



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

ADRIANA CAMPOS INFORZATO

**APROXIMAÇÃO DE CONEXÃO AFIM PARA CONSTANTES
ELÁSTICAS DE CRISTAIS LÍQUIDOS NEMÁTICOS**

Londrina
2007

ADRIANA CAMPOS INFORZATO

**APROXIMAÇÃO DE CONEXÃO AFIM PARA CONSTANTES
ELÁSTICAS DE CRISTAIS LÍQUIDOS NEMÁTICOS**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação,
em Física da Universidade Estadual de Londrina,
como requisito parcial à obtenção do título de
Doutora em Física.

Orientador: Prof. Manuel Simões Filho

Londrina
2007

ADRIANA CAMPOS INFORZATO

**APROXIMAÇÃO DE CONEXÃO AFIM PARA CONSTANTES
ELÁSTICAS DE CRISTAIS LÍQUIDOS NEMÁTICOS**

BANCA EXAMINADORA

Manuel Simões Filho [orientador]

Suhaila Maluf Shibli

Fernando Jorge Sampaio Moraes

Luiz Roberto Evangelista

Antonio Edson Gonçalves

Londrina, 30 de agosto de 2007.

"Ao meu amado Nelson"

AGRADECIMENTOS

Inicialmente agradeço à Deus, por ter me dado forças suficientes a fim de superar os obstáculos e conquistar o meu objetivo. Agradeço ao meu orientador, Prof. Manuel, pela sua grande dedicação, paciência e amizade; aos meus pais e meus irmãos, que me apoiaram e incentivaram todo o tempo; ao meu esposo Nelson, que esteve sempre ao meu lado com seu amor, carinho e amizade; aos amigos que aqui conquistei, em especial: Karyla, Elisabeth, Kleber, Sandra, Andrezza, David (do inglês) e David (do hebraico) cujos nomes, apesar de igual grafia, possuem diferentes pronúncias, causando confusões nas correspondências eletrônicas; a todos os meus professores, pelos conhecimentos transmitidos; à CAPES pelo financiamento parcial deste trabalho e a todos os que, direta ou indiretamente, contribuíram para o andamento e a conclusão deste trabalho.

INFORZATO, Adriana de Campos. **Aproximação de conexão afim para constantes elásticas de cristais líquidos nemáticos**. 2007. 128f. Tese (Doutorado em Física) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.

RESUMO

Neste trabalho, generalizamos a aproximação de conexão afim de Hess passando a defini-la em termos de uma transformação local. Deste modo, a anisotropia macroscópica do meio nemático será concebida como resultado de uma transformação local, onde em cada ponto da amostra, as moléculas esféricas de um líquido isotrópico hipotético são transformadas para moléculas elipsoidais de um cristal líquido nemático. Quando tal característica local é imposta para a transformação, a configuração determinada pelas texturas do meio nemático adquire uma curvatura intrínseca, cujo tratamento requer a substituição das técnicas e métodos do cálculo usual por aquelas usadas na geometria de superfícies não planas. Tais aproximações serão usadas para o cálculo das constantes elásticas nemáticas de "bulk". Como resultado, determinaremos relações para as constantes elásticas que dependem do parâmetro de ordem escalar, da excentricidade das moléculas nemáticas e da interação entre elas e, finalmente, proceder-se-á a uma comparação dos resultados obtidos com dados experimentais.

Palavras-chave: Cristais líquidos nemáticos. Geometria diferencial. Cálculo tensorial. Constantes elásticas.

INFORZATO, Adriana de Campos. **Aproximação de conexão afim para constantes elásticas de cristais líquidos nemáticos.** 2007. 128f. Tese (Doutorado em Física) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.

ABSTRACT

In this paper, the affine connection approach will be defined in terms of a local transformation. Accordingly, the macroscopic anisotropy of the nematic medium will be conceived as resulting from a local transformation where, at each point of the sample, the spherical molecules of an idealized hypothetical isotropic liquid have their shape changed to the ellipsoidal form of the nematic liquid crystals molecules. When such a local character is imposed to this transformation, the patterns determined by the director configuration of the nematic medium acquire an intrinsic curvature whose correct treatment requires the replacement of the techniques and methods of the usual calculus by those of the differential geometry of non-flat surfaces. Such approach will be used in the calculus of the nematic elastic constants. As a result, the dependence of the elastic constants on the scalar order parameter, on the eccentricity of the nematic molecules and on the interaction between them will be determined and compared with the experimental data.

Keywords: Nematic liquid crystals. Differential geometry. Tensor calculus. Elastic constants.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Ilustração das fases sólido, cristal líquido e líquido	14
Figura 2.2 – Ilustração das moléculas num cristal líquido nemático	15
Figura 2.3 – Moléculas num cristal líquido nemático colestérico	16
Figura 2.4 – Diagrama de fase para um polímero com cadeia principal	19
Figura 2.5 – Cristais líquidos poliméricos: (a) cadeia principal e (b) cadeia secundária	20
Figura 2.6 – Unidades anisotrópicas que formam polímeros. Na linha superior se encontram os polímeros de cadeia principal e na linha inferior os de cadeia secundária.....	20
Figura 2.7 – Representação de cadeias macromoleculares: (a) cadeia sem ramificações, (b) cadeia com ramificações e (c) cadeia reticulada	22
Figura 2.8 – Parâmetro de ordem orientacional de um polímero que apresenta a fase líquida cristalina. T_c é a temperatura de transição para a fase isotrópica e T_g é a temperatura de transição para a fase vítrea	22
Figura 2.9 – Variação do parâmetro de ordem de um cristal líquido com a temperatura na fase líquida cristalina. T_c representa a temperatura de transição para a fase líquida.....	23
Figura 2.10 – Polímero na fase de cristal líquido nemático observado em microscópio com luz polarizada	23
Figura 3.1 – Os três tipos básicos de deformação em cristais líquidos.....	24
Figura 3.2 – Deformação de divergência, também chamada “splay”	25
Figura 3.3 – Deformação de torção também chamada “twist”	25
Figura 3.4 – Deformação de flexão, também chamada “bend”	25
Figura 5.1 – Representação do vetor $\cdot r = dr/dt$ tangente à curva no ponto P.....	35
Figura 5.2 – Representação do triedro móvel num ponto de uma curva	36
Figura 5.3 – Círculo osculador num ponto P de uma curva.....	39
Figura 6.1 – Os pares ordenados (x^1, x^2) e (x_1, x_2) são as componentes contravariante e covariante do vetor \overline{OP} sendo obtidas pela projeção paralela e ortogonal do ponto P, respectivamente [53].....	64

- Figura 7.1** – Constantes elásticas do MBBA (4-methoxybenzylidene-4-n-butylaniline). Os pontos correspondem aos dados experimentais, como medido por Jeu et al [12]. As linhas pontilhada e contínua correspondem ao primeiro e segundo ajuste, respectivamente..... 117
- Figura 7.2** – Constantes elásticas do 5CB (4-n-pentyl-4'-cianobiphenyl). Os pontos correspondem aos dados experimentais, como medido por Chen et al. [11] e Wu et al. [63] . A linha contínua corresponde ao segundo ajuste 118
- Figura 7.3** – Constantes elásticas do 7CB (4-n-heptyl-4-cyanobiphenyl). Os pontos correspondem aos dados experimentais, como medido por Madhusudana et al. [64] e Karat et al. [65]. A linha contínua corresponde ao segundo ajuste 119
- Figura 7.4** – Constantes elásticas do PCH7 (4-cyano-4'-n-heptyl-cyclohexanephenyl). Os pontos correspondem aos dados experimentais, como medido por Schad et al. [66] e Pohl et al. [67]. A linha contínua corresponde ao segundo ajuste..... 119
- Figura 7.5** – Constantes elásticas do CCH7 (4-n-heptyl-bicyclohexyl-4'-carbonitrile). Os pontos correspondem aos dados experimentais, como medido por Schad et al. [66] e Eidenschink et al. [68]. A linha contínua corresponde ao segundo ajuste 119

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	10
2 CRISTAIS LÍQUIDOS	13
3 ELASTICIDADE	24
3.1 DEFORMAÇÕES ELÁSTICAS DOS CRISTAIS LÍQUIDOS	24
4 PARÂMETRO DE ORDEM	27
4.1 O CONCEITO DE PARÂMETRO DE ORDEM	27
4.1.1 Aproximação Macroscópica	28
4.1.2 Relação entre as Aproximação Macroscópica e Microscópica	30
5 GEOMETRIA DIFERENCIAL	33
5.1 CURVAS NO ESPAÇO	33
5.2 VETOR TANGENTE, VETOR NORMAL E CURVATURA	34
5.3 PLANOS DO TRIEDRO MÓVEL	37
5.4 ELEMENTOS DA INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA	37
5.5 FÓRMULAS DE FRENET	39
5.6 CÍRCULO OSCULADOR	41
5.7 EQUAÇÕES NATURAIS DE UMA CURVA ESPACIAL	44
5.8 COORDENADAS SUPERFICIAIS	45
6 ANÁLISE TENSORIAL	54
6.1 UM POUCO DE HISTÓRIA	54
6.2 RELAÇÃO ENTRE $g_{\mu\nu}$ e $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$	60
6.3 VETORES E TENSORES	63
6.4 ÁLGEBRA TENSORIAL	67
6.4.1 Combinação Linear	67
6.4.2 Produto Direto	68
6.4.3 Contração	68
6.5 TRANSFORMAÇÃO DA CONEXÃO AFIM	72
6.6 DIFERENCIAÇÃO COVARIANTE	76

6.7 DIFERENCIAÇÃO COVARIANTE AO LONGO DA CURVA	80
6.8 DEFINIÇÃO DO TENSOR DE CURVATURA.....	82
6.9 UNICIDADE DO TENSOR CURVATURA.....	85
6.10 PROPRIEDADES ALGÉBRICAS DE $R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda}$	87
6.11 DESCRIÇÃO DA CURVATURA EM k DIMENSÕES.....	91
6.12 PERCURSO EM CURVAS FECHADAS POR TRANSPORTE PARALELO	95
7 APROXIMAÇÃO DE CONEXÃO AFIM LOCAL PARA AS CONSTANTES	
ELÁSTICAS DE CRISTAIS LÍQUIDOS NEMÁTICOS	99
7.1 FUNDAMENTOS	99
7.2 CURVATURA DE UMA AMOSTRA NEMÁTICA	101
7.2.1 Parâmetro de Ordem Elipsoidal.....	102
7.2.2 Termodinâmica Métrica.....	106
7.2.3 Conexão e Curvatura.....	109
7.2.4 Aproximação Elementar para a Energia Elástica	110
7.3 ENERGIA ELÁSTICA	112
8 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÃO	121
REFERÊNCIAS	123

1 INTRODUÇÃO

Uma característica observada nos fenômenos da natureza, que intriga e desafia o entendimento físico, é a anisotropia encontrada nas propriedades físicas da matéria. Os fluidos podem ser anisotrópicos e deste modo, os cristais líquidos nemáticos são exemplos dessa classe [1]. Para entender a origem das anisotropias nemáticas, surgiu a idéia de atribuir à forma microscópica das moléculas constituintes, a procedência das anisotropias observadas em escala macroscópica [2]. Conseqüentemente, Hess e Balls [2, 3, 4, 5, 6] idealizaram um modo para que as moléculas desses líquidos pudessem ser continuamente deformadas, tornando-se esféricas, sendo possível a observação da redução das anisotropias macroscópicas correspondentes, atingindo o desaparecimento. Reciprocamente, se as moléculas esféricas idealizadas de um líquido isotrópico hipotético pudessem ser deformadas até assumirem a forma elipsoidal das moléculas nemáticas também idealizadas, as propriedades físicas macroscópicas seriam transformadas naquelas observadas nos cristais líquidos nemáticos. Em síntese, estas são as idéias da transformação conforme de Hess e Balls, originalmente aplicadas ao estudo das viscosidades dos cristais líquidos nemáticos [2]. Naturalmente, estas transformações não podem ser realizadas em laboratório, mas a interação esfericamente simétrica de um fluido isotrópico pode ser transformada, matematicamente, na interação elipsoidal de moléculas nemáticas, e vice e versa, e as conseqüências macroscópicas destas transformações conceituais podem ser comparadas com dados experimentais de cristais líquidos nemáticos. Usando esta aproximação, Hess e seus colaboradores demonstraram que a viscosidade de um líquido anisotrópico pode ser escrita em termos da viscosidade de um líquido isotrópico.

O principal objetivo deste trabalho é a proposição de um método geométrico que generaliza a aproximação de conexão afim de Hess, que é global, de modo que as transformações possam ser consideradas dependentes da posição, fornecendo uma generalização local.

A necessidade de uma generalização local é conseqüência direta de que, numa amostra de cristal líquido nemático usual, a orientação do diretor não é homogênea; deste modo, a deformação molecular que descreve tais configurações é dependente da posição e as ferramentas matemáticas utilizadas nessa aproximação devem considerar esse fato pois, após a transformação afim, as derivadas usuais não se transformam como vetores covariantes usuais e devem ser substituídas por derivadas covariantes. As ferramentas matemáticas que

descrevem tal mudança são costumeiras em muitos ramos da física, mas incomuns, pelo que sabemos, na física de cristais líquidos, com exceção do caso onde os defeitos de cristais líquidos são utilizados para simular o comportamento da trajetória da luz nas vizinhanças das singularidades cosmológicas [7]. Consideraremos a aproximação da conexão afim de Hess para descrever as texturas nemáticas numa variedade diferenciável não plana e, posteriormente, obteremos as constantes elásticas a partir da energia livre escalar, construída como função de elementos matemáticos presentes na teoria [1].

A determinação do comportamento térmico das constantes elásticas dos cristais líquidos nemáticos [8]-[10] é um problema antigo e a busca por resultados foi tratada por diversos métodos: experimentais [11]-[15], computacionais [16]-[17] e analíticos [18]-[23]. Apesar do intenso estudo deste assunto, o entendimento das constantes elásticas ainda não está completo [24], e somente a dependência dos termos iniciais com o parâmetro de ordem escalar está estabelecida [25]. Dentre outros temas que permanecem no alvo de investigações, o ancoramento das moléculas desses materiais na superfície da amostra e a interpretação das constantes elásticas ligadas a esse comportamento são temas muito pesquisados [26]-[29], havendo também um interesse em estudar a entropia molecular rotacional das constantes elásticas [30]-[37].

Entre outros propósitos desse trabalho, queremos enfatizar que as ferramentas da geometria diferencial são relevantes e podem ser utilizadas no estudo da fenomenologia nemática, pois quando admitimos que a amostra nemática não está homoganeamente alinhada, mudando de ponto a ponto, e a transformação de conexão afim correspondente torna-se dependente da posição, somos levados a substituir as derivadas usuais por derivadas covariantes

$$\partial_i v^j \rightarrow D_i v^j \equiv \partial_i v^j + \Gamma_{ik}^j v^k$$

modificando a regra de diferenciação [38]. Neste caso, a superfície onde os fenômenos físicos ocorrem tem uma curvatura intrínseca e ferramentas matemáticas adequadas devem ser utilizadas. Para a obtenção de uma aproximação para as constantes elásticas nemáticas utilizaremos fundamentos da aproximação da conexão afim, visto que todas as texturas nemáticas aparecem das variações do diretor, associadas com fundamentos da aproximação pseudomolecular [39]-[42].

Por fim, como aplicação, compararemos o resultado dessa aproximação teórica, que considera as aproximações pseudomolecular e de conexão afim de Hess, com dados experimentais de alguns compostos: "4-methoxybenzylidene-4'-n-butylaniline"

(MBBA), "4-n-pentyl-4'-cianobiphenyl" (5CB), "4-n-heptyl-4'-cyanobiphenyl" (7CB), "4-cyano-4'-n-heptyl-cyclohexane-phenyl" (PCH7) e "4-n-heptyl-bicyclohexyl-4'-carbonitrile" (CCH7).

Os capítulos 2 e 3 são destinados a uma rápida exposição dos cristais líquidos, suas principais propriedades e das texturas nemáticas, as quais são um dos objetos desse trabalho. A fim de discutirmos as anisotropias nemáticas, correlacionando os parâmetros de ordem macroscópico e microscópico, propomos o capítulo 4, onde tratamos desses conceitos e da relação matemática entre eles. Nos capítulos 5 e 6, tratamos das ferramentas da geometria diferencial e da álgebra tensorial e, sempre que possível, das interpretações dos objetos matemáticos. No capítulo 7, apresentamos a aproximação teórica para as constantes elásticas nemáticas e comparamos os resultados com dados experimentais de alguns compostos. E, finalmente, no capítulo 8 tecemos os comentários finais.

2 CRISTAIS LÍQUIDOS

Os três estados usuais da matéria se diferenciam pela quantidade de ordem relativa das moléculas, porém, para alguns materiais chamados fluidos complexos, existe uma mesofase entre a fase sólida e líquida onde são observadas propriedades mecânicas intermediárias entre líquidos e sólidos. Os cristais líquidos apresentam comportamentos que seriam esperados nos sólidos cristalinos (birrefringência, susceptibilidades elétrica e magnética anisotrópicas), mas também possuem propriedades mecânicas dos líquidos como a fluidez, tomando a forma do recipiente que os contêm, e a incapacidade de suportar tensão.

Nos sólidos cristalinos convivem as ordens posicional e orientacional, enquanto nos líquidos estas ordens são perdidas. Sendo o estado cristal líquido uma mesofase, percebemos algumas similaridades entre estes outros dois estados. O cristal líquido perde a ordem posicional, assim como nos líquidos, porém mantém uma determinada ordem orientacional, assim como nos sólidos, compartilhando de algumas propriedades dos cristais (Figura 2.1 (b)).

No estado sólido os ordenamentos posicional e orientacional são devidos às forças atrativas; as moléculas não se distribuem aleatoriamente, mas ao contrário, dispõem-se numa rede periódica orientadas, em média, ao longo de uma determinada direção, sendo, deste modo, um estado pouco simétrico (Figura 2-1 (a)). No estado líquido, as moléculas movimentam-se quase que aleatoriamente, colidindo umas com as outras, formando um estado quase desordenado e, conseqüentemente, simétrico. O movimento randômico das moléculas impede que se unam apesar da existência de forças atrativas. Os líquidos são espacialmente homogêneos e rotacionalmente isotrópicos. Por isso, suas propriedades são ditas invariantes com respeito às translações através de qualquer vetor posição e com respeito a rotações arbitrárias sobre qualquer eixo (Figura 2.1 (c)).

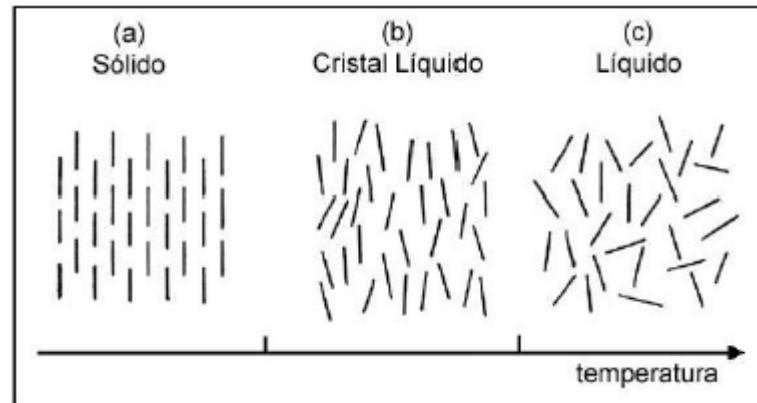


Figura 2.1 – Ilustração das fases sólido, cristal líquido e líquido.

Deste modo, estes estados diferenciam-se uns dos outros na forma com que as moléculas se arranjam para formar configurações quando sujeitas a diferentes condições termodinâmicas.

A descoberta de sistemas que apresentam ordenamento intermediário a estes dois estados da matéria, sólido e líquido, é creditada ao botânico Friedrich Reinitzer que em 1888, ao estudar a função do colesterol nas plantas, deparou com substâncias que descreveu possuir dois pontos de fusão com variação na cor e opacidade quando submetidas ao resfriamento. Entre as substâncias pesquisadas por ele estão o acetato e o benzoato de colesterila. O nome cristal líquido se deve ao físico alemão Otto Lehmann que, após receber amostras de Reinitzer, realizou observações em microscópio com luz polarizada por meio da variação da temperatura [43].

A principal propriedade que diferencia os cristais líquidos dos líquidos usuais é a ordem orientacional das moléculas. Esta ordem orientacional destrói a isotropia dos líquidos e produz anisotropia, que é determinada, principalmente, pela forma geométrica das moléculas dos cristais líquidos e se manifesta, quando submetidos a campos externos, nas propriedades elásticas, elétricas, magnéticas, ópticas e térmicas de um material e nas medidas de módulo elástico, constante dielétrica, susceptibilidade magnética ou índice de refração, entre outras [43]-[46].

Em termos das propriedades elásticas ou eletromagnéticas, se duas das três direções num material são equivalentes, o material é dito *uniaxial*. As fases líquidas cristalinas nemática e esméctica A são uniaxiais desde que todas as direções perpendiculares ao diretor sejam equivalentes, mas sejam diferentes da direção de orientação privilegiada. Se todas as três direções num material não são equivalentes, então o material é *biaxial* [43]-[44].

Não são todos os tipos de moléculas que são capazes de formar a fase líquida cristalina. De maneira geral, pode-se dizer que as propriedades dos líquidos cristalinos têm sua origem na anisotropia da forma das moléculas que compõem os líquidos.

Ao considerarmos um cristal líquido em altas temperaturas, tratamos de um sistema isotrópico, pois as orientações de longo alcance dos eixos e dos centros de massa das moléculas desaparecem. Ao resfriarmos este fluido isotrópico, as moléculas podem adquirir uma tendência ao alinhamento chamado ordenamento orientacional, porém seus centros de massa permanecem distribuídos aleatoriamente através da amostra, permanecendo a ausência de ordem posicional. Em resumo, há a quebra da simetria rotacional, mas não da simetria translacional [43]-[45]. Os cristais líquidos descritos são chamados nemáticos, compostos orgânicos que apresentam esta fase tem moléculas alongadas como um bastão, apresentam alguma rigidez na sua região central e extremidades flexíveis. Uma maneira de imaginar uma molécula de cristal líquido nemático é pensar num pequeno lápis com um pequeno pedaço de espaguete cozido preso em cada uma de suas extremidades.

Nos cristais líquidos, apesar de as moléculas não possuírem uma posição fixa, seus eixos longos estão orientados em média numa direção preferencial representada pelo vetor n , chamado de diretor do cristal líquido (Figura 2.2).

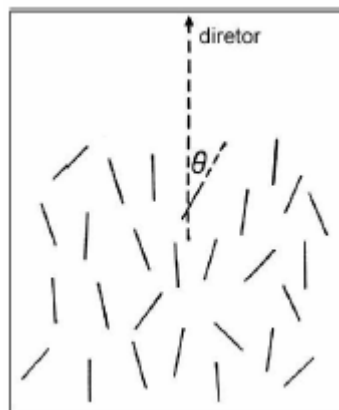


Figura 2.2 – Ilustração das moléculas num cristal líquido nemático

Cada molécula está orientada em algum ângulo θ relativo ao diretor, e seu grau de alinhamento é definido pelo parâmetro de ordem escalar S :

$$S = \frac{1}{2} \langle 3 \cos^2 \theta - 1 \rangle. \quad (2.1)$$

Assim como o vetor diretor, o parâmetro de ordem escalar de um cristal líquido expressa o alinhamento médio das moléculas de um determinado material numa

determinada fase. Para um determinado material na fase sólida o ângulo das moléculas relativo ao diretor é $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ fazendo com que, $S \simeq 1$ indique que todas as moléculas estão alinhadas paralelamente. Como na fase líquida as moléculas têm uma orientação completamente aleatória obtemos $\langle \cos^2 \theta \rangle = 1/3$ e assim $S = 0$ [1]. Na fase líquida cristalina S pode assumir valores entre 0 e 1 dependendo da temperatura ou concentração de compostos químicos. Deste modo, com a mudança de temperatura, ou concentração de compostos químicos, pode haver uma alteração neste alinhamento S .

Os compostos cujo parâmetro de ordem depende unicamente da temperatura são chamados *termotrópicos* enquanto aqueles cujo parâmetro de ordem depende da concentração são chamados de *liotrópicos*. Os compostos termotrópicos são formados por moléculas anisométricas (alongadas ou em formato de disco) orgânicas e pequenas, classificadas conforme suas simetrias: os cristais líquidos nemáticos (do Grego, filamento), os nemáticos colestéricos (relacionados ao colesterol) e os esméticos.

Nos nemáticos os centros de massa das moléculas estão dispostos de forma aleatória, não possuem ordem posicional de longo alcance, mas existe certa ordem orientacional das moléculas (Figura 2-2). As moléculas tendem a ficar paralelas a um eixo comum representado pelo vetor unitário $n(r)$, aparentando uma completa simetria rotacional em torno de $n(r)$ com uma simetria n onde as direções n e $-n$ são equivalentes, podendo possuir formato de bastão ou de elipsóide.

Nos colestéricos, também chamados de quirais, as moléculas não são simétricas por reflexão, os centros de massa não apresentam ordem de longo alcance, o que imprime fluidez à substância. Localmente, a sua estrutura de equilíbrio assemelha-se à fase nemática, mas em uma maior escala o diretor segue uma conformação helicoidal através da amostra, não permanecendo fixo no espaço como numa fase nemática, girando através da amostra ao redor de um eixo perpendicular ao diretor. Uma revolução completa é chamada "pitch" ou passo de hélice (Figura 2-3).

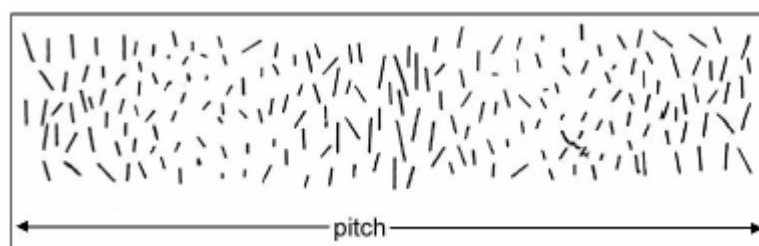
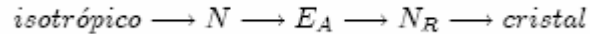


Figura 2.3 – Moléculas num cristal líquido nemático colestérico.

Ao reduzirmos, ainda mais, a temperatura aparece uma fase líquida cristalina termotrópica conhecida como esmética, sendo assim designada em consequência da palavra grega usada para sabão, pois substâncias que possuem tal fase apresentam propriedades mecânicas similares ao sabão pegajoso encontrado no fundo de saboneteiras, tendo, ele mesmo, uma fase líquida cristalina esmética. Nesta fase, as moléculas tendem a se orientar numa direção privilegiada organizando-se em várias camadas, formando planos mais ou menos espaçados com poucas moléculas entre estes, ou seja, o movimento das moléculas é mais restrito a este plano apresentando um grau de ordem translacional. Nesse sentido, os esméticos são mais ordenados do que os nemáticos. Nos esméticos A, o diretor encontra-se perpendicular ao plano esmético, enquanto nos esméticos C o ângulo muda de plano para plano caracterizando um trajeto helicoidal [1].

Embora alguns compostos exibam uma única fase líquida cristalina, existem alguns que apresentam dois tipos distintos e outros que apresentam um fenômeno conhecido como reentrância. Por exemplo, um composto pode apresentar duas fases nemáticas e uma fase esmética sendo ilustradas abaixo, através da seqüência de transições quando a temperatura é reduzida:



onde N representa a fase nemática usual, E_A a fase esmética e N_R a segunda fase nemática conhecida como nemática reentrante que, ao contrário da regra usual que assegura a ocorrência de fases nemáticas em altas temperaturas, apareceu em temperaturas mais baixas [45].

Diferentes formas de moléculas podem compor as fases de cristais líquidos, sendo a anisotropia a característica comum a todas elas. O tipo mais comum destas moléculas é alongada lembrando hastes, onde um eixo é muito maior do que os outros dois. Nas fases nemáticas, colestéricas e esméticas, está presente essa forma molecular que comumente é chamada de *prolata*, e todo tipo de composto onde esse formato molecular se apresenta na fase líquida cristalina é conhecido como calamítico. Assim, como já foi dito, estas moléculas alongadas apresentam alguma rigidez na sua região central e extremidades flexíveis.

Outros tipos de molécula são as achatadas se assemelhando a discos, onde um de seus eixos moleculares é muito maior do que os outros dois. Assim como nas moléculas prolatas, a rigidez na parte central é um quesito essencial para a orientação e, em média, o eixo perpendicular ao plano de cada molécula tende a orientar-se ao longo do diretor. Compostos que apresentam estas moléculas na fase líquida cristalina são conhecidos como

discóticos. A fase discótica mais simples é também chamada de nemática por apresentar a ordem orientacional e nenhuma ordem posicional. Quando a maioria das moléculas com esse formato passa a se amontoar aleatoriamente em colunas, apresentando além da ordem orientacional, presente nos cristais líquidos discóticos nemáticos, também a ordem posicional, chamamos essa fase de *colunar* ou fase *discótica esmétrica* [43], [44]. Para um determinado intervalo de temperatura as fases líquidas cristalinas calamíticas e discóticas se mantêm estáveis e por isso estes são cristais líquidos termotrópicos.

Diferentemente dos termotrópicos, que podem apresentar a fase líquida cristalina em compostos puros ou obtidos por misturas de compostos, os liotrópicos somente formam a fase líquida cristalina quando misturados a algum tipo de solvente adequado [44]. Uma molécula de cristal líquido liotrópico combina um grupo hidrofóbico numa extremidade, que tende a excluir água, com um grupo hidrófilo na outra, que tende a uma atração pela água. Estas moléculas anfífilas (formada por grupos hidrofóbicos e hidrófilos) formam estruturas ordenadas em solventes polares e não polares. Deste modo, compostos deste grupo possuem grupos com cabeça polar presa a uma ou mais caudas de longas cadeias hidrocarbônicas. Quando estas moléculas são dissolvidas num solvente polar, como a água, as extremidades que excluem água tendem a se arranjar de forma que as outras extremidades possam entrar em contato com a água. Este comportamento estabelece estruturas de formas esféricas, cilíndricas, entre outras, conservando a ordem orientacional e posicional [43]-[44]. A habilidade do sabão em dissolver óleo e sujeira está relacionada com a estrutura formada pelas moléculas do sabão quando dissolvidas na água, esta estrutura chamada *micela* é um agregado de moléculas cujo processo foi descrito acima. Outro exemplo de liotrópico são as moléculas de fosfolipídeos encontradas em todos os sistemas biológicos, incluindo nossas membranas celulares, cujas estruturas ordenadas resultantes são conhecidas como vesícula.

Nos compostos liotrópicos com baixas concentrações, as moléculas anfífilas formam micelas ou vesículas havendo ordem orientacional e alguma ordem posicional das moléculas dentro destas estruturas, não havendo porém, ordenamento destas estruturas. Já em altas concentrações, as micelas ou vesículas passam a possuir ordem posicional. Os exemplos de liotrópicos são a fase hexagonal, que possui um ordenamento de longas hastes cilíndricas de moléculas anfífilas e a fase lamelar em que, em alguma concentração, uma quantidade uniforme de água separa camadas de cabeças polares imediatamente vizinhas, enquanto as caudas hidrocarbônicas estão desordenadas ou numa configuração semelhante ao dos líquidos num meio não polar. A fase lamelar, no caso dos

fosfolípídeos, é de suma importância biológica, pois uma bicamada lipídica é a unidade estrutural para membranas biológicas.

Outro tipo de molécula que forma fase de cristal líquido está presente nos polímeros. Os polímeros são macromoléculas extremamente longas e delgadas, compostas por seqüências repetidas de monômeros (micromoléculas). Caracterizam-se por seu tamanho, estrutura química e interações intra e inter moleculares. Deste modo, todo polímero é uma macromolécula. Porém, deve-se ressaltar que nem toda macromolécula é um polímero. A palavra polímero, criada por Berzelius em 1832 para designar compostos com pesos moleculares múltiplos, vem do grego e significa muitas partes [46]. Uma tigela de espaguete cozido é uma boa maneira de visualizar a maior parte dos polímeros.

Alguns polímeros possuem propriedades semelhantes às dos cristais líquidos. A característica desses materiais, que concede essa propriedade, é a ordem orientacional encontrada em elementos ao longo das cadeias poliméricas. À semelhança dos cristais líquidos, existem polímeros com fase de cristal líquido esmétrico, colestérico e nemático. Na verdade, como já foi dito, nem todos os polímeros apresentam fase líquido-cristalina, porém alguns deles podem apresentar mais do que uma fase (Figura 2-4).

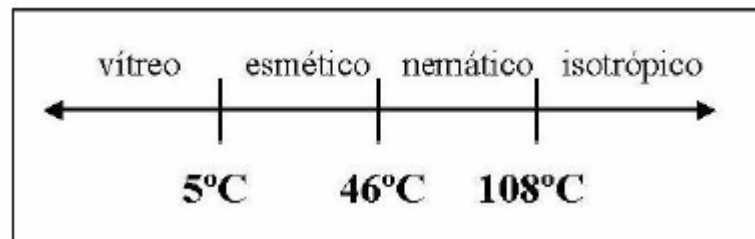


Figura 2.4 – Diagrama de fase para um polímero com cadeia principal.

Nos polímeros líquido-cristalinos termotrópicos, os monômeros que formam os polímeros assemelham-se às moléculas que formam cristais líquidos e se dividem em dois grupos: os não anfifílicos e os anfifílicos. Os primeiros são bastante rígidos, anisotrópicos e altamente polarizáveis em forma de hastes ou discos, enquanto pouco se sabe sobre o segundo grupo, pois são pouco pesquisados [46]. Quanto à disposição dos monômeros na cadeia polimérica podemos classificá-los como: *polímeros de cadeia principal* e *polímeros de cadeia secundária* [46].

Os polímeros de cadeia principal, apresentam segmentos bastante rígidos conectados por segmentos flexíveis extremidade-a-extremidade, assim como longas

seqüências de cliques unidas por pequenos pedaços de barbantes. As suas longas cadeias poliméricas movem-se livremente apresentando um aspecto emaranhado (Figura 2.5 (a)), e quando na fase líquida cristalina seus segmentos rígidos tendem a apontar numa direção privilegiada. No segundo grupo, os polímeros de cadeia secundária são compostos de um único polímero completamente flexível o qual tem, ao longo de seu comprimento, segmentos rígidos pendurados por curtos segmentos flexíveis (Figura 2.5 (b)). Na fase de cristal líquido, as longas partes flexíveis serpenteiam por toda a substância sem nenhuma ordem posicional e orientacional, mas os segmentos rígidos pendurados exibem ordem orientacional típica das moléculas de cristal líquido. Vale ressaltar que na fase de cristal líquido, tanto nos polímeros de cadeia principal quanto nos polímeros de cadeia secundária, somente a parte rígida anisotrópica mostra ordem orientacional, enquanto as partes mais flexíveis em ambos os tipos de cadeia vagam por toda a substância, mostrando pouca ou nenhuma ordem de qualquer tipo.

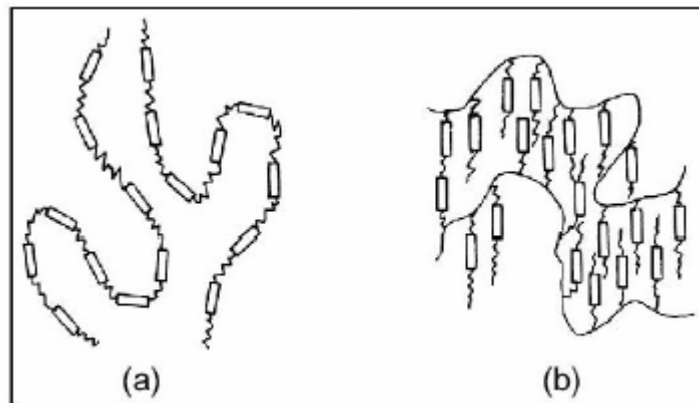


Figura 2.5 – Cristais líquidos poliméricos: (a) cadeia principal e (b) cadeia secundária.

A ligação do monômero à cadeia polimérica se dá ao longo do eixo menor ou ao longo do eixo maior (Figura 2.6).

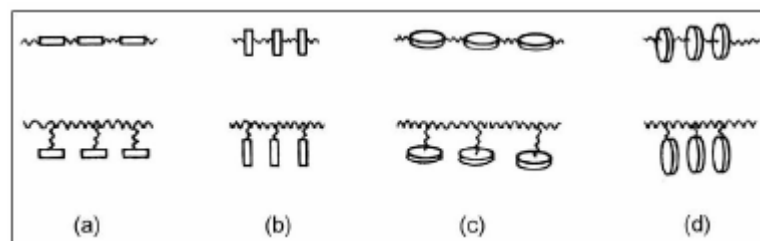


Figura 2.6 – Unidades anisotrópicas que formam polímeros. Na linha superior se encontram os polímeros de cadeia principal e na linha inferior os de cadeia secundária.

Em alguns casos, a direção preferida pelos monômeros de um polímero na fase de cristal líquido não é constante, mas gira de forma helicoidal, assim como nos cristais líquidos nemáticos quirais; então temos um cristal líquido polimérico nemático quiral. Em geral, os polímeros apresentam uma ou outra destas fases devido à forma de seus monômeros; isto é, monômeros que se assemelham a moléculas de cristal líquido nemático vão formar fase nemática.

Já nos polímeros liotrópicos, as macromoléculas formam fase de cristal líquido com ordem orientacional quando dissolvidas em solventes ordinários, porém existem duas exigências que devem ser cumpridas para que ocorra a fase cristal líquido. A primeira delas é que as macro-moléculas sejam bastante rígidas; logo, uma possibilidade são monômeros rígidos com fortes ligações entre si. A segunda exigência é que as macromoléculas dissolvam-se em solvente, mas a fase líquida cristalina só se dá quando a concentração é tal que as macromoléculas interajam constantemente umas com as outras, isto é, devemos ter altas concentrações. Estas duas exigências são difíceis de equacionar, já que quanto mais rígida for a molécula menos solúvel será. Para resolver este problema, às vezes se torna necessária a utilização de fortes solventes, tais como o ácido sulfúrico, mas muitas moléculas formam a fase de cristal líquido em muitos outros solventes. Diante desse panorama é interessante citarmos a existência de moléculas poliméricas sintéticas, assim como naturais [43].

Algumas propriedades mecânicas dos polímeros, tais como a solubilidade e outras, surgem como consequência das três diferentes conformações das cadeias: *sem ramificações*, *com ramificações* e *reticuladas*. Os polímeros que apresentam cadeias sem ramificações, admitem conformações em zigue-zague e são denominados *polímeros lineares*, os que apresentam ramificações são trivialmente denominados *polímeros ramificados*, enquanto os *polímeros reticulados* exibem cadeias mais complexas com *ligações cruzadas*. Em geral, os ramos laterais dificultam a aproximação das cadeias poliméricas, diminuindo as interações moleculares, atuando como plastificantes internos do polímero [46].

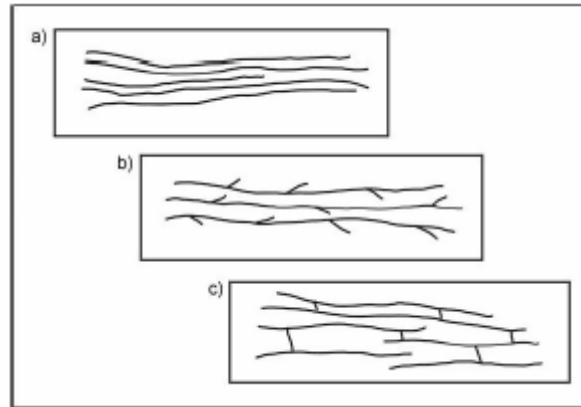


Figura 2.7 – Representação de cadeias macromoleculares: (a) cadeia sem ramificações, (b) cadeia com ramificações e (c) cadeia reticulada.

Assim como para todos os cristais líquidos, o parâmetro de ordem para os polímeros é o mesmo descrito na Eq. (2.1), porém S descreve apenas o ordenamento das partes rígidas. Vemos, no diagrama abaixo, o comportamento do parâmetro de ordem que decresce com o crescimento da temperatura.

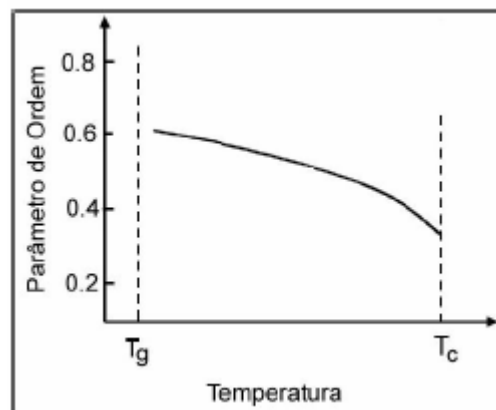


Figura 2.8 – Parâmetro de ordem orientacional de um polímero que apresenta a fase líquida cristalina. T_c é a temperatura de transição para a fase isotrópica e T_g é a temperatura de transição para a fase vítrea.

Pode-se perceber uma queda nos valores típicos do parâmetro de ordem dos cristais líquidos em comparação com o dos polímeros que apresentam fase de cristal líquido. Isso se dá devido a pouca ou nenhuma ordem orientacional ou posicional da parte flexível dos polímeros (Figura 2.8 e Figura 2.9).

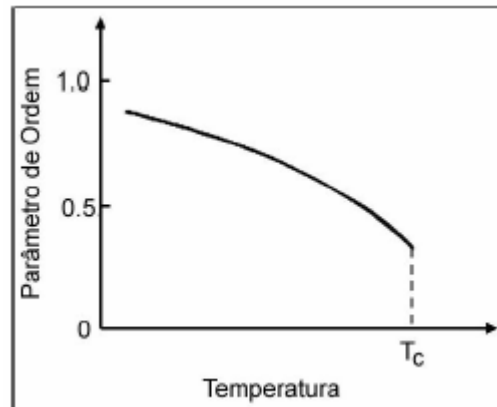


Figura 2.9 – Variação do parâmetro de ordem de um cristal líquido com a temperatura na fase líquida cristalina. T_c representa a temperatura de transição para a fase líquida.

Na Figura 2.10, a amostra de polímero na fase líquida cristalina nemática encontra-se entre polarizadores cruzados. O aparecimento de áreas escuras é devido à orientação do diretor ser paralela ou perpendicular aos eixos dos polarizadores, quando o diretor faz outro ângulo, que não estes, com os eixos dos polarizadores, as áreas permanecem claras.



Figura 2.10 – Polímero na fase de cristal líquido nemático observado em microscópio com luz polarizada.

3 ELASTICIDADE

3.1 DEFORMAÇÕES ELÁSTICAS DOS CRISTAIS LÍQUIDOS

Até o momento, tratamos de *cristais líquidos não deformados*, ou seja, admitiu-se que o diretor aponta na mesma direção em toda amostra, porém pode ocorrer *deformações* no alinhamento das moléculas, fazendo com que o diretor da amostra varie sua direção ponto a ponto. Estas variações são muito pequenas em nível microscópico, pois a distância em que ocorre a deformação do diretor é muito maior que a distância média de separação entre as moléculas do cristal líquido nemático. Assim, os nemáticos podem ser considerados como meios contínuos, cujas deformações podem ser detectadas facilmente em nível óptico.

Distorções no diretor de cristais líquidos nemáticos podem ser geradas por condições externas, tais como aplicação de campos elétrico ou magnético, ou pela interação com a superfície do recipiente da amostra. Os tipos de deformações do "bulk" de um cristal líquido podem ser classificados através de três deformações básicas: *divergência*, *torção* e *flexão*, as quais também costumam ser conhecidas como "*splay*", "*twist*" e "*bend*", respectivamente (Figura 3.1). As deformações serão ilustradas por meio de figuras, representando-as no plano da página.

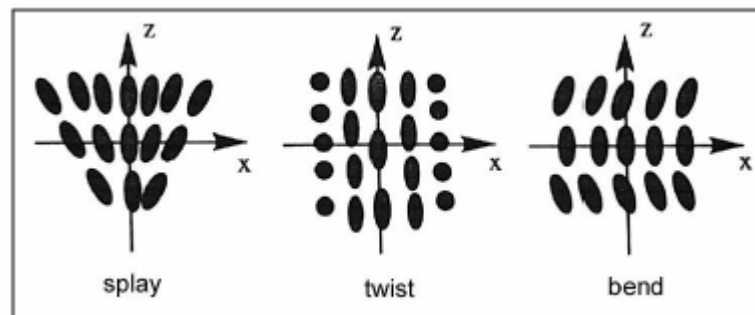


Figura 3.1 – Os três tipos básicos de deformação em cristais líquidos.

A deformação de divergência é resultado de um ancoramento planar das moléculas sobre duas superfícies que mantêm um determinado ângulo entre si, isto é, as moléculas tendem a permanecer paralelas às duas superfícies (Figura 3.2).

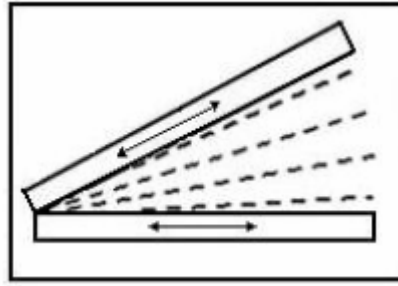


Figura 3.2 – Deformação de divergência, também chamada "splay".

Para obtermos a deformação de torção, podemos estabelecer um ancoramento planar entre duas superfícies paralelas, deslocando as direções de ancoramento através de um movimento de torção das superfícies em algum ângulo entre si (Figura 3.3).

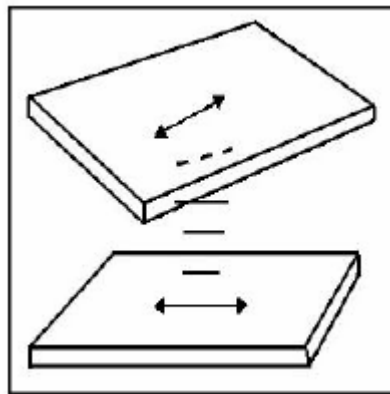


Figura 3.3 – Deformação de torção também chamada "twist".

Para deformação de flexão, é estabelecido um ancoramento homeotrópico e tal como na deformação de divergência, as moléculas são colocadas entre superfícies que formam um determinado ângulo entre si, porém neste tipo de deformação as moléculas tendem a permanecer perpendiculares às superfícies (Figura 3.4).

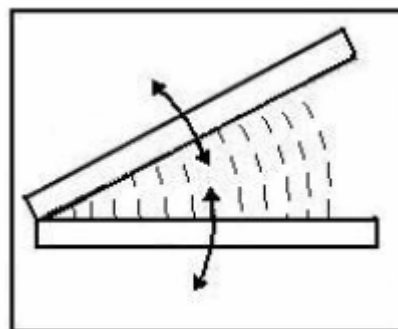


Figura 3.4 – Deformação de flexão, também chamada "bend".

Assim, em essência, todo cristal líquido deformado pode ser descrito através dos três tipos básicos de deformação descritos acima. Porém, quando descrevemos a interação do "bulk" com a superfície encontram-se deformações mais complicadas, sendo necessário mais do que estas três deformações básicas para descrevê-las. A equação que descreve a energia de distorção dos nemáticos é dada por:

$$\begin{aligned}
 f_{Frank} = & \frac{1}{2}K_{11} (\text{div}\mathbf{n})^2 + \frac{1}{2}K_{22} (\mathbf{n} \cdot \text{curl}\mathbf{n})^2 \\
 & + \frac{1}{2}K_{33} (\mathbf{n} \times \text{curl}\mathbf{n})^2 + K_{13} \text{div}(\mathbf{n} \cdot \text{div}\mathbf{n}) \\
 & - (K_{22} + K_{24}) \text{div}(\mathbf{n} \cdot \text{div}\mathbf{n} + \mathbf{n} \times \text{curl}\mathbf{n})
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

A Eq. (3.1) desprovida dos termos em que K_{13} e $(K_{22} + K_{24})$ aparecem como coeficientes foi a expressão proposta por Frank, em 1958, para a densidade de energia elástica de um cristal líquido deformado- As constantes elásticas K_{11} , K_{22} , K_{33} , $(K_{22} + K_{24})$ e K_{13} são comumente conhecidas como constantes elásticas de "splay", "twist", "bend", "saddle-splay" e "splay-bend", respectivamente- As constantes K_{11} , K_{22} e K_{33} são constantes que contribuem nas deformações de "bulk" enquanto que $(K_{22} + K_{24})$ e K_{13} , apesar de não serem tão estudadas quanto as outras constantes elásticas, sabe-se que suas contribuições são apenas superficiais [25].

A proposta deste trabalho é a obtenção de uma expressão que forneça valores aproximados para constantes elásticas nemáticas de "bulk".

4 PARÂMETRO DE ORDEM

Sabemos que o material nemático é aquele cujas moléculas não possuem ordem posicional de longo alcance, apesar de possuírem uma direção de orientação privilegiada, isto é, os eixos moleculares conhecidos como eixo nemático, ou eixo de simetria, desse tipo de material encontram-se, em média, paralelos a um vetor comum chamado de diretor.

Como o objetivo principal deste trabalho é a construção da energia elástica livre de cristais líquidos nemáticos, a partir de escalares da teoria de cristais líquidos, iniciaremos essa tarefa levando em consideração a característica anisotrópica das moléculas desse material e uma forma de mensurar as transições isotrópicas-anisotrópicas que é o parâmetro de ordem.

4.1 O CONCEITO DE PARÂMETRO DE ORDEM

O conceito de parâmetro de ordem e a expansão da energia livre em termos dos invariantes dessa grandeza foram introduzidos na Teoria de Landau das transições de fases contínuas, proposta na década de 30. A idéia principal desse conceito é que ele pode ser construído a partir de uma propriedade anisotrópica do material de forma que se anule na fase mais simétrica, não se anule na fase menos simétrica, descrevendo as transições de fase de diferentes simetrias. Em alguns sistemas físicos, o parâmetro de ordem associado a uma determinada transição de fase pode ser definido através de diferentes propriedades da matéria, porém, em outros, a escolha é menos trivial, podendo resultar em um escalar, vetor ou ainda num tensor, dependendo da complexidade do sistema. Na transição líquido-gás o parâmetro de ordem, que denotaremos daqui para frente por Q , pode ser tomado como a diferença de volume da fase gasosa e da líquida ou ainda como a diferença da densidade da fase líquida e gasosa, resultando num Q escalar. Em sistemas ferromagnéticos simples o parâmetro de ordem é a magnetização, ou seja, Q é um vetor proporcional ao valor médio $\langle b \rangle$, onde b é um vetor unitário que dá a direção do momento magnético molecular. Em casos mais complicados, o problema da definição de um parâmetro de ordem pode ser

formulado em termos da teoria de grupo, como foi originalmente proposto por Landau para transições de fase de segunda-ordem [1], [47] e [48].

No caso do cristal líquido nemático, a escolha do parâmetro de ordem é menos trivial e várias considerações devem ser feitas.

4.1.1 Aproximação Macroscópica

Podemos estabelecer a diferença de simetria entre líquidos isotrópicos a altas temperaturas e a fase nemática medindo propriedades macroscópicas. Para expressarmos essa medida quantitativamente introduzimos um parâmetro de ordem Q , tal que:

- i) $Q = 0$ na fase isotrópica, menos ordenada (mais simétrica), e
- ii) $Q \neq 0$ na fase nemática, mais ordenada (menos simétrica).

A determinação do parâmetro de ordem deve ser feita a partir de alguma das propriedades anisotrópicas dos cristais líquidos. Para definir o parâmetro de ordem, consideramos uma propriedade física x que na fase isotrópica tenha a forma:

$$\chi_{\alpha\beta} = \chi\delta_{\alpha\beta}. \quad (4.1)$$

Para os nemáticos, pode ser obtido a partir do índice de refração ou da permissividade dielétrica entre outras propriedades macroscópicas, porém aqui será obtido da susceptibilidade diamagnética. Considere a relação entre o momento magnético M e o campo magnético H ;

$$M_{\alpha} = \chi_{\alpha\beta}H_{\beta} \quad \text{com } \alpha, \beta = x, y, z \quad (4.2)$$

onde $\chi_{\alpha\beta}$ é um elemento do tensor susceptibilidade χ .

Para uma fase nemática uniaxial, num sistema de eixos apropriados onde o eixo z é paralelo ao eixo nemático, χ pode ser escrito na forma diagonal:

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \chi_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{\parallel} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

onde χ_{\parallel} e χ_{\perp} são as susceptibilidades paralela e perpendicular ao eixo de simetria, respectivamente. O eixo de simetria são os eixos moleculares a que encontram-se, em média, paralelos ao vetor diretor \hat{n} .

Comparando as Eq. (4.1) e Eq. (4.3), as condições exigidas para a obtenção do parâmetro de ordem são satisfeitas pela parte anisotrópica da susceptibilidade magnética:

$$\Delta\chi_{\alpha\beta} = \chi_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma} \chi_{\gamma\gamma}. \quad (4.4)$$

Assim, um tensor parâmetro de ordem \mathbf{Q} é definido como:

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{\Delta\chi_{\alpha\beta}}{\Delta\chi_{\max}}, \quad (4.5)$$

onde $\Delta\chi_{\max}$ é a anisotropia máxima observada numa fase nemática perfeitamente ordenada. A definição dada pela Eq. (4.5) representa a escolha mais simples para um parâmetro de ordem que considera as propriedades de simetria das fases cobrindo uma classe mais ampla do que apenas os cristais líquidos nemáticos uniaxiais.

Para definir um parâmetro de ordem $Q_{\alpha\beta}$ que desapareça na fase isotrópica, de Gennes [1] extrai o traço de χ da seguinte forma:

$$Q_{\alpha\beta} = G \left(\chi_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta} \sum_{\gamma} \chi_{\gamma\gamma} \right), \quad (4.6)$$

resultando num tensor simétrico, real e de traço zero.

Observe que este tensor se anula na fase isotrópica e é diferente de zero na fase nemática, realizando assim as condições impostas a um parâmetro de ordem. A constante de normalização G pode ser escolhida adequadamente quando o parâmetro de ordem assume o valor 1 num sistema totalmente orientado.

Ao invés de escolhermos a resposta magnética como ponto de partida na obtenção de \mathbf{Q} , poderíamos tomar uma resposta estática como a polarização elétrica ou constante dielétrica. Porém, ao escolher a susceptibilidade magnética, de Gennes levou em conta o fato de serem bem entendidas a relação entre χ e as propriedades moleculares [1].

Em geral, \mathbf{Q} é um tensor de ordem dois, simétrico e com cinco elementos independentes. Deste modo, quando os eixos a e β são escolhidos de forma apropriada, é possível diagonalizar a matriz \mathbf{Q} sendo os seus autovalores os elementos diagonais:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(x+y) & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(x-y) & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

permitindo que os três autovalores sejam diferentes quando $x \neq 0$ e $y \neq 0$ para o caso nemático biaxial. Na fase nemática uniaxial, temos $x \neq 0$ e $y = 0$, enquanto na fase isotrópica $x = y = 0$. Em um sistema de referência arbitrário, $Q_{\alpha\beta}$ em termos dos parâmetros x e y é dado por:

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{3}{2}x \left(n_{\alpha}n_{\beta} - \frac{1}{3}\delta_{\alpha\beta} \right) - \frac{1}{2}y \left[m_{\alpha}m_{\beta} - (\mathbf{n} \times \mathbf{m})_{\alpha} (\mathbf{n} \times \mathbf{m})_{\beta} \right] \quad (4.8)$$

onde \mathbf{n} , \mathbf{m} e $\mathbf{n} \times \mathbf{m}$ são os autovetores de \mathbf{Q} correspondentes aos autovalores x , $-\frac{1}{2}(x+y)$ e $-\frac{1}{2}(x-y)$ respectivamente [47].

4.1.2 Relação entre as Aproximação Macroscópica e Microscópica

Na seção anterior introduzimos o parâmetro de ordem nemático sem referência às propriedades moleculares. Porém, os parâmetros de ordem são frequentemente construídos em relação a modelos moleculares. Os parâmetros de ordem que consideram as propriedades moleculares são chamados microscópicos e por definição, contêm mais informações do que somente a simetria da fase [47].

O parâmetro de ordem microscópico pode ser construído a partir de simples modelos moleculares assumindo, por exemplo, que as moléculas sejam hastes rígidas e axialmente simétricas. Tal suposição permite especificar a orientação molecular por um vetor unitário \mathbf{v} , paralelo ao eixo molecular. Num parâmetro de ordem escalar teríamos $\langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rangle$, que é unitário por definição, enquanto num parâmetro vetorial teríamos $\langle \mathbf{v} \rangle$, que é nulo por não

haver polarização macroscópica. Deste modo, consideremos um tensor de segunda ordem simétrico para descrever o ordenamento nemático macroscópico [47]:

$$Q_{\alpha\beta}^M = \langle v_\alpha v_\beta \rangle - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \quad (4.9)$$

onde v_α são as componentes de v num sistema de referência fixo.

Assim como Q , o parâmetro de ordem microscópico Q^M é um tensor simétrico de traço zero que, com manipulações convenientes, identifica as simetrias isotrópicas, nemáticas uniaxiais e biaxiais das moléculas. Em particular, trataremos apenas das fases isotrópica e nemática uniaxial.

Na fase isotrópica, todos os três autovalores são nulos, enquanto na fase nemática uniaxial, dois dos autovalores são iguais. Tomando o eixo z de um sistema fixo de referência como o eixo de ordenamento, o parâmetro de ordem assume a forma:

$$Q^M = S \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \text{ com } S = \frac{3}{2} \langle v_z^2 \rangle - \frac{1}{2}. \quad (4.10)$$

Em um sistema de referência arbitrário:

$$Q_{\alpha\beta}^M = S \left(n_\alpha n_\beta - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \right), \quad (4.11)$$

onde n_α são as componentes do diretor, θ é o ângulo entre o eixo molecular e n e S é dado como na Eq.(2.1), $S = \frac{3}{2} \langle \cos^2 \theta \rangle - \frac{1}{2} = \langle P_2(\cos \theta) \rangle$, com $P_2(\cos \theta)$ o segundo polinômio de Legendre. Uma rápida inspeção nas Eq.(4.8) e Eq.(4.10) revela que tais equações são idênticas quando $y = 0$ e $x = \frac{2}{3}S$.

Uma relação entre Q e Q^M pode ser obtida para o modelo de moléculas prolatas rígidas, pois a parte anisotrópica da susceptibilidade magnética é proporcional a $Q_{\alpha\beta}^M$ no modelo de hastes rígidas:

$$\Delta\chi_{\alpha\beta} = N\chi_\alpha Q_{\alpha\beta}^M, \quad (4.12)$$

onde N é a densidade de partículas e χ_α é a anisotropia da susceptibilidade magnética molecular. Como por definição, $\Delta\chi_{\max} = N\chi_\alpha$, das Eq. (4.5) e Eq. (4.12) encontramos na estrutura do modelo de hastes rígidas [47] que:

$$Q_{\alpha\beta} = Q_{\alpha\beta}^M. \quad (4.13)$$

Uma grande quantidade dos nemáticos conhecidos é uniaxial sendo freqüentemente utilizado S como o parâmetro de ordem ao invés de Q^M [47]. Além disso, S é normalizado de tal modo que $S = 1$ para a fase perfeitamente ordenada e $S = 0$ para a fase em desordem completa.

Nesse trabalho, uma relação entre os parâmetros de ordem microscópico e macroscópico será estabelecida no capítulo 7.

5 GEOMETRIA DIFERENCIAL

A Geometria Diferencial tem como interesse a teoria de curvas e superfícies que podem variar ponto a ponto, sendo necessário para esse estudo o cálculo vetorial e diferencial para funções de várias variáveis. Como veremos neste e no próximo capítulo, teve início com Gauss a tarefa de descrever e classificar superfícies e espaços curvos através de suas propriedades intrínsecas e não através das propriedades dos espaços onde estes se encontravam. Assim, surgiu a relação chamada de curvatura Gaussiana para uma das propriedades intrínsecas que, apesar de única, pode ser obtida de diferentes maneiras. Essa propriedade diferencia algebricamente, por exemplo, as superfícies de uma esfera e de um plano por possuírem curvatura Gaussiana constante positiva e nula, respectivamente [38]. Apresentaremos este e outros elementos geométricos que nos auxiliarão na caracterização e interpretação das deformações de "bulk" que são o grande interesse desse trabalho.

Neste texto, não estamos preocupados em apresentar a Geometria Diferencial de forma didática ou matematicamente rigorosa. Apresentaremos uma abordagem rápida, de alguns elementos interessantes a esse trabalho. Por se tratar de um estudo introdutório, porém com muitos tópicos, faremos de modo análogo a alguns trabalhos da área [49], [50] e [51].

5.1 CURVAS NO ESPAÇO

A equação de uma curva no espaço na forma paramétrica é dada por:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \tag{5.1}$$

onde \mathbf{r} é o vetor posição no ponto $P = (x_1, x_2, x_3)$ da curva e t é o parâmetro desta curva, podendo ser escrita na forma de componentes:

$$\mathbf{r} = x_1(t) \mathbf{i} + x_2(t) \mathbf{j} + x_3(t) \mathbf{k}. \tag{5.2}$$

Por definição $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ é de classe C^∞ , possui derivadas de todas as ordens, excluindo o caso onde \mathbf{r} é constante. Se para todo ponto P da curva tivermos que $d\mathbf{r}/dt \neq \mathbf{0}$ a curva analítica da Eq.(5.1) é dita regular [49].

Ao estudarmos uma curva cujo parâmetro é t , pode ser útil a mudança do parâmetro t para um parâmetro s , onde t é uma função analítica de s , $t = t(s)$. Como $t_1 \leq t \leq t_2$, devemos ter que $t_1 = t(s_1)$, $t_2 = t(s_2)$ e $dt/ds \neq 0$ em $s_1 \leq s \leq s_2$. Intuitivamente, uma mudança de parâmetro $t = t(s)$ com $dt/ds > 0$ preserva o sentido do percurso de uma curva enquanto que quando $dt/ds < 0$ esse sentido é invertido. As exigências anteriores garantem a existência da função inversa $s = s(t)$ e que $ds/dt \neq 0$ em $t_1 \leq t \leq t_2$. Uma mudança de parâmetros é uma função estritamente crescente ou decrescente, e portanto bijetora. Essa correspondência unívoca entre os valores de t e s em seus domínios de definição unido ao fato de podermos escrever que:

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds}$$

e que $dt/ds \neq 0$ faz com que possamos afirmar que se um ponto for regular para o parâmetro t também o será para o parâmetro s .

Um exemplo de função utilizada na mudança de parâmetro é a função comprimento de arco onde o parâmetro comprimento de arco é denotado por s :

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2} dt. \quad (5.3)$$

5.2 VETOR TANGENTE, VETOR NORMAL E CURVATURA

Seja uma curva no espaço, P e Q dois pontos desta curva cujos vetores posição são $\mathbf{r}(t_P)$ e $\mathbf{r}(t)$, respectivamente. Suponha que o ponto P esteja fixo sobre a curva enquanto o ponto Q se aproxima de P , quando t se aproxima de t_P , sendo denotado, caso exista o limite, pelo seguinte vetor:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} = \lim_{t \rightarrow t_P} \frac{\overrightarrow{PQ}}{t - t_P} = \lim_{t \rightarrow t_P} \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_P)}{t - t_P}. \quad (5.4)$$

O vetor $d\mathbf{r}/dt$ é tangente à curva no ponto $P(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ e aponta na direção do crescimento de t (Figura 5.1). A derivada \mathbf{r} da Eq. (5.4) foi tomada em relação ao parâmetro t . Quando o parâmetro for o comprimento de arco s denotaremos tais derivadas por $\mathbf{r}'(s)$ ou simplesmente por \mathbf{r}' .

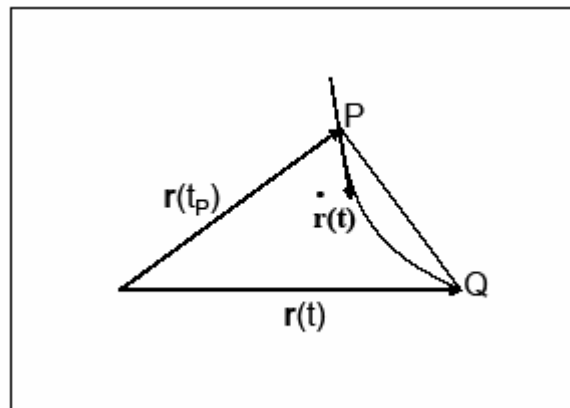


Figura 5.1 – Representação do vetor $\mathbf{r} = d\mathbf{r}/dt$ tangente à curva no ponto P.

O vetor tangente unitário à curva para o parâmetro t é dado por:

$$\mathbf{T} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} \quad (5.5)$$

e quando o parâmetro escolhido é o comprimento de arco s , temos que:

$$\mathbf{T} = \mathbf{r}' \quad (5.6)$$

desde que $ds^2 = dr^2$. Neste caso, o vetor tangente unitário aponta na direção do crescimento do comprimento de arco s .

Como \mathbf{T} é um vetor unitário, por definição, o vetor \mathbf{T}' é a taxa da variação da direção de \mathbf{T} em relação ao comprimento de arco s . Logo, diferenciando a expressão $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1$ obtemos:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}' = 0$$

e concluímos que \mathbf{T}' é perpendicular a \mathbf{T} . Portanto

$$\mathbf{T}' = \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa\mathbf{N} \quad (5.7)$$

onde \mathbf{N} é chamado de *vetor normal principal* que conseqüentemente é um vetor unitário e perpendicular a \mathbf{T} . A direção de \mathbf{N} é escolhida de modo que κ seja não negativo e a implicação geométrica dessa escolha é que \mathbf{N} aponta na direção do centro da curvatura.

Definiremos, a seguir, um vetor unitário normal ao vetor \mathbf{T} e ao vetor \mathbf{N} , sendo chamado por esse motivo de *vetor binormal* e denotado por \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} \quad (5.8)$$

Da Eq.(5.8), segue que

$$\mathbf{B}^2 = \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{T} \times \mathbf{N}) \cdot (\mathbf{T} \times \mathbf{N}) = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T})(\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}) - (\mathbf{T} \cdot \mathbf{N})(\mathbf{N} \cdot \mathbf{T}) = 1 - 0 = 1 \quad (5.9a)$$

portanto \mathbf{B} é um vetor unitário. Deste modo os vetores \mathbf{T} , \mathbf{N} e \mathbf{B} formam nesta ordem um sistema ortogonal com orientação positiva chamado de *triedro móvel*, pois esses vetores mudam de um ponto para outro ao longo da curva (Figura 5-2).

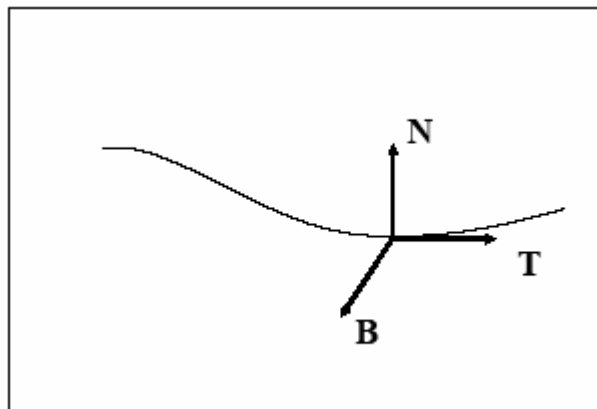


Figura 5.2 – Representação do triedro móvel num ponto de uma curva.

5.3 PLANOS DO TRIEDRO MÓVEL

Seja $\mathbf{r}(t)$ o vetor posição de um ponto arbitrário em um plano. O plano que contém um ponto P de uma curva no espaço cujo vetor posição é $\mathbf{r}_P(t)$ e:

i) é paralelo aos vetores \mathbf{N} e \mathbf{B} denomina-se *plano normal*, com equação dada por:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_P) \cdot \mathbf{T} = 0 \quad (5.10)$$

ii) é paralelo aos vetores \mathbf{T} e \mathbf{B} denomina-se *plano retificante*, com equação dada por:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_P) \cdot \mathbf{N} = 0 \quad (5.11)$$

iii) é paralelo aos vetores \mathbf{T} e \mathbf{N} denomina-se *plano osculador*, com equação dada por:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_P) \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (5.12)$$

5.4 ELEMENTOS DA INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Apesar de nossa atenção ter se concentrado somente no comportamento geométrico do vetor normal principal \mathbf{N} , ao definirmos o vetor \mathbf{T}' na Eq. (5.7), o leitor mais atento deve ter se questionado quanto ao escalar κ . O vetor \mathbf{T}' chama-se *vetor curvatura da curva* no ponto P e pela Eq. (5.7) aponta na direção do centro da curvatura da curva, enquanto o escalar $\kappa = |\mathbf{T}'|$ denominado de *curvatura* da curva em P , é a velocidade com que as retas tangentes mudam de direção numa curva onde o parâmetro é s [51]. Para exemplificar, $\kappa = 0$ numa linha reta. Outro elemento geométrico que surge e está ligado a κ é ρ , o *raio da curvatura* num ponto P , sendo por definição $\rho = 1/\kappa$. O vetor $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \rho\mathbf{N}$ determina o centro C da curvatura, onde \mathbf{r} é o vetor posição de um ponto P da curva e \mathbf{N} o vetor normal principal. O segmento de reta $\overline{PC} = \rho$ encontra-se no plano osculador e o círculo no

plano osculador cujo raio é p é chamado de *círculo de curvatura* ou *círculo osculador* [49] (Figura 5-3).

Para tratarmos de outro importante elemento de interpretação geométrica que descreve uma curva no espaço, devemos definir um vetor a partir do vetor unitário binormal \mathbf{B} . Diferenciando a expressão $\mathbf{B} \cdot \mathbf{B} = 1$ obtemos:

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}' = 0 \quad (5.13)$$

Da equação anterior vemos que \mathbf{B}' é perpendicular a \mathbf{B} e representa a taxa de variação da direção de \mathbf{B} em relação ao comprimento de arco s . Por definição, o vetor binormal \mathbf{B} é perpendicular ao vetor tangente \mathbf{T} e ao vetor normal \mathbf{N} , logo:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (5.14)$$

Diferenciando a equação $\mathbf{T} \cdot \mathbf{B} = 0$ obtemos:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{B}' + \mathbf{T}' \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.15)$$

e da Eq.(5.7):

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{B}' = -\mathbf{T}' \cdot \mathbf{B} = -\kappa \mathbf{N} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5.16)$$

da Eq. (5.13) e Eq. (5.16) concluímos que \mathbf{B}' é perpendicular aos vetores \mathbf{B} e \mathbf{T} ; logo \mathbf{B}' é paralelo ao vetor $\mathbf{B} \times \mathbf{T}$, e como os vetores \mathbf{T} , \mathbf{N} e \mathbf{B} formam o triedro móvel, é proporcional ao vetor \mathbf{N} . Usando o mesmo procedimento da definição do vetor \mathbf{T}' escrevemos:

$$\mathbf{B}' = \frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau \mathbf{N} \quad (5.17)$$

onde o escalar τ é a *torção* da curva em P . A torção é positiva quando o vetor binormal \mathbf{B} realiza um movimento de torção na direção de \mathbf{N} para \mathbf{B} , em torno do vetor tangente \mathbf{T} , ao longo da curva na direção de crescimento do comprimento do arco.

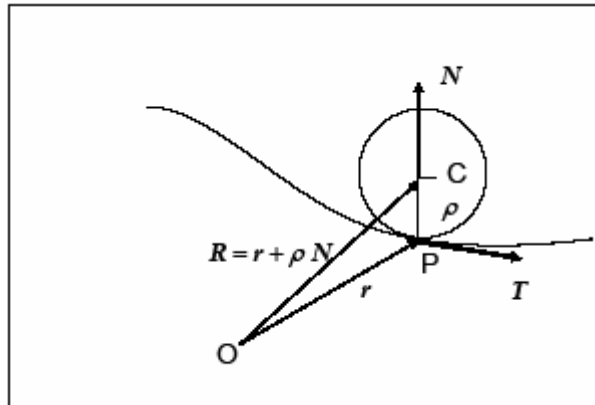


Figura 5.3 – Círculo osculador num ponto P de uma curva.

Geometricamente, o módulo da torção $|\tau|$ mede a velocidade com que varia o vetor binormal ou equivalentemente o plano osculador [51] (Figura 5.3).

Expressões para a curvatura κ e para a torção τ , quando o vetor posição r é função do parâmetro comprimento de arco s , podem ser obtidas:

$$\kappa = \sqrt{x_1''^2 + x_2''^2 + x_3''^2}, \quad (5.18)$$

$$\tau = \frac{1}{x_1''^2 + x_2''^2 + x_3''^2} \begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' \end{vmatrix} \quad (5.19)$$

onde (x_1, x_2, x_3) são as coordenadas de um ponto P da curva e a diferenciação é em relação a s . Apesar das expressões apresentadas acima, facilmente se obtêm expressões para a curvatura e torção quando o vetor posição é função de um parâmetro geral t [49]. As interpretações de κ e τ ficarão mais clara na seção Círculo Osculador.

5.5 FÓRMULAS DE FRENET

Vamos obter uma expressão para N' em termos dos vetores T , N e B que são linearmente independentes:

$$\mathbf{N}' = \lambda_1 \mathbf{T} + \lambda_2 \mathbf{N} + \lambda_3 \mathbf{B} \quad (5.20)$$

onde λ_1 , λ_2 e λ_3 são escalares que serão determinados. Como \mathbf{N} é um vetor unitário diferenciamos a expressão $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1$ e obtemos:

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}' = 0$$

e da Eq.(5.20):

$$\mathbf{N} \cdot (\lambda_1 \mathbf{T} + \lambda_2 \mathbf{N} + \lambda_3 \mathbf{B}) = 0.$$

como \mathbf{N} é unitário e é perpendicular a \mathbf{T} e a \mathbf{B} devemos ter que $\lambda_2 = 0$ e passamos a escrever:

$$\mathbf{N}' = \lambda_1 \mathbf{T} + \lambda_3 \mathbf{B} \quad (5.21)$$

Diferenciando $\mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0$, obtemos:

$$\mathbf{T}' \cdot \mathbf{N} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{N}' = 0$$

e como $\mathbf{T}' = \kappa \mathbf{N}$ obtemos a expressão:

$$\kappa + \mathbf{T} \cdot (\lambda_1 \mathbf{T} + \lambda_3 \mathbf{B}) = 0$$

Assim como anteriormente, determinamos $\lambda_1 = -\kappa$. Além disso, diferenciando $\mathbf{N} \cdot \mathbf{B} = 0$ obtemos:

$$\mathbf{N}' \cdot \mathbf{B} + \mathbf{N} \cdot \mathbf{B}' = 0$$

e como $\mathbf{B}' = -\tau \mathbf{N}$ reescrevemos a equação como:

$$-\tau + \mathbf{N}' \cdot \mathbf{B} = 0$$

substituindo a Eq. (5.21):

$$-\tau + (\lambda_1 \mathbf{T} + \lambda_3 \mathbf{B}) \cdot \mathbf{B} = 0$$

o que determina $\lambda_3 = \tau$. Deste modo,

$$\mathbf{N}' = -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}. \quad (5.22)$$

As Eqs. (5.7), (5.22) e (5.17) juntas formam o que chamamos de fórmulas de Frenet-Serret ou simplesmente fórmulas de Frenet:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}' &= \kappa \mathbf{N} \\ \mathbf{N}' &= -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B} \\ \mathbf{B}' &= -\tau \mathbf{N} \end{aligned} \quad (5.23)$$

que são combinações lineares de \mathbf{T} , \mathbf{N} e \mathbf{B} . E das fórmulas de Frenet é que obtemos elementos geométricos locais de uma curva, por exemplo, as expressões para curvatura e torção apresentadas na seção anterior. Por isso, comumente se diz que a teoria local das curvas está contida essencialmente nas fórmulas de Frenet [51].

5.6 CÍRCULO OSCULADOR

Dada uma curva regular, intuitivamente somos levados a pensar que dentre todas as retas que passam no ponto P a reta tangente à curva nesse ponto é aquela que possui maior contato com a curva. Ademais, dentre todos os planos que contêm a reta tangente à curva no ponto P o plano osculador parece ter maior contato com a curva [51]. Na verdade o plano osculador à curva em P é o plano mais próximo à curva, ou seja, é um plano tangente à curva em P . Para essa demonstração, é necessário a utilização do conceito de ordem de contato entre um plano e uma curva, podendo ser encontrada em [49].

A seguir, definiremos o círculo osculador, que mantém com a curva um contato de ordem pelo menos 2 [49], e após esse processo surgirão as razões pelas quais existe o círculo osculador, ρ é chamado de raio de curvatura, κ é a curvatura e até mesmo a interpretação para κ torna-se mais evidente.

A equação geral de uma esfera com centro C determinado pelo vetor posição r_0 e raio α é dada por:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 = \alpha^2. \quad (5.24)$$

Sejam P , Q e R pontos distintos de uma curva no espaço com $\mathbf{r}''(s) \neq 0$ ($\mathbf{r}''(s) = \mathbf{T}' = \kappa \mathbf{N}$) e com os seguintes vetores posição $\mathbf{r}(s_0)$, $\mathbf{r}(s_1)$ e $\mathbf{r}(s_2)$, respectivamente, com $s_0 < s_1 < s_2$. Suponha que P , Q e R estão sobre a esfera da Eq. (5.24).

Vamos determinar a equação da esfera quando os pontos Q e R se aproximam do ponto P . Devido ao proposto, definimos a seguinte função:

$$f(s) = (\mathbf{r}(s) - \mathbf{r}_0)^2 - \alpha^2 \quad (5.25)$$

onde s é o comprimento de arco da curva em questão. Como P, Q e R são pontos sobre a esfera temos que $(\mathbf{r}(s_i) - \mathbf{r}_0)^2 = \alpha^2$ para $i = 0, 1, 2$. Logo:

$$f(s_0) = f(s_1) = f(s_2) = 0.$$

O Teorema de Rolle afirma que existe pelo menos ξ_1 em (s_0, s_1) e ξ_2 em (s_1, s_2) onde:

$$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0, \quad s_0 \leq \xi_1 \leq s_1 \leq \xi_2 \leq s_2.$$

Aplicando novamente o Teorema de Rolle a $f'(x)$ podemos afirmar que existe pelo menos ξ_3 em (ξ_1, ξ_2) onde:

$$f''(\xi_3) = 0, \quad \xi_1 \leq \xi_3 \leq \xi_2.$$

À medida que Q e R se aproximam de P , s_1, s_2, ξ_1, ξ_2 e ξ_3 se aproximam de s_0 , pois $s_0 \leq \xi_1 \leq s_1 \leq \xi_2 \leq s_2$ e $\xi_1 \leq \xi_3 \leq \xi_2$. Então segue-se que:

$$\begin{aligned} f(s_0) &= 0 \Rightarrow (\mathbf{r}(s_0) - \mathbf{r}_0)^2 = \alpha^2, \\ f'(s_0) &= 0 \Rightarrow (\mathbf{r}(s_0) - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{r}'(s_0) = 0, \\ f''(s_0) &= 0 \Rightarrow \mathbf{r}'(s_0) \cdot \mathbf{r}'(s_0) + (\mathbf{r}(s_0) - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{r}''(s_0) = 0 \\ &\Rightarrow (\mathbf{r}(s_0) - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{r}''(s_0) + (\mathbf{r}'(s_0))^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.26)$$

da Eq. (5.6) $\mathbf{r}' = \mathbf{T}$; logo, a equação $f'(s_0) = 0$ mostra que $\mathbf{r}(s_0) - \mathbf{r}_0$ está no plano normal em P , basta ver a Eq. (5.10), e conseqüentemente podemos escrevê-la como combinação linear de \mathbf{N} e \mathbf{B} :

$$\mathbf{r}(s_0) - \mathbf{r}_0 = \lambda_1 \mathbf{N} + \lambda_2 \mathbf{B}. \quad (5.27)$$

A equação $f''(s_0) = 0$ da Eq. (5.26) mostra termos contendo \mathbf{r}' e \mathbf{r}'' , onde faremos substituições apropriadas. Substituindo, da Eq. (5.6), $\mathbf{r}' = \mathbf{T}$ e das equações de Frenet na Eq. (5.23) $\mathbf{r}''(s_0) = \mathbf{T}' = \kappa \mathbf{N}$ obtemos:

$$(\mathbf{r}(s_0) - \mathbf{r}_0) \cdot \kappa \mathbf{N} + (\mathbf{T})^2 = 0,$$

lembrando que \mathbf{T} é unitário

$$\kappa \mathbf{N} \cdot (\mathbf{r}(s_0) - \mathbf{r}_0) + 1 = 0$$

e o raio de curvatura é $\rho = 1/\kappa$

$$\mathbf{N} \cdot (\mathbf{r}(s_0) - \mathbf{r}_0) + \rho = 0, \quad (5.28)$$

substituindo a Eq. (5.27) na equação acima obtemos:

$$\mathbf{N} \cdot (\lambda_1 \mathbf{N} + \lambda_2 \mathbf{B}) + \rho = 0,$$

$$\lambda_1 = -\rho. \quad (5.29)$$

Para obtermos λ_2 basta elevarmos ao quadrado ambos os lados da Eq.(5.27):

$$(\mathbf{r}(s_0) - \mathbf{r}_0)^2 = (\lambda_1 \mathbf{N} + \lambda_2 \mathbf{B})^2,$$

da Eq.(5.26) e lembrando que \mathbf{T} , \mathbf{N} e \mathbf{B} formam o triedro móvel, isto é $\mathbf{N} \cdot \mathbf{B} = 0$, juntamente com o resultado obtido para $\lambda_1 = -\rho$ obtemos:

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \\ \lambda_2 &= \pm \sqrt{\alpha^2 - \rho^2} \end{aligned} \quad (5.30)$$

Finalizando os cálculos determinamos a equação da esfera:

$$\mathbf{r}(s_0) - \mathbf{r}_0 = \lambda_1 \mathbf{N} + \lambda_2 \mathbf{B}$$

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(s_0) + \rho \mathbf{N} \pm \sqrt{\alpha^2 - \rho^2} \mathbf{B}. \quad (5.31)$$

Se $\alpha > \rho$, temos duas esferas com seus centros dados pelo vetor posição \mathbf{r}_0 definido pela Eq. (5.31). Se $\alpha = \rho$, temos uma esfera com seu centro no plano osculador. A intersecção desta esfera e do plano osculador resulta num círculo de raio ρ e por isso é chamado *círculo osculador* ou *círculo de curvatura*. Como ρ é o raio desse círculo pelo qual a curva pode ser aproximada naquele ponto, ele é chamado raio de curvatura e κ , o recíproco de ρ , chama-se curvatura, pois quantifica a variação da curvatura à medida que se percorre

toda curva pela inspeção da variação da razão $\frac{1}{\rho}$ ao longo da curva. Devemos lembrar que para cada ponto da curva temos um único círculo osculador de raio ρ , com ρ variando de ponto a ponto.

5.7 EQUAÇÕES NATURAIS DE UMA CURVA ESPACIAL

Duas curvas são ditas congruentes se, por um movimento rígido, são levadas a coincidem ponto a ponto. Mesmo durante o movimento rígido determinadas propriedades características das curvas, tais como curvatura e torção, permanecem inalteradas. Como a curvatura e a torção são funções da posição dos pontos na curva, veja Eq. (5.18) e Eq. (5.19), podem ser expressas como função do comprimento de arco s em relação a algum ponto de referência escolhido sobre a curva, ou seja:

$$\kappa = \kappa(s), \quad \tau = \tau(s).$$

As equações acima são conhecidas como equações naturais ou intrínsecas de uma curva, pois fornecem informações referentes à curva a partir de propriedades intrínsecas desta, não importando o espaço onde estejam.

Provaremos que duas curvas com as mesmas equações intrínsecas são congruentes. Sejam as curvas $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1(s)$ e $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2(s)$ que, através de um movimento rígido, fazemos com que os seus pontos de referência coincidam juntamente com os triedros móvel de cada uma delas. Pelas fórmulas de Frenet

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2 + \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2 + \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_2) &= \\ &= \mathbf{T}'_1 \cdot \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}'_2 + \mathbf{N}'_1 \cdot \mathbf{N}_2 + \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}'_2 + \mathbf{B}'_1 \cdot \mathbf{B}_2 \\ &\quad + \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}'_2 \\ &= \kappa_1 \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{T}_2 + \kappa_2 \mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{T}_1 + (-\kappa_1 \mathbf{T}_1 + \tau_1 \mathbf{B}_1) \cdot \mathbf{N}_2 \\ &\quad + \mathbf{N}_1 \cdot (-\kappa_2 \mathbf{T}_2 + \tau_2 \mathbf{B}_2) - \tau_1 \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{B}_2 - \tau_1 \mathbf{N}_2 \cdot \mathbf{B}_1. \end{aligned}$$

Por hipótese $\kappa_1 = \kappa_2$ e $\tau_1 = \tau_2$, segue-se que:

$$\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2 + \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2 + \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_2 = \text{constante.}$$

Em $s = 0$ fizemos com que os triedros móveis de cada uma das curvas coincidam, ou seja:

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2, \quad \mathbf{N}_1 = \mathbf{N}_2, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2;$$

portanto,

$$\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2 + \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2 + \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_2 = 3 \quad (5.32)$$

Como os vetores \mathbf{T} , \mathbf{N} e \mathbf{B} são unitários e visto que a soma de seus produtos escalares na Eq. (5.32) é 3 segue-se que para todo s

$$\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2 = \mathbf{N}_1 \cdot \mathbf{N}_2 = \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{B}_2 = 1,$$

E

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2, \quad \mathbf{N}_1 = \mathbf{N}_2, \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2.$$

Da igualdade $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2$ e da Eq. (5.6) obtemos:

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}'_2,$$

e portanto

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2 + \mathbf{c}$$

onde \mathbf{c} é um vetor constante de integração. Para determiná-lo, usamos a condição inicial $\mathbf{r}_1(0) = \mathbf{r}_2(0)$, que implica que $\mathbf{c} = \mathbf{0}$. Portanto, para todo s ,

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$$

completando a prova.

5.8 COORDENADAS SUPERFICIAIS

Nessa seção, vamos investigar algumas propriedades locais de superfícies introduzindo duas formas quadráticas. A primeira, relacionada com o comprimento de curvas em uma superfície, ângulo entre vetores tangentes e área de regiões da superfície. A segunda,

relacionada com a curvatura das curvas da superfície [51]. Iniciemos através da representação paramétrica de uma superfície:

$$x_1 = x_1(u, v), \quad x_2 = x_2(u, v), \quad x_3 = x_3(u, v), \quad (5.33)$$

onde u e v são parâmetros. Ao eliminarmos os parâmetros u e v obtemos uma equação da seguinte forma:

$$F(x_1, x_2, x_3) = 0. \quad (5.34)$$

Considere apenas as duas primeiras equações da Eq.(5.33); para que seja possível resolver u e v em termos de x_1 e x_2 é necessário que o Jacobiano $J\left(\frac{x_1, x_2}{u, v}\right) \neq 0$. Se somente $J\left(\frac{x_1, x_2}{u, v}\right) = 0$ devemos resolver u e v em termos de x_1 e x_3 ou em termos de x_2 e x_3 . Para se obter a Eq.(5.34) pelo menos um dos Jacobianos:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ou } \begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ou } \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (5.35)$$

ou equivalentemente a matriz Jacobiana:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

ter posto 2.

Se as três funções x_1, x_2 e x_3 são constantes, então representam um ponto e todas as derivadas parciais da matriz Jacobiana da Eq.(5.36) se anulam e a ordem dessa matriz é zero.

Por outro lado se as três funções x_1, x_2 e x_3 estão relacionadas de forma que são redutíveis a funções de um único parâmetro t com t com $t = t(u, v)$ então representam uma curva e os elementos da matriz Jacobiana podem ser reescritos:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial v} & \frac{\partial x_3}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial v} \end{pmatrix}$$

tal que todo determinante de segunda ordem é zero e neste caso o posto desta matriz é um.

A partir da discussão acima, concluímos que a ordem da matriz Jacobiana da Eq. (5.36) determina o que as Eqs. (5.33) representam: uma superfície, uma curva ou um ponto.

Se u for constante obtemos na superfície a curva $x_1 = x_1(c, v)$, $x_2 = x_2(c, v)$, $x_3 = x_3(c, v)$ e se v também for constante obtemos uma outra curva que se intercepta com a curva anterior num ponto P da superfície. Nesse caso, os parâmetros u e v são chamados de coordenadas curvilíneas da superfície.

Para cada ponto $P(x_1, x_2, x_3)$ de uma superfície S dada pelas Eqs. (5.33) definimos \mathbf{r} , vetor posição de P :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$$

e assim

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dv. \quad (5.37)$$

A derivada parcial $\partial \mathbf{r} / \partial u$ é obtida variando o ponto P ao longo da curva u , ou seja, as derivadas parciais $\partial \mathbf{r} / \partial u$ e $\partial \mathbf{r} / \partial v$ definem direções tangentes à superfície S no ponto P , ou seja, são tangentes às curvas u e v , respectivamente. Deste modo, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ é um vetor normal à superfície S e o plano tangente é gerado pelos vetores $\partial \mathbf{r} / \partial u$ e $\partial \mathbf{r} / \partial v$. Em geral, estes vetores não são unitários nem ortogonais, assim o vetor unitário normal a S em P é:

$$\mathbf{N} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right|} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \quad (5.38)$$

podendo ser escrito numa notação simplificada como apresentada após a segunda igualdade.

Se todos os determinantes de segunda ordem se anularem para algum ponto, então esse ponto será chamado ponto singular da superfície; caso contrário, será chamado ponto regular. Para pontos regulares a matriz Jacobiana da Eq. (5.36) tem posto dois e concluímos que $(\partial \mathbf{r} / \partial u) \times (\partial \mathbf{r} / \partial v) \neq 0$ e os vetores $\partial \mathbf{r} / \partial u$ e $\partial \mathbf{r} / \partial v$ não são nulos e nem paralelos e, portanto, determinam valores para du e dv podendo alterar $d\mathbf{r}$ de forma a obter qualquer direção no plano tangente. No caso de curvas no espaço euclidiano o vetor normal à superfície é dado por:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial r_2}{\partial u} & \frac{\partial r_3}{\partial u} \\ \frac{\partial r_2}{\partial v} & \frac{\partial r_3}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 + \begin{vmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u} & \frac{\partial r_3}{\partial u} \\ \frac{\partial r_1}{\partial v} & \frac{\partial r_3}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u} & \frac{\partial r_2}{\partial u} \\ \frac{\partial r_1}{\partial v} & \frac{\partial r_2}{\partial v} \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 \quad (5.39)$$

e a condição $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \neq 0$ é equivalente a que pelo menos um dos determinantes da Eq.(5.39) seja distinto de zero.

A primeira forma quadrática de uma superfície aparece quando fazemos o produto escalar de dois vetores tangentes a uma superfície S num ponto P . No espaço Euclidiano, o quadrado do elemento de arco ds na superfície $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ é chamado de *primeira forma fundamental quadrática* da superfície S num ponto P e pela Eq.(5.37) é dado por:

$$ds^2 = d\mathbf{r}^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \right)^2 du^2 + 2 \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) dudv + \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right)^2 dv^2 \quad (5.40)$$

podendo ser reescrita numa forma simplificada:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \mathbf{r}_u^2 du^2 + 2\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v dudv + \mathbf{r}_v^2 dv^2 \\ ds^2 &= E du^2 + 2F dudv + G dv^2 \end{aligned} \quad (5.41)$$

onde E , F e G são as *quantidades da primeira forma fundamental* da superfície. Assim como dissemos anteriormente, a primeira forma quadrática diz respeito à teoria local das superfícies [51], está relacionada com o comprimento de curvas em uma superfície, ângulo entre vetores tangentes e área de regiões da superfície através de expressões que envolvem as quantidades E , F e G [51] e [49]. Podemos perceber pela Eq.(5.41) que se uma curva S passa por um ponto P em um certo instante então a velocidade desta curva neste instante pertence ao plano tangente de S em P [50].

As quantidades E , F e G em geral variam de ponto a ponto e para construirmos as condições de existência para estas devemos perceber que:

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)^2 &= (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) = \begin{vmatrix} \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u & \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v \\ \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_u & \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = EG - F^2 \end{aligned}$$

como $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq 0$ vem que $EG - F^2 > 0$, enquanto as quantidades $E > 0$ e $F > 0$ seguem imediatamente das definições de E e G . Deste modo, as funções E, F e G podem ser definidas para uma superfície parametrizada qualquer e neste caso a condição $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \neq 0$ é uma condição necessária e suficiente para que esta superfície seja regular. A primeira forma fundamental de uma superfície se relaciona com a medida de *comprimento* de curvas desta superfície, pois a cada curva parametrizada de S a velocidade desta curva é dada pela combinação dos vetores \mathbf{r}_u e \mathbf{r}_v . Por exemplo, no espaço euclidiano para a obtenção do comprimento de curvas basta integramos o elemento de arco ds dado pela Eq. (5.41) onde as quantidades E, F e G estão envolvidas. O estudo da curvatura de tais curvas nos conduz à chamada segunda forma quadrática desta superfície.

Na teoria de curvas as fórmulas de Frenet são dadas por \mathbf{T}' , \mathbf{N}' e \mathbf{B}' que são combinações lineares de \mathbf{T} , \mathbf{N} e \mathbf{B} . Na teoria de superfícies escreveremos os vetores:

$$\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{r}_{uv}, \mathbf{r}_{vv}, \mathbf{N}_u, \mathbf{N}_v$$

como combinação linear de $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ e \mathbf{N} . Assim, como já foi dito anteriormente, \mathbf{r}_u e \mathbf{r}_v não são vetores unitários ortogonais, mas para uma superfície apropriada os vetores $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ e \mathbf{N} são linearmente independentes. Os vetores \mathbf{N}_u e \mathbf{N}_v são perpendiculares a \mathbf{N} , portanto

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}_u = \mathbf{N} \cdot \mathbf{N}_v = 0$$

determinando as combinações lineares da seguinte forma:

$$\mathbf{r}_{uu} = a_1 \mathbf{r}_u + a_2 \mathbf{r}_v + L\mathbf{N}, \quad (5.42)$$

$$\mathbf{r}_{uv} = b_1 \mathbf{r}_u + b_2 \mathbf{r}_v + M\mathbf{N}, \quad (5.43)$$

$$\mathbf{r}_{vv} = c_1 \mathbf{r}_u + c_2 \mathbf{r}_v + N\mathbf{N}, \quad (5.44)$$

$$\mathbf{N}_u = d_1 \mathbf{r}_u + d_2 \mathbf{r}_v, \quad (5.45)$$

$$\mathbf{N}_v = e_1 \mathbf{r}_u + e_2 \mathbf{r}_v. \quad (5.46)$$

Como sabemos que o vetor normal \mathbf{N} é perpendicular aos vetores \mathbf{r}_u e \mathbf{r}_v , torna-se imediata a determinação dos coeficientes L, M e N se tomarmos os produtos escalares de \mathbf{N} com as Eq. (5.42), Eq. (5.43) e Eq. (5.44) sucessivamente, essas equações são conhecidas por *Fórmulas de Gauss*. Essas quantidades que iremos determinar são comumente conhecidas como quantidades da segunda forma fundamental, assim:

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{r}_{uu} = \alpha_1 \mathbf{N} \cdot \mathbf{r}_u + \alpha_2 \mathbf{N} \cdot \mathbf{r}_v + L \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = L \quad (5.47)$$

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{r}_{uv} = b_1 \mathbf{N} \cdot \mathbf{r}_u + b_2 \mathbf{N} \cdot \mathbf{r}_v + M \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = M \quad (5.48)$$

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{r}_{vv} = c_1 \mathbf{N} \cdot \mathbf{r}_u + c_2 \mathbf{N} \cdot \mathbf{r}_v + N \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = N \quad (5.49)$$

Diferenciando em relação a u e v as seguintes expressões:

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{r}_u = 0, \quad \mathbf{N} \cdot \mathbf{r}_v = 0$$

obtemos:

$$\mathbf{N}_u \cdot \mathbf{r}_u + \mathbf{N} \cdot \mathbf{r}_{uu} = 0,$$

$$\mathbf{N}_v \cdot \mathbf{r}_u + \mathbf{N} \cdot \mathbf{r}_{uv} = 0,$$

$$\mathbf{N}_u \cdot \mathbf{r}_v + \mathbf{N} \cdot \mathbf{r}_{vu} = 0 \text{ e}$$

$$\mathbf{N}_v \cdot \mathbf{r}_v + \mathbf{N} \cdot \mathbf{r}_{vv} = 0$$

que a partir das Eq. (5.47), Eq.(5.48) e Eq. (5.49) resulta em:

$$\mathbf{N}_u \cdot \mathbf{r}_u = -L$$

$$\mathbf{N}_v \cdot \mathbf{r}_u = -M$$

$$\mathbf{N}_u \cdot \mathbf{r}_v = -M$$

$$\mathbf{N}_v \cdot \mathbf{r}_v = -N. \quad (5.50)$$

Após algumas operações para a determinação dos coeficientes $\alpha_1, b_1, c_1, \alpha_2, b_2, c_2$ em termos de E, F, G e suas primeiras derivadas parciais em relação a u e a v obtemos

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{GE_u - F(2F_u - E_v)}{2A^2} & \alpha_2 &= \frac{E(2F_u - E_v) - FE_u}{2A^2} \\ b_1 &= \frac{GE_v - FG_u}{2A^2} & b_2 &= \frac{EG_u - FE_v}{2A^2} \\ c_1 &= \frac{G(2F_v - G_u) - FG_v}{2A^2} & c_2 &= \frac{EG_v - F(2F_v - G_u)}{2A^2}. \end{aligned} \quad (5.51)$$

A Eq. (5.37) escrita numa forma compacta produz o seguinte produto escalar:

$$\begin{aligned} d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{N} &= (\mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv) \cdot (\mathbf{N}_u du + \mathbf{N}_v dv) = \\ &= \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{N}_u du^2 + (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{N}_v + \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{N}_u) dudv + \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{N}_v dv^2 \end{aligned} \quad (5.52)$$

e substituindo as relações da Eq. (5.50) obtemos a *segunda forma quadrática*:

$$-d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{N} = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \quad (5.53)$$

sendo definida a partir de um vetor tangente à superfície S no ponto P . Logo, a segunda forma quadrática diz respeito à teoria local das superfícies, estando relacionada com a curvatura das curvas da superfície [51].

Considere uma curva numa superfície S , para todo vetor não-nulo tangente a S , a curvatura normal segundo esse vetor é:

$$\begin{aligned} \kappa \mathbf{N}^* \cdot \mathbf{N} &= -\mathbf{r}' \cdot \mathbf{N}' \\ &= -\frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \frac{d\mathbf{N}}{ds} \\ \kappa \mathbf{N}^* \cdot \mathbf{N} &= \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \end{aligned}$$

onde \mathbf{N}^* é o vetor normal principal à curva. Veja que a expressão acima é a razão entre a segunda e a primeira forma fundamental e depende somente do ponto (u, v) e da direção du/dv [49]. Assim, a curvatura normal é a mesma segundo vetores de uma mesma reta do plano tangente, o que nos permite falar na curvatura normal segundo uma reta, ou direção, do plano tangente [50].

A expressão obtida acima para a curvatura normal pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{R} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$$

onde $R = \pm \frac{1}{\kappa_n} = \pm \rho_n$. Fazendo $\lambda = du/dv \Rightarrow du = \lambda dv$ temos:

$$\kappa_n = \frac{1}{R} = \frac{L\lambda^2 + 2M\lambda + N}{E\lambda^2 + 2F\lambda + G} \quad (5.54)$$

Podemos interpretar a segunda forma fundamental como uma distância. Ao tomarmos um plano tangente à superfície num ponto P , localizado pelo vetor posição $\mathbf{r}(u, v)$ e relacionarmos a distância de um ponto Q vizinho a P , localizado pelo vetor posição $\mathbf{r}(u + \Delta u, v + \Delta v)$, com o elemento de comprimento de arco ds , obtemos a distância δ do ponto Q ao plano tangente à superfície num ponto P , pela projeção:

$$\delta = \Delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{N}, \quad (5.55)$$

onde \mathbf{N} é o vetor unitário normal à superfície. Ao compararmos a expressão acima com o termo $d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{N}$ da equação da segunda forma fundamental de uma superfície, dada pela Eq. (5.53), podemos interpretar que a segunda forma fundamental é um tipo de distância. Da

expansão de $\Delta \mathbf{r}$ numa série de Taylor, considerando uma aproximação para δ apenas de segunda ordem obtemos, com a ajuda da Eq. (5.55):

$$2\delta = \mathbf{N} \cdot (\mathbf{r}_{uu}\Delta u^2 + 2\mathbf{r}_{uv}\Delta u\Delta v + \mathbf{r}_{vv}\Delta v^2).$$

O vetor normal \mathbf{N} é perpendicular aos vetores \mathbf{r}_u e \mathbf{r}_v pois as derivadas parciais $\partial \mathbf{r}/\partial u$ e $\partial \mathbf{r}/\partial v$ definem direções tangentes à superfície S . Das Eq. (5.52) e Eq. (5.53) obtemos

$$2\delta = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

o que nos leva ao resultado que a segunda forma fundamental da superfície realmente é um tipo de distância assim como havíamos proposto. A *curvatura normal de uma superfície* é obtida ao calcularmos a razão entre 2δ e o quadrado do comprimento de arco s onde δ é a distância do ponto Q , vizinho a P , ao plano tangente à superfície num ponto P :

$$\kappa_n = \frac{2\delta}{ds^2} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$$

o que coincide com a Eq. (5.54).

Assim, como já dito anteriormente, as primeiras e segundas quantidades estão fixas num ponto dado e R é uma função somente de λ , ou seja, da direção du/dv . Deste modo, procurando onde a diferencial da expressão obtida para $1/R$ em relação a λ se anula, queremos calcular os valores de λ para os quais obtemos as direções que $1/R$ é máximo ou mínimo, ou seja, da Eq. (5.54):

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{R} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^2 (FL - EM) + \lambda (GL - EN) + (GM - FN) = 0 \quad (5.56)$$

As duas soluções λ_1 e λ_2 da Eq. (5.56) são chamadas de *direções principais* no ponto dado. As soluções para R associadas a essas direções principais λ_1 e λ_2 são determinadas por

$$R^2 (LN - M^2) + R(2FM - EN - LG) + EG - F^2 = 0 \quad (5.57)$$

determinando soluções R_1 e R_2 associadas às direções principais λ_1 e λ_2 e são denominados de *raios principais da curvatura* de uma superfície num ponto dado.

Na expressão da soma dos inversos das raízes R_1 e R_2 , obtidas na Eq.(5.57),

$$2H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}, \quad (5.58)$$

a quantidade H é conhecida como *curvatura média da superfície*, enquanto o produto dos inversos das raízes R_1 e R_2 gera uma quantidade:

$$K = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (5.59)$$

K conhecida como *curvatura Gaussiana* da superfície.

No próximo capítulo, iremos obter a curvatura Gaussiana através da métrica do espaço.

6 ANÁLISE TENSORIAL

A análise tensorial surge para satisfazer a necessidade de que leis físicas sejam válidas independentemente do sistema coordenado utilizado, isto é, as equações físicas devem ser invariantes sob transformações de coordenadas, estando presente na teoria geral da relatividade, na hidrodinâmica, na teoria do eletromagnetismo, na mecânica e, no caso desse trabalho, na geometria diferencial e na elasticidade. Neste trabalho, também a utilizaremos como ferramenta para o cálculo das constantes elásticas de cristais líquidos nemáticos por meio da aproximação de conexão afim de Hess. O estudo que aqui apresentaremos é muito semelhante ao encontrado em [38], [52] e [53].

6.1 UM POUCO DE HISTÓRIA

Com o objetivo de descrever e classificar espaços curvos, em 1827 Gauss estabeleceu a diferença entre as propriedades intrínsecas de uma superfície de suas propriedades extrínsecas, isto é, aquelas fixas num espaço dimensional superior. A propriedade intrínseca essencial de toda superfície é a *função métrica* $d(x, X)$, fornecendo a distância entre dois pontos $x \in X$ através do caminho mais curto entre eles na superfície. Um cone ou um cilindro possuem as mesmas propriedades intrínsecas locais que um plano, desde que este possa se transformar num cilindro ou num cone sem que haja uma extensão ou ruptura, ou seja, não havendo mudança nas relações métricas. Por outro lado, intuitivamente, sabemos que uma esfera não pode ser planificada sem distorções, portanto suas propriedades intrínsecas não são as mesmas de um plano, e relações apropriadas devem ser utilizadas para medir o raio e a curvatura de uma superfície esférica sendo determinadas de suas propriedades intrínsecas locais.

A obtenção de relações métricas intrínsecas da superfície para vizinhanças infinitesimais surgiu quando Gauss, através das coordenadas cartesianas de um plano tangente à superfície em cada ponto, estabeleceu um sistema de coordenadas localmente euclidiano em todo ponto de uma superfície curva regular ordinária, ou seja, supôs que em toda região do espaço, suficientemente pequena, seria possível encontrar um sistema de coordenadas

localmente euclidiano (ξ_1, ξ_2) tal que a distância entre dois pontos com coordenadas (ξ_1, ξ_2) e $(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2)$ satisfaria o Teorema de Pitágoras:

$$ds^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 \quad (6.1)$$

Se uma superfície é não euclidiana, não é possível percorrer toda parte finita da superfície com um sistema euclidiano (ξ_1, ξ_2) que satisfaça o Teorema de Pitágoras, então é necessário que se suponha outro sistema coordenado (x_1, x_2) que possa percorrer todo o espaço. Para estabelecermos a forma que esse novo sistema de coordenadas assume na teoria de Gauss, basta calcularmos a distância ds entre dois pontos muito próximos P e $P+dP$ de coordenadas (x_1, x_2) e $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2)$:

$$ds^2 = g_{11}(x_1, x_2) dx_1^2 + 2g_{12}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + g_{22}(x_1, x_2) dx_2^2 = g_{ij} dx_i dx_j \quad (6.2)$$

com

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \right)^2 \\ g_{12} &= \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right) + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) \\ g_{22} &= \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right)^2 \end{aligned} \quad (6.3)$$

onde g_{ij} são coeficientes que dependem da base considerada.

Na próxima seção veremos que reciprocamente, para todo espaço com distância ds , entre dois pontos muito próximos que satisfaçam a relação métrica acima, podemos escolher coordenadas localmente euclidianas ξ_1, ξ_2 de modo que em cada ponto valha o Teorema de Pitágoras $ds^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2$ enunciado acima e, assim, o comprimento de qualquer caminho possa ser determinado integrando ds ao longo desse caminho.

A forma de ds^2 apresentada acima é conhecida como *métrica de um espaço*, pois as funções métricas g_{ij} determinam todas as propriedades intrínsecas de um espaço métrico, dependendo da escolha da malha coordenada [38].

Ao escolhermos um determinado sistema de coordenadas para descrever uma superfície encontramos as funções métricas g_{ij} associadas a este sistema. Por outro lado,

se tomarmos uma mudança de coordenadas desse sistema (x_1, x_2) para outro sistema (x'_1, x'_2) obtemos novas funções métricas g'_{ij} onde:

$$\begin{aligned}
 g'_{11} &= \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x'_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x'_1} \right)^2 \\
 &= \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} \right)^2 \\
 &= \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} \right)^2 + 2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} + \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} \right)^2 \\
 &\quad + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} \right)^2 + 2 \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} \right)^2 \\
 &= \left[\left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial x_1}{\partial x'_1} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} \\
 &\quad + \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial x_2}{\partial x'_1} \right)^2 \\
 &= g_{11} \left(\frac{\partial x_1}{\partial x'_1} \right)^2 + 2g_{12} \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} + g_{22} \left(\frac{\partial x_2}{\partial x'_1} \right)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g'_{22} &= \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x'_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x'_2} \right)^2 \\
 &= \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x'_2} + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x'_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x'_2} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial x'_2} \right)^2 \\
 &= g_{11} \left(\frac{\partial x_1}{\partial x'_2} \right)^2 + 2g_{12} \frac{\partial x_1}{\partial x'_2} \frac{\partial x_2}{\partial x'_2} + g_{22} \left(\frac{\partial x_2}{\partial x'_2} \right)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g'_{12} &= \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x'_1} \right) \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x'_2} \right) + \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x'_1} \right) \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial x'_2} \right) \\
 &= g_{11} \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} \frac{\partial x_1}{\partial x'_2} + g_{12} \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} \frac{\partial x_2}{\partial x'_2} + g_{12} \frac{\partial x_1}{\partial x'_2} \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} + g_{22} \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} \frac{\partial x_2}{\partial x'_2}
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

onde g'_{11} , g'_{12} e g'_{22} e dependem de g_{11} , g_{12} e g_{22} , pois foram obtidos utilizando as relações da Eq. (6.3). Logo, g_{ij} depende do sistema coordenado particular escolhido para descrever o espaço.

Para obter as propriedades intrínsecas de um espaço em função dos coeficientes métricos, Gauss construiu uma expressão que depende somente das propriedades intrínsecas do espaço e não do sistema particular de coordenadas que o descreve. Esta relação, providencialmente conhecida por *curvatura Gaussiana*, é única e foi construída de g_{ij} e de suas derivadas primeiras:

$$\begin{aligned}
 K(x_1, x_2) = & \frac{1}{2g} \left[2 \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x_1^2} \right] \\
 & - \frac{g_{22}}{4g^2} \left[\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} \right) \left(2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \right) - \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} \right)^2 \right] \\
 & + \frac{g_{12}}{4g^2} \left[\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_2} \right) - 2 \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \right) \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \left(2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} \right) \left(2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \right) \right] \\
 & - \frac{g_{11}}{4g^2} \left[\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_2} \right) \left(2 \frac{\partial g_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial x_2} \right) - \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial x_1} \right)^2 \right] \quad (6.5)
 \end{aligned}$$

onde g é o determinante $g(x_1, x_2) \equiv g_{11}g_{22} - g_{12}^2$. A curvatura Gaussiana K pode vir a ser negativa e um exemplo disso é quando tomamos uma superfície do tipo sela ordinária que se curva negativamente.

Para exemplificar a métrica de um espaço e a curvatura Gaussiana, tomemos uma esfera de raio a cujas coordenadas polares esféricas θ e φ conduzem pelas Eq. (6.3) e Eq. (6.5) à métrica:

$$g_{\theta\theta} = a^2, \quad g_{\theta\varphi} = 0, \quad g_{\varphi\varphi} = a^2 \sin^2 \theta \quad (6.6)$$

e à curvatura Gaussiana,

$$K = \frac{1}{a^2}, \quad (6.7)$$

da superfície de uma esfera, que é um espaço de curvatura constante positiva. Enquanto uma superfície plana descrita por coordenadas polares r e θ apresenta as funções métricas:

$$g_{rr} = 1, \quad g_{r\theta} = 0, \quad g_{\theta\theta} = r^2 \quad (6.8)$$

e pela Eq. (6.5) o plano possui a curvatura Gaussiana:

$$K = 0, \quad (6.9)$$

ou seja, o plano possui curvatura nula. O fator que confere à superfície esférica propriedades intrínsecas diferentes de um plano é $\sin^2 \theta$ em $g_{\varphi\varphi}$ da superfície definida na Eq. (6.6).

Assim como vimos anteriormente, ao escolhermos um determinado sistema de coordenadas para descrever uma superfície plana, encontramos as funções métricas g_{ij} associadas a este sistema porém, se tomarmos uma mudança de coordenadas desse sistema para outro, obtemos as funções métricas g'_{ij} em função de g_{ij} , ou seja, a superfície plana definida pelas funções métricas na Eq. (6.8) não parece um espaço euclidiano, mas ao tomarmos a transformação para coordenadas cartesianas tomando $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ obtemos uma outra métrica em função da métrica anterior.

Descrever as propriedades intrínsecas de espaços curvos com dimensões superiores a dois equivale a exprimir tais propriedades não mais por uma única função curvatura K . Em k dimensões, obtemos $k(k+1)/2$ funções métricas g_{ij} independentes e a liberdade de escolha para as k coordenadas nos permite impor k relações funcionais arbitrárias em g_{ij} , resultando em C funções que expressam as propriedades intrínsecas do espaço, onde:

$$C = \frac{k(k+1)}{2} - k = \frac{k(k-1)}{2}$$

Para $k = 2$ obtemos $C = 1$, assim como foi obtido por Gauss. Foi Riemann que resolveu as situações quando a geometria ocorria para $k > 2$ e $C > 1$ compondo o que hoje conhecemos como Geometria Riemanniana. Outros estudiosos trabalharam nas idéias de Riemann; Christoffel, Ricci, Tullio Levi-Civita, Beltrami, entre outros, e seus trabalhos podem ser reconhecidos ao estudarmos análise tensorial e a curvatura [38].

Anteriormente vimos que Gauss assumiu que em todo ponto de uma superfície curva podemos estabelecer um sistema coordenado localmente cartesiano cujas distâncias satisfazem o Teorema de Pitágoras. Em particular, a suposição de Gauss implica que as propriedades intrínsecas de uma superfície curva podem ser descritas em termos de derivadas $\partial \xi^\alpha / \partial x^\mu$ da função $\xi^\alpha(x)$ que define a transformação $x \rightarrow \xi$ de algum sistema geral de coordenadas x^μ , que percorre toda a superfície, para o sistema de coordenadas localmente cartesiano ξ^α . Por isso, definiremos a conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ que, apesar de não ser um tensor como veremos, juntamente com o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ fornece para um ponto dado X no sistema de coordenadas arbitrárias x^μ informações suficientes para determinar as

coordenadas localmente cartesianas $\xi^\alpha(x)$ para uma vizinhança de X . Geometricamente, a importância das derivadas $\partial\xi^\alpha/\partial x^\mu$ são as quantidades $g_{\mu\nu}$ definidas na Eq.(6.3).

Considere um espaço euclidiano k -dimensional, a distância entre dois pontos quaisquer com coordenadas cartesianas definida na Eq.(6.2) passa a ser:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \dots = g_{ij} dx_i dx_j \quad (6.10)$$

onde $g_{ij} = \delta_{ij}$. Deste modo, a menor distância possível entre dois pontos quaisquer desse espaço é dada pela equação:

$$\frac{d^2 x_\mu}{ds^2} = 0. \quad (6.11)$$

Seguindo a suposição de Gauss, suponha que em qualquer ponto possamos escolher um sistema coordenado localmente euclidiano ξ_α e as coordenadas x_μ são funções das coordenadas ξ_α , deste modo a Eq.(6.11) torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial x_\mu}{\partial \xi_\alpha} \frac{d\xi_\alpha}{ds} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 x_\mu}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} \frac{d\xi_\beta}{ds} \frac{d\xi_\alpha}{ds} + \frac{\partial x_\mu}{\partial \xi_\alpha} \frac{d^2 \xi_\alpha}{ds^2} &= 0 \end{aligned}$$

multiplicando por $\partial\xi_\gamma/\partial x_\mu$ e usando a regra do produto

$$\frac{\partial x_\mu}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial x_\mu} = \delta_\alpha^\gamma$$

obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \xi_\gamma}{\partial x_\mu} \frac{\partial^2 x_\mu}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} \frac{d\xi_\beta}{ds} \frac{d\xi_\alpha}{ds} + \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial x_\mu} \frac{\partial x_\mu}{\partial \xi_\alpha} \frac{d^2 \xi_\alpha}{ds^2} \right) &= 0 \\ \left(\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \frac{d\xi_\beta}{ds} \frac{d\xi_\alpha}{ds} + \frac{d^2 \xi_\alpha}{ds^2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (6.12)$$

onde $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ é a *conexão* afim, definida por

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \equiv \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial x_\mu} \frac{\partial^2 x_\mu}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta} \quad (6.13)$$

e o tensor métrico é definido por:

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \quad (6.14)$$

onde de forma geral, ξ^α é um sistema coordenado localmente inercial, mas no nosso trabalho é um ξ^α sistema localmente cartesiano e

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{cases} +1 & \alpha = \beta = 1, 2, 3 \\ -1 & \alpha = \beta = 0 \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases} \quad (6.15)$$

é a métrica num sistema coordenado inercial com elementos diagonais +1, +1, +1, -1. Nessa notação os índices α, β, γ , e assim por diante, sempre variam sobre 1, 2, 3, 0, com x^1, x^2, x^3 componentes cartesianas do vetor posição \mathbf{x} e x^0 o tempo t . Apesar de que em nosso trabalho α, β, γ variam somente sobre 1, 2 e 3 edeste modo $\eta_{\alpha\beta}$ possui somente as coordenadas cartesianas do vetor posição, coincidindo com a matriz identidade, manteremos $\eta_{\alpha\beta}$ em todas as deduções por uma questão de generalidade.

6.2 RELAÇÃO ENTRE $g_{\mu\nu}$ e $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$

Para estabelecer a relação entre o tensor métrico e a conexão afim, determinando $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ das derivadas de $g_{\mu\nu}$, partimos da diferenciação da fórmula para o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ dada pela Eq.(6.14) em relação a x^λ :

$$g_{\mu\nu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \quad (6.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda} g_{\mu\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \right) \quad (6.17)$$

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\beta}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \quad (6.18)$$

Para estabelecer uma relação entre $g_{\mu\nu}$ e $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ é necessário construir equações diferenciais para ξ^α que sejam função de $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ e que serão substituídas na equação acima. Deste modo, multiplicando a Eq.(6.13) que define $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ por $\partial \xi^\beta / \partial x^\lambda$

$$\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\lambda} \quad (6.19)$$

e utilizando a regra do produto

$$\frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} = \delta_\alpha^\beta \quad (6.20)$$

obtemos as coordenadas localmente cartesianas $\xi^\alpha(x)$ para uma vizinhança do ponto X de coordenadas arbitrárias x^μ

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\lambda}. \quad (6.21)$$

Substituindo a Eq.(6.21) na Eq.(6.18) obtemos:

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \Gamma_{\lambda\nu}^\rho \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\rho} \eta_{\alpha\beta}$$

e utilizando novamente a definição do tensor métrico dada pela Eq.(6.14) encontramos

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} = \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\rho\mu}. \quad (6.22)$$

Para finalizar a busca pela relação para conexão afim e o tensor métrico, é necessário fazer a seguinte manobra: adicionar a Eq.(6.22) com a própria Eq.(6.22), cujo índice μ foi trocado pelo índice λ , subtraindo novamente a mesma equação trocando o índice ν pelo índice λ e lembrando que $\Gamma_{\mu\nu}^\kappa$ e $g_{\mu\nu}$ são simétricos em relação à permuta dos índices μ e ν :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} &= \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa g_{\kappa\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\kappa g_{\kappa\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa g_{\kappa\nu} + \Gamma_{\mu\nu}^\kappa g_{\kappa\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^\kappa g_{\kappa\lambda} - \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa g_{\kappa\mu} \\ &= \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa g_{\kappa\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa g_{\kappa\nu} \\ &= 2\Gamma_{\lambda\mu}^\kappa g_{\kappa\nu} \end{aligned} \quad (6.23)$$

Para finalizarmos a obtenção da relação, definimos a matriz $g^{\nu\sigma}$ como a inversa de $g_{\nu\sigma}$ de forma que:

$$g^{\nu\sigma} g_{\kappa\nu} = \delta_\kappa^\sigma. \quad (6.24)$$

Multiplicando a equação acima por $g^{\nu\sigma}$ e utilizando a relação anterior obtemos a relação procurada:

$$g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right) = 2\Gamma_{\lambda\mu}^\kappa g_{\kappa\nu} g^{\nu\sigma}$$

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left\{ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} \right\} \quad (6.25)$$

Notemos que a Eq. (6.14) assegura que o tensor métrico tem um inverso dada por

$$g^{\nu\sigma} \equiv g^{\sigma\nu} \equiv \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\beta} \quad (6.26)$$

e através da regra do produto

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^\nu} = \delta_\alpha^\gamma$$

encontramos

$$\begin{aligned} g^{\nu\sigma} g_{\kappa\nu} &= \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\beta} \eta_{\gamma\delta} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^\kappa} \frac{\partial \xi^\delta}{\partial x^\nu} \\ &= \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\beta} \eta_{\gamma\delta} \frac{\partial \xi^\gamma}{\partial x^\kappa} \\ &= \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\beta} \eta_{\beta\delta} \frac{\partial \xi^\delta}{\partial x^\kappa} \\ &= \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\kappa} \\ &= \delta_\kappa^\sigma \end{aligned}$$

como solicitado na Eq. (6.24). Ocasionalmente, o lado direito da Eq. (6.25) é denominado *símbolo de Christoffel* [52] e denotado por

$$\left\{ \begin{array}{c} \sigma \\ \lambda\mu \end{array} \right\}. \quad (6.27)$$

6.3 VETORES E TENSORES

Para se estabelecer equações físicas que sejam invariantes sob transformações de coordenada, deve-se saber o comportamento das quantidades descritas pelas equações sob tais transformações. Para as quantidades definidas diretamente em termos das coordenadas diferenciais as propriedades da transformação podem ser determinadas por cálculos diretos, enquanto para outras quantidades por exemplo, campos eletromagnéticos, as propriedades da transformação são parcialmente uma questão de definição.

Sejam (x^1, x^2, \dots, x^N) e $(x'^1, x'^2, \dots, x'^N)$ coordenadas de um ponto P em duas diferentes bases S e S' , respectivamente. Suponha que existam N relações independentes entre as coordenadas dos sistemas:

$$x'^k = x'^k(x^1, x^2, \dots, x^N), k = 1, 2, \dots, N \quad (6.28)$$

que transformam as coordenadas do ponto P na base S nas coordenadas do ponto P na base S' onde se supõe que as funções sejam unívocas, contínuas e de derivadas contínuas. Então, reciprocamente, a cada conjunto de coordenadas $(x'^1, x'^2, \dots, x'^N)$ de uma base corresponderá um único conjunto de coordenadas (x^1, x^2, \dots, x^N) de uma outra base sendo dado por:

$$x^k = x^k(x'^1, x'^2, \dots, x'^N), k = 1, 2, \dots, N \quad (6.29)$$

As relações dadas pela Eq. (6.28) e pela Eq. (6.29) definem uma transformação de coordenadas de uma base para outra. A mais simples das regras de transformação é a dos escalares que não mudam sobre transformações de coordenadas, isto é, um escalar é um invariante chamado de tensor de ordem zero [52].

Usaremos a convenção da soma sempre que um índice, inferior ou superior, estiver repetido num dado termo e somaremos sobre esse índice.

Se N quantidades V^1, V^2, \dots, V^N num sistema de coordenadas (x^1, x^2, \dots, x^N) estão ligadas a N outras quantidades V'^1, V'^2, \dots, V'^N num outro sistema de coordenadas $(x'^1, x'^2, \dots, x'^N)$ através da transformação de coordenada $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ representada pelas equações:

$$V'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^v} V^v \quad (6.30)$$

então essas quantidades são chamadas de componentes de um *vetor contravariante* V^μ ou *tensor contravariante de primeira ordem* e a diferenciação parcial dada por

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (6.31)$$

fornece as coordenadas de um *vetor contravariante*. Analogamente, a transformação de um *vetor covariante* U_μ , ou *tensor covariante de primeira ordem* sobre uma transformação coordenada $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ é dada por:

$$U'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} U_\nu \quad (6.32)$$

e a diferenciação parcial é dada por:

$$dx'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} dx_\nu \quad (6.33)$$

Na verdade, um mesmo vetor pode possuir dois tipos diferentes de componentes; as covariantes e as contravariantes. Ao identificarmos um vetor por suas projeções ortogonais e paralelas nos eixos de um sistema em bases não ortogonais estes dois tipos de projeções não coincidem, como ocorre nas bases ortogonais, fazendo com que para um dado vetor tenhamos componentes covariantes e contravariantes [53], assim como vemos na Figura 6.1.

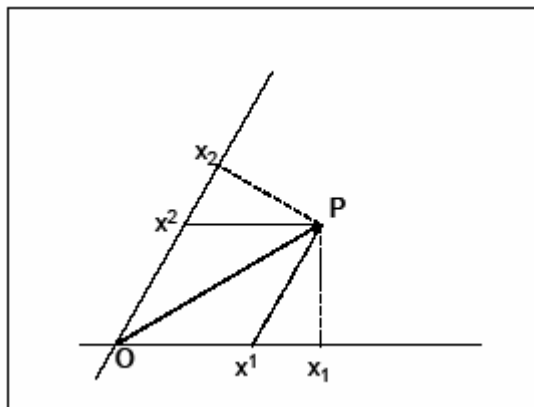


Figura 6.1 – Os pares ordenados (x^1, x^2) e (x_1, x_2) são as componentes contravariante e covariante do vetor \overline{OP} sendo obtidas pela projeção paralela e ortogonal do ponto P , respectivamente [53].

Posteriormente, veremos que existe uma forma de relacionar as componentes covariantes e contravariantes.

De forma geral, um tensor pode ser covariante, contravariante ou misto. Deste modo, um escalar ou invariante é um tensor de ordem 0 enquanto um vetor é um tensor de ordem 1. Para um tensor de ordem 2 ser covariante suas coordenadas devem se transformar como o produto de dois vetores ambos covariantes, ou seja:

$$T'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} T_{\kappa\rho},$$

enquanto para um tensor de ordem 2 ser contravariante suas coordenadas devem se transformar como o produto de dois vetores contravariantes:

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho} T^{\kappa\rho}.$$

Como exemplo clássico apresentamos o tensor delta de Kronecker δ^μ_ν , tensor misto de segunda ordem, assim como indica sua notação:

$$\delta^\mu_\nu = \begin{cases} 0 & \text{se } \mu \neq \nu \\ 1 & \text{se } \mu = \nu \end{cases}.$$

Uma transformação de coordenadas $x \rightarrow x'$ para um tensor misto $T^{\mu,\lambda}_\nu$ é dada por [53]:

$$T'^{\mu,\lambda}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} T'^{\kappa,\sigma}_\rho \quad (6.34)$$

Generalizando, um tensor com índices superiores μ, ν, \dots e índices inferiores κ, λ, \dots tem suas coordenadas transformadas como um produto de vetores contravariantes $U^\mu W^\nu \dots$ e vetores covariantes $V_\kappa Y_\lambda \dots$. De forma simplificada, se todos os índices são superiores o tensor é chamado *contravariante*, se todos os índices são inferiores o tensor é chamado *covariante*, caso contrário é chamado tensor *misto* [38].

Um importante tensor é o tensor métrico definido na Eq. (6.14) e a transformação do tensor métrico para um outro sistema coordenado x'^μ é:

$$g'_{\mu\nu} \equiv \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x'^\nu}$$

podendo ser escrita como:

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \\ g'_{\mu\nu} &= g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

A partir da equação acima e da definição dada pela Eq. (6.32) afirmamos que $g_{\mu\nu}$ é um vetor *covariante* enquanto o seu *recíproco* ou *inverso* $g^{\mu\nu}$ é um tensor *contravariante* que definimos de forma que:

$$g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = \delta_{\nu}^{\lambda} \quad (6.36)$$

Das Eqs. (6.35), (6.36) e do artifício da troca de índices (σ por κ), escrevemos:

$$\begin{aligned} g'^{\lambda\mu} g'_{\mu\nu} &= g_{\rho\sigma} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} g'_{\mu\nu} \\ &= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} g^{\rho\sigma} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\nu}} g_{\kappa\eta} \\ &= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} g^{\rho\kappa} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\nu}} g_{\kappa\eta} \\ &= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \\ &= \delta_{\nu}^{\lambda} \end{aligned}$$

Portanto, assim como esperávamos, para tensores contravariantes, a transformação é dada por:

$$\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} g^{\rho\sigma} = g'^{\lambda\mu} \quad (6.37)$$

Por outro lado, o tensor delta de Kronecker δ_{ν}^{μ} é um tensor misto, pois

$$\delta_{\nu}^{\mu} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\sigma}} = \delta_{\sigma}^{\rho} \quad (6.38)$$

Até o momento sabemos que os escalares, em particular o zero, δ_{ν}^{μ} e os seus produtos diretos, são os únicos cujos componentes são os mesmos em todos os sistemas coordenados. Deste ponto em diante, passamos a tratar daquelas equações que são invariantes sobre transformações de coordenadas quando ocorre a igualdade de dois estados com os mesmos índices superiores e inferiores. Por exemplo, se $A^{\mu}_{\nu}{}^{\lambda}$ e $B^{\mu}_{\nu}{}^{\lambda}$ são tensores com a regra de transformação da Eq. (6.34) e no sistema coordenado x^{μ} temos que $A^{\mu}_{\nu}{}^{\lambda} = B^{\mu}_{\nu}{}^{\lambda}$ então obviamente no sistema coordenado x'^{μ} teremos $A'^{\mu}_{\nu}{}^{\lambda} = B'^{\mu}_{\nu}{}^{\lambda}$. Em particular, desde que zero é qualquer tensor, devemos lembrar que um dado tensor que se anula é invariante sob

transformações de coordenadas, pois zero é um invariante. Reciprocamente, uma relação que não é igualdade entre tensores do mesmo tipo, por exemplo a igualdade de um tensor covariante e um outro contravariante, pode ser numericamente verdadeira numa classe limitada de sistemas coordenados, mas não será em todos sistemas coordenados por não ser invariante [38].

6.4 ÁLGEBRA TENSORIAL

Um de nossos principais interesses é a construção de equações invariantes sobre transformações coordenadas, para isso devemos construir tensores originados de outros tensores através das operações algébricas e por isso passaremos ao estudo de tais operações.

6.4.1 Combinação Linear

A combinação linear de tensores com índices superiores e inferiores coincidentes resulta num tensor com estes mesmos índices; por isso, dados os tensores mistos A^μ_ν e B^μ_ν se

$$T^\mu_\nu \equiv aA^\mu_\nu + bB^\mu_\nu, \text{ onde } a \text{ e } b \text{ são escalares,} \quad (6.39)$$

então T^μ_ν é um tensor. De fato,

$$\begin{aligned} T^\mu_\nu &\equiv aA^\mu_\nu + bB^\mu_\nu \\ &= a \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} A^\rho_\sigma + b \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} B^\rho_\sigma \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} T^\rho_\sigma \end{aligned} \quad (6.40)$$

6.4.2 Produto Direto

O produto das componentes dos tensores A^μ_ν e B^ρ dado por

$$T^{\mu\rho}_\nu \equiv A^\mu_\nu B^\rho \quad (6.41)$$

resulta num tensor cujos índices superiores e inferiores consistem de todos os índices superiores e inferiores dos tensores originais. De fato,

$$\begin{aligned} T'^{\mu\rho}_\nu &\equiv A'^\mu_\nu B'^\rho \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu} A^\lambda_\kappa \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\sigma} B^\sigma \\ T'^{\mu\rho}_\nu &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\sigma} T^{\lambda\sigma}_\kappa \end{aligned} \quad (6.42)$$

6.4.3 Contração

Esse tipo de operação está presente em ocasiões que um tensor possui um índice contravariante igual a um índice covariante indicando, de acordo com a convenção, uma soma. Deste modo, o tensor resultante terá ordem duas unidades menor que a do tensor original, ou seja, dado $T^{\mu\rho\nu}_\nu$, um tensor de 4ª ordem, com um índice ν repetindo-se tanto como índice superior quanto como inferior, ao somarmos sobre todos os índices o repetido desaparece resultando num tensor de 2ª ordem:

$$T^{\mu\rho\nu}_\nu \equiv T^{\mu\rho}. \quad (6.43)$$

De fato, da Eq. (6.34) e procedendo com trocas de índices apropriadas obtemos:

$$\begin{aligned}
T'^{\mu\rho} &= T'^{\mu}_{\nu}{}^{\rho\nu} \\
&= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\eta}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\tau}} T^{\kappa\eta\tau}_{\lambda} \\
&= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\eta}} T^{\kappa\eta\lambda}_{\lambda} \\
&= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\eta}} T^{\kappa\eta}.
\end{aligned} \tag{6.44}$$

A operação de contração é um dos modos triviais para se construir invariantes, objeto de extremo interesse para esse trabalho, sendo utilizada juntamente com o produto direto para construir um invariante a partir de um produto contraído.

Suponha A^{μ} e B_{μ} tensores e considere o seguinte produto direto contraído:

$$\begin{aligned}
A'^{\nu} B'_{\nu} &= \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\lambda}} A^{\lambda} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} B_{\sigma} \\
&= \delta^{\sigma}_{\lambda} A^{\lambda} B_{\sigma} \\
&= A^{\lambda} B_{\lambda}
\end{aligned}$$

que, como esperávamos, é um invariante [53].

Uma combinação das operações algébricas tensoriais apresentadas acima origina a chamada elevação e abaixamento de índices [38], que pode ser exemplificada ao considerarmos A^{μ} um vetor contravariante e B_{ν} a vetor definido pelo produto:

$$B_{\nu} = g_{\mu\nu} A^{\mu}.$$

Utilizando a definição do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e do vetor A^{μ} dadas pelas Eq. (6.35) e Eq. (6.30) obtemos:

$$\begin{aligned}
B'_\nu &= g'_{\mu\nu} A'^\mu \\
&= g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\eta} A^\eta \\
&= \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma} \delta_\eta^\rho A^\eta \\
&= \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma} A^\rho \\
&= \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} B_\sigma
\end{aligned}$$

que nos fornece informações para concluirmos que B'_ν é um vetor covariante, definição dada pela Eq.(6.32), dependendo apenas do tensor métrico e do vetor contravariante A'^μ . Nesse caso particular, podemos reconhecer tal situação familiar se utilizarmos para B'_ν a notação A'_ν e passarmos a escrever a seguinte operação:

$$A'_\nu = g_{\mu\nu} A'^\mu$$

que abaixa o índice de A'^μ e que, a partir de uma métrica, associa a cada vetor contravariante um único vetor covariante [53]. É evidente, também, que:

$$A'^\nu = g^{\mu\nu} A'_\mu.$$

Para um outro exemplo, defina o produto direto de um tensor T misto, ou contravariante, com o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ da seguinte forma:

$$S_{\nu}{}^{\rho}{}_{\sigma} \equiv g_{\mu\nu} T^{\mu\rho}{}_{\sigma}. \quad (6.45)$$

Ao contrair-se o índice μ do tensor métrico com o índice contravariante de T na equação anterior obtém-se um novo tensor cujo índice contravariante é substituído pelo índice covariante ν , de fato:

$$\begin{aligned}
g'_{\mu\nu} T'^{\mu\rho}{}_{\sigma} &= g_{\rho\tau} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\sigma}} T^{\lambda\kappa}{}_{\eta} \\
&= g_{\rho\tau} \delta^{\rho}_{\lambda} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\sigma}} T^{\lambda\kappa}{}_{\eta} \\
&= g_{\rho\tau} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\sigma}} T^{\rho\kappa}{}_{\eta} \\
&= \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\sigma}} g_{\rho\tau} T^{\rho\kappa}{}_{\eta} \\
&= \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\sigma}} g_{\rho\tau} T^{\rho\kappa}{}_{\eta} \\
&= \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\sigma}} S_{\tau}{}^{\kappa}{}_{\eta} \\
&= S'^{\rho}{}_{\sigma}
\end{aligned}$$

que, segundo as propriedades do produto direto e da contração de tensores podemos afirmar que $S'^{\rho}{}_{\sigma}$ é um tensor. Analogamente, se definirmos o produto direto de um tensor S misto, ou covariante, com o recíproco do tensor métrico $g^{\mu\nu}$, na forma:

$$R^{\nu\rho}{}_{\sigma} \equiv g^{\mu\nu} S_{\mu}{}^{\rho}{}_{\sigma} \quad (6.46)$$

a contração do índice μ de $g^{\mu\nu}$ com o índice covariante de S dá origem a um novo tensor cujo índice covariante é substituído pelo índice contravariante ν e de forma análoga $R^{\nu\rho}{}_{\sigma}$ é um tensor. Notamos nos casos anteriores que o *abaixamento de índices* e então a *elevação de índice* traz de volta o tensor original:

$$R^{\nu\rho}{}_{\sigma} \stackrel{(6.46)}{\equiv} g^{\mu\nu} S_{\mu}{}^{\rho}{}_{\sigma} \stackrel{(6.45)}{\equiv} g^{\mu\nu} g_{\mu\lambda} T^{\lambda\rho}{}_{\sigma} \stackrel{(6.36)}{=} \delta^{\nu}_{\lambda} T^{\lambda\rho}{}_{\sigma} = T^{\nu\rho}{}_{\sigma}$$

visto que ao abaixarmos um índice em T obtivemos S e após a elevação do índice tornamos a obter R , logo $R = T$. As duas possibilidades, *elevação* ou *abaixamento* de índices, permitem escrever um tensor com N índices de 2^N diferentes maneiras, desde que todas elas sejam fisicamente equivalentes, é usual o mesmo símbolo para todos os 2^N tensores, distinguindo-os somente por suas localizações [38].

Devido à completeza, devemos mencionar que o tensor obtido pela elevação do índice no tensor métrico $g_{\mu\nu}$ ou pelo abaixamento do índice no tensor métrico recíproco $g^{\mu\nu}$ é o tensor de Kronecker,

$$g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}. \quad (6.47)$$

Além disso, elevando ambos os índices de $g_{\mu\nu}$, obtemos o tensor inverso

$$g^{\lambda\mu} g^{\kappa\nu} g_{\mu\nu} = g^{\lambda\mu} \delta_{\mu}^{\kappa} = g^{\lambda\kappa}$$

e com abaixamento de ambos os índices de $g^{\lambda\kappa}$ obtemos o tensor métrico $g_{\mu\nu}$.

Nessa seção, vimos um modo para construir tensores a partir de outros, veremos posteriormente que existe uma outra maneira chamada diferenciação covariante. Porém, devemos salientar que, em geral, a derivada de um tensor não resulta num tensor.

6.5 TRANSFORMAÇÃO DA CONEXÃO AFIM

Em seções anteriores definimos a conexão afim e vimos que sua importância figura, juntamente com o tensor métrico $g_{\mu\nu}$, na determinação das coordenadas localmente cartesianas $\xi^{\alpha}(x)$ para uma vizinhança de um dado ponto X . Nessa seção veremos que, apesar da aparência, a conexão afim não é um tensor. De fato, lembrando que a conexão afim é dada por

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \equiv \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \quad (6.48)$$

onde $\xi^{\alpha}(x)$ é o sistema coordenado localmente cartesiano, passando $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ de um sistema coordenado x^{μ} para um outro sistema x'^{μ} encontramos:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} &\equiv \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \\
&= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \left(\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \right) \\
&= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \left[\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\tau} \partial x^{\sigma}} + \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} \right] \\
&= \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 \xi^{\alpha}}{\partial x^{\tau} \partial x^{\sigma}} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \xi^{\alpha}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}}
\end{aligned}$$

e recorrendo a Eq. (6.48) obtemos:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\tau\sigma}^{\rho} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \quad (6.49)$$

Para concluirmos que $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ não é um tensor basta analisarmos os termos do lado direito da equação anterior; percebemos que se $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ fosse um tensor, então o primeiro termo satisfaria a definição de tensor misto, porém o segundo termo acaba com qualquer possibilidade de $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ ser um tensor, visto que é um termo não-homogêneo não satisfazendo a definição encontrada na Eq. (6.42)

Para estabelecermos a relação entre a conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ e o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ de um modo simples, basta tomarmos a diferencial da transformação do tensor métrico da Eq. (6.35):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x'^{\kappa}} g'_{\mu\nu} &= \frac{\partial}{\partial x'^{\kappa}} \left(g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \right) \\
&= \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\tau}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\kappa}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} + g_{\rho\sigma} \frac{\partial}{\partial x'^{\kappa}} \left(\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \right) \\
&= \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\tau}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\kappa}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} + g_{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\kappa} \partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} + g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\kappa} \partial x'^{\nu}} \\
&= \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\tau}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\kappa}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} + g_{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\kappa} \partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} + g_{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\kappa} \partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}}
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} g'_{\kappa\nu} + \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} g'_{\kappa\mu} - \frac{\partial}{\partial x'^{\kappa}} g'_{\mu\nu} &= \left(\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\kappa}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\nu}} + g_{\sigma\tau} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\kappa}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\nu}} \right. \\
&\quad \left. + g_{\sigma\tau} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\kappa} \partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \right) + \\
&\quad \left(\frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\kappa}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} + g_{\rho\tau} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\kappa}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \right. \\
&\quad \left. + g_{\rho\tau} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\kappa}} \right) + \\
&\quad + \left(-\frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\tau}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\kappa}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} - g_{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\kappa} \partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \right. \\
&\quad \left. - g_{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\kappa} \partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \right) \\
\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} g'_{\kappa\nu} + \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}} g'_{\kappa\mu} - \frac{\partial}{\partial x'^{\kappa}} g'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\kappa}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \left(\frac{\partial g_{\sigma\tau}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial g_{\rho\tau}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\tau}} \right) + 2g_{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\kappa}}
\end{aligned}$$

De onde segue que

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\nu \end{array} \right\}' = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \tau\sigma \end{array} \right\} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \quad (6.50)$$

onde

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\nu \end{array} \right\} \equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} \left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} g_{\kappa\nu} + \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} g_{\kappa\mu} - \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} g_{\mu\nu} \right] \quad (6.51)$$

Subtraindo a Eq. (6.50) da Eq. (6.49), notamos que $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ menos $\left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\nu \end{array} \right\}$ é

um tensor:

$$\left[\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \left\{ \begin{array}{c} \lambda \\ \mu\nu \end{array} \right\} \right]' = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \left[\Gamma_{\tau\sigma}^{\rho} - \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \tau\sigma \end{array} \right\} \right] \quad (6.52)$$

Existe um sistema de coordenadas especial ξ_X no qual, num dado ponto X pode-se considerar, localmente, qualquer curva como uma reta. Nesse sistema, $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ é nulo

para que a Eq. (6.12) se reduza à equação linear. Também nesse sistema, como a métrica é

igual à identidade, suas derivadas são nulas. Uma vez que $\Gamma_{\tau\sigma}^{\rho} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \tau\sigma \end{Bmatrix}$ se anula num sistema coordenado e considerando que um tensor nulo é invariante por transformações de coordenadas, isto é, será nulo em qualquer referencial, então temos da Eq. (6.51) e Eq. (6.52) que:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \begin{Bmatrix} \lambda \\ \mu\nu \end{Bmatrix}$$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} \left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} g_{\kappa\nu} + \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} g_{\kappa\mu} - \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} g_{\mu\nu} \right]. \quad (6.53)$$

Uma fórmula alternativa para o termo não-homogêneo da conexão afim aparece ao diferenciarmos a identidade dada na Eq. (6.38) com relação a x'^{μ} encontrando-se:

$$\delta_v^{\lambda} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} (\delta_v^{\lambda}) = \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} \left(\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \right)$$

$$0 = \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x'^{\mu} \partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}}$$

$$\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} = - \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x'^{\mu} \partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}}$$

$$\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} = - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} \quad (6.54)$$

A partir da equação anterior, podemos escrever a Eq. (6.49) da seguinte forma:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\tau\sigma}^{\rho} - \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial^2 x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} \quad (6.55)$$

O resultado acima seria obtido caso realizássemos uma transformação inversa de coordenadas $x' \rightarrow x$ e posteriormente calculássemos $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ [38].

6.6 DIFERENCIAÇÃO COVARIANTE

Assim como já foi dito anteriormente, geralmente a diferenciação de um tensor não resulta num outro tensor, mas a diferenciação covariante fornece mais um modo, além dos que vimos anteriormente, de construir tensores a partir de outros. Pois bem, ao diferenciarmos em relação a x'^{λ} um vetor contravariante V^{μ} com lei de transformação de coordenada $x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu}$ dada pela Eq. (6.30) obtemos:

$$V'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu} \quad (6.56)$$

$$\frac{\partial V'^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} = \frac{\partial}{\partial x'^{\lambda}} \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu} \right) \quad (6.57)$$

$$\frac{\partial V'^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial V^{\nu}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} V^{\nu}, \quad (6.58)$$

que, com análise semelhante à feita para a Eq. (6.49), verificamos não se tratar de um tensor, pois o segundo termo à direita estraga o comportamento tensorial de $\partial V'^{\mu} / \partial x'^{\lambda}$, ou seja, para que a derivada $\partial V'^{\mu} / \partial x'^{\lambda}$ fosse um tensor apenas o primeiro termo à direita da igualdade deveria existir assim como podemos verificar na Eq. (6.34). Entretanto, é possível construir um tensor a partir da Eq. (6.55) e Eq. (6.32):

$$\begin{aligned} \Gamma_{\lambda\kappa}^{\mu} V'^{\kappa} &= \left[\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\kappa}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\nu} - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\kappa}} \right] \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x'^{\eta}} V^{\eta} \\ &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\kappa}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\nu} \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x'^{\eta}} V^{\eta} - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\kappa}} \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x'^{\eta}} V^{\eta} \\ &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\nu} V^{\sigma} - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} V^{\sigma}. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Adicionando as Eq. (6.58) e Eq. (6.59) eliminamos o termo não-homogêneo, resultando

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V'^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} + \Gamma'_{\lambda\kappa}{}^{\mu} V'^{\kappa} &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial V^{\nu}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} V^{\nu} + \left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \Gamma_{\rho\sigma}{}^{\nu} V^{\sigma} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} V^{\sigma} \right) \\
&= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \left(\frac{\partial V^{\nu}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma_{\rho\sigma}{}^{\nu} V^{\sigma} \right) \tag{6.60}
\end{aligned}$$

possibilitando definirmos a *derivada covariante* para um vetor contravariante que, assim como propomos, é um *tensor* com a seguinte notação:

$$V'^{\mu}{}_{;\lambda} \equiv \frac{\partial V'^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} + \Gamma'_{\lambda\kappa}{}^{\mu} V'^{\kappa} \tag{6.61}$$

Ao analisarmos a Eq. (6.60) apresentamos o tensor $V'^{\mu}{}_{;\lambda}$ segundo a nova notação:

$$V'^{\mu}{}_{;\lambda} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} V^{\nu}{}_{;\rho} \tag{6.62}$$

Definiremos a *derivada covariante* de um vetor covariante V_{μ} diferenciando a transformação dada pela Eq. (6.32) em relação a x'^{ν} :

$$V'_{\mu} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} V_{\rho} \tag{6.63}$$

$$\frac{\partial V'_{\mu}}{\partial x'^{\nu}} = \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial V_{\rho}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} V_{\rho} \tag{6.64}$$

da Eq. (6.49) e da Eq. (6.32), obtemos:

$$\begin{aligned}
\Gamma'_{\mu\nu}{}^{\lambda} V'_{\lambda} &= \left[\frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\tau}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\rho\sigma}{}^{\tau} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\tau}} \frac{\partial^2 x^{\tau}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \right] \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\lambda}} V_{\kappa} \\
&= \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\rho\sigma}{}^{\kappa} V_{\kappa} + \frac{\partial^2 x^{\kappa}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} V_{\kappa} \tag{6.65}
\end{aligned}$$

O termo não homogêneo da equação acima é eliminado se a subtrairmos da Eq. (6.64):

$$\frac{\partial V'_{\mu}}{\partial x'^{\nu}} - \Gamma'_{\mu\nu}{}^{\lambda} V'_{\lambda} = \left[\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial V_{\rho}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} V_{\rho} \right] - \left[\frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\rho\sigma}{}^{\kappa} V_{\kappa} + \frac{\partial^2 x^{\kappa}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} V_{\kappa} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial V_\rho}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\rho\sigma}^\kappa V_\kappa \\
&= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial x^\sigma} - \Gamma_{\rho\sigma}^\kappa V_\kappa \right) \tag{6.66}
\end{aligned}$$

conduzindo à seguinte definição de *derivada covariante* de um vetor covariante:

$$V_{\mu;v} = \frac{\partial V_\mu}{\partial x^v} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda V_\lambda \tag{6.67}$$

A partir da Eq.(6.66) vemos que $V_{\mu;v}$ é um tensor sendo dado por:

$$V'_{\mu;v} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} V_{\rho;\sigma} \tag{6.68}$$

Um fato importante é que a derivada covariante se reduz à derivada usual sempre que num referencial a conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ se anula localmente.

Estas definições podem ser estendidas a qualquer tensor. Por exemplo, a derivada covariante de um tensor T_{\dots} em relação a x^ρ é igual $\partial T_{\dots}/\partial x^\rho$ mais um termo dado por $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ vezes T com μ substituído por ν , no caso do índice μ , mais outro termo dado por $\Gamma_{\rho\nu}^\sigma$ vezes T com σ substituído por ν , agora para o índice σ , e assim sucessivamente até se esgotarem todos os índices contravariantes. A contribuição de cada índice covariante para essa derivada, nesse caso somente λ , é dada pela subtração de um termo $\Gamma_{\lambda\rho}^\kappa$ vezes T com λ substituído por κ :

$$T^{\mu\sigma}_{\lambda;\rho} = \frac{\partial}{\partial x^\rho} T^{\mu\sigma}_\lambda + \Gamma_{\rho\nu}^\mu T^{\nu\sigma}_\lambda + \Gamma_{\rho\nu}^\sigma T^{\mu\nu}_\lambda - \Gamma_{\lambda\rho}^\kappa T^{\mu\sigma}_\kappa \tag{6.69}$$

Salientamos que, na definição acima, a subtração dos termos do tipo $\Gamma_{\lambda\rho}^\kappa$ vezes T deve ser feita para cada um dos índices covariantes, respeitando a substituição do índice descrito acima, e a quantidade de termos subtraídos será a mesma que a quantidade de índices covariantes [38].

A combinação da diferenciação covariante com as operações algébricas descritas na seção de Álgebra Tensorial resulta em propriedades similares às de diferenciações ordinárias tais como:

(i) A derivada covariante de uma combinação linear de tensores é igual à combinação linear das derivadas covariantes:

$$(\alpha A^\mu{}_\nu + \beta B^\mu{}_\nu)_{;\lambda} = \alpha A^\mu{}_{\nu;\lambda} + \beta B^\mu{}_{\nu;\lambda} \quad (6.70)$$

onde $A^\mu{}_\nu$ e $B^\mu{}_\nu$ são tensores e α e β são os coeficientes escalares.

(ii) A derivada covariante de um produto direto de tensores obedece à regra de Leibniz:

$$(A^\mu{}_\nu B^\lambda)_{;\rho} = A^\mu{}_{\nu;\rho} B^\lambda + A^\mu{}_\nu B^\lambda{}_{;\rho} \quad (6.71)$$

(iii) A derivada covariante de um tensor contraído é igual à contração da derivada covariante sem os últimos dois termos da Eq. (6.69):

$$T^{\mu\lambda}{}_{\lambda;\rho} = \frac{\partial}{\partial x^\rho} T^{\mu\lambda}{}_\lambda + \Gamma_{\rho\nu}^\mu T^{v\lambda}{}_\lambda \quad (6.72)$$

Em referenciais onde $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ e $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^\lambda$ se anulam localmente a derivada covariante de um tensor métrico é zero, como vemos da Eq. (6.22), e um tensor nulo num sistema de coordenadas será nulo em qualquer outro sistema. O mesmo resultado pode ser obtido se utilizarmos a definição de derivadas covariantes da Eq. (6.69):

$$g_{\mu\nu;\lambda} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\rho\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\rho\mu} \quad (6.73)$$

e, a partir da Eq. (6.22), podemos afirmar que

$$g_{\mu\nu;\lambda} = 0 \quad (6.74)$$

Podemos mostrar do mesmo modo que derivadas de outras formas do tensor métrico também se anulam, isto é

$$g^{\mu\nu}{}_{;\lambda} = 0 \quad (6.75)$$

$$\delta^\mu{}_{\nu;\lambda} = 0 \quad (6.76)$$

As equações Eq. (6.74), Eq. (6.75) e Eq. (6.76) nos levam a afirmar que as operações de diferenciação covariante e elevação e abaixamento de índices comutam, veja:

$$(g^{\mu\nu} V_\nu)_{;\lambda} = g^{\mu\nu} V_{\nu;\lambda} \quad (6.77)$$

A importância da diferenciação covariante aparece de duas propriedades: transformar tensores em outros tensores, e reduzir-se à diferenciação ordinária quando $\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = 0$.

6.7 DIFERENCIAÇÃO COVARIANTE AO LONGO DA CURVA

Suponha tensores $T(\tau)$ definidos somente sobre uma curva $x^{\mu}(\tau)$; para esse tipo de tensor não faz sentido tomarmos derivadas covariantes com respeito a x^{μ} , visto que não estão definidos em todo espaço. Porém, podemos definir uma derivada covariante sobre a curva com relação ao invariante τ que parametriza a curva. No caso desse trabalho, o invariante de interesse é o comprimento de arco s .

Considere um vetor covariante $A^{\mu}(\tau)$ cuja transformação é dada por:

$$A'^{\mu}(\tau) = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu}(\tau). \quad (6.78)$$

Note que a derivada parcial $\partial x'^{\mu}/\partial x^{\nu}$ deve ser avaliada sobre a curva, isto é, $x^{\nu} = x^{\nu}(\tau)$, de forma que dependa de τ . Conseqüentemente, diferenciando com relação a τ , encontramos dois termos:

$$\frac{dA'^{\mu}(\tau)}{d\tau} = \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} A^{\nu}(\tau) + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{dA^{\nu}(\tau)}{d\tau}. \quad (6.79)$$

A derivada segunda $\partial^2 x'^{\mu}/\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}$ é a mesma responsável pelo termo não homogêneo para a conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ na Eq. (6.55). Deste modo, somos levados a definir a derivada covariante ao longo da curva $x^{\mu}(\tau)$:

$$\frac{DA'^{\mu}}{D\tau} \equiv \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} A^{\nu} + \frac{dA^{\nu}(\tau)}{d\tau}. \quad (6.80)$$

As Eqs. (6.55), (6.78) e (6.79) mostram que

$$\frac{DA'^{\mu}}{D\tau} \equiv \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{DA^{\nu}}{D\tau} \quad (6.81)$$

é um vetor. As semelhanças entre a Eq. (6.80) e a Eq. (6.61), que fornece a derivada covariante de um campo vetorial, nos leva a definir a derivada covariante de um vetor covariante $B_\mu(\tau)$ ao longo de uma curva $x^\mu(\tau)$:

$$\frac{DB_\mu}{D\tau} \equiv \frac{dB_\mu}{d\tau} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\nu}{d\tau} B_\lambda \quad (6.82)$$

Assim como anteriormente, através da Eq. (6.49) podemos afirmar que:

$$\frac{DB'_\mu}{D\tau} \equiv \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{DB_\nu}{D\tau} \quad (6.83)$$

é um vetor

Do mesmo modo, a derivada covariante de um tensor geral $T(\tau)$ ao longo da curva $x^\mu(\tau)$ é definida adicionando a $dT/d\tau$ termos como aquele da Eq. (6.80) para índices superiores e subtraindo termos tal como aquele da Eq. (6.82) para índices inferiores:

$$\frac{DT'^\mu{}_\nu}{D\tau} \equiv \frac{dT'^\mu{}_\nu}{d\tau} + \Gamma_{\lambda\rho}^\mu \frac{dx^\lambda}{d\tau} T'^\rho{}_\nu - \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma \frac{dx^\lambda}{d\tau} T'^\mu{}_\sigma \quad (6.84)$$

e a regra de transformação de tensores mistos é:

$$\frac{DT'^\mu{}_\nu}{D\tau} \equiv \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{DT^\rho{}_\sigma}{D\tau}. \quad (6.85)$$

As derivadas covariantes de um campo tensorial ao longo de uma curva podem ser determinadas de suas derivadas covariantes ordinárias. Para um campo tensorial $T^\mu{}_\nu$ a Eq. (6.83) fornece:

$$\frac{DT^\mu{}_\nu}{D\tau} = T^\mu{}_{\nu;\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\tau}. \quad (6.86)$$

Suponha que ao percorrer uma curva o vetor $A^\mu(\tau)$ não varie com o invariante τ , quando visto de um referencial $\xi_{x(\tau)}$, que particularmente pode ser tomado localmente euclidiano em $x(\tau)$. Nesse referencial, a conexão afim e $dA^\mu/d\tau$ se anulam, então:

$$\frac{DA^\mu}{D\tau} = 0$$

Apesar de termos uma afirmação covariante satisfeita em $x(\tau)$ para um sistema localmente euclidiano $\xi_{x(\tau)}$, é verdadeira em todo sistema coordenado devido à invariância por transformações de coordenadas do tensor que se anula num sistema de coordenadas particular. Assim, o vetor A^μ está sujeito às equações diferenciais de primeira ordem

$$\frac{dA^\mu}{d\tau} = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\lambda}{d\tau} A^\nu \quad (6.87)$$

que definem A^μ para todo τ , dado A^μ para algum τ inicial. Deste modo, um vetor $A^\mu(\tau)$ definido ao longo da curva $x^\mu(\tau)$, assim como acabamos de fazer, é dito ser definido por *transporte paralelo*. Todo tensor pode ser definido ao longo de uma curva por transporte paralelo basta impor que sua derivada covariante se anule ao longo da curva, sendo o transporte paralelo um caso particular do transporte de Fermi.

6.8 DEFINIÇÃO DO TENSOR DE CURVATURA

Para descrevermos e classificarmos superfícies temos que levar em conta que o tensor de curvatura reflete somente as propriedades intrínsecas da superfície e não como esta se comporta em relação à um espaço de dimensão superior. Este tensor será construído a partir do tensor métrico e suas derivadas primeiras e segundas, pois, como para todo ponto podemos encontrar um sistema coordenado no qual as derivadas primeiras do tensor métrico se anulam, caso o tensor construído dependesse unicamente da métrica e de suas derivadas primeiras, teríamos estabelecido uma igualdade entre tensores que seria válida em qualquer sistema coordenado. Para isso, dada a transformação para a conexão afim apresentada na Eq. (6.49) com troca das coordenadas secundárias

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\tau} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau} + \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\tau} \frac{\partial^2 x'^\tau}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \quad (6.88)$$

isolando o termo não homogêneo que impede $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ de ser um tensor, ν

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x'^\tau}{\partial x^\mu \partial x^\nu} &= \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\tau} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \Gamma_{\rho\sigma}^{\prime\tau} \\
\frac{\partial^2 x'^\tau}{\partial x^\mu \partial x^\nu} &= \frac{\partial x'^\tau}{\epsilon m \partial x^\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \Gamma_{\rho\sigma}^{\prime\tau}
\end{aligned} \tag{6.89}$$

Diferenciando em relação a x^κ e considerando a comutatividade da diferenciação parcial, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 x'^\tau}{\partial x^\kappa \partial x^\mu \partial x^\nu} &= \frac{\partial^2 x'^\tau}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} \\
&\quad - \frac{\partial^2 x'^\rho}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \Gamma_{\rho\sigma}^{\prime\tau} - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x'^\sigma}{\partial x^\kappa \partial x^\nu} \Gamma_{\rho\sigma}^{\prime\tau} - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^{\prime\tau}}{\partial x^\kappa}
\end{aligned}$$

e, de acordo com a Eq. (6.89), substituímos as derivadas segundas, obtendo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 x'^\tau}{\partial x^\kappa \partial x^\mu \partial x^\nu} &= \left(\frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\eta} \Gamma_{\kappa\lambda}^\eta - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\rho\sigma}^{\prime\tau} \right) \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} \\
&\quad - \left(\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\eta} \Gamma_{\kappa\mu}^\eta - \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\mu} \Gamma_{\eta\xi}^{\prime\rho} \right) \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \Gamma_{\rho\sigma}^{\prime\tau} \\
&\quad - \left(\frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\eta} \Gamma_{\kappa\nu}^\eta - \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x'^\xi}{\partial x^\nu} \Gamma_{\eta\xi}^{\prime\sigma} \right) \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \Gamma_{\rho\sigma}^{\prime\tau} \\
&\quad - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^{\prime\tau}}{\partial x^\kappa}
\end{aligned}$$

Agrupando os termos similares, rearranjando os índices mudos e considerando novamente a comutatividade da diferenciação parcial, obtemos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 x'^\tau}{\partial x^\kappa \partial x^\mu \partial x^\nu} &= \frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda} \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^\lambda}{\partial x^\kappa} + \Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\lambda \right) \\
&\quad - \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} \frac{\partial x'^\eta}{\partial x^\kappa} \left(\Gamma_{\eta\rho}^{\prime\lambda} \Gamma_{\lambda\sigma}^{\prime\tau} + \Gamma_{\eta\sigma}^{\prime\lambda} \Gamma_{\rho\lambda}^{\prime\tau} + \frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^{\prime\tau}}{\partial x'^\eta} \right) \\
&\quad - \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda} \Gamma_{\rho\sigma}^{\prime\tau} \left(\frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\kappa} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda + \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\nu} \Gamma_{\kappa\mu}^\lambda + \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \Gamma_{\kappa\nu}^\lambda \right)
\end{aligned} \tag{6.90}$$

Agora, subtraindo da equação acima a mesma equação com a troca dos índices ν e κ encontramos termos sem os produtos de Γ com Γ' ficando

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\mu} \partial x^{\kappa}} &= \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} \right) - \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} \right) \\
&+ \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\kappa}} \left(-\frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau}}{\partial x'^{\eta}} - \Gamma_{\rho\lambda}^{\tau} \Gamma_{\eta\sigma}^{\lambda} - \Gamma_{\lambda\sigma}^{\tau} \Gamma_{\eta\rho}^{\lambda} \right) \\
&+ \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau}}{\partial x'^{\eta}} + \Gamma_{\rho\lambda}^{\tau} \Gamma_{\eta\sigma}^{\lambda} + \Gamma_{\lambda\sigma}^{\tau} \Gamma_{\eta\rho}^{\lambda} \right) \\
&+ \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\lambda}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau} \left(-\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\kappa}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \Gamma_{\kappa\nu}^{\lambda} - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\kappa\mu}^{\lambda} \right) \\
&+ \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\lambda}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau} \left(\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda} + \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \Gamma_{\nu\kappa}^{\lambda} + \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\kappa}} \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} \right)
\end{aligned}$$

Devido às diferenciações presentes nos terceiro e quarto termos devemos fazer a troca somente nestes termos dos índices η e σ :

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} \right) \\
&- \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\kappa}} \left(\frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau}}{\partial x'^{\eta}} - \frac{\partial \Gamma_{\rho\eta}^{\tau}}{\partial x'^{\sigma}} - \Gamma_{\lambda\sigma}^{\tau} \Gamma_{\eta\rho}^{\lambda} + \Gamma_{\lambda\eta}^{\tau} \Gamma_{\sigma\rho}^{\lambda} \right)
\end{aligned} \quad (6.91)$$

ou

$$0 = \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\kappa}} R_{\rho\sigma\eta}^{\tau}$$

onde

$$R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} \equiv \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} \quad (6.92)$$

é um tensor chamado *tensor de curvatura de Riemann-Christoffel* ou simplesmente *tensor de curvatura*. Retomando a relação acima podemos escrevê-la como a seguinte regra de transformação:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\kappa}} R_{\rho\sigma\eta}^{\tau} &= \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} \\
R_{\rho\sigma\eta}^{\tau} &= \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\eta}} R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda}
\end{aligned} \quad (6.93)$$

6.9 UNICIDADE DO TENSOR CURVATURA

Nesta seção, provaremos a unicidade de tensor curvatura, isto é, que $R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda}$ é o único tensor que pode ser construído a partir do tensor métrico e de suas derivadas primeiras e segundas, sendo linear nas derivadas segundas.

Tomemos um ponto particular X e um sistema coordenado localmente cartesiano onde a conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ se anula neste ponto. Ao considerarmos somente as transformações de coordenadas que tornam a conexão afim nula nesse ponto X segundo a Eq. (6.88) consideraremos apenas transformações do tipo $x \rightarrow x'$ com

$$\left(\frac{\partial^2 x'}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \right)_{x=X} = 0. \quad (6.94)$$

Como a conexão afim se anula em X , podemos verificar na Eq.(6.23) que todas as derivadas primeiras do tensor métrico também se anulam em X . Deste modo, para construirmos o tensor de curvatura só nos resta a opção de uma combinação linear das derivadas segundas do tensor métrico ou equivalentemente, das derivadas primeiras da conexão afim, veja Eq. (6.25).

Tomando a Eq. (6.90) obtemos que as derivadas da conexão afim obedecem à transformação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 x'^{\tau}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} &= \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} + \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \left(\Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} \right) - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau}}{\partial x'^{\eta}} - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\kappa}} \left(\Gamma_{\rho\lambda}^{\tau} \Gamma_{\eta\sigma}^{\lambda} \right) \\ &\quad - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\kappa}} \left(\Gamma_{\lambda\sigma}^{\tau} \Gamma_{\eta\rho}^{\lambda} \right) - \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\kappa}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau} - \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau} \Gamma_{\kappa\nu}^{\lambda} \\ &\quad - \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau} \Gamma_{\kappa\mu}^{\lambda} \\ \frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau}}{\partial x'^{\eta}} &= \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x'^{\eta}} \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x'^{\kappa}} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x'^{\eta}} \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x'^{\lambda}} \left(\Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} \right) \\ &\quad - \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x'^{\eta}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x'^{\kappa}} \left(\Gamma_{\rho\lambda}^{\tau} \Gamma_{\eta\sigma}^{\lambda} \right) - \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x'^{\eta}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x'^{\kappa}} \left(\Gamma_{\lambda\sigma}^{\tau} \Gamma_{\eta\rho}^{\lambda} \right) \\ &\quad - \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x'^{\eta}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x'^{\kappa}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau} - \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x'^{\eta}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau} \Gamma_{\kappa\nu}^{\lambda} \\ &\quad - \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x'^{\eta}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau} \Gamma_{\kappa\mu}^{\lambda} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x'^{\kappa}}{\partial x'^{\eta}} \frac{\partial^3 x'^{\tau}}{\partial x'^{\kappa} \partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \end{aligned} \quad (6.95)$$

e impondo a exigência que $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ e $\Gamma_{\rho\sigma}^{\tau}$ devem se anular obtemos

$$\frac{\partial \Gamma_{\rho\sigma}^{\tau}}{\partial x'^{\eta}} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\eta}} \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} + \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\eta}} \frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \text{ em } x = X. \quad (6.96)$$

Uma combinação linear de $\partial\Gamma/\partial x$ que se comporte como um tensor, assim como já discutimos anteriormente, deve ter eliminado o termo não homogêneo. Porém, para todo ponto X dado, o termo não homogêneo é função completamente arbitrária dos índices ρ, σ, η , sujeito somente à condição de simetria nestes índices. Conseqüentemente, o único modo de tomar uma combinação linear de $\partial\Gamma/\partial x$, que se transforme como um tensor sob todas as transformações $x \rightarrow x'$ satisfazendo a Eq. (6.94), é tornar assimétrico em κ e ν ou equivalentemente em κ e μ tal que a equação anterior torne-se:

$$T_{\rho\sigma\eta}^{\tau} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\eta}} \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} T_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} \text{ em } x = X \quad (6.97)$$

onde em $x = X$

$$T_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} \equiv \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} \quad (6.98)$$

isto é, o tensor desejado deve ser $T_{\mu\nu\kappa}^{\lambda}$ dado pela Eq. (6.98) quando Γ se anula. Podemos notar que o tensor de Riemann-Christoffel satisfaz a Eq. (6.98) quando $\Gamma = 0$; desta forma, num sistema localmente cartesiano $T_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} = R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda}$. Mas esta é uma igualdade entre tensores que se for verdadeira num determinado tipo de sistema de coordenadas será verdadeira em todos os sistemas de coordenadas, ou seja, o único tensor T da forma procurada é $R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda}$.

Certamente, outros tensores podem ser formados usando o tensor métrico para formar combinações lineares de $R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda}$. Os mais notórios são as formas contraídas: o tensor de Ricci

$$R_{\mu\kappa} \equiv R_{\mu\lambda\kappa}^{\lambda} \quad (6.99)$$

ea curvatura escalar,

$$R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa} \quad (6.100)$$

6.10 PROPRIEDADES ALGÉBRICAS DE $R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda}$

Considere a forma totalmente covariante do tensor de curvatura $R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda}$:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} \equiv g_{\lambda\sigma} R_{\mu\nu\kappa}^{\sigma} \quad (6.101)$$

Substituindo a expressão que define o tensor de curvatura de Riemann-Christoffel dada pela Eq. (6.92) e a expressão que estabelece a relação algébrica entre $g_{\mu\nu}$ e $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ dada pela Eq. (6.25) na expressão anterior obtemos:

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu\kappa} &\equiv g_{\lambda\sigma} R_{\mu\nu\kappa}^{\sigma} \\ &= g_{\lambda\sigma} \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\sigma} \right) \\ &= g_{\lambda\sigma} \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \right) + g_{\lambda\sigma} (\Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\sigma}) \\ &= \frac{1}{2} g_{\lambda\sigma} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} g^{\rho\sigma} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\rho}} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} g_{\lambda\sigma} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} g^{\rho\sigma} \left\{ \frac{\partial g_{\kappa\rho}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^{\rho}} \right\} \\ &\quad + g_{\lambda\sigma} (\Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\sigma}) \end{aligned}$$

Usando as regras de derivação obtemos:

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu\kappa} &= \frac{1}{2} g_{\lambda\sigma} \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x^{\kappa}} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\rho}} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} g_{\lambda\sigma} g^{\rho\sigma} \left\{ \frac{\partial^2 g_{\nu\rho}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\rho}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 g_{\nu\mu}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\rho}} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} g_{\lambda\sigma} \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{\partial x^{\nu}} \left\{ \frac{\partial g_{\kappa\rho}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^{\rho}} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} g_{\lambda\sigma} g^{\rho\sigma} \left\{ \frac{\partial^2 g_{\kappa\rho}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\kappa}} - \frac{\partial^2 g_{\kappa\mu}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\rho}} \right\} \\ &\quad + g_{\lambda\sigma} (\Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\sigma} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\sigma}) \end{aligned}$$

A partir da Eq. (6.24), escrevemos:

$$0 = \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} (\delta_{\lambda}^{\rho}) = \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} (g_{\lambda\sigma} g^{\sigma\rho}) = \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^{\kappa}} g^{\sigma\rho} + g_{\lambda\sigma} \frac{\partial g^{\sigma\rho}}{\partial x^{\kappa}}$$

e utilizando a relação da Eq. (6.22) obtemos a seguinte relação:

$$\begin{aligned}
g_{\lambda\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} g^{\sigma\rho} &= -g^{\sigma\rho} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} g_{\lambda\sigma} \\
&= -g^{\sigma\rho} (\Gamma_{\kappa\lambda}^\eta g_{\eta\sigma} + \Gamma_{\kappa\sigma}^\eta g_{\eta\lambda})
\end{aligned}$$

para reescrever $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
R_{\lambda\mu\nu\kappa} &= -\frac{1}{2} (\Gamma_{\kappa\lambda}^\eta g^{\sigma\rho} g_{\eta\sigma} + \Gamma_{\kappa\sigma}^\eta g^{\sigma\rho} g_{\eta\lambda}) \left\{ \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\rho} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} g_{\lambda\sigma} g^{\rho\sigma} \left\{ \frac{\partial^2 g_{\nu\rho}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\rho}}{\partial x^\kappa \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\nu\mu}}{\partial x^\kappa \partial x^\rho} \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2} g_{\lambda\sigma} g^{\rho\sigma} \left\{ \frac{\partial^2 g_{\kappa\rho}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu \partial x^\kappa} - \frac{\partial^2 g_{\kappa\mu}}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} (\Gamma_{\nu\lambda}^\eta g^{\sigma\rho} g_{\eta\sigma} + \Gamma_{\nu\sigma}^\eta g^{\sigma\rho} g_{\eta\lambda}) \left\{ \frac{\partial g_{\kappa\rho}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^\rho} \right\} \\
&\quad + g_{\lambda\sigma} (\Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\sigma - \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\sigma)
\end{aligned}$$

e, juntamente com a Eq. (6.25),

$$\begin{aligned}
R_{\lambda\mu\nu\kappa} &= -\frac{1}{2} \Gamma_{\kappa\lambda}^\eta g^{\sigma\rho} g_{\eta\sigma} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\rho} \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2} \Gamma_{\kappa\sigma}^\eta g^{\sigma\rho} g_{\eta\lambda} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\rho} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} g_{\lambda\sigma} g^{\rho\sigma} \left\{ \frac{\partial^2 g_{\nu\rho}}{\partial x^\kappa \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\rho}}{\partial x^\kappa \partial x^\nu} - \frac{\partial^2 g_{\nu\mu}}{\partial x^\kappa \partial x^\rho} \right\} \\
&\quad - \frac{1}{2} g_{\lambda\sigma} g^{\rho\sigma} \left\{ \frac{\partial^2 g_{\kappa\rho}}{\partial x^\nu \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu \partial x^\kappa} - \frac{\partial^2 g_{\kappa\mu}}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \Gamma_{\nu\lambda}^\eta g^{\sigma\rho} g_{\eta\sigma} \left\{ \frac{\partial g_{\kappa\rho}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^\rho} \right\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \Gamma_{\nu\sigma}^\eta g^{\sigma\rho} g_{\eta\lambda} \left\{ \frac{\partial g_{\kappa\rho}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^\rho} \right\} \\
&\quad + g_{\lambda\sigma} (\Gamma_{\mu\nu}^\eta \Gamma_{\kappa\eta}^\sigma - \Gamma_{\mu\kappa}^\eta \Gamma_{\nu\eta}^\sigma)
\end{aligned}$$

Pela relação unitária dos tensores métricos, fazendo $\rho = \lambda$ juntamente com a Eq. (6.25), obtemos:

$$\begin{aligned}
R_{\lambda\mu\nu\kappa} &= -\Gamma_{\kappa\lambda}^{\eta}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}g_{\eta\sigma} \\
&\quad -\Gamma_{\kappa\sigma}^{\eta}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}g_{\eta\lambda} \\
&\quad +\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\mu}}+\frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\nu}}-\frac{\partial^2 g_{\nu\mu}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\lambda}}\right\} \\
&\quad -\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 g_{\kappa\lambda}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\mu}}+\frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\kappa}}-\frac{\partial^2 g_{\kappa\mu}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\lambda}}\right\} \\
&\quad +\Gamma_{\nu\lambda}^{\eta}\Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma}g_{\eta\sigma} \\
&\quad +\Gamma_{\nu\sigma}^{\eta}\Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma}g_{\eta\lambda} \\
&\quad +g_{\lambda\sigma}\left(\Gamma_{\mu\nu}^{\eta}\Gamma_{\kappa\eta}^{\sigma}-\Gamma_{\mu\kappa}^{\eta}\Gamma_{\nu\eta}^{\sigma}\right)
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
R_{\lambda\mu\nu\kappa} &= -\left(\Gamma_{\kappa\lambda}^{\eta}g_{\eta\sigma}+\Gamma_{\kappa\sigma}^{\eta}g_{\eta\lambda}\right)\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} \\
&\quad +\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\mu}}+\frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\nu}}-\frac{\partial^2 g_{\nu\mu}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\lambda}}-\frac{\partial^2 g_{\kappa\lambda}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\mu}}-\frac{\partial^2 g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\kappa}}+\frac{\partial^2 g_{\kappa\mu}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\lambda}}\right\} \\
&\quad +\left(\Gamma_{\nu\lambda}^{\eta}g_{\eta\sigma}+\Gamma_{\nu\sigma}^{\eta}g_{\eta\lambda}\right)\Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma} \\
&\quad +g_{\lambda\sigma}\left(\Gamma_{\mu\nu}^{\eta}\Gamma_{\kappa\eta}^{\sigma}-\Gamma_{\mu\kappa}^{\eta}\Gamma_{\nu\eta}^{\sigma}\right)
\end{aligned}$$

rearranjando os termos, fazendo uma troca de índices η por σ e vice versa:

$$\begin{aligned}
R_{\lambda\mu\nu\kappa} &= +\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\mu}}-\frac{\partial^2 g_{\nu\mu}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\lambda}}-\frac{\partial^2 g_{\kappa\lambda}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\mu}}+\frac{\partial^2 g_{\kappa\mu}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\lambda}}\right\} \\
&\quad +g_{\eta\sigma}\left(\Gamma_{\nu\lambda}^{\eta}\Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma}-\Gamma_{\kappa\lambda}^{\eta}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}\right) \\
&\quad +g_{\eta\lambda}\left(\Gamma_{\nu\sigma}^{\eta}\Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma}-\Gamma_{\kappa\sigma}^{\eta}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}\right) \\
&\quad +g_{\lambda\eta}\left(\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}\Gamma_{\kappa\sigma}^{\eta}-\Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma}\Gamma_{\nu\sigma}^{\eta}\right)
\end{aligned}$$

devido à simetria do tensor métrico a maior parte dos termos do tipo $\Gamma\Gamma$ se cancelam produzindo:

$$\begin{aligned}
R_{\lambda\mu\nu\kappa} &= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\mu}}-\frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}\partial x^{\lambda}}-\frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\mu}}+\frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}\partial x^{\lambda}}\right\} \\
&\quad +g_{\eta\sigma}\left(\Gamma_{\nu\lambda}^{\eta}\Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma}-\Gamma_{\kappa\lambda}^{\eta}\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}\right)
\end{aligned} \tag{6.102}$$

Através da Eq. (6.102) podemos verificar que o tensor de curvatura possui propriedades algébricas de simetria:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu} \tag{6.103}$$

anti-simetria:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -R_{\lambda\mu\kappa\nu} = R_{\mu\lambda\kappa\nu} \quad (6.104)$$

e periodicidade:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0 \quad (6.105)$$

Assim como já foi dito, $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ contraído resulta no tensor de Ricci, porém faremos numa forma totalmente covariante:

$$R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} \quad (6.106)$$

A simetria do tensor de curvatura garante que o tensor de Ricci é simétrico:

$$R_{\mu\kappa} = R_{\kappa\mu}$$

de fato, basta multiplicar a igualdade da Eq. (6.103) por $g^{\lambda\nu}$ e utilizar a Eq. (6.106).

A anti-simetria garante que $R_{\mu\kappa}$ é o único tensor que pode ser construído a partir de $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ utilizando a Eq. (6.104) multiplicado por $g^{\lambda\nu}$, $g^{\lambda\mu}$ e $g^{\nu\kappa}$ e da Eq. (6.106):

$$R_{\mu\kappa} = -g^{\lambda\nu} R_{\mu\lambda\nu\kappa} = -g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\kappa\nu} = g^{\lambda\nu} R_{\mu\lambda\kappa\nu}$$

e pela Eq. (6.102) podemos afirmar:

$$g^{\lambda\mu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g^{\nu\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = 0$$

essa mesma propriedade é responsável pelo aparecimento da única forma fundamental de contrair $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ para construir um escalar:

$$g^{\lambda\mu} g^{\nu\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = 0$$

sendo consequência direta da igualdade anterior. Para outro exemplo, basta tomarmos a definição da curvatura escalar, Eq. (6.100), e a Eq. (6.106) que relaciona o tensor de curvatura covariante e o tensor de Ricci:

$$R \equiv g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu} g^{\mu\kappa} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -g^{\lambda\nu} g^{\mu\kappa} R_{\mu\lambda\nu\kappa}$$

6.11 DESCRIÇÃO DA CURVATURA EM K DIMENSÕES

Uma expressão que forneça o número de componentes do tensor de curvatura $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ que são algebricamente independentes, isto é, componentes que podemos utilizar para escrever todas as outras componentes do tensor em função destas, pode ser obtida a partir das propriedades de simetria, anti-simetria e periodicidade do tensor curvatura [38]. Deste modo, para um espaço geral de k dimensões o número de componentes independentes de $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ é dada por:

$$C_k = \frac{1}{12}k^2(k^2 - 1). \quad (6.107)$$

Para um espaço de dimensão 1 obtemos $C_1 = 0$, o tensor curvatura não possui componentes independentes assim como podemos verificar na Eq. (6.104) ou Eq.(6.105) que o único componente do tensor curvatura R_{1111} se anula. Nesse caso, a curva possui curvatura zero, ou seja, $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ reflete somente as propriedades intrínsecas do espaço e não como este se comporta em relação a um espaço de dimensão superior. Da Eq.(6.4), a transformação para um tensor métrico num espaço de dimensão 1 é dada por:

$$g'_{11} = \left(\frac{dx}{dx'} \right)^2 g_{11}$$

Logo, para obtermos $g'_{11} = \pm 1$, escomeemos

$$x' = \int dx \sqrt{\pm g_{11}}$$

Para dimensão 2, $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ possui uma componente independente, pois $C_2 = 1$. Tomando a Eq.(6.102) verificamos que, assim como R_{1212} , outras componentes, cujos índices são a permutação dos índices da componente R_{1212} , também não se anulam, o que causaria estranheza, pois para essa dimensão $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ possui uma única componente independente. Esse fato se explica ao lembrarmos que, da Eq. (6.104):

$$R_{1212} = -R_{2112} = -R_{1221} = R_{2121} \quad (6.108)$$

enquanto outras componentes se anulam:

$$R_{1111} = R_{1122} = R_{2211} = R_{2222} = 0 \quad (6.109)$$

Deste modo, escolhemos R_{1212} como a componente algebricamente independente e as outras componentes serão escritas em função desta da seguinte forma:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = (g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu}) \frac{R_{1212}}{g} \quad (6.110)$$

onde g é o determinante $g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ do tensor métrico para o caso bidimensional. O tensor de Ricci é obtido ao contrairmos λ com ν :

$$R_{\mu\kappa} = g_{\mu\kappa} \frac{R_{1212}}{g}. \quad (6.111)$$

Para obtermos a curvatura escalar devemos contrair novamente, agora μ com κ :

$$R = \frac{2R_{1212}}{g}, \quad (6.112)$$

lembrando que estamos tratando de um espaço de dimensão 2, então $g_{\kappa\kappa} = 2$.

A partir da curvatura escalar que acabamos de obter e pela Eq. (6.110), o tensor curvatura para uma curva num espaço de dimensão dois pode ser reescrito como:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = \frac{1}{2}R (g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu}) \quad (6.113)$$

A curvatura Gaussiana discutida anteriormente na Eq. (6.5) é definida por:

$$K \equiv \frac{R}{2} = \frac{R_{1212}}{g} \quad (6.114)$$

onde a Eq. (6.5) segue das Eq. (6.102) e Eq. (6.114).

Em três dimensões, o tensor curvatura possui $C_3 = 6$ componentes independentes assim como o número de componentes independentes do tensor de Ricci, $R_{\mu\kappa}$, em três dimensões, uma vez que na Eq. (6.106) é escrito na forma contraída a partir do tensor curvatura. Deste modo, $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ pode ser expresso somente em função de $R_{\mu\kappa}$:

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} = g_{\lambda\nu}R_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}R_{\mu\nu} + g_{\mu\kappa}R_{\lambda\nu} - \frac{1}{2}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\kappa} - g_{\lambda\kappa}g_{\mu\nu})R \quad (6.115)$$

onde $R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa}$. Para verificarmos que a expressão anterior está correta, escolhemos $\partial x'^{\mu}/\partial x^{\lambda}$ em algum ponto X como a matriz ortogonal que diagonaliza $g_{\mu\nu}$ em X , e adotamos um sistema de coordenadas tal que $g_{\mu\nu} = 0$ para $\mu \neq \nu$ em algum ponto X , logo da Eq. (6.106) obtemos:

$$R_{12} = g^{33} R_{3132}. \quad (6.116)$$

que pela propriedade de anti-simetria e multiplicando a equação por 933 resulta em:

$$R_{12} = g^{33} R_{1323} \Rightarrow g_{33} R_{12} = g_{33} g^{33} R_{1323}$$

que verifica a expressão dada na Eq. (6.115):

$$R_{1323} = g_{33} R_{12}$$

De fato:

$$\begin{aligned} R_{1323} &= g_{12} R_{33} - g_{13} R_{32} + g_{33} R_{12} - \frac{1}{2} (g_{12} g_{33} - g_{13} g_{32}) g^{33} R_{33} \\ R_{1323} &= g_{33} R_{12} \end{aligned}$$

Também,

$$R_{11} = g^{22} R_{1212} + g^{33} R_{1313}$$

$$R_{22} = g^{33} R_{2323} + g^{11} R_{2121}$$

que a partir das somas das igualdades acima que foram multiplicadas por g_{22} e por g_{11} , respectivamente, e, lembrando que escolhemos $g_{\mu\nu} = 1$ para $\mu = \nu$, obtemos:

$$\begin{aligned} g_{22} R_{11} + g_{11} R_{22} &= g_{22} (g^{22} R_{1212} + g^{33} R_{1313}) + g_{11} (g^{33} R_{2323} + g^{11} R_{2121}) \\ &= R_{1212} + g^{33} (g_{22} R_{1313} + g_{11} R_{2323}) + R_{2121} \\ &= R_{1212} + g_{11} g^{11} g_{22} g^{22} R_{1212} + (g_{11} g^{11} g^{33} g_{22} R_{1313} + g_{22} g^{22} g^{33} g_{11} R_{2323}) \\ &= R_{1212} + g_{11} g_{22} (g^{11} g^{22} R_{1212} + g^{11} g^{33} R_{1313} + g^{22} g^{33} R_{2323}) \end{aligned}$$

ou

$$R_{1212} = g_{22}R_{11} + g_{11}R_{22} - \frac{1}{2}g_{11}g_{22}R$$

em concordância com a Eq.(6.115). As outras componentes independentes que faltam de $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ são R_{1223} , R_{1213} , R_{2323} e R_{3131} sendo obtidos de R_{1323} e R_{1212} através da permutação dos índices 1, 2 e 3.

As C_k componentes algebricamente independentes de $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ utilizadas para descrever a curvatura de um espaço k dimensional não o fazem de modo invariante, pois os valores destas componentes dependem não somente das propriedades intrínsecas do espaço mas também do sistema coordenado particular escolhido como acabamos de ver para o caso tridimensional. A caracterização de um espaço curvo é invariante desde que seja feita em termos de escalares construídos de $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ e $g_{\mu\nu}$. O número de escalares construídos destes tensores é dado por:

$$\frac{1}{12}k(k-1)(k-2)(k+3) \quad (6.117)$$

O caso bidimensional é uma exceção a essa expressão, mas não ocorre para espaços de dimensão maior ou igual a três. Para um espaço de dimensão três a expressão acima revela que existem três escalares para descrever a curvatura, que podem ser escolhidos como as três raízes da equação secular:

$$\det(R_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu}) = 0$$

ou, equivalentemente,

$$R, \quad R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, \quad \frac{\det R}{\det g}. \quad (6.118)$$

A Eq. (6.117) fornece o número de curvaturas independentes algebricamente invariantes. Em geral, existem relações diferenciais entre estes invariantes, mas o número de curvaturas independentes funcionalmente invariantes é menor do que a quantidade apresentada na Eq. (6.117).

6.12 PERCURSO EM CURVAS FECHADAS POR TRANSPORTE PARALELO

Suponha que um vetor S_μ seja carregado ao longo de uma curva fechada C , ele está sujeito às equações diferenciais de primeira ordem que definem o transporte paralelo na Eq. (6.87):

$$\frac{dS_\mu}{d\tau} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\nu}{d\tau} S_\mu. \quad (6.119)$$

Para podermos expressar a variação de S_μ quando levado por transporte-paralelo ao redor da curva fechada C , considere que a superfície A seja delimitada por C e divida A em pequenas regiões passando a serem limitadas por curvas fechadas menores C_N , assim como na prova do teorema de Stokes. Agora expressamos a variação S_μ sobre C como soma das variações S_μ por transporte paralelo quando percorre ao redor das pequenas curvas C_N

$$\Delta S_\mu = \sum_N \Delta_N S_\mu. \quad (6.120)$$

A variação de S_μ em torno das sub-regiões interiores de A é cancelada pelas variações em torno das sub-regiões adjacentes, sobrando apenas a contribuição do bordo externo das sub-regiões que compõem C . Deste modo, a questão é se ocorre variações quando S_μ percorre ao redor de uma pequena curva fechada por transporte paralelo. Se a curva é pequena o suficiente, podemos expandir $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ em torno de algum ponto $X \equiv x(\tau_0)$ da curva:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x) = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(X) + (x^\rho - X^\rho) \frac{\partial}{\partial X^\rho} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(X) + \dots \quad (6.121)$$

e a expansão de primeira ordem de S_μ em torno do mesmo ponto é:

$$S_\mu(\tau) = S_\mu(\tau_0) + (\tau - \tau_0) \frac{\partial}{\partial \tau_0} S_\mu(X) + \dots \quad (6.122)$$

e da Eq. (6.119) obtemos a primeira ordem em $(x^\mu - X^\mu)$:

$$S_\mu(\tau) = S_\mu(\tau_0) + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(X) (x^\nu(\tau) - X^\nu) S_\lambda(\tau_0) + \dots \quad (6.123)$$

Para obtermos uma expressão válida para a segunda ordem substituímos as Eq. (6.121) e Eq. (6.123) na Eq. (6.119) e integramos:

$$S_{\mu}(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \left[\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} S_{\mu} \right]$$

$$S_{\mu}(\tau) \simeq S_{\mu}(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau} \left(\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(X) + (x^{\rho}(\tau) - X^{\rho}) \frac{\partial}{\partial X^{\rho}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(X) + \dots \right)$$

$$(S_{\mu}(\tau_0) + S_{\sigma}(\tau_0) \Gamma_{\lambda\rho}^{\sigma}(X) (x^{\rho}(\tau) - X^{\rho}) + \dots) \frac{dx^{\nu}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (6.124)$$

descartando os termos de ordens iguais ou maiores a três em $x - X$:

$$S_{\mu}(\tau) \simeq S_{\mu}(\tau_0) + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(X) S_{\lambda}(\tau_0) \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{dx^{\nu}(\tau)}{d\tau} d\tau +$$

$$+ \left\{ \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(X) \Gamma_{\lambda\rho}^{\sigma}(X) + \frac{\partial}{\partial X^{\rho}} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}(X) \right\}$$

$$S_{\sigma}(\tau_0) \int_{\tau_0}^{\tau} (x^{\rho}(\tau) - X^{\rho}) \frac{dx^{\nu}(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (6.125)$$

Se $x^{\mu}(\tau)$ retorna ao seu valor inicial X^{μ} em algum $\tau = \tau_1$, então:

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{dx^{\nu}(\tau)}{d\tau} d\tau = 0.$$

Então a variação de S_{μ} devido ao transporte paralelo ao redor de uma pequena curva fechada $x^{\mu}(\tau)$ é de segunda ordem:

$$\Delta S_{\mu} \equiv S_{\mu}(\tau_1) - S_{\mu}(\tau_0)$$

$$= \left\{ \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(X) \Gamma_{\lambda\rho}^{\sigma}(X) + \frac{\partial}{\partial X^{\rho}} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}(X) \right\} S_{\sigma}(\tau_0) \oint x^{\rho} dx^{\nu} \quad (6.126)$$

onde

$$\oint x^{\rho} dx^{\nu} = \int_{\tau_0}^{\tau_1} x^{\rho} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} d\tau$$

Em geral, esta integral não se anula. Se nossa curva fosse um pequeno paralelogramo com bordas de comprimentos δa^{μ} e δb^{μ} essa integral assumiria o valor:

$$\oint x^{\rho} dx^{\nu} = \delta a^{\rho} \delta b^{\nu} - \delta a^{\nu} \delta b^{\rho}$$

sendo sempre anti-simétrico em ρ e ν , de fato:

$$\oint x^\rho dx^\nu = \int_{\tau_0}^{\tau_1} x^\rho \frac{dx^\nu}{d\tau} d\tau = \int_{\tau_0}^{\tau_1} \frac{d}{d\tau} (x^\rho x^\nu) d\tau - \int_{\tau_0}^{\tau_1} x^\nu \frac{dx^\rho}{d\tau} d\tau = - \oint x^\nu dx^\rho \quad (6.127)$$

desta maneira, os coeficientes desta integral na Eq. (6.126) podem ser substituídos pela parte anti-simétrica, que é exatamente metade do tensor curvatura dado na Eq. (6.92)

$$\Delta S_\mu = \frac{1}{2} R_{\mu\nu\rho}^\sigma S_\sigma \oint x^\rho dx^\nu. \quad (6.128)$$

donde pode-se concluir que uma condição necessária e suficiente para que um vetor arbitrário S_μ não sofra variação, quando percorre uma pequena curva fechada arbitrária em X por transporte paralelo, é que $R_{\mu\nu\rho}^\sigma$ se anule em X . Nós notamos que a variação em sobre uma curva finita fechada por transporte paralelo pode ser calculada fragmentando-se a área A limitada por C em pequenas regiões, somando as variações em S_μ quando percorre estas pequenas regiões por transporte paralelo; por esta razão, se $R_{\mu\nu\rho}^\sigma$ se anula em A , então um vetor arbitrário S_μ não sofre variação quando percorre por transporte paralelo ao redor de C .

Suponha que $R_{\mu\nu\rho}^\sigma$ se anule numa curva fechada consistindo de dois segmentos A e B unindo os pontos x^μ e X^μ , a variação de um vetor S_μ , por transporte paralelo, ao longo de A de x para X deve ser cancelado pela variação de S_μ quando, por transporte paralelo, é levado ao longo de B de X a x :

$$\Delta_{x \rightarrow X}^A S_\mu + \Delta_{X \rightarrow x}^B S_\mu = 0.$$

Por outro lado, se mudarmos o sentido do deslocamento do vetor S_μ por transporte paralelo, ao longo do mesmo caminho B , de x para X , passando agora a percorrer de X para x , obtemos a seguinte relação para estas variações:

$$\Delta_{x \rightarrow X}^B S_\mu = -\Delta_{X \rightarrow x}^B S_\mu$$

o que nos leva a

$$\Delta_{x \rightarrow X}^A S_\mu = -\Delta_{X \rightarrow x}^B S_\mu = \Delta_{x \rightarrow X}^B S_\mu \quad (6.129)$$

ou seja, obtemos o mesmo valor para a variação de S_μ por transporte paralelo, de x para X , independentemente da curva que tomamos.

Portanto, dado S_μ em X determinamos um campo vetorial $S_\mu(x)$ definido em toda região do espaço onde o tensor curvatura $R_{\mu\nu\rho}^\sigma$ se anule, por transporte paralelo de X para x . A Eq. (6.129) assegura que $S_\mu(x)$ assim definido depende somente de x e não do caminho de X à x . A derivada ao longo de qualquer curva $x(\tau)$ neste campo é:

$$\frac{dS_\mu}{d\tau} = \frac{\partial S_\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu(\tau)}{d\tau}$$

e desde que seja arbitrária a direção de $dx^\nu(\tau)/d\tau$ a Eq. (6.119) pode ser reescrita a partir da equação anterior como:

$$\frac{\partial S_\mu}{\partial x^\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda S_\lambda \quad (6.130)$$

ou

$$S_{\mu;\nu} = 0 \quad (6.131)$$

Se o tensor curvatura $R_{\mu\nu\rho}^\sigma$ se anula podemos construir soluções da Eq. (6.130) com qualquer valor de $S_\mu(X)$ dado, por transporte paralelo de S_μ de X à x . Reciprocamente, se existe qualquer campo vetorial covariante com derivadas covariantes que se anulam, então a Eq. (6.119) será satisfeita e como o transporte paralelo não causa variação a um campo quando levado sobre uma curva fechada qualquer, da Eq.(6.128) temos por toda a região:

$$R_{\mu\nu\rho}^\sigma S_\sigma = 0 \quad (6.132)$$

onde S_σ satisfaz a Eq. (6.131). Nesta aproximação, a equação anterior é uma condição necessária e suficiente para que possamos resolver a Eq. (6.130) por expansão por séries de potências em $x^\mu - X^\mu$.

7 APROXIMAÇÃO DE CONEXÃO AFIM LOCAL PARA AS CONSTANTES ELÁSTICAS DE CRISTAIS LÍQUIDOS NEMÁTICOS

7.1 FUNDAMENTOS

De acordo com Hess [2]-[6], a interação entre moléculas de cristais líquidos pode ser obtida da interação entre moléculas esféricas de um líquido isotrópico hipotético usual, cujo potencial esférico é deformado até obtermos um potencial de forma elipsoidal, sendo este uma aproximação para o potencial de moléculas nemáticas. Esta suposição considera que a geometria do potencial influencia o comportamento anisotrópico encontrado na fenomenologia dos cristais líquidos e, se não explica completamente a diversidade do comportamento dos cristais líquidos [55], pelo menos descreve muitos problemas reológicos [2]-[6]. Numa linguagem matemática, consideramos que o potencial de interação elipsoidal Φ_E entre moléculas nemáticas pode ser transformado num potencial de interação esférico Φ_S , onde \mathbf{r} é o vetor entre duas moléculas que são submetidas à uma transformação afim apropriada:

$$\Phi_E(r_S) = \Phi_S(r_E), \quad (7.1)$$

onde usamos os índices E e S para notação das simetrias elipsoidais e esféricas, respectivamente. O potencial não-esférico, Φ_E , pode ser substituído pelo potencial esférico, Φ_S , se a distância entre dois pontos é dada por uma métrica no qual dois pontos numa superfície equipotencial não esférica torna-se equidistante do centro do potencial. Como consequência, existe uma transformação afim entre a física de líquidos formados por moléculas esféricamente interagentes e a física de líquidos de moléculas elipsoidais e vice-versa. Daqui em diante assumiremos a regra da soma sobre índices repetidos. Deste modo, a medida da distância entre dois potenciais está relacionada pela expressão:

$$r_S^i = \frac{dr_S^i}{dr_E^k} r_E^k \quad \text{e} \quad \frac{d}{dr_S^j} = \frac{dr_E^i}{dr_S^j} \frac{d}{dr_E^i} \quad (7.2)$$

onde a primeira equação fornece a lei de transformação para vetores enquanto a segunda lei fornece a transformação para derivadas. Obviamente, estas relações satisfazem as seguintes relações inversas:

$$\frac{dr_S^i}{dr_E^k} \frac{dr_E^k}{dr_S^j} = \delta_j^i. \quad (7.3)$$

Uma conseqüência fundamental destas hipóteses e uma das vantagens desse trabalho, pode ser entendida quando admitimos que a amostra nemática não está homogeneamente alinhada, e a transformação afim correspondente torna-se dependente da posição. De acordo com tais condições, as derivadas de um vetor não se comportam como um tensor e uma nova definição de derivada deve ser introduzida. Todas as quantidades da forma dv^i/dr^j , onde v^i é a i -ésima componente de um vetor \vec{v} devem se transformar de acordo com a Eq. (7.2) e, conseqüentemente,

$$\frac{dv^i}{dr^j} \rightarrow \frac{dr_E^m}{dr_S^j} \frac{d}{dr_E^m} \left(\frac{dr_S^i}{dr_E^k} v_E^k \right) = \frac{dr_E^m}{dr_S^j} \frac{d^2 r_S^i}{dr_E^m dr_E^k} v_E^k + \frac{dr_E^m}{dr_S^j} \frac{dr_S^i}{dr_E^k} \frac{dv_E^k}{dr_E^m}. \quad (7.4)$$

Quando a configuração do diretor não é homogênea, mudando de ponto a ponto, o primeiro termo do lado direito da equação acima é não nulo revelando que dv^i/dr^j não é um tensor sob a transformação dada na Eq. (7.2). Este comportamento é encontrado usualmente quando consideramos transformações de coordenadas dependentes da posição ou do ponto. A forma padrão para se tratar tal situação modifica a regra de diferenciação; derivadas usuais tem de ser modificadas para derivadas covariantes [38] de modo que termos fora das normas da equação acima sejam cancelados. Além disso, mesmo quando a utilização da diferenciação covariante é necessária, pode ocorrer que tal procedimento resulte num sistema de coordenadas "inconveniente", e uma mudança de coordenadas apropriada poderia restabelecer a regra de derivação usual. Entretanto, existem situações onde o uso de derivadas covariantes é inevitável, e não há mudança de coordenadas capaz de restaurar a regra de derivação usual. Neste caso, a superfície onde os fenômenos físicos ocorrem têm uma curvatura intrínseca.

O primeiro resultado desse trabalho é demonstrar que a aproximação de conexão afim revela que a descrição matemática das texturas nemáticas tem associada uma superfície com uma curvatura intrínseca e, conseqüentemente, a descrição apropriada requer o uso de ferramentas matemáticas consistentes. Por exemplo, derivadas covariantes devem substituir derivadas usuais. Como todas as texturas nemáticas aparecem de variações do diretor e, portanto, suas variações são relacionadas com a elasticidade da amostra, aplicaremos tal aproximação no estudo da elasticidade nemática. Mostraremos que a partir de funções escalares simples obtemos uma descrição da elasticidade nemática construída com

uma regra de diferenciação covariante apropriada. E finalmente os resultados de tal descrição será comparada com dados experimentais do MBBA,5CB,7CB,PCH7eCCH7.

7.2 CURVATURA DE UMA AMOSTRA NEMÁTICA

A Eq. (7.4) revelou a necessidade do uso da derivada covariante quando a aproximação de conexão afim é utilizada para descrever a física de nemáticos a fim de fazer com que a métrica da superfície gerada pelas texturas nemáticas seja determinada. Este é o propósito desta seção. Para propormos uma métrica, lembramos que a distância numa geometria esférica é dada por,

$$d_S^2 = \delta_{ij} r_S^i r_S^j, \quad (7.5)$$

enquanto, numa geometria não-esférica é dada por,

$$d_E^2 = g_{ij} r_E^i r_E^j, \quad (7.6)$$

onde, para a situação física que estudamos a métrica g_{ij} é induzida por superfícies equipotenciais de potenciais não-esféricos. A aproximação de conexão afim afirma que o fenômeno físico que ocorre numa superfície equipotencial não-esférica pode ser obtido através de uma transformação afim, a partir de uma superfície equipotencial esférica. Para obter tal lei de transformação, dada na Eq. (7.2), será observado que os pontos localizados ao longo da mesma superfície equipotencial elipsoidal são "equidistantes" do centro potencial. Deste ponto de vista, a hipótese de Hess pode ser formulada declarando que, para um potencial elipsoidal simétrico, existe um potencial simétrico esférico associado satisfazendo a regra,

$$d^2 \equiv d_S^2 = d_E^2. \quad (7.7)$$

Portanto, a passagem do potencial elipsoidal para o potencial esférico, ou vice-versa, colocada na Eq. (7.1), pode ser realizada por meio de uma mudança da métrica na superfície na qual o fenômeno está sendo estudado. Isto é, as medidas das distâncias nos dois potenciais devem estar ligadas por alguma regra, determinada pela Eq. (7.2). Para uma relação formal entre a métrica g_{ij} e esta mudança de sistema coordenado, é suficiente observar que quando esta equação é substituída na Eq. (7.1), Eq. (7.5) e Eq. (7.6), é obtido,

$$\delta_{ij} r_S^i r_S^j = \delta_{ij} \frac{dr_S^i}{dr_E^k} \frac{dr_S^j}{dr_E^l} r_E^k r_E^l; \quad (7.8)$$

isto é,

$$g_{kl} = \frac{dr_S^i}{dr_E^k} \frac{dr_S^j}{dr_E^l} \delta_{ij}. \quad (7.9)$$

(7.9)

O uso dos índices superiores e inferiores segue das regras usuais de vetores contravariantes e covariantes, respectivamente, e será ilustrado no contexto deste modelo. Eles estão relacionados com as leis de transformação direta e inversa. Deste modo, a métrica g_{ij} , dada na Eq. (7.6) é covariante enquanto sua inversa, g^{ij} , obtida pela relação,

$$g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j, \quad (7.10)$$

é contravariante. Esta relação fornece uma forma métrica ao método de transformação afim; quando uma quantidade física é conhecida num sistema esfericamente simétrico, Eq. (7.1), dizemos que é suficiente aplicar nesta quantidade uma transformação que a leve para o sistema elipsoidal, obtendo assim uma expressão correspondente num sistema não-esférico. Contudo, para obter uma forma explícita para esta regra é necessário conhecer a métrica g_{ij} que produz tal transformação. A obtenção de tal métrica em termos dos parâmetros nemáticos é nosso próximo propósito.

7.2.1 Parâmetro de Ordem Elipsoidal

Consideremos a métrica g_{ij} determinada pela matriz E_{ij} que caracteriza a forma quadrática de um elipsóide uniaxial. Um dado elipsóide uniaxial é descrito num sistema coordenado local da seguinte forma:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{b^2} = 1, \quad (7.11)$$

para os vetores ortonormais $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ os comprimentos dos três eixos principais são as medidas dados por $\{a, b, b\}$, respectivamente, e

$$\mathbf{e}_x = (1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_y = (0, 1, 0), \quad \mathbf{e}_z = (0, 0, 1), \quad (7.12)$$

sendo x_1, x_2 e x_3 os eixos coordenados. Assim, o elipsóide dado na Eq.(7.11) pode ser escrito como $E_{ij}^d x^i x^j = 1$, onde

$$E_{ij}^d = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix}, \quad (7.13)$$

é a matriz diagonal que caracteriza o elipsóide de autovalores,

$$\left\{ \frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{b^2} \right\}, \quad (7.14)$$

enquanto os autovetores são dados pela Eq. (7.12). O índice d em E_{ij}^d é usado para ressaltar que a matriz característica correspondente é diagonal.

A matriz E_{ij} , que representa um elipsóide uniaxial arbitrário com semi-eixos principais de mesmos comprimentos do elipsóide caracterizado pela Eq. (7.13), poder ser obtida a partir da matriz E_{ij}^d através de rotações arbitrárias cujos três vetores ortonormais $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ são rigidamente rotacionados para um novo sistema de coordenadas de vetores ortonormais $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}\}$. Vamos demonstrar que após tais rotações E_{ij} assume a forma,

$$E_{ij} = \frac{1}{a^2} p_i p_j + \frac{1}{b^2} q_i q_j + \frac{1}{b^2} r_i r_j. \quad (7.15)$$

De fato, basta mostrar que \mathbf{p} , \mathbf{q} e \mathbf{r} são autovetores de E_{ij} com os autovalores dados pela Eq. (7.14), pois os autovalores são invariantes por transformações de coordenadas. Usando as relações ortonormais, Eq. (7.17) abaixo, entre \mathbf{p} , \mathbf{q} e \mathbf{r} calculamos os autovetores e autovalores de E :

$$E_{ij} p^j = \frac{1}{a^2} p_i, \quad E_{ij} q^j = \frac{1}{b^2} q_i, \quad E_{ij} r^j = \frac{1}{b^2} r_i. \quad (7.16)$$

onde \mathbf{p} , \mathbf{q} e \mathbf{r} são autovetores normalizados de E e $\{1/a^2, 1/b^2, 1/b^2\}$ são os autovalores correspondentes. Uma importante propriedade destes autovetores é que eles compõem um conjunto completo estando relacionados pela expressão [56],

$$p_i p_j + q_i q_j + r_i r_j = \delta_{ij}. \quad (7.17)$$

Combinando esta equação com a Eq. (7.14), obtemos,

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{\alpha^2} p_i p_j + \frac{1}{b^2} (\delta_{ij} - p_i p_j) \\ &= \frac{1}{1-\epsilon} \{ \delta_{ij} - \epsilon p_i p_j \}, \end{aligned} \quad (7.18)$$

onde

$$\epsilon = 1 - b^2, \quad (7.19)$$

é a excentricidade enquanto \mathbf{p} corresponde ao eixo simétrico do elipsóide uniaxial. Fixando o comprimento do semi-eixo principal do elipsóide uniaxial como $\alpha = 1$, obtemos concordância com a normalização adotada para a esfera de raio $r = 1$. Logo, num sistema coordenado arbitrário rotacionado, este elipsóide pode ser escrito como,

$$E_{ij} y^i y^j = 1. \quad (7.20)$$

Após fixarmos $\alpha = 1$, a condição $\epsilon = 0$ reduz o elipsóide a uma esfera de raio $r = 1$ como podemos ver na Eq. (7.19). A anisotropia encontrada nos parâmetros reológicos pode ser interpretada como a deformação induzida no meio nemático pelas superfícies equipotenciais não-esféricas. Conseqüentemente, esta anisotropia pode ser quantificada medindo quanto esse elipsóide difere de uma esfera equivalente. Para obtermos tal esfera lembramos que, de acordo com a Eq. (7.13), o tensor que caracteriza um elipsóide é uma função linear do inverso do quadrado de seus eixos e, além disso, seria reduzido a uma esfera se o comprimento destes eixos se tornassem iguais. Portanto, a esfera equivalente pode ser definida como aquela cujo raio r satisfaz a relação,

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{3} \text{Tr}(E) = \frac{1}{1-\epsilon} (1 - \frac{\epsilon}{3}). \quad (7.21)$$

Isto é, quadrado do inverso de seu raio é dado pela média do inverso do quadrado do semi-eixo do elipsóide. Então, se E é a matriz característica de um elipsóide, os elementos da matriz característica da esfera equivalente seriam dados por:

$$S_{ij} = \delta_{ij} \text{Tr}(E)/3 \quad (7.22)$$

e, conseqüentemente, a deformação elipsoidal ΔE seria definida pela diferença entre o elipsóide e a esfera equivalente,

$$\Delta E_{ij} = E_{ij} - S_{ij} = E_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \text{Tr}(E), \quad (7.23)$$

e que, com o uso das Eq. (7.18) e Eq. (7.21), torna-se:

$$\Delta E_{ij} = \frac{\epsilon}{1 - \epsilon} \left\{ \frac{1}{3} \delta_{ij} - p_i p_j \right\}. \quad (7.24)$$

Assim, a deformação elipsoidal é determinada pelo produto de dois termos, $\epsilon/(1 - \epsilon)$ e

$$Q_{ij}^E = \frac{1}{3} \delta_{ij} - p_i p_j. \quad (7.25)$$

Este último termo é o componente anisotrópico da deformação elipsoidal, ele coincide com o tensor de momento quadrupolar [57], sendo formalmente similar à expressão do parâmetro de ordem tensorial de um cristal líquido nemático. Assim como determinado por de Gennes [1], o tensor parâmetro de ordem pode ser medido da diferença entre as partes anisotrópicas e isotrópicas de uma determinada propriedade física, e foi exatamente isso que fizemos com E_{ij} para chegar na Eq. (7.24). Naquela equação, o termo de excentricidade, e , fornece a magnitude do alongamento elipsoidal; para diferentes excentricidades temos diferentes formas moleculares correspondentes, para $e < 0$ obtemos $b > 1$, correspondendo a uma fase discótica, e para $e > 0$ obtemos $b < 1$, correspondendo a uma fase calamítica.

Resumindo, a matriz elipsoidal apresentada na Eq. (7.15) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} E_{ij} &= S_{ij} + \frac{\epsilon}{b^2} Q_{ij}^E \\ &= \frac{1}{1 - \epsilon} \left\{ \left(1 - \frac{\epsilon}{3}\right) \delta_{ij} + \epsilon Q_{ij}^E \right\}, \end{aligned} \quad (7.26)$$

onde o primeiro termo corresponde à parte esférica (isotrópica) de E_{ij} e o segundo termo descreve a variação da forma esférica. Assim como determinado por Hess e abordado acima, a aproximação da conexão afim pode ser realizada deformando um potencial esférico até obtermos moléculas de formas elipsoidais. Deste modo, tal variação é descrita por um termo que é estruturalmente igual ao tensor parâmetro de ordem. É desta forma de E_{ij} que a métrica g_{ij} será construída, sendo composta de uma parte isotrópica proporcional à δ_{ij} e uma parte anisotrópica proporcional à Q_{ij} .

7.2.2 Termodinâmica na Métrica

Mostramos anteriormente que a matriz E_{ij} caracterizando um elipsóide difere de uma esfera por um termo tensorial Q_{ij}^E , que é formalmente idêntico ao parâmetro de ordem Q_{ij} . Con-sequentemente, estes objetos matemáticos descrevem objetos diferentes, sendo esta a razão pela qual introduzimos o sobrescrito E em Q_{ij}^E . O propósito desta seção é mostrar que tais igualdades formais podem ser aprimoradas de forma que ambos os conceitos tornem-se idênticos e uma métrica dependente da temperatura seja obtida. Este importante resultado reside na essência do que está por vir do uso da aproximação de Hess e sua motivação física pode ser facilmente entendida: para temperaturas maiores do que o ponto de transição de fase NI o líquido nemático é isotrópico e todas as direções são equivalentes, para temperaturas menores do que o ponto de transição de fase NI o líquido torna-se anisotrópico e, em cada ponto, muitas propriedades físicas adquirem uma direção privilegiada. Logo, pelo menos deste simples ponto de vista, esperamos que uma métrica dependente da temperatura possa ser construída. Introduziremos tal estudo lembrando algumas considerações básicas sobre o significado físico do parâmetro de ordem microscópico e posteriormente o usaremos na construção do parâmetro de ordem macroscópico. No próximo passo, especialmente na Eq.(7.27), a distinção entre o parâmetro de ordem microscópico e macroscópico padrão segue a aproximação usual [1] e será discutida simplesmente por uma questão de compreensão de nosso raciocínio.

A anisotropia dos materiais líquido-cristalinos pode ser observada em dois níveis distintos, macroscopicamente e microscopicamente. Em medidas termodinâmicas a anisotropia aparece macroscopicamente, apesar de ter origem microscópica. As moléculas de cristal líquido têm uma anisotropia microscópica intrínseca que, quando calculada, pode ou não ser observada em medidas macroscópicas dependendo da temperatura. Para criar uma notação que faça distinção entre a natureza microscópica e macroscópica de Q_{ij} usaremos um sinal circunflexo sobre o parâmetro vetorial \mathbf{n} denotando um vetor unitário microscópico. Assim, $Q_{ij}(\hat{n})$ significa que \hat{n} é uma variável aleatória microscópica, nesse caso o eixo longo molecular, e o parâmetro de ordem associado é um parâmetro de ordem microscópico. Analogamente, sem o sinal circunflexo em \mathbf{n} , $Q_{ij}(\mathbf{n})$ significa que \mathbf{n} é uma variável aleatória macroscópica, nesse caso o diretor, e o parâmetro de ordem associado é um parâmetro de

ordem macroscópico. O vínculo entre estas duas quantidades é feito admitindo que a variável aleatória microscópica \hat{n} oscila tão rapidamente que quando $Q_{ij}(\hat{n})$ é calculado, no tempo e/ou na vizinhança de um ponto, tal quantidade determina o parâmetro de ordem macroscópico $Q_{ij}(n)$, onde n é o diretor usual [1], e Q_{ij} tem a forma dada na Eq. (7.25), com n substituído por \hat{n} , cuja anisotropia macroscópica uniaxial pode ser medida. Assim como no capítulo 4, apesar da simbologia distinta, temos [1]:

$$\langle Q_{ij}(\hat{n}) \rangle = S Q_{ij}(n), \quad (7.27)$$

onde $\langle x \rangle$ representa a média estatística da variável aleatória x . Como já foi dito anteriormente, S dá a intensidade com que as oscilações aleatórias fazem a anisotropia microscópica ser observada na escala macroscópica. Para obter tal resultado é suficiente multiplicar o lado esquerdo da expressão acima pelo parâmetro de ordem macroscópico, $Q^{ji}(n)$, tomando o traço da expressão resultante:

$$Q^{ji}(n) \langle Q_{ij}(\hat{n}) \rangle = S Q^{ji}(n) Q_{ij}(n), \quad (7.28)$$

obtendo

$$S = \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{3} + \langle (\hat{n} \cdot \hat{n})^2 \rangle \right). \quad (7.29)$$

Esta equação é a expressão conhecida e usualmente utilizada na literatura de cristais líquidos para o parâmetro de ordem escalar [1].

Vamos considerar que o potencial interagente atribuído a cada molécula de uma amostra nemática tem uma superfície equipotencial que pode ser representada por uma matriz E_{ij} . Suponha que possamos estender tal idéia para uma vizinhança de um ponto, para uma grande quantidade de moléculas, em analogia com a Eq. (7.27), podemos ter moléculas alinhadas gerando uma fase nemática ou moléculas desalinhadas. A representação dos resultados macroscópicos deste alinhamento microscópico pode ser feita através da matriz Q_{ij}^E assumindo que ela satisfaz a mesma relação de um parâmetro de ordem microscópico:

$$\langle Q_{ij}^E(\hat{n}) \rangle = S Q_{ij}(n), \quad (7.30)$$

isso significa que a anisotropia microscópica de cada molécula torna-se acoplada com a anisotropia microscópica de outra molécula de sua vizinhança, fazendo com que o eixo longo

de cada uma das moléculas oscile ao longo da mesma direção, gerando uma fase nemática. Uma importante consequência do raciocínio acima é que fornece resultados macroscópicos para a anisotropia elipsoidal microscópica de cada uma das moléculas. Como Q_{ij}^E aparece na definição de E_{ij} , veja Eq. (7.26), esta equação revela que a matriz elipsoidal E_{ij} também tem um complemento macroscópico, pois a partir do momento que damos significado a $\langle Q_{ij}^E \rangle$ também devemos atribuir um significado correspondente a $\langle E_{ij} \rangle$. Tal matriz mensura a passagem de uma simetria macroscópica isotrópica, determinada pelo termo δ_{ij} , para uma simetria macroscópica elipsoidal de uma fase nemática. Assumiremos que tal anisotropia é percebida através da métrica macroscópica g_{ij} . Ou seja, $g_{ij} = \langle E_{ij} \rangle N$. Ou,

$$\begin{aligned} g_{ij} &= N \left\{ \frac{1}{3} \text{Tr}(E) \delta_{ij} + \frac{\epsilon}{1-\epsilon} \langle Q_{ij}(\hat{n}) \rangle \right\} \\ &= \frac{N}{(1-\epsilon)} \left\{ (1 - \frac{\epsilon}{3}) \delta_{ij} + \epsilon S Q_{ij}(n) \right\}, \end{aligned} \quad (7.31)$$

onde N é a constante de normalização introduzida a fim de assegurar que o vetor diretor seja unitário,

$$n^i n_i = g^{ij} n_i n_j = 1.$$

Um cálculo revela o valor de N , mostrando que,

$$g_{ij} = \frac{1}{(3 - \epsilon(1 + 2S))} \{ (3 - \epsilon) \delta_{ij} + 3\epsilon S Q_{ij}(n) \}, \quad (7.32)$$

e

$$g^{ij} = \frac{1}{(3 - \epsilon(S - 1))} \{ (3 - \epsilon(S + 1)) \delta^{ij} + 3\epsilon S Q^{ij}(n) \}. \quad (7.33)$$

Nessas equações assumimos que a métrica induzida pela anisotropia elipsoidal depende do parâmetro de ordem escalar S e, portanto, é macroscópica, sendo determinada pela temperatura nemática. Na fase isotrópica, $S = 0$, a métrica é esférica e macroscópica. Quando a temperatura é reduzida, a transição de fase nemática-isotrópica ocasiona um S não-nulo, induzindo uma anisotropia elipsoidal macroscópica descrita pelo parâmetro de ordem S e pela excentricidade ϵ . Observe que esta métrica tem como meta a realização das hipóteses de Hess da aproximação da conexão afim, sendo um efeito termodinâmico induzido pelas anisotropias da fase nemática assim como provaremos com o estabelecimento da Eq. (7.37). Entretanto, não significa que a métrica verdadeira do espaço onde o fenômeno acontece tenha sido alterada.

7.2.3 Conexões e Curvatura

Nessa seção, mostraremos que na presença de texturas nemáticas a aplicação da aproximação de conexão afim deve ser necessariamente seguida pelo uso da diferenciação covariante; a hipótese de Hess conduz a uma superfície não plana tridimensional de curvatura escalar não nula. Para chegar neste resultado usaremos fórmulas da geometria diferencial cujas deduções são diretas e deduções físicas podem ser encontradas em Weinberg [38]. Para calcular a curvatura associada com a métrica g_{ij} , a conexão:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} \left\{ \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right\}, \quad (7.34)$$

deve ser avaliada e de Γ_{ij}^k usando a Eq. (6.25) apresentada acima, calculamos o tensor de curvatura de Riemann-Christoffel R_{imj}^k , Eq. (6.92), e dele, o tensor de Ricci, R_{ij} , Eq. (6.99):

$$\begin{aligned} R_{imj}^k &= \frac{\partial \Gamma_{im}^k}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^m} + \Gamma_{im}^n \Gamma_{jn}^k - \Gamma_{ij}^n \Gamma_{mn}^k, \\ R_{ij} &= R_{ikj}^k. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Com estes elementos, a curvatura escalar R pode ser determinada por:

$$R = g^{ij} R_{ij}. \quad (7.36)$$

Finalmente, podemos mostrar que a conexão é dada por:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{3\epsilon S}{2(3 - \epsilon(1 + 2S))(3 - \epsilon(1 - S))} \left\{ (3 - \epsilon(1 + 2S)) \left(n^k (\partial_i n_j - \partial_j n_i) + n_j (\partial_i n^k - \partial^k n_i) \right) + \right. \\ \left. - (3 - \epsilon(1 - S)) n_i (\partial_j n^k + \partial^k n_j) + 3\epsilon S n_i n^m (n^k \partial_m n_j + n_j \partial_m n^k) \right\},$$

e a curvatura escalar é dada por:

$$R = \frac{9\epsilon^2 S^2}{2(3 - \epsilon(1 - S))^2} (\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{n}))^2 - \frac{3\epsilon S}{(3 - \epsilon(1 - S))} \nabla \cdot (\mathbf{n} (\nabla \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n})). \quad (7.37)$$

Esta expressão mostra que a curvatura escalar associada com as texturas de uma amostra nemática é não-nula e composta pela soma de duas texturas nemáticas usuais, o termo de textura "bend" $(\mathbf{n} \cdot (\nabla \times \mathbf{n}))^2$, e o termo de textura "saddle-splay", $\nabla (\mathbf{n} \cdot \nabla \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n})$. Como R é um escalar não-nulo, isto é, um invariante, será o mesmo em todos os sistemas coordenados não se anulando e deste modo não podendo ser eliminado. A curvatura expressa por R é uma propriedade básica da aproximação de conexão afim, associando intrinsecamente as texturas nemáticas com uma superfície não plana. Mais adiante retomaremos este assunto e seu significado físico.

7.2.4 Aproximação Elementar para a Energia Elástica

Anteriormente, vimos que quando a aproximação de conexão afim é aplicada, as texturas nemáticas devem ser descritas por uma superfície não plana. Conseqüentemente, somos levados a substituir derivadas usuais por derivadas covariantes [38],

$$\partial_i v^j \rightarrow D_i v^j \equiv \partial_i v^j + \Gamma_{ik}^j v^k. \quad (7.38)$$

Considerando um modelo simples para a energia elástica armazenada nas texturas elásticas, perceberemos as vantagens obtidas com esse tipo de desenvolvimento. As constantes elásticas serão calculadas com o uso das regras para derivadas tratadas anteriormente e os resultados obtidos comparados com outros obtidos através do uso das derivadas normais. Adiante, trataremos de modelos mais elaborados.

Generalizando a lei de Hooke para um meio líquido-cristalino vemos que a energia elástica, na vizinhança de um ponto dado, deve ser pelo menos proporcional às variações do diretor e do quadrado do parâmetro de ordem escalar [58], ou seja,

$$E \approx \alpha S^2 (\partial_i n^j)^2.$$

Usando a regra das derivadas usuais e as expressões para as texturas da fase nemática, podemos reescrever a equação acima como,

$$E \approx \alpha S^2 \left\{ (\nabla \cdot \mathbf{n})^2 + (\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n})^2 + (\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{n})^2 - \nabla (\mathbf{n} \cdot \nabla \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n}) \right\}.$$

De acordo com este modelo elementar, todas as constantes elásticas de cristais líquidos nemáticos seriam idênticas, não sendo observada nenhuma diferença entre seus valores. Por outro lado, quando substituimos as derivadas usuais por derivadas covariantes encontramos:

$$\begin{aligned} E &\approx \alpha S^2 (\partial_i n^j)^2 \rightarrow \alpha S^2 (D_i n^j)(D^i n_j) = \\ &= \alpha S^2 g^{jk} g^{im} (D_i n_k)(D_m n_j) \end{aligned}$$

podendo ser reescrito como

$$\begin{aligned} E &\approx \alpha S^2 \left\{ (\nabla \cdot \mathbf{n})^2 + \left(1 - \frac{3\epsilon(6 - \epsilon(S + 2))}{2(3 + \epsilon(S - 1))^2} \right) (\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n})^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{3\epsilon S}{3 + \epsilon(S - 1)} \right) (\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{n})^2 - (\nabla (\mathbf{n}(\nabla \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n}))) \right\}. \end{aligned}$$

Com a introdução das derivadas covariantes, obtivemos expressões não triviais para as constantes elásticas nemáticas com dependência da excentricidade molecular e do parâmetro de ordem escalar S :

$$\begin{aligned} K_{11} &\approx \alpha S^2, \\ K_{22} &\approx \alpha \left(1 - \frac{3\epsilon(6 - \epsilon(S + 2))}{2(3 + \epsilon(S - 1))^2} \right) S^2, \\ K_{33} &\approx \alpha \left(1 - \frac{3\epsilon(6 - \epsilon(S + 2))}{2(3 + \epsilon(S - 1))^2} - \frac{9\epsilon^2 S^2}{2(3 + \epsilon(S - 1))^2} \right) S^2. \end{aligned} \quad (7.39)$$

Mostraremos adiante que estas relações fornecem uma razão aceitável entre K_{11} e K_{22} , mas fracassam para a razão entre K_{11} e K_{33} . Recorrendo aos dados experimentais dos mais simples compostos calamíticos, constatamos que o comportamento das constantes elásticas podem ser resumidas por $K_{22} < K_{11} < K_{33}$ [1]. Entretanto, as expressões acima obedecem à relação $K_{33} < K_{22} < K_{11}$. Deste modo, proporemos um modelo mais elaborado e veremos que a razão K_{33}/K_{11} é determinada pela interação multipolar das moléculas nemáticas, esse fato físico explica as diferenças encontradas nos dados experimentais destas razões [24], uma vez que essa característica não se observa na razão K_{22}/K_{11} .

7.3 ENERGIA ELÁSTICA

Anteriormente, apresentamos um modelo elementar para avaliar a energia elástica armazenada nas texturas nemáticas. Apesar de termos fornecido uma expressão para cada uma das constantes elásticas em função da excentricidade molecular e do parâmetro de ordem escalar, vimos que a expressão para K_{33} discorda dos dados experimentais. Desse modo, daqui em diante esse modelo será aperfeiçoado para alcançar uma total concordância com os dados experimentais. O ponto de partida usual, isto é, como a energia livre é uma função escalar, devemos construí-la a partir de escalares obtidos dos mais simples invariantes unitários dos elementos matemáticos que caracterizam a teoria de cristais líquidos [1]. Para obtermos um modelo mais elaborado, alguns componentes físicos essenciais devem ser adicionados ao modelo elementar construído acima; além da geometria, devem ser considerados também aspectos contidos no uso das derivadas covariantes, a orientação relativa das moléculas anisotrópicas e as distâncias entre elas.

Vamos iniciar considerando a interação angular [47], formulada em termos de produtos tensoriais do parâmetro de ordem,

$$I_j^i(\hat{p}, \hat{q}) = Q^{ik}(\hat{p})Q_{kj}(\hat{q}). \quad (7.40)$$

Esta é uma função das variáveis aleatórias, \hat{p} e \hat{q} localizadas em dois diferentes pontos \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 , respectivamente, sendo que somente as quantidades termodinâmicas geradas por elas têm significado macroscópico. Para obtê-las, assumimos que a parte relacionada à função de dois pontos $\langle Q^{ik}(\hat{p})Q_{kj}(\hat{q}) \rangle$ pode ser desprezada e, conseqüentemente, $\langle I_j^i(\hat{p}, \hat{q}) \rangle$ é aproximada por $\langle I_j^i(\hat{p}, \hat{q}) \rangle = \langle Q^{ik}(\hat{p}) \rangle \langle Q_{kj}(\hat{q}) \rangle$ [59]. Usando a Eq. (7.13) encontramos:

$$\begin{aligned} \langle I_j^i(\hat{p}, \hat{q}) \rangle &= S^2 Q^{ik}(p) Q_{kj}(q) \\ &= S^2 I_j^i(p, q). \end{aligned} \quad (7.41)$$

Esta é a expressão básica para o cálculo das constantes elásticas [58]. Para obtermos invariantes escalares deste tensor, podemos: tomar o traço do tensor,

$$\begin{aligned} \hat{\epsilon}_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \langle I_i^i(\hat{p}, \hat{n}) \rangle = S^2 I_i^i(p, n) \\ &= S^2 \left(-\frac{1}{3} + (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})^2 \right), \end{aligned} \quad (7.42)$$

ou contraí-lo com o raio vetor $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ que representa a distância entre os domínios nemáticos \mathbf{p} e \mathbf{q} , obtendo:

$$i_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle r^i r^j I_{ij}(\hat{m}, \hat{n}) \rangle = S^2 r^i r^j I_{ij}(m, n). \quad (7.43)$$

Cada um destes invariantes tratados acima será usado para obtermos a expressão para a energia elástica de uma amostra nemática. O primeiro invariante é i_1 , ele expressa uma interação angular chamada interação de Maier-Saupe [60]. Dois diretores \mathbf{p} e \mathbf{q} estão elasticamente acoplados somente quando $S \neq 0$, não estando acoplados elasticamente na fase isotrópica, $S = 0$. Além do mais, através do produto $r^i r^j$, o invariante i_2 acopla a distância anisotrópica entre as moléculas nemáticas com a interação angular, coincidindo com as quantidades supostas anteriormente para descrever a elasticidade nemática. Por conseguinte, esperamos uma melhor descrição da elasticidade nemática do invariante i_2 . De qualquer forma, iniciaremos nosso estudo procurando as constantes elásticas estabelecidas pelo invariante i_1 . A razão principal para esse procedimento é mostrar explicitamente os limites de uma descrição puramente angular da elasticidade nemática, sendo usado na interpretação dos resultados encontrados adiante no estudo de i_2 .

Logo, observamos que a mudança $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}$ resulta em:

Usando a aproximação de campo médio, encontramos:

$$\begin{aligned} Q_{kj}(\mathbf{r}_2) &= Q_{kj}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}) \\ &\approx Q_{kj}(\mathbf{r}_1) + r^m D_m Q_{kj}(\mathbf{r}_1) + \frac{1}{2} r^m r^n D_m D_n Q_{kj}(\mathbf{r}_1). \end{aligned} \quad (7.44)$$

Usando a aproximação de campo médio, encontramos:

$$\begin{aligned} \langle I_j^i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rangle &= \langle Q^{ik}(\mathbf{r}_1) Q_{kj}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}) \rangle \\ &\approx \langle Q^{ik}(\mathbf{r}_1) Q_{kj}(\mathbf{r}_1) \rangle + \langle Q^{ik}(\mathbf{r}_1) r^m D_m Q_{kj}(\mathbf{r}_1) \rangle + \frac{1}{2} \langle Q^{ik}(\mathbf{r}_1) r^m r^n D_m D_n Q_{kj}(\mathbf{r}_1) \rangle. \end{aligned} \quad (7.45)$$

Consideremos o produto das variáveis $r^m r^n$, como é um tensor simétrico de ordem 2, podemos escrevê-lo em termos de tensores simétricos de ordem 2 da teoria [25], [39], Q^{mn} e δ^{mn} ,

$$r^m r^n = A Q^{mn} + B \delta^{mn}, \quad (7.46)$$

onde $A(r)$ e $B(r)$ são constantes a serem determinadas, cujo significado físico será importante para a interpretação de nosso modelo elástico. A substituição do produto das variáveis $r^m r^n$ acima, será utilizada, posteriormente, no cálculo dos invariantes i_1 e i_2 .

Como o traço de Q^{mn} é nulo, $Tr(Q^{mn}) = 0$, obtemos:

$$B(\mathbf{r}) = \frac{r^2}{3},$$

mostrando que $B(\mathbf{r})$ mensura a componente isotrópica de $r^m r^n$, assim como já vimos na Eq. (7.46). Contudo, a interpretação de $A(r)$ não é evidente e para obtê-la usamos que $Q^{mn}Q_{nm} = 2/3$ e $Q^{mn}\delta_{nm} = 0$, resultando:

$$A(\mathbf{r}) = \frac{2}{3}r^m r^n Q_{mn},$$

mostrando que $A(r)$ é proporcional ao termo de energia quadrupolar, no ponto \vec{r} [61].

Empregando estas definições em $\langle I_j^i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rangle$ obtemos:

$$\begin{aligned} \langle I_j^i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rangle &= \langle Q^{ik}Q_{kj} \rangle + \langle Q^{ik}(\mathbf{r}_1)r^m D_m Q_{kj}(\mathbf{r}_1) \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \langle Q^{ik}(\mathbf{r}_1)(A(\mathbf{r})Q^{mn} + B(\mathbf{r})g^{mn})D_m D_n Q_{kj}(\mathbf{r}_1) \rangle. \end{aligned} \quad (7.47)$$

Nas equações acima, realizamos a mudança $\delta^{ij} \rightarrow g^{ij}$, definida na Eq. (7.9).

Todo o formalismo desenvolvido até o momento será utilizado para calcular as constantes elásticas nemáticas. Assumiremos que o termo i_1 contribui para a energia livre através de um termo com a forma:

$$F_1 = F_0 + \int d^3 r_1 d^3 r_2 \alpha_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \langle I_i^i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rangle, \quad (7.48)$$

onde $\alpha_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ expressa os coeficientes da energia em termos de $\langle I_j^i(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rangle$.

Fazendo a mudança dos parâmetros de integração definidos acima, obtemos:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_0 + \frac{1}{2} \int d^3 r_1 d^3 r \alpha_1(\mathbf{r}) \left\{ \langle Q^{ik}(\mathbf{r}_1)(A Q^{mn} + B g^{mn})D_m D_n Q_{kj}(\mathbf{r}_1) \rangle \right\} \\ &= F_0 + \frac{1}{2} \int d^3 r_1 \left\{ \langle Q^{ik}(\mathbf{r}_1)(C_A Q^{mn} + C_B g^{mn})D_m D_n Q_{kj}(\mathbf{r}_1) \rangle \right\}, \end{aligned} \quad (7.49)$$

onde desconsideramos os dois primeiros termos da Eq. (7.47), o termo linear em $r^m D_m$ é um termo colesterico [25], [39], então:

$$\begin{aligned}
C_A &= \int d^3r \alpha_1(\mathbf{r})A(\mathbf{r}) = \frac{2}{3} \int d^3r \alpha_1(\mathbf{r})r^m r^n Q_{mn} \\
C_B &= \int d^3r \alpha_1(\mathbf{r})B(\mathbf{r}) = \frac{1}{3} \int d^3r r^2 \alpha_1(\mathbf{r}).
\end{aligned} \tag{7.50}$$

Usando a definição da derivada covariante dada acima, e após um cálculo direto, mas nada rápido, obtemos:

$$F_1 = F_0 + \frac{1}{2} \int d^3r_1 \left\{ K_{11} (\nabla \cdot \mathbf{n})^2 + K_{22} (\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{n})^2 + K_{33} (\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{n})^2 + K_s T f \right\} \tag{7.51}$$

onde

$$\begin{aligned}
K_{11}^{(1)} &= -\frac{2C_B S^2 ((3-\epsilon)^2 + 2\epsilon^2 S^2)}{3(3-\epsilon(1+2S))(3-\epsilon(1-S))^2 (3(3+\rho S) - \epsilon(3-S(3-\rho(1+2S))))} \\
K_{22}^{(1)} &= \left(1 - \frac{3\epsilon S (6-\epsilon(S+2))}{2(3+\epsilon(S-1))^2} \right) K_{11}^{(1)} \\
K_{33}^{(1)} &= -\frac{2C_B S^2 (3-2\rho S)((3-\epsilon)^2 + 2\epsilon^2 S^2)}{3(3-\epsilon(1-S))^2}
\end{aligned} \tag{7.52}$$

e $\rho = C_A/C_B$, é proporcional ao momento quadrupolar, definido em Eq. (7.50). Um aspecto considerável desta relação é a razão:

$$r_{21} = \frac{K_{22}^{(1)}}{K_{11}^{(1)}} = 1 - \frac{3\epsilon S (6-\epsilon(S+2))}{2(3+\epsilon(S-1))^2}, \tag{7.53}$$

que é exatamente igual a uma outra obtida na Eq. (7.43) não dependendo de ρ , momento quadrupolar da molécula nemática, e sendo completamente determinado pela excentricidade e pelo parâmetro de ordem escalar S . Abaixo, na Eq. (7.56), este mesmo tipo de relação será encontrada novamente na descrição da elasticidade dada por \hat{i}_2 . Por outro lado, comparando com esta propriedade, a relação $r_{31} = K_{33}/K_{11}$ também depende do parâmetro ρ , ou seja,

$$r_{31} = \frac{(3-2\rho S)(3-\epsilon(1+2S))}{3(3+\rho S) - \epsilon(3-S(3-\rho(1+2S)))} \tag{7.54}$$

Portanto, um gráfico dos dados experimentais de r_{21} em função de S pode ser usado para determinar os valores de ϵ . Posteriormente, após obtermos o valor de ϵ , um gráfico da razão r_{31} em função de S pode ser usado para determinar ρ . Como as constantes elásticas dependem de ϵ , ρ , C_B e S , uma simples determinação de C_B seria suficiente para determinar simultaneamente os valores de K_{11} , K_{22} , e K_{33} como uma função de S . Com esse

procedimento ocorreu a determinação das constantes elásticas, e os resultados estão representados graficamente na Figura 7.1. Os valores para S foram tomados do perfil do parâmetro de ordem universal de [62] enquanto os dados experimentais da elasticidade do MBBA foram tomados de [12]. Desta figura vemos que apesar da concordância das curvas K_{11} e K_{22} com os dados experimentais ser boa, o mesmo não ocorre com K_{33} . De fato, não existe qualquer concordância entre as duas curvas e, podemos afirmar sem dúvida que o uso de \hat{i}_1 para o cálculo de K_{33} é pobre. Apresentamos os resultados negativos do cálculo de K_{33} para exibir os motivos das diferenças entre as razões r_{21} e r_{31} já divulgados na literatura [24], tornando-se claro quando lembramos os procedimentos usados para chegar nos resultados da Figura 7.1. De acordo com as relações encontradas acima, através da excentricidade e e do parâmetro de ordem escalar S , a razão r_{21} está completamente determinada pela geometria do volume correlacionado. Por outro lado, a razão r_{31} também depende do momento quadrupolar da molécula nemática, tendo grande impacto de dependência a distância relativa das moléculas interagentes e suas orientações relativas. Este fato está contido na relação inicial do cálculo de K_{33} e, como vimos na Eq. (7.43), é exatamente o fato físico enfatizado por \hat{i}_2 e, conseqüentemente, é o melhor ponto de partida para o cálculo da energia elástica do que \hat{i}_1 .

Considere a elasticidade predita por \hat{i}_2 ,

$$\begin{aligned} F_2 &= F_0 + \int d^3r_1 d^3r_2 \alpha_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \langle r^i r^j I_{ij}(\hat{m}, \hat{n}) \rangle \\ &= F_0 + \frac{1}{2} \int d^3r_1 d^3r \alpha_2(\mathbf{r}) \left\{ \langle (AQ^{ij} + Bg^{ij}) Q_j^k(\mathbf{r}_1) (AQ^{mn} + Bg^{mn}) D_m D_n Q_{ki}(\mathbf{r}_1) \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (7.55)$$

onde usamos a Eq.(7.46). Seguindo o mesmo procedimento usado acima chegamos numa equação similar a Eq.(7.46), mas com as constantes elásticas dadas por:

$$\begin{aligned} K_{11}^{(2)} &= \frac{-c_1 S^2}{27(3 - \epsilon(1 - S))^3 (3 - \epsilon(1 + 2S))} \Omega_1, \\ K_{22}^{(2)} &= \left(1 - \frac{3eS}{2} \frac{(6 - \epsilon(S + 2))}{(3 + \epsilon(S - 1))^2} \right) K_{11}^{(2)}, \\ K_{33}^{(2)} &= \frac{-c_1 S^2}{27(3 - \epsilon(1 - S))^3} \Omega_3, \end{aligned} \quad (7.56)$$

onde

$$\begin{aligned}
\Omega_1 &= 9(3 - \epsilon(1 - S))^2(63 - 3\epsilon(14 + S) + \epsilon^2(7 + S + 10 S^2)) + \\
&\quad -3S(40\epsilon^4 S^4 + (3 - \epsilon)((3 - \epsilon)^3 + 52(3 - \epsilon)^2 \epsilon S + 33(3 - \epsilon)\epsilon^2 S^2 + 22\epsilon^3 S^3))\rho_1 + \\
&\quad -2S^2(4(3 - \epsilon)^3 + 18(3 - \epsilon)^2 \epsilon S - 3(3 - \epsilon)\epsilon^2 S^2 + 10\epsilon^3 S^3)(3 - \epsilon(1 + 2S))\rho_2 \\
\Omega_3 &= \{9(3 + \epsilon(-1 + S))(63 - 6\epsilon(7 + 2S) + \epsilon^2(7 + 4S(1 + 4 S))) + \\
&\quad -3S(-19(-3 + \epsilon)^3 + 48(-3 + \epsilon)^2 \epsilon S - 12(-3 + \epsilon)\epsilon^2 S^2 + 64\epsilon^3 S^3)\rho_1 + \\
&\quad 2S^2(-5(-3 + \epsilon)^3 + 42(-3 + \epsilon)^2 \epsilon S + 12(-3 + \epsilon)\epsilon^2 S^2 + 32\epsilon^3 S^3)\rho_2\} \quad (7.57)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
c_1 &= \int d^3r a_2(\mathbf{r}) (B(\mathbf{r}))^2 = \frac{1}{9} \int d^3r r^4 a_2(\mathbf{r}) \\
\rho_1 &= \frac{\int d^3r a_2(\mathbf{r}) B(\mathbf{r}) A(r)}{\int d^3r a_2(\mathbf{r}) (B(\mathbf{r}))^2} = 2 \frac{\int d^3r a_2(\mathbf{r}) r^2 r^m r^n Q_{mn}}{\int d^3r r^4 a_2(\mathbf{r})} \\
\rho_2 &= \frac{\int d^3r a_2(\mathbf{r}) (A(\mathbf{r}))^2}{\int d^3r a_2(\mathbf{r}) (B(\mathbf{r}))^2} = 4 \frac{\int d^3r a_2(\mathbf{r}) r^m r^n r^o r^p Q_{mn} Q_{op}}{\int d^3r r^4 a_2(\mathbf{r})} \quad (7.58)
\end{aligned}$$

Novamente, da razão entre as constantes elásticas, veremos que a razão r_{21} permanece igual àquela encontrada anteriormente. Entretanto, r_{31} depende de dois parâmetros ρ_1 e ρ_2 . Com uma rápida investigação percebemos que ρ_1 avalia o momento quadrupolar, portanto, similar ao parâmetro ρ encontrado na Eq. (7.52). Deste modo, somente ρ_2 é um novo parâmetro sendo quadrático no momento quadrupolar. Usando o procedimento descrito acima, ou seja, usamos r_{21} para determinar e e r_{31} para determinar ρ_1 e ρ_2 , encontramos o ajuste de curva para o MBBA, exibido na Figura 7.1.

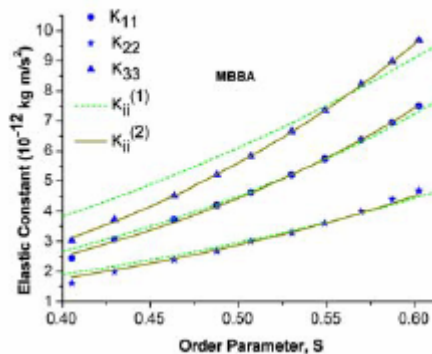


Figura 7.1 – Constantes elásticas do MBBA (4-methoxybenzylidene-4-n-butylaniline). Os pontos correspondem aos dados experimentais, como medido por Jeu et al [12]. As linhas pontilhada e contínua correspondem ao primeiro e segundo ajuste, respectivamente.

Na Figura 7.1 estão representadas as constantes elásticas do MBBA ("4-metrioxybenzylidene-4-n-butylaniline"). Os pontos correspondem aos dados experimentais, como medido por Jeu et al. [12]. A linha pontilhada corresponde ao ajuste obtido pelo uso da Eq. (7.52). Como explicado anteriormente, o ajuste foi realizado de modo que a razão r_{21} , Eq. (7.53), usada para obter o valor da excentricidade, $e = 0.78$, enquanto a razão r_{31} foi usada para obter o valor de $\rho = -2.51$, que é proporcional ao momento quadrupolar, Eq. (7.50). Utilizamos o valor $c_1 = -8.28$ para todas as constantes. O fato de que, diferentemente de r_{21} , r_{31} depende do momento quadrupolar, sugere que para se obter um melhor ajuste para K_{33} , o invariante usado para calcular as constantes elásticas deve conter o momento quadrupolar desde o início. O invariante i_2 atende a essa exigência, e o ajuste obtido por esse invariante está representado pela linha contínua sobre os dados experimentais. O ajuste foi obtido por um procedimento similar ao descrito acima, onde o parâmetro $e = 0.78$ foi obtido da razão r_{21} , $\rho_1 = -1.44$ e $\rho_2 = 8.27$ sendo determinado dos dados de r_{31} . Utilizamos $c_1 = -4.94$ para todas as constantes elásticas. Todas as quantidades são adimensionais.

Procedimentos análogos àqueles utilizados com os dados experimentais do MBBA, e já descritos acima, foram repetidos para outros compostos: "4-n-pentyl-4'-cianobiphenyl" (5CB), "4-n-heptyl-4'-cianobiphenyl" (7CB), "4-cyano-4'-n-heptyl-cyclohexanephenyl" (PCH7) e "4-n-heptyl-bicyclohexyl-4'-carbonitrile" (CCH7). Os ajustes destes dados experimentais são exibidos nas figuras abaixo.

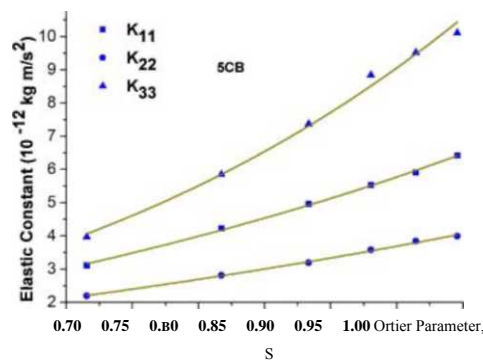


Figura 7.2 – Constantes elásticas do 5CB (4-n-pentyl-4'-cianobiphenyl). Os pontos correspondem aos dados experimentais, como medido por Chen et al. [11] e Wu et al. [63]. A linha contínua corresponde ao segundo ajuste.

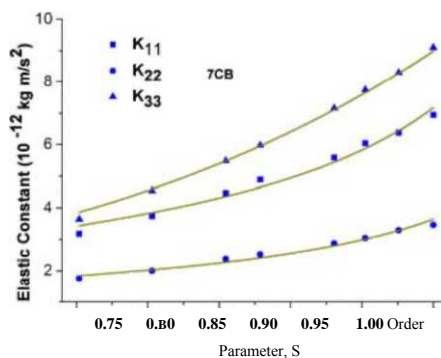


Figura 7.3 – Constantes elásticas do 7CB (4-n-heptyl-4-cyanobiphenyl). Os pontos correspondem aos dados experimentais, como medido por Madhusudana et al. [64] e Karat et al. [65]. A linha contínua corresponde ao segundo ajuste.

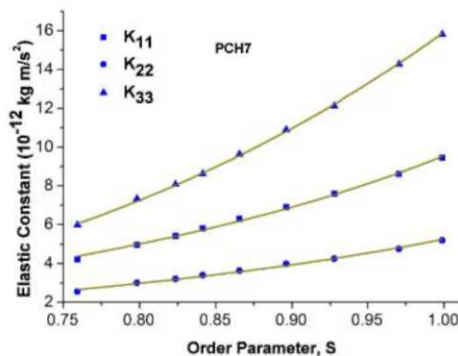


Figura 7.4 – Constantes elásticas do PCH7 (4-cyano-4'-n-heptyl-cyclohexanephenyl). Os pontos correspondem aos dados experimentais, como medido por Schad et al. [66] e Pohl et al. [67]. A linha contínua corresponde ao segundo ajuste.

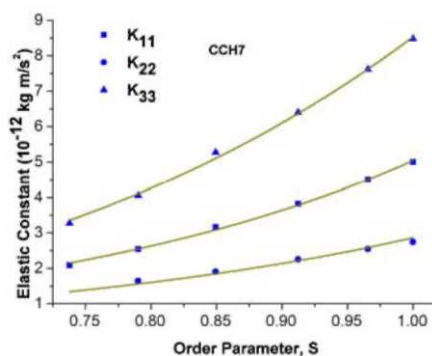


Figura 7.5 – Constantes elásticas do CCH7 (4-n-heptyl-bicyclohexyl-4'-carbonitrile). Os pontos correspondem aos dados experimentais, como medido por Schad et al. [66] e Eidenschink et al. [68]. A linha contínua corresponde ao segundo ajuste.

Um exame nas figuras exibidas (Figura 7.1, Figura 7.2, Figura 7.3, Figura 7.4 e Figura 7.5) indica a qualidade global de concordância que foi encontrada, sendo um indício de que nosso modelo fornece uma boa estimativa para as constantes elásticas não só do MBBA assim como para os compostos: 5CB, 7CB, PCH7 e CCH7. Os dados experimentais do PAA ("4-4'-azoxydianisole") não tiveram um bom ajuste pelo modelo proposto, por isso novos trabalhos já estão em andamento para que esclarecimentos sejam feitos a esse respeito.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÃO

Neste trabalho, mostramos que uma amostra de cristal líquido, com diretor de comportamento não homogêneo, pode ser descrita por uma variedade diferenciável não-plana com uma curvatura escalar não-nula determinada por dois tipos de texturas nemáticas usuais; os termos de "bend" e "saddle-splay", relacionados com a elasticidade nemática. Discutindo o significado físico do valor não nulo encontrado para a curvatura escalar R . Provamos que, de acordo com a aproximação de conexão afim, as texturas de uma amostra nemática não homogênea são descritas por uma superfície curva não-nula tridimensional, que por construção, são determinadas pelo perfil não homogêneo do diretor ao longo da amostra. Um R não nulo implica que não existe um sistema de coordenadas onde podemos fazer com que R se anule. Ou, usando uma analogia física, tal superfície não pode ser continuamente deformada para outra superfície com um diretor homogeneamente alinhado [38]. Esta é a razão das deformações elásticas "twist" e "splay" não estarem presentes em R . Como sabemos, a textura "twist" pode ser visualizada como uma sequência de planos nos quais, em cada um deles, o diretor está homogeneamente alinhados. No caso de uma textura "twist", uma simples rotação poderia restaurar o alinhamento homogêneo global, resultando numa curvatura nula. Igualmente, exceto para o ponto singular, a textura "splay" é plana, tendo uma curvatura nula. De fato, essa superfície teria a mesma topologia de um cone, que também possui uma curvatura nula e um ponto singular no pólo. Um aspecto interessante deste resultado é que expõe um contraste curioso entre a elasticidade e a curvatura de uma amostra nemática; existem deformações elásticas que não contribuem para a curvatura assim como existe termos de curvatura que não apresentam contribuição para a elasticidade. Isto é, enquanto os termos "splay" e "twist" contribuem para a elasticidade, eles não apresentam qualquer contribuição direta para a curvatura escalar e, por outro lado, enquanto o termo "saddle-splay" contribui somente para a energia elástica na superfície da amostra, sua contribuição para a curvatura é propagada ao longo da amostra nemática inteira.

Como consequência destes resultados, as regras de diferenciação foram modificadas com a introdução de uma métrica que realiza a hipótese de conexão afim: o potencial gerado por uma molécula nemática elipsoidal pode ser obtido pela distorção do potencial de uma molécula esférica, que é deformada até assumir a forma do elipsóide correspondente. Como a deformação de uma esfera para um elipsóide é descrita por um objeto que tem a mesma forma do parâmetro de ordem, pode ser tomado como um parâmetro de

ordem microscópico e , na passagem do parâmetro de ordem microscópico para um parâmetro de ordem macroscópico a métrica induzida torna-se dependente da temperatura. É importante destacar que a teoria presente se aplica a qualquer cristal líquido cujas moléculas interagem por meio de um potencial com simetria elipsoidal, mesmo se as moléculas não estão elipsoidalmente modeladas.

Como exercício de aplicação desse formalismo, aplicamos para a descrição dos termos de elasticidade do "bulk" de uma amostra nemática e , comparamos os resultados com os dados experimentais do: MBBA, 5CB, 7CB, PCH7 e CCH7. Com esse procedimento, descrevemos o comportamento dos dados com precisão e dos valores de alguns parâmetros estimados de nosso modelo, principalmente a excentricidade e e das moléculas nemáticas. Também obtivemos uma estimativa para o momento quadrupolar de interação.

Tão importante quanto a qualidade dos comportamento que obtemos, outros aspectos importantes da elasticidade nemática foram revelados. Primeiramente, nossa aproximação sugere uma explanação para as diferenças sistemáticas recentemente encontradas nos valores das razões $r_{21} = K_{22}/K_{11}$ e $r_{31} = K_{33}/K_{11}$ [24]. Enquanto r_{21} é completamente determinada pela excentricidade e e o parâmetro de ordem escalar S , a razão r_{31} também depende dos momentos quadrupolares das moléculas. Além disso, há algumas indicações na literatura de cristais líquidos [58] que, na ausência de uma transição nemático-sólido ou nemático-esmétrico, as constantes elásticas divergem quando $S \rightarrow 1$. Nosso resultado é consistente com esta suposição, mas somente com a condição adicional $e \rightarrow 1$, uma molécula nemática infinitamente fina.

Nosso resultado também sugere que um outro estudo da elasticidade nemática deve ser realizado de modo que os parâmetros, e , ρ_1 e ρ_2 acima sejam comparados para alguns compostos líquidos cristalinos. Embora esse estudo já esteja em execução não foi possível terminá-lo para que compusesse esse trabalho.

Finalmente, destacamos que o uso das fórmulas acima não são restritas ao cálculo das constantes elásticas. De fato, a aproximação de conexão afim foi originalmente introduzida no cálculo da viscosidade nemática, e a aproximação introduzida aqui pode ser usada para o cálculo de qualquer aspecto da dinâmica dos fluidos nemáticos.

REFERÊNCIAS

- [1] P.G.deGennes and J. Prost, *The Physics of Liquid Crystals*, (Clarendon Press, Oxford, 2nd ed., 1993).
- [2] D.Baalss and S.Hess, *Phys.Rev.Lett.* 57, 86 (1986).
- [3] D. Baalss and S. Hess, *Z. Naturforsch. A* 43, 662 (1988).
- [4] H.Sollich, D.Baalss, and S.Hess, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* 168, 189 (1989).
- [5] S.Hess, J. F.Swarzl, D., J.Baalss, *Phys. Condens. Matter* SA279 (1990)
- [6] H. Ehrentraut and S. Hess, *Phys. Rev. E* 51, 2203 (1995).
- [7] C. Sapiro and F. Moraes, *European Physical Journal E* 20 (2): 173-178 (2006).
- [8] C.W.Oseen, *Trans.Faraday Soc.* 92, 883 (1993).
- [9] H. Zocher, *Trans. Faraday Soc.* 92, 945 (1993).
- [10] F. C. Frank, *Discuss. Faraday Soc.* 25, 19 (1958).
- [11] G.P. Chen, Takezoe, H., Fukuda, A., *Liquid Crystals*, 5, 341 (1989).
- [12] W.H. de Jeu, W. A. P. Claassen. and M. J. Spruijt., *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* 37, 269 (1976).
- [13] N. V. Madhusudana, P. P. Karat and S. Chandrasekhar, *Pramana* 1(Suppl), 225 (1975).
- [14] H. Gruler, T.J.Sheffer and G. Meier, *Z. Naturforsch A* 27, 966 (1972).
- [15] S. Scharkowski, H. Schmiedel, R. Stannarius and E. Weishuhn, *Z. Naturforsch A* 45, 942 (1990).

- [16] M. P. Allen and D. Frenkel, *Physical Review A* 37, 1813 (1988).
- [17] M.A. Osipov and S. Hess, *Liq. Cryst.* 16, 845 (1994).
- [18] J. Nehring and A. Saupe, *J. Chem. Phys.* 54, 337 (1971); 56, 5527 (1972).
- [19] G. Vertogen, S.D. Flapper, and C. Dullemond, *J. Chem. Phys.* 76, 616 (1982).
- [20] G. Vertogen, *Phys. Lett.* 89A, 448 (1983).
- [21] G. Vertogen, *Physica A* 117, 227 (1983).
- [22] M. A. Osipov and S. Hess, *Mol. Phys.* 78, 1191 (1993).
- [23] M. A. Osipov and S. Hess, *Chem. Phys.* 99, 4181 (1993).
- [24] M. Simões and D. S. Simeão, *Phys. Rev. E* 73, 062702 (2006).
- [25] G. Barbero and L. R. Evangelista, *An elementary Course on the continuum theory for nematic liquid crystals* (World Scientific, Singapore, 2001).
- [26] C. Oldano and G. Barbero, *J. Phys. (France) Lett.* 46, 451 (1985).
- [27] C. Oldano and G. Barbero, *Phys. Lett.* 110A, 213 (1985).
- [28] G. Barbero and C. Oldano, *Nuovo Cimento D* 6, 479 (1985).
- [29] S. Stallinga, G. Vertogen, *Physical Review E* 53, 1692 (1996).
- [30] P. I. C. Teixeira, V.M. Pergamenschikov, T. J. Sluckin. *Molec. Phys.* 80, 1339 (1993).
- [31] N.H. Phuong, G. Germano, F. Schmid, *J. Chem. Phys.* 115, 7227 (2001).
- [32] A. Poniewierski and J. Stecki. *Molec. Phys.* 38, 1931 (1979).

- [33] W. M. Gelbart, A. Ben-Shaul, J. Chem. Phys. 77, 916 (1982).
- [34] H. Yokoyama. Phys. Rev. E 55, 2938 (1997).
- [35] J. Fukuda and H. Yokoyama. J. Chem. Phys. 115, 4930 (2001).
- [36] J. Fukuda and H. Yokoyama. J. Phys. Soc. Jpn. 71, 1463 (2002).
- [37] J. Fukuda, H. Yokoyama. Mol. Cryst. Liq. Cryst. Sci. Technol., Sect. A 366, 151 (2001).
- [38] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity* (Willey, New York, 1972).
- [39] L. R. Evangelista, I.Hibler and H.Mukai, Physical Review E 58, 3245 (1998).
- [40] G. Barbero and R. Barberi, in *Physics of Liquid Crystalline Materials*, edited by I. C. Khoo and F. Simoni (Gordon and Breach, New York, 1993).
- [41] G. Barbero and L. R. Evangelista, Phys. Rev. E 56, 6189 (1997).
- [42] G. Barbero, L. R. Evangelista, M. Giocondo, and S. Ponti, J. Phys. II 4, 1519 (1994).
- [43] P. J. Collings, *Liquid Crystals - Nature's Delicate Phase of Matter*, Adam Hilger, Bristol, (1990).
- [44] P. J. Collings and M. Hird, *Introduction to Liquid Crystals Chemistry and Physics*, Taylor & Francis Ltda, (1997).
- [45] S. Chandrasekhar, *Liquid Crystals*, Cambridge University, Cambridge, 2nd edition, (1977).
- [46] E. B. Mano e L.C. Mendes, *Introdução a Polímeros*, Editora Edgard Blücher Ltda, 2ª edição, (1999).
- [47] E. F. Gramsbergen, L. Longa and W. H. Jeu, Physics Reports 135, 195 (1986).

- [48] S. R. A. Salinas, *Introdução à Física Estatística*, EDUSP, São Paulo, (1997).
- [49] Manuel Schwartz, Simon Green, W. A. Rutledge, *Vector Analysis with Applications to Geometry and Physics*, Japan: Harper & Row John WeatherHill, (1964).
- [50] Carlos Edgard Harle, *Geometria Diferencial*, 9º Colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, 9/28 julho, IMPA, (1973).
- [51] Keti Tenenblat, *Introdução à Geometria Diferencial*. Brasília: Editora Universidade de Brasília, (1990).
- [52] M. R. Spiegel - *Análise Vetorial*. McGraw-Hill do Brasil, (1972).
- [53] H. Fleming, *Introdução aos tensores*. <http://www.fma.if.usp.br/fleming/tensor/tensor.html> (2002). Acessado em 07/02/2007.
- [54] A. I. Borisenko and I. E. Tarapov - *Vector and Tensor Analysis with applications*. Dover Publications: New York, (1968).
- [55] G. W. Gray, *The Molecular Physics of Liquid Crystals*, (Academic Press, London, 1979), Chap. 1.
- [56] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics* (Oxford University Press, New York, 1999).
- [57] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2nd ed. (Wiley, New York, 1985).
- [58] D. W. Berreman and S. Meiboom, *Phys. Rev. A* 30, 1955 (1984).
- [59] L. D. Landau, and E. M. Lifshitz, *Statistical Physics*, (Pergamon, London, 1959).
- [60] W. Maier and A. Saupe, *Z. Naturforsch.* 13A 565(1958); 14A, 882 (1959); 15A, 287 (1960).
- [61] M. Cyrillo and M. J. Menon, *Rev. Bras. Fis.* 18, 3 (1996). [62] M. Simões and D. S. Simeão, *Phys. Rev. E* 74, 051701 (2006). [63] S. T. Wu and C.S. Wu, *Phys. Rev. A* 42, 2219 (1990).

- [64] N. V. Madhusudana and R. Pratibha, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* 89, 249 (1982). [65] P. P. Karat and N. V. Madhusudana, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* 36, 51(1976).
- [66] Hp.SchadandM.A.Osman,*J.Chem.Phys.*75, 880 (1981).
- [67] L. Pohl, R. Eidenschink, J. Krause and D. Erdmann, *Phys. Lett. A* 60, 421 (1977).
- [68] R. Eidenschink, D. Erdmann, J. Krause and L. Pohl, *Angew. Chem.* 90, 133 (1978).
- [69] M. Simões and S. M. Domiciano, *Phys. Rev. E* 66, 061703 (2002). [70] M. Simões and S. M. Domiciano, *Phys. Rev. E* 68, 11705 (2003).
- [71] F. Reif, *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*, McGraw-Hill, California, (1985).
- [72] P. A. de Castro, A. J. Palangana and L. R. Evangelista, *Phys. Rev E* 60, 5, 6195, (1999).
- [73] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Theory of Elasticity - 3rd edition*, Course of Theoretical Physics, vol.7, Butterworth-Heinemann Ltda, (1986).
- [74] T. L. Hill, *An Introduction to Statistical Thermodynamics*, Dover Publications, Inc. New York, (1986).
- [75] D. C. A. Barbato, *Cálculo da elasticidade de cristais líquido nemáticos através de método da Geometria Diferencial*. Dissertação (Mestrado em Física) - Universidade Estadual de Londrina (2007).
- [76] S. M. Domiciano, *Relações universais entre os coeficientes de Miesowicz e estudo comparativo entre dados experimentais e previsões teóricas*. Tese (Doutorado em Física) - Universidade Estadual de Londrina (2003).