



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

PAULO JOSÉ DOS REIS

TRANSFERÊNCIA DE CORRELAÇÕES DAS VARIÁVEIS  
CONTÍNUAS E GERAÇÃO DE EMARANHAMENTO DE TRÊS  
ÁTOMOS EM CAVIDADES REMOTAS

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da  
Universidade Estadual de Londrina**

**Dados Internacionais de Catalogação -na-Publicação (CIP)**

R375t Reis, Paulo José dos.

Transferência de correlações das variáveis contínuas e geração de emaranhamento de três átomos em cavidades remotas / Paulo José dos Reis. – Londrina, 2012. xii, 149 f. : il.

Orientador: Santosh Shelly Sharma.

Tese (Doutorado em Física) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física, 2012.

Inclui bibliografia.

1. Computação quântica – Teses. 2. Emaranhamento (Física) – Teses. 3. Átomos – Cavidade – Teses. 4. Mecânica quântica – Teses. I. Sharma, Santosh Shelly. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Título.

CDU 530.145

PAULO JOSÉ DOS REIS

**TRANSFERÊNCIA DE CORRELAÇÕES DAS VARIÁVEIS CONTÍNUAS E  
GERAÇÃO DE EMARANHAMENTO DE TRÊS ÁTOMOS EM CAVIDADES  
REMOTAS**

Tese apresentada ao Programa de Doutorado em Física do Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Física.

BANCA EXAMINADORA

---

Orientadora: Profa. Dra. Santosh Shelly Sharma  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

---

Prof. Dr. Mário César Baldiotti  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

---

Prof. Dr. Antonio Edson Gonçalves  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

---

Prof. Dr. Salomon Sylvain Mizrahi  
Universidade Federal de São Carlos - UEL

---

Prof. Dr. Miled Hassan Youssef Moussai  
Universidade de São Paulo - UEL

Aprovada em 25 de abril de 2012

À minha esposa Gessica.

”A única possibilidade de descobrir os limites do possível é aventurar-se um pouco além deles, para o impossível. ”

Arthur C. Clarke

# Agradecimentos

Agradeço a Profa. Dra. Santosh Shelly Sharma, pela paciência e disponibilidade que foram muito importantes nos esclarecimentos das dúvidas e no desenvolvimento do trabalho.

A minha esposa Gessica que é o grande amor da minha vida e esteve do meu lado em todo o doutorado, meu pai José de Paula (Zé Paulo), minha mãe Ivone, meus irmãos Moacir e Ana Paula por sempre terem incentivado e me apoiado nos momentos difíceis.

Aos professores Antonio Edson Gonçalves, Mário César Baldiotti, Miled Hassan Youssef Moussai e Salomon Sylvain Mizrahi, pela disponibilidade na correção do trabalho e sugestões que foram muito importantes para a conclusão do mesmo.

Aos meus amigos do curso de Doutorado Leonardo e Ricardo Gobato pela boa convivência e amizade.

Aos amigos Marcio Daldin e Daniel, que sempre se mostraram dispostos a me ajudar, além da amizade e companherismo.

Ao amigo do grupo de computação quântica Eduardo, pela ajuda na programação em fortran, pois sem ela o trabalho não seria concluído.

Ao Prof. Wellington da Cruz (*in memoriam*), que foi o meu primeiro orientador na informação quântica e seus ensinamentos foram fundamentais para meu desenvolvimento nessa área.

Agradeço também à CAPES pelo apoio financeiro.

Paulo José dos Reis

Londrina, 25 de abril de 2012.

REIS, Paulo José dos. **Transferência de correlações das variáveis contínuas e geração de emaranhamento de três átomos em cavidades remotas**. 2012. Tese (Doutorado em Física) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

## RESUMO

Neste trabalho, apresentamos uma proposta para geração de emaranhamento entre três átomos localizados em duas cavidades espacialmente separadas, através da transferência de emaranhamento das variáveis contínuas do campo comprimido de dois modos. Um par de átomos  $A_1$  e  $A_2$ , preparados em um estado separável ou emaranhado, interage com um único modo do campo comprimido de dois modos na cavidade 1, enquanto o átomo  $B$  interage com o segundo modo do campo na cavidade 2. Expressões analíticas foram obtidas para o estado do sistema composto, estado do campo e estado dos átomos em função do parâmetro de interação e parâmetro de compressão, considerando diferentes estados iniciais do campo e dos átomos, localizados na cavidade de Alice. Nós analisamos numericamente a geração, morte súbita, e renascimento de emaranhamento dos três átomos, como função do estado inicial dos átomos  $A_1$  e  $A_2$  e parâmetro de compressão do campo eletromagnético. Como o campo nas cavidades possui infinitos graus de liberdade, utilizamos função  $Q$  e o número médio de fótons, para uma análise qualitativa do emaranhamento dos modos campo nas cavidades distintas. Aproximamos o estado comprimido do campo por um estado número dos fótons, que produz uma dinâmica de emaranhamento similar a do sistema proposto. Com esta aproximação pode-se calcular a negatividade global do campo e verificar a transferência de emaranhamento dos modos do campo para os átomos nas cavidades espacialmente separadas. O estado dos átomos apresenta emaranhamento tipo  $W$ , que pode ser utilizado em protocolos de comunicação quântica. Um estado emaranhado puro de três átomos pode ser obtido com alta probabilidade, através de uma medida sobre o estado do campo nas cavidades. Usando um protocolo simples, onde utilizamos um qubit auxiliar na cavidade 2, podemos destilar um estado  $W$ , a partir do estado tipo  $W$  fornecido pelo sistema. A probabilidade de destilação depende do emaranhamento do estado tipo  $W$ . Deste modo podemos utilizar o estado emaranhado de três átomos espacialmente separados em protocolos de comunicação quântica e teletransporte determinísticos.

**Palavras-chave:** Estados comprimidos. Átomos em cavidade. Emaranhamento.

REIS, Paulo José dos. **Transfer correlations for continuous variables and the generation of entanglement of three atoms in cavities remote**. 2012. Tese (Doctorate in Physics) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2012.

## ABSTRACT

In this work we present a proposal to generate entanglement amongst three atoms located in two spatially separated cavities through entanglement transfer from continuous variables of two mode squeezed field. Pair of atoms  $A_1$  and  $A_2$ , prepared either in a separable state or in an entangled state, interacts with a single mode of a two mode squeezed cavity field while a third atomic qubit B interacts with the second mode of the squeezed field in a remote cavity. Analytical expressions have been obtained for the state of composite system, state of the field and state of the atoms, considering different states of atoms and field. We then analyze numerically, the generation, sudden death and revival of three qubit entanglement as a function of initial entanglement of qubits  $A_1A_2$  and degree of squeezing of electromagnetic field. As the field inside the cavities has infinite degrees of freedom, we use the Q function and the average photon number, to do a qualitative analysis of the entanglement of field modes in the distinct cavities. An approximate photon number state that effectively produces an entanglement dynamics very close to the one obtained for the proposed system was considered. With such an approximation one can calculate the global negativity of the field and verify the entanglement transfer from field modes to atoms in spatially separated cavities. The state operator of three atoms displays W type entanglement which can be used in quantum communication protocols. A pure entangled state of three atoms may be obtained with high probability, by measurement of the field state in the cavities. Further, a W state can be distilled from the W type state provided by the system. Probability of success of distillation protocol depends on the amount of entanglement in W type state. In this way, we can use three spatially separated entangled atoms to implement communications or teleport protocols, deterministically.

**Key-words:** Squeezed states. Atoms in cavities. Entanglement.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>ix</b>
<b>2</b>	<b>Emaranhamento de estados quânticos</b>	<b>2</b>
2.1	Introdução . . . . .	2
2.2	Operador densidade . . . . .	4
2.3	Emaranhamento . . . . .	5
2.3.1	Definição de um estado puro separável . . . . .	6
2.3.2	Definição de um estado misto separável . . . . .	6
2.3.3	Critério de separabilidade de Peres . . . . .	6
2.3.4	Estados emaranhados de dois qubits . . . . .	7
2.3.5	Estados emaranhados de três qubits . . . . .	8
2.4	Medidas de emaranhamento . . . . .	9
2.4.1	Entropia de Von Neumann. . . . .	12
2.4.2	Entropia Linear . . . . .	14
2.4.3	Concorrência . . . . .	14
2.4.4	Negatividade Global . . . . .	16
2.4.5	Negatividade tipo-k . . . . .	17

<i>SUMÁRIO</i>	2
<b>3 Emaranhamento de variáveis contínuas</b>	<b>20</b>
3.1 Introdução . . . . .	20
3.2 Quantização do campo eletromagnético . . . . .	22
3.3 Relações de incerteza e compressão das flutuações quânticas . . . . .	25
3.4 Compressão das quadraturas do campo . . . . .	26
3.5 Estados de Fock . . . . .	27
3.6 Estados Coerentes . . . . .	29
3.6.1 Propriedades dos estados coerentes. . . . .	32
3.7 Estados Comprimidos . . . . .	34
3.7.1 Estados comprimidos de dois modos . . . . .	38
3.8 Representação de estados quânticos no espaço de fase . . . . .	41
3.8.1 Função Q . . . . .	42
3.9 Emaranhamento. . . . .	44
3.9.1 Entropia de Von Neumann para o estado do vácuo comprimido de dois modos . . . . .	44
3.9.2 Matriz covariância . . . . .	46
<b>4 Geração de emaranhamento entre qubits remotos</b>	<b>50</b>
4.1 Introdução . . . . .	50
4.2 Diagrama experimental . . . . .	52
4.3 Estados iniciais do campo nas cavidades. . . . .	54
4.4 Base acoplada e estados iniciais dos átomos . . . . .	56
4.4.1 Adição de momento angular . . . . .	57
4.5 Hamiltoniano do sistema composto . . . . .	59
4.5.1 Hamiltoniano de um átomo na cavidade . . . . .	59

4.5.2	Hamiltoniano de N átomos na cavidade. . . . .	62
4.6	Operador evolução para átomos interagindo com o campo no estado de Fock . . . . .	62
4.7	Operador evolução para o sistema composto . . . . .	65
4.7.1	Estados iniciais atômicos $ \Phi_1^\alpha(0)\rangle$ . . . . .	68
4.7.2	Estado inicial atômico $ \Phi_2(0)\rangle$ . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Dinâmica de emaranhamento do sistema composto-cálculos numéricos</b>	<b>82</b>
5.1	Introdução . . . . .	82
5.2	Emaranhamento dos átomos nas cavidades distintas . . . . .	84
5.2.1	Estados iniciais $ \Phi_1^\alpha(0)\rangle$ . . . . .	84
5.2.2	Estado inicial $ \Phi_2(0)\rangle$ . . . . .	90
5.3	Morte súbita de emaranhamento, $N_G^B = 0$ para os estados iniciais atômicos $ \Phi_1^\alpha(0)\rangle$ e $ \Phi_2(0)\rangle$ . . . . .	95
5.4	Emaranhamento do campo nas cavidades distintas . . . . .	97
5.4.1	Estado inicial $ \Phi_1^\alpha(0)\rangle$ . . . . .	98
5.4.2	Estado inicial $ \Phi_2(0)\rangle$ . . . . .	101
<b>6</b>	<b>Dinâmica de emaranhamento do sistema composto-campo na cavidade</b>	
	<b>em um estado aproximado</b>	<b>105</b>
6.1	Introdução . . . . .	105
6.2	Emaranhamento dos átomos nas cavidades distintas. . . . .	107
6.2.1	Estado inicial $ \Phi_1^\alpha(0)\rangle$ . . . . .	108
6.2.2	Estado inicial $ \Phi_2(0)\rangle$ . . . . .	112
6.3	Emaranhamento do campo nas cavidades distintas . . . . .	114
6.3.1	Estado inicial atômico $ \Phi_1^\alpha(0)\rangle$ . . . . .	114
6.3.2	Estado inicial atômico $ \Phi_2(0)\rangle$ . . . . .	118
6.4	Transferência de emaranhamento . . . . .	121

**7 Comunicação quântica utilizando o estado emaranhado de três átomos.125**7.1 Estado inicial  $|\Phi_1^\alpha(0)\rangle$  . . . . . 1267.2 Estado inicial  $|\Phi_2(0)\rangle$  . . . . . 128

7.3 Acesso ao estado puro dos átomos . . . . . 129

7.4 Destilação do emaranhamento de três qubits. . . . . 132

**8 Conclusão 135**

# Capítulo 1

## Introdução

Nas últimas duas décadas diversos laboratórios desenvolveram técnicas e equipamentos que permitem a manipulação individual de átomos e fótons. Esses novos avanços na manipulação de sistemas em nível quântico possibilitam manipular um único átomo e fazê-lo interagir com um único fóton aprisionado em uma cavidade óptica [1]. Esses experimentos têm possibilitado a investigação de propriedades somente observadas no mundo quântico, que podem levar a novas tecnologias como a computação quântica [2,3], criptografia quântica [4] e comunicação quântica [5].

Em 1965 Gordon Moore [6], observou que o número de transistores em um microprocessador, bem como a velocidade de processamento, dobram a cada 18 meses, ao mesmo tempo cai pela metade o número de átomos utilizados para codificar um bit de informação. Nessa progressão chegaríamos ao limite de um bit por átomo em torno de 2015, o que implica na saturação da lei de Moore. Torna-se então natural pensar na utilização das propriedades quânticas dos átomos para a implementação de algoritmos computacionais. Em 1980 Paul Benioff [7, 8], verificou que um sistema intrinsecamente quântico é capaz de reproduzir computação clássica. Em 1982 R. P. Feynman [9, 10], propôs que sistemas quânticos poderiam ser simulados eficientemente em computadores quânticos, com um ganho exponencial na velocidade de processamento se comparado com os computadores clássicos.

A formalização da idéia de computador quântico foi proposta por D. Deutsch em 1985 [11]. Neste trabalho foram utilizadas características quânticas próprias de sistemas microscópicos, como superposição de amplitudes de probabilidade para resolver um problema envolvendo funções binárias. Outra grande contribuição na área de computação quântica foi o algoritmo quântico proposto pelo matemático Peter Shor em 1994 [12], para a decomposição de um número em seus fatores primos. O algoritmo de Shor é exponencialmente mais rápido que o melhor algoritmo clássico conhecido. A dificuldade na fatoração de números grandes é a base de um método criptográfico muito utilizado atualmente, o método RSA. A importância prática dessa descoberta reside na possibilidade de que um computador quântico permitiria a quebra de mensagens criptografadas em um tempo exponencialmente menor do que um computador clássico.

As propriedades de sistemas quânticos também podem ser utilizadas para a realização de comunicação segura. O surgimento do campo da comunicação quântica teve início em 1984, através da proposta apresentada por Bennett e Brassard [4]. Neste artigo eles apresentaram uma proposta de comunicação segura entre dois laboratórios, onde a mensagem era enviada através de fótons polarizados. A segurança do protocolo baseia-se no fato de que uma medida de um invasor sobre os fótons enviados interfere destrutivamente no estado quântico dos fótons. Em 1991 Ekert [5], apresentou um protocolo de comunicação entre dois laboratórios remotos (Alice e Bob), a mensagem é criptografada através de operações unitárias realizadas por uma parte e a segurança é baseada no máximo emaranhamento entre as partículas espacialmente separadas compartilhadas pelos dois laboratórios.

Devido a seu grande potencial e superioridade no processamento da informação em relação a computação clássica, existe um grande interesse em pesquisas direcionadas na manipulação controlada de sistemas quânticos. Sistemas físicos atualmente considerados para a implementação de operações quânticas incluem íons em armadilhas magnéticas [13], átomos e fótons em cavidades [14], redes cristalinas ópticas [15], moléculas em soluções líquidas manipuladas através de técnicas de ressonância nuclear magnética [16], pontos

quânticos [17] e supercondutores [18].

As cavidades ópticas com átomos de dois níveis representam um sistema que pode ser utilizado no processamento da informação quântica. Experimentalmente isso é possível, quando colocamos átomos em cavidades sem dissipação, ou seja, com altos valores de qualidade. Os modos do campo eletromagnético na cavidade com alto valor de intensidade de campo elétrico permitem um acoplamento dipolar forte entre átomo e campo. Se ajustarmos as cavidades de modo a produzir ondas estacionárias onde a frequência angular de um dado modo do campo eletromagnético é igual à frequência de transição dos átomos de dois níveis, podemos gerar interação ressonante entre átomos e fótons. Existem várias propostas, para a geração de estados emaranhados de átomos de dois níveis em uma cavidade óptica, [19–24].

O emaranhamento compartilhado entre sistemas espacialmente separados representa um recurso central para a comunicação quântica [25] e computação quântica distribuída [26]. A computação quântica distribuída refere-se a um computador quântico formado por uma rede de processadores conectados por uma linha de transmissão [27]. Por este motivo atualmente tem havido grande interesse no emaranhamento entre átomos aprisionados em cavidades distintas.

Nesta tese apresentamos uma proposta de geração de emaranhamento entre três átomos de dois níveis aprisionados em um sistema de duas cavidades espacialmente separadas, através da interação com um estado comprimido de dois modos do campo eletromagnético. No estudo da dinâmica de emaranhamento do sistema composto utilizamos diferentes estados do campo, para isso variamos o parâmetro de compressão, que é diretamente proporcional a intensidade do campo comprimido de dois modos. Também consideramos estados iniciais separáveis e emaranhados dos dois átomos localizados na cavidade do laboratório de Alice, com o objetivo de verificar a influência de emaranhamento inicial dos dois átomos na transferência de emaranhamento do campo para os átomos nas cavidades distintas.

No capítulo (2), explicamos o conceito de emaranhamento de um sistema quântico,

apresentando as propriedades de sistemas quânticos emaranhados e separáveis. Além disso, verificamos quais propriedades uma medida de emaranhamento deve satisfazer. Conhecendo as propriedades de uma medida de emaranhamento expomos alguns quantificadores que são: entropia de Von Neumann, entropia linear, concorrência, negatividade global e negatividade tipo-K.

No capítulo (3), exibimos a quantização do campo eletromagnético e compressão nas quadraturas do campo. Além disso, apresentamos alguns estados do campo eletromagnético que são: estados de Fock, estados coerentes, estados comprimidos e estado de vácuo comprimido de dois modos. Como os estados comprimidos de dois modos serão utilizados no sistema proposto no capítulo (4), exibimos a representação desse estado no espaço de fase através da função  $Q$  e quantificamos seu emaranhamento utilizando-se da entropia de Von Neumann e matriz de covariância.

No capítulo (4), apresentamos uma proposta para a geração de emaranhamento entre três átomos localizados em duas cavidades espacialmente separadas [28], onde a cavidade  $C_1$  está no laboratório de Alice e possui dois átomos aprisionados e a cavidade  $C_2$  que está no laboratório de Bob possui um único átomo de dois níveis. Estas cavidades estão inicialmente no estado do vácuo, um estado comprimido de dois modos é enviado para as cavidades, onde cada modo do campo é enviado para uma cavidade distinta. A junção entre campo externo e campo na cavidade é feita por um divisor de feixe (beam splitter). Expressões analíticas foram obtidas para os operadores de estado do sistema composto, átomos e campo, considerando diferentes estados iniciais do campo e diferentes estados iniciais dos dois átomos localizados na cavidade do laboratório de Alice.

No capítulo (5), calculamos o emaranhamento dos átomos e campo para verificarmos a transferência de emaranhamento das variáveis contínuas do campo para os átomos localizado nas cavidades distintas. Utilizando-se dos operadores de estado dos átomos considerando diferentes estados iniciais do campo e dos átomos, calculamos a negatividade global para detectar o emaranhamento livre dos átomos nas cavidades espacialmente separadas. Como o estado do campo possui um número infinito de graus de liberdade,

utilizamos o operador de estado do campo para o cálculo da função  $Q$  e número médio de fótons. Com isso obteve-se uma análise qualitativa da transferência de emaranhamento dos modos do campo para os átomos nas cavidades distintas.

O estado de vácuo comprimido de dois modos é um estado do campo eletromagnético de variáveis contínuas, ou seja, possui infinitos graus de liberdade. Por esse motivo no capítulo (5) não foi possível calcular a negatividade global para quantificar o emaranhamento entre os modos do campo nas duas cavidades. No capítulo (6), apresentamos uma aproximação para o estado do campo nas cavidades que produz uma dinâmica de emaranhamento similar a apresentada no capítulo (5). Deste modo calculamos a negatividade global do campo nas cavidades e verificamos a transferência de emaranhamento do campo para os átomos nas cavidades espacialmente separadas.

O sistema proposto no capítulo (4), é composto por cavidades espacialmente separadas que não interagem entre si. Sistemas com átomos aprisionados em cavidades espacialmente separadas podem ser utilizados na comunicação quântica. No capítulo (7), analisamos o operador reduzido dos átomos no tempo de interação onde negatividade global da transposta parcial do operador de estado dos átomos com relação ao qubit  $B$  é máxima. Verificamos que o operador de estados dos átomos apresenta emaranhamento do tipo  $W$  com alta probabilidade acrescido de uma parcela de ruído quântico. Analisando a função de onda do sistema composto, podemos obter um estado do tipo  $W$  com alta probabilidade, através de uma medida sobre o estado do campo nas cavidades. Usando um protocolo simples proposto por Z. L. Cao [148], utilizamos um qubit auxiliar na cavidade 2 e uma transformação unitária, para destilar um estado  $W$ , a partir do estado do tipo  $W$  fornecido pelo sistema. Deste modo podemos usar o emaranhamento dos três átomos espacialmente separados para implementação dos protocolos de comunicação quântica e teletransporte determinísticos.

# Capítulo 2

## Emaranhamento de estados quânticos

### 2.1 Introdução

O emaranhamento é uma das características de maior estranheza na mecânica quântica. Essa propriedade de sistemas quânticos compostos foi primeiramente apontada por Einstein, Podolsky e Rosen [29], que em 1935 propuseram um experimento mental conhecido como paradoxo EPR. Nesse experimento o resultado de uma medida realizada em uma parte do sistema quântico apresenta efeito instantâneo no resultado de uma medida realizada em outra parte, independente da distância entre as partes. Ainda em 1935, Schrödinger [30] observou no estudo de sistemas quânticos correlações nunca vistas em sistemas clássicos e as denominou emaranhamento.

Em 1964 Bell [31], apresentou um teorema que propõe uma desigualdade que relaciona as probabilidades de detecção de dois observáveis dicotômicos, relativos a dois sistemas. Se a correlação entre os dois sistemas for descrita por uma teoria realista local, a desigualdade é sempre satisfeita. Por outro lado a violação dessa desigualdade implica que os sistemas em questão exibem uma correlação não-local, prevista pela mecânica quântica.

A desigualdade de Bell tem base no paradoxo EPR, em que dois observadores remotos,

(denominados posteriormente Alice e Bob) compartilham um par de partículas emaranhadas. Bell afirmou que a correlação entre as partículas é devida ao emaranhamento quântico do par. Uma medição feita por um observador permite conhecer o estado da outra partícula do par. Esta idéia está inteiramente de acordo com o princípio da incerteza de Heisenberg, que é um conceito fundamental da mecânica quântica. O emaranhamento quântico, não possui nenhum análogo clássico, este elemento aparece na violação da desigualdade de Bell. A comprovação experimental da desigualdade de Bell foi feita em 1982 por A. Aspect [32], que confirmou a existência de correlações não locais preditas como emaranhamento.

O emaranhamento não é apenas uma propriedade teórica de sistemas quânticos, e pode ser gerado através de alguns experimentos em laboratório. Em 1996 C. Monroe *et al* [33], obtiveram experimentalmente um estado emaranhado análogo ao proposto por Schrödinger, que ficou conhecido como estado do tipo gato de Schrödinger. Esse resultado comprovou definitivamente que o emaranhamento é uma propriedade não local da mecânica quântica. Outros experimentos foram realizados para a geração de estados emaranhados com átomos e fótons [1].

Nas últimas duas décadas o emaranhamento quântico tem sido objeto de varias pesquisas e vem sendo aplicado em uma série de protocolos de informação e criptografia quântica. Como uma de suas principais aplicações temos a codificação superdensa [34], que consiste na transmissão de informação utilizando-se de bits quânticos (qubits) emaranhados. O emaranhamento também é usado na criptografia quântica [35], para a distribuição de chaves quânticas. Além disso, no teletransporte de estados quânticos [36] o emaranhamento é fundamental para o envio da informação de um sistema quântico para outro. Não podemos esquecer que o emaranhamento é um recurso fundamental na computação quântica [2].

Sistemas quânticos realistas apresentam superposição de estados e a interação com o ambiente resulta na perda da pureza. Para um sistema de átomos aprisionados em uma cavidade as principais fontes de perda de coerência são: emissões espontâneas, perda de

fótons na cavidade e oscilações na fonte do campo. Alguns experimentos foram realizados para verificar essas perdas de coerência [37, 38]. Sistemas de átomos emaranhados aprisionados em cavidades ópticas que interagem com os modos do campo nas cavidades perdem correlações ocasionando o desaparecimento do emaranhamento. Em 1996 L. Davidovich [39], apresentou uma proposta teórica para este sistema. Um tipo de perda de correlação observada na dinâmica de emaranhamento de dois átomos aprisionados em uma cavidade que interagem com o campo foi apontado por T. Yu e J. H. Eberly [41], e denominada como morte súbita de emaranhamento (ESD). A ESD é um fenômeno que ocorre quando o emaranhamento cai abruptamente a zero em um tempo finito, diferente de um decaimento assintótico.

Neste capítulo apresentamos a representação de estados quânticos puros e mistos através do operador densidade. Na seção (2.2) discutimos o conceito de emaranhamento de sistemas quânticos compostos e o critério de separabilidade de Peres. Na seção (2.3) demonstramos as propriedades que uma medida de emaranhamento deve satisfazer e alguns quantificadores de emaranhamento. Na seção (2.4) discutimos a perda de correlação para sistemas quânticos compostos que interagem com o ambiente.

## 2.2 Operador densidade

Estados quânticos podem ser representados através de operadores definidos no espaço de Hilbert ( $H$ ), um espaço vetorial complexo de dimensão ( $d$ ) que contem os vetores de estados do sistema quântico. O operador que representa um estado quântico deve fornecer toda a informação possível sobre as propriedades de um sistema quântico, bem como sua evolução temporal. De acordo com um dos postulados da mecânica quântica, a cada observável de um sistema quântico, referente uma quantidade física mensurável, associamos um operador Hermitiano. Esse operador deve ser Hermitiano dado seus autovalores reais. Os autovalores do operador de estado representam probabilidades. Como a soma das probabilidades representa a probabilidade total, o operador de estado deve ter

traço unitário. Deste modo podemos representar um estado quântico por um operador densidade  $\hat{\rho}$  tal que,

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger; \hat{\rho} \geq 0; \text{Tr}(\hat{\rho}) = 1.$$

O operador densidade, na sua forma geral representa uma mistura estatística de projetores,

$$\hat{\rho} = \sum_i P_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|; \sum_i P_i = 1, \quad (2.1)$$

onde  $P_i$  é a probabilidade do estado  $|\Psi_i\rangle$ .

Se considerarmos um caso especial, onde  $\hat{\rho}$  tem a forma

$$\hat{\rho} = |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|, \quad (2.2)$$

$\hat{\rho}$  representa um estado puro e pode ser representado como uma função de onda, enquanto os estados mistos Eq. (2.1), não podem ser representados como uma função de onda.

## 2.3 Emaranhamento

Como já verificamos anteriormente, um sistema quântico pode ser representado por um operador densidade  $\hat{\rho}$ , no espaço de Hilbert ( $H$ ). Entretanto, um sistema quântico pode ser constituído de vários subsistemas. Neste caso o espaço de Hilbert associado ao sistema composto pode ser visto como uma composição de espaços individuais de vários subsistemas, ou seja,

$$H = H_1 \otimes H_2 \otimes \dots \otimes H_N. \quad (2.3)$$

onde  $H_1, H_2, \dots$  e  $H_N$ , são espaços de Hilbert nos quais os operadores  $\hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \dots$  e  $\hat{\rho}_N$ , referentes aos subsistemas  $(1, 2, \dots, N)$ , são definidos.

A noção de emaranhamento surge da estrutura tensorial apresentada na Eq. (2.3).

### 2.3.1 Definição de um estado puro separável

Alguns estados puros de sistemas quânticos compostos são fatoráveis e podem ser representados na forma,

$$|\Psi\rangle = |\Psi_1\rangle \otimes |\Psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\Psi_N\rangle. \quad (2.4)$$

Quando essa fatoração não é possível temos estados puros emaranhados.

### 2.3.2 Definição de um estado misto separável

Se um estado misto pode ser descrito como,

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2 \otimes \dots \otimes \hat{\rho}_N, \quad (2.5)$$

ele é chamado estado misto fatorável. Qualquer estado misto que pode ser descrito na forma,

$$\hat{\rho} = \sum_i P_i (\hat{\rho}_1^i \otimes \hat{\rho}_2^i \otimes \dots \otimes \hat{\rho}_N^i), \quad (2.6)$$

que é um estado misto separável. Se um estado misto não pode ser representado como a Eq. (2.6), então temos um estado misto emaranhado.

Observamos que o estado representado pela Eq. (2.4) é um caso particular da Eq. (2.5), para sistemas quânticos constituídos apenas de subsistemas em estados puros. A Eq.(2.5), é um caso particular da Eq. (2.6) quando  $P_i = 1$ .

### 2.3.3 Critério de separabilidade de Peres

Para entendermos o critério de separabilidade de Peres [62], primeiramente devemos definir a operação de transposição parcial de um estado quântico. Dado um estado quântico composto por duas partes  $A$  e  $B$ , descrito da seguinte forma,

$$\hat{\rho}_{AB} = \sum_{i,j,k,l} \lambda_{ijkl} |i\rangle_A |j\rangle_B \langle k|_A \langle l|_B. \quad (2.7)$$

A transposição parcial é definida como,

$$\hat{\rho}_{AB}^{T_B} = \sum_{i,j,k,l} \lambda_{ijkl} |i\rangle_A |l\rangle_B \langle k|_A \langle j|_B. \quad (2.8)$$

Verificamos que se  $\hat{\rho}_{AB}$  for um operador separável,

$$\hat{\rho}_{AB} = \sum_i P_i (\hat{\rho}_A^i \otimes \hat{\rho}_B^i). \quad (2.9)$$

Sua transposta parcial resulta em um operador positivo. Caso a transposta parcial de  $\hat{\rho}_{AB}$  não seja positiva,  $\hat{\rho}_{AB}$  é emaranhado.

Peres afirmou que esse critério era válido para dimensões arbitrárias do espaço de Hilbert. Porém em 1996, M. P. Horodecki e R. Horodecki [63], demonstraram que esse critério é uma condição de separabilidade necessária e suficiente para os estados com dimensões  $2 \otimes 2$  e  $2 \otimes 3$ , para outras dimensões se tornando somente uma condição necessária. Quando consideramos estados quânticos com dimensões maiores que as citadas, alguns estados emaranhados possuem transposta parcial positiva e esses estados possuem emaranhamento ligado, que é emaranhamento não destilável [69].

### 2.3.4 Estados emaranhados de dois qubits

Considerando um estado quântico de sistema composto, representado pelo espaço de Hilbert  $H_1 \otimes H_2$  com dimensões  $d_1 \otimes d_2$ , o estado puro mais geral neste espaço tem forma,

$$|\Psi\rangle_{12} = \sum_{i,j} c_{ij} |i\rangle_1 |j\rangle_2, \quad (i = 1, \dots, d_1; j = 1, \dots, d_2)$$

onde  $c_{ij}$  são os coeficientes complexos e  $|i\rangle_1$  e  $|j\rangle_2$  formam uma base completa em  $H_1$  e  $H_2$ . Considerando o estado,

$$|\Psi\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle_1 |g\rangle_2 + |e\rangle_1 |e\rangle_2), \quad (2.10)$$

que descreve o estado quântico de dois átomos de dois níveis, onde o vetor de estado  $|g\rangle$  denota o estado fundamental, enquanto  $|e\rangle$  denota o estado excitado, e os índices 1 e 2 correspondem ao primeiro e segundo átomo. Como cada átomo constitui um sistema quântico de dois níveis podemos atribuir uma base computacional em analogia aos bits clássicos, onde  $|g\rangle \rightarrow |0\rangle$  e  $|e\rangle \rightarrow |1\rangle$ . Deste modo podemos reescrever o estado quântico de um sistema de dois qubits, como,

$$|\Psi\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 |0\rangle_2 + |1\rangle_1 |1\rangle_2). \quad (2.11)$$

Esse estado não pode ser decomposto no produto de dois estados pertencentes cada um a um subsistema, isto significa que o estado possui emaranhamento. Se o estado do primeiro qubit é medido e obtemos como resultado  $|0\rangle$  certamente o segundo qubit estará em  $|0\rangle$ ; da mesma forma, se o estado do primeiro qubit é medido no estado  $|1\rangle$  o segundo estará certamente no estado  $|1\rangle$ .

Se aplicarmos o critério de Peres no estado da Eq. (2.11), observamos que o operador densidade,

$$\rho_{12} = (|\Psi\rangle\langle\Psi|)_{12}, \quad (2.12)$$

possui transposta parcial  $\rho_{12}^{T_2}$  com autovalores

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = \frac{1}{2}, \lambda_4 = -\frac{1}{2}. \quad (2.13)$$

A existência do  $\lambda_4$  com valor negativo para a matriz de estado com transposta parcial indica que o estado da Eq. (2.11) é emaranhado.

### 2.3.5 Estados emaranhados de três qubits

Para estados emaranhados de três qubits, Dür e colaboradores [77], demonstraram a existência de somente duas classes de emaranhamento tripartido genuíno, a classe com

emaranhamento tipo  $GHZ$  [75] e  $W$  [76]. O estado

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|000\rangle + |111\rangle), \quad (2.14)$$

é um estado maximamente emaranhado na classe  $GHZ$ , e o estado

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|001\rangle + |010\rangle + |100\rangle). \quad (2.15)$$

é um estado maximamente emaranhado na classe  $W$ . Um estado pertencente a uma dessas classes não pode ser convertido em constituintes de outra classe por LOCC (operações locais e comunicação clássica). O uso do critério de Peres nos estados das Eqs. (2.14) e (2.15) demonstra transposta parcial negativa, o que indica a existência de emaranhamento. Uma limitação no critério de Peres é o fato dele não classificar o grau de emaranhamento existente no estado, sendo necessário para isso um quantificador de emaranhamento.

## 2.4 Medidas de emaranhamento

Para determinarmos o grau de emaranhamento de um estado puro ou estado misto de um sistema quântico bipartido com dimensão arbitrária, é essencial escolhermos uma medida apropriada de emaranhamento. Um bom quantificador de emaranhamento deve nos fornecer valor zero para estados separáveis e valor um para estados maximamente emaranhados. Em seu trabalho em 2002 Brub [51], demonstrou que uma medida de emaranhamento deveria satisfazer as seguintes propriedades:

### (i) Valor zero para estados separáveis:

Para um estado separável  $\rho$ ,  $E(\rho) = 0$ .

**(ii) Normalização:**

O emaranhamento do estado puro  $\Psi = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=1}^d |i\rangle^A |i\rangle^B$ , maximamente emaranhado de dimensão  $d \otimes d$ , é

$$E(|\Psi\rangle \langle \Psi|) = \log_2 d, \quad (2.16)$$

em que o conjunto  $\{|i\rangle^A\}$  compõe uma base ortonormal.

**(iii) Não crescente por LOCC:**

Seja um mapa  $\Lambda_{LOCC}$ , implementado por uma operação local e comunicação clássica (LOCC), então

$$E(\Lambda_{LOCC} \rho) \leq E(\rho). \quad (2.17)$$

**(iv) Continuidade:**

$E(\rho)$  deve ser uma função contínua de  $\rho$ ,

$$E(\rho) - E(\sigma) \rightarrow 0 \text{ para } \|\rho - \sigma\| \rightarrow 0. \quad (2.18)$$

**(v) Aditividade Parcial:**

Considerando  $n$  cópias idênticas do estado  $\rho$ , estas cópias contém  $n$  vezes o emaranhamento de  $\rho$ ,

$$E(\rho^{\otimes n}) = nE(\rho). \quad (2.19)$$

**(vi) Subaditividade**

Para dois sistemas independentes  $\rho$  e  $\sigma$ , dizemos que o sistema global é descrito por  $\rho \otimes \sigma$ , e as funções que medem emaranhamento devem satisfazer,

$$E(\rho \otimes \sigma) \leq E(\rho) + E(\sigma). \quad (2.20)$$

### (vii) Convexidade

$E(\rho)$  deve ser convexa no espaço dos operadores,

$$E\left(\sum_i p_i \rho_i\right) \leq \sum_i p_i E(\rho_i), \quad (2.21)$$

onde  $\rho = \sum_i p_i \rho_i$ , para todos  $\{p_i | \Psi_i\rangle\}$ , com  $p_i \geq 0$  e  $\sum_i p_i = 1$ .

Encontrar uma medida que satisfaça todas essas propriedades é algo muito difícil. G. Vidal [55] propôs que um bom quantificador de emaranhamento seria aquele que satisfaz apenas a propriedade de não crescimento, em média, por operações locais e comunicação clássica (LOCC). Deste modo definiu-se o que se chama de monótono de emaranhamento.

Vidal também demonstrou um conjunto de condições necessárias para que  $E$  seja um monótono de emaranhamento que são:

1. Para qualquer operação local não-determinística  $\xi_{i,k}(\rho)$ , realizada na  $i$ -ésima parte,

$$E(\rho) \geq \sum_k p_k E(\rho_k) \quad (2.22)$$

onde

$$p_k = \text{Tr} [\xi_{i,k}(\rho)], \rho_k = \frac{\xi_{i,k}(\rho)}{p_k}.$$

2. Convexidade: para qualquer ensemble  $\{q_k, \rho_k\}$ ,

$$E(\rho) \leq \sum_k q_k E(\rho_k). \quad (2.23)$$

As medidas de emaranhamento devem satisfazer às propriedades citadas e são divididas em dois tipos, operacionais e abstratas. As medidas operacionais são obtidas por meio de operações locais e comunicação clássicas (LOCC) e as mais comuns são emaranhamento destilável [56] e custo de emaranhamento [64]. As medidas abstratas, são usadas como limites para medidas operacionais; dois exemplos de medidas abstratas são concorrência [58], que mede emaranhamento de formação e entropia relativa [65, 66].

Um grande problema na formulação de medidas de emaranhamento é a quantificação do emaranhamento de estados mistos, que são escritos como,

$$\rho = \sum_j p_j \rho_j \quad (2.24)$$

onde  $\sum_j p_j = 1$ , e  $p_j \geq 0$ . Fisicamente isso corresponde a uma mistura de estados puros, de modo que  $\rho_j$  tem probabilidade  $p_j$ . Os estados mistos não podem ser representados como função de onda, mas podemos representá-los como uma soma de estados puros. Não existe regra geral para saber se um estado misto possui emaranhamento ligado. O emaranhamento ligado é o emaranhamento não destilável através de LOCC. Se um estado misto possui emaranhamento não destilável, então esse estado possui emaranhamento ligado [63, 69].

O problema em definir um bom medidor de emaranhamento para estados mistos, está relacionado ao fato de que diferentes medidores podem gerar diferentes ordens para os pares de estados mistos. Portanto, existe um problema na definição do máximo emaranhamento para um estado misto.

### 2.4.1 Entropia de Von Neumann.

No início do século XX Von Neumann e Landau generalizaram o conceito de entropia, para sistemas de partículas quânticas, onde um estado misto definido por uma matriz densidade  $\rho$ , tem a entropia definida como,

$$S(\rho) = -Tr(\rho \ln \rho). \quad (2.25)$$

Bennett et al [78], utilizaram-se da entropia de Von Neumann como uma medida de emaranhamento para estados bipartidos.

Dado o operador densidade  $\hat{\rho}$  de um par de sistemas quânticos  $A$  e  $B$ , este estado

pode ser decomposto em uma base  $|\Psi_i\rangle$ , com probabilidade  $p_i$ , de modo que,

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\Psi_i^{ab}\rangle \langle \Psi_i^{ab}|. \quad (2.26)$$

O emaranhamento  $E(\Psi)$  é definido como a entropia de Von Neumann, de qualquer um dos subsistemas  $A$  e  $B$ ,

$$E(\Psi) = -Tr(\hat{\rho}_a \log_2 \hat{\rho}_a) = -Tr(\hat{\rho}_b \log_2 \hat{\rho}_b), \quad (2.27)$$

onde  $\hat{\rho}_a$  é obtido através do traço parcial de  $\hat{\rho}$  sobre o subsistema  $B$ , e da mesma maneira conseguimos  $\hat{\rho}_b$ , fazendo o traço parcial de  $\hat{\rho}$  sobre o subsistema  $A$ .

Para demonstrarmos como é calculado o traço parcial tomaremos como exemplo o seguinte estado de dois qubits,

$$|\Psi_{AB}\rangle = \cos \theta |00\rangle - \sin \theta |11\rangle, \quad (2.28)$$

o operador densidade para este estado é,

$$\rho_{AB} = |\Psi_{AB}\rangle \langle \Psi_{AB}| = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Verificando traço parcial em relação ao subsistema  $B$  temos,

$$\rho_A = Tr_B(\rho_{AB}) = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Agora iremos verificar a entropia para o estado  $|\Psi_{AB}\rangle$ ,

$$E(\Psi_{AB}) = - [\cos^2 \theta \log_2(\cos^2 \theta) + \sin^2 \theta \log_2(\sin^2 \theta)]. \quad (2.31)$$

Podemos ver que a quantidade  $E(\Psi_{AB})$  tem valor 0, para  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi/2$ , para estes

valores de  $\theta$  temos estados separáveis. Para  $\theta = \pi/4$  temos  $E(\Psi_{AB}) = 1$ , para este valor de  $\theta$  temos um estado maximamente emaranhado de dois qubits.

### 2.4.2 Entropia Linear

A entropia linear é uma medida de pureza de um estado [57], e é definida como,

$$S_l(\rho) = \frac{d}{d-1} [1 - \text{Tr}(\rho^2)]. \quad (2.32)$$

Para um estado puro no espaço de Hilbert com dimensão  $d$  a entropia linear é zero e para um estado maximamente misto  $S_l(\rho) = 1$ .

### 2.4.3 Concorrência

Hill e Wootters [58], apresentaram um tipo de medida de emaranhamento de formação, denominada concorrência. Neste trabalho eles obtiveram uma expressão exata para a medida de emaranhamento de formação de dois qubits.

Para demonstrarmos esta medida de emaranhamento, primeiramente iremos introduzir uma transformação de "spin flip", que é uma função aplicável sobre estados de um número arbitrário de qubits. O primeiro passo é demonstrar essa transformação sobre um estado puro de um único qubit,

$$|\tilde{\Psi}\rangle = \sigma_y |\Psi^*\rangle, \quad (2.33)$$

onde  $|\Psi^*\rangle$  representa o conjugado complexo de  $|\Psi\rangle$ .

Para realizarmos a transformação spin flip sobre  $n$  qubits, devemos fazer essa operação individualmente em cada qubit. A operação spin flip para um estado geral  $\rho$  de dois qubits tem o seguinte forma,

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y). \quad (2.34)$$

Podemos utilizar a transformação de spin flip para expressar emaranhamento de estados

puros por,

$$E(\Psi) = \xi(C(\Psi)), \quad (2.35)$$

onde definimos concorrência  $C$  como,

$$C(\Psi) = \left| \langle \Psi | \tilde{\Psi} \rangle \right|, \quad (2.36)$$

e a função  $\xi$  é dada por,

$$\xi(C) = h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}\right), \quad (2.37)$$

$h(x)$  é a função entropia binária, que tem a forma,

$$h(x) = -[x \log_2 x + (1 - x) \log_2(1 - x)]. \quad (2.38)$$

$\xi(C)$  é uma função monotônica e varia de 0 a 1, assim como  $C$  também varia de 0 a 1. A concorrência pode ser usada como medida de emaranhamento. Como exemplo consideraremos um estado maximamente emaranhado de dois qubits.

$$|\Psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle). \quad (2.39)$$

A concorrência que é dada por  $\left| \langle \Psi | \tilde{\Psi} \rangle \right|$ . Para o estado Eq. (2.39), tem valor 1. Podemos utilizar como outro exemplo o estado separável  $|\Psi_{AB}\rangle = |01\rangle$ , para o qual a concorrência tem valor 0.

Para estados mistos a concorrência pode ser expressa da seguinte forma,

$$C(\rho) = \{\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4\}, \quad (2.40)$$

onde os  $\Lambda_i$ s são as raízes quadradas dos autovalores da matriz não Hermitiana  $\rho\tilde{\rho}$ . A determinação física da concorrência  $C(\rho)$ , bem como a execução experimental, foram obtidas para um sistema de dois qubits. Esses resultados são encontrados nos trabalhos

de Mintert [59], Horodecki [60] e Walborn [61].

## 2.4.4 Negatividade Global

O conceito de negatividade tem origem na observação feita por Peres [62] apresentada na seção (2.3), onde a transposta parcial de uma matriz densidade, associada com um estado separável ainda é uma matriz densidade válida. Horodecki et. al. [63], demonstram que o critério de Peres é uma condição necessária para um estado ser separável, para dimensões do espaço de Hilbert,  $2 \otimes 2$  e  $2 \otimes 3$ . O critério de Peres nos leva a uma medida de emaranhamento chamada negatividade.

A negatividade é uma medida de emaranhamento para qualquer tipo de estado puro ou misto de um sistema bipartido arbitrário [70–72]. Essa medida se baseia na norma do traço da transposta parcial  $\rho_{AB}^{T_A}$ , do estado bipartido  $\rho_{AB}$ . Com isso temos a negatividade definida como,

$$N(\rho_{AB}) = \left| \left| \rho_{AB}^{T_A} \right| \right| - 1, \quad (2.41)$$

onde  $\left| \left| \rho_{AB}^{T_A} \right| \right|$ , é a norma do traço de  $\rho_{AB}^{T_A}$ , que é o mesmo que a soma dos módulos dos autovalores de  $\rho_{AB}^{T_A}$ . Utilizando a definição da norma do traço e o fato que  $Tr(\rho_{AB}^{T_A}) = 1$ , nós temos,

$$\left| \left| \rho_{AB}^{T_A} \right| \right| = 2 \sum_i |\lambda_i^-| + 1, \quad (2.42)$$

onde  $\lambda_i^-$  são os autovalores negativos da matriz  $\rho_{AB}^{T_A}$ . Deste modo a negatividade pode ser escrita como,

$$N(\rho_{AB}) = 2 \sum_i |\lambda_i^-|. \quad (2.43)$$

A negatividade de um estado bipartido maximamente emaranhado equivale a 1, e para um estado separável tem valor 0.

A negatividade é uma medida de emaranhamento bastante usada pois ela tem capacidade de detectar emaranhamento livre de estados bipartidos de qualquer dimensão. Temos

que lembrar que estados que possuem transposta parcial positiva e possuem emaranhamento, são estados com emaranhamento ligado, ou emaranhamento não destilável e para esses estados a negatividade não detecta o emaranhamento.

Apesar da negatividade não detectar emaranhamento ligado, ela nos permite determinar dentro da dinâmica do sistema o emaranhamento livre e tempos de interação onde o emaranhamento é máximo, por esse motivo se torna uma medida de emaranhamento válida para o sistema apresentado no capítulo (5).

### 2.4.5 Negatividade tipo-k

Verificamos que o critério de Peres não possibilita a classificação do tipo de emaranhamento de um estado quântico de muitos partidos. Uma proposta que possibilita a classificação dos tipos de emaranhamento de estados com N-partidos foi apresentada por S. S. Sharma e N. K. Sharma [73].

Para um sistema N-partido, composto com três ou mais partes, pode-se dividir o sistema em M partes, onde cada parte contém um ou mais subsistemas. Se considerarmos um único subsistema, de um sistema composto por M partes, esse subsistema pode estar emaranhado, com seu complemento de diferentes maneiras. Por exemplo, num sistema de três qubits (ABC), o subsistema A pode não estar emaranhado com o sistema BC, como também pode haver emaranhamento entre A e BC, ou AB com C e AC com B

Para demonstrarmos como é calculada a negatividade tipo-k [74], primeiro mostraremos como é feita a transposta parcial tipo-k ( $2 \leq K \leq N$ ) de um estado  $\hat{\rho}$  com relação a um qubit  $p$ , é obtida da matriz  $\rho$  mediante a aplicação das seguintes condições:

$$\langle i_1 i_2 \dots i_N | \hat{\rho}_K^{TA} | j_1 j_2 \dots j_n \rangle = \langle i_1 i_2 \dots i_{p-1}, j_p, i_{p+1} \dots i_N | \hat{\rho}_K^{TA} | j_1 j_2 \dots j_{p-1}, i_p, j_{p+1} \dots j_N \rangle$$

$$\text{se } \sum_{m=1}^N (1 - \delta_{i_m, j_m}) = K, \quad (2.44)$$

$$\langle i_1 i_2 \dots i_N | \hat{\rho}_K^{TA} | j_1 j_2 \dots j_n \rangle = \langle i_1 i_2 \dots i_N | \hat{\rho} | j_1 j_2 \dots j_n \rangle \text{ se } \sum_{m=1}^N (1 - \delta_{i_m, j_m}) \neq K,$$

onde

$$\begin{aligned} \delta_{i_m, j_m} &= 1 \text{ para } i_m = j_m, \\ \delta_{i_m, j_m} &= 0 \text{ para } i_m \neq j_m. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Um elemento de matriz típico do operador  $\hat{\rho}$  envolve a troca de estado dos  $K$  subsistema, com  $i \in [0, N]$ . Para um sistema  $N$ -partido, o operador  $\hat{\rho}$  pode ser dividido em  $N$  partes rotuladas por  $K$  ( $0 \leq K \leq N$ ) e escrita como,

$$\hat{\rho} = \sum_{m=1}^N \hat{R}_K, \quad (2.46)$$

com

$$\hat{R}_K = \sum_{I_K} \langle i_1 i_2 \dots i_N | \hat{\rho} | j_1 j_2 \dots j_n \rangle | i_1 i_2 \dots i_N \rangle \langle j_1 j_2 \dots j_N |, \quad (2.47)$$

onde

$$I_k = i_1 i_2 \dots i_N, j_1 j_2 \dots j_N : \left( \sum_{m=1}^N \delta_{i_m, j_m} = N - K \right). \quad (2.48)$$

A transposta parcial tipo- $K$  com relação ao subsistema  $p$  é escrita como,

$$\hat{\rho}_K^{T_p} = \sum_{\substack{K'=0,1,\dots,N \\ K \neq K'}} \hat{R}_{K'} + \hat{R}_K^{T_p}. \quad (2.49)$$

A negatividade tipo- $K$  é calculada a partir da transposta parcial tipo- $K$  da matriz  $\hat{\rho}$  com respeito a um subsistema  $p$ , e é definida como,

$$N_K^p = \left\| \left\| \rho_K^{T_p} \right\| \right\|_1 - 1, \quad (2.50)$$

onde  $\left\| \left\| \rho_K^{T_p} \right\| \right\|_1$ , é a norma do traço de  $\rho_K^{T_p}$ . Usando a definição da norma do traço, e o fato

que  $\text{tr}(\rho_K^{T_p}) = 1$ , nos temos,

$$\left\| \rho_K^{T_p} \right\| = 2 \sum_i |\lambda_i^{K-}| + 1, \quad (2.51)$$

onde  $\lambda_i^{K-}$ , são os autovalores negativos da matriz  $\rho_K^{T_p}$ . Com isso a negatividade pode ser escrita como,

$$N_K^p = 2 \sum_i |\lambda_i^{K-}|, \quad (2.52)$$

com

$$(p = 2, 3, \dots, N). \quad (2.53)$$

A negatividade  $N_K^p$ , depende das correlações quânticas tipo-K, e é uma medida de todos os tipos possíveis de emaranhamento atribuídos para as correlações quânticas tipo-K. Intuitivamente para um sistema que tem emaranhamento N-partido puro, é necessário que as correlações quânticas tipo-N não sejam zero. Por outro lado emaranhamento N-partido pode ser gerado por correlações quânticas tipo-(N -1) .

# Capítulo 3

## Emaranhamento de variáveis contínuas

### 3.1 Introdução

A informação quântica constitui um campo relativamente novo na física, e tem como objetivo utilizar conceitos de mecânica quântica na teoria de informação. Uma proposta teórica no campo da informação quântica, que justifica o uso de elementos da mecânica quântica para a transferência de informação é o teletransporte de estado quânticos, proposto por Bennett 1993 [36], neste artigo são usados variáveis discretas (estado excitado e fundamental) dos átomos para o envio de informação. Posteriormente, em 1994, Vaidman [79], demonstrou o mesmo teletransporte utilizando variáveis contínuas do campo eletromagnético.

Estados quânticos com variáveis contínuas são eficientemente produzidos através do processo de conversão paramétrica descendente [80]. Esse processo consiste na incidência de um fóton através de um meio óptico não linear (cristal). A interação do fóton com o cristal resulta em dois fótons que possuem emaranhamento entre as quadraturas do campo eletromagnético (posição e momento). O uso desse tipo de emaranhamento em determinados protocolos de comunicação quântica, depende da qualidade do emaranhamento do

estado preparado. Portanto qualquer protocolo baseado no emaranhamento de variáveis contínuas é imperfeito. A eficiência do protocolo depende do grau de compressão do laser. Para a eficiência desejada necessitamos altos parâmetros de compressão, que já foram obtidos experimentalmente [81]. Portanto estados quânticos de variáveis contínuas podem e são utilizados na implementação protocolos de comunicação quântica.

Estados quânticos de dois qubits podem ser usados para o envio de informação através da codificação superdensa [34], o emaranhamento compartilhado pelo par de qubits localizados em laboratórios remotos de Alice e Bob, é utilizado para codificar mensagem. O código superdenso utilizando emaranhamento de variáveis contínuas, foi proposto por Braunstein e Kinbom (2000) [83], nesse trabalho demonstraram que utilizando estados comprimidos de dois modos é possível obter comunicação eficiente.

A criptografia quântica baseada no emaranhamento das variáveis contínuas do campo eletromagnético, dependem das correlações das quadraturas do estado comprimido de dois modos. Em 1997 Cohen [84], considerou o caso ideal com parâmetro de compressão infinito que fornece correlação perfeita. Uma proposta realística para criptografia apresentada por Pereira e colaboradores em (2000) [85], onde foi proposto criptografia utilizando compressão finita das quadraturas para estados comprimidos de dois modos.

Podemos também utilizar o emaranhamento entre as variáveis contínuas para transferência de emaranhamento para sistemas de variáveis discretas, W. Son [97] apresentou uma proposta de transferência de emaranhamento das variáveis contínuas do campo para um sistema de dois átomos localizados em duas cavidades espacialmente separadas. Em 2009 [28], apresentamos uma proposta para geração de emaranhamento entre três átomos de dois níveis, localizados em duas cavidades espacialmente separadas. As cavidades estão inicialmente no estado vácuo e um estado comprimido de dois modos é enviado para as cavidades, através de um divisor de feixe. Nesse caso o emaranhamento das variáveis contínuas do campo é transferido para um sistema de variáveis discretas que corresponde aos átomos localizado nas cavidades.

O estado vácuo comprimido de dois modos é um estado quântico de variáveis contínuas,

que será utilizado no capítulo (4), na transferência de emaranhamento para sistemas de variáveis discretas que são os átomos localizados em cavidades. Para melhor entendimento desse estado do campo eletromagnético, demonstraremos a quantização do campo eletromagnético, e apresentaremos os principais estados do campo eletromagnético, que são: estado de Fock, estado coerente, estado comprimido e estado vácuo comprimido de dois modos. Também demonstraremos a função Q, para representação do estados vácuo comprimido de dois modos no espaço de fase. Para quantificação do emaranhamento do estado vácuo comprimido de dois modos utilizaremos a Entropia de Von Neumann e matriz covariância.

## 3.2 Quantização do campo eletromagnético

Consideramos ondas eletromagnéticas em uma região do espaço, onde a parte transversal da densidade de corrente é igual a zero ( $J_T = 0$ ). Este é o gauge de Coulomb no qual,  $\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = 0$ . Neste caso o potencial vetor  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  deverá satisfazer a equação de onda,

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}(\vec{r}, t) = 0. \quad (3.1)$$

Admitindo que o campo eletromagnético existe em uma caixa de lado L, o potencial vetor pode ser expandido em uma série de Fourier como,

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_k \left[ \vec{A}_k(t) e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} + \vec{A}_k^*(t) e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}} \right], \quad (3.2)$$

onde os componentes  $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ , assumem valores discretos  $k_j = 2\pi n_j/L$ , com ( $n_j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). A condição do gauge de Coulomb é satisfeita apenas se  $\vec{k} \cdot \vec{A}_k(t) = 0$  e  $\vec{k} \cdot \vec{A}_k^*(t) = 0$ . As componentes de  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  são independentes e separáveis satisfazendo a equação do campo,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A}_k(t) + \omega_k^2 \vec{A}_k(t) = 0 \quad (3.3)$$

onde  $\omega_k = c |k|$ .

Devemos introduzir uma posição efetiva e momento associado, com o modo do campo eletromagnético dentro da caixa e calcular o valor médio da energia.

A solução da Eq. (3.3) pode ser dada como  $\vec{A}_k(t) = \vec{A}_k \exp(-i\omega_k t)$ , deste modo o potencial vetor é escrito como,

$$\vec{A}_k(\vec{r}, t) = \sum_k \left[ \vec{A}_k e^{-i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r})} + \vec{A}_k^* e^{i(\omega_k t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \right]. \quad (3.4)$$

O valor médio da energia contendo um único modo  $\vec{k}$  é obtido através da integral,

$$\bar{\xi}_k = \frac{1}{2} \int_{caixa} (\varepsilon_0 \bar{E}^2 + \mu_0 \bar{H}^2) d^3V. \quad (3.5)$$

Os campos elétrico e magnético associados com o modo  $\vec{k}$ , podem ser expressos em termos do potencial vetor  $\vec{A}_k$ , através das equações,

$$\vec{E}_k(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}_k, \quad (3.6)$$

$$\vec{H}_k(\vec{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A}_k. \quad (3.7)$$

Através das relações do campo elétrico e magnético, com o potencial vetor, podemos obter a relação,

$$|\vec{E}_k| = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} |\vec{H}_k|. \quad (3.8)$$

Desta maneira podemos expressar o valor médio de energia, contendo um único modo de  $k$  como,

$$\bar{\xi}_k = 2\varepsilon_0 V \omega_k^2 \vec{A}_k \cdot \vec{A}_k^*, \quad (3.9)$$

onde  $V = L^3$ .

O vetor  $\vec{A}_k$  associado a um dado modo  $k$ , é um número complexo. Portanto podemos escrever-lo através de quadraturas generalizadas adimensionais de posição  $x$  e momento

$p$ , como,

$$\vec{A}_k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V \omega_k}} (x_k + ip_k) \epsilon_k \quad (3.10)$$

$$\vec{A}_k^* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V \omega_k}} (x_k - ip_k) \epsilon_k, \quad (3.11)$$

as coordenadas  $x_k$  e  $p_k$  são quantidades escalares.

A energia média associada a um único modo do campo pode ser expressa como,

$$\bar{\xi}_k = \frac{\hbar \omega_k}{4} (x_k^2 + p_k^2). \quad (3.12)$$

A aproximação mais direta para a quantização do campo eletromagnético, consiste na substituição das variáveis clássicas  $x_k$  e  $p_k$  pelos operadores quânticos  $\hat{x}_k$  e  $\hat{p}_k$ , de maneira que,

$$[\hat{x}_k, \hat{p}_k] = 2i\delta_{kk'} \hat{1} \quad (3.13)$$

Nós associamos a cada modo do campo eletromagnético um oscilador harmônico quântico, definindo os operadores de aniquilação e criação de fótons,

$$\hat{a}_k = \frac{1}{2} (\hat{x}_k + i \hat{p}_k) \quad \text{e} \quad \hat{a}_k^\dagger = \frac{1}{2} (\hat{x}_k - i \hat{p}_k). \quad (3.14)$$

Conseqüentemente o operador número de fótons no modo  $k$ , e dado por,

$$\hat{n}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k. \quad (3.15)$$

O vetor  $\vec{A}_k$  é quantizado, usando as definições da equação 3.14, nas equações 3.10 e 3.11, com isso temos,

$$\hat{A}_k = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V \omega_k}} \hat{a}_k, \quad (3.16)$$

$$\hat{A}_k^* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 V \omega_k}} \hat{a}_k^\dagger. \quad (3.17)$$

Utilizando-se das expressões quantizadas do vetor  $\vec{A}_k$ , podemos escrever as expressões quantizadas para o campo elétrico e magnético associado ao modo  $k$ , como

$$\hat{E}_k = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\varepsilon_0 V}}\vec{\epsilon}_k \left[ \hat{a}_k e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{r})} - \hat{a}_k^\dagger e^{i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \right], \quad (3.18)$$

$$\hat{H}_k = \sqrt{\frac{\hbar c^2}{2\mu_0 V \omega_k}}\vec{k} \times \vec{\epsilon}_k \left[ \hat{a}_k e^{-i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{r})} - \hat{a}_k^\dagger e^{i(\omega_k t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \right]. \quad (3.19)$$

O Hamiltoniano para o campo eletromagnético quantizado pode ser escrito como,

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \int_{caixa} (\varepsilon_0 \hat{E}^2 + \mu_0 \hat{H}^2) d^3V = \sum_k \hbar\omega_k \left( \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right), \quad (3.20)$$

onde a somatória em  $k$  representa um conjunto de osciladores harmônicos.

### 3.3 Relações de incerteza e compressão das flutuações quânticas

Considerando a relação de incerteza de um observável  $\hat{A}$ , a variação média é definida por,

$$(\Delta A)^2 = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2. \quad (3.21)$$

Para dois observáveis  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ , que não comutam, temos a seguinte relação,

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}, \quad (3.22)$$

neste caso não existem auto-estados simultâneos entre os observáveis  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ , deste modo eles não podem ser determinados precisamente quando medidos.

A relação de incerteza entre os dois observáveis pode ser expressa como,

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \langle \hat{C} \rangle \right|. \quad (3.23)$$

O estado em que  $\Delta A \Delta B = \left| \langle \hat{C} \rangle \right| / 2$ , é chamado de estado inteligente. Se obtemos a incerteza mínima para os observáveis  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ , ou seja,  $\Delta A = \Delta B = U$ , então o estado inteligente satisfaz a relação,

$$U^2 = \frac{1}{2} \left| \langle \hat{C} \rangle \right|. \quad (3.24)$$

Um estado inteligente, com incerteza  $\Delta A < U$ , é chamado de estado comprimido em relação ao observável  $\hat{A}$ .

### 3.4 Compressão das quadraturas do campo

Considerando um campo eletromagnético de modo único, onde os operadores  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$  satisfazem a relação de comutação de Heisenberg,

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar, \quad (3.25)$$

as relações de incerteza desses observáveis podem ser escritas como,

$$(\Delta x)^2 (\Delta p)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}. \quad (3.26)$$

Podemos também definir  $\hat{x}$  admitindo  $\hbar = 1$ , de modo que,

$$\hat{x}_\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} e^{-i\theta} + \hat{a}^\dagger e^{i\theta}). \quad (3.27)$$

Com isso temos,

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) = \hat{x}_0 \quad (3.28)$$

e

$$\hat{p} = \frac{1}{\sqrt{2}i} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger) = \hat{x}_{\pi/2}. \quad (3.29)$$

A relação de incerteza para duas quadraturas  $\hat{x}_\theta$  e  $\hat{x}_{\theta+\pi/2}$ , pode ser escrita como

$$(\Delta\hat{x}_\theta)(\Delta\hat{x}_{\theta+\pi/2}) \geq \frac{1}{2}. \quad (3.30)$$

Existe uma determinada classe de estados para qual a igualdade na relação de incerteza é satisfeita. Estes estados são estados de incerteza mínima, dentro deste grupo de estados com incerteza mínima existe um grupo de estados comprimidos para qual,

$$(\Delta\hat{x}_\theta)^2 \leq \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (3.31)$$

Para o caso em que o Hamiltoniano livre é invariante sob rotações de fase, os auto-estados do Hamiltoniano livre, podem ser estados de incerteza mínima, mas não podem ser estados comprimidos.

### 3.5 Estados de Fock

Consideramos um único modo do campo eletromagnético com frequência  $\nu$ , onde os operadores de criação e aniquilação para o campo são  $\hat{a}^\dagger$  e  $\hat{a}$ , respectivamente, e o vetor  $|n\rangle$  é um auto estado do operador  $\hat{n}$ , com correspondente auto-valor de energia  $E_n$ , ou seja

$$\hat{H} |n\rangle = \hbar\nu \left( \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = E_n |n\rangle. \quad (3.32)$$

Aplicando o operador  $\hat{a}$  no lado direito da equação (2.32), e utilizando a relação de comutação  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ , nós obtemos a seguinte equação,

$$\hat{H} \hat{a} |n\rangle = (E_n - \hbar\nu) \hat{a} |n\rangle. \quad (3.33)$$

Isso significa que o estado

$$\alpha_n |n-1\rangle = \hat{a} |n\rangle, \quad (3.34)$$

na Eq. 3.34 temos um auto-vetor  $|n - 1\rangle$ , com auto-valor de energia reduzido de  $\hbar\nu$ , ou seja

$$E_{n-1} = E_n - \hbar\nu. \quad (3.35)$$

Se repetirmos o procedimento da Eq. 3.34  $n$  vezes, nós descemos a escada de energias em degraus de  $\hbar\nu$ , até que obtermos,

$$\hat{H}\hat{a}|0\rangle = (E_0 - \hbar\nu)\hat{a}|0\rangle. \quad (3.36)$$

O autovalor de energia  $E_0$  representa a energia do estado vácuo. Nós não possuímos valores de energia menores que  $E_0$  para o oscilador, com isso concluímos que,

$$\hat{a}|0\rangle = 0. \quad (3.37)$$

A energia do estado vácuo é obtida aplicando o operador  $\hat{H}$  sobre o estado  $|0\rangle$ ,

$$\hat{H}|0\rangle = \frac{\hbar\nu}{2}|0\rangle = E_0|0\rangle. \quad (3.38)$$

Através da Eq. 3.32, concluímos que a energia para o oscilador tem a seguinte forma,

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\nu. \quad (3.39)$$

Podemos determinar a constante de normalização  $\alpha_n$  Eq. 3.34, da seguinte forma,

$$\langle n - 1|n - 1\rangle = \frac{1}{|\alpha_n|^2} \langle n|\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle = \frac{n}{|\alpha_n|^2} \langle n|n\rangle = \frac{n}{|\alpha_n|^2} = 1. \quad (3.40)$$

Com isso temos que  $\alpha_n = \sqrt{n}$ , desta maneira podemos escrever a Eq 3.34 como,

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n - 1\rangle. \quad (3.41)$$

Também podemos calcular o valor de  $\alpha_n$  para o caso em que  $\hat{a}^\dagger$  atua sobre o estado  $|n\rangle$ ,

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle. \quad (3.42)$$

Se aplicarmos  $a^\dagger$  repetidas vezes sobre o estado  $|0\rangle$ , obtemos,

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle. \quad (3.43)$$

Os auto estados  $|n\rangle$  são chamados de estados de Fock ou estados número. Eles formam um conjunto completo de estados, de modo que,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1. \quad (3.44)$$

Os autovalores de energia para esses estados são discretos, e o quanta de energia corresponde a  $\hbar\nu$ , o auto valor de energia do estado  $|0\rangle$  equivale  $\hbar\nu/2$ , e é conhecido como energia do vácuo. As energias dos estados de Fock contrastam com os valores de energias para um campo eletromagnético clássico que possui um espectro contínuo de energia.

## 3.6 Estados Coerentes

Os estados coerentes foram primeiramente descobertos por Schrödinger em 1926, nesse ano ele produziu seis importantes artigos [86], onde o principal artigo se tratava da solução do átomo de hidrogênio.

Usando a função geradora encontrada no livro clássico de Courant e Hilbert, Schrödinger demonstrou que uma função de onda Gaussiana pode ser construída como uma superposição particular de funções de ondas, correspondentes para os auto-valores discretos do oscilador harmônico. Ele também descobriu que esses estados possuíam propriedades semi-clássicas.

No início da década de sessenta Glauber [87] apresentou relações entre os estados

coerentes e propriedades do campo de radiação, dando origem ao que se conhece hoje como óptica quântica.

Um estado coerente é um estado não clássico com comportamento bem próximo aos estados clássicos. Um estado coerente do campo eletromagnético pode ser definido como auto estados do operador de aniquilação, ou seja,

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle, \quad (3.45)$$

onde  $\alpha$  é um número complexo. Atuando com o operador identidade sobre  $|\alpha\rangle$ , temos

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|\alpha\rangle. \quad (3.46)$$

Utilizando-se da equação 3.43, podemos escrever a equação 3.46 como,

$$|\alpha\rangle = \langle 0|\alpha\rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (3.47)$$

Através da relação de ortogonalidade  $\langle \alpha|\alpha\rangle = 1$ , podemos determinar a constante de normalização  $\langle 0|\alpha\rangle$ ,

$$\langle \alpha|\alpha\rangle = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = 1,$$

com isso temos,

$$\langle 0|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right). \quad (3.48)$$

Deste modo, a expressão para o estado coerente  $|\alpha\rangle$ , tem a seguinte forma,

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_n \frac{(\alpha \hat{a}^\dagger)^n}{n!} |0\rangle. \quad (3.49)$$

Podemos utilizar a propriedade  $\exp(-\hat{a}^* \hat{a}) |0\rangle = |0\rangle$ , para reescrever a equação 3.50, de modo que,

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{\alpha^* \hat{a}} |0\rangle. \quad (3.50)$$

Definindo o operador de deslocamento

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}}, \quad (3.51)$$

verificamos que  $|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle$ .

Utilizando-se da fórmula de Baker-Hausdorff, que demonstra que se os operadores  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ , comutam com  $[\hat{A}, \hat{B}]$  se,

$$[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{A}] = [[\hat{A}, \hat{B}], \hat{B}] = 0, \quad (3.52)$$

eles possuem a seguinte propriedade,

$$e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{[\hat{A}, \hat{B}]/2} e^{\hat{A}} e^{\hat{B}}. \quad (3.53)$$

Como  $\hat{a}^\dagger$  e  $\hat{a}$ , possuem a mesma relação de comutação da equação 3.53 podemos reescrever o operador deslocamento  $\hat{D}(\alpha)$  como,

$$\hat{D}(\alpha) = e^{(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a})}. \quad (3.54)$$

O operador deslocamento é unitário,

$$\hat{D}(\alpha) = \left( \hat{D}(\alpha) \right)^{-1} = \hat{D}(\alpha)^\dagger. \quad (3.55)$$

Atuando  $\hat{D}(\alpha)$ , sobre os operadores de aniquilação e criação,  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  temos,

$$\hat{D}^{-1}(\alpha) \hat{a} \hat{D}(\alpha) = \hat{a} + \alpha \quad (3.56)$$

$$\hat{D}^{-1}(\alpha) \hat{a}^\dagger \hat{D}(\alpha) = \hat{a}^\dagger + \alpha^*. \quad (3.57)$$

Isso representa um deslocamento nas quadraturas  $x$  e  $p$ , do campo eletromagnético.

Podemos verificar esse deslocamento nas quadraturas do campo aplicando o operador deslocamento em  $\hat{x}$  e  $\hat{p}$ ,

$$\hat{D}^{-1}(\alpha)\hat{x}\hat{D}(\alpha) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega m}}(\hat{a}^\dagger + \alpha^* + \hat{a} + \alpha) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega m}}[\hat{x} + \text{Re}(\alpha)], \quad (3.58)$$

$$\hat{D}^{-1}(\alpha)\hat{p}\hat{D}(\alpha) = \sqrt{\frac{\hbar\omega m}{2}}(\hat{a}^\dagger + \alpha^* - \hat{a} - \alpha) = \sqrt{\frac{\hbar\omega m}{2}}[\hat{p} - \text{Im}(\alpha)]. \quad (3.59)$$

Através das equações 3.58 e 3.59, demonstramos que a ação do operador deslocamento provoca um deslocamento nas quadraturas do campo. Conseqüentemente um estado coerente  $|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle$ , tem quadraturas,

$$\langle\hat{x}\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega m}}\text{Re}(\alpha) \text{ e } \langle\hat{p}\rangle = -\sqrt{\frac{\hbar\omega m}{2}}\text{Im}(\alpha).$$

### 3.6.1 Propriedades dos estados coerentes.

#### Não ortogonalidade

O produto escalar entre dois estados coerentes tem resultado não nulo, ou seja estados coerentes, são estados não ortogonais. Podemos verificar essa propriedade calculando o produto escalar entre os estado  $|\alpha\rangle$  e  $|\beta\rangle$ ,

$$\langle\beta|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\beta|^2 + \alpha\beta^* - \frac{1}{2}|\alpha|^2\right), \quad (3.60)$$

tomando o módulo da equação 3.60 temos

$$|\langle\beta|\alpha\rangle|^2 = \exp(-|\beta - \alpha|^2) \quad (3.61)$$

ou

$$|\langle\beta|\alpha\rangle| = \exp\left(-\frac{1}{2}|\beta - \alpha|^2\right). \quad (3.62)$$

## Supercompleteza

O conjunto de todos os estados coerentes  $|\alpha\rangle$ , formam um conjunto supercompleto. Para demonstrarmos essa propriedade, primeiro devemos considerar a seguinte integral,

$$J = \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha, \quad (3.63)$$

onde  $d^2\alpha = d(\text{Re } \alpha)d(\text{Im } \alpha)$ . Reescrevendo a integral, com o estado  $|\alpha\rangle$ , escrito em função do estado  $|n\rangle$  Eq. 3.48 temos,

$$J = \sum_{n,n'} \frac{|n'\rangle \langle n|}{\sqrt{n'!n!}} \int_0^\infty (\alpha^*)^{n'} \alpha^n \exp[-|\alpha|^2] d^2\alpha. \quad (3.64)$$

Para calcular a integral utilizaremos coordenadas polares,

$$\alpha = r e^{i\theta}, \quad d^2\alpha = r dr d\theta. \quad (3.65)$$

Deste modo a integral tem a seguinte forma,

$$J = \sum_{n,n'} \frac{|n'\rangle \langle n|}{\sqrt{n'!n!}} \int_0^\infty r^{n'+n+1} e^{-r^2} dr \int_0^\infty e^{i(n'-n)\theta} d\theta. \quad (3.66)$$

Para todo  $n' \neq n$  a expressão acima se anula, desta maneira ela assume a seguinte forma,

$$J = \sum_n \frac{|n\rangle \langle n|}{n!} \int_0^\infty r^{2n+1} e^{-r^2} dr = \pi. \quad (3.67)$$

Com isso podemos verificar que a relação de completeza para os estados coerentes é escrita como,

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha = 1. \quad (3.68)$$

## Relação de incerteza para estados coerentes.

Utilizando-se da equação 3.49,  $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$  obtemos os valores esperados dos operadores  $\hat{x}$ ,  $\hat{x}^2$ ,  $\hat{p}$  e  $\hat{p}^2$ , como

$$\langle\alpha|\hat{x}|\alpha\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\alpha + \alpha^*), \quad (3.69)$$

$$\langle\alpha|\hat{x}^2|\alpha\rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right) [(\alpha + \alpha^*)^2 + 1], \quad (3.70)$$

$$\langle\alpha|\hat{p}|\alpha\rangle = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(\alpha - \alpha^*) \quad (3.71)$$

e

$$\langle\alpha|\hat{p}^2|\alpha\rangle = -\left(\frac{\hbar m\omega}{2}\right) [(\alpha - \alpha^*)^2 - 1].$$

Fazendo uso dos valores esperados podemos calcular as incertezas  $\Delta x$  e  $\Delta p$ , com isso temos,

$$(\Delta\hat{x})^2 = \langle\hat{x}^2\rangle - \langle\hat{x}\rangle^2 = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right) \quad (3.72)$$

e

$$(\Delta\hat{p})^2 = \langle\hat{p}^2\rangle - \langle\hat{p}\rangle^2 = \frac{2m\omega}{\hbar}. \quad (3.73)$$

Desta maneira obtemos a relação de incerteza  $\Delta\hat{x} \Delta\hat{p} = \hbar/2$ , mostrando com isso que estados coerentes são estados com incerteza mínima.

## 3.7 Estados Comprimidos

Em 1927, Kennard [88] escreveu um artigo sobre movimento quântico, onde introduziu os estados comprimidos. Esses estados são distribuições gaussianas, e suas larguras não são as mesmas do estado fundamental, e a largura do produto das incertezas para estes estados varia com tempo. Na época este artigo não teve muita importância, só sendo estudado tempos mais tarde.

Para estudarmos os estados comprimidos, primeiramente verificaremos a relação de incerteza para estes estados.

Considerando dois operadores Hermitianos  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$ , que satisfazem a seguinte relação

de comutação,

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{C}, \quad (3.74)$$

de acordo com as relações de incerteza de Heisenberg, o produto das incertezas de dois observáveis  $A$  e  $B$ , é dado por,

$$\Delta\hat{A} \Delta\hat{B} \geq \frac{1}{2} \left| \langle \hat{C} \rangle \right|. \quad (3.75)$$

Um estado é chamado de comprimido se a incerteza em um observável ( $A$ , por exemplo) satisfaz a relação,

$$\left( \Delta\hat{A} \right)^2 < \frac{1}{2} \langle \hat{C} \rangle, \quad (3.76)$$

além desta condição esse estado deve possuir incerteza mínima ou seja,

$$\Delta\hat{A} \Delta\hat{B} = \frac{1}{2} \left| \langle \hat{C} \rangle \right|. \quad (3.77)$$

Satisfazendo essas duas propriedades o estado é chamado de estado comprimido ideal.

O operador de compressão  $\hat{S}(\xi)$ , é definido como,

$$\hat{S}(\xi) = \exp \frac{1}{2} (\xi^* \hat{a}^2 - \xi \hat{a}^{\dagger 2}), \quad (3.78)$$

onde  $\xi = s \exp(i\theta)$ , é um número complexo arbitrário. Também podemos verificar que  $\hat{S}(\xi)$ , é um operador unitário,

$$\hat{S}(\xi) = \left( \hat{S}(\xi) \right)^{-1} = \hat{S}^\dagger(\xi). \quad (3.79)$$

Atuando com  $\hat{S}(\xi)$  sobre os operadores de aniquilação e criação,  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$  temos,

$$\hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a} \hat{S}(\xi) = \hat{a} \cosh s - \hat{a}^\dagger e^{i\theta} \sinh s = \mu \hat{a} - \nu \hat{a}^\dagger, \quad (3.80)$$

$$\hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a}^\dagger \hat{S}(\xi) = \hat{a}^\dagger \cosh s - \hat{a} e^{-i\theta} \sinh s = \mu \hat{a}^\dagger - \nu^* \hat{a}, \quad (3.81)$$

onde  $\mu = \cosh s$ , e  $\nu = e^{i\theta} \sinh s$ . As equações acima são obtidas utilizando a seguinte propriedade dos operadores,

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \hat{B} - [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots \quad (3.82)$$

Podemos reescrever as Eqs 3.80 e 3.81 definindo novos operadores de aniquilação e criação de fótons do campo comprimido,  $\hat{b}$  e  $\hat{b}^\dagger$ ,

$$\mu \hat{a} - \nu \hat{a}^\dagger = \hat{b}, \quad (3.83)$$

$$\mu \hat{a}^\dagger - \nu^* \hat{a} = \hat{b}^\dagger. \quad (3.84)$$

Dado as quadraturas do campo eletromagnético,

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \quad (3.85)$$

$$\hat{X}_2 = \frac{1}{i\sqrt{2}} (\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \quad (3.86)$$

Atuando com  $S(\xi)$ , sobre as quadraturas do campo temos,

$$\hat{S}^\dagger(\xi) \hat{X}_1 \hat{S}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{b} + \hat{b}^\dagger) = \hat{Y}_1, \quad (3.87)$$

$$\hat{S}^\dagger(\xi) \hat{X}_2 \hat{S}(\xi) = \frac{1}{i\sqrt{2}} (\hat{b} - \hat{b}^\dagger) = \hat{Y}_2. \quad (3.88)$$

Podemos reescrever  $\hat{Y}_1$  e  $\hat{Y}_2$ , em termos de  $\hat{X}_1$  e  $\hat{X}_2$ ,

$$\hat{Y}_1 = \hat{X}_1 e^{-s}, \quad (3.89)$$

$$\hat{Y}_2 = \hat{X}_2 e^s. \quad (3.90)$$

Através das Eqs. (3.89) e (3.90), podemos concluir que a ação do operador de compressão

sobre as quadraturas do campo, causa um alargamento em uma quadratura e a compressão de outra, dependendo do valor de  $s$  ser positivo ou negativo.

Um estado coerente comprimido  $|\alpha, \xi\rangle$ , é obtido a partir da ação do operador deslocamento  $\hat{D}(\alpha)$ , sobre o estado vácuo, seguido da ação do operador de compressão  $\hat{S}(\xi)$ ,

$$|\alpha, \xi\rangle = \hat{S}(\xi)\hat{D}(\alpha)|0\rangle. \quad (3.91)$$

Um estado coerente é gerado a partir de termos lineares de  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$ , enquanto um estado comprimido é gerado via termos quadráticos em  $a$  e  $a^\dagger$ . Verificaremos a seguir os valores esperados de  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^\dagger$ ,  $\hat{a}^2$ ,  $(\hat{a}^\dagger)^2$  e  $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ , para o estado  $|\alpha, \xi\rangle$ . Com isso temos,

$$\begin{aligned} \langle a \rangle &= \langle \alpha, \xi | \hat{a} | \alpha, \xi \rangle = \langle 0 | \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a} \hat{S}(\xi) \hat{D}(\alpha) | 0 \rangle \\ &= \langle \alpha | \hat{a} \cosh s - \hat{a}^\dagger e^{i\theta} \sinh s | \alpha \rangle \\ &= \alpha \cosh s - \alpha^* e^{i\theta} \sinh s, \end{aligned} \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^2 \rangle &= \langle (\hat{a}^\dagger)^2 \rangle^* = \langle 0 | \hat{D}^\dagger(\alpha) \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a}^2 \hat{S}(\xi) \hat{D}(\alpha) | 0 \rangle \\ &= \langle \alpha | \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a} \hat{S}(\xi) \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a} \hat{S}(\xi) | \alpha \rangle \\ &= \alpha^2 \cosh^2 s - (\alpha^*)^2 e^{2i\theta} \sinh^2 s - 2|\alpha|^2 e^{i\theta} \sinh s \cosh s \\ &\quad - e^{i\theta} \sinh s \cosh s, \end{aligned} \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle &= |\alpha|^2 (\cosh^2 s + \sinh^2 s) - (\alpha^*)^2 e^{i\theta} \sinh s \cosh s \\ &\quad - \alpha^2 e^{-i\theta} \sinh s \cosh s + \sinh^2 s. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Utilizando desses resultados, as incertezas nas quadraturas  $Y_1$  e  $Y_2$ , são

$$\left(\Delta \hat{Y}_1\right)^2 = \langle (\hat{Y}_1)^2 \rangle - \langle \hat{Y}_1 \rangle^2 = \frac{1}{4} e^{-2s}, \quad (3.95)$$

$$(\Delta Y_2)^2 = \langle (Y_2)^2 \rangle - \langle Y_2 \rangle^2 = \frac{1}{4}e^{2s}. \quad (3.96)$$

Com isso podemos verificar que um estado coerente comprimido possui incerteza mínima,

$$\Delta \hat{Y}_1 \Delta \hat{Y}_2 = \frac{1}{4}.$$

Verificando o resultado das incertezas  $\Delta Y_1$  e  $\Delta Y_2$ , percebemos que estas quantidades dependem do valor de  $s$ . Então se uma quadratura é comprimida conseqüentemente a outra quadratura é alargada.

### 3.7.1 Estados comprimidos de dois modos

Estados comprimidos são gerados através de conversão paramétrica descendente. Este processo consiste na incidência de fótons sobre um meio óptico não linear (cristal de  $\text{KH}_2\text{PO}_4$ ). Considerando um fóton com frequência  $\omega_1$  enviado através de um meio óptico não linear, após a interação com o meio, o campo é convertido para dois fótons com frequência  $\omega_2$  e  $\omega_3$ , onde  $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$ .

Na representação de interação o Hamiltoniano efetivo correspondente para o processo de conversão paramétrica descendente, é escrito como,

$$\hat{H}_I = i\hbar k(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger e^{i\theta} - \hat{a}_1 \hat{a}_2 e^{-i\theta}),$$

as quantidades  $k$  e  $\theta$ , representam a intensidade do campo dirigido e ângulo de fase. Os subscritos 1 e 2 dos operadores bosônicos de criação e aniquilação indicam qual modo do campo os operadores correspondem, pois se trata de um campo comprimido de dois modos. O operador evolução para o processo de conversão paramétrica descendente é dado por,

$$\hat{U}(t) = \exp[-i\hat{H}_I t/\hbar] = \exp(\xi \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger - \xi^* \hat{a}_1 \hat{a}_2) \equiv \hat{S}_{12}(\xi), \quad (3.97)$$

onde  $\hat{S}_{12}(\xi)$  é chamado de operador de compressão de dois modos. Onde  $\xi = s \exp[i\theta]$ , o

parâmetro de compressão é dado por  $s = kt$ . O operador  $\hat{S}_{12}(\xi)$  é um operador unitário, satisfazendo,

$$\hat{S}_{12}(\xi) = \left( \hat{S}_{12}(\xi) \right)^{-1} = \hat{S}_{12}^\dagger(\xi).$$

Atuando com  $\hat{S}_{12}(\xi)$  sobre os operadores de aniquilação do primeiro e segundo modo do campo  $\hat{a}_1$  e  $\hat{a}_2$ , usando a relação

$$e^{\hat{A}} \hat{B} e^{-\hat{A}} = \hat{B} - [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!} [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots,$$

obtemos,

$$\hat{S}_{12}^\dagger(\xi) \hat{a}_1 \hat{S}_{12}(\xi) = \hat{a}_1 \cosh s + \hat{a}_2^\dagger \sinh s = \mu \hat{a}_1 + \nu \hat{a}_2^\dagger, \quad (3.98)$$

$$\hat{S}_{12}^\dagger(\xi) \hat{a}_2 \hat{S}_{12}(\xi) = \hat{a}_2 \cosh s + \hat{a}_1^\dagger \sinh s = \mu \hat{a}_2 + \nu \hat{a}_1^\dagger, \quad (3.99)$$

onde  $\mu = \cosh s$  e  $\nu = \sinh s$ .

Podemos reescrever as Eqs. (3.98) e (3.99) definindo novos operadores de aniquilação e criação de fótons do campo comprimido de dois modos,  $\hat{b}_1$  e  $\hat{b}_2$ ,

$$\hat{b}_1 = \mu \hat{a}_1 + \nu \hat{a}_2^\dagger, \quad \hat{b}_2 = \mu \hat{a}_2 + \nu \hat{a}_1^\dagger. \quad (3.100)$$

As quadraturas do campo eletromagnético de dois modos são definidas como,

$$\hat{X}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger), \quad \hat{P}_1 = \frac{1}{i\sqrt{2}} (\hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger), \quad (3.101)$$

$$\hat{X}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger), \quad \hat{P}_2 = \frac{1}{i\sqrt{2}} (\hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger), \quad (3.102)$$

onde o índice 1 e (2), representam as quadraturas do primeiro e (segundo) modo do campo comprimido.

Podemos escrever um operador posição com soma das quadraturas,  $\hat{X} = \hat{X}_1 + \hat{X}_2$ , e um operador momento do mesmo modo,  $\hat{P} = \hat{P}_1 + \hat{P}_2$ . Atuando com  $S_{12}(\xi)$ , sobre as

quadraturas combinadas  $\hat{X}$  e  $\hat{P}$  temos,

$$\hat{S}_{12}^\dagger(\xi)\hat{X}\hat{S}_{12}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ (\hat{b}_1 + \hat{b}_1^\dagger) + (\hat{b}_2 + \hat{b}_2^\dagger) \right] = \hat{X}', \quad (3.103)$$

$$\hat{S}_{12}^\dagger(\xi)\hat{P}\hat{S}_{12}(\xi) = \frac{1}{i\sqrt{2}} \left[ (\hat{b}_1 - \hat{b}_1^\dagger) + (\hat{b}_2 - \hat{b}_2^\dagger) \right] = \hat{P}'. \quad (3.104)$$

Podemos reescrever  $\hat{X}'$  e  $\hat{P}'$ , em termos das quadraturas combinadas  $\hat{X}$  e  $\hat{P}$ ,

$$\hat{X}' = \hat{X}e^s, \quad \hat{P}' = \hat{P}e^{-s}. \quad (3.105)$$

Como verificamos a ação do operador de compressão de dois modos nas quadraturas combinadas podemos calcular a variância das quadraturas combinadas  $\hat{X}$  e  $\hat{P}$ , utilizando o valor esperado dos operadores  $\hat{X}$ ,  $\hat{P}$ ,  $\hat{X}^2$  e  $\hat{P}^2$  no estado  $\hat{S}_{12}|00\rangle$ , com isso temos,

$$\left(\Delta\hat{X}\right)^2 = \frac{1}{4}e^{2s}, \quad \left(\Delta\hat{P}\right)^2 = \frac{1}{4}e^{-2s}. \quad (3.106)$$

Através das Eq. (3.106), podemos concluir que a ação do operador de compressão de dois modos, sobre as quadraturas combinadas do campo  $\hat{X}$  e  $\hat{P}$ , causa um alargamento na incerteza de uma quadratura e a compressão da outra, dependendo do valor de  $s$  ser positivo ou negativo. O operador de compressão de dois modos não causa alargamento e compressão nas quadraturas de um único modo do campo, esse efeito só ocorre sobre posição do primeiro modo e posição do segundo modo. Esse alargamento e compressão sobre as incertezas, ocorre de modo que o estado permanece com incerteza mínima.

O operador  $\hat{S}_{12}(\xi)$  Eq. (3.97), pode ser reescrito na forma de um produto de exponenciais, ou seja,

$$\begin{aligned} \hat{S}_{12}(\xi) = & (\cosh s)^{-1} \exp \left[ -\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger e^{2i\theta} \tanh s \right] \exp \left[ -\left( \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 \right) \ln(\cosh s) \right] \\ & \exp \left[ -\hat{a}_1 \hat{a}_2 e^{2i\theta} \tanh s \right]. \end{aligned} \quad (3.107)$$

A ação do operador compressão  $S_{12}(\xi)$ , sobre o vácuo produz um estado comprimido de dois modos,

$$|\xi\rangle_{12} = \hat{S}_{12}(\xi) |0\rangle_1 |0\rangle_2 = (\cosh s)^{-1} \exp \left[ -\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger e^{2i\theta} \tanh s \right] |0\rangle_1 |0\rangle_2 = \left( \frac{1}{\cosh s} \right) \sum_{m=0}^{\infty} e^{im\theta} (\tanh s)^m |m\rangle_1 |m\rangle_2. \quad (3.108)$$

Os estados comprimidos são estados do campo eletromagnético com variáveis contínuas, são produzidos eficientemente por conversão paramétrica descendente e podem ser utilizados em protocolos de comunicação quântica como código superdenso, criptografia quântica e teletransporte de estados quânticos. No capítulo (5) utilizaremos o estado do vácuo comprimido de dois modos para transferência de emaranhamento para átomos localizados em cavidades espacialmente separadas.

### 3.8 Representação de estados quânticos no espaço de fase

Estados quânticos diferentemente de estados clássicos não podem ser representado como pontos no espaço de fase devido a incerteza no conhecimento simultâneo do momento e posição de uma partícula. Esta limitação imposta pela mecânica quântica implica na impossibilidade de uma distribuição única das probabilidades sobre o espaço de fase para as possíveis configurações de um sistema quântico. Porém é possível obter algumas funções que fornecem representações dos sistemas quânticos no espaço de fase.

Nesta seção apresentaremos uma descrição do estado comprimido de dois modos em termos da função real de distribuição de coordenadas no espaço de fase, conhecida como Função Q. No capítulo (5) utilizaremos a função Q, na análise qualitativa do emaranhamento entre os modos do campo eletromagnético, de duas cavidades espacialmente separadas.

### 3.8.1 Função Q

Um estado quântico pode ser facilmente representado no espaço de fase através das quasiprobabilidades, também conhecida como função Q, que é definida como,

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \hat{\rho} | \alpha \rangle, \quad (3.109)$$

Esse tipo de função representa os elementos diagonais do operador densidade em um estado coerente. A função Q para um estado vácuo comprimido de dois modos Eq. (3.108) tem a seguinte forma [89],

$$Q(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi^2} \langle \alpha, \beta | \hat{\rho}_{12} | \alpha, \beta \rangle, \quad (3.110)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são estados coerentes para o modo 1 e modo 2 do campo e  $\hat{\rho}_{12} = |\xi\rangle \langle \xi|_{12}$  é o operador densidade para o estado comprimido de dois modos Eq. (3.108). A função Q para o estado  $\hat{\rho}_{12}$  tem expressão,

$$Q(\alpha, \beta) = \frac{1}{\pi^2 \cosh^2 s} e^{-2[|\alpha|^2 + |\beta|^2 - |\alpha||\beta| \tanh(s)]}. \quad (3.111)$$

Através da Eq. (3.111), fizemos um gráfico para verificar o comportamento da função de quasiprobabilidades  $Q(\alpha, \beta)$  em função das quadraturas de posição ( $x_1$ ) do primeiro modo e ( $x_2$ ) do segundo modo, fixando o valor do momento do primeiro e (segundo) modo  $p_1 = 0.1$  e ( $p_2 = 0.1$ ), que está representado na figura (3.1).

Através da figura (3.1), verificamos que para  $s = 0, 0$  as variâncias nas quadraturas de posição de primeiro modo  $\Delta x_1$  e do segundo  $\Delta x_2$  são iguais. Quando aumentamos o parâmetro de compressão percebemos a diminuição da variância de uma quadratura e o aumento na variância da outra quadratura. Esse comportamento indica que a correlação entre as quadraturas do primeiro e segundo modo são dependentes do parâmetro de compressão

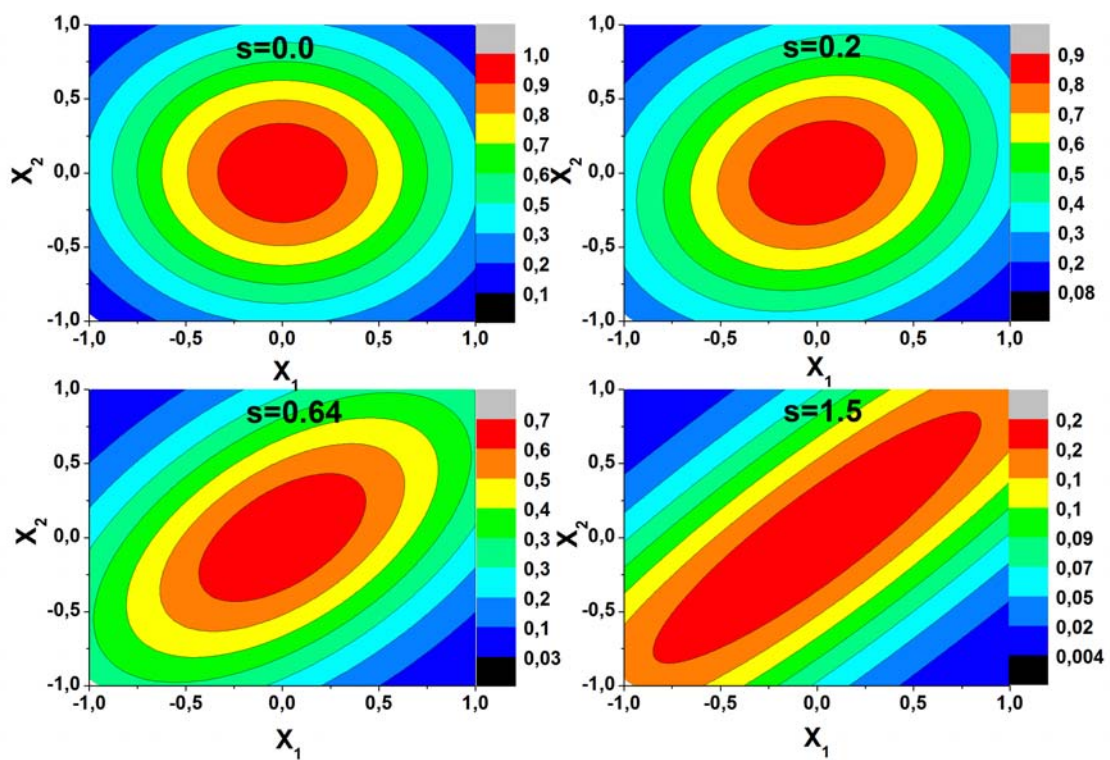


Figura 3.1: Função  $Q$  versus posição do primeiro modo campo  $x_1$  e posição do segundo modo do campo  $x_2$ , considerando os parâmetros de compressão  $s = 0,0$ ,  $s = 0,2$ ,  $s = 0,64$  e  $s = 1,5$ .

## 3.9 Emaranhamento.

Estados quânticos que possuem variáveis contínuas, são estados com dimensão do espaço de Hilbert infinita, como os estados coerentes e estados comprimidos. Nessa seção apresentaremos duas maneiras de quantificar o emaranhamento do estado comprimido de dois modos utilizando-se da entropia de Von Neumann e matriz covariância.

### 3.9.1 Entropia de Von Neumann para o estado do vácuo comprimido de dois modos

Como foi apresentada no capítulo (2) a entropia de Von Neumann é uma medida de emaranhamento para um estado bipartido puro com dimensão arbitrária, que é definida como,

$$E(\hat{\rho}_{12}) = -Tr \hat{\rho}_1 \ln \hat{\rho}_1 = -Tr \hat{\rho}_2 \ln \hat{\rho}_2, \quad (3.112)$$

onde  $\rho_1 = Tr_2 (\hat{\rho}_{12})$  e  $\rho_2 = Tr_1 (\hat{\rho}_{12})$ ,

Essa medida de emaranhamento corresponde à fração de estados maximamente emaranhados contida em um estado puro. Por exemplo, se  $E_{V.N.} = 0.4$  significa que mil cópias de um estado podem ser transformadas em 400 cópias de estados maximamente emaranhados de dois qubits, através de LOCC.

Podemos utilizar a entropia de Von Neumann para quantificar o emaranhamento do estado de vácuo comprimido de dois modos Eq. (3.108) [93]. Para calcularmos a entropia necessitamos do operador densidade para o estado comprimido de dois modos, que é dado por,

$$\rho_{12} = |\xi\rangle_{12} \langle \xi|_{12} = \left( \frac{1}{\cosh s} \right)^2 \sum_{\substack{n=0 \\ n'=0}}^{\infty} (\tanh s)^{n+n'} |n\rangle_1 |n\rangle_2 \langle n'|_1 \langle n'|_2. \quad (3.113)$$

Deste modo a entropia de Von Neumann para um único modo do estado comprimido, tem

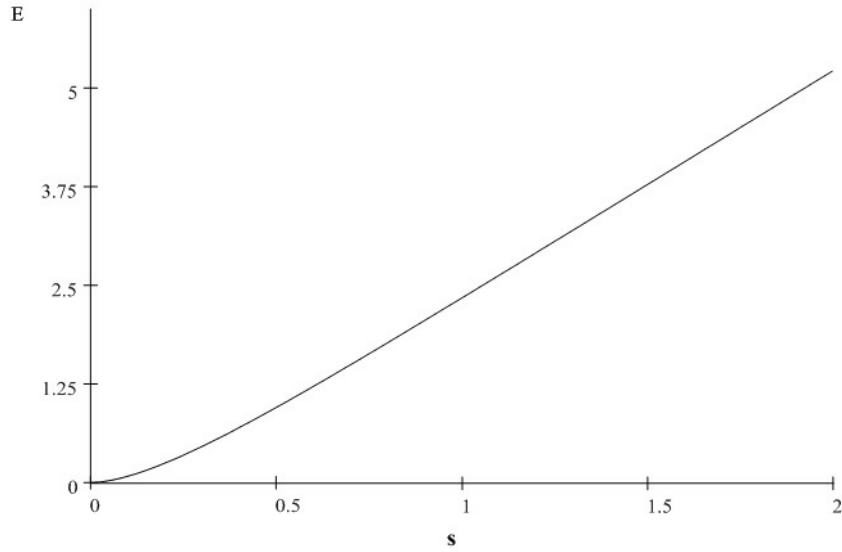


Figura 3.2: Entropia de Von Neumann  $E$  versus parâmetro de compressão  $s$ .

a seguinte forma [94],

$$E = \cosh^2 s \log_2(\cosh^2 s) - \sinh^2 s \log_2(\sinh^2 s). \quad (3.114)$$

O gráfico da figura (3.2), onde plotamos o emaranhamento  $E$  em função do parâmetro  $s$ , mostra que o emaranhamento é praticamente linear em relação ao parâmetro de compressão  $s$ . Para o parâmetro de compressão  $s$  tendendo ao infinito ( $s \rightarrow \infty$ ), o estado comprimido de dois modos é maximamente comprimido e maximamente emaranhado, porém isso não é possível pois é necessário energias infinitas. Podemos verificar essa afirmação através do cálculo do número médio de fótons em cada modo do estado comprimido, que é dado por,  $\langle n_1 \rangle = \langle n_2 \rangle = \sinh^2 s$ .

A figura (3.3) demonstra que quando o parâmetro de compressão tende a infinito ( $s \rightarrow \infty$ ), o número médio de fótons do estado comprimido de dois modos também tende a infinito ( $\langle n \rangle \rightarrow \infty$ ), o equivalente também acontece com a energia do estado comprimido ( $E \rightarrow \infty$ ).

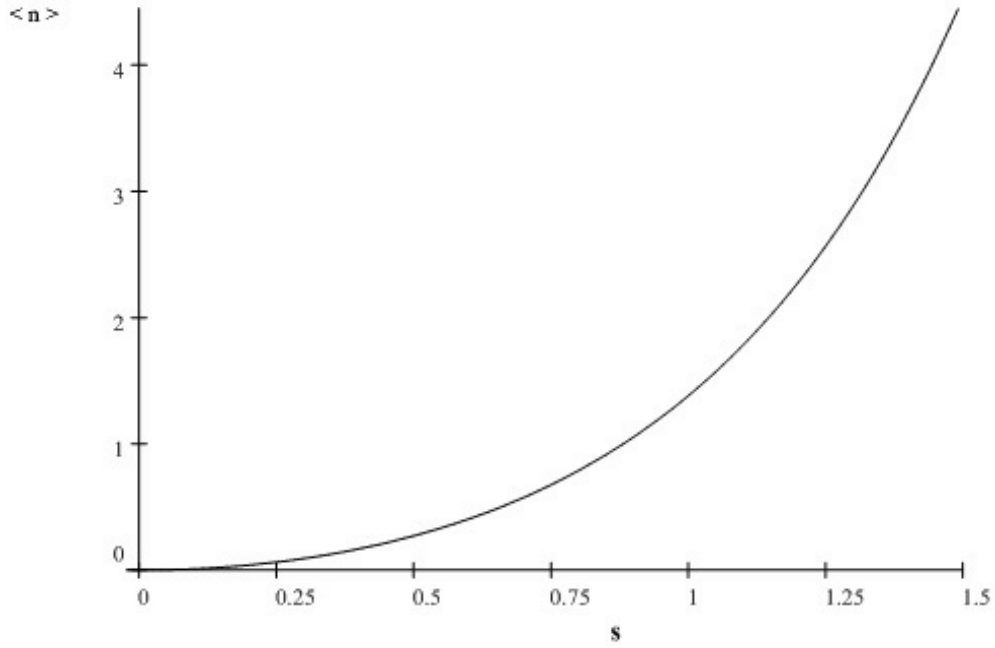


Figura 3.3: Número médio de fótons  $\langle n \rangle$  versus parâmetro de compressão  $s$ .

### 3.9.2 Matriz covariância

Estados Gaussianos bipartidos podem ser representados através de uma matriz de covariância. Esta matriz é caracterizada pelos valores esperados dos operadores de posição e momento do primeiro e segundo modos. Considerando um estado de dois modos arbitrários, a matriz de covariância  $V$  ( $4 \times 4$ ) fornece toda as propriedades de emaranhamento do estado. Podemos escrever a matriz de correlação  $V$  na forma de blocos como,

$$V^N = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}, \quad (3.115)$$

onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são matrizes reais  $2 \times 2$ , que tem a seguinte forma,

$$A = \begin{pmatrix} \langle \hat{x}_1^2 \rangle & \langle \hat{x}_1 \rangle \langle \hat{p}_1 \rangle \\ \langle \hat{x}_1 \rangle \langle \hat{p}_1 \rangle & \langle \hat{p}_1^2 \rangle \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \langle \hat{x}_2^2 \rangle & \langle \hat{x}_2 \rangle \langle \hat{p}_2 \rangle \\ \langle \hat{x}_2 \rangle \langle \hat{p}_2 \rangle & \langle \hat{p}_2^2 \rangle \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \langle \hat{x}_1 \rangle \langle \hat{x}_2 \rangle & \langle \hat{x}_2 \rangle \langle \hat{p}_1 \rangle \\ \langle \hat{p}_2 \rangle \langle \hat{x}_1 \rangle & \langle \hat{p}_1 \rangle \langle \hat{p}_2 \rangle \end{pmatrix}.$$

Estados quânticos com variáveis contínuas possuem uma versão do critério de separabilidade de Peres [62], Horodecki [63], baseado na transposta parcial para sistema com dimensão 2x2 e 2x3. Esse critério de separabilidade para variáveis contínuas foi proposto por Simon em 2000 [95], e é definido como,

$$\begin{aligned} & \det A \det B + \left( \frac{1}{16} - |\det C| \right)^2 - \text{Tr} (AJCJBJC^T J) \\ & \geq \frac{1}{16} (\det A + \det B), \end{aligned} \quad (3.116)$$

onde  $J$  é uma matriz 2x2,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Qualquer estado bipartido separável satisfaz a desigualdade da Eq (3.116), deste modo esse critério representa uma condição necessária para separabilidade, e a violação da Eq (3.116) é uma condição suficiente para inseparabilidade. Podemos definir duas formas padrão para as matrizes de correlação,

$$V_I^{(2)} = \begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & c' \\ c & 0 & b & 0 \\ 0 & c' & 0 & b \end{pmatrix}, \quad (3.117)$$

e

$$V_{II}^{(2)} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & c_2 \\ c_1 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & b_2 \end{pmatrix}, \quad (3.118)$$

onde os elementos da matriz  $V_{II}^{(2)}$  satisfazem as relações,

$$\begin{aligned}\frac{a_1 - 1/4}{b_1 - 1/4} &= \frac{a_2 - 1/4}{b_2 - 1/4}, \\ |c_1| - |c_2| &= \sqrt{(a_1 - 1/4)(b_1 - 1/4)} \\ &\quad - \sqrt{(a_2 - 1/4)(b_2 - 1/4)}.\end{aligned}\tag{3.119}$$

Qualquer matriz correlação pode ser transformada na matriz padrão da Eq. (3.117) utilizando uma transformação unitária canônica apropriada [95].

Para a matriz na forma padrão  $V_I^{(2)}$  a condição de separabilidade necessária Eq. (3.116), pode ser simplificada como,

$$16(ab - c^2)(ab - c'^2) \geq (a^2 + b^2) + 2|cc'| - \frac{1}{16}.\tag{3.120}$$

Um critério de separabilidade similar, aplicado a um sistema de dois modos com variáveis contínuas e expressado em termos das variâncias nas quadraturas envolvendo o operadores posição e momento, foi apresentado por Duan e Geidke em 2000 [96] esse critério é baseado na transposta parcial. Expressado em termos dos elementos de  $V_{II}^{(2)}$ , ele é uma condição necessária e suficiente para a separabilidade de estados Gaussianos de dois modos, e pode ser escrito como,

$$\langle (\hat{u})^2 \rangle + \langle (\hat{v})^2 \rangle \geq \frac{a_0^2}{2} + \frac{1}{a_0^2},\tag{3.121}$$

onde

$$\begin{aligned}\hat{u} &= a_0 \hat{x}_1 - \frac{c_1}{|c_1| a_0} \hat{x}_2 \\ \hat{v} &= a_0 \hat{p}_1 - \frac{c_2}{|c_2| a_0} \hat{p}_2 \\ a_0^2 &= \sqrt{\frac{b_1 - 1/4}{a_1 - 1/4}} = \sqrt{\frac{b_2 - 1/4}{a_2 - 1/4}}.\end{aligned}\tag{3.122}$$

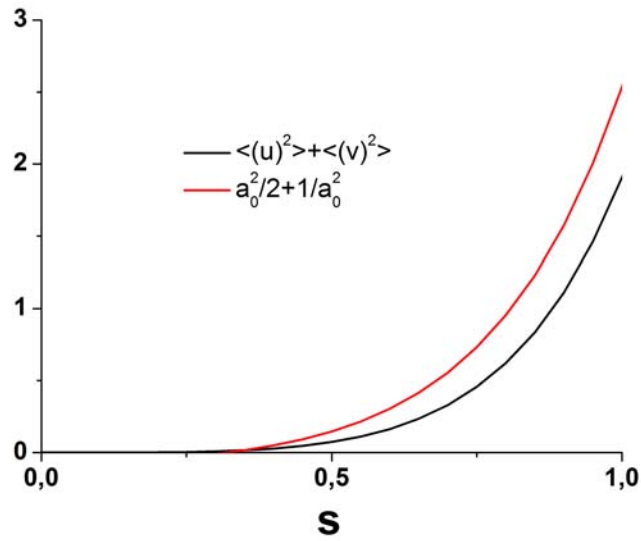


Figura 3.4: Violação do critério de peres para o estado comprimido de dois modos em função do parâmetro de compressão  $s$ .

Podemos utilizar esse critério de separabilidade de estados gaussianos Eq. (3.121) para quantificação do emaranhamento do estado vácuo comprimido de dois modos.

A figura (3.4) demonstra que a violação critério de Simon cresce com o parâmetro de compressão, isso representa que o grau de emaranhamento dos modos do campo comprimido de dois modos é proporcional à intensidade do campo.

As medidas de emaranhamento e representação no espaço de fase serão utilizadas no capítulo (5), onde será feito um estudo detalhado da dinâmica de emaranhamento do campo nas cavidades para o sistema proposto no capítulo (4).

# Capítulo 4

## Geração de emaranhamento entre qubits remotos

### 4.1 Introdução

Existe uma série de protocolos de comunicação quântica onde se faz necessário o uso de partículas remotamente emaranhadas. Em 1991 Ekert [5], apresentou um protocolo de comunicação entre dois laboratórios remotos (Alice e Bob), onde a segurança é baseada no máximo emaranhamento entre as partículas espacialmente separadas. Bennet, em 1992 [35], apresentou uma proposta de comunicação utilizando estados de dois fótons emaranhados. No mesmo ano Bennet [34] propôs outro protocolo de comunicação quântica utilizando emaranhamento entre partículas distantes, onde a mensagem é codificada através de operações unitárias. Em 2003, A. Beige e colaboradores [113] propuseram um novo conceito de comunicação segura, chamado de comunicação quântica segura e direta (QCSD). Nessa nova proposta o emaranhamento compartilhado pelos laboratórios faz com que não seja necessário a criação de uma chave criptografada, e a mensagem é enviada diretamente.

Estados quânticos com três qubits também são utilizados na comunicação quântica.

Em 1993 Bennet e colaboradores [36], apresentaram uma proposta de teletransporte de estados quânticos, onde Alice e Bob compartilham um par de Bell, Alice possui uma partícula com estado desconhecido. Alice pode enviar o estado quântico da partícula desconhecida para Bob, através de operações locais e comunicação clássica. J. Joo e colaboradores [114] apresentaram uma proposta de teletransporte utilizando estados  $W$ . D. Park e colaboradores [115], demonstraram teletransporte com estados  $W$  e  $GHZ$  mistos. J. Wang e colaboradores [116], apresentaram um protocolo onde foi utilizado estados  $W$  para a comunicação. Nesse protocolo Alice fica com dois qubits e envia o qubit remanescente para Bob, Alice criptografa a mensagem fazendo operações locais  $I$  e  $i\sigma_y$ .

Um dos maiores problemas na comunicação quântica é a geração e preservação do emaranhamento entre partículas espacialmente separadas. Um mecanismo que possibilita a geração de emaranhamento entre partículas distantes, é o uso de um elemento propagante que interage com as partículas estáticas gerando emaranhamento. A interação entre qubits estacionários e qubits propagantes tem sido muito explorado no campo da informação quântica e computação quântica distribuída. Lim e colaboradores [99], apresentaram a possibilidade de realizar computação quântica distribuída utilizando uma fonte de fótons únicos em sistemas de átomos aprisionados em cavidades. Normalmente os qubits propagantes são fótons e os qubits estacionários são átomos aprisionados em cavidades. Existem algumas propostas para geração de emaranhamento entre átomos através de fótons propagantes. S. Bose e colaboradores [101], mostraram como o estado de um átomo aprisionado em uma cavidade pode ser teletransportado para um segundo átomo aprisionado em uma cavidade distante através da detecção de fótons emitidos pelas cavidades. C. Cabrillo e colaboradores [102], demonstraram uma proposta para a geração de emaranhamento entre átomos aprisionados em cavidades distantes, através do envio de um ou dois átomos excitados através das cavidades; e a ocorrência de emissão espontânea dos átomos enviados leva ao emaranhamento entre os átomos nas cavidades. X. L. Feng [103], apresentou uma proposta para geração de emaranhamento entre átomos de três níveis espacialmente separados utilizando-se de fótons polarizados.

Estados quânticos de variáveis contínuas assim como os qubits de variáveis discretas podem ser utilizados na comunicação quântica [79, 83–85]. Além disso, é possível utilizar o emaranhamento das variáveis contínuas do campo para gerar emaranhamento entre átomos distantes. Uma proposta para geração de emaranhamento entre átomos localizados em cavidades espacialmente separadas através de estados bipartidos de variáveis contínuas foi apresentado por W. Son [97]. Em 2009 propusemos um esquema de geração de emaranhamento tripartido entre dois laboratórios remotos, através da interação de átomos com um estado comprimido de dois modos, onde cada modo do campo é enviado para um laboratório [28].

Para melhor entendimento da nossa proposta, o capítulo está dividido em cinco seções, que são: diagrama experimental, estados iniciais do campo nas cavidade, estados iniciais dos átomos, Hamiltoniano do sistema composto e operador de estado para o sistema composto

## 4.2 Diagrama experimental

O diagrama esquemático de nossa proposta para geração de emaranhamento tripartido entre átomos localizados em cavidades espacialmente separadas esta representado na figura (4.1).

Alice possui em seu laboratório uma cavidade  $C_1$  e em um outro laboratório espacialmente separado, Bob possui uma cavidade  $C_2$ . Essas cavidades estão inicialmente no estado de vácuo, Alice prepara dois átomos de dois níveis ( $A_1$  e  $A_2$ ) em um estado emaranhado ou separável, e Bob prepara um único átomo  $B$  de dois níveis no estado fundamental. Alice envia seus qubits para cavidade  $C_1$  e os aprisiona em sua cavidade ??, e Bob executa o mesmo procedimento com o qubit  $B$  na cavidade  $C_2$ . Depois do procedimento de aprisionamento dos três átomos, é enviado paras as cavidades um campo comprimido de dois modos. O campo comprimido de dois modos, é gerado através de um

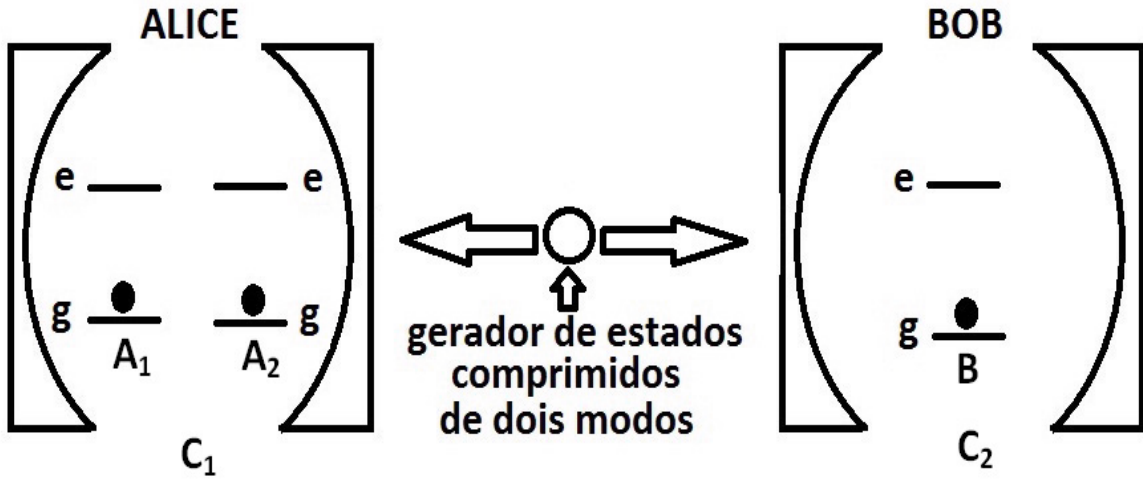


Figura 4.1: Diagrama esquemático

processo de conversão paramétrica descendente onde fótons interagem com um meio óptico não linear (cristal) produzindo um estado comprimido de dois modos, como descrito no capítulo (3). Cada modo do campo comprimido é enviado para uma cavidade de modo que a junção entre campo externo e campo na cavidade é feita através de um divisor de feixe que é a própria parede da cavidade.

Neste capítulo apresentamos as expressões analíticas para o estado do sistema composto, estado dos átomos e estado do campo para o sistema proposto. Estes resultados são utilizados para estudar a dinâmica de emaranhamento entre os átomos localizados nas cavidades espacialmente separadas e os modos do campo nas cavidades. Os átomos ( $A_1$  e  $A_2$ ) e ( $B$ ) estão inicialmente em um estado separável e o emaranhamento é gerado através da transferência do emaranhamento das variáveis contínuas do estado comprimido de dois modos. Em nossa proposta de 2009 [28], utilizamos no estudo da dinâmica do sistema o estado inicial atômico com todos os átomos no estado fundamental. Neste capítulo estudaremos a dinâmica do sistema para diferentes estados iniciais atômicos na cavidade  $C_1$  que possui os átomos ( $A_1$  e  $A_2$ ). O estudo da dinâmica do sistema para diferentes estados iniciais atômicos, tem como objetivo fixar condições iniciais necessárias para obter um bom grau de emaranhamento entre os átomos, e que o emaranhamento

permaneça por um tempo suficiente para implementação de protocolos.

### 4.3 Estados iniciais do campo nas cavidades.

Os estados comprimidos de dois modos [53], podem ser gerados através de um processo de conversão paramétrica descendente como foi demonstrado no capítulo (3). O operador de compressão associado a esse processo pode ser escrito como,

$$\hat{S}(s) = \exp(-s\hat{a}\hat{b} + s\hat{a}^\dagger\hat{b}^\dagger), \quad (4.1)$$

onde  $s$  é parâmetro de compressão e  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  são os operadores bosônicos de aniquilação e  $\hat{a}^\dagger$  e  $\hat{b}^\dagger$  são os operadores bosônicos de criação dos fótons nos modos  $a$  e  $b$  respectivamente. A atuação do operador  $\hat{S}(s)$  sobre os estado do vácuo  $|0, 0\rangle$ , produz um estado comprimido de dois modos.

$$|\Psi_F\rangle = \frac{1}{\cosh s} \sum_{n=0}^{\infty} (\tanh s)^n |n, n\rangle, \quad (4.2)$$

Como verificamos no capítulo (3) através da entropia de Von Neumann o emaranhamento do estado comprimido de dois modos tem uma relação aproximadamente linear com parâmetro de compressão  $s$  [54].

Consideramos duas cavidades preparadas no estado do vácuo no tempo  $t = 0$ . A junção entre campo externo e cavidade, é feita através do operador divisor de feixe [117],

$$\hat{B}(\theta) = \exp \left[ \frac{\theta}{2} (\hat{c}\hat{f}^\dagger - \hat{c}^\dagger\hat{f}) \right], \quad (4.3)$$

onde  $\hat{c}$  e  $(\hat{c}^\dagger)$ , são os operadores de aniquilação e (criação) para o campo na cavidade e  $\hat{f}$  (e  $\hat{f}^\dagger$ ), são os operadores de aniquilação e (criação) para o campo externo, o coeficiente ( $r = \cos(\theta/2)$ ), representa a refletividade do divisor de feixe.

Como o campo comprimido possui dois modos, cada modo do campo é enviado para uma cavidade, consideraremos o caso que cada modo do campo possui a mesma frequência.

Com a injeção de  $\rho_F = |\Psi_F\rangle \langle \Psi_F|$  nas cavidade que tem estado inicial vácuo, obtemos o operador densidade total para o estado do campo numa única cavidade,

$$\hat{\rho}_{fC_1} = \hat{B}_1(\theta) \hat{\rho}_f |0\rangle \langle 0|_{C_1} \hat{B}_1^\dagger(\theta). \quad (4.4)$$

Para obtermos o campo nas cavidades, devemos fazer um traço sobre os graus de liberdade do campo externo na equação (4.4), de modo que,

$$\hat{\rho}_{C_1} = Tr_f (\hat{\rho}_{fC_1}). \quad (4.5)$$

Após fazer o traço sobre o campo externo, o estado quântico do campo nas cavidades  $C_1$  e  $C_2$ , tem a seguinte forma,

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{C_1 C_2} = & \left( \frac{1}{\cosh s} \right)^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^{\min[n,m]} (\tanh s)^{n+m} G_{kl}^{nm}(\theta) \\ & \times |n-k\rangle_{C_1} |n-l\rangle_{C_2} \langle m-k|_{C_1} \langle m-l|_{C_2} \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde

$$G_{kl}^{nm}(\theta) = C_k^n(\theta) C_k^m(\theta) C_l^n(\theta) C_l^m(\theta), \quad (4.7)$$

com

$$C_k^n(\theta) = \sqrt{\frac{n!}{k!(n-k)!}} \cos^k \frac{\theta}{2} \sin^{n-k} \frac{\theta}{2}. \quad (4.8)$$

O operador densidade  $\hat{\rho}_{C_1 C_2}$  representa o campo nas cavidades em um estado emaranhado, onde o grau de emaranhamento entre os modos do campo nas cavidades depende do parâmetro de compressão  $s$ , como foi demonstrado no capítulo (3). O grau de mistura do campo nas cavidades depende da refletividade ( $r = \cos(\theta/2)$ ) do divisor de feixe. Quando o divisor de feixe possui transmitância total ( $\theta = \pi$ ), temos um estado puro para o campo nas cavidades. Deste modo diferentes parâmetros de compressão e diferentes refletividades fornecem estados distintos do campo nas cavidades.

## 4.4 Base acoplada e estados iniciais dos átomos

Os operadores de Pauli ( $\hat{\sigma}_x$ ,  $\hat{\sigma}_y$  e  $\hat{\sigma}_z$ ) possuem apenas dois autovalores, por este motivo possibilitam a descrição de sistemas de dois níveis como o sistema de átomos apresentado neste capítulo. Cada componente dos operadores de Pauli é definida como  $\hat{\sigma}_j = 2\hat{S}_j$  ( $j = x, y, z$ ), onde  $S_j$  são os operadores de spin  $1/2$ , que satisfazem as relação de comutação,

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i\epsilon_{ijk}\hat{S}_k, \quad (4.9)$$

com isso temos,

$$[\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j] = 2i\epsilon_{ijk}\hat{\sigma}_k. \quad (4.10)$$

Os operadores de Pauli da mesma forma que os operadores de spin satisfazem a álgebra de Lie  $Su(2)$ , onde  $\hat{\sigma}_x$ ,  $\hat{\sigma}_y$  e  $\hat{\sigma}_z$ , são os operadores da álgebra e  $\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}_x^2 + \hat{\sigma}_y^2 + \hat{\sigma}_z^2$  é o operador de Casimir pois,

$$[\hat{\sigma}^2, \hat{\sigma}_i] = 0, \quad (4.11)$$

para qualquer  $i$ . Um átomo de dois níveis pode ser descrito na base  $|\sigma, m_\sigma\rangle$  sendo que os autovalores de  $\hat{\sigma}^2$  e  $\hat{\sigma}_z$  são dados por,

$$\hat{\sigma}^2 |\sigma, m_\sigma\rangle = \sigma(\sigma + 2) |\sigma, m_\sigma\rangle, \quad \hat{\sigma}_z |\sigma, m_\sigma\rangle = m_\sigma |\sigma, m_\sigma\rangle. \quad (4.12)$$

Para um único átomo  $\sigma = 1$  e  $m_\sigma = \pm 1$ .

Analogamente aos operadores de spin, podemos definir os operadores de abaixamento e levantamento como,

$$\hat{\sigma}_+ = \frac{\hat{\sigma}_x + i\hat{\sigma}_y}{2}, \quad \hat{\sigma}_- = \frac{\hat{\sigma}_x - i\hat{\sigma}_y}{2}. \quad (4.13)$$

Que satisfazem as relações de comutação,

$$[\hat{\sigma}_+, \hat{\sigma}_-] = \hat{\sigma}_z, \quad [\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_+] = 2\hat{\sigma}_+, \quad [\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_-] = 2\hat{\sigma}_-. \quad (4.14)$$

Através das relações de comutação Eq. (4.14), verificamos que  $\hat{\sigma}_+$  aumenta duas vezes o autovalor de  $\hat{\sigma}_z$  e  $\hat{\sigma}_-$  diminui duas unidades, com isso temos,

$$\hat{\sigma}_+ |\sigma, m_\sigma\rangle = c_+ |\sigma, m_\sigma + 2\rangle, \quad \hat{\sigma}_- |\sigma, m_\sigma\rangle = c_- |\sigma, m_\sigma - 2\rangle. \quad (4.15)$$

Podemos determinar os coeficientes  $c_+$  e  $c_-$ , utilizando-se do operador de Casimir,

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_+ |\sigma, m_\sigma\rangle &= \frac{\sqrt{\sigma(\sigma+2) - m_\sigma(m_\sigma+2)}}{2} |\sigma, m_\sigma + 2\rangle, \\ \hat{\sigma}_- |\sigma, m_\sigma\rangle &= \frac{\sqrt{\sigma(\sigma+2) - m_\sigma(m_\sigma-2)}}{2} |\sigma, m_\sigma - 2\rangle. \end{aligned} \quad (4.16)$$

#### 4.4.1 Adição de momento angular

Quando dois ou mais átomos são combinados para formar o spin total do sistema, devemos somar vetorialmente os spins de cada átomo e as componentes  $\hat{\sigma}_z$  podem ser somadas escalarmente. Utilizaremos o exemplo de dois átomos que recai sobre o sistema apresentado no diagrama esquemático. O operador  $\hat{\sigma}$  e a componente  $\hat{\sigma}_z$  total, podem ser escritas como,

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}^{(1)} + \hat{\sigma}^{(2)}, \quad \hat{\sigma}_z = \hat{\sigma}_z^{(1)} + \hat{\sigma}_z^{(2)}.$$

Deste modo  $\hat{\sigma}^2$  é escrito como,

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma} \cdot \hat{\sigma} = \hat{\sigma}^{(1)} \cdot \hat{\sigma}^{(1)} + \hat{\sigma}^{(2)} \cdot \hat{\sigma}^{(2)} + 2\hat{\sigma}^{(1)} \cdot \hat{\sigma}^{(2)}. \quad (4.17)$$

Podemos reescrever a Eq. (4.17), sabendo que  $\hat{\sigma}^{(1)} \cdot \hat{\sigma}^{(1)} = 4\hat{\sigma}_+^{(1)} \cdot \hat{\sigma}_+^{(1)} - 2\hat{\sigma}_z^{(1)} + \hat{\sigma}_z^{(1)} \cdot \hat{\sigma}_z^{(1)}$ , como

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^{(1)} \cdot \hat{\sigma}^{(2)} &= \hat{\sigma}_x^{(1)} \cdot \hat{\sigma}_x^{(2)} + \hat{\sigma}_y^{(1)} \cdot \hat{\sigma}_y^{(2)} + \hat{\sigma}_z^{(1)} \cdot \hat{\sigma}_z^{(2)} \\ &= 2\hat{\sigma}_+^{(1)} \cdot \hat{\sigma}_-^{(2)} + 2\hat{\sigma}_-^{(1)} \cdot \hat{\sigma}_+^{(2)} + \hat{\sigma}_z^{(1)} \cdot \hat{\sigma}_z^{(2)}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Substituindo Eq. (4.18) na Eq. (4.17), obtemos

$$\hat{\sigma}^2 = 4\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_+ - 2\hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_z^2. \quad (4.19)$$

onde  $\hat{\sigma}_+ = \hat{\sigma}_+^{(1)} + \hat{\sigma}_+^{(2)}$  e  $\hat{\sigma}_- = \hat{\sigma}_-^{(1)} + \hat{\sigma}_-^{(2)}$ .

A base produto dos dois átomos  $|\sigma^{(1)}, m_\sigma^{(1)}\rangle |\sigma^{(2)}, m_\sigma^{(2)}\rangle$  pode ser simplificada como  $|m_\sigma^{(1)}, m_\sigma^{(2)}\rangle$ . Nesta base os estados possíveis para os dois átomos são:  $|-1, -1\rangle$ ,  $|1, -1\rangle$ ,  $|-1, 1\rangle$  e  $|1, 1\rangle$ . Diagonalizando  $\hat{\sigma}^2$  os autovalores na base  $|\sigma, m_\sigma\rangle$  são:  $|2, -2\rangle$ ,  $|2, 0\rangle$ ,  $|2, 2\rangle$  e  $|0, 0\rangle$ , que em termos da base produto são escritos como,

$$\begin{aligned} |2, -2\rangle &= |-1, -1\rangle, & |2, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|-1, 1\rangle + |1, -1\rangle), \\ |2, 2\rangle &= |1, 1\rangle, & |0, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|-1, 1\rangle - |1, -1\rangle). \end{aligned}$$

Para a cavidade  $C_1$  localizada no laboratório de Alice que possui dois átomos ( $A_1$  e  $A_2$ ), os estados possíveis na base acoplada são:  $|2, -2\rangle_{A_1A_2}$ ,  $|2, 0\rangle_{A_1A_2}$ ,  $|2, 2\rangle_{A_1A_2}$  e  $|0, 0\rangle_{A_1A_2}$ . Para cavidade  $C_2$  que possui um único átomo aprisionado ( $B$ ) temos:  $|1, -1\rangle_B$  e  $|1, 1\rangle_B$ .

O Hamiltoniano que utilizaremos para verificar a evolução temporal do sistema, que será apresentado na próxima seção comuta com  $\hat{\sigma}^2$ . Devido a simetria do Hamiltoniano, a evolução temporal do sistema não permite misturas entre os estados de base com  $\sigma = 2$  e  $\sigma = 0$ . Podemos verificar entre os estados de base que só existe um estado com  $\sigma = 0$ . Se utilizarmos como estado inicial atômico o estado  $|0, 0\rangle_{A_1A_2}$ , este estado não evoluirá para outros estados. Por este motivo no estudo da dinâmica do sistema só utilizaremos estados iniciais atômicos com  $\sigma = 2$ . Com isso a base do sistema composto é dada por,

$$\begin{aligned} &|2, -2\rangle_{A_1A_2} |1, -1\rangle_B, \quad |2, 0\rangle_{A_1A_2} |1, -1\rangle_B, \quad |2, 2\rangle_{A_1A_2} |1, -1\rangle_B, \quad (4.20) \\ &|2, -2\rangle_{A_1A_2} |1, 1\rangle_B, \quad |2, 0\rangle_{A_1A_2} |1, 1\rangle_B \quad \text{e} \quad |2, 2\rangle_{A_1A_2} |1, 1\rangle_B. \end{aligned}$$

Utilizaremos combinações lineares de diferentes estados iniciais atômicos no estudo da

evolução temporal do sistema composto.

## 4.5 Hamiltoniano do sistema composto

Para estudarmos a interação entre átomo e campo tanto para o caso de átomos em cavidades únicas como para sistemas com cavidades espacialmente separadas, utilizamos um modelo teórico formulado por Jaynes e Cummings [118] em 1963. Esse modelo descreve a interação de um átomo de dois níveis com o campo eletromagnético. Além de ser de grande simplicidade ele possui uma vasta riqueza de detalhes, e vem sendo muito estudado nas últimas décadas. Um trabalho de revisão sobre o modelo de Jaynes e Cummings (JCM) e algumas das aplicações foi publicado por Shore e Knight [136]. Existem varias derivações do JCM, uma delas é o modelo de Tavis-Cummings que generaliza o JCM para  $N$  átomos [134].

### 4.5.1 Hamiltoniano de um átomo na cavidade

Considerando um átomo de dois níveis onde o estado fundamental é designado pelo vetor  $|g\rangle$  e o estado excitado pelo vetor  $|e\rangle$ , que interagem com um campo de único modo, o Hamiltoniano para o sistema pode ser escrito como,

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 \quad (4.21)$$

onde  $\hat{H}_0$  é o Hamiltoniano livre e  $\hat{H}_1$  é o Hamiltoniano de interação.

#### Hamiltoniano livre

O Hamiltoniano livre  $\hat{H}_0$  tem a seguinte forma,

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hbar\omega_o}{2} \hat{\sigma}_z. \quad (4.22)$$

onde  $\hbar\omega_c$  é energia do campo na cavidade e  $\hbar\omega_o$  é a energia de transição entre os estados  $|g\rangle$  e  $|e\rangle$ .

### Hamiltoniano de interação

O campo eletromagnético pode ser confinado em uma estreita faixa de frequências bem definidas em uma cavidade de Fabry-Perot. A cavidade de Frabry-Perot consiste em duas superfícies espelhadas com uma pequena separação entre elas de modo que o campo eletromagnético forme ondas estacionárias dentro da cavidade. O operador campo elétrico associado a um único modo do campo quantizado em uma cavidade como foi demonstrado no capítulo (3) é dado por [137],

$$\hat{E} = E_0(\hat{a}^\dagger + \hat{a}). \quad (4.23)$$

O Hamiltoniano de interação  $\hat{H}_1$  tem a seguinte forma,

$$\hat{H}_1 = -\hat{\mu} \cdot \hat{E}, \quad (4.24)$$

e descreve a interação do campo elétrico com o dipolo elétrico  $\hat{\mu}$  do átomo [138]. A componente  $z$  do operador de Pauli pode ser escrita como  $\hat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$  e tem autovalores  $\pm 1$ . Utilizando-se da base dos estados internos, o momento de dipolo elétrico pode ser escrito como

$$\hat{\mu} = \langle g|\hat{\mu}|e\rangle|g\rangle\langle e| + \langle e|\hat{\mu}|g\rangle|e\rangle\langle g|. \quad (4.25)$$

Através da Eqs. (4.23) e (4.25) podemos reescrever a Eq. (4.24) como,

$$\hat{H}_1 = \hbar g(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)(\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \quad (4.26)$$

onde  $\hbar g = -\langle g|\hat{\mu}|e\rangle E_0$ . Definimos os operadores  $\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g|$ ,  $\hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e|$ , que junto com o operador  $\hat{\sigma}_z$  satisfazem a álgebra dos operadores de Pauli.

## Representação de interação

Podemos obter o Hamiltoniano de interação  $\hat{H}_I$  Eq. (4.26), na representação de interação através da seguinte transformação,

$$\hat{H}_I = e^{i\frac{\hat{H}_0}{\hbar}t} \hat{H}_1 e^{-i\frac{\hat{H}_0}{\hbar}t}, \quad (4.27)$$

de modo que,

$$\hat{H}_I = \hbar g (\hat{\sigma}_+ e^{i\omega_o t} + \hat{\sigma}_- e^{-i\omega_o t}) (\hat{a}^\dagger e^{i\omega_c t} + \hat{a} e^{-i\omega_c t}), \quad (4.28)$$

que pode ser reescrito como,

$$\hat{H}_I = \hbar g (\hat{\sigma}_+ \hat{a}^\dagger e^{i\Delta t} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger e^{-i\delta t} + \hat{\sigma}_+ \hat{a} e^{i\delta t} + \hat{\sigma}_- \hat{a} e^{-i\Delta t}), \quad (4.29)$$

onde  $\delta = \omega_o - \omega_c$  e  $\Delta = \omega_o + \omega_c$ . Através da aproximação de onda girante podemos desprezar os termos que oscilam com alta frequência, ou seja os termos que contenham  $\Delta \gg g$ . Podemos também considerar que a frequência do campo na cavidade seja aproximadamente igual a frequência de transição atômica, ou seja  $\delta \simeq 0$ . Com essas aproximações o Hamiltoniano de interação na representação de interação Eq. (4.29) se resume a

$$\hat{H}_I = \hbar g (\hat{\sigma}_+ \hat{a} + \hat{\sigma}_- \hat{a}^\dagger). \quad (4.30)$$

O primeiro termo da Eq. (4.30), descreve o processo de excitação de um átomo junto com a aniquilação de um fóton do campo na cavidade, já o segundo termo descreve o processo de desexcitação atômica acompanhado da criação de um fóton na cavidade.

### 4.5.2 Hamiltoniano de $N$ átomos na cavidade.

Quando consideramos  $N$  átomos aprisionados dentro de uma cavidade, o Hamiltoniano livre  $\hat{H}_0$  Eq. (4.22) é reescrito como

$$\hat{H}_0 = \hbar\omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{\hbar\omega_o}{2} \sum_{i=1}^N \hat{\sigma}_z^{(i)}. \quad (4.31)$$

Os átomos são colocados distantes um do outro, para não haver interação dipolo-dipolo. Os átomos individuais interagem com o campo pela Eq. (4.26), de modo que o Hamiltoniano de interação é a soma da contribuição de cada átomo individual. Considerando as mesmas condições impostas para obter o Hamiltoniano da Eq. (4.30), deste modo, obtemos o Hamiltoniano de interação na representação de interação para  $N$  átomos que estão aprisionados a uma distância em que não ocorra interação de dipolo entre eles, que é dado por,

$$\hat{H}_I = \hbar g \sum_{i=1}^N (\hat{\sigma}_+^{(i)} \hat{a} + \hat{\sigma}_-^{(i)} \hat{a}^\dagger). \quad (4.32)$$

## 4.6 Operador evolução para átomos interagindo com o campo no estado de Fock

Consideramos a cavidade do laboratório de Alice apresentada no diagrama esquemático que possui dois átomos de dois níveis ( $A_1$  e  $A_2$ ) aprisionados, interagindo com o campo eletromagnético no estado de Fock  $|n\rangle$ . Utilizaremos a base acoplada para representar os estados dos átomos e  $n$  indicará o número de fótons na cavidade. Deste modo a base do sistema composto por átomos e campo será representada como  $|\sigma, m_\sigma, n\rangle$ . Os estados possíveis para o sistema no caso em que os átomos são preparados no estado fundamental e a cavidade possui  $n$  fótons em  $t = 0$  são:  $|2, -2, n\rangle$ ,  $|2, 0, n-1\rangle$  e  $|2, 2, n-2\rangle$ . O Hamiltoniano de interação pode ser escrito na forma matricial como,

$$H_I^{(1)} = \sqrt{2}\hbar g \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{n} & 0 \\ \sqrt{n} & 0 & \sqrt{(n-1)} \\ 0 & \sqrt{(n-1)} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Podemos obter o operador evolução para cavidade  $C_1$  diagonalizando o Hamiltoniano de interação Eq. (4.33). Deste modo, conseguimos calcular os autovalores e autovetores. Devemos então escrever os estados de base do sistema como combinação dos auto estados do Hamiltoniano diagonal. Com isso podemos aplicar a operação de evolução temporal,

$$\hat{U}_1(t) = \exp \left[ -\frac{iH_I^{(1)}t}{\hbar} \right], \quad (4.34)$$

sobre os estados base do sistema. Esse procedimento permite obter o operador evolução para cavidade  $C_1$ .

Definindo o parâmetro de interação<sup>1</sup>  $\tau = gt$ , o operador de evolução  $\hat{U}_1^n(\tau)$  para cavidade  $C_1$  com  $n$  fótons, pode ser escrito na forma matricial como,

$$U_1^n(\tau) = \begin{pmatrix} \frac{[\beta^2 \cos(\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}\tau) + \alpha^2]}{\alpha^2 + \beta^2} & \frac{-i\beta \sin(\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}\tau)}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}} & \frac{\alpha\beta [\cos(\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}\tau) - 1]}{\alpha^2 + \beta^2} \\ \frac{-i\beta \sin(\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}\tau)}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}} & \cos(\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}\tau) & \frac{-i\alpha \sin(\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}\tau)}{\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}} \\ \frac{\alpha\beta [\cos(\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}\tau) - 1]}{\alpha^2 + \beta^2} & -i\alpha \sin(\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}\tau) & \frac{[\alpha^2 \cos(\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2)}\tau) + \beta^2]}{\alpha^2 + \beta^2} \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

onde  $\alpha = \sqrt{2(n-1)}$ ,  $\beta = \sqrt{2n}$ .

Consideramos um único átomo de dois níveis aprisionado na cavidade  $C_2$  sem dissipação, localizada no laboratório de Bob, interagindo com um campo eletromagnético de modo único no estado de Fock  $|m\rangle$ . Os estados de base para o caso em que o átomo é preparado no estado fundamental e o campo na cavidade tem  $m$  fótons em  $t = 0$  são:

---

<sup>1</sup>A quantidade  $\tau$  é chamada de parâmetro de interação, é definida como o produto da intensidade de interação  $g$  pelo tempo  $t$ .

$|1, -1, m\rangle$  e  $|1, 1, m - 1\rangle$ . O Hamiltoniano de interação na forma matricial é dado por

$$H_I^{(2)} = \hbar g \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{m} \\ \sqrt{m} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.36)$$

Na cavidade  $C_2$  que possui  $m$  fótons, a representação matricial do operador de evolução  $\hat{U}_2^m(t)$  tem a seguinte forma,

$$U_2^m(\tau) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{m}\tau) & -i \sin(\sqrt{m}\tau) \\ -i \sin(\sqrt{m}\tau) & \cos(\sqrt{m}\tau) \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

Fazendo um produto tensorial entre os operadores das equações (4.35) e (4.37), obtemos o operador evolução temporal total, de modo que,

$$U_{12}^{n,m}(\tau) = U_1^n(\tau) \otimes U_2^m(\tau), \quad (4.38)$$

no espaço  $C_6 = C_3 \otimes C_2$  para o sistema, na base,  $|2, -2, n\rangle_1 |1, -1, m\rangle_2, |2, 0, n - 1\rangle_1 |1, -1, m\rangle_2,$

$$|2, 2, n - 2\rangle_1 |1, -1, m\rangle_2, |2, -2, n\rangle_1 |1, 1, m - 1\rangle_2, |2, 0, n - 1\rangle_1 |1, m - 1\rangle_2$$

e  $|2, 2, n - 2\rangle_1 |1, -1, m - 1\rangle_2$ . Considerando o estado inicial  $|\Phi(0)\rangle = |2, -2, n\rangle_1 |1, -1, m\rangle_2,$

o estado do sistema no tempo de interação  $\tau$  é dado por,

$$\hat{\rho}(\tau) = U_{12}^{n,m}(\tau) |2, -2, n\rangle_1 |1, -1, m\rangle_2 \langle 2, -2, n| \langle 1, -1, m| (U_{12}^{n,m}(\tau))^\dagger, \quad (4.39)$$

onde  $\hat{U}_{12}(\tau) |\Phi(0)\rangle$ , é escrito como,

$$\begin{aligned}
\Phi(\tau) = & \frac{\cos(\sqrt{m}\tau)}{\alpha^2 + \beta^2} \left[ \alpha^2 + \beta^2 \cos\left(\tau\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right) \right] |-2, n\rangle_1 |-1, m\rangle_2 \\
& + \cos(\sqrt{m}\tau) \left[ \frac{-i\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \sin\left(\tau\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right) \right] |0, n-1\rangle_1 |-1, m\rangle_2 \\
& + \frac{\cos(\sqrt{m}\tau)\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \left( \cos\left(\tau\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right) - 1 \right) |2, n-2\rangle_1 |-1, m\rangle_2 \\
& + \frac{i\sin(\sqrt{m}\tau)\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} \left[ \alpha^2 + \beta^2 \cos\left(\tau\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right) \right] |-2, n\rangle_1 |1, m-1\rangle_2 \\
& + \frac{\sin(\sqrt{m}\tau)\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \left[ \sin\left(\tau\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right) \right] |0, n-1\rangle_1 |1, m-1\rangle_2 \\
& + \frac{i\sin(\sqrt{m}\tau)\alpha\beta \left( \cos\left(\tau\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right) - 1 \right)}{\alpha^2 + \beta^2} |2, n-2\rangle_1 |1, m-1\rangle_2. \quad (4.40)
\end{aligned}$$

Através da Eq. (4.38), verificamos que o sistema composto por átomos e campo nas cavidades  $C_1$  e  $C_2$ , evolui separadamente em cada cavidade. A utilização de estados iniciais do campo nas cavidades que não possuem correlação, faz com que a evolução temporal do sistema não gere emaranhamento entre os átomos nas cavidades espacialmente separadas. Para que ocorra geração de emaranhamento entre os átomos, necessitamos de um estado do campo que possua correlação, como o estado comprimido de dois modos apresentado no capítulo (3). Na seção (4.7), iremos utilizar o operador evolução da Eq. (4.38), para estudarmos a evolução temporal do sistema composto por átomos e campo comprimido.

## 4.7 Operador evolução para o sistema composto

Nesta seção temos como objetivo obter expressões analíticas para o operador de estado do sistema composto como função do tempo (ver diagrama esquemático figura (4.1)). A cavidade  $C_1$  possui dois átomos ( $A_1$  e  $A_2$ ) aprisionados e a cavidade  $C_2$  possui um único átomo ( $B$ ). As cavidades são inicialmente preparadas no estado vácuo em ( $t = 0$ ). Um estado comprimido de dois modos Eq. (4.6), é enviado para as cavidades através de um divisor de feixe, o primeiro (segundo) modo do campo é enviado para a cavidade  $C_1$  ( $C_2$ ).

O estado do sistema composto sem a interação átomo-campo é representado por,

$$\hat{\rho}(0) = \hat{\rho}_{A_1 A_2 B}(0) \otimes \hat{\rho}_{c_1 c_2}(0), \quad (4.41)$$

onde  $\hat{\rho}_{A_1 A_2 B}(0)$  é o estado inicial para os três átomos e  $\hat{\rho}_{c_1 c_2}(0)$ , Eq. (4.6), representa o estado do vácuo comprimido de dois modos. Diferentes estados iniciais dos átomos e diferentes estados iniciais do campo proporcionam diferentes evoluções temporais para o sistema composto. O operador de estado para o sistema composto após a interação entre os átomos e os campos comprimidos nas duas cavidades, no tempo de interação  $\tau$  é dado por,

$$\hat{\rho}(\tau) = \hat{U}_{12}(\tau) \hat{\rho}_{A_1 A_2 B}(0) \otimes \hat{\rho}_{c_1 c_2}(0) \hat{U}_{12}^\dagger(\tau), \quad (4.42)$$

onde

$$\hat{U}_{12}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^{\min[n]} U_1^{n-k}(\tau) \otimes U_2^{n-l}(\tau),$$

é o operador total de evolução para o sistema composto por átomos e campo nas duas cavidades.

Com o objetivo de estudar a dinâmica de emaranhamento do sistema através do operador de estado do sistema composto  $\hat{\rho}(\tau)$  Eq. (4.42), utilizaremos diferentes estados iniciais atômicos na cavidade localizada no laboratório de Alice e diferentes estados iniciais do campo para o estudo da dinâmica do sistema composto. Os estados do campo nas cavidades podem ser modificados através de diferentes parâmetros de compressão e diferentes refletividades dos divisores de feixe. Os diferentes estados iniciais dos átomos na cavidade  $C_1$  podem ser construídos através de combinações lineares dos estados de base dos átomos. Verificamos através da Eq. (4.20), que existem três estados atômicos possíveis na cavidade  $C_1$ , que são representados na base acoplada como,

$$|2, -2\rangle, |2, 0\rangle, |2, 2\rangle. \quad (4.43)$$

Estes estados podem ser representados na base computacional, já que possuímos átomos de dois níveis aprisionados nas cavidades, associando o vetor  $|0\rangle$  para o estado fundamental e  $|1\rangle$  para o estado excitado. Deste modo a correspondência entre base acoplada e computacional é dada por,

$$|2, -2\rangle = |0, 0\rangle, \quad |2, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 1\rangle + |1, 0\rangle), \quad |2, 2\rangle = |1, 1\rangle. \quad (4.44)$$

Iniciaremos nosso estudo da dinâmica do sistema composto considerando o estado inicial atômico como uma combinação linear dos estados de base  $|2, -2\rangle_{A_1 A_2} |1, -1\rangle_B$  e  $|2, 2\rangle_{A_1 A_2} |1, -1\rangle_B$ , de modo que,

$$|\Phi_1^\alpha(0)\rangle_{A_1 A_2 B} = \left( \sqrt{\alpha} |2, -2\rangle + \sqrt{(1-\alpha)} |2, 2\rangle \right)_{A_1 A_2} |1, -1\rangle_B, \quad (4.45)$$

com  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Para  $\alpha = 1$  ( $\alpha = 0$ ), temos um estado separável  $|2, -2\rangle_{A_1 A_2}$  ( $|2, 2\rangle_{A_1 A_2}$ ) na cavidade de Alice. Para  $0 < \alpha < 1$  temos um estado emaranhado na cavidade de Alice, sendo que para  $\alpha = 1/2$  os qubits  $A_1$  e  $A_2$  localizados na cavidade de Alice estão em um estado maximamente emaranhado. O estado  $|1, -1\rangle_B$ , representa um único átomo no estado fundamental na cavidade de Bob. Os resultados do estudo do sistema composto a partir do estado inicial  $|\Phi_1^\alpha(0)\rangle_{A_1 A_2 B}$  com  $\alpha = 1$ , foram apresentado em nosso artigo em 2009 [28].

Verificaremos também a dinâmica do sistema composto para o estado inicial atômico,

$$|\Phi_2(0)\rangle = |2, 0\rangle_{A_1 A_2} |1, -1\rangle_B, \quad (4.46)$$

representado na base computacional como,

$$|\Phi_2(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle + |01\rangle)_{A_1 A_2} |1\rangle_B, \quad (4.47)$$

que representa um estado maximamente emaranhado entre os átomos da cavidade de

Alice e um único átomo em um estado fundamental na cavidade de Bob.

A utilização de diferentes estados iniciais atômicos na cavidade  $C_1$  e diferentes estados iniciais do campo tem como objetivo verificar a transferência de emaranhamento do campo comprimido para os átomos localizados nas cavidades espacialmente separadas. Esses diferentes estados iniciais proporcionam uma modificação no campo na cavidade  $C_1$  como função do tempo, ou seja uma dinâmica de emaranhamento específica para cada condição inicial considerada.

#### 4.7.1 Estados iniciais atômicos $|\Phi_1^\alpha(0)\rangle$

Nessa seção calcularemos o operador de estado do sistema composto considerando estado inicial atômico  $|\Phi_1^\alpha(0)\rangle$ . O operador de estado para os três átomos no tempo  $t = 0$  é dado por,

$$\hat{\rho}_{A_1 A_2 B}^\alpha(0) = |\Phi_1^\alpha(0)\rangle \langle \Phi_1^\alpha(0)|, \quad (4.48)$$

com o estado do sistema total composto por átomos e campos comprimidos, após o tempo de interação  $\tau$ , descrito como,

$$\begin{aligned} & \hat{\rho}^\alpha(\tau, \theta, s) \quad (4.49) \\ = & \left( \frac{1}{\cosh s} \right)^2 \left[ \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^{\min[n,m]} \hat{U}_{12}^{n-k,n-l}(\tau) (\tanh s)^{n+m} G_{kl}^{nm}(\theta) \times \right. \\ & (|\alpha| |2, -2, n-k\rangle_1 |1, -1, n-l\rangle_2 \langle 2, -2, m-k|_1 \langle 1, -1, m-l|_2 \\ & + \sqrt{(\alpha - |\alpha|^2)} |2, -2, n-k\rangle_1 |1, -1, n-l\rangle_2 \langle 2, 2, m-k|_1 \langle 1, -1, m-l|_2 \\ & + \sqrt{(\alpha^* - |\alpha|^2)} |2, 2, n-k\rangle_1 |1, -1, n-l\rangle_2 \langle 2, -2, m-k|_1 \langle 1, -1, m-l|_2 \\ & \left. + \left| \sqrt{(1-\alpha)} \right|^2 |2, 2, n-k\rangle_1 |1, -1, n-l\rangle_2 \langle 2, 2, m-k|_1 \langle 1, -1, m-l|_2 \right) \hat{U}_{12}^{\dagger m-k, m-l}(\tau) \Big]. \end{aligned}$$

Através do operador de estado do sistema composto  $\hat{\rho}^\alpha(\tau, \theta, s)$ , Eq. (4.49), podemos calcular o operador reduzido para os átomos e campo.

## Operador de estado para os átomos nas cavidades

Para verificarmos a dinâmica de emaranhamento entre os átomos, necessitamos do estado reduzido atômico. O estado reduzido dos átomos  $\hat{\rho}_{A_1 A_2 B}^\alpha(\tau, \theta, s)$  é obtido através do traço sobre os graus de liberdade do campo em  $\hat{\rho}^\alpha(\tau, \theta, s)$ ,

$$\hat{\rho}_{A_1 A_2 B}^\alpha(\tau, \theta, s) = Tr_{C_1 C_2}(\hat{\rho}^\alpha(\tau)). \quad (4.50)$$

A representação matricial de  $\rho_{A_1 A_2 B}^\alpha(\tau, \theta, s)$ , na base acoplada  $|2, -2\rangle_{A_1 A_2} |1, -1\rangle_B$ ,  $|2, 0\rangle_{A_1 A_2} |1, -1\rangle_B$ ,  $|2, 2\rangle_{A_1 A_2} |1, -1\rangle_B$ ,  $|2, -2\rangle_{A_1 A_2} |1, 1\rangle_B$ ,  $|2, 0\rangle_{A_1 A_2} |1, 1\rangle_B$ ,  $|2, 2\rangle_{A_1 A_2} |1, 1\rangle_B$ , tem a seguinte forma,

$$\rho_{A_1 A_2 B}^\alpha = \begin{pmatrix} \rho_{11}^\alpha & 0 & \rho_{13}^\alpha & 0 & \rho_{15}^\alpha & 0 \\ 0 & \rho_{22}^\alpha & 0 & \rho_{42}^\alpha & 0 & \rho_{26}^\alpha \\ \rho_{13}^\alpha & 0 & \rho_{33}^\alpha & 0 & \rho_{53}^\alpha & 0 \\ 0 & \rho_{42}^\alpha & 0 & \rho_{44}^\alpha & 0 & \rho_{46}^\alpha \\ \rho_{15}^\alpha & 0 & \rho_{53}^\alpha & 0 & \rho_{55}^\alpha & 0 \\ 0 & \rho_{26}^\alpha & 0 & \rho_{46}^\alpha & 0 & \rho_{66}^\alpha \end{pmatrix}. \quad (4.51)$$

Podemos reescrever a matriz  $\rho_{A_1 A_2 B}^\alpha(\tau, \theta, s)$  Eq. (4.51), em uma base computacional pois possuímos átomos de dois níveis nas cavidades. Portanto para o estado fundamental do átomo associamos o vetor de estado  $|0\rangle$  e o estado excitado é representado por  $|1\rangle$ . Deste modo a correspondência entre a base acoplada e base computacional é dada por,

$$\begin{aligned} |-2, -1\rangle &= |000\rangle_{A_1 A_2 B}, \quad |0, -1\rangle = \frac{(|010\rangle_{A_1 A_2 B} + |100\rangle_{A_1 A_2 B})}{\sqrt{2}}, \\ |2, -1\rangle &= |110\rangle_{A_1 A_2 B}, \quad |-2, 1\rangle = |001\rangle_{A_1 A_2 B}, \\ |0, 1\rangle &= \frac{(|011\rangle_{A_1 A_2 B} + |101\rangle_{A_1 A_2 B})}{\sqrt{2}}, \quad |2, 1\rangle = |111\rangle_{A_1 A_2 B}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

O operador  $\rho_{A_1 A_2 B}^\alpha(\tau, \theta, s)$  Eq. (4.51) pode ser reescrito na base computacional como,

$$\rho_{A_1 A_2 B}^\alpha = \begin{pmatrix} \rho_{11}^\alpha & 0 & 0 & \rho_{13}^\alpha & 0 & \frac{\rho_{15}^\alpha}{\sqrt{2}} & \frac{\rho_{15}^\alpha}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{\rho_{22}^\alpha}{2} & \frac{\rho_{22}^\alpha}{2} & 0 & \rho_{42}^\alpha & 0 & 0 & \frac{\rho_{26}^\alpha}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\rho_{22}^\alpha}{2} & \frac{\rho_{22}^\alpha}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_{26}^\alpha}{\sqrt{2}} \\ \rho_{13}^\alpha & 0 & 0 & \rho_{33}^\alpha & 0 & 0 & \rho_{53}^\alpha & 0 \\ 0 & \rho_{42}^\alpha & 0 & 0 & \rho_{44}^\alpha & 0 & 0 & \rho_{46}^\alpha \\ \frac{\rho_{15}^\alpha}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho_{55}^\alpha}{2} & \frac{\rho_{55}^\alpha}{2} & 0 \\ \frac{\rho_{15}^\alpha}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \rho_{53}^\alpha & 0 & \frac{\rho_{55}^\alpha}{2} & \frac{\rho_{55}^\alpha}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\rho_{26}^\alpha}{\sqrt{2}} & \frac{\rho_{26}^\alpha}{\sqrt{2}} & 0 & \rho_{46}^\alpha & 0 & 0 & \rho_{66}^\alpha \end{pmatrix}, \quad (4.53)$$

onde os elementos de matriz  $\rho_{A_1 A_2 B}^\alpha(\tau, \theta, s)$ , tem a seguinte forma,

$$\begin{aligned} \rho_{11}^\alpha(\tau) = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^n F_{kl}^{nn}(s, \theta) \cos^2 \left( \sqrt{(n-l)}\tau \right) \left\{ \frac{|\alpha|}{(2n-2k-1)^2} \times \right. \\ & \left[ (n-k) \cos \left( \sqrt{(4n-4k-2)}\tau \right) + (n-k-1) \right]^2 \\ & + \left| \sqrt{(1-\alpha)} \right|^2 (n-k+1)(n-k+2) \times \\ & \left. \frac{\left[ \cos \sqrt{(4n-4k+6)}\tau - 1 \right]^2}{(2n-2k+3)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} \rho_{22}^\alpha(\tau) = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^n F_{kl}^{nn}(s, \theta) \cos^2 \left( \sqrt{(n-l)}\tau \right) \left\{ |\alpha| \frac{(n-k)}{(2n-2k-1)} \right. \\ & \sin^2 \left( \sqrt{(4n-4k-2)}\tau \right) + \left| \sqrt{(1-\alpha)} \right|^2 (n-k+1) \\ & \left. \frac{\sin^2 \sqrt{(4n-4k+6)}\tau}{2n-2k+3} \right\}, \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$\begin{aligned}
\rho_{33}^{\alpha}(\tau) = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^n F_{kl}^{nn}(s, \theta) \cos^2 \left( \sqrt{(n-l)\tau} \right) \left\{ |\alpha| \frac{(n-k)}{(2n-2k-1)^2} \times \right. \\
& (n-k-1) \left[ \cos \left( \sqrt{(4n-4k-2)\tau} \right) - 1 \right]^2 + \frac{|\sqrt{(1-\alpha)}|}{(2n-2k+3)^2} \\
& \left. \left[ (n-k+1) \cos \sqrt{(4n-4k+6)\tau} + n-k+2 \right]^2 \right\}, \tag{4.56}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{44}^{\alpha}(\tau) = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^n F_{kl}^{nn}(s, \theta) \sin^2 \left( \sqrt{(n-l)\tau} \right) \left\{ \frac{|\alpha|}{(2n-2k-1)^2} \times \right. \\
& \left. \left[ (n-k) \cos \left( \sqrt{(4n-4k-2)\tau} \right) + (n-k-1) \right]^2 \right. \\
& + \left. \left. \frac{|\sqrt{(1-\alpha)}|^2}{(2n-2k+3)^2} (n-k+1) \left[ \cos \sqrt{(4n-4k+6)\tau} - 1 \right]^2 \times \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{(n-k+2)}{(2n-2k+3)^2} \right\}, \tag{4.57}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{55}^{\alpha}(\tau) = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^n F_{kl}^{nn}(\theta) \sin^2 \left( \sqrt{(n-l)\tau} \right) \left\{ |\alpha| \frac{(n-k)}{(2m-2k-1)} \times \right. \\
& \sin^2 \left( \sqrt{(4n-4k-2)\tau} \right) + \left. \left. \frac{|\sqrt{(1-\alpha)}|^2}{2n-2k+3} \frac{(n-k+1)}{2n-2k+3} \right. \right. \\
& \left. \left. \sin^2 \sqrt{(4n-4k+6)\tau} \right\}, \tag{4.58}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{66}^{\alpha}(\tau) = & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^n F_{kl}^{nn}(\theta) \sin^2 \left( \sqrt{(n-l)\tau} \right) \left\{ |\alpha| \frac{(n-k-1)(n-k)}{(2n-2k-1)^2} \times \right. \\
& \left. \left[ \cos \sqrt{(4n-4k-2)\tau} - 1 \right]^2 + \frac{|\sqrt{(1-\alpha)}|^2}{(2n-2k+3)^2} \times \right. \\
& \left. \left. \left[ (n-k+1) \cos \sqrt{(4n-4k+6)\tau} + n-k+2 \right]^2 \right\}, \tag{4.59}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{15}^{\alpha}(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^n F_{kl}^{nn+1}(\theta) \sqrt{(\alpha - |\alpha|^2)} \cos\left(\sqrt{(n-l)}\tau\right) \left(\sin \sqrt{(n-l+1)}\tau\right) (4.60) \\
&\left\{ -\frac{\sqrt{(n-k+1)}}{\sqrt{(2n-2k+1)}(2n-2k-1)} \sin\left(\sqrt{(4n-4k+2)}\tau\right) \times \right. \\
&\left[ (n-k) \cos\left(\sqrt{(4n-4k-2)}\tau\right) + (n-k-1) \right] \\
&+ \frac{-(n-k+2)\sqrt{(n-k+1)}}{\sqrt{(2n+5-2k)}(2n-2k+3)} \left[ \cos \sqrt{(4n-4k+6)}\tau - 1 \right] \times \\
&\left. \sin \sqrt{(4n+10-4k)}\tau \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{26}^{\alpha}(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^n F_{kl}^{nn+1}(\theta) \sqrt{(\alpha - |\alpha|^2)} \cos\left(\sqrt{(n-l)}\tau\right) \sin\left(\sqrt{(n-l+1)}\tau\right) (4.61) \\
&\left\{ \frac{(n-k)\sqrt{(n-k+1)}}{\sqrt{(2n-2k-1)}(2n-2k+1)} \left[ \cos\left(\sqrt{(4n-4k+2)}\tau\right) - 1 \right] \right. \\
&\sin\left(\sqrt{(4n-4k-2)}\tau\right) + \frac{\sqrt{(n-k+1)} \sin \sqrt{(4n-4k+6)}\tau}{(2n+5-2k)\sqrt{(2n-2k+3)}} \times \\
&\left. \left[ (n-k+2) \cos \sqrt{(4n+10-4k)}\tau + n+3-k \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{13}^{\alpha}(\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^n F_{kl}^{nn+1}(\theta) \sqrt{(\alpha - |\alpha|^2)} \frac{\left(\cos^2 \sqrt{(n-l)}\tau\right)}{(2n-2k+3)(2n-2k-1)} \times (4.62) \\
&\left[ (n-k+1) \cos \sqrt{(4n-4k+6)}\tau + n-k+2 \right] \times \\
&\left[ (n-k) \cos \sqrt{(4n-4k-2)}\tau + n-k-1 \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_{42}^{\alpha} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^n F_{kl}^{nn+1}(\theta) \frac{\left(\cos \sqrt{(n-l)}\tau\right) \sqrt{(n-k+1)}}{\sqrt{(2n-2k+3)}(2n-2k-1)} \times (4.63) \\
&\sin \sqrt{(4n-4k+6)}\tau \left(\sin \sqrt{(n-l)}\tau\right) \times \\
&\left[ (n-k) \cos \sqrt{(4n-4k-2)}\tau + n-k-1 \right],
\end{aligned}$$

$$\rho_{46}^{\alpha}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^n F_{kl}^{nn+1}(\theta) \sqrt{(\alpha - |\alpha|^2)} \frac{(\sin^2 \sqrt{(n-l)\tau})}{(2n-2k+3)(2n-2k-1)} \times \quad (4.64)$$

$$\left[ (n-k+1) \cos \sqrt{(4n-4k+6)\tau} + n-k+2 \right] \times$$

$$\left[ (n-k) \cos \sqrt{(4n-4k-2)\tau} + n-k-1 \right],$$

$$\rho_{53}^{\alpha}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^n F_{kl}^{nn+1}(\theta) \sqrt{(\alpha - |\alpha|^2)} \sqrt{(n-k)} \sin \sqrt{(4n-4k-2)\tau} \times \quad (4.65)$$

$$\left( \frac{-\left(\cos \sqrt{(n-l)\tau}\right) \left(\sin \sqrt{(n-l)\tau}\right)}{(2n-2k+3) \sqrt{(2n-2k-1)}} \right) \times$$

$$\left[ (n-k+1) \cos \sqrt{(4n-4k+6)\tau} + n-k+2 \right],$$

onde

$$F_{kl}^{mn}(s, \theta) = \frac{(\tanh s)^{2n}}{(\cosh s)^2} G_{kl}^{mn}(\theta), \quad (4.66)$$

$$F_{kl}^{nm+1}(s, \theta) = \frac{(\tanh s)^{2n+1}}{(\cosh s)^2} G_{kl}^{nm+1}(\theta).$$

As funções  $G_{kl}^{mn}(\theta)$  e  $G_{kl}^{nm+1}(\theta)$  estão demonstradas na equação (4.7).

### Operador de estado para o campo nas cavidades

Dado o operador densidade do sistema composto  $\hat{\rho}^{\alpha}(\tau, \theta, s)$  Eq. (4.42), podemos calcular operador densidade reduzido para o campo nas cavidades  $C_1$  e  $C_2$ , fazendo um traço sobre os graus de liberdade dos átomos,

$$\rho_{C_1 C_2}^{\alpha}(\tau, \theta, s) = Tr_{A_1 A_2 B} [\rho(\tau, \theta, s)].$$

Deste modo o estado reduzido do campo tem a seguinte forma,

$$\begin{aligned}
& \rho_{C_1 C_2}^\alpha(\tau) \tag{4.67} \\
= & |\alpha| \left\{ \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^{\max n,m} [(A_1^{n,m}(\tau) + A_5^{n+1,m+1}(\tau)) |n\rangle |n\rangle \langle m| \langle m|] \right. \\
& + \sum_{n,m=1}^{\infty} \sum_{k,l=1}^{\max n,m} [(A_2^{n,m}(\tau) + A_6^{n+1,m+1}(\tau)) |n-1\rangle |n\rangle \langle m-1| \langle m| \\
& + A_4^{n,m}(\tau) |n\rangle |n-1\rangle \langle m| \langle m-1|] \\
& + \left. \sum_{n,m=2}^{\infty} \sum_{k,l=2}^{\max n,m} [A_3^{n,m}(\tau) |n-2\rangle |n\rangle \langle m-2| \langle m|], \right\} \\
& + \left| \sqrt{1-\alpha} \right|^2 \left\{ \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^{\max n,m} [B_3^{n,m}(\tau) |n\rangle |n\rangle \langle m| \langle m| \right. \\
& (B_1^{n,m}(\tau) + B_5^{n+1,m+1}(\tau)) |n+2\rangle |n\rangle \langle m+2| \langle m|] \\
& + \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^{\max n,m} [(B_2^{n,m}(\tau) + B_6^{n+1,m+1}(\tau)) |n+1\rangle |n\rangle \langle m+1| \langle m| \\
& + \left. \sum_{n,m=1}^{\infty} \sum_{k,l=1}^{\max n,m} [B_4^{n,m}(\tau) |n-1\rangle |n\rangle \langle m-1| \langle m|], \right\}
\end{aligned}$$

onde os coeficientes são:

$$\begin{aligned}
A_1^{n,m}(\tau) = & F_{kl}^{nm}(s, \theta) \cos\left(\sqrt{(n-l)\tau}\right) \cos\left(\sqrt{(m-l)\tau}\right) \times \tag{4.68} \\
& \left[ (n-k) \cos\left(\sqrt{(4n-4k-2)\tau}\right) + (n-k-1) \right] \\
& \left[ (m-k) \cos\left(\sqrt{(4m-4k-2)\tau}\right) + (m-k-1) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2^{n+1,m+1}(\tau) = & F_{kl}^{n+1,m+1}(s, \theta) \cos\left(\sqrt{(n-l+1)\tau}\right) \cos\left(\sqrt{(m-l+1)\tau}\right) \tag{4.69} \\
& \sin\left(\sqrt{(4n-4k+2)\tau}\right) \sin\left(\sqrt{(4m-4k+2)\tau}\right) \\
& \frac{\sqrt{(n-k+1)(m-k+1)}}{\sqrt{(2n-2k+1)(2m-2k+1)}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3^{n,m}(\tau) &= F_{kl}^{nn}(s, \theta) \cos\left(\sqrt{(n-l)}\tau\right) \cos\left(\sqrt{(m-l)}\tau\right) \\
&\quad \frac{\sqrt{(n-k)(n-k-1)}\sqrt{(m-k)(m-k-1)}}{(2n-2k-1)(2m-2k-1)} \\
&\quad \left[\cos\left(\sqrt{(4n-4k-2)}\tau\right) - 1\right] \left[\cos\left(\sqrt{(4m-4k-2)}\tau\right) - 1\right], \tag{4.70}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_4^{n,m}(\tau) &= F_{kl}^{nn}(s, \theta) \frac{\sin\left(\sqrt{(n-l)}\tau\right) \sin\left(\sqrt{(m-l)}\tau\right)}{(2n-2k-1)(2m-2k-1)} \\
&\quad \left[(n-k) \cos\left(\sqrt{(4n-4k-2)}\tau\right) + (n-k-1)\right] \\
&\quad \left[(m-k) \cos\left(\sqrt{(4m-4k-2)}\tau\right) + (m-k-1)\right] \tag{4.71}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_5^{n+1,m+1}(\tau) &= F_{kl}^{n+1,n+1}(\theta) \sin\left(\sqrt{(n-l+1)}\tau\right) \sin\left(\sqrt{(m-l+1)}\tau\right) \\
&\quad \frac{\sqrt{(n-k+1)}\sqrt{(m-k+1)}}{\sqrt{(2n-2k+1)}\sqrt{(2m-2k+1)}} \\
&\quad \sin\left(\sqrt{(4n-4k+2)}\tau\right) \sin\left(\sqrt{(4m-4k+2)}\tau\right), \tag{4.72}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_6^{n+1,m+1}(\tau) &= F_{kl}^{n+1,n+1}(\theta) \sin\left(\sqrt{(n-l+1)}\tau\right) \sin\left(\sqrt{(m-l+1)}\tau\right) \\
&\quad \frac{\sqrt{(n-k)(n-k+1)}\sqrt{(n-k)(n-k+1)}}{(2n-2k+1)(2n-2k+1)} \\
&\quad \left[\cos\sqrt{(4n-4k+2)}\tau - 1\right] \left[\cos\sqrt{(4n-4k+2)}\tau - 1\right], \tag{4.73}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_1^{n,m}(\tau) &= F_{kl}^{nm}(s, \theta) \cos\left(\sqrt{(n-l)}\tau\right) \sqrt{(n-k+1)(n-k+2)} \\
&\quad \frac{\left[\cos\sqrt{(4n-4k+6)}\tau - 1\right]}{(2n-2k+3)} \\
&\quad \cos\left(\sqrt{(m-l)}\tau\right) \sqrt{(m-k+1)(m-k+2)} \\
&\quad \frac{\left[\cos\sqrt{(4m-4k+6)}\tau - 1\right]}{(2m-2k+3)}, \tag{4.74}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_2^{n,m}(\tau) &= F_{kl}^{nm}(s, \theta) \cos\left(\sqrt{(n-l)}\tau\right) \sqrt{(n-k+1)} \frac{\sin\left(\sqrt{(4n-4k+6)}\tau\right)}{\sqrt{2n-2k+3}} \\
&\quad \cos\left(\sqrt{(m-l)}\tau\right) \sqrt{(m-k+1)} \frac{\sin\left(\sqrt{(4m-4k+6)}\tau\right)}{\sqrt{2m-2k+3}}, \tag{4.75}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_3^{n,m}(\tau) &= F_{kl}^{nm}(s, \theta) \frac{\cos\left(\sqrt{(n-l)}\tau\right)}{(2n-2k+3)} \\
&\quad \left[ (n-k+1) \cos\sqrt{(4n-4k+6)}\tau + n-k+2 \right] \\
&\quad \frac{\cos\left(\sqrt{(m-l)}\tau\right)}{(2m-2k+3)} \\
&\quad \left[ (m-k+1) \cos\left(\sqrt{(4m-4k+6)}\tau\right) + m-k+2 \right], \tag{4.76}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_4^{n,m}(\tau) &= F_{kl}^{nm}(s, \theta) \sin\left(\sqrt{(n-l)}\tau\right) \frac{\sqrt{(n-k+2)}}{(2n-2k+3)} \\
&\quad \sqrt{(n-k+1)} \left[ \cos\sqrt{(4n-4k+6)}\tau - 1 \right] \\
&\quad \sin\left(\sqrt{(m-l)}\tau\right) \frac{\sqrt{(m-k+2)}}{(2m-2k+3)} \\
&\quad \sqrt{(m-k+1)} \left[ \cos\sqrt{(4m-4k+6)}\tau - 1 \right], \tag{4.77}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_5^{n+1,m+1}(\tau) &= F_{kl}^{n+1m+1}(s, \theta) \sin\left(\sqrt{(n-l)}\tau\right) \sqrt{\frac{(n-k+1)}{2n-2k+3}} \\
&\quad \sin\left(\sqrt{(4n-4k+6)}\tau\right) \sin\left(\sqrt{(m-l)}\tau\right) \sqrt{\frac{(m-k+1)}{2m-2k+3}} \\
&\quad \sin\left(\sqrt{(4m-4k+6)}\tau\right), \tag{4.78}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_6^{n+1,m+1}(\tau) &= F_{kl}^{n+1m+1}(s, \theta) \frac{\sin\left(\sqrt{(n-l)}\tau\right)}{(2n-2k+3)} \\
&\quad \left[ (n-k+1) \cos \sqrt{(4n-4k+6)}\tau + n-k+2 \right] \\
&\quad \frac{\sin\left(\sqrt{(m-l)}\tau\right)}{(2m-2k+3)} \\
&\quad \left[ (m-k+1) \cos \sqrt{(4m-4k+6)}\tau + m-k+2 \right],
\end{aligned} \tag{4.79}$$

com

$$F_{kl}^{nm}(s, \theta) = \frac{(\tanh s)^{n+m}}{(\cosh s)^2} G_{kl}^{mm}(\theta). \tag{4.80}$$

a funções  $G_{kl}^{nm}(\theta)$  esta demonstradaa na equação (4.7).

### 4.7.2 Estado inicial atômico $|\Phi_2(0)\rangle$

Outra possibilidade para estado inicial atômico na cavidade  $C_1$  localizada no laboratório de Alice é o estado  $|\Phi_2(0)\rangle = |2, 0\rangle_{A_1 A_2} |1, -1\rangle_B$ . O estado dos três átomos no instante  $t = 0$  é dado por

$$\hat{\rho}_{A_1 A_2 B}^{\Phi_2}(0) = |\Phi_2(0)\rangle \langle \Phi_2(0)|, \tag{4.81}$$

com o estado do sistema total após o tempo de interação  $t$  é escrito como,

$$\begin{aligned}
&\hat{\rho}^{\Phi_2}(\tau, \theta, s) \\
&= \left(\frac{1}{\cosh s}\right)^2 \hat{U}_{12}(\tau) \left[ \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^{\min[n,m]} (\tanh s)^{n+m} G_{kl}^{mm}(\theta) \times \right. \\
&\quad \left. |2, 0, n-k\rangle_1 |1, -1, n-l\rangle_2 \langle 2, 0, m-k| \langle 1, -1, m-l| \right] \hat{U}_{12}^\dagger(\tau).
\end{aligned} \tag{4.82}$$

### Operador de estado para os átomos

O operador de estado dos átomos  $\hat{\rho}_{A_1 A_2 B}^{\Phi_2}(\tau, \theta, s)$  é obtido através do traço sobre os graus de liberdade do campo em  $\hat{\rho}^{\Phi_2}(\tau, \theta, s)$  Eq. (4.82),

$$\hat{\rho}_{A_1 A_2 B}^{\Phi_2}(\tau, \theta, s) = Tr_{c_1 c_2}(\hat{\rho}^{\Phi_2}(\tau, \theta, s)). \quad (4.83)$$

A representação matricial de  $\rho_{A_1 A_2 B}^{\Phi_2}(\tau, \theta, s)$ , na base  $|2, -2\rangle_{A_1 A_2} |1, -1\rangle_B$ ,  $|2, 0\rangle_{A_1 A_2} |1, -1\rangle_B$ ,  $|2, 2\rangle_{A_1 A_2} |1, -1\rangle_B$ ,  $|2, -2\rangle_{A_1 A_2} |1, 1\rangle_B$ ,  $|2, 0\rangle_{A_1 A_2} |1, 1\rangle_B$ ,  $|2, 2\rangle_{A_1 A_2} |1, 1\rangle_B$ , é escrita como,

$$\hat{\rho}_{A_1 A_2 B}^{\Phi_2} = \begin{pmatrix} \rho_{11}^{\Phi_2} & 0 & 0 & 0 & \rho_{15}^{\Phi_2} & 0 \\ 0 & \rho_{22}^{\Phi_2} & 0 & 0 & 0 & \rho_{26}^{\Phi_2} \\ 0 & 0 & \rho_{33}^{\Phi_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{44}^{\Phi_2} & 0 & 0 \\ \rho_{15}^{\Phi_2} & 0 & 0 & 0 & \rho_{55}^{\Phi_2} & 0 \\ 0 & \rho_{26}^{\Phi_2} & 0 & 0 & 0 & \rho_{66}^{\Phi_2} \end{pmatrix}, \quad (4.84)$$

onde os elementos da matriz  $\rho_{A_1 A_2 B}^{\Phi_2}$ , possuem a seguinte forma,

$$\rho_{11}^{\Phi_2}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^n F_{kl}^{nn}(s, \theta) \left( \cos^2 \sqrt{(n-l)\tau} \right) (n-k+1) \frac{\sin^2 \sqrt{(4n-4k+2)\tau}}{2n-2k+1}, \quad (4.85)$$

$$\rho_{22}^{\Phi_2}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^n F_{kl}^{nn}(s, \theta) \left( \cos^2 \sqrt{(n-l)\tau} \right) \cos^2 \sqrt{(4n-4k+2)\tau}, \quad (4.86)$$

$$\rho_{33}^{\Phi_2}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^n F_{kl}^{nn}(s, \theta) \left( \cos^2 \sqrt{(n-l)\tau} \right) (n-k) \frac{\sin^2 \sqrt{(4n-4k+2)\tau}}{2n-2k+1}, \quad (4.87)$$

$$\rho_{44}^{\Phi_2}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^n F_{kl}^{nn}(s, \theta) \left( \sin^2 \sqrt{(n-l)\tau} \right) (n-k+1) \frac{\sin^2 \sqrt{(4n-4k+2)\tau}}{2n-2k+1}, \quad (4.88)$$

$$\rho_{55}^{\Phi_2}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^n F_{kl}^{nn}(\theta) \left( \sin^2 \sqrt{(n-l)\tau} \right) \cos^2 \sqrt{(4n-4k+2)\tau}, \quad (4.89)$$

$$\rho_{66}^{\Phi_2}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^n F_{kl}^{nn}(\theta) \left( \sin^2 \sqrt{(n-l)\tau} \right) (n-k) \frac{\sin^2 \sqrt{(4n-4k+2)\tau}}{2n-2k+1}, \quad (4.90)$$

$$\rho_{15}^{\Phi_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^n F_{kl}^{nn+1}(\theta) \left\{ \sqrt{(n-k+1)} \frac{\sin \sqrt{(4n-4k+2)}\tau}{\sqrt{(2n-2k+1)}} \right. \\ \left. \cos \sqrt{(n-l)}\tau \cos \sqrt{(4n-4k+6)}\tau \sin \sqrt{(n+1-l)}\tau \right\}, \quad (4.91)$$

$$\rho_{26}^{\Phi_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^n F_{kl}^{nn+1}(\theta) \left\{ -\sqrt{(n-k+1)} \frac{\sin \sqrt{(4n-4k+6)}\tau}{\sqrt{(2n-2k+3)}} \right. \\ \left. \left( \cos \sqrt{(n-l)}\tau \cos \sqrt{(4n-4k+2)}\tau \sin \sqrt{(n+1-l)}\tau \right) \right\}, \quad (4.92)$$

onde

$$F_{kl}^{nn}(s, \theta) = \frac{(\tanh s)^{2n}}{(\cosh s)^2} G_{kl}^{nn}(\theta), \quad (4.93)$$

$$F_{kl}^{nn+1}(s, \theta) = \frac{(\tanh s)^{2n+1}}{(\cosh s)^2} G_{kl}^{nn+1}(\theta).$$

As funções  $G_{kl}^{nn}(\theta)$  e  $G_{kl}^{nn+1}(\theta)$  estão demonstradas na equação (4.7).

## Operador de estado para o campo

Quando consideramos os átomos na cavidade preparados no estado  $|\Phi_2(0)\rangle$  Eq. (4.81), operador de estado para o campo nas cavidades tem a seguinte forma,

$$\rho_{C_1 C_2}^{\Phi_2}(\tau) = |\alpha| \left\{ \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^{\max n,m} [(D_1^{n,m}(\tau) + D_5^{n+1,m+1}(\tau)) |n+1\rangle |n\rangle \langle m+1| \langle m|] \right. \\ + \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^{\max n,m} [(D_2^{n,m}(\tau) + D_6^{n+1,m+1}(\tau)) |n\rangle |n\rangle \langle m| \langle m| \\ + D_4^{n+1,m+1}(\tau) |n+2\rangle |n\rangle \langle m+2| \langle m|] \\ \left. + \sum_{n,m=1}^{\infty} \sum_{k,l=1}^{\max n,m} [D_3^{n,m}(\tau) |n-1\rangle |n\rangle \langle m-1| \langle m|], \right\} \quad (4.94)$$

onde os coeficientes são:

$$D_1^{n,m}(\tau) = F_{kl}^{nm}(s, \theta) \left( \cos \sqrt{(n-l)\tau} \right) \sqrt{(n-k+1)} \frac{\sin \sqrt{(4n-4k+2)\tau}}{\sqrt{2n-2k+1}} \times (4.95) \\ \left( \cos \sqrt{(m-l)\tau} \right) \sqrt{(m-k+1)} \frac{\sin \sqrt{(4m-4k+2)\tau}}{\sqrt{2m-2k+1}}$$

$$D_2^{n,m}(\tau) = F_{kl}^{n+1,m+1}(s, \theta) \cos \left( \sqrt{(n-l)\tau} \right) \cos \left( \sqrt{(4n-4k+2)\tau} \right) (4.96) \\ \cos \left( \sqrt{(m-l)\tau} \right) \cos \left( \sqrt{(4m-4k+2)\tau} \right)$$

$$D_3^{n,m}(\tau) = F_{kl}^{nm}(s, \theta) \left( \cos \sqrt{(n-l)\tau} \right) \sqrt{(n-k)} \frac{\sin \sqrt{(4n-4k+2)\tau}}{\sqrt{2n-2k+1}} (4.97) \\ \cos \left( \sqrt{(m-l)\tau} \right) \sqrt{(m-k)} \frac{\sin \sqrt{(4m-4k+2)\tau}}{\sqrt{2m-2k+1}}$$

$$D_4^{n+1,m+1}(\tau) = F_{kl}^{n+1,m+1}(s, \theta) \sin \left( \sqrt{(n-l)\tau} \right) \sqrt{(n-k+1)} (4.98) \\ \frac{\sin \left( \sqrt{(4n-4k+2)\tau} \right)}{\sqrt{2n-2k+1}} \sin \left( \sqrt{(m-l)\tau} \right) \sqrt{(m-k+1)} \\ \frac{\sin \left( \sqrt{(4n-4k+2)\tau} \right)}{\sqrt{2m-2k+1}}$$

$$D_5^{n+1,m+1}(\tau) = F_{kl}^{n+1,m+1}(\theta) \sin \left( \sqrt{(n-l)\tau} \right) \cos \left( \sqrt{(4n-4k+2)\tau} \right) (4.99) \\ \sin \left( \sqrt{(m-l)\tau} \right) \cos \left( \sqrt{(4m-4k+2)\tau} \right)$$

$$D_6^{n+1,m+1}(\tau) = F_{kl}^{n+1,m+1}(\theta) \sin \left( \sqrt{(n-l)\tau} \right) \sqrt{(n-k)} (4.100) \\ \frac{\sin \left( \sqrt{(4n-4k+2)\tau} \right)}{\sqrt{2n-2k+1}} \sin \left( \sqrt{(m-l)\tau} \right) \sqrt{(m-k)} \\ \frac{\sin \left( \sqrt{(4m-4k+2)\tau} \right)}{\sqrt{2m-2k+1}}$$

Os operadores de estado para os átomos e campo como função de tempo, considerando diferentes estados iniciais para o campo e para os átomos, serão utilizados no estudo da dinâmica de emaranhamento do sistema composto que será apresentado no capítulo (5).

# Capítulo 5

## Dinâmica de emaranhamento do sistema composto-cálculos numéricos

### 5.1 Introdução

Qubits estacionários espacialmente separados podem ser emaranhados através de um elemento propagante. Os qubits estacionários podem ser átomos localizados em cavidades e os qubits propagantes podem ser fótons. Estados quânticos do campo eletromagnético com variáveis contínuas podem ser utilizados para emaranhar átomos em cavidades distantes através da transferência de emaranhamento das variáveis contínuas do campo para os átomos nas cavidades espacialmente separadas. Em 2002 W. Son [97], apresentou uma proposta de geração de emaranhamento bipartido através da transferência de emaranhamento das variáveis contínuas do campo para os átomos localizados em cavidades espacialmente separadas, onde a dinâmica de emaranhamento atômico foi estudada através da negatividade global. Em 2004 Mauro Paternostro e W. Son [98], estenderam esta proposta de geração de emaranhamento, realizando um estudo do emaranhamento do campo nas cavidade através da matriz de covariância. Em 2009 propusemos um esquema de geração de emaranhamento atômico tripartido entre dois laboratórios remotos, através da interação de três átomos com um estado comprimido de dois modos, onde cada modo

do campo é enviado para um laboratório [28]. Em nossa proposta verificamos a transferência de emaranhamento do campo para os átomos, porém não foi feito nenhum estudo do emaranhamento entre os modos do campo nas cavidades. Nesse artigo os três átomos localizados nas duas cavidades espacialmente separadas eram preparados em um estado separável com os três qubits no estado fundamental  $|000\rangle_{A_1 A_2 B}$  essa condição inicial recai sobre um caso particular apresentado no capítulo anterior que é o estado inicial atômico  $|\Phi_1^\alpha(0)\rangle$  com  $\alpha = 1$ . Foi verificado que a dinâmica do sistema reduzido atômico, gerava emaranhamento tipo W [76].

Neste capítulo temos como objetivo verificar a transferência de emaranhamento das variáveis contínuas do estado comprimido de dois modos para os átomos localizados em cavidades espacialmente separadas. No estudo da dinâmica de emaranhamento, utilizaremos diferentes estados iniciais do campo e diferentes estados iniciais dos átomos ( $A_1$  e  $A_2$ ) localizados na cavidade do laboratório de Alice. Pretendemos observar como o emaranhamento inicial entre os qubits ( $A_1$  e  $A_2$ ) modifica a transferência de emaranhamento do campo para os átomos. No capítulo anterior obtivemos expressões analíticas para o estado do sistema composto, estado do campo e estado dos átomos como função do tempo, parâmetro de compressão e refletividade do divisor de feixe. Essas expressões analíticas serão utilizadas para quantificar o emaranhamento entre os átomos através da negatividade global e uma análise qualitativa do emaranhamento do campo será feita utilizando a função  $Q$  e o número médio de fótons nas cavidades. Para estudarmos a dinâmica de emaranhamento do sistema composto desconsideramos o efeito do divisor de feixe sobre o campo nas cavidades. O que nos motivou a adotar essa refletividade do divisor, é o fato de que qualquer refletividade  $r > 0$ , tem efeito de diminuição no grau de emaranhamento transferido para os átomos nas cavidades [97].

O capítulo será dividido em duas seções onde apresentaremos o estudo da dinâmica de emaranhamento dos átomos nas cavidades distintas e o estudo do emaranhamento entre os modos do campo nas cavidades.

## 5.2 Emaranhamento dos átomos nas cavidades distintas

Nesta seção calcularemos a negatividade global da transposta parcial do operador de estado atômico, com relação ao qubit  $B$ , para verificar o emaranhamento entre os átomos nas cavidades espacialmente separadas (qubit  $B$  e par  $A_1, A_2$ ). Como foi apresentado no capítulo (2) a negatividade global para um estado misto não possibilita a detecção do emaranhamento ligado, porém é uma medida suficiente para verificar o emaranhamento livre. Dividimos esta seção no estudo do emaranhamento para os estados iniciais atômicos  $|\Phi_1^\alpha(0)\rangle$  e  $|\Phi_2(0)\rangle$ .

### 5.2.1 Estados iniciais $|\Phi_1^\alpha(0)\rangle$

Utilizando-se do operador de estado atômico  $\rho_{A_1 A_2 B}^\alpha(\tau)$  Eq. (4.51), calculamos a negatividade global [52] como foi definida no capítulo (2), para verificar o emaranhamento do qubit  $B$  com o par  $A_1, A_2$ . Como estamos analisando a transferência de emaranhamento das variáveis contínuas do campo comprimido de dois modos para os átomos nas cavidades distintas, devemos calcular o emaranhamento entre os átomos nas cavidades espacialmente separadas. Neste caso a negatividade global [52] da transposta parcial do estado  $\rho_{A_1 A_2 B}^\alpha$  com relação ao qubit  $B$  é definida como

$$N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^\alpha) = \left| \left| \hat{\rho}_{A_1 A_2 B}^{T_B} \right| \right| - 1 = 2 \sum_i |\lambda_i^-|, \quad (5.1)$$

portanto nosso interesse é verificar correlações entre o qubit  $B$  e o par  $A_1, A_2$ , ou seja correlações entre átomos em cavidades distintas. Devido a simetria do operador de estado atômico a negatividade global detecta tanto o emaranhamento dos qubits  $B$  e  $A_1$ , como  $B$  e  $A_2$ . Resultados numéricos foram obtidos a partir da equação (5.1), utilizando-se o programa FORTRAN. Os cálculos numéricos foram feitos para  $\theta = 3, 14$ , ou seja refletividade do divisor de feixe ( $r = 0$ ) pois ( $r = \cos(\theta/2)$ ). Os resultados numéricos para a

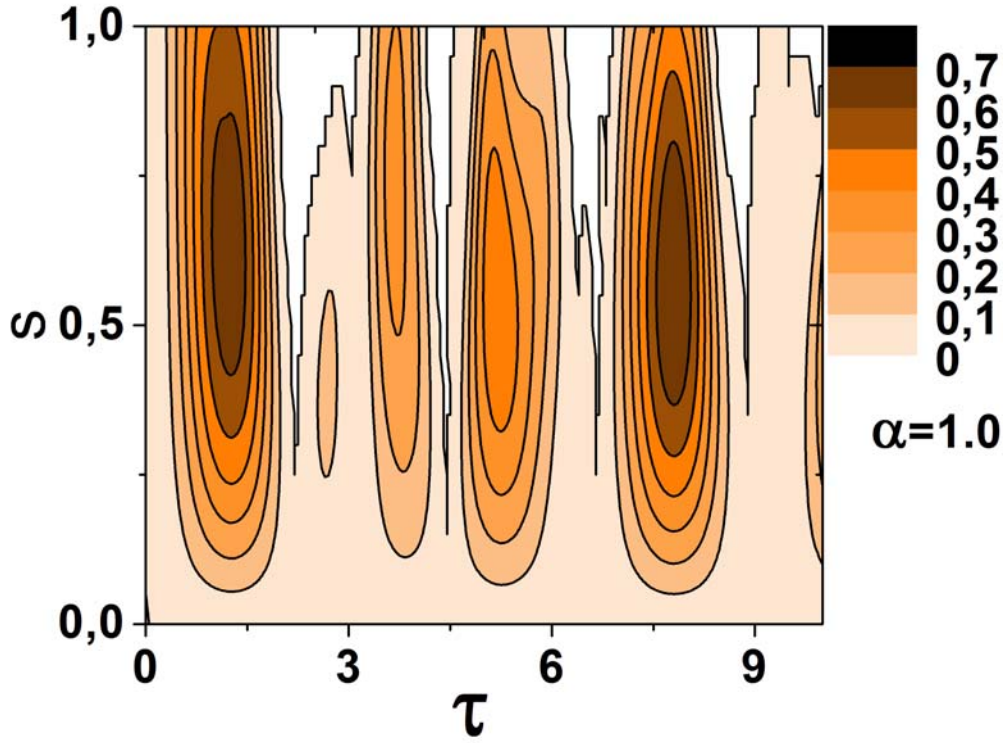


Figura 5.1: Negatividade global  $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^{\Phi_1})$  em função do parâmetro de compressão  $s$  e parâmetro de interação  $\tau = gt$ , para o estado inicial  $|\Phi_1^{\alpha=1}\rangle$ .

negatividade  $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^{\Phi_1})$  estão representados em três figuras. O estado inicial atômico utilizado no estudo da dinâmica de emaranhamento do sistema atômico em nossa proposta em 2009, está apresentado na figura (5.1). Na figura (5.2), utilizamos uma combinação linear do estado inicial da figura (5.1) com o estado  $|2, 2\rangle_{A_1 A_2} |1 - 1\rangle_B$ , configurando um estado maximamente emaranhado dos dois qubits na cavidade  $C_1$  no instante  $t = 0$ .

Na figura (5.1), plotamos a negatividade  $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^{\alpha})$  considerando estado inicial atômico  $|\Phi_1^{\alpha}(0)\rangle$  com  $\alpha = 1$  em função do parâmetro de compressão  $s$  e parâmetro de interação  $\tau$ . Verificamos que com  $s$  tendendo a zero, o emaranhamento livre entre os átomos diminui, e é nulo com  $s = 0$ . Para  $s = 1$  temos maior quantidade de regiões com emaranhamento nulo, estas regiões diminuem com  $s$  tendendo a zero. O primeiro pico na negatividade global é  $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^{\alpha}) = 0,68$ , e ocorre para  $s = 0,64$  e  $\tau = 1,25$ . Para  $s = 0,64$ , o emaranhamento decai para a zero no tempo de interação  $\tau = 2,05$ ,

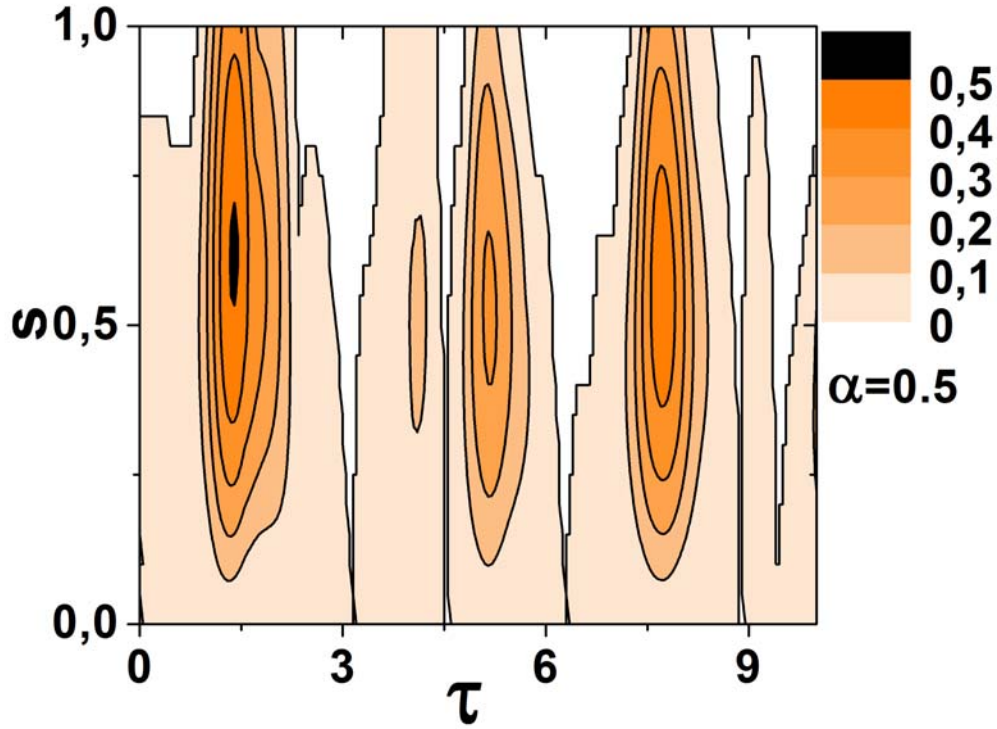


Figura 5.2: Negatividade global  $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^{\Phi_1})$  em função do parâmetro de compressão  $s$  e parâmetro de interação  $\tau = gt$ , para o estado inicial  $|\Phi_1^{\alpha=0,5}\rangle$ .

ocorrendo o renascimento do emaranhamento em  $\tau = 2,45$ . Entre os tempos de interação  $\tau = 2,45$  e  $\tau = 7,00$ , observamos que a negatividade global decai a zero e renasce por duas vezes e atinge seu valor máximo  $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^{\alpha}) = 0,68$  em  $\tau = 7,78$ . Para os tempos de interação  $\tau = 1,25$  e  $\tau = 7,78$  temos o pico da negatividade global em  $s = 0,64$ , para valores de  $s > 0,64$  observamos diminuição na negatividade global, isso também ocorre para  $s < 0,64$ . Para o tempo de interação  $\tau = 2,05$  temos negatividade global nula para  $s = 0,64$  e para valores de  $s > 0,64$  a negatividade global permanece nula, deixando de ser nula para  $s < 0,25$ . A negatividade global é uma função contínua nos tempos de interação  $0 < \tau < 10$ , porém o grau de emaranhamento atômico é muito pequeno quando comparamos com o obtido com  $s = 0,64$ .

Na figura (5.2), temos negatividade  $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^{\alpha})$  em função do parâmetro de compressão e parâmetro de interação, considerando estado inicial atômico  $|\Phi_1^{\alpha}(0)\rangle$  com  $\alpha =$

0,5. Este valor de  $\alpha$  corresponde a um estado inicial maximamente emaranhado dos átomos  $A_1$  e  $A_2$  localizados na cavidade de Alice. Este estado inicial, diminui o grau de emaranhamento entre os qubits nas cavidades espacialmente separadas. Essa verificação é feita quando comparamos essa dinâmica de emaranhamento com o caso em que consideramos estado inicial com  $\alpha = 1$ , figura (5.1). O valor máximo da negatividade para  $\alpha = 0,5$  é  $N_G^B(\rho_{A_1A_2B}^\alpha) = 0,5$ , com parâmetro de compressão  $s = 0,64$ . Comparando esse estado inicial atômico com estado inicial apresentado na figura (5.1), verificamos uma diminuição no valor do pico de emaranhamento. Porém o valor máximo de emaranhamento e também obtido para  $s = 0,64$ . O estado inicial maximamente emaranhando, não produz nenhum atraso no desaparecimento do emaranhamento. Além disso, esse estado inicial atômico aumenta as regiões com emaranhamento nulo.

Comparando as características das figuras (5.1) e (5.2), verificamos que o valor de parâmetro de compressão que nos fornece o maior pico de emaranhamento atômico é  $s = 0,64$ . Com essa informação, na figura (5.3) fixamos  $s = 0,64$  e variamos o parâmetro  $\alpha$  obtendo a dinâmica de emaranhamento para varios estados iniciais atômicos da cavidade  $C_1$ .

A figura (5.3), é um gráfico em curva de nível da  $N_G^B(\rho_{A_1A_2B}^\alpha)$  em função do parâmetro de interação  $\tau$  e  $\alpha$ . Para  $\alpha = 1$  ( $\alpha = 0$ ), temos os qubits  $A_1$  e  $A_2$  que estão localizados na cavidade de Alice em um estado inicial separável  $|00\rangle_{A_1A_2}$  ( $|11\rangle_{A_1A_2}$ ), com qubit localizado na cavidade de Bob no estado  $|0\rangle_B$ . Observamos que para  $0 < \alpha < 1$ , que corresponde a estados emaranhados na cavidade  $C_1$ , uma maior quantidade de regiões com emaranhamento zero comparadas com o caso em que o estado inicial atômico é separável com  $\alpha = 1$ . Também percebemos que o maior pico de  $N_G^B(\rho_{A_1A_2B}^\alpha)$  ocorre para o estado inicial com ( $\alpha = 1$ ). O uso do estado inicial separável  $|11\rangle_{A_1A_2}$  que corresponde a  $\alpha = 0$ , nos fornece o menor grau de emaranhamento, além de possuir maior quantidade de regiões com emaranhamento zero comparado com os outros estados iniciais atômicos apresentados. Para  $\alpha = 0,8$  verificamos um prolongamento no tempo de interação para

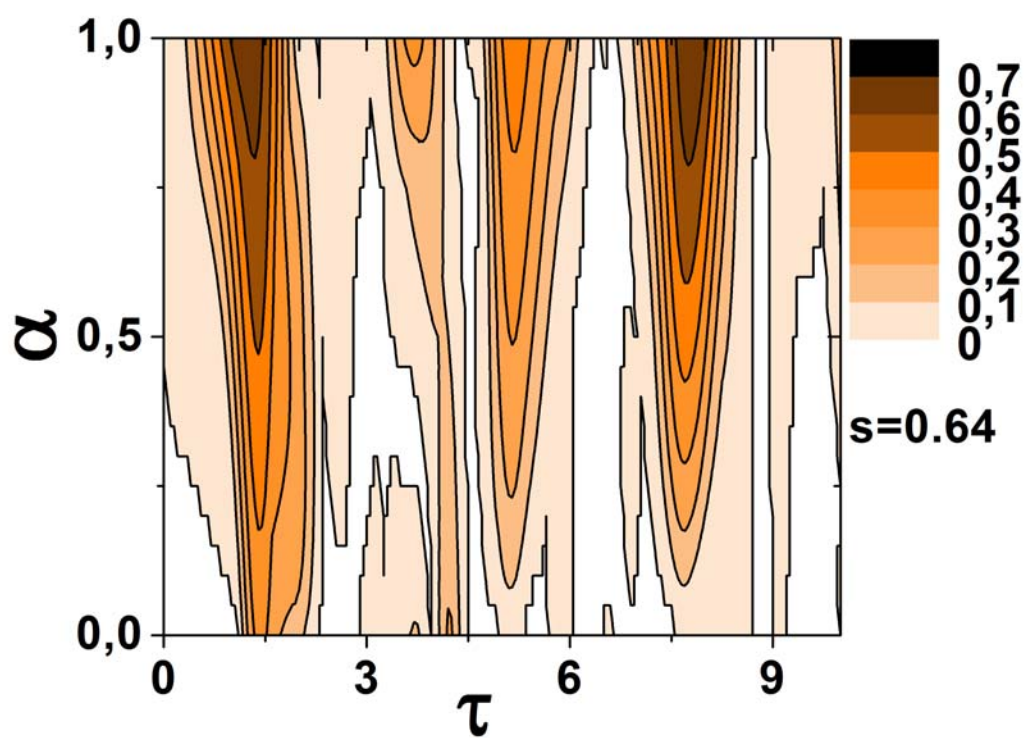


Figura 5.3: Negatividade global  $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^{\Phi_1^\alpha})$ , com  $s = 0,64$ , em função de  $\alpha$  e parâmetro de interação  $\tau = gt$ , para o estado inicial  $|\Phi_1^\alpha\rangle$ .

a ocorrência do primeiro desaparecimento do emaranhamento. Lembramos que  $\alpha = 0$  corresponde ao estado inicial com os dois átomos da cavidade  $C_1$  no estado excitado em  $t = 0$ . Este estado inicial atômico pode acrescentar até dois fótons adicionais ao campo da cavidade, assim aumentando o número médio de fótons na cavidade.

Para analisarmos de forma mais detalhada o efeito do estado inicial dos átomos emaranhados da cavidade  $C_1$  sobre a transferência de emaranhamento para os átomos nas cavidades distintas plotamos a figura (5.4).

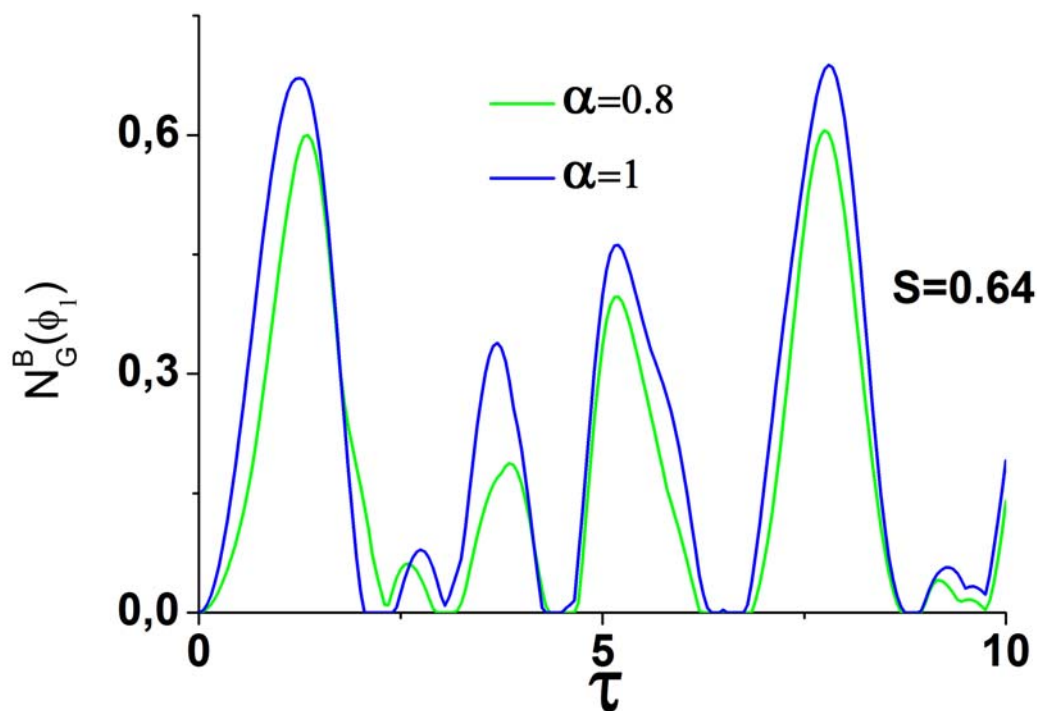


Figura 5.4: Negatividade global  $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^{\Phi_1})$  com  $\alpha = 0,8$  (linha verde) e  $\alpha = 1$  (linha azul), para  $s = 0,64$ , versus o parâmetro de interação  $\tau = gt$ , para o estado inicial  $|\Phi_1^\alpha\rangle$ .

Na figura (5.4), temos a negatividade global  $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^\alpha)$  em função do parâmetro de interação  $\tau$ , considerando  $s = 0,64$ . Quando os qubits  $A_1$  e  $A_2$  localizados na cavidade  $C_1$ , estão em um estado inicial emaranhado com  $\alpha = 0,8$  linha verde, obtemos um prolongamento no tempo de interação para ocorrência do desaparecimento do emaranhamento  $\tau = 2,95$ , comparado com o estado inicial com  $\alpha = 1$  linha azul onde temos

o desaparecimento do emaranhamento com  $\tau = 2,05$ . Pode-se também observar que para o tempo de interação  $\tau = 1,25$ , o estado inicial com  $\alpha = 0,8$ , tem como valor de negatividade  $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^\alpha) = 0,60$ , o uso deste estado inicial provoca uma diminuição do grau de emaranhamento comparada com o estado inicial com  $\alpha = 1$  que tem como valor  $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^\alpha) = 0,67$ . Também verificamos uma redução no grau de emaranhamento para o tempo de interação  $\tau = 7,75$  quando iniciamos o sistema com estado inicial com  $\alpha = 0,8$ , temos como valor da negatividade global  $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^\alpha) = 0,60$ , enquanto que para estado inicial separável com  $\alpha = 1$  temos como valor da negatividade global  $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^\alpha) = 0,69$ .

Através da análise da figura (5.4), concluímos que o uso do estado inicial  $|\Phi_1^{\alpha=0,8}\rangle$  não configura em uma boa para a dinâmica de emaranhamento do sistema atômico. Apesar de obtemos um pequeno prolongamento do tempo em que o emaranhamento livre desaparece, este estado gera uma diminuição nos picos da negatividade global.

### 5.2.2 Estado inicial $|\Phi_2(0)\rangle$

Nesta seção utilizaremos o estado inicial atômico  $|\Phi_2(0)\rangle$  Eq. (4.81) no estudo da dinâmica de emaranhamento do sistema composto. Os estados iniciais  $|\Phi_2(0)\rangle$  e  $|\Phi_1^{\alpha=0,5}(0)\rangle$ , possuem os qubits  $A_1$  e  $A_2$  em um estado maximamente emaranhado, porém eles diferem pelo fato do estado de  $|\Phi_2(0)\rangle$  permitir apenas uma única excitação na cavidade  $C_1$ , enquanto que para o estado  $|\Phi_1^{\alpha=0,5}\rangle$  podemos ter até duas excitações na cavidade  $C_1$ .

O cálculo do emaranhamento entre o qubit  $B$  com o par  $A_1 A_2$ , considerando o estado inicial  $|\Phi_2(0)\rangle$ , Eq. (4.81), é feito a partir do operador de estado atômico  $\rho_{A_1 A_2 B}^{\Phi_2}(\tau)$  Eq. (4.84), da mesma forma que a seção anterior, utilizando a negatividade global da transposta parcial do operador de estado do sistema atômico  $\rho_{A_1 A_2 B}^{\Phi_2}(\tau)$ , Eq. (4.84), com relação ao qubit  $B$ , que tem como expressão analítica,

$$N_G^B(s, \theta, \tau) = -2(\lambda_1^- + \lambda_2^-) \quad (5.2)$$

onde

$$\lambda_1^- = (\rho_{33}^{\Phi_2} + \rho_{55}^{\Phi_2}) - \sqrt{(\rho_{33}^{\Phi_2} - \rho_{55}^{\Phi_2})^2 + 4\rho_{26}^{\Phi_2^2}} \quad (5.3)$$

se

$$(\rho_{33}^{\Phi_2} + \rho_{55}^{\Phi_2}) < \sqrt{(\rho_{33}^{\Phi_2} - \rho_{55}^{\Phi_2})^2 + 4\rho_{26}^{\Phi_2^2}}, \quad (5.4)$$

similarmente

$$\lambda_2^- = (\rho_{22}^{\Phi_2} + \rho_{44}^{\Phi_2}) - \sqrt{(\rho_{22}^{\Phi_2} - \rho_{44}^{\Phi_2})^2 + 4\rho_{15}^{\Phi_2^2}} \quad (5.5)$$

se

$$(\rho_{22}^{\Phi_2} + \rho_{44}^{\Phi_2}) < \sqrt{(\rho_{22}^{\Phi_2} - \rho_{44}^{\Phi_2})^2 + 4\rho_{15}^{\Phi_2^2}} \quad (5.6)$$

e  $\lambda_2^- = 0$ , se

$$(\rho_{22}^{\Phi_2} + \rho_{44}^{\Phi_2}) \geq \sqrt{(\rho_{22}^{\Phi_2} - \rho_{44}^{\Phi_2})^2 + 4\rho_{15}^{\Phi_2^2}}. \quad (5.7)$$

Na figura (5.5) plotamos a negatividade  $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^{\Phi_2})$  em função do parâmetro de compressão  $s$  e parâmetro de interação  $\tau$ , considerando estado inicial atômico  $|\Phi_2(0)\rangle$ , que representa os qubits  $A_1$  e  $A_2$  localizados na cavidade de Alice no estado inicial maximamente emaranhado  $1/\sqrt{2}(|01\rangle + |10\rangle)_{A_1 A_2}$ , e qubit de Bob no estado  $|0\rangle_B$ . Nesse caso valor máximo da negatividade global é ( $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^{\Phi_2}) = 0,73$ ), este valor ocorre para o parâmetro de compressão ( $s = 0,64$ ) e parâmetro de interação ( $\tau = 7,75$ ). Para o valor de parâmetro de compressão ( $s = 0,64$ ), o tempo de interação para ocorrência do desaparecimento do emaranhamento é ( $\tau = 5,65$ ). Quando comparando  $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^{\Phi_1})$  com ( $\alpha = 1.0$ ) figura (5.1), com  $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^{\Phi_2})$  figura 5.5, verificamos que existem menos regiões com emaranhamento zero para o estado inicial atômico  $|\Phi_2(0)\rangle$ , Eq. (4.81).

Para verificarmos de forma mais detalhada a dinâmica de emaranhamento para os estados iniciais  $|\Phi_1^{\alpha=1}(0)\rangle$  e  $|\Phi_2(0)\rangle$ , construímos um gráfico considerando a negatividade global ( $N_G^B$ ) em função do parâmetro de interação e fixando o parâmetro de compressão em  $s = 0.64$ .

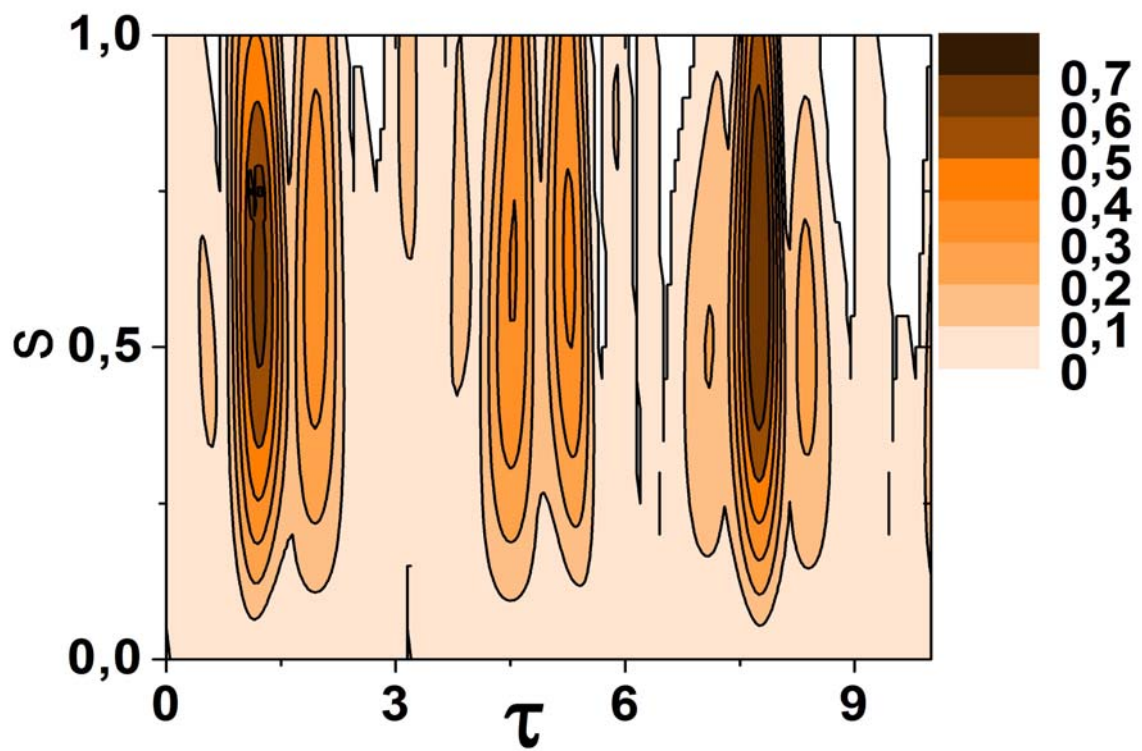


Figura 5.5: Negatividade global  $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^{\Phi_2})$  em função do parâmetro de compressão  $s$  e parâmetro de interação  $\tau = gt$ , para o estado inicial  $|\Phi_2\rangle$ .

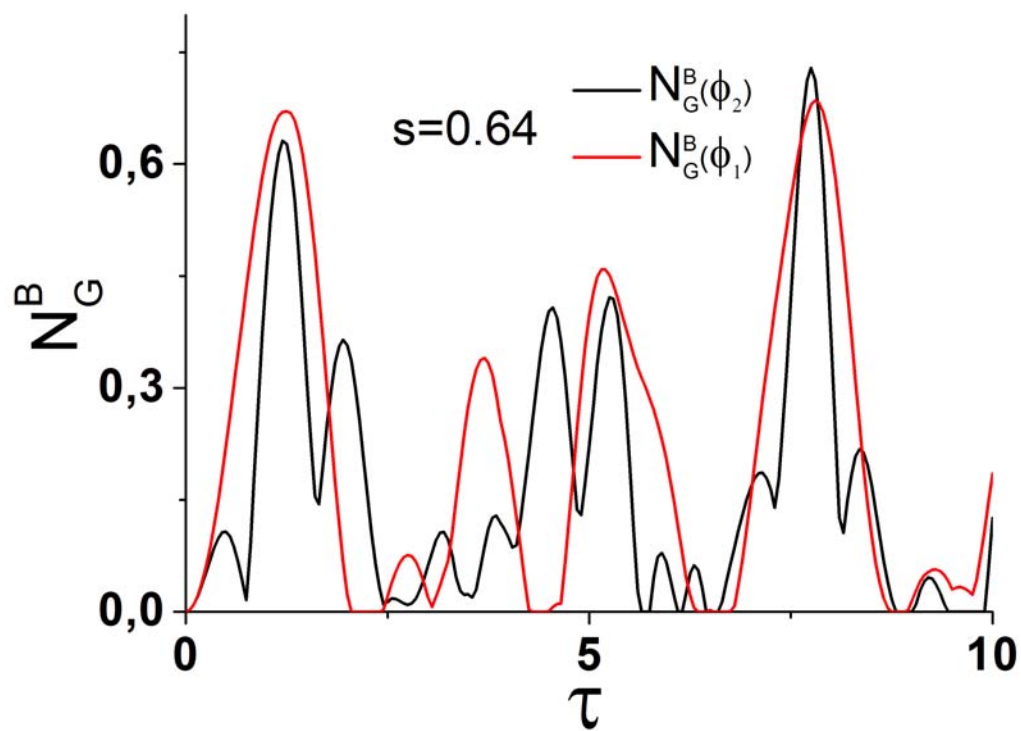


Figura 5.6: Negatividade global  $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^{\Phi_1})$  (linha vermelha) e  $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^{\Phi_2})$  (linha preta), para parâmetro de compressão  $s = 0,64$ , em função do parâmetro de interação  $\tau = gt$ .

Na figura 5.6 temos a negatividade  $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^\alpha)$  e  $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^{\Phi_2})$  versus tempo de interação  $\tau$ , utilizando parâmetro de compressão ( $s = 0,64$ ). Observamos que o tempo de interação para ocorrência do primeiro desaparecimento de emaranhamento para o estado inicial atômico  $\Phi_2$  é ( $\tau = 5,65$ ), esse tempo de interação corresponde, a mais que duas vezes o tempo de interação para ocorrência do desaparecimento do emaranhamento para o estado inicial  $\Phi_1$  ( $\alpha = 1$ ), que é ( $\tau = 2,05$ ). Quando analisamos o tempo de interação em que acontece o primeiro renascimento de emaranhamento, verificamos que o estado  $\Phi_2$  tem um tempo de interação  $\tau = 0.15$ , enquanto o estado inicial  $\Phi_1$  possui um tempo de interação mais longo  $\tau = 0.40$ . Apesar do estado inicial  $\Phi_2$  possuir seis ESD, enquanto  $\Phi_1$  possui apenas cinco, o tempo de interação com emaranhamento zero é  $\tau = 1,15$  para os dois estados iniciais. Esses resultados foram obtidos para os tempos de interação  $0 < \tau < 10.0$ . O valor máximo da negatividade para o estado inicial  $\Phi_1$  é ( $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^{\Phi_1}) = 0,69$ ) para o tempo de interação ( $\tau = 7,78$ ), para o mesmo tempo de interação possuímos um maior valor para a negatividade do estado inicial  $\Phi_2$ , que é ( $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^{\Phi_2}) = 0,73$ ). Para o tempo de interação ( $\tau = 4,55$ ), onde o resultado da negatividade do estado inicial  $\Phi_2$  ( $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^{\Phi_2}) = 0,41$ ), para esse mesmo tempo de interação o estado inicial  $\Phi_1$  tem emaranhamento nulo. Também foi observado que para os tempos de interação ( $\tau = 2,05$ ) e ( $\tau = 4,25$ ) temos  $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^{\Phi_1}) = 0$ , enquanto que para esses mesmos tempos de interação ( $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^{\Phi_2}) = 0,33$ ) e ( $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^{\Phi_2}) = 0,21$ ).

Quando comparamos  $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^\alpha)$  e  $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^{\Phi_2})$  considerando parâmetro de compressão ( $s = 0,64$ ) verificamos que o estado inicial  $\Phi_2$  nos fornece maior grau de emaranhamento em comparação com estado inicial  $\Phi_1$  ( $\alpha = 1$ ). Observa-se desaparecimento do emaranhamento e renascimento no intervalo de tempo de interação ( $0 < \tau < 5,65$ ) para o estado inicial  $\Phi_1$ , enquanto que para o estado inicial  $\Phi_2$ , a negatividade global  $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^{\Phi_2})$  é função continua no mesmo intervalo de tempo de interação.

### 5.3 Morte súbita de emaranhamento, $N_G^B = 0$ para os estados iniciais atômicos $|\Phi_1^\alpha(0)\rangle$ e $|\Phi_2(0)\rangle$ .

Uma nova linha de estudos relacionados com o comportamento da dinâmica de sistemas quânticos elementares está ligada com a descoberta que correlações entre duas unidades quânticas de informação chamadas de qubits, podem ser desagregadas devido a interações com o ambiente de uma forma nunca vista anteriormente no estudo da dissipação. Esse novo tipo de dissipação do emaranhamento quântico foi observado por T. Yu and J. H. Eberly, [41], [42], e é denominado morte de súbita de emaranhamento (ESD)

Tanto as correlações quânticas como as clássicas sempre decaem como um resultado de ruídos devido a interações com o ambiente [43]. Porém a degradação do emaranhamento compartilhado por duas ou mais partes é inevitável [44]. T. Yu and J. H. Eberly [41], observaram que no tratamento teórico da emissão espontânea de dois átomos, o emaranhamento não se comporta de acordo com a lei da meia-vida. Esse fenômeno é denominado, morte súbita de emaranhamento (ESD) e refere-se ao fato que o emaranhamento cai a zero em um tempo finito diferente de um decaimento assintótico.

A ESD já foi detectada em experimentos em laboratório em dois contextos diferentes, M. P. Almeida et. al. [45], verificaram a ESD em um experimento utilizando pares de fótons e J. Laurat et. al. [47], observaram experimentalmente a ESD para ensambles atômicos.

Já foram feitas uma série de verificações teóricas para este fenômeno, para o caso de átomos aprisionados em cavidades ópticas, C. Li et all [49], demonstraram a dinâmica de emaranhamento de dois átomos aprisionados em uma cavidade de modo único onde os átomos interagem com o campo da cavidade através do processo de dois fótons e um campo clássico externo é adicionado. Nesse artigo foi verificado que a ESD ocorre para diferentes estados iniciais atômicos, e a evolução do emaranhamento pode ser controlada pelo o ajuste da dissonância entre as frequências do átomo e campo externo. Outro artigo onde é verificada a ESD para átomos aprisionados e cavidades espacialmente separadas

foi proposto por J. S. Zhang e J. B. Xu [50]. Neste artigo pode-se controlar a morte súbita de emaranhamento e o renascimento do emaranhamento em um sistema de duas cavidades, onde cada uma possui um átomo de dois níveis aprisionado. Os dois átomos são inicialmente preparados em um estado emaranhado e enviados para as cavidades nos estados do vácuo. Dois campos clássicos são enviados adicionalmente, sendo que cada um para uma cavidade. O fenômeno de ESD e ESB pode ser controlado pelo campo clássico enviado para as cavidades. A quantidade de emaranhamento dos dois átomos ou das cavidades pode ser significativamente aumentada devido a aplicação dos campos clássicos.

Em nosso trabalho [28], para a geração de emaranhamento entre três átomos localizados em duas cavidade espacialmente separadas, o emaranhamento é transferido para os átomos através das variáveis contínuas do campo eletromagnético. Observa-se o fenômeno de morte súbita de emaranhamento. Nesse artigo não foi estudado nenhum mecanismo para prolongamento do tempo de interação para ocorrência de morte súbita de emaranhamento.

Como estamos interessados na possível aplicação do emaranhamento atômico em protocolos de comunicação quântica, devemos evitar dentro da dinâmica de emaranhamento, os tempos de interação onde ocorrem morte súbita de emaranhamento (ESD). Deste modo, podemos determinar quais são as condições que o emaranhamento livre entre o qubit  $B$  e o par  $A_1$  e  $A_2$  é nulo. Para o caso em que os átomos do sistema são preparados no estado  $|\Phi_1^{\alpha=1}(0)\rangle$  Eq. (4.45), temos o operador densidade reduzido  $\rho_{A_1A_2B}^\alpha$ , Eq. (4.51), com mesma forma que o operador densidade reduzido  $\rho_{A_1A_2B}^{\Phi_2}$ , Eq. (4.84), pois os elementos  $\rho_{13}^{\Phi_1}$ ,  $\rho_{42}^{\Phi_1}$ ,  $\rho_{46}^{\Phi_1}$  e  $\rho_{53}^{\Phi_1}$ , Eqs. (4.62), (4.63), (4.64), e (4.65), assumem valor zero quando temos  $\alpha = 1$ . Neste caso conseguimos obter uma expressão analítica para a negatividade global  $N_G^B(\rho_{A_1A_2B}^\alpha)$ , que é similar a expressão para negatividade  $N_G^B(\rho_{A_1A_2B}^{\Phi_2})$ , Eq. (5.2). Utilizando-se da Eq. (5.2), podemos determinar que as condições para o desaparecimento

do emaranhamento livre que é dada por,

$$\rho_{33}\rho_{55} \geq (\rho_{26})^2 \text{ e } \rho_{22}\rho_{44} \geq (\rho_{15})^2. \quad (5.8)$$

Na Eq. (5.8), omitimos o sobrescrito  $\alpha$  e  $\Phi_2$ , por ela ser similar para ambos estados iniciais.

Quando as duas condições da Eq. (5.8) são satisfeitas, ocorre o desaparecimento do emaranhamento livre atômico. Analisando a Eq. (5.8), verificamos que um dos causadores do desaparecimento do emaranhamento é o aumento simultâneo dentro da dinâmica do sistema dos elementos  $\rho_{33}$  e  $\rho_{44}$ , que correspondem às probabilidades de ocupação dos estados de base  $|2, 2\rangle_{A_1 A_2} |1, -1\rangle_B$  e  $|2, -2\rangle_{A_1 A_2} |1, 1\rangle_B$ . Estes estados não possuem conexão com nenhum outro estado dentro do operador de estado atômico, Eqs. (4.51), com  $\alpha = 1$  e Eq. (4.84). Isso demonstra que esses estado não possuem emaranhamento. O aumento nessas probabilidades de ocupação contribui para o aumento do ruído quântico, conseqüentemente a diminuição do grau emaranhamento, o que pode acarretar no desaparecimento do emaranhamento livre.

## 5.4 Emaranhamento do campo nas cavidades distintas

Como possuímos nas cavidades um estado do campo com variáveis contínuas não podemos utilizar a negatividade global para quantificar o seu emaranhamento, pois estes estados possuem infinitos graus de liberdade. Por este motivo devemos utilizar outro tipo de quantificador para o emaranhamento do campo que foi apresentado no capítulo (3). Nesta seção utilizaremos a função  $Q$  para uma análise qualitativa do emaranhamento entre os modos do campo nas cavidades. A seção está dividida no estudo da dinâmica de emaranhamento para os estados iniciais atômicos  $|\Phi_1^\alpha(0)\rangle$  Eq. (4.45) e  $|\Phi_2(0)\rangle$  Eq. (4.81).

### 5.4.1 Estado inicial $|\Phi_1^\alpha(0)\rangle$

No estudo da dinâmica de emaranhamento deste capítulo, verificamos que o estado inicial atômico  $|\Phi_1^\alpha(0)\rangle$  tem maior grau de emaranhamento atômico com  $\alpha = 1$ . Por este motivo calcularemos a função  $Q$  somente para o caso  $\alpha = 1$ . A função  $Q$  para o estado reduzido do campo Eq. (4.67), apresentada no capítulo (3), é dada por,

$$Q(\eta, \gamma) = \frac{1}{\pi^2} \langle \eta, \gamma | \rho_{C_1 C_2}^\alpha(\tau) | \eta, \gamma \rangle, \quad (5.9)$$

onde  $\eta = x_1 + ip_1$  e  $\gamma = x_2 + ip_2$ , são parâmetros que caracterizam estados coerentes que foram apresentados no capítulo (3). Deste modo a função  $Q$  para o operador de estado do campo nas cavidades  $\rho_{C_1 C_2}^\alpha(\tau)$  Eq. (4.67), tem a seguinte forma,

$$Q(\eta, \gamma) = \frac{\exp[-(|\eta|^2 + |\gamma|^2)]}{\pi^2 \cosh^2(s)} \times \quad (5.10)$$

$$\left\{ + \exp[(\eta\gamma + \eta^*\gamma^*) \tanh(s)] \sum_{n,m=0}^{\infty} (A_1^{n,m}(\tau) + A_5^{n+1,m+1}(\tau)) \right.$$

$$+ \sum_{n,m=1}^{\infty} \left[ \frac{\eta^{n-1}\gamma^n}{\sqrt{n!(n-1)!}} \frac{(\eta^*)^{m-1}(\gamma^*)^m}{\sqrt{m!(m-1)!}} \tanh^{n+m}(s) (A_2^{n,m}(\tau) + A_6^{n+1,m+1}(\tau)) \right.$$

$$+ \left. \frac{\eta^n\gamma^{n-1}}{\sqrt{n!(n-1)!}} \frac{(\eta^*)^m(\gamma^*)^{m-1}}{\sqrt{m!(m-1)!}} \tanh^{n+m}(s) A_2^{n,m}(\tau) \right]$$

$$+ \left. \sum_{n,m=2}^{\infty} \frac{\eta^{n-2}\gamma^{n-1}}{\sqrt{(n-2)!(n-1)!}} \frac{(\eta^*)^{m-2}(\gamma^*)^{m-1}}{\sqrt{(m-2)!(m-1)!}} \tanh^{n+m}(s) A_3^{n,m}(\tau) \right\}.$$

Com o objetivo de verificar a variância nas quadraturas de posição do primeiro e segundo modo, construímos um gráfico da função  $Q(\eta, \gamma)$  em função das posições do primeiro e segundo modos ( $x_1$  e  $x_2$ ), fixando os valores de momentos ( $p_1 = 0, 1$  e  $p_2 = 0, 1$ ), como mostra a figura (5.7).

Nesta figura escolhemos os tempos de interação onde o emaranhamento atômico é nulo ( $\tau = 0.0$  e  $\tau = 2.45$ ), e os tempos de interação ( $\tau = 1, 1$  e  $\tau = 7, 75$ ) que correspondem a picos no emaranhamento atômico. Para o tempo de interação  $\tau = 0.0$  temos o maior grau de correlação entre as quadraturas de posição do primeiro e segundo modos, observamos

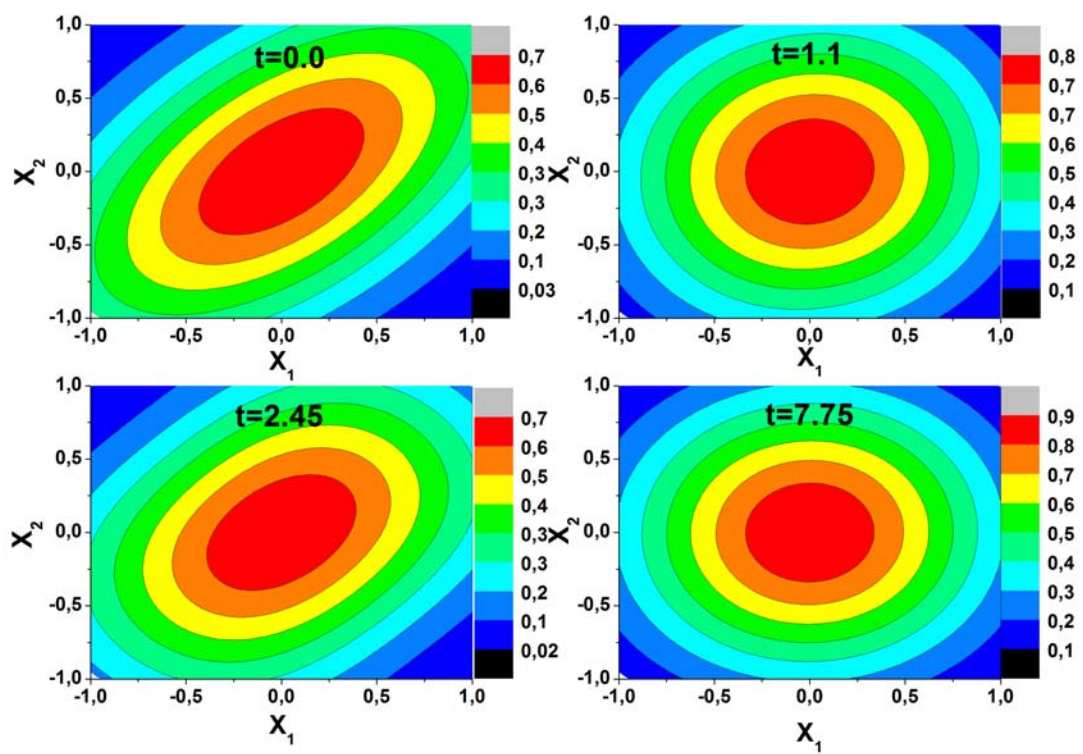


Figura 5.7: Função  $Q$  versus posição do primeiro modo do campo e posição do segundo modo do campo, considerando estado inicial atômico  $|\Phi_1^{\alpha=1}\rangle$  e parâmetros de compressão  $s = 0,64$ .

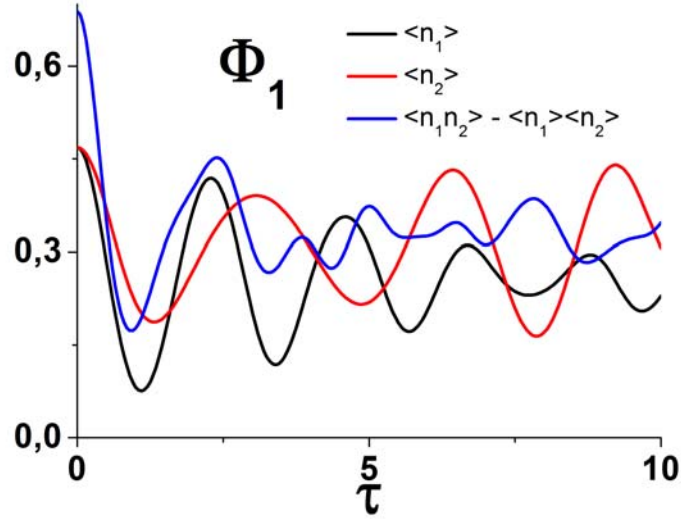


Figura 5.8: Número médio de fótons para primeira cavidade  $\langle n_1 \rangle$ , segunda cavidade  $\langle n_2 \rangle$  e cavidades conjuntas  $\langle n_1 n_2 \rangle$  em função do parâmetro de interação considerando parâmetro de compressão  $s = 0,64$ , para o estado inicial  $|\Phi_1^{\alpha=1}\rangle$ .

que uma quadratura é comprimida enquanto a outra é alargada. Essa maior correlação ocorre porque ainda não aconteceu a interação entre átomos e campo comprimido. Para o tempo de interação  $\tau = 2.45$  existe certo grau de correlação entres os modos do campo porém ele é menor que para  $\tau = 0$ . Para os tempo de interação ( $\tau = 1,1$  e  $\tau = 7,75$ ) existe o menor grau de correlação entre os modos do campo, para estes tempos de interação o sistema tem máximo emaranhamento atômico e isto indica transferência de emaranhamento do campo para os átomos nas cavidades.

Uma melhor análise do campo nas cavidades pode ser feita através do número médio de fótons na primeira e segunda cavidade.

Na figura (5.8) plotamos o número médio de fótons na primeira cavidade  $\langle n_1 \rangle$ , número médio de fóton na segunda cavidade  $\langle n_2 \rangle$  e  $\langle n_1 n_2 \rangle - \langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle$  que mede a correlação entre as intensidades do campo nas duas cavidades, para o estado inicial atômico  $|\Phi_1^{\alpha=1}(0)\rangle$  e parâmetro de compressão  $s = 0,64$ . Percebemos que para os tempos ( $\tau = 0.0$  e  $\tau = 2.45$ ) temos picos nos números médio de fótons  $\langle n_1 \rangle$  e  $\langle n_2 \rangle$ , também verificamos maior grau de correlação entre a intensidade do campo nas duas cavidades. Para os tempos de interação

( $\tau = 1.1$  e  $\tau = 7.75$ ), observamos vales nos números médios de fótons ( $\langle n_1 \rangle$  e  $\langle n_2 \rangle$ ), também se verifica diminuição na correlação entre as intensidades do campo nas cavidades. Isso demonstra que a correlação dos modos do campo nas cavidades são transferidas para os átomos.

### 5.4.2 Estado inicial $|\Phi_2(0)\rangle$

Considerando o operador de estado do campo nas cavidades  $\rho_{C_1 C_2}^{\Phi_2}(\tau)$  Eq. (4.94), a função  $Q$  para este estado é dada por,

$$\begin{aligned}
Q(\eta, \gamma) = & \frac{\exp[-(|\eta|^2 + |\gamma|^2)]}{\pi^2 \cosh^2(s)} \times \\
& \left\{ + \exp[(\eta\gamma + \eta^*\gamma^*) \tanh(s)] \sum_{n,m=0}^{\infty} (D_2^{n,m}(\tau) + D_6^{n+1,m+1}(\tau)) \right. \\
& + \sum_{n,m=0}^{\infty} \left[ \frac{\eta^{n+1}\gamma^n}{\sqrt{n!(n+1)!}} \frac{(\eta^*)^{m+1}(\gamma^*)^m}{\sqrt{m!(m+1)!}} \tanh^{n+m}(s) (D_1^{n,m}(\tau) + D_5^{n+1,m+1}(\tau)) \right. \\
& \left. + \frac{\eta^n\gamma^{n+2}}{\sqrt{n!(n+2)!}} \frac{(\eta^*)^m(\gamma^*)^{m+2}}{\sqrt{m!(m+2)!}} \tanh^{n+m}(s) D_4^{n+1,m+1}(\tau) \right] \\
& \left. + \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\eta^{n-1}\gamma^m}{\sqrt{(n-1)!n!}} \frac{(\eta^*)^{m-1}(\gamma^*)^m}{\sqrt{(m-1)!m!}} \tanh^{n+m}(s) D_3^{n,m}(\tau) \right\}.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Com o objetivo de verificar a variância nas quadraturas de posição do primeiro e segundo modo, plotamos um gráfico da função  $Q(\eta, \gamma)$  em função da posição do primeiro e segundo modo das quadraturas do campo ( $x_1$  e  $x_2$ ) fixando os momentos ( $p_1 = 0.1$  e  $p_2 = 0.1$ ), que está demonstrado na figura (5.9).

Nesta figura escolhemos os tempos de interação ( $\tau = 0,0$  e  $\tau = 9,05$ ), onde o emaranhamento entre os átomos é nulo e os tempos de interação ( $\tau = 1,3$  e  $\tau = 7,75$ ) onde o emaranhamento entre os átomos é máximo. Para o tempo de interação  $\tau = 0,0$  observamos o mesmo grau de correlação entre o primeiro e segundo modo do campo nas cavidades que o caso apresentado na figura (5.7), pois consideramos o mesmo estado inicial do campo em ambos os casos. Para os tempos de interação ( $\tau = 0,0$  e  $\tau = 9,05$ )

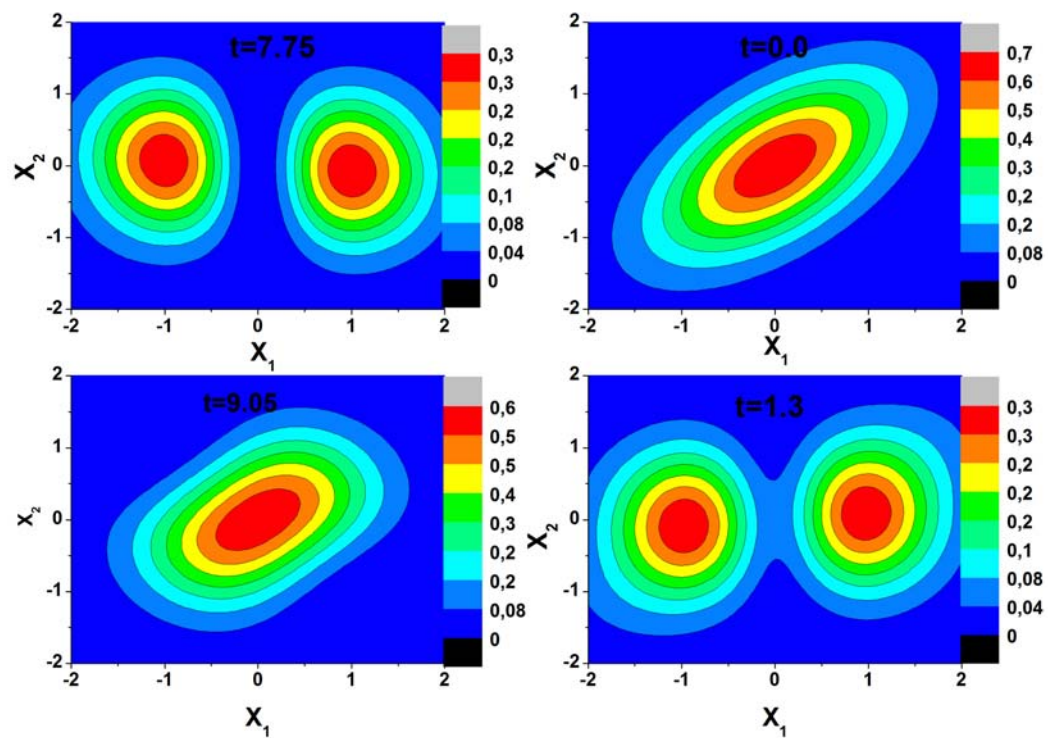


Figura 5.9: Função  $Q$  versus posição do primeiro modo do campo e posição do segundo modo do campo, considerando estado inicial atômico  $|\Phi_2\rangle$  e parâmetros de compressão  $s = 0,64$ .

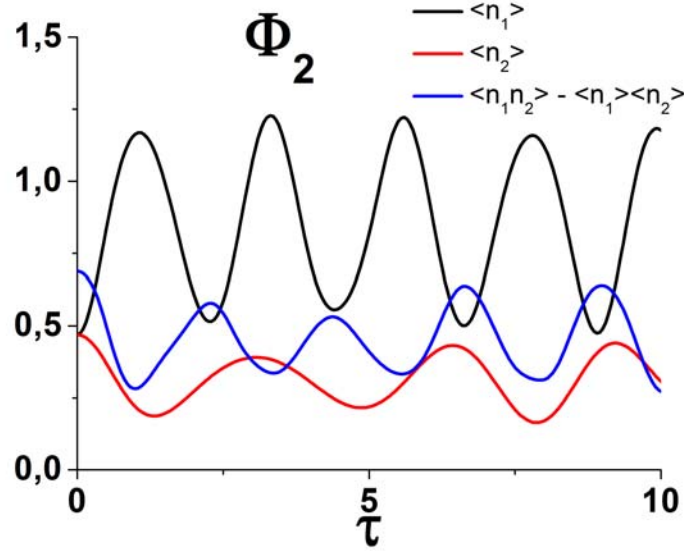


Figura 5.10: Número médio de fótons para primeira cavidade  $\langle n_1 \rangle$ , segunda cavidade  $\langle n_2 \rangle$  e cavidades conjuntas  $\langle n_1 n_2 \rangle$  em função do parâmetro de interação considerando parâmetro de compressão  $s = 0,64$ , para o estado inicial  $|\Phi_2\rangle$ .

onde o emaranhamento atômico é nulo observamos maior correlação entre os modos do campo indicados pela variância nas quadraturas. Para os tempos de interação ( $\tau = 1,3$  e  $\tau = 7,75$ ) onde o emaranhamento atômico é máximo observamos menor correlação entre os modos do campo nas cavidades.

Uma melhor análise do campo nas cavidades pode ser feita através do número médio de fótons na primeira e segunda cavidade.

Na figura (5.10) plotamos o número médio de fótons na primeira cavidade  $\langle n_1 \rangle$ , número médio de fóton na segunda cavidade  $\langle n_2 \rangle$  e  $\langle n_1 n_2 \rangle - \langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle$  que mede a correlação entre a intensidade do campo nas duas cavidades, para o estado inicial atômico  $|\Phi_2(0)\rangle$  considerando parâmetro de compressão  $s = 0,64$ . Verificamos que para o tempo de interação  $\tau = 0,0$ , existe o maior grau de correlação entre a intensidade do campo nas cavidades. Para o tempo de interação  $\tau = 9,05$  notamos que o sistema possui certo grau de correlação porém essa é menor que a observada em  $t = 0$ , isso acontece porque parte da correlação esta no sistema de átomos e não é observada pela negatividade global pois se trata de emaranhamento ligado. Para os tempos de interação ( $\tau = 1,3$  e  $\tau = 7,75$ )

verificamos menor grau de correlação entre a intensidade do campo, também observamos que o  $\langle n_1 \rangle > 1$ , devido ao estado inicial atômico permitir uma excitação no campo da cavidade, isso pode ser observado na figura (5.9) onde o estado do campo se divide em dois pacotes.

# Capítulo 6

## Dinâmica de emaranhamento do sistema composto-campo na cavidade em um estado aproximado

### 6.1 Introdução

No capítulo (5), realizamos um estudo da dinâmica de emaranhamento atômico para um sistema composto por cavidades espacialmente separadas que interagem com um estado comprimido de dois modos. O campo é enviado para as cavidades através de um divisor de feixe. O emaranhamento entre átomos foi calculado utilizando como medida a negatividade global [52], através do estado reduzido atômico. Não foi possível utilizar a negatividade global para quantificar o emaranhamento entre os modos do campo nas cavidades, pois estes possuem infinitos graus de liberdade. Existem algumas medidas para quantificação do emaranhamento para esse tipo de estado, que foram apresentadas no capítulo (3).

Nesse capítulo apresentamos uma aproximação para o estado do campo nas cavidades. Através dessa aproximação é possível calcular a negatividade global para quantificar o emaranhamento entre os modos do campo nas cavidades. Dessa maneira podemos verificar

de forma detalhada como acontece a transferência de emaranhamento do campo para os átomos.

Para demonstrarmos como é feito o truncamento para o estado do campo, necessitamos do estado inicial do campo nas cavidades que é dado por,

$$\hat{\rho}_{c_1 c_2} = \left( \frac{1}{\cosh s} \right)^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} \sum_{k,l=0}^{\min[n,m]} (\tanh s)^{n+m} G_{kl}^{nm}(\theta) \times |n-k, n-l\rangle \langle m-k, m-l| \quad (6.1)$$

onde

$$G_{kl}^{nm}(\theta) = C_k^n(\theta) C_k^m(\theta) C_l^n(\theta) C_l^m(\theta), \quad (6.2)$$

com

$$C_k^n(\theta) = \sqrt{\frac{n!}{k!(n-k)!}} \cos^k \frac{\theta}{2} \sin^{n-k} \frac{\theta}{2}. \quad (6.3)$$

O grau de mistura do estado campo, Eq.(6.1), nas cavidades é definido pela refletividade do divisor de feixe descrita pelo parâmetro  $\theta$ . Quando usamos um divisor de feixe com refletividade zero, temos um valor de  $(\theta = \pi)$ , pois a refletividade do divisor de feixe é dada por  $r = \cos(\theta/2)$ . Para  $(\theta = \pi)$  na Eq (6.3), temos  $C_k^n(\theta) = 0$  para qualquer  $k \neq 0$ , e  $C_k^n(\theta) = 1$  para  $k = 0$ . Quando utilizamos um divisor de feixe com refletividade zero temos o campo nas cavidades em um estado puro,

$$|\xi\rangle_{c_1 c_2} = \left( \frac{1}{\cosh s} \right) \sum_{n=0}^{\infty} (\tanh s)^n |n\rangle_{C_1} |n\rangle_{C_2}. \quad (6.4)$$

A função de onda que descreve o estado do campo nas cavidades Eq. (6.4), representa um estado do vácuo comprimido de dois modos, onde cada modo do campo esta localizado em uma cavidade, ou seja, o primeiro modo do campo está localizado na cavidade do laboratório de Alice e o segundo modo do campo esta localizado na cavidade localizada no laboratório de Bob.

No capítulo (5) verificamos que o parâmetro de compressão que nos fornece o maior

grau de emaranhamento entre os átomos é  $s = 0,64$ . Substituindo esse valor de parâmetro de compressão na Eq. (6.4) e expandindo, obtemos,

$$|\xi'\rangle_{c_1c_2} = 0.825 |00\rangle + 0.466 |11\rangle + 0.263 |22\rangle + 0.149 |33\rangle + 0.084 |44\rangle + \dots \quad (6.5)$$

Analisando a Eq. (6.5), verificamos que a probabilidade de ocupação para os estados  $|00\rangle$ ,  $|11\rangle$  e  $|22\rangle$ , são (0,68), (0,22) e (0,07), conseqüentemente temos de 97% chance de em uma medida encontramos o campo nas cavidades em um desses 3 estados. Já as probabilidades de ocupação para os estados  $|33\rangle$  e  $|44\rangle$ , são respectivamente (0,02) e (0,007), configurando um total de 2,7% para estes dois estados. Para medirmos os estados do campo na cavidade com número de fótons maiores que 4, teremos uma probabilidade de 0,3%, que é um valor relativamente pequeno se comparado com os 97% dos estados  $|00\rangle$ ,  $|11\rangle$  e  $|22\rangle$ .

Uma possível aproximação para o estudo da dinâmica de emaranhamento para do sistema apresentado no capítulo (4), é utilizar o campo nas cavidades no estado da Eq. (6.5) expandido até ( $n = 4$ ) e normalizado, de modo que,

$$|\xi''\rangle_{c_1c_2} = 0.828 |00\rangle + 0.467 |11\rangle + 0.264 |22\rangle + 0.149 |33\rangle + 0.084 |44\rangle . \quad (6.6)$$

## 6.2 Emaranhamento dos átomos nas cavidades distintas.

Nessa seção estudaremos a dinâmica de emaranhamento para um sistema composto por duas cavidades espacialmente separadas onde a cavidade um está localizada no laboratório de Alice e possui dois átomos aprisionados e a cavidade dois localizada no laboratório de Bob possui um único átomo aprisionado esses átomos interagem com o campo na cavidade no estado número Eq. (6.6). O estudo da dinâmica de emaranhamento é análoga a do

capítulo anterior, a única diferença é o estado do campo nas cavidades.

### 6.2.1 Estado inicial $|\Phi_1^\alpha(0)\rangle$

Primeiramente verificaremos a dinâmica para os átomos preparados no estado  $|\Phi_1^{\alpha=1}(0)\rangle$  Eq. (4.45), este estado corresponde a um estado inicial atômico separável com os três átomos no estado fundamental,

$$|\Phi_1^\alpha(0)\rangle = |2, -2\rangle_{A_1 A_2} |1, -1\rangle_B |\xi''\rangle_{c_1 c_2} \quad (6.7)$$

A ação do operador de evolução da Eq. (4.38) sobre o estado inicial Eq. (6.7), nos fornece a evolução temporal para o sistema composto, onde o operador de estado total após o tempo de interação  $\tau$ , é dado por

$$\hat{\rho}^{(1)}(\tau) = |\Phi_1^\alpha(\tau)\rangle \langle \Phi_1^\alpha(\tau)|. \quad (6.8)$$

O estado reduzido para o sistema atômico é calculado através do traço sobre os graus de liberdade do campo na Eq. (6.8), como

$$\hat{\rho}_{A_1 A_2 B}^{(1)} = \text{Tr}_{C_1 C_2} [\rho^{(1)}(\tau)]. \quad (6.9)$$

A matriz densidade reduzida  $\rho_{A_1 A_2 B}^{(1)}(\tau)$ , na base acoplada  $|2, -2\rangle_1 |1, -1\rangle_2$ ,  $|2, 0\rangle_1 |1, -1\rangle_2$ ,  $|2, 2\rangle_1 |1, -1\rangle_2$ ,  $|2, -2\rangle_1 |1, 1\rangle_2$ ,  $|2, 0\rangle_1 |1, 1\rangle_2$ ,  $|2, 2\rangle_1 |1, 1\rangle_2$ , tem forma semelhante ao operador densidade reduzido atômico, Eq (4.84), e seus elementos de matriz, são escritos como,

$$\rho_{11}^{(1)} = \sum_{n=0}^4 (a_n)^2 (\cos \sqrt{n\tau})^2 \frac{[n \cos \sqrt{(4n-2)\tau} + n - 1]^2}{(2n-1)^2}, \quad (6.10)$$

$$\rho_{22}^{(1)} = \sum_{n=0}^4 (a_n)^2 n (\cos \sqrt{n\tau})^2 \frac{(\sin \sqrt{(4n-2)\tau})^2}{(2n-1)}, \quad (6.11)$$

$$\rho_{33}^{(1)} = \sum_{n=0}^4 (a_n)^2 (n^2 - n) (\cos \sqrt{n}\tau)^2 \frac{[\cos \sqrt{(4n-2)\tau} - 1]^2}{(2n-1)^2}, \quad (6.12)$$

$$\rho_{44}^{(1)} = \sum_{n=0}^4 (a_n)^2 (\sin \sqrt{n}\tau)^2 \frac{[n \cos \sqrt{(4n-2)\tau} + n - 1]^2}{(2n-1)^2}, \quad (6.13)$$

$$\rho_{55}^{(1)} = \sum_{n=0}^4 (a_n)^2 n (\sin \sqrt{n}\tau)^2 \frac{(\sin \sqrt{(4n-2)\tau})^2}{(\sqrt{(2n-1)})^2}, \quad (6.14)$$

$$\rho_{66}^{(1)} = \sum_{n=0}^4 (a_n)^2 (n^2 - n) (\sin \sqrt{n}\tau)^2 \frac{[\cos \sqrt{(4n-2)\tau} - 1]^2}{(2n-1)^2}, \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} \rho_{15}^{(1)} = & -a_0 a_1 \sin \tau \sin(\sqrt{2}\tau) - a_1 a_2 \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \tau \cos(\sqrt{2}\tau) \sin(\sqrt{2}\tau) \sin(\sqrt{6}\tau) \\ & - a_2 a_3 \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{\cos(\sqrt{2}\tau)}{3} [2 \cos(\sqrt{6}\tau) + 1] \sin(\sqrt{3}\tau) \sin(\sqrt{10}\tau) \\ & - a_3 a_4 \frac{\cos(\sqrt{3}\tau)}{5} [3 \cos(\sqrt{10}\tau) + 2] \frac{2 \sin(2\tau)}{\sqrt{5}} \sin(\sqrt{14}\tau), \end{aligned} \quad (6.16)$$

e

$$\begin{aligned} \rho_{26}^{(1)} = & -a_1 a_2 \frac{\sqrt{2}}{3} \cos \tau \sin(\sqrt{2}\tau) \sin(\sqrt{2}\tau) [\cos(\sqrt{6}\tau) - 1] \\ & - a_2 a_3 \sqrt{\frac{2}{3}} \cos(\sqrt{2}\tau) \sin(\sqrt{6}\tau) \frac{\sqrt{6} \sin(\sqrt{3}\tau)}{5} [\cos(\sqrt{10}\tau) - 1] \\ & - a_3 a_4 \sqrt{\frac{3}{5}} \cos(\sqrt{3}\tau) \sin(\sqrt{10}\tau) \frac{\sqrt{12} \sin(2\tau)}{7} [\cos(\sqrt{14}\tau) - 1]. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Para calcularmos o grau de emaranhamento do qubit  $B$  com o par  $A_1 A_2$  utilizamos a negatividade global [52], que tem expressão analítica análoga a Eq. (5.2). O resultados numéricos para  $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^{(1)T_{A_1 A_2}})$  estão representados na figura (6.1).

Comparando o gráfico da figura (6.1) que possui o campo na cavidade em um estado aproximado Eq.(6.5), com o resultado apresentado na figura (5.6), onde temos o campo em um estado comprimido de dois modos Eq. (6.1), verificamos total correspondência

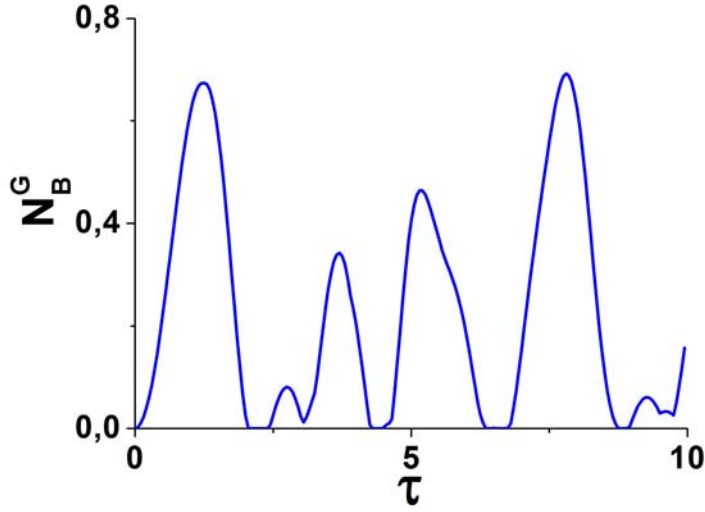


Figura 6.1: Negatividade global  $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^{(1)})$ , considerando campo na cavidade no estado aproximado  $|\xi''\rangle$ , em função do parâmetro de interação  $\tau$ .

entre as duas figuras. Isso mostra que a aproximação usada para o estado do campo nas cavidades, configura um bom artifício para o estudo da dinâmica de emaranhamento do sistema atômico. Podemos observar de outra forma que o estado aproximado nos fornece um bom mecanismo para o estudo do emaranhamento do sistema atômico. Para isso devemos comparar os elementos de matriz do operador densidade reduzido em função do parâmetro de interação, para o caso em que o sistema possui o estado do campo aproximado Eq. (6.9) e quando o sistema possui os átomos interagindo com o campo no estado vácuo comprimido de dois modos Eq. (4.51).

Comparando a figura (6.2) que possui o campo na cavidade no estado aproximado Eq. (7.15), com a figura (6.3) onde os átomos interagem com um campo no estado do vácuo comprimido de dois modos com parâmetro de compressão ( $s = 0.64$ ). Verificamos correspondência nos elementos da diagonal principal que representam a probabilidade de ocupação ( $\rho_{11}^{(1)}$ ,  $\rho_{22}^{(1)}$ ,  $\rho_{33}^{(1)}$ ,  $\rho_{44}^{(1)}$ ,  $\rho_{55}^{(1)}$  e  $\rho_{66}^{(1)}$ ) e também nos elementos de fora da diagonal ( $\rho_{15}^{(1)}$  e  $\rho_{26}^{(1)}$ ). Também observamos que o máximo emaranhamento  $\tau = 1.25$  ocorre quando temos um pico no elemento  $\rho_{55} = 0,19$ . A morte súbita de emaranhamento ocorre quando os elementos  $\rho_{33} = 0,001$  e  $\rho_{44} = 0,15$  para tempo de interação  $\tau = 2,3$ , esses elementos

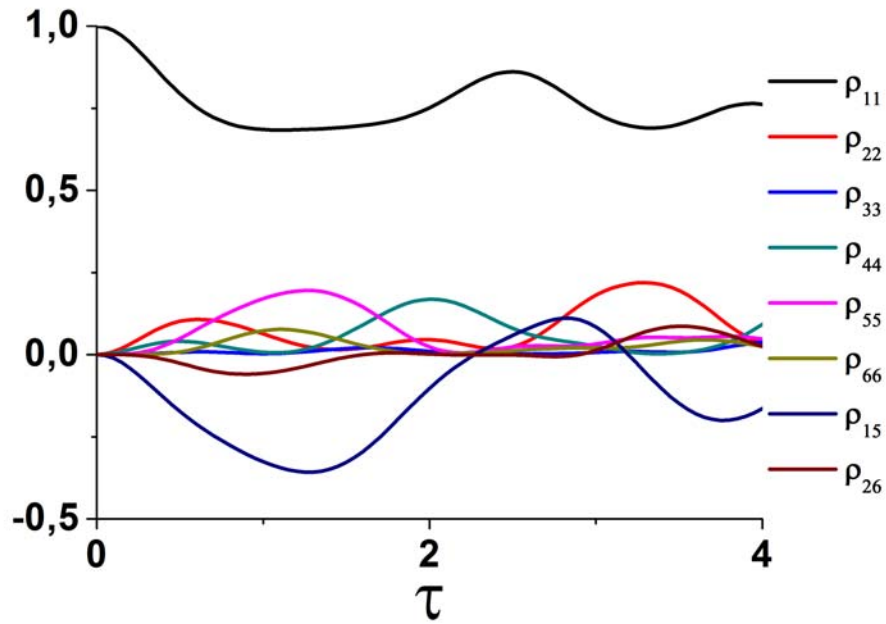


Figura 6.2: Probabilidade de ocupação  $\rho_{11}^{(1)}$ ,  $\rho_{22}^{(1)}$ ,  $\rho_{33}^{(1)}$ ,  $\rho_{44}^{(1)}$ ,  $\rho_{55}^{(1)}$ ,  $\rho_{66}^{(1)}$  e elementos fora da diagonal  $\rho_{15}^{(1)}$  e  $\rho_{26}^{(1)}$ , considerando o campo na cavidade no estado aproximado  $|\xi''\rangle$ , versus parâmetro de interação  $\tau$ .

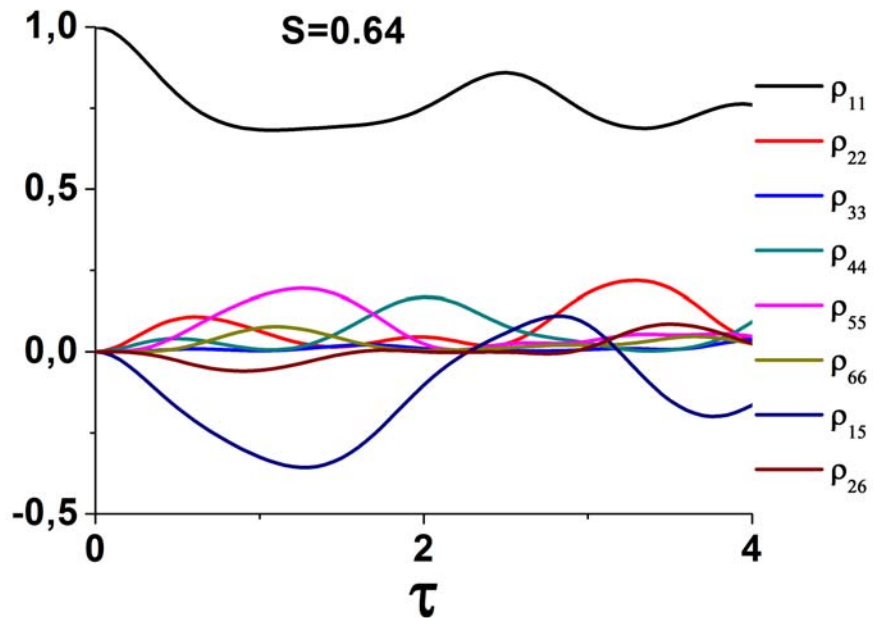


Figura 6.3: Probabilidade de ocupação  $\rho_{11}^{\Phi_1}$ ,  $\rho_{22}^{\Phi_1}$ ,  $\rho_{33}^{\Phi_1}$ ,  $\rho_{44}^{\Phi_1}$ ,  $\rho_{55}^{\Phi_1}$ ,  $\rho_{66}^{\Phi_1}$  e elementos fora da diagonal  $\rho_{15}^{\Phi_1}$  e  $\rho_{26}^{\Phi_1}$ , considerando parâmetro de compressão  $s = 0.64$ , versus parâmetro de interação  $\tau$ .

configuram ruído quântico.

### 6.2.2 Estado inicial $|\Phi_2(0)\rangle$

Considerando os átomos preparados no estado  $|\Phi_2(0)\rangle$  Eq. (4.81), esse estado corresponde a um estado maximamente emaranhando entre os qubits localizados na cavidade do laboratório de Alice e o qubit do laboratório de Bob se encontra no estado fundamental. O campo nas cavidades está no estado número dado pela Eq. (6.6),

$$|\Phi_2(0)\rangle = |2, 0\rangle_{A_1 A_2} |1, -1\rangle_B |\xi''\rangle_{c_1 c_2} \quad (6.18)$$

A evolução temporal para o sistema de átomos e campo é obtida através da ação do operador de evolução Eq. (4.38), sobre o estado  $|\Phi_2(0)\rangle$  com isso temos a evolução temporal do sistema composto, onde o operador de estado total após o tempo de interação  $\tau$ , é dado por

$$\hat{\rho}^{(2)}(\tau) = |\Phi_2(\tau)\rangle \langle \Phi_2(\tau)|. \quad (6.19)$$

O estado reduzido para o sistema atômico é calculado através do traço sobre os graus de liberdade do campo na Eq. (6.19), como  $\hat{\rho}_{A_1 A_2 B}^{(1)} = \text{Tr}_{C_1 C_2} [\rho^{(1)}(\tau)]$ , e tem forma semelhante ao operador densidade reduzido Eq. (4.84), e seus elementos de matriz  $\rho_{A_1 A_2 B}^{(2)}(\tau)$ , são dados por,

$$\rho_{11}^{(2)} = \sum_{n=0}^4 (a_n)^2 \frac{n+1}{2n+1} \cos^2(\sqrt{n}\tau) \sin^2(\sqrt{(4n+2)}\tau), \quad (6.20)$$

$$\rho_{22}^{(2)} = \sum_{n=0}^4 (a_n)^2 \cos^2(\sqrt{n}\tau) \cos^2(\sqrt{(4n+2)}\tau), \quad (6.21)$$

$$\rho_{33}^{(2)} = \sum_{n=0}^4 (a_n)^2 \frac{n}{2n+1} \cos^2(\sqrt{n}\tau) \sin^2(\sqrt{(4n+2)}\tau), \quad (6.22)$$

$$\rho_{44}^{(2)} = \sum_{n=0}^4 (a_n)^2 \frac{n+1}{2n+1} \sin^2(\sqrt{n}\tau) \sin^2(\sqrt{(4n+2)}\tau), \quad (6.23)$$

$$\rho_{55}^{(2)} = \sum_{n=0}^4 (a_n)^2 \sin^2(\sqrt{n}\tau) \cos^2(\sqrt{(4n+2)}\tau), \quad (6.24)$$

$$\rho_{66}^{(2)} = \sum_{n=0}^4 (a_n)^2 \frac{n}{2n+1} \sin^2(\sqrt{n}\tau) \sin^2(\sqrt{(4n+2)}\tau), \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} \rho_{15}^{(2)} &= a_0 a_1 \sin(\sqrt{2}\tau) \sin(\tau) \cos(\sqrt{6}\tau) \\ &+ a_1 a_2 \sqrt{\frac{2}{3}} (\cos \tau) \sin(\sqrt{6}\tau) \sin(\sqrt{2}\tau) \cos(\sqrt{10}\tau) \\ &+ a_2 a_3 \sqrt{\frac{3}{5}} \cos(\sqrt{2}\tau) \sin(\sqrt{10}\tau) \sin(\sqrt{3}\tau) \cos(\sqrt{14}\tau) \\ &- a_3 a_4 \sqrt{\frac{4}{7}} (\cos \sqrt{3}\tau) \sin(\sqrt{14}\tau) \sin(2\tau) \cos(\sqrt{18}\tau), \end{aligned} \quad (6.26)$$

e

$$\begin{aligned} \rho_{26}^{(2)} &= \frac{-a_0 a_1}{\sqrt{3}} \cos(\sqrt{2}\tau) \sin(\tau) \sin(\sqrt{6}\tau) \\ &- a_1 a_2 \sqrt{\frac{2}{5}} \cos(\tau) \cos(\sqrt{6}\tau) \sin(\sqrt{2}\tau) \sin(\sqrt{10}\tau) \\ &- a_2 a_3 \sqrt{\frac{3}{7}} \cos(\sqrt{2}\tau) \cos(\sqrt{10}\tau) \sin(\sqrt{3}\tau) \sin(\sqrt{14}\tau) \\ &- a_3 a_4 \frac{2}{\sqrt{9}} \cos(\sqrt{3}\tau) \cos(\sqrt{14}\tau) \sin(2\tau) \sin(\sqrt{18}\tau). \end{aligned} \quad (6.27)$$

A expressão para negatividade global entre o qubit  $B$  e o par  $A_1 A_2$  é análoga a Eq.

(5.2). Resultados numéricos para a negatividade global  $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^{(2)})$  estão representados na figura (6.4),

Na figura (6.4) verificamos correspondência entre os resultados numéricos obtidos utilizando estado do campo aproximado Eq. (6.6), com os resultados obtidos na figura (5.6). Mesmo havendo modificação do estado inicial atômico a aproximação permanece válida.

Para melhor entendimento da dinâmica do sistema comparamos a probabilidade de

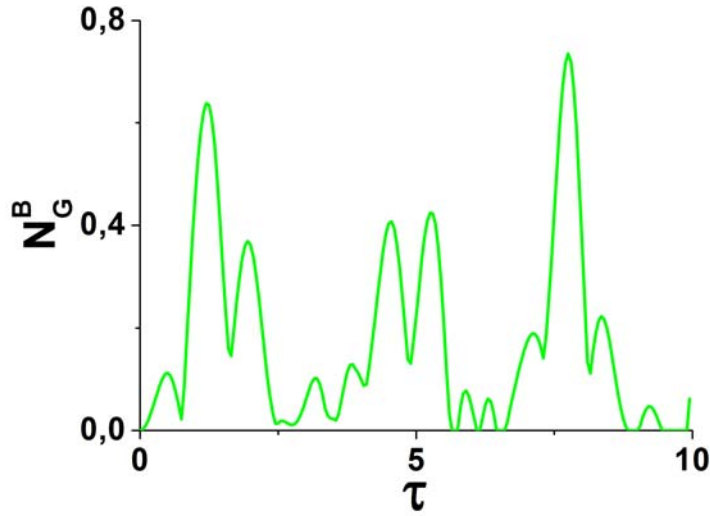


Figura 6.4: Negatividade global  $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^{(2)})$ , considerando campo na cavidade no estado aproximado  $|\xi''\rangle$ , em função do parâmetro de interação  $\tau$ .

ocupação para o estado aproximado e estado vácuo comprimido de dois modos que estão apresentados nas figuras (6.5) e (6.6).

Igualmente às figuras (6.2) e (6.3), nas figuras (6.5) e (6.6) os elementos da diagonal principal e fora da diagonal são correspondentes para o estado do campo aproximado e estado campo vácuo comprimido de dois modos. O máximo emaranhamento para  $\tau = 1.3$  ocorre quando temos um pico para a probabilidade de ocupação  $\rho_{55} = 0.22$ . Não ocorre morte súbita de emaranhamento para tempo de interação  $\tau < 4$ , devido à contribuição de emaranhamento dos elementos de matriz  $\rho_{22}$  e  $\rho_{66}$ .

## 6.3 Emaranhamento do campo nas cavidades distintas

### 6.3.1 Estado inicial atômico $|\Phi_1^\alpha(0)\rangle$

Essa seção tem como objetivo estudo da dinâmica de emaranhamento entre os modos do campo nas cavidades para o estado aproximado, para isso necessitamos do operador

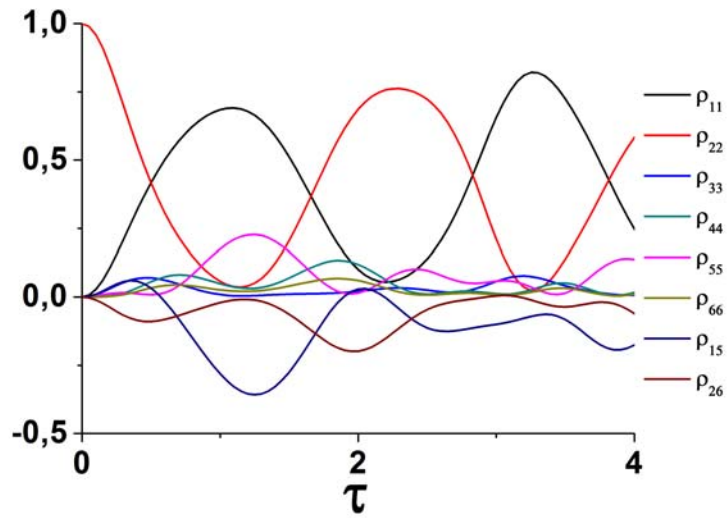


Figura 6.5: Probabilidade de ocupação  $\rho_{11}^{(2)}$ ,  $\rho_{22}^{(2)}$ ,  $\rho_{33}^{(2)}$ ,  $\rho_{44}^{(2)}$ ,  $\rho_{55}^{(2)}$ ,  $\rho_{66}^{(2)}$  e elementos fora da diagonal  $\rho_{15}^{(2)}$  e  $\rho_{26}^{(2)}$ , considerando o campo na cavidade no estado aproximado  $|\xi''\rangle$ , versus parâmetro de interação  $\tau$ .

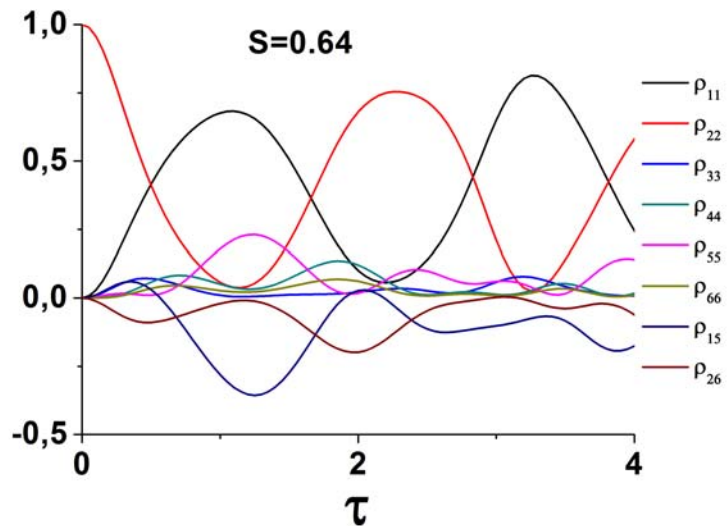


Figura 6.6: Probabilidade de ocupação  $\rho_{11}^{\Phi_2}$ ,  $\rho_{22}^{\Phi_2}$ ,  $\rho_{33}^{\Phi_2}$ ,  $\rho_{44}^{\Phi_2}$ ,  $\rho_{55}^{\Phi_2}$ ,  $\rho_{66}^{\Phi_2}$  e elementos fora da diagonal  $\rho_{15}^{\Phi_2}$  e  $\rho_{26}^{\Phi_2}$ , considerando parâmetro de compressão  $s = 0.64$ , versus parâmetro de interação  $\tau$ .

densidade reduzido do campo nas cavidades  $\rho_{C_1 C_2}^{(1)}(\tau)$ , que é obtido a partir do traço sobre os graus de liberdade dos átomos das cavidade. Considerando que os átomos e o campo na cavidade estão no estado  $\rho^{(1)}(\tau)$  Eq. (6.8), no qual este estado representa a evolução temporal do sistema para o caso em que os três átomos estão no estado fundamental e o campo na cavidade está no estado aproximado Eq. (7.15), o operador densidade reduzido para o campo é dado por,

$$\rho_{C_1 C_2}^{(1)}(\tau) = Tr_{A_1 A_2 B} [\rho^{(1)}(\tau)]. \quad (6.28)$$

O estado reduzido do campo pode ser escrito como,

$$\begin{aligned} \rho_{C_1 C_2}^{(1)}(\tau) = & \sum_{m,n=0}^4 [(A_1^{n,m}(\tau) + A_5^{n+1,m+1}(\tau)) |n\rangle |n\rangle \langle m| \langle m|] \\ & + \sum_{m,n=1}^4 [(A_2^{n,m}(\tau) + A_6^{n+1,m+1}(\tau)) |n-1\rangle |n\rangle \langle m-1| \langle m| \\ & + A_4^{n,m}(\tau) |n\rangle |n-1\rangle \langle m| \langle m-1|] \\ & + \sum_{m,n=2}^4 [A_3^{n,m}(\tau) |n-2\rangle |n\rangle \langle m-2| \langle m|], \end{aligned} \quad (6.29)$$

onde

$$\begin{aligned} A_1^{n,m}(\tau) = & (a_n a_m) (\cos \sqrt{n}\tau) \frac{[n \cos \sqrt{(4n-2)}\tau + n-1]}{(2n-1)} \\ & (\cos \sqrt{m}\tau) \frac{[m \cos \sqrt{(4m-2)}\tau + m-1]}{(2m-1)}, \end{aligned} \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned} A_2^{n,m}(\tau) = & (a_n a_m) n \cos(\sqrt{n}\tau) \frac{\sin(\sqrt{(4n-2)}\tau)}{\sqrt{(2n-1)}} \\ & m \cos(\sqrt{m}\tau) \frac{\sin(\sqrt{(4m-2)}\tau)}{\sqrt{(2m-1)}} \end{aligned} \quad (6.31)$$

$$A_3^{n,m}(\tau) = (a_n a_m) \sqrt{(n^2 - n)} \cos(\sqrt{n}\tau) \frac{[\cos(\sqrt{(4n-2)}\tau) - 1]}{(2n-1)} \quad (6.32)$$

$$\sqrt{(m^2 - m)} \cos(\sqrt{m}\tau) \frac{[\cos(\sqrt{(4m-2)}\tau) - 1]}{(2m-1)}$$

$$A_4^{n,m}(\tau) = \sum_{m,n=1}^4 (a_n a_m) (\sin \sqrt{n}\tau) \frac{[n \cos \sqrt{(4n-2)}\tau + n - 1]}{(2n-1)} \quad (6.33)$$

$$\sin(\sqrt{m}\tau) \frac{[m \cos(\sqrt{(4m-2)}\tau) + m - 1]}{(2m-1)}$$

$$A_5^{n+1,m+1}(\tau) = (a_{n+1} a_{m+1}) (n+1) \sin(\sqrt{(n+1)}\tau) \frac{\sin(\sqrt{(4n+2)}\tau)}{\sqrt{(2n+1)}} \quad (6.34)$$

$$(m+1) \left( \sin \sqrt{(m+1)}\tau \right) \frac{\sin(\sqrt{(4m+2)}\tau)}{\sqrt{(2m+1)}}$$

$$A_6^{n+1,m+1}(\tau) = (a_{n+1} a_{m+1}) \sqrt{(n^2 + n)} \sin(\sqrt{(n+1)}\tau) \frac{[\cos \sqrt{(4n+2)}\tau - 1]}{(2n+1)} \quad (6.35)$$

$$\sqrt{(m^2 + m)} \sin(\sqrt{(m+1)}\tau) \frac{[\cos \sqrt{(4m+2)}\tau - 1]}{(2m+1)}$$

Utilizando-se do operador densidade reduzido  $\rho_{C_1 C_2 B}^{(1)}(\tau)$  Eq. (6.29), calculamos a negatividade global [52], para verificar o emaranhamento entre os modos do campo eletromagnético nas cavidades  $C_1$  e  $C_2$ .

Os resultados numéricos para a negatividade  $N_G^{C_1}(\rho_{C_1 C_2}^{(1)})$  estão representados na figura (6.7).

A figura (6.7), demonstra que os modos do estado campo nas cavidades tem emaran-

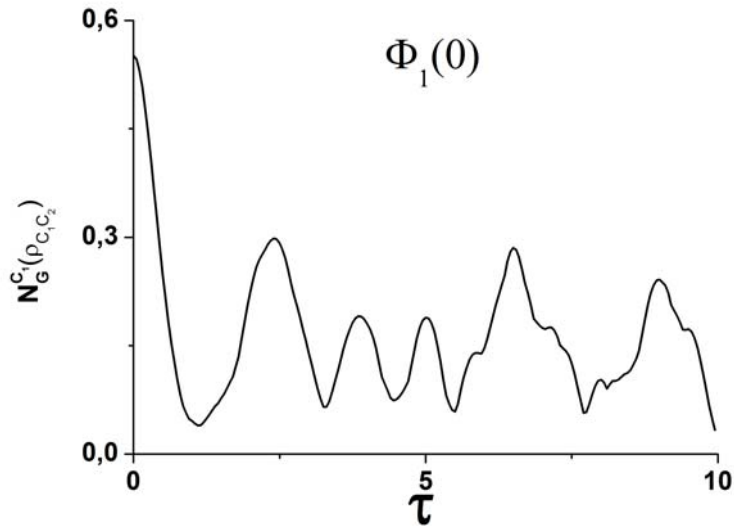


Figura 6.7: Negatividade global  $N_G^{C_1}(\rho_{C_1 C_2}^{(1)})$ , considerando o campo nas cavidades no estado aproximado  $|\xi''\rangle$ , em função do parâmetro de interação  $\tau$ .

hamento máximo  $N_G^{C_1} = 0.55$ , para tempo de interação zero. A máxima correlação entre os modos do campo ocorre enquanto não existe interação com os átomos nas cavidade ( $t = 0$ ). Para o tempo de interação ( $\tau = 1.1$ ) temos um mínimo de emaranhamento ( $N_G^{C_1} = 0.04$ ) indicando que possivelmente as correlações entre os modos do campo foi transferida para os átomos. Para ( $\tau = 2,25$ ) o sistema retoma parcialmente o emaranhamento ( $N_G^{C_1} = 0.3$ ), porém para o tempo de interação ( $\tau < 10$ ) o emaranhamento do campo não retoma o valor inicial ( $N_G^{C_1} = 0.55$ ).

### 6.3.2 Estado inicial atômico $|\Phi_2(0)\rangle$

Considerando que os átomos e o campo na cavidade estão no estado  $\rho^{(2)}(\tau)$  Eq. (6.19), este estado representa a evolução temporal do sistema para o caso em que os dois átomos localizados na cavidade do laboratório de Alice foram preparados no estado de Bell ( $(|01\rangle + |10\rangle)/\sqrt{2}$ ), e o átomo aprisionado na cavidade localizada no laboratório de Bob está no estado fundamental. O campo nas cavidades está no estado aproximado Eq. (7.15). Deste modo o operador densidade reduzido para o campo pode ser obtido de

forma semelhante a Eq. (6.28), através do traço sobre os graus de liberdade do sistema atômico, como,

$$\begin{aligned}
\rho_{C_1 C_2}^{(2)}(\tau) &= \sum_{m,n=0}^4 [(B_2^{n,m}(\tau) + B_6^{n+1,m+1}(\tau)) |n\rangle |n\rangle \langle m| \langle m|] \\
&+ \sum_{m,n=0}^4 [(B_1^{n,m}(\tau) + B_5^{n+1,m+1}(\tau)) |n+1\rangle |n\rangle \langle m+1| \langle m|] \\
&+ \sum_{m,n=1}^4 [B_3^{n,m}(\tau) |n-1\rangle |n\rangle \langle m-1| \langle m| \\
&+ B_5^{n,m}(\tau) |n+1\rangle |n-1\rangle \langle m+1| \langle m-1|]
\end{aligned} \tag{6.36}$$

onde

$$\begin{aligned}
B_1^{n,m}(\tau) &= (a_n a_m) \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} \cos(\sqrt{n}\tau) \sin(\sqrt{(4n+2)}\tau) \\
&\sqrt{\frac{m+1}{2m+1}} \cos(\sqrt{m}\tau) \sin(\sqrt{(4m+2)}\tau)
\end{aligned} \tag{6.37}$$

$$\begin{aligned}
B_2^{n,m}(\tau) &= (a_n a_m) \cos(\sqrt{n}\tau) \cos(\sqrt{(4n+2)}\tau) \\
&\cos(\sqrt{m}\tau) \cos(\sqrt{(4m+2)}\tau)
\end{aligned} \tag{6.38}$$

$$\begin{aligned}
B_3^{n,m}(\tau) &= (a_n a_m) \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \cos(\sqrt{n}\tau) \sin(\sqrt{(4n+2)}\tau) \\
&\sqrt{\frac{m}{2m+1}} \cos(\sqrt{m}\tau) \sin(\sqrt{(4m+2)}\tau)
\end{aligned} \tag{6.39}$$

$$\begin{aligned}
B_4^{n,m}(\tau) &= (a_n a_m) \sqrt{\frac{n+1}{2n+1}} \sin(\sqrt{n}\tau) \sin(\sqrt{(4n+2)}\tau) \\
&\sqrt{\frac{m+1}{2m+1}} \sin(\sqrt{m}\tau) \sin(\sqrt{(4m+2)}\tau)
\end{aligned} \tag{6.40}$$

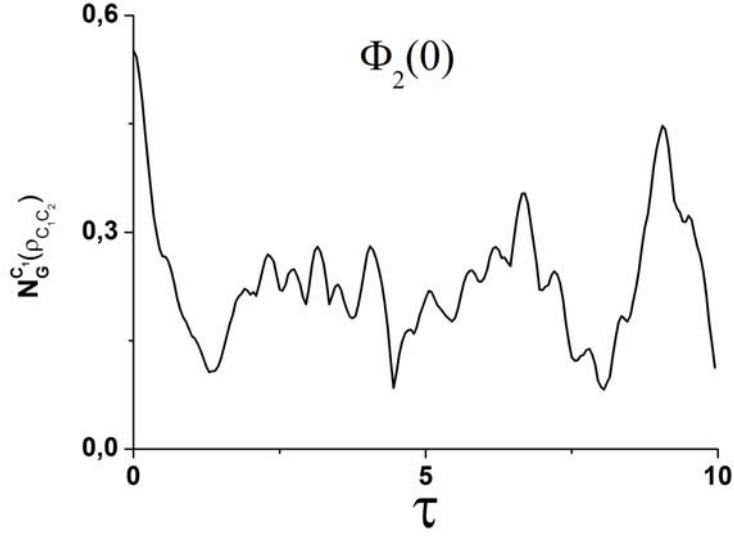


Figura 6.8: Negatividade global  $N_G^{C_1}(\rho_{C_1 C_2}^{(2)})$ , considerando campo na cavidade no estado aproxima do  $|\xi''\rangle$ , em função do parâmetro de interação  $\tau$ .

$$B_5^{n+1, m+1}(\tau) = (a_{n+1} a_{m+1}) \sin\left(\sqrt{(n+1)}\tau\right) \cos\left(\sqrt{(4n+6)}\tau\right) \sin\left(\sqrt{(m+1)}\tau\right) \cos\left(\sqrt{(4m+6)}\tau\right) \quad (6.41)$$

$$B_6^{n+1, m+1}(\tau) = (a_{n+1} a_{m+1}) \sqrt{\frac{n+1}{2n+3}} \sin\left(\sqrt{(n+1)}\tau\right) \sin\left(\sqrt{(4n+6)}\tau\right) \sqrt{\frac{n+1}{2n+3}} \sin\left(\sqrt{(n+1)}\tau\right) \sin\left(\sqrt{(4n+6)}\tau\right) \quad (6.42)$$

Utilizando-se do operador densidade reduzido  $\rho_{C_1 C_2 B}^{(2)}(\tau)$  equação (6.36), Calculamos a negatividade global  $N_G^{C_1}(\rho_{C_1 C_2}^{(2)})$  para verificar o emaranhamento entre o campo nas cavidades. Os resultados numéricos para a negatividade  $N_G^{C_1}(\rho_{C_1 C_2}^{(2)})$  estão representados na figura (6.8).

Similarmente à figura (6.7), na figura (6.8) temos o mesmo valor de negatividade para os modos do campo nas cavidades, ( $N_G^{C_1} = 0.55$ ), já que o sistema possui inicialmente o mesmo estado do campo, o que difere é o estado inicial atômico. Percebemos que os modos do campo perdem correlação, e temos um mínimo da negatividade ( $N_G^{C_1} = 0.1$ )

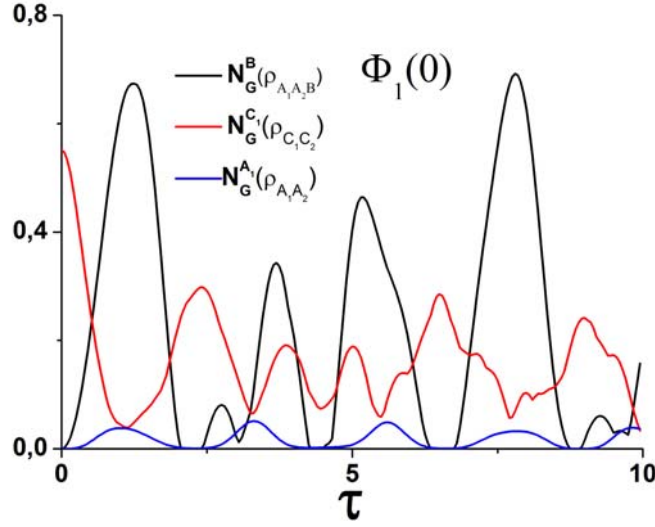


Figura 6.9: Negatividades globais  $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^{(1)})$ ,  $N_G^{C_1}(\rho_{C_1 C_2}^{(1)})$  e  $N_G^{A_1}(\rho_{A_1 A_2}^{(1)})$  considerando campo na cavidade no estado aproximado  $|\xi''\rangle$ , em função do parâmetro de interação  $\tau$ .

para ( $\tau = 1.3$ ). O menor valor da negatividade ocorre para ( $\tau = 8.05$ ) e tem como valor ( $N_G^{C_1} = 0.08$ ). Verificamos que o emaranhamento do campo na figura (6.8), não oscila da mesma forma que na figura (6.7). Isso ocorre devido ao emaranhamento inicial dos átomos na cavidade  $C_1$  do laboratório de Alice.

## 6.4 Transferência de emaranhamento

Para verificar de uma forma mais detalhada de que maneira se dá a transferência de emaranhamento, devemos analisar o emaranhamento para o estado reduzido do campo e o estado reduzido dos átomos, que está apresentado nas figuras (6.9) e (6.10).

Considerando o sistema no estado da Eq. (7.15), na figura (6.9) temos a negatividade global  $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^{T_{A_1 A_2}})$  utilizada para verificar a correlação entre o átomo  $B$  e os átomos  $A_1$  e  $A_2$ . Para verificar a correlação entre os átomos na cavidade de Alice, calculamos a  $N_G^{A_1}(\rho_{A_1 A_2}^{T_{A_2}})$ . O emaranhamento entre os modos do campo nas cavidades espacialmente separadas é calculado através da  $N_G^{C_1}(\rho_{C_1 C_2}^{T_{C_2}})$ . Para o tempo inicial ( $\tau = 0$ ), existe apenas emaranhamento entre os modos do campo, os átomos encontram-se em

um estado separável pois,  $N_G^B(\rho_{A_1A_2B}^{TA_1A_2}) = N_G^{A_1}(\rho_{A_1A_2}^{TA_2}) = 0$ . Para ( $\tau = 1.25$ ), observa-se um máximo na negatividade  $N_G^B(\rho_{A_1A_2B}^{TA_1A_2}) = 0.67$ , que mede o emaranhamento entre o átomo  $B$  e o par  $A_1A_2$ . Para esse mesmo tempo de interação temos a negatividade  $N_G^{A_1}(\rho_{A_1A_2}^{TA_2}) = 0.037$ , esse valor é bem próximo ao pico para essa medida  $N_G^{A_1}(\rho_{A_1A_2}^{TA_2}) = 0.039$ . Quando analisamos esse mesmo tempo de interação a negatividade do campo tem valor  $N_G^{C_1}(\rho_{C_1C_2}^{TC_2}) = 0.05$  que é um valor próximo ao mínimo dessa medida  $N_G^{C_1}(\rho_{C_1C_2}^{TC_2}) = 0.04$ . Uma análise semelhante a essa pode ser feita para o tempo de interação ( $\tau = 7.75$ ) que nos fornece a negatividade global  $N_G^B(\rho_{A_1A_2B}^{TA_1A_2}) = 0.69$ . Verificamos para esses dois tempos de interação ( $\tau = 1.25$ ) e ( $\tau = 7.75$ ) a transferência de emaranhamento dos modos do campo das cavidades espacialmente separadas para os átomos.

A morte súbita de emaranhamento ocorre em ( $\tau = 2,05$ ), temos valor próximo do pico para o emaranhamento entre os modos do campo  $N_G^{C_1}(\rho_{C_1C_2}^{TC_2}) = 0.24$ , enquanto que o emaranhamento entre os átomos nas cavidade é  $N_G^B(\rho_{A_1A_2B}^{TA_1A_2}) = N_G^{A_1}(\rho_{A_1A_2}^{TA_2}) = 0$ . Os átomos retomam o emaranhamento (renascimento) para ( $\tau = 2,45$ ), quando o campo começa a perder correlação.

Na figura (6.10), temos as negatividades  $N_G^B(\rho_{A_1A_2B}^{(2)})$ ,  $N_G^{C_1}(\rho_{C_1C_2}^{(2)})$  e  $N_G^{A_1}(\rho_{A_1A_2}^{(2)})$ , que são usadas para verificar o emaranhamento entre os átomos nas cavidade espacialmente separadas, entre os modos do campo nas cavidades e entre os átomos na cavidade de Alice. Verificamos que para o tempo de interação ( $t = 0$ ), temos a negatividade do campo  $N_G^{C_1}(\rho_{C_1C_2}^{(2)}) = 0.55$ , negatividade entre os qubits  $A_1$  e  $A_2$ ,  $N_G^{A_1}(\rho_{A_1A_2}^{(2)}) = 1$  e o emaranhamento entre o qubit  $B$  e o par  $A_1$  e  $A_2$ , é nulo. Para esse tempo de interação temos um estado maximamente entre os átomos na cavidade de Alice, o campo possui máxima correlação, e os átomos nas cavidades espacialmente separadas estão em um estado separável. Para o tempo de interação ( $\tau = 7,75$ ) temos o valor de máximo de emaranhamento entre o qubit  $B$  e o par  $A_1$  e  $A_2$ , onde  $N_G^B(\rho_{A_1A_2B}^{(2)}) = 0,73$ . Para esse tempo de interação temos um valor próximo ao mínimo para negatividade do campo  $N_G^{C_1}(\rho_{C_1C_2}^{(2)}) = 0,14$  e seu valor mínimo é  $N_G^{C_1}(\rho_{C_1C_2}^{(2)}) = 0,13$ . A negatividade entre os átomos localizados

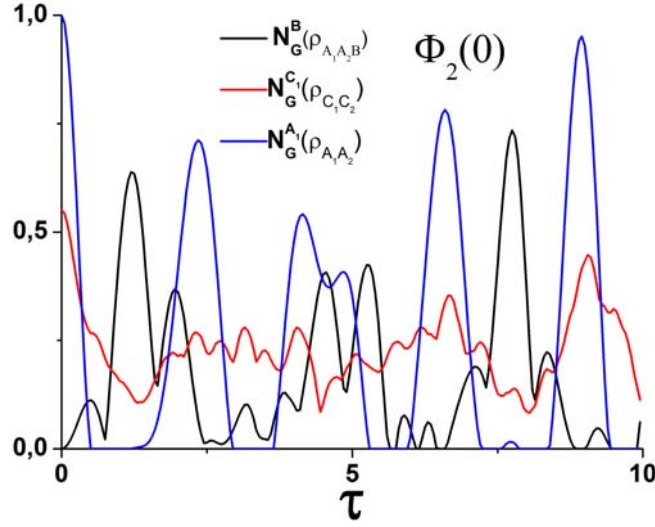


Figura 6.10: Negatividades globais  $N_G^B(\rho_{A_1A_2B}^{(2)})$ ,  $N_G^{C_1}(\rho_{C_1C_2}^{(2)})$  e  $N_G^{A_1}(\rho_{A_1A_2}^{(2)})$  considerando campo na cavidade no estado aproximado  $|\xi''\rangle$ , em função do parâmetro de interação  $\tau$ .

na cavidade de Alice é  $N_G^{A_1}(\rho_{A_1A_2}^{(2)}) = 0,02$ . Através desses resultados verificamos que as correlações entre os modos do campo são transferidas para os átomos localizados nas caviades espacialmente separadas. Quando observamos o tempo de interação ( $\tau = 8,95$ ), onde emaranhamento entre qubit  $B$  e o par  $A_1$  e  $A_2$ , é nulo. Para esse tempo de interação temos um valor próximo ao máximo negatividade do campo  $N_G^{C_1}(\rho_{C_1C_2}^{(2)}) = 0,42$  e máximo valor para negatividade dos qubits  $A_1$  e  $A_2$ ,  $N_G^{A_1}(\rho_{A_1A_2}^{(2)}) = 0,95$ . Para este tempo de interação temos um situação parecida com a observada em ( $t = 0$ ).

Através do estado reduzido do campo pode-se fazer um estudo detalhado da dinâmica de emaranhamento do campo das cavidades. Com isso verificou-se a transferência de emaranhamento entre os modos do campo nas cavidades espacialmente separadas para os átomos localizados nas cavidades.

A dinâmica do estado aproximado demonstrou ser uma boa ferramenta no estudo do emaranhamento dos átomos, isso pode ser verificado comparando os resultados obtidos nos capítulos (5) e (6). Quando utilizamos a negatividade como medida de emaranhamento para o campo nas cavidades obtemos uma boa ideia do que está na transferência

de emaranhamento do sistema. Podemos afirmar que a negatividade do campo é uma medida de emaranhamento comparando com os resultados obtidos no capítulo (5) para o emaranhamento do campo.

## Capítulo 7

# Comunicação quântica utilizando o estado emaranhado de três átomos.

Estados emaranhados de três qubits podem ser utilizados para realização de protocolos de comunicação quântica, criptografia quântica e teletransporte de estados quânticos. Em 1998 A. Karlsson [141], apresentou uma proposta de teletransporte de estados quânticos, com estado GHZ de três qubits. Em 1999 Hillery [140], propôs um protocolo de comunicação quântica envolvendo três laboratórios que compartilhavam qubits no estado GHZ. Outro estado emaranhado de três qubits que pode ser empregado no teletransporte, é o estado W [142–145]. Jaewoo Joo e colaboradores [146], apresentaram uma proposta de teletransporte utilizando estado W de três qubits, considerando dois casos diferentes, no primeiro caso os três qubits estão localizados em três laboratórios remotos, no segundo caso os três qubits estão localizados em dois laboratórios remotos. Em 2008 X. Yang [147], apresentou uma proposta de comunicação quântica segura utilizando-se de estados tipo W que não são maximamente emaranhados.

Estados mistos de três qubits também podem ser usados no teletransporte de estados quânticos. D. Park e colaboradores [115], apresentaram uma proposta de teletransporte de estados quânticos com estados mistos de três qubits com emaranhamento tipo GHZ e

W.

Neste capítulo examinaremos o operador de estado dos átomos para o estado inicial  $|\Phi_1^\alpha(0)\rangle$  Eq. (4.45) com  $\alpha = 1$ , considerando o tempo de interação  $\tau = 7,75$  e o estado inicial  $|\Phi_2(0)\rangle$  para tempo de interação  $\tau = 7,71$ . Para estes tempos de interação temos um pico na negatividade global da tranposta parcial do operador de estado reduzido  $\rho_{A_1A_2B}$  com respeito ao qubit  $B$ , indicando maior grau de emaranhamento entre os átomos nas cavidades espacialmente separadas. Verificamos que o operador de estado atômico, apresenta emaranhamento tipo W para os dois estados iniciais dos átomos  $|\Phi_1^\alpha(0)\rangle$  com  $\alpha = 1$  e  $|\Phi_2(0)\rangle$ . Por outro lado quando analisamos a função de onda do sistema composto pelos três átomos e campo nas cavidades, podemos ter acesso a um estado tipo W puro com alta probabilidade através de uma medida sobre o estado do campo nas cavidades. Um estado W maximamente emaranhamento pode ser destilado através do protocolo proposto por Zuo-Liang Cao [148]. O estado W maximamente emaranhado do sistema de átomos pode ser usado na comunicação quântica, criptografia e teletransporte.

## 7.1 Estado inicial $|\Phi_1^\alpha(0)\rangle$ .

Considerando parâmetro de compressão  $s = 0,64$  e tempo de interação  $\tau = 7,75$ , onde temos um pico de emaranhamento atômico verificado pela negatividade global no capítulo (5), o operador de estado atômico do sistema é dado por,

$$\rho_{A_1A_2B}^\alpha = \begin{pmatrix} 0,68869 & 0 & 0 & 0 & 0,38237 & 0 \\ 0 & 0,00639 & 0 & 0 & 0 & 0,00167 \\ 0 & 0 & 0,00528 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,07924 & 0 & 0 \\ 0,38237 & 0 & 0 & 0 & 0,21953 & 0 \\ 0 & 0,00167 & 0 & 0 & 0 & 8,7 \times 10^{-4} \end{pmatrix}. \quad (7.1)$$

Podemos ter uma melhor visualização do emaranhamento do sistema, diagonalizando

o operador de estado Eq. (7.1), e reescrevendo em uma base de auto estados como,

$$\begin{aligned} \rho_{A_1 A_2 B}^\alpha &= P_1 |W_1\rangle \langle W_1| + P_2 |W_2\rangle \langle W_2| + P_3 |W_3\rangle \langle W_3| \\ &+ P_4 |W_4\rangle \langle W_4| + P_5 |110\rangle \langle 110| + P_6 |001\rangle \langle 001|. \end{aligned} \quad (7.2)$$

onde  $P_1 = 0.9027$ ,  $P_2 = 0.00552$ ,  $P_3 = 0.00685$ ,  $P_4 = 0.00040$ ,  $P_5 = 0.00528$ ,  $P_6 = 0.07924$ , e

$$|W_1\rangle = 0.87262 |000\rangle_{A_1 A_2 B} + 0.4884 \left( \frac{|011\rangle + |101\rangle}{\sqrt{2}} \right)_{A_1 A_2 B}, \quad (7.3)$$

$$|W_2\rangle = 0.4884 |000\rangle_{A_1 A_2 B} - 0.87262 \left( \frac{|011\rangle + |101\rangle}{\sqrt{2}} \right)_{A_1 A_2 B}, \quad (7.4)$$

$$|W_3\rangle = 0.26873 |111\rangle_{A_1 A_2 B} + 0.96322 \left( \frac{|010\rangle + |100\rangle}{\sqrt{2}} \right)_{A_1 A_2 B}, \quad (7.5)$$

$$|W_4\rangle = -0.96322 |111\rangle_{A_1 A_2 B} + 0.26873 \left( \frac{|010\rangle + |100\rangle}{\sqrt{2}} \right)_{A_1 A_2 B}. \quad (7.6)$$

Através da Eq. (7.2), observamos que  $P_1 \gg P_2 + P_3 + P_4$ , isso indica que a maior contribuição do emaranhamento atômico é proveniente do estado  $W_1$ , e que os estados  $W_2$ ,  $W_3$  e  $W_4$  apresentam pequenas probabilidades comparados com  $W_1$ . Também verificamos que  $P_1 \gg P_5 + P_6$ , as probabilidades de ocupação  $P_5$  e  $P_6$  correspondem aos estados separáveis  $|110\rangle$  e  $|001\rangle$ . Essa análise demonstra que para o tempo de interação  $\tau = 7,75$ , a probabilidade de numa medição sobre o sistema encontramos os átomos no estado  $|W_1\rangle$ , é maior que a soma das probabilidades dos outros estados. Deste modo podemos reescrever a Eq. (7.2) como,

$$\rho_{A_1 A_2 B}^\alpha = P_1 |W_1\rangle \langle W_1| + (1 - P_1) \hat{\rho}_{ruído}. \quad (7.7)$$

Verificamos na Eq. (7.7), que o estado de maior probabilidade, e que pode ser usado na comunicação é o estado  $|W_1\rangle$  com probabilidade  $P_1$ , a parte remanescente ao operador de estado atômico corresponde a um ruído quântico com probabilidade  $(1 - P_1)$ .

## 7.2 Estado inicial $|\Phi_2(0)\rangle$ .

Também verificamos que o operador de estado dos átomos, para o estado inicial atômico  $|\Phi_2(0)\rangle$  e parâmetro de compressão  $s = 0,64$  no tempo de interação  $\tau = 7,71$ , nos fornece um pico de emaranhamento atômico apresentado através da negatividade global no capítulo (5), O estado atômico do sistema é dado por,

$$\rho_{A_1 A_2 B}^{\Phi_2} = \begin{pmatrix} 0.68092 & 0 & 0 & 0 & -0.38057 & 0 \\ 0 & 0.01880 & 0 & 0 & 0 & -0.00546 \\ 0 & 0 & 0.00453 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.02293 & 0 & 0 \\ -0.38057 & 0 & 0 & 0 & 0.25714 & 0 \\ 0 & -0.00546 & 0 & 0 & 0 & 0.01568 \end{pmatrix}, \quad (7.8)$$

que pode ser reescrito em uma base de auto estados como,

$$\begin{aligned} \rho_{A_1 A_2 B}^{\Phi_2} = & P_{I_1} |W_5\rangle \langle W_5| + P_{I_2} |W_6\rangle \langle W_6| + P_{I_3} |W_7\rangle \langle W_7| \\ & + P_{I_4} |W_8\rangle \langle W_8| + P_{I_5} |110\rangle \langle 110| + P_{I_6} |001\rangle \langle 001|. \end{aligned} \quad (7.9)$$

onde  $P_{I_1} = 0.90461$ ,  $P_{I_2} = 0.03344$ ,  $P_{I_3} = 0.02291$ ,  $P_{I_4} = 0.01156$ ,  $P_{I_5} = 0.00453$ ,  $P_{I_6} = 0.02293$ , e

$$|W_5\rangle = 0.86211 |000\rangle_{A_1 A_2 B} - 0.50673 \left( \frac{|011\rangle + |101\rangle}{\sqrt{2}} \right)_{A_1 A_2 B}, \quad (7.10)$$

$$|W_6\rangle = 0.50673 |000\rangle_{A_1 A_2 B} + 0.86211 \left( \frac{|011\rangle + |101\rangle}{\sqrt{2}} \right)_{A_1 A_2 B}, \quad (7.11)$$

$$|W_7\rangle = 0.79835 |111\rangle_{A_1 A_2 B} - 0.60220 \left( \frac{|010\rangle + |100\rangle}{\sqrt{2}} \right)_{A_1 A_2 B}, \quad (7.12)$$

$$|W_8\rangle = 0.60220 |111\rangle_{A_1 A_2 B} + 0.79835 \left( \frac{|010\rangle + |100\rangle}{\sqrt{2}} \right)_{A_1 A_2 B}. \quad (7.13)$$

Da mesma forma que a Eq. (7.2), a Eq. (7.9) tem  $P_{I_1} > P_{I_2} + P_{I_3} + P_{I_4} + P_{I_5} + P_{I_6}$ , onde observamos maior probabilidade em um medida sobre o sistema, encontrarmos o estado  $|W_5\rangle$ . Podemos escrever a Eq. (7.9) da mesma forma que a Eq. (7.7), como

$$\rho_{A_1 A_2 B}^{\Phi_2} = P_{I_1} |W_5\rangle \langle W_5| + (1 - P_{I_1}) \hat{\rho}_{ruído}. \quad (7.14)$$

Na Eq. (7.14), verificamos que o estado  $|W_5\rangle$  com probabilidade  $P_{I_1}$ , pode ser base de um protocolo e o estado  $\hat{\rho}_{ruído}$  com probabilidade  $(1 - P_{I_1})$ , corresponde a ruído quântico.

### 7.3 Acesso ao estado puro dos átomos

#### Estado inicial $|\Phi_1^\alpha(0)\rangle$

Podemos ter acesso ao estado puro dos três átomos, através de uma medição feita sobre o estado do campo nas cavidades. Para entendermos esse processo devemos escrever a função de onda para a evolução temporal do estado inicial atômico  $|\Phi_1^\alpha(0)\rangle$  com  $\alpha = 1$ , considerando parâmetro de compressão  $s = 0,64$ , com isso temos

$$|\Phi_1(\tau)\rangle = a_0 |\Psi_0\rangle + a_1 |\Psi_1(\tau)\rangle + a_2 |\Psi_2(\tau)\rangle + a_3 |\Psi_3(\tau)\rangle + a_4 |\Psi_4(\tau)\rangle + \dots \quad (7.15)$$

onde  $a_0 = 0.825$ ,  $a_1 = 0.466$ ,  $a_2 = 0.263$ ,  $a_3 = 0.149$ ,  $a_4 = 0.084$  e

$$|\Psi_0\rangle = |2, -2\rangle_{A_1 A_2} |1, -1\rangle_B |0, 0\rangle_{C_1 C_2}, \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned} |\Psi_1(\tau)\rangle = & \cos \tau \cos \left( \sqrt{2}\tau \right) |2, -2\rangle_{A_1 A_2} |1, -1\rangle_B |1, 1\rangle_{C_1 C_2} \\ & -i \cos \tau \sin \left( \sqrt{2}\tau \right) |2, 0\rangle_{A_1 A_2} |1, -1\rangle_B |0, 1\rangle_{C_1 C_2} \\ & -i \sin \tau \cos \left( \sqrt{2}\tau \right) |2, -2\rangle_{A_1 A_2} |1, 1\rangle_B |1, 0\rangle_{C_1 C_2} \\ & - \sin \tau \sin \left( \sqrt{2}\tau \right) |2, 0\rangle_{A_1 A_2} |1, 1\rangle_B |0, 0\rangle_{C_1 C_2}, \end{aligned} \quad (7.17)$$

$$\begin{aligned}
|\Psi_2(\tau)\rangle = & \frac{\cos(\sqrt{2}\tau)}{3} \left[ 2 \cos(\sqrt{6}\tau) + 1 \right] |2, -2\rangle_{A_1 A_2} |1, -1\rangle_B |2, 2\rangle_{C_1 C_2} \\
& - i \sqrt{\frac{2}{3}} \cos(\sqrt{2}\tau) \sin(\sqrt{6}\tau) |2, 0\rangle_{A_1 A_2} |1, -1\rangle_B |1, 2\rangle_{C_1 C_2} \\
& + \frac{\sqrt{2} \cos(\sqrt{2}\tau)}{3} \left[ \cos(\sqrt{6}\tau) - 1 \right] |2, 2\rangle_{A_1 A_2} |1, -1\rangle_B |0, 2\rangle_{C_1 C_2} \\
& - \frac{i \sin(\sqrt{2}\tau)}{3} \left[ 2 \cos(\sqrt{6}\tau) + 1 \right] |2, -2\rangle_{A_1 A_2} |1, 1\rangle_B |2, 1\rangle_{C_1 C_2} \\
& - \sqrt{\frac{2}{3}} \sin(\sqrt{2}\tau) \sin(\sqrt{6}\tau) |2, 0\rangle_{A_1 A_2} |1, 1\rangle_B |1, 1\rangle_{C_1 C_2} \\
& - \frac{i \sqrt{2}}{3} \sin(\sqrt{2}\tau) \left[ \cos(\sqrt{6}\tau) - 1.0 \right] |2, 2\rangle_{A_1 A_2} |1, 1\rangle_B |0, 1\rangle_{C_1 C_2}.
\end{aligned} \tag{7.18}$$

Os vetores de estado  $|\Psi_3(\tau)\rangle, |\Psi_4(\tau)\rangle, \dots, |\Psi_n(\tau)\rangle$ , não possuem estados números do tipo  $|0, 0\rangle_{C_1 C_2}$ . Se realizarmos uma medida sobre o estado do campo nas cavidades e obtivermos como resultado o estado  $|0, 0\rangle_{C_1 C_2}$ , o sistema de átomos colapsa no estado,

$$|W^{\Phi_1}(\tau)\rangle = \frac{1}{N} \left[ a_0 |000\rangle_{A_1 A_2 B} + -a_1 \sin(\tau) \sin(\sqrt{2}\tau) \left( \frac{|011\rangle + |101\rangle}{\sqrt{2}} \right)_{A_1 A_2 B} \right], \tag{7.19}$$

onde  $N$  é uma constante de normalização.

Para uma medição feita sobre o campo no tempo de interação  $\tau = 7,75$ , a probabilidade de encontramos o campo nas cavidades no estado  $|0, 0\rangle_{C_1 C_2}$  é de aproximadamente 90%. Para este tempo de interação o estado dos átomos nas cavidades se reduz para,

$$|W^{\Phi_1}(7.75)\rangle = 0,871 |000\rangle_{A_1 A_2 B} + 0,491 \left( \frac{|011\rangle + |101\rangle}{\sqrt{2}} \right)_{A_1 A_2 B}. \tag{7.20}$$

### Estado inicial $|\Phi_2(0)\rangle$

A evolução temporal para o estado inicial atômico  $|\Phi_2(0)\rangle$  considerando parâmetro de compressão  $s = 0,64$ , tem a função de onda escrita como,

$$|\Phi_2(\tau)\rangle = a_0 |\Psi'_0\rangle + a_1 |\Psi'_1(\tau)\rangle + a_2 |\Psi'_2(\tau)\rangle + a_3 |\Psi'_3(\tau)\rangle + a_4 |\Psi'_4(\tau)\rangle + \dots \tag{7.21}$$

onde  $a_0 = 0.825$ ,  $a_1 = 0.466$ ,  $a_2 = 0.263$ ,  $a_3 = 0.149$ ,  $a_4 = 0.084$  e

$$\begin{aligned} |\Psi'_0\rangle &= -i \sin(\sqrt{2}\tau) |2, -2\rangle_{A_1 A_2} |1, -1\rangle_B |1, 0\rangle_{C_1 C_2} \\ &\quad + \cos(\sqrt{2}\tau) |2, 0\rangle_{A_1 A_2} |1, -1\rangle_B |0, 0\rangle_{C_1 C_2}, \end{aligned} \quad (7.22)$$

$$\begin{aligned} |\Psi'_1(\tau)\rangle &= -i\sqrt{\frac{2}{3}} (\cos \tau) \sin(\sqrt{6}\tau) |2, -2\rangle_{A_1 A_2} |1, -1\rangle_B |2, 1\rangle_{C_1 C_2} \\ &\quad + \cos(\tau) \cos(\sqrt{6}\tau) |2, 0\rangle_{A_1 A_2} |1, -1\rangle_B |1, 1\rangle_{C_1 C_2} \\ &\quad - i\frac{\cos(\tau)}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{6}\tau) |2, 2\rangle_{A_1 A_2} |1, -1\rangle_B |0, 1\rangle_{C_1 C_2} \\ &\quad - \sqrt{\frac{2}{3}} \sin(\tau) \sin(\sqrt{6}\tau) |2, -2\rangle_{A_1 A_2} |1, 1\rangle_B |2, 0\rangle_{C_1 C_2} \\ &\quad - i \sin(\tau) \cos(\sqrt{6}\tau) |2, 0\rangle_{A_1 A_2} |1, 1\rangle_B |1, 0\rangle_{C_1 C_2} \\ &\quad - \frac{\sin(\tau)}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{6}\tau) |2, 2\rangle_{A_1 A_2} |1, 1\rangle_B |0, 0\rangle_{C_1 C_2}, \end{aligned} \quad (7.23)$$

$$\begin{aligned} |\Psi'_2(\tau)\rangle &= -i\sqrt{\frac{3}{5}} \cos(\sqrt{2}\tau) \sin(\sqrt{10}\tau) |2, -2\rangle_{A_1 A_2} |1, -1\rangle_B |3, 2\rangle_{C_1 C_2} \\ &\quad + \cos(\sqrt{2}\tau) \cos(\sqrt{10}\tau) |2, 0\rangle_{A_1 A_2} |1, -1\rangle_B |2, 2\rangle_{C_1 C_2} \\ &\quad - i\sqrt{\frac{2}{5}} \cos(\sqrt{2}\tau) \sin(\sqrt{10}\tau) |2, 2\rangle_{A_1 A_2} |1, -1\rangle_B |1, 2\rangle_{C_1 C_2} \\ &\quad - \sqrt{\frac{3}{5}} \sin(\sqrt{2}\tau) \sin(\sqrt{10}\tau) |2, -2\rangle_{A_1 A_2} |1, 1\rangle_B |3, 1\rangle_{C_1 C_2} \\ &\quad - i \sin(\sqrt{2}\tau) \cos(\sqrt{10}\tau) |2, 0\rangle_{A_1 A_2} |1, 1\rangle_B |2, 1\rangle_{C_1 C_2}, \\ &\quad - \sqrt{\frac{2}{5}} \sin(\sqrt{2}\tau) \sin(\sqrt{10}\tau) |2, 2\rangle_{A_1 A_2} |1, 1\rangle_B |1, 1\rangle_{C_1 C_2}. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Os vetores de estado  $|\Psi'_3(\tau)\rangle, |\Psi'_4(\tau)\rangle, \dots, |\Psi'_n(\tau)\rangle$ , não possuem estados com números de fótons  $|1, 0\rangle_{C_1 C_2}$ . Se realizarmos uma medição sobre o estado do campo nas cavidades e

obtivermos como resultado o estado  $|1, 0\rangle_{C_1 C_2}$ , os átomos se colapsam no estado,

$$\begin{aligned} & |W^{\Phi_2}(\tau)\rangle \\ &= \frac{1}{N} \left[ -a_0 i \sin(\sqrt{2}\tau) |000\rangle_{A_1 A_2 B} - a_1 i \sin(\tau) \cos(\sqrt{6}\tau) \left( \frac{|011\rangle + |101\rangle}{\sqrt{2}} \right)_{A_1 A_2 B} \right]. \end{aligned} \quad (7.25)$$

onde  $N$  é uma constante de normalização.

Para uma medição realizada sobre o campo no tempo de interação  $\tau = 7, 71$ , a probabilidade de encontrarmos o campo na cavidade no estado  $|1, 0\rangle_{C_1 C_2}$  é de aproximadamente 90%. Se em uma medição obtivermos o estado  $|1, 0\rangle_{C_1 C_2}$ , o estado dos átomos nas cavidades tem a seguinte forma,

$$|W^{\Phi_2}(7, 71)\rangle = -0,872i |000\rangle_{A_1 A_2 B} - 0,489i \left( \frac{|011\rangle + |101\rangle}{\sqrt{2}} \right)_{A_1 A_2 B}. \quad (7.26)$$

Como já foi citado anteriormente X. Yang [147], apresentou uma proposta de comunicação quântica segura utilizando-se de estados tipo  $W$ , que não são maximamente emaranhados. Deste modo o emaranhamento atômico dos estados das Eqs. (7.20) e (7.26), obtidos através da interação de átomos localizados em cavidades espacialmente separadas com um estado comprimido de dois modos, podem ser usados em um protocolo de comunicação quântica.

## 7.4 Destilação do emaranhamento de três qubits.

É possível destilar um estado  $W$  a partir do estado dos átomos das Eqs. (7.20) e (7.26), através de um protocolo proposto por Zuo-Liang Cao [148]. Como possuímos um estado tipo  $W$  com forma geral,

$$|W'\rangle = (a |000\rangle + b |011\rangle + b |101\rangle)_{A_1 A_2 B}. \quad (7.27)$$

Como nosso sistema fornece um estado de átomos com dois coeficientes com valores iguais precisamos somente de um passo do protocolo [148]. Para realizarmos destilação do estado, necessitamos colocar um qubit auxiliar na cavidade de Bob com o estado conhecido  $|1\rangle_a$ . Com isso temos um estado de 4 qubits dado por,

$$|W''\rangle = \left( a |000\rangle_{A_1 A_2 B} + b |011\rangle_{A_1 A_2 B} + b |101\rangle_{A_1 A_2 B} \right) |1\rangle_a. \quad (7.28)$$

Bob então deve realizar uma operação unitária na base  $|00\rangle_{Ba}$ ,  $|10\rangle_{Ba}$ ,  $|01\rangle_{Ba}$  e  $|11\rangle_{Ba}$ , que tem a seguinte forma,

$$U_{Ba} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b}{a} & -\sqrt{1 - \left|\frac{b}{a}\right|^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{1 - \left|\frac{b}{a}\right|^2} & \frac{b}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (7.29)$$

sobre as partículas que estão em seu laboratório (qubit  $B$  e qubit auxiliar  $a$ ). Com isso o estado da Eq. (7.28), assume a seguinte forma,

$$|W'''\rangle = \left( b |000\rangle_{A_1 A_2 B} + b |011\rangle_{A_1 A_2 B} + b |101\rangle_{A_1 A_2 B} \right) |1\rangle_a - b \sqrt{1 - |b/a|^2} |001\rangle_{A_1 A_2 B} |0\rangle_a. \quad (7.30)$$

Bob então deve realizar uma medição sobre qubit auxiliar  $a$ . Se o qubit auxiliar está no estado  $|1\rangle_a$ , nós podemos extrair um estado  $W$  maximamente emaranhado do estado  $W'$  da Eq. (7.27). Normalizando o estado verificamos que o estado  $W$  maximamente emaranhado obtido, tem a seguinte forma,

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left( |000\rangle_{A_1 A_2 B} + |011\rangle_{A_1 A_2 B} + |101\rangle_{A_1 A_2 B} \right). \quad (7.31)$$

Portanto a probabilidade de sucesso para obtenção do estado  $W$  maximamente emaran-

hado da Eq. (7.31) equivale a  $P = 3|b|^2$ .

Podemos relacionar a probabilidade de sucesso no protocolo de destilação com a negatividade global do operador estado  $\rho_{A_1A_2B} = |W'\rangle\langle W'|$ , com respeito ao qubit  $B$ , de modo que,

$$P = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{1 - (N_G^B)^2}, \quad (7.32)$$

onde  $0 < (N_G^B)^2 \leq 8/9$ . Com isso verificamos que quanto maior a negatividade do estado maior será a probabilidade de sucesso.

Através do protocolo de destilação conseguimos extrair um estado  $W$  com probabilidade  $P = 0,36$  para o estado inicial  $|\Phi_1^\alpha(0)\rangle$  com  $\alpha = 1$  e com  $P = 0,355$  para o estado inicial  $|\Phi_2(0)\rangle$ . Deste modo podemos utilizar o estado emaranhado dos três átomos espacialmente separados para protocolos de comunicação quântica e teletransporte determinísticos.

# Capítulo 8

## Conclusão

Neste trabalho estudamos a transferência de emaranhamento das variáveis contínuas do estado comprimido de dois modos, para um sistema de átomos aprisionados em cavidades espacialmente separadas. O sistema proposto é composto por duas cavidades, sendo que a primeira cavidade está localizada no laboratório de Alice e possui dois átomos aprisionados e a segunda cavidade está no laboratório de Bob e possui um único átomo aprisionado. Um estado comprimido de dois modos do campo eletromagnético é enviado para as cavidades. A junção entre campo externo e campo nas cavidades é feita através de um divisor de feixe, sendo que cada cavidade recebe um modo do campo.

Foram obtidas expressões analíticas para o estado do sistema composto, estado dos átomos e estado do campo, em função do parâmetro de compressão, parâmetro de interação e refletividade do divisor de feixe. No estudo da dinâmica do sistema composto utilizamos diferentes estados iniciais do campo e diferentes estados iniciais dos dois átomos localizados na cavidade de Alice. Para o estudo da transferência de emaranhamento das variáveis contínuas do campo para os átomos nas cavidades distintas, consideramos estados iniciais separáveis e emaranhados dos dois átomos da cavidade de Alice. Com o objetivo de realizar um estudo comparativo da dinâmica de emaranhamento para os átomos da cavidade de Alice em um estado inicial separável e a influência do emaranhamento inicial dos átomos da cavidade de Alice na transferência de emaranhamento das variáveis

contínuas do campo para os átomos.

A análise da transferência de emaranhamento do campo para os átomos, é feita através do operador de estado atômico que foi obtido através do traço sobre os graus de liberdade do campo no operador de estado do sistema composto. O cálculo do emaranhamento foi feito utilizando a negatividade global da transposta parcial do operador de estado  $\hat{\rho}_{A_1 A_2 B}(\tau)$  com relação a qubit  $B$ , para verificar o emaranhamento dos átomos nas cavidades espacialmente separadas. Nossa análise de transferência de emaranhamento se inicia considerando o estado inicial atômico  $|\Phi_1^{\alpha=1}(0)\rangle$ , que representa todos os três átomos no estado fundamental. No cálculo da dinâmica de emaranhamento desconsideramos o efeito do divisor de feixe adotando refletividade zero. Com isso calculamos o emaranhamento livre do qubit  $B$  com o par  $A_1 A_2$  em função do parâmetro de interação e parâmetro de compressão. Verificamos que os maiores picos de emaranhamento são obtidos com o parâmetro de compressão  $s = 0,64$ , para valores de  $s$  menores que  $s = 0,64$ , observamos diminuição no grau de emaranhamento e para  $s = 0$  a negatividade global é nula. Para valores de  $s$  maiores que  $s = 0,64$ , temos a diminuição no grau de emaranhamento e aumento nas regiões com emaranhamento livre nulo. Para  $s = 0,64$ , verificamos maior transferência do emaranhamento do campo para os átomos no tempo de interação  $\tau = 1,25$  onde  $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^\alpha) = 0,66$ , o sistema evolui de modo que o emaranhamento decai abruptamente para zero em  $\tau = 2,05$  e renasce em  $\tau = 2,45$ , atingindo seu pico máximo em  $\tau = 7,75$  com  $N_G^B(\rho_{A_1 A_2 B}^\alpha) = 0,68$ .

Nossa segunda análise é feita considerando o estado inicial atômico  $|\Phi_1^{\alpha=0,5}(0)\rangle$ , que corresponde a um estado maximamente emaranhado entre os átomos da cavidade de Alice e o átomo da cavidade de Bob no estado fundamental. No estudo do emaranhamento entre os átomos nas cavidades espacialmente separadas verificamos que os maiores picos de emaranhamento ocorrem para  $s = 0,64$ , porém observamos diminuição nos picos máximos de emaranhamento quando comparamos com a evolução do sistema para o estado inicial atômico  $|\Phi_1^{\alpha=1}(0)\rangle$  e aumento nas regiões com emaranhamento livre nulo.

Através das duas primeiras escolhas de estados iniciais atômicos verificamos que os

maiores picos da negatividade global ocorrem para  $s = 0,64$ , por este motivo calculamos a dinâmica de emaranhamento do sistema de átomos fixando  $s = 0,64$  e variando o parâmetro  $0 \leq \alpha \leq 1$ , deste modo obtivemos a dinâmica do sistema para vários estados iniciais dos átomos na cavidade de Alice. Para os valores de  $\alpha = 0$  e  $\alpha = 1$  os átomos na cavidade de Alice estão em estados separáveis, para  $0 < \alpha < 1$  os átomos  $A_1$  e  $A_2$  estão em um estado emaranhado. Desde modo foi observado que para valores de  $\alpha < 1$ , temos uma diminuição no grau de emaranhamento livre atômico e aumento nas regiões com emaranhamento livre nulo, sendo que a maior quantidade de regiões com emaranhamento livre nulo ocorre para  $\alpha = 0$ . Para  $\alpha = 1$ , temos os maiores picos na negatividade global e menores regiões com emaranhamento nulo. Os estados iniciais  $|\Phi_1^\alpha(0)\rangle$  com  $0 \leq \alpha < 1$ , fornecem menor transferência de emaranhamento do campo para os átomos, porque este tipo de estado permite duas excitações na cavidade  $C_1$  interferindo na transferência de emaranhamento proveniente do campo.

O estado do campo nas cavidades possui infinitos graus de liberdade, por este motivo não é possível utilizar-se da negatividade global para o cálculo do emaranhamento dos modos do campo nas cavidades espacialmente separadas. Então calculamos a função  $Q$  e o número médio de fótons do operador de estado do campo para o estado inicial atômico  $|\Phi_1^{\alpha=1}(0)\rangle$ , para uma análise qualitativa do emaranhamento do campo nas cavidades distintas. Deste modo verificamos que a maior correlação entre os modos do campo nas cavidades, ocorre para  $t = 0$ , onde ainda não aconteceu interação entre os átomos e o campo. Para  $\tau = 1,1$  onde temos um pico na negatividade global dos átomos, observamos a diminuição nas correlações dos modos do campo. No tempo de interação  $\tau = 2,45$ , temos o desaparecimento do emaranhamento livre dos átomos, e as correlações do campo são retomadas, porém não retornam a seu valor inicial, isso indica que o sistema de átomos possui emaranhamento ligado. Em  $\tau = 7,75$ , onde temos o pico máximo da negatividade global dos átomos, também acontece uma diminuição nas correlações do campo. A análise apresentada indica transferência de emaranhamento das variáveis contínuas do campo para os átomos.

Outra proposta de estado inicial atômico apresentada é o estado inicial  $|\Phi_2(0)\rangle$ , que corresponde a um estado maximamente emaranhado entre os átomos da cavidade de Alice e o átomo da cavidade de Bob no estado fundamental. O que difere o estado  $|\Phi_2(0)\rangle$  do estado inicial  $|\Phi_1^{\alpha=0,5}(0)\rangle$ , é que apesar de ambos terem os átomos  $A_1$  e  $A_2$  em um estado maximamente emaranhado, o estado  $|\Phi_2(0)\rangle$  admite somente uma excitação no campo da cavidade de Alice enquanto o estado  $|\Phi_1^{\alpha=0,5}(0)\rangle$ , admite até duas excitações. Verificamos no estudo da dinâmica de emaranhamento que o valor de parâmetro de compressão que fornece maior transferência de emaranhamento é  $s = 0,64$ . Para este parâmetro de compressão verificamos um pico de emaranhamento em  $\tau = 1,3$  e o emaranhamento desaparece em  $\tau = 5,56$ , renascendo e atingindo seu maior valor em  $\tau = 7,71$  com  $N_G^B(\rho_{A_1A_2B}^{\Phi_2}) = 0,73$ . Para uma análise qualitativa do emaranhamento do campo nas cavidades distintas utilizamos a função  $Q$  e o número médio de fótons. Deste modo observamos que a maior correlação entre os modos do campo ocorre em  $t = 0$ , onde não aconteceu interação átomo e campo. Para os tempos de interação  $\tau = 0,0$  e  $\tau = 9,05$  onde o emaranhamento dos átomos é nulo temos a maior grau de correlação entre os modos do campo. Nos tempo de interação  $\tau = 1,3$  e  $\tau = 7,71$ , onde temos picos na negatividade global dos átomos, verifica-se menor grau de correlação entre os modos do campo. O que indica transferência de emaranhamento. Quando comparamos a dinâmica de emaranhamento para os estados iniciais  $|\Phi_2(0)\rangle$  e  $|\Phi_1^{\alpha=1}(0)\rangle$ , verificamos que a transferência de emaranhamento do campo é menor para o estado inicial  $|\Phi_2(0)\rangle$ . Isso ocorre devido ao emaranhamento inicial dos qubits  $A_1$  e  $A_2$  para o estado  $|\Phi_2(0)\rangle$ . Uma boa parcela do emaranhamento do qubit  $B$  com o par  $A_1$  e  $A_2$  é proveniente do emaranhamento inicial do par  $A_1$  e  $A_2$ . Isso ocorre devido as relações monogâmicas de emaranhamento.

Como não é possível calcular a negatividade global para quantificar o emaranhamento do campo, apresentamos um estado número de fótons que efetivamente produz uma dinâmica de emaranhamento similar a apresentada no capítulo (5), isso é confirmado pelo cálculo da negatividade global da transposta parcial dos estados atômicos  $\hat{\rho}_{A_1A_2B}^{(1)}(\tau)$  e  $\hat{\rho}_{A_1A_2B}^{(2)}(\tau)$ , com relação ao qubit  $B$ . A negatividade para estes operadores de estado

demonstra resultados próximos aos obtidos no capítulo (5). Quando calculamos a negatividade global do operador de estados do campo  $\hat{\rho}_{C_1C_2}^{(1)}(\tau)$  e  $\hat{\rho}_{C_1C_2}^{(2)}(\tau)$  com relação a  $C_2$  e comparamos com os resultados obtidos para a função  $Q$  e número médio de fótons verificados no capítulo (5), concluímos que a negatividade global  $N_G^{C_2}(\hat{\rho}_{C_1C_2}^{(1)})$  e  $N_G^{C_2}(\hat{\rho}_{C_1C_2}^{(2)})$ , configura um bom artifício para o estudo da transferência de emaranhamento dos modos campo para os átomos nas cavidades espacialmente separadas.

Através do operador de estado reduzido dos átomos verificamos emaranhamento tipo  $W$ , este tipo de emaranhamento pode ser utilizado em protocolos de comunicação quântica, teletransporte de estados quânticos e criptografia quântica. Os operadores de estado  $\hat{\rho}_{A_1A_2B}^\alpha(\tau)$  com  $\alpha = 1$  para  $\tau = 7,75$  e  $\hat{\rho}_{A_1A_2B}^{\Phi_2}(\tau)$  para o tempo de interação  $\tau = 7,71$ , apresenta picos na negatividade global da transposta parcial do operador de estado com respeito ao qubit  $B$ . Nos dois casos observamos que o operador de estado apresenta uma grande parcela de emaranhamento tipo  $W$  acrescido de um pequena parcela de ruído quântico. Podemos ter acesso a um estado  $W$  puro dos três átomos com alta probabilidade quando analisamos a função de onda para o sistema composto. O estado puro dos átomos é obtido através de uma medição sobre os graus de liberdade do campo das cavidades no sistema composto. Quando medimos o campo no tempo de interação  $\tau = 7,75$  para o caso que os átomos são preparados no estado inicial  $|\Phi_1^{\alpha=1}(0)\rangle$ , com parâmetro de compressão  $s = 0,64$ , obtemos aproximadamente 90% de probabilidade de encontramos o campo nas cavidades no estado  $|00\rangle_{C_1C_2}$ . Caso este resultado seja obtido o sistema de átomos se colapsa para um estado do tipo  $|W^{\Phi_1}(7.75)\rangle$  Eq. (7.20). O mesmo acontece quando medimos o campo para o caso em que o sistema tem como estado inicial atômico  $|\Phi_2(0)\rangle$ , com  $s = 0,64$ . Neste caso para o tempo de interação  $\tau = 7,71$  temos aproximadamente 90% de probabilidade de medirmos o campo nas cavidades no estado  $|01\rangle_{C_1C_2}$ . Caso este resultado seja obtido o sistema de átomos se colapsa em um estado tipo  $|W^{\Phi_2}(7.71)\rangle$  Eq. (7.26). Através do protocolo proposto por Z. L. Cao [148], onde é necessário o uso de um qubit auxiliar na cavidade 2, podemos destilar um estado  $W$ , a partir do estado tipo  $W$  fornecido pelo sistema. Deste modo podemos usar o emaranhamento dos três

átomos espacialmente separados em protocolos de comunicação quântica e teletransporte determinísticos.

O principal resultados que devemos destacar neste trabalho diz respeito ao maior pico de emaranhamento atômico obtido no estudo da dinâmica de emaranhamento para os estados iniciais  $|\Phi_1^{\alpha=1}(0)\rangle$  e  $|\Phi_2(0)\rangle$ . Verificamos que ambos estados iniciais apresentam valores próximos para os picos da negatividade global da transposta parcial do operador de estado dos átomos com relação ao qubit  $B$ . Por outro lado quando analisamos a transferência de emaranhamento do campo para os átomos observamos que o grau de emaranhamento transferido do campo para os átomos é menor para o estado inicial atômico  $|\Phi_2(0)\rangle$ . O estado inicial  $|\Phi_2(0)\rangle$  possui os qubits  $A_1$  e  $A_2$  em um estado maximamente emaranhado enquanto que o estado inicial  $|\Phi_1^{\alpha=1}(0)\rangle$  têm os três átomos em um estado separável. Como o estado inicial  $|\Phi_2(0)\rangle$  possui máximo emaranhamento entre os átomos  $A_1$  e  $A_2$ , a quantidade de emaranhamento transferido do campo para os átomos nas cavidades espacialmente separada é menor. Com isso verificamos que para esse caso o campo funciona como uma ponte para transferência de emaranhamento e o maior pico emaranhamento entre os átomos nas cavidades espacialmente separadas é proveniente de uma parcela de emaranhamento transferido do par  $A_1$  e  $A_2$ . Outro resultado que devemos destacar é a possibilidade de utilização do emaranhamento atômico do sistema em protocolos determinísticos de comunicação quântica e teletransporte.

Um possível estudo futuro para este trabalho é a verificação da dinâmica de emaranhamento para o sistema apresentado na tese considerando três ou mais átomos na cavidade de Alice. Também podemos estudar a dinâmica do sistema considerando dissipações. Desta forma podemos conseguir uma descrição mais condizente com uma implementação experimental.

# Referências Bibliográficas

- [1] J. M. Raimond, M. Brune, S. Haroche, *Rev. Mod. Phys.* 73, 565-582 (2001).
- [2] A. K. Ekert, *Phys. Rev. Lett.* 67, 661 (1991).
- [3] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press. Cambridge, (2000).
- [4] C.H. Bennett, G. Brassard, Proceedings of the IEEE International Conference on Computers, Systems and Signal Processing, Bangalore,India. 175-179 (1984).
- [5] A. K. Ekert, *Phys. Rev. Lett.* 67, 661 (1991).
- [6] R. More, *Eletronics Magazine*, 19, 1965.
- [7] P. Beinoff, *Phys. Rev. Lett.* 48(23):1581-1585, Jun (1982)
- [8] P. Beinoff, *J. Stat. Phys*, 22:563, (1980).
- [9] R. P. Feynman, *Feynman Lectures on Computation*, Hayger Collins Canada / Perseus Boock (1996).
- [10] R. P. Feynman, *Int. J. Theor. Phys.*, 21:467, (1982).
- [11] D. Deutsh, *Proc. Royal Soc. London*, A400(1818), 97-117, (1985).
- [12] P. W. Shor in *Proceeding of the 35th Symposium on the Foundations of Computer Science*, S. Goldwasser editor, p. 124 (IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA).

- [13] J. I. Cirac, P. Zoller, Phys. Rev. Lett. 74, 4091 (1995).
- [14] J. I. Cirac, P. Zoller, Phys. Rev. A. 50, R2799 (1994).
- [15] P. S. Jessen, I. H. Deutsch, Adv. Atom. Mol. Opt. Phys. 37, 95 (1996).
- [16] D. G. Cory, A. F. Fahmy, T. F. Havel, PNAS USA 94, 1634 (1997).
- [17] D. Loss, D. P. DiVincenzo, Phys. Rev. A 57, 120 (1998).
- [18] A. Shnirman, G. Schön, Z. Hermon, Phys. Rev. Lett. 79, 2371 (1997).
- [19] E. Hagley, X. Maître, G. Nogues, C. Wunderlich, M. Brune, J. M. Raimond, S. Haroche, Phys. Rev. Lett. 79, 1 (1997).
- [20] J. M. Raimond, M. Brune, S. Haroche, Rev. Mod. Phys. 73, 565 (2001).
- [21] S. B. Zheng, G. C. Guo, Phys. Rev. Lett. 85, 2392 (2000).
- [22] G.P. Guo, C.F. Li, G. C. Guo, Phys. Rev. A. 65, 042102 (2002).
- [23] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maitre, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond, S. Haroche, Phys. Rev. Lett. 77, 4887 (1996).
- [24] S. B. Li, J. B. Xu, Phys. Rev. A. 72, 022332 (2005).
- [25] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, Nature (London) 404, 247 (2000).
- [26] A. Ekert, R. Jozsa, Rev. Mod. Phys. 68, 733(1996). V. Vedral, M. B. Plenio, Prog. Quantum Electronics. 22, 1 (1997).
- [27] J. I. Cirac, A. K. Ekert, S. F. Huelga, C. Macchiavello, Phys. Rev. A. 59, 4249 (1999).
- [28] P. J. dos Reis, S. Shelly Sharma, Phys. Rev. A 79, 012326 (2009).
- [29] A. Einstein, B. Podlisky, N. Rosen, Phys. Rev. 47, 777 (1935).

- [30] E. Schrödinger, *Naturwiss.* 23, 807 (1935).
- [31] J. S. Bell, *Physics* 1, 195 (1964).
- [32] A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger, *Phys. Rev. Lett.*, 49,1804 (1982).
- [33] C. Monroe, D. M. Meekhof, B. E. King e D. J. Wineland, *Science* 272, 1131 (1996).
- [34] C. H. Bennett, S. J. Wiesner, *Phys. Rev. Lett.* 69, 2881 (1992).
- [35] C. H. Bennett, *Phys. Rev. Lett.* 68, 3121. (1992).
- [36] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* 70, 1895 (1991).
- [37] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maitre, A. Maali, C. Wunderlich, J. M. Raimond e S. Haroche, *Phys. Rev. Lett.* 77, 24 (1996).
- [38] C. J. Myatt, B. E. King, Q. A. Turchette, C. A. Sackett, D. Kielpinski, W. M. Itano, C. Monroe, D. J. Wineland, *Nature* 403, 269 (2000).
- [39] L. Davidovich, M. Brune, J. M. Raimond, e S. Haroche, *Rev.A* 53, 3 (1996).
- [40] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, *Nature* 404, 247 (2000).
- [41] T. Yu, J. H. Eberly, *Phys. Rev. Lett.* 93,140404, (2004).
- [42] T. Yu, J. H. Eberly, *Opt. Commun.* 264, 393, (2006).
- [43] W. H. Zurek, *Rev. Mod. Phys.* 75, 715 (2003).
- [44] T. Yu, J. H. Eberly, *Phys. Rev.* 66, 193306 (2002)
- [45] M. P. Almeida, *Science* 316, 579 (2007).
- [46] T. Yu, J. H. Eberly, *Phys. Rev. Lett.* 97, 140403 (2006).
- [47] J. Laurat, K. S. Choi, H. Deng, C. W. Chou, H. J. Kimble, *Phys. Rev. Lett.* 99, 180504 (2007).

- [48] T. Yu, J. H. Eberly, *Science* 323, 598 (2009).
- [49] C. Li, S. X. Qiang, Z. Shou, *Chin. Phys. B.* 18, 1674 (2009).
- [50] J. S. Zhang, J. B. Xu, *Opt. Com.* 282, 3652 (2009).
- [51] D. Brub, *J. Math. Phys.* 43, 4237 (2002).
- [52] G. Vidal, R. F. Werner, *Phys. Rev. A* 65, 032314 (2002).
- [53] B. L. Schumaker, C. M. Caves, *Phys. Rev. A* 31, 3093 (1985).
- [54] S. Parker, S. Bose, M. Plenio, *Phys. Rev. A* 61, 032305 (
- [55] G. Vidal, *J. Mod. Opt.* 47, 355 (2000).
- [56] C. H. Bennett, G. Brassard, S. Popescu, B. Schumacher, J. A. Smolin, W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* 76 (1996) 722-725. C. H. Bennett, D. P. Di Vincenzo, J. Smolin, W. K. Wootters, *Phys. Rev. A* 54, 3824 (1996).
- [57] S. Bose, V. Vedral, *Phys. Rev. A* 61, 040101 (2000).
- [58] S. Hill, W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* 78, 5022 (1997).
- [59] F. Mintert, M. Kus, A. Buchleitner. *Phys. Rev. Lett.*, 95:260502, (2005).
- [60] P. Horodecki. *Phys. Rev. Lett.*, 90:167901, (2003).
- [61] S. P. Walborn, P. H. Souto Ribeiro, L. Davidovich, F. Mintert, A. Buchleitner. *Nature*, 440:1022, (2006).
- [62] A. Peres, *Phys. Rev. Lett.* 76 1413 (1996).
- [63] M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, *Phys. Lett. A* 223 1 (1996).
- [64] P. Hayden, M. Horodecki, B. M. Terhal, *J. Phys. A* 34, 6891 (2001).
- [65] V. Vedral, M. B. Plenio, M. A. Rippin, P.L. Knight, *Phys. Rev. Lett.* 78, 2275 (1997).

- [66] V. Vedral, M. B. Plenio, Phys. Rev. A 57, 1619 (1998).
- [67] R. H. Dicke, Phys. Rev. 93, 99 (1954).
- [68] Z. Ficek, R. Tanas, Phys. Rep. 329, 369 (2002).
- [69] M. Horodecki, P. Horodecki e R. Horodecki, Phys. Rev. Lett. 80, 5239 (1998).
- [70] J. Eisert, PhD thesis (University of Potsdam, February 2001).
- [71] G. Vidal, R. F. Werner, Phys. Rev. A 65 32314 (2002).
- [72] M. B. Plenio, Phys. Rev. Lett. 95, 090503 (2005).
- [73] S. Shelly Sharma, N. K. Sharma, Phys. Rev. A 82, 052340 (2010).
- [74] S. Shelly Sharma, N. K. Sharma, Phys. Rev. A 76, 012326 (2007).
- [75] D. M. Greenberger, M. A. Horne e A. Zeilinger, Phys. Today, 22 (1993).
- [76] V. Coffman, J. Kundu e W.K. Wootters, Phys. Rev. A 61, 052306 (2000).
- [77] W. Dür, G. Vidal e J.I. Cirac, Phys. Rev. A 62, 062314 (2000).
- [78] C. H. Bennett, G. Brassard, Phys. Rev. Lett. 70, 1895, (1993).
- [79] L. Vaidman, Phys. Rev. A, 49, 1473 (1994).
- [80] P. G. Kwiat *et al*, Phys Rev. Lett. 75, 4337 (1995).
- [81] L. A. Wu, H. J. Kimble, J. L. Hall, H. Wu, Phys. Rev. Lett. 57, 2520. (1986).
- [82] C. H. Bennett, S. J. Wiesner, Phys. Rev. Lett. 69, 2881, (1997).
- [83] S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, H. J. Kimble, J. Mod. Opt. 47, 267, (2000).
- [84] O. Cohen, Helv. Phys. Acta 70, 710, (1997).
- [85] S. F. Pereira, Z. Y. Ou, H. J. Kimble, Phys. Rev. A 62, 042311, (2000).

- [86] E. Schrödinger, *Naturwiss.* 14, 664 (1926).
- [87] R. Glauber, The quantum theory of optical coherence. *Phys. Rev.* 130 (6), 2529 (1963). Coherent and incoherent states of the radiation field. *Phys. Rev.* 131 (6), 2766 (1963).
- [88] E. H. Kennard, *Z. Physik* 44, 326 (1927).
- [89] A. Ghosh, P. K. Das, *Mod. Phys. Let. B* 23, No 4, 575-581 (2009).
- [90] E. Wigner, On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Phys. Rev* 40,749 (1932).
- [91] D. F. Walls, G. J. Milburn, *Quantum Optics*, Springer-Verlag, Berlin (1995).
- [92] U. Leonhardt, *Measuring the quantum state of light*, Cambridge University Press, (1997).
- [93] Matteo G. A. Paris, *Phys. Rev. A* 59, 1615 (1999).
- [94] S. J. van Enk, *Phys. Rev. A* 60, 5095 (1999).
- [95] R. Simon, *Phys. Rev. Lett.* 84, 2726 (2000).
- [96] L. M. Duan, G. Giedke, J. I. Cirac, P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* 84, 2722 (2000).
- [97] W. Son, M. S. Kim, J. Lee, D. Ahn, *J. Mod. Opt.* 49, 1739 (2002).
- [98] M. Paternostro, W. Son, M. S. Kim, Giuseppe Falci, G. Massimo Palma, *Phys. Rev. A* 70, 022320 (2004).
- [99] Y. L. Lim, A. Beige e L.C. Kwek, *Phys. Rev. Lett.* 95, 030505 (2005).
- [100] J. Ye, D. W. Vernooy, H. J. Kimble, *Phys. Rev. Lett.* 83, 4987 (1999).
- [101] S. Bose, P. L. Knight, M. B. Plenio, V. Vedral, *Phys. Rev. Lett.* 83, 5158 (1999).

- [102] C. Cabrillo, J. I. Cirac, P. García-Fernández e P. Zoller, Phys. Rev. A 59, 1025 (1999).
- [103] X. L. Feng, Z. M. Zhang, X. D. Li, S. Q. Gong, Z. Z. Xu, Phys. Rev. Lett. 90, 217902 (2003).
- [104] M. Horodecki, P. Horodecki, Phys. Rev. A 59, 4206 (1999)..
- [105] C. T. Wei, P. M. Goldbart, Phys. Rev. A 68, 042307 (2003).
- [106] K. Chen, S. Albeverio, S. M. Fei, Phys Rev. Lett. 95, 040504 (2005).
- [107] T. Cover, J. Thomas, Elements of Information Theory (Wiley) (1991).
- [108] B. Shumacher, Phys. Rev. A (1994)
- [109] R. Jozsa, B. Shumacher, J. mod. Optics 43, 2343 (1994).
- [110] R. Jozsa, J. mod. Optics 41, 2343 (1994).
- [111] M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, Phys. Rev. A 60, 1888 (1999).
- [112] S. Albeverio, M.S. Fei, W. L. Yang, Phys. Rev. A 66, 012301 (2002).
- [113] A. Beige, B.G. Englert, C. Kurtsiefer, et al., Acta Phys. A, Vol.101, 357 (2002).
- [114] J. Joo *et al*, New J. Phys. 5, 136 (2003).
- [115] D. Park, S. Tamakyam, J. W. Son, arXiv:quant-ph/0808.4045v1.
- [116] J. Wang, Q. Zhang, C. J. Tang, arXiv:quant-ph/0603144v1.
- [117] M. S. Kim, G. Antesberger, C. T. Bodendorf, H. Walther, Phys. Rev. A 58, R65 (1998).
- [118] E. T. Jaynes, F. W. Cummings, Proc. IEEE 51, 89 (1963).
- [119] G. Rempe, R. J. Thompson, R. J. Brecha, W. D. Lee, H. J. Kimble, Phys. Rev. Lett. 67, 1727 (1991)

- [120] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light*. University of Press, Oxford, (1973).
- [121] B. W. Shore, P. L. Knight, The jaynes-cummings model. *J. mod. Opt.*, 40:1195, (1993).
- [122] M. J. Holland, D. F. Walls, P. Zoller, *Phys. REv. Lett.* 67, 1716 (1991).
- [123] M. Bruce, S. Haroche, J. M. Raimond, L. Davidovich, N. Zaguary, *Phys. Rev. A* 45, 519 (1992).
- [124] P. Meystre, M. Sargent III, *Elements of Quantum Optics* (Springer, Berlin, 1990).
- [125] K. Vogel, V. M. Akulin, W. P. Schleich, *Phys. Rev. Lett.* 71, 1816 (1993).
- [126] A. S. Parkins, P. Marte, P. Zoller, O. Carnal, H. J. Kimbel, *Phys. Rev. A* 51, 1578 (1995).
- [127] J. H. Erbely, N. B. Narozhny, J. J. Sánchez-Mondragón, *Phys. Rev. Lett.* 44,1323, (1980).
- [128] H. I. Yoo, J. J. Sánchez-Mondragón, J. H. Erbely, *J. Phys. A* 14, 1383 (1981).
- [129] P. J. Bardroff, E. Mayr, W. P. Schleich, *Phys. Rev. A* 51, 4963 (1995).
- [130] S. J. D. Phoenix, S. M. Barnett, *J. Mod. Opt.* 40, 979 (1993).
- [131] J. I. Cirac, L. J. Garay, R. Blatt, A. S. Parkins, P. Zoller, *Phys. Rev. A* 49, 1202 (1994).
- [132] L. Davidovich, N. Zagury, M. Bruce, J. M. Raimond, S. Haroche, *Phys. Rev. A* 50, R895 (1994).
- [133] T. Sleator, H. Weinfurter, *Phys. Rev. Lett.* 74, 4087 (1995).
- [134] M. Travis, F. W. Cummings, *Phys. Rev.* 170, 379 (1978).2000).
- [135] D. G. Cory, T. F. Havel, *Science* 304, 1456 (2004).

- [136] B. W. Shore, P. L. Knight, *J. Mod. Opt.* 40, 1195, (1993).
- [137] L. S. de la Torre, *Aplicação das funções de quase probabilidade no estudo da dinâmica de emaranhamento*, Tese de doutorado (Instituto de Física Gleb Wataghin, 2003).
- [138] M. O. Scully, M. S. Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press (1997).
- [139] E. de Almeida, *Dinâmica de estados emaranhados de íons de dois níveis, modos vibracionais e fótons*, Universidade Estadual de Londrina (2008).
- [140] M. Hillery, V. Buzek, A. Berthiaume, *Phys. Rev. A* 59, 1829 (1999).
- [141] A. Karlsson, M. Bourennane, *Phys. Rev. A* 58, 4394 (1998).
- [142] T. Yamamoto, K. Tamaki, M. Koashi, N. Imoto, *Phys. Rev. A* 66, 064301 (2002).  
A. Zeilinger, M. A. Horne, D. M. Greenberger, NASA Conf. Publ. No. 3135 (Washington, DC: National Aeronautics and Space Administration, Code NTT 1997).
- [143] G. Guo, C. Li, J. Li, G. Guo, *Phys. Rev. A* 65 042102 (2002).
- [144] X. Wang, *Phys. Rev. A* 64 012313 (2001).
- [145] V. N. Gorbachev, A. A. Rodichkina, Zhiliba, *Phys. Lett. A* 310 339. (2003).
- [146] J. Joo, Y. J. Park, S. Oh, J. Kim, *New J. Phys.* 5, 136 (2003).
- [147] X. Yan, S. Jie, S. He-Shan, *Commun. Theor. Phys.* 49, 919 (2008).
- [148] Z. L. Cao, M. Yang, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 36 4245–4253 (2003).