é uma unidade (mostra no material dourado). Nessa barra aqui tem dez. E dez barrinhas dessa: dez, vinte, trinta, quarenta, cinquenta, sessenta, setenta, oitenta, noventa... cem (conta com os alunos). Certo? Para formar novecentos, quantas dessa [placa] eu vou precisar? Quantas dessa eu preciso se cada uma tem cem?*
D2.12: *Mais uma? (Fala baixo).*
PR2: *Ele precisa de... olha, tem novecentos lá.*
D2.6: *Mais uma (repete D2.12).*
PR2: *Não, daí vai dar quanto?*
P: *Cem mais cem?*
D2.6: *Duzentos.*
D2.17: *Cem mais cem: duzentos.*
P: *Eu preciso de novecentos... Se eu pegar mais uma quanto que vai ter?*
D2.10: *Trezentos.*
P: *Quantos? Trezentos. Mais uma?*
Alunos: *Quatrocentos.*
P: *Mais uma?*
Alunos: *Quinhentos.*

---

[32] Por *peso* referimo-nos à massa corporal do animal, que frequentemente é assim denominada no âmbito do senso comum.

P: *Mais uma?*
D2.10: *Seiscentos.*
P: *Mais uma?*
PR2: *(Alunos não respondem) Setecentos.*
P: *Depois de seiscentos: setecentos.*
D2.6: *Oitocentos (continua, professor faz sinal confirmando).*
P: *Depois de oitocentos?*
Alunos: *Novecentos.*
P: *E quanto que eu preciso?*
D2.12: *Novecentos.*
D2.6: *Precisa de mais nove (fala baixo).*
P: *E quanto, então, precisa?*
D2.6: *Precisa de mais nove.*
P: *Precisa de nove. Olha: uma, duas, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove.*

Representado o peso do búfalo, por meio do material dourado, os alunos consideraram que cada tigre se alimenta com 45 kg, de acordo com as informações, e para descobrir quantos tigres um búfalo pode alimentar, os alunos pintaram no material dourado com giz colorido os cubinhos, de 45 em 45 (Figura 10). Como estavam em grupo, os alunos se organizaram, com a ajuda dos professores – pesquisador e professora regente – de modo que cada aluno fez essa pintura em uma ou duas placas do material dourado. O diálogo que apresentamos na sequência descreve a estratégia adotada pelos alunos.

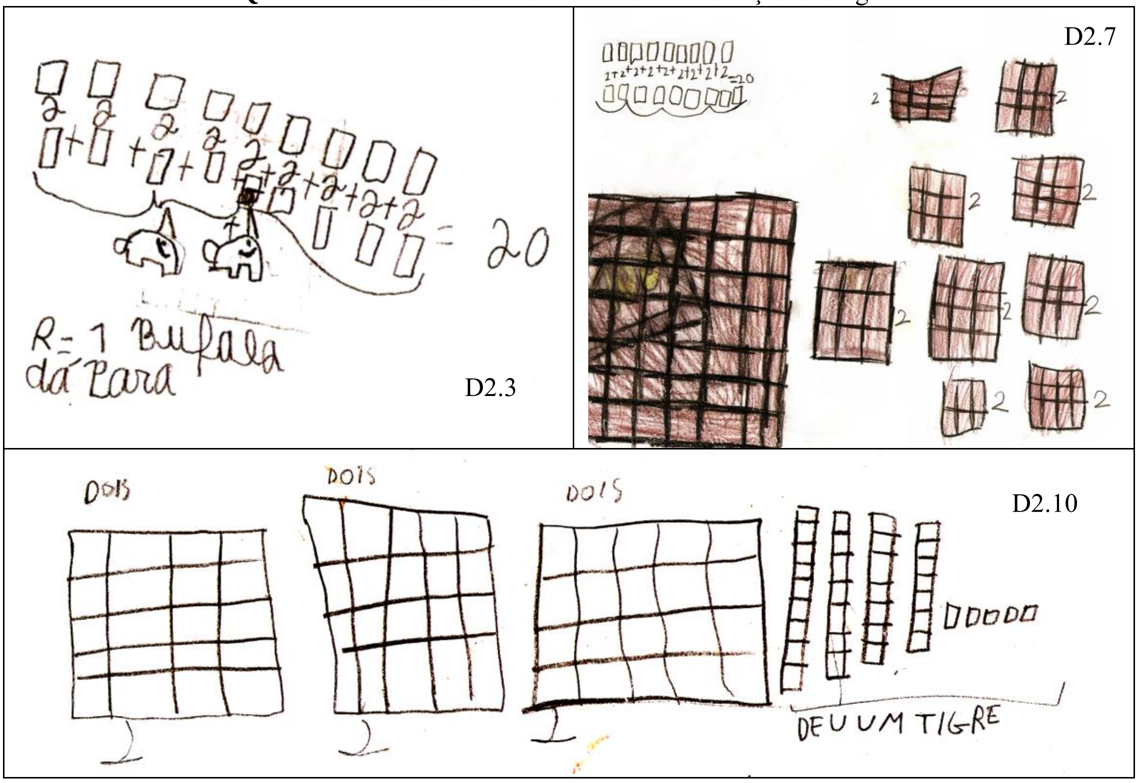
Figura 10 – Resolução da atividade a respeito dos *tigres*

Fonte: Do autor.

P: *Pessoal, quantos quilos [de carne] um tigre come em sua refeição?*
D2.10: *Quarenta e cinco.*
P: *Quarenta e cinco. Então quantos cubinhos a gente vai pintar para representar quarenta e cinco? [...] Quantos cubinhos precisa pintar?*
D2.2: *Quarenta e cinco.*
P: *Quarenta e cinco, né? Então, vocês pintem quarenta e cinco... Será que dá para pintar mais quarenta e cinco? E depois mais quarenta e cinco? Quantos "quarenta e cinco" dá para pintar?*
D2.6: *Dois [fala baixo].*
P: *Por que cada quarenta e cinco não corresponde a um tigre? Então descubram quantos tigres dá para pintar [para alimentar].*

Como o material dourado é apenas um material auxiliar, orientamos os alunos para que registrassem essa estratégia, o que resultou na formulação do modelo matemático, que consiste na divisão das centenas (representadas pelas placas do material dourado) por quarenta e cinco. O Quadro 12 mostra que para cada centena que os alunos efetuaram a "divisão", sobrou uma dezena, totalizando nove dezenas, as quais foram também divididas por 45, resultando, em termos da situação-problema, em alimento para mais dois tigres.

Quadro 12 – Modelos matemáticos da alimentação dos tigres



Fonte: Do autor.

Além dos búfalos, os alunos escolheram mais dois animais e usaram a mesma estrutura para a formulação dos modelos matemáticos para calcularem a quantidade de tigres que podem ser alimentados. Os modelos matemáticos produzidos foram discutidos com toda a turma, momento em que houve, inclusive, a socialização dos resultados.

4.1.4 Atividade do 3º ano: *recordes*

Inspirados na primeira atividade que desenvolveram, acerca do crescimento das unhas, que trouxe um recorte de uma reportagem apresentando uma mulher que bateu o recorde mundial de unhas mais compridas, os alunos do 3º ano (idade predominante de 8 anos) demonstraram interesse em investigar recordes mundiais. Esse interesse se revelou ao longo do desenvolvimento das atividades desenvolvidas pelas turmas, sendo muitas vezes mencionado pelos alunos e se consolidou quando foi proposto a eles a escolha de um tema para o desenvolvimento de uma atividade de modelagem (Atividade D3).

Quando o professor propôs que temas que os interessassem fossem citados, temas como dor, comida, países, animais, horas, música, plantas foram sugeridos. Mas quando todos os temas estavam no quadro e o professor propôs que os alunos escolhessem o tema que eles gostariam de investigar, os alunos, organizados em grupos, optaram pelo tema *recordes*. Desse modo, apenas uma atividade de terceiro momento foi desenvolvida pelos alunos dessa turma.

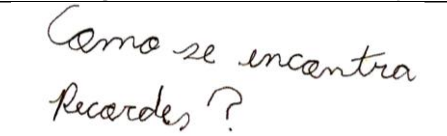
Os alunos foram orientados a pesquisar informações a respeito do tema escolhido e, de modo geral, as informações que eles trouxeram consistiam em curiosidades, recordes mundiais em diferentes aspectos que lhes interessaram. Os recordes pesquisados pelos alunos foram anotados pelo professor no quadro. Os alunos foram, então, questionados sobre o que era possível investigar, que problema poderia ser definido diante das informações pesquisadas.

Após algumas discussões, os alunos mostraram interesse em investigar recordes específicos, necessitando de esclarecimentos e ajuda para a definição do problema.

P: *O que dá para gente pesquisar?*
D3.18: *O maior oceano.*
P: *Isso vocês já pesquisaram. Isso é informação que a gente já tem. O que são esses recordes? Por que eles são recordes?*
[...]
D3.24: *Ah já sei, porque causa que eles... porque cada um deles... ninguém conseguiu alcançar o recorde deles.*
P: *Isso, ninguém conseguiu alcançar, é o mais, o maior, o mais velho, o menos, o menor, o mais novo...*
[...]
P: *Pessoal, a gente não quer pesquisar novos recordes, porque é só ir lá e olhar e pesquisar, por que a gente não faz os nossos recordes aqui da sala?*
Alunos: *Sim! Sim.*

A discussão apresentada pelo diálogo mostra que os alunos estavam curiosos em descobrir outros recordes, em diferentes aspectos. Diante disso o professor sugeriu a eles que investigassem os recordes da turma, que eles mesmos pudessem determinar. Os alunos gostaram da ideia e ao final da atividade responderam a questão apresentada pela Figura 11.

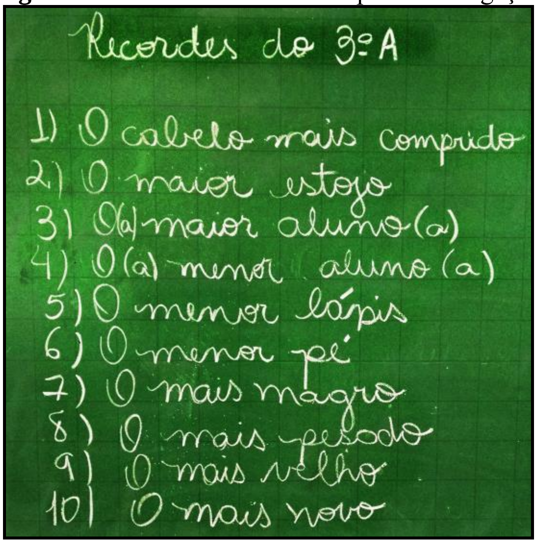
Figura 11 – Problema investigado na atividade com o tema recordes

	*Como se encontra recordes?*

Fonte: Do autor.

O primeiro passo foi definir que aspectos eles gostariam de investigar e determinar quais seriam os recordistas da turma com relação a esses aspectos. Várias sugestões foram dadas, e dentre elas a lista da Figura 12 foi definida.

Figura 12 – Recordes escolhidos para investigação



Fonte: Do autor.

Para cada recorde da lista, os alunos foram questionados sobre como proceder, que instrumento de medida utilizar, como realizar a medida e quais alunos poderiam concorrer àquele recorde.

P: *Como que dá para gente medir o cabelo mais comprido?*
D3.9: *Uma régua.*
D3.8: *Uma fita métrica.*
D3.3: *Fita métrica.*
D3.2: *Uma trena, régua...*
P: *Régua é mais difícil, eu acho que fita métrica é melhor, o que vocês acham?*
Alunos: *É.*
P: *Porque será que a fita métrica é melhor?*
Alunos: *Porque ela estica mais.*
P: *A régua não é flexível, né?*

Para realizar as medidas alguns critérios adicionais tiveram ainda que ser definidos para que a comparação fosse “justa”. Com relação aos estojos, por exemplo, havia estojos mais compridos e havia estojos mais largos, desse modo, as medidas referentes ao comprimento e à largura foram adotadas como dois tipos diferentes de recordes. Outro exemplo, foi no caso do menor lápis, em que os alunos entraram em acordo que o lápis deveria estar apontado. Portanto, critérios foram adotados para evitar ambiguidades na interpretação do recorde e, por conseguinte, questionamentos quanto à medição e à classificação.

Para cada recorde foi realizada uma medição dos concorrentes utilizando instrumentos e estratégias consideradas pelos alunos como apropriadas e as unidades de medidas correspondentes e conversões foram colocadas em discussão.

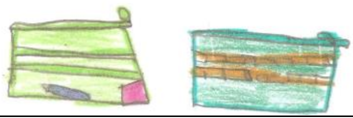
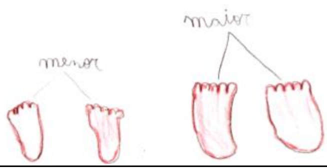
Com relação ao cabelo mais comprido, os alunos afirmaram que seria uma menina a recordista, uma vez que todos os meninos da turma tinham um corte de cabelo curto. As meninas que aparentavam ter os cabelos mais compridos foram indicadas e com o auxílio da fita métrica o comprimento dos cabelos de cada uma foi medido da raiz até a ponta. Para medir o maior estojo uma régua foi utilizada e foram determinadas duas medidas: comprimento e largura, isto é, estojo mais comprido e estojo mais largo. Para determinar o(a) menor e o(a) maior aluno(a) os alunos foram medidos com fita métrica. Para isso, foi solicitado aos alunos concorrentes que encostassem na parede para que suas alturas fossem marcadas. A distância do sinal na parede, referente à altura, até o chão foi então medida. O menor lápis foi medido utilizando uma folha milimetrada, pois a diferença nas alturas dos lápis eram mínimas, portanto, uma medida com mais precisão precisou ser realizada. Os lápis foram colocados na linha inferior e as medidas, em milímetros, foram comparadas. O menor e o maior pé foram medidos com o auxílio de folhas de sulfite e de régua, em cada folha de sulfite foi demarcado o comprimento do pé utilizando segmentos de reta paralelos. A distância entre esses segmentos determinaram o comprimento do pé. O Quadro 13 exemplifica as estratégias e os instrumentos de medida utilizados nas medições.

Quadro 13 – Medições realizadas

Fonte: Do autor.

Por fim, como resultado os alunos produziram um livro dos recordes do 3º ano (Quadro 14), no qual a primeira parte trouxe informações pesquisadas por eles e a segunda parte os resultados das medições e comparações realizadas.

Quadro 14 – Livro dos recordes do 3º ano

1) O cabelo mais comprido 1º lugar: D3.16, 67 cm 2º lugar: D3.1, 63 cm 	**2) O maior estojo** Mais comprido: D3.21 e D3.13, 23 cm Mais largo: D3.15, 11 cm 
3) O maior aluno 1º lugar: D3.4, 1 metro e 51 centímetros (1,51 m) 2º lugar: D3.6, 1 metro e 50 centímetros (1,5 m) 	**4) O menor aluno** 1º lugar: D3.25, 1 metro e 23 centímetros (1,23 m) 2º lugar: D3.11, 1 metro e 25 centímetros (1,25 m) 
5) O menor lápis 1º lugar: D3.24, 17 mm ou 1,7 cm 2º lugar: D3.6 e D3.17, 19 mm ou 1,9 cm 	**6) O menor e o maior pé** 1º lugar: D3.4, 18 centímetros e 8 milímetros (18,8 cm) 2º lugar: D3.6, 25 centímetros e 2 milímetros (25,2 cm) 
7) A mais magra 1º lugar: D3.10, 52 cm de barriga 2º lugar: D3.11, 54 cm de barriga 	**8) O mais pesado e a mais leve** Mais pesado: D3.6, 73 kg Mais leve: D3.11, 23 kg 
9) O mais velho D3.6: 9 anos, nasceu 20 de maio de 2006 	**10) A mais nova** 1º lugar: D3.19, nasceu 25 de dezembro de 2007, 7 anos 2º lugar: D3.14, nasceu 7 de dezembro de 2007, 7 anos 

Fonte: Do autor.

Concluídos os livros dos recordes, os grupos os trocaram entre eles para que pudessem ver os resultados. A socialização foi feita nesse momento e também no quadro, uma vez que cada recorde investigado foi registrado também pelo professor.

Com essa atividade, além de discutirem diferentes unidades de medida e os instrumentos apropriados para cada medição, os alunos também discutiram a noção de distância e a noção de todo, pois os recordistas determinados eram os recordistas entre os alunos do 3º ano, daquela turma em particular e, possivelmente, se comparados com outras turmas – outras populações – os recordes registrados poderiam ser batidos. Tais discussões revelam uma simplificação da situação, uma vez que os recordes foram definidos dentro de um conjunto restrito de pessoas: os alunos do 3º ano.

A matemática envolvida na resolução diz respeito, principalmente, ao uso de instrumentos de medida, leitura e comparações de números, como mostram as respostas dos alunos para a questão formulada (Quadro 15). Essas respostas podem ser consideradas como modelos matemáticos para a situação, uma vez que foi seguindo as orientações de tais respostas que os alunos determinaram os recordes investigados.

Quadro 15 – Modelos matemáticos para determinar recordes

calculamos de Maio para menor	*Calculamos do maior para o menor*
R. medindo e depois comparamos os resultados.	*Medindo e depois comparando os resultados*

Fonte: Do autor.

A validação dos modelos se deu por meio da comparação com as informações pesquisadas, momento em que os alunos analisaram se seus modelos matemáticos satisfaziam as informações da situação-problema. Os resultados obtidos foram avaliados levando em consideração a matemática, particularmente no que diz respeito à comparação de medidas.

4.1.5 Atividade do 4º ano: *evolução do homem*

Para o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática na turma do 4º ano, os alunos – com idade predominante de 9 anos – foram organizados em grupos. Dois grupos mostraram interesse em investigar o tema *evolução do homem* (Atividade D4).

Sob a orientação do professor, os alunos pesquisaram informações a respeito do tema e trouxeram para a aula textos que encontraram na internet. O Quadro 16 mostra parte de um desses textos, referente às etapas da evolução humana. Outras informações a respeito da teoria da evolução também foram encontradas pelos alunos.

Quadro 16 – Informações pesquisadas pelos alunos a respeito do tema *evolução do homem*

As etapas da evolução humana

Primatas: Os mais antigos viveram há cerca de 70 milhões de anos. Esses mamíferos de pequeno porte habitavam as árvores das florestas e alimentavam-se de olhas e insetos.

Hominoides: São primatas que viveram entre aproximadamente 22 e 14 milhões de anos atrás. O *procônsul*, que tinha o tamanho de um pequeno gorila, habitava em árvores, mas também descia ao solo; era quadrúpede, isto é, locomovia-se sobre as quatro patas. Descendente do procônsul, o *kenyapiteco* às vezes endireitava o corpo e se locomovia sobre as patas traseiras.

Hominídeos: Família que inclui o gênero australopiteco e também o gênero humano. O *australopiteco afarense*, que viveu há cerca de 3 milhões de anos, era um pouco mais alto que o chimpanzé. Já caminhava sobre os dois pés e usava longos braços se pendurar nas árvores. Mais alto e pesado, o *australopiteco africano* viveu entre 3 milhões e 1 milhão de anos. Andava ereto e usava as mãos para coletar frutos e atirar pedras para abater animais.

Homo habilis: Primeiro hominídeo do gênero Homo. Viveu por volta de 2 milhões de anos a 1,4 milhões de anos atrás. Fabricava instrumentos simples de pedra, construía cabanas e, provável,ente, desenvolveu, uma linguagem rudimentar. Seus vestígios só foram encontrados na África.

Homo erectus: Descente do Homo habilis, viveu entre 6 milhões de anos e 150 mil anos atrás. Saiu da África, alcançando a Europa, a Ásia e a Oceania. Fabricava instrumentos de pedra mais complexos e cobria o corpo com peles de animais. Vivia em grupos de vinte a trinta membros e utilizava uma linguagem mais sofisticada. Foi o descobridor do fogo.

Homem de Neandertal: Provável descendente do Homo erectus, viveu há cerca de 200 mil a 30 mil anos. Habilidoso, criou muitas ferramentas e fabricava armas e abrigos com ossos de animais. Enterrava os mortos nas cavernas, com flores e objetos. Conviveu com os primeiros homens modernos e desapareceu por motivos até hoje desconhecidos.

Homo sapiens: Descendente do Homo erectus, surgiu entre 100 mil e 50 mil anos atrás. Trata-se do homem moderno. Espalhou-se por toda a Terra, deixando variados instrumentos de pedra, osso e marfim. Desenvolveu a pintura e a escultura.

É preciso lembrar, porém, que esse painel não está completo. Ele apenas resume o que foi possível concluir a partir dos fósseis estudados até hoje. Ainda faltam muitas peças no quebra cabeça da evolução humana, por exemplo, o tão procurado "elo perdido", aquele espécime com características de primatas e de humanos, que explicaria um importante passo da humanidade em sua fascinante aventura sobre a Terra.

Fonte: Do autor (Informações obtidas pelos alunos no site Só História).

Assim como nas outras turmas, o professor também trouxe algumas informações, de modo a complementar a coleta de dados dos alunos, caso fosse necessário. A reportagem "As pessoas mais altas são mais saudáveis?" foi disponibilizada aos alunos.

A orientação do professor aos alunos foi que eles em um primeiro momento fizessem uma leitura das informações que trouxeram e das informações disponibilizadas por ele, e depois pensassem em problemas, associados ao tema, que pudessem ser investigados.

P: *Vocês pesquisaram pessoal?*
Alunos: *Sim (Alguns). Não (outros).*
P: *Quem pesquisou? Levanta a mão para o professor. (Alunos levantam a mão). Certo. Então, nesse primeiro momento, eu quero que vocês estudem as informações que vocês pesquisaram. Deem uma olhada, vejam o que estão falando nas informações e depois o que a gente tem que fazer com essas informações? [...] Vocês lembram?*

D4.22: *As perguntas.*
P: *Isso, então depois que vocês conversarem, vocês vão tentar formular uma pergunta, para gente poder investigar. Então o estudo agora é para tentar fazer uma pergunta sobre o tema, certo?*

A princípio, os alunos de um grupo entenderam que deveriam formular perguntas a respeito das leituras que fizeram, o que acabou sendo útil para familiarização e entendimento da situação. Perguntas como "*o que é evoluir?*", "*a evolução foi boa?*", "*o que veio antes dos humanos?*" e "*herdamos a inteligência dos primatas?*" são exemplos das formulações dos alunos. O professor explicou, então, que o problema deveria envolver uma investigação, e que não se tratava apenas de fazer perguntas e buscar respostas no texto. As informações poderiam ajudar nesse momento. E foi a partir da pergunta que estava no tema de uma reportagem que os alunos definiram o problema para investigação.

D4.16: *As pessoas altas são mais saudáveis? (Lê o título da reportagem).*
D4.23: *Já acabaram? Já acabaram? Eu vou começar a ler o texto.*
D4.16: *Ow, ow... (chama os colegas) D4.23, tem uma pergunta aqui e tem o texto.*
D4.23: *Depois lê esse também.*
D4.16: *Não você já não entendeu? Tem uma pergunta... no texto, se a gente pegar essa pergunta, a gente vai ver as resposta aqui.*
D4.23: *Boa! Esperta.*

Os alunos do outro grupo, por sua vez, definiram um problema a partir de uma conversa com o professor e a partir da análise de um gráfico que lhes chamou atenção na mesma reportagem utilizada pelo grupo anterior: "O tamanho dos brasileiros" (Figura 13).

Figura 13 – O tamanho dos brasileiros

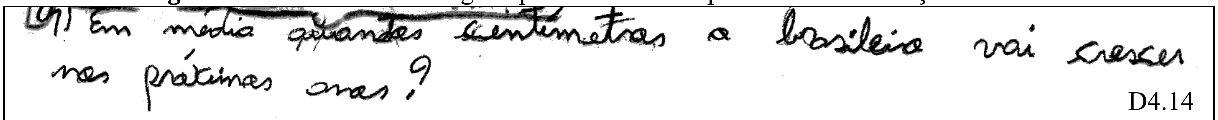
Fonte: Site Veja.com.

O gráfico, apresentado na Figura 13, indica com base em informações fornecidas pelo exército brasileiro a média de altura dos recrutas do serviço militar no período de 1990 a 2010, década a década. O diálogo a seguir mostra a conversa dos alunos com o professor no momento em que definiam o problema.

> *P:* *Então com os passar dos anos, o que está acontecendo com a altura dos brasileiros?*
> *D4.31:* *Está crescendo.*
> *P:* *Está crescendo. E de quanto em quanto será que está crescendo? Será que se vocês acharem...*
> *D4.31:* *De dez em dez.*
> *P:* *Não sei, está aumentando o tempo de dez em dez! Estou perguntando a altura. Se vocês olharem aqui (aponta para o gráfico), de dez em dez, será que vai continuar crescendo?*
> *D4.31:* *Vai.*
> *P:* *Parece que vai. Será que vai ou parece que vai?*
> *D4.31:* *Vai, porque o ser humano cresce mais.*
> *[...]*
> *P:* *Olha não está passando de dez em dez anos?*
> *Alunos:* *Está.*
> *P:* *Se passar dez anos será que vai aumentar [a altura]?*
> *Alunos:* *Vai.*
> *P:* *E quanto será que vai ser a altura? Dá para pesquisar qual vai ser a altura nos próximos dez anos.*

A partir dessa conversa o problema enunciado na Figura 14 foi definido.

Figura 14 – Problema investigado pelos alunos a respeito do tema *evolução do homem*



D4.14

Em média quantos centímetros o brasileiro vai crescer nos próximos anos?

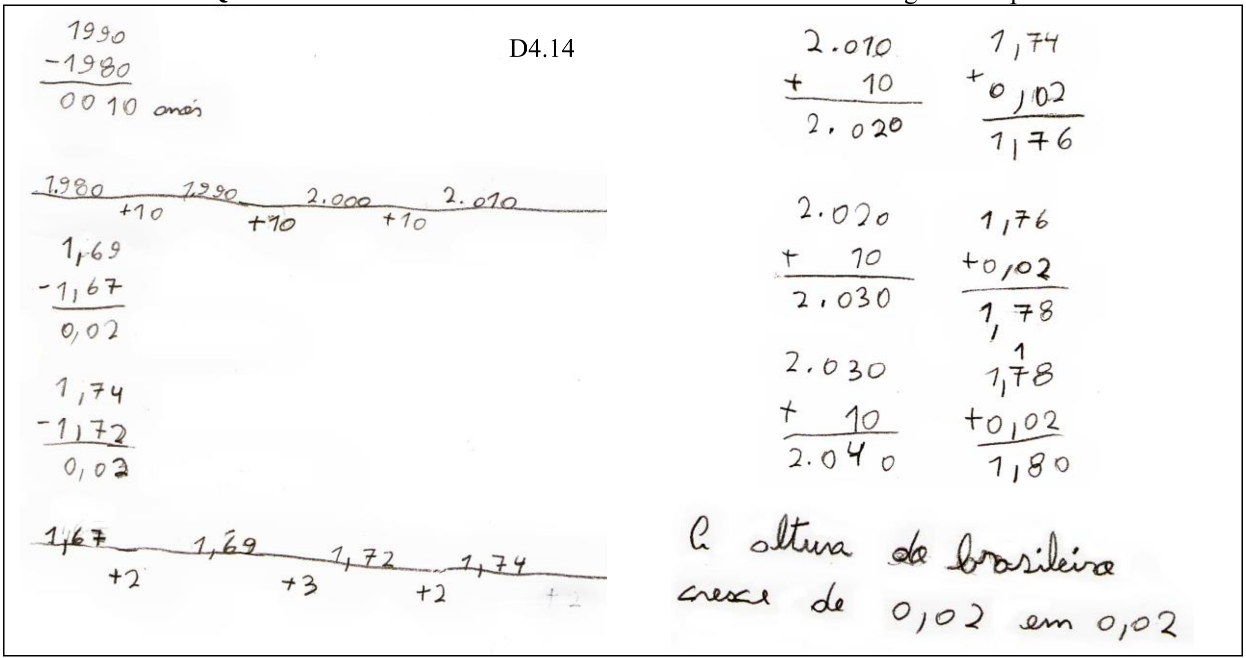
Fonte: Do autor.

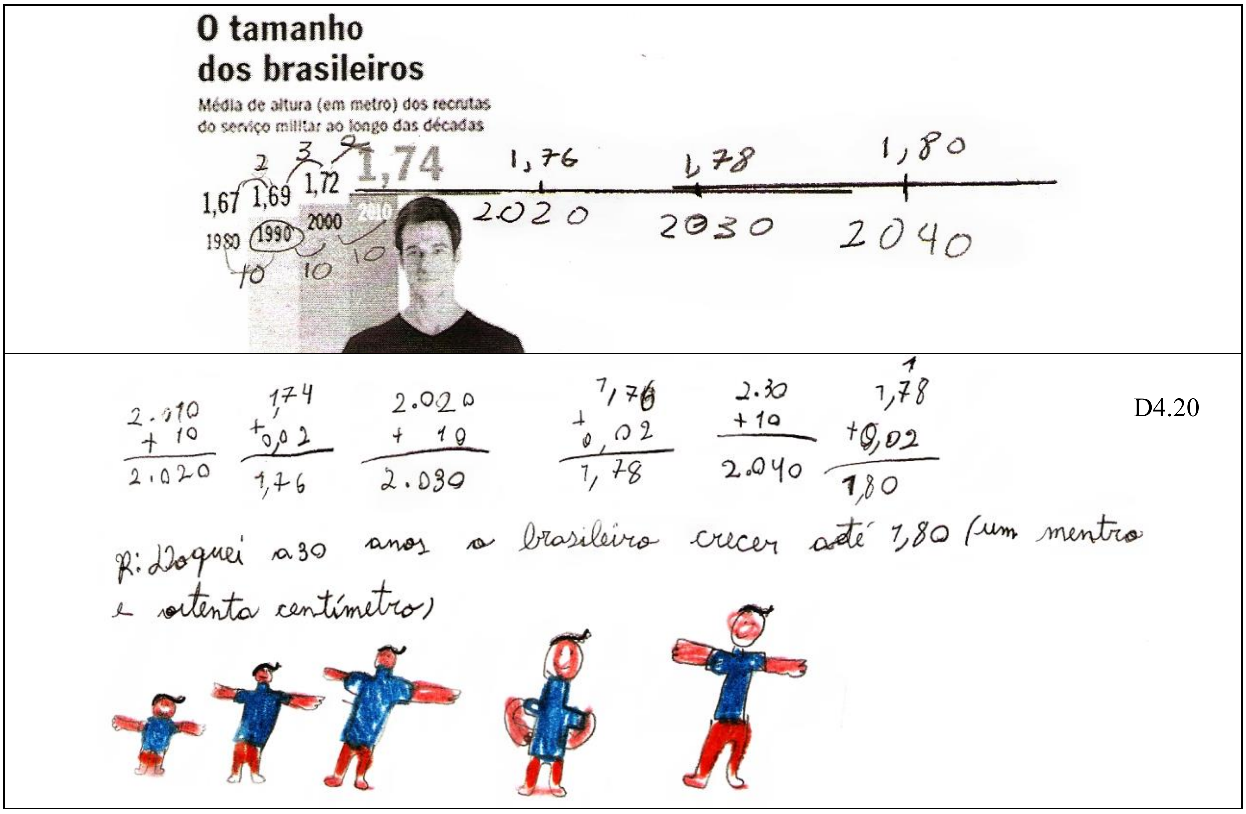
Apesar dos textos utilizados nos enunciados das perguntas serem diferentes, os alunos de ambos os grupos investigaram problemas semelhantes. Ambos analisaram o crescimento da média de altura dos brasileiros ao longo do tempo e estimaram a média de altura para as próximas décadas. E, considerando que o comportamento do crescimento dos homens nos próximos anos permanecerá o mesmo que o apresentado pelas informações, a estratégia de resolução utilizada pelos alunos foi identificar a regularidade no crescimento da estatura dos homens nas últimas décadas. O diálogo a seguir apresenta um trecho da discussão a respeito da formulação do modelo matemático da média de altura do brasileiro ao longo do tempo.

P: *Vocês precisam ver o quanto cresceu. Está crescendo de quanto em quanto tempo? De oitenta para noventa quanto que dá?*
D4.16: *Dez.*
P: *De noventa para dois mil?*
Alunos: *Dez.*
P: *E de dois mil para dois mil e dez?*
Alunos: *Dez.*
P: *Então o tempo está crescendo de dez em dez. E de um e sessenta e sete para um e sessenta e nove?*
D4.23: *Um.*
P: *Cresceu quantos centímetros? Sessenta e sete, sessenta e oito, sessenta e nove? Quanto cresceu?*
D4.23: *Ah é verdade, é dois.*
P: *Sessenta e nove, setenta, setenta e um, setenta e dois. Cresceu quanto? Setenta, setenta e um, setenta e dois. Cresceu quanto?*
D4.23: *Três.*
P: *Setenta e dois, setenta e três, setenta e quatro. Cresceu quanto?*
D4.23: *Dois.*
P: *Então está crescendo mais ou menos quanto a cada dois anos?*
D4.23: *Dois.*
P: *Centímetros, né?*
[...]
D4.16: *Eu e a D4.23 erramos a conta, vamos fazer de menos e depois vamos somar, somar, somar, somar até dar o resultado.*

O diálogo indica que as diferenças de tempo e de estatura foram calculadas utilizando as informações disponibilizadas pelo gráfico e, a partir desses cálculos, os alunos formularam seus modelos matemáticos, que são apresentados no Quadro 17.

Quadro 17 – Modelos matemáticos da altura do brasileiro ao longo do tempo





Fonte: Do autor.

Os registros do Quadro 17 mostram, ainda, que os alunos, após inferirem uma regularidade nos dados observados, estimaram a estatura média do brasileiro para as próximas décadas.

Os resultados foram apresentados para os colegas da turma em um momento de socialização. Nesse momento os resultados de ambos os grupos puderam ser comparados e a validação da situação pode ser realizada por meio da matemática utilizando a hipótese de que "*a altura média aumenta de dois em dois*". Além disso, o grupo que definiu a questão "*As pessoas altas são mais saudáveis?*" como problema para investigação refletiram sobre sua resposta à luz das considerações trazidas pela reportagem.

P: [...] O que está acontecendo com a altura média dos brasileiros?
Alunos: Está crescendo.
P: Então será que... Se [o brasileiro] está crescendo vai ficar mais saudável?
Alunos: Vai (Sinalizam com a cabeça que sim).
P: Então respondam lá o que vocês acham.

Por fim, os alunos fizeram as anotações sugeridas pelo professor e concluíram a atividade.

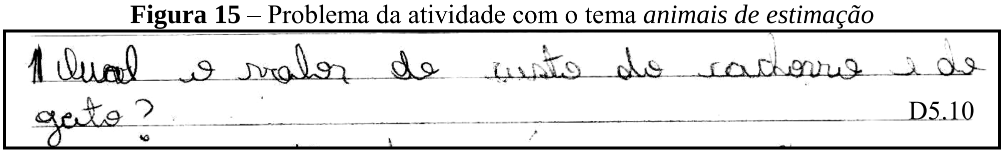
4.1.6 Atividade do 5º ano: *animais de estimação*

Para o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática com o tema escolhido pelos alunos, a turma do 5º ano, cuja idade predominante era de 10 anos, foi dividida em quatro grupos. Assim como nas outras turmas, os grupos foram organizados segundo o tema de interesse. Contudo, diferente das outras turmas que citaram vários temas e depois escolheram uma quantidade determinada pelo professor, nessa turma os alunos foram citando temas e os outros alunos foram mostrando interesse em investigá-los. Dessa forma, quatro temas foram sugeridos e esses quatro temas foram investigados. Um tema escolhido por um dos grupos de alunos foi animais, sendo essa atividade que abordamos nesta seção (Atividade D5).

Embora tenham apresentado interesse em pesquisar animais selvagens, nenhum aluno do grupo pesquisou ou trouxe informações para a aula conforme combinado. Eles afirmaram ter esquecido que era para pesquisar para aquele dia. Diante dessa situação, o professor que havia pesquisado algumas reportagens sobre animais de estimação, para outras turmas que também se interessaram pelo tema animais, as disponibilizou aos alunos.

Os alunos identificaram-se com o tema, inclusive contando fatos envolvendo seus animais de estimação. A reportagem que tinha como título "*O valor de uma amizade: Saiba quanto custa para manter um animal de estimação*" interessou os alunos e foi tomada por eles como problema para investigação (Figura 15).

Figura 15 – Problema da atividade com o tema *animais de estimação*

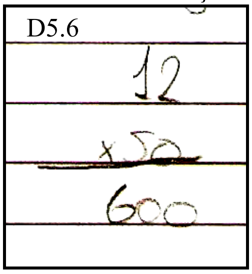

1 Qual o valor do custo do cachorro e do gato?
D5.10

Fonte: Do autor.

A reportagem citou produtos que, geralmente, são comprados para cuidar de um animal de estimação e alguns preços que os alunos utilizaram para realizar seus cálculos e resolver o problema. Os alunos selecionaram, então, produtos que frequentemente são comprados por eles ou seus pais para cuidar de seus animais, produtos de alimentação, higiene, lazer etc.

A primeira resolução pensada pelos alunos para a situação foi considerar um gasto mensal aproximado, com base em suas experiências, e calcular quanto é gasto anualmente com um cão ou gato (Figura 16).

Figura 16 – Primeira resolução dos alunos



Fonte: Do autor.

Embora a ideia seja coerente, multiplicar o gasto mensal por doze meses para saber quanto será gasto com o animal de estimação em um ano, os alunos não souberam justificar o valor de cinquenta reais, como sinaliza o diálogo.

P: *Como foi a pergunta de vocês?*
D5.6: *Pergunta? Quanto nós gastamos com cão e com gato, professor.*
D5.10: *Qual é o valor do custo do cachorro e do gato?*
P: *Como vocês fazem para calcular isso?*
D5.10: *Ai, nós fizemos assim professor: doze vezes cinquenta.*
P: *Por que doze vezes cinquenta?*
D5.10: *Porque doze é um ano e cinquenta em um mês.*
P: *E vocês fizeram a conta para ver se é cinquenta mesmo em um mês?*
Alunos: *Não.*

Conforme o diálogo, pode-se inferir que foi nesse momento, de comunicação, momento em que o grupo apresentou aos colegas os resultados de sua investigação, que eles perceberam que não bastava fazer uma conta de multiplicação para responder o problema, que eles precisavam listar os produtos que utilizam para cuidar de seus animais de estimação e saber os gastos com cada produto.

P: *Pessoal, como faz a conta para saber o gasto?*
D5.15: *Tem que pegar todos.*
P: *Tem que pegar todos o que?*
D5.15: *Todos os custos do cachorro.*
P: *Tudo que usa com o cachorro, por exemplo?*
D5.6: *Shampoo, sabonete, brinquedo, ração...*
D5.10: *Vermífugo.*
D5.14: *Roupa.*
P: *Depois que vocês fizeram isso tudo, aí vocês calculam... o que faz? Sabendo o total que gasta de cada coisa o que tem que fazer?*

Diante de tal orientação, os alunos construíram seus modelos matemáticos para a situação-problema, considerando os produtos e a soma entre eles, como ilustra o Quadro 18.

Quadro 18 – Modelos matemáticos para determinar os gastos com animais de estimação

para calcula to gasto com o cachorro somamos todos os produtos D5.15 *Para calcular o gasto com o cachorro somamos todos os produtos*
D5.10 Gasto = soma produtos
D5.10 $G = SH + SA + R \pm B$ shampoo sabonete Ração Brinquedo

Fonte: Do autor.

Usando seus modelos os alunos utilizaram as informações sobre os gastos mensais de cada produto, que eles haviam calculado, e obtiveram a resposta para o problema (Figura 17).

Figura 17 – Resposta para o problema da atividade com o tema animais de estimação

D5.8

$$\begin{array}{r} 120{,}00 \\ 8{,}50 \\ 24{,}90 \\ 8{,}00 \\ 26{,}60 \\ +\ 01{,}83 \\ \hline 188{,}83 \end{array}$$

Fonte: Do autor.

O resultado R$ 188,83 mensais destoou do indicado pelos alunos na primeira resolução, em que eles afirmaram gastar aproximadamente R$ 50,00 por mês. Há, contudo, a necessidade de considerar que há uma diferença considerável entre os preços disponibilizadas na reportagem utilizada pelos alunos como fonte de informação e os preços nas lojas da cidade. A ração, por exemplo, enquanto a reportagem indicava custar R$ 200,00 o pacote de 15 kg, os alunos afirmaram pagar R$ 120,00 em um pacote com a mesma quantidade, valor que utilizaram na resolução. Além disso, há outras simplificações que podem ser observadas na resolução dos alunos, como o consumo de ração e o porte do animal de estimação; se a ração é utilizada diariamente e exclusivamente como alimento; e foi considerado pelos alunos o valor gasto em um mês em que todos os produtos indicados por eles seriam comprados.

Apesar de realizar simplificações não ser uma ação comum aos alunos em uma aula de matemática, o contexto da atividade de modelagem deu o suporte e sinalizou a necessidade que essas simplificações fossem realizadas, de modo a viabilizar a resolução do problema.

Além disso, o desenvolvimento dessa atividade ofereceu aos alunos a oportunidade de discutir questões associadas à adição, multiplicação e divisão de números racionais e seus algoritmos, sobre a propriedade comutativa da adição, a linguagem adequada para referirem-se a valores associados ao dinheiro, média, como representar algebricamente uma expressão, entre outras que vão para além da disciplina de matemática e que estão associadas ao tema investigado.

4.2 OS ENCAMINHAMENTOS DOS ALUNOS PARA AS ATIVIDADES DE MODELAGEM

Foram quinze as atividades desenvolvidas no âmbito da pesquisa e é a análise dos encaminhamentos dos alunos para essas atividades que nos fornece subsídios para construir nossas categorias. Esta seção, portanto, tem por objetivo evidenciar que encaminhamentos foram realizados pelos alunos dos anos iniciais durante as atividades de modelagem matemática. Focamos nos encaminhamentos das seis atividades descritas: *crescimento das unhas*, *neve*, *tigres*, *recordes*, *evolução do homem* e *animais de estimação*. As demais atividades, como já mencionamos, não são desconsideradas, pelo contrário, são trazidas nas análises para sustentar nossas inferências.

Indicar configurações de modelagem matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental requer que o desenvolvimento das atividades seja analisado cuidadosamente, de modo que até mesmo detalhes mais sutis, que se mostrem relevantes, sejam levados em conta. Para que essa análise seja possível, Bardin (2011) e Moraes (1999) sugerem que os materiais constituintes do corpus sejam fragmentados ou unitarizados em unidades de análise (ou unidades de registro), constituintes de segmentos de conteúdo. Segundo Moraes (1999, p. 16) as unidades de análise podem ser “palavras, frases, temas ou mesmo os documentos em sua forma integral”.

No caso da presente pesquisa, de acordo com as regras de recorte adotadas para constituição do corpus, as unidades de análise são os conteúdos presentes nos registros dos alunos e nos diálogos associados ao desenvolvimento da atividade. Dessa forma, um desenho, uma frase, uma palavra, um gráfico, um diálogo são exemplos de unidades de análise.

Esse processo de fragmentação ou unitarização que define as unidades de análise está associado à codificação. Segundo Bardin (2011, p. 133), a codificação

> corresponde a uma transformação – efetuada segundo regras precisas – dos dados brutos do texto, transformação esta que, por recorte, agregação e enumeração, permite atingir uma representação do conteúdo, ou da sua expressão; suscetível de esclarecer o analista acerca das características do texto, que podem servir de índices [...].

De acordo com Moraes (1999) o sistema de códigos pode ser constituído por números ou letras, ou pela combinação entre eles, e permite ao analista identificar rapidamente cada elemento codificado. Dessa forma, codificamos as unidades de análise indicando a atividade, a série e o aluno a que se refere. Por exemplo, o código A1.2.3, diz respeito ao 3º código, do 2º aluno da lista de nomes da turma do 1º ano, referente à primeira atividade desenvolvida pelo aluno. Os diálogos, por sua vez, são codificados conforme a ordem cronológica em que ocorreram, indicando a que atividade e a que turma dizem respeito, dessa forma o código DA5.4 refere-se ao diálogo 4 que ocorreu no 5º ano durante a primeira atividade.

Após a definição das unidades de análise, elas foram, de acordo com as orientações de Bardin (2011), classificadas e agregadas segundo o seu conteúdo, servindo de índices para a definição das categorias. O olhar para as unidades de análise, na tentativa de classificá-las, vem revestido de nossos entendimentos sobre modelagem matemática e embasado em pressupostos teóricos que fundamentam nossas argumentações.

Nesse contexto, tomamos como ponto de partida para a definição desses índices, discussões presentes na literatura a respeito de elementos que constituem a prática da modelagem matemática, como sinalizado por autores como Bean (2001), Blum (2002), Barbosa (2004), Almeida, Silva e Vertuan (2012), Pollak (2012), entre outros. Também levamos em conta a descrição das atividades realizada pelos alunos de cada turma.

4.2.1 Os encaminhamentos dos alunos para a atividade *crescimento das unhas*

De modo geral, nas cinco turmas o professor propôs o desenvolvimento da atividade a partir da apresentação do tema por meio de um vídeo, forneceu algumas informações, trechos de reportagens, algumas voltadas para o público infantil, e convidou os alunos a discutir questões associadas ao tema. Nesse contexto, os alunos foram convidados a investigar o problema, conforme sugere Barbosa (2004).

Diante das atitudes dos alunos, pode-se dizer que eles aceitaram o convite à discussão, momento em que eles comentaram as informações, expuseram suas opiniões e compartilharam suas experiências com relação ao tema. Conforme a série, do 1º ao 5º ano, as discussões assumiram um caráter diferente, sendo cada vez mais objetivas, contudo, possuindo o mesmo papel na atividade, o de familiarizar os alunos com o tema (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012). Em alguns casos, histórias fictícias foram contadas, com mais frequência nos três primeiros anos, particularmente no 1º ano. Cabe ao professor colocar os alunos a par da situação com os dados reais. O Quadro 19 traz alguns exemplos dessas falas.

Quadro 19 – Falas que expõem situações fictícias

A1.8: Mulher não corta a unha.
A1.18: [Se não cortar as unhas elas ficam bem grandes] Daí vira um monstro.
A1.8: Minha mãe já corta todo dia e a unha cresce, corta, cresce, corta.
A1.17: Também tem que ter cuidado quando for cortar porque a unha também pode sair do dedo.
A2.2: Se brincar com terra molhada e a terra entrar dentro da unha a unha fica podre.
A3.3: Eu já ouvi falar um dia de um homem que ficou com a unha do tamanho da cidade.

Fonte: Do autor.

Ao discutirem sobre a situação, várias questões matemáticas surgiram e tiveram que ser colocadas em discussão para que os alunos pudessem compreender o problema e suas informações (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012). Questões que contemplam discussões associadas à contagem (*Que número é esse? Quanto é 18? Qual número vem depois do 3? Como se escreve o número 9?*), à comparação (*Qual é maior? Qual cresce mais rápido?*), à lateralidade (*Qual é a mão esquerda?*), às unidades de medida (*Vocês sabem quanto é 3 mm? Quantos dias tem o mês mesmo? A semana tem 7 dias. Essa medida corresponde a 1 m. Cada centímetro corresponde a quantos milímetros? 3,1 m é igual a 3 m e 10 cm*), às ideias das operações e observação de regularidades (*Quantas vezes nós somamos 3 aqui? Lembra a tabuada*), às medidas de tendência (*O que significa em média?*), ao tratamento da informação (*Em qual gráfico é mais fácil visualizar o crescimento? Isso é uma tabela*) à noção de infinito

(*O que significa ao longo dos meses? Não pode crescer mais? Tem fim os números? Tem fim os meses?*), entre outras.

Devido ao contexto em que esses alunos se encontravam, da alfabetização, exercícios de *leitura* e *escrita* foram frequentemente realizados, principalmente pelas turmas de 1º, 2º e 3º ano, mas também o 4º e o 5º ano. "*Como se escreve fita métrica?*", "*Como se escreve centímetros?*", "*Qual é o plural de mês?*" foram alguns questionamentos feitos aos alunos nesse sentido.

Para resolver o problema, os alunos usaram como ponto de partida as informações e as discussões matemáticas associadas ao problema, no que se refere ao entendimento da unidade de medida de comprimento milímetro e da expressão ao longo dos meses, os alunos foram também orientados quanto ao uso da expressão "*em média*". Para ser possível o estudo da situação por meio da matemática foi preciso considerar que o crescimento das unhas é uniforme, ou seja, considerar que as unhas das mãos crescem por mês 3 milímetros e as dos pés 1 milímetro, ao invés de "as unhas das mãos crescem, *em média*, 3 milímetros por mês e as dos pés, *em média*, 1 milímetro por mês", conforme informações. Tal consideração consiste no que diversos autores denominam de formulação de hipótese (BEAN, 2001; BASSANEZI, 2004). De acordo com Bassanezi (2004), as hipóteses são formulações gerais que dirigem a investigação e permitem ao modelador deduzir manifestações empíricas específicas, conjecturar relações entre as variáveis. Para Bean (2001), inclusive, a exigência das hipóteses é requisito na criação dos modelos, assim como aproximações simplificadoras, e nesse sentido é preciso decidir quais aspectos da situação serão considerados e mantê-los, definindo quais variáveis devem ser consideradas (POLLAK, 2012).

Ainda que essas hipóteses apareçam apenas nos registros escritos dos alunos do 4º e do 5º ano, em todas as turmas essa discussão foi realizada. O Quadro 20 indica uma orientação do professor com relação a essa discussão das hipóteses e apresenta um registro que exemplifica a anotação dos alunos.

Quadro 20 – Formulação de hipóteses na atividade crescimento das unhas

Na verdade as unhas crescem mais ou menos 3 milímetros. Tem mês que cresce um pouquinho mais, tem mês que cresce um pouquinho menos, mas a gente pode dizer que cresce 3 milímetros.
Vamos considerar que as unhas das mãos crescem por mês 3 mm e a dos pés 1 mm. A4.1

Fonte: Do autor.

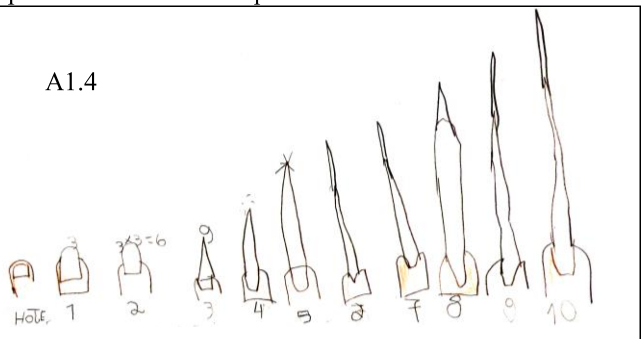
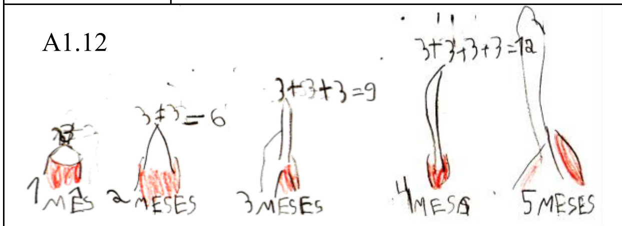
Assumir tal hipótese levou os alunos a uma idealização da situação, uma vez que tais atitudes exprimem a tentativa dos modeladores de adaptar ao “mundo permanentemente dado como efetivo na nossa vida concreta, uma roupagem de ideias da matemática que o substitui e o mascara, como a natureza objetivamente efetiva e verdadeira” (HUSSERL, 2012, p. 40). Essa idealização implica, portanto, uma simplificação da situação em alguns aspectos (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012) e transforma o problema sob investigação em um problema matemático, uma vez que torna a situação mais precisa aos olhos do modelador de acordo com seus interesses (BLUM; NISS, 1991).

Nessas condições, análises matemáticas podem ser empreendidas na formulação do modelo matemático e resolução do problema, como explica Lingefjärd (2006), isto é, técnicas e métodos matemáticos podem ser utilizados de modo a obter resultados matemáticos (BLUM; NISS, 1991). Entra em jogo nesse momento a linguagem matemática e a criatividade para resolução do problema (BASSANEZI, 2004; ALMEIDA, SOUSA; TORTOLA, 2015).

De modo geral, os alunos do 1º ano utilizaram para resolução a contagem, recorreram ao sucessor para saber, por exemplo, qual era o próximo mês ou que sempre haverá um próximo mês, e para registrar um número e saber que quantidade ele representa. Usaram também a adição, particularmente a ideia de acrescentar para obter quanto a unha cresceu mês a mês; e realizaram comparações, uma vez que optaram por fazer gráficos pictóricos, e esses gráficos, de acordo com a situação-problema, deveriam ter um comportamento crescente (Quadro 21).

Quadro 21 – Formulação do modelo matemático pelos alunos do 1º ano para o crescimento das unhas

<table>
<tr>
<td rowspan="2">P: Quanto cresceu em dois meses?
A1.7: 6 mm.
P: Isso, por quê? Porque cresceu 3 aqui mais...
Alunos: 3.
P: Que dá?
A1.7: 3 mais 3...
Alunos: dá 6.
P: Isso, e depois de 3 meses? E depois de 4 meses? E depois de 5 meses...?
(Alunos continuam contando).
P: isso e assim por diante, depois de 6, 7, 8, ...
P: Precisa fazer todos?
(Alguns alunos dizem sim, outros dizem não).
P: Não, por quê? Vai ter fim?
Alunos: Não.</td>
<td>

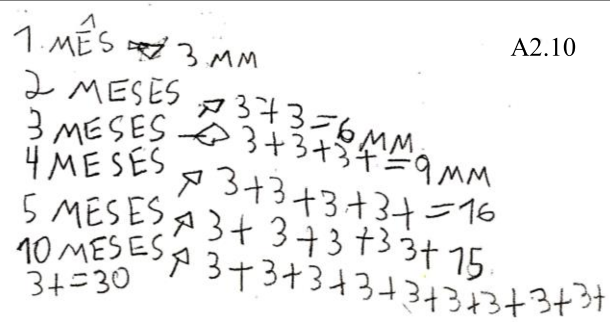
A1.6</td>
<td colspan="2">A1.4

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">A1.12

</td>
<td>P: Depois de um mês o que vai acontecer com a unha?
A1.6: Crescer.

Se crescer vai ficar maior.</td>
</tr>
</table>

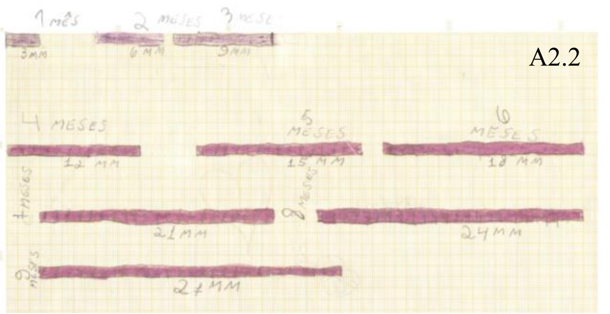
Fonte: Do autor.

Os alunos do 2º ano apoiaram-se no uso do material dourado[33], para contar, adicionar e construir gráficos. Folhas milimetradas foram utilizadas pelos alunos para produzir gráficos respeitando as medidas ou pelo menos para eles utilizarem uma escala. Adições foram realizadas no quadro pelo professor com a ajuda dos alunos orientando-os a observar as regularidades, o que oportunizou a introdução da multiplicação, particularmente associada à ideia de adição de parcelas iguais. Um texto também foi produzido por sugestão do professor para explicar o crescimento das unhas dos pés. O Quadro 22 apresenta elementos que caracterizam a formulação do modelo do crescimento das unhas pelos alunos do 2º ano.

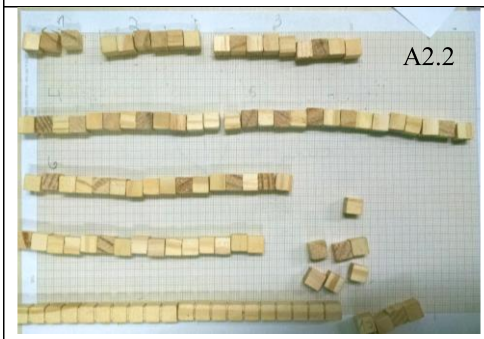
Quadro 22 – Formulação do modelo matemático pelos alunos do 2º ano para o crescimento das unhas



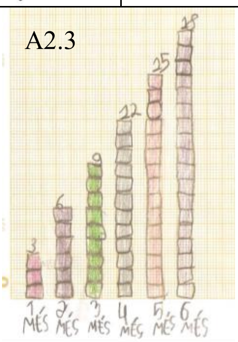
A2.10



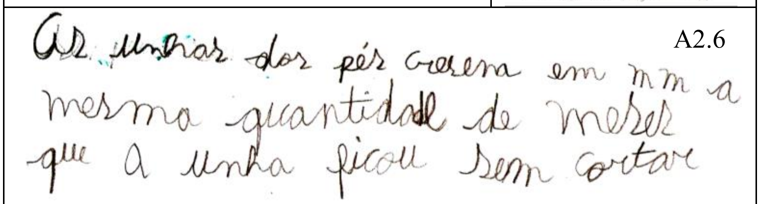
A2.2



A2.2



A2.3



A2.6

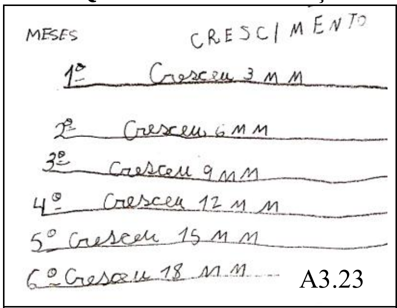
P: Um mês cresceu quanto?
A2.14: Três...
P: Três. Quantos três apareceu aqui? Apareceu uma vez só né? Em dois meses quantos 3 você somou?
A2.14: Dois.
P: Em três meses quantos 3 você somou?
A2.14: Três.
P: Em quatro meses quantos 3 você tem que somar?
A2.6: Quatro.
[...]
P: Aqui apareceu duas vezes o 3, aqui apareceu três vezes (A2.14 fala junto) o 3. Em quatro meses vai aparecer quantas vezes o 3?
A2.14: Quatro vezes.

Fonte: Do autor.

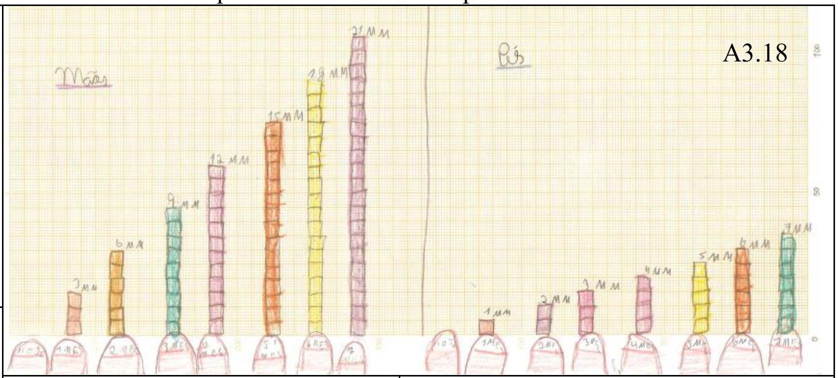
Os alunos do 3º ano identificaram a possiblidade de utilizar multiplicações para expressar o crescimento das unhas, embora muitos optaram pelas adições. Gráficos pictóricos e gráficos de barras foram produzidos e textos explicativos foram construídos. Expressões descritivas foram produzidas a partir da observação das regularidades presentes na situação (Quadro 23).

[33] Idealizado por Maria Montessori, o material dourado é um instrumento criado para auxiliar o ensino e a aprendizagem de matemática de forma sensorial, particularmente no que se refere à aritmética. O material permite explorar características do sistema numérico decimal e representar as operações elementares da matemática. É geralmente utilizado nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

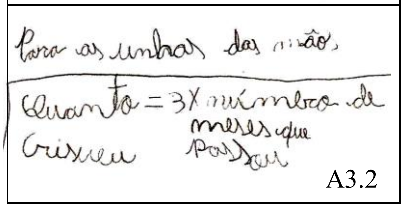
Quadro 23 – Formulação do modelo matemático pelos alunos do 3º ano para o crescimento das unhas



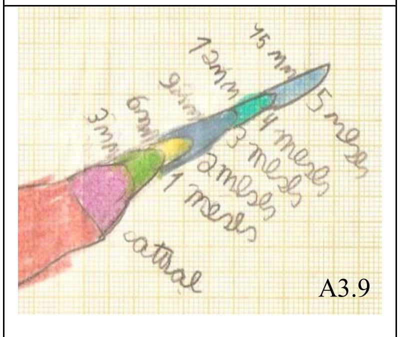
A3.23



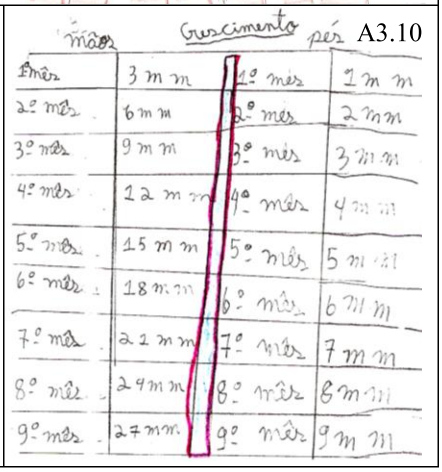
A3.18



A3.2


A3.9

P: Gente para que dá para usar essa folha quadriculada?
A3.14: Para colocar as medidas?
P: Por exemplo, se cresceu um milímetro, eu vou pintar quantos quadradinhos?
Alunos: Um.
P: Cresceu dois milímetros.
Alunos: Dois.
P: Três milímetros?
Alunos: Três.
P: Aí cresceu seis...
Alunos: Seis.
P: Dez?
Alunos: Dez.

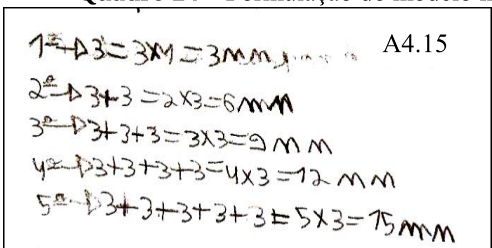


A3.10

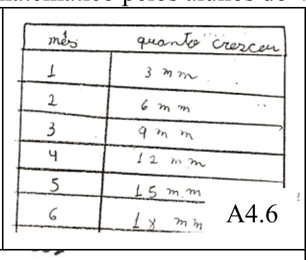
Fonte: Do autor.

Os alunos do 4º ano utilizaram algumas estratégias diferentes das turmas anteriores, embora ainda prevaleça o uso de adições e multiplicações e a produção de gráficos. Dados foram organizados em tabelas, descrições foram feitas de modo a apresentar o crescimento das unhas mês a mês e, com isso, observamos uma autonomia com relação ao uso da matemática, que não observamos nas turmas dos anos anteriores (Quadro 24).

Quadro 24 – Formulação do modelo matemático pelos alunos do 4º ano para o crescimento das unhas

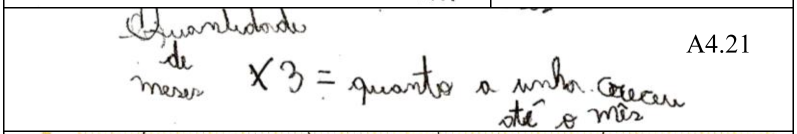


A4.15



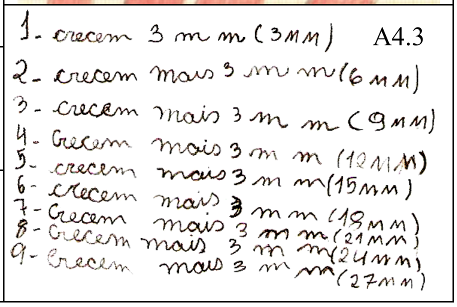
A4.6


A4.14



A4.21

A4.14

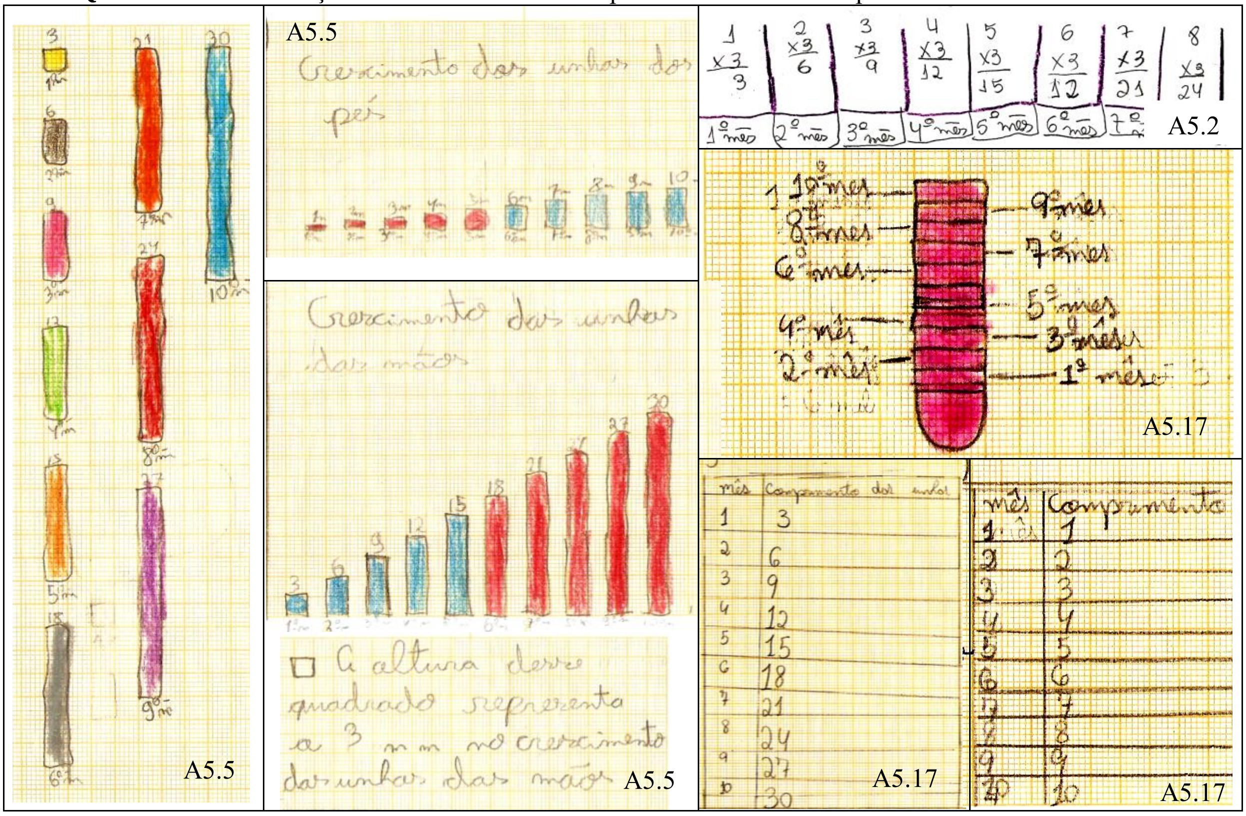


A4.3

Fonte: Do autor.

Essa autonomia foi também observada nas resoluções e nos encaminhamentos dos alunos do 5º ano. Esses alunos, por sua vez, utilizaram a multiplicação com mais frequência, associando, inclusive, a resolução proposta por eles para a situação-problema à tabuada. Gráficos, tabelas e textos foram também produzidos para explicar o comportamento da situação e regularidades foram observadas de modo a generalizar a situação utilizando uma expressão descritiva (Quadro 25).

Quadro 25 – Formulação do modelo matemático pelos alunos do 5º ano para o crescimento das unhas



Fonte: Do autor.

Como se pode observar nos registros referentes às resoluções, todas as séries identificaram as variáveis envolvidas na situação-problema (comprimento que as unhas cresceram, em milímetros, e o tempo, em meses) ainda que o termo “variáveis” não tenha sido mencionado. Entretanto, apenas alunos do 4º e 5º ano apresentaram a preocupação em registrá-las, enquanto que os demais alunos – com exceção de um aluno do 3º ano, que também fez o registro –, essa identificação foi realizada apenas nas discussões. Há ainda que se considerar que os alunos do 1º ano trocavam com frequência as unidades de medida “meses” e “milímetros” e, apesar disso, reconheciam as variáveis envolvidas na situação-problema. O Quadro 26 sinaliza a maneira como os alunos lidaram com as variáveis.

Quadro 26 – Variáveis envolvidas na situação-problema referente ao crescimento das unhas

P: Sobre o que a gente está investigando? *Alunos: Unhas.* *P: Mas o que em relação às unhas? O quanto...* *Alunos: Elas crescem.* *[...]* *P: O que mais tem que aparecer? [...] É ao longo do que?* *Alunos: Dos meses.* *P: E mês é uma medida do que? [Silêncio].* *P: De tempo.*	* quanto cresceu (MM) * tempo (meses) A4.1 *crescimento das unhas (mm) *Tempo (meses) A5.11

Fonte: Do autor.

Durante a resolução coube ao professor avaliar os encaminhamentos dos alunos e o uso da matemática, uma vez que é seu papel orientar, indicar caminhos, apontar e corrigir erros (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012). Essa avaliação é necessária para que os alunos possam produzir modelos matemáticos que forneçam respostas coerentes e que possam ser considerados válidos para expressar o comportamento da situação. A validação, por sua vez, como argumenta Bassanezi (2015), consiste em um processo de aceitação ou rejeição do modelo. No caso desta atividade, a validação se deu a partir da comparação entre os resultados e tomando como padrão de correção a informação "As unhas das mãos crescem, em média, três milímetros por mês e as dos pés um milímetro por mês". Nesse momento questionamentos do professor orientaram as análises dos modelos produzidos, levando os alunos a avaliarem se seus modelos condiziam com as informações da situação-problema.

Com os modelos validados os alunos observaram o crescimento das unhas ao longo dos meses e responderam ao problema proposto inicialmente. Para isso utilizaram além de seus modelos, régua e folha milimetrada, e conforme a turma, os alunos forneceram suas respostas usando a comparação, como no caso dos alunos do 1º ano que afirmaram que "*a unha tem que ser cortada antes de um mês*"; usando termos como *"metade do mês* ou *15 dias"*, como foi o caso do 2º e do 3º ano; e usando frações do mês, *1/3, 2/3, 3/3 ou 1*, como fizeram os alunos do 4º e do 5º ano (Quadro 27).

Quadro 27 – Respostas dos alunos para o problema de quando cortar as unhas

1º ano	2º e 3º ano	4º e 5º ano
P: Então será que a gente pode esperar 1 mês para cortar as unhas? *Alunos: Não.* *P: Tem que cortar antes ou depois?* *Alunos: Antes.*	DEVEMOS CORTAR AS UNHAS COM MENOS DE 1 MÊS OU MAIS OU MENOS 15 DIAS A2.10 Eu acho que meio mês A3.9	Em 10 dias. $\frac{1}{3}$ do mês A4.22 10 dias = $\frac{1}{3}$ do mês. 20 = $\frac{2}{3}$ do mês 30 = $\frac{3}{3}$ = 1 mês 15 = → $\frac{1}{2}$ do mês A5.16

Fonte: Do autor.

Por fim, os resultados foram comunicados aos colegas, como indicam Almeida, Silva e Vertuan (2012). Para a comunicação apresentações individuais ou em grupo foram realizadas, nas quais os alunos mostraram a maneira como resolveram o problema e apresentaram suas respostas. Essas apresentações se deram a partir de questionamentos do professor, uma vez que os alunos, de modo geral, apenas mostravam os trabalhos aos colegas, sem comentar.

Nesse momento, de socialização dos resultados, os alunos foram também questionados com relação ao desenvolvimento da atividade. O professor propôs aos alunos que eles relembrassem como a atividade foi encaminhada. Como foi a primeira atividade de modelagem matemática que os alunos desenvolveram, o professor acabou direcionando mais a discussão. Os diálogos a seguir apresentam trechos das discussões realizadas com os alunos de cada turma com relação ao desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. Comecemos com o 1º ano.

P: *Como que começou a atividade, vocês lembram?*
A1.18: *Desenhamos as unhas das mãos e depois as dos pés.*
P: *Quem estava no primeiro dia? O que foi que o professor fez?*
A1.17: *Mostrou um negócio.*
P: *Mostrou o que?*
A1.6: *Mostrou o negócio das unhas crescer.*
A1.2: *E do vídeo.*
P: *Mostrou o negócio das unhas crescer. Mostrou a mulher que tinha as unhas grandes. Mostrou a quantidade que cresceu as unhas das mãos, dos pés, mostrou o vídeo [...] E depois o que o professor pediu para fazer?*
Alunos: *Desenhar.*
P: *Desenhar?*
A1.7: *É... as unhas.*
P: *Era para responder uma pergunta, não era? Como crescia as unhas, certo?*
Alunos: *É.*
P: *Aí depois tinha outra pergunta que é de quanto em quanto tempo que precisa cortar as unhas?*
[...]
Depois que vocês fizeram, então, todas essas atividades, essas coisas, a gente acabou respondendo essas duas perguntas, não respondeu? A gente mostrou como que crescem as unhas... O que parece isso aqui mesmo?
A1.17: *Uma escadinha.*
P: *Parece uma escadinha, né? Ela vai aumentando no caso dos pés de um em um degrau e das mãos de três em...*
Alunos: *Três (falam antes que o professor).*

O diálogo aponta indícios de que informações foram apresentadas aos alunos e que diante dessas informações eles fizeram alguns desenhos. O professor chamou atenção dos alunos para o porquê fazer tais desenhos, lembrando-lhes que há um problema a ser resolvido. Esses desenhos foram produzidos para expressar como as unhas crescem e para auxiliar os alunos responderem de quanto em quanto tempo as unhas precisam ser cortadas.

No 2º ano dois diálogos ocorreram no sentido de discutir os encaminhamentos dos alunos para a atividade, um no início do segundo dia de desenvolvimento da atividade, relembrando as ações realizadas e outro no final da atividade. Apresentamos o último diálogo.

> *P: Vamos retomar, o que a gente fez primeiro?*
> *A2.12: Ah, é umas coisas dos dedos...*
> *A2.2: Das unhas.*
> *P: O que o professor apresentou?*
> *A2.12: As unhas.*
> *P: O que o professor fez? Vocês lembram? [...] O professor apresentou algumas informações, não é? Apresentou sobre a mulher que tinha as unhas grandes...*
> *A2.15: Do menininho.*
> *P: Apresentou o vídeo, aí o professor chamou atenção do que? Que a cada mês nossas unhas crescem quantos?*
> *A2.12: Três.*
> *P: Três milímetros. [...] Aí o professor não propôs um problema? Com duas perguntas.*
> *A2.2: Sim.*
> *P: Como vocês fizeram depois do problema? Vocês sentaram em grupo e aí conversaram sobre como resolver. Como mostrar ao longo do tempo, não é? Aí mostrou ao longo do tempo, e o que a gente fez? Registrou. Mostrou uma resposta. E mostrou para os colegas a maneira como vocês fizeram. A gente conversou sobre isso e respondeu as duas perguntas.*

O diálogo indica que a atividade iniciou com a apresentação de algumas informações pelo professor. Dessas informações, ele chamou atenção para algumas informações, consideradas mais importantes. Podemos inferir que isso se refere ao aspecto de selecionar informações, como sugerido por Pollak (2012). Essas informações seriam úteis aos alunos para resolver o problema.

O diálogo sinaliza também a organização dos alunos em grupo para o desenvolvimento da atividade, ficando a cargo deles pensar e conversar sobre estratégias para resolver o problema, ou seja, para mostrar como as unhas crescem ao longo dos meses. As estratégias utilizadas foram registradas pelos alunos e uma resposta para o problema foi apresentada. Essas estratégias do como fazer e as respostas foram apresentadas aos colegas. Uma conversa foi realizada e as duas perguntas respondidas.

Com relação ao 3º ano, não houve um momento específico para discutir os encaminhamentos dos alunos para a atividade, contudo, o professor ao longo do desenvolvimento foi chamando atenção dos alunos para as informações, relembrando o problema, explicando que algumas questões precisavam ser levadas em consideração, chamando atenção para as variáveis envolvidas, provocando discussões a respeito do tema e a respeito da matemática etc.

O diálogo a seguir apresenta um trecho da discussão do professor com os alunos do 4º ano com relação ao desenvolvimento da atividade e aos encaminhamentos utilizados pelos alunos. Dois diálogos associados a essa discussão foram realizados. O que apresentamos é o primeiro deles, no início do segundo encontro, quando o professor retomou com os alunos o que havia sido feito até então.

P:	*O que eu fiz primeiro? Eu apresentei algumas informações para vocês, certo? E depois o que eu propus para vocês?*
A4.25:	*Um filme.*
P:	*E depois do filme? Ainda fazia parte das informações. Eu perguntei o que? Eu propus um...*
Alunos:	*Problema.*
A4.11:	*Dois.*
P:	*Duas questões nesse problema. Aí o que vocês fizeram depois desse problema?*
A4.13:	*Tentamos resolver?*
P:	*Tentaram resolver. Eu juntei vocês em grupo e vocês tentaram resolver usando o que? Que conteúdos, de que matéria?*
Alunos:	*Matemática.*
P:	*[No próximo encontro] a gente retoma o problema e depois retoma a resolução do problema. A gente volta usando matemática. Aí depois vem uma socialização, nós vamos conversar e mostrar o que vocês já conseguiram fazer.*

O diálogo mostra que a atividade teve início com a apresentação de algumas informações por parte do professor e também as disponibilizadas por meio do vídeo. Foi nesse contexto que o problema foi proposto aos alunos. Organizados em grupos, os alunos foram orientados a resolver o problema, e para isso utilizaram conteúdos matemáticos.

Como indica o diálogo, esse episódio ocorreu no final do primeiro encontro, momento em que os alunos trabalhavam na resolução do problema. Para fechar a aula, o professor explicou o que seria feito no encontro seguinte: a resolução do problema seria retomada e após chegarem a uma resolução, os resultados seriam socializados, ou seja, cada aluno apresentaria aos demais a maneira como resolveram o problema e os resultados obtidos. E foi o que aconteceu.

No 5º ano houve também duas discussões a respeito de como foi o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática com os alunos. Um deles no final do primeiro encontro, quando a atividade estava quase finalizada e outro no final do segundo encontro. Optamos por apresentar o primeiro, pois houve maior participação por parte dos alunos.

P:	*O que a gente fez mesmo do início? Como que começou essa atividade?*
A5.13:	*Aprendendo como crescem as unhas.*
P:	*Isso, o que foi que eu fiz mesmo? Eu apresentei algumas informações para vocês e depois? Eu destaquei algumas coisas, não destaquei?*
A5.10:	*Aham. Destacou a atividade.*
A5.13:	*Sim.*
P:	*Eu destaquei e entreguei a atividade, que atividade?*
A5.10:	*A tabuada para a gente resolver.*
P:	*A tabuada para vocês resolverem?*
A5.16:	*Das... das... das unhas.*
P:	*O que das unhas?*
Alunos:	*Os milímetros.*
P:	*Os milímetros. O que esses milímetros respondiam mesmo?*
A5.16:	*É da tabuada, ajudando na tabuada.*
P:	*Ajuda na tabuada, mas essa era a resposta do que?*
A5.10:	*Da primeira pergunta.*
P:	*Da primeira pergunta, então vejam: a gente começou com algumas informações, eu selecionei algumas informações, lembram que eu falei que era em média três milímetros?*
Alunos:	*Sim.*
P:	*Não é exatamente, mas é em média. Todo mundo está considerando que é três, não está?*
A5.13:	*Sim.*
	[...]
P:	*É uma simplificação que a gente faz. A gente deixou mais simples o problema. Ai eu propus o que? O problema para vocês resolverem e vocês estão agora no momento de criar estratégias, de resolver o problema, certo? [...] a gente vai conversar sobre as resoluções que vocês apresentaram e vai ver se tem outras coisas a mais que dá para fazer. Certo? E aí a gente vai responder juntos o problema, a primeira pergunta e depois a segunda pergunta. Ok?*

O diálogo sinaliza que a atividade começou com a exposição de algumas informações, das quais algumas que eram pertinentes à situação-problema foram selecionadas pelo professor junto com os alunos. Nesse contexto duas perguntas, que constituem o problema da atividade, foram propostas. Os alunos parecem ter associado o uso dos conteúdos matemáticos à resolução do problema, quando mencionam a tabuada e os milímetros. Uma questão interessante a se apontar nesse diálogo é a discussão sobre a simplificação, aspecto que foi explicitado pelo professor como uma das ações no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Nesse contexto os alunos criaram estratégias para resolver o problema e apresentaram o andamento de suas resoluções. O professor sinalizou, então, a necessidade de uma discussão a respeito das resoluções apresentadas e a possibilidade de outras resoluções serem pensadas, para então dar uma resposta às questões do problema.

Os diálogos apresentados e a análise dos encaminhamentos realizada nos fornecem indícios a respeito do modo como os alunos desenvolveram a atividade de modelagem matemática com o tema *crescimento das unhas*. Esses indícios sugerem aproximações e revelam particularidades dos encaminhamentos dos alunos de cada turma para a atividade.

Há uma ampliação no que diz respeito ao uso de anotações, isto é, enquanto alunos do 1º ano utilizaram registros escritos particularmente na produção de seus modelos matemáticos, os alunos do 5º ano anotaram informações, grifaram as informações selecionadas, anotaram a hipótese que simplificava a situação-problema, as variáveis envolvidas, a resolução e a resposta. Ou seja, o recurso da escrita torna-se cada vez mais utilizado pelos alunos, conforme o ano escolar, em contrapartida, nos primeiros anos o diálogo é fundamental.

Diferenças também podem ser observadas quanto ao uso da matemática e de sua linguagem para a formulação do modelo matemático e resolução do problema. Os primeiros anos apoiaram suas resoluções essencialmente em desenhos, na contagem e na adição; os anos posteriores, por sua vez, tomaram a multiplicação como a ferramenta principal na resolução do problema. Os gráficos que estão presentes nas resoluções apresentadas pelas cinco turmas fornecem também indicativos dessa diferença. Enquanto alunos do 1º ano usaram a informação "no próximo mês as unhas precisam ser *maiores* porque elas *crescem*" para a construção de gráficos pictóricos – sem se preocuparem com a exatidão das medidas –, alunos do 5º ano, por exemplo, usaram papel milimetrado para a construção de gráficos de barras e discutiram a noção de escala, indicando que medida representava a altura de um quadrado, além disso muitos optaram por usar o papel milimetrado considerando o tamanho real dos quadrados, dessa forma eles poderiam observar qual seria o tamanho "real" das unhas caso elas cresçam em conformidade com a hipótese formulada.

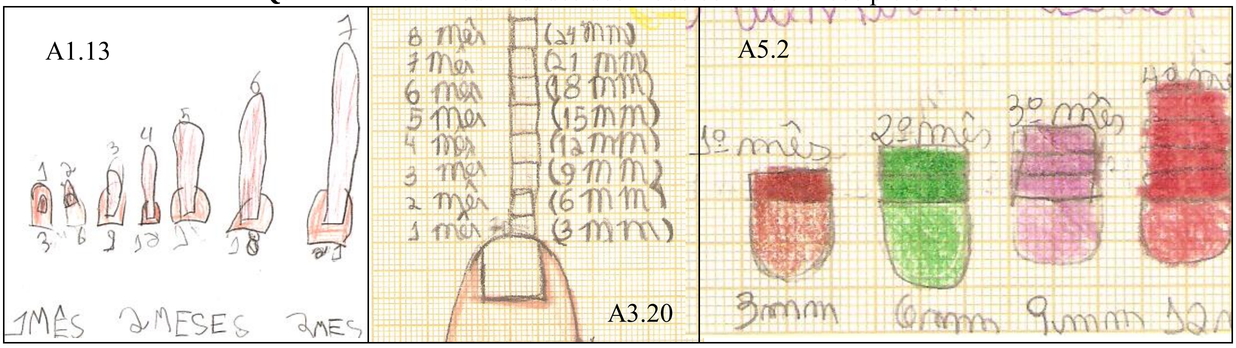
A formulação dos modelos revelou também diferenças quanto à autonomia no uso da matemática e de sua linguagem, alunos dos primeiros anos, particularmente do 1º ano, necessitaram mais do direcionamento e acompanhamento do professor, por uma série de questões como a leitura, a contagem, o registro, tanto dos numerais, quanto das palavras, a compreensão do problema, a coerência com as informações da situação-problema, que precisavam a todo momento ser retomadas, o esclarecimento de dúvidas, o conhecimento matemático em construção etc. Já alunos dos últimos anos, 4º e 5º ano, apresentaram mais autonomia quanto a como proceder matematicamente, como registrar etc., o que não quer dizer que eles não precisaram do direcionamento e acompanhamento do professor, mas que eles apresentaram mais iniciativa com relação a que matemática utilizar na produção dos modelos matemáticos, o que é justificável, uma vez que eles conheciam procedimentos e possuíam conhecimentos matemáticos que em alunos de anos escolares anteriores estão ainda em construção, ou seja, eles têm um arsenal matemático mais amplo.

Reconhecer que o arsenal matemático dos alunos do 5º ano e do 4º ano é mais amplo quando comparado ao arsenal matemático dos alunos do 1º, 2º e 3º ano, contudo, não significa dizer que os modelos matemáticos produzidos por eles são melhores, ou que o conhecimento matemático dos alunos dos primeiros anos é limitado, pelo contrário, pode-se dizer que são tão sofisticados quanto, desde que sirvam para explicar os resultados e tenham a capacidade de previsão de novos resultados ou relações (BASSANEZI, 2015). E, nesse contexto, ainda que sejam estruturas matemáticas mais simples, os modelos matemáticos produzidos por todas as turmas têm essas características.

Os gráficos pictóricos, por exemplo, consistem em estruturas matemáticas que visam expor através de figuras ou imagens, de modo geral associadas aos dados, informações associadas às situações que representam. No caso dos gráficos pictóricos formulados pelos alunos do primeiro ano, eles expressam a tendência de crescimento do comprimento das unhas, mês a mês, sendo cada unha desenhada maior que a anterior, e essa tendência explica a resposta do porquê é preciso cortar as unhas frequentemente. Com relação a fazer previsões, podem ser feitas auxiliadas pela contagem ou pela adição, isto é, contando de 3 em 3 ou adicionando 3 milímetros a cada mês que se deseja saber qual o comprimento que a unha cresceu. Um pouco trabalhoso? Sim. Mas permite realizar previsões.

Gráficos pictóricos produzidos por outras turmas também têm essas características, porém a partir do 2º ano, uma nova característica foi observada, os alunos apresentaram a preocupação em utilizar uma escala para os desenhos que os constituem, "*um quadrado da folha milimetrada, ou, um cubo do material dourado representa 1 mm*". Mas é somente nos registros dos alunos do 4º e do 5º ano que começa a aparecer tal consideração ou que o tamanho real dos quadrados das folhas milimetradas é utilizado (Quadro 28).

Quadro 28 – Particularidades dos modelos matemáticos pictóricos



Fonte: Do autor.

De modo geral, as tabelas e os gráficos (pictóricos ou de barras) produzidos foram utilizados da mesma forma para explicar as respostas e para fazer previsões, mas foram nos registros dos alunos do 2º ano que começaram aparecer indícios de generalização, quando com a ajuda do professor eles produziram um modelo textual dizendo: "*As unhas dos pés crescem em mm a mesma quantidade de meses que a unha ficou sem cortar*", o que facilitou fazer previsões, pelo menos no que diz respeito ao crescimento das unhas dos pés, pois, se passaram 6 meses, então pode-se dizer que as unhas dos pés cresceram 6 mm, por exemplo. Esse texto surgiu também nas discussões dos alunos do 3º ano, mas é modificado com o uso da multiplicação, transformando-o em uma expressão descritiva, embora ainda prevaleça a produção de gráficos e de modelos aritméticos. Essa expressão descritiva, apresenta as mesmas informações disponíveis no texto formulado pelo 2º ano, mas com um nível de abstração e generalidade maior, uma vez que ela descreve que para se saber o quanto cresceu a unha depois de n meses basta multiplicar n por 3 para as unhas das mãos e n por 1 para as unhas dos pés. Já nos registros dos alunos do 4º e do 5º anos, os modelos descritivos apareceram com mais frequência e foram utilizados com mais fluência pelos alunos, o que lhes permitiu fazer previsões para intervalos de tempo maiores.

São os modelos do 4º e do 5º ano melhores? Não se pode afirmar isso, uma vez que um modelo descritivo para um aluno do 1º ano para nada lhe serviria caso ele não entendesse as instruções presentes no modelo. Ou ainda, dizer que basta fazer três vezes a quantidade de meses que a unha ficou sem cortar, suponhamos 4, os conduziria ainda para proceder à soma com quatro parcelas 3, ou seja, 3 + 3 + 3 + 3, já que esse aluno provavelmente não conhece ainda a multiplicação. Por outro lado, essas discussões quanto à regularidade da situação: que no cálculo para saber quanto a unha crescerá em dois meses aparecerá *duas vezes o 3* como parcelas da soma; em três meses aparecerá *três vezes o 3*; em quatro meses *quatro vezes o 3*; e assim por diante, pode ajudar na introdução da multiplicação, como ocorreu no 2º ano e como foi discutido no 3º ano. É nessa direção que vai a colocação de Bassanezi (2015, p. 22) quando afirma que

> [...] num ambiente de estudo do ensino básico, um modelo simples, mesmo que não reproduza perfeitamente os dados experimentais, pode ser bastante eficiente no contexto educacional. Um modelo matemático é bom quando satisfaz algum objetivo e quando o usuário o considera como tal. (BASSANEZI, 2015, p. 22).

Ou seja, não há um modelo melhor ou pior, mas modelos que servem aos objetivos de seus modeladores. E no âmbito do contexto escolar, como argumenta Bassanezi (2015), um dos objetivos que podem ser citados é a aprendizagem da matemática. Nesse sentido, cabe pontuar a quantidade de discussões e conteúdos matemáticos evocados no desenvolvimento da atividade, respeitando-se, claro, o ano escolar e os conhecimentos dos alunos (BASSANEZI, 2004). Todas as turmas desencadearam muitas discussões que conduziram os alunos a revisitar conteúdos já estudados, bem como aprender novos conteúdos (BARBOSA, 2004).

Por fim, no que diz respeito à socialização dos encaminhamentos, observamos que de modo geral os alunos necessitaram da ajuda do professor para comunicar a maneira que desenvolveram a atividade. Para auxiliá-los o professor direcionou as apresentações com questões e esclarecimentos, levando os alunos a falar, comunicar e discutir matemática. Consideramos esse momento indispensável, pois é um momento em que o aluno tem a oportunidade de colocar sua maneira de fazer, de pensar e de resolver o problema em discussão; de interagir com os colegas, de compartilhar experiências e responsabilidades para garantir que o modelo matemático produzido atenda aos critérios desejados e seja informativo e fácil de usar (ENGLISH, 2003); de inteirar-se com a linguagem matemática requerida nesse contexto de comunicação, como pressupõem os PCN.

4.2.2 Os encaminhamentos dos alunos para a atividade com o tema *neve* (1º ano)

A atividade com o tema *neve* foi desenvolvida de acordo com o que Almeida e Dias (2004) chamam de terceiro momento de familiarização com a modelagem matemática, uma vez que aos alunos foi dada mais autonomia com relação aos seus encaminhamentos.

Nesse contexto, a primeira ação dos alunos foi a escolha do tema, o que eles não haviam feito até então. Ao discutir com os alunos sobre as atividades já desenvolvidas por eles, o professor os questionou se havia algum assunto que eles desejavam investigar, conforme indica Bassanezi (2015), e dentre uma lista de temas sugeridos pelos alunos, dois foram escolhidos: *peixes* e *neve*. O diálogo a seguir mostra como foi a discussão com relação à escolha dos temas.

> *P:* *A gente fez então sobre o desafio do balde de gelo, sobre as unhas e sobre a coleta de lixo. Tem algum outro tema que vocês gostariam de investigar?*
> *Alunos:* *Sim.*
> *D1.4:* *Eu quero* ***navio****.*
> *P:* *Navio?*
> *D1.17:* *Não... o meu poderia ser* ***fundo do mar****.*
> *D1.22:* *O meu poderia ser os* ***power rangers****.*
> *P:* *Sobre desenho?*
> *P:* *O que mais gente?*
> *D1.10:* *Sobre os* ***peixinhos****.*
> *D1.15:* *Sobre navegar.*
> *D1.4:* *Sobre os tubarões.*
> *Alunos:* *(Repetem seus temas).*
> *P:* *Mais alguém? Algum tema diferente?*
> *D1.7:* *Sobre a* ***neve****.*
> *D1.13:* *Sobre os* ***animais****.*
> *D1.15:* *Sobre os* ***carros****.*
> *[...]*
> *P:* *Sete temas é muito, vamos fazer assim, vamos escolher (pergunta cada tema quem quer estudar e os alunos levantam a mão quando o tema que os interessa é mencionado).*

Os temas grifados foram os temas anotados pelo professor no quadro, desconsiderando temas como navegar, que poderia ser associado ao tema navio, e tubarões, que poderia ser associado a peixes. De modo geral, olhando para os temas citados pelos alunos, pode-se observar um interesse em relação a desenhos, animais e em meios de transportes. Esses temas podem ter surgido a partir de atividades que desenvolvem diariamente, da admiração por algum tipo de trabalho ou por alguém, de histórias que leram ou lhes contaram, de filmes infantis que assistiram, como é o caso do tema *neve*, entre inúmeras outras possibilidades que podem servir como inspiração para os alunos. O diálogo a seguir apresenta a justificativa da aluna que sugeriu o tema *neve* para a escolha desse tema após o desenvolvimento da atividade.

P:	*Por que vocês escolheram esses temas?*
D1.7:	*Porque a neve é legal.*
P:	*É? De onde vocês tiraram por exemplo neve? [...]*
D1.7:	*Porque eu assisti o filme Frozen e eu pensei que a neve nascia nas mãos das pessoas daí eu fiquei curiosa e eu pensei.*
P:	*Mas a neve nasce nas mãos das pessoas?*
Alunos:	*Não.*
P:	*Como que forma a neve?*
Alunos:	*Lá nas nuvens, lá no céu.*
P:	*Que temperatura que tem que estar?*
D1.7:	*Menos de zero grau*

O tema *neve*, a partir do qual surgiu a atividade cujos encaminhamentos dos alunos analisamos nesta seção, é um tema que, de antemão, parece não estar associado a nenhum aspecto que circunda a realidade dos alunos, a não ser por intermédio do filme citado. Bassanezi (2015, p. 18), contudo, orienta: “para a escolha de um tema a regra é bastante simples: [...] opte por algo que você gostaria de entender melhor”. E, de acordo com Hermínio (2009), de modo geral os alunos escolhem um tema segundo seus interesses, ainda que hajam diferentes razões para esse interesse. Nesse caso, porém, há indícios de que na escolha feita pelos alunos “há o interesse, a busca, o desejo de conhecer mais sobre um assunto específico” (HERMÍNIO, 2009, p. 93), sobre o tema *neve*, conforme fala da aluna D1.7: *“daí eu fiquei curiosa e eu pensei”.*

Para investigar sobre o tema, informações a respeito foram necessárias. A busca por informações representa o primeiro passo para a familiarização com o tema e foi o meio pelo qual os alunos conseguiram formular um problema (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012). Nesse sentido, levamos para os alunos algumas reportagens e imagens que discutiam o tema *neve*. De acordo com a professora regente, poderíamos até pedir que eles trouxessem informações, mas eles ainda não saberiam pesquisar sozinhos, nem explicar a tarefa para os pais. E, de fato, foi o que aconteceu, solicitamos que quem pudesse pesquisasse e trouxesse informações sobre o tema *neve* para a aula seguinte, mas nenhum aluno trouxe. Desta forma, as informações utilizadas pelos alunos foram, também nessa atividade, as informações disponibilizadas pelo professor. Considerando sua pouca idade, pensamos ser pertinente o professor suprir essa busca, de modo a inserir os alunos em atividades de pesquisa, como requer uma atividade de modelagem matemática, e até mesmo para que os alunos consigam vislumbrar a importância de buscar informações e coletar dados. O Quadro 29 apresenta informações discutidas pelos alunos e utilizadas para a formulação do problema.

Quadro 29 – Informações a respeito do tema *neve*

Saiba mais sobre o fenômeno meteorológico neve

A neve é um fenômeno meteorológico que consiste na precipitação leve, moderada ou forte de pequenos flocos de gelo. A neve é formada nas mais altas nuvens, quando a temperatura está abaixo de zero, onde os vapores de água se congelam. Esse fenômeno ocorre principalmente nos lugares de clima polar, frio ou temperado.

Fonte: http://www.universitario.com.br/noticias/n.php?i=4991

Curiosidade sobre a formação da Neve

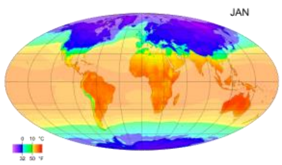
Compartilhar Curiosidade | Compartilhar | Compartilhar

Como é que se forma a neve?
A neve é formada nas camadas mais altas das nuvens, quando a temperatura lá em cima está abaixo de zero.

As gotas de água congelam-se e transformam-se em flocos de neve.

Isto é comum em grandes altitudes, mas nem toda a neve chega ao chão.

Fonte: http://www.sitedecuriosidades.com/curiosidade/curiosidade-sobre-a-formacao-da-neve.html



Fonte: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b3/MonthlyMeanT.gif

• PARA NEVAR A TEMPERATURA DEVE ESTAR ABAIXO DE ZERO
• PARA MEDIR A TEMPERATURA PODEMOS USAR O TERMÔMETRO D1.1

Fonte: Do autor.

A leitura surge nesse momento como uma especificidade dessa turma, uma vez que nem todos os alunos sabiam ler, uma vez que de acordo com as orientações da Secretaria de Educação Básica (SEB/MEC) para implementação do Ensino Fundamental de 9 anos:

> Esse primeiro ano constitui uma possibilidade para qualificar o ensino e a aprendizagem dos conteúdos da alfabetização e do letramento. Mas, não se deve restringir o desenvolvimento das crianças de seis anos de idade exclusivamente à alfabetização. Por isso, é importante que o trabalho pedagógico assegure o estudo das diversas expressões e de todas as áreas do conhecimento. Ressalte-se que a alfabetização não deve ocorrer apenas no segundo ano do Ensino Fundamental, uma vez que o acesso à linguagem escrita é um direito de todas as crianças, que é trabalho precipuamente nos ambientes escolares. Os sistemas e todos os profissionais envolvidos com a educação de crianças devem compreender que a alfabetização de algumas crianças pode requerer mais de 200 dias letivos e que é importante acontecer junto com a aprendizagem de outras áreas de conhecimento. O Ensino Fundamental de nove anos ampliou o tempo dos anos iniciais, de quatro para cinco anos, para dar à criança um período mais longo para as aprendizagens próprias desta fase, inclusive da alfabetização (BRASIL, 2009, p. 23).

Diante disso, a orientação do professor foi que os alunos que sabiam ler fizessem a leitura para os colegas do grupo. Após um tempo o professor também leu algumas informações e as discutiu com os alunos.

Nesse momento as discussões sobre as informações auxiliaram os alunos a compreender a situação, bem como as discussões matemáticas que emergiram, como foi o caso das discussões relativas a como medir a temperatura e o que significa dizer que uma temperatura está "abaixo de zero". Discussões nesse sentido são sugeridas pelos PCN, "é interessante que durante este ciclo se inicie uma aproximação do conceito de tempo e uma exploração do significado de indicadores de temperatura, com os quais ela tem contato pelos meios de comunicação" (BRASIL, 1997, p. 49).

P:	*Como o Brasil é um país quente, a temperatura geralmente é dezesseis graus, vinte graus, trinta graus... Para nevar tem que estar muito abaixo disto, precisa chegar no quatro, três, dois, um, zero.*
D1.17:	*Até o zero tem... [interrompe a fala].*
P:	*Só que para contar abaixo de zero a gente conta do mesmo jeito. Quem vem depois do zero?*
D1.18:	*Zero, um, dois, três, quatro...*
P:	*Isso, um, dois...*
D1.18:	*Três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez (conta rápido).*
P:	*Três, quatro, cinco, seis, igual os outros. Da mesma forma que vai para cima, vai para baixo (refere-se à numeração do termômetro desenhado no quadro). [...] Só que nesses valores que são abaixo de zero a gente coloca um tracinho assim, de menos. Para indicar que ele está abaixo de zero. Certo? Então quando que forma a neve? Quando neva?*
D1.17:	*Abaixo de zero.*

É na tentativa de entender a situação, que lacunas, dúvidas e curiosidades são identificadas, o que dá margem, de acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2012), à formulação do problema (Figura 8), que diz respeito à investigar a área do território mundial que é ocupada por neve ao longo do ano. Depois de muita discussão sobre o tema, os alunos ainda não tinham formulado o problema, o professor em vários momentos questionou os alunos "*Então o que dá para investigar?", "Que pergunta dá para gente fazer?" "Pensem na pergunta, pensem no que está acontecendo aqui...", "O que vocês podem investigar?"*, e ainda assim nenhum problema tinha sido formulado, nesse sentido, levando em conta o tempo disponível – lembrando que as atividades foram desenvolvidas em aulas regulares –, o professor sinalizou um caminho e ajudou na formulação do problema, ou seja, desempenhou seu papel de orientador. Essa liberdade dada aos alunos é fundamental, pois incentiva que eles participem da problematização da situação, e aprendam a formular problemas, atividade necessária para o ensino e a aprendizagem de matemática, de acordo com Downton (2013). O diálogo a seguir mostra a intervenção / mediação do professor.

P:	*O que está acontecendo aqui? Vocês não falaram que está aumentando, está diminuindo... Olha, acabou dezembro...*
D1.7:	*É... abaixou.*
P:	*Depois de dezembro o que acontece? Que mês que vem depois dezembro?*
D1.7:	*É... ai... (ri).*
P:	*Volta em janeiro não é?*
	[...]
P:	*Então por que a gente não investiga qual é a quantidade de países, ou o território, o lugar que tem neve ao longo dos meses?*

A mediação do professor nas discussões direcionou o olhar dos alunos para algumas informações selecionadas segundo seus objetivos, de acordo com o problema que foi formulado. Essas discussões encaminharam os alunos para a formulação de uma hipótese, que uma vez assumida além de simplificar a situação em busca de uma idealização (POLLAK, 2012) indica qual caminho seguir, isto é, aponta um "norte para a resolução" (MELILLO; BEAN, 2011).

P:	*[...] E o azul...*
D1.7:	*É quando está muito, muito, muito, muito frio.*
P:	*É quando está muito frio. É quando a temperatura está abaixo de zero a temperatura.*
D1.7:	*Daí neva.*

Como os alunos assumiram que as regiões azuis do mapa (Quadro 6) – referentes às temperaturas abaixo de zero – são as regiões em que determinado mês pode nevar, a resolução da situação-problema se deu a partir da comparação da área representada pela cor azul no mapa. Essas comparações foram utilizadas pelos alunos para produzir seus modelos matemáticos, gráficos de barras que indicam a periodicidade em que o território mundial é ocupado por neve (Quadro 15). Isto é, começando por janeiro, essa área diminui até chegar ao seu mínimo, em julho, e depois começa a aumentar novamente até janeiro, e o ciclo se repete, o que se justifica pelo movimento de translação do planeta Terra, que caracteriza o fenômeno das estações do ano.

A ideia de comparação foi utilizada pelos alunos para a produção de modelos em outras atividades, como é o caso da atividade com o tema crescimento das unhas. Desta vez, contudo, inspirado no material manipulável escala cuisenaire[34] o professor forneceu aos

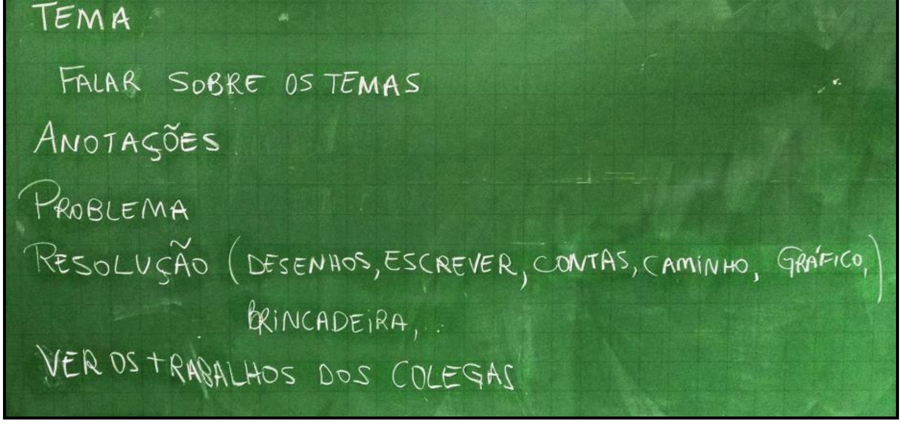
[34] A escala cuisenaire é um instrumento criado por Emile-Georges Cuisenaire que pode auxiliar no ensino e na aprendizagem da sequência de números, da realização de comparações e inclusões, das quatro operações elementares da matemática e de frações. Consiste em barras de madeira coloridas, com dez tamanhos diferentes, sem divisão em unidades, nas quais cada cor diferente corresponde a um tamanho.

alunos barras de E.V.A. para auxiliar na construção de seus modelos. A opção por fornecer tal material foi tomada com base em Bassanezi (2015) que orienta que cabe ao professor estabelecer relações entre o tema e outros fenômenos ou entre as tendências de seus valores e, por conseguinte, entre as estratégias de resolução.

Por fim, os alunos mostraram seus registros aos demais, socializando como foi a experiência desenvolvida por eles, socialização que se deu por meio de uma exposição dos trabalhos aos colegas da turma, conforme indicação de Almeida, Silva e Vertuan (2012). Nessa exposição os alunos mostraram os seus trabalhos aos colegas e poucas discussões foram realizadas, pois mesmo organizados em grupos e trabalhando com temas diferentes, todos alunos acabaram discutindo os dois temas e, desta maneira, todos estavam a par das investigações.

Ao final desta atividade, última atividade desenvolvida pelos alunos, eles foram questionados a respeito de como foram as atividades desenvolvidas. De modo geral, os alunos alegaram ter gostado da experiência proporcionada pela pesquisa, reconheceram que aprenderam muitas coisas, tanto sobre matemática quanto sobre outras disciplinas e afirmaram que as atividades desenvolvidas por eles, no âmbito desta pesquisa, são diferentes das atividades frequentemente propostas por seus professores nas aulas, assim como ressaltam Nacarato, Mengali e Passos (2011), que argumentam que práticas como a modelagem matemática estão distantes das práticas dos professores nas salas de aula dos anos iniciais. Além disso, os alunos descreveram seus encaminhamentos para as atividades, fornecendo indícios do modo como eles compreenderam o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática. A Figura 18 apresenta o registro feito pelo professor no quadro dos aspectos citados pelos alunos do 1º ano durante as discussões.

Figura 18 – Descrição das atividades de modelagem matemática pelos alunos do 1º ano



Fonte: Do autor.

Os aspectos anotados no quadro são aspectos indicados pelos próprios alunos, que observaram que um tema era proposto, discussões eram realizadas sobre esse tema, anotações foram realizadas e um problema deveria ser investigado e resolvido. Indicaram ainda que para resolver os problemas eles usaram como meios desenhos, textos, contas, gráficos etc. Por fim, alegaram que os resultados da investigação realizada por eles deveriam ser expostos aos colegas, e da forma como foi escrito tal aspecto "*ver os trabalhos dos colegas*" temos indícios para afirmar que os alunos chamaram atenção não apenas para apresentar seus resultados, mas para a importância de observar e entender o trabalho e os resultados dos colegas.

4.2.3 Os encaminhamentos dos alunos para a atividade com o tema *tigres* (2º ano)

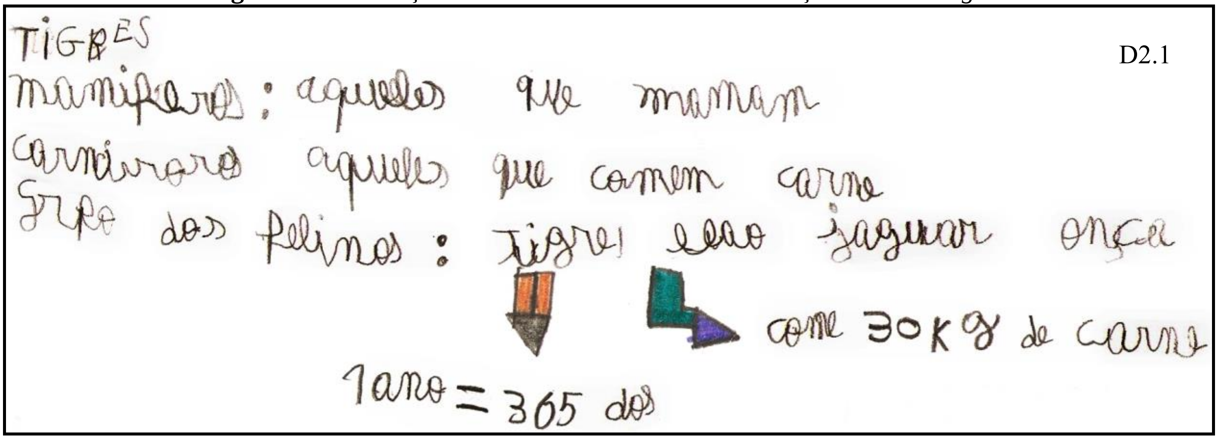
A atividade com o tema *tigres* foi desenvolvida em consonância com o que Almeida e Dias (2004) denominam de terceiro momento de familiarização com o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Nesse contexto, o tema da atividade foi escolhido pelos alunos. Para Bassanezi (2004) é importante que o tema seja escolhido pelos alunos – claro, orientados pelo professor –, para que se sintam corresponsáveis pelo desenvolvimento da atividade e de sua aprendizagem, o que pode otimizar sua participação nas discussões e seu desempenho na atividade.

De acordo com a professora regente da turma do 2º ano, nesse ano escolar os alunos estudam bastante informações a respeito de animais. Cuidados, ciclo de vida, alimentação etc., talvez seja esse um dos motivos que levou esse grupo a escolher temas associados a animais, em particular o tema *tigres*. Além disso, os alunos, com idade predominante de 7 anos, participam de várias atividades lúdicas, assistem desenhos animados, que têm como personagens animais. O tema *tigres*, possivelmente, surgiu nesse contexto.

Informações foram pesquisadas, conforme indicam Almeida, Silva e Vertuan (2012), com a intenção de familiarizar-se com a situação. Os pequenos textos pesquisados pelos alunos (Quadro 9) serviram como ponto de partida para discussões associadas ao tema e que possibilitaram aos alunos conhecer um pouco a respeito dos tigres e de seus hábitos.

Diante dessas informações, surgiram diferentes discussões que abordaram desde o que é um mamífero, o que é um carnívoro, até qual é o peso (massa) de um tigre, como o tigre se alimenta, quanto ele come etc., como mostra a Figura 19.

Figura 19 – Anotações dos alunos mediante as informações do tema *tigres*



Fonte: Do autor.

Essas discussões desencadearam, ainda, várias discussões matemáticas, na tentativa de compreender as informações e a situação (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012). Para determinar a massa de um tigre, por exemplo, foram discutidas questões associadas a frações, uma vez que eles tinham como informação que "Quando faminto, um tigre pode comer até 45 quilos de carne em uma só refeição. Isso equivale a 1/5 do seu próprio peso".

Para entender essa informação, foi preciso explicar aos alunos o que significa dizer "um quinto de *algo*", nesse caso, do peso do tigre. E para tal explicação, uma discussão a respeito de como somar números maiores que dez foi realizada, usando como material auxiliar o material dourado. A decomposição dos números foi a estratégia utilizada pelo professor. O diálogo a seguir apresenta abreviadamente tais discussões.

D2.5: *Professor, porque o número está assim?*

P: *[...] Esse número é um número diferente, vocês já viram esse tipo de número em algum lugar?*

[...]

P: *Isso a gente chama de fração, em matemática. [...]. O que será isso? Olha, um quinto significa o que? Que o peso do tigre está sendo dividido em cinco partes. (Desenha no quadro alguns quadradinhos e conta).*

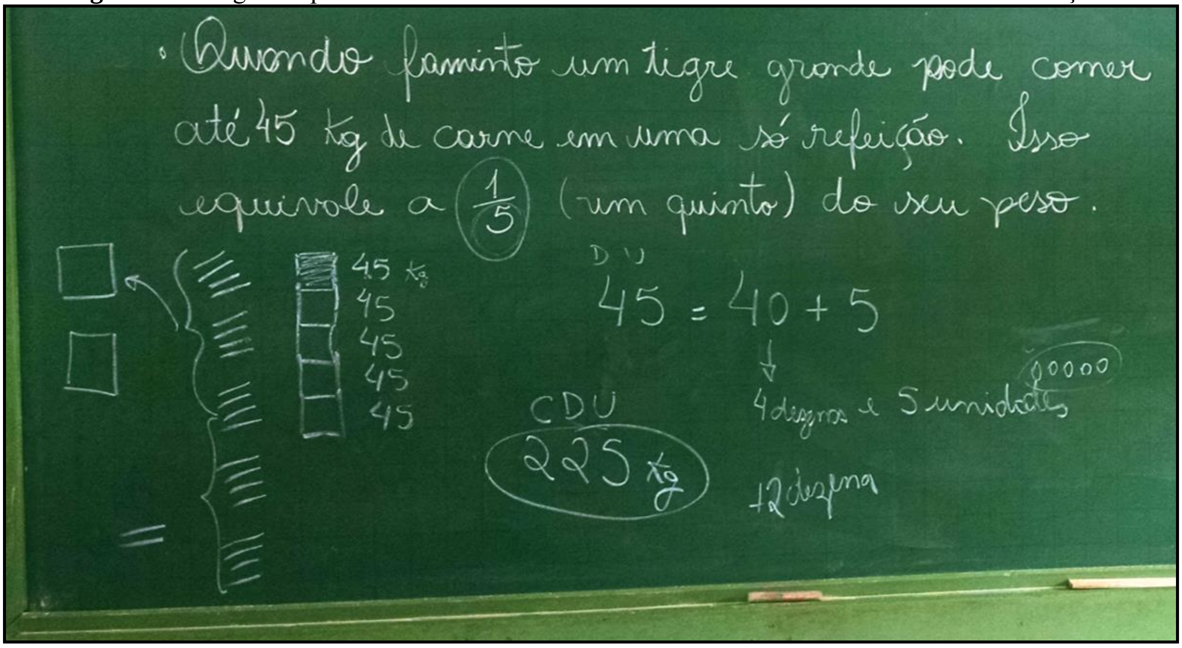
[...]

P: *Uma parte é quarenta e cinco, na outra parte quarenta e cinco, na outra [...]. De tudo isso aqui ele come só uma parte [...]. Quanto será que dá no total? Qual será que é o peso do tigre? Para ficar mais fácil vamos decompor o quarenta e cinco.*

	[...]
P:	*Quantas dezenas têm aqui?*
D2.17:	*Quatro (professor repete, concordando).*
D2.6:	*E unidades têm cinco (professor confirma).*
P:	*Quatro dezenas, cada dezena tem dez [unidades], não é?*
D2.2:	*É.*
P:	*Então, dez, vinte, trinta, quarenta (alunos contam junto). Mais cinco unidades, certo? Olha, vamos somar aqui as unidades, quantas vezes têm cinco aqui? Uma, duas, três, quatro, cinco. Então vamos fazer aqui, eu tenho um, dois, três, quatro, cinco, uma vez (desenha um risco para cada unidade). Um, dois, três, quatro, cinco, outra vez (repete o desenho dos riscos cinco vezes) [...]. Quanto será que tem aqui? Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez. Opa, mas dez não forma uma dezena?*
D2.2:	*É.*
P:	*Então vamos trocar aqui e vamos colocar aqui mais uma dezena. Aqui: um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove, dez, outra dezena, então vamos colocar ali.*
D2.17:	*Duas dezenas.*
P:	*Duas dezenas. Sobraram quantas unidades?*
Alunos:	*Cinco.*
P:	*Então agora vamos somar as dezenas. Quantas dezenas são?*
	[...]
P:	*Se a gente for anotar esse número, a gente vai ter que trocar pelas... lembram das centenas? [...]. Sobrou duas dezenas, duas centenas e cinco unidades. Então vamos escrever esse número? Começa por qual? Unidade, depois a dezena, depois a centena. Unidades sobraram quantas ali?*
D2.13:	*Cinco.*
P:	*Dezenas? Sobraram quantas?*
Alunos:	*Duas.*
P:	*E centenas, quantas a gente conseguiu?*
D2.17:	*Duas.*
P:	*Que número que é esse? Duzentos e vinte e...*
Alunos:	*Cinco (falam junto com o professor).*
P:	*Então, o peso do tigre é aproximadamente duzentos e vinte e cinco quilos.*

Nesse momento, o professor ao mesmo tempo que buscou explicar um novo conceito, o de fração, ele explorou um conteúdo matemático que está previsto para estudo nesse ano escolar, a adição. Para isso, usou a decomposição do número 45 para explicar ideias-chave para o algoritmo da adição. Nesse contexto, o uso do material dourado serviu como apoio aos alunos para descobrirem qual o peso de um tigre. Os registros produzidos durante essas discussões são apresentados pela Figura 20, que consiste em uma fotografia do quadro, após a discussão.

Figura 20 – Registros produzidos durante as discussões matemáticas decorrentes das informações



Fonte: Do autor.

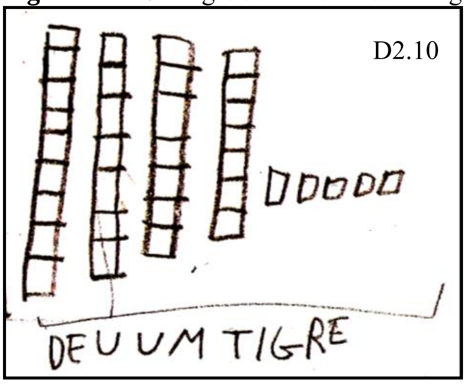
Essas discussões desencadearam o problema definido para estudo. Em conformidade com Almeida e Dias (2004) e Bassanezi (2004; 2015), embora não seja obrigação do professor delimitar o problema em uma atividade cujo tema foi escolhido pelos alunos, cabe a ele propor situações globais que devem ser incorporadas pelos alunos. Como os alunos mostraram interesse pela alimentação dos tigres, o professor sugeriu um caminho para a investigação, como mostra o diálogo a seguir.

P: *Uma pergunta, talvez, que a gente poderia fazer aqui sobre o tigre é estudar o quanto ele come. Por exemplo, o que ele come, o tigre, deixa eu ver aqui, ele come carne, né?*
D2.10: *Os bichos.*
P: *Aí que animais ele come? Ele come cervos, búfalos, eles comem veados, porcos selvagens, rinocerontes. Então, por exemplo, um búfalo, o búfalo ele é bem pesado, né? Será que dá para alimentar quantos tigres?*
D2.17: *Dá para alimentar...*
D2.2: *Doze.*
P: *Vamos ver quanto que pesa? Deixa eu olhar aqui, se a gente souber quanto que pesa o animal, será que dá para saber quantos tigres dá para alimentar? Vamos investigar isso?*

O problema definido envolveu como variáveis o “peso do animal que servirá como alimento” e a “quantidade de tigres que podem ser alimentados com esse animal”. Investigar esse problema requereu que simplificações fossem feitas e hipóteses fossem assumidas para o desenvolvimento da atividade, ações que segundo Bean (2001) são características da atividade de modelagem matemática.

Embora não tenham sido mencionadas de maneira explícita nas falas ou registros dos alunos, temos indícios para afirmar que as hipóteses consideradas para o desenvolvimento da atividade foram H_1: Todos os tigres se alimentam com a mesma quantidade de carne, a saber 45 kg; e H_2: Todo o peso do animal que servirá como alimento ao tigre será considerado comestível. Essas hipóteses foram necessárias para que a situação-problema fosse matematizada (BASSANEZI, 2004; HUSSERL, 2012). Ambas as hipóteses justificam-se pelo trabalho dos alunos considerando que cada tigre come 45 kg, como mostra a Figura 21.

Figura 21 – Um tigre se alimenta de 45 kg



Fonte: Do autor.

Partindo dessas hipóteses, os alunos utilizaram como estratégia de resolução a representação do peso do animal que servirá como alimento aos tigres por meio do material dourado, e, usando a ideia de medir, associada à divisão euclidiana, eles descobriram quantos tigres tal animal poderia alimentar. Essa estratégia é ilustrada pelo diálogo a seguir.

P:	*Será que... uma dessa aqui (mostra a placa) dá para alimentar um tigre... se cada um (aponta para um cubinho na placa) for um quilo?*
Alunos:	*Não.*
P:	*Não? Quantos [cubinhos] que tem aqui [na placa]?*
Alunos:	*Cem.*
P:	*Cada tigre come...?*
D2.6:	*Quarenta e cinco.*
P:	*Então dá para alimentar um tigre?*
D2.6:	*Claro.*
P:	*Será que dá para alimentar dois?*
Alunos:	*Dá (alguns). Não (outros).*
PR2:	*Será que não dá para alimentar dois?*
Alunos:	*Não (alguns).*
D2.6:	*Claro que dá!*

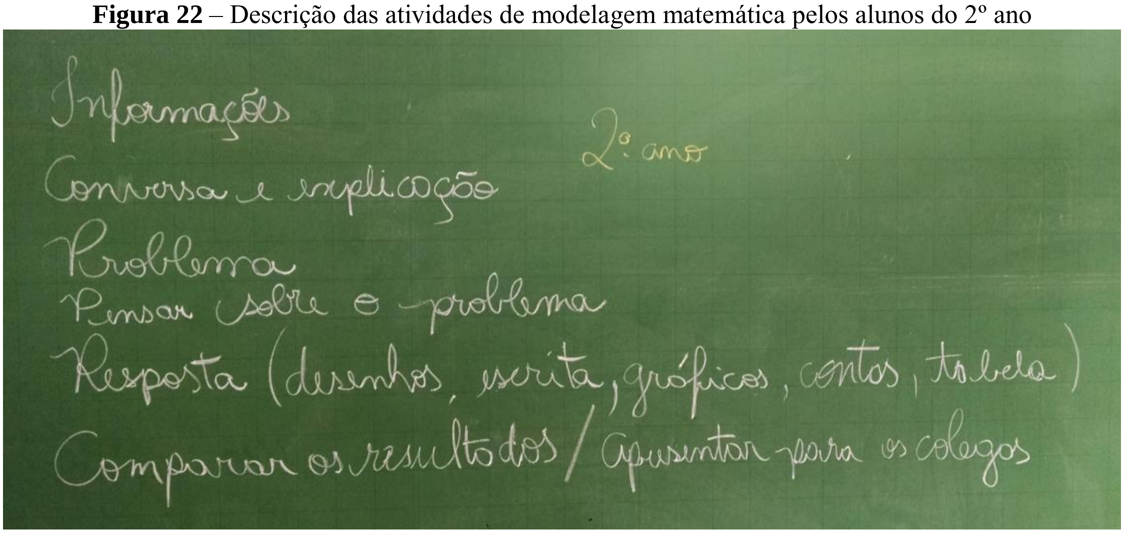
Nesse contexto, os modelos matemáticos da quantidade de tigres que podem ser alimentados a partir de um determinado animal foram constituídos de desenhos, construídos a partir do uso do material dourado, conforme exemplos que apontamos no Quadro 12, e envolveram a ideia de divisão, ainda que a contagem tenha se mostrado bastante útil na formulação dos modelos.

As primeiras noções da divisão euclidiana foram abordadas. Os alunos, usando a ideia de *medir*, ou seja, a partir da estratégia de verificar quantas vezes uma determinada quantidade *cabe* em outra – quantos 45 cabe em 900, por exemplo, como fizeram os alunos na atividade – tiveram um de seus primeiros contatos com a divisão em partes iguais e que tem a possibilidade de ter resto. A abordagem de tal conteúdo se deu a partir do uso da contagem e da adição – 45 + 45 + ... isto é, quantos 45 é possível somar até resultar 900 ou seu maior múltiplo menor que 900?

Por fim, os resultados foram apresentados e discutidos com toda a turma, de modo a avaliar os modelos matemáticos produzidos e socializar com os colegas a investigação realizada. Nesse contexto a validação se deu por meio da matemática e com base nas informações utilizadas para o desenvolvimento da atividade (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012; BASSANEZI, 2015), momento em que o professor sistematizou a ideia da divisão no quadro.

Após finalizarem o desenvolvimento da atividade, os alunos foram questionados pelo professor a respeito das atividades desenvolvidas. A Figura 22 apresenta uma síntese do procedimento envolvido no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, segundo os alunos do 2º ano.

Figura 22 – Descrição das atividades de modelagem matemática pelos alunos do 2º ano



Fonte: Do autor.

De acordo com os alunos, atividades de modelagem matemática têm como ponto de partida algumas informações a respeito de um tema, de um assunto. Conversas a respeito dessas informações e algumas explicações – seja do professor, de um colega, ou de um profissional – são necessárias para compreender a situação e familiarizarem-se com o tema. Um problema é, então, definido. Pensar a respeito desse problema, entender o que se está problematizando e traçar caminhos para resolvê-lo são os próximos passos para se chegar a uma resposta a esse problema, a qual pode ser obtida por meio de desenhos, escritas, gráficos, contas, tabelas etc. que são os modelos matemáticos da situação-problema. Por fim, os resultados obtidos são apresentados e comparados com os obtidos pelos colegas com a finalidade de avaliar o estudo desenvolvido.

4.2.4 Os encaminhamentos dos alunos para a atividade com o tema *recordes* (3º ano)

Assim como as atividades a respeito da *neve* e dos *tigres*, a atividade com o tema *recordes* foi a primeira atividade desenvolvida pelos alunos do 3º ano, cujo tema foi escolhido por eles. Portanto, os alunos iniciaram a atividade com a escolha do tema. Essa escolha já vinha sendo sinalizada nos encontros anteriores, uma vez que os alunos sempre comentavam sobre recordes, e se confirmou no momento da escolha do tema, conforme justificativa dada pelos alunos, indicada no diálogo a seguir.

P: *Por que que vocês escolheram recordes mundiais? De onde vocês tiraram essa ideia?*
Alunos: *Porque são legais.*
P: *São legais? E de onde vocês tiraram essa ideia?*
D3.22: *De mim.*
P: *É? E por que você teve essa ideia D3.22?*
D3.22: *(Faz sinal que não sabe responder).*
P: *Mas de onde vocês tiraram? Foi por causa de alguma coisa que vocês viram?*
D3.8: *Ah sim, daquela da mulher, daquela unha.*

O diálogo indica que a inspiração para a escolha do tema *recordes* foi a primeira atividade desenvolvida por eles no âmbito da pesquisa, sobre o *crescimento das unhas*, que como informação apresentou a mulher recordista das maiores unhas do mundo. Essa escolha corrobora com as colocações de Hermínio (2009) quanto ao interesse na escolha do tema, e de

Bassanezi (2015) com relação ao estabelecimento de relações entre os temas, outras atividades, tendências de valores e estratégias de resolução.

Definido o tema *recordes*, o professor solicitou aos alunos que informações a seu respeito fossem pesquisadas e levadas para a aula. As informações levadas pelos alunos referiram-se a recordes mundiais que lhes chamaram atenção, recordes presentes no livro dos recordes, ou que aspiravam estar nesse livro, mas ainda não comprovados. Com base nessas informações, o professor sugeriu aos alunos que pensassem em um problema que poderia ser investigado por eles, conforme Downton (2013).

Várias discussões tiveram que ser realizadas para que os alunos pudessem compreender em que consistia a formulação de um problema. Os alunos mostraram-se muito apegados às curiosidades pesquisadas, e para eles a investigação que o professor propôs consistia em buscar recordes em outros aspectos. Nesse momento o professor interferiu de modo a trazer os alunos para o contexto da investigação, sugerindo a discussão de aspectos mais próximos a eles, como, por exemplo, investigar os recordes da própria sala, o que configurou-se como o problema da atividade.

A resolução desse problema consistiu, portanto, na produção de um livro dos recordes dos alunos do 3º ano e para isso uma lista de recordes foi investigada. Várias medições foram realizadas para a resolução do problema. Algumas unidades de medida desconhecidas pelos alunos foram introduzidas e discussões associadas à matemática foram trazidas à tona, como: que instrumentos de medida utilizar (*Para medir alturas, comprimentos nós usamos a fita métrica, a régua...*); como converter algumas unidades de medida, de milímetros para centímetros, por exemplo (*22 milímetros ou 2,2 centímetros, 19 milímetros ou 1,9 centímetros*); como registrar medidas (*Um metro e cinquenta centímetros, um metro e meio, precisa colocar o zero depois do cinco?*); etc.

O livro produzido por cada grupo configurou-se como resposta para o problema, pois apresentou os recordes dos alunos do 3º ano para os aspectos definidos. Ao produzirem tal resposta, os alunos produziram também o modelo matemático da situação, um modelo de caráter diferente dos anteriores por eles produzidos, uma vez que por meio de um texto o modelo descrevia como proceder para classificar recordistas.

Embora sejam os modelos matemáticos produzidos pelos alunos para a situação-problema constituídos por textos, esses textos revelam uma estrutura matemática que indica aos alunos o que deve ser feito para definir um recordista em um determinado aspecto. Saber medir e comparar são habilidades indicadas não apenas para essa série, mas para esse nível de escolaridade, como colocado pelos PCN.

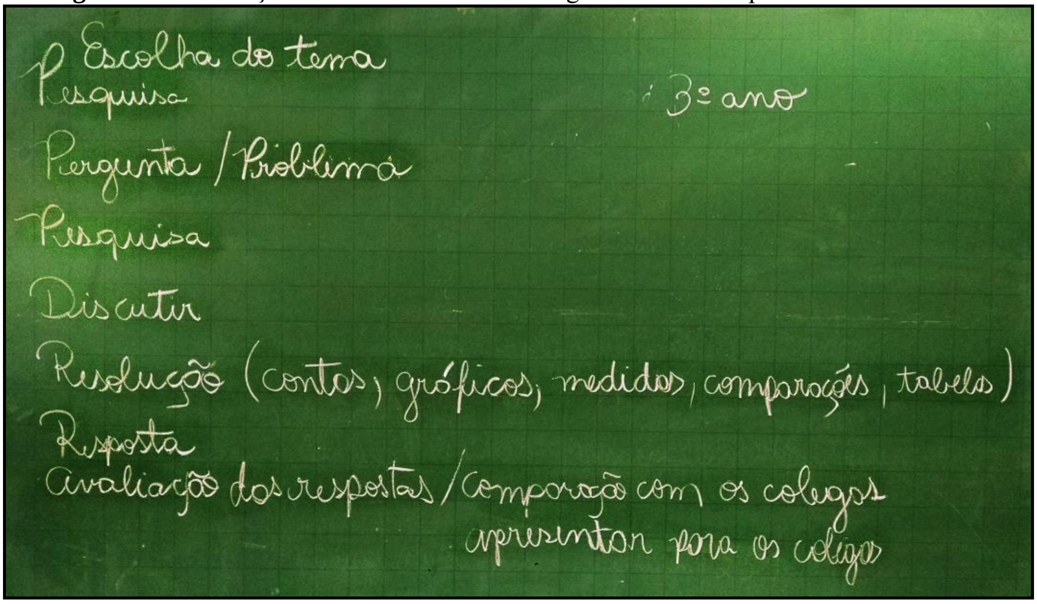
> Não é objetivo deste ciclo a formalização de sistemas de medida, mas sim levar a criança a compreender o procedimento de medir, explorando para isso tanto estratégias pessoais quanto ao uso de alguns instrumentos, como balança, fita métrica e recipientes de uso frequente (BRASIL, 1997, p. 49).
>
> Espera-se que o aluno tenha noção de quantidade e utilize procedimentos para identificar e comparar quantidades, em função da ordem de grandeza envolvida, e seja capaz de ordenar quantidades, localizar números em intervalos, numa sequência numérica (o "limite" da sequência numérica é estabelecido em função do que for possível avançar, considerando-se as experiências numéricas da classe) (BRASIL, 1997, p. 53).

As estruturas produzidas indicam aos alunos que os aspectos devem ser analisados nos candidatos que concorrem a tais recordes utilizando os instrumentos de medida apropriados e as medidas obtidas devem ser *comparadas* e organizadas *da maior para a menor*, ou se for o caso, *da menor para a maior*. É o recordista aquele que tem a menor ou a maior medida, dependendo do aspecto considerado. Toda essa descrição foi sintetizada pelos alunos em textos, como os apresentados no Quadro 15.

Os resultados foram socializados por meio de uma dinâmica na qual os livros produzidos foram trocados grupo a grupo para que todos pudessem observar o trabalho de todos e para que os resultados pudessem ser validados. Para isso, discussões foram realizadas com toda a turma com base na matemática e na situação.

Após o desenvolvimento desta última atividade, os alunos do 3º ano, assim como os alunos do 1º e 2º ano, foram questionados se gostaram das atividades desenvolvidas, se as atividades propostas pelo professor pesquisador eram diferentes das propostas pela professora regente em suas aulas e como foram as atividades desenvolvidas por eles. Os alunos alegaram ter gostado de desenvolver as atividades propostas no âmbito da pesquisa, pois aprenderam muitas coisas, reconheceram que há diferenças entre essas atividades e as atividades que são propostas nas aulas ministradas pela professora regente e a descrição feita por eles do desenvolvimento das atividades de modelagem é apresentada pela Figura 23.

Figura 23 – Descrição das atividades de modelagem matemática pelos alunos do 3º ano



Fonte: Do autor.

Os aspectos indicados mostram que os alunos identificaram que as atividades desenvolvidas começaram sempre com a escolha de um tema, seja por eles – última atividade –, seja pelo professor – como é o caso das primeiras atividades. Pesquisas sobre o tema foram necessárias e a formulação de uma pergunta, de um problema, orienta a investigação. Segundo os alunos novas pesquisas foram necessárias para ajudar nas discussões e na compreensão do problema. A resolução desse problema é encaminhada por meio da matemática, uma vez que usaram contas, gráficos, medidas, comparações, tabelas etc.

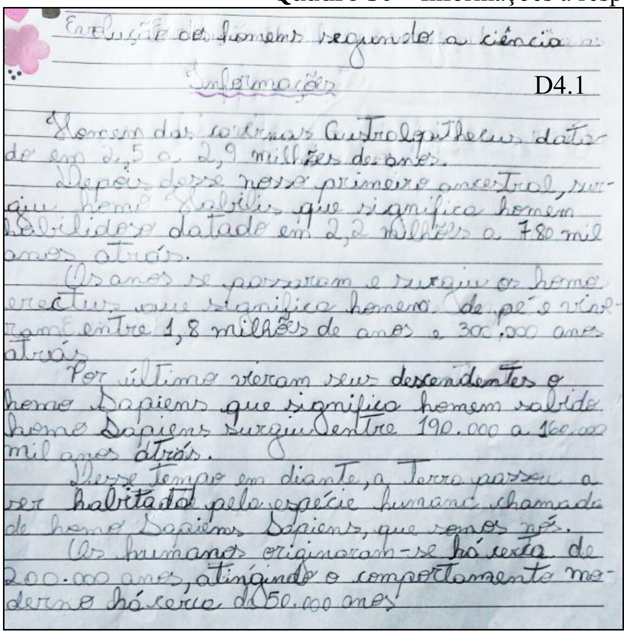
Nesse contexto, foram exploradas unidades de medida de comprimento para realizar as medidas das alturas, estojos, lápis, cabelo etc.; unidades de medida de massa, para comparar o peso dos alunos; e unidades de medida de tempo, para comparar as idades dos alunos. Dessa forma, as relações milímetros-centímetros-metros; gramas-quilos; e dias-meses-anos foram abordadas. A exploração das unidades de medida proporcionaram ainda um ambiente em que discussões de como expressar tais medidas emergiram. O professor conseguiu discutir com os alunos o que significam, por exemplo, os algarismos antes e depois da vírgula do número 1,23 quando este é acompanhado da unidade de medida *metros*, ou seja, *1,23 m* – número que expressa a altura do menor aluno da sala. Nesse caso, o algarismo 1 antes da vírgula, que expressa a parte inteira, diz respeito a 1 metro de altura e os algarismos 2 e 3 depois da vírgula, expressam a parte decimal, que diz respeito a 23 centímetros. No que tange a esse tipo de interpretação, o valor posicional foi também discutido, de modo a mostrar aos alunos que 1,3 é maior que 1,23. Essas discussões foram essenciais para o desenvolvimento da atividade, uma vez que sua resolução estava, em grande medida, associada à comparação de números racionais.

Uma resposta foi apresentada – o livro produzido por eles – e avaliada em um momento de discussão com toda a turma. Nesse momento eles puderam apresentar o que fizeram e comparar suas resoluções com as dos colegas.

4.2.5 Os encaminhamentos dos alunos para a atividade com o tema *evolução do homem* (4º ano)

A proposição do tema da atividade *evolução do homem* foi feita por uma aluna que afirmou ter visto ou lido a respeito desse tema em casa, provavelmente na internet. Pode-se dizer, portanto, que o tema proposto por ela surgiu a partir de uma curiosidade sua, um certo interesse conhecer coisas a respeito do tema, corroborando as considerações de Hermínio (2009) quanto à escolha do tema em atividades de modelagem matemática. A conjectura pelo interesse, curiosidade se sustenta pelo fato da aluna, no dia da escolha do tema, já ter levado um texto contendo informações a respeito da evolução do homem (Quadro 30).

Quadro 30 – Informações a respeito do tema *evolução do homem*



Evolução dos homens segundo a ciência

Informações

Homem das cavernas *Australopithecus* datado em 2,5 a 2,9 milhões de anos.

Depois desse nosso primeiro ancestral, surgiu o *homo habilis* que significa homem habilidoso datado em 2,2 milhões a 780 mil anos atrás.

Os anos se passaram e surgiu o *homo erectus* que significa homem de pé e viveram entre 1,8 milhões de anos e 300 000 anos atrás.

Por último vieram seus descendentes o *homo sapiens* que significa homem sabido. *Homo sapiens* surgiu entre 190 000 a 160 000 anos atrás.

Desse tempo em diante, a Terra passou a ser habitada pela espécie humana chamada de *homo sapiens sapiens*, que somos nós.

Os humanos originaram-se há cerca de 200 000 anos, atingindo o comportamento moderno há cerca de 50 000 anos.

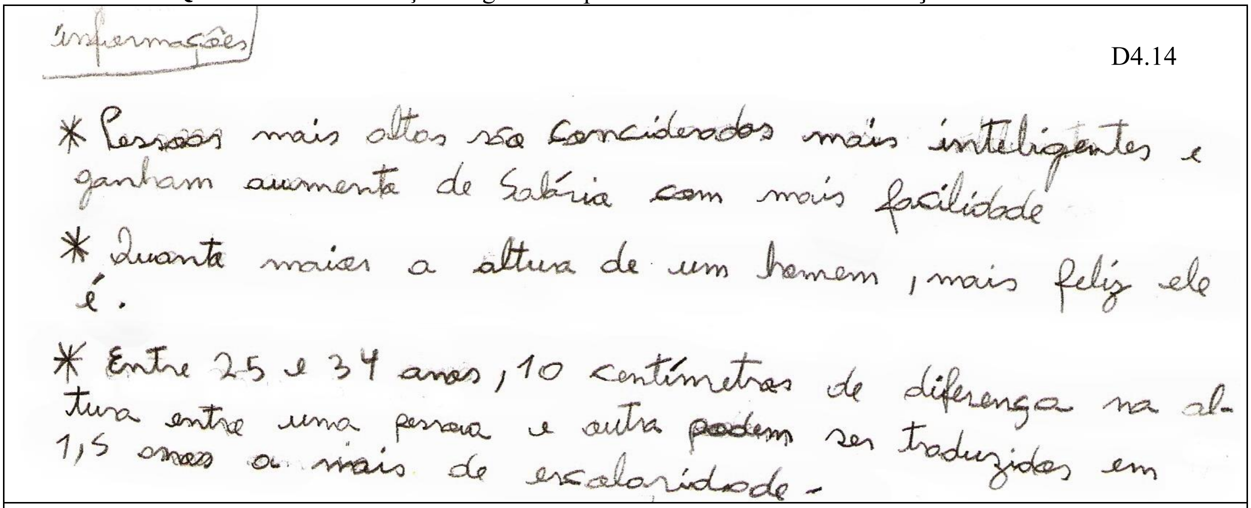
Fonte: Do autor.

Um diferencial dessa atividade é que a aluna que sugeriu o tema *evolução do homem*, optou por investigar outro tema, sugerido por outro aluno. Ainda assim o tema se manteve, pois vários alunos mostraram interesse em investigá-lo. Embora, essa decisão possa parecer um pouco inusitada, ela é compreensível se refletirmos a seu respeito a partir da pesquisa de Hermínio (2009). Assim como outros alunos se interessaram pelo tema proposto pela aluna, ela também se interessou por um tema proposto por outro aluno. Além disso, como chama atenção a autora, são vários os fatores que influenciam no interesse e escolha pelo tema, bem como em sua investigação, mas quando o aluno se interessa pelo assunto, pelas investigações necessárias e tem sua atenção voltada para o trabalho, o tema passar a ser dele, ele o toma para si (HERMÍNIO, 2009). Assim como ocorreu com os alunos que optaram por investigar esse tema.

Após essa definição, outros alunos também pesquisaram informações a respeito do tema (Quadro 16), conforme sugerem Almeida, Silva e Vertuan (2012), com a intenção de conhecerem, familiarizarem-se com o assunto. Cabe nesse momento de inteiração, decidir que aspectos deseja-se investigar, selecionar os mais importantes, com vistas ao problema, e mantê-los (POLLAK, 2012). Essa seleção de informações foi realizada pelos alunos e as informações selecionadas foram registradas por eles. O Quadro 31 indica as primeiras informações consideradas importantes pelos alunos de um dos grupos.

Quadro 31 – Informações registradas pelos alunos na atividade *evolução do homem*

D4.14


Informações

* Pessoas mais altos são concideradas mais inteligentes e ganham aumento de Salária com mais facilidade

* Quanto maior a altura de um homem, mais feliz ele é.

* Entre 25 e 34 anos, 10 centímetras de diferença na altura entre uma pessoa e outra podem ser traduzidas em 1,5 anos a mais de escolaridade.

Informações:

- Pessoas mais altas são consideradas mais inteligentes e ganham aumento de salário com mais facilidade.
- Quanto maior a altura de um homem, mais feliz ele é.
- Entre 25 e 34 anos, 10 centímetros de diferença na altura entre uma pessoa e outra podem ser traduzidos em 1,5 anos a mais de escolaridade.

Fonte: Do autor.

Cabe ressaltar que nem todas as informações registradas foram utilizadas pelos alunos, uma vez que as informações utilizadas dependem do problema definido para investigação, e eles não definido o problema até então. Essas anotações são, portanto, fruto do primeiro olhar dos alunos para a situação e para suas informações. Além disso, o desenvolvimento dessa atividade trata-se de uma primeira experiência dos alunos com a seleção de informações sem ter um problema definido *a priori*. O problema, em atividades de modelagem matemática, é definido a partir das informações que se tem, ou se busca, a respeito do tema. Nessas atividades o aluno pode tanto se deparar com um problema já existente, como pode propor um problema para resolver (DOWNTON, 2013).

Nesse contexto, discussões a respeito de como problematizar a situação também foram realizadas. O professor teve a oportunidade de explicar aos alunos que um problema não se constitui quando as respostas já são conhecidas, ou já estão no texto, mas – no caso de atividades de modelagem matemática – quando o aluno constrói interpretações a partir da análise de situações reais e as formulam como problemas matemáticos (DOWNTON, 2013).

No momento de definir a situação uma escolha teve que ser tomada. Enquanto que as informações trazidas pelos alunos estavam associadas à evolução da espécie humana, a reportagem fornecida pelo professor tratava a evolução da altura média dos homens.

D4.16: *Gente, a gente não está falando sobre o crescimento, mas sim a evolução. A gente tem que falar sobre a evolução dos homens, como eles vão evoluindo, as raças, o que foi mudando.*

D4.23: *Nós podemos estudar com esse e com esse (refere-se a duas reportagens). Porque, assim... vamos supor eu vou fazer uma fita é... de medir. Ai quando fizer eu vou colocar um negócio na parede, aí eu vou colocar o D4.7 e a gente escreve aqui tantos metros do D4.7.*
[...]

Os alunos se interessaram pela segunda temática. Leituras e discussões foram realizadas na tentativa de compreender a situação-problema definida. Nesse momento experiências pessoais foram trazidas à tona, ou seja, os alunos mobilizaram seus conhecimentos para definir um caminho para a resolução do problema. Questões como "*você não vai fazer bebês até mil anos né*?" "*Décadas são quantos anos?*", "*meu irmão mede quase dois metros*", "*vocês lembram o que é uma tabela?*", "*isso é uma tabela*", "*vai continuar crescendo [...] porque o ser humano cresce mais*" são alguns exemplos.

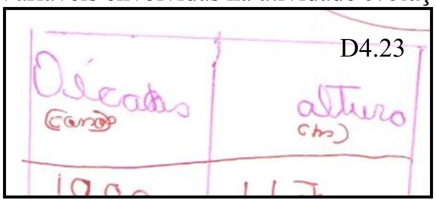
Para resolver o problema duas hipóteses foram consideradas pelos alunos, ainda que não as tenham registrado por escrito. H_1: A altura média dos brasileiros continuará crescendo de forma constante nas próximas décadas, ou seja, aumentará 2 cm a cada 10 anos; e H_2: Pessoas mais altas são mais saudáveis. Os trechos das conversas dos alunos apresentados a seguir nos fornecem indícios para inferir que tais hipóteses foram assumidas por eles, em uma atitude que vislumbrava a idealização da situação, conforme argumenta Husserl (2012), a fim de lhe atribuir uma roupagem matemática, isto é, de simplificar a situação, tornando-a um problema matemático (BLUM; NISS, 1991; POLLAK, 2012; DOWNTON, 2013).

P: *E a altura, está aumentando ou diminuindo? O que está acontecendo com a altura?*
D4.23: *Aumentando.*
[...]
P: *Então está crescendo mais ou menos quanto a cada dois anos?*
D4.23: *Dois.*
P: *Centímetros, né?*
[...]

P: *Está crescendo... então isso é bom? De acordo com a reportagem de que são mais saudáveis pessoas mais altas, o brasileiro está ficando mais saudável ou menos saudável?*
Alunos: *Mais.*

Além disso, diálogos e registros dos alunos colocam em evidência as variáveis envolvidas na situação-problema: Tempo, em décadas; e Altura, em metros. A Figura 24 apresenta um exemplo dessas evidências.

Figura 24 – Variáveis envolvidas na atividade *evolução do homem*



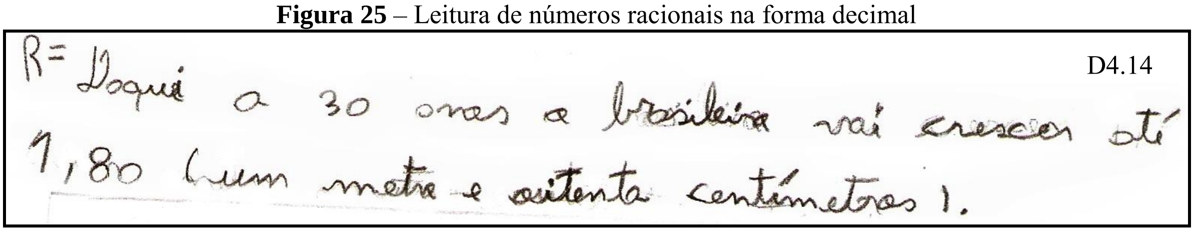
Fonte: Do autor.

A resolução do problema, segundo Pollak (2012), envolve a produção de um modelo matemático e, nesse momento, os alunos têm a oportunidade de produzir interessantes *insights*, exemplos, aproximações, teoremas, algoritmos etc., isto é, várias questões matemáticas podem surgir. No caso do 4º ano, os alunos utilizaram a noção de diferença para conjecturar uma regularidade a partir dos dados disponíveis (Figura 13) e, a partir do cálculo da diferença observaram que o crescimento tem sido constante, ou seja, a cada década a altura do brasileiro tem aumentado dois centímetros. O caminho pelo qual os alunos chegaram no cálculo da diferença também oportunizou que o professor explicasse aos alunos em que momentos a subtração pode ser utilizada, de modo a incentivar que eles não se apegassem a pintas sintáticas – mais, menos, maior, menor – para identificar que operações matemáticas utilizar na resolução de problemas (ENGLISH, 2003).

P: *Pessoal, sempre que a gente quer saber quanto aumentou, não é porque está aumentando que eu vou fazer uma conta de mais.*
D4.14: *É menos.*
P: *Quanto aumentou, a diferença, é menos. Só que... aí depois que... se você sabe a diferença, aí você faz um e sessenta e sete mais dois centímetros: um e sessenta e nove. Entendeu? Aí é mais. Quando você já sabe o quanto está aumentando. Agora quando você quer achar o quanto está aumentando, aí é de menos igual a D4.14 falou.*

Nesse contexto, surgiu também a discussão da relação entre as unidades de medida de comprimento: metros e centímetros, o que desencadeou a discussão a respeito do uso da vírgula. Os alunos dessa turma, já conheciam a relação entre metros e centímetros, além de ter sido abordada recentemente na atividade *crescimento das unhas*, primeira atividade desenvolvida por eles. Desse modo, os alunos conseguiram, com certa facilidade, fazer a leitura das informações, entendendo que *1,67 m* diz respeito à medida *um metro e sessenta e sete centímetros* ou que *0,02 m* diz respeito à dois centímetros.

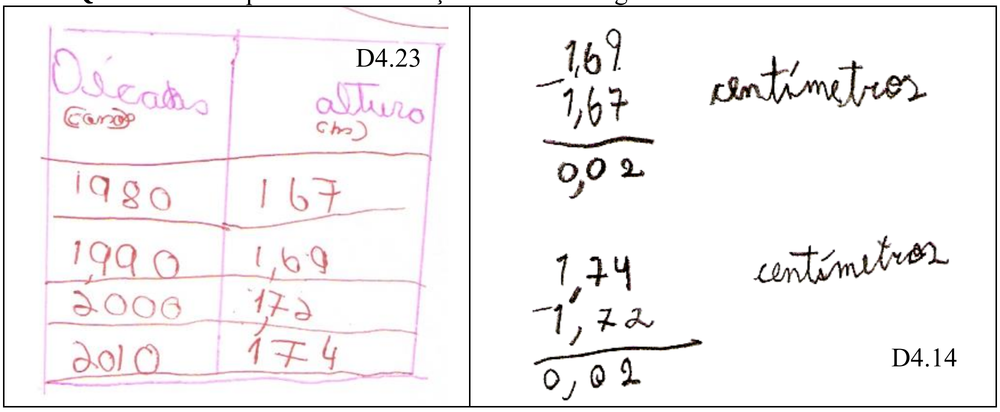
Figura 25 – Leitura de números racionais na forma decimal


D4.14
R= Daqui a 30 anos o brasileiro vai crescer até 1,80 (um metro e oitenta centímetros).

Fonte: Do autor.

Apresentaram, porém, certa dificuldade com relação ao registro dessas medidas, à escrita matemática. Em vários registros observamos que os alunos esqueceram de colocar a vírgula, sendo necessário o professor chamar atenção para isso. Da mesma forma com relação ao uso dos termos "centímetros" e "metros", uma vez que os alunos tendo consciência de que *0,02 m* corresponde a *dois centímetros*, algumas vezes os alunos confundiram-se e registraram de maneira equivocada *0,02 centímetros*. Trata-se, entretanto, de um erro comum nesse ano escolar, pois estão aprendendo a registrar medidas, aprendendo a lidar com determinadas maneiras de registrar números racionais e cabe ao professor orientar o caminho para que o uso da linguagem matemática seja feito de acordo com a formalidade que tal linguagem exige (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012).

Quadro 32 – Equívocos com relação ao uso da vírgula e às unidades de medida



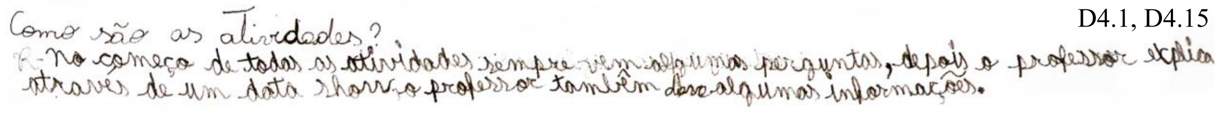
Fonte: Do autor.

Nesse contexto, os alunos utilizaram ainda operações de adição e subtração com números racionais, a partir do qual puderam lembrar a regra algorítmica que sempre é repetida pelos professores quando entra em cena esse tipo de contas: "*vírgula embaixo de vírgula*". A questão do valor posicional foi abordada, chamando atenção, nessa situação, para o valor posicional das casas decimais: décimos, centésimos e milésimos. Além disso, outras dúvidas e questões que, porventura, surgiram foram também discutidas: "*Existe zero vezes um, zero vezes dois?*". "*Isso é uma tabela*" e "*décadas são dez anos*".

Para responderem ao problema, modelos matemáticos envolvendo a construção de tabelas, operações aritméticas de adição e de multiplicação, desenhos e gráficos foram produzidos. Os resultados foram socializados com a turma e, nesse momento, houve a validação dos modelos matemáticos e a avaliação dos resultados. Além disso, os alunos puderam comparar os resultados obtidos, já que dois grupos investigaram problemas semelhantes.

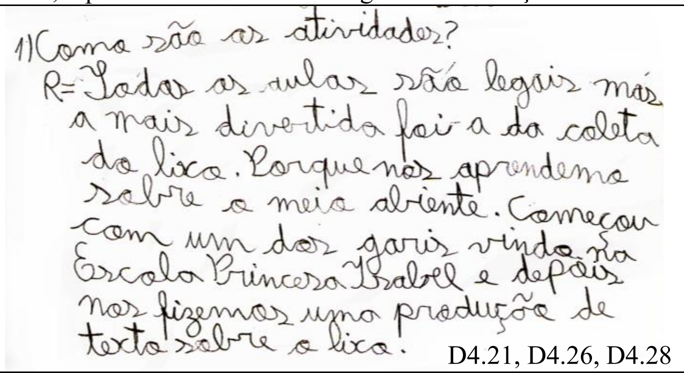
Após a finalização dessa atividade, assim como nas demais turmas, o professor questionou os alunos com relação às atividades desenvolvidas. Anotações foram realizadas em pequenos grupos e discutidas com o professor. Os alunos descreveram em algumas linhas como era o procedimento envolvido no desenvolvimento das atividades propostas no âmbito da pesquisa, escolheram também uma das atividades desenvolvidas e relataram, fizeram alguns desenhos a respeito das situações-problema investigadas e, junto com o professor, definiram um esquema que ilustra o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática, registrado pelo professor no quadro. O Quadro 33 traz exemplos dos registros produzidos a esse respeito.

Quadro 33 – Descrição das atividades de modelagem matemática pelos alunos do 4º ano



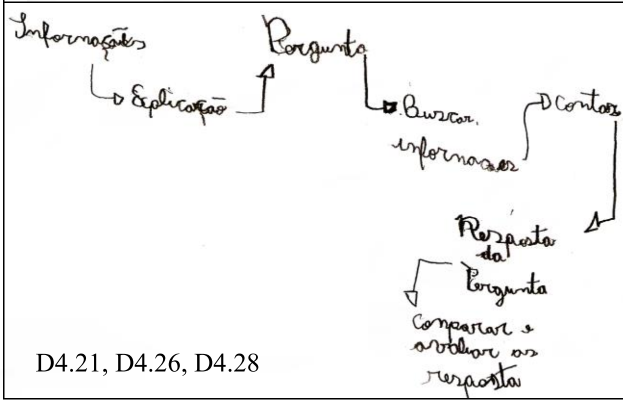
D4.1, D4.15

Como são as atividades?
No começo de todas as atividades sempre vem algumas perguntas, depois o professor explica através de um data show, o professor também dava algumas informações.

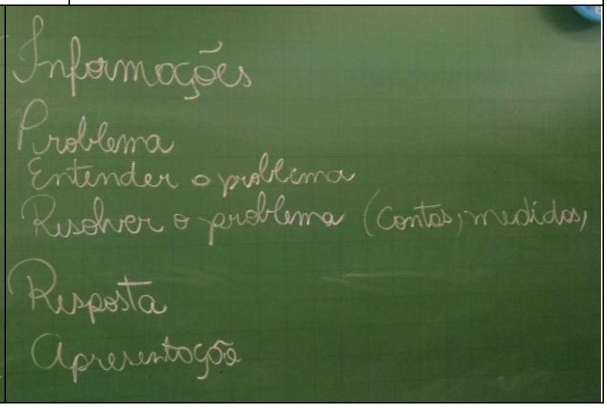


D4.21, D4.26, D4.28

1) Como são as atividades?
R= Todas as aulas são legais, mas a mais divertida foi a coleta do lixo. Porque nós aprendemos sobre o meio ambiente. Começou com um dos garis vindo na Escola Princesa Isabel e depois nós fizemos uma produção de texto sobre o lixo.



D4.21, D4.26, D4.28



Fonte: Do autor.

De acordo com os alunos do 4º ano, atividades de modelagem matemática começam com a problematização de uma situação, para a qual são apresentadas algumas informações que podem ser úteis para entender o problema e inteirar-se com a situação. Para entender o problema, entretanto, algumas vezes explicações são necessárias – seja do professor ou de um profissional que entende a respeito do tema –, outras vezes a busca por (novas) informações. O uso da matemática surge nesse momento, por meio de contas, medidas etc. com a intenção de obter uma resposta para o problema. Essas respostas e encaminhamentos são, por fim, apresentados de modo que oportuniza que os resultados sejam comparados e avaliados quanto sua pertinência à situação-problema.

4.2.6 Os encaminhamentos dos alunos para a atividade com o tema *animais de estimação* (5º ano)

Assim como as outras atividades do terceiro momento de familiarização com a modelagem matemática, essa atividade teve início com a escolha do tema. Nesse caso, o grupo que escolheu o tema *animais* apresentou uma particularidade, os alunos mencionaram o interesse em investigar animais selvagens, porém, nenhum aluno trouxe informações para a aula. Para que eles pudessem desenvolver uma atividade, o professor ofereceu algumas informações a respeito do tema animais que havia pesquisado e trazido para os alunos do 1º ano, contudo, as reportagens fornecidas pelo professor diziam respeito a animais de estimação e não selvagens. A primeira reação dos alunos foi uma interjeição que indicou um pouco de desapontamento *"Ah, o professor pesquisou sobre animais de casa!"* (D5.10), mas logo esse desapontamento foi substituído pelo interesse e pelo ânimo quando começaram as discussões a respeito. Tal fato fornece indicativos de que o interesse pelo tema não se dá apenas quando os alunos escolhem o tema, mas pode também surgir no decorrer do desenvolvimento da atividade.

> [...] com o desenvolvimento do trabalho, o aluno passa a ter prazer em trabalhar com aquele assunto e se interessar tanto pelas investigações necessárias para a sequência do estudo quanto pela matemática inserida no trabalho. Dessa maneira, o estudante passa a ter sua atenção totalmente voltada para o trabalho e não mais para o professor e o tema passa a ser dele, e não mais do professor (HERMÍNIO, 2009, p. 70).

Nas discussões sobre o tema os alunos compartilharam suas experiências com animais de estimação, dizendo que animais eles tinham ou tiveram. Também selecionaram algumas informações. Particularmente chamou atenção dos alunos uma reportagem que discutia uma pergunta associada aos gastos com animais de estimação, pergunta que se configurou como o problema da atividade e que foi investigada pelos alunos.

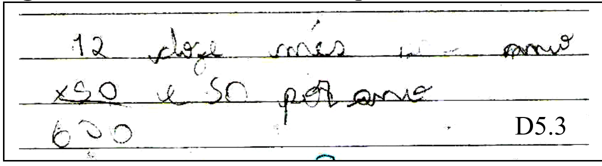
O diálogo a seguir indica o momento em que os alunos do grupo decidiram investigar essa pergunta, associada aos gastos com animais, e como se deu a formulação do texto que constitui o problema.

D5.15: *Título não é esse aqui? (Aponta para o título da reportagem).*
P: *Isso, só que depois vocês vão escolher um tema, um título para a atividade de vocês. Não precisa ser exatamente esse, entendeu? Não é o título da reportagem. Isso aqui é uma informação que vocês têm.*
D5.3: *Quanto é gasto?*
P: *Pode ser.*

D5.10: *Professor, olha só, eu falei... mas esse aqui... esse aqui podia ser uma pergunta e ela colocou no título.*
P: *Como assim uma pergunta? Como seria a pergunta aqui?*
D5.10: *O valor que custa em média... que gasta... o custo em média de ter um cachorro...*
P: *Isso, escrevam então a pergunta, e tentem agora ver que informações vocês vão usar para responder essa pergunta.*

Para resolução do problema os alunos, a princípio, simplificaram a situação em demasiado, eles não usaram as informações disponibilizadas pela reportagem. Eles estimaram um gasto mensal com os animais – "*por mês quando eu tinha uma cachorrinha, mas agora ela morreu, eu gastava cinquenta reais*" (D5.3) / "*Eu gasto, em média, cinquenta reais também*" (D5.10) – e com base nessa estimativa eles calcularam o gasto anual com os seus animais. Dessa forma o modelo matemático emergente indicou que para se determinar o gasto anual deve-se multiplicar o valor gasto por mês por doze, que é a quantidade de meses que tem em um ano (Figura 26).

Figura 26 – Modelo matemático para o cálculo anual com os *animais de estimação*

	*Doze meses por ano* *E 50 por [mês]*

Fonte: Do autor.

Nesse modelo, os alunos utilizaram o algoritmo da multiplicação para mostrar como se calcula o gasto anual com um animal de estimação, auxiliado por textos que indicaram as variáveis multiplicadas, gasto mensal, em reais, e tempo, em meses.

Quando comunicaram os resultados para os colegas da turma, os alunos foram questionados sobre a origem dos valores utilizados, como mostra o diálogo.

P: *Por que doze vezes cinquenta?*
D5.10: *Porque doze é um ano e cinquenta em um mês.*
P: *E vocês fizeram a conta para ver se é cinquenta mesmo em um mês?*
Alunos: *Não.*

Foi nesse momento, de avaliação dos resultados e de validação do modelo que os alunos sentiram a necessidade de realizar novas investigações e, diante disso, mostraram interesse em retomar as informações e formular um novo modelo matemático para resolver o problema.

Vários autores sinalizam a não linearidade do procedimento associado à modelagem matemática (BIEMBENGUT, 1999; BASSANEZI, 2004; ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012; POLLAK, 2012; D'AMBROSIO, 2015), sugerindo um movimento dinâmico de ir e vir, de retomar ações já realizadas, de retornar a um determinado ponto do desenvolvimento da atividade e optar por seguir outros caminhos, usar outras estratégias e, talvez, outros conteúdos matemáticos.

Nessa retomada, os alunos consideraram várias informações que antes desconsideraram e aspectos que antes não os preocuparam foram discutidos por eles, como a produção do modelo matemático. Anteriormente, no modelo produzido (Figura 26), os alunos sinalizaram as variáveis e explicaram a resolução por solicitação do professor, desta vez, os alunos já sinalizaram a preocupação em formular um modelo matemático, uma *regra* para resolver o problema, como referido por eles.

Os alunos observaram que para resolver o problema bastava somar os gastos mensais, ou anuais, com cada produto. Diante dessa ideia, os alunos produziram três diferentes tipos de modelos matemáticos (Quadro 18): um modelo textual, que por meio de um texto explica como proceder para encontrar o gasto com animais, isto é, basta somar todos os gastos com os produtos utilizados num determinado período de tempo; um modelo descritivo, também com elementos textuais, mas já com certo grau de abstração e de generalização; e um modelo algébrico, no qual as variáveis envolvidas foram substituídas por letras, e por meio da manipulação dessas letras os alunos apresentaram a ideia de somar todos os gastos com os produtos.

Foi utilizando essa ideia, expressa pelos modelos produzidos, que os alunos forneceram uma resposta para o problema considerando o contexto original que deu origem à situação-problema, conforme sugerem Blum (2002), Bassanezi (2004), Pollak (2012).

A resposta obtida foi expressa numericamente. Observamos que não houve uma preocupação por parte dos alunos em produzir uma resposta textual e registrá-la. Portanto, nesse caso, a resposta foi apresentada por meio das discussões, da conversa a respeito da atividade.

Também no 5º ano, após o desenvolvimento dessa última atividade, os alunos foram questionados com relação às atividades desenvolvidas. Eles afirmaram ter gostado de desenvolver as atividades, que aprenderam muitas coisas e também reconheceram existir diferenças entre as atividades desenvolvidas no âmbito da pesquisa e as atividades que eles desenvolvem frequentemente nas aulas, citando como exemplo os registros que eles fizeram, o tipo de problema, sua resolução e apresentação dos resultados.

Diferentemente do 1º, 2º e 3º ano, os alunos do 5º ano, assim como os do 4º ano, descreveram em uma folha de papel o desenvolvimento das atividades. Alguns optaram por fazer a descrição relatando uma das atividades desenvolvidas; outros já descreveram de forma geral o desenvolvimento das atividades. O Quadro 34 exemplifica esses dois tipos de descrições realizadas pelos alunos.

Quadro 34 – Descrição das atividades de modelagem matemática pelos alunos do 5º ano

Nós começamos com o gráfico e foi almentando cada vez mais e depois dezenhamos as unhas e foi almentando de 3 e 3 milimetros em cada 1 meses e depois nós fizemos as contas que foi muito divertido.

Nós começamos com o gráfico e foi aumentando cada vez mais e depois desenhamos as unhas e foi aumentando de 3 em 3 milímetros em cada mês e depois nós fizemos as contas que foi muito divertido

(D5.7 e D5.12)

D5.9

* Escolha do tema.
* Estudar sobre o tema (Informações.
* Problema.
* considerar / desconsiderar algumas coisas.
* Resolução, usando contas (Matematica).
* conversa. / esclarecer, comparações de resultados
* Explicações (graficos, tabela, texto.

Fonte: Do autor.

As repostas dos alunos descrevem que as atividades de modelagem iniciam com a escolha de um tema e que esse tema deve ser estudado para se obter informações a seu respeito. Um problema deve ser formulado e para resolvê-lo é preciso considerar ou desconsiderar algumas coisas. A resolução se deu usando matemática, destacando o uso de contas, gráficos, tabelas e textos, que eram utilizados para fornecer explicações acerca da situação-problema. Por fim, os resultados foram comparados e eventuais dúvidas esclarecidas por meio de conversas.

4.2.7 A respeito dos encaminhamentos dos alunos para as atividades de modelagem

A análise dos encaminhamentos dos alunos para as atividades de modelagem com base nos referenciais teóricos adotados sinaliza aproximações e particularidades no modo como os alunos de cada ano escolar desenvolveram as atividades de modelagem matemática. Aproximações referentes à estrutura do desenvolvimento das atividades; e particularidades no modo como os alunos lidaram e realizaram determinadas ações associadas a essa estrutura. É a análise dessas aproximações e particularidades que revelam as configurações que as atividades de modelagem matemática assumiram.

Nesse sentido, as descrições dos alunos das atividades desenvolvidas por eles vem para fomentar a identificação dessas aproximações e particularidades, uma vez que elas revelam como os alunos visualizaram e entenderam as atividades de modelagem desenvolvidas por eles durante a pesquisa. O Quadro 35 sintetiza as descrições das atividades pelos alunos de cada série.

Quadro 35 – As atividades de modelagem matemática na visão dos alunos

AS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA NA VISÃO DOS ALUNOS	1º ano	2º ano
	• Tema • Escrever/falar sobre o tema • Anotações • Problema • Resolução por meio da matemática (desenhos, escritas, contas, gráficos...) • Compartilhar o trabalho com os colegas	• Informações • Conversa e explicação • Pergunta / Problema • Pensar sobre o problema • Investigação • Pensar • Escrever • Resposta (desenhos, escritas, gráficos, contas, tabelas...) • Avaliação (apresentar e comparar os resultados com os colegas)
3º ano	4º ano	5º ano
• Escolha do tema • Pesquisa • Pergunta / problema • Discutir (Explicação / Conversas) • Resolução por meio da matemática (contas, gráficos, comparações, medidas, tabelas...) • Resposta • Avaliação das respostas (comparar e apresentar para os colegas)	• Buscar informações • Explicação • Pergunta / problema • Entender o problema • Resolver o problema (Contas, medidas...) • Resposta da pergunta • Apresentação / Comparar e avaliar as respostas	• Escolha do tema • Estudar e conversar sobre o tema • Coleta de informações • Problema • Considerar/desconsiderar algumas coisas • Resolução usando contas (Matemática) • Explicações (expressões, gráficos, tabelas, textos...) • Conversa (esclarecer e comparar resultados) • Apresentação

Fonte: Do autor.

Com base nos encaminhamentos dos alunos identificados nas seções anteriores e nas descrições das atividades de modelagem realizadas pelos alunos, conforme Quadro 35, observamos alguns elementos que se mostraram recorrentes no desenvolvimento das atividades e que podem ser considerados, fundamentados nas discussões teóricas realizadas, a estrutura das atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental no âmbito da pesquisa.

De modo geral, a primeira ação de uma atividade de modelagem matemática é a escolha do tema (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012; BASSANEZI, 2015), seja pelo professor ou pelos alunos. No caso das primeiras atividades, propostas pelo professor, o tema e informações foram disponibilizados por ele, já nas últimas atividades, os temas foram escolhidos pelos alunos, e para que uma problemática fosse definida informações tiveram que ser pesquisadas. Nesse sentido, a *definição do tema e coleta de informações* é o primeiro aspecto, ou característica, da modelagem observado nos encaminhamentos dos alunos.

Definido o tema, o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática requer que o modelador se familiarize com o problema (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012), a discussão das informações (*conversa*, nas palavras dos alunos) foi o meio pelo qual os alunos realizaram essa familiarização. Nesse contexto outras discussões surgiram além das discussões associadas à situação, como as discussões matemáticas, uma vez que a intenção de um modelador em uma atividade de modelagem matemática é usar a matemática para resolver um problema identificado a partir da análise de uma situação. Os tópicos matemáticos desconhecidos pelos alunos precisaram ser esclarecidos, estudar matemática tornou-se assim uma ação necessária na atividade de modelagem. É nesse sentido que English (2003) argumenta que uma das características requeridas para a modelagem matemática nos anos iniciais é o trabalho com situações-problema autênticas, de modo que haja uma real necessidade de procedimentos matemáticos, isto é, que o estudo da matemática não seja inserido "a força", apenas para "contextualizar" o estudo dos conteúdos. E, além disso, surgiram também discussões específicas de temas que emergiram nas discussões das situações e que dizem respeito a outras disciplinas. Nesse contexto, apontamos as *discussões* como o segundo aspecto observado nos encaminhamentos dos alunos. Esse aspecto está em consonância com o princípio da significação pessoal, proposto por English (2010), que sinaliza a necessidade dos alunos relacionarem e compreenderem as situações-problema em investigação, sendo as discussões um meio pelo qual esse princípio pode ser atendido.

Essas discussões, portanto, estão também associadas à identificação e/ou elaboração de um problema para investigação. É o problema o ponto de partida de uma atividade de modelagem matemática (BLUM, 2002; ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012) e, considerando a problematização como uma característica de atividades de modelagem matemática (BARBOSA, 2003), o terceiro aspecto que destacamos nos encaminhamentos dos alunos é a *formulação do problema*. Essa formulação foi realizada pelo professor nas primeiras atividades e pelos alunos, com seu auxílio, nas últimas. De acordo com Downton (2013), a formulação de problemas é uma ação que deve ser incentivada no âmbito do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, particularmente nos anos iniciais, cujos alunos, segundo o autor, apresentam potencial para realizar tal tarefa.

Desenvolver uma atividade de modelagem matemática, contudo, requer que a situação-problema seja analisada em termos matemáticos, isto é, que a situação real seja idealizada de modo a transformar-se em uma situação matemática (POLLAK, 2012), nas palavras de Husserl (2012) isso consiste em atribuir uma roupagem de ideias matemáticas ao mundo permanentemente dado como efetivo na nossa vida concreta, uma roupagem que o mascara e o substitui. Para que essa idealização seja possível recortes e simplificações devem ser realizados (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012), sendo essa uma das características da modelagem matemática apontada por Bean (2001). Como colocado anteriormente, embora os alunos não tenham sempre explicitado essas simplificações, temos indícios para inferir que eles as realizaram. Alguns alunos, inclusive, reconheceram a necessidade de serem realizadas, como é o caso dos alunos do 5º ano, quando afirmaram que algumas coisas precisam ser consideradas e outras desconsideradas (Quadro 35). Assim, o quarto aspecto observado nos encaminhamentos dos alunos foi a *idealização da situação*. Essa idealização traz consigo a matematização da situação (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012), na qual a linguagem matemática é colocada em jogo para que a resolução do problema possa ser realizada usando a matemática (POLLAK, 2012). Nesse contexto, a idealização da situação envolve também a definição de variáveis, ou identificação e discussão das grandezas – no caso dos primeiros anos dos anos iniciais –, e a formulação de hipóteses, que orientam a investigação matemática (BEAN, 2001).

As hipóteses, segundo Almeida e Vertuan (2011, p. 22), são definidas "para indicar direções [...] em que diferentes resoluções matemáticas são empreendidas com vistas a resolver um problema". Essas resoluções envolvem a formulação de um modelo matemático

(BASSANEZI, 2004; 2015), que expressa as relações matemáticas presentes na situação e possibilita a produção de uma resposta para o problema (DOERR, ENGLISH, 2003). Consiste, portanto, a *formulação do modelo matemático* no quinto aspecto observado nos encaminhamentos dos alunos, que está em acordo com os princípios da construção e da documentação do modelo, propostos por English (2010). Essa formulação resultou, no caso das atividades desenvolvidas, em diferentes estruturas matemáticas que constituem os modelos matemáticos das situações-problema, como observa Lingefjärd (2006), e como exemplos podemos citar estruturas gráficas, aritméticas, algébricas, textuais, descritivas, tabulares etc.

Essas estruturas, ou modelos matemáticos, refletem a matemática utilizada na resolução do problema e no modo como as respostas são apresentadas pelos alunos. Por exemplo, na atividade que investiga o crescimento das unhas, os alunos apresentaram suas respostas usando comparações, quantidades inteiras, frações do mês, ou ainda, descrições textuais. Dessa forma, identificamos a *apresentação da resposta para o problema* como o sexto aspecto característico dos encaminhamentos dos alunos. E nesse contexto o princípio da documentação do modelo (ENGLISH, 2010) pode também ser citado.

Os resultados obtidos foram produzidos sob a orientação dos professores, que durante o desenvolvimento das atividades avaliaram as produções dos alunos e os orientaram a também avaliar suas produções, em conformidade com o princípio da autoavaliação indicado por English (2010) e com o uso da matemática e de sua linguagem. Mas é a avaliação dos resultados que indica a viabilidade do modelo matemático produzido, que possibilita sua validação quanto a seu uso para determinar resultados para o problema, que verifica sua fidedignidade com relação às características essenciais do fenômeno (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012), e que define a confiabilidade dos resultados (BASSANEZI, 2015). Dessa forma a *avaliação dos resultados* é o sétimo aspecto que observamos nos encaminhamentos dos alunos.

Por fim, os alunos, de modo geral, foram orientados a socializar não apenas os resultados obtidos por meio do desenvolvimento das atividades de modelagem, mas todo o procedimento envolvido nas suas investigações. Nesse momento, os alunos têm a oportunidade de discutir a matemática que surgiu em seus encaminhamentos e os modelos matemáticos produzidos, podendo relacioná-los a outros modelos e situações, atendendo, assim, ao princípio generalização do modelo, indicado por English (2010). A *socialização dos encaminhamentos* revela-se, portanto, como o oitavo aspecto identificado nos encaminhamentos dos alunos para as atividades de modelagem matemática.

Desse modo, a análise das unidades de análise, que dizem respeito ao desenvolvimento das atividades de modelagem matemática pelos alunos revela oito aspectos que caracterizam seus encaminhamentos:

- Definição do tema e coleta de informações
- Discussões
- Formulação do Problema
- Idealização da situação
- Formulação do modelo matemático
- Apresentação da resposta para o problema
- Avaliação dos resultados
- Socialização dos encaminhamentos

Esses aspectos, ainda que observados nos encaminhamentos dos alunos de todas as turmas, apresentam particularidades quando olhamos para o desenvolvimento das atividades de modelagem pelos alunos de cada série. Esses oitos aspectos podem, portanto, ser tomados como índices ou indicadores, conforme orienta Bardin (2011), para a construção de nossas categorias. É a partir desses indicadores que analisamos as atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos alunos.

Na sequência sintetizamos e apresentamos os encaminhamentos dos alunos de cada turma para as atividades descritas, levando em consideração os oito aspectos elencados. Para cada aspecto, de acordo com a atividade e com o ano escolar, apresentamos unidades de análise para caracterizá-lo, sejam elas registros escritos ou diálogos.

No caso da atividade com o tema *crescimento das unhas*, as cinco turmas participantes da pesquisa as desenvolveram, portanto, cinco quadros foram construídos para essa atividade.

O Quadro 36 sumariza os encaminhamentos dos alunos do 1º ano para a atividade com o tema *crescimento das unhas*, emergentes a partir da análise do desenvolvimento da atividade e das descrições realizadas pelos alunos.

Quadro 36 – Encaminhamento dos alunos do 1º ano para a atividade do *crescimento das unhas*

DEFINIÇÃO DO TEMA E COLETA DE INFORMAÇÕES

DISCUSSÕES

DISCUSSÕES MATEMÁTICAS

- *Quanto mede 6 metros? Será que é maior que essa sala?*
- *O metro é dividido em 100 cm.*
- *O que quer dizer em média?*
- *Para que serve a fita métrica?*
- *Qual número vem depois do 3?*
- *Como é o 9?*
- *As unhas dos pés crescem mais rápido ou mais devagar?*
- *O que significa ao longo do tempo?*
- *Tem fim os números? E o tempo?*

...

DISCUSSÕES SOBRE O TEMA

A1.4: Elas crescem e vão ficar grandes.
A1.8: É e depois a gente tem que cortar, senão nossas unhas ficam afiadas.
A1.2: Aí vai arranhar tudo o coleguinha.
A1.17: A unha também pode sair do dedo.
A1.22: A professora tem a unha grande.
A1.15: Se não lavar unha junta bichinho.
...

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

QUANTO CRESCEM SUAS UNHAS AO LONGO DOS MESES, CASO VOCÊ NÃO AS CORTE?

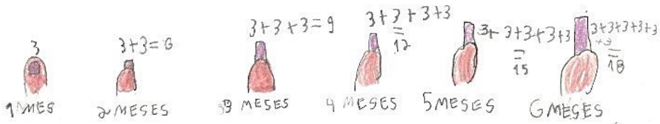
DE QUANTO EM QUANTO TEMPO VOCÊ DEVE CORTAR SUAS UNHAS PARA EVITAR PROBLEMAS DE SAÚDE?

IDEALIZAÇÃO DA SITUAÇÃO

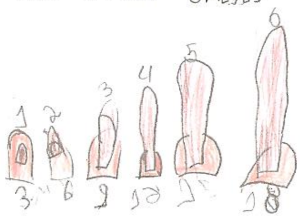
SIMPLIFICAÇÃO

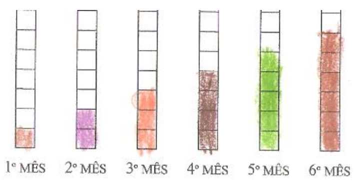
P: Na verdade as unhas crescem mais ou menos 3 milímetros. Tem mês que cresce um pouquinho mais, tem mês que cresce um pouquinho menos, mas a gente pode dizer que cresce 3 milímetros.

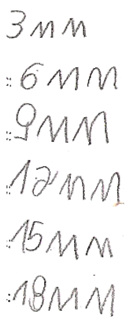
FORMULAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO



P: Quanto cresceu em dois meses?
A1.7: 6 mm
P: Isso, por quê? Porque cresceu 3 aqui mais...
A: 3
P: que dá?
A1.7: 3 mais 3...
A: dá 6.
P: Isso, e depois de 3 meses? E depois de 4 meses? E depois de 5 meses...?







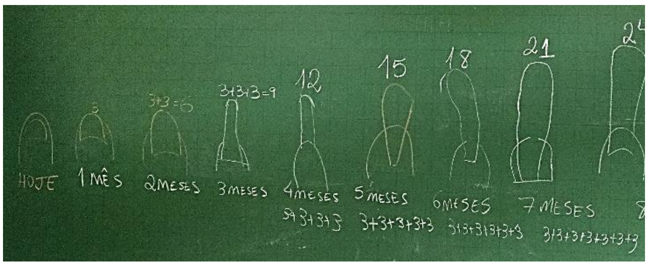
APRESENTAÇÃO DA RESPOSTA PARA O PROBLEMA

P: Então será que a gente pode esperar 1 mês para cortar as unhas?
A: Não.
P: Tem que cortar antes ou depois?
A: Antes.

AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS

- Aqui cresceu quanto?
- Um.
- Um só?
- Vai crescer muito?
- Muitão.
- Mas não é sempre o mesmo tanto que cresce?

SOCIALIZAÇÃO DOS ENCAMINHAMENTOS



Como se deu o desenvolvimento da atividade?

Fonte: Do autor.

O Quadro 36 sinaliza a importância do diálogo no desenvolvimento da atividade pelos alunos do 1º ano. Uma vez que esses alunos estão em processo de alfabetização, a leitura e a escrita são recursos menos utilizados pelos alunos, mas que precisam ser incentivados. Da mesma forma deve ser incentivada para a formalização dos registros o uso da linguagem matemática.

O Quadro 37 sumariza os encaminhamentos dos alunos do 2º ano para a atividade.

Quadro 37 – Encaminhamento dos alunos do 2º ano para a atividade do *crescimento das unhas*

DEFINIÇÃO DO TEMA E COLETA DE INFORMAÇÕES

A CADA MÊS CRESCE 3 MILÍMETROS.

DISCUSSÕES

DISCUSSÕES MATEMÁTICAS

- Quanto mede 6 metros? Será que é maior que essa sala?
- Quantos centímetros tem 1 metro?
- Quantas unidades tem 1 dezena?
- O que quer dizer em média?
- Para que serve a fita métrica?
- Vamos contar?
- Como escreve o número 100?
- Qual é a mão esquerda?
- As unhas crescem rápido?
- Como é o sinal de mais?
- Pode crescer mais? Vai ter fim?
...

DISCUSSÕES SOBRE O TEMA

A2.13: Tem que cortar as unhas.
A2.3: Meu pai falou que é só essa parte aqui que pode cortar (mostra a unha). Se cortar toda daí machuca.
A1.2: Se não cortar a unha, ela fica muito grande e fica sujeira.
A2.13: Tem que cortar e lavar as unhas sempre.
...

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

QUANTO CRESCEM SUAS UNHAS AO LONGO DOS MESES, CASO VOCÊ NÃO AS CORTE?

DE QUANTO EM QUANTO TEMPO VOCÊ DEVE CORTAR SUAS UNHAS PARA EVITAR PROBLEMAS DE SAÚDE?

SIMPLIFICAÇÃO

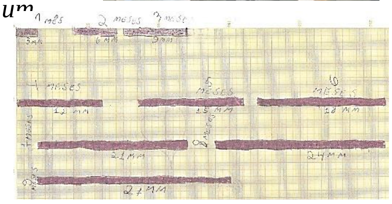
IDEALIZAÇÃO DA SITUAÇÃO

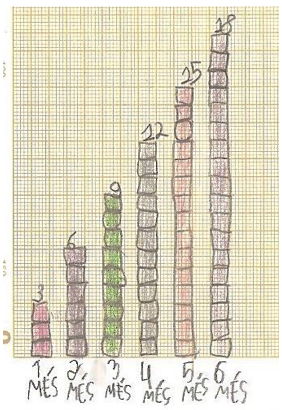
Por mês, as unhas das mãos crescem, em média, 3 mm e as dos pés, em média 1 mm.

FORMULAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

P: Quantos três vão aparecer no 1º mês? E no 2º mês? E no 3º mês? E no 4º mês? E no 10º mês?
...
P: Olha no papel milimetrado, 3 mm é muito?
Alunos: Sim.
P: Então tem que cortar antes ou depois de um mês?
Alunos: Antes

As unhas dos pés crescem em mm a mesma quantidade de meses que a unha ficou sem cortar





APRESENTAÇÃO DA RESPOSTA PARA O PROBLEMA

DEVEMOS CORTAR AS UNHAS COM MENOS DE 1 MÊS UO MAIS OU MENOS 15 DIAS

AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS

- Mas aqui não cresceu?
- Mas cresceu só um?
- Não era de três em três?
- Tem que arrumar, tinha nove... dez, onze, doze.

SOCIALIZAÇÃO DOS ENCAMINHAMENTOS

Como se deu o desenvolvimento da atividade?

Fonte: Do autor.

Podemos observar no Quadro 37 a presença ainda predominante do diálogo, mas que também o recurso da escrita foi mais utilizado pelos alunos do 2º ano. O quadro indica também que os alunos estabeleceram relações entre as variáveis “crescimento das unhas” e “tempo” com mais facilidade e apresentaram mais preocupação com relação aos registros matemáticos.

O Quadro 38 sumariza os encaminhamentos dos alunos do 3º ano para a atividade de modelagem sobre o crescimento das unhas.

Quadro 38 – Encaminhamento dos alunos do 3º ano para a atividade do *crescimento das unhas*

DEFINIÇÃO DO TEMA E COLETA DE INFORMAÇÕES

→ As unhas das mãos cresem em media, 3 milimetros (mm) por mês e as das pés 1 mm.

DISCUSSÕES

DISCUSSÕES SOBRE O TEMA

A3.4: As unhas são bem duras.
A3.22: É tipo uma casca.
Alunos: Servem para proteger os dedos.
A3.8: Para proteger da sujeira.
A3.24: É para não machucar.

DISCUSSÕES MATEMÁTICAS

- *Qual é maior? Direita ou esquerda?*
- *Quanto mede 6,02 m?*
- *O que a gente usa para medir?*
- *Cada centímetro tem quantos milímetros?*
- *O que quer dizer em média?*
- *Está crescendo de quanto em quanto tempo? Qual é a diferença?*
- *As unhas crescem rápido ou devagar?*
- *Já pensou se não existisse a multiplicação?*
- *Cada quadradinho tem 1 mm de altura.*

...

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

QUANTO CRESCEM SUAS UNHAS AO LONGO DOS MESES, CASO VOCÊ NÃO AS CORTE?

DE QUANTO EM QUANTO TEMPO VOCÊ DEVE CORTAR SUAS UNHAS PARA EVITAR PROBLEMAS DE SAÚDE?

IDEALIZAÇÃO DA SITUAÇÃO

SIMPLIFICAÇÃO

P: Na verdade as unhas crescem mais ou menos 3 milímetros. Tem mês que cresce um pouquinho mais, tem mês que cresce um pouquinho menos, mas a gente pode dizer que cresce 3 milímetros.

DEFINIÇÃO DE VARIÁVEIS

P: Sobre o que a gente está investigando?
Alunos: Unhas.
P: Mas o que em relação às unhas? O quanto...
Alunos: Elas crescem.
[...]
P: O que mais tem que aparecer? [...] É ao longo do que?
Alunos: Dos meses.
P: E mês é uma medida do que? [...] Do tempo.

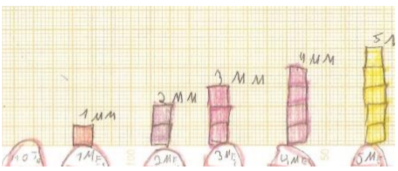
FORMULAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

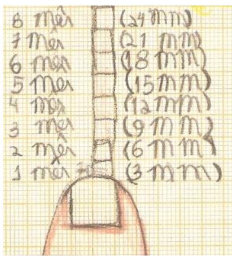
P: Gente para que dá para usar essa folha quadriculada?
A3.14: Para colocar as medidas?
P: Por exemplo, se cresceu um milímetro, eu vou pintar quantos quadradinhos?
Alunos: Um.
P: Cresceu dois milímetros.
Alunos: Dois.
P: Três milímetros?
Alunos: Três.
P: Aí cresceu seis...
Alunos: Seis.
P: Dez?

mês	Quanto cresceu (mm)
1	3+1=1
2	3+3=6
3	3+3+3=9
4	3+3+3+3=12
5	3+3+3+3+3=15

Para as unes das mãos

Quanto crecen = 3 x numero de meses que passau





APRESENTAÇÃO DA RESPOSTA PARA O PROBLEMA

Eu acho que meio mês

Eu penso que eu tenho que cortar as unhas

AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS

- *Tem que aumentar um pouquinho, porque passou um mês e a unha diminuiu? Só se a pessoa cortou né?*
- *Isso não pode faltar.*
- *Está de acordo com as informações?*

...

SOCIALIZAÇÃO DOS ENCAMINHAMENTOS

Apresentação dos resultados

Como se deu o desenvolvimento da atividade?

Fonte: Do autor.

O Quadro 38 sugere que os alunos do 3º ano preocuparam-se com as relações matemáticas identificadas e em como registrá-las. As variáveis envolvidas no problema foram identificadas e a multiplicação foi percebida.

O Quadro 39 sumariza os encaminhamentos dos alunos do 4º ano para a atividade.

Quadro 39 – Encaminhamento dos alunos do 4º ano para a atividade do *crescimento das unhas*

DEFINIÇÃO DO TEMA E COLETA DE INFORMAÇÕES

Em 1 mês as unhas das mãos crescem em média 3 milímetros (MM) e a dos pés 1 MM

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

QUANTO CRESCEM SUAS UNHAS AO LONGO DOS MESES, CASO VOCÊ NÃO AS CORTE?

DE QUANTO EM QUANTO TEMPO VOCÊ DEVE CORTAR SUAS UNHAS PARA EVITAR PROBLEMAS DE SAÚDE?

DISCUSSÕES

DISCUSSÕES MATEMÁTICAS

- *Vocês tem ideia do quanto mede 6 metros?*
- *Qual é maior? Da direita ou da esquerda?*
- *Vocês sabem quanto mede 1 mm? É 1 cm dividido em dez partes.*
- *A unha cresce rápido?*
- *Mesmo crescendo pouco, uma hora ela vai ficar grande.*
- *O que significa em média?*
- *Tem fim os números?*
- *Isso se chama gráfico.*
- *Lembra a tabuada.*

...

DISCUSSÕES SOBRE O TEMA

A4:21: Se não cortar elas vão ficar enorme e aí pode quebrar.
A4.13: Como ela come? Como ela dorme?
P: Já pensou 3 mm a mais na sua unha?
A4.18: Eu fiquei com vontade de cortar as unhas da mulher.
...

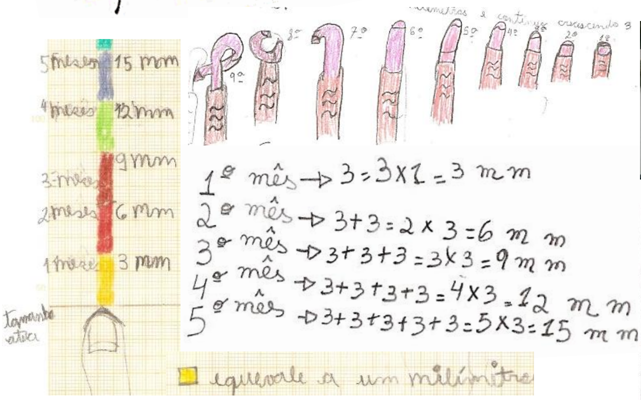
IDEALIZAÇÃO DA SITUAÇÃO

DEFINIÇÃO DE VARIÁVEIS

* quanto cresceu (MM)
* tempo (meses)

SIMPLIFICAÇÃO

Vamos considerar que as unhas das mãos crescem por mês 3 mm e a dos pés 1 mm.



FORMULAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

mês	quanto cresceu
1	3 mm
2	6 mm
3	9 mm
4	12 mm
5	15 mm
6	18 mm
7	21 mm
8	24 mm

P: O que acontece com as unhas em um mês?
A4.15: Elas crescem 3 milímetros.
[...]
P:E em dois meses?
Alunos: Seis.
P: Seis milímetros. E em três meses?
Alunos: Nove.
P: Eu quero que vocês pensem em grupo uma estratégia de responder essa pergunta.
...

APRESENTAÇÃO DA RESPOSTA PARA O PROBLEMA

R – Eu devo cortar as unhas em 10 em 10 dias. $\frac{1}{3}$ do mês

SOCIALIZAÇÃO DOS ENCAMINHAMENTOS

Como se deu o desenvolvimento da atividade?

AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS

Olha só, é ao longo do tempo, não é só responder cresce 3 mm em um mês, que isso a gente já sabe.

Fonte: Do autor.

Os alunos do 4º ano apresentaram certa fluência quanto ao uso da matemática para formular seus modelos e a idealização da situação apareceu com mais frequência nos seus registros.

O Quadro 40 sumariza os encaminhamentos dos alunos do 5º ano para a atividade.

Quadro 40 – Encaminhamento dos alunos do 5º ano para a atividade do *crescimento das unhas*

DEFINIÇÃO DO TEMA E COLETA DE INFORMAÇÕES

* As unhas das Mãos Crecem em Medía 3 Milímetros por mês e as dos pés 1 milímetro.

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

QUANTO CRESCEM SUAS UNHAS AO LONGO DOS MESES, CASO VOCÊ NÃO AS CORTE?

DE QUANTO EM QUANTO TEMPO VOCÊ DEVE CORTAR SUAS UNHAS PARA EVITAR PROBLEMAS DE SAÚDE?

DISCUSSÕES MATEMÁTICAS

- *Vocês têm ideia do quanto mede 6 metros?*
- *Qual mão tem as unhas maiores?*
- *A régua está separada em que unidades de medida?*
- *Cada parte dessa é um milímetro.*
- *As unhas crescem rápido?*
- *Esse espaço corresponde a 3 milímetros.*
- *Já ouviram falar em média?*
- *O que significa ao longo dos meses?*
- *Tem fim? Dá para fazer para todos?*
- *O que é escala?*

DISCUSSÕES

DISCUSSÕES SOBRE O TEMA

A5.11: Elas crescem sem parar.
A5.9: É verdade que não pode tirar cutícula?
A5.15: A gente deixa crescer para a unha ficar bonita, para poder pintar.
A5.15: Se fosse de verdade elas estariam retas?
P: Já pensou quanto esmalte precisa para pintar as unhas?
A5.10: Não é unha é ferro.
P:Por que será que ela deixou as unhas crescerem tanto?
...

IDEALIZAÇÃO DA SITUAÇÃO

SIMPLIFICAÇÃO

Vamos considerar que as unhas das Mãos Crecem 3 Milímetrios e as dos pé 1 milímetro

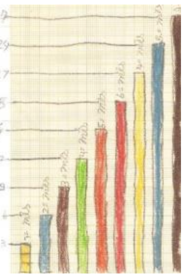
DEFINIÇÃO DE VARIÁVEIS

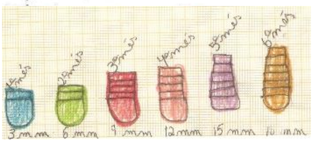
* Crescimento das unhas (mm)
* Tempo (Meses)

FORMULAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

1º mês → 3 mm
2º mês → 3+3=6 mm
3º mês → 3+3+3 = 9 mm
4º mês → 3+3+3+3 = 12 mm
5º mês → 3+3+3+3+3 = 15 mm

mês	Compr
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15
6	18
7	[illegible]





Quanto Creceu a unha = 3 x nº do mês

P: O que significa esse um? (Alunas não respondem) Um, dois, três é o que?
A5.7: É... meses.
P: Então anota, aqui você está fazendo por mês, e o três, por que sempre o três está repetindo?
A5.7: Não sei, porque é vezes... três, depois o quatro?
P: Não. Tem que repetir, por quê? De onde vocês tiraram esses três?
A5.7: Eu não fiz. Eu acho que ela tirou daqui.
P: Exatamente, é porque está crescendo três milímetros sempre. Então é três mais três, duas vezes três, mais três, três vezes três, mais três, quatro vezes três, e assim vai, está certo, legal, continua.

APRESENTAÇÃO DA RESPOSTA PARA O PROBLEMA

2 - R - Em 10 em 10 dias devo cortar as unhas.
10 dias $= \frac{1}{3}$ do mês.
$20 = \frac{2}{3}$ do mês
$30 = \frac{3}{3} = 1$ mês
$15 = \rightarrow \frac{1}{2}$ do mês

AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS

- *Será que os 3 mm responde o problema?*
- *Responde certinho, você não vai esperar 5 meses para cortar as unhas!*

SOCIALIZAÇÃO DOS ENCAMINHAMENTOS

Apresentação dos resultados

Como se deu o desenvolvimento da atividade?

Fonte: Do autor.

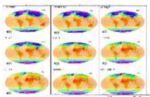
Assim como no 4º ano, os alunos do 5º ano usaram com mais frequência o recurso da escrita. Eles registraram informações selecionadas, as variáveis envolvidas e a simplificação realizada na situação e representaram seus modelos usando diferentes estruturas matemáticas.

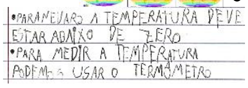
O Quadro 41 apresenta uma síntese dos encaminhamentos de um grupo de alunos do 1º ano para a atividade com tema *neve*, tema escolhido por eles.

Quadro 41 – Encaminhamento dos alunos do 1º ano para a atividade com o tema *neve*

DEFINIÇÃO DO TEMA E COLETA DE INFORMAÇÕES

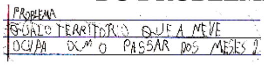
Navio
Fundo do mar
Desenho
Peixe
Neve
Animais
Carros
Olho





- *Para nevar a temperatura deve estar abaixo de zero*
- *Para medir a temperatura podemos usar o termômetro*

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA



Qual o território que a neve ocupa com o passar dos meses?

DISCUSSÕES

DISCUSSÕES MATEMÁTICAS

- Abaixo de zero.
- Como mede a temperatura?
- Para indicar que uma temperatura está abaixo de zero é só colocar um sinal de menos antes.
- A quantidade de neve está aumentando ou diminuindo?
- Se está diminuindo pode ter um no meio que está maior?
- Quando está diminuindo a gente chama de ordem decrescente e quando está aumentando, ordem crescente.

DISCUSSÕES SOBRE O TEMA

D1.2: Como faz a neve?
D1.7: Gente sabia que nem todas as neves chegam no chão?
P: Por que não neva no Brasil?
P: A temperatura no Brasil é alta.
D1.7: É assim: bastante aqui, bastante aqui. Ai aqui foi abaixando, abaixando, abaixando, abaixando...
...

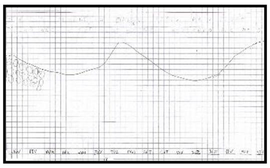
IDEALIZAÇÃO DA SITUAÇÃO

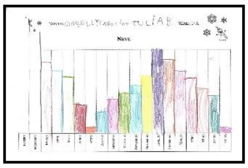
SIMPLIFICAÇÃO

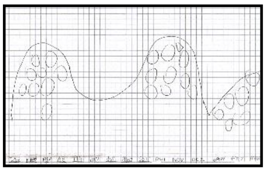
Abaixo de zero neva.

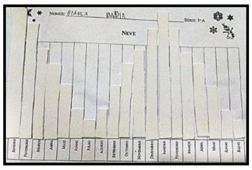
FORMULAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

P: Qual mês pode nevar mais?
Alunos: Janeiro.
P: Isso. Então janeiro vai estar bem alto. E o que acontece, fevereiro aumenta ou diminui?
D1.7: Diminui.
P: Diminui. E março?
D1.7: Diminui.
[...]
P: Julho?
D1.7: Diminui.
P: Agosto?
D1.7: Aumentou.
...









APRESENTAÇÃO DA RESPOSTA PARA O PROBLEMA

P: Ai acontece o que? Vai aumentando, aumentando, aumentando até quando?
A1.7: Outubro.
P: Julho, agosto, setembro, outubro, novembro, dezembro. Aí o que acontece depois? Janeiro, fevereiro, março, ... o que acontece?
A1.7: Diminui, daí sobe de novo, daí diminui, daí sobe de novo, diminui...

AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS

- Esse está menor que esse?
- Tem algum do mesmo tamanho?
...

SOCIALIZAÇÃO DOS ENCAMINHAMENTOS

Como se deu o desenvolvimento da atividade?

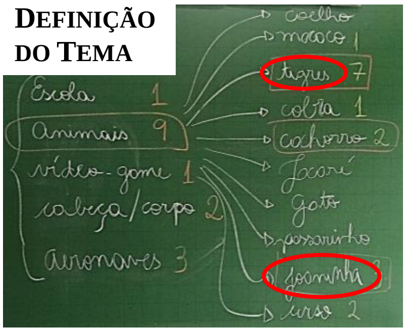
Fonte: Do autor.

O Quadro 41 aponta elementos que diferem essa atividade da primeira atividade desenvolvida pelos alunos do 1º ano. Observa-se no quadro elementos que caracterizam a definição do tema e a coleta e seleção de informações pelos alunos. Observamos também que a idealização da situação foi novamente feita de maneira implícita, sendo apontada pelo professor. Embora os alunos tenham identificado as variáveis envolvidas, há ainda uma dificuldade em lidar com as variáveis, por isso, essa ação nem aparece no quadro. A noção de comparação foi novamente utilizada pelos alunos como ponto de partida para a formulação dos modelos matemáticos.

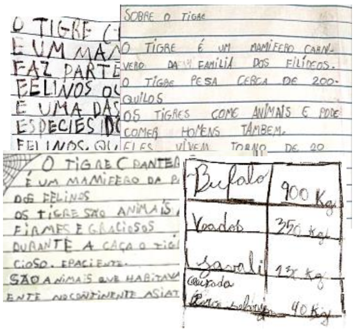
O Quadro 42 sintetiza os encaminhamentos dos alunos do 2º ano para a atividade de modelagem matemática com o tema *Tigres*.

Quadro 42 – Encaminhamento dos alunos do 2º ano para a atividade com o tema *Tigres*

DEFINIÇÃO DO TEMA



COLETA DE INFORMAÇÕES

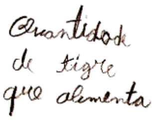


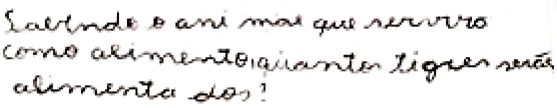
DISCUSSÕES

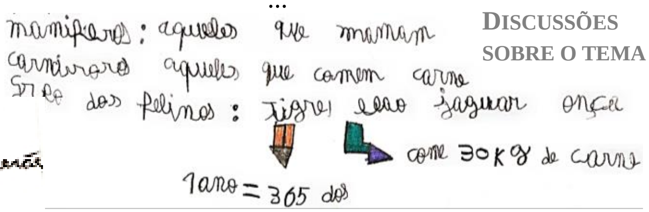
DISCUSSÕES MATEMÁTICAS

- Se a gente sabe de um dia, dá para saber de um mês?
- Quantos dias têm um mês?
- Por que o número está assim?
- Isso a gente chama de fração em matemática.
- Que figura é essa?
- Sobram quantas unidades?
- Mas dez não forma uma dezena?
...

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA







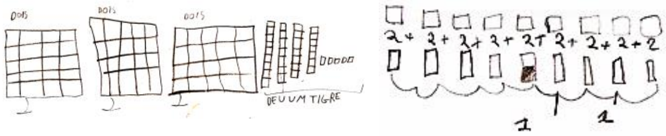
DISCUSSÕES SOBRE O TEMA

IDEALIZAÇÃO DA SITUAÇÃO

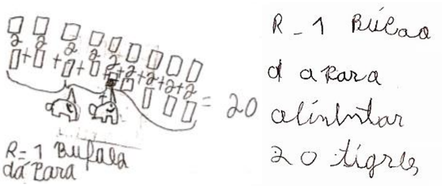
SIMPLIFICAÇÃO

Todos os tigres se alimentam com a mesma quantidade de carne, a saber 45 kg;
Todo o peso do animal que servirá como alimento ao tigre será considerado comestível.

FORMULAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO



APRESENTAÇÃO DA RESPOSTA PARA O PROBLEMA



AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS

- Anotem ai a resposta. Não esqueçam de colocar a resposta.

SOCIALIZAÇÃO DOS ENCAMINHAMENTOS

Apresentação dos resultados

Como se deu o desenvolvimento da atividade?

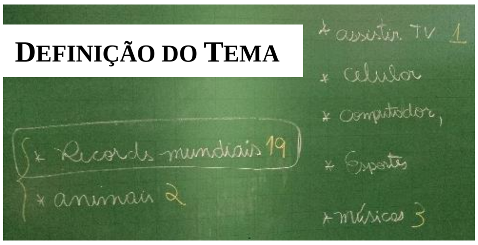
Fonte: Do autor.

Os alunos do 2º ano exploraram a ideia de *medir*, associada à divisão, ao construírem seus modelos matemáticos. O uso do material dourado auxiliou nos cálculos e na obtenção de uma resposta para o problema. A contagem e os desenhos ainda foram registros predominantes.

O Quadro 43 apresenta os encaminhamentos dos alunos do 3º ano para a atividade de modelagem com tema *recordes*.

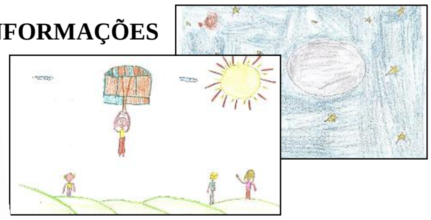
Quadro 43 – Encaminhamento dos alunos do 3º ano para a atividade com o tema *recordes*

DEFINIÇÃO DO TEMA



1) A pessoa mais velha a saltar de paraquedas: Iaia, 106 anos.
2) Maior oceano: Pacífico, área de 180 milhões km²
...

COLETA DE INFORMAÇÕES



FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Como se encontra Recordes?

DISCUSSÕES

DISCUSSÕES MATEMÁTICAS

- Como se lê esse número? (165.200.000 km²)
- Qual ordem vem depois da centena? E da unidade de milhar?
- O que significa 1,51 m?
- Um metro e cinquenta centímetros. Precisa colocar o zero depois do cinco na representação decima?
- O que se usa para medir comprimentos?
- Como medir usando a régua?
...

DISCUSSÕES SOBRE O TEMA

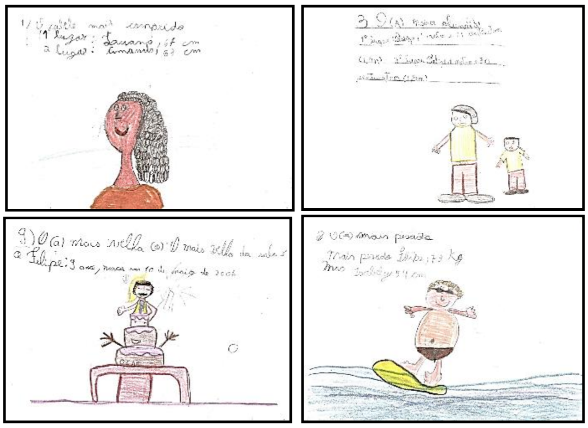
P: Por que eles bateram recordes?
D3.24: Porque ninguém conseguiu alcançar o nível deles.
D3.22: Professor tem um canal chamado Discovery que passa essas coisas.
D3.21: Desse tamanho?
D3.9: Como que ele podia brincar com esse ioiô?
...

IDEALIZAÇÃO DA SITUAÇÃO

SIMPLIFICAÇÃO

Recordes dos alunos do 3º ano

APRESENTAÇÃO DA RESPOSTA PARA O PROBLEMA



FORMULAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

Medimos e comparamos.

AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS

- Tinha recorde de ser médio?
- Ou era mais ou era menos.
- 32 é menor que 30?
...

SOCIALIZAÇÃO DOS ENCAMINHAMENTOS

Como se deu o desenvolvimento da atividade?

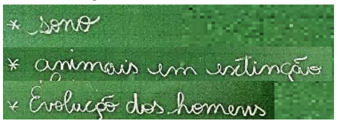
Fonte: Do autor.

Os alunos do 3º ano basearam a resolução do problema definido por eles na comparação de medidas. Discussões associadas a conversões de unidades de medidas e a comparação de números racionais com até dois dígitos após a vírgula surgiram. Várias informações foram pesquisadas pelos alunos, como curiosidades acerca do tema. O modelo matemático produzido tem a função de orientar os alunos em como determinar um recordista.

O Quadro 44 apresenta uma síntese do encaminhamento dos alunos do 4º ano para a atividade de modelagem matemática com o tema *evolução dos homens*.

Quadro 44 – Encaminhamento dos alunos do 4º ano para a atividade com o tema *evolução dos homens*

DEFINIÇÃO DO TEMA



COLETA DE INFORMAÇÕES

* Pessoas mais altas são consideradas mais inteligentes e ganham aumento de salária com mais facilidade
* Quanto maior a altura de um homem, mais feliz ele é.
* Entre 25 e 34 anos, 10 centímetros de diferença na altura entre uma pessoa e outra podem ser traduzidos em 1,5 anos a mais de escolaridade.

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Em média quantos centímetros o brasileiro vai crescer nos próximos anos?

IDEALIZAÇÃO DA SITUAÇÃO

DEFINIÇÃO DE VARIÁVEIS

Décadas (anos)	altura (cm)

P: [...] vocês estão olhando o que? O passar do que?
D4.23: Das décadas.
P: [...] E aqui, o que são essas medidas? Do que?
D4.23: Metros, metros. Metros e centímetros.
P: Mas... representam a medida do que?
D4.23: É... do homem.
P: Da altura não é?
D4.23: É. Da altura.

SIMPLIFICAÇÃO

H_1: A altura média dos brasileiros continuará crescendo de forma constante nas próximas décadas, ou seja, aumentará 2 cm a cada 10 anos;
H_2: Pessoas mais altas são mais saudáveis.

DISCUSSÕES

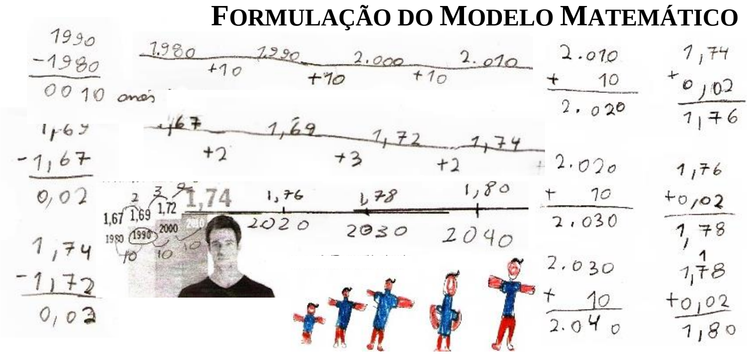
DISCUSSÕES SOBRE O TEMA

D4.16: Gente, a gente não está falando sobre o crescimento, mas sim a evolução. A gente tem que falar sobre a evolução dos homens, como eles vão evoluindo, as raças, o que foi mudando.
D4.23: Nós podemos estudar com esse ou com esse [refere-se a duas reportagens].
...

DISCUSSÕES MATEMÁTICAS

- Você não vai fazer bebês até mil anos né?
- Décadas são quantos anos?
- E a altura, está aumentando ou diminuindo? O que está acontecendo com a altura?
- Isso é a tabela, lembra?
- Qual é a medida de tempo?
- Existe zero vezes um, zero vezes dois?
- Não é porque está aumentando que eu vou fazer uma conta de mais.
- Quanto aumentou, a diferença, é menos.
...

FORMULAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO



AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS

P: Gente por que vocês estão somando as alturas?
D4.23: Porque aí nós somamos primeiro as alturas, depois, nós estamos somando agora as décadas.
P: Mas por que vocês estão somando?
D4.16: Para ver quanto o brasileiro pode crescer a mais e nos anos...
D4.23: Quantas décadas.
P: Para vocês saberem quanto está crescendo a mais, vocês não precisam saber quanto ele está crescendo aqui em cada [período de] tempo?
D4.16: Aham.
P: Mas se vocês somarem vocês não vão saber, vocês vão saber a altura de duas pessoas, não a diferença entre elas.

APRESENTAÇÃO DA RESPOSTA PARA O PROBLEMA

R= Daqui a 30 anos o brasileiro vai crescer até 1,80 (um metro e oitenta centímetros).

P: Está crescendo... então isso é bom? De acordo com a reportagem de que são mais saudáveis pessoas mais altas, o brasileiro está ficando mais saudável ou menos saudável?
Alunos: Mais....

SOCIALIZAÇÃO DOS ENCAMINHAMENTOS

Como se deu o desenvolvimento da atividade?

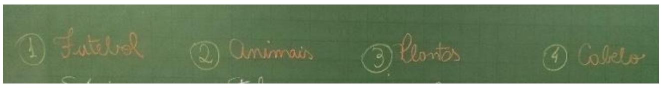
Fonte: Do autor.

Nessa atividade, os alunos tiveram a oportunidade de buscar informações a respeito de um tema escolhido por eles. Observamos um envolvimento diferente, que sinalizou certa autonomia com relação ao desenvolvimento da atividade, tanto no que diz respeito à definição do problema, quanto com relação ao uso da matemática e na socialização dos resultados. As operações matemáticas de adição e subtração, desenhos, tabelas e gráficos foram as estruturas matemáticas utilizadas pelos alunos na formulação do modelo da evolução da altura do homem brasileiro. Uma previsão da altura média dos homens para as próximas décadas pôde ser realizada por meio dos modelos produzidos por eles.

O Quadro 45 sumariza os encaminhamentos de um grupo de alunos do 5º ano para a atividade de modelagem com o tema *animais de estimação*, escolhido por eles.

Quadro 45 – Encaminhamento dos alunos do 5º ano para a atividade com o tema *animais de estimação*

DEFINIÇÃO DO TEMA



DISCUSSÕES

DISCUSSÕES MATEMÁTICAS

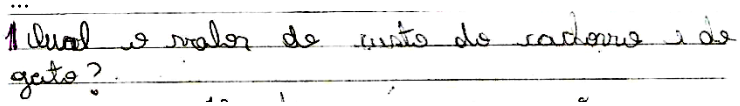
- *Qual é o símbolo dos reais?*
- *Soma, não é sinal de mais?*
- *Como faz divisão com vírgula?*
- *Como dividir 5 por 6?*
- *Dividindo pela quantidade de meses a gente encontra a média mensal.*
- *Como escreve 83 centavos?*

...

DISCUSSÕES SOBRE O TEMA

D5.3: Eu gasto em média 50 reais.
P: Quantas ml tem uma seringa?
P: Para quantos meses será que dá um potinho?
D5.15: Dois brinquedos por ano.
D5.6: A vendedora não vai dividir, é muito barato.
...

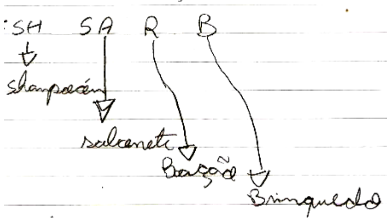
FORMULAÇÃO DO PROBLEMA



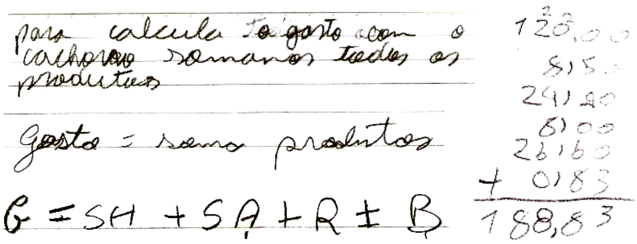
COLETA DE INFORMAÇÕES

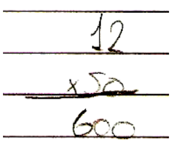
IDEALIZAÇÃO DA SITUAÇÃO

DEFINIÇÃO DE VARIÁVEIS



FORMULAÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO





AVALIAÇÃO DOS RESULTADOS

- *Que valores são esses?*
- *Nem todos os valores dos produtos são mensais.*
- *É 83 centavos e não reais.*

...

APRESENTAÇÃO DA RESPOSTA PARA O PROBLEMA

D5.10: Quantos que deu?
D5.3: Cento e oitenta e oito e oitenta e três.
P: Isso. Certinho.
D5.10: O meu também deu isso.

SOCIALIZAÇÃO DOS ENCAMINHAMENTOS

Como se deu o desenvolvimento da atividade?

Fonte: Do autor.

Os alunos do 5º ano, diferentemente do 1º, 2º e 3º ano, produziram diferentes tipos de modelos matemáticos: algébricos, descritivos e textuais. Eles apresentaram mais autonomia na definição do problema e na socialização dos encaminhamentos. Suas experiências foram levadas em consideração e confrontadas com as informações pesquisadas. Observamos que embora os alunos tenham registrado o procedimento matemático utilizado na resolução do problema, eles não apresentaram a preocupação em registrar a resposta e, por isso, foi expressa no Quadro 45 por meio de um diálogo.

A análise dos encaminhamentos dos alunos para as atividades de modelagem matemática revela indícios de aproximações e particularidades no modo como os alunos dos diferentes anos as desenvolveram. Aproximações nas estruturas emergentes no contexto de cada ano e particularidades no tocante às configurações que elas assumem. Uma análise comparativa orientada pelos oito indicadores identificados e estabelecidos como parâmetros de comparação nos permite fazer inferências e sinalizar *que configurações podem assumir atividades de modelagem matemática desenvolvidas por alunos dos anos iniciais do Ensino fundamental.*

No que diz respeito à *definição do tema e à coleta de informações* observamos que de modo geral os alunos escolheram temas de seu interesse, que lhes despertam alguma curiosidade e vontade de saber mais a respeito (HERMÍNIO, 2009). Enquanto alunos do 1º ano escolheram temas associados a atividades lúdicas, como filmes, desenhos etc. (neve e peixes) ou que estão associadas a desejos e aspirações (navios, carros etc.), alunos do 2º e 3º ano apresentaram interesse em temas já estudados por eles ou que lhes chamam atenção, como é o caso dos animais (tigres e joaninhas, por exemplo) e dos recordes. O 4º e o 5º ano, por sua vez, escolheram temas associados a atividades que fazem parte de seu dia a dia, seja em casa ou na escola, e que lhes despertam curiosidade como sono, animais, futebol, plantas, cabelo, evolução do homem.

Com relação às *discussões* desencadeadas pelas atividades, observamos três tipos de discussões: associadas ao tema, associadas à matemática e associadas à outras disciplinas, sinalizando o caráter interdisciplinar da modelagem matemática (ENGLISH, 2013; MALHEIROS, 2014; SILVA; KLÜBER, 2014). Essas discussões, ocorridas nas diferentes turmas, diferenciam-se pela objetividade e conteúdo.

As discussões do 1º ano a respeito do tema, por exemplo, foram mais abertas, os alunos contaram histórias, algumas vezes fictícias, fruto de sua imaginação. Nessa turma todos queriam falar. Já nos anos posteriores, 2º ao 5º ano, as discussões tornaram-se mais objetivas, questões pontuais foram apresentadas e não houve a necessidade de serem frequentemente repetidas.

As discussões matemáticas também apresentaram diferenças, tanto com relação aos conteúdos matemáticos, quanto à fluência e flexibilidade na produção de estruturas matemáticas para as situações-problema. Entretanto, observamos poucas diferenças nas discussões matemáticas realizadas entre o 2º e o 3º ano e entre o 4º e o 5º ano. O Quadro 46 indica os conteúdos matemáticos nos quais as discussões das turmas se concentraram para o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática.

Quadro 46 – Conteúdos matemáticos abordados nas discussões dos alunos nas atividades de modelagem

1º ano	2º ano e 3º ano	4º ano e 5º ano
• Contagem • Ordenação • Comparação (maior / menor; curto / comprido) • Escrita e leitura dos números • Adição • Multiplicação (noção intuitiva) • Divisão (noção intuitiva) • Unidades de medida (tempo, comprimento, volume, massa, temperatura) • Organização de dados (primeiras noções) • Construção de gráficos e de tabelas (primeiras noções) • Observação de padrões e regularidades • Formas geométricas (triângulo, retângulo, quadrado, círculo e apresentação do losango e trapézio)	• Comparação (curto / comprido; perto / longe) • Escrita e leitura de números • Contagem (por grupos) • Adição • Multiplicação (primeiras noções no 2º ano) • Divisão (noção intuitiva associada à ideia de medir) • Frações (primeiras noções: meio / metade; um quinto) • Números racionais • Comparação de números racionais • Unidades de medida (tempo, comprimento, volume, massa) • Conversões entre unidades de medida • Média (noção intuitiva) • Organização de dados • Construção de gráficos • Observação de padrões e regularidades • Formas geométricas e características associadas aos lados (triângulo, retângulo, quadrado, círculo e apresentação do losango, trapézio e paralelogramo) • Perímetro (primeiras noções) • Probabilidade (noção intuitiva no 2º ano)	• Comparação (curto / comprido) • Adição • Subtração • Multiplicação • Divisão • Frações (meio, um terço, dois terços, inteiro) • Números racionais • Operações com números racionais • Porcentagem • Unidades de medida (tempo, comprimento, volume, massa) • Conversões entre unidades de medida • Média aritmética (primeiras noções no 5º ano) • Organização de dados • Construção de gráficos e de tabelas • Frequência acumulada (primeiras noções) • Noções de escala (5º ano) • Observação de padrões e regularidades • Formas geométricas e características associadas aos lados, vértices e ângulos (triângulo, retângulo, quadrado, losango, círculo, trapézio) • Perímetro • Área • Expressões algébricas (primeiras noções)

Fonte: Do autor.

Esse quadro oferece elementos que contribuem para conjecturarmos uma conquista no que se refere à autonomia no uso da linguagem e de procedimentos matemáticos, do 1º ao 5º ano. Mostra ainda a variedade e pluralidade de conteúdos que uma atividade de modelagem matemática pode abordar.

As discussões associadas a outras disciplinas, por sua vez, contemplam desde o como escrever ou ler palavras até as diferentes discussões emergentes a partir do tema escolhido, por exemplo, formação da neve no 1º ano; localização geográfica e extensão territorial no 3º ano; e questões de higiene, abordadas em todas as turmas.

A *formulação do problema*, de modo geral, foi uma novidade para os alunos de todas as turmas. Baseados na alegação de Downton (2013), que os alunos dos anos iniciais apresentam potencial para formulação de questões que podem se tornar atividades de modelagem matemática, trabalhamos com os alunos a problematização das situações, característica também apontada por Barbosa (2003). Todas as turmas conseguiram formular problemas para as atividades de modelagem matemática em que essa ação foi necessária, mas, apenas os alunos do 4º e do 5º ano conseguiram realizá-la com mais autonomia. Uma questão interessante a se observar é que conforme as atividades cujos temas foram propostos pelo professor foram desenvolvidas, o leque de problemas foi aumentando. Enquanto que na atividade do *crescimento das unhas* os alunos investigaram duas questões associadas, na atividade do *desafio do balde de gelo* dois problemas surgiram, um associado a quantidade de dias necessários para que todos os alunos da escola participem do desafio e outro à quantidade de água – volume – desperdiçada com essa brincadeira. Já na atividade da *coleta de lixo*, vários problemas foram investigados, entre eles citamos: quanto lixo é coletado por dia na cidade? Quanto lixo é produzido por habitante? Qual a quantidade de lixo que é produzida em sua casa? Esse fato pode ser justificado pela maneira pela qual optamos desenvolver as atividades de modelagem matemática, segundo os três momentos de familiarização sugeridos por Almeida e Dias (2004).

Ações como levantamento de hipóteses, realização de simplificações e definição de variáveis constituem o que Pollak (2012) e Husserl (2012) chamam de *idealização da situação*. Essa idealização ocorreu em vários momentos, mas de modo geral não foi destacada pelos alunos. Houve, portanto, a necessidade de ser sinalizada ou apontada pelo professor. As diferenças ficam explícitas no modo como elas ocorreram. Enquanto no 1º, 2º e 3º a definição de variáveis e a formulação de hipóteses que simplificam a situação foram realizadas predominantemente no âmbito das discussões, observamos o registro dessas ações nas produções escritas dos alunos do 4º e do 5º ano.

A *formulação do modelo matemático*, como apontado por Bassanezi (2004), depende em grande medida dos conhecimentos matemáticos dos modeladores e das situações que se deseja modelar. Assim, diferenças são identificadas nas estruturas que constituem os modelos matemáticos. Enquanto a formulação dos modelos pelos alunos do 1º ano basearam-se particularmente na contagem e na comparação, os modelos produzidos pelos alunos dos demais anos fundamentaram-se nas operações aritméticas, dentre as quais observamos com mais frequência no 1º, 2º e 3º ano estruturas aditivas, que no 4º e 5º ano vão dando lugar para as estruturas multiplicativas. Como já sinalizamos nos encaminhamentos dos alunos para a atividade do *crescimento das unhas*, os gráficos construídos também revelam diferenças, sendo os gráficos do 1º ano pictóricos – sem uma preocupação com medidas – ou geométricos, de barras, mas construídos a partir de uma estrutura prévia fornecida pelo professor. No 2º ano também encontramos indícios dessas características mas com menos frequência, prevalecendo a construção de gráficos de barras, como foi o caso dos demais anos. Mas foi no 4º e 5º ano que noções a respeito de escala começaram a ser discutidas. Além disso, observamos nos registros dos alunos do 4º e do 5º ano uma variedade maior no uso de estruturas matemáticas para a produção dos modelos matemáticos do que nos outros anos escolares.

Observamos também essas diferenças com relação à autonomia no uso da matemática e de sua linguagem para a *apresentação da resposta para o problema*. As respostas eram formuladas e apresentadas pelos alunos em conformidade com o uso da matemática na resolução do problema ou de acordo com os conteúdos matemáticos já estudados por eles, os alunos do 4º e do 5º ano, por exemplo, na atividade do *crescimento das unhas*, usaram frações do mês para determinar quanto tempo deveriam cortar suas unhas, já os alunos do 3º e do 4º ano apresentaram respostas que envolviam noções iniciais de frações como metade do mês, 15 dias, e os alunos do 1º ano usaram a comparação indicando que as unhas devem ser cortadas com menos de um mês, noção que eles também usaram para responder o problema da atividade com o tema neve. Além disso, cabe destacar que as respostas foram por vezes apresentadas pelos alunos exclusivamente por meio dos diálogos, das conversas associadas à socialização, e que eles ainda não apresentavam a preocupação em registrar as respostas por meio da escrita, exigindo a intervenção do professor para que esse registro fosse realizado.

De modo geral, a *avaliação dos resultados* foi realizada ao longo da atividade com a supervisão dos professores, o pesquisador e a professora regente em alguns casos, mas foi no momento de socialização, de discussão dos resultados, que os alunos avaliaram e validaram seus modelos. Essa validação ocorreu por meio de comparações entre os modelos produzidos e de comparações com os dados e informações disponíveis, tomando a matemática como padrão de correção.

Por fim, a *socialização dos encaminhamentos* foi realizada, de modo geral, por meio de apresentações, nas quais os alunos mostraram suas investigações e resultados aos colegas. A diferença aqui está na comunicação, a bem da verdade na fluência com que os encaminhamentos foram comunicados. Embora os alunos tenham apresentado certo receio de falar sobre a atividade, eles foram auxiliados pelo professor com questionamentos que orientaram suas explicações. Observamos que os alunos dos últimos anos comunicaram seus resultados com mais segurança que os alunos dos primeiros anos, assim como também observamos um desenvolvimento da autonomia dos alunos na socialização dos encaminhamentos com o passar das atividades.

4.3 Configurações de modelagem matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental

A análise comparativa dos encaminhamentos dos alunos para as atividades sinaliza aproximações entre os encaminhamentos dos alunos do 2º e do 3º ano e entre os encaminhamentos dos alunos do 4º e do 5º ano, indicando o uso da matemática e de sua linguagem como uma diferença entre esses encaminhamentos. É, portanto, a partir de argumentos da perspectiva wittgensteiniana que fundamentamos nossas discussões sobre os encaminhamentos dos alunos, sobre as configurações de modelagem matemática emergentes.

De acordo com Bardin (2011, p. 147) o agrupamento das unidades de análise em categorias é denominado de categorização, definida pela autora como

> uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto por diferenciação e, em seguida, por reagrupamento segundo o gênero (analogia), com os critérios previamente definidos. As categorias são rubricas ou classes, as quais reúnem um grupo de elementos (unidades de registro, no caso da análise de conteúdo) sob um título genérico, agrupamento esse efetuado em razão das características comuns destes elementos.

Como se pode observar a partir da análise comparativa realizada, há aproximações entre os encaminhamentos dos alunos do 2º e 3º ano, assim como entre os encaminhamentos dos alunos do 4º e 5º ano em diversos aspectos, como as discussões, os interesses, a idealização, a formulação do modelo matemático etc. Nesse contexto, consideramos três categorias emergentes, que revelam as configurações de modelagem matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental:

1) Configuração de modelagem matemática do 1º ano
2) Configuração de modelagem matemática do 2º e do 3º ano
3) Configuração de modelagem matemática do 4º e do 5º ano

Essas configurações se caracterizam pelo modo como os alunos lidam com os elementos constituintes do procedimento associado à modelagem matemática e indicam como os alunos entenderam e lidaram com a matemática e com sua linguagem nas atividades desenvolvidas. Indicam, portanto, as configurações que atividades de modelagem matemática podem assumir quando desenvolvidas por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

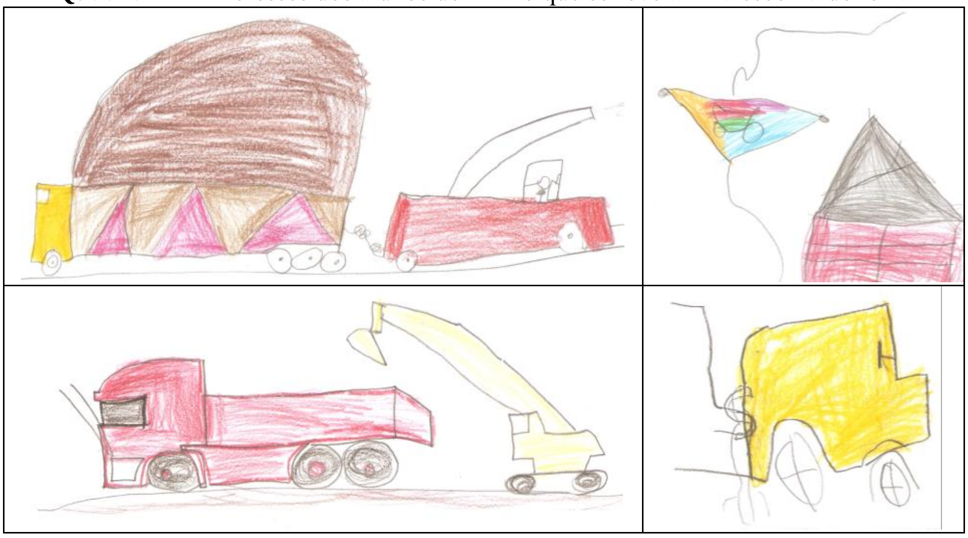
Descrevemos na sequência cada uma dessas categorias, justificando sua construção e apontando exemplos das unidades de análise a que a elas pertencem.

4.3.1 Configuração de modelagem matemática do 1º ano

Nossa primeira configuração diz respeito aos encaminhamentos dos alunos do 1º ano para as atividades de modelagem matemática, considerando as especificidades observadas com relação aos oito indicadores estabelecidos. É ainda com base nesses indicadores que analisamos os encaminhamentos dos alunos a partir de uma perspectiva wittgensteiniana, considerando as particularidades observadas a respeito da linguagem e nossa proposta de uma análise teórico-filosófica em busca de compreensões do fazer modelagem matemática como uma alternativa para as práticas pedagógicas associadas aos anos iniciais do Ensino Fundamental.

No que diz respeito à escolha do tema, observamos uma tendência na escolha dos alunos para temas associados a filmes (*Frozen*) e/ou desenhos infantis (*Power ranges*), animais (*Peixes, tubarão*), corpo (*olho*) e meios de transportes (*Carros, navio, navegar*), esses últimos associados também a aspirações pessoais. Ou seja, meios de transportes que eles admiram ou que sonham em usar ou ter. Assim, eles os desenham e falam sobre eles com frequência, como observamos durante a coleta de dados (Quadro 47).

Quadro 47 – Interesses dos alunos do 1º ano que se revelam na escolha do tema



Fonte: Do autor.

Há, portanto, curiosidades por parte dos alunos que se revelam no momento da escolha do tema e de acordo com as justificativas dadas são temas que eles gostam, que lhes interessam, e revelam, assim, traços característicos de sua *forma de vida*, isto é, associados aos seus hábitos, costumes, crenças, cultura e conhecimentos (WITTGENSTEIN, 2012; MIGUEL, 2014). Essa pode ser a inspiração para a escolha de temas como *neve*, que é proveniente de um filme que lhes chamou atenção; desenhos, que é o que habitualmente assistem na televisão, sendo essa uma atividade frequentemente realizada pelas crianças em geral; olho, um tema que diz respeito ao corpo, cujo estudo têm a intenção de promover conhecimentos acerca de características, dos hábitos de higiene ou cuidados que devemos ter; ou ainda temas que podem ser associados ao meio ambiente, ao mundo em que vivemos, como é o caso de temas como *peixes*, animais, e meios de transporte, cuja importância de respeitar as leis de trânsito é frequentemente discutida no âmbito escolar e até mesmo com seus pais.

Esses temas – mais gerais, filmes, desenhos, animais etc. – são contemplados em várias tarefas e atividades lúdicas desenvolvidas na escola, inclusive pelos alunos do 1º ano, como pinturas, desenhos, escritas, tarefas de completar, músicas, brincadeiras etc., atividades cuja intenção vai para além de situá-los no mundo em que vivem, mas que buscam despertar a fantasia, a imaginação e a criatividade. Esses aspectos são indicados por Kramer (2007, p. 15) como característicos da infância e nas palavras da autora, "Reconhecemos o que é específico da infância: seu poder de imaginação, a fantasia, a criação, a brincadeira entendida como experiência de cultura".

Levando em consideração argumentações de Wittgenstein (2012), podemos inferir que a escolha do tema revela o *modo de ver* o mundo dos alunos. Eles veem o mundo a partir do que eles conhecem. Da mesma forma, eles escolhem os temas a partir do que eles vivenciam, a partir de situações que permeiam seu mundo, sua realidade. E, algumas vezes, sua realidade está conectada a um mundo fantasiado por eles. Indícios disso é parte de um diálogo conforme segue.

D1.7: *(Lê) Nem todas as neves chegam no chão. (Fala) Gente sabia que nem todas as neves chegam no chão?*
D1.2: *É, tem umas que ficam penduradas.*

A afirmação de D1.2 parece uma imaginação, uma vez que flocos de neve não "*ficam pendurados*", e de fato, de acordo com a reportagem que a aluna lia, nem toda neve chega ao chão, pois dependendo da temperatura, ela pode derreter antes mesmo de chegar até o solo. Mas, para a aluna, tal afirmação de alguma forma lhe faz sentido e não existe problema algum nela. Isso porque é característico da criança imaginar ou inventar coisas.

> Crianças jogam este jogo. Elas dizem, por exemplo, que um caixote agora é uma casa; e, em seguida, o caixote é todo interpretado como uma casa. Trabalha-se nele uma invenção.
> E a criança *vê* o caixote agora como casa?
> "Ele esqueceu-se completamente de que é um caixote; para ele é efetivamente uma casa." (Há determinados indícios para tanto.) Não seria, então, correto dizer que ele o *vê* como casa?
> (WITTGENSTEIN, 2012, p. 269).

As intervenções do professor e dos colegas provocam os alunos no sentido de desestabilizar esse *modo de ver*, de colocá-los diante de informações e promover discussões de modo que a situação seja vista a partir de um olhar diferente, de um olhar que contempla as informações que lhes foram disponibilizadas, uma vez que é a partir delas que eles podem investigar e obter respostas para os problemas.

Para que esse olhar fosse constituído, discussões foram necessárias. Discussões a respeito do tema de modo a compreender e familiarizar-se com a situação, esclarecer dúvidas, saber se outras informações são necessárias e definir um problema para investigar; discussões matemáticas, que são engendradas com o objetivo de conhecer e/ou esclarecer questões matemáticas que se referem, particularmente, aos seus conteúdos; e questões associadas a outras disciplinas, que surgiram no contexto das investigações, conforme a situação-problema investigada.

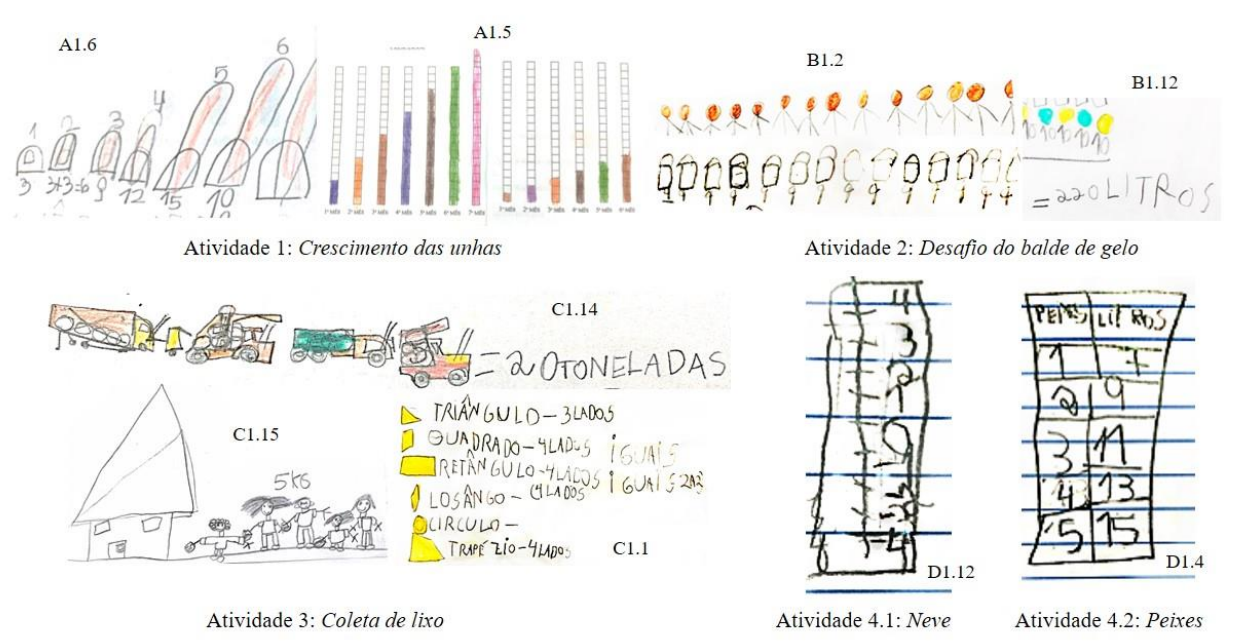
No que se refere às discussões sobre o tema, observamos duas atitudes. A primeira no sentido de compartilhar experiências, de comentar sobre o assunto, e a segunda no sentido de compreender a situação, conhecer informações. Os alunos discutiram os cuidados que se deve ter com as unhas, os hábitos de higiene, as consequências de não cuidar das unhas, conheceram a informação de quanto crescem as unhas das mãos e dos pés mensalmente; conheceram a doença Esclerose Lateral Amiotrófica (ELA), cuja campanha do desafio do balde de gelo foi feita para divulgá-la e arrecadar fundos, discutiram que mesmo tal campanha tendo boas intenções ela também tem seu lado negativo que se trata do desperdício de água; conheceram o trabalho de um gari e sua rotina de trabalho e foram informados a respeito de quanto lixo é produzido pela cidade; investigaram questões associadas à formação da neve e de onde neva no território mundial; descobriram critérios que podem ser utilizados para determinar a quantidade ou volume de água que deve ter em um aquário, considerando a quantidade de peixes etc. Tratam-se de momentos que demandaram tempo, pois todos os alunos manifestaram interesse em comentar, perguntar ou contar algo, mesmo que não associado ao tema, mas às suas experiências.

Foi nesse contexto que alguns alunos, para participarem das discussões, fantasiaram algumas histórias. Isso reflete de certo modo a maneira como os alunos entendem o ambiente escolar e como eles devem se comportar, respondendo perguntas do professor. Wittgenstein (2012) refere-se a esse comportamento ensaiado como “treinamento”. Diante disso, há evidências de uma tentativa dos alunos de inserir-se na *forma de vida escolar*, seguindo uma regra de que *se meu colega fala, eu também devo falar*, ou, *se meu professor pergunta, eu devo responder*. Ou seja, os alunos desejam adaptar-se ao padrão de comportamento, ainda que algumas vezes tenham que recorrer ao que Wittgenstein (2012, § 269) chama de “linguagem privada”, ou seja, uma linguagem cujo entendimento é particular do sujeito. Tal atitude reflete ainda uma característica que é peculiar a esse ano escolar, o diálogo. “É principalmente com a linguagem verbal que as relações de ensino-aprendizagem acontecem, por meio de diálogos, exposições orais, atividades de leitura e de escrita, análise de imagens, de quadros, gráficos e problemas, entre outras atividades (GOULART, 2007, p. 92).

Coube ao professor avaliar a maneira mais sensata de colocar os alunos diante da situação-problema e colocá-los a par dos dados reais. O professor nesse momento exerce o papel de mediador, conforme Almeida, Silva e Vertuan (2012), e indica caminhos pelos quais os alunos podem seguir para agir em conformidade com o *jogo de linguagem*. O professor assume nesse momento um papel que corrobora o *jogo de linguagem* como padrão de correção. O professor conhece a gramática que está em jogo no contexto da modelagem matemática, uma gramática regida por princípios e normas da linguagem matemática e, nesse contexto, ele avalia os usos da linguagem pelos alunos, para que os significados sejam construídos em acordo com o estabelecido por essa *forma de vida* – que poderíamos denominar comunidade matemática –, isto porque segundo Izmirli (2013), no âmbito de um *jogo de linguagem* deve-se não apenas concordar nas opiniões, mas na *forma de vida*. E, segundo Wittgenstein (2012), jogar um *jogo de linguagem* é uma atividade, associada a uma *forma de vida*.

Com relação às discussões matemáticas, conteúdos emergentes das discussões sobre o tema, necessários para sua compreensão ou que surgiram a partir de dúvidas dos alunos foram discutidos. Nessa configuração, referente ao modo como os alunos do 1º ano encaminharam atividades de modelagem matemática observamos discussões associadas à contagem, à adição, a medidas, à organização de dados, à observação de padrões e regularidades, a formas geométricas etc. Dessa forma, os alunos discutiram a respeito de números e quantidades que eles representam, como eles são registrados; ordenação (qual é o próximo? Crescente ou decrescente?), comparações (aumenta ou diminui? Qual é o caminho mais curto?); o que significa dizer abaixo de zero; questões associadas a medidas, como medir as distâncias a que se referem determinadas medidas, medir temperaturas, unidades de tempo (meses, dias, semanas), de comprimento (metro, centímetro, milímetro), de volume (litros), de massa (quilos, toneladas), instrumentos utilizados para medir; noção de velocidade (qual cresce mais rápido?); conheceram algumas formas geométricas (triângulo, retângulo, quadrado, círculo) e discutiram algumas características; como organizar dados em gráficos, tabelas etc. O Quadro 48 apresenta alguns registros que ilustram tais discussões.

Quadro 48 – Registros provenientes de discussões matemáticas dos alunos nas atividades de modelagem



Fonte: Do autor.

Durante as discussões, observamos vários indícios do que Wittgenstein (2012, § 6) chama de "ensino ostensivo das palavras": o professor aponta para a régua e diz "*este* é o espaço correspondente a 1 mm"; "*Este* é o nove", referindo-se ao algarismo; "*Este* é o mapa mundi"; "Olhem *aí*, estão vendo *aquele* vermelho?"; "Vocês sabem o que é *isto?*"; etc. Segundo Wittgenstein (2012) uma parte importante do treinamento de uma criança é o ensino ostensivo das palavras, que consiste em apontar para o "objeto" enquanto pronuncia seu nome. Assim, "pode-se dizer que esse ensino ostensivo das palavras estabelece uma ligação associativa entre a palavra e a coisa" (WITTGENSTEIN, 2012, § 6), trata-se de uma linguagem primitiva em que o uso das palavras repousa sobre os objetos aos quais denominam. De acordo com o autor, somos treinados para perguntar "como se chama isto?", treinados para *afixar etiquetas* nas coisas. Esse modo de agir, essa atividade, é também um *jogo de linguagem*.

Quando ensinamos a uma criança os primeiros números, por exemplo, provavelmente, levantamos um dedo para cima ou apontamos para um objeto e pronunciamos a palavra "um", esperando que a criança repita, assim também procedemos com os números dois, três... E quando os ensinamos os algarismos, provavelmente dizemos "*este* é o um", apontando para seu registro.

Como poderia ensinar então o uso das palavras esquerda e direita? "Aponta-se para lugares e coisas – mas aqui neste apontar acontece também no *uso* das palavras e não só no aprendizado do uso" (WITTGENSTEIN, 2012, § 9). Ou seja, não basta explicar como se usa essas palavras, ao usá-las é preciso também apontar para os sentidos a que elas se referem.

Wittgenstein (2012, § 26) refere-se a essa atitude, ao ensino ostensivo como uma preparação para novos usos das palavras, para novos *jogos de linguagem*.

Durante as atividades os alunos foram colocados diante de diferentes *jogos de linguagem*, como por exemplo, o *jogo de linguagem* associado a *medir*. "Seis milímetros" tem um significado diferente do algarismo "seis" usado, por exemplo, para dizer que há seis pessoas morando na sua casa. São usos diferentes, um remete à medida e outro à quantidade. Como sinalizou Wittgenstein (2012) com o exemplo do bastão e do soldado (Capítulo 3), comparando diferentes usos do "1".

Vale a pena, ainda, ressaltar a quantidade de conteúdos matemáticos que o desenvolvimento das atividades oportunizou discutir. E não apenas conteúdos matemáticos, mas também de outras disciplinas, como o caso dos cuidados e higiene com o corpo, da formação da neve, dos cuidados que se deve ter com peixes em um aquário, de como ler e escrever determinadas palavras ou frases, da localização geográfica do Brasil, das estações do ano, do clima etc.

Essas discussões encaminharam os alunos, sob a orientação do professor, para a elaboração e/ou investigação de um problema. Quando o problema é escolhido pelo professor, é por meio das discussões realizadas que os alunos empenham-se na tarefa de familiarizar-se com o tema e de compreender o problema. Contudo, quando a escolha do tema é feita pelos alunos, a responsabilidade de formular o problema é também compartilhada por eles. De modo geral, os alunos do 1º ano precisaram desenvolver a habilidade de formular problemas, no sentido de *identificar* um problema na situação, tarefa que não é comum nesse ano escolar – a bem da verdade, uma tarefa que não é muito comum nas aulas de matemática. A orientação do professor e as discussões tornam-se fundamentais para dar o suporte para o desenvolvimento dessa tarefa. Nesse contexto, alguns problemas foram *elaborados*, problemas oriundos não de uma necessidade, de um impedimento de algo na situação, mas da curiosidade dos alunos sobre determinados aspectos observados, portanto, orientados pela "falta de compreensão, de entendimento da situação" (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012). No caso da situação com o tema *neve*, por exemplo, cujo tema foi escolhido pelos alunos, as informações continham discussões associadas a como a neve se forma, a respeito da temperatura necessária para sua formação e para que ela chegue até o solo, a respeito as temperaturas dos países ao longo do ano etc. Diante dessas informações, um aspecto que lhes chamou atenção foi a coloração que indicava as temperaturas (Quadro 6), como o *gif* mostrava as temperaturas mês a mês, o problema definido diz respeito à quantidade países que podem nevar ao longo dos meses. Já no caso da atividade com o tema *peixes*, também escolhido pelos alunos, eles tiveram a oportunidade de conhecer critérios para determinar o volume de água que deve ter um aquário sabendo a quantidade de peixes e o porte do peixe que o habitará e os cuidados que se deve ter para manter seu peixe saudável. Nesse contexto uma reportagem que expunha tais critérios inspirou a investigação de como determinar o volume de água de um aquário.

Contudo, não é apenas em atividades de modelagem matemática cujo tema foi escolhido pelos alunos que eles podem compartilhar a responsabilidade de definir um problema com o professor. Ao optar por desenvolver atividades de modelagem matemática com os alunos de acordo com os momentos de familiarização propostos por Almeida e Dias (2004), pensamos que é pertinente e necessário que o professor, ao longo das atividades, explore a formulação de problemas, ou seja, mesmo que o tema e o problema já estejam definidos, é interessante discutir com os alunos outras possibilidades de investigação. *Que outros problemas podemos investigar a partir desse tema?* O professor pode ainda definir um tema, fornecer informações e junto com os alunos definir problemas, como foi o caso da atividade a respeito da *coleta de lixo*. A fonte de informações dos alunos para o desenvolvimento dessa atividade foi uma conversa com um gari. As informações fornecidas por ele abriu um leque de possibilidades de investigações. A partir delas os alunos investigaram: Quanto lixo é produzido na cidade em um dia? Quanto lixo é produzido por pessoa? E na sua casa, quanto lixo é produzido? Olhando no mapa a região da escola, que caminho você indicaria para o gari coletar o lixo? Atividades como essa ajudam tanto na problematização da situação, que é característica da modelagem matemática, segundo Barbosa (2003), quanto na seleção de variáveis, na definição de quais informações são úteis para responder o problema (POLLAK, 2012; BASSANEZI, 2015).

A esse conjunto de ações, familiarização com o tema, discussão e seleção de informações, definição do problema, Almeida, Silva e Vertuan (2012) denominam de fase de inteiração. É comum na literatura observarmos a organização do procedimento associado à modelagem matemática em ciclos, fases, etapas (MAAß, 2006; MEERWALDT; BORROMEO FERRI; NEVERS, 2013; BASSANEZI, 2015), o que ajuda na compreensão da prática da modelagem. Cabe destacar que uma fase não termina necessariamente quando outra começa, pois como afirma D'Ambrosio (2015), ações podem ser retomadas até que se considere que o resultado encontrado seja satisfatório para o momento. De acordo com Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 15), a fase de inteiração diz respeito a

> um primeiro contato com uma situação-problema que se pretende estudar com a finalidade de conhecer as características e especificidades da situação. Implica, portanto, cercar-se de informações sobre essa situação [...]. A inteiração conduz a formulação do problema e a definição de metas para sua resolução.

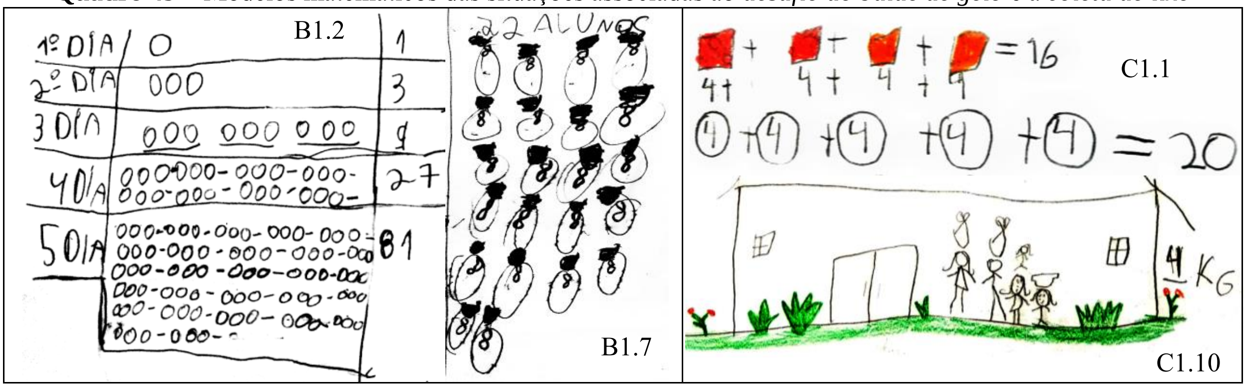
A primeira reação dos alunos quando o problema das unhas foi proposto foi querer desenhar a respeito do tema. Afinal, para que serve um desenho? Com que finalidade um aluno faz um desenho no contexto do 1º ano do Ensino Fundamental? São comuns atividades como pintar e desenhar nesse ano escolar, pois considera-se o desenho "uma forma de expressão de como a criança e/ou o jovem veem o mundo e suas particularidades" (BORBA; GOULART, 2007, p. 64). Pode-se assim dizer que é uma atividade que faz parte de sua *forma de vida* (MIGUEL, 2014).

Todavia, desenhar a respeito do tema, como pretendiam os alunos, provavelmente não responderia o problema. É preciso contextualizar os alunos sobre o modo de proceder, retomar as informações, discutir possibilidades e indicar caminhos, ou seja, é preciso inserir os alunos no *jogo de linguagem* que se constitui no fazer modelagem matemática, orientá-los com relação a como agir, pois como argumenta Wittgenstein (2012) jogar um *jogo de linguagem* é parte de uma atividade, de uma *forma de vida*. A frequente retomada das informações orientou os alunos em relação a que caminhos seguir, ao que é e o que não é pertinente à atividade. As discussões foram o meio pelo qual os alunos conseguiram, seja pela mediação dos professores ou de colegas, compreender o problema. Ainda assim, os desenhos foram o meio que os alunos encontraram para elaborar uma resposta para o problema, pois fazem parte da linguagem dos alunos.

Ainda assim, podemos dizer que os desenhos produzidos constituem estruturas matemáticas para expressar o comportamento observado na situação. Unhas foram desenhadas de modo a representar o crescimento ao longo dos meses, sendo que com o passar dos meses, cada unha desenhada era maior que o anterior, fundamentados na informação de que cada unha das mãos cresce, em média, 3 milímetros por mês e a dos pés 1 milímetro. Foi com base nessa ideia de ordenação dos desenhos em uma sequência crescente que os alunos construíram seus modelos matemáticos para a atividade do crescimento das unhas, gráficos pictóricos, ou pelo menos um esboço de tais gráficos. Contudo, essa estrutura pode ser considerada um modelo matemático, uma vez que compreende um "sistema de elementos, operações, relações, e regras que podem ser usadas para descrever, explicar, ou prever o comportamento de alguns outros sistemas familiares" como explicam Doerr e English (2003, p. 112)[35]. Há elementos, os desenhos; há relações, a ordenação de forma crescente; e há regras e operações, a unha sempre cresce a cada mês. Tais gráficos descrevem, explicam e preveem informações associadas à situação e sua estrutura (gráfica) pode também ser utilizada para explicar, descrever e prever informações associadas a outras situações, a outros fenômenos, feitas as modificações necessárias, como foi o caso da atividade com o tema *neve*, por exemplo, que por meio de um gráfico descreveu a área mundial ocupada por neve ao longo dos anos e do tema *peixes*, na qual o desenho de um aquário se tornou um gráfico em que os alunos fizeram para cada peixe desenhado uma nova marca, indicando que se a quantidade de peixes aumentou, o volume de água do aquário também deve aumentar – gráfico pictórico.

O mesmo pode-se dizer a respeito dos desenhos produzidos pelos alunos como modelos matemáticos das situações referentes ao *desafio do balde de gelo* e da *coleta de lixo* (Quadro 49). Ambos constituem estruturas matemáticas que possuem elementos, operações, relações e que seguem regras, associadas à matemática, para a sua construção e, além disso, podem descrever, explicar e fazer previsões a respeito de tais fenômenos.

Quadro 49 – Modelos matemáticos das situações associadas ao *desafio do balde de gelo* e à *coleta de lixo*



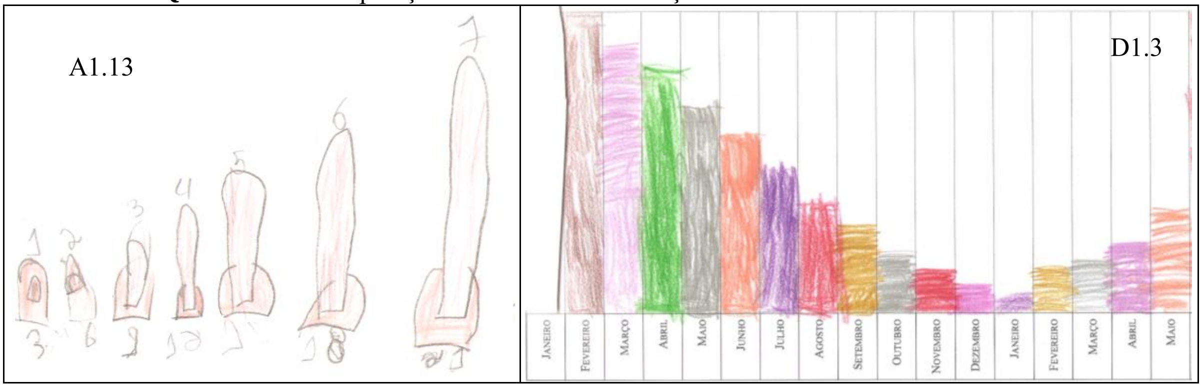
Fonte: Do autor.

---

[35] Tradução de: [...] systems of elements, operations, relationships, and rules that can be used to describe, explain, or predict the behavior of some other familiar system.

Ao compararmos os modelos produzidos pelos alunos identificamos várias semelhanças e dissemelhanças. Vejamos, por exemplo, o Quadro 50, que apresenta dois gráficos, modelos matemáticos do *crescimento das unhas* e da área do território mundial ocupada por *neve* ao longo do tempo.

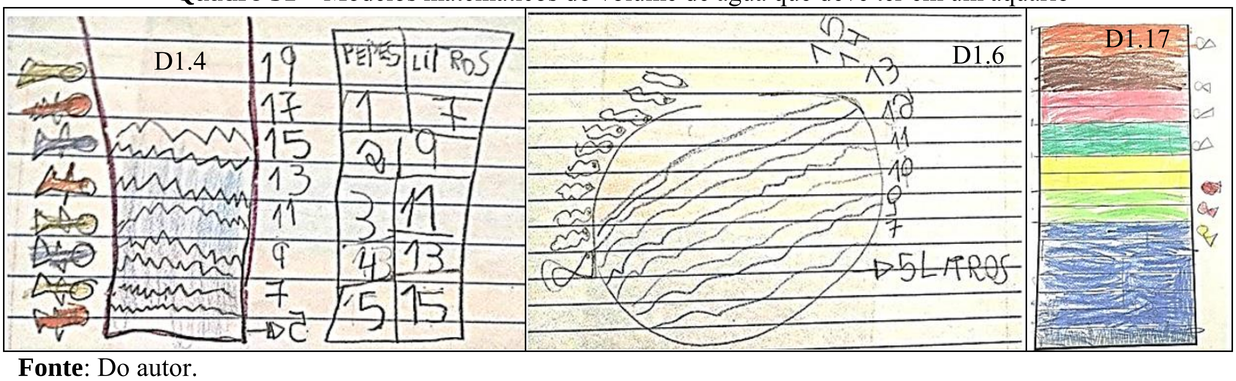
Quadro 50 – Comparação dos obtidos nas situações *crescimento das unhas* e *neve*



Fonte: Do autor.

Ambos os modelos são construídos usando a comparação com o passar dos meses e a ideia de ordenação. O da esquerda em ordem crescente e o da direita revela uma periodicidade, que aumenta em um determinado período do ano e diminui em outro, e o ciclo se repete ano após ano. E aí começam aparecer as diferenças, particularidades de cada modelo, enquanto o primeiro apresenta desenhos de unhas para fazer alusão ao tema da situação e apresentar os dados – gráfico pictóricos –, o segundo apresenta barras retangulares – gráfico de barras, ou nesse caso gráfico de colunas –, que indicam o comportamento da área do território mundial ocupada por neve ao longo do tempo. Outras semelhanças e diferenças também podem ser apontadas quando comparamos esses dois gráficos com outros, por exemplo, com os gráficos produzidos pelos alunos para determinar o volume de água que deve ter em um aquário, na atividade associada ao tema *peixes* (Quadro 51).

Quadro 51 – Modelos matemáticos do volume de água que deve ter em um aquário

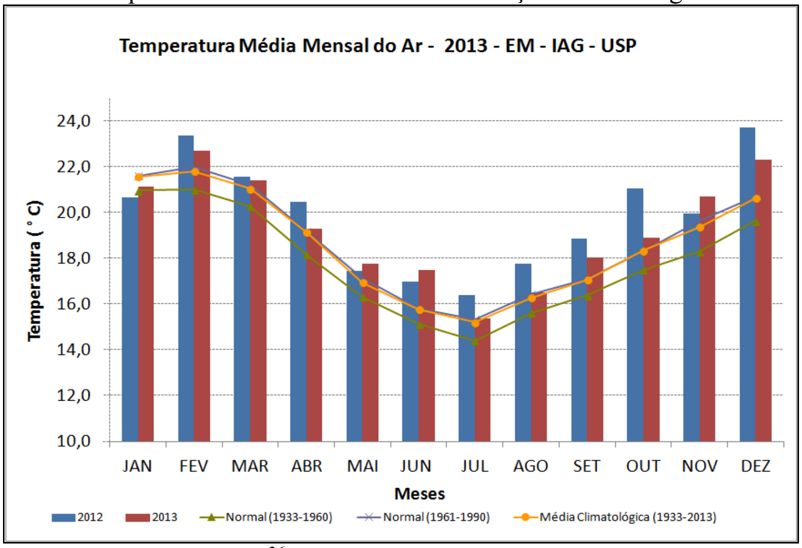


Fonte: Do autor.

É possível observar que assim como nos gráficos produzidos pelos alunos nas atividades do *crescimento das unhas* e da *neve*, que os gráficos produzidos na atividade dos *peixes* também apresentam indicativos das variáveis envolvidas: o número de peixes, indicado pelos desenhos, e o volume de água, indicado numericamente, em litros. Já com relação às diferenças, observamos o modo como esses gráficos indicam o comportamento do fenômeno a que diz respeito. Enquanto os gráficos do *crescimento das unhas* e da área do território mundial que é ocupada por *neve* apresentam o comportamento de tais fenômenos por meio de desenhos ou barras dispostos lado a lado, o comportamento do volume de água no aquário, na atividade dos *peixes*, é indicado pela sobreposição de marcas – empilhadas –, que indicam que o volume de água está aumentando, conforme aumenta o número de peixes.

Diferenças e semelhanças podem ainda ser identificadas entre modelos matemáticos produzidos com a mesma estrutura, referentes à mesma situação, mas por modeladores diferentes. Vejamos, por exemplo, o gráfico da Figura 27, que apresenta a temperatura média mensal do ar na Estação Meteorológica do IAG-USP e foi produzido por pessoas especializadas no estudo do tema.

Figura 27 – Temperatura média mensal do ar na Estação Meteorológica do IAG-USP



Fonte: Site Meteorópole[36].

Se compararmos o modelo matemático apresentado pelo site *Meteorópole* com o modelo produzido pelos alunos do 1º ano da área do território mundial que pode ser ocupada por neve ao longo do ano, algumas semelhanças podem ser identificadas: a temperatura foi analisada mês a mês; os dados foram representados por meio de barras; a representação gráfica revela a

[36] Endereço da matéria: http://meteoropole.com.br/2015/01/2014-o-ano-mais-quente-desde-1880/.

periodicidade característica da situação. Contudo, há também diferenças que se revelam: a identificação das variáveis, as linhas de tendência, a indicação das temperaturas e a exatidão da altura das barras. Estaria então o gráfico dos alunos errado? Para responder a essa pergunta, vamos olhar para a seguinte citação:

> Se me fosse mostrada, por um instante sequer, a imagem de um animal perfurado ou de dois hexágonos interpenetrando-se, e eu devesse descrevê-la a seguir, *esta* seria a descrição; se fosse para eu desenhá-la, com *certeza* eu produziria uma cópia muito falha, mas ela mostraria uma espécie e animal perfurado com uma flecha ou dois hexágonos que se interpenetram. Isto é: Eu *não* cometeria certos erros (WITTGENSTEIN, 2012, p. 266).

No mesmo sentido, podemos dizer que modelos matemáticos consistem em descrições da realidade. Seriam então esses modelos uma descrição falha desta realidade, ainda que incorpore, com certo nível de fidelidade, características essenciais do fenômeno? Nesse sentido, Wittgenstein (2012) pontua: não há certos erros.

Costuma-se dizer na literatura que os modelos matemáticos são representações da realidade (BARBOSA, 2003). Contudo, não se pode entender aqui o termo *representação* como uma concepção referencial de linguagem, na qual o significado da representação é a situação real. O termo representação deve ser entendido aqui como uma descrição, como sugere Wittgenstein (2012, § 389, grifos do autor).

> “A representação tem que se assemelhar mais ao seu objeto do que toda imagem: Pois, por mais que eu possa fazer a imagem assemelhar-se àquilo que ela deve expor, ela pode ainda ser a imagem de uma outra coisa. Mas a representação tem em si que ela é a representação *desta* coisa e de nada mais”. Poder-se-ia assim chegar a considerar a representação como um super-retrato.

“Ao invés de ‘representabilidade’ pode-se dizer aqui também: apresentabilidade em um determinado meio da apresentação” (WITTGENSTEIN, 2012, § 397).

Dessa forma, ainda que haja diferenças entre os modelos matemáticos apresentados, há semelhanças que permitem que eles sejam chamados de gráficos. Semelhanças que Wittgenstein (2012) denomina de *semelhanças de família*. Cada modelo matemático indica um *jogo de linguagem* diferente e, de acordo com Wittgenstein (2012, § 130) “os jogos de linguagem estão aí muito mais como *objetos de comparação*, os quais, por semelhança e dissemelhança, devem lançar luz nas relações de nossa linguagem”. A análise dessas situações – *crescimento das unhas* e *neve* –, portanto, revela dois diferentes *usos* dos gráficos, que ao serem desenvolvidos pelos alunos vêm cada um acrescentar mais uma fibra na trama associada à construção do conceito de “gráfico”. Isso é um exemplo da afirmação de Wittgenstein (2012) de que a extensão do conceito não deve ser fechada por um limite.

A formulação do modelo matemático, bem como todo o processo envolvido na sua produção é denominado por Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 16) de Resolução.

> Esta fase consiste na construção de um modelo matemático com a finalidade de descrever a situação, permitir a análise dos aspectos relevantes da situação, responder às perguntas formuladas sobre o problema a ser investigado na situação e até mesmo, em alguns casos, viabilizar a realização de previsões para o problema em estudo.

Contudo, para se chegar até a fase da resolução é preciso transformar o problema associado à situação em um problema matemático. Para isso deve-se matematizar a situação, escrevê-la em termos matemáticos (POLLAK, 2012).

> A busca e elaboração de uma representação matemática são mediadas por relações entre as características da situação e os conceitos, técnicas e procedimentos matemáticos adequados para representar matematicamente essas características. Daí que a segunda fase da modelagem matemática é caracterizada por “matematização”, considerando esses processos de transição de linguagens, de visualização e de uso de símbolos para realizar descrições matemáticas. Essas descrições são realizadas a partir da formulação de hipóteses, seleção de variáveis e simplificações em relação às informações e ao problema definido [...] (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012, p. 16).

Como se pode observar, a matematização, de modo geral, foi destacada e realizada por meio da orientação professor. Mas o que isso quer dizer? Quer dizer que os alunos reconheceram as grandezas envolvidas nos problemas, que dizem respeito às variáveis mencionadas por Almeida, Silva e Vertuan (2012), que eles fizeram as simplificações necessárias, estabelecendo algumas hipóteses, mas que na maioria das vezes essas ações não foram explicitadas pelos alunos, até porque eles não estavam “treinados” para isso. São ações que até então não faziam parte das atividades associadas à *forma de vida escolar*. Coube, portanto, ao professor chamar atenção para isso.

Contudo, como se pode observar nos registros dos alunos, há indicativos para afirmarmos que embora não tenham explicitado essas ações, elas foram realizadas. Na atividade do *crescimento das unhas*, por exemplo, vemos nos gráficos elementos que indicam o tempo, em meses, e a quantidade que a unha cresceu até então, em milímetros. Podemos também inferir que eles simplificaram a situação, uma vez que consideraram o crescimento das unhas de maneira uniforme, ou seja, que as unhas no período analisado não seriam cortadas e não se quebrariam, crescendo exatamente 3 milímetros por mês, no caso das unhas das mãos e 1 milímetro por mês no caso das unhas dos pés. Podemos, desse modo dizer, que esse crescimento uniforme foi adotado como hipótese para a construção de seus modelos matemáticos.

Na situação-problema referente ao *desafio do balde de gelo*, os alunos também identificaram as variáveis envolvidas, que dizem respeito ao tempo, em dias, e à quantidade de pessoas no caso do primeiro problema. Nesse caso, os alunos investigaram quantos dias levaria para todos alunos da escola participarem do desafio. As tabelas / esquemas construídos por eles indicam tais variáveis. Com relação ao segundo problema investigado, referente ao volume que seria desperdiçado com a participação deles no desafio, podemos observar em seus desenhos pessoas e baldes de água desenhados, que indicam como variáveis: quantidade de pessoas e volume de água, em litros. A investigação desses problemas requer considerar que as regras do desafio foram seguidas por todos os participantes, hipótese que simplifica a situação, uma vez que em alguns vídeos, algumas pessoas jogaram mais que um balde de água, outros não jogaram nenhum, fazendo um protesto à falta de água, pela crise hídrica que o Brasil enfrentou em 2015, e outros ainda que elaboraram diferentes mecanismos para poder participar da brincadeira, utilizando diferentes quantidades de água. Assim foi preciso desconsiderar esses casos particulares e considerar que todos os participantes utilizaram ou utilizariam o mesmo volume de água nos baldes.

Com relação à situação-problema associada à coleta de lixo, diferentes problemas foram definidos e, ainda assim, em todos os casos encontramos indícios para afirmar que os alunos identificaram as variáveis envolvidas. Quando foram questionados, por exemplo, quanto lixo era produzido diariamente na cidade, encontramos nos registros dos alunos desenhos que mostram uma determinada quantidade de caminhões, que indicam a quantidade de viagens necessárias para realizar toda a coleta de lixo, e alguns números, que indicam a capacidade desses caminhões, isto é, capacidade do caminhão, em quilos ou toneladas, e quantidade de viagens necessárias para recolher todo o lixo. Uma simplificação nessa situação-problema foi realizada ao desconsiderar a variação da quantidade de lixo que é colocada no caminhão em cada viagem – uma vez que essa variação por não ser grande, dada a quantidade de lixo que o caminhão pode recolher, pode ser considerada insignificante. Ou seja, considerou-se a hipótese de que a quantidade de lixo colocada no caminhão é sempre a mesma.

Já na situação-problema associada ao tema *neve*, uma simplificação ficou evidente: os alunos não se preocuparam com valores, isto é, não se preocuparam em indicar qual é a área mundial que pode ser ocupada por neve mês a mês, eles utilizaram apenas o comportamento, a tendência dos dados observados para a construção de seus modelos, revelando a comparação das áreas representadas pelo *gif* como ideia-chave dessa construção. Além disso, pode-se dizer que os alunos assumiram, por hipótese, que o comportamento associado à área territorial mundial ocupada por neve ao longo dos anos é periódico, o que permitiu que eles representassem a área mundial no gráfico com barras sempre da mesma altura nos mesmos meses. As grandezas associadas ao problema investigado (área territorial ocupada por neve e tempo) também foram discutidas, sendo identificadas nos gráficos produzidos.

Por fim, no que diz respeito à atividade dos *peixes*, podemos dizer que os alunos identificaram as variáveis envolvidas, uma vez que seus desenhos e anotações revelam o número de peixes (desenhos dos peixes) e o volume de água (linhas representando a água) como variáveis. A hipótese considerada por eles, nesse caso, foi que a variação do volume de água em relação à quantidade de peixes é constante, pois para cada peixe que se coloca no aquário, dois litros de água devem ser acrescentados no volume.

Vale a pena ressaltar que não é qualquer hipótese que pode ser definida para simplificar a situação, como o aluno bem entender! A hipótese deve estar bem fundamentada nos dados e informações, devem ser bem justificadas (ALMEIDA, 2010) a ponto de não causarem danos significativos – produzir valores exorbitantes – nas respostas para os problemas, uma vez que assumidas essas hipóteses, elas desempenhem um papel semelhante ao de uma regra, ou seja, são normativas, indicam que caminho seguir (BASSANEZI, 2004). “A natureza de uma hipótese em modelagem matemática tem características de uma suposição bem fundamentada [...]. O modelador, sobretudo, precisa se prover de informações sobre o fenômeno, sobre a matemática” (ALMEIDA; SOUSA; TORTOLA, 2015, p. 12), pois é isso que vai garantir que o mecanismo da hipótese funcione (WITTGENSTEIN, 2003). Analisemos, por exemplo, a hipótese de que as unhas das mãos crescem 3 milímetros por mês, a partir daí, a cada mês que passa 3 milímetros devem ser adicionados na soma referente ao crescimento das unhas. A hipótese é, portanto, um acordo feito no âmbito do *jogo de linguagem* associado ao desenvolvimento de atividades de modelagem matemática (BEAN, 2001) e, ao participarem do *jogo*, os alunos devem seguir suas regras, e, portanto, suas resoluções devem estar de acordo com elas.

Ainda nessa situação, "adicionar 3" e "adicionar 1" constituíram-se regras utilizadas pelos alunos para a construção de seus modelos. Elas descreveram aos alunos o que devia ser feito, serviram como um placa de orientação (WITTGENSTEIN, 2012, § 85). "Seguir uma regra é análogo a cumprir uma ordem. Treina-se para isto e reage-se à ordem de uma maneira determinada" (WITTGENSTEIN, 2012, § 206). Nesse sentido, as regras de um *jogo de linguagem* podem ser tomadas como padrão de correção para aqueles que o jogam. Ações que seguem para direções diferentes da indicada pela regra são consideradas equivocadas. Como nos casos em que o professor observou diferentes crescimentos nos registros dos alunos e interferiu de modo que eles percebessem que a diferença entre cada barra deveria ser a mesma, ou seja, a diferença deveria ser 3 no caso das mãos e 1 no caso dos pés, quaisquer diferenças que não essas são incoerentes, pois não estão de acordo com a regra. Assim também foram observadas as barras que constituem o gráfico da área do território mundial ocupada por *neve* e os desenhos produzidos pelos alunos nas atividades referentes ao *desafio do balde de gelo* (relação entre quantidade de baldes e pessoas), à *coleta de lixo* (quantidade de caminhões desenhados e valor indicado para sua capacidade) e aos *peixes* (cuja regra "cinco litros de água vagos mais dois litros de água por peixe" deve ser respeitada).

Desse modo, se a regra matemática é seguida, há uma certeza que não pode ser contrariada, e, nessa perspectiva, dizemos que o sujeito age de acordo com a *forma de vida* associada à comunidade matemática, ou ainda, com um de seus *jogos de linguagem*. Pensemos, por exemplo, no caso da adição. Independentemente da quantidade de quadrinhos pintados pelos alunos ao construírem seus gráficos, 3 + 3 = 6 é sempre uma verdade matemática. Qualquer número de quadrinhos pintados diferente de seis, indica que o aluno não está em conformidade com as regras do *jogo de linguagem* associado à adição, portanto, um erro foi cometido (WRIGHT, 1980). De modo semelhante, caso as unhas com o passar de dois meses cresçam 5 milímetros ao invés de 6, esse fato não invalida a veracidade matemática da proposição 3 + 3 = 6; assim como o caso de a quantidade de lixo coletada não coincidir com a quantidade determinada pelos alunos, ou como o exemplo do feirante citado no Capítulo 3.

Há, portanto, uma certeza matemática, uma gramática que regulamenta e garante a veracidade das proposições matemáticas. Nesse sentido, afirma-se que proposições matemáticas não são proposições empíricas, mas proposições gramaticais.

> [...] na série dos números cardinais, que obedece a regra +1, a técnica foi ensinada para nós de tal maneira que 450 sucede 449. Não é uma proposição empírica que a partir de 449 nós obtemos 450 quanto nos parece que aplicamos a operação +1 à 449. Em vez disso, é uma estipulação que apenas quando o resultado é 450 nós aplicamos esta operação (WITTGENSTEIN, 1994, VI-22)[37].

> ... E esta série é definida por uma regra. Ou ainda pelo treinamento em proceder de acordo com a regra. E a proposição inexorável é que de acordo com essa regra esse número é o sucessor daquele. E esta não é uma proposição empírica. E por que não uma proposição empírica? Uma regra é certamente algo que nós seguimos (WITTGENSTEIN, 1994, VI-16)[38].

É seguindo tais regras, que os alunos usaram técnicas e procedimentos matemáticos para a produção de seus modelos e obtiveram resultados matemáticos para o problema. Há que se considerar, porém, que tal resultado deve ser interpretado levando-se em conta a situação-problema original e é desse modo que se dá a aceitação ou rejeição do modelo matemático, ou seja, a validação (BASSANEZI, 2015), pois caso o modelo matemático não forneça resultados satisfatórios para o problema, significa que a matemática utilizada não descreve ou não está de acordo com o comportamento conjecturado para o fenômeno em investigação, o que indica que um novo investimento matemático deve ser realizado.

A interpretação de resultados e validação é a última fase de uma atividade de modelagem matemática, conforme explicam Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 16).

> A interpretação dos resultados indicados pelo modelo implica a análise de uma resposta para o problema. A análise da resposta constitui um processo avaliativo realizado pelos envolvidos na atividade e implica uma validação da representação matemática associada ao problema, considerando tanto os procedimentos matemáticos quanto a adequação da representação para a situação. Essa fase visa, para além da capacidade de construir e aplicar modelos, ao desenvolvimento, nos alunos, da capacidade de avaliar esse processo de construção de modelos e os diferentes contextos de suas aplicações.

---

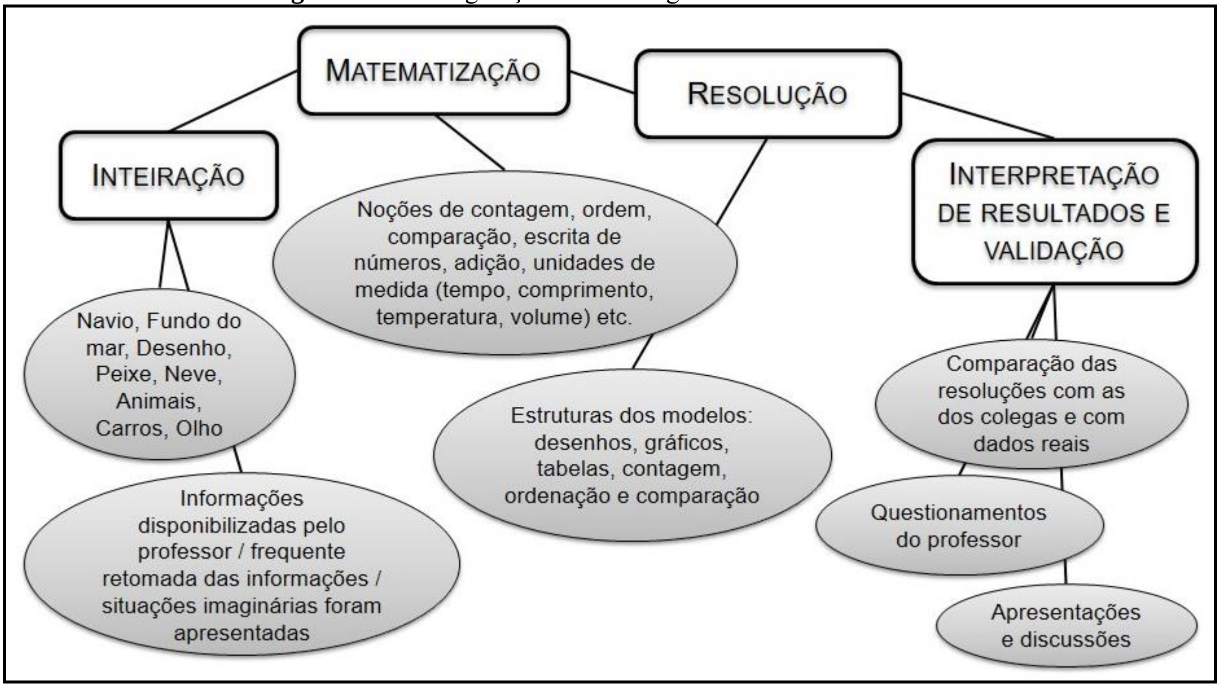
[37] Tradução de: Now someone says that in the series of cardinal numbers that obeys the rule +1, the technique of which was taught to us in such-and-such a way, 450 succeeds 449. That is not the empirical proposition that we come from 449 to 450 when it strikes us that we have applied the operation +1 to 449. Rather is it a stipulation that only when the result is 450 have we applied this operation.

[38] Tradução de: ...And this series is difined by a rule. Or again by the training in proceeding according to the rule. And the inexorable proposition is that according to this rule this number is the successor of this one. And this proposition is not an empirical one. But why not na empirical one? A rule is surely something that we go by.

Nessa fase discussões sobre o desenvolvimento da atividade foram realizadas, de modo que os alunos pudessem descrever seus encaminhamentos e apresentar seus resultados. Essa descrição se deu a partir de questionamentos do professor, uma vez que para os alunos apresentar os trabalhos consistia em mostrar suas produções aos colegas. Para que os conteúdos fossem sistematizados uma discussão com toda a turma foi engendrada pelo professor, durante a qual os alunos foram convidados a ir até o quadro e ajudá-lo na construção de um modelo. A partir disso, sistematizações foram realizadas, quanto às adições que fundamentaram a construção dos gráficos nas atividades a respeito *do crescimento das unhas* e do volume de água no aquário, de acordo com a quantidade de *peixes*, a construção de esquemas e tabelas na atividade do *desafio do balde de gelo* e os desenhos da atividade da *coleta de lixo*; também quanto às ordens crescente e decrescente, que orientou a produção dos modelos matemáticos na atividade da *neve*; etc. Nesse momento discussões a respeito do procedimento da modelagem matemática foram também realizadas, como a necessidade de prestar sempre atenção à grandeza a qual os valores anotados se referem.

A Figura 28 esquematiza a configuração de modelagem matemática do 1º ano, organizando-as de acordo com as fases indicadas por Almeida, Silva e Vertuan (2012), conforme discutimos.

Figura 28 – Configuração de modelagem matemática do 1º ano



Fonte: Do autor.

4.3.2 Configuração de modelagem matemática do 2º e 3º ano

A segunda configuração de modelagem diz respeito aos encaminhamentos dos alunos do 2º e 3º ano. Observamos aproximações no modo como esses encaminhamentos foram realizados pelos alunos dessas turmas e os agrupamos, desse modo, em uma categoria. É claro que há semelhanças e diferenças entre os encaminhamentos observados, assim como há também entre os encaminhamentos de ambos os anos com os demais, contudo, são os encaminhamentos dos alunos do 2º e 3º ano que mais se aproximaram. Apontamos nesta seção os encaminhamentos que caracterizam a segunda configuração de modelagem matemática construída.

No caso do 2º e 3º ano os temas citados para investigação, quando questionados a respeito de seus interesses, foram: formigas, joaninhas, minhocas, pessoas, cabeça, animal, escola, tigres, televisão, aeronaves (2º ano), dor, comida, países, recordes mundiais, animais, plantas, horas, música (3º ano).

Como se pode observar o tema *animais* está presente nas indicações de ambas as séries, assim como temas associados ao corpo, como pessoas, cabeça, dor, comida. Além disso, temas como escola, televisão, horas, músicas, referem-se a temas associados a atividades cotidianas. Poderíamos dizer que estão também associados a atividades cotidianas temas como países, recordes mundiais, plantas e até mesmo animais, pois são temas que são ou foram discutidos por eles na escola. Desse modo, pode-se dizer que a escolha do tema relativa a essa configuração revela interesses em temas associados a atividades cotidianas, particularmente temas que são em alguma medida estudados no âmbito escolar.

Mais uma vez temos indícios para inferir que a escolha do tema está associada à *forma de vida* desses alunos, particularmente, à *forma de vida escolar*, pois é a partir de suas vivências, conforme discute Wittgenstein (2012), que eles constroem seu *modo de ver* e compreender o mundo. Foi no âmbito da escola que esses alunos, um pouco mais engajados na *forma de vida escolar* que os alunos do 1º ano, se envolveram com a maioria dos temas citados por eles, o que acaba por sustentar a formação de conceitos. E, de acordo com Wittgenstein (2012, § 570), "os conceitos nos conduzem às investigações. Eles são a expressão de nosso interesse, e conduzem nosso interesse". Nesse sentido, temos subsídios para alegar que a escolha do tema por esses alunos foram sim influenciadas por seus estudos escolares.

Dentre os temas citados, dois foram escolhidos pelos alunos do 2º ano para investigação: *joaninhas* e *tigres*; e um foi escolhido pelos alunos do 3º ano: *recordes mundiais*. A justificativa de ambas as turmas para o interesse nesses temas também repousou na curiosidade, no desejo em querer saber mais a seu respeito, o que decorreu do fato dos alunos afirmarem que gostam de tais animais (HERMÍNIO, 2009), corroborando o aforismo de Wittgenstein a respeito dos conceitos conduzirem nossos interesses e investigações.

As discussões com alunos desses anos parecem ter sido mais objetivas, eles compartilharam suas experiências, comentaram, questionaram etc. Poucos indícios de situações imaginárias foram identificados.

Durante as discussões a respeito do tema, as mesmas questões discutidas pelos alunos do 1º ano com relação às atividades do *crescimento das unhas*, do *desafio do balde de gelo* e da *coleta de lixo* foram também discutidas pelos alunos do 2º e do 3º ano. Já com relação às atividades do terceiro momento de familiarização com a modelagem matemática os alunos do 2º ano discutiram questões associadas aos animais, ao ciclo de vida da joaninha, à coloração de suas asas; à alimentação do tigre e o que significa ser carnívoro, mamífero etc.; já os alunos do 3º ano discutiram a respeito de diferentes recordes mundiais e, dessa forma, diferentes assuntos surgiram, como a localização geográfica e extensão territorial do oceano pacífico e do deserto do Saara, a respeito do livro dos recordes, do tamanho atual das unhas da mulher recordista apresentada na primeira atividade etc.

Diferentemente do 1º ano, tanto alunos do 2º ano, quanto alunos do 3º ano trouxeram informações a respeito dos temas escolhidos, o que indica que esses alunos compartilharam com o professor as responsabilidades associadas à fase de inteiração, como é esperado em uma atividade do terceiro momento de familiarização com a modelagem matemática (ALMEIDA; DIAS, 2004; ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012). Em ambos os casos as informações pesquisadas foram pontuais, no caso da atividade dos *recordes*, os alunos trouxeram os nomes de alguns recordistas mundiais que lhes chamaram atenção e informações a respeito de seu recorde (*A pessoa mais velha a saltar de paraquedas: Iaia, 106 anos* / *Maior oceano: Pacífico, área de 180 milhões km²*, entre outros), e no caso das atividades dos *tigres* e das *joaninhas*, os alunos trouxeram pequenos textos com algumas informações a respeito de seu organismo e de seus hábitos (por exemplo, Quadro 9). Nota-se diante disso um amadurecimento com relação às tarefas escolares e há indícios para afirmar que há um engajamento maior com relação à *forma de vida escolar*, por conta da participação em mais atividades associadas a ela, particularmente, uma atividade associada ao *jogo de linguagem* emergente do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

As discussões matemáticas observadas nessa configuração concentraram-se mais na adição e na multiplicação do que na contagem – como foi o caso do 1º ano – e na comparação e discussão de unidades de medida e suas conversões, que, por conseguinte, trouxe à tona discussões associadas aos números racionais (principalmente no 3º ano). A sistematização das regularidades observadas recebeu mais investimentos nesses anos, tanto que resultou na produção de textos explicativos descrevendo, por exemplo, como crescem as unhas ao longo dos meses, ou expressões descritivas, que desempenham o mesmo papel que os textos, mas que são escritas com um grau maior de abstração e de generalidade (Quadro 52).

Quadro 52 – Sistematização das regularidades observadas na atividade referente ao *crescimento das unhas*

As unhas dos pés crecem em mm a mesma quantidade de meses que a unha ficou sem cortar A2.6	Para as unhas dos pés Quanto Cresceu = 1X número de meses que Passou A3.23

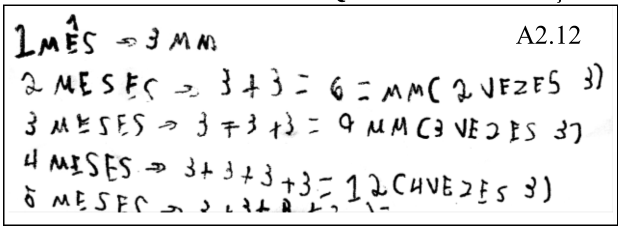
Fonte: Do autor.

Com relação às atividades a respeito do *crescimento das unhas*, *desafio do balde de gelo* e *coleta de lixo*, tanto alunos do 2º ano, quanto do 3º ano usaram, principalmente, a adição como estratégia para resolver os problemas definidos. A partir da soma de três em três e de um em um, os alunos construíram gráficos para o crescimento das unhas; esquematizaram em uma tabela a quantidade de pessoas participantes no *desafio do balde de gelo* dia a dia e descobriram quantos dias seriam necessários para todos alunos da escola participarem do desafio; encontraram a quantidade de lixo produzido na cidade diariamente e nas suas casas. Os alunos do 2º ano estimaram ainda, por meio da adição, quantos litros de água seriam gastos caso eles participassem, de fato, do *desafio* e, na atividade dos *tigres*, somando de dez em dez, efetuaram divisões para estipular quantos tigres poderiam ser alimentados com uma determinada presa (Figura 10) – explorando ainda questões associadas ao sistema numérico decimal.

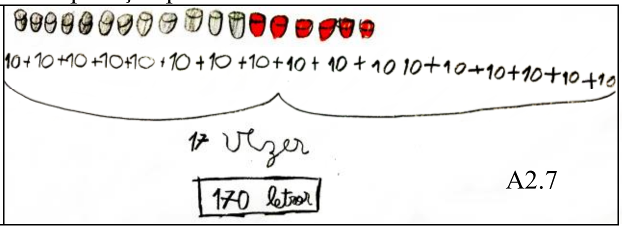
Essas adições serviram como ponto de partida para a introdução da multiplicação (a partir da ideia de adição de parcelas iguais) no 2º ano; e para a exploração da multiplicação no 3º ano.

A introdução do termo *vezes* e a sistematização da adição em parcelas iguais no 2º ano ocorreram, particularmente nas atividades do *crescimento das unhas* e do *desafio do balde de gelo*, nas quais os alunos perceberam que a quantidade de vezes que o número 3 era somado, por exemplo, no caso das unhas das mãos, correspondia à quantidade de meses considerada; e que a quantidade de vezes que eles deveriam somar o volume de água de um balde, para estimar o desperdício, era equivalente à quantidade de pessoas participantes do desafio, como mostra o Quadro 53.

Quadro 53 – Introdução da multiplicação para o 2º ano



A2.12



A2.7

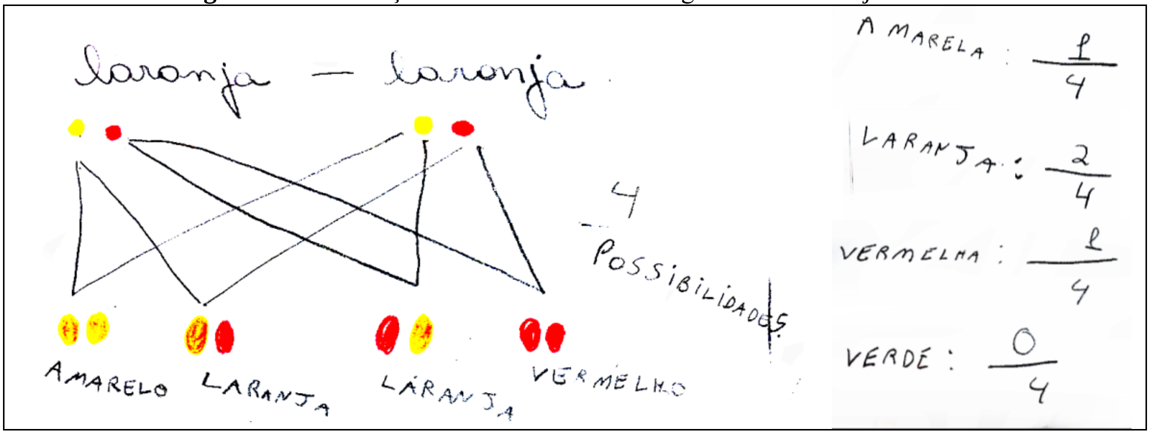
Fonte: Do autor.

Já no 3º ano, os alunos conseguiram obter resultados utilizando a multiplicação. Na atividade do *crescimento das unhas*, eles multiplicaram o quanto a unha cresce por mês pela quantidade de meses; na atividade do *desafio do balde de gelo*, eles multiplicaram a quantidade de participantes de um dia pela quantidade de pessoas que cada participante convidou; e na atividade da *coleta de lixo*, os alunos multiplicaram a capacidade de um caminhão pela quantidade de viagens que ele dá para coletar todo o lixo em um dia, e a quantidade de lixo produzido por pessoa pela quantidade de pessoas de sua casa.

Os alunos de ambos os anos discutiram ainda nessas atividades diferenças entre os tipos de gráficos produzidos (gráficos pictóricos e gráficos de barras), o comportamento das situações (crescente, parece uma escada, uma rampa), a ordem dos números (unidade, dezena e centena de milhar) etc.

Com relação à atividade das *joaninhas*, os alunos discutiram questões associadas à probabilidade. Claro que esses termos não foram utilizados, contudo, os conceitos de eventos possíveis e eventos favoráveis foram discutidos, a partir dos quais os alunos determinaram as chances das asas de uma joaninha filhote ser de determinada cor, sabendo-se a cor das asas dos pais (Figura 29).

Figura 29 – Resolução da atividade de modelagem com o tema *joaninhas*



Fonte: Do autor.

Já no que diz respeito às discussões engendradas no 3º ano, na atividade dos *recordes*, elas dizem respeito basicamente à inserção dos alunos em *jogos de linguagem* associados à atividade de *medir*, já que nas outras atividades de modelagem matemática desenvolvidas com eles observamos que usos associados às atividades de *medir* emergiram. Nesse contexto surgiram discussões a respeito de como medir e que instrumentos poderiam ser utilizados para medir determinadas coisas (*metro, trena, régua, fita métrica* foram instrumentos indicados pelos alunos), as correspondências e conversões entre as unidades de medida (de *tempo*: anos, meses, semanas, dias; de *comprimento*: metro, centímetros, milímetros; de *massa*: quilos, toneladas), a comparação de medidas (*qual é menor: 1,7 ou 1,9?*), entre outras.

Com relação às discussões a respeito de outras disciplinas, podemos apontar a escrita, a localização geográfica, diferença entre mais magro e mais leve, a discussão de cores para representar algo, por exemplo vermelho para calor, combinação de cores (*a partir da mistura do amarelo e vermelho, por exemplo, obtém-se a cor laranja*), como descartar o lixo corretamente (por exemplo: *embalar bem os vidros em papelão ou garrafas pet, para não provocar cortes nos garis; pendurar as sacolas de lixo no alto para não serem atacadas por gatos ou cães, mas não amarrá-las! etc.*), cuidados com a higiene do corpo, ciclo de vida e características de determinados animais (*joaninha*, *tigres*), entre outras.

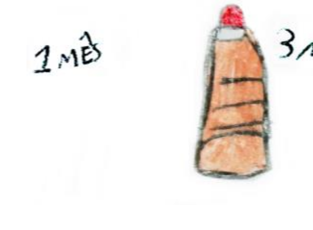
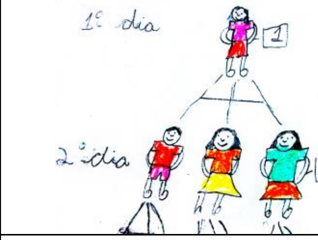
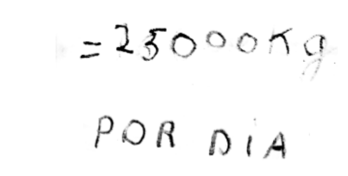
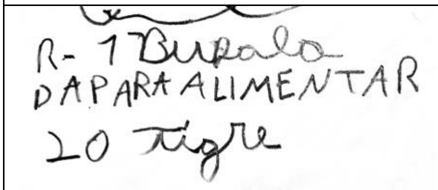
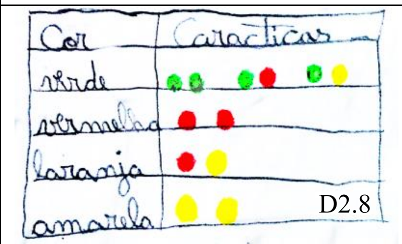
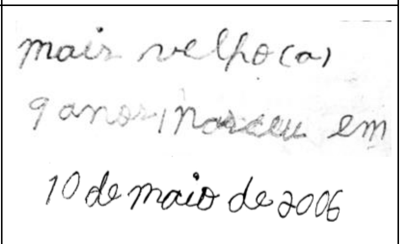
Durante essas discussões os alunos tiveram que formular problemas, particularmente para as atividades do terceiro momento de familiarização com a modelagem. Novamente nos deparamos com dificuldades em formular questões. Os alunos queriam investigar questões pontuais, questões cujas respostas estavam indicadas nos textos pesquisados por eles ou que eles já sabiam como proceder para encontrar as respostas (os alunos do 3º ano, por exemplo, queriam investigar novos recordes, ou um recorde específico). Nesse contexto emergiu uma característica que não apareceu na primeira configuração: a discussão sobre a diferença entre *informações* e *problema*. Essa discussão não apareceu durante as primeiras atividades desenvolvidas com os alunos, uma vez que os problemas foram definidos pelo professor, contudo, a partir da atividade da *coleta de lixo*, na qual o professor deu mais liberdade para os alunos ajudarem na definição do problema para investigação, essa confusão teve que ser esclarecida, particularmente nas atividades de terceiro momento em que eles eram os responsáveis por essa definição. Certamente essa é uma característica que deve ser destacada nessa configuração, pois definir problema é uma atividade que, de modo geral, é realizada exclusivamente pelos professores. Desse modo, formular problemas, é uma atividade que destoa da *forma de vida escolar* à qual estão engajados, mas que faz parte do *jogo de linguagem* que se constitui a partir do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

A definição do problema encaminha os alunos para a fase da matematização, que contempla discussões acerca da formulação de hipóteses e simplificação da situação e das variáveis envolvidas. No caso das situações-problema propostas pelo professor, as mesmas hipóteses foram assumidas para o desenvolvimento das atividades, contudo, nesses anos escolares os alunos ainda que não as registrassem sem a intervenção do professor, começaram a identificar a necessidade de algumas delas, como por exemplo na atividade do *crescimento das unhas*, cuja hipótese que definiu que eles considerariam *que as unhas não seriam cortadas e nem se quebrariam* partiu da observação de um aluno: *Se a gente não cortar as unhas elas podem ficar grandes, mas se cortar aí elas não podem*. Ainda assim, a intervenção do professor para chamar atenção para as hipóteses que precisam ser consideradas para o desenvolvimento das atividades é fundamental.

Na atividade a respeito dos *tigres*, os alunos tomaram como hipóteses que cada tigre se alimenta com a mesma quantidade de carne: 45 kg; e que a massa de sua presa será toda consumida por eles, ou seja, eles desconsideraram os ossos e outras partes não comestíveis. Já na atividade com o tema *joaninhas*, as hipóteses assumidas desconsideram as variações de cores e descarta a possibilidade de algum problema genético que pode influenciar na cor. Com relação à atividade com o tema recordes, a hipótese foi que "o maior" ou "o menor" era o recordista, conforme o aspecto. A simplificação está na limitação do universo de candidatos a concorrer ao título de recordista à turma do 3º ano.

Quanto às variáveis, os alunos conseguiram identificar e discutir as grandezas envolvidas nas situações, algumas anotações quanto às grandezas começaram a aparecer nos registros. Nesse caso o modo como as atividades de modelagem matemática foram propostas, a partir dos três momentos de familiarização, sugeridos por Almeida e Dias (2004), pode ter contribuído para que os alunos começassem a perceber que nesse tipo de atividade, essa informação deveria ser anotada. Desse modo, enquanto nas primeiras atividades, o professor precisou pedir que eles anotassem, nas últimas atividades desenvolvidas a discussão a respeito e as anotações acabaram surgindo como parte do procedimento de resolução (Quadro 54).

Quadro 54 – Variáveis identificadas pelos alunos do 2º e 3º ano nas atividades de modelagem desenvolvidas

 A2.14	 B3.10	 C2.17
Crescimento das unhas	*Desafio do balde de gelo*	*Coleta de lixo*
 D2.10	 D2.8	
Tigres	*Joaninhas*	*Recordes*

Fonte: Do autor.

Na fase de resolução, observamos indícios de um ensino com características que o aproximam do que Wittgenstein (2012) chama de "ensino ostensivo", nesse caso, referente à atividade matemática de *medir*. O primeiro deles diz respeito à quando o professor apresenta para os alunos que unidade corresponde a 1 milímetro, falas como "*Esse espaço aqui corresponde a 1 milímetro*", "*Como chamamos isso aqui?*", acompanhadas do gesto de apontar, denominar e repetir caracterizam o ensino ostensivo. Nesse contexto, algumas conversões foram discutidas, indicando que 1 metro corresponde a 100 centímetros e que 1 centímetro é divido em 10 milímetros. Mostrar essas medidas na fita métrica foi a estratégia utilizada pelo professor para apresentar essas convenções matemáticas aos alunos. Essa atitude também fornece indicativos de um ensino ostensivo, pois tais relações são estabelecidas como verdades no âmbito da matemática. Assim não há espaço para dúvidas quando se discute a correspondência de 1 metro a 100 centímetros ou a 1000 milímetros; são certezas matemáticas, e como tal "estão fora de questão" e nem se pode imaginar algo diferente (GOTTSCHALK, 2014, p. 39)[39].

Poderíamos diante disso perguntar, não há, portanto, espaço para dúvidas quanto a uma medida? Ora, 1 metro é sempre 1 metro! Na verdade, não é bem assim,

> de *uma* coisa não se pode afirmar que tenha 1 m de comprimento nem que não tenha 1 m de comprimento: do metro-padrão de Paris[40]. – Com isto não estamos atribuindo a este uma propriedade estranha, mas apenas caracterizamos o seu papel peculiar no jogo de medir com o metro (WITTGENSTEIN, 2012, § 50).

Esse padrão, como argumenta Wittgenstein (2012) é um instrumento da linguagem que fundamenta nossas afirmações com relação ao *jogo de linguagem de medir*. Trata-se, portanto, de uma convenção, de um acordo que foi firmado no âmbito de uma comunidade, a comunidade matemática, e funciona como uma regra que deve ser seguida por todos envolvidos no *jogo de linguagem de medir*. Assim é com todas as linguagens, todas estão fundadas em acordos (WITTGENSTEIN, 2012), sejam esses acordos referentes à denominação ou à definição de regras e seus usos. É com base nesses acordos e correções que o professor deve sistematizar os conteúdos matemáticos emergentes nas atividades, sejam eles parte da resolução ou da compreensão do problema.

No caso da atividade *crescimento das unhas*, em determinado momento os alunos foram questionados sobre quais instrumentos podem ser utilizados para medir comprimentos. Um aluno que não lembrou o nome do instrumento respondeu: "*Tipo uma corda com números, sem ser de ferro*" referindo-se à fita métrica. O aluno, embora não tenha lembrado o nome do instrumento, indicou-o a partir de seu uso e, nesse caso, a descrição substituiu a denominação.

Quando o professor mostra para os alunos qual distância corresponde a 6 metros, por exemplo, só se pode afirmar que *esta* distância tem seis metros pois corresponde a seis vezes o tamanho do metro-padrão, pois é esta a instrução que foi firmada para esse *jogo de linguagem*. Se muda a instrução, o mesmo ensino ostensivo teria operado uma compreensão diferente (WITTGENSTEIN, 2012).

---

[39] Tradução de: those are certainties which are beyond question and one cannot imagine their contrary either.

[40] Metro-padrão de Paris: Com a intenção eliminar as imprecisões e divergências nas medições, foi convencionado um sistema internacional de medidas denominado sistema métrico, que tem como padrão de medida o metro. O metro foi definido originalmente como a décima milionésima parte da distância do Pólo Norte ao Equador, no meridiano que passa por Paris. Essa medida foi representada por uma barra de platina denominada metro-padrão.

Quando o professor explicou aos alunos que para medir o comprimento de algo deve-se posicionar a régua no ponto zero em uma das extremidades do objeto e a outra extremidade indicará na régua qual é seu comprimento, o que ele fez caracteriza-se como um ensino ostensivo: "*Daqui até aqui são 4 centímetros*", "*Do zero até o três são 3 milímetros*", o ensino de uma regra. Como sinalizou Wittgenstein, essas atitudes constituem uma preparação para o uso da linguagem, para agir de acordo com o *jogo de linguagem de medir*.

A regra, segundo Wittgenstein (2012, § 54), "pode ser um recurso de instrução no jogo. Ela é transmitida ao aprendiz e sua aplicação é treinada. – Ou: é um instrumento do próprio jogo".

Desta forma são construídas as estruturas matemáticas chamadas de modelos matemáticos, seguindo regras, em acordo com o *jogo de linguagem da matemática*, uma vez que essas estruturas, como pontuaram Doerr e English (2003), consistem em um "sistema de elementos, operações, relações, e regras". Nesse sentido, desenvolver uma atividade de modelagem requer do modelador a inserção em *jogos de linguagem* associados à matemática.

Assim, cabe ao professor dar a instrução aos alunos e oportunizar o treinamento colocando-os em contato com diferentes *jogos de linguagem*, pois de acordo com Wittgenstein (2012), é por meio da ampliação dos usos de uma linguagem primitiva, de um ensino ostensivo, à novos usos em diferentes contextos que se ensina uma linguagem.

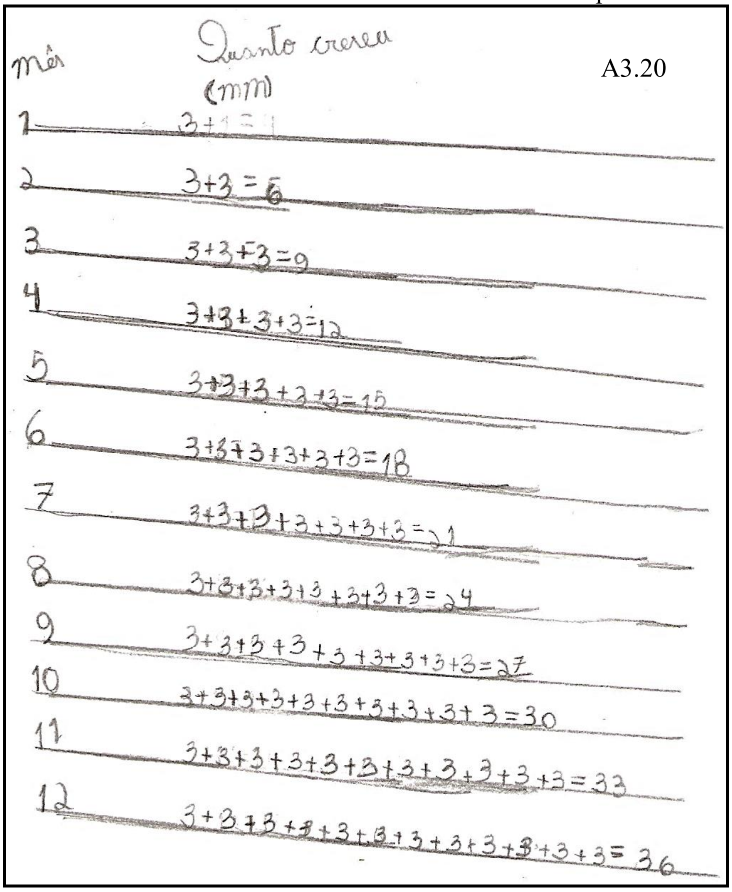
Quando os alunos desenvolveram as atividades de modelagem matemática eles fizeram diferentes medições, em diferentes contextos, portanto, tiveram contato com diferentes *jogos de linguagem*, diferentes usos e, desta forma, ampliaram seus conhecimentos com relação ao conceito de medir – e com "medir" não referimo-nos apenas à palavra, mas também às atividades com as quais está entrelaçada. Ou seja, enquanto *medir* na atividade do *crescimento das unhas* estava associada a uma medida de comprimento, para a qual foi necessário o uso de régua, trena ou fita métrica, na atividade do *desafio do balde de gelo* os alunos trabalharam com medidas de volume, para as quais utilizaram baldes que indicaram a quantidade de litros disponíveis. Na atividade da *coleta de lixo*, por sua vez, outro tipo de medida surgiu, a medida de massa, que se deu em quilos e toneladas. Essa unidade de medida de massa foi, ainda, utilizada pelos alunos do 2º ano na atividade dos *tigres* e pelos alunos do 3º ano na atividade dos *recordes mundiais*, atividade que oportunizou aos alunos trabalharem com diferentes unidades de medida e diferentes maneiras de medir: altura de uma pessoa, comprimento do cabelo, idade, peso etc. O desenvolvimento dessas atividades de modelagem, portanto, contribuiu para que os alunos jogassem diferentes *jogos de linguagem* associados à atividade de *medir* e, desse modo, contribuiu para a formação desse conceito.

Outro conceito cujas atividades proporcionaram a participação dos alunos em diferentes jogos de linguagem foi a *adição*. Na atividade com o tema *crescimento das unhas*, os alunos usaram estruturas matemáticas fundamentadas no *jogo de linguagem de adicionar*. A cada mês a unha cresce 3 mm, ou seja, cada mês que passa adiciona-se 3 mm ao comprimento das unhas. A partir dessa ideia, gráficos foram produzidos, pictóricos (nesse caso usando uma padronização das medidas) e de barras; textos explicativos (Quadro 22); e expressões descritivas (Quadro 23). Foi também produzida com o auxílio do professor uma sequência de adições, na tentativa de elucidar a regularidade presente na situação. Esse *jogo de linguagem* explorou a ideia de *acrescentar* envolvida na adição. Já na atividade do *desafio do balde de gelo*, os alunos também usaram a adição, a partir da ideia de *acrescentar*, no momento em que consideraram que a quantidade de novas pessoas no desafio deve ser acrescentada à quantidade de pessoas que já participaram. Essa atividade, contudo, permitiu que os alunos fizessem ainda um uso diferente da adição, a partir da ideia de *juntar*, utilizada para determinar o total de água desperdiçada somando-se o volume de cada balde de água, assim como na atividade da *coleta de lixo*, na qual os alunos juntaram a quantidade de lixo coletada em cada viagem dada pelos caminhões.

A adição foi um conceito bem explorado nas atividades desenvolvidas pelos alunos do 2º e do 3º ano, particularmente, pelo 2º ano, cujos alunos ainda não conheciam a multiplicação. O desenvolvimento dessas atividades foi, assim, uma oportunidade para que esse conceito fosse abordado nessa turma, como uma necessidade emergente, conforme sugere English (2003).

No 3º ano, por sua vez, os alunos já conheciam a multiplicação, mas basearam seus modelos essencialmente em estruturas aditivas, uma vez que eles já conheciam as regras desse jogo. Já sabiam como deveriam agir. No entanto, quando os alunos discutiram a resolução do aluno A3.20 (Figura 30), uma aluna percebeu que não era necessário somar tantos 3, na atividade do *crescimento das unhas*, bastava fazer a multiplicação!

Figura 30 – Modelo matemático de um aluno do 3º ano constituído por uma estrutura aditiva



Fonte: Do autor.

Mas o que mudou para essa aluna a ponto de enxergar a multiplicação? O que ela *vê* não mudou, mas ainda assim, ela vê de fato de um modo diferente. A esta experiência Wittgenstein chama de "perceber um aspecto" (WITTGENSTEIN, 2012, p. 254). De acordo com Wittgenstein (2012) nós interpretamos as coisas e vemos como as interpretamos.

Mas o que é diferente para a aluna: a sua impressão? Sua tomada de posição? Assim como explica Wittgenstein (2012, p. 257), a aluna pode descrever a "mudança como uma percepção exatamente como se o objeto tivesse mudado bem diante dos [seus] olhos". O fato da aluna ter dito *então pode multiplicar*, indica uma nova percepção. "Pergunta significativamente por uma denominação somente quem já sabe o que fazer com ela" (WITTGENSTEIN, 2012, § 31). Nesse caso, não foi necessário o professor dizer o que a aluna deveria fazer, ela, por si só, *percebeu* que ao invés de somar tantos "3", ela poderia multiplicar 3 pela quantidade de parcelas presentes na soma.

No caso dos alunos do 2º ano, antes de ser introduzida a multiplicação, eles viam a soma de parcelas iguais, eles viam que havia 2 vezes 3 com o passar de 2 meses, 3 vezes 3 com o passar de 3 meses, 4 vezes 3 com o passar de 4 meses..., contudo, isso para eles não lhes dizia nada, eles só viam, mas não as percebiam e, portanto, não pensavam em multiplicação, enxergavam apenas adições. Mas a partir do momento que a multiplicação passa a fazer parte da vivência visual[41] dos alunos, eles percebem aquilo ou algo como multiplicação.

"A expressão da mudança de aspecto é a expressão de uma *nova* percepção, junto com a expressão da percepção inalterada" (WITTGENSTEIN, 2012, p. 257). Na mudança de aspecto, segundo Wittgenstein (2012), há um deslocamento, o que antes parecia ser uma determinação inútil, um aspecto sem significado, torna-se expressão possível da vivência.

Considerando a emergência de novos usos a partir dessa mudança de aspecto, pode-se dizer que a mudança da vivência visual sugere a inserção do sujeito em novos *jogos de linguagem*, ou em atividades associadas a um *jogo de linguagem*. O exemplo dos alunos do 2º e 3º ano fornece indícios para tal alegação, uma vez que foi a partir da percepção de um novo aspecto daquela estrutura matemática, que os alunos inseriram-se, em certa medida, no *jogo de linguagem de multiplicar*. "Só vamos dizer que ele lhe ensina o uso se o lugar já estiver preparado. E não está preparado aqui pelo fato de que a pessoa, a quem damos a explicação, já saiba as regras, mas porque, num outro sentido, ela já domina um jogo" (WITTGENSTEIN, 2012, § 31) – no caso eles já dominavam o jogo de *adicionar*.

Foi com base nesses *jogos de linguagem*, de medir, de adicionar e de multiplicar que os alunos formularam seus modelos matemáticos. Deste modo, modelos aditivos (que tiveram a soma como base estrutural), modelos multiplicativos (que tiveram a multiplicação como base de sua estrutura), gráficos (pictóricos e de barras), tabulares, textuais e descritivos (uma descrição textual mas com certo nível de abstração e generalização) foram produzidos.

Embora com menos frequência os gráficos pictóricos produzidos a partir de desenhos sem um padrão nas medidas apareceram ainda em alguns registros dos alunos. A estrutura mais utilizada na produção dos modelos foi a estrutura aditiva. Como se pode observar no Quadro 37, os alunos do 2º ano, além dos materiais fornecidos a todos os alunos (folhas de sulfite e papel quadriculado) usaram também como material auxiliar o material dourado. O material ajudou os alunos tanto na contagem quanto na adição, bem como na construção de gráficos.

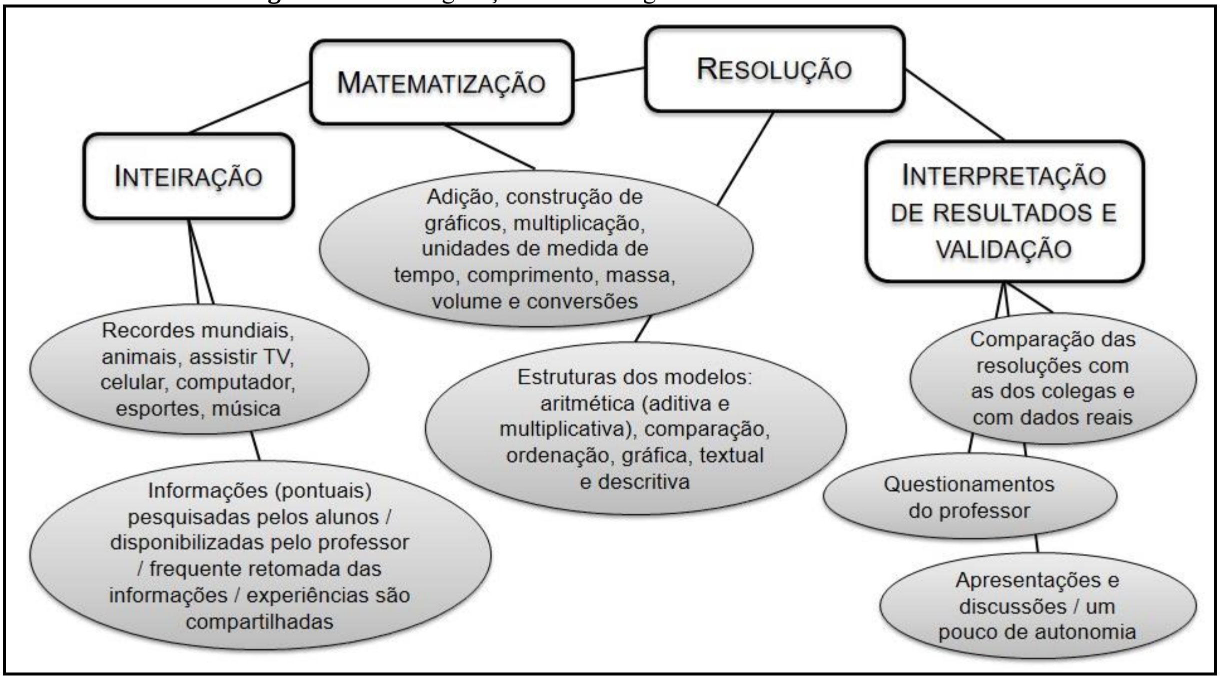
[41] Wittgenstein (2012) usa o termo vivência visual para se referir ao modo como vemos, entendemos e pensamos sobre determinadas coisas. Desse modo, o que se pensa sobre algo, muda assim que uma mudança de aspecto é percebida, assim como muda a vivência visual.

Os modelos matemáticos produzidos foram apresentados aos colegas, na fase de interpretação dos resultados e validação, observamos ainda uma necessidade de ajuda para comunicar matematicamente os resultados e os encaminhamentos, desse modo, a socialização foi fundamentada também, nessa configuração, por questionamentos do professor. Nessa configuração, contudo, alguns aspectos foram indicados pelos alunos, enquanto que na primeira a apresentação dos encaminhamentos resumiu-se em desenhar. Isso denota alunos um pouco mais autônomos e familiarizados com o *jogo* ou os *jogos de linguagem* associados à matemática e sua linguagem – os *jogos*, no plural, pois Wittgenstein (2012) refere-se a diferentes *jogos de linguagem* associados à matemática, ou seja, que constituem essa forma de vida, por exemplo, os jogos de somar, multiplicar, medir etc.).

Os modelos foram validados por meio de discussões, os alunos compararam seus modelos matemáticos com os dos colegas e com os dados reais e foram avaliados conforme o uso da matemática, e a adequação das respostas à situação-problema. A sistematização dos conteúdos que se deu ao longo da atividade, durante as discussões, foi retomada nesse momento com toda a turma, sendo utilizado o quadro para essa socialização.

A Figura 31 sumariza os encaminhamentos dos alunos referentes à configuração de modelagem matemática do 2º e 3º ano.

Figura 31 – Configuração de modelagem matemática do 2º e 3º ano



Fonte: Do autor.

4.3.3 Configuração de modelagem matemática do 4º e 5º ano

A terceira configuração constitui-se dos encaminhamentos dos alunos do 4º e do 5º ano para as atividades de modelagem matemática desenvolvidas. Da mesma forma que identificamos aproximações entre os encaminhamentos dos alunos do 2º e do 3º ano, identificamos aproximações entre os encaminhamentos dos alunos do 4º e do 5º ano.

No que diz respeito à fase de inteiração, três temas foram escolhidos pelo 4º ano (sono, animais em extinção e evolução do homem) e quatro temas foram escolhidos pelo 5º ano (futebol, animais, plantas e cabelo). Diferentemente das turmas das outras configurações, os alunos estudaram todos os temas que indicaram. Observamos novamente a escolha do tema animais, tanto pelo 4º como pelo 5º ano, contudo, os enfoques dados aos temas diferem-se das outras configurações, esses alunos parecem ter incorporado na sua escolha certa "preocupação", como por exemplo é o caso dos animais em extinção. Temas associados a atividades cotidianas foram apontados, como sono, futebol, cabelo. E outros temas por conta de curiosidades por parte dos alunos, que despertaram neles o interesse em querer saber mais a respeito. Esses aspectos: atividades cotidianas, curiosidade sobre coisas que lhes chamam atenção e preocupação, revelam-se como potenciais temas para investigação nessa categoria[42].

Assim como na configuração anterior, alguns alunos trouxeram informações para as aulas. As informações diferentemente das trazidas pelo alunos do 2º e 3º ano, foram mais extensas e, por conseguinte, mais informações foram apresentadas a respeito de um mesmo tema. Essas informações, em geral, consistiram em definições, histórias e/ou curiosidades associadas ao tema. Algumas informações complementares foram também disponibilizadas aos alunos pelo professor. Além disso, houve grupos, como o caso do grupo com o tema *animais de estimação*, em que nenhum integrante trouxe informações. A busca realizada pelo professor supriu a falta de informações desse grupo.

Os alunos desses anos, em geral, são mais fluentes na leitura e na interpretação de informações, assim, a familiarização com o tema foi uma ação que eles realizam de forma

[42] Esses aspectos podem também ser identificados em minha pesquisa de mestrado (TORTOLA, 2012), na qual alunos de um 4º ano escolheram como temas para atividades de modelagem: O câmbio entre as moedas dólar e real, Água, que posteriormente focou em caixas d'água, e custos com a higienização com flúor.

autônoma. Isso não significa que eles não precisaram de ajuda para a seleção das informações e formulação dos problemas. Como eles trouxeram muitas informações, o professor orientou que aspectos mais pontuais deveriam ser levados em consideração, algo que se constituísse um problema ou que os interessasse.

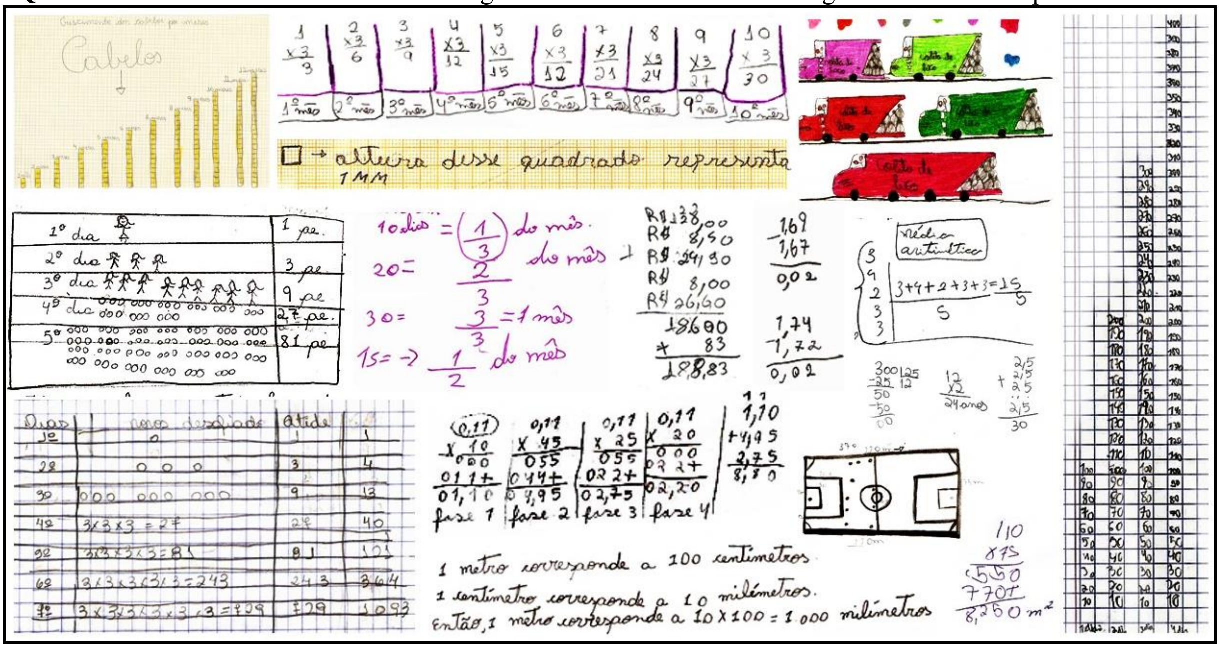
Inicialmente, problemas mais parecidos com exercícios foram formulados, questões cujas respostas podiam ser identificadas nos textos das informações. Isso denota fortes influências da *forma de vida* escolar, eles jogam conforme o *jogo*, conforme as regras (WITTGENSTEIN, 2012) são dessa maneira os problemas e exercícios que frequentemente realizam: as respostas estão no texto, ou, os dados necessários estão no enunciado do problema (CENTURIÓN; SCALA; RODRIGUES, 2011). Essa é a *vivência visual* que os alunos têm com relação a atividades matemáticas e das disciplinas em geral, é desse modo que eles entendem as atividades escolares. Nesse contexto, a retomada dos problemas das outras atividades de modelagem matemática desenvolvidas por eles ajudou na elaboração do problema, junto com as discussões realizadas.

A formulação do problema apresentou um caráter diferente que nas outras configurações, observou-se certa preocupação dos alunos com relação aos temas escolhidos (*como crescem meus cabelos? Eu gosto muito de dormir... eu durmo muito pouco, a gente tem que cuidar das plantas, tem muitos animais entrando em extinção, quanto que gasta para criar um animal de estimação etc.*), nesse sentido, os problemas foram por eles elaborados e/ou identificados.

As discussões a respeito do tema focaram em informações que eles tinham, disponibilizadas pelo professor ou encontradas por eles, e no compartilhamento de experiências com relação aos temas, eles contaram várias histórias relacionadas ao tema, como no caso da atividade dos *animais de estimação*, contando casos com seus animais, o que eles compravam para seus animais e quanto eles achavam que era gasto com eles; na atividade com o tema *desafio do balde de gelo*, na qual alguns alunos afirmaram ter participado, ou assistido vídeos, e contaram a respeito, na atividade com o tema *evolução dos homens* eles alertaram uns aos outros de que o ser humano não cresce para sempre, na atividade a respeito do *futebol* eles discutiram o formato do campo, na atividade da *coleta de lixo* eles relataram como é o descarte de lixo em suas casas etc. Além disso eles questionaram e comentaram mais a respeito dos temas, como foi, por exemplo, o caso das atividades do *crescimento das unhas* (*como será que ela dorme? Como será que ela come? Por que ela deixou a unha crescer* *tanto? Ela pode cortar depois de bater o recorde? Isso não são unhas, é ferro. As unhas não crescem retas? Como ela usa o celular?* etc.), e da *coleta de lixo* (*Vocês gostam de trabalhar com isso? É perigoso? Vocês já se machucaram? Que dia passa o caminhão da coleta seletiva? Tem que separar o lixo, tem que reciclar! Onde é depositado o lixo da cidade?* etc.).

As discussões matemáticas contemplaram vários conteúdos como média aritmética, escala, proporção, unidades de medida, particularmente as correspondências e conversões entre as medidas de comprimento e de tempo, sobre a infinidade dos números e do tempo, tabuadas, frações (próprias e impróprias), operações aritméticas com dinheiro, gráficos, tabelas etc. O Quadro 55 ilustra os conteúdos que emergiram durante as discussões matemáticas desencadeadas pelas atividades de modelagem desenvolvidas.

Quadro 55 – Conteúdos matemáticos emergentes nas atividades de modelagem desenvolvidas pelo 4º e 5º ano



Fonte: Do autor.

Com relação às discussões associadas a outras disciplinas podemos citar a escrita (como se escreve algumas palavras, o plural), a discussão da noção de escala (usada na construção de plantas de construções e de mapas), de características do sono (ciclo do sono e quais as funções de cada fase que compõe esse ciclo), a respeito da evolução humana (quem são nossos ancestrais, como eles eram, que habilidades foram desenvolvidas por eles), de regras e posicionamentos do futebol (onde cada jogador fica, o que ele faz), de reciclagem e descarte do lixo (como fazer, por que fazer), das regiões brasileiras (em quais regiões o Brasil é dividido, onde elas se localizam no mapa) etc.

Durante essas discussões, observamos que os alunos dessa configuração também discutiram e identificaram as hipóteses e as variáveis envolvidas. Em quase todos os registros da primeira atividade, por exemplo, temos indícios da matematização, indícios pois eles não afirmam que "*Vamos considerar que as unhas das mãos crescem 3 milímetros e as dos pés 1 milímetro*" é uma hipótese e que ela simplifica a situação, nem que "*crescimento das unhas (milímetros)*" e "*tempo (meses)*" são as variáveis envolvidas no problema. Nem mesmo na atividade com o tema *animais de estimação* em que eles atribuíram letras às grandezas para indicá-las não há essa identificação de tais registros como variáveis. Mas temos indicativos de que tais ações foram realizadas para matematizar as situações-problema: na atividade da *evolução do homem*, por exemplo, os alunos construíram tabelas que indicam a altura (em metros) e o tempo (em décadas) como grandezas envolvidas; ou na atividade *dos cabelos*, na qual as alunas indicaram que consideram a seguinte informação para a resolução do problema: *o fio cresce numa velocidade aproximada de 1/3 de milímetro por dia*, que pode ser considerada uma hipótese, já que ela indica o caminho, direciona a resolução (BASSANEZI, 2004; ALMEIDA; VERTUAN, 2011). Nesse contexto, podemos dizer que a matematização ficou mais explícita nos registros dos alunos do 4º e 5º ano, que constituem essa terceira configuração, que nos registros dos alunos que constituem as configurações anteriores, uma vez que inferimos que os alunos começaram a *perceber* essa roupagem que se dá à situação (HUSSERL, 2012), ou seja, estão começando a incorporar tais elementos em sua *vivência visual* associada à resolução de problemas, conforme argumenta Wittgenstein (2012).

Já na fase de resolução percebemos uma ampliação nos usos da linguagem por esses alunos quando comparados com as configurações anteriores. Os encaminhamentos matemáticos se deram de maneira mais autônoma e há uma variedade maior de usos da linguagem para expressar os modelos matemáticos. Uma variedade na qual podemos listar modelos aritméticos (construídos tanto a partir de uma estrutura aditiva, quanto de uma estrutura multiplicativa), gráficos (predominando os gráficos de barras sobre os gráficos pictóricos, ambos indicando o valor que representa cada quadrado pintado, ou seja, a escala), tabulares, textuais, descritivos e algébricos. Infere-se, diante disso, a participação e/ou inserção dos alunos na *forma de vida* associada à matemática, em diferentes *jogos de linguagem*.

No caso das atividades *crescimento das unhas*, *desafio do balde de gelo* e *coleta de lixo* os alunos jogaram também *jogos de linguagem* de adicionar, de multiplicar, de medir para resolver os problemas das atividades de modelagem. O que muda, então, em relação às configurações anteriores? Muda que diferentes *jogos de linguagem* associados à matemática foram jogados pelos alunos do 4º e do 5º ano, *jogos* que não foram jogados pelos alunos das configurações anteriores, como é o caso dos *jogos de linguagem* de dividir e de calcular a área, ou, o perímetro – que emergiram na atividade da *coleta de lixo*. Enquanto que nas configurações anteriores o professor teve que auxiliar os alunos no cálculo da divisão do total de lixo produzido na cidade pelo número de habitantes para saber quanto lixo é produzido por pessoa diariamente, os alunos do 4º e do 5º ano já conheciam as regras do jogo, eles sabiam dividir. Contudo, eles tiveram que lidar com novas regras, pois até o momento, eles usavam o algoritmo da divisão euclidiana para obter um quociente natural, que pertence ao conjunto numérico, em geral, mais abordado nos anos iniciais do Ensino Fundamental, o conjunto dos números naturais. E, nesse momento, o professor incentivou que eles obtivessem um quociente pertencente ao conjunto dos números racionais, com pelo menos uma casa após a vírgula, uma vez que eles conhecem e já trabalharam com esse tipo de número em outras operações, em outros *jogos de linguagem*.

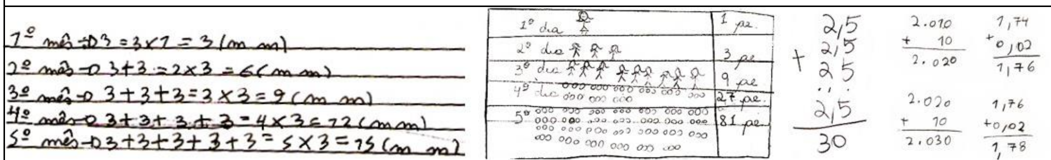
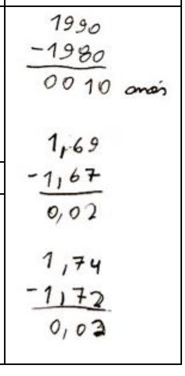
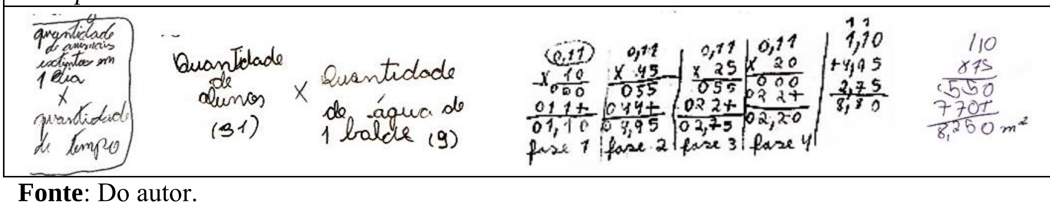
Já nas atividades desenvolvidas no terceiro momento de familiarização com a modelagem, observamos que novos usos referentes aos *jogos de linguagem* citados foram realizados e que também usos já conhecidos foram reproduzidos. Na atividade em que os alunos do 5º ano investigaram o crescimento do *cabelo*, por exemplo, os *jogos de linguagem* que surgiram – os usos da matemática – foram praticamente os mesmos que surgiram nas atividades do *crescimento das unhas* e do *desafio do balde de gelo*, assim como nas atividades que investigaram o crescimento da árvore pau-brasil (5º ano); quantos animais entrarão em extinção nos próximos anos, caso medidas não sejam tomadas; e qual será a altura média dos homens nas próximas décadas (4º ano); em que a ideia de *acrescentar* da adição e/ou a ideia de *adição de parcelas iguais* da multiplicação foram utilizadas para a construção dos modelos. Outro exemplo é o caso da atividade dos *animais de estimação* que para a construção do modelo matemático usou a ideia de *juntar* da adição, assim como alguns alunos fizeram na atividade da *coleta de lixo*.

Todavia, diferentes usos associados a esses jogos de linguagem também surgiram, assim como novos jogos de linguagem. Vale a pena destacar, por exemplo, o jogo de linguagem da subtração que surgiu também na atividade com o tema *evolução do homem* do 4º ano. Nessa atividade, para que os alunos conseguissem estimar a altura média dos homens para as próximas décadas, eles precisaram antes de mais nada observar a existência de uma tendência no comportamento do fenômeno. O meio encontrado pelos alunos para determinar essa tendência de crescimento, no caso, foi uso da subtração para o cálculo de *diferenças*. Foi por meio da subtração que os alunos observaram que os dados revelam um crescimento praticamente constante nas últimas décadas, em que a altura média do homem brasileiro aumentou aproximadamente 2 centímetros a cada dez anos.

Já nas atividades referentes aos temas *sono* (4º ano) e *futebol* (5º ano), novos usos associados ao jogo de linguagem de *multiplicar* foram identificados. Esses usos remetem, respectivamente a formação de novos conceitos: porcentagem e área; ao mesmo tempo que vem acrescentar na formação do conceito de multiplicação. Na atividade do *sono*, informações relativas à duração de cada fase do ciclo do sono foram apresentadas. Nesse sentido, os alunos tiveram que realizar alguns cálculos de porcentagem. A estratégia utilizada pelo professor para explicar aos alunos como proceder foi a conversão da porcentagem em números racionais, desse modo os alunos fizeram multiplicações com fatores racionais para determinar a duração de cada fase do ciclo do sono. Já na atividade do *futebol*, os alunos optaram por investigar dois problemas: qual a área que fica sob a responsabilidade de cada jogador no jogo de futebol, de acordo com sua posição e quantos litros de tinta serão necessários para fazer a pintura das faixas brancas que demarcam as áreas de um campo de futebol. Diferentes formas geométricas surgiram nesses cálculos e o modo como calcular a área dessas regiões foi abordado.

O Quadro 56 apresenta registros que ilustram os jogos de linguagem que identificamos nas atividades de modelagem matemática e que foram discutidos.

Quadro 56 – Exemplos de jogos de linguagem de adicionar, de subtrair e de multiplicar

Adicionar	*Subtrair*
	
Multiplicar	
	

Fonte: Do autor.

Mas por que identificar tais jogos de linguagem? Qual o papel deles no contexto das atividades de modelagem matemática? O que eles nos mostram?

No que diz respeito à primeira atividade, a respeito do *crescimento das unhas*, observamos uma modificação na vivência visual dos alunos quando eles perceberam que as adições poderiam ser substituídas pelas multiplicações (*Professor, não é mais fácil olhar na tabuada três vezes o quatro doze?*). Contudo, observamos que se trata de uma percepção diferente daquela percepção da aluna do 3º ano, pois enquanto os alunos do 3º ano estavam sendo treinados para enxergar a multiplicação, para ter essa percepção (WITTGENSTEIN, 2012) – já que o conceito de multiplicação estava em "formação" – e, desse modo, fazer parte de sua vivência visual, os alunos do 4º e do 5º ano, em geral, já haviam formado esse conceito em sua vivência visual, pelo menos no que se refere ao uso da multiplicação, como adição de parcelas iguais, como sinaliza a pergunta da aluna, que assim que percebe a possibilidade, exprime sua percepção para o professor por meio de uma exclamação.

> Ambas, a notificação e a exclamação, são a expressão de uma percepção e de uma vivência visual. Mas a exclamação o é em sentido diferente da notificação. Ela nos escapa. – Relaciona-se com vivência como o grito se relaciona com a dor.
> Mas, como ela é a descrição de uma percepção, podemos chamá-la também de expressão do pensamento. – Quem contempla um objeto não tem que pensar nele; mas quem tem a vivência visual, cuja expressão é a exclamação, este *pensa* também naquilo que vê.
> E, por esta razão, o raiar do aspecto aparece em parte como uma vivência visual, em parte como um pensamento (WITTGENSTEIN, 2012, p. 258-259).

A exclamação da aluna indica, portanto, que ela tem a multiplicação em sua vivência visual e, como argumenta Wittgenstein (2012), ela também pensa a respeito de multiplicação; diferentemente de alunos do 2º e do 3º ano, que enquanto não foram notificados pelo professor ou pela exclamação da colega que percebeu a multiplicação, eles apenas "contemplavam" as multiplicações – se considerarmos que ela está ali, na adição de parcelas iguais –, mas não pensavam ainda sobre ela – mesmo os alunos do 3º ano que já conheciam a multiplicação, mas não conseguiram identificá-la.

A mesma análise pode ser feita com os alunos do 5º ano com relação à atividade a respeito dos *animais de estimação*. Os alunos queriam determinar uma "regra", um modelo matemático, para explicar como se calculam os custos com os animais. O professor para ajudá-los os questionou com um exemplo que provavelmente era conhecido por eles: como é calculado o custo ou o gasto com uma compra? De imediato os alunos responderam que era preciso somar o preço de todos os produtos – o que sugere que eles conseguiram estabelecer relações entre a situação que estava sob investigação e a situação indicada pelo professor, conforme sugerem English (2003) e Bassanezi (2015). Diante da resposta o professor lhes orientou: *Então escrevam isso!* Os alunos ainda em dúvida com relação à produção do modelo questionaram: Mas é só isso? O professor apenas responde: não é assim que se calcula gastos? E nesse momento a possibilidade de produzir um modelo matemático cuja estrutura é um texto foi percebida pelos alunos e essa estrutura passou a fazer parte de sua *vivência visual*. Mas o que significa dizer isto? Significa que os alunos a partir desse momento, são capazes de pensar o texto como uma possibilidade de expressar suas investigações e regularidades observadas nas situações. Mesmo na disciplina de matemática!

Mas, voltando à situação da primeira atividade, a respeito do *crescimento das unhas*, podemos nos perguntar: Mas por que podemos usar a multiplicação nessa situação? Por que há uma adição de parcelas iguais? É por que depois que passam 4 meses é preciso somar 4 vezes 3 milímetros ou multiplicar 4 x 3, assim como depois que passaram 5 meses é preciso fazer 5 x 3, e assim por diante? Não poderiam assim as proposições matemáticas serem consideradas proposições empíricas? Na verdade, não é bem assim, vejamos a seguinte citação.

> A justificação da proposição 25 x 25 = 625 é, naturalmente, que se alguém é treinado de tal maneira, então sob circunstâncias normais ele obtém 625 como resultado da multiplicação de 25 por 25. Mas a proposição aritmética não afirma *isto*. Ela é por assim dizer uma proposição empírica que se consolidou em uma regra. Ela estipula que a regra é seguida apenas quando esse é o resultado da multiplicação. É, portanto, resultante da verificação pela experiência, mas agora serve com um paradigma para jugar experiência (WITTGENSTEIN, 1994, VI-23)[43].

Para Wittgenstein (1994), um dia a proposição “25 x 25 = 625”, assim como as proposições “4 x 3 = 12”, “5 x 3 = 15” e assim por diante, foram proposições empíricas, talvez ele queira se referir ao tempo em que a multiplicação ainda não era definida, e desse modo, alguém percebeu que sempre que organizava 4 grupos com 3 objetos o resultado, a partir da contagem era 12, e assim “4 x 3 = 12” consolidou-se como uma regra. E regras são normativas, indicam o caminho a seguir.

---

[43] Tradução de: The justification of the proposition 25 x 25 = 625 is, naturally, that if anyone has been trained in such-and-such a way, then under normal circumstances he gets 625 as the result of multiplying 25 by 25. But the arithmetical proposition does not assert *that*. It is so to speak an empirical proposition hardend into a rule. It stipulates that the rule has been followed only when that is the result of the multiplication. It is thus withdrawn from being checked by experience, but now serves as a paradigma for judging experience.

O autor alega também que as proposições aritméticas não afirmam que o resultado da multiplicação de 4 por 3 é 12, mas que a regra foi seguida quando 12 é o resultado da multiplicação. Por isso o autor indica que sob “circunstâncias normais” obtém-se 625 da multiplicação de 25 por 25, pois a placa de orientação, a regra, “está em ordem – se, em circunstâncias normais, ela cumpre com sua finalidade” (WITTGENSTEIN, 2012, § 87).

“Alguém escreve uma sequência de números. Finalmente, eu digo: ‘Agora eu entendi; Eu devo sempre...’ E isso *é* a expressão da regra. *Mas*, apenas dentro de uma linguagem!” (WITTGENSTEIN, 1994, VI-27)[44]. No mesmo sentido Wittgenstein (2012, § 6) escreve:

> “Unindo a barra com a alavanca, aciono o freio”. – Sim, suposto todo o mecanismo restante. Só em relação com este mecanismo é ela a alavanca do freio; e desprendida de seu apoio, não é nem ao menos alavanca, antes pode ser qualquer coisa, ou nada.

Da mesma forma podemos explicar e/ou justificar os empregos da matemática nas outras atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos alunos. Só se calcula, por exemplo, a área de um retângulo multiplicando a medida da base pela medida da altura porque existe uma proposição gramatical, que funciona como regra, que a *definiu* assim. E veja, a proposição: “Área do retângulo = base × altura” não descreve o que *é* a área do retângulo, como se existisse um ente ideal em algum lugar que pudesse ser tomado como referência para ser descrito, ela, na verdade, *define* como se deve proceder para calcular a área de um retângulo. E compreender a “área do retângulo” é saber seguir a regra de utilização de tal termo (GOTTSCHALK, 2004).

“Assim, aprender o significado de uma palavra pode consistir na aquisição de uma regra, ou um conjunto de regras, que governa seu uso dentro de um ou mais jogos de linguagem” (GOTTSCHALK, 2004, p. 321). Mas será que os alunos compreenderam as regras associadas aos conceitos emergentes nas atividades de modelagem matemática? Será que seriam eles capazes de explicar a outras pessoas os modelos matemáticos produzidos?

Após a resolução das atividades, na fase de interpretação de resultados e validação, os alunos devem ter um tempo dedicado à socialização dos resultados (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012). De modo geral, o professor pediu para que os alunos apresentassem o

[44] Tradução de: Someone writes up a sequence of numbers. At length I say: “Now I understand it; I must Always...” And this is the expression of a rule. But, only within a language!

procedimento utilizado no desenvolvimento das atividades e, por conseguinte, como se deu a formulação de seus modelos matemáticos. Nesse momento o professor tem a oportunidade de avaliar se as regras matemáticas foram seguidas, se os usos que eles fizeram da matemática estão de acordo com a gramática associada a essa *forma de vida*, da comunidade matemática. "A palavra 'concordância' e a palavra 'regra' são *parentes*, são primas. Se ensino alguém o uso de uma, com isso ele aprende também o uso da outra" (WITTGENSTEIN, 2012, § 224). Isto é, estar de acordo com a *forma de vida* associada à matemática implica seguir as regras convencionadas no âmbito da comunidade matemática. Trata-se, portanto, de um momento propício para a sistematização dos conteúdos.

No caso da atividade a respeito do *crescimento das unhas*, os alunos conjecturaram uma associação entre as multiplicações realizadas para descrever o crescimento das unhas e a tabuada. Nesse caso, podemos perguntar como esses alunos poderiam explicar a outros, por exemplo aos alunos do 3º e do 2º ano, que essa sequência de multiplicações realizada por eles para resolver a atividade pode ser associada à tabuada?

Essa situação assemelha-se à descrita na citação:

> Alguém aprendeu a regra de contar no sistema decimal. Agora ele tem o prazer de escrever abaixo número após número na série de números "naturais".
> Ou ele segue a regra no jogo de linguagem "Escreva abaixo o sucessor do número .... na série ...." – Como eu posso explicar esse jogo de linguagem a alguém? Bem, Eu posso descrever um exemplo (ou exemplos). – Em razão de ver se ele entendeu o jogo de linguagem, eu posso fazer com que ele obtenha outros exemplos (WITTGENSTEIN, 1994, VI-25)[45].

Da mesma forma, os alunos do 4º e do 5º ano podem explicar que a sequência de multiplicações pode ser associada supondo que a unha cresce um outro comprimento mensalmente. A situação-problema estudada funcionaria como um exemplo para os alunos e os questionamentos: e se as unhas crescessem 4 mm? e se fosse 5 mm? E 6 mm?... poderiam evidenciar a regularidade presente na situação. Caso eles sejam capazes de fazer isso – tanto os alunos do 4º e do 5º ano, quanto os alunos do 2º e do 3º ano – teremos indícios para inferir que eles conseguiram abstrair o modelo matemático produzido e que, provavelmente, são

[45] Tradução de: Someone has learned the rule of couting in the decimal system. Now he takes pleasure in writing down number after number in the "natural" number series. Or he follows the rule in the language-game "Write down the successor of the number .... in the series ...." – How can I explain this language-game to anyone? Well, I can describe na example (or examples). – In order to see whether he has understood the language-game, I may make him work out examples.

capazes de aplicá-lo em outras situações, como sugerem English (2003) e Bassanezi (2015). Assim fez o professor com os alunos do 4º e do 5º ano, ele fez as perguntas citadas e os alunos as responderam com exemplos, o que indica, de acordo com Wittgenstein (2012), que eles entenderam o *jogo de linguagem* que rege o uso da multiplicação nessa situação, com essas características – de adicionar parcelas iguais.

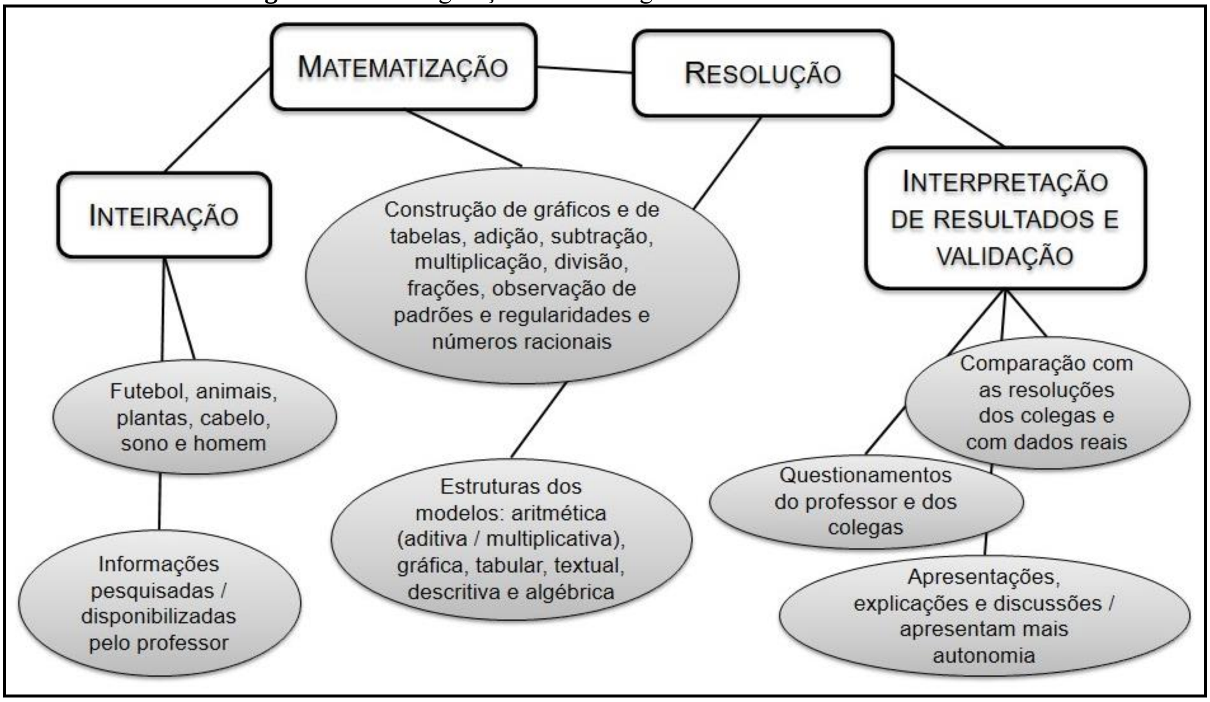
Da mesma forma, poderíamos apontar essa abstração e generalização do modelo – de tal modo que possa ser aplicado ou identificado em outras situações –, na atividade a respeito dos *animais de estimação*, uma vez que os alunos mostraram ter entendido que para calcular qualquer custo basta somar os valores dos produtos que o constitui, como indica o modelo textual produzido por eles (Quadro 18). Essa situação é, ainda, análoga à do *desafio do balde de gelo*, na qual para cada pessoa participante do desafio os alunos associaram um balde de água e juntaram os volumes dos baldes para estimar o total de água desperdiçado.

Essa generalização do modelo matemático pode também ser observada quando olhamos para o *jogo de linguagem* de adicionar, envolvendo tanto a ideia de acrescentar, que emergiu nas atividades associadas aos temas *crescimento das unhas*, *desafio do balde de gelo*, *cabelos*, *plantas, animais em extinção* e *evolução do homem*; quanto a ideia de juntar, que surgiu nas atividades com temas *desafio do balde de gelo*, *coleta de lixo* e *animais de estimação*.

Na fase interpretação de resultados e validação, os alunos de ambas as turmas apresentaram seus encaminhamentos para os colegas, novamente observamos mais autonomia, não apenas em comparação com os alunos dos outros anos, mas também com relação às primeiras atividades desenvolvidas, como sinalizado por Almeida e Dias (2004). Enquanto que na atividade do *crescimento das unhas*, primeira atividade desenvolvida por ambas as turmas, os alunos apenas mostraram seus modelos e responderam questionamentos do professor, na quarta atividade, os alunos do 5º ano e do 4º ano foram até a frente da sala e tomaram a iniciativa para explicar o que fizeram.

Por fim, a Figura 32 sintetiza os encaminhamentos dos alunos referentes à configuração de modelagem matemática do 4º e 5º ano.

Figura 32 – Configuração de modelagem matemática do 4º e 5º ano



Fonte: Do autor.

4.3.4 Configuração de modelagem matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental

Com a intenção de investigar *que configurações podem assumir atividades de modelagem matemática desenvolvidas por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental*, isto é, vislumbrando compreender os caminhos, as abordagens, os encaminhamentos matemáticos adotados por alunos dos anos iniciais ao desenvolverem atividades de modelagem matemática, suas ações, suas escolhas, suas argumentações, o modo como eles lidam com a matemática e com sua linguagem e como eles entendem esse tipo de atividade e seu desenvolvimento, analisamos os encaminhamentos dos alunos de 5 turmas: 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental, para atividades de modelagem matemática, das quais três delas foram desenvolvidas com todas as turmas, e com tema proposto pelo professor, e as demais foram desenvolvidas por grupos de alunos formados em suas respectivas turmas, com temas escolhidos por eles.

As análises realizadas sobre o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática sinalizaram que há aproximações entre os encaminhamentos dos alunos, particularmente entre os encaminhamentos dos alunos do 2º e do 3º ano e entre os encaminhamentos dos alunos do 4º e do 5º ano. Há parentescos no modo como a linguagem foi utilizada por esses alunos no desenvolvimento das atividades, há, pois, *semelhanças de família*, conforme explica Wittgenstein (2012, § 67), uma vez que há entre alguns *jogos de linguagem* "uma complicada rede de semelhanças que se sobrepõem umas às outras e se entrecruzam. Semelhanças em grande e em pequena escala".

Estamos, portanto, conjecturando aqui a existência de *semelhanças de família* entre *jogos de linguagem* que se constituem a partir do fazer modelagem matemática dos anos iniciais, semelhanças que se revelaram quando olhamos para essa *forma de vida*, que envolve alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental: há *semelhanças de família* nos interesses dos alunos ao escolher o tema, na resolução e nos modelos matemáticos produzidos, nas discussões desencadeadas a partir da investigação do tema, no modo como os alunos apresentaram seus encaminhamentos e validaram seus modelos. São essas semelhanças, que discutimos nesta seção, na tentativa de elucidar características de uma configuração de modelagem matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental.

Vamos começar nossa discussão apresentando as três categorias que foram constituídas usando a análise de conteúdo, a partir dos oito indicadores emergentes dos encaminhamentos dos alunos e fundamentados pelos referenciais teóricos da modelagem matemática. Essas categorias indicam as configurações que atividades de modelagem matemática assumiram ao serem desenvolvidas pelos alunos participantes da pesquisa.

O Quadro 57, portanto, apresenta as configurações de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental emergentes no âmbito da pesquisa e traz elementos que as caracterizam.

Quadro 57 – As configurações de modelagem matemática emergentes nos anos iniciais do Ensino Fundamental

	Configuração 1	Configuração 2	Configuração 3
	1º ano	2º e 3º ano	4º e 5º ano
Definição do tema e coleta de informações	Temas associados a atividades lúdicas, a aspirações e a curiosidades. Informações foram disponibilizadas pelo professor (textos curtos com leitura em conjunto) e foram frequentemente retomadas durante a atividade	Temas associados a atividades cotidianas, particularmente, temas estudados na escola. Informações foram pesquisadas pelos alunos (pontuais), disponibilizadas pelo professor e frequentemente retomadas durante a atividade	Temas associados a atividades cotidianas, a curiosidades e a preocupações. Informações foram pesquisadas pelos alunos, disponibilizadas pelo professor e frequentemente discutidas durante a atividade
Formulação do Problema	Problema elaborado a partir das informações com a ajuda do professor. Denota curiosidade sobre algum aspecto do tema	Problema elaborado a partir das informações com a ajuda do professor. Denota curiosidade sobre algum aspecto do tema	Alguns problemas foram elaborados e outros identificados a partir das informações com a ajuda do professor. Denota curiosidade e preocupação sobre algum aspecto do tema
Discussões	Associadas ao tema da atividade, à resolução e a conteúdos do currículo, particularmente, os indicados para tal ano. Experiências são compartilhadas. Há indícios de apresentação de algumas situações fictícias e de situações que fogem do assunto	Associadas ao tema da atividade, à resolução e a conteúdos do currículo, particularmente, os indicados para tais anos. Experiências são compartilhadas. Há poucos indícios de apresentação de situações fictícias. São mais objetivas que na Configuração 1	Associadas ao tema da atividade, à resolução e a conteúdos do currículo, particularmente, os indicados para tais anos. Experiências são compartilhadas. Não há indícios de apresentação de situações fictícias. São mais objetivas que nas Configurações 1 e 2
Idealização da situação	Reconhecimento das grandezas envolvidas e discussão das hipóteses e simplificações	Reconhecimento das grandezas envolvidas e discussão das hipóteses e simplificações	Reconhecimento das grandezas envolvidas, definição das variáveis e discussões e registro das hipóteses e simplificações
Formulação do modelo matemático	Estruturas dos modelos: desenhos, gráficos, contagem, ordenação e comparação	Estruturas dos modelos: aritmética (aditiva / multiplicativa), gráfica, comparação, ordenação, textual e descritiva	Estruturas dos modelos: aritmética (aditiva / multiplicativa), gráfica, tabular, textual, descritiva e algébrica
Apresentação da resposta para o problema	Dialógica, com registros textuais envolvendo elementos da matemática utilizada na resolução	Dialógica e textual, envolvendo elementos da matemática utilizada na resolução	Textual e/ou dialógica, envolvendo elementos da matemática utilizada na resolução
Avaliação dos resultados	Comparação com as resoluções dos colegas e com dados reais, orientada por questionamentos do professor e tomando a matemática como padrão de correção	Comparação com as resoluções dos colegas e com dados reais, orientada por questionamentos do professor e tomando a matemática como padrão de correção	Comparação com as resoluções dos colegas e com dados reais, orientada por questionamentos do professor e tomando a matemática como padrão de correção
Socialização dos encaminhamentos	Apresentações (mostram os trabalhos aos colegas) e discussões a partir de questionamentos do professor. Os alunos apresentam pouca autonomia	Apresentações (expõem de modo geral o que foi feito) e discussões a partir de questionamentos do professor. Os alunos apresentam um pouco de autonomia	Apresentações e discussões de aspectos considerados por eles relevantes ou que chamaram atenção e discussões a partir de questionamentos do professor e dos colegas. Os alunos apresentam mais autonomia

Fonte: Do autor.

A análise desses indicadores revela semelhanças entre as configurações construídas e sistematizadas e fornece indícios de uma configuração de modelagem matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental, não no sentido de homogeneizar os encaminhamentos dos alunos, mas de apontar aproximações no modo como alunos dos anos iniciais desenvolvem atividades de modelagem matemática. A seguir, apresentamos essas aproximações, com base nos oito indicadores emergentes nas análises dos encaminhamentos dos alunos.

- **Definição do tema e coleta de informações**

Observarmos que os temas escolhidos pelos alunos dizem respeito a temas que lhes despertam interesse e/ou curiosidade, que eles desejam saber mais (*D1.7: daí eu fiquei curiosa*), o que corrobora as argumentações de Hermínio (2009), quanto à escolha do tema em atividades de modelagem.

Esses temas: navio, fundo do mar, desenho, peixe, neve, animais, carros, olho (configuração 1), recordes mundiais, animais, assistir TV, celular, computador, esportes, música (configuração 2) e Futebol, animais, plantas, cabelo, sono e homem (configuração 3), de modo geral, estão associados em alguma medida com a(s) realidade(s) que cerca(m) os alunos em suas atividades diárias (BEAN, 2001; BERGER; LUCKMANN, 2008; CIFUENTES; NEGRELLI, 2011) e revelam, portanto, o *modo de ver* o mundo dos alunos. Dessa forma, podemos afirmar que essa escolha é influenciada por hábitos, costumes e atividades que os alunos desenvolvem, seja em casa, seja na escola, portanto, pelas *formas de vida* que constituem (WITTGENSTEIN, 2012; MIGUEL, 2014).

Há dessa forma uma infinidade de possibilidades, pois ainda que tenhamos encontrado traços característicos dessas escolhas, particulares até mesmo em cada configuração de modelagem identificada, não há como prever ou garantir que temas ou tipos de temas serão escolhidos. Existem de acordo com Cifuentes e Negrelli (2011) diferentes realidades, ou diferentes esferas (BERGER; LUCKMANN, 2008) ou entendimentos de realidade (BEAN, 2001), dessa forma, qualquer tema com o qual o aluno se depara e lhe interessar ou lhe despertar curiosidade pode ser tomado como objeto de investigação de uma atividade de modelagem matemática.

O professor, porém, pode avaliar o tema escolhido pelos alunos e, caso ele o considere inapropriado, seja pela complexidade envolvida em suas discussões, ou pela inviabilidade da coleta e/ou obtenção de dados, ele pode por meio do diálogo sugerir que os alunos procurem outros temas, ou, se preferir, sugerir alguns. Contudo, Bassanezi (2015, p. 16) adverte:

> É muito importante que os temas sejam escolhidos pelos alunos, que, desta forma, se sentirão corresponsáveis pelo processo de aprendizagem, tornando sua participação mais efetiva. É claro que a escolha final dependerá muito da orientação do professor, que discursará sobre a exequibilidade de cada tema, facilidade na obtenção de dados, visitas, bibliografia etc.

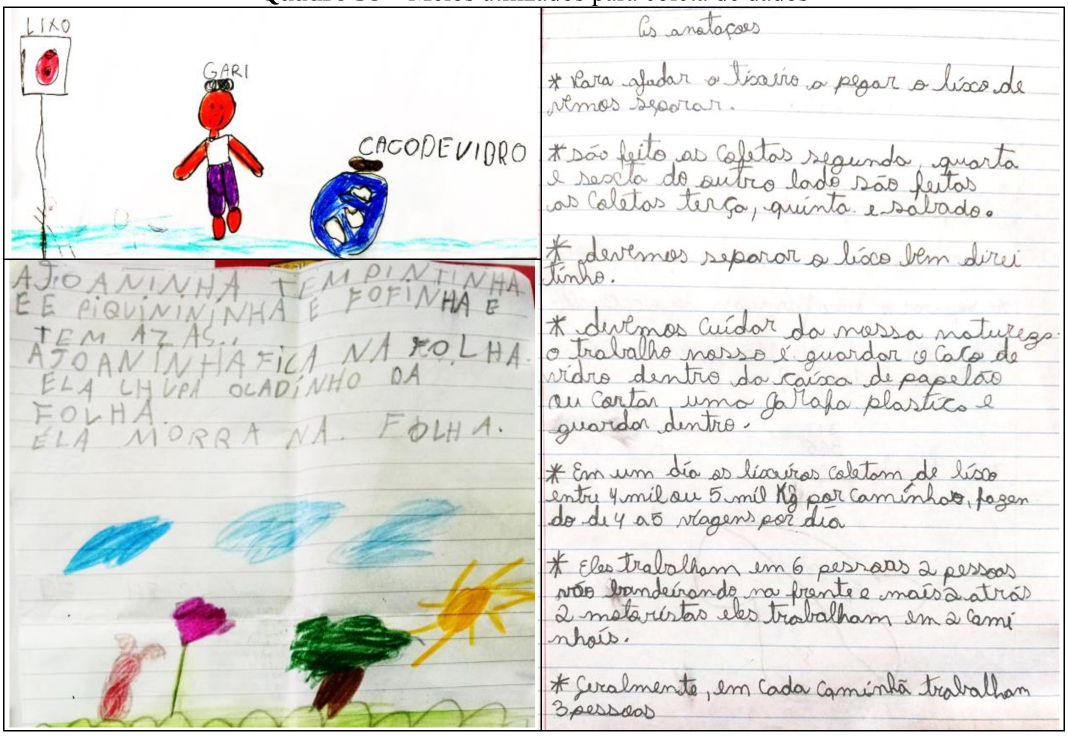
Fazer um levantamento de possíveis situações de estudo, conforme indica Bassanezi (2015), é um bom ponto de partida, pois nesse momento o professor permite que os alunos abram um leque de opções e pode, inclusive, ajudá-los da definição do problema.

Como se pode observar, um aspecto importante que deve ser considerado na hora da definição do tema é a coleta de informações. Os alunos, junto com o professor, devem pensar como dados e informações a respeito de tal tema podem ser obtidos: uma pesquisa na internet? um experimento? Segundo Bassanezi (2015, p. 18):

> A coleta de dados qualitativos ou numéricos pode ser efetuada de várias formas:
> - Através de entrevistas e pesquisas executadas com os métodos de amostragem aleatória – neste caso, a organização de um questionário eficiente e a utilização de alguns conceitos básicos de Estatística são fundamentais;
> - Através de pesquisa bibliográfica, utilizando dados já obtidos e catalogados em livros e revistas especializadas;
> - Através de experiências programadas pelos próprios alunos.

No caso dos alunos dos anos participantes da pesquisa, observamos a necessidade de inseri-los em tarefas como busca por informações e coleta de dados, tarefas que para a maioria dos alunos foi uma novidade. Desse modo, observamos nos relatos que os meios utilizados para realizar tais tarefas foi a realização de uma entrevista com garis, na atividade da *coleta de lixo*, pesquisas bibliográficas, de modo geral, realizadas na internet e/ou disponibilizadas pelo professor, nas atividades referentes ao terceiro momento de familiarização com a modelagem, e experiências simples programadas pelos alunos, como na atividade do *desafio do balde de gelo*, na qual os alunos ficaram responsáveis por identificar a capacidade, ou volume, de um balde de água de suas casas. Esses meios de coleta resultaram em diferentes materiais com dados e informações como pequenos trechos de reportagens ou textos sintetizados pelo professor, desenhos (configurações 1 e 2), conjunto de tópicos e/ ou anotações, relatórios, etc. (configurações 2 e 3) – como ilustra o Quadro 58.

Quadro 58 – Meios utilizados para coleta de dados



Fonte: Do autor.

- **Formulação do Problema**

Mais uma vez nos deparamos com uma tarefa que não é comum à *forma de vida escolar*. Alunos formulando problemas? Como assim? Isso não é de responsabilidade do professor? Em modelagem matemática esse tipo de pensamento deve ser afastado! Como coloca Barbosa (2003) umas das características da modelagem matemática é a problematização. Além disso, como esperamos que nossos alunos identifiquem problemas, seja no âmbito escolar ou fora da escola, se eles sempre receberam problemas prontos e bem definidos, com todos os dados e informações disponíveis em seus enunciados? De acordo com os PCN, um dos objetivos do Ensino Fundamental é que o aluno desenvolva a capacidade de “questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação” (BRASIL, 1997, p. 9). A formulação de problemas, no âmbito de atividades de modelagem matemática, pode se constituir um meio pelo qual os alunos incorporem essa atividade à sua *forma de vida*, vindo ao encontro dos objetivos apontados nos documentos curriculares.

Como optamos por desenvolver atividades de modelagem matemática segundo os momentos de familiarização, indicados por Almeida e Dias (2004), os problemas nas primeiras atividades foram definidos pelo professor, o que não significa que os alunos não participaram da realização de tal ação! Downton (2013) defende que atividades de modelagem matemática devem proporcionar aos alunos a oportunidade de problematizar situações, de formular problemas, e isso deve ser feito já nos primeiros anos escolares. Dessa forma, ao propor o desenvolvimento das atividades de modelagem aos alunos, buscamos explorar com eles as possibilidades de investigação de cada tema. Em cada atividade os alunos foram questionados a respeito de que problemas – ou que outros problemas – poderiam ser investigados. A atividade da *coleta de lixo* é um exemplo cujos problemas foram definidos em conjunto com os alunos, que investigaram quanto lixo é produzido na cidade, quanto lixo é produzido por habitante e quanto lixo é produzido em sua casa, diariamente.

Já com relação à formulação de problemas pelos alunos nas atividades do 3º momento de familiarização com a modelagem, observamos forte influência da *forma de vida escolar*. Isso porque, em geral, as primeiras perguntas formuladas por eles eram perguntas objetivas, cujas respostas já eram conhecidas por eles, ou eles já sabiam onde encontrar. A mediação do professor nesse momento é fundamental para o desenvolvimento da atividade de modelagem, pois é a formulação do problema que orienta a idealização matemática – matematização – da situação (DOWNTON, 2013). Mediação, pois, o professor não deve propor diretamente os problemas, como argumenta Bassanezi (2015), mas deve atuar como monitor, sugerindo situações globais aos alunos.

Dessa forma, exemplos de problemas formulados pelos alunos nas atividades de terceiro momento de familiarização com a modelagem são: *Como calcular a quantidade de água que deve ter em um aquário, considerando a quantidade de peixes?* (1º ano) *Sabendo-se a cor das asas dos pais, quais podem ser as cores das asas das joaninhas filhotes?* (2º ano) *Como se determinam recordes?* (3º ano), *Na nossa idade, quanto tempo leva para chegarmos na fase do sono, em que ocorre a consolidação da memória e do aprendizado?* (4º ano) e *Qual é a área sob a responsabilidade de cada jogador no futebol?* (5º ano).

Podemos observar que esses problemas refletem as curiosidades dos alunos com relação ao tema, ou que surgiram no contexto das discussões. Portanto, não constituem necessariamente problemas no sentido de falta de compreensão ou entendimento da situação (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012), mas também de um sentimento de interesse de elaborar interpretações acerca de tais situações (DOWNTON, 2013). É nessa perspectiva, que uma das características do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática é a problematização (BARBOSA, 2003).

- **Discussões**

Ao olhar para as discussões realizadas pelos alunos no âmbito das atividades de modelagem matemática, observamos que os diálogos desencadeados foram para além das discussões a respeito do tema da atividade e da matemática utilizada para resolver o problema. Discussões de caráter interdisciplinar frequentemente entraram em cena (*questões de higiene e saúde; conscientização quanto ao desperdício de água; responsabilidades dos cidadãos perante à coleta de lixo; formação da neve; ciclo de vida, alimentação e cuidados com animais; localizações geográficas; esporte; etc.*). Essas discussões foram realizadas pelos alunos para compreender a situação-problema e/ou informações associadas a ela – conforme princípio da significação pessoal indicado por English (2003).

Diante disso, observamos nas atividades modelagem matemática um potencial para abordar questões disciplinares, pluridisciplinares, transdisciplinares e interdisciplinares, como mencionam as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (BRASIL, 2013). A modelagem matemática pode ser, assim, uma possibilidade para desafiar o engessamento proporcionado pelo currículo e favorecer discussões de diferentes naturezas, bem como o estabelecimento de relações entre os conhecimentos emergentes.

No contexto das atividades de modelagem matemática as discussões são, ainda, o meio pelo qual os alunos compreendem o problema, definem estratégias para sua resolução e sistematizam conteúdos. Essas discussões resultaram nos registros dos alunos nas atividades, que fizeram anotações quanto às informações consideradas relevantes e quanto aos conceitos matemáticos abordados, como exemplifica o Quadro 59.

Quadro 59 – Anotações resultantes das discussões a respeito do tema e das discussões matemáticas

Discussões a respeito do tema TIGRES mamiferos: aqueles que mamam carnívoros aqueles que comem carne
Discussões matemáticas 1 metro corresponde a 100 centímetros. 1 centímetro corresponde a 10 milímetros. Então, 1 metro corresponde a 10 X 100 = 1.000 milímetros

Fonte: Do autor.

A preocupação em anotar foi observada com mais espontaneidade pelos alunos do 4º e 5º ano, enquanto que nos primeiros anos as anotações foram realizadas mediante orientações do professor. Tal fato revela um aspecto característico do que Wittgenstein (2012) chama de *treinamento*. Alunos do 4º e do 5º ano já estão inseridos há mais tempo nas atividades escolares, então os alunos dessas turmas já incorporaram determinadas maneiras de agir que são características da prática escolar, características dessa *forma de vida*. Por outro lado, os alunos dos primeiros anos estão iniciando, estão aprendendo a agir conforme as regras que orientam tal jogo, eles precisam, pois, de um treinamento para isso.

E, nesse sentido, observamos diferenças não apenas na iniciativa para fazer anotações, mas no teor das discussões realizadas em cada turma. Enquanto nos primeiros anos os alunos queriam falar e contar histórias a respeito do tema, observamos nos últimos anos o compartilhamento de experiências mais alinhadas às situações-problema. Além disso, observamos nos primeiros anos alguns indícios de apresentação de situações fictícias, ou de situações que fogem do assunto da discussão, que não identificamos nos últimos anos. Conforme a turma, do 1º ao 5º ano, os alunos parecem adquirir mais segurança e objetividade em suas falas no modo como contam histórias e compartilham experiências, até mesmo no modo como lidam com a matemática e sua linguagem, pois identificamos, por exemplo, na configuração 1 discussões matemáticas mais associadas à contagem, enquanto que na configuração 2 essas discussões voltaram-se mais para as características do sistema numérico decimal, para a adição e introdução da multiplicação, e na configuração 3 contemplaram de forma mais abrangente as quatro operações elementares da matemática, inclusive envolvendo números racionais. Ou seja, as discussões matemáticas emergentes foram predominantemente associadas aos conteúdos estipulados no currículo para a turma, uma vez que tais discussões são mediadas pelas intenções e objetivos do professor.

- **Idealização da situação**

Um dos primeiros passos para a resolução do problema em atividades de modelagem matemática é a matematização da situação (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012), ou seja, transformar o problema proveniente da situação real – um problema que a princípio não é essencialmente matemático (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012) – em um problema matemático (BLUM, 2002; POLLAK, 2012), atribuir-lhe uma roupagem de ideias matemáticas, que substitui e mascara o mundo dado como efetivo na nossa vida concreta como a natureza objetivamente efetiva e verdadeira (HUSSERL, 2012), para que seja possível operar sobre ele, isto é, usar métodos e técnicas matemáticas (LINGEFJÄRD, 2006), segundo regras e princípios que regulamentam o uso da matemática, conforme seus axiomas, teoremas e convenções, segundo a *forma de vida* associada à matemática (WITTGENSTEIN, 2012). A matematização encaminha os alunos para o uso da linguagem matemática, e portanto, os alunos devem agir em conformidade com esse jogo *de linguagem*.

Essa atitude é justificada pelas características das proposições e enunciados matemáticos. Não há proposições empíricas na matemática, as proposições matemáticas são proposições gramaticais (WITTGENSTEIN, 2012). Ou seja, em matemática não trabalhamos com proposições do tipo "*As unhas crescem mais ou menos 3 milímetros*", mas com proposições do tipo "*crescem 3 milímetros*". Nesse sentido, identificar as grandezas ou variáveis envolvidas na situação-problema, bem como elaborar hipóteses e realizar simplificações são ações características da modelagem matemática (BEAN, 2001).

De modo geral, os alunos dos anos iniciais realizaram essas ações de maneira implícita, ou seja, eles reconheceram as grandezas envolvidas nas situações-problema e admitiram determinadas hipóteses que simplificaram a situação de modo a viabilizar os encaminhamentos matemáticos, porém, essas ações não foram registradas ou discutidas sem a intervenção do professor.

Os alunos de todas as turmas identificaram, por exemplo, que as variáveis envolvidas na situação-problema a respeito do *crescimento das unhas* eram o tempo (em meses) e o comprimento das unhas (em milímetros). Embora os alunos do 4º e do 5º ano foram os que mais se interessaram em registrar e identificar tais variáveis – claro, sem usar esse termo –, temos indícios nas conversas com o professor e nas produções escritas dos alunos de que eles fizeram essa identificação. O mesmo pode ser dito para as hipóteses formuladas para simplificar as situações e direcionar o encaminhamento matemático (BASSANEZI, 2004), em todas as turmas houve uma discussão desencadeada pelo professor, mas novamente encontramos esses registros, predominantemente, nas produções dos alunos do 4º e do 5º ano. O Quadro 60 apresenta exemplos de hipóteses e variáveis registradas por alunos do 4º e do 5º ano, respectivamente.

Quadro 60 – Exemplos de hipóteses e variáveis envolvidas nas atividades de modelagem

<table>
<tr><td>Crescimento das unhas</td><td colspan="2">Hipótese:
Vamos considerar que as unhas das mãos crescem por mês 3 mm e a dos pés 1 mm.
Variáveis:
*Crescimento dos unhas (mm)
*Tempo (Meses)</td></tr>
<tr><td>Animais de estimação</td><td>Hipóteses:
(Estão associadas aos usos dos produtos)
(Castração) AN 85R$ para 10 mêses
(Vermifugo) V 29,90 para um mês
(Sabonete) S 8,00R$ para um mês
(Shampoo) S 26,60R$ para um mês
(brinquedo) bolinha para 6 meses</td><td>Variáveis:
G = SH + SA + R ± B
Shampoon
sabonete
Ração
Brinquedo</td></tr>
</table>

Fonte: Do autor.

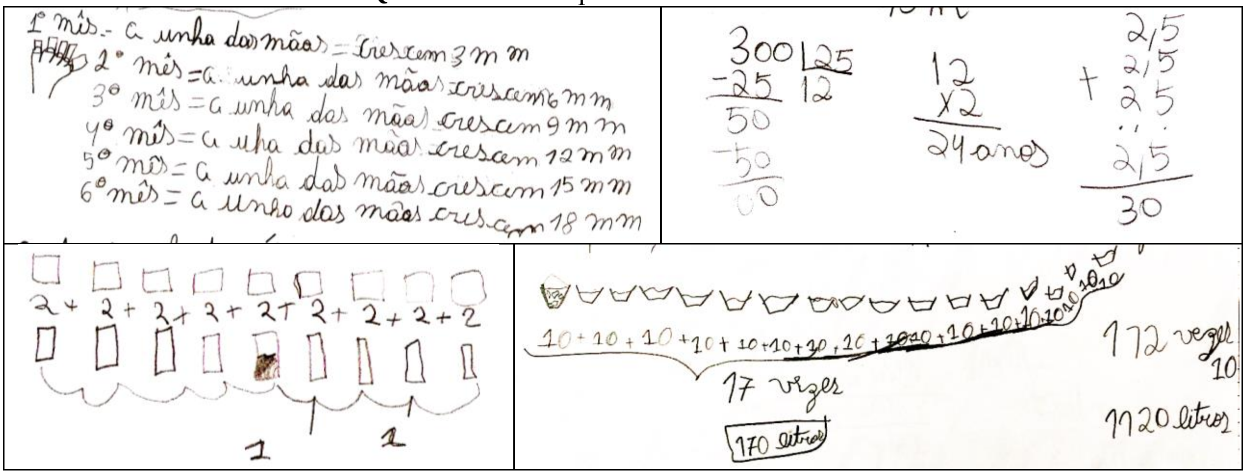
- **Formulação do modelo matemático**

De acordo com English (2010), dois princípios que orientam o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática são a construção e a documentação do modelo. Para a autora, uma atividade de modelagem matemática requer que os alunos desenvolvam uma construção matemática que possa servir como um meio para descrever, explicar e prever aspectos associados à situação-problema. Essa construção deve ser externalizada por meio da linguagem matemática, criando uma estrutura que deve manter com certo nível de fidelidade características essenciais do fenômeno e indicar uma possível solução para o problema (ALMEIDA; SOUSA; TORTOLA, 2015). Essa estrutura pode ser externalizada de uma variedade de maneiras, segundo English (2010), incluindo a criação de listas, tabelas, gráficos, diagramas, desenhos etc.

No caso dos anos iniciais identificamos diferentes estruturas matemáticas utilizadas pelos alunos, as quais caracterizamos como:

Modelos aritméticos: consistem em uma estrutura utilizada para expressar a relação entre as variáveis do problema e têm como fundamento números e operações aritméticas elementares. Exemplos são apresentados no Quadro 61.

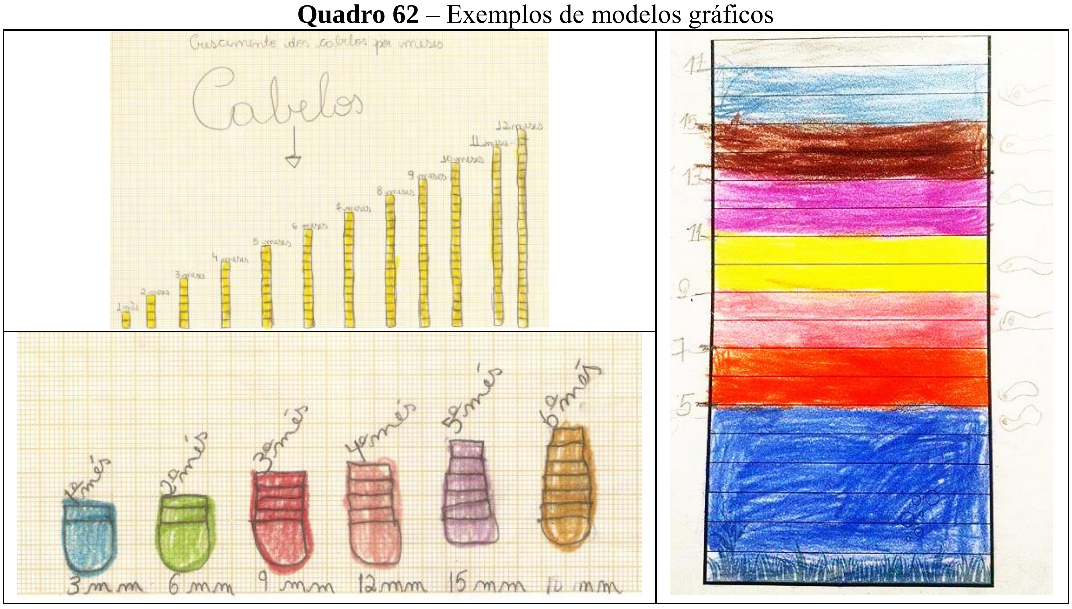
Quadro 61 – Exemplos de modelos aritméticos



Fonte: Do autor.

Modelos gráficos: estrutura utilizada para organizar e apresentar dados e informações de maneira objetiva por meio de recursos visuais, que podem ser expressos na forma de figuras geométricas, diagramas, desenhos, ou, imagens. Esse tipo de modelo é exemplificado no Quadro 62.

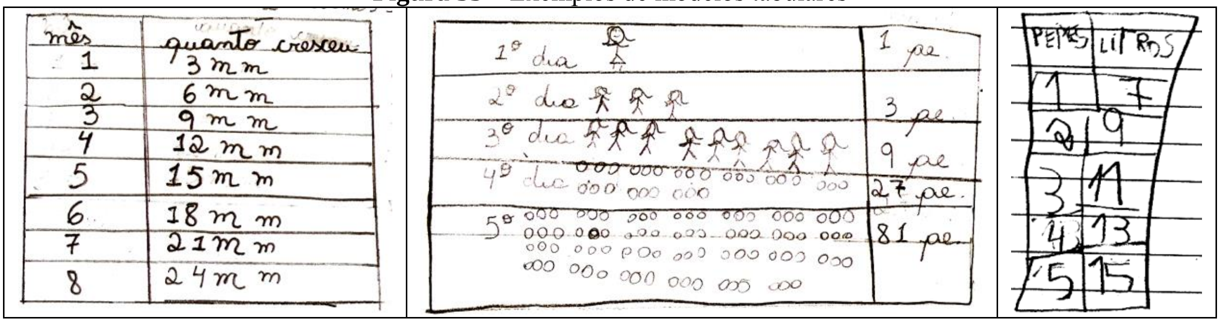
Quadro 62 – Exemplos de modelos gráficos



Fonte: Do autor.

Modelos Tabulares: trata-se de uma estrutura na qual as informações são organizadas na forma de tabelas. A Figura 33 apresenta exemplos de modelos tabulares.

Figura 33 – Exemplos de modelos tabulares



mês	quanto cresceu
1	3 mm
2	6 mm
3	9 mm
4	12 mm
5	15 mm
6	18 mm
7	21 mm
8	24 mm

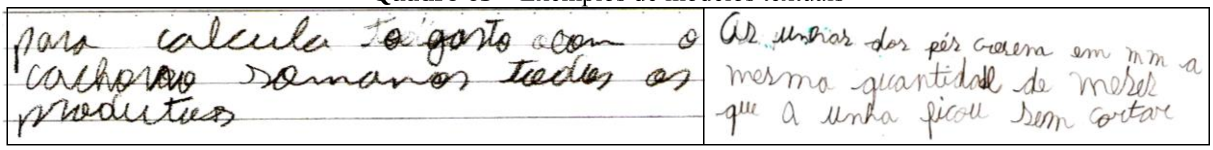
1º dia	1 pe
2º dia	3 pe
3º dia	9 pe
4º dia	27 pe
5º dia	81 pe

PEPES	LITROS
1	7
2	9
3	11
4	13
5	15

Fonte: Do autor.

Modelos Textuais: constituem-se em uma estrutura na qual as relações matemáticas entre as variáveis são descritas usando língua materna. O Quadro 63 exemplifica tal tipo de modelos.

Quadro 63 – Exemplos de modelos textuais

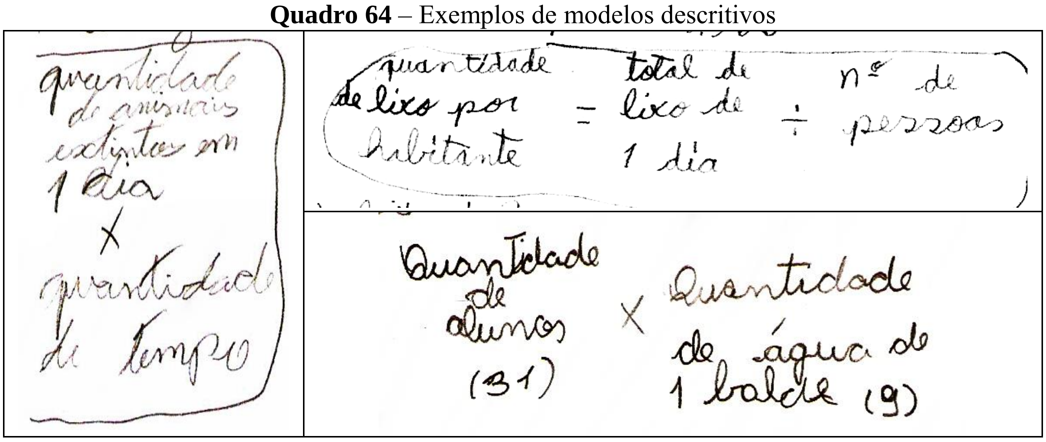


para calcula to o gasto com o cachorro somamos todos os produtos	As unhas dos pés cresceram em mm a mesma quantidade de meses que a unha ficou sem cortar

Fonte: Do autor.

Modelos descritivos: modelos cuja estrutura descreve uma relação entre as variáveis do problema usando língua materna associada a números e operações. O Quadro 64 apresenta alguns exemplos.

Quadro 64 – Exemplos de modelos descritivos



quantidade de animais extintos em 1 dia X quantidade de tempo

quantidade de lixo por habitante = total de lixo de 1 dia ÷ nº de pessoas

Quantidade de alunos (31) X Quantidade de água de 1 balde (9)

Fonte: Do autor.

Modelos algébricos: modelos cujas variáveis são expressas por meio de letras e são constituídos pela reunião de letras, números e operações. O Quadro 65 exemplifica esse tipo de modelo.

Quadro 65 – Exemplos de modelos algébricos

$G = SH + SA + R \pm B$	$T = l \times d$	$H = L \div N$

Fonte: Do autor.

Ao olharmos para os diferentes tipos de modelos matemáticos produzidos pelos alunos, observamos que existem neles algumas semelhanças, particularmente semelhanças estruturais, que se referem ao uso da linguagem matemática. O que permite, por exemplo, que os alunos usem tanto uma sequência de adições, quanto uma multiplicação para descrever o *crescimento das unhas*? Ou que eles usem adições tanto na situação referente ao *crescimento das unhas*, quanto à situação referente ao *desafio do balde de gelo*?

A primeira pergunta pode ser explicada utilizando-se a ideia de *semelhanças de família* proposta por Wittgenstein (2012). Para o autor, os *jogos de linguagem* possuem uma rede de semelhanças que perpassam por suas extensões, não como um único fio condutor, mas como uma trama em que cada fibra compõe a rede. Nessa perspectiva, os jogos formam uma família. No caso da atividade do *crescimento das unhas*, a proposição matemática que orientou o encaminhamento matemático da situação foi: *As unhas das mãos crescem 3 milímetros por mês*, dessa forma, a cada mês que passa 3 milímetros são acrescidos no comprimento das unhas das mãos. Após dez meses, 3 milímetros foram acrescentados dez vezes nas unhas das mãos, o que dá abertura ao aluno usar tanto a adição, quanto a multiplicação, uma vez que considerarmos a adição de parcelas iguais como um *jogo de linguagem de multiplicar*. Mas veja, apenas se, e somente se, fizermos essa consideração!

Os alunos não veem a situação ora uma sequência crescente de desenhos, ora como uma adição, em que acrescenta-se uma determinada medida de tempo em tempo; ou ora como uma sequência de adições, ora como multiplicações, ora como tabuada. Os alunos trabalham com a percepção (WITTGENSTEIN, 2012). E nesse sentido, eles veem aquilo que eles interpretam, a partir do que eles conhecem, de sua *vivência visual*. Nesse sentido cabe intervenções e orientações do professor para abrir os olhos dos alunos para novas interpretações, para vislumbrar novos caminhos e jogar novos *jogos de linguagem*. E para chamar atenção para essas *semelhanças de família*. Trata-se, portanto, como coloca Wittgenstein (2012) de um *treinamento*, no sentido de uma formação, isto é, um treinamento que resulta na formação de conceitos.

Já com relação à segunda pergunta, os alunos podem usar adições tanto na situação referente ao *crescimento das unhas*, quanto à situação referente ao *desafio do balde de gelo*, pois "Há uma considerável quantidade de fenômenos aparentados uns com os outros e de possíveis conceitos" (WITTGENSTEIN, 2012, p. 261). Dessa forma, podemos dizer que as situações revelam características semelhantes: assim como na situação do *crescimento das unhas* acrescenta-se 3 milímetros no comprimento das unhas a cada mês que passa, na situação do *desafio do balde de gelo*, acrescenta-se o volume de um balde de água, para cada pessoa que participa do desafio. Ambas as situações, idealizadas, revelam uma estrutura matemática aditiva, cujas parcelas são iguais. A partir daí a abordagem matemática da situação se dará de acordo com os envolvidos na modelagem (BASSANEZI, 2004), se dará de acordo com a *forma de vida* dos modeladores.

Desse modo, alunos do 1º ano, podem estruturar essa situação utilizando desenhos dispostos em uma sequência crescente, os chamados gráficos pictóricos, ou podem usar a contagem para construir uma sequência numérica que descreve as somas, parcela a parcela. Alunos do 2º e 3º ano, por sua vez, podem usar a adição e construir uma cadeia de somas. Por fim, alunos do 4º e 5º ano podem ao invés de somar parcela a parcela, substituir essa adição de parcelas iguais por uma multiplicação.

Há nessa descrição de possibilidades de estruturação das situações um fato interessante que merece ser chamado atenção: a possibilidade de explorar a evolução dos modelos matemáticos. O professor pode aproveitar o desenvolvimento de tais atividades para inserir, por exemplo, a adição a partir da contagem no 1º ano, ou a multiplicação a partir das somas de parcelas iguais no 2º e 3º ano.

Cabe ao professor orientar os alunos para que eles consigam estabelecer comparações e relações entre os modelos matemáticos produzidos por eles, tanto com relação aos modelos matemáticos formulados a partir de uma mesma situação – explorando a evolução dos modelos, quanto ao uso de um modelo em diferentes situações-problema, de modo que o aluno seja capaz de desvincular os conceitos matemáticos das situações empíricas (GOTTSCHALK, 2004).

Isso revela uma importante característica que o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática pode proporcionar, que consiste, inclusive, em um dos princípios propostos por English (2010) para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática: o princípio da generalização do modelo. De acordo com esse princípio, o aluno deve ser capaz de aplicar o modelo produzido por ele em uma situação em outras situações com características semelhantes, de modo que o aluno consiga identificar e formar o conceito matemático em jogo nas situações e saiba lidar com suas regras e proposições, independente do contexto, uma vez que a natureza das proposições matemáticas é gramatical, e dessa forma são proposições regidas por regras que, uma vez convencionadas, independem das situações empíricas – ainda que guardem semelhanças, como argumenta Wittgenstein (2012).

- **Apresentação da resposta para o problema**

Uma vez formulado o modelo matemático, os alunos serão capazes de obter uma resposta matemática para o problema (BLUM, 2002, BASSANEZI, 2004; POLLAK, 2012). Essa resposta, contudo, deve ser interpretada no contexto da situação-problema. Uma vez que a natureza das proposições matemáticas é diferente da natureza das proposições empíricas, como vínhamos discutindo. Dessa forma, cabe ao aluno, nesse momento, retomar o contexto de origem e apresentar uma resposta para o problema.

Essas respostas foram apresentadas pelos alunos dos anos iniciais de duas maneiras: por meio de diálogos e por meio de registros escritos.

De modo geral, umas das características do ensino de matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental é o ensino dialógico (NACARATO; MENGALI; PASSOS, 2011), os alunos fundamentam suas argumentações, impressões e conclusões por meio do diálogo. O diálogo foi, portanto, uma forma de expressão encontrada pelos alunos no contexto das atividades de modelagem matemática desenvolvidas em sala de aula para apresentarem a resposta para o problema, particularmente os alunos dos primeiros anos, que ainda não dominam o recurso da escrita.

Há, todavia, que se considerar que uma característica do ambiente escolar é o desenvolvimento desse recurso, e, dessa forma, enquanto alunos dos primeiros anos utilizaram-se mais do diálogo – mas não exclusivamente os primeiros anos, isso é importante ressaltar –, os alunos dos últimos anos (3º, 4º, 5º ano) sentiram mais necessidade de registrarem as respostas.

Essa forma de apresentação das respostas parece estar, ainda, associada a uma questão de hábito, cultura, ou seja à forma de vida escolar, que revela um *treinamento* – uma formação quanto ao uso da linguagem. Desse modo, alunos do 4º e do 5º ano (configuração 3), apresentaram mais predisposição em registrar suas respostas, sem a intervenção do professor, que alunos do 2º e 3º ano (configuração 2) e alunos do 1º ano (configuração 1). Essa intervenção, contudo, faz parte do papel do professor, que independente do ano, deve incentivar os alunos a registrarem suas hipóteses, cálculos e resultados matemáticos.

O Quadro 66 apresenta alguns exemplos da apresentação de respostas para o problema pelos alunos dos anos iniciais.

Quadro 66 – Exemplos de apresentação de resposta para o problema

<table>
<tr><td colspan="2">R: Daqui a 30 anos o brasileiro crecer até 1,80 (um mentro e oitenta centímetro)</td></tr>
<tr><td>10 dias = $\frac{1}{3}$ do mês
20 = $\frac{2}{3}$ do mês
30 = $\frac{3}{3}$ = 1 mês
15 = → $\frac{1}{2}$ do mês</td><td>P: Ai acontece o que? Vai aumentando, aumentando, aumentando até quando?
A1.7: Outubro.
P: Julho, agosto, setembro, outubro, novembro, dezembro. Aí o que acontece depois? Janeiro, fevereiro, março, ... o que acontece?
A1.7: Diminui, daí sobe de novo, daí diminui, daí sobe de novo, diminui...</td></tr>
</table>

Fonte: Do autor.

- **Avaliação dos resultados**

Um fato comum em atividades de modelagem matemática é a formulação de modelos matemáticos que, mesmo em acordo com a gramática que rege o uso da matemática, pode fornecer uma resposta inapropriada para o problema (mais uma vez lembramos da existência de diferenças entre as naturezas das proposições empíricas e gramaticais).

Por isso, uma avaliação do modelo matemático deve ser realizada sempre que sua formulação for concluída, com a intenção de validar o uso dessa estrutura matemática para descrever, explicar ou prever aspectos associados à situação-problema.

Da mesma forma que Wittgenstein afirma (2012) que se uma forma, entre outras formas, não tem lugar entre elas, deve-se procurar seu lugar em outra dimensão, se um conceito matemático é utilizado e não corresponde às expectativas, não responde satisfatoriamente a questão (POLLAK, 2015; BASSANEZI, 2002), o modelo não será considerado válido (ALMEIDA; SILVA; VERTUAN, 2012), e outros conceitos ou métodos matemáticos devem ser utilizados. Há, contudo, que levar em consideração que

> a formulação inicial de um modelo simples é fundamental para se entender melhor o problema e diagnosticar quais características do fenômeno devem ser consideradas no modelo. Entretanto, nem sempre um primeiro enfoque do problema ou um modelo simplista conduz a bons resultados, sendo necessária a sua reformulação, que, geralmente, é obtida com modificações nas variáveis ou nas leis de formação previamente estabelecidas. Ainda, no processo de modelagem, a escolha do instrumental matemático é fundamental, principalmente em se tratando de promover o conhecimento matemático (BASSANEZI, 2015, p. 22).

A argumentação de Bassanezi (2015) revela um aspecto importante com relação à validação do modelo a questão da avalição do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, mas não apenas uma avaliação realizada pelo professor, talvez, mais que isso, uma avaliação realizada pelo aluno de seus encaminhamentos, como sugere o princípio da autoavaliação indicado por English (2010).

A maneira que os alunos dos anos iniciais, participantes da pesquisa, encontraram para realizar essa avaliação foi a comparação de suas resoluções com as resoluções apresentadas pelos colegas e a comparação e aplicação do modelo formulado utilizando dados reais. Essas comparações foram orientadas por questionamentos do professor, chamando atenção para determinados aspectos e tomando a matemática como padrão de correção.

Por que a matemática como padrão de correção? Porque se o encaminhamento matemático do aluno se deu a partir de uma hipótese que reflete um comportamento da situação-problema, e, como já mencionamos: assumir uma hipótese, significa assumi-la como uma regra, e não pode haver dúvida com relação à regra; e se a regra foi seguida, de maneira adequada, então há uma certeza matemática que garante os resultados matemáticos, o que pode ser útil para a validação do modelo matemático. Por exemplo, quando, na situação dos *peixes*, os alunos assumiram que para cada peixe que se coloca no aquário, dois litros de água devem ser acrescentados, os resultados podem ser conferidos por meio da contagem, e a contagem deve revelar uma sequência crescente de dois em dois. Isso decorre da hipótese matemática assumida, da proposição matemática tomada como regra. E a validação, neste caso, não depende de uma comparação com dados reais, mas de uma verificação se a hipótese foi contemplada.

Isso, contudo, não quer dizer que validado o modelo, ele descreverá fidedignamente a situação, muito menos que a situação irá se comportar como ele indica. Um modelo matemático pode ser muito útil para fazer previsões a curto prazo, mas deve sempre ser revisto e atualizado para novas previsões.

> Seremos capazes de escapar da injustiça ou do vazio de nossas asserções, somente na medida em que considerarmos o modelo como aquilo que é, como objeto de comparação – por assim dizer, como medida; e não como preconceito ao qual a realidade *tem que* corresponder (WITTGENSTEIN, 2012, § 131).

O professor desempenha nesse momento além do papel de orientador – chamando atenção para tais características dos modelos produzidos para os alunos –, o papel de avaliador, e deve assumir-se como tal, pois ele conhece as regras matemáticas e, portanto, pode auxiliar os alunos na validação e interpretação de seus modelos.

- **Socialização dos encaminhamentos**

Após a apresentação da resposta para o problema, cabe uma retomada nas discussões e nos encaminhamentos realizados, vale a pena oportunizar um momento de socialização, em que os alunos podem falar a respeito do fizeram, tirar dúvidas e expor suas impressões.

> Falar sobre Matemática, escrever textos sobre conclusões, comunicar resultados, usando ao mesmo tempo elementos da língua materna e alguns símbolos matemáticos, são atividades importantes para que a linguagem matemática não funcione como um código indecifrável para os alunos (BRASIL, 1997, p. 46).

Os meios utilizados para realização desse momento de socialização foram a apresentação, na qual os alunos mostraram seus trabalhos aos colegas e falaram a respeito deles, e as discussões, desencadeadas por dúvidas dos alunos ou questionamentos do professor.

A princípio, os alunos mostraram um pouco de insegurança de ir até a frente e falar sobre seus trabalhos. Declarações como *"Mas é o professor que vai falar né?"* e *"o que tem que falar?"* ou atitudes como apenas se levantar ou ir à frente da sala e mostrar seus registros, sem querer falar nada, foram frequentes durante as apresentações.

Pensamos que essa atitude inicial pode ser explicada pelo fato de que apresentar encaminhamentos de suas atividades não era uma tarefa comum nas aulas. Falar o resultado tudo bem, mas apresentar como foi feito, parece ser uma atividade estranha para os alunos. E, nesse sentido, as primeiras explicações dados pelos alunos nas apresentações quanto a seus encaminhamentos foram: "*Eu fiz um desenho*", "*Eu fiz um gráfico*", "*Eu somei*" etc. Ou seja, observamos que, de modo geral, os alunos tentaram em um primeiro momento justificar seus procedimentos e resultados matemáticos a partir dos algoritmos utilizados, dos registros por eles produzidos. Essa atitude imprime uma ideia de que os alunos consideravam que os procedimentos e resultados matemáticos justificam-se por si só, ou seja, pelos algoritmos. Pode-se inferir que desde cedo os alunos constroem uma ideia de que a matemática é um reflexo da exatidão, da certeza, afinal, como argumenta Wittgenstein (2012), há uma gramática que fundamenta os usos da linguagem matemática. E, se as regras são seguidas, os resultados não podem ser diferentes.

Contudo, há de se lembrar que quando desenvolvemos atividades de modelagem matemática, a origem das hipóteses é empírica e que simplificações são realizadas para idealizar a situação (BEAN, 2001; HUSSERL, 2012). Nesse contexto, "numerosas dúvidas, questões, conflitos, revisões e resoluções surgem quando a criança desenvolve, avalia e se prepara para comunicar seus modelos aos seus pares" (ENGLISH, 2010, p. 3)[46]. Esse momento, revela-se, portanto, muito importante para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, pois é o momento em que o professor pode ajudar os alunos a enxergarem erros, a conhecerem novos caminhos e pode sistematizar conceitos.

> Lidar com a matemática é, antes de tudo, oferecer à criança a oportunidade de agir, e posteriormente levá-la a refletir acerca de suas ações: reviver em pensamento os acontecimentos que acabaram de se desenvolver, antecipar o que poderia vir a acontecer, procurar prever... (CERQUETTI-ABERKANE; BERDONNEAU, 1997, p. 4).

[46] Tradução de: Numerous questions, issues, conflicts, revisions, and resolutions arise as the children develop, assess, and prepare to communicate their models to their peers.

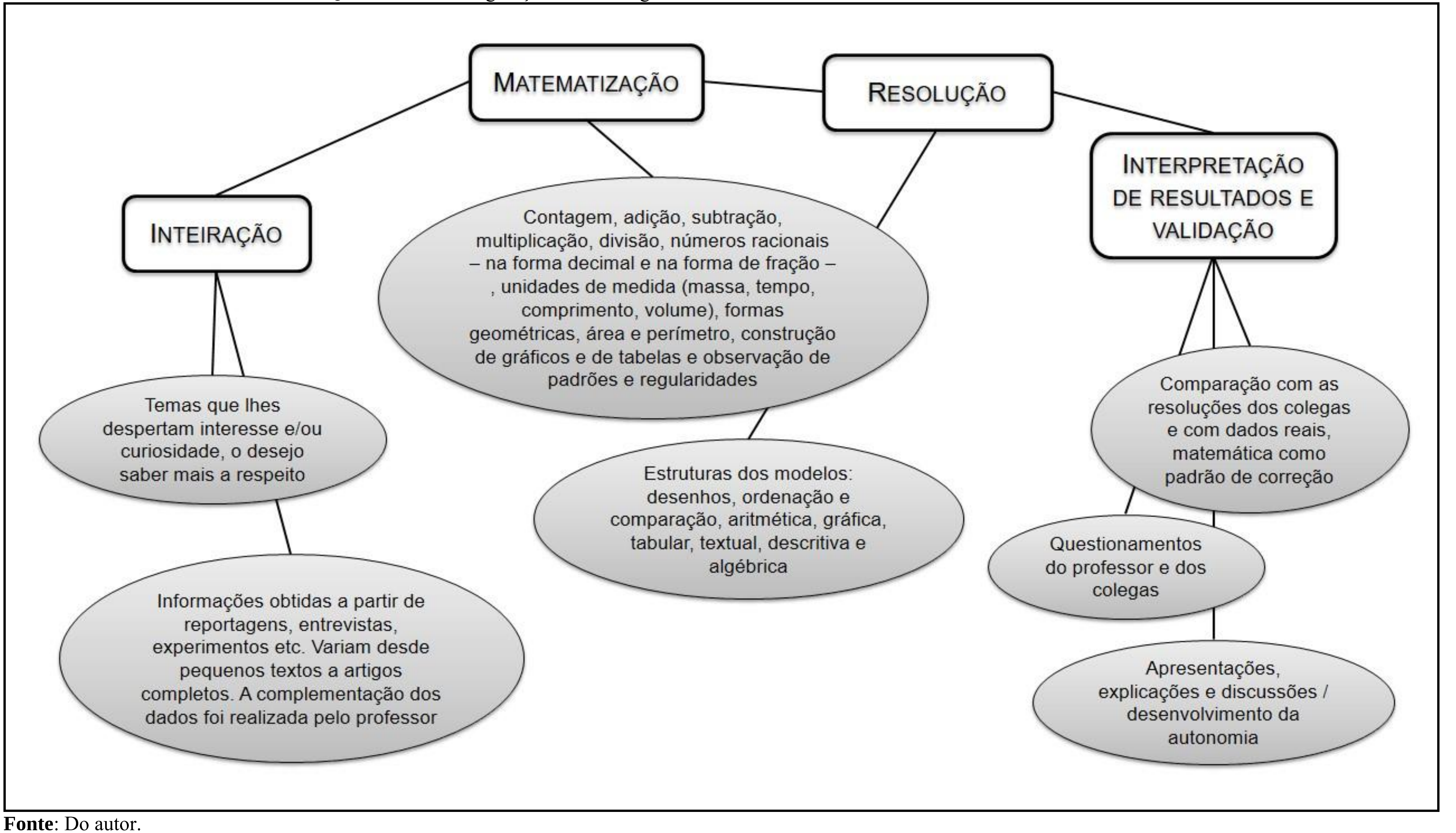
Um exemplo que podemos citar em relação à importância desse momento é a socialização dos encaminhamentos da atividade referente aos *animais de estimação*, na qual os alunos do grupo que a desenvolveu, após serem questionados pelos colegas e pelo professor, consideraram que o modelo matemático obtido por eles – a multiplicação de 12 meses por 50 reais – precisava de melhorias e, nesse sentido, decidiram fazer modificações, considerando as informações que eles tinham. Essa atitude denota o desenvolvimento de uma autonomia com relação ao procedimento associado à modelagem, uma autonomia que é esperada quando o desenvolvimento desse tipo de atividade é proposto para os alunos.

Desse modo, observamos que alunos do 4º e 5º ano apresentaram mais autonomia em relação aos primeiros anos, com relação à socialização de seus encaminhamentos e podemos dizer que essa autonomia foi sendo construída ao longo dos momentos de familiarização com a modelagem.

Esse é, ainda, um momento propício para explorar o princípio da generalização do modelo, momento em que o professor pode chamar atenção para as relações existentes entre os modelos matemáticos produzidos por eles nas diferentes situações e pode trazer outras situações em que esses modelos podem ser utilizados.

Diante dessas considerações a respeito dos indicadores emergentes dos encaminhamentos dos alunos para as atividades de modelagem matemática, sintetizamos essas características em uma configuração de modelagem matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental, apresentada pelo Quadro 67.

Quadro 67 – Configuração de modelagem matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental



Fonte: Do autor.

A construção e discussão dessa configuração de modelagem matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental nos leva a pensar em que se diferem os encaminhamentos dos alunos dos anos iniciais para a modelagem matemática dos encaminhamentos de alunos de outros níveis de escolaridade. E, nesse contexto, uma questão se revela oportuna quando tratamos a modelagem matemática no âmbito da Educação Matemática: O que é essencial no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática?

Espera-se que nas atividades de modelagem matemática os alunos façam determinadas coisas para que a atividade se caracterize como tal, mas em que consistem essas coisas? As configurações de modelagem matemática emergentes nesta pesquisa nos indicam alguns aspectos, para além daqueles que já são apontados na literatura. Contudo, discutir essa questão com mais proficuidade requer que olhemos para além dos anos iniciais do Ensino Fundamental, de modo a pensar em diferentes encaminhamentos que podem emergir em outros níveis de escolaridade.

Uma discussão nesse sentido é, portanto, realizada na próxima seção, uma vez que pensar no que é essencial em atividades de modelagem matemática, nos conduz a pensar em diferentes encaminhamentos para as atividades de modelagem matemática, o que nos ajuda a identificar e compreender particularidades da modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

4.4 PARTICULARIDADES DO DESENVOLVIMENTO DE ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS

A discussão que se estende por esta seção é orientada pela busca de elementos que contribuam para a constituição de uma identidade do fazer modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental e um (re)pensar na modelagem matemática no âmbito da Educação Matemática.

Diante disso, promovemos algumas discussões no sentido de indicar particularidades nos encaminhamentos de alunos dos anos iniciais para atividades de modelagem matemática quando colocados em comparação com possíveis encaminhamentos de alunos de outros níveis de escolaridade.

Já apontamos anteriormente algumas particularidades no que diz respeito a esse contexto escolar, como a linguagem e o modo como os alunos a utilizam, a organização escolar, a dinâmica das aulas, o conhecimento matemático dos alunos, a formação e a atuação do professor, o envolvimento entre professor e alunos etc. Nesse momento nossa intenção é colocar em evidência tais peculiaridades. Afinal, em que se difere a prática de modelagem matemática nos anos iniciais da prática de modelagem em outros níveis de escolaridade?

Analisemos a título de exemplo a seguinte situação: dois alunos, um dos anos iniciais da Educação Básica e outro do Ensino Superior, digamos de um curso de Matemática, defrontam-se com um mesmo problema (Quadro 68) e a ambos é feita a proposta de resolvê-lo utilizando uma abordagem matemática – uma atividade de modelagem matemática.

Quadro 68 – Problema da coleta de lixo por setores

Em uma cidade, a coleta de lixo é realizada por setores e organizada da seguinte maneira: às segundas, quartas e sextas o lixo é recolhido no setor 1; às terças, quintas e sábados, no setor 2. Tendo como informação o mapa da cidade, que demarca a região dos dois setores, responda: você concorda com a divisão dos setores para realizar a coleta de lixo? Por quê?

Fonte: Do autor (baseado em informações obtidas por meio de entrevista com os garis da referida cidade).

O problema apresentado foi formulado pelos alunos do 5º ano durante o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática associada à coleta de lixo. O que está em jogo nesse problema é a área demarcada para cada setor.

O aluno do Ensino Superior que já trilhou sua caminhada na jornada escolar, possui conhecimentos matemáticos que o aluno dos anos iniciais ainda não conhece. Ele pode optar, por exemplo, por aproximar a área desses setores a uma ou mais figuras geométricas conhecidas e calcular sua área por meio de fórmulas já convencionadas, ou ainda, aproximar cada região a uma curva e utilizar integrais para realizar o cálculo da área.

O aluno dos anos iniciais, por sua vez, que não conhece tais encaminhamentos, pode desenhar sobre o mapa uma malha quadriculada e contar os quadrados congruentes, porém, como se trata de uma superfície irregular, a malha não se encaixará perfeitamente e algumas modificações serão necessárias para que toda a região possa ser considerada. A partir de então, ambos os alunos têm condições de responder o problema embasados em argumentos matemáticos, cada qual fazendo um uso da matemática, da linguagem.

Provavelmente se as atividades propostas pelo professor aos alunos do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental fossem propostas em outros níveis de escolaridade, diferentes encaminhamentos teriam surgido, diferentes usos da matemática poderiam ser identificados.

Na atividade a respeito do crescimento das unhas, por exemplo, enquanto alunos dos anos iniciais fundamentaram seus modelos, particularmente, na contagem, adição e multiplicação, alunos dos anos finais do Ensino Fundamental e/ou Ensino Médio podem, por exemplo, estruturar algebricamente a relação entre as variáveis tempo e comprimento das unhas e obter uma expressão como: $C = 3 \times t$ ou $C = 3t$.

Ainda nesse contexto, o professor pode discutir a continuidade das variáveis C e t, dando subsídios para os alunos perceberem e indicarem a relação funcional que existe entre elas – o comprimento das unhas cresce com o passar do tempo –, como consequência uma nova expressão pode ser produzida: $f(t) = 3t$. Uma função linear.

Discussões a respeito do domínio, contradomínio e imagem dessa função podem ser realizadas. A partir da expressão $f(t) = 3t$ uma tabela de valores pode ser construída e auxiliar os alunos na plotagem de um gráfico, a partir do qual o professor pode apresentar a reta aos alunos, que contempla um domínio diferente dos gráficos produzidos pelos alunos dos anos iniciais – gráficos de barras e gráficos pictóricos.

A expressão $f(t) = 3t$ pode, ainda, ser generalizada como $f(x) = ax$ e um estudo do parâmetro a pode ser realizado. O professor pode propor uma modificação na situação-problema e, ao invés de estudar o quanto a unha cresce ao longo do tempo, os alunos podem determinar qual será o comprimento da unha em um determinado tempo t. O que muda com relação à expressão matemática? Considerando que a unha terá um comprimento inicial tomado como fixo, aparecerá mais um parâmetro na expressão: $f(x) = ax + b$, e a partir dessa modificação o professor pode explorar o conceito de função afim. Explorações com relação às diferenças das funções (por meio das expressões, dos gráficos etc.) podem mostrar que, na verdade, a função linear é um caso particular da função afim, na qual $b = 0$.

Pode-se, também, buscar outras situações em que essas expressões – modelos matemáticos – podem ser empregadas, conforme o princípio da generalização do modelo, indicado por English (2003). E a lista pode continuar aumentando com novas explorações matemáticas a partir da situação-problema referente ao *crescimento das unhas*. E olha que nem chegamos a incluir o Ensino Superior, cujas discussões poderiam envolver o estudo de funções, continuidade, limite, taxa de variação etc. etc.

Mas e com relação à modelagem matemática e seu procedimento? O que pode mudar? Uma possibilidade é que enquanto os alunos dos anos iniciais estipularam um comprimento considerado por eles aceitável para o tamanho das unhas, para determinar de quanto em quanto tempo eles devem cortá-las, alunos com mais experiência em análises e procedimentos matemáticos podem sentir a necessidade de buscar novas informações que sinalizem um comprimento ideal, ou, por exemplo, encontrar uma relação entre o comprimento das unhas e o comprimento dos dedos para inferir um comprimento ideal.

Na verdade, muita coisa pode ser diferente, a interpretação do problema, a busca e a seleção de informações, a determinação das hipóteses, as estruturas matemáticas, a maneira como os modelos são avaliados e os resultados apresentados... Mas, para que possamos falar desse tipo de diferenças é preciso pensar em relação ao que é essencial no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. O que os alunos dos anos iniciais ou de outros níveis de escolaridade precisam fazer para considerarmos seus encaminhamentos uma atividade de modelagem matemática?

Indicamos ao longo deste texto vários aspectos que podem caracterizar o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, a formulação de hipóteses e simplificações (BEAN, 2001), a problematização e a investigação (BARBOSA, 2001), a produção de modelos matemáticos (BASSANEZI, 2015) etc. Além disso, Almeida, Silva e Vertuan (2012) indicam alguns elementos que são característicos de uma atividade de modelagem matemática: situação-problema, matemática, processo investigativo e análise interpretativa.

Nessa perspectiva, os oito indicadores obtidos a partir da análise dos encaminhamentos dos alunos dos anos iniciais para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática parecem fornecer um panorama do que pode ser considerado "essencial" em atividades de modelagem matemática, quando colocados em comparação com a literatura. Além disso, esses indicadores refletem também a visão dos alunos a respeito do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática (Quadro 35). São eles: definição do tema e coleta de informações, formulação do problema, discussões, idealização da situação, formulação do modelo matemático, apresentação da resposta para o problema, avaliação dos resultados e socialização dos encaminhamentos.

Como observamos nas análises, esses indicadores tornam-se mais explícitos na medida em que os alunos familiarizam-se com o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, e o professor nesse contexto tem papel fundamental, o de garantir que essas ações não passem em branco. Por isso é importante que os professores também conheçam a modelagem matemática e saibam lidar com essas ações que são características de seu procedimento (MALHEIROS, 2014).

Com esse pensamento, apresentamos a seguir algumas considerações em relação a esses indicadores, resultantes de nossas impressões a respeito do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

- Definição do tema e coleta de informações

Enquanto buscar informações parece ser uma atividade simples para alunos de outros níveis de escolaridade, para alunos dos anos iniciais essa pode ser um uma tarefa inédita e, nesse sentido, eles podem precisar de auxílio. Para os alunos do 1º ano, que ainda não estão alfabetizados, o professor pode trazer pequenos textos, com informações já selecionadas a respeito do tema. Pode aos poucos ir inserindo novas informações e trabalhar com a seleção de dados relevantes. Para alunos de anos posteriores, o professor pode propor que busquem juntos as informações, caso a escola tenha equipamentos disponíveis – por exemplo, um laboratório de informática –, caso não tenha, o professor pode indicar para os alunos que materiais podem servir como informações (jornais, revistas, artigos eletrônicos etc.) e solicitar que eles tragam para a aula para que possam discutir juntos.

- Formulação do Problema

A formulação do problema, segundo Downton (2013), é uma ação que deve ser incentivada já nos anos iniciais. Para o autor, os alunos desse nível de escolaridade têm potencial para formular problemas. Contudo, vale a pena explorar com os alunos o que consiste um problema de uma atividade de modelagem matemática, uma vez que várias vezes que os alunos foram questionados a respeito do que poderiam investigar, nas diferentes turmas, os alunos apontaram questões pontuais cujas respostas ou procedimento para obtê-las eram conhecidos por eles.

A organização em grupos para a formulação do problema, segundo Bassanezi (2015), pode ajudá-los alunos a pensar em situações-problema. Mas caso essa formulação não ocorra, como foi o caso em algumas atividades de modelagem matemática, o professor pode, de acordo com o autor, fazer sugestões, mas sem delimitar, de imediato, o problema.

- Discussões

Durante o desenvolvimento das atividades os alunos mostraram-se participativos, eles se expressaram, deram sua opinião, relataram experiências. Devido a isso eles podem conversar mais do que de costume, particularmente quando organizados em grupos. E dependendo da quantidade de alunos na turma isso pode ser um problema.

Diante disso, o professor pode começar organizando os alunos em grupos menores, duplas por exemplo, e depois aumentar a quantidade de alunos por grupo. Contudo, trabalhar em grupo é importante em atividades de modelagem, pois é a partir dessa organização que os alunos podem trocar experiências entre eles, compartilhar e discutir ideias e construir autonomia.

Trabalhar com mais de uma atividade, em simultâneo, nos primeiros anos – particularmente 1º e 2º ano – pode dificultar as discussões, pois nessas turmas os alunos parecem ter uma necessidade maior da orientação do professor. Dessa forma, sugerimos que nas atividades de modelagem matemática cujos temas são escolhidos pelos alunos, o professor trabalhe um tema por vez, com toda a turma. Desse modo, os alunos concentram-se na discussão de um único tema e as discussões realizadas podem envolver todos os alunos.

- Idealização da situação

Como observamos a idealização da situação foi, de modo geral, realizada de forma implícita pelos alunos, quando não passou despercebida. Nesse contexto, cabe ao professor chamar atenção dos alunos para as variáveis, hipóteses e simplificações envolvidas na investigação da situação-problema. Conversar com eles a respeito e solicitar que eles façam anotações pode ajudar com que em outras atividades eles consigam identificá-las.

- Formulação do modelo matemático

Embora alguns autores (CALDEIRA, 2007; BURAK, 2010) indiquem a possibilidade do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática sem a necessidade de construir modelos matemáticos, consideramos essa formulação uma parte importante do procedimento associado à modelagem matemática, pois nesse momento o sujeito produz uma diversidade de estruturas matemáticas que podem contribuir para a observação das regularidades e generalização da situação, assim como podem constituir o ponto de partida para a discussão de relações entre diferentes situações.

- Apresentação da resposta para o problema

De modo geral, observamos que os alunos responderam ao problema por meio de diálogos e conversas a seu respeito, mas, muitas vezes, sem se preocuparem de registrá-las. Incentivar que os alunos façam esses registros pode contribuir com o uso da linguagem matemática, em acordo com as regras convencionadas, pois os registros colocam em evidência como os alunos estão interpretando e seguindo tais regras, podendo o professor intervir, caso necessário.

- Avaliação dos resultados

Ao longo do desenvolvimento das atividades de modelagem matemática o professor deve chamar atenção dos alunos quanto à necessidade de avaliação dos resultados. A retomada frequente das informações pode ajudar os alunos a produzir modelos matemáticos que estão em acordo tanto com a situação-problema, quanto com as regras da matemática. A validação do modelo matemático também deve ser requerida.

- Socialização dos encaminhamentos

Além do desenvolvimento matemático para a situação os alunos devem ser capazes de comunicar seus resultados. A socialização dos encaminhamentos é um momento em que os alunos têm a oportunidade de revisitar seu encaminhamentos e aprender a se comunicar matematicamente. Para isso, o professor pode solicitar que os alunos façam apresentações, que mostrem seus registros aos colegas, que falem a respeito do que foi feito. Pode fazer questionamentos para orientar as apresentações e incentivar outros alunos a também fazer.

Trabalhar com esses indicadores – não apenas em atividades de modelagem matemática, mas particularmente nesse tipo de atividade – pode fornecer contribuições que vão para além da formação de conceitos, pode auxiliar no desenvolvimento de habilidades e competências matemáticas que podem auxiliar na familiarização do aluno com a modelagem e no desenvolvimento de diferentes atividades matemáticas.

Capítulo 5

Discussão e Construção de Resultados:

a modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental

Chega o momento em que é preciso dar uma *pausa* nas análises e sistematizar as discussões e reflexões que tecemos ao longo deste texto. Neste capítulo, portanto, nos dedicamos à construção e apresentação de resultados desta pesquisa.

Para isso, retomamos a questão que orientou o seu desenvolvimento: *Que configurações podem assumir atividades de modelagem matemática desenvolvidas por alunos dos anos iniciais do Ensino fundamental?*

A partir dessa questão, realizamos algumas discussões a respeito das configurações de modelagem matemática delineadas e reflexões acerca de suas contribuições para a modelagem no âmbito da Educação Matemática, à luz da filosofia da linguagem de Wittgenstein, o que nos conduz a um (re)pensar e a uma (re)construção da identidade do fazer modelagem matemática, de modo a contemplar sua prática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Por fim, discutimos as contribuições desta pesquisa para a Educação Matemática e apresentamos algumas de nossas intenções de pesquisas futuras.

Índice do Capítulo

5.1 AO FIM DE UMA JORNADA, ALGUNS RESULTADOS E CONSIDERAÇÕES

Ao longo desta pesquisa, buscamos identificar configurações que podem assumir atividades de modelagem matemática quando desenvolvidas por alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Nesse contexto, três aspectos nos chamaram atenção: o que os alunos fazem, como fazem e no entendimento deles a respeito do que fazem ao desenvolverem atividades de modelagem matemática. Diante desses aspectos construímos três configurações que revelam como alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental fazem modelagem matemática e lidam com a matemática nesse contexto:

1) Configuração de modelagem matemática do 1º ano
2) Configuração de modelagem matemática do 2º e 3º ano
3) Configuração de modelagem matemática do 4º e 5º ano

Essas configurações, entretanto, não surgiram de forma espontânea nas análises, sua construção vem revestida de nossos interesses e concepções que orientaram o desenvolvimento desta pesquisa, a saber a filosofia da linguagem de Wittgenstein e nossa fundamentação epistemológica com relação à modelagem matemática. Dessa forma, vale a pena ressaltar que elas foram construídas a partir de uma estrutura base: as fases da modelagem matemática de Almeida, Silva e Vertuan (2012): inteiração; matematização; resolução; e interpretação de resultados e validação. Sem considerar essa estrutura diferentes configurações, provavelmente, seriam obtidas. Essas configurações refletem, portanto, não apenas os encaminhamentos e discussões dos alunos analisados na pesquisa, mas o nosso entendimento de modelagem matemática.

Cabe também esclarecer que essas configurações não consistem em categorias fechadas, com limites rígidos e bem estabelecidos, mas constituem um *continuum* no modo como os alunos usam a matemática para resolver problemas em atividades de modelagem matemática e nos conduz a pensar na forma como concebemos a formação matemática de nossos alunos.

Nesse ponto nos encontramos com filosofia da linguagem de Wittgenstein, que afirma que o aprendizado de uma linguagem se dá por meio de seus usos em diferentes contextos. Aprender matemática para Wittgenstein é aprender uma linguagem, e aprender uma linguagem é aprender a jogar diferentes *jogos de linguagem*.

Como observamos ao longo das análises, as atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos alunos os colocaram diante de diferentes usos da linguagem matemática, desde usos mais primitivos, que consistem na denominação de objetos – nesse caso, entes matemáticos –, a uma variedade de usos, ou seja, de *jogos de linguagem*.

Isso se evidencia quando colocamos em comparação os encaminhamentos dos alunos das diferentes turmas envolvidas na pesquisa. Por exemplo: enquanto nos primeiros anos o professor discutiu com os alunos o que é o milímetro e mostrou-lhes que medida ele representa, nos últimos anos explorações com relação às conversões entre unidades de medida de comprimento foram realizadas, o que denota que durante o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática diferentes caminhos podem ser tomados, diferentes conhecimentos envolvidos e diferentes modelos matemáticos produzidos.

Há, portanto, uma idiossincrasia associada ao desenvolvimento de atividades de modelagem (ALMEIDA; SOUZA; TORTOLA, 2015): enquanto que nos primeiros anos os alunos utilizaram, por exemplo, a contagem e a adição para descrever o comportamento de um fenômeno, cuja taxa de variação é constante, os alunos do 4º e 5º ano utilizaram a multiplicação, e, provavelmente, em outros níveis de escolaridade, a partir dos anos finais do Ensino Fundamental, os alunos definiriam uma função.

Tal inferência vem fundamentada no argumento de Bassanezi (2015, p. 16) que "para cada novo modelo, [...] exige-se novos conhecimentos tanto da área que se insere o fenômeno analisado como da própria matemática utilizada". Poderíamos interpretar tal argumentação, na perspectiva de Wittgenstein como: para cada novo modelo, diferentes *jogos de linguagem* são jogados.

Na filosofia de Wittgenstein, o que explica que diferentes conceitos sejam utilizados para modelar uma mesma situação são as *semelhanças de família* existentes entre os *jogos de linguagem* associados à matemática, que sugerem a matemática como uma construção normativa, formada a partir de um conjunto de regras e proposições, que podem estar encadeadas. Essas semelhanças nos permitem, portanto, falar de evolução ou refinamento de modelos matemáticos (BASSANEZI, 2015). Ou seja, alunos que no 1º ano utilizaram a contagem para expressar o comportamento com taxa de variação constante, ao desenvolverem uma atividade que envolve o mesmo comportamento, em outro ano escolar, provavelmente já não o expressariam da mesma maneira, como mostram as resoluções dos alunos do 2º ao 5º ano, por exemplo.

Atividades de modelagem matemática, portanto, proporcionam aos alunos não apenas a inserção em diferentes *jogos de linguagem* – diferentes usos da matemática –, mas fomentam discussões de semelhanças e diferenças com relação aos modelos matemáticos e o debate a respeito de seu papel nas situações (BARBOSA, 2009).

Esses *jogos de linguagem*, constituídos no âmbito das atividades de modelagem matemática, particularmente, nos anos iniciais do Ensino Fundamental, dizem respeito a diferentes conceitos matemáticos: medir, adicionar, multiplicar etc. que foram abordados em mais de uma atividade, e de diferentes maneiras, como é o caso da multiplicação, que foi utilizada ora como adição de parcelas iguais, ora como cálculo de porcentagem, ora como cálculo de área. De acordo com Wittgenstein, são esses diferentes *jogos de linguagem* associados à multiplicação que quando praticados pelos alunos contribuem para a formação desse conceito.

Diante disso, podemos concluir que modelar diferentes situações fornece aos alunos a oportunidade de jogar diferentes *jogos de linguagem* associados a um conceito e, desse modo, na medida em que os alunos, participantes da pesquisa, foram desenvolvendo atividades de modelagem matemática eles foram se inserindo em novos *jogos de linguagem* e novos aspectos desse conceito foram abordados. Nesse sentido, a modelagem matemática pode ser encarada como um meio oportuno de colocar os alunos diante de situações que requerem diferentes usos da linguagem matemática, contribuindo para a formação de conceitos.

Vale a pena esclarecer que fazer modelagem matemática não garante a aprendizagem matemática como consequência. A aprendizagem, segundo Wittgenstein, faz parte de um treinamento, de uma formação. Os alunos precisam aprender as regras que estão em jogo, precisam se inserir nos *jogos de linguagem* associados à matemática. E essa inserção se dá por meio das relações sociais entre os sujeitos, por meio das experiências vividas, a partir das práticas e atividades desenvolvidas no interior de uma *forma de vida*. O professor, portanto, que orienta a atividade de modelagem matemática, precisa estar consciente de seu papel – e ensinar as regras, axiomas, teoremas etc. para seus alunos.

Isso implica e justifica que os usos da matemática nas atividades de modelagem matemática desenvolvidas em sala de aula estão, de modo geral, em acordo com os conteúdos matemáticos indicados para serem abordados naquele ano escolar (BASSANEZI, 2004), uma vez que os alunos usam para resolver as atividades conceitos já conhecidos, ou, novos conceitos que podem ser inseridos pelo professor por meio das atividades de modelagem.

Nessa perspectiva, conhecer o procedimento associado ao desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática pode ser útil na formação de conceitos e garantir que as ações requeridas em uma atividade de modelagem matemática – as quais apontamos por meio dos indicadores emergentes nas análises dos dados – sejam realizadas.

Desse modo, podemos dizer que o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática envolve um modo de agir característico, com ações e encaminhamentos específicos, que constitui seu procedimento. Podemos dizer, portanto, que a prática da modelagem matemática no âmbito da Educação Matemática pode ser entendida como um *jogo de linguagem* associado ao fazer matemática, e como tal envolve regras que precisam ser seguidas, pois, como colocou Izmirli (2013), ao inserir-se em um determinado contexto é preciso agir conforme o *jogo*, respeitar as regras que o normatizam e, mais que isso, concordar não apenas nos julgamentos, mas na *forma de vida*.

Para jogar esse *jogo de linguagem* que constitui o fazer modelagem matemática, portanto, os alunos precisam aprender a jogar conforme suas regras e, nesse sentido, os momentos de familiarização sugeridos por Almeida e Dias (2004) desempenharam um importante papel: o de “treinar” os alunos a agir em conformidade com as regras do jogo, em outras palavras, de possibilitar que os alunos aprendam a fazer modelagem.

Para aprender a fazer modelagem matemática, contudo, Bassanezi (2015) sugere que além de contar com a orientação de modeladores mais experientes – e aqui se mostra relevante a abordagem da modelagem matemática nos cursos de formação de professores –, os alunos devem vivenciar experiências de modelagem matemática, o que sugere que a modelagem matemática seja inserida desde cedo na sala de aula. E, nesse contexto, nossa pesquisa mostra que os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental são não apenas capazes de fazer modelagem matemática, mas também de compreender o procedimento associado à essa prática e discuti-lo.

Durante o desenvolvimento das atividades de modelagem matemática discutimos com os alunos, em vários momentos, a respeito das ações empreendidas. Alunos do 1º ao 5º ano foram capazes de debater e indicar essas ações, que nos auxiliaram a construir as configurações de modelagem matemática apresentadas. Nesses momentos, o entendimento dos alunos a respeito do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática foi revelado e particularidades associadas aos anos iniciais do Ensino Fundamental começaram a ser evidenciadas.

Essas particularidades estão associadas à idade, à estrutura da organização escolar, à forma de lidar com os conteúdos matemáticos, às estratégias de ensino, enfim, a vários aspectos que singularizam a prática da modelagem matemática em cada contexto (DOERR; LESH, 2011). Diante dessas particularidades, podemos, inclusive, falar de uma *forma de vida* associada aos anos iniciais do Ensino Fundamental, pois quando esse nível de escolaridade é comparado com outros, identificamos hábitos, costumes e práticas próprias, que envolvem diferentes estilos de pensamento e interesses.

Por conta dessa *forma de vida*, os alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental apresentam uma visão de mundo e de problema diferente de outros níveis de escolaridade, e, quando engajados em uma atividade de modelagem matemática, conduzem encaminhamentos como os sistematizados nesta pesquisa.

Diferentes dos encaminhamentos que, frequentemente, são descritos na literatura, os encaminhamentos dos alunos dos anos iniciais revelam particularidades que nos levam a pensar e refletir a respeito da identidade da modelagem no âmbito da Educação Matemática.

Essas particularidades contemplam, de forma sintética, a ludicidade associada aos interesses dos alunos durante a escolha do tema e formulação do problema; discussões voltadas para a apresentação da matemática aos alunos, que estão no início de sua jornada escolar; o uso da matemática para expressar as regularidades observadas e generalizar situações, o que implica na construção de modelos matemáticos característicos (desenhos, gráficos pictóricos e gráficos de barras, operações aritméticas, textos, tabelas etc.); o uso de materiais manipuláveis para auxiliar no entendimento da situação e na resolução do problema; a maneira que os alunos justificam seu desenvolvimento matemático, amparada na língua materna; a organização dos alunos, tanto no que diz respeito à disposição em grupos, quanto aos seus registros; e a socialização dos resultados, que deve ser incentivada por meio de questionamentos de colegas e do professor.

Fazer modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, portanto, não implica em mudanças nas bases epistemológicas e/ou ontológicas da modelagem no âmbito da Educação Matemática, mas requer o reconhecimento de que determinadas ações podem ser realizadas de maneiras diferentes das quais são comumente relatadas na literatura.

> Embora a modelagem matemática seja geralmente associada a cursos terciários [Ensino Superior] ou, de forma crescente, com o nível de educação secundário [Ensino Médio], uma exposição inicial das ideias essenciais de modelagem pode fornecer uma base sólida para aplicar matemática competentemente já no nível da escola primária [anos iniciais do Ensino Fundamental] (DOOREN et al., 2011, p. 47-48).

"A criança aprende fazendo, refazendo, e observando" (CERQUETTI-ABERCANE; BERDONNEAU, 1997, p. 7), ela aprende a partir de sua participação em diferentes jogos de linguagem, como argumenta Wittgenstein.

Nesse contexto, corroboramos com o argumento de English (2010) que sugere que uma abordagem mais orientada da resolução de problemas nos anos iniciais do Ensino Fundamental – e outros níveis de escolaridade – é necessária e que a modelagem matemática oferece tal abordagem, uma vez que possibilita aos alunos a participação em diferentes *jogos de linguagem*. Diante disso, defendemos que a modelagem matemática deve ser inserida na sala de aula desde os primeiros anos escolares.

5.2 Por que concluir? Últimas palavras, início de uma nova jornada

A realização desta pesquisa, além de me proporcionar uma satisfação pessoal e profissional, abriu novos caminhos e rumos para a pesquisa em modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Ela vem para suprir uma necessidade da área da modelagem na Educação Matemática, no que se refere a como fazer modelagem matemática nesse nível de escolaridade, uma vez que poucos relatos de pesquisa a esse respeito são observados no âmbito do cenário científico.

Com essa intenção, caracterizamos três configurações a partir do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em cinco turmas: 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental. Essas configurações fornecem um panorama de como atividades de modelagem matemática foram desenvolvidas por essas turmas, de como os alunos dos anos iniciais lidam com a matemática e com sua linguagem nesse contexto e de como eles entendem esse tipo de atividade e seu desenvolvimento.

A pesquisa propôs, ainda, um (re)pensar nas práticas de modelagem matemática, propondo uma reconstrução de sua identidade, de modo a conhecer e contemplar os encaminhamentos dos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Sob esse direcionamento, o modo de ver a modelagem matemática como um procedimento de produção de modelos matemáticos para lidar com situações complexas e problemas reais é colocado em discussão, vislumbrando um modo de ver a modelagem matemática como uma atividade que pode assumir diferentes encaminhamentos e configurações, conforme interesses e conhecimentos daqueles que se envolvem nessa maneira de *fazer matemática*, um modo de ver aberto às particularidades e às especificidades que dizem respeito aos sujeitos envolvidos, direcionando nossa discussão para a prática da modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Ao considerar as formas de organização do ensino – conforme Moretti e Souza (2015), determinantes na qualidade das situações que os professores proporcionam a seus alunos –, em um ambiente em que a organização escolar contribui para que diferentes conhecimentos, de diferentes disciplinas sejam acionados e empregados na resolução de problemas advindos de situações reais, pensamos que a modelagem matemática é uma prática que deve ser incentivada.

Embora exista a hora da matemática, a hora do português, a hora de ciências... a formação das professoras e a organização escolar podem contribuir para que sejam produzidos conhecimentos interdisciplinares. Uma vez que a criança não aprende por "fatias" separadas por áreas do conhecimento, também a prática escolar para crianças deve priorizar situações de ensino nas quais diferentes conhecimentos possam se integrar. No desenvolvimento dessas situações de ensino intencionalmente selecionadas, os conteúdos específicos manifestam-se de forma mediada pela ação dos professores e socialmente significada na atividade infantil (MORETTI; SOUZA, 2015, p. 16-17).

Nesse sentido, o modo como são organizadas as aulas nos anos iniciais sugere possibilidades potenciais para as discussões que emergem em atividades de modelagem matemática, pois elas não se restringem só à matemática ou ao contexto do problema, mas são encaminhadas na direção de um entendimento proveniente dos entrelaçamentos entre aspectos de ambos.

Além disso, a dinâmica das aulas, a formação e a atuação do professor, bem como o seu envolvimento com os alunos, também se mostram como especificidades a considerar. O fato de um professor ministrar disciplinas diferentes faz com que ele passe mais tempo com os alunos, criando laços diferentes dos criados nos anos posteriores e criando oportunidades de integrar os assuntos das diferentes disciplinas que ministra, favorecendo a abordagem dos conteúdos sob uma perspectiva interdisciplinar (MALHEIROS, 2014).

Em linhas gerais, ao analisarmos os encaminhamentos dos alunos observamos que alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental não só têm condições de fazer modelagem matemática, como também têm condições de discutir o fazer modelagem matemática, ou seja, de discutir o procedimento envolvido no desenvolvimento de uma atividade de modelagem, de discutir como se faz matemática dessa maneira.

O desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, portanto, pode, além de possibilitar a formação de conceitos, proporcionar o desenvolvimento de habilidades e competências matemáticas (BLOMHØJ; JENSEN, 2003; MAAß, 2006). Temos aqui dois lados de uma mesma moeda: se, por um lado, os alunos do 4º e 5º apresentaram mais autonomia no uso da matemática e de sua linguagem e aparentaram estar mais preparados matematicamente para a análise de situações mediada pelo desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, considerando a variedade de usos da matemática que observamos em suas produções; por outro lado, observamos que os alunos do 1º ano apresentaram mais aceitabilidade quanto à dinâmica das aulas mediadas pela modelagem matemática, pois enquanto alunos do 5º ano já estão habituados a uma prática matemática, geralmente, sintetizada pela exposição de conteúdos, exemplos e resolução de exercícios, alunos dos anos iniciais ainda não possuem essa familiaridade e, por isso, podem se habituar com mais facilidade a outras práticas como a modelagem matemática.

Esta pesquisa, portanto, contribui para colocar em xeque a dúvida quanto à viabilidade da prática da modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, trazendo relatos de experiências que podem contribuir com professores dos anos iniciais que desejam inserir a modelagem matemática em suas práticas de sala de aula.

Com essa pesquisa, temos a intenção de abrir novas frentes para a pesquisa e práticas de modelagem no âmbito da Educação Matemática, particularmente de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Nesse contexto, muita coisa pode, ainda, ser investigada.

- Questões associadas ao desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em sala de aula (organização dos alunos, evolução dos modelos, papel do professor);
- Identificação de *semelhanças de família* entre o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática por alunos dos anos iniciais e por alunos de outros níveis de escolaridade;
- Discussão do papel dos modelos matemáticos produzidos pelos alunos dos anos iniciais, bem como o desenvolvimento de uma educação matemática crítica a partir do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática nesse contexto;
- Formação do professor dos anos iniciais do Ensino Fundamental em modelagem matemática.

Entre várias outras questões que poderíamos aqui citar.

Esta pesquisa, portanto, não se encerra por aqui, ela é só o início de uma nova jornada. Então por que concluir se ainda há tanto o que investigar?

Referências

ALMEIDA, L. M. W. The “practice” of mathematical modeling under a wittgensteinian perspective. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, SBEM, v. 4, n. 2, p. 98-113, 2014.

ALMEIDA, L. M. W. Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. **Zetetiké**, Campinas, v. 18, n. temático, p. 387-414, 2010.

ALMEIDA, L. M. W.; DIAS, M. R. Um estudo sobre o uso da Modelagem Matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. **Bolema**, Rio Claro, n. 22, p. 19-35, 2004.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. The meaning of the problem in a mathematical modelling activity. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: Cultural, Social and Cognitive Influences. New York: Springer, 2015. p. 45-54.

ALMEIDA, L. M. W.; SOUSA, B. N. P. A.; TORTOLA, E. Desdobramentos para a modelagem matemática decorrentes da formulação de hipóteses. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2015, Pirenópolis. **Anais**... Pirenópolis: SBEM, 2015.

ALMEIDA, L. M. W.; TORTOLA, E. Modelagem matemática no Ensino Fundamental: a linguagem de alunos como foco de análise. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, São Paulo, v. 7, n. 1, p. 111-142, 2014.

ALMEIDA, L. M. W.; TORTOLA, E.; MERLI, R. F. Modelagem matemática – com o que estamos lidando: modelos diferentes ou linguagens diferentes? **Acta Scientiae**, Canoas, v. 14, n. 2, p. 215-239, maio/ago. 2012.

ALMEIDA, L. M. W.; VERTUAN, R. E. Discussões sobre “como fazer” Modelagem Matemática na sala de aula. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. (Orgs.). **Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática**: relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina: Eduel, 2011. p. 19-43.

ALMEIDA, L. W.; SILVA, K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2012.

ARAÚJO, J. L.; CAMPOS, I. S. Espaço de negociação: inserindo elementos sociais na compreensão de lucro. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2015, Pirenópolis. **Anais**... Pirenópolis: SBEM, 2015.

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção de conhecimentos**: uma perspectiva cognitiva. Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 2000.

BAHMAEI, F. Mathematical modelling in primary school, advantages and challenges. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, Blumenau, v. 1, n. 9, p. 3-13, 2014.

BARBOSA, J. C. Modelagem e modelos matemáticos na Educação Científica. **Alexandria**, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 69-85, jul. 2009.

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática: O que é? Por que? Como? **Veritati**, Salvador, n. 4, p. 73- 80, 2004.

BARBOSA, J. C. Uma perspectiva de Modelagem Matemática. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2003, Piracicaba. **Anais**...Piracicaba: UNIMEP, 2003.

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. 3. ed. Lisboa: Edições 70, 2011.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**: uma nova estratégia. 2. ed. São Paulo: Contexto, 2004.

BASSANEZI, R. C. **Modelagem matemática**: teoria e prática. São Paulo: Contexto, 2015.

BEAN, D. As premissas e os pressupostos na construção conceitual de modelos. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2012, Petrópolis. **Anais**... Petrópolis: SBEM, 2012.

BEAN, D. O que é modelagem matemática? **Educação Matemática em Revista**, São Paulo, v. 8, n. 9-10, p. 49-57, abr. 2001.

BERGER, P. L.; LUCKMANN, T. **A construção social da realidade**: tratado de sociologia do conhecimento. 28.ed. Petrópolis: Vozes, 2008.

BICUDO, M. A. V.; GARNICA, A. V. M. **Filosofia da Educação Matemática**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

BICUDO, M. A. V.; KLÜBER, T. E. Pesquisa em modelagem matemática no Brasil: a caminho de uma metacompreensão. **Cadernos de pesquisa**, São Paulo, v. 41, n. 144, p. 904-927, set./dez. 2011.

BIEMBENGUT, M. S. 30 anos de modelagem matemática na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **Alexandria**, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 7-32, jul. 2009.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem Matemática & Implicações no Ensino-Aprendizagem de Matemática**. Editora da FURB: Blumenau, 1999.

BLOMHØJ, M.; JENSEN, T. H. Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. **Teaching Mathematics and its Applications**, Oxford, v. 22, n. 3, p. 123-139, sep. 2003.

BLUM, W. ICMI Study 14: applications and modelling in mathematics education – discussion document. **Educational Studies in Mathematics**, New York, v. 51, n. 1-2, p. 149-171, jul. 2002.

BLUM, W.; NISS, M. Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects: State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. **Educational Studies in Mathematics**, New York, v. 22, n. 1, p. 37-68, fev. 1991.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação Qualitativa em Educação Matemática**: uma introdução à teoria e aos métodos. Lisboa: Porto Editora, 1994.

BORBA, A. M.; GOULART, C. As diversas expressões e o desenvolvimento da criança na escola. In: BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Ensino Fundamental de Nove anos**: orientações para a inclusão da criança de seis anos de idade. Brasilia: MEC/SEB, 2007. p.47-56.

BORBA, M. C. A pesquisa qualitativa em Educação Matemática. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 27., 2004, Caxambu. **Anais**... Caxambu: Anped, 2004.

BORBA, M. C. Potential scenarios for Internet use in the mathematics classroom. **ZDM**, Berlin, v. 41, n. 4, p. 453-465, ago. 2009.

BORSSOI, A. H. **A aprendizagem significativa em atividades de modelagem matemática como estratégia de ensino**. 2004. 140 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2004.

BORSSOI, A. H. **Modelagem matemática, aprendizagem significativa e tecnologias**: articulações em diferentes contextos educacionais. 2013. 255 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Concepções e Orientações Curriculares para a Educação Básica. **Ensino Fundamental de nove anos**: passo a passo do processo de implantação. Brasília: SEB/MEC, 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BURAK, D. Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. **Revista de Modelagem na Educação Matemática**, Blumenau, v. 1, n. 1, p. 10-27, 2010.

BURAK, D.; KAVIATKOVSKI, M. A. C. Considerações sobre a modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental a partir de atividades desenvolvidas em sala de aula. In: ALENCAR, E. S.; LAUTENSCHLAGER, E. (Orgs.). **Modelagem matemática nos anos iniciais**. São Paulo: Editora Sucesso, 2014. p. 51-62.

BURAK, D.; MARTINS, M. A. Modelagem matemática nos anos iniciais da Educação Básica. **Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Curitiba, v. 8, n. 1, p. 92-111, jan./abr. 2015.

BUTCKE, D. A. P.; TORTOLA, E. Por que a maioria das embalagens tem formato de paralelepípedo? Uma investigação por meio da modelagem matemática nos anos iniciais. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2015, São Carlos. **Anais**... São Carlos: UFSCar, 2015.

CALDEIRA, A. D. **Etnomodelagem e suas relações com a Educação Matemática na infância**. In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (org.). Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais. Recife: SBEM, 2007, p. 81-97.

CENTURIÓN, M.; SCALA, J.; RODRIGUES, A. **Porta Aberta**: Matemática. São Paulo: FTD, 2011.

CEOLIM, A. J. **Modelagem Matemática na Educação Básica**: obstáculos e dificuldades apontados por professores. 2015. 151 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos. 2015.

CERQUETTI-ABERKANE, F.; BERDONNEAU, C. **O ensino da matemática na educação infantil.** Tradução de E. Gruman. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997. Tradução de: Enseigner les mathématiques à la maternelle.

CIFUENTES, J. C.; NEGRELLI, L. G. O processo de Modelagem Matemática e a discretização de modelos contínuos como recurso de criação didática. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. (Org.). **Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática**: relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina: Eduel, 2011. p. 123-140.

COMENIUS, I. A. **Didactica Magna**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001.

D'AMBROSIO, U. Mathematical modelling as a strategy for building-up systems of knowledge in different cultural environments. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: Cultural, Social and Cognitive Influences. New York: Springer, 2015. p. 35-44.

DALLA VECCHIA, R.; MALTEMPI, M. V. Modelagem Matemática e Tecnologias de Informação e Comunicação: a realidade do mundo cibernético como um vetor de virtualização. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 43, p. 963-990, ago. 2012.

DIAS, J. L.; CHAVES, M. I. A. Diálogos com/na modelagem matemática nas séries iniciais. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2009, Londrina. **Anais**... Londrina: UEL, 2009.

DOERR, H. M.; ENGLISH, L. D. A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 34, n. 2, p. 110-136. 2003.

DOERR, H. M.; LESH, R. Models and Modelling Perspectives on teaching and learning mathematics in the twenty-first century. In: KAISER, G.; et al. (Eds.). **Trends in teaching and learning of mathematical modelling**. New York: Springer, 2011. p. 247-268.

DOOREN, W. V.; et al. Word problem classification: a promising modelling task at the Elementary Level. In: KAISER, G.; BLUM, W.; BORROMEO FERRI, R.; STILLMAN, G.

(Eds.). **Trends in teaching and learning of mathematical modelling**. New York: Springer, 2011. p. 47-56.

DOWNTON, A. Problem Posing: a possible pathway to mathematical modelling. In: STILLMAN, G. A.; et al. (eds.). **Teaching Mathematical Modelling**: connecting to research and practice. New York: Springer, 2013. p. 527-536.

ENGLISH, L. Mathematical modelling with Young learners. In: LAMON, S. J.; PARKER, W. A.; HOUSTON, S. K. (Eds.). **Mathematical Modelling**: a way of life. Chichester: Horwood Publishing, 2003. p. 3-18.

ENGLISH, L. D. Modelling as a vehicle for philosophical inquiry in the mathematics curriculum. **Analytic Teaching and Philosophical Praxis**, Viterbo, v. 34, n. 1, p. 46-57, 2013.

ENGLISH, L. D. Modeling with Complex Data in the Primary School. In: LESH, R.; et al. (Eds.). **Modeling students' mathematical modeling competencies**. 2010. Springer: New York, London, 2010. p. 287-300.

ENGLISH, L. D. Mathematical modeling in the primary school: children's construction of a consumer guide. **Educational Studies in Mathematics**, v. 63, n. 3, p. 303-323, 2006.

ENGLISH, L. D. Promoting interdisciplinarity through mathematical modelling. **ZDM**, v. 41, n. 1-2, p. 161-181, 2009.

ENGLISH, L. D.; WATTERS, J. J. Mathematical Modelling with 9-year-olds. In: CHICK, H. L.; VINCENT, J. L. (Eds.). **Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Melbourne, v. 2, p. 297-304, 2005.

ENGLISH, L. D.; WATTERS, J. J. Mathematical Modelling with young children. In: HØINES, J.; FUGLESTAD, A. B. (Eds.). **The 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. Bergen, v. 2, p. 335-342, 2004.

ERDOGAN, A. Primary teacher education students' ability to use functions as modeling tools. **Procedia - Social and Behavioral Sciences**, v. 2, n. 2, p. 4518-4522, 2010.

FIGUEIREDO, D. F.; KATO, L. A. Uma proposta de avaliação de aprendizagem em atividades de modelagem matemática na sala de aula. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 14, n. 2, p. 276-294, maio/ago. 2012.

FOX, J. A justification for mathematical modelling experiences in the preparatory classroom. In: GROOTENBOER, P.; ZEVENBERGEN, R.; CHINNAPPAN, M. (Eds.). **Proceedings 29th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia**. Canberra: MERGA, 2006. p. 221-228.

FREJD, P. Modes of modelling assessment – a literature review. **Educational Studies in Mathematics**, New York, v. 84, n. 3, p. 413-438, nov. 2013.

GALBRAITH, P. Models of modelling: genres, purposes or perspectives. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, Blumenau, v. 1, n. 5, p. 3-16, 2012.

GARNICA, A. V. M. Algumas notas sobre pesquisa qualitativa e fenomenologia. **Interface** – Comunicação, Saúde, Educação, Botucatu, v. 1, n. 1, p. 109-122, 1997.

GARNICA, A. V. M. História Oral e educação Matemática. In: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola. (Orgs.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

GEROLOMO, A. M. L; MILANI, C. S.; ALMEIDA, L. M. W. Indícios de aprendizagem significativa em atividade de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. 9., 2015, São Carlos. **Anais**... São Carlos: UFSCAR, 2015.

GINO, A. S.; GOMES, M. L. M. Professoras dos anos iniciais da educação básica: aproximações e afastamentos em relação à Matemática. **Educação**, Porto Alegre, v. 37, n. 3, p. 471-481, set.-dez. 2014.

GOTTSCHALK, C. M. C. A construção e transmissão do conhecimento matemático sob uma perspectiva wittgensteiniana. **Cadernos Cedes**, Campinas, v. 8, n. 74, p. 75-96, jan./abr. 2008.

GOTTSCHALK, C. M. C. A Natureza do Conhecimento Matemático sob a Perspectiva de Wittgenstein: algumas implicações educacionais. **Cadernos de História e Filosofia da Ciência**, Campinas, v. 14, n. 2, p. 305-334, jul.-dez. 2004.

GOTTSCHALK, C. M. C. Educational implications of some of wittgenstein's remarks on mathematics: proposition, inference and proof. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, SBEM, v. 4, n. 2, p. 36-51, 2014.

GOULART, C. A organização do trabalho pedagógico: alfabetização e letramento como eixos orientadores. In: BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Ensino**

Fundamental de Nove anos: orientações para a inclusão da criança de seis anos de idade. Brasilia: MEC/SEB, 2007. p.85-96.

GREEFRATH, G. Problem solving methods for mathematical modelling. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: Cultural, Social and Cognitive Influences. New York: Springer, 2015. p. 173-184.

GREER, B.; VERSCHAFFEL, L.; MUKHOPADHYAY, S. Modelling for Life: Mathematics and Children’s Experience. In: BLUM, W.; et al. (Eds.). **Modelling and Applications in Mathematics Education**. New York: Springer, 2007.

HERMÍNIO, H. G. B. **O processo de escolha dos temas dos projetos de modelagem matemática**. 2009. 139 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. 2009.

HUSSERL, E. **A Crise das Ciências Européias e a Fenomenologia Transcendental**: uma introdução à filosofia fenomenologia. Forense Universitária: Rio de Janeiro, 2012.

IZMIRLI, I. M. Wittgenstein as a social constructivist. **Philosophy of Mathematics Education Journal**, Exeter, n. 27, p. 1-12, abr. 2013.

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. **ZDM**, v. 38, n. 3. p. 302-310, jun. 2006.

KLÜBER, T. E. **Modelagem Matemática e Etnomatemática no contexto da Educação Matemática**: aspectos filosóficos e epistemológicos. 2007. 151 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa. 2007.

KNIJNIK, G. Fazer perguntas... ter a cabeça cheia de pontos de interrogação: uma discussão sobre etnomatemática e modelagem matemática escolar. **Unión**: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, n. 44, p. 10-23, dez. 2015.

KRAMER, S. A infância e sua singularidade. In: BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Ensino Fundamental de Nove anos**: orientações para a inclusão da criança de seis anos de idade. Brasilia: MEC/SEB, 2007. p.13-23.

LAMON, S. J. Modelling in Elementary School: helping young students to see the world mathematically. In: LAMON, S. J.; PARKER, W. A.; HOUSTON, S. K. (Eds.). **Mathematical Modelling**: a way of life. Chichester: Horwood Publishing, 2003. p. 19-36.

LARSEN, I. B. What should be asked of a computer program for mathematical modelling in primary/lower secondary school? In: MATOS, J. F.; et al. (Eds.). ‘Modelling and Mathematics Education. **ICTMA 9**: **Applications in Science and Technology**. Chichester: Horwood Publishing, 2001. p. 161-170.

LEISS, D.; et al. The role of situation model in mathematical modelling – task analyses, student competencies, and teacher interventions. **Journal für Mathematik-Didaktik**, Berlin, v. 31, n. 1, p. 119-141, 2010.

LESH, R.; YOON, C. What is distinctive in (our views about) models and modelling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching. In: BLUM, W.; et al. (Eds.). **Modelling and applications in mathematics education**: the 14th ICMI study. New York: Springer, 2007. p. 161-170.

LEVY, L. F.; SANTO, A. O. E. Filosofia e Modelagem Matemática. **Unión**: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, n. 8, p. 11-21, dez. 2006.

LINGEFJÄRD, T. Faces of mathematical modeling. **ZDM**, Berlim, v. 38, n. 2, p. 96-112, 2006.

LINGEFJÄRD, T. Teaching and assessing mathematical modeling. **Teaching Mathematics and its Applications**, Oxford, v. 21, n. 2, p. 75-83, jun. 2002.

LÜDKE, M. O professor, seu saber e sua pesquisa. **Educação & Sociedade**, v. 22, n. 74, p. 77-96, abr. 2001.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação**: abordagens qualitativas. 2. ed. São Paulo: E.P.U., 2013.

LUNA, A. V. Modelagem Matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental: um estudo de caso no 1º ciclo. In: CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 12, Santiago de Querétaro. **Anais**... Santiago de Querétaro: Comitê Interamericano de Educación Matemática, 2007.

LUNA, A. V. A.; ALVES, J. Modelagem Matemática: as interações discursivas de crianças da 4ª série a partir de um estudo sobre anorexia. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2007, Ouro Preto. **Anais**… Ouro Preto: UFOP, 2007. p. 855-876.

LUNA, A. V. A.; SANTIAGO, A. R. C. M.; ANDRADE, M. C. A organização e o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática por professores polivalentes. In:

CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2013, Santa Maria. **Anais**... Santa Maria: Unifra, 2013.

LUNA, A. V. A.; SOUZA, E. G.; LIMA, L. B. S. Mathematical Texts in a Mathematical Modelling Learning Environment in Primary School. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: Cultural, Social and Cognitive Influences. New York: Springer, 2015. p. 535-544.

LUNA, A. V. A.; SOUZA, E. G.; SANTIAGO, A. R. C. M. A Modelagem Matemática nas Séries Iniciais: o germém da criticidade. **Alexandria:** Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v. 2, n. 2, p. 135-157, jul. 2009.

MAAß, K. What are modelling competencies? **ZDM**, Berlim, v. 38, n. 2, p. 113-142, 2006.

MACHADO, N. J. **Matemática e língua materna**: análise de uma impregnação mútua. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

MALHEIROS, A. P. S. Possibilidades da modelagem matemática na formação dos professores dos anos iniciais. In: ALENCAR, E. S.; LAUTENSCHLAGER, E. (Orgs.). **Modelagem matemática nos anos iniciais**. São Paulo: Editora Sucesso, 2014. p. 25-36.

MALHEIROS, A. P. S. Pesquisas em modelagem matemática e diferentes tendências em Educação e em Educação Matemática. **Bolema**, Rio Claro, v. 26, n. 43, p. 861-882, ago. 2012.

MEERWALDT, D.; BORROMEO FERRI, R.; NEVERS, P. Philosophizing with Children in the Course of Solving Modeling Problems in a Sixth Grade Mathematics Classroom. **Analytic Teaching and Philosophical Praxis**, Viterbo, v. 34, n. 1, p. 80-92, 2013.

MEKSENAS, P. **Pesquisa social e ação pedagógica**: conceitos, métodos e práticas. São Paulo: Loyola, 2002.

MELILLO, C.; BEAN, D. Modelagem matemática na atribuição de probabilidades em jogos do campeonato brasileiro de futebol. In: ALMEIDA, L. M. W.; ARAÚJO, J. L.; BISOGNIN, E. (Orgs.). **Práticas de Modelagem Matemática na Educação Matemática**: relatos de experiências e propostas pedagógicas. Londrina: Eduel, 2011. p. 83-104.

MENDES, I. A.; SANTOS FILHO, A.; PIRES, M. A. L. M. **Práticas Matemáticas em atividades didáticas para os anos iniciais.** São Paulo: Livraria da Física, 2011.

MIGUEL, A. Is the mathematics education a problem for the school or is the school a problem for the mathematics education? **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, SBEM, v. 4, n. 2, p. 5-35, 2014.

MORAES, R. Análise de Conteúdo. **Educação**, Porto Alegre, v. 22, n. 37, p. 7-32, 1999.

MORETTI, V. D.; SOUZA, N. M. M. **Educação Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**: princípios e práticas pedagógicas. São Paulo: Cortez, 2015. (Coleção biblioteca básica de alfabetização e letramento).

MOUSOULIDES, N. G.; ENGLISH, L. D. Engineering Model Eliciting Activities for Elementary School Students. In: KAISER, G.; et al. (Eds.). **Trends in teaching and learning of mathematical modelling**. New York: Springer, 2011. p. 221-230.

MURATA, A.; KATTUBADI, S. Grade 3 students' mathematization through modeling: Situation models and solution models with mutli-digit subtraction problem solving. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 31, p. 15-28, 2012.

NACARATO, A. M.; MENGALI, B. L. S.; PASSOS, C. L. B. **A matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**: tecendo fios do ensinar e do aprender. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

NAZARÉ, B. G.; SOUZA, E. G. Quais conteúdos matemáticos são abordados em modelagem matemática? In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2015, São Carlos. **Anais**... São Carlos: UFSCAR, 2015.

NISS, M. Aims and scope of applications and modelling in mathematics curricula. In: BLUM, W.; NISS, M.; HUNTLEY, I. **Modelling, applications, and applied problem solving**: teaching mathematics in a real context. Chinchester: Horwood, 1989. p. 22-31.

NISS, M. Prescriptive Modelling – Challenges and Opportunities. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: Cultural, Social and Cognitive Influences. New York: Springer, 2015. p. 67-80.

OLIVEIRA, A. M. P. **Modelagem Matemática e as tensões nos discursos dos professores**. 2010. 199 f. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) – Universidade Federal da Bahia, Instituto de Física, Salvador. 2010.

OTTE, M. F.; BARROS, L. G. X. What is Mathematics, Really? Who Wants to Know? **Bolema**, Rio Claro, v. 29, n. 52, p. 756-772, ago. 2015.

POLLAK, H. O. Introduction: what is mathematical modeling? In: GOULD, H.; MURRAY, D. R.; SANFRATELLO, A. (Eds.). **Mathematical Modeling Handbook**. Bedford: Comap, 2012. p. viii-xi.

POLLAK, H. O. The Place of Mathematical Modelling in the System of Mathematics Education: Perspective and Prospect. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: Cultural, Social and Cognitive Influences. New York: Springer, 2015. p. 265-276.

QUARTIERI, M. T. **A modelagem matemática na escola básica**: a mobilização do interesse do aluno e o privilegiamento da matemática escolar. 2012. 199 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade do Vale do Rio dos Sinos, São Leopoldo. 2012.

REHFELDT, M. J. H.; GIONGO, I. M.; QUARTIERI, M. T. A construção de propostas de modelagem matemática em cursos de formação continuada para professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8., 2013, Santa Maria. **Anais**... Santa Maria: Unifra, 2013.2013

SCHUKAJLOW, S.; KOLTER, J.; BLUM, W. Scaffolding mathematical modelling with a solution plan. **ZDM**, Berlin, v. 47, n. 7, p. 1241-1254, nov. 2015.

SILVA, J. J. **Filosofias da matemática**. São Paulo: UNESP, 2007.

SILVA, V. S.; KLÜBER, T. E. Modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental: reflexões e apologia aos seus usos. In: ALENCAR, E. S.; LAUTENSCHLAGER, E. (Orgs.). **Modelagem matemática nos anos iniciais**. São Paulo: Editora Sucesso, 2014. p. 7-24.

SILVA, V. S.; KLÜBER, T. E. Modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental: uma investigação imperativa. **Revista Eletrônica de Educação**, São Carlos, v. 6, n. 2, p. 228-249, 2012.

SILVEIRA, E. **Modelagem Matemática em Educação no Brasil**: entendendo o universo de teses e dissertações. 2007. 197 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2007.

SILVEIRA, E.; CALDEIRA, A. D. Modelagem na Educação Matemática: é possível fazer sem saber? In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais**... Salvador: SBEM, 2010.

SILVEIRA, M. R. A. Interpretação e comunicação em matemática. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2., 2008, Recife. **Anais**... Recife: UFRPE, 2008.

SOUZA, E. G.; LUNA, A. V. A. Modelagem Matemática nos Anos Iniciais: pesquisas, práticas e formação de professores. **REVEMAT**, Florianópolis, v. 9, Ed. Temática, p. 57-73, jun. 2014.

SOUZA, E. G.; LUNA, A. V. A. Modos de praticar matemática em modelagem matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6., 2015, Pirenópolis. **Anais**... Pirenópolis: SBEM, 2015.

SOUZA, L. B.; SANTIAGO, A. R. C. M.; LUNA, A.V. A. Modelagem matemática nos anos iniciais: uma análise sobre o comportamento dos motoristas no trânsito numa perspectiva transdisciplinar. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., 2011, Belém. **Anais**... Belém: UFPA, 2011.

STILLMAN, G. The emperor‟s new clothes? Teaching and assessment of mathematical applications at the senior secondary level. In: GALBRAITH, P.; et. al. (Eds.). **Mathematical modelling**: Teaching and assessment in a technology-rich world. West Sussex: Horwood Publishing, 1998. p. 243-254.

STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. Cultural, Social, Cognitive and Research Influences on Mathematical Modelling Education. In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (Eds.). **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**: Cultural, Social and Cognitive Influences. Switzerland: Springer, 2015. p. 1-32.

TORTOLA, E. **Os usos da linguagem em atividades de modelagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2012. 168 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

TORTOLA, E.; ALMEIDA, L. M. W. Reflexões a respeito do uso da modelagem matemática em aulas nos anos inicias do Ensino Fundamental. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, Brasília, v. 94, n. 237, p. 619-642, maio/ago. 2013.

VILELA, D. S. **Matemáticas nos usos e jogos de linguagem**: ampliando concepções na Educação Matemática. 2007. 247 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2007.

WESSELS, H. Levels of mathematical creativity in model-eliciting activities. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, Blumenau, v. 1, n. 9, p. 22-40, 2014.

WITTGENSTEIN, L. **Investigações Filosóficas**. 7. ed. Tradução de Marcos G. Montagnoli. Petrópolis: Editora Vozes; Bragança Paulista: Editora Universitária São Francisco, 2012. (Coleção Pensamento Humano). Tradução de: Philosophische Untersuchungen.

WITTGENSTEIN, L. **Remarks on the Foundations of Mathematics**. 3ª reimpressão. Cambridge: The MIT Press, 1994.

WITTGENSTEIN, L. **Tractatus Logico-Philosophicus**. Salt Lake City: Project Gutenberg, 2010. Disponível em: <https://www.gutenberg.org/files/5740/5740-pdf.pdf>. Acesso em: 15 mar. 2016.

WITTGESNTEIN, L. **Gramática Filosófica**. 2. ed. Tradução de Luís Carlos Borges. São Paulo: Edições Loyola, 2003. Tradução de: Philosophical Grammar.

WOOLEY, T. E.; et al. How long can we survive? In: SMITH?, R. **Mathematical Modelling of Zombies**. Ottawa: University of Ottawa Press, 2014.

WRIGHT, C. **Wittgenstein on the foundations of mathematics.** Londres: Duckworth, 1980.

ZILL, D. G. **Equações diferenciais com aplicações em modelagem**. 9. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2014.

Apêndices

APÊNDICE A

OFÍCIO PARA A SECRETARIA DE EDUCAÇÃO: AUTORIZAÇÃO PARA COLETA DE DADOS

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA

Londrina, 15 de abril de 2015

À Senhora Rosane Estela Raimundo Zampar
Secretária Municipal de Educação, Cultura e Esporte
Centro Cultural Alécio Rampazzo Soccal
Rua Presidente Tancredo de Almeida Neves – Centro
CEP: 87240-000, Terra Boa - PR

Assunto: Autorização para coleta de dados

Prezada Senhora

Vimos por meio deste, requerer a Vossa Senhoria autorização para realizar coleta de dados relativa ao desenvolvimento da pesquisa "O fazer modelagem matemática nos anos iniciais", associada à tese de doutorado de Emerson Tortola, matriculado sob o registro acadêmico nº 201312350097 no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina e sob orientação da professora doutora Lourdes Maria Werle de Almeida.

Os dados serão coletados com cinco turmas da Escola Municipal Princesa Isabel da cidade de Terra Boa e consistem em gravações em áudio e vídeo e imagens capturadas do desenvolvimento das atividades de modelagem matemática com os alunos das turmas. Todas as aulas serão acompanhadas pela professora titular das turmas.

O estudante e sua orientadora comprometem-se a utilizar os dados coletados apenas para fins de pesquisa e publicações associadas a essa, bem como a não divulgar a identidade dos alunos participantes, fazendo uso de nomes fictícios para se referir aos alunos e não incluindo imagens que possam permitir a sua identificação.

Atenciosamente

Lourdes Maria Werle de Almeida
Orientadora

Emerson Tortola
Estudante de Doutorado

APÊNDICE B

OFÍCIO PARA A ESCOLA: AUTORIZAÇÃO PARA COLETA DE DADOS

UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

Londrina, 15 de abril de 2015

À Senhora Rita de Cássia Maina Trento
Diretora
Escola Municipal Princesa Isabel
Rua Jairo Ferreira Marques, 1103 – Centro
CEP: 87240-000, Terra Boa - PR

Assunto: Autorização para coleta de dados

Prezada Senhora

Vimos por meio deste, requerer a Vossa Senhoria autorização para realizar coleta de dados relativa ao desenvolvimento da pesquisa "O fazer modelagem matemática nos anos iniciais", associada à tese de doutorado de Emerson Tortola, matriculado sob o registro acadêmico nº 201312350097 no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual de Londrina e sob orientação da professora doutora Lourdes Maria Werle de Almeida.

Os dados serão coletados com cinco turmas da Escola Municipal Princesa Isabel da cidade de Terra Boa e consistem em gravações em áudio e vídeo e imagens capturadas do desenvolvimento das atividades de modelagem matemática com os alunos das turmas. Todas as aulas serão acompanhadas pela professora titular das turmas.

O estudante e sua orientadora comprometem-se a utilizar os dados coletados apenas para fins de pesquisa e publicações associadas a essa, bem como a não divulgar a identidade dos alunos participantes, fazendo uso de nomes fictícios para se referir aos alunos e não incluindo imagens que possam permitir a sua identificação.

Atenciosamente

Lourdes Maria Werle de Almeida
Orientadora

Emerson Tortola
Estudante de Doutorado

APÊNDICE C

AS OUTRAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA DESENVOLVIDAS

AS OUTRAS ATIVIDADES DE MODELAGEM MATEMÁTICA DESENVOLVIDAS

Considerando que as demais atividades serão também utilizadas para a redação da tese, bem como serão analisadas e utilizadas para a caracterização das categorias emergentes, a seguir descrevemos, em linhas gerais, as demais atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos alunos no âmbito da pesquisa.

- Atividades desenvolvidas por todas as turmas

A atividade com o tema *desafio do balde de gelo*, teve como inspiração os vídeos postados nas redes sociais no ano de 2014, no qual muitas pessoas, inclusive famosos, jogaram um balde de água gelada ou com gelo na cabeça em uma campanha a favor da Esclerose Lateral Amiotrófica. O desafio apesar de ter uma boa intenção levou as pessoas a desperdiçar litros e litros de água. Os alunos, nessa atividade, estimaram quanto tempo levaria para todos os alunos da escola participarem do desafio e o volume de água que seria desperdiçado. Esquemas, tabelas e desenhos possibilitaram a realização de tais estimativas.

A atividade com o tema *coleta de lixo* surgiu a partir de uma entrevista realizada com garis da cidade, que forneceram informações acerca de como é feita a coleta, quanto lixo é produzido e do destino do lixo coletado. Nessa atividade os alunos foram orientados a identificar e/ou formular problemas para investigação. As turmas, em geral, calcularam quanto lixo é coletado por dia no município, qual região da cidade produz mais lixo, qual o caminho que eles indicariam para o caminhão fazer a coleta, quanto lixo é produzido por habitante e quanto lixo é produzido aproximadamente em suas casas, considerando a quantidade de moradores. A contagem, as quatro operações elementares da matemática e tópicos de geometria constituíram as estratégias utilizadas pelos alunos.

- Atividade desenvolvida por alunos do 1º ano

Na atividade com o tema *peixes* os alunos calcularam o volume de água necessário para colocar em um aquário, sabendo o porte e a quantidade de peixes que o habitarão. Reportagens obtidas em sites de pet shop serviram como fonte de informações, e desenhos e tabelas foram utilizados para modelar a situação-problema.

- Atividades desenvolvidas por alunos do 2º ano

Na atividade com o tema *joaninhas* os alunos estudaram como é determinada a cor das suas cascas. Combinações foram feitas de modo a determinar qual a chance de as cascas de uma joaninha filhote ser de uma determinada cor, sabendo a cor das cascas dos pais. A ideia de probabilidade foi discutida e, embora não se tenha utilizado essas denominações, os alunos anotaram o número de eventos possíveis e o número de eventos favoráveis, identificando o número de chances das asas serem de cada cor.

- Atividades desenvolvidas por alunos do 4º ano

Com relação ao tema *animais em extinção* os alunos pesquisaram informações acerca de quais animais estão em risco de extinção no Brasil e em que regiões eles se localizam. Dessa forma eles determinaram quais são as regiões brasileiras que têm mais animais 'famosos' em extinção. Além disso, eles fizeram uma estimativa de quantos animais são extintos com o passar dos anos. Um mapa do Brasil foi utilizado como modelo matemático na primeira situação e uma regra foi criada para calcular a quantidade de animais extintos na segunda situação.

Na atividade com o tema *sono* os alunos buscaram informações acerca de quantas horas é preciso dormir por dia, considerando a idade. Eles descobriram que o sono possui algumas etapas que não ocorrem simultaneamente e que cada etapa tem um papel específico, sendo uma dessas etapas responsável pela consolidação da aprendizagem. Nesse contexto, os alunos investigaram quanto tempo eles precisam dormir para que haja essa consolidação. Cálculos com as operações elementares e porcentagens foram os principais conteúdos matemáticos utilizados.

- Atividades desenvolvidas por alunos do 5º ano

Na atividade com o tema *crescimento das árvores* os alunos usaram como informação quanto cresce a cada dois anos a árvore pau-brasil e estimaram quanto tempo leva para ela chegar na sua altura máxima. Adição de parcelas iguais e divisão foram operações utilizadas para determinar uma resposta para o problema. Um gráfico foi produzido para descrever o crescimento investigado.

Com relação à atividade com o tema *cabelos* os alunos investigaram o crescimento dos fios de cabelo ao longo dos meses. Conhecendo o tempo de vida de um fio de cabelo eles determinaram qual é o comprimento máximo que um fio de cabelo geralmente atinge até que seja substituído por outro. Um gráfico foi confeccionado para expressar tal crescimento.

Por fim, na atividade com o tema *futebol* os alunos calcularam qual a quantidade de tinta necessária para pintar as linhas que demarcam as áreas do campo. Além disso, calcularam também qual é a área destinada a alguns jogadores. Nesse sentido os modelos matemáticos produzidos para essa atividade são constituídos pela identificação das figuras geométricas e pelas fórmulas das áreas correspondentes.

APÊNDICE D

INFORMAÇÕES A RESPEITO DO CRESCIMENTO DAS UNHAS

VOCÊ SABIA?

AS UNHAS NÃO PARAM DE CRESCER. A GENTE CORTA AS UNHAS E ALGUNS DIAS DEPOIS TEM QUE CORTAR DE NOVO, PORQUE ELAS JÁ ESTÃO GRANDES!

A norte-americana Chris Walton tem as maiores unhas do mundo e exibiu-as esta quarta-feira em Nova Iorque, EUA. O comprimento total das suas unhas é de 6,02 metros e bateu o recorde mundial entrando no Livro do Guinness.

De acordo com a Globo, as unhas da mão esquerda têm 3,1 metros e a da direita 2,92. Chris "The Duchess" Walton não corta as unhas há 18 anos.

FONTE: HTTP://WWW.DN.PT/INICIO/GLOBO/INTERIOR.ASPX?CONTENT_ID=1995559&SECCAO=EUA%20E%20AM%E9RICAS

UNHAS GIGANTES

As unhas não param de crescer. A gente corta as unhas e alguns dias depois tem que cortar de novo, porque elas já estão grandes.

Você sabe quanto as unhas crescem por dia? Elas crescem 0,1 milímetro por dia, a não ser que você seja daquelas pessoas que têm o hábito muito feio de roer as unhas...

Agora vamos fazer umas continhas para deixar sua mãe de cabelo em pé: se você deixasse crescer as unhas durante cinco anos, quanto elas mediriam? Se você multiplicar 0,1 milímetro por 30 dias, saberá quantos milímetros suas unhas crescem por mês: 3 milímetros.

FONTE: HTTP://WWW.CANALKIDS.COM.BR/CULTURA/MATEMATICA/CURIOSIDADES.HTM

QUANTO CRESCEM SUAS UNHAS AO LONGO DOS MESES, CASO VOCÊ NÃO AS CORTE?

DE QUANTO EM QUANTO TEMPO VOCÊ DEVE CORTAR SUAS UNHAS PARA EVITAR PROBLEMAS DE SAÚDE?

Como se formam as unhas? Por que elas crescem?

"As unhas protegem os dedos dos pés e das mãos e exercem um papel significativo na sensibilidade dos dedos", diz o dermatologista Valcinir Bedin, presidente da Sociedade Brasileira de Medicina Estética. Entretanto, nem sempre elas tiveram essas funções: nossos ancestrais peludos e selvagens usavam as unhas como garras, um mecanismo de ataque e defesa. Com o passar do tempo, elas ficaram fininhas e passaram a cobrir apenas a parte de cima dos dedos, uma transformação que facilitou a manipulação de objetos e os trabalhos de precisão. Claro que, para não prejudicar essas habilidades, é necessário dar aquela cortadinha básica nas unhas de vez em quando. Por mês, elas crescem cerca de 3 milímetros nos dedos da mão e 1 milímetro nos dos pés. Mas cuidado: é bom cortá-las com uma tesoura e não com os dentes. "Quando se engolem fragmentos de unha, eles vão se acumulando no intestino e podem chegar até a perfurar o apêndice", afirma Bedin. Fora isso, é bom ficar de olho em qualquer mudança no jeitão delas, para evitar os problemas

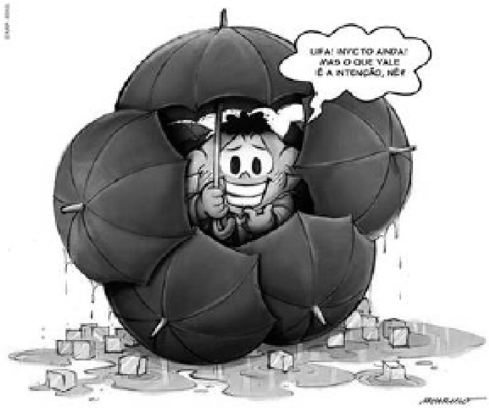
FONTE: HTTP://MUNDOESTRANHO.ABRIL.COM.BR/MATERIA/COMO-SE-FORMAM-AS-UNHAS-POR-QUE-ELAS-CRESCEM

APÊNDICE E

INFORMAÇÕES A RESPEITO DO DESAFIO DO BALDE DE GELO

ALUNO(A): ____ Série: _______

DeSAFiO do BaLDe dE GeLo



FONTE: HTTP://TURMADAMONICA.UOL.COM.BR/

QUEM ACOMPANHA REDES SOCIAIS PROVAVELMENTE VIU VÁRIOS FAMOSOS LEVANDO UM BALDE DE ÁGUA COM GELO NA CABEÇA E DESAFIANDO OUTRAS PESSOAS A FAZER O MESMO. CHEIO DE CORAGEM, O PERSONAGEM CASCÃO TAMBÉM ACEITOU O DESAFIO E ENCAROU O BALDE DE ÁGUA FRIA - SÓ QUE, CLARO, DO MODO DELE! AFINAL, NINGUÉM FALOU QUE ELE NÃO PODERIA SE PROTEGER COM GUARDA-CHUVAS. O QUE VALE É A INTENÇÃO!

MAIS DO QUE DAR BOAS RISADAS COM AS REAÇÕES DE QUEM LEVA UM BANHO DE ÁGUA FRIA, A CAMPANHA DO DESAFIO DO BALDE DE GELO, OU *ICE BUCKET CHALLENGE*, É UMA INICIATIVA DA *ALS ASSOCIATION* PARA DIVULGAR E ARRECADAR FUNDOS PARA FINANCIAR PESQUISAS SOBRE A ESCLEROSE LATERAL AMIOTRÓFICA (ELA), DOENÇA DEGENERATIVA DO SISTEMA NERVOSO QUE É RARA E NÃO TEM CURA.

AS REGRAS DO #ICEBUCKETCHALLENGE (DESAFIO DO BALDE DE GELO)

QUEM É DESAFIADO DEVE JOGAR UM BALDE DE ÁGUA E GELO SOBRE SUA PRÓPRIA CABEÇA E INDICAR 3 AMIGOS QUE DEVEM FAZER O MESMO EM ATÉ 24 HORAS – OU DOAR US$100 PARA A *ALS ASSOCIATION*.

APESAR DO DESAFIO SUGERIR UMA COISA OU OUTRA, OS PARTICIPANTES EM GERAL TÊM FEITO OS DOIS: TOMAR O BANHO DE ÁGUA GELADA E DOAR À ONG.

FONTE: HTTP://WWW.TECMUNDO.COM.BR/INFOGRAFICO/61245-DESAFIO-BALDE-GELO-INFOGRAFICO.HTM

Vamos ao problema...

Determinar a quantidade de litros de água desperdiçados com o desafio do balde de gelo.

O QUE É O *ICE BUCKET CHALLENGE*?

O DESAFIO NADA MAIS É QUE UMA CAMPANHA SOLIDÁRIA PARA AJUDAR A *ALS ASSOCIATION*, UMA ORGANIZAÇÃO AMERICANA SEM FINS LUCRATIVOS QUE ARRECADA FUNDOS PARA FINANCIAR PESQUISA E AJUDAR PACIENTES COM A ESCLEROSE LATERAL AMIOTRÓFICA, TAMBÉM CONHECIDA COMO DOENÇA DE LOU GEHRIG.

O QUE É A ESCLEROSE LATERAL AMIOTRÓFICA?

A ESCLEROSE LATERAL AMIOTRÓFICA – (ELA) É CONSIDERADA UMA DOENÇA DEGENERATIVA DO SISTEMA NERVOSO, QUE ACARRETA PARALISIA MOTORA PROGRESSIVA, IRREVERSÍVEL, DE MANEIRA LIMITANTE.

ATÉ O MOMENTO, NÃO SE CONHECE A CAUSA ESPECÍFICA DA DOENÇA. O PRINCIPAL SINTOMA É A FRAQUEZA MUSCULAR, SEGUIDA DA DETERIORAÇÃO DOS MÚSCULOS (AMIOTRÓFICA), COMEÇANDO NAS EXTREMIDADES, USUALMENTE EM UM LADO DO CORPO (LATERAL). OUTROS SINTOMAS TAMBÉM SÃO TREMORES MUSCULARES, CÃIBRAS, REFLEXOS EXALTADOS, ATROFIA E DIMINUIÇÃO DA SENSIBILIDADE.

FALANDO EM NÚMEROS...

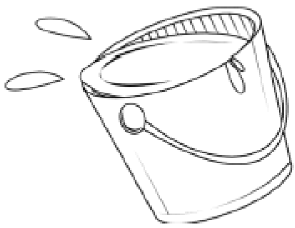
O PRIMEIRO VÍDEO DO DESAFIO DO BALDE DE GELO (#ICEBUCKETCHALLENGE) DATA DE 22 DE JUNHO DE 2014. DESDE ENTÃO, O DESAFIO GANHOU FORÇA NA INTERNET, SENDO PUBLICADOS MAIS DE 2,2 MILHÕES DE VÍDEOS NO YOUTUBE E REGISTRADOS MAIS DE 15 MILHÕES DE INTERAÇÕES RELACIONADAS AO DESAFIO NO FACEBOOK. COM ESSA CAMPANHA, FORAM ARRECADADOS US$ 31,5 MILHÕES VINDOS DE 637 527 NOVOS DOADORES, ENTRE 29 DE JULHO E 20 DE AGOSTO, OU SEJA, EM MENOS DE UM MÊS. ESSE VALOR FOI 16,5 VEZES MAIOR QUE O RECEBIDO NO ANO ANTERIOR.

MAS POR QUE VIRAR UM BALDE?

OFICIALMENTE, NÃO EXISTE UMA EXPLICAÇÃO QUE ASSOCIE VIRAR UM BALDE DE ÁGUA FRIA NA CABEÇA COM A ESCLEROSE LATERAL AMIOTRÓFICA. ALGUNS DIZEM QUE ESSA É A SENSAÇÃO SENTIDA POR QUEM DESCOBRE TER A DOENÇA, QUE É RARA, FALTA E INCURÁVEL; OUTROS, QUE É UMA ASSOCIAÇÃO COM A PERDA DE CAPACIDADE DE QUEM SOFRE DA DOENÇA EM DISTINGUIR CALOR E FRIO. JOGAR UM BALDE DE ÁGUA E GELO NA CABEÇA É UMA MANEIRA COMO MUITOS ATLETAS COMEMORAM VITÓRIAS.

CONTROVÉRSIAS

NEM TODO MUNDO ESTÁ CONTENTE COM O DESAFIO... OS PARTICIPANTES ESTÃO SENDO ACUSADOS DE USAR A BRINCADEIRA PARA PROMOVER A SI MESMOS COMO BENFEITORES. A SOLIDARIEDADE TERIA DADO LUGAR AO EXIBICIONISMO. APESAR DE CHAMAREM ATENÇÃO PARA O TEMA, OS VÍDEOS NÃO TRAZEM QUALQUER INFORMAÇÃO SOBRE A DOENÇA EM SIM. É IMPOSSÍVEL COMPROVAR SE TODOS OS QUE TOPARAM O DESAFIO REALMENTE FIZERAM A DOAÇÃO OU ESTÃO SÓ SE DIVERTINDO.



O DESPERDÍCIO DE ÁGUA TAMBÉM INCOMODA A ALGUMAS PESSOAS. EM SEU VÍDEO, O COMEDIANTE RAFINHA BASTOS FEZ MENÇÃO À SITUAÇÃO CRÍTICA DOS RESERVATÓRIOS DE SÃO PAULO, DIZENDO QUE NÃO PODERIA PARTICIPAR DO DESAFIO POR FALTA DE ÁGUA.

FONTE: HTTP://WWW.TECMUNDO.COM.BR/INFOGRAFICO/61245-DESAFIO-BALDE-GELO-INFOGRAFICO.HTM

Anexos

ANEXO A

MODELO DE AUTORIZAÇÃO PARA COLETA DE DADOS (ALUNOS)

ESCOLA MUNICIPAL PRINCESA ISABEL
ENSINO FUNDAMENTAL
Rua Jairo Ferreira Marques, 1.103 – Centro – CEP: 87240-000 – Terra Boa – Paraná
Fone: (44)-3641-1541 – E-mail: princesaisabel_@hotmail.com

AUTORIZAÇÃO

Eu,____, portador da cédula de identidade R.G Nº______________________, inscrito no C.P.F Nº______________________, Residente á Rua ______________________________ Nº __________, na cidade de ________________, autorizo por meio deste instrumento particular a ESCOLA MUNICIPAL PRINCESA ISABEL a veicular, utilizar e reutilizar na íntegra ou em partes, dispor para os devidos fins específicos, educativos, técnicos e culturais, sem que isto implique em quaisquer ônus para a mesma, o uso de imagens do (a) criança/estudante abaixo identificado, filmado e/ou fotografado em atividades pedagógicas e educativas desenvolvidas no ambiente escolar, a serem veiculados à internet, rádio, jornal, televisão ou em outros meios de comunicação.

Aluno (a): ____

Data de Nascimento: ____/_____/________

Telefone: (   ) ______________________   Cel.: _________________________

TERRA BOA, OUTUBRO DE 2014.

Assinatura dos Pais ou Responsável

Autorização válida para o ano letivo de 2015