Universidade Estadual de Londrina

ALEXANDRE PESSUSKI CONCEIÇÃO

SEQUÊNCIAS RECURSIVAS E MÉTODOS ITERATIVOS APLICADOS NO ENSINO BÁSICO:

APLICAÇÕES EM RAÍZES IRRACIONAIS

Londrina
2021

ALEXANDRE PESSUSKI CONCEIÇÃO

SEQUÊNCIAS RECURSIVAS E MÉTODOS ITERATIVOS APLICADOS NO ENSINO BÁSICO:

APLICAÇÕES EM RAÍZES IRRACIONAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Estadual de Londrina para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Túlio Oliveira de Carvalho

Londrina
2021

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor, através do Programa de Geração Automática do Sistema de Bibliotecas da UEL

A382 Conceição, Alexandre Pessuski.

SEQUÊNCIAS RECURSIVAS E MÉTODOS ITERATIVOS APLICADOS NO ENSINO BÁSICO : APLICAÇÕES EM RAÍZES IRRACIONAIS / Alexandre Pessuski Conceição. - Londrina, 2021.

56 f. : il.

Orientador: Túlio Oliveira de Carvalho.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, 2021.

Inclui bibliografia.

1. Abordagem de sequências recursivas de primeira ordem com aplicabilidade nas raízes quadradas irracionais. - Tese. I. Carvalho, Túlio Oliveira de . II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

CDU 51

ALEXANDRE PESSUSKI CONCEIÇÃO

SEQUÊNCIAS RECURSIVAS E MÉTODOS ITERATIVOS APLICADOS NO ENSINO BÁSICO:

APLICAÇÕES EM RAÍZES IRRACIONAIS

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Estadual de Londrina para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

____
Orientador: Prof. Dr. Túlio Oliveira de Carvalho
Universidade Estadual de Londrina - UEL

____
Prof. Dr. Sérgio Carrazedo Dantas
Universidade Estadual do Paraná - UNESPAR

____
Profª. Drª. Ana Márcia Fernandes Tucci Carvalho
Universidade Estadual de Londrina - UEL

Londrina, 30 de março de 2021.

Dedicatória: Dedico esse trabalho a todos os professores e servidores públicos que dedicam a sua vida ao bem estar da população.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente ao meu orientador, que hoje chamo de amigo, Prof. Dr. Túlio Oliveira de Carvalho o qual ficou madrugadas sem dormir para me auxiliar nesse trabalho.

Agradeço a todos os professores e funcionários da Universidade Estadual de Londrina por fazerem dessa instituição um centro de excelência e referência a qual orgulhosamente foi base e alicerce para a minha formação acadêmica.

Minha família e amigos não poderiam ficar de fora pelo amparo emocional que sempre me proporcionaram.

Toda a gratidão aos meus alunos, ex-alunos e companheiros de trabalho que fazem da minha profissão uma escola de aprendizado para a vida.

"Não me julgo, de maneira alguma, capaz de apresentar aqui qualquer processo de investigação que não tenha sido já há muito tempo percebido por todos os homens de talento e de forma alguma prometo que o leitor encontrará aqui qualquer completa novidade neste assunto. Farei, no entanto, todo o possível para formular, em linguagem clara, as regras e os meios de investigação que são observados por todos os homens capazes, os quais, na maioria das vezes, não têm sequer consciência de as estarem seguindo. Embora não mantenha a ilusão de conseguir plenamente nem mesmo isso, ainda tenho a esperança de que o pouco aqui apresentado possa agradar a alguém e encontrar mais tarde alguma aplicação".

Bernard Bolzano

CONCEIÇÃO, Alexandre Pessuski. **Sequências recursivas e métodos iterativos aplicados no ensino básico:** aplicações em raízes irracionais. 2021. 55 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2021.

RESUMO

O presente trabalho aborda o estudo de métodos iterativos para obter sequências de aproximações de certos números irracionais, norteado pelas diretrizes da Base Nacional Comum Curricular. Apresentamos recortes do contexto histórico da descoberta e surgimento das grandezas incomensuráveis e métodos recursivos, a definição de uma sequência recursiva convergente para a raiz quadrada de um número real positivo e a demonstração de sua convergência. As frações continuadas darão complemento ao método recursivo citado, mostrando outra sequência de aproximações para a mesma classe de números irracionais. Exemplifica-se como as planilhas eletrônicas podem ser usadas para auxiliar o estudo das sequências recursivas. Um questionário de apoio pedagógico é incluído no trabalho.

Palavras-chave: métodos iterativos; sequências recursivas; raízes aproximadas.

CONCEIÇÃO, Alexandre Pessuski. **Recursive sequences and iterative methods applied in basic education:** applications in irrational roots. 2021. 55 p. Dissertation (Professional Master in Mathematics) - State University of Londrina, Londrina, 2021.

ABSTRACT

The present work addresses the study of iterative methods to obtain sequences of approximations of certain irrational numbers, following the guidelines of the *Base Nacional Comum Curricular*. We present some accounts of the historical context of the discovery and emergence of incommensurable quantities and recursive methods, the definition of a convergent recursive sequence for the square root of a positive real number and the proof of its convergence. The continued fractions will complement the aforementioned recursive method by showing another sequence of approximations for the same class of irrational numbers. An example is given of how spreadsheets can be used in assist the study of recursive sequences. A pedagogical support questionnaire is included in this research.

Keywords: iterative methods; recursive sequences; approximate roots.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho objetiva fazer uma abordagem aprofundada relacionando de forma direta e intrínseca dois temas que normalmente são pouco abordados no ensino básico de matemática: as sequências recursivas e as raízes quadradas irracionais com sua aproximação decimal.

Não é incomum que ao se perguntar a um aluno concluinte do ensino médio sobre os seus conhecimentos acerca de sequências numéricas, a sua resposta se limite às progressões aritméticas e geométricas. Estes conteúdos são importantes e são exemplos elementares de sequências recursivas, contendo a repetição da soma ou a repetição da multiplicação, sempre por uma constante, respectivamente no caso da progressão aritmética e da progressão geométrica. As possíveis causas para o trabalho raso, e algumas vezes nulo, de tais conhecimentos são a falta de materiais e atividades, desestímulo estudantil e, em muitos casos, falhas na formação docente. Nesta dissertação tentaremos dar um suporte para esses três problemas citados, pois ela contempla um material teórico sobre esse conteúdo, atividades de apoio pedagógico que podem ser usadas em sala de aula, diagnósticas e de rotina.

O parágrafo terceiro do artigo 35-A da Lei Nº 9.394, de 20 de Dezembro de 1996 (Lei de Diretrizes e Bases), incluído pela Lei nº 13.415, de 2017 (Base Nacional Comum Curricular), exige que: “O ensino da língua portuguesa e da matemática será obrigatório nos três anos do ensino médio, assegurada às comunidades indígenas, também, a utilização das respectivas línguas maternas”. Analisando essa Lei, em números, temos três anos somente no ensino médio para fazer o encaminhamento de saberes matemáticos para a vida dos estudantes, assim sendo, é quase que inaceitável que o estudante não tenha em momento algum desse trajeto acadêmico o senso de recorrências ou iterações para realizar cálculos na obtenção de aproximações numéricas, como as que serão discutidas ao longo deste trabalho.

Segundo a Base Nacional Comum Curricular seu principal objetivo é: “de garantir aos estudantes o direito de aprender um conjunto fundamental de conhecimentos e habilidades comuns – de norte a sul, nas escolas públicas e privadas, urbanas e rurais de todo o país." Todos os saberes pertinentes à formação básica do estudante são fundamentados em dez competências básicas, sendo todas elas desenvolvidas de forma direta ou indireta com o ensino de matemática. Neste trabalho, vamos nos limitar a fazer uma análise somente das habilidades que tangem o tema aqui proposto. De acordo com a Lei nº 13.415/2017, que alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, e incluiu a nova Base Nacional Comum Curricular (BNCC) o estudante deve concluir o ensino básico com as seguintes habilidades:

- Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura (EF07MA14)**;**
- Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes (EF08MA10);
- Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes (EF08MA11)**;**
- Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade) (EF09MA01);
- Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica (EF09MA02);

As habilidades pertinentes ao currículo do ensino fundamental são base e pré-requisitos para a compreensão plena dos conteúdos estudados no ensino médio, e a falta desses conhecimentos implica em uma sistematização falha na compreensão do aluno sobre conceitos geométricos, relação de grandezas e, principalmente, na lógica de programação que é, inclusive, um dos alicerces da segunda e quinta competências gerais da BNCC.

O texto que segue, pode tanto servir como base didática para docentes planejarem e executarem as suas aulas sobre as sequências recursivas e números irracionais, como também, pode ser utilizado por estudantes que desejam ampliar as suas áreas de conhecimento lógico-matemáticos.

Quanto ao aspecto histórico abordado neste trabalho, o mesmo se baseia na necessidade de se apresentar a origem e evolução dos objetos de estudo. D'Ambrósio diz que:

> O uso da História da Matemática no ensino de Matemática satisfaz o desejo de saber como se originaram e desenvolveram os assuntos em matemática; proporciona grande satisfação por si só, mas também pode ser útil no ensino e na investigação; ajuda a compreender a nossa herança cultural. (D'AMBRÓSIO, 2007, pág. 16).

Quanto às dinâmicas docentes em sala de aula é importante ressaltar que, mesmo quando os conhecimentos do professor são limitados acerca da história das ciências e da matemática, essas informações devem ser socializadas com os discentes, fato esse defendido por D'Ambrósio quando relata que:

> É importante dizer que não é necessário que o professor seja um especialista para introduzir História da Matemática em seus cursos. Se em algum tema o professor tem uma informação ou sabe de uma curiosidade histórica, deve compartilhar com os alunos. Se sobre outro tema ele não tem o que falar, não importa. Não é necessário desenvolver um currículo, linear e organizado, de História da Matemática. Basta colocar aqui e ali algumas reflexões. Isto pode gerar muito interesse nas aulas de Matemática. E isso pode ser feito sem que o professor tenha se especializado em História da Matemática. (D'AMBRÓSIO, 2007, pag. 13).

Assim sendo, temos justificado de forma clara e plausível o tratamento histórico antecedendo os objetos de estudo matemáticos neste trabalho. Quanto a esses objetos, os argumentos que embasam o seu estudo deverão ser encontrados ao longo da leitura deste texto.

O capítulo 2 traz reflexões sobre a ordem de grandeza de números, considerando um indivíduo dentro de vários contextos, ou conjuntos, e estimando sua representação numérica como parte. Deseja-se provocar no leitor reflexões sobre o significado da precisão nas aproximações numéricas, especialmente quando se usa a representação decimal, dando exemplos de como uma aproximação com mais do que duas casas decimais pode ser importante para distinguir a existência de algo do vazio.

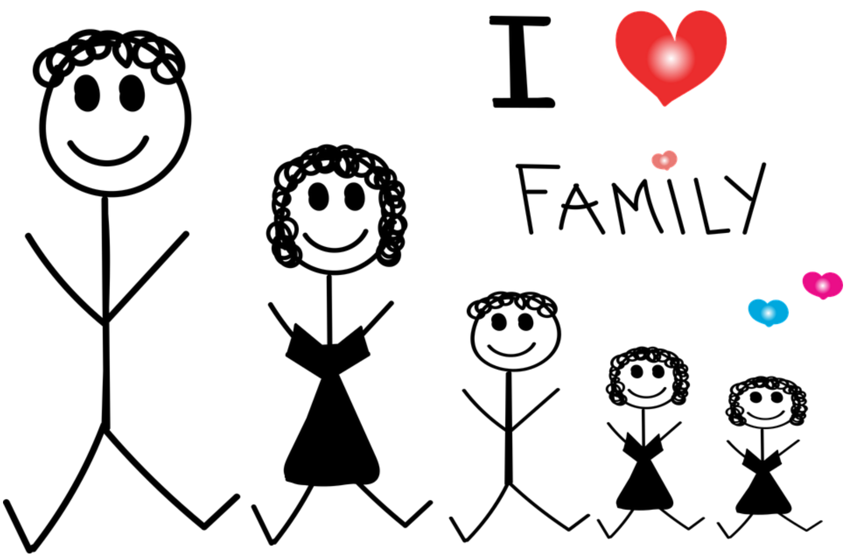
A estrutura do trabalho, com capítulos curtos, é descrita a seguir. O capítulo 3 faz um apanhado histórico sobre o surgimento das grandezas incomensuráveis, os números irracionais, os métodos recursivos utilizados na Babilônia para cálculo de raiz quadrada, o método da falsa posição, uma abordagem breve da sequência de Fibonacci e, por fim o Método de Newton-Raphson para determinação de raízes em funções. No capítulo 4 é feito um estudo sobre os métodos recursivos para cálculo de raízes quadradas, onde se obtém sequência é determinada por meio polinomial e utilizando o Método de Newton-Raphson. Este capítulo é finalizado fazendo um estudo das frações continuadas e a sua aplicabilidade na representação e cálculo de raízes irracionais. O capítulo 5 é destinado ao uso de planilhas eletrônicas programáveis, a fim de exibir, com exemplos, a programação de alguns esquemas iterativos. No capítulo 6 é apresentado um questionário de apoio pedagógico aos professores que desejam fazer um mapeamento de habilidades e competências dos estudantes, ou simplesmente utilizar as atividades nele presentes em aulas regulares. No capítulo 7 apresentamos as considerações finais. No apêndice constam as Competências Gerais da Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

2 APROXIMAÇÕES NUMÉRICAS E A NOSSA EXISTÊNCIA

É muito comum e recorrente durante uma aula de matemática, quando alunos resolvem problemas cuja solução é um número não inteiro, que surja a pergunta: “uso quantas casas depois da vírgula?” Muitas das vezes damos uma resposta mecanizada e sem muita empolgação que “dois algarismos decimais são suficientes”. Na nossa análise cotidiana, nos prendemos a visualizar apenas as subunidades de distância (centímetros) e monetárias (centavos), porém uma análise um pouco mais aprofundada e reflexiva sobre os espaços onde vivemos e uma simples comparação com os números que os constituem, ajuda os alunos a compreenderem na prática a representação de cada casa decimal de um número não inteiro.

Supondo uma casa onde vivam 5 pessoas, você seria o dígito representativo dos decimais, já que representa 1/5 dos moradores, o que é equivalente a 20%, ou em escrita decimal 0,2.

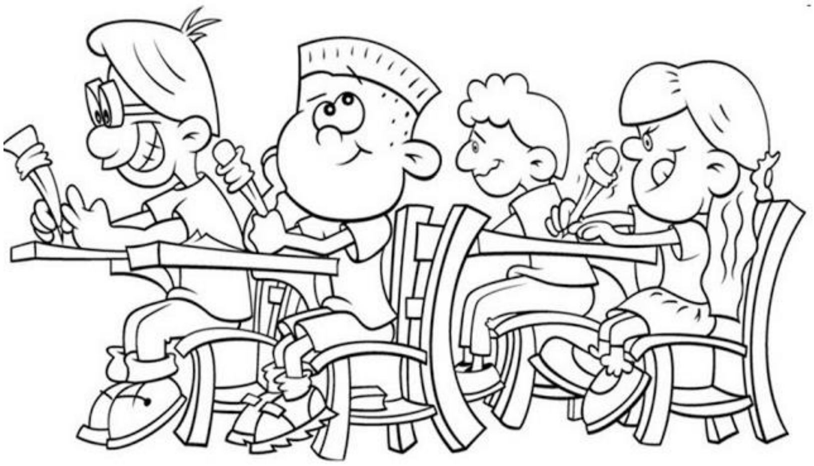
Figura 1: Ilustração de uma família



Fonte: https://pixabay.com/pt/illustrations/fam%C3%ADlia-de-bonecos-palitos-5556542/

Em uma sala de aula superlotada com 50 alunos você seria o algarismo centesimal, pois 1/50 = 0,02.

Figura 2: Sala de aula



Fonte: https://www.tudodesenhos.com/uploads/images/1858/boa-convivencia-em-sala-de-aula.jpg

Já pensando em uma escola de médio porte com 1000 alunos uma pessoa sentada sozinha e refletindo sobre a vida, seria representado pela casa milesimal, tendo em vista 1/1000 = 0,001.

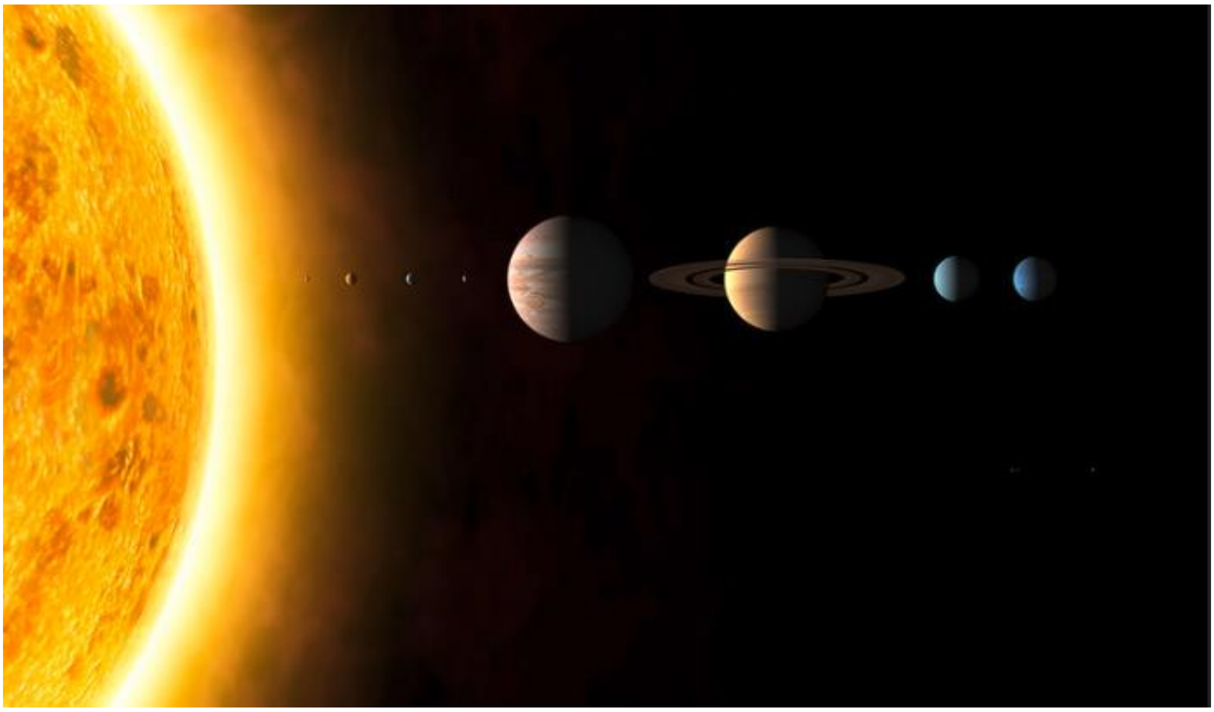
Figura 3: Multidão

Fonte: https://f088b146830a59b5.cdn.gocache.net/uploads/noticias/2020/03/10/cupjry7bj8vb.jpg

Considerando que a distância entre a Terra e o Sol é em média de 149.600.000 quilômetros e que o diâmetro da Terra é de 12.742 quilômetros, teremos que o tamanho da Terra comparada ao trajeto da luz que nos mantém vivos é de 0,0000851, ou seja, se encontra na ordem dos centésimos de milésimos do raio orbital em que se translada. Consequentemente, cálculos astronômicos com erro de 0,01% nesse trajeto são erros maiores que todo o nosso planeta. Algo que se aproxime da Terra a essa mesma distância deve ter o trajeto calculado com precisão de pelo menos 99,9915% para determinar risco de colisão ou simplesmente algo que passará “próximo” à nossa órbita.

Interessante também pensar na impossibilidade de se representar uma “maquete” em proporções reais do sistema solar. Usando proporcionalidade, a Terra seria representada por uma bola de gude de raio dois centímetros que deveria ser colocada a uma distância de 11 quilômetros do Sol. A fala do astronauta James Irwin, tripulante do ônibus espacial Apollo XV, aguça a nossa imaginação sobre o nosso tamanho no planeta: “A medida que ficamos mais e mais distantes, a Terra diminui de tamanho. Finalmente ela se reduz ao tamanho de uma bola de gude, a mais bela bola de gude que você pode imaginar... ver isso muda um homem.”

Figura 4: Sistema Solar



Fonte: https://www.flickr.com/photos/pedrodarte/18861338195

Em meio a esse infinito de grandezas, ficamos reduzidos a ínfimos decimais. Porém, independente da ordem à qual estamos inclusos, é importante saber que existimos e temos a nossa importância na construção desse todo, esse universo de grandezas.

No capítulo a seguir trataremos dos aspectos históricos relativos ao tema da dissertação. Esse olhar cronológico do trabalho é de suma importância para que se entenda um pouco melhor como ocorreram os surgimentos e desenvolvimentos dos objetos matemáticos aqui estudados.

3 CONTEXTUALIZAÇÃO HISTÓRICA

Apresentamos neste capítulo, recortes da História da Matemática que se relacionam ao conteúdo de sequências recursivas cujo tratamento, no ensino básico, será proposto e desenvolvido nos capítulos 3 e 4.

O primeiro ponto que destacamos é o surgimento das grandezas incomensuráveis na Grécia Antiga.

Muitos conceitos matemáticos podem parecer simples quando analisados de modo superficial, mas quando estudados de forma criteriosa e aprofundada se mostram bastante ricos. O conceito ligado à comensurabilidade é relativamente simples, mas sua negação: a incomensurabilidade, embute uma carga de informações desproporcional e desconcertante.

Para os gregos da escola pitagórica tudo eram números: os números inteiros. As medidas de grandezas geométricas deveriam, consequentemente, possuir uma proporção comum. Segundo Ávila:

> Uma questão com que lidavam os matemáticos gregos daquela época era a de comparar grandezas da mesma espécie, como dois segmentos de reta, duas áreas ou dois volumes. No caso de dois segmentos retilíneos AB e CD, dizer que a razão AB/CD é o número racional m/n, significava para eles (e ainda significa para nós) que existia um terceiro segmento EF tal que AB fosse m vezes EF e CD n vezes esse mesmo segmento EF. (ÁVILA, 1984 pág. 10).

A descoberta de grandezas incomensuráveis na escola pitagórica, ou seja, grandezas que não possuem medidas em comum com outras desencadeou a chamada "Crise dos Incomensuráveis" entre seus membros. Existem algumas divergências quanto aos fatos históricos acerca dessa crise, mas o fato é que um dos princípios base da escola havia sido quebrado, o de que tudo são números inteiros. Quebrar princípios provoca, até em tempos atuais, tribulações emocionais por parte dos envolvidos. A importância que os pitagóricos davam para a ideia de comensurabilidade é descrita por Boyer em:

> Tinha sido uma base fundamental do pitagorismo que a essência de todas as coisas, na geometria bem como nos negócios práticos e teóricos do homem, é explicável em termos de *arithmos*, ou propriedades intrínsecas de números inteiros ou suas razões. (BOYER, 1989, pág. 72)

Alguns historiadores defendem a ideia de que o conceito de incomensurabilidade foi escondido para que os que não fossem membros da escola pitagórica não tivessem dissociações psicológicas e emocionais. Eves faz uma transcrição do cenário grego onde se pode ter uma ideia do ocorrido naquele período:

> A descoberta da existência de números irracionais foi surpreendente e perturbadora para os pitagóricos. [...] Tão grande foi o 'escândalo lógico' que por algum tempo foram feitos esforços para manter a questão em sigilo, e há uma lenda que conta que o pitagórico Hipaso (ou um outro talvez) foi lançado ao mar pela ação ímpia de revelar o segredo a estranhos ou (de acordo com outra versão) que ele foi banido da comunidade pitagórica, sendo-lhe erigido um túmulo, como se estivesse morto. (EVES, 1969, pág. 60-61)

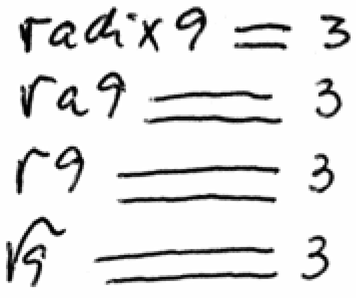
Segundo Mlodinow (2010, pág. 37): os pitagóricos chamaram tais comprimentos de *alogon*, "não racionais", que hoje traduzimos como "irracional". Todavia a palavra *alogon* tinha duplo sentido: significava também "não deve ser falado".

No diálogo entre Sócrates e Mênon (PLATÃO, Trad. Maura Iglésias, 2001) relatado por Platão, Sócrates faz uso da diagonal de um quadrado de lado dois pés para encontrar um retângulo de área oito pés quadrados. Na escrita matemática atual seria o equivalente a calcular a área de um quadrado de lado $2\sqrt{2}$, sendo $\sqrt{2}$ um incomensurável.

Até esse momento histórico, a primeira das famílias de números irracionais descobertas teria sido a das raízes quadradas. O clássico problema da "duplicação do cubo" vai aportar a necessidade das raízes cúbicas nos conjuntos de medidas. Mencionamos ainda que, somente no século XIX d.C., Paolo Ruffini, Niels Henrik Abel e Évariste Galois conseguiram provar ser impossível resolver o problema da duplicação do cubo utilizando régua e compasso, instrumentos comumente usados para encontrar medidas correspondendo a números irracionais.

Embora o surgimento do conceito de números irracionais seja datado de antes de Cristo, o primeiro símbolo para representar tal número tem registro do século XVI d.C. no livro de álgebra *Die Coss*, de autoria do matemático alemão Christoff Rudolff (1499-1545). Segundo alguns historiadores, o símbolo atual seria uma "deformação" da letra "r" significa *radix*, cuja tradução quer dizer "lado" ou "raiz".

Figura 5 - Mudanças do símbolo de radical



Fonte: http://matematicaenigmatica.blogspot.com/2009/11/origem-do-simbolo-da-raiz-quadrada.html

Evidentemente não existe um número grande de registros sobre conhecimentos matemáticos relativos à Civilização Babilônica. Alguns historiadores chegam até mesmo a fazer comparativos com o que se tinha de matemática no mesmo período na Grécia, como é o caso de Kline (1972, pag. 14) quando afirma que, comparada com a dos gregos**,** “[a Matemática] dos egípcios e dos babilônios é como as garatujas de crianças que estão aprendendo a ler, comparadas com a boa literatura”. Fato é que esses povos não são atualmente conhecidos por suas contribuições nessa área de conhecimento, porém, haviam interessantes procedimentos matemáticos desenvolvidos por essa civilização, e o mais notável, que é o algoritmo para cálculo de raízes quadradas, será estudado detalhadamente mais adiante nessa dissertação.

Indo contra a ideia do historiador citado nas linhas anteriores, os babilônios desenvolveram um procedimento cuja estrutura matemática recursiva é requintada. Os babilônios possuíam tabelas de coeficientes onde constavam números para uso em cálculos diversos, como por exemplo o tablete YBC 7289, datado com estimativa entre 2.000 a 1.600 a.C., feito em argila e com texto em escrita cuneiforme. Essa peça contém um quadrado com a respectiva medida do lado, coeficiente numérico para cálculo de sua diagonal e o valor dessa diagonal. Esse coeficiente tem precisão de seis casas decimais quando comparado à $\sqrt{\mathbf{2}}$ que é a constante utilizada nesse procedimento. Beery (2012) diz ser esta "a maior precisão conhecida (...) no mundo antigo". Acredita-se que esse tablete pertencia a um aprendiz escriba que provavelmente teria copiado o valor sexagesimal de $\sqrt{\mathbf{2}}$ de outra tabuleta.

Embora aparente ser um conhecimento contemporâneo devido à sua aplicabilidade nas áreas computacionais, historicamente as sequências recursivas foram utilizadas por civilizações anteriores ao calendário Cristão. Talvez um dos primeiros registros que se tenha desse tipo de conhecimento seja o “Método da Falsa Posição”, procedimento utilizado por vários povos da antiguidade como os Egípcios, Hindus, Gregos e Chineses para resolver problemas cuja resolução recaia em equações do primeiro grau.

É praticamente impossível determinar com precisão em qual civilização da antiguidade tal método foi efetivamente criado, o que é citado por Medeiros e Medeiros:

> É muito difícil traçar a origem exata do método da falsa posição. Tanto os autores quanto as datas de importantes documentos da História Antiga da Matemática são de atribuições bastante imprecisas. Certo é que tanto no antigo Egito quanto na China, o referido método era há muito conhecido, ainda que com denominações diversas e com distintas convicções quanto à sua validade e generalidade. Como já afirmamos acima, um dos documentos mais antigos que faz referência ao método da falsa posição é o papiro Rhind, compilado pelo escriba Ahmes por volta de 1650 a.C.. Esse texto, entretanto, é um relato de conhecimentos bem mais antigos e não da exata autoria de Ahmes. Fica, portanto, difícil precisar os verdadeiros autores das ideias ali expostas, assim como a época dos seus surgimentos. (MEDEIROS e MEDEIROS, 2004, pág. 549).

Apesar dos registros não darem precisão exata quanto ao local de surgimento do método da falsa posição, devemos citar que o mais famoso documento que aborda tal assunto foi escrito na civilização egípcia datado em 1650 a.C. Trata-se do Papiro de Rhind ou Ahmes que contém cerca de 85 problemas matemáticos resolvidos na forma de manual prático, copiados em escrita *hierática*, pelo escriba Ahmes. Tais problemas retratavam situações cotidianas vivenciadas pelos povos antigos, tais como armazenamento de grãos, preço do pão, alimentação dos animais, charadas numéricas, dentre outras situações corriqueiras.

Uma definição matematicamente formalizada desse método, consultada na wikipédia, é a seguinte:

> Método da posição falsa ou *regula falsi* é um método numérico usado para resolver equações lineares definidas em um intervalo [a, b], partindo do pressuposto de que haja uma solução em um subintervalo contido em [a, b]. E assim, diminuindo esse subintervalo em partes cada vez menores, a solução estará onde a função tem sinais opostos, segundo o Teorema do Valor Intermediário. A determinação do tamanho do subintervalo é definida pelo critério de exatidão.
>
> Fonte: www.wikipedia.com

Para determinar “a receita” que os egípcios utilizavam para resolver tais problemas devemos considerar uma equação linear da forma $ax = b$ e tomar x_0 como sendo uma tentativa de solução dessa equação, substituindo esse valor na equação inicial teremos a expressão $a.x_0 = c$, montando uma simples regra de proporção direta isso nos leva à seguinte igualdade:

$$\frac{x}{b} = \frac{x_0}{c}$$

Dai então nos surge que:

$$x = x_0.\frac{b}{c}$$

Para exemplificar tal método usaremos o problema 26 do já citado Papiro de Rhind que nos diz: “A quantidade e sua quarta parte adicionadas dão 15. Qual é essa quantidade?”.

Não é preciso muita destreza matemática para tornar esse problema uma simples equação linear e encontrar como solução o número natural 12. Porém, nesse período não haviam procedimentos algébricos que hoje utilizamos e tornam a resolução de toda equação linear algo simples e quase mecânico. A resolução pelo método abordado consiste em “chutar” uma solução para esse problema, porém, temos um “chute” com intencionalidade numérica, que é o de tornar os valores expressos no problema em números inteiros. Assim as tentativas possíveis seriam múltiplos de quatro, para que assim tomada a sua quarta parte tenhamos valores não fracionados. Se considerarmos oito como sendo uma tentativa de resposta ao problema teremos que:

$$8 + \frac{8}{4} = 10$$

Considerando então $x_0 = 8, b = 15$ e $C = 10$ isso nos leva a:

$$x = 8.\frac{15}{10} = 12$$

Vale ressaltar que tal processo foi aqui descrito com procedimentos matemáticos não usuais na época, pois os egípcios faziam uso apenas de frações unitárias (com numerador igual a um). Assim a solução ilustrada no papiro seria, nesse caso, encontrada simplesmente multiplicando-se oito por um inteiro mais um meio. Outros problemas recorrentes necessitavam transformar a parte fracionária desse produto em somas de frações unitárias.

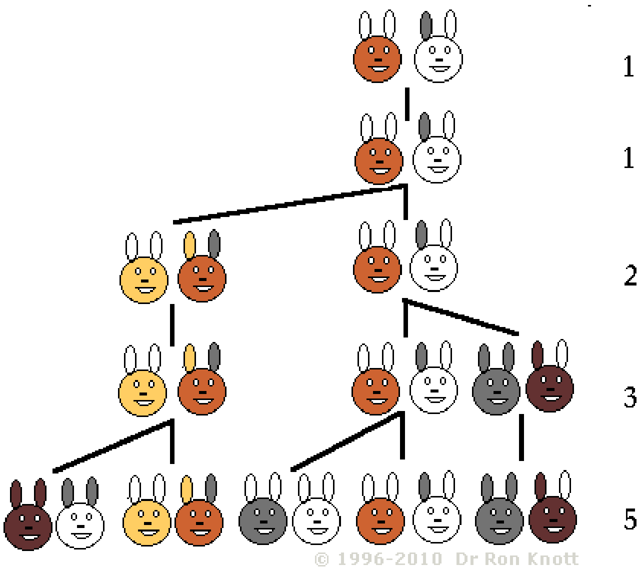
Atentemos ao fato de que esse não era o único objeto de conhecimento matemático dos egípcios, como é citado em Roque e Pitombeira:

> Por vezes é afirmado que os egípcios resolviam problemas com a regra de falsa posição. Essa afirmação pode dar a impressão de que ela era o método que os egípcios usavam sistematicamente para resolver problemas como o discutido acima. Isso não é verdade. Por vezes eles usavam a regra, por vezes utilizavam outros métodos. (ROQUE e PITOMBEIRA, 2012, pág. 35)

Leonardo Fibonacci publicou em seu livro *Liber Abaci* (1202) uma sequência numérica definida por recorrência de termos pré-definidos que modela o crescimento de casais de coelhos a partir de uma sequência recursiva onde se definem os dois primeiros termos e a partir do terceiro termo cada termo é dado pela soma dos dois termos anteriores. Em linguagem matemática:

$$A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$$

Figura 6: Diagrama para representar a sequência Definida por Fibonacci



Fonte: http://www.ime.unicamp.br/~apmat/um-problema-de-fibonacci/

Encerrando a linha histórica sobre os temas abordados nessa dissertação faremos uma menção ao cálculo de raízes irracionais de equações algébricas, no qual o uso de métodos recursivos é essencial e indispensável. Um dos métodos mais requintados para resolver tais equações é o “Método de Newton-Raphson”, sendo o primeiro o sistematizador de tal método e o segundo nome se refere ao matemático que aprimorou ainda mais esse procedimento. Segundo Machado e Alves:

> O método de Newton, cujo objetivo é estimar raízes de uma função, foi proposto por Isaac Newton em dois momentos: em 1669 em *De Analysi Per Aequaciones Número Terminorum Infinitas* composta por ideias adquiridas em 1665-1666 sendo publicado apenas em 1711 e em *De Metodis Fluxionum et Serierum Infinitarum*, escrito em 1671 sendo aprimorado para qualquer tipo de função real em 1690 por Joseph Raphson. Daí sua popularidade como método de Newton-Raphson. (MACHADO e ALVES, 2013, pág.30)

É interessante salientar que o método publicado por Newton teve suas origens em outros trabalhos matemáticos anteriores a ele, ficando ao seu encargo aprimoramentos e generalizações sobre tais assuntos.

Começaremos no próximo capítulo o estudo detalhado das sequências recursivas com foco no cálculo de raízes irracionais.

4 SEQUÊNCIAS RECURSIVAS PARA O CÁLCULO DE RAÍZES

Vamos, antes de qualquer coisa, conceituar de forma clara o que é uma “sequência recursiva” citada no título do capítulo. Uma sequencia em matemática é definida como uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais.

No Dicionário Online de Português encontramos o termo “recursivo” descrito como:

> Adjetivo: Que pode ser repetido inúmeras vezes, de modo infinito. Que se consegue repetir pela aplicação da mesma regra; em que há repetição. *Fonte: https://www.dicio.com.br/*

Em matemática, uma sequência é dita recursiva ou recorrente quando determinado termo pode ser calculado em função de termos anteriores, em Morgado e Carvalho temos que:

> Muitas sequências são definidas recursivamente (isto é, por recorrência), ou seja, por intermédio de uma regra que permite calcular qualquer termo em função do(s) antecessor(es) imediato(s) (MORGADO E CARVALHO, 2013 pág. 68)

A sequência de Fibonacci é um entre vários exemplos que podemos usar para ilustrar tal conceito. Nela, a partir do terceiro termo, cada elemento é a soma dos dois anteriores, e os dois primeiros termos são ambos iguais a um.

Para o desenvolvimento do estudo que segue foram usadas como referências as obras Guidorizzi, H.L. Um Curso de Cálculo vol. 4 e Lima, E.L. Curso de Análise vol. 1.

Nosso primeiro objeto de estudo matemático voltado ao cálculo de raízes será uma sequência recursiva cujo primeiro termo é igual à parte inteira da raiz quadrada de um número racional positivo. Dado $\mathrm{a}>1$, seja b a parte inteira de $\sqrt{a}$. Denotamos a diferença como:

$$\mathrm{x}=\sqrt{a}-b \Rightarrow \sqrt{a}=\mathrm{b}+\mathrm{x}$$

Elevando ambos os termos da última igualdade ao quadrado, temos que:

$$\mathrm{a}=\mathrm{b}^2+2.b.\mathrm{x}+\mathrm{x}^2$$

$$b^2+2.b.\mathrm{x}+\mathrm{x}^2=\mathrm{a}$$

$$2.b.x + x^2 = a - b^2$$

Dessa expressão concluímos que o termo $2.b.\mathrm{x} + \mathrm{x}^2$ representa a diferença entre o radicando e o quadrado da parte inteira da raiz. Nesse binômio o termo x^2 é menor do que o termo $2\mathrm{bx}$, pois $0<\mathrm{x}<1 \leq b$. Como buscamos, inicialmente, valores aproximados e o termo x^2 é de uma grandeza de ordem menor do que $2.b.x$, desprezaremos esse termo. Assim temos aproximadamente:

$$2bx \approx a - b^2 \Rightarrow x \approx \frac{a}{2b} - \frac{b}{2}$$

Substituindo essa expressão encontrada na igualdade $\sqrt{a} = \mathrm{b} + \mathrm{x}$, obtemos:

$$\sqrt{a} \approx \mathrm{b} + \frac{a - b^2}{2b}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} \approx \frac{2b^2 + \mathrm{a} - b^2}{2b}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} \approx \frac{\mathrm{a} + \mathrm{b}^2}{2b}$$

para concluir finalmente que:

$$\sqrt{a} \approx \frac{a}{2b} + \frac{b}{2}$$

Lembramos que esta relação foi obtida a partir de uma aproximação, quando desprezamos o termo x^2. Este fato se apresenta ao notarmos que o membro direito é um número racional, já que a e b são racionais e o conjunto dos números racionais é fechado para as quatro operações básicas. Vamos examinar o que falta para tornar esta aproximação uma igualdade. Defina:

$$b_1 = \frac{a}{2b} + \frac{b}{2}$$

e escreva

$$\sqrt{a} = \mathrm{b}_1 + \mathrm{x}_1 \Rightarrow x_1 \approx \frac{a - b_1^2}{2b_1}$$

em que usamos a mesma ideia de aproximação para obter um valor aproximado para x_1.

Utilizando os mesmos procedimentos algébricos já citados encontraremos:

$$\sqrt{a} \approx \frac{a}{2b_1} + \frac{b_1}{2}$$

Definidos então os valores de a e b, teremos a sequência:

$$\left(b, \frac{a}{2b} + \frac{b}{2}, \frac{a}{2b_1} + \frac{b_1}{2}, \frac{a}{2b_2} + \frac{b_2}{2}, \frac{a}{2b_3} + \frac{b_3}{2}, \ldots, \frac{a}{2b_{n-1}} + \frac{b_{n-1}}{2}, \ldots\right)$$

em que a sequência (b_n) satisfaz a relação recursiva:

$$b_n = \frac{a}{2b_{n-1}} + \frac{b_{n-1}}{2}$$

Esse processo se estende ao infinito, pois a cada passo obtemos uma aproximação racional para a raiz quadrada de a. De acordo com a precisão necessária nos cálculos podemos interrompê-los em algum ponto na construção da sequência. Como exemplo, vamos calcular $\sqrt{12}$. Sabemos que a sua parte inteira é **3**, pois $3^2 = 9 < 12 < 4^2 = 16$**.** Portanto $\mathrm{a} = 12$ e $\mathrm{b} = 3$.

Na primeira iteração teremos:

$$b_1 = \frac{12}{2.3} + \frac{3}{2} = 3{,}5$$

Para a segunda iteração

$$b_2 = \frac{12}{2.3{,}5} + \frac{3{,}5}{2} = \frac{97}{28} \approx 3{,}46429 \ldots$$

Já na segunda iteração, encontramos um número com três casas decimais de precisão, já que **$3{,}464^2$ = 11,999296** e **$3{,}465^2$ = 12,006225** o que nos mostra uma grande eficiência nessa sequência recursiva.

Para provarmos a convergência da sequência, utilizaremos como regra a seguinte propriedade fundamental dos números reais: toda sequência decrescente limitada inferiormente converge. Pode-se provar que este resultado é equivalente ao axioma do supremo (CARVALHO, 2017), normalmente tomado para finalizar a construção do conjunto dos números reais como corpo ordenado *completo*. A noção de convergência de sequências aqui utilizada pode ser enunciada, de forma coloquial, como “se uma sequência decresce e não ultrapassa um certo ponto da reta, ela é forçada a se acumular em algum ponto”.

Uma sequência é chamada monótona quando é sempre crescente ou sempre decrescente. Temos em tela o caso da sequência definida pela recorrência:

$$b_n = \frac{a}{2b_{n-1}} + \frac{b_{n-1}}{2}$$

Vamos mostrar que esta é uma sequência monótona decrescente a partir do seu segundo termo.

Antes, porém, vamos provar que o segundo termo dessa sequência é sempre maior que o primeiro, escolhido como parte inteira da raiz quadrada do número dado $a>1$. Se considerarmos:

$$b_1 = b$$

$$b_2 = \frac{a}{2b_1} + \frac{b_1}{2}$$

Temos que provar que $b_2 - b_1 > 0$. Olhando as definições dadas temos que:

$$a_2 - a_1 = \frac{a}{2b} + \frac{b}{2} - b = \frac{a}{2b} - \frac{b}{2} = \frac{a - b^2}{2b}$$

Lembrando que o ponto de partida foi uma aproximação por falta da “suposta” raiz, temos que o numerador é positivo, assim como o denominador. Com isto, temos que:

$$\frac{a - b^2}{2b} > 0 \Rightarrow b_2 > b_1$$

Agora vamos provar que a sequência é limitada inferiormente por $\sqrt{a}$. Surge então a desigualdade a seguir para ser analisada:

$$\sqrt{a} < \frac{a}{2b_n} + \frac{b_n}{2}$$

Considerando que ambos são números positivos, elevando ambos os termos ao quadrado, temos:

$$a < \frac{a^2}{4{b_n}^2} + \frac{a}{2} + \frac{{b_n}^2}{4}$$

subtraindo a de ambos os membros, temos a desigualdade equivalente:

$$\frac{a^2}{4{b_n}^2} - \frac{a}{2} + \frac{{b_n}^2}{4} > 0$$

observando que este é um trinômio quadrado perfeito:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{a^2}{{b_n}^2} - 2a + {b_n}^2\right) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}\left(\frac{a}{b_n} - b_n\right)^2 > 0$$

Notemos que, neste ponto, podemos concluir pela validade das desigualdades, porque o quadrado de um número não nulo é sempre positivo.

Por fim provaremos que essa sequência é decrescente a partir do segundo termo, ou seja $b_n < b_{n-1}$ para todo $n \geq 3$. Isto equivale a demonstrar a desigualdade:

$$\frac{a}{2b_{n-1}} + \frac{b_{n-1}}{2} - b_{n-1} < 0$$

que equivale a:

$$\frac{a}{2b_{n-1}} - \frac{b_{n-1}}{2} < 0 \Leftrightarrow \frac{a - b_{n-1}^2}{2b_{n-1}} < 0$$

Como já vimos anteriormente, a partir do segundo termo, o numerador é negativo, ou seja, temos válida também que $b_n < b_{n-1}$ para todo $n \geq 3$.

Como a sequência $(b_n)_{n\geq 2}$ é monótona decrescente a partir do segundo termo e limitada inferiormente, concluímos que ela converge. Estabelecemos agora seu limite, denotando-o por $x = \lim_{n\to\infty} b_n$. Observe inicialmente que $x > 0$, porque $b > 0$ e $b_n \geq b$. Lembrando a recorrência de b_n:

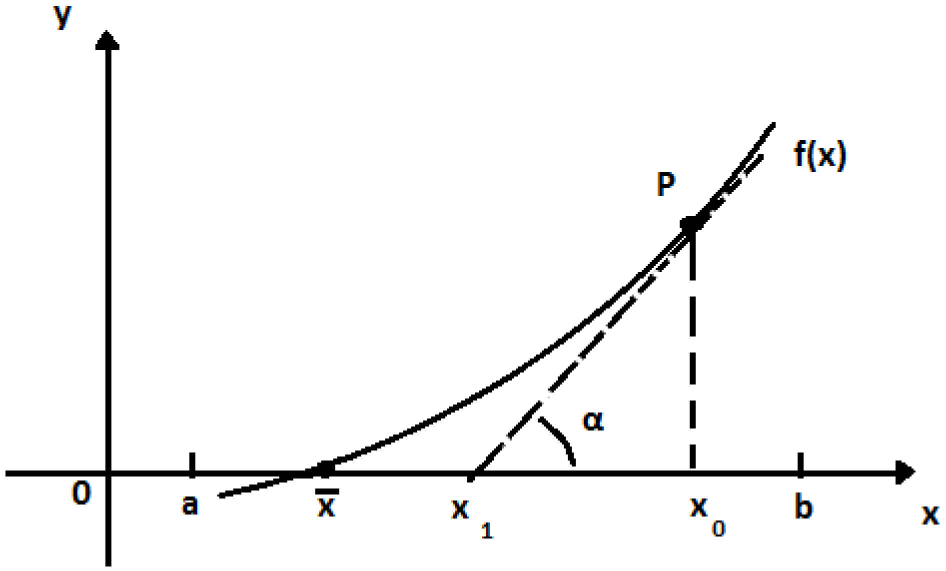
$$b_n = \frac{a}{2b_{n-1}} + \frac{b_{n-1}}{2} \Rightarrow x = \frac{a}{2x} + \frac{x}{2}$$

Manipulando os termos, concluímos que $x^2 = a$,ou seja, (b_n)converge para a raiz quadrada positiva de a.

Outra forma de se obter o método iterativo acima, utiliza-se uma ferramenta de cálculo numérico chamada “Método de Newton-Raphson”. Embora esse método seja estudado em cursos superiores, existe a possibilidade de simplificar tal procedimento a fim de que possa ser entendido por estudantes do ensino médio.

Tal método consiste em aproximar a raiz de uma função pela raiz da reta que tangencia essa função em determinado ponto.

Figura 7: Aproximação da raiz de uma função pela raiz de uma reta



Fonte: https://www.engquimicasantossp.com.br/2014/01/metodo-de-newton-raphson.html

Na imagem ilustrada acima, fica visível geometricamente esse processo. Notemos que a equação da reta é dada por:

$$y - f(x_0) = m.(x - x_0)$$

A raiz dessa equação, ou seja, o valor de x tal que $y = 0$,é dado por:

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{m}$$

Na expressão acima, o coeficiente m da reta tangente é dado pela derivada da função calculada no ponto x_0. A derivada de uma função num ponto, quando existe, é a taxa de variação instantânea da mesma. Em notação matemática temos:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

ou ainda

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Esta abordagem permite atacar o problema de obter aproximações para a n-ésima raiz positiva de um número positivo. Para fundamentá-la, basta assumir a chamada "regra do tombo" para a derivada:

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

em que $n \geq 1$ é um número natural. Esta regra também poderia ser parcialmente explicada admitindo-se a regra da derivada do produto de funções: se u, v são funções deriváveis num intervalo, então seu produto é derivável no mesmo intervalo é:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Usando a regra do produto e que, evidentemente, a derivada da função linear $u(x) = x$ é igual a **1** (visto que o ângulo com o eixo das abscissas é **45º**, cuja tangente é **1**), temos:

$$(x^2)' = x'.x + x.x' = x + x = 2x$$

Se $(x^k)' = kx^{k-1}$, para algum $k \geq 1$, então:

$$(x^{k+1})' = (x.x^k)' = x^k + x.k.x^{k-1} = (k+1)x^k$$

o que justifica, indutivamente, a regra do tombo.

Voltando ao método de Newton-Raphson, temos que a raiz da reta que tangencia a função no ponto $\left(x_0, f(x_0)\right)$é a abscissa: $x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f\prime(x_0)}$. Reescrevendo esta aproximação de forma recursiva, temos:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Considerando, em particular, a função $f(x) = x^2 - a$,em que $a > 0$,obtemos a relação de recorrência, segundo o método de Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n}$$

coincidindo com a fórmula recursiva já vista.

Para obter uma fórmula para aproximações de raízes cúbicas de um número $a > 0$, partimos da função $f(x) = x^3 - a$, obtendo:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - a}{3x_n^2} = \frac{2x_n}{3} + \frac{a}{3x_n^2}$$

Dependendo do interesse da turma, pode-se ainda determinar e explorar recorrências para determinação de aproximações de raízes de equações polinomiais.

Outra forma de se calcular raízes irracionais é por meio das chamadas *frações continuadas*. Essencialmente, esse método consiste em representar um dado número pela soma de um inteiro com uma fração estendida, o qual expomos a seguir, procurando dar detalhes em exemplos acessíveis ao nível do ensino básico.

Definição. Uma fração continuada é uma expressão da forma:

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{a_4 + \dots}}}}$$

em que o primeiro termo, a_0, é um número inteiro e os demais $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$, são inteiros positivos. Quando os números $b_1, b_2, \dots$ são todos iguais a **1**, temos uma fração continuada simples.

As frações continuadas simples são denotadas por $[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots]$ quando são infinitas e $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ quando são finitas, salientando que o termo a_0, que é a parte inteira do número representado é separado por “ponto e vírgula”.

Por exemplo, o número racional $\frac{104}{25}$ escrito em forma de fração continuada fica:

$$4 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{4}} = [4; 6,4]$$

As frações continuadas simples e finitas são números racionais. Já as frações continuadas simples infinitas são representações de números irracionais. Esta informação é uma distinção bastante clara entre estas duas classes de números reais.

Considerando as frações continuadas finitas, vamos expor algumas propriedades relacionadas ao Algoritmo de Euclides para cálculo do máximo divisor comum, **MDC**. Esse algoritmo nos garante que dados dois números inteiros a e b, sendo $a > b$, o **MDC** entre a e b é igual ao **MDC** entre b e o resto r da divisão de a por b, ou seja $mdc(a, b) = mdc(b, r)$**.** Tomemos como exemplo o cálculo do **MDC** de **60** e **44**:

$60 = 44.1 + 16$, logo $mdc(60,44) = mdc(44,16)$.

$44 = 16.2 + 12$, logo $mdc(44,16) = mdc(16,12)$.

$16 = 12.1 + 4$, logo $mdc(16,12) = mdc(12,4)$.

$12 = 4.3$, logo $mdc(12,4) = mdc(4,0) = 4$.

Vamos aproveitar esse exemplo para calcular a fração continuada simples do número racional $\frac{60}{44}$:

$$\frac{60}{44} = 1 + \frac{16}{44}$$

Como nosso objetivo é operar com frações unitárias, fazemos a inversão:

$$\frac{16}{44} = \frac{1}{\frac{44}{16}}$$

portanto:

$$\frac{60}{44} = 1 + \frac{1}{\frac{44}{16}}$$

mas

$$\frac{44}{16} = 2 + \frac{1}{\frac{16}{12}}$$

e

$$\frac{16}{12} = 1 + \frac{1}{\frac{12}{4}} = 1 + \frac{1}{3}$$

juntando estas informações:

$$\frac{60}{44} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}} = [1; 2,1,3]$$

O racional $\frac{60}{44} = \frac{15}{11}$ é escrito na notação de fração continuada como$[1; 2,1,3]$.

Apesar de as expansões em frações continuadas que representam números irracionais serem infinitas, elas nos servem para cálculos aproximados, truncando-as em algum índice. Tomaremos alguns exemplos de expansões de raízes quadradas irracionais, começando por determinar a fração continuada do irracional $\sqrt{5}$.

Primeiro notemos que a parte inteira dessa raiz é **2**, denotaremos por $\frac{1}{x}$ a parte fracionária desse número, onde teremos que:

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = \sqrt{5} - 2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}-2}$$

porém

$$(\sqrt{5}+2).(\sqrt{5}-2) = 1$$

e daí

$$\sqrt{5}+2 = \frac{1}{\sqrt{5}-2}$$

mas $\frac{1}{\sqrt{5}-2} = x,$ donde $x = \sqrt{5}+2.$ Concluímos que:

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{2+\sqrt{5}}$$

agora, podemos usar a própria equação recursivamente, substituindo $\sqrt{5}$ no denominador do membro direito pelo membro direito. Repetindo este processo indefinidamente, encontramos:

$$\sqrt{5} = 2 + \cfrac{1}{2+2+\cfrac{1}{2+2+\cfrac{1}{2+\cdots}}} = [2;4,4,4,4,\dots]$$

Podemos calcular a aproximação desta raiz com 3 iterações do processo repetitivo, obtendo:

$$\sqrt{5} \approx 2 + \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4}}} = 2 + \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\cfrac{17}{4}}} = 2 + \cfrac{1}{4+\cfrac{4}{17}} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{72}{17}} = 2 + \frac{17}{72} = \frac{161}{72}$$

Considerando $\frac{161^2}{72^2} = \frac{25921}{5184} \approx 5{,}00019$ podemos avaliar a qualidade da aproximação.

Tomemos agora um exemplo, $\sqrt{19}$, que gera naturalmente uma fração continuada com a sequência (b_n) diferente de **1**. Aplicando o mesmo raciocínio para cálculo da raiz anterior teríamos:

$$\left(\sqrt{19}+4\right)\left(\sqrt{19}-4\right)=3 \Rightarrow \sqrt{19}-4=\frac{3}{\sqrt{19}+4}$$

Ou seja, o numerador $b_1 = 3$. Podemos escrever:

$$\sqrt{19}=4+\frac{3}{x}$$

com $x=\sqrt{19}+4,$ o que nos leva a:

$$\sqrt{19}=4+\cfrac{3}{8+\cfrac{3}{8+\cfrac{3}{8+\cfrac{3}{8+\cdots}}}}$$

considerando que a parte inteira da raiz de **19** é **4**.

Vamos mostrar uma generalização do processo de obtenção de uma fração continuada de uma raiz quadrada. Seja b a parte inteira do número $\sqrt{a}$. Temos

$$\left(\sqrt{a}+\mathrm{b}\right)\left(\sqrt{a}-b\right)=\mathrm{a}-b^2$$

$$\sqrt{a}-b=\frac{a-b^2}{\sqrt{a}+b} \Rightarrow \sqrt{a}=b+\frac{a-b^2}{2b+\left(\sqrt{a}-b\right)}$$

Substituindo no membro direito da segunda expressão o valor indicado para $\sqrt{a}-b$ da primeira igualdade, obtemos:

$$\sqrt{a}=b+\cfrac{a-b^2}{2b+\cfrac{a-b^2}{2b+\cfrac{a-b^2}{2b+\cdots}}}$$

Tendo deduzido essa fórmula, encontrar a fração continuada da raiz quadrada de um número natural é imediato. Por exemplo, a parte inteira $\sqrt{31}$ é **5**. Tomando então $b=5$ e $a=31$ temos:

$$\sqrt{31}=5+\cfrac{6}{10+\cfrac{6}{10+\cfrac{6}{10+\cdots}}}$$

A aproximação $5+\frac{6}{10+\frac{6}{10}}=5+\frac{60}{106}=5+\frac{30}{53}=\frac{265+30}{53}\approx 5{,}566$ satisfaz $5{,}566^2\approx 30{,}98$.

A demonstração da convergência do processo indicado na fração continuada, de repetição indefinida das operações de divisão somada a um resto, quando irracional, é mais elaborada, envolvendo uma sequência que se alterna em torno do ponto para o qual ela converge (MARTINEZ et al, p. 115, 2018).

Para finalizar o estudo das sequências aqui descritas, o próximo capitulo fará uma abordagem computacional deste assunto, com o uso de planilhas, visando tornar mais pratico e dinâmico os cálculos numéricos relativos a esse tema.

5 EXPLORANDO SEQUÊNCIAS RECURSIVAS COM PLANILHAS ELETRÔNICAS

Desde antes da universalização de recursos digitais já se discutia o uso de meios tecnológicos a fim de dinamizar o andamento de determinados objetos de estudo. Segundo Maxim e Verhey (1988, pág. 12): “As planilhas eletrônicas podem ser instrumentos eficazes de ensino, ajudando os alunos a experimentar o processo de fazer matemática”. Nesta citação, destacamos a data de publicação, já que a mesma ocorreu em uma época onde os recursos computacionais eram extremamente caros e inacessíveis para a maioria da população, donde se pode concluir que se nos anos 80 o uso de planilhas já era recomendado para estudos matemáticos, hoje esse recurso se configura como algo essencial e curricular.

O apoio de planilhas eletrônicas para o cálculo de convergência das sequências recursivas estudadas neste trabalho pode, e quase certamente vai, gerar num primeiro momento certo desconforto aos estudantes. Afinal, qual a utilidade de se usar uma planilha programável com um procedimento não imediato para cálculo de raízes quando poderíamos usar a mesma planilha sem nenhuma linha de programação para realizar tal cálculo instantaneamente? Para responder essa pergunta é necessário que se entenda como funciona o programa de execução de cálculos de uma calculadora eletrônica. O funcionamento completo e detalhado de tal equipamento é complexo, portanto, é importante apenas entender que os circuitos lógico-digitais das calculadoras operam apenas nas quatro operações básicas (soma, subtração, multiplicação e divisão) e por meio de programações recursivas aumentando as suas funcionalidades. O processo de funcionamento de uma calculadora pode ser estudado com um pouco mais de detalhes no site: https://www.oficinadanet.com.br/ciencia/23205-como-funciona-uma-calculadora.

A seguinte atividade pode ser desenvolvida junto aos alunos com uso de planilhas eletrônicas programáveis, ressaltando que atualmente existem ótimas planilhas online e gratuitas para uso estudantil.

Inicialmente vamos tabular os números em estudo (radicando, estimativa da raiz e o quadrado destas aproximações) para que tenhamos maior didática e organização na planilha. A imagem a seguir sugere um modelo para que isto ser feito:

Figura 8: Sugestão de Layout da planilha

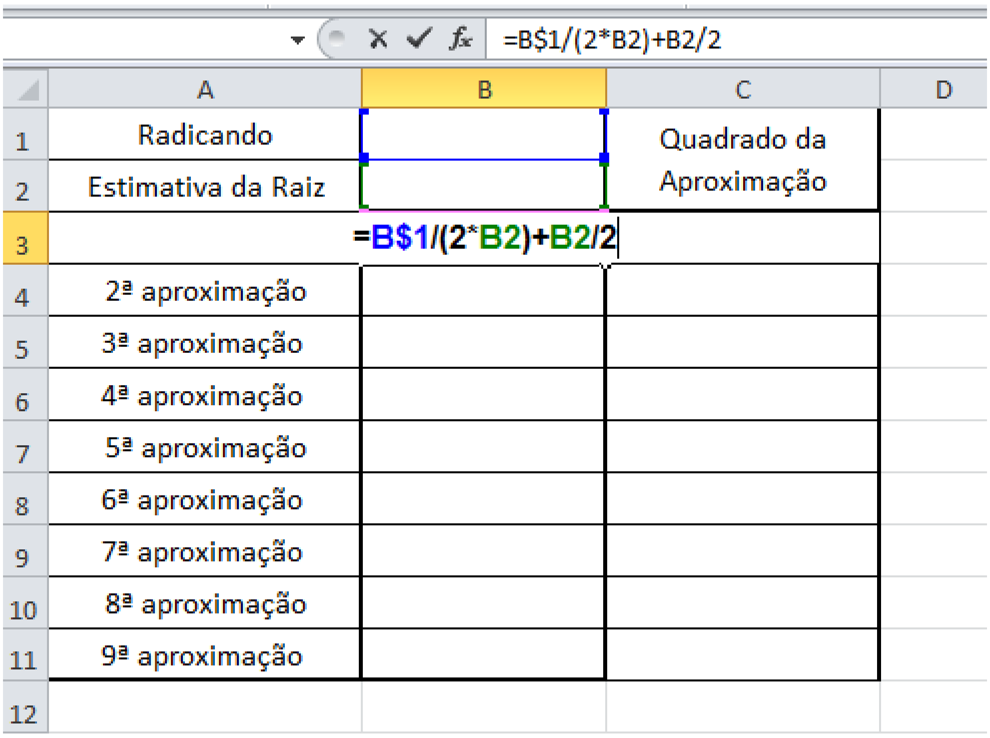
	A	B	C
1	Radicando		Quadrado da Aproximação
2	Estimativa da Raiz		
3	1ª aproximação		
4	2ª aproximação		
5	3ª aproximação		
6	4ª aproximação		
7	5ª aproximação		
8	6ª aproximação		
9	7ª aproximação		
10	8ª aproximação		
11	9ª aproximação		
12			

Fonte: O autor

Inserindo o radicando a na célula B1 e a estimativa b na célula B2, a próxima aproximação, que será dada por $b_{n+1} = \frac{a}{2.b_n} + \frac{b_n}{2}$, deverá ser calculada em B3. As células B1 e B2 são chamadas de células de entrada das planilhas, pois nelas serão digitados os dados iniciais para os cálculos recursivos. Para a programação da primeira aproximação a partir da sequência estudada digitaremos na célula B3 a seguinte programação:

=B$1/(2*B2)+B2/2

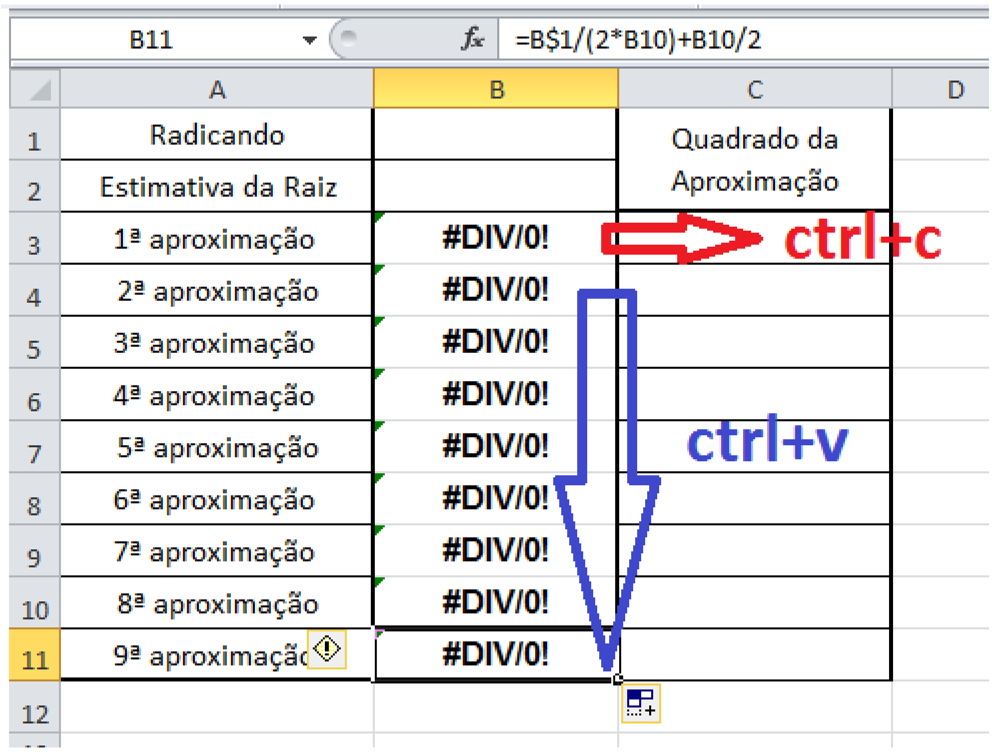
Figura 9: Primeira aproximação



Fonte: O autor.

O uso da escrita programável “B$1” com a cifra é utilizado a fim de fixar essa célula quando a planilha copiar o seu conteúdo para as demais células. Feita a programação descrita basta que se copie (ctrl+c) e cole (ctrl+v) as informações pertinentes à célula B3 em todas as demais células dessa coluna de dados:

Figura 6: Programando as demais células

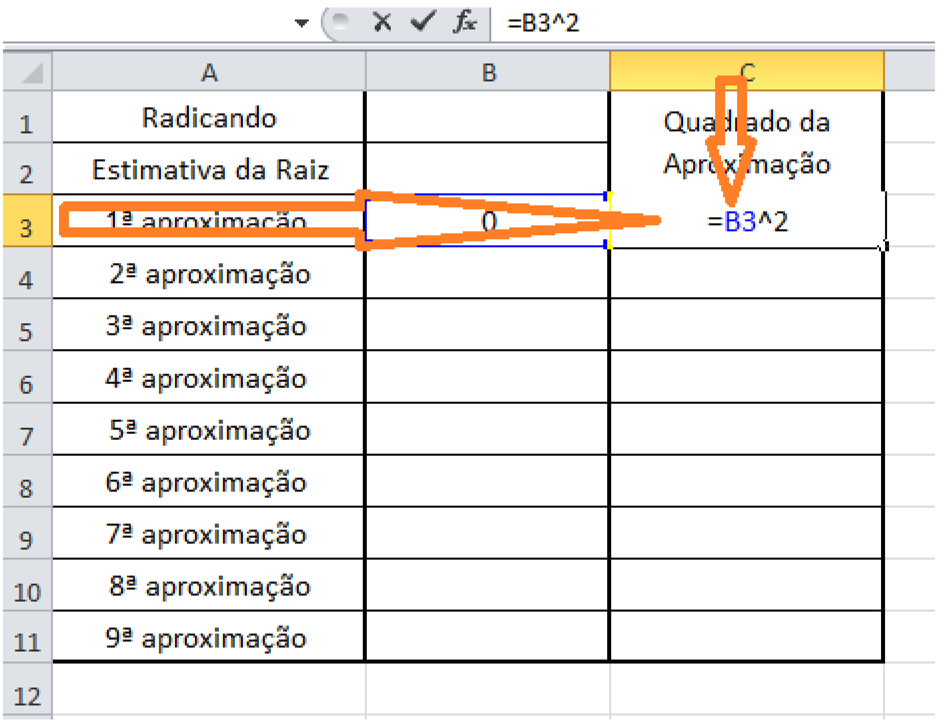


Fonte: O autor.

Agora para termos uma ideia da proximidade do radical encontrada pela planilha temos que elevar o valor da célula B3 ao quadrado. Na célula C3 digite:

=B3^2

Figura 10: Cálculo das aproximações

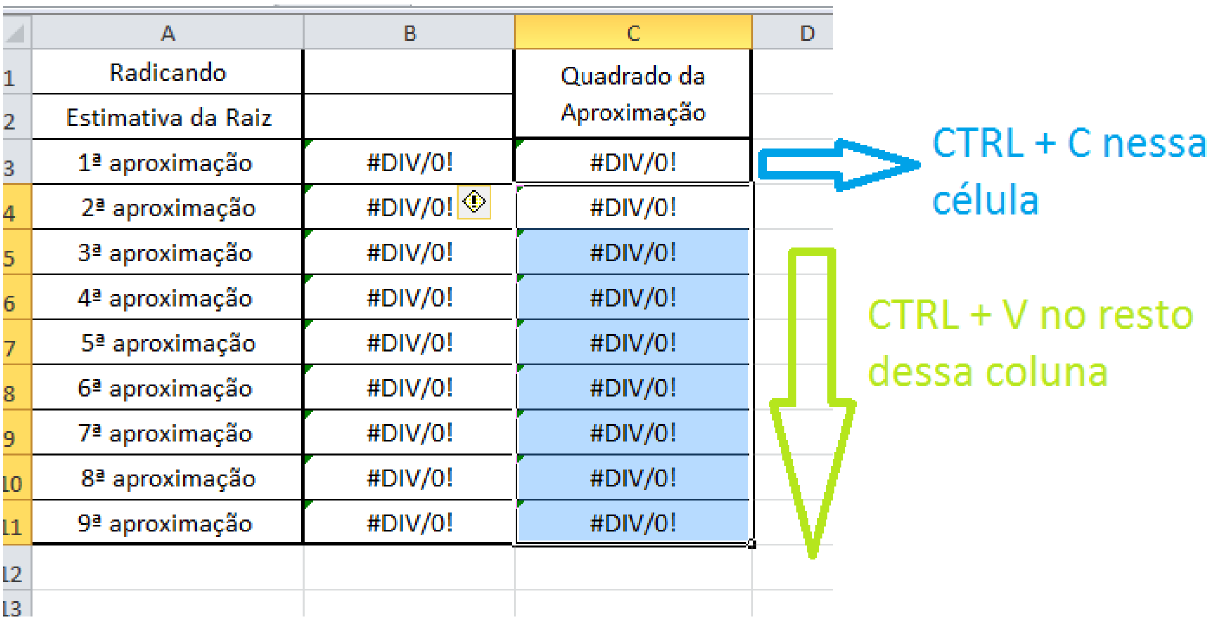


Fonte: O autor.

Com isso, temos a primeira aproximação e o seu quadrado definidos na planilha.

Copiando a fórmula dessa célula nas demais células dessa coluna, obtemos a sequência de aproximações.

Figura 11: Cálculo dos quadrados



	A	B	C
1	Radicando		Quadrado da Aproximação
2	Estimativa da Raiz		
3	1ª aproximação	#DIV/0!	#DIV/0!
4	2ª aproximação	#DIV/0!	#DIV/0!
5	3ª aproximação	#DIV/0!	#DIV/0!
6	4ª aproximação	#DIV/0!	#DIV/0!
7	5ª aproximação	#DIV/0!	#DIV/0!
8	6ª aproximação	#DIV/0!	#DIV/0!
9	7ª aproximação	#DIV/0!	#DIV/0!
10	8ª aproximação	#DIV/0!	#DIV/0!
11	9ª aproximação	#DIV/0!	#DIV/0!

Fonte: O autor.

A planilha está devidamente programada então para fazer o cálculo da raiz quadrada de um número real. Testando a programação feita na planilha para $\sqrt{59}$ e $\sqrt{5200}$ obteremos:

Figura 12: Raiz quadrada de 59

	A	B	C
1	Radicando	59	Quadrado da Aproximação
2	Estimativa da Raiz	7	
3	1ª aproximação	7,714285714	59,51020408
4	2ª aproximação	7,681216931	59,00109354
5	3ª aproximação	7,681145748	59,00000001
6	4ª aproximação	7,681145748	59
7	5ª aproximação	7,681145748	59
8	6ª aproximação	7,681145748	59
9	7ª aproximação	7,681145748	59
10	8ª aproximação	7,681145748	59
11	9ª aproximação	7,681145748	59

Fonte: O autor.

Figura 13: Raiz quadrada de 5200

A	B	C
Radicando	5200	Quadrado da Aproximação
Estimativa da Raiz	70	
1ª aproximação	72,14285714	5204,591837
2ª aproximação	72,11103253	5200,001013
3ª aproximação	72,11102551	5200
4ª aproximação	72,11102551	5200
5ª aproximação	72,11102551	5200
6ª aproximação	72,11102551	5200
7ª aproximação	72,11102551	5200
8ª aproximação	72,11102551	5200
9ª aproximação	72,11102551	5200

Fonte: O autor.

A partir da terceira iteração já temos uma aproximação decimal do radical com três casas decimais de precisão, o que mais uma vez evidencia a grande praticidade e precisão da sequência encontrada nas linhas anteriores.

Vamos testar também a eficiência desse método para calculo de raízes de qualquer ordem. Conforme já foi visto anteriormente podemos determinar a raiz enésima de um número real utilizando uma sequência recursiva, e essa pode ser encontrada pelo Método de Newton-Raphson. Para o caso da raiz cúbica temos a seguinte sequência iterativa:

$$x_{n+1} = \frac{2x_n}{3} + \frac{a}{3x_n^2}$$

Fazendo a programação análoga ao que foi realizado para cálculo da raiz quadrada teremos a seguinte tabela de aproximações para a raiz cúbica de **50**:

Figura 14: Cálculo da $\sqrt[3]{50}$ (raiz cúbica de cinquenta)

	A	B	C
1	Radicando	50	Aproximação elevada ao cubo
2	estimativa da raiz	3	
3	1ª aproximação	3,8518519	57,14901184
4	2ª aproximação	3,691237	50,29395665
5	3ª aproximação	3,6840456	50,00057233
6	4ª aproximação	3,6840315	50
7	5ª aproximação	3,6840315	50
8	6ª aproximação	3,6840315	50

Fonte: O autor.

Para as raízes quintas será feito uso da sequencia definida por:

$$x_{n+1} = \frac{4x_n}{5} + \frac{a}{5x_n^4}$$

Assim teremos a planilha com as devidas aproximações da raiz quinta de 40 ficará:

Figura 15: Cálculo da $\sqrt[5]{40}$ (raiz quinta de quarenta).

	A	B	C
1	Radicando	40	Aproximação elevada à quinta potência
2	estimativa da raiz	2	
3	1ª aproximação	2,1666667	47,74858539
4	2ª aproximação	2,0963458	40,48691143
5	3ª aproximação	2,0913035	40,00233669
6	4ª aproximação	2,0912791	40,00000005
7	5ª aproximação	2,0912791	40
8	6ª aproximação	2,0912791	40

Fonte: O autor.

No próximo capítulo coloca-se uma sugestão de suporte pedagógico que pode ser utilizada por docentes que desejem diagnosticar os pré-conhecimentos dos alunos sobre a temática aqui abordada.

6 QUESTIONÁRIO DE APOIO PARA MAPEAMENTO DE HABILIDADES DOS ESTUDANTES

Buscando saber o que os alunos do ensino básico carregam de bagagem intelectual sobre os números, propomos um questionário curto e objetivo para que eles possam se expressar quanto à sua visão acerca da importância do assunto.

Entender a visão que os alunos possuem de tal tema é fundamental para a compreensão do senso matemático que cada um possui. Fazer um mapeamento de pré-conhecimentos dos estudantes auxilia o docente na tomada de decisões e encaminhamentos pedagógicos. Algumas vantagens em se ter um mapa de habilidades matemáticas dos estudantes são a seleção de atividades para o uso em sala de aula, auxilio na elaboração da avaliação formativa, formação adequada de grupos produtivos em sala de aula, e análise evolutiva individual da unidade didática. Para a elaboração desse mapa devemos, também, abordar as vivências do aluno, que, segundo vários pedagogos, é essencial para uma aprendizagem efetiva. Del Prette define vivência como:

> Vivência pode ser entendida, então, como uma atividade, estruturada de modo análogo ou simbólico a situações cotidianas de interação social dos participantes, que mobiliza sentimentos, pensamentos e ações, com o objetivo de suprir déficits e maximizar habilidades sociais. (DEL PRETTE, 2004, p.106):

Dentro desse contexto, devemos sugerir situações de aprendizagem mais próximas ao cotidiano do estudante, de modo que sejam parte do conjunto de vivências do indivíduo e assim se tornem significativas para o mesmo.

Segundo Piaget, a ampliação das áreas de conhecimento se dá por meio de inferências a partir de conhecimentos já adquiridos pelos indivíduos:

> Para que um novo instrumento lógico se construa, é preciso sempre instrumentos lógicos preliminares; quer dizer que a construção de uma nova noção suporá sempre substratos, subestruturas anteriores e isso por regressões indefinidas. (PIAGET, 1983, p. 25)

Por isto, ter instrumentos para questionar os conhecimentos prévios dos estudantes é fundamental para que se consiga tomar decisões corretas acerca das atividades de aprendizagem. Assume-se também que essas “subestruturas anteriores” e “regressões indefinidas” podem ser despertadas nos alunos com o estímulo adequado, o que se propõe fazer por meio do questionário a seguir.

Questionário para diagnóstico e mapeamento das habilidades dos estudantes

Orientações gerais: Responda as questões dos três blocos que seguem apenas com os conhecimentos que já possui. Pesquisas sobre as perguntas podem tornar as mesmas inválidas para a análise desejada.

Bloco 1:

Objetivo geral do bloco: Questões para entender e nortear o que os alunos pensam qualitativamente dos números.

1) Você acha importante o estudo de matemática para a sua vida e profissão futura? Justifique sua resposta.
- Objetivo da questão: Alinhar a resposta pessoal dessa pergunta com as respostas das demais, já que é inicialmente esperado que os alunos com maior gosto pela disciplina deem respostas com um formalismo matemático, prática realizada a todo momento na realização de atividades pertencentes a essa área de conhecimento.

2) Tente explicar como seria o mundo sem a “invenção” dos números.
- Objetivo da questão: Observar a relação que os alunos tem como os números, ver os possíveis problemas e soluções que os mesmos encontrariam em sua visão de sociedade sem algo que possa representar grandezas.

3) Você consegue explicar a importância dos números decimais? No caso de uma divisão não inteira ou de uma raiz irracional, quantas casas decimais você acha ideal para representar o resultado dessa operação?
- Objetivo da questão: Saber a visão que os alunos tem do objeto de ensino torna mais evidente a metodologia a ser aplicada para a sua concretização.

4) Tente encontrar problemas cuja resposta seja uma raiz irracional.
- Objetivo da questão: Aferir as situações trabalhadas com os estudantes ao longo do ensino básico sobre o tema. Espera-se que os alunos citem situações e/ou problemas já vistos em sala de aula. Tal pergunta serve como norte para sabermos a abordagem do assunto que eles tiveram na sua vida escolar, podendo refletir inclusive a metodologia abordada nas redes e instituições de ensino.

Bloco 2:

Objetivo geral do bloco: Determinar o conhecimento sólido que os alunos possuem sobre os números irracionais e sua representação decimal.

Orientações: Mais uma vez é desejável que não se faça pesquisas para resolver as atividades propostas. Para esse bloco o uso de calculadora é facultativo.

1) Deseja-se construir uma placa retangular de alumínio que tenha área de 200 cm^2 e a largura seja o quádruplo do comprimento. Determine quais devem ser as dimensões dessa placa.

- Objetivo da questão: Com base na resposta dada pelo aluno ao problema proposto, podemos ver qual ou quais os modos o estudante acha mais adequado para responder a atividade. Aqui imediatamente notaremos se o aluno dá uma importância maior ao resultado representado em forma de radical ou escrito em aproximação decimal.

2) Uma empresa que atua no ramo metalúrgico produz diariamente 5.000 placas de alumínio como as propriedades e dimensões citadas no problema anterior. Caso se faça uso de uma aproximação de 2 casas decimais para representar o número irracional que é solução desse problema, crie e explique um método para calcular a sobra ou excesso de material que isso acarretará na produção mensal dessa empresa.

- Objetivo da questão: Temos aqui um problema cuja resposta é mais aberta e sujeita a diferentes métodos e tentativas de resolução. As respostas desse problema podem servir de mapeamento da já citada Taxonomia de Bloom e assim situar a zona de conhecimento do aluno relativo aos números irracionais e sua representação decimal.

3) Em um observatório astronômico constata-se que no mesmo instante em que a Lua é vista perpendicularmente em relação ao plano do chão, também se observa um corpo de grande dimensão se aproximando da Terra a um ângulo de 15º em relação ao plano Terra-Lua. Sabendo-se que a distância da Terra à Lua é de 384.400 quilômetros, que $sen 15º = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$**,** e que $cos 15º = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ responda os itens abaixo:

a) Faça um esboço da situação descrita no problema**.**

- Objetivo: Um diagrama ou desenho representa como o aluno interpretou e visualizou o problema, pré-requisitos mínimos e necessários para a sua conclusão. Tal atividade também objetiva facilitar a resolução matemática da situação citada.

b) Calcule a distância desse corpo à superfície da Terra.

- Objetivo da questão: Nesse item propriamente dito é que se evidencia o modo como o estudante de ensino regular enxerga um número irracional. Sendo facultativo o uso de calculadoras para a atividade, existem duas possíveis hipóteses para a resolução correta do problema, sendo a primeira com uso de radicais deixando subentendido que o aluno teve mais contato ou acha mais simples o uso de radicais, e a segunda com extração das raízes na calculadora e uso de números decimais. No segundo caso, o que deve ser analisado é a precisão ou número de casas decimais que o aluno irá utilizar.

Bloco 3:

Objetivo geral do bloco: Mostrar um novo método para aproximar raízes irracionais de números decimais. Espera-se que a apresentação desse método motive os alunos a procurar usos e aplicações do procedimento exposto.

Orientações: Para esse bloco final pede-se que as atividades sejam realizadas com procedimentos de cálculos, ou seja, sem uso de calculadora.

1) O seguinte processo é utilizado para cálculo de uma aproximação de raízes quadradas irracionais, acompanhe o processo recursivo.

Considere o número irracional $\sqrt{a}$ e os passos que seguem:

1º Passo: encontre o número natural **b**, cujo quadrado seja o mais próximo do radicando **a**, em seguida divida esse número por **2**;

2º Passo: Divida o radicando **a** pelo dobro da aproximação **b**;

3º Passo: Some os resultados do 1º e 2º passos e assim teremos a próxima aproximação de $\sqrt{a}$.

Considere agora o valor encontrado no 3º passo como sendo o valor mais próximo da $\sqrt{a}$ e refaça esses três procedimentos mais uma vez, assim teremos a terceira aproximação para o irracional $\sqrt{a}$. Este procedimento pode ser realizado repetidas vezes. Pode-se provar que a cada ciclo (iteração) se obtém uma aproximação melhor do irracional, logo, mais casas decimais de precisão.

Utilize esse algoritmo para calcular a primeira e segunda aproximação do número irracional $\sqrt{5}$.

- Objetivo da questão: Como já dito no objetivo geral, essa atividade tem finalidade de apresentar um algoritmo aos estudantes e também verificar a capacidade que os mesmos possuem em fazer, ler e realizar procedimentos de cálculo.

2) Descreva algebricamente o processo anteriormente descrito.

- Objetivo da questão: Analisar e classificar as habilidades relativas ao estudo de álgebra no ensino regular, sendo essa habilidade descrita na Base Nacional Curricular Comum (BNCC) por **"**EF07MA13 **-** Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita."

3) Você teria interesse em conhecer a demonstração do método descrito para cálculo de raízes quadradas irracionais?

- Objetivo da questão: Finalizando o questionário é importante que se saiba o quão interessado o aluno está em conhecer e aprender, seja por intervenção docente ou por vontade própria.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O processo de pesquisa, análise e escrita do presente texto foi, indubitavelmente, algo essencial para a minha formação acadêmica, profissional e, até mesmo, pessoal. Várias foram as aprendizagens que ocorreram durante esse trajeto, como por exemplo o aprofundamento dos aspectos teóricos com a absorção de temas mais aprofundados sobre as sequências; históricos com a análise de diferentes documentos e registros sobre um mesmo contexto; pedagógicos quando se pensa na aplicabilidade futura das atividades aqui propostas; burocráticas quanto à padronização textual exigida em textos acadêmicos; e legais quando se analisa de modo minucioso as normas e diretrizes para a educação básica. Espera-se que o futuro leitor experimente dessas sensações, e que este texto instigue futuros trabalhos sobre esse conteúdo, tendo em vista ser de senso comum, que há muito mais a ser dito sobre as sequências e métodos recursivos. Mesmo este trabalho sendo uma pequena colaboração para tais estudos é importante que haja desenvolvimento de mais materiais sobre essa temática.

A compreensão da natureza dos números e suas propriedades, faz parte da formação intelectual e profissional das pessoas. Conseguir representar e relacionar os números de diversas formas deve ser visto como essencial no período de formação escolar básica, tendo em vista que esses conhecimentos fazem parte da chamada alfabetização matemática. Ao longo da dissertação aqui apresentada, essas habilidades foram descritas, algumas com rigor matemático e outras em linguagem mais simplificada a fim de facilitar o entendimento do leitor.

Finalizo a dissertação defendendo a aplicabilidade de sequências numéricas em processos de programação, fato que pode ser observado na leitura do capítulo que aborda o uso de planilhas eletrônicas. Os processos de programação são baseados em lógicas e fórmulas algébricas, assim sendo, o conhecimento dos métodos iterativos ao longo do ensino básico auxilia na aprendizagem de desenvolvimento de programas e aplicativos, conhecimentos de importância no mundo atual e que já fazem parte das competências básicas da Base Nacional Comum Curricular.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ÁVILA, G. **Grandezas incomensuráveis e números irracionais**, RPM 05, ed. SBM, 1984. Disponível em: < https://www.rpm.org.br/cdrpm/5/3.htm>. Acesso em: 10 de jan. de 2021.

BEERY, J.L.; SWETZ, F.J. ***The best known old Babylonian tablet?***, Mathematical Association of America, 2012. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.4169%2Floci003889>. Acesso em: 20 de jan. de 2021.

BOYER, C.. ***A history of mathematics***. 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1989.

BRASIL. Lei nº 9.394 de 20 de dezembro de 1996. **Lei de Diretrizes e Bases da bases da Educação nacional**. Brasília: MEC/SEB, 1996. Disponível em: <www.planalto.gov.br/ccivil_03/LEIS/l9394.htm>. Acesso em: 20 de dez. de 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC/SEB, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>. Acesso em: 20 de dez. de 2020

CARVALHO, T.O. **Notas de Orientação de Iniciação Cientifica**. Não publicadas, 2017.

D'AMBRÓSIO, B. S.. **Reflexões sobre a historia da matemática na formação de professores**.. In: RBHM, Especial nº 1, 2007. Disponível em: <https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/312>. Acesso em: 10 de jan. de 2021.

DEL PRETTE, A.; **Psicologia das relações interpessoais**: Vivências para o trabalho em grupo. Petrópolis, RJ: Vozes, 2004.

EVES, H. **An introduction to the history of mathematics**. 3. ed. New York: Holt & Rinehart Winston, 1969.

GUIDORIZZI, H. L.. **Um Curso de Cálculo, vol. 4.** Editora LTC, 1997.

KHOURY, J. **Application to a problem of Fibonacci.** Disponível em: <http://aix1.uottawa.ca/~jkhoury/fibonacci.htm>. Acesso em 16 de jan. de 2021.

KLINE, M.. **Mathematical Thought from Ancient to Modem Times**, New York, Oxford University Press, USA, 1972.

LIMA, E.L.: **Análise Real, vol. 1**. IMPA, 12a ed., 2013.

MACHADO, I. A.; ALVES, R. R. **Método de Newton**. Revista Eletrônica de Educação da Faculdade Araguaia, v. 4, pág. 30, 2013. Disponível em: <http://www.fara.edu.br/sipe/index.php/index/index>. Acesso em: 02 de jan. de 2021.

MARTINEZ , F. E. B.; DE A. MOREIRA , C. G. T.; SALDANHA , N. C.; TENGAN, E. **Teoria dos Números: um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro.** IMPA, Rio de Janeiro, RJ, 2018.

MAXIM, B. R. & VERHEY, R. F. (1988). **Using Spreadsheets in Algebra Instruction**. In Arthur, Coxford F. & Albert, Shulte P. (Eds.), The Ideas of Algebra, k-12. Yearbook 1988. N. C. T. M.

MEDEIROS, C.F,; MEDEIROS, A. **O Método da Falsa Posição na História e na Educação Matemática**. Revista Ciência e Educação, v. 10, pág. 549, 2004.

MLODINOW, L. **A Janela de Euclides: a história da geometria: das linhas paralelas ao hiperespaço**. (2010). Tradução de Enézio E. de Almeida Filho. São Paulo: Geração Editorial.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

PLATÃO, **Mênon**. Tradução de Maura Iglésias. Rio de Janeiro: Editora PUC-Rio/ Loyola, 2001.

PIAGET, J. **A linguagem e o pensamento da criança**. Rio de janeiro: Editora Fundo de Cultura S.A, 1999.

ROQUE, T.; PITOMBEIRA, J.B. **Tópicos de História da Matemática.** Coleção PROFMAT, Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

APÊNDICE

Extrato da Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2017).

Competências Gerais da Educação Básica:

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que

respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.