



UNIVERSIDADE  
ESTADUAL DE LONDRINA

---

FRANK PEREIRA BORTOLOTTI

**O SISTEMA LORAN  
COMO CONTEXTO PARA O ESTUDO DA HIPÉRBOLE**

---

Londrina  
2015

FRANK PEREIRA BORTOLOTTI

**O SISTEMA LORAN  
COMO CONTEXTO PARA O ESTUDO DA HIPÉRBOLE**

Dissertação de mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho.

Londrina  
2015

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da  
Universidade Estadual de Londrina**

**Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)**

B739s Bortolotti, Frank Pereira.

O sistema Loran como contexto para o estudo da hipérbole / Frank Pereira Bortolotti. – Londrina, 2015.  
131 f. : il.

Orientador: Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2015.  
Inclui bibliografia.

1. Matemática – Estudo e ensino – Teses. 2. Loran – Teses. 3. Navegação hiperbólica – Teses. 4. Geometria – Estudo e ensino – Teses. 5. Seções cônicas – Teses. I. Carvalho, Ana Márcia Fernandes Tucci de. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Sociedade Brasileira de Matemática. IV. Título.

CDU 51:37.02

FRANK PEREIRA BORTOLOTTI

**O SISTEMA LORAN  
COMO CONTEXTO PARA O ESTUDO DA HIPÉRBOLE**

Dissertação de mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

**BANCA EXAMINADORA**

---

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Ana Márcia Fernandes  
Tucci de Carvalho  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Neuza Teramon  
Universidade Estadual de Londrina - UEL

---

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Loreni Aparecida Ferreira Baldini  
Faculdade de Apucarana - FAP

Londrina, 21 de agosto de 2015.

*Dedico este trabalho primeiramente a DEUS,  
dáviva de amor, pois sem ele nada seria  
possível;  
A minha esposa ADRIANA e ao meu filho  
PEDRO, por todo apoio, amor, incentivo,  
compreensão, respeito e total confiança.*

## **AGRADECIMENTO (S)**

*Á Deus por iluminar meu caminho e me dar forças para seguir sempre em frente.*

*A minha esposa ADRIANA, pelo seu incentivo, apoio, paciência, compreensão, por acreditar em mim, por me amar. Você é muito importante para meu sucesso neste trabalho.*

*Ao meu filho PEDRO, por deixar meus dias mais felizes e mesmo sem saber, me incentivar a evoluir e estudar novamente.*

*A meus queridos pais Francisco (falecido) e Ilza (falecida), pela educação que me deram em vida, carrego sempre comigo os seus ensinamentos.*

*Agradeço a minha orientadora, Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Ana Márcia Fernandes Tucci de Carvalho, não só pela constante orientação, mas sobretudo pela sua amizade, compreensão, paciência, pelos ensinamentos e direcionamento deste trabalho.*

*Ao professor Dr Túlio Oliveira de Carvalho que permitiu a aplicação da atividade proposta em sua turma de Engenharia Elétrica e por sua contribuição com a atividade.*

*À professora Maria Aparecida da Silva de Carvalho e ao Colégio Estadual Vicente Rijo – E.E.F.M.P., que permitiram a aplicação da atividade proposta no Ensino Médio.*

*A todos os professores e colegas do Programa de Mestrado em Matemática Profissional da Universidade Estadual de Londrina.*

*Expresso ainda, minha profunda gratidão à CAPES, pela concessão da ajuda financeira aos estudos.*

*Aos professores e aos funcionários do Departamento de Matemática, obrigado pela dedicação e respeito.*

*À banca examinadora pelas valiosas sugestões e trabalho dedicado a avaliação do presente estudo.*

*E a todos aqueles que de alguma forma contribuíram para esta dissertação tornar-se realidade, o meu MUITO OBRIGADO.*

*A mente que se abre a uma nova ideia jamais  
voltará ao seu tamanho original.*

*Albert Einstein(1879-1955).*

BORTOLOTTI, Frank Pereira. **O Sistema LORAN como contexto para o estudo da hipérbole**. 2015. 136 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

## RESUMO

Este trabalho tem o objetivo principal de responder a seguinte pergunta: O sistema LORAN pode ser usado como contexto para o estudo da hipérbole? Para verificar a abordagem do estudo da hipérbole, vamos aplicar uma atividade elaborada com vários cenários, utilizando fatos históricos e aplicações reais, que tem como característica o aumento gradativo do nível dos cenários, em termos de complexidade, para a construção do sistema de radionavegação LORAN e conseqüentemente a construção do conhecimento matemático de hipérbole. Como objetivos secundários vamos verificar as habilidades geométricas dos alunos como, leitura de mapas, orientação espacial, reconhecer propriedades geométricas básicas entre outras, seguindo as orientações dos PCN. Na introdução discutimos o contexto histórico do ensino da Geometria no Brasil e seu impacto no conhecimento matemático até os dias atuais, em seguida aprofundamos a discussão ao conhecimento específico das secções cônicas e sua aplicabilidade usual. No segundo capítulo expomos o conteúdo das secções cônicas utilizando a geometria analítica e estudo de vetores, primeiramente estudamos cada cônica separadamente e em seguida, através da equação geral do segundo grau, de forma conjunta. Os resultados, apresentados no quinto capítulo deste trabalho, que descrevemos e analisamos das atividades aplicadas no Ensino Médio e no Ensino Superior, mostram um crescimento nos conhecimentos e nas habilidades dos alunos em Geometria e Secções Cônicas.

**Palavras-chave:** Cônicas. Hipérbole. LORAN. Aplicações.

BORTOLOTTI, Frank Pereira. **The LORAN System as a context for the study of hyperbole**. 2015. 136 p. Dissertation (Master's degree in Mathematics in National Network) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

### **ABSTRACT**

This work has the main objective to answer the following question: The LORAN system can be used as a context for the study of hyperbole? To check the hyperbole of study approach, we apply an elaborate activity with various scenarios using historical facts and real applications, which is characterized by the gradual increase in the level of the scenarios in terms of complexity, to build the navigation system LORAN and consequently the construction of mathematical knowledge of hyperbole. As secondary objectives check the geometrical skills of students as reading maps, spatial orientation, recognize basic geometric properties among others, following the directions of the NCP. In the introduction, we discussed the historical context geometry teaching in Brazil and its impact on mathematical knowledge to the present day, and then we deepen the discussion to the specific knowledge of conic sections and their usual applicability. In the second chapter we expose the contents of conic sections using analytic geometry and the study of vectors, each conical first studied separately and then through the general equation of the second degree, jointly. The results, presented in the fifth chapter of this work, we describe and analyze the activities implemented in High School and Higher Education, show an increase in knowledge and skills of students in Geometry and Conic Sections.

**Key words:** Conic. Hyperbole. LORAN. Applications.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Elipse, Hipérbole e Parábola.....	29
Figura 2: Translação de Eixos.....	31
Figura 3: Rotação de Eixos – Semelhança de Triângulos.....	32
Figura 4: Rotação de Eixos – Vetores.....	36
Figura 5: Definição de Elipse.....	37
Figura 6: Distância dos Focos aos Vértices da Elipse (Eixo Maior). ....	38
Figura 7: Distância dos Focos aos Vértices da Elipse (Eixo Menor) ....	38
Figura 8: Elementos Notáveis da Elipse.....	40
Figura 9: Excentricidade da Elipse.....	40
Figura 10: Elipse com Centro na Origem e Eixo Maior sobre o Eixo x.....	41
Figura 11: Elipse com Centro na Origem e Eixo Maior sobre o Eixo y.....	43
Figura 12: Elipse com Eixo Maior Paralelo ao Eixo x. ....	44
Figura 13: Elipse com Eixo Maior Paralelo ao Eixo y. ....	45
Figura 14: Definição de Hipérbole.....	47
Figura 15: Distância dos Focos aos Vértices da Hipérbole. ....	47
Figura 16: Eixo Imaginário da Hipérbole. ....	48
Figura 17: Elementos Notáveis da Hipérbole. ....	49
Figura 18: Excentricidade da Hipérbole ....	50
Figura 19: Hipérbole com Centro na Origem e Eixo Real sobre o Eixo x.....	51
Figura 20: Hipérbole com Centro na Origem e Eixo Real sobre o Eixo y.....	52
Figura 21: Hipérbole com Eixo Real Paralelo ao Eixo x.....	54
Figura 22: Hipérbole com Eixo Real Paralelo ao Eixo y.....	54
Figura 23: Assíntotas da hipérbole.....	56
Figura 24: Definição de Parábola.....	57
Figura 25: Elementos Notáveis da Parábola.....	59
Figura 26: Parábola com Eixo de Simetria sobre o Eixo x. ....	60
Figura 27: Parábola com Concavidade Positiva ( $p > 0$ ).....	61
Figura 28: Parábola com Concavidade Negativa ( $p < 0$ ). ....	62
Figura 29: Parábola com Eixo de Simetria sobre o Eixo y. ....	63
Figura 30: Parábola com Diretriz Paralela ao Eixo y.....	64
Figura 31: Parábola com Diretriz Paralela ao Eixo x.....	67
Figura 32: Mapa Asiático da Segunda Guerra Mundial.....	72

Figura 33: Cadeia de transmissores LORAN em funcionamento.....	74
Figura 34: Transmissor T1 e Ondas de Rádio.....	77
Figura 35: Dois transmissores e suas respectivas ondas de rádio.....	79
Figura 36: Linhas de Posição (LDP's) Geradas Por Dois Transmissores. ....	81
Figura 37: Quadriculado Hiperbólico - Sistema com Três Transmissores.....	84
Figura 38: Localização do Navio no Quadriculado Hiperbólico. ....	85
Figura 39: Opiniões sobre a atividade aplicada no Ensino Médio.....	92
Figura 40: Exemplos de respostas do cenário 1, questão 1 no Ensino Médio.....	93
Figura 41: Exemplos de respostas do cenário 1, questão 2 no Ensino Médio.....	93
Figura 42: Exemplos de respostas do cenário 2, questão 1 no Ensino Médio.....	94
Figura 43: Exemplos de respostas do cenário 2, questão 2 no Ensino Médio.....	95
Figura 44: Exemplos de respostas do cenário 2, questão 3 no Ensino Médio.....	95
Figura 45: Exemplos de respostas do cenário 2, questão 5 no Ensino Médio.....	95
Figura 46: Exemplos de respostas do cenário 3, questão 1 no Ensino Médio.....	96
Figura 47: Exemplos de respostas do cenário 3, questão 2 no Ensino Médio.....	97
Figura 48: Exemplos de respostas do cenário 3, questão 3 no Ensino Médio.....	97
Figura 49: Exemplos de respostas do cenário 4, questão 1 no Ensino Médio.....	98
Figura 50: Exemplo de resposta do cenário 4, questão 2 no Ensino Médio.....	98
Figura 51: Exemplos de respostas do cenário 4, questão 3 no Ensino Médio.....	99
Figura 52: Opiniões da atividade aplicada na Licenciatura em Matemática.....	100
Figura 53: Exemplos de respostas no cenário 1, questão 1 na Licenciatura em Matemática.....	101
Figura 54: Exemplos de respostas no cenário 1, questão 2 na Licenciatura em Matemática.....	101
Figura 55: Exemplos de respostas no cenário 2, questão 1 na Licenciatura em Matemática.....	102
Figura 56: Exemplos de respostas no cenário 2, questão 2 na Licenciatura em Matemática.....	102
Figura 57: Exemplos de respostas no cenário 2, questão 3 na Licenciatura em Matemática.....	103
Figura 58: Exemplo de resposta no cenário 2, questão 4 na Licenciatura em Matemática.....	103
Figura 59: Exemplos de respostas no cenário 2, questão 5 na Licenciatura em Matemática.....	104

Figura 60: Exemplos de respostas no cenário 3, questão 2 na Licenciatura em Matemática.....	105
Figura 61: Exemplos de respostas no cenário 4, questão 1 na Licenciatura em Matemática.....	106
Figura 62 Exemplo de resposta no cenário 4, questão 2 na Licenciatura em Matemática.....	106
Figura 63: Exemplos de respostas no cenário 4, questão 3 na Licenciatura em Matemática.....	107
Figura 64: Opiniões sobre a atividade aplicada na Engenharia Elétrica. ....	108
Figura 65: Exemplos de respostas no cenário 1, questão 1 na Engenharia Elétrica. ....	109
Figura 66: Exemplos de respostas no cenário 1, questão 2 na Engenharia Elétrica. ....	109
Figura 67: Exemplos de respostas no cenário 2, questão 1 na Engenharia Elétrica. ....	110
Figura 68: Exemplos de respostas no cenário 2, questão 2 na Engenharia Elétrica. ....	110
Figura 69: Exemplos de respostas no cenário 2, questão 3 na Engenharia Elétrica. ....	111
Figura 70: Exemplos de respostas no cenário 2, questão 4 na Engenharia Elétrica. ....	111
Figura 71: Exemplos de respostas no cenário 2, questão 5 na Engenharia Elétrica. ....	112
Figura 72: Exemplos de respostas no cenário 3, questão 1 na Engenharia Elétrica. ....	113
Figura 73: Exemplos de respostas no cenário 3, questão 2 na Engenharia Elétrica. ....	113
Figura 74: Exemplos de respostas no cenário 3, questão 3 na Engenharia Elétrica. ....	114
Figura 75: Exemplos de respostas no cenário 4, questão 1 na Engenharia Elétrica. ....	114
Figura 76: Exemplo de respostas no cenário 4, questão 2 na Engenharia Elétrica.	115
Figura 77: Exemplos de respostas no cenário 4, questão 3 na Engenharia Elétrica. ....	115

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Comparação entre Cenários Certos e Errados no Ensino Médio. ....	116
Gráfico 2: Comparação entre Cenários Certos e Errados na Licenciatura em Matemática.....	116
Gráfico 3: Comparação entre Cenários Certos e Errados na Engenharia Elétrica..	117

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Níveis de Van Hiele para Compreensão em Geometria.....	20
Quadro 2: Apresentação das Secções Cônicas no Brasil. ....	28
Quadro 3: Resumo do Estudo das Seções Cônicas. ....	71
Quadro 4: Tabela que representa a resposta do cenário 2, questão 4. ....	80
Quadro 5: Tabela que representa a resposta do cenário 3, questão 1. ....	82

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> .....	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>ESTUDO DAS CÔNICAS</b> .....	<b>23</b>
2.1	HISTÓRICO .....	23
2.2	AS SECÇÕES CÔNICAS .....	28
2.2.1	Transformações De Coordenadas.....	30
2.2.1.1	Translação DE EIXOS .....	30
2.2.1.2	Rotação de eixos.....	32
2.2.2	Elipse (do grego ελλειψιζ, falta, omissão).....	36
2.2.2.1	Elementos da elipse. ....	39
2.2.2.2	Equação canônica da elipse.....	41
2.2.3	Hipérbole (do grego υπερβολη, excesso, exagero).....	46
2.2.3.1	Elementos da hipérbole. ....	48
2.2.3.2	Equação canônica da hipérbole. ....	50
2.2.4	Parábola (do grego παραβολη, comparação igualdade).....	57
2.2.4.1	Elementos da parábola.....	58
2.2.4.2	Equação canônica da parábola. ....	59
2.2.5	Equação Geral Das Cônicas .....	68
<b>3</b>	<b>DESCRIÇÃO DA ATIVIDADE PROPOSTA</b> .....	<b>72</b>
3.1	OBJETIVOS .....	75
3.2	DESCRIÇÃO DOS CENÁRIOS.....	77
3.2.1	Cenário 1 .....	77
3.2.2	Cenário 2 .....	78
3.2.3	Cenário 3 .....	81
3.2.4	Cenário 4 .....	83
<b>4</b>	<b>JUSTIFICATIVAS</b> .....	<b>86</b>
4.1	NO ENSINO MÉDIO.....	86
4.2	NO ENSINO SUPERIOR .....	88
4.2.1	Licenciatura Em Matemática .....	88
4.2.2	Engenharia Elétrica .....	90

<b>5</b>	<b>ANÁLISES</b> .....	92
5.1	DO ENSINO MÉDIO .....	92
5.1.1	Cenário 1 .....	93
5.1.2	Cenário 2 .....	94
5.1.3	Cenário 3 .....	96
5.1.4	Cenário 4 .....	97
5.2	DO ENSINO SUPERIOR .....	99
5.2.1	Licenciatura Em Matemática .....	99
5.2.1.1	Cenário 1 .....	100
5.2.1.2	Cenário 2 .....	101
5.2.1.3	Cenário 3 .....	104
5.2.1.4	Cenário 4 .....	105
5.2.2	Engenharia Elétrica .....	107
5.2.2.1	Cenário 1 .....	108
5.2.2.2	Cenário 2 .....	110
5.2.2.3	Cenário 3 .....	112
5.2.2.4	Cenário 4 .....	114
5.3	GRÁFICOS COMPARATIVOS DAS TURMAS PESQUISADAS .....	116
	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	118
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	121
	<b>ANEXOS</b> .....	124
	ANEXO 1 – ATIVIDADE DE GEOMETRIA ANALÍTICA: CONSTRUÇÃO DE UM SISTEMA DE RADIONAVEGAÇÃO .....	125
	ANEXO 2 – TERMOS DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO .....	130

## 1 INTRODUÇÃO

Os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais, 2000) articulam o conhecimento matemático no Ensino Médio em três temas estruturadores, Álgebra, Geometria e Análise de Dados, que devem ser desenvolvidos de forma concomitante ao longo dos três anos desse nível de ensino. A Geometria tem como uma de suas justificativas, a representação e visualização do mundo real como capacidade essencial na construção e compreensão de modelos matemáticos e de outras ciências, aqui a Geometria é subdividida em geometria plana, espacial, métrica e analítica como unidades temáticas.

Ainda justificando o ensino de Geometria, temos sua aplicabilidade atual e, com isto em mente, o que mais chama a atenção é o enfoque dado à Geometria Analítica que, segundo os PCN, tem a função de trabalhar os conceitos, propriedades e elementos geométricos de forma algébrica para que os estudantes do Ensino Médio possam resolver problemas geométricos através de equações, sistema de equações e inequações. Assim, observa-se uma integração da Geometria e da Álgebra, porém sem desconsiderar os aspectos exclusivos da Geometria, a parte intuitiva, os conceitos primitivos, as definições, proposições e teoremas, todavia, não observamos uma preocupação em apresentar suas demonstrações.

Quando comparamos a história do ensino de todos os conteúdos que fazem parte da Matemática, no Brasil, observamos que o ensino de Geometria é deficiente, visto que a Geometria está ausente ou presente de forma ínfima nas salas de aula.

Segundo Pavanello (1993, p.7), há um abandono gradual e mundial no ensino de Geometria nas últimas décadas, é uma tendência preocupante que está ligada a questões educacionais. No Brasil temos algumas causas, como discutiremos a seguir, para este abandono. Ao desenvolver o conteúdo de Matemática é de fundamental importância o ensino de Geometria na formação do aluno. Vamos analisar alguns aspectos do ensino de Geometria na história do Brasil e chegar até os dias de hoje com o atual panorama deste importante conteúdo.

O ensino escolar brasileiro tem início no Brasil quando este era ainda colônia de Portugal com os Jesuítas e sua tradição clássico-humanista, neste período da história a Matemática era uma simples ferramenta, e o ensino de Geometria, Física e Astronomia era considerado inútil. Isto fica claro no trecho a seguir:

O estudo das ciências especulativas como a geometria, a astronomia e a física é um divertimento vão. Todos esses conhecimentos estéreis e infrutíferos são inúteis por eles mesmos. Os homens não nascem para medir linhas, para examinar a relação entre ângulos e para empregar seu tempo em considerar os diversos movimentos da matéria. Seu espírito é muito grande, a vida muito curta, seu tempo muito precioso para se ocupar de tão pequenas coisas [...] (DAINVILLE apud VALENTE, 2007, p.35).

Com o aumento da população no Brasil, ainda colônia, houve também um aumento nas escolas jesuíticas com o objetivo principal de atender a sociedade e propiciar uma educação nos moldes europeus e, claro, um segundo objetivo que era o de difundir a fé católica formando padres e missionários. Em 1573, os jesuítas inauguram o Colégio do Rio de Janeiro, que começa a lecionar as quatro operações elementares de Matemática.

Logo após a expulsão dos jesuítas do Brasil e por ordem da Carta Régia de 19 de agosto de 1738, há a implantação de o ensino militar que trouxe consigo o estudo da geometria para utilização na guerra.

As relações entre a "arte da guerra" e a matemática são remotíssimas. Platão indignou-se e reprovou os trabalhos realizados por Eudócio e Archytas, acusando-os de arrumarem a geometria a partir da qual eles vinham construindo instrumentos chamados *mesógrafos*, pontos de partida da mecânica iniciada por Archimedes. Platão reprovava a passagem das noções abstratas e inteligíveis da geometria para os objetos sensíveis por meio da manipulação material com a utilização de um longo e grosseiro trabalho manual. E desde essa época que a mecânica se separa da geometria e permanece, durante longo tempo, desprezada pela filosofia, tornando-se um ramo da arte militar (DHOMBRES apud VALENTE, 2007, p.39).

Aos poucos a Matemática foi avançando e somente em 1757, na Bahia, o seu ensino se tornou um curso de faculdade, ainda nos moldes europeus da época, cujo foco dos trabalhos em Geometria era os Elementos de Euclides.

Entre os anos de 1738 a 1765 um dos professores mais atuantes foi o engenheiro militar Jose Fernandes Pinto Alpoim, a ele coube à produção dos dois primeiros livros didáticos no Brasil, o primeiro *Exame de Artilheiros (1744)* que continha Aritmética, Geometria e Artilharia e o segundo *Exame de Bombeiros (1748)* que continha Geometria e Trigonometria, onde a Geometria tinha o papel de conteúdo mais importante a ser trabalhado. A Geometria destes livros didáticos era dividida em Geometria Especulativa, ligada a filosofia, e Geometria Prática, ligada a mecânica, como descrita pelo professor jesuíta Manoel de Campos, em nenhuma destas divisões era considerado demonstrações ou proposições.

No livro "*Elementos de Geometria plana e sólida segundo a ordem de Euclides, príncipe dos geômetras, acrescentados com três uteis appendices etc. Para uso da real Aula da Sphera do Collegio de Sancto Antão. Lisboa, na Offic. Rita Cassiana, 1735*" escrito por Manuel de Campos, jesuíta e professor de matemática, que teve o mérito de ser o primeiro tradutor para o português de parte dos Elementos de Euclides, encontramos a seguinte observação sobre as "divisões" da geometria: "Duas são as Geometrias; huma Practica e outra Especulativa: a Practica, de onde nasceo a Especulativa, só trata das medidas vulgares, e próprias dos usos humanos; como são Distancias, Alturas, Profundidades, Níveis, Aqueductos, Areas, Corpos etc. A Especulativa, que foi a que promoveo, e aperfeiçãoou a Practica, estende-se, como disse, a toda a Quantidade continua. A Especulativa consta principalmente de 3 partes, a saber, Elementos de Euclides, Esféricos de Theodosio, e Cônicos de Apollonio [...]". (VALENTE, 2007, pag. 39)

No segundo tratado, o de Geometria, Alpoim (1744) deixa claro qual geometria vai ensinar e menciona a divisão da geometria em especulativa e prática. "Especulativa é a que mostra as propriedades de tudo o que é comensurável. A prática é a que dá as regras com que dirige as operações para que saiam certas e desta é que havemos de tratar [...]" (ALPOIM, 1744, p. 35). Ou seja, seguindo esta ideia, não terá proposições geométricas e tão poucas demonstrações de propriedades geométricas.

O jesuíta Manuel de Campos e o próprio Alpoim descrevem essa divisão da geometria, porém a descrição de Alpoim usa a descrição de Manuel Campos como referência, pois este tem uma melhor explicação sobre esta divisão.

Em 1767, foram introduzidos no Brasil os livros de Bernard Forest Béliidor de título "*Geometria Prática de Béliidor*", estes livros possuíam um tratamento

diferente da Geometria, apresentando demonstrações e aplicações práticas dos teoremas e proposições. Já em 1792 é criada a Academia de Fortificação e Desenho no Rio de Janeiro e nesta instituição temos agora um curso de Matemática de seis anos e a introdução de um novo título “*Aritmética de Bézout*”.

Estes dois livros introduzidos no Brasil não traziam em suas páginas o formalismo e nem o rigor matemático para as teorias apresentadas, da mesma forma que o livro escrito por Alpoim, a preocupação era com o saber técnico. Curiosamente ao separar os estudos nestes dois títulos, começa a divisão da Matemática em dois conteúdos: a Geometria e a Aritmética.

Com a invasão de Portugal por Napoleão, a família real vem para o Brasil. Com isto, o nível de escolaridade aumenta e em 1827 surgem os primeiros vestibulares e cursos preparatórios, neste cenário a Matemática deixa de ser um conhecimento técnico e passa a ser conteúdo de uma organização escolar voltada teoricamente para o povo.

No final do século XIX, há diversas obras brasileiras, entre elas a de Cristiano Benedito Ottoni, que integram a Aritmética, Geometria e Álgebra na mesma publicação.

Não podemos esquecer que, no início do século XX, o Brasil é um país agrícola e dessa forma há pouco interesse em estudos e pesquisas científicas. Apesar dos livros trazerem uma Geometria com definições, teoremas e demonstrações, para a maioria da população o ensino priorizava o utilitarismo.

Há diversos episódios da história que influenciaram o ensino da matemática neste período, como o manifesto dos pioneiros da Educação Nova de 1932, as constituições de 1934 e 1937, a Lei orgânica do ensino secundário de 1942 que divide o ensino em ginásial e secundário clássico ou secundário científico. Com todas estas intervenções, a Geometria continua a ser estudada de forma intuitiva e prática no Ensino Ginásial, deixando a forma dedutiva para o Ensino Secundário.

No início da década de 60, surge um movimento chamado Matemática Moderna, que tenta unir a Matemática ensinada nas escolas e a Matemática científica, com isto a Matemática passa a priorizar Álgebra e Conjuntos.

A forma com que a Geometria é apresentada nos livros didáticos utiliza os teoremas como postulados e dá ênfase à linguagem da Teoria dos Conjuntos.

Há neste momento uma Geometria algébrica, esse enfoque torna mais difícil o trabalho dos professores em sala de aula e então surge aqui o primeiro grande empecilho ao ensino da Geometria no Brasil. Dessa forma “a proposta da Matemática Moderna de algebrizar a Geometria não vingou no Brasil, mas conseguiu eliminar o modelo anterior, criando assim uma lacuna nas nossas práticas pedagógicas, que perdura até hoje” (LORENZATO, 1995, p.4).

Nesta época, década de 60, os professores, em sua grande maioria, não detêm conhecimentos geométricos necessários ao seu ensino, isso faz com que passem a não ensinar Geometria aos seus alunos, enfatizando assim a Álgebra.

A maioria dos professores de matemática não domina esse assunto, o que acaba por fazer com que muitos deles deixem de ensinar geometria sob qualquer enfoque. Em vez de geometria [...], enfatiza-se a álgebra. (PAVANELLO, 1993, pág. 13).

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação, a LDB 5592/71, facilita o abandono da Geometria ou qualquer outro conteúdo, pois permite ao professor preparar seu próprio conteúdo a trabalhar, escolhendo o que melhor lhe convier. Então, o conteúdo de Geometria fica esquecido ou passa a figurar apenas no Ensino Secundário, mesmo assim como último conteúdo a ser trabalhado. Nos livros didáticos, a Geometria passa a ser apresentada como último capítulo, separada dos outros assuntos da Matemática, como Aritmética, e desligada das suas aplicações ou de sua história.

A falta de preparo dos professores e a liberdade que a lei de diretrizes de bases da educação de 1971 dava às escolas quanto à decisão sobre os programas das diferentes disciplinas, fez com que muitos professores de Matemática, sentindo-se inseguros para trabalhar com a Geometria, deixasse de incluí-la em sua programação. Os que continuaram a ensiná-la o faziam de modo precário. Os próprios livros didáticos passaram a parte de Geometria para o final do livro, o que fez com que durante o Movimento da Matemática Moderna a Álgebra tivesse um lugar de destaque. (SOARES, 2001, p. 11).

Atualmente, vivemos num círculo vicioso, os professores que não tiveram uma formação adequada de Geometria em sua graduação, deixam de ensiná-la, com isso, há um prejuízo enorme na educação de nossos alunos, que deixam de aprender um conteúdo imprescindível para a resolução de problemas, na percepção espacial, na visualização do mundo que os rodeia e também importante nas outras áreas do conhecimento humano.

A Geometria está presente nas Artes, na Física, na Astronomia entre outros ramos do conhecimento e mais recentemente na tecnologia das imagens e jogos. Lorenzato (2006, p.59) afirma que “por mais conhecimentos sobre outras partes da matemática que alguém possuir, eles não serão suficientes para resolver questões que demandarem percepção e raciocínio geométrico”.

Pavanello (1993, p.15) argumenta que, vivemos uma dicotomia no ensino de Geometria representada pela escola pública e pela escola privada, esta última continua a ensinar Geometria enquanto a escola pública deixou de lado este importante conteúdo matemático, podemos assim pensar como uma separação de classes, escola da elite onde se aprende Geometria e escola do povo onde a Geometria ficou como conteúdo complementar.

O desconhecimento da Geometria torna incompleta a interpretação do mundo que nos cerca, a Matemática fica por vezes sem sentido e as ideias totalmente abstratas, a Geometria está em todo lugar, basta tentar enxergá-la, o nosso dia-a-dia está repleto de congruências, medições, proporcionalidades, formas que usamos para nos expressar, serve de apoio a diversas áreas do conhecimento, nos ajuda à leitura de mapas, gráficos e do mundo artístico. O ensino de Geometria na atualidade está em uso na manipulação de imagens, nos diagnósticos por imagens e nos projetos de engenharia, entre outras aplicações.

Devemos então promover a “ressureição” da Geometria, passando pelos meios didáticos pedagógicos e indo para os meios políticos e administrativos para que este importante conteúdo volte a ser lecionado com frequência, de modo consistente e contínuo nas escolas.

Um passo importante para resolver a questão do abandono do ensino da Geometria, após o movimento da Matemática Moderna, foi dado com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação, a Lei nº 9394/96 e também a edição dos Parâmetros Curriculares Nacionais (MEC-SEB, 2000). Mais recentemente, os PCN + (MEC-SEMTEC, 2002), que são orientações educacionais complementares aos PCN, também oferecem contribuições.

Junto à nova Lei, os PCN passam a nortear a educação no Brasil definindo metas e servindo como referência à Educação Básica, que engloba o Ensino Fundamental e Médio, perfazendo um total de onze anos. Recentemente houve um consenso no Ensino Fundamental e este passa a ter então nove anos, logo a Educação Básica perfaz doze anos de estudo. Os Parâmetros Curriculares Nacionais vêm subsidiar a elaboração dos currículos escolares.

As diretrizes e sugestões que são trazidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais espelham uma mudança na filosofia de ensino e no modelo de aprendizagem e também uma mudança em vários conteúdos a serem trabalhados.

Observa-se uma preocupação em “o que ensinar” e principalmente no “como ensinar”, bem como o processo de organização do ensino e a maneira de avaliar o que foi ensinado e um destaque dado ao ensino da Geometria e sua utilização na resolução de problemas, legitimando sua aplicabilidade.

Nos PCN a Matemática é apresentada em um grande grupo chamado de Ciências da Natureza, que engloba Física, Química e Biologia, e Matemática e suas tecnologias. Os PCN apresentam uma justificativa para cada disciplina, métodos de como ensinar e para que ensinar cada conteúdo, novamente deixa-se livre aos professores e profissionais da educação a escolha, dentro do conjunto dos conteúdos, do que ensinar e sugere ainda o corte de alguns conteúdos como vemos neste trecho: *“para evitar a quantidade excessiva de informações, é preciso fazer um recorte, usando alguns critérios orientadores deste processo de seleção de temas”* (PCN+, p.116), e cita a Geometria em suas orientações.

Uma vez que a abordagem tradicional se restringe à métrica, áreas e volumes, estes conteúdos se tornam insuficientes para explicar os fenômenos da natureza, as formas nas construções arquitetônicas, as linhas nas pinturas artísticas ou esculturas. O ensino da Geometria no Ensino Médio deve possibilitar que essas questões possam ser discutidas, analisadas e interpretadas pelos alunos.

Cabe aqui expor a contribuição do modelo de Van Hiele que concebe vários níveis de aprendizagem e desenvolvimento em Geometria. O modelo de Van Hiele teve origem nas teses de doutorado do casal Dina Van Hiele-Geldof e seu marido Pierre Van Hiele, na Holanda em 1957, tendo como principal característica a divisão em cinco níveis de pensamento e compreensão geométrica (Reconhecimento, Análise, Abstração, Dedução, Rigor).

O nível inicial é o do reconhecimento, neste nível os alunos reconhecem as figuras geométricas pela aparência, sem identificar propriedades claramente. No segundo nível acontece a análise das propriedades e a descrição correta de cada propriedade. No terceiro nível há ordenação das propriedades com curtas deduções e a separação em classes por propriedade. O próximo nível, o quarto na hierarquia proposta pelo modelo de Van Hiele é o da dedução significativa, axiomas, teoremas e provas matemáticas. No quinto e último nível temos a capacidade de comparar sistemas baseados em diferentes axiomas. É neste nível que as geometrias não euclidianas são compreendidas pelos alunos. No Ensino Médio, com muito trabalho, é possível alcançar esses níveis do modelo de Van Hiele.

Vale ressaltar que, com o uso adequado de metodologias que não as convencionais, há trabalhos como o de Carvalho & Carvalho (2011) que comprovam que é possível discutir os conceitos de geometria não euclidiana com os alunos já no Ensino Fundamental.

O casal Van Hiele concluiu, ao final de suas teses, que o motivo que leva ao fracasso o ensino de Geometria é o de se apresentar um conteúdo com nível acima do que o aluno está preparado para assimilar, sem uma metodologia adequada e/ou alternativa.

A formulação desse sistema de níveis ocorreu enquanto Pierre Van Hiele estudava alguns dos trabalhos de Piaget. Durante esse estudo ele verificou, como fizera Piaget, que os problemas ou tarefas que são apresentados às crianças, frequentemente, requerem um conhecimento de vocabulário ou propriedades além do nível de pensamento da criança (FANTINEL apud SANT'ANA, 2009, p.21).

Na tabela a seguir, apresenta-se um resumo referente aos níveis do modelo de Van Hiele.

**Quadro 1:** Níveis de Van Hiele para Compreensão em Geometria.

<b>Nível de Van Hiele</b>	<b>Características</b>	<b>Exemplo</b>
<b>1º Nível</b> Reconhecimento	Reconhecimento, comparação e nomenclatura das figuras geométricas por sua aparência global.	Classificação de recortes de quadriláteros em grupos de quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios.
<b>2º Nível</b> Análise	Análise das figuras em termos de seus componentes, reconhecimento de suas propriedades e uso dessas propriedades para resolver problemas.	Descrição de um quadrado através de propriedades: 4 lados iguais, 4 ângulos retos, lados opostos iguais e paralelos.
<b>3º Nível</b> Abstração	Percepção da necessidade de uma definição precisa, e de que uma propriedade pode decorrer de outra; Argumentação lógica informal e ordenação de classes de figuras geométricas.	Descrição de um quadrado através de suas propriedades mínimas: 4 lados iguais, 4 ângulos retos. Reconhecimento de que o quadrado é também um retângulo.
<b>4º Nível</b> Dedução	Domínio do processo dedutivo e das demonstrações; Reconhecimento de condições necessárias e suficientes	Demonstração de propriedades dos triângulos e quadriláteros usando a congruência de triângulos
<b>5º Nível</b> Rigor	Capacidade de compreender demonstrações formais; Estabelecimento de teoremas em diversos sistemas e comparação dos mesmos.	Estabelecimento e demonstração de teoremas em uma geometria finita.

**Fonte:** Nasser e Sant'Ána, 2004, p. 5.

Dessa forma vemos que os métodos e esforços feitos para com o ensino da Geometria no Ensino Médio poderão resultar em uma grande frustração já que, segundo o modelo de Van Hiele, a Geometria deve ser apresentada de forma a seguir uma hierarquia de níveis, se seguirmos a teoria piagetiana, começando no

ensino fundamental, ou seja, a Geometria no Ensino Médio, ainda de acordo com os PCN, depende da Geometria articulada no ensino fundamental, já que depende da maturidade do aluno para assimilar os conceitos.

No Brasil o trabalho de Van Hiele ainda é desconhecido da maioria dos professores do Ensino Fundamental e Médio.

Devemos procurar alcançar novos níveis, que possibilitem perceber características e descrever propriedades, construir definições, acompanhar demonstrações e até comparar sistemas axiomáticos. Um caminho possível é a Geometria Analítica, que possibilita estas ações, com conceitos de eixos, coordenadas, plano, espaço entre outros. Estes conceitos podem fazer com que o nível de ensino de Geometria evolua do inicial.

Vivemos em um mundo tecnológico com avanços a todo instante e uma disciplina que pode interagir com este universo de tecnologia é a Geometria e mais especificamente a Geometria Analítica. Relatos históricos mostram que Arquimedes já estudava Geometria com instrumentos de aplicação tecnológica da época antes de Cristo.

O ensino usual de Geometria apresenta aos alunos um conteúdo que não possibilita a curiosidade, nem a investigação, a exigência torna-se a de memorizar as definições, teoremas e proposições para depois reescrevê-las em testes ou provas, assim os alunos perdem a oportunidade de construir seus próprios conceitos e compará-los com os existentes, ou mesmo criticá-los, afinal saber um conceito ou definição não indica uma compreensão do mesmo.

Educadores e os próprios estudiosos de Educação Matemática tem forte objeção ao ensino de Geometria de forma usual e direta sem se preocupar em enfatizar o processo de descoberta que envolve este conteúdo. Freudenthall critica fortemente, há muito tempo, esta prática.

A Geometria geralmente estudada no Ensino Médio traz consigo um sentimento de inutilidade, os alunos não têm a cultura de admirar o belo da matemática, não tem gosto pelos desafios e não veem aplicação a realidade deles, os resultados exatos e enfeitados tem um toque de perfeição.

[...] A maioria das definições não é preconcebida, mas sim o toque final da atividade organizadora. Esse privilégio não deveria ser roubado da criança... O bom ensino da geometria pode significar muitas coisas: aprender a organizar um assunto e aprender o que é organizar; aprender a conceituar e o que é conceituar; aprender a definir e o que é uma definição. Isso significa deixar os alunos compreenderem o porquê certas organizações, conceitos e definições são melhores do que outros. (FREUDENTHALL, 1973, p.418).

Ora a realidade de nossas vidas está repleta de imperfeições e isso faz com que o aluno rejeite este conteúdo reduzindo ainda mais sua importância na educação. Em alguns casos em que se ensina Geometria Analítica nas escolas, esta tem como conteúdo principal as ideias de Descartes e os estudiosos que viveram na época de sua morte.

Raramente vemos a Geometria Analítica, que incorpora o conceito de vetor, sendo estudada. A Geometria através dos vetores torna-se mais concreta em suas propriedades e seus conceitos, assim seu estudo e propriedades podem ser aplicados a outros conteúdos, como Física, Química e Engenharia, e de forma natural à realidade e as imperfeições da vida.

Neste trabalho, no capítulo dois, trataremos do conteúdo de Geometria denominado Seções Cônicas, um pouco de sua história e a sua abordagem usual, com e sem vetores. No capítulo três descrevemos em detalhes a atividade com os cenários, perguntas e respostas. O capítulo quatro tem as justificativas para cada turma pesquisada. E no capítulo cinco vamos analisar a atividade, elaborada utilizando o sistema de radionavegação LORAN como contexto, aplicada no Ensino Médio e também no Ensino Superior.

Vamos, teoricamente, “refazer” os passos de Alfred Lee Loomis na sua criação do Sistema de Navegação LORAN, que usa como base de seu funcionamento a definição de hipérbole e suas características principais. Nessa “jornada” vamos incorporar os conhecimentos e habilidades em Geometria na educação dos nossos alunos.

## 2 ESTUDO DAS CÔNICAS

### 2.1 HISTÓRICO

Há um período da história considerado como a fase áurea da Matemática na antiguidade, este começa com a escola pitagórica (IV a.C.), passa por Euclides e Arquimedes e tem seu término com Apolônio (II a.C.). Justamente nesse período da história é que ocorre praticamente todo o desenvolvimento geométrico das assim atualmente chamadas Secções Cônicas. “A própria palavra Matemática (do grego *Mathematike*) surgiu na escola de Pitágoras para significar um conjunto de pensamentos determinados com provas dedutivas” (VENTURI, 2003, p.11).

*A Trissecção do Ângulo, a Quadratura do Círculo e a Duplicação do Cubo* passaram para a História como “*Os Três Problemas Clássicos*” e geraram uma infinidade de estudos que ajudaram a promover avanços na Geometria. Entretanto, a civilização dos gregos clássicos ou helenísticos desapareceu sem que as soluções fossem encontradas. Somente no século XIX, passados mais de vinte e três séculos, os matemáticos modernos provaram que as soluções não foram encontradas porque as construções são impossíveis com régua não graduada e compasso.

A importância destes problemas reside no fato de terem constituído, ao longo dos tempos, uma fonte muito rica de ideias e processos matemáticos, que foram sendo criados nas sucessivas tentativas de resolução. Isto, aliado à progressiva organização lógica da Matemática que culminou com a publicação dos Elementos de Euclides no final do século IV a.C., determina a importância desta época para o estudo da Matemática grega e da sua herança, decisivas na formação do pensamento matemático ocidental.

O que ocorreu com os três problemas clássicos é um exemplo da perseverança dos matemáticos e da necessidade que, às vezes, se tem de esperar

por séculos ou mesmo milênios de evolução da Matemática, até que uma questão seja definitivamente esclarecida.

Bordallo (2011 p.3) afirma que as Cônicas tiveram seu primeiro estudo na resolução do problema de duplicação do cubo pelos gregos clássicos ou helenísticos, sabe-se muito pouco sobre Menaecmus (380 – 320 a.C.) que foi o primeiro a estudar as cônicas, o pouco que sabemos se deve a Eutócio de Ascalão (480 – 540 d.C.), matemático grego, que escreveu vários comentários sobre os trabalhos de Arquimedes e as Cônicas de Apolônio. Eutócio afirma que Menaecmus encontrou duas soluções para o problema da duplicação do cubo, uma usando hipérbole retangular e uma parábola e outra usando a intersecção de duas parábolas. Para Menaecmus cada cônica tinha seu cone correspondente e estes cones eram diferentes entre si, ou seja, neste enfoque as Cônicas são tratadas de forma fragmentada. A seguir temos Aristeu (370 – 300 a.C.), matemático grego contemporâneo de Euclides, também chamado de Aristeu “o *Velho*” por Pappus de Alexandria (IV d.C.) que creditou a utilização de seu trabalho Cinco Livros sobre “*Solid Loci*” que se perdeu com o tempo. Neste trabalho Aristeu faz um estudo importante sobre Cônicas.

Logo após, vem Euclides com sua obra mais famosa **Os Elementos** (III a.C.) com seus 13 livros, sendo os 6 primeiros dedicados a Geometria Plana Elementar, por este motivo seu nome foi associado à Geometria. Suas ideias contrariadas durante o século XIX, com relação ao 5º postulado, por Riemann, Lobatchevsky e Bolyai possibilitaram o nascimento das geometrias não euclidianas. Porém, muitos escritos de Euclides desapareceram, entre os quais “As Cônicas”, que segundo Venturi (2003, p.14) tratava de esfera, cilindro, cone, elipsoide entre outros.

Na obra Os Elementos, de Euclides, encontramos o método de aplicações de área da geometria grega que foi amplamente usado por Apolônio. Segundo os gregos, “aplicar” uma figura poligonal consiste em construir a figura dada de maneira que um segmento de reta dado seja um de seus lados, seguindo alguns requisitos pré-estabelecidos. Os gregos usavam três tipos de aplicação de áreas, a aplicação exata é chamada de “parábola”, a aplicação com falta é uma “elipse” e aplicação com excesso é uma “hipérbole”.

Uma *aplicação parabólica* [...] consiste em aplicar a um segmento ( $DE$ ) um paralelogramo ( $DEFG$ ) com área igual à de uma figura dada ( $S$ ), com um ângulo especificado ( $ABC$ ). [...] Em sua formulação geral, uma *aplicação elíptica* ou *com falta* consiste em aplicar a um segmento de reta  $AB$ , um paralelogramo, com ângulos dados e área igual a um polígono  $C$ . Mas isto deve ser feito de tal maneira que o que falta para completar a figura, ou seja, para que ela cubra todo o segmento  $AB$ , seja um paralelogramo semelhante a um paralelogramo dado ( $D$ ). [...] Uma *aplicação hiperbólica* ou *com excesso* consiste em aplicar a um segmento de reta  $AB$ , um paralelogramo, com um ângulo dado, com área igual à de um polígono ( $C$ ) dado, e de tal maneira que ele exceda o segmento  $AB$  por um paralelogramo semelhante a um paralelogramo dado ( $D$ ) (ROQUE, 2012, p.159 e 160).

Seguindo este período da história antiga, temos Arquimedes (287 – 212 a.C.) com uma extensa produção original contando com, entre outras, Geometria Plana.

Apolônio (262 – 194 a.C.) nasceu em Perga, sul da Ásia, e recebeu o título de grande geômetra, atribuído por seus contemporâneos. Chegaria a rivalizar com Euclides se suas obras não tivessem se perdido com o tempo. O que sabemos destas obras vem dos relatos e descrições de Pappus de Alexandria (IV d.C.). Deduzimos hoje que os tratados de Apolônio traziam uma avançada Matemática para sua época, chegando a trabalhar com diversas ideias do que chamamos de Geometria Analítica atualmente.

Seu trabalho sobre Secções Cônicas, com oito livros, ultrapassou tudo que havia sido escrito até então sobre o assunto, destes oito livros apenas um se perdeu com o tempo. Dentre os feitos de Apolônio, introduziu os nomes elipse e hipérbole para as Cônicas, foi o primeiro a mostrar que de um único cone podemos obter a elipse, a parábola e a hipérbole, apenas variando a inclinação do plano de secção, nesta situação observamos a hipérbole como uma curva de dois ramos, também utilizou um sistema de “eixos” (na verdade um par de diâmetros conjugados), hoje conhecemos estes eixos como cartesianos, já o nome parábola deve-se a Arquimedes. “Os nomes “parábola”, “elipse” e “hipérbole” tem origem no método euclidiano de aplicação de áreas [...], exposto nas proposições 15 a 19 do Livro VI dos Elementos de Euclides” (ROQUE, 2012, P.161).

Para Boyer (1974, p.111), “foi a matemática pura de Apolônio que permitiu cerca de 1800 anos mais tarde, os Principia de Newton; este por sua vez deu condições aos cientistas de hoje para que a viagem de ida e volta a Lua fosse possível”. Os tratados de Apolônio influenciaram também os trabalhos de Ptolomeu, Kepler, Galileu entre outros.

Venturi (2003 p.20) cita que “Leibniz se fez oportuno: Quem entende Arquimedes e Apolônio, admirara menos as realizações dos homens mais célebres de épocas anteriores”.

Apolônio unificou as Cônicas obtendo-as de um único cone com secções circulares, antes dele a elipse era construída num cone acutângulo, a parábola em um cone retângulo e a hipérbole em um cone obtusângulo, a visão unificada destas curvas criou uma família de curvas, as Cônicas. Esta abordagem perdurou até o século XVII.

Pierre de Fermat (1601-1665), inspirado nos estudos de Apolônio (matemático grego do séc. II a.C.), estabeleceu o princípio fundamental da Geometria Analítica, segundo o qual uma equação do 1.º grau, no plano, representa uma reta e uma equação do 2.º grau, no plano, uma cônica. Mostrou de uma forma bastante sistemática a equação geral de uma reta, de uma circunferência e as equações mais simples de uma parábola, elipse e hipérbole. (VENTURI, 2003, pag. 41).

É fato que o avanço dado a Geometria Plana e Espacial pelos matemáticos helenísticos foi extraordinário, mas faltou em seus escritos uma notação algébrica adequada. Com base na Geometria grega e no desenvolvimento algébrico na Europa do século XVI, Fermat (1601-1665) concluiu em 1629 a obra, “*Ad locos planos et sólidos isagoge*” (Introdução aos lugares planos e sólidos), que representa o ponto inicial da Geometria Analítica, cabendo a ele a descoberta das equações da circunferência e da reta, as equações simples da elipse, da parábola e da hipérbole e também aplicou transformações para reduzir a equação do segundo grau a uma forma mais simples.

Segundo Venturi (2003, p.21), o sistema cartesiano, por mérito, deveria ser chamado sistema fermatiano, pois as obras de Descartes (1596 – 1650) não contém eixos perpendiculares, eixos oblíquos e nem equação da reta.

Descartes tem no seu terceiro apêndice (La Géométrie) de sua obra Discurso do Método (Discours de la Méthode – 1637), uma aplicação da Álgebra em alguns problemas geométricos, porém não se assemelha a Geometria Analítica que vemos hoje.

O tratamento estritamente focal considera cada tipo de curva separadamente, começando com propriedades características e introduzindo cada curva a partir de sua definição focal. Este tratamento que está presente atualmente no ensino de Cônicas e que fragmentou novamente este assunto aconteceu no século XVII quando Philippe de La Hire (1640 – 1718) escreveu seu trabalho “*Nouvelle méthode en géométrie pour les sections et les superficies coniques*” de 1673, no qual considera as curvas separadamente com suas propriedades características.

Em 1647, Grégoire de Saint-Vincent (1584 – 1667) deduz, em sua obra, “*Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum conii*”, as propriedades das curvas por meio de suas equações.

O matemático belga Germinal Pierre Dandelin (1794 – 1847), já no século XIX, mostra em um teorema que as secções do cone que geram as Cônicas coincidem com suas definições focais, essa é uma tentativa de unificar novamente as Cônicas, porém no ensino moderno essa unificação está perdida. Foi o Marques de L’Hopital (1661 – 1704) que colocou as Cônicas em uma base moderna de estudo, combinando os métodos sintéticos e analíticos, “Ele escreveu um tratado sobre as cônicas analíticas, que foi publicado em 1707, e durante quase um século foi considerado uma obra de referência sobre o assunto” (BALL, 1901, p.308).

Os livros didáticos que trazem as cônicas de forma unificada apresentam as três curvas em separado e após juntas, da mesma forma que L’Hopital o fez e se tornou padrão por muitos anos.

Podemos observar no quadro 2 como foi a evolução do ensino de Geometria, em particular, das Secções Cônicas no Brasil, e como eram apresentadas geometricamente e analiticamente, unificada ou fragmentada.

**Quadro 2:** Apresentação das Secções Cônicas no Brasil.

PERÍODO	ANOS	FORMA COMO AS CÔNICAS ERAM ENSINADAS
1892 à 1930	1892	Geometricamente unificada
	1893 e 1894	Geometricamente fragmentada
	1895 à 1898	Geometricamente unificada e Analiticamente fragmentada
	1899 à 1914	Geometricamente unificada
	1915 à 1918	Geometricamente fragmentada
	1919 à 1928	Não há Cônicas
	1929	Geometricamente unificada
	1930	Não há Cônicas
REFORMA CAMPOS	1931 à 1941	Geometricamente unificada e Analiticamente fragmentada
REFORMA CAPANEMA	1942 à 1950	Geometricamente unificada e Analiticamente fragmentada
AJUSTE DE 51	1951 à 1960	Geometricamente unificada
M.M.M.	1961 à 1979	Analiticamente unificada

Fonte: Bordallo, 2011, p.11.

## 2.2 AS SECÇÕES CÔNICAS

As Cônicas são resultado da interseção “de uma mesma superfície cônica circular, não necessariamente reta, cortada por planos de inclinações diferentes” (ROQUE, p.161). Apolônio considerou um cone de duas folhas (Figura 1), que utilizamos até hoje. Com isto as Cônicas passam a ser caracterizadas em função de como o plano corta as geratrizes das folhas do cone.

[...] se o plano corta todas as geratrizes sobre uma mesma folha do cone obtemos uma elipse; se o plano é paralelo a uma das geratrizes obtemos uma parábola; e se o plano corta duas folhas do cone, obtemos uma hipérbole. (ROQUE, 2012, p.162)

Dessa forma, conseguimos a unificação desta família de curvas em torno do título de Secções Cônicas. Porém se o plano corta a superfície no vértice,

obtemos o que é comumente chamado de cônica degenerada, esta pode ocorrer de três formas, podemos ter um ponto, uma reta ou um par de retas.

Embora a circunferência também possa ser obtida por esse processo, ela nada mais é do que uma elipse, com distância focal igual a zero.

**Figura 1:** Elipse, Hipérbole e Parábola.



**Fonte:** Delgado, 2013, p.98.

Podemos encontrar diferentes formas de definir estas curvas, porém nas definições abaixo, por questão de afinidade, utilizamos como referência o livro “O Cálculo com Geometria Analítica” de Louis Leithold publicado em 1994.

**Elipse** é o conjunto dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante. Os pontos fixos são chamados de **focos**. (LEITHOLD, 1994, p.586)

Uma **hipérbole** é o conjunto de pontos no plano, cujo valor absoluto da diferença das distâncias a dois pontos fixos é uma constante. Os dois pontos fixos são denominados **focos**. (LEITHOLD, 1994, p.594)

Vale ressaltar que esta curva, a hipérbole, é constituída por dois "ramos".

Uma **parábola** é o conjunto de pontos em um plano, equidistantes de um ponto e de uma reta fixos. O ponto fixo é chamado de **foco** e a reta fixa é chamada de **diretriz**. (LEITHOLD, 1994, p.578)

Utilizamos como referências, Delgado (2013), Giovanni (2005), Lehmann (1985), Smole (2010) e Venturi (2003), para o desenvolvimento das Cônicas a seguir. Em algumas dessas referências a definição das curvas Cônicas

utiliza lugar geométrico, que de acordo com Neto (2013, p.90), é o conjunto de pontos que tem uma determinada propriedade específica.

Dada uma propriedade  $P$  relativa a pontos do plano o **lugar geométrico** (abreviamos LG) dos pontos que possuem a propriedade  $P$  é o subconjunto  $L$  do plano que satisfaz as duas condições a seguir: (a) Todo ponto de  $L$  possui a propriedade  $P$ . (b) Todo ponto do plano que possui a propriedade  $P$  pertence a  $L$ . (NETO, 2013, p.90)

### 2.2.1 Transformações De Coordenadas

Antes de estudarmos as curvas cônicas é conveniente introduzir a noção de transformação de coordenadas, dessa forma teremos a possibilidade de simplificar as equações e os cálculos que poderão aparecer.

Uma vez conhecida a equação da curva ou as coordenadas de um de seus pontos em um sistema de referência, com essas transformações, podemos associar esses pontos e a equação da curva a um novo referencial. Esse novo sistema é obtido, sem que o gráfico ou forma da curva seja afetado, por meio de uma rotação de eixos ou translação de eixos, que são transformações geométricas de um sistema de coordenadas.

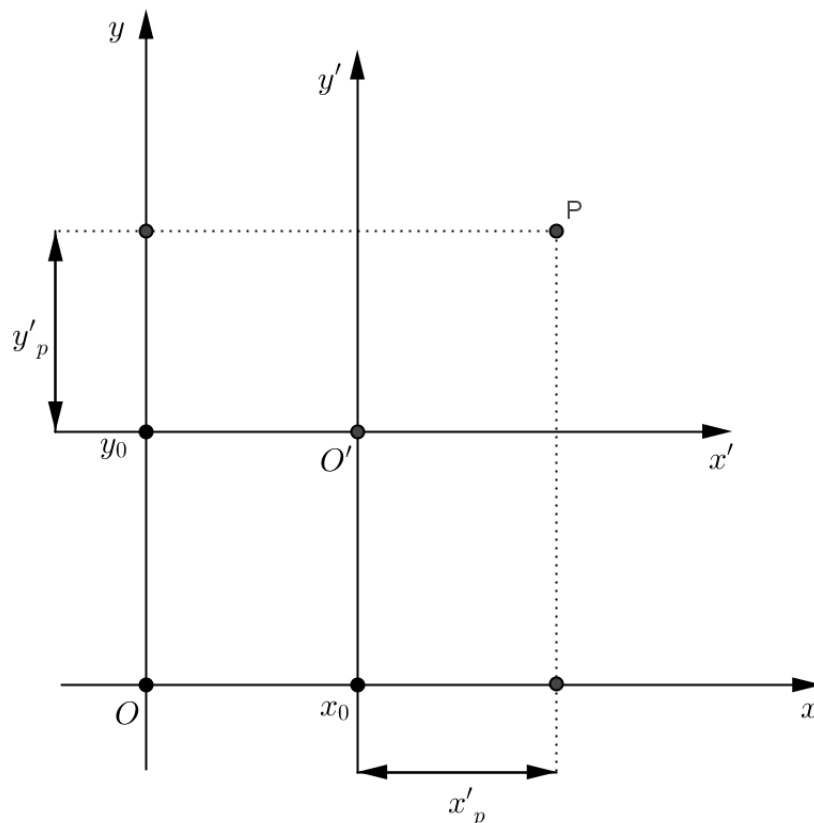
Lehmann (1985, p.113) define: *“Uma transformação é uma operação por meio da qual uma relação, expressão ou figura é mudada em outra de acordo com uma dada lei”*. Esta lei é expressa, na maioria das vezes, por equações de transformação.

#### 2.2.1.1 Translação de eixos

Considere no plano cartesiano  $xOy$  um ponto  $O' = (x_0, y_0)$ , vamos introduzir um novo sistema de tal forma que  $O'$  seja a origem das coordenadas e

$O'x'$  tenha a mesma direção e sentido de  $Ox$  e, por sua vez,  $O'y'$  tenha a mesma direção e sentido de  $Oy$ , dessa forma conseguimos um sistema  $x'O'y'$ . Se em ambos os sistemas conservarmos as unidades de medida então conseguimos um novo sistema  $x'O'y'$  por *translação* do sistema “antigo”  $xOy$  (Figura 2).

**Figura 2:** Translação de Eixos.



**Fonte:** Venturi, 2003, p.24 (modificado).

Seja agora um ponto  $P$  no plano construído dessa forma, este ponto têm coordenadas  $P = (x_p, y_p)$  em relação ao sistema  $xOy$  e coordenadas  $P = (x'_p, y'_p)$  em relação ao novo sistema  $x'O'y'$ , assim obtemos as equações de translação:

$$x'_p = x_p - x_0$$

$$y'_p = y_p - y_0$$

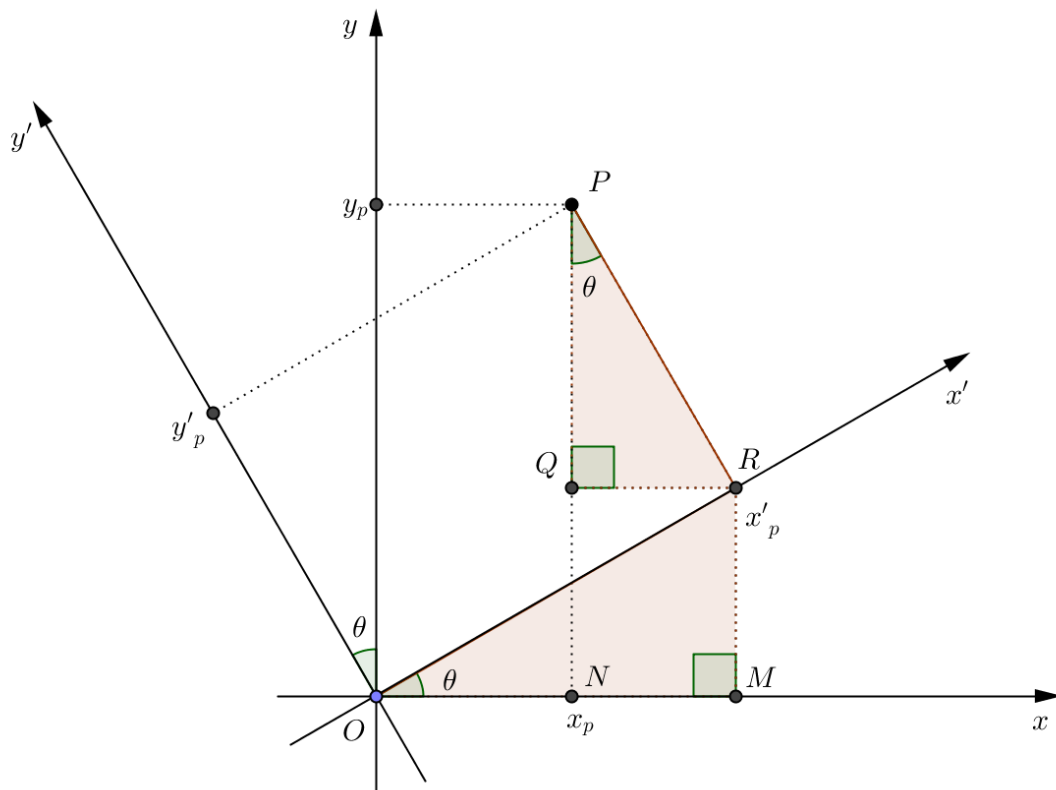
### 2.2.1.2 Rotação de eixos

Considere o plano cartesiano  $xOy$ , vamos manter fixa a origem  $O$  e rotacionar os eixos  $Ox$  e  $Oy$  sob um mesmo ângulo  $\theta$ , no sentido anti-horário. Dessa forma obtemos um novo sistema de coordenadas  $x'Oy'$  por rotação do “antigo” sistema  $xOy$ .

Um ponto  $P$  no plano tem coordenadas  $(x_p, y_p)$  em relação ao sistema  $xOy$  e coordenadas  $(x'_p, y'_p)$  em relação ao novo sistema  $x'Oy'$ . Vamos então obter as equações de rotação de eixos.

Primeiramente vamos obter as equações de rotação usando semelhança de triângulos e razões trigonométricas, esse método é adequado ao aluno do Ensino Médio, caso não tenham domínio sobre o conteúdo de vetores.

**Figura 3:** Rotação de Eixos – Semelhança de Triângulos.



**Fonte:** Elaborada pelo Autor.

Observe (Figura 3), que os ângulos  $R\hat{O}M$  e  $R\hat{P}Q$  são iguais, por semelhança de triângulos, caso AAA, então vamos escrever as coordenadas do ponto  $P$  no sistema  $xOy$  em termos de segmentos.

$$\begin{cases} x_p = \overline{OM} - \overline{NM} \\ y_p = \overline{NQ} + \overline{QP} \end{cases}$$

Observe que o segmento  $\overline{MR} = \overline{NQ}$  e  $\overline{QR} = \overline{NM}$  pois o quadrilátero  $MRNQ$  é um retângulo, então do triângulo retângulo  $OMR$ , retiramos as seguintes razões trigonométricas:

$$\cos \theta = \frac{\overline{OM}}{x'_p} \Rightarrow \overline{OM} = x'_p \cdot \cos \theta$$

$$\sen \theta = \frac{\overline{MR}}{x'_p} \Rightarrow \overline{NQ} = x'_p \cdot \sen \theta$$

E do triângulo retângulo  $PQR$ , retiramos as seguintes razões trigonométricas:

$$\cos \theta = \frac{\overline{QP}}{y'_p} \Rightarrow \overline{QP} = y'_p \cdot \cos \theta$$

$$\sen \theta = \frac{\overline{QR}}{y'_p} \Rightarrow \overline{NM} = y'_p \cdot \sen \theta$$

Agora substituindo os segmentos no sistema inicial temos as chamadas equações de rotação de eixos:

$$\begin{cases} x_p = x'_p \cdot \cos \theta - y'_p \cdot \sen \theta \\ y_p = x'_p \cdot \sen \theta + y'_p \cdot \cos \theta \end{cases}$$

O sistema de equações de rotação comumente é expresso na forma matricial, chamada matriz de rotação e identificada aqui por  $M_\theta$ , possibilitando de forma rápida a passagem de um sistema ortogonal para outro.

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_p \\ y'_p \end{pmatrix}$$

Observamos que a matriz  $M_\theta$  é invertível pois  $M_\theta \cdot (M_\theta)^t = I$ , onde  $I$  denota a matriz identidade, então multiplicando ambos os lados da igualdade por  $(M_\theta)^t$ , tal que,

$$\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_p \\ y'_p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Assim podemos escrever as coordenadas do sistema novo em função do sistema original:

$$\begin{pmatrix} x'_p \\ y'_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Neste caso, a matriz  $M_\theta$  é a matriz de passagem das coordenadas em  $x'Oy'$  para  $xOy$  e sua transposta  $(M_\theta)^t$  é a matriz de passagem de coordenadas em  $xOy$  para  $x'Oy'$ .

Tendo conhecimento do conteúdo de vetores podemos encontrar as equações de rotação de eixos usando outro método, descrito abaixo.

Na figura 4, o vetor  $\overrightarrow{OP}$  e o vetor  $\overrightarrow{O'P}$  são iguais, pois  $O \equiv O'$ , sejam os vetores unitários linearmente independentes (*L.I.*) do sistema de coordenadas  $xOy$ ,  $e_1 = (1,0)$  e  $e_2 = (0,1)$ , a base canônica de  $\mathfrak{R}^2$ , considere também os vetores unitários do sistema de coordenadas  $x'Oy'$ ,  $v_1$  e  $v_2$  ortogonais entre si, então podemos escrever que:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{O'P} \Rightarrow (x_p \cdot e_1 + y_p \cdot e_2) = (x'_p \cdot v_1 + y'_p \cdot v_2)$$

Vamos agora obter um sistema com duas equações fazendo o produto interno  $\langle . \rangle$  em ambos os termos da igualdade acima, por  $e_1$  e depois por  $e_2$ . Então:

$$\begin{cases} x_p \cdot \langle e_1, e_1 \rangle + y_p \cdot \langle e_2, e_1 \rangle = x'_p \cdot \langle v_1, e_1 \rangle + y'_p \cdot \langle v_2, e_1 \rangle \\ x_p \cdot \langle e_1, e_2 \rangle + y_p \cdot \langle e_2, e_2 \rangle = x'_p \cdot \langle v_1, e_2 \rangle + y'_p \cdot \langle v_2, e_2 \rangle \end{cases}$$

Utilizando a definição de produto interno de Delgado (2013, p.37).

Temos que:

$$\langle e_1, e_1 \rangle = 1,$$

$$\langle e_2, e_1 \rangle = 0,$$

$$\langle v_1, e_1 \rangle = \|v_1\| \cdot \|e_1\| \cdot \cos \theta = \cos \theta,$$

$$\langle v_2, e_1 \rangle = \|v_2\| \cdot \|e_1\| \cdot \cos(90^\circ + \theta) = -\text{sen } \theta$$

Procedendo de forma análoga para os cálculos do produto interno com  $e_2$  e substituindo as igualdades no sistema, encontramos:

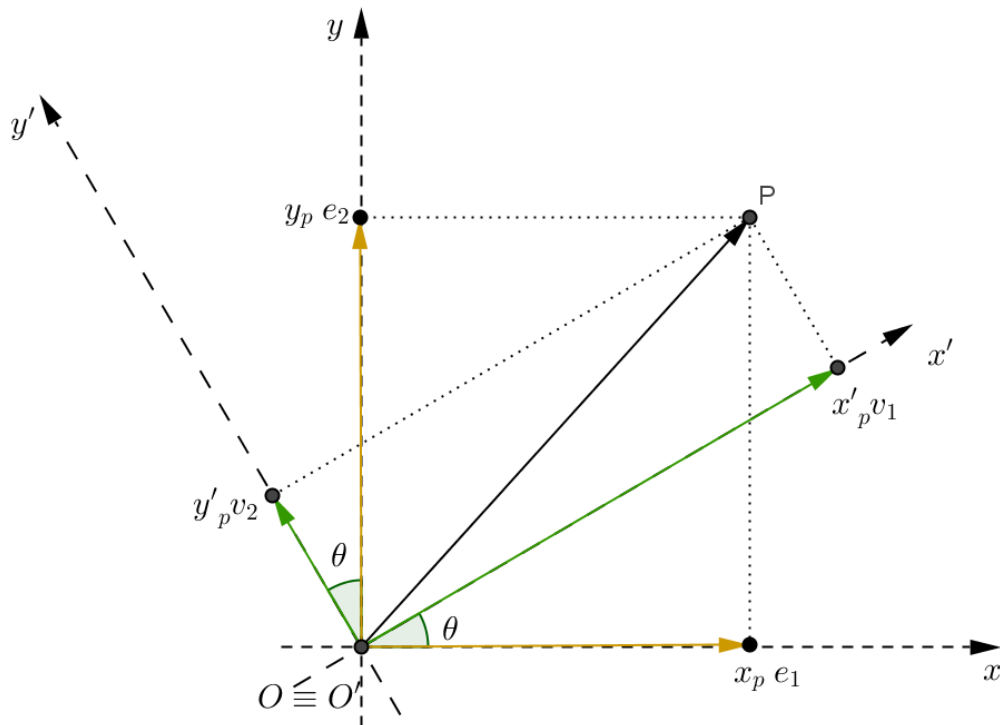
$$\begin{cases} x_p = x'_p \cdot \langle v_1, e_1 \rangle + y'_p \cdot \langle v_2, e_1 \rangle \\ y_p = x'_p \cdot \langle v_1, e_2 \rangle + y'_p \cdot \langle v_2, e_2 \rangle \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_p = x'_p \cdot \cos \theta - y'_p \cdot \text{sen } \theta \\ y_p = x'_p \cdot \text{sen } \theta + y'_p \cdot \cos \theta \end{cases}$$

Da mesma forma como procedemos anteriormente, podemos escrever o sistema novo em função do original, então;

$$\begin{cases} x'_p = x_p \cdot \cos \theta + y_p \cdot \text{sen } \theta \\ y'_p = -x_p \cdot \text{sen } \theta + y_p \cdot \cos \theta \end{cases}$$

**Figura 4:** Rotação de Eixos – Vetores.



**Fonte:** Delgado, 2013, p.171 (modificado).

Agora com estas ferramentas (rotação e translação de eixos no plano) em mãos, passaremos a descrever as Cônicas.

### 2.2.2 Elipse (do grego ελλειψιζ, falta, omissão)

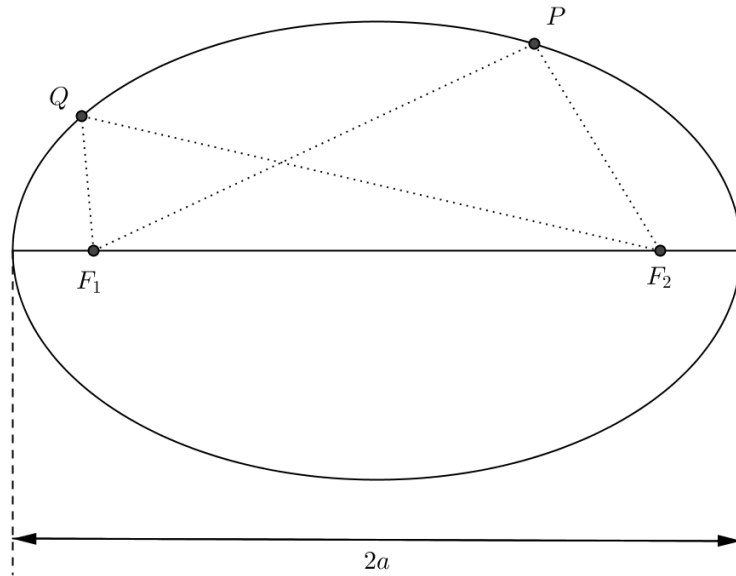
**Definição:** *É o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos  $F_1$  e  $F_2$  (chamados de focos) no mesmo plano, é uma constante, geralmente chamada de  $2a$ , onde  $2a > d(F_1, F_2)$  (VENTURI, 2003, p.69) (Figura 5).*

Comumente a distância entre  $F_1$  e  $F_2$  é denominada de  $2c$ . Assim podemos concluir que  $a > c > 0$ , e:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

$$d(Q, F_1) + d(Q, F_2) = 2a$$

**Figura 5:** Definição de Elipse.



**Fonte:** Elaborada pelo Autor.

Sejam  $A_1$  e  $A_2$  (Figura 6) as intersecções da elipse com a reta que passa por  $F_1$  e  $F_2$ , então temos:

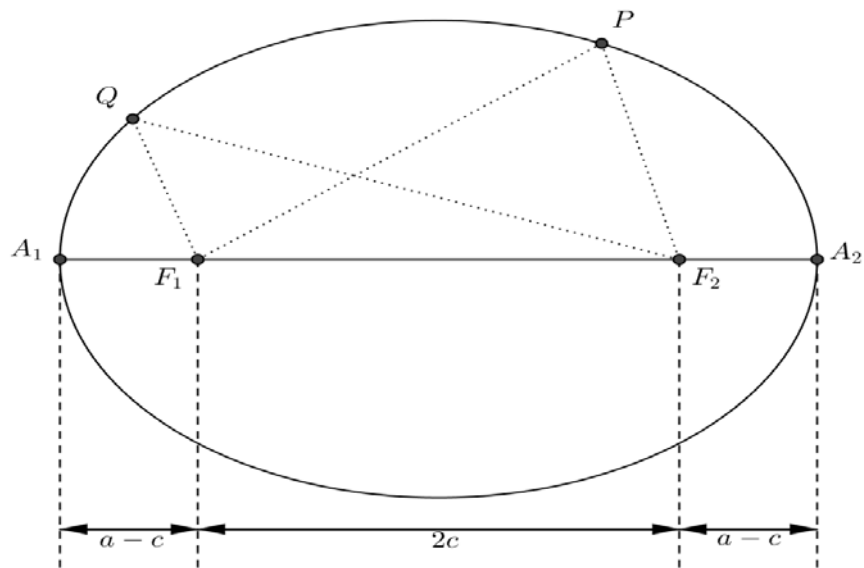
$$\left. \begin{array}{l} d(A_1, F_1) + d(A_1, F_2) = 2a \\ d(A_1, F_2) - d(A_1, F_1) = d(F_1, F_2) \end{array} \right\} \Rightarrow d(A_1, F_2) = a - c ,$$

Analogamente concluímos que  $d(F_2, A_2) = a - c$  e, portanto, temos que,

$$d(A_1, F_1) = d(A_2, F_2)$$

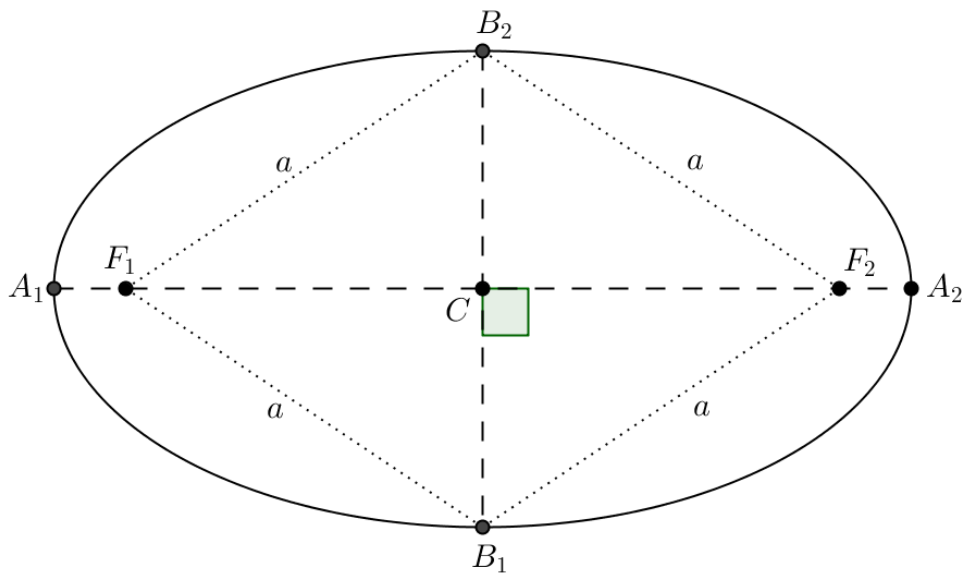
Sejam  $C$  o ponto médio do segmento  $\overline{F_1 F_2}$  e os pontos  $B_1$  e  $B_2$  as intersecções da elipse com a mediatriz do segmento  $\overline{F_1 F_2}$  (Figura 7). Então,

**Figura 6:** Distância dos Focos aos Vértices da Elipse (Eixo Maior).



Fonte: Smole, 2010, p.119 (modificado).

**Figura 7:** Distância dos Focos aos Vértices da Elipse (Eixo Menor)



Fonte: Smole, 2010, p.119 (modificado).

$$\left. \begin{array}{l} d(B_1, F_1) = d(B_1, F_2) \\ d(B_1, F_1) + d(B_1, F_2) = 2a \end{array} \right\} \Rightarrow d(B_1, F_1) = d(B_1, F_2) = a$$

De forma análoga, encontramos o mesmo resultado para os comprimentos dos segmentos  $\overline{B_2F_1}$  e  $\overline{B_2F_2}$ .

### 2.2.2.1 Elementos da elipse.

Os pontos  $F_1$  e  $F_2$  (Figura 8), como já mencionado, são os focos da elipse e a distância entre eles chamada de distância focal é  $2c$ .

- O ponto  $O$  é o centro da elipse ou ponto médio entre  $F_1$  e  $F_2$ .
- Os pontos  $A_1, A_2, B_1,$  e  $B_2$  são chamados de vértices da elipse.
- O segmento  $\overline{A_1A_2}$  é chamado de eixo maior da elipse, de comprimento  $2a$ .
- O segmento  $\overline{B_1B_2}$  é chamado de eixo menor da elipse, de comprimento  $2b$ .

Do triângulo retângulo  $B_2OF_2$  obtemos a seguinte relação:

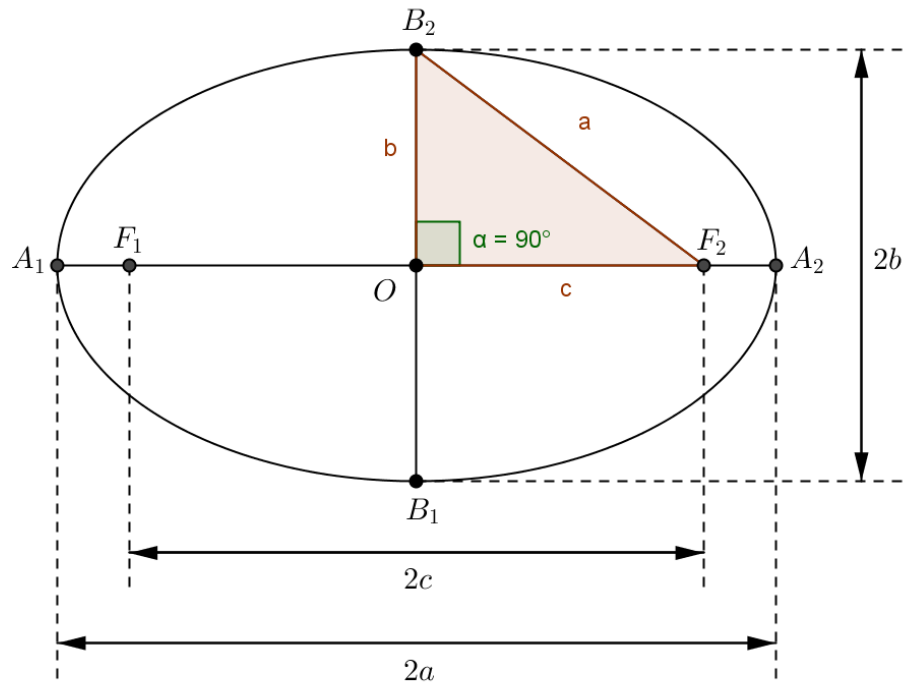
$$a^2 = b^2 + c^2$$

Uma característica da elipse, muito importante para verificar o seu “achatamento” é a excentricidade (Figura 9) dada pelo quociente entre a distância focal e o comprimento do eixo maior, ou seja:

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

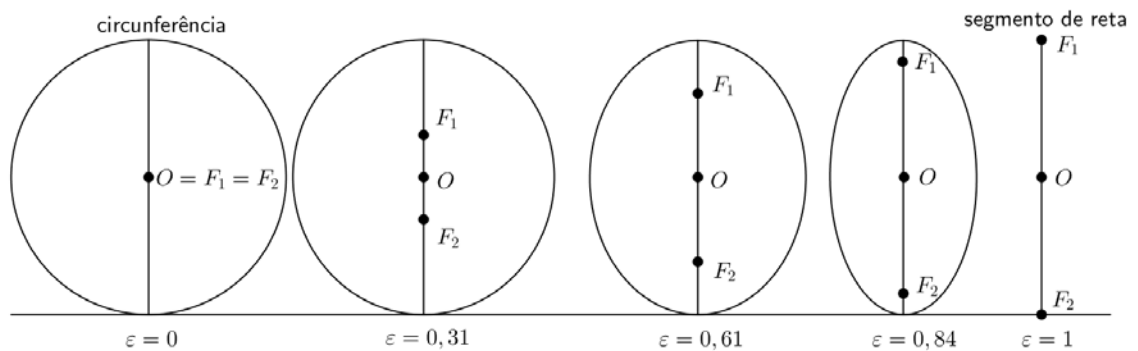
Como  $a$  e  $c$  são números positivos e  $a > c > 0$ , então podemos constatar que  $0 < \varepsilon < 1$ . Quando a distância focal é 0 então  $a = b = \text{raio}$  de uma circunferência, portanto a circunferência é um caso particular de elipse, como tínhamos citado anteriormente. Com a excentricidade sendo 1 temos apenas um segmento de reta entre  $A_1 = F_1$  e  $A_2 = F_2$ .

**Figura 8:** Elementos Notáveis da Elipse.



Fonte: Smole, 2010, p.120 (modificado).

**Figura 9:** Excentricidade da Elipse.



Fonte: Venturi, 2003, p.70 (modificado).

Por exemplo, as trajetórias elípticas da Terra em torno do Sol e da Lua em torno da Terra tem respectivamente excentricidades de 0,016 e 0,054, sendo muito próximas de zero. Na prática são consideradas trajetórias circulares.

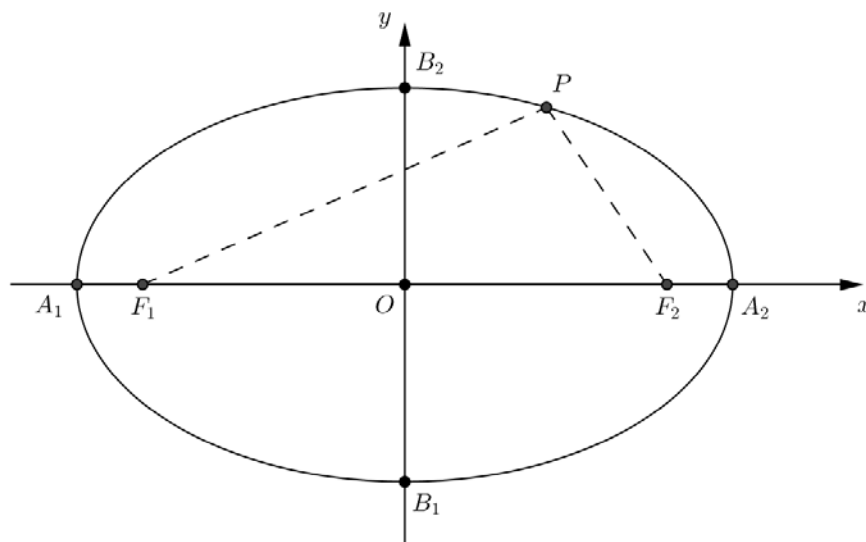
### 2.2.2.2 Equação canônica da elipse.

#### Com centro na origem

Vamos encontrar a equação canônica da elipse que possui centro na origem e seus eixos estão contidos nos eixos coordenados.

#### 1º Caso: Eixo maior contido no eixo das abscissas (eixo $x$ )

**Figura 10:** Elipse com Centro na Origem e Eixo Maior sobre o Eixo  $x$ .



**Fonte:** Giovanni, 2005, p.108 (modificado).

Observe (Figura 10) que o ponto  $P = (x, y)$  pertence à elipse se, e somente se, satisfizer a condição  $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ , neste caso, os focos são  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$ , logo temos:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando ao quadrado os dois membros da igualdade, obtemos:

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2 \Rightarrow$$

$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}$$

Dividindo por 4 e elevando novamente ao quadrado os dois membros da igualdade,

$$c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2[(x - c)^2 + y^2] \Rightarrow$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Agora sabemos que  $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 - c^2 = b^2$  então conseguimos:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Podemos dividir os dois membros por  $a^2b^2 > 0$ , portanto temos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

que é a equação da elipse com focos sobre o eixo maior coincidente com o eixo  $x$ .

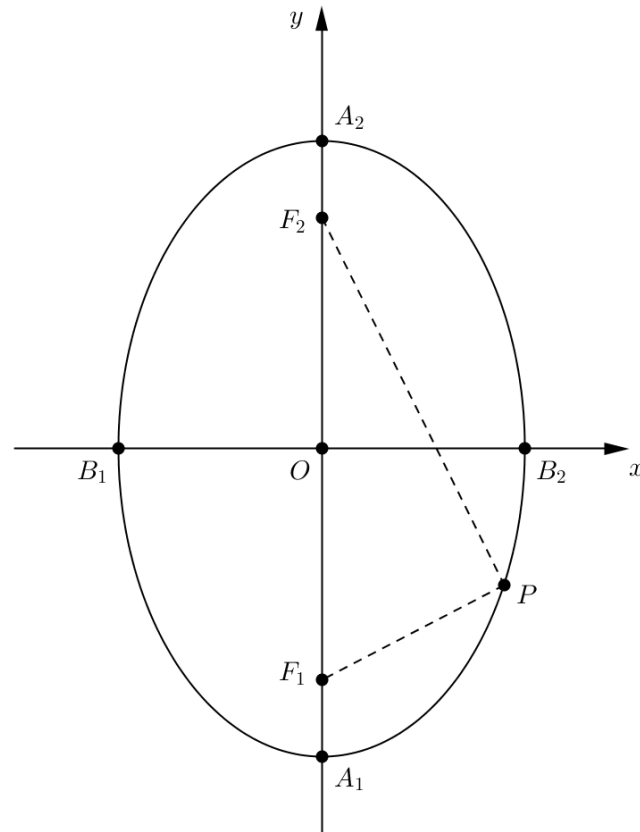
**2º Caso:** Eixo maior contido no eixo das ordenadas (eixo  $y$ ).

Aqui (Figura 11) temos as mesmas condições do caso anterior, apenas mudam-se as coordenadas dos focos que passam a ser  $F_1 = (0, -c)$  e  $F_2 = (0, c)$ . De forma análoga encontramos para este caso:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Mais genericamente uma equação do tipo  $Ax^2 + Cy^2 = F$  representa uma elipse, também chamada elipse real, com centro na origem e eixos paralelos aos eixos coordenados se  $A$ ,  $C$  e  $F$  tem o mesmo sinal e  $A$  diferente de  $C$ .

**Figura 11:** Elipse com Centro na Origem e Eixo Maior sobre o Eixo y.



**Fonte:** Giovanni, 2005, p.109 (modificado).

Caso  $C$  tenha sinal contrário ao de  $A$  e  $B$  esta equação representa uma elipse imaginária, esta recebe este nome, pois se realizarmos translações e giros adequados no plano, obtém-se uma equação similar a da elipse, mas que não determina nenhum ponto, ou seja, representa um conjunto vazio.

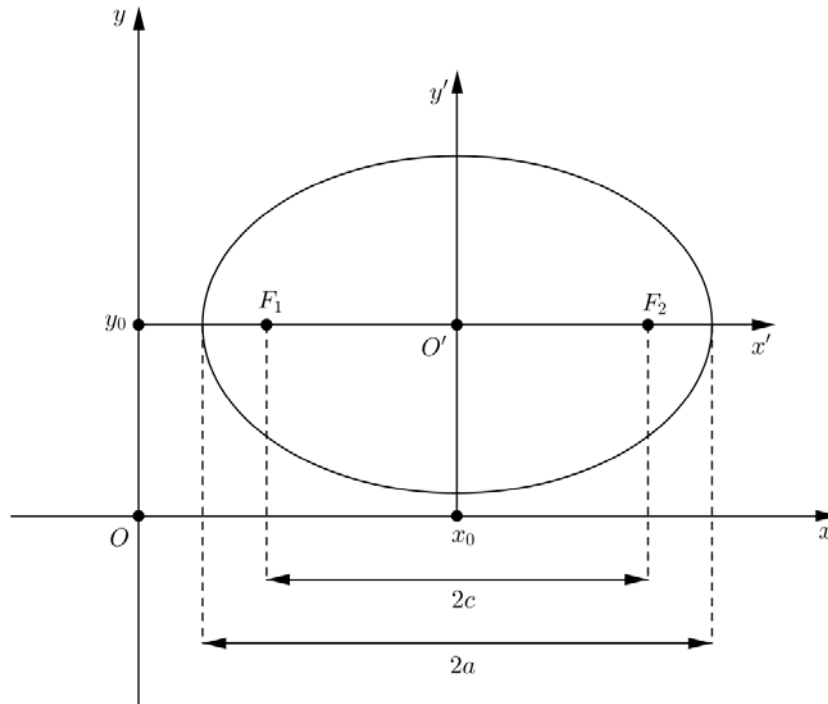
Se  $C = 0$  então esta equação se reduz a um único ponto no plano que o próprio ponto  $O = (0,0)$ .

### Com centro fora da origem

Vamos encontrar a equação canônica da elipse cujo centro se encontra fora da origem e seus eixos são paralelos aos eixos coordenados, quando isto acontece dizemos que ouve uma translação da elipse.

**1º Caso:** Eixo maior paralelo ao eixo das abscissas.

**Figura 12:** Elipse com Eixo Maior Paralelo ao Eixo x.



**Fonte:** Venturi, 2003, p.82.

Considerando a elipse (Figura 12) com centro no ponto  $O' = (x_0, y_0)$ , por ele traçamos o sistema  $x'O'y'$  com eixos paralelos aos eixos coordenados originais. Ora a equação desta elipse neste novo sistema é,

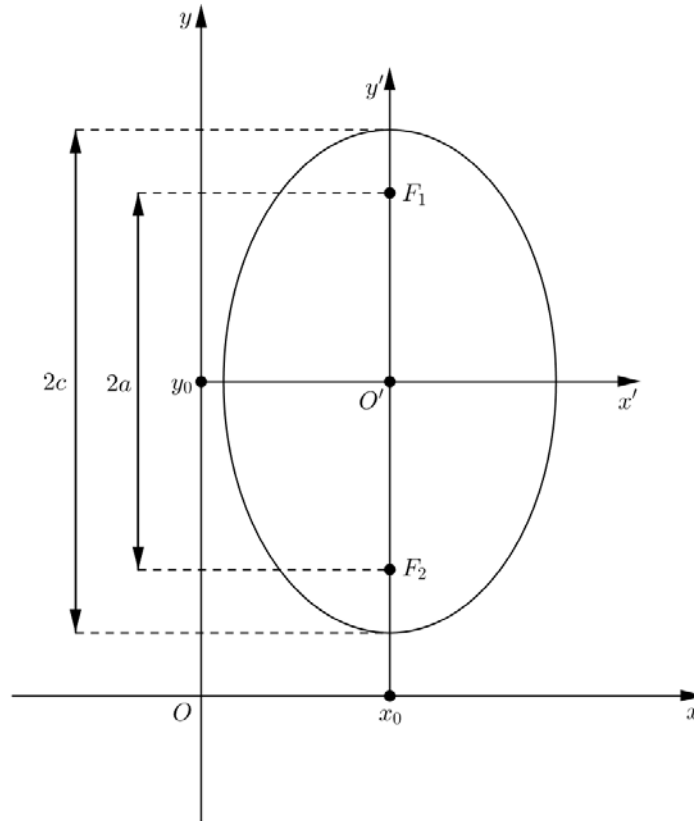
$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

Desta forma qualquer ponto da elipse  $P = (x', y')$  pode ser encontrado considerando a translação da origem, ou seja,  $x' = x - x_0$  e  $y' = y - y_0$ , logo a equação da elipse é dada por:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

**2º Caso:** Eixo maior paralelo ao eixo das ordenadas.

**Figura 13:** Elipse com Eixo Maior Paralelo ao Eixo y.



**Fonte:** Venturi, 2003, p.82 (modificado).

De modo análogo, encontramos a equação (Figura 13) abaixo,

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$$

Nestes dois casos se desenvolvermos os produtos notáveis, eliminarmos os denominadores e ordenarmos convenientemente as variáveis, teremos uma equação da elipse desta forma,

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

com  $A$  e  $C$  sendo diferentes, mas com o mesmo sinal.

A existência de um termo  $Bxy$  indica que cônica sofreu uma rotação em torno dos eixos coordenados, como veremos na seção 2.2.5.

### 2.2.3 Hipérbole (do grego υπερβολη, excesso, exagero)

Vamos estudar a cônica hipérbole, que foi usada por Apolônio para resolver o problema da trisseccção do ângulo. Hoje em dia a hipérbole está presente em nossas vidas sem que notemos sua presença, por exemplo, na tecnologia atual de localização e posicionamento global como o GPS, o DECCA e o LORAN. O sistema de localização DECCA usa os mesmos moldes hiperbólicos do LORAN, sendo conhecido como concorrente do mesmo.

*Definição: É o lugar geométrico dos pontos de um plano cujo valor absoluto da diferença das distâncias a dois pontos fixos  $F_1$  e  $F_2$  (chamados de focos) no mesmo plano, é uma constante ( $2a$ ), onde  $2a < d(F_1, F_2)$  (VENTURI, 2003, p.92) (Figura 14).*

Neste caso se a distância entre  $F_1$  e  $F_2$  é  $2c$ , podemos concluir que  $c > a > 0$ , e:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

$$|d(Q, F_1) - d(Q, F_2)| = 2a$$

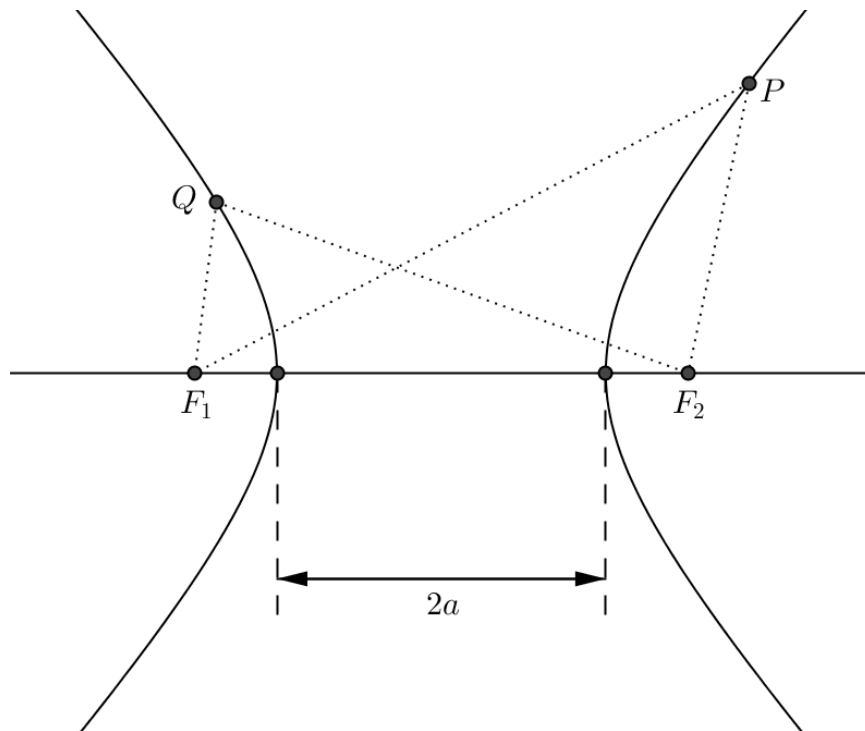
Sejam  $A_1$  e  $A_2$  as intersecções da hipérbole com a reta que passa por  $F_1$  e  $F_2$  (Figura 15), então temos:

$$\begin{cases} d(A_1F_2) - d(A_1F_1) = 2a \Rightarrow d(A_2F_2) + d(A_1A_2) - d(A_1F_1) = 2a \\ d(A_2F_1) - d(A_2F_2) = 2a \Rightarrow d(A_2A_1) + d(A_1F_1) - d(A_2F_2) = 2a \end{cases}$$

Deste sistema resulta que  $2d(A_1A_2) = 4a \Rightarrow d(A_1A_2) = 2a$ , substituindo em qualquer uma das equações acima, encontramos que  $d(A_1F_1) = d(A_2F_2)$ , logo,

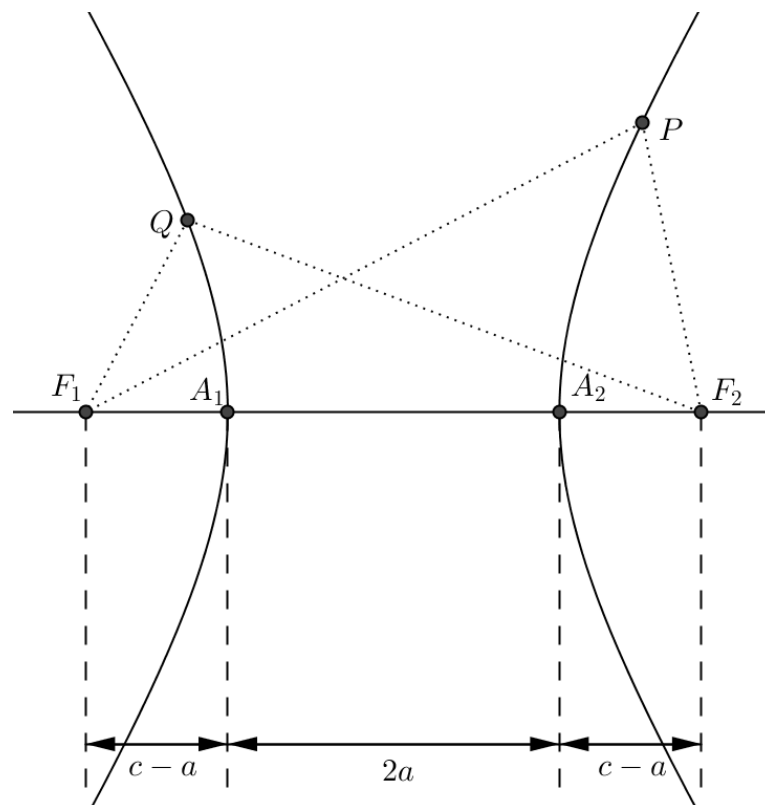
$$d(A_2F_2) + d(A_1F_1) + d(A_1A_2) = 2c \Rightarrow d(A_2F_2) = d(A_1F_1) = c - a$$

**Figura 14:** Definição de Hipérbole.



**Fonte:** Elaborado pelo Autor.

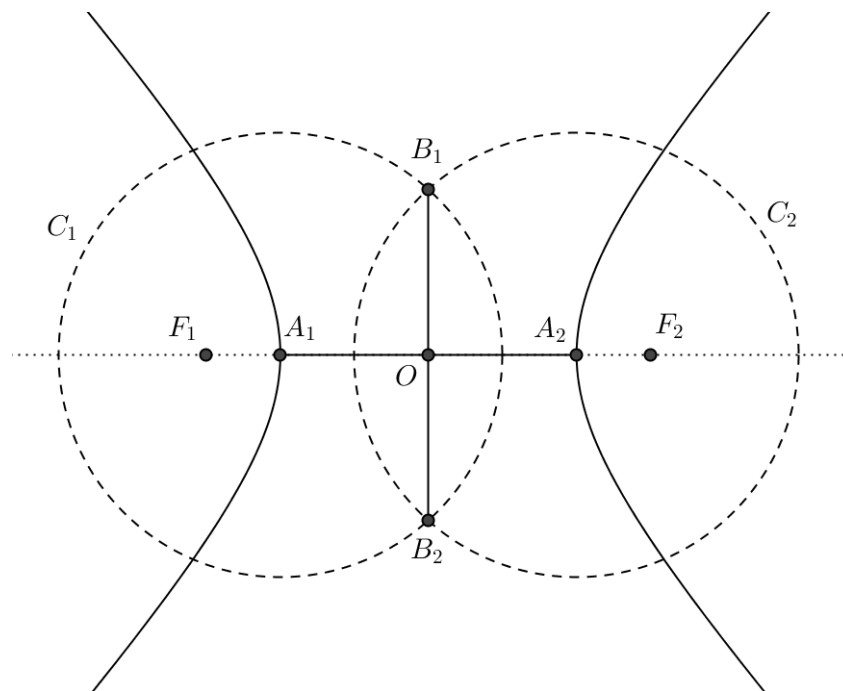
**Figura 15:** Distância dos Focos aos Vértices da Hipérbole.



**Fonte:** Elaborado pelo Autor.

Sejam  $C_1$  e  $C_2$  duas circunferências com mesmo raio  $r = c$  e de centros em  $A_1$  e  $A_2$  respectivamente (Figura 16), estas são secantes à hipérbole, pois  $2a < 2c$ , assim ambas determinam uma corda  $\overline{B_1B_2}$ , que indicaremos com o comprimento de  $2b$ . Observe que o segmento  $2b$  é perpendicular ao segmento  $2a$  e o ponto  $O$  é o ponto médio dos segmentos  $\overline{A_1A_2}$ ,  $\overline{B_1B_2}$  e também de  $\overline{F_1F_2}$ .

**Figura 16:** Eixo Imaginário da Hipérbole.



**Fonte:** Smole, 2010, p.125 (modificado).

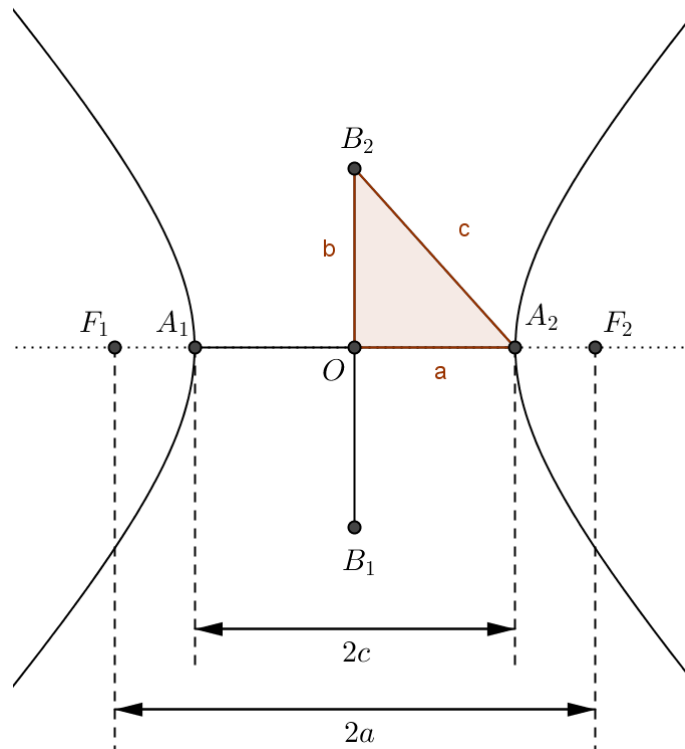
### 2.2.3.1 Elementos da hipérbole.

Na figura 17, os pontos  $F_1$  e  $F_2$  são os focos da hipérbole e a distância entre eles, chamada de distância focal, é  $2c$ .

- O ponto  $O$  é o centro da hipérbole ou ponto médio entre  $F_1$  e  $F_2$ .
- Os pontos  $A_1$  e  $A_2$  são os vértices da hipérbole.
- O segmento  $\overline{A_1A_2}$  de comprimento  $2a$  é chamado de eixo real ou transverso.

- O segmento  $\overline{B_1B_2}$  de comprimento  $2b$  é chamado de eixo imaginário.

**Figura 17:** Elementos Notáveis da Hipérbole.



**Fonte:** Venturi, 2003, p.92 (modificado).

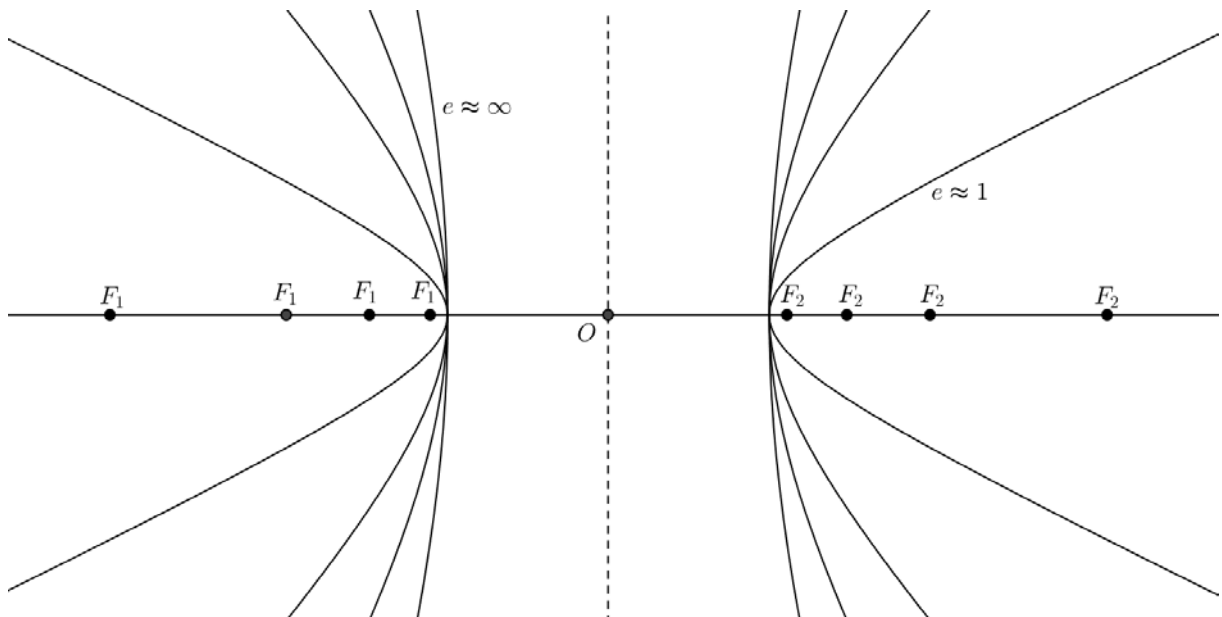
Do triângulo retângulo  $B_2OA_2$ , obtemos a seguinte relação:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Uma característica da elipse, que também observamos na hipérbole, é a excentricidade dada pelo quociente entre a distância focal e o comprimento do eixo maior, ou seja:

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

Porém no caso da hipérbole, diferente da elipse, observamos (Figura 18) uma proporcionalidade entre a excentricidade e a abertura da hipérbole: quanto maior a excentricidade maior a abertura e vice-versa.

**Figura 18:** Excentricidade da Hipérbole

**Fonte:** Elaborada pelo autor.

### 2.2.3.2 Equação canônica da hipérbole.

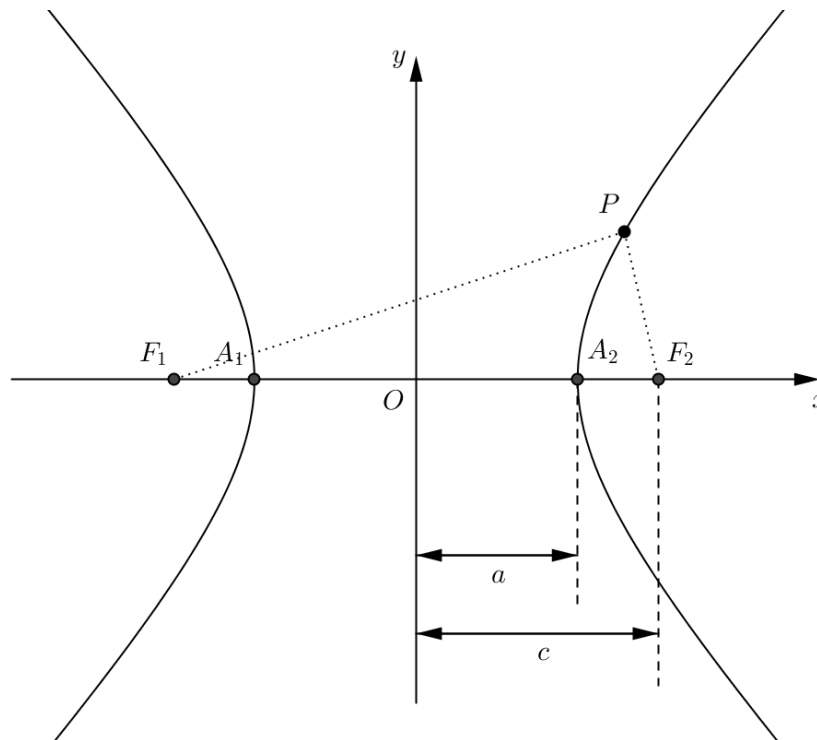
#### Com centro na origem

Para encontrar a equação canônica da hipérbole que possui centro na origem e seus eixos estão contidos nos eixos coordenados, seguimos os casos abaixo.

#### 1º Caso: Eixo real contido no eixo das abscissas (eixo $x$ )

Sejam  $P = (x, y)$  um ponto genérico da hipérbole,  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$  (Figura 19). Da definição temos,  $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$ , ou seja:

**Figura 19:** Hipérbole com Centro na Origem e Eixo Real sobre o Eixo x.



**Fonte:** Smole, 2010, p.126 (modificado).

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Elevando ao quadrado os dois membros da igualdade, obtemos:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Rightarrow$$

$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Dividindo por 4 e elevando novamente ao quadrado os dois membros da igualdade,

$$c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2[(x-c)^2 + y^2] \Rightarrow$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Agora sabemos que  $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 - a^2 = b^2$  então multiplicando por  $(-1)$  a expressão anterior, podemos substituir por  $b^2$ :

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \Rightarrow$$

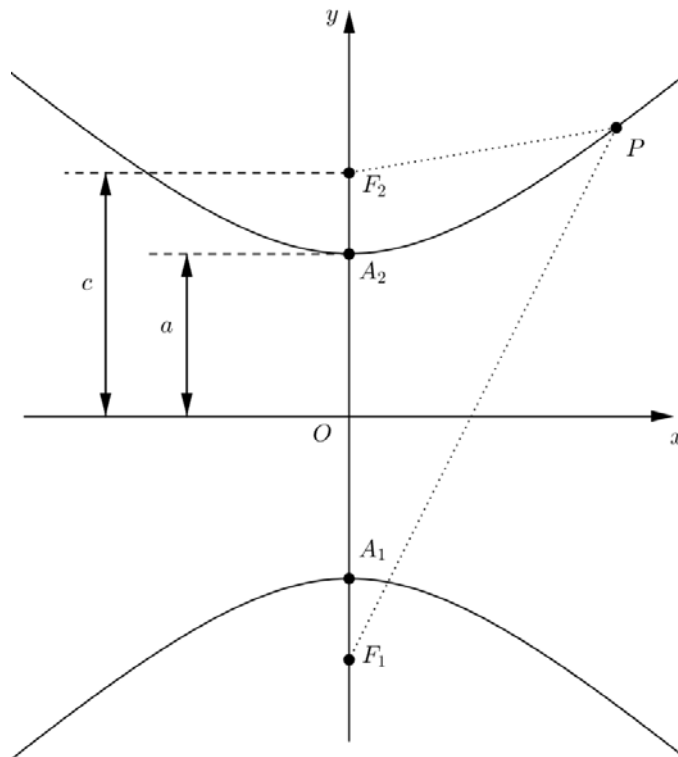
$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

Podemos dividir os dois membros por  $a^2b^2 > 0$ , portanto temos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

**2º Caso:** Eixo real contido no eixo das ordenadas (eixo y).

**Figura 20:** Hipérbole com Centro na Origem e Eixo Real sobre o Eixo y.



**Fonte:** Smole, 2010, p.126 (modificado).

Aqui (Figura 20) temos as mesmas condições do caso anterior apenas mudam-se as coordenadas dos focos que passam a ser  $F_1 = (0, -c)$  e  $F_2 = (0, c)$ . De forma análoga encontramos para este caso,

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Observe que numa hipérbole o eixo real, e conseqüentemente o seu eixo focal, sempre coincide com o eixo da coordenada com a variável de coeficiente positivo, quando a equação for canônica. Outro ponto a se observar é que na elipse sempre tem-se  $a > b$ , mas na hipérbole, no entanto, pode-se ter  $a > b$ ,  $a = b$  ou  $a < b$ .

Genericamente, como fizemos em elipse, uma equação do tipo  $Ax^2 + Cy^2 = F$  representa uma hipérbole com centro na origem e eixos contidos nos eixos cartesianos, se e somente se,  $A$  e  $C$  tem sinais contrários e  $F \neq 0$ .

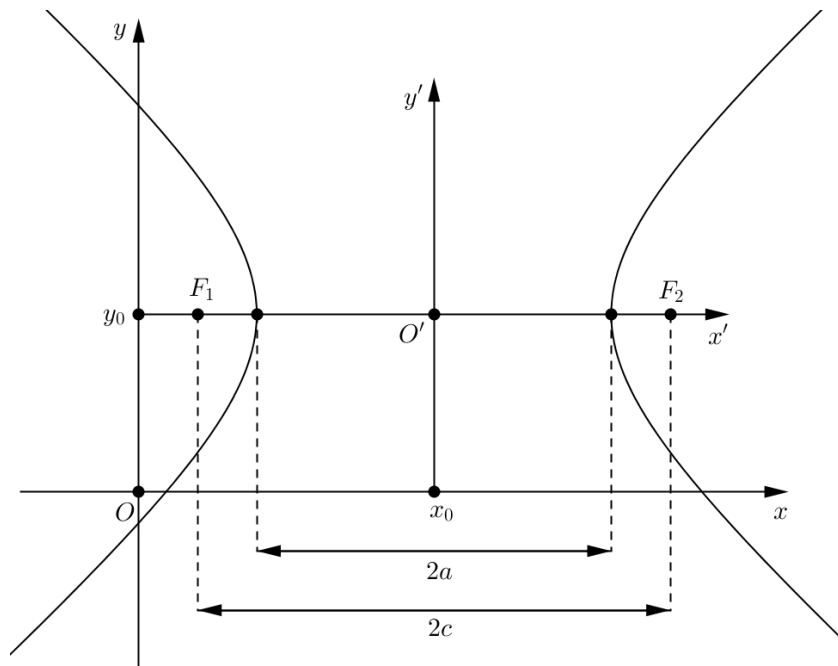
### Com centro fora da origem

De raciocínio análogo ao usado em elipse, temos a equação da hipérbole com eixos paralelos aos eixos coordenados.

**1º Caso:** Com eixo real paralelo ao eixo das abscissas (Figura 21):

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

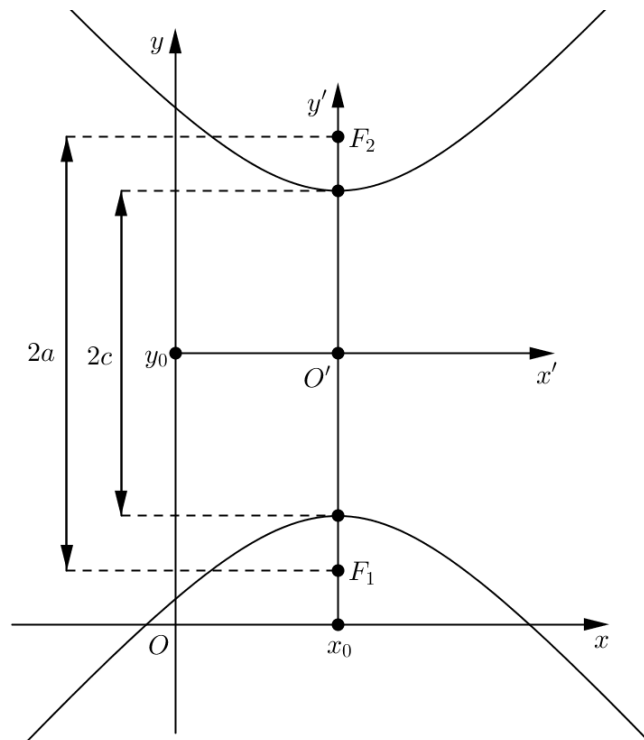
**Figura 21:** Hipérbole com Eixo Real Paralelo ao Eixo  $x$ .



Fonte: Venturi, 2003, p.106.

**2º Caso:** Com eixo real paralelo ao eixo das ordenadas (Figura 22):

**Figura 22:** Hipérbole com Eixo Real Paralelo ao Eixo  $y$ .



Fonte: Venturi, 2003, p.106.

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

Nestes dois casos, como fizemos em elipse, se desenvolvermos os produtos notáveis, eliminar os denominadores e ordenar convenientemente as variáveis teremos uma equação da hipérbole desta forma,

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

com  $A$  e  $C$  sendo diferentes, porém, no caso de hipérbole, com o mesmo sinal.

Novamente temos que a existência de um termo  $Bxy$  indica que a cônica sofreu uma rotação em torno dos eixos coordenados, isto será abordado na seção 2.2.5., como já citamos anteriormente.

### 2.2.3.3 Assíntotas da hipérbole.

Na hipérbole considere o retângulo com centro na origem cujos comprimentos dos lados são  $2a$  e  $2b$  (Figura 23). As retas contendo as diagonais desse retângulo chamam-se assíntotas da hipérbole. Essas assíntotas são comumente usadas como guia para se traçar o gráfico de uma hipérbole. Observe que os ramos da hipérbole se aproximam das assíntotas, mas nunca as intercepta ou tangencia.

As assíntotas são retas que passam pela origem, logo tem equação da forma,

$$y = \pm m \cdot x$$

como o coeficiente angular pode ser calculado por

$$m = \operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}$$

Então temos que  $y = \pm \frac{b}{a} \cdot x$  ou seja,

$$r_1: b \cdot x - a \cdot y = 0$$

$$r_2: b \cdot x + a \cdot y = 0$$

Agora voltando à equação da hipérbole, observe que ela também pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

e assim para encontrar as equações das assíntotas, substituímos o segundo membro por 0 e fatoramos o produto notável resultante.

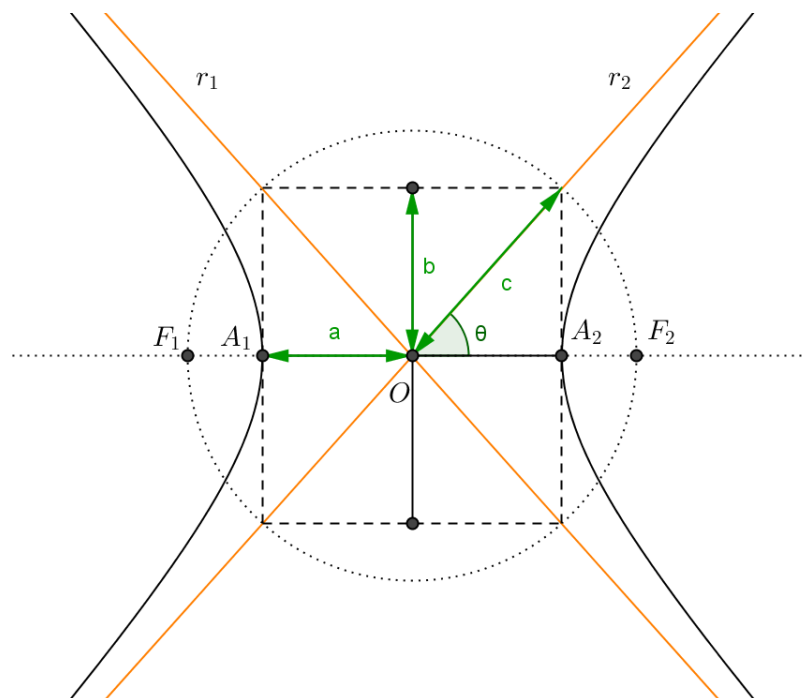
$$b^2x^2 - a^2y^2 = 0 \Rightarrow (b.x - a.y)(b.x + a.y) = 0$$

Sendo que o produto de dois números é zero, se:

$$b.x - a.y = 0 \quad \text{ou} \quad b.x + a.y = 0$$

De forma análoga podemos executar o mesmo processo para a hipérbole com eixo real paralelo ao eixo das ordenadas.

**Figura 23:** Assíntotas da hipérbole.

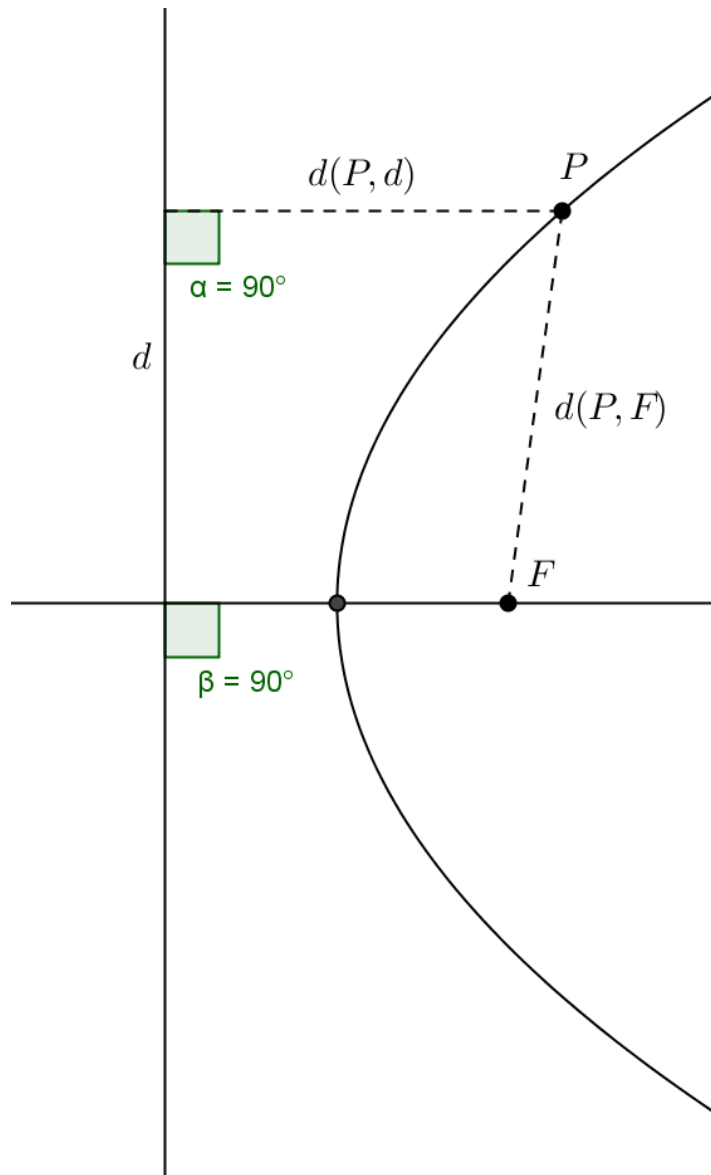


**Fonte:** Smole, 2010, p.125 (modificado).

### 2.2.4 Parábola (do grego παραβολη, comparação igualdade)

Definição: *Considere-se, em um plano qualquer um ponto  $F$  e uma reta  $d$  que não contém o ponto  $F$ . Denominamos parábola de foco  $F$  e diretriz  $d$  ao lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de  $d$  e  $F$  (VENTURI, 2003, p.41 modificado) (Figura 24).*

**Figura 24:** Definição de Parábola.



**Fonte:** Elaborado pelo Autor.

$$d(P, F) = d(P, d)$$

Assim podemos dizer que a parábola é o conjunto dos pontos de um plano que satisfazem a condição acima, ou seja, todo ponto pertencente à parábola tem essa propriedade e qualquer ponto do plano que possua esta propriedade pertence a uma parábola.

#### 2.2.4.1 Elementos da parábola.

Podemos destacar os elementos notáveis da parábola (Figura 25), os quais nos ajudarão nos cálculos a seguir.

- O ponto fixo  $F$  é chamado de foco da parábola.
- A reta fixa  $d$  é chamada diretriz da parábola.
- A reta que passa pelo foco  $F$  e é perpendicular a reta diretriz  $d$  da parábola é chamado eixo de simetria da parábola, que denotamos por  $e$ .
- O ponto  $V$ , intersecção da parábola com o eixo de simetria  $e$ , é chamado de vértice da parábola.

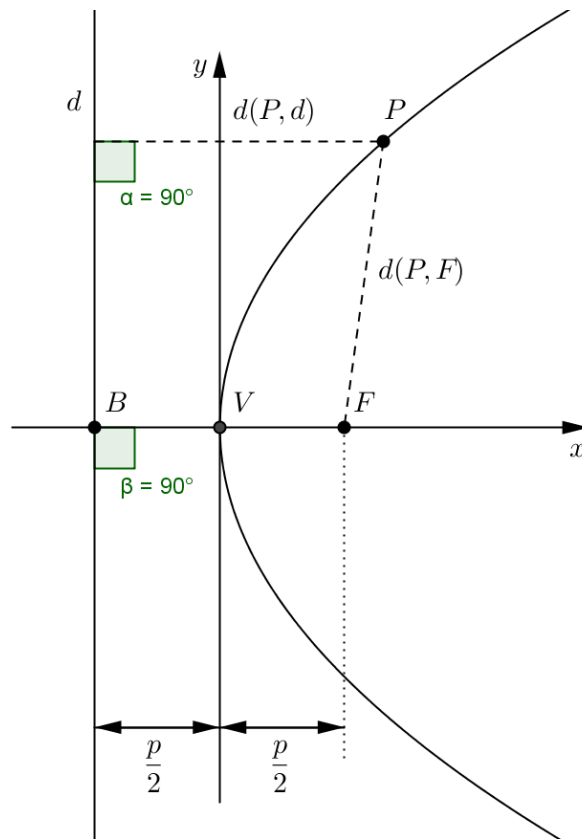
A distância  $p$  ( $p > 0$ ), chamada de parâmetro da parábola, representa a distância do foco  $F$  à reta diretriz  $d$ . Sendo  $p$  o parâmetro da parábola temos que:

$$d(B, V) = d(V, F) = \frac{p}{2}$$

A corda  $\overline{AA'}$  que passa pelo foco e é perpendicular ao eixo de simetria chama-se *LATUSRECTUM*, também chamada de corda focal mínima.



**Figura 26:** Parábola com Eixo de Simetria sobre o Eixo x.



**Fonte:** Venturi, 2003, p.42 (modificado).

O ponto  $P(x, y)$  (Figura26) pertence à parábola se, e somente se, satisfazer a condição  $d(P, F) = d(P, d)$ , neste caso, temos o foco com coordenadas  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$  e a diretriz com equação  $x + \frac{p}{2} = 0$ , colocando os dados e usando a definição temos:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y - 0)^2} = \frac{|1 \cdot x + 0 \cdot y + \frac{p}{2}|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}$$

Elevando ao quadrado os dois membros da igualdade, obtemos:

$$x^2 + y^2 - p \cdot x + \frac{p^2}{4} = x^2 + p \cdot x + \frac{p^2}{4}$$

Subtraindo  $x^2 + \frac{p^2}{4}$  de ambos os lados, obtemos,

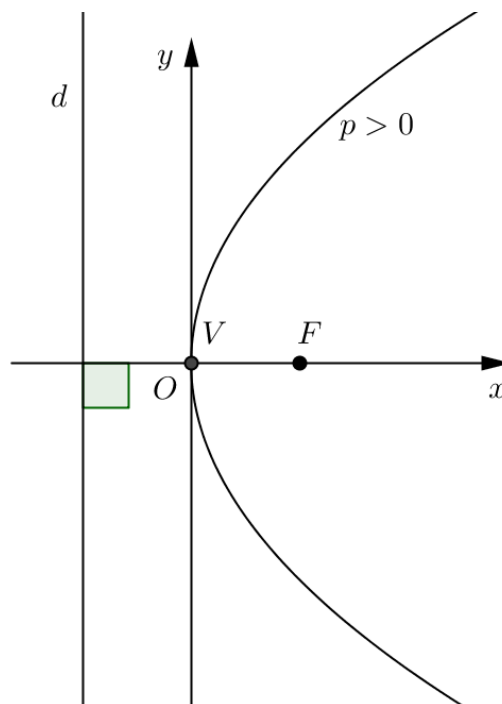
$$y^2 - p \cdot x = +p \cdot x \Rightarrow$$

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x$$

No dicionário a palavra concavidade significa: “concavidade s.f. **1.** Qualidade de côncavo. **2.** A parte côncava de um objeto. **3.** Depressão, cavidade. côncavo adj. **1.** Cujas superfície é mais baixa no centro do que nas bordas; escavado” (SANTIAGO-ALMEIDA, 2011).

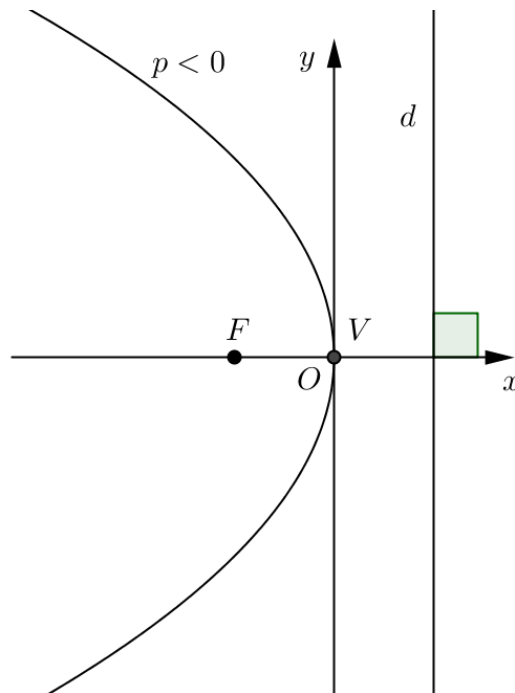
Logo a parábola possui concavidade, observe que na equação  $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$ , se  $p > 0$  a parábola tem concavidade voltada para a parte positiva do eixo  $x$  (Figura 27), do mesmo modo se  $p < 0$  a parábola tem concavidade voltada para a parte negativa do eixo  $x$  (Figura 28).

**Figura 27:** Parábola com Concavidade Positiva ( $p > 0$ ).



**Fonte:** Giovanni, 2005, p.126 (modificado).

**Figura 28:** Parábola com Concavidade Negativa ( $p < 0$ ).



**Fonte:** Giovanni, 2005, p.126 (modificado).

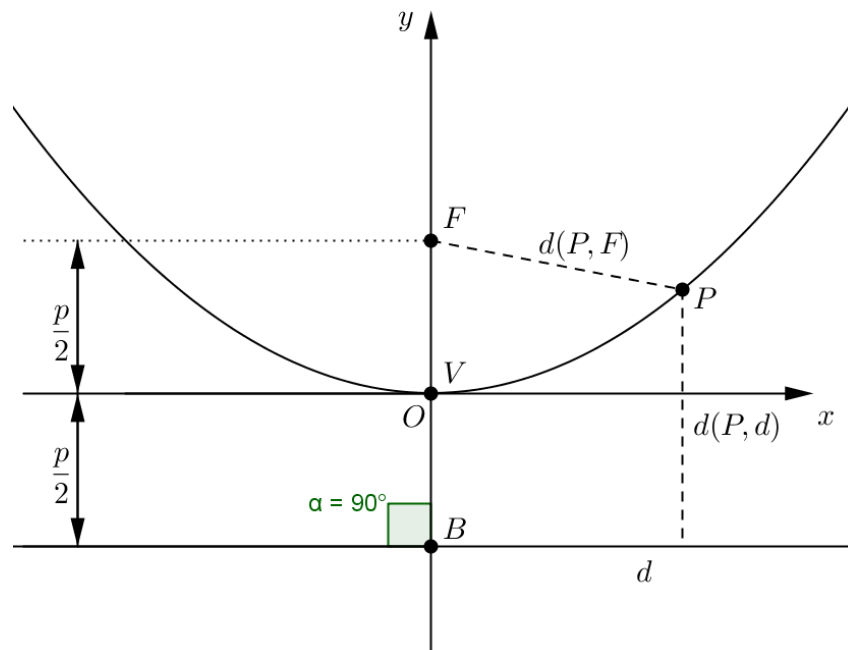
**2º Caso:** Eixo de simetria coincidente ao eixo  $y$ .

O ponto  $P(x, y)$  (Figura 29) pertence à parábola se, e somente se, satisfazer a condição  $d(P, F) = d(P, d)$ , neste caso, temos o foco com coordenadas  $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$  e a diretriz com equação  $y + \frac{p}{2} = 0$ , colocando os dados e usando a definição temos:

$$\sqrt{(x - 0)^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \frac{\left|0 \cdot x + 1 \cdot y + \frac{p}{2}\right|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} \Rightarrow$$

$$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(y + \frac{p}{2}\right)^2}$$

**Figura 29:** Parábola com Eixo de Simetria sobre o Eixo  $y$ .



**Fonte:** Venturi, 2003, p.43 (modificado).

Analogamente, ao caso anterior, encontramos a equação canônica para a parábola de modo que:

$$x^2 = 2 \cdot p \cdot y$$

A concavidade segue o mesmo raciocínio anterior, se  $p > 0$  a parábola tem concavidade voltada para a parte positiva do eixo  $y$ , do mesmo modo se  $p < 0$  a parábola tem concavidade voltada para a parte negativa do eixo  $y$ .

Podemos identificar uma parábola com vértice na origem e diretriz paralela ao eixo  $x$ , pela equação genérica  $Ax^2 + By = 0$ , do mesmo modo uma parábola com vértice na origem e diretriz paralela ao eixo  $y$  tem como equação genérica  $Ay^2 + Bx = 0$ .

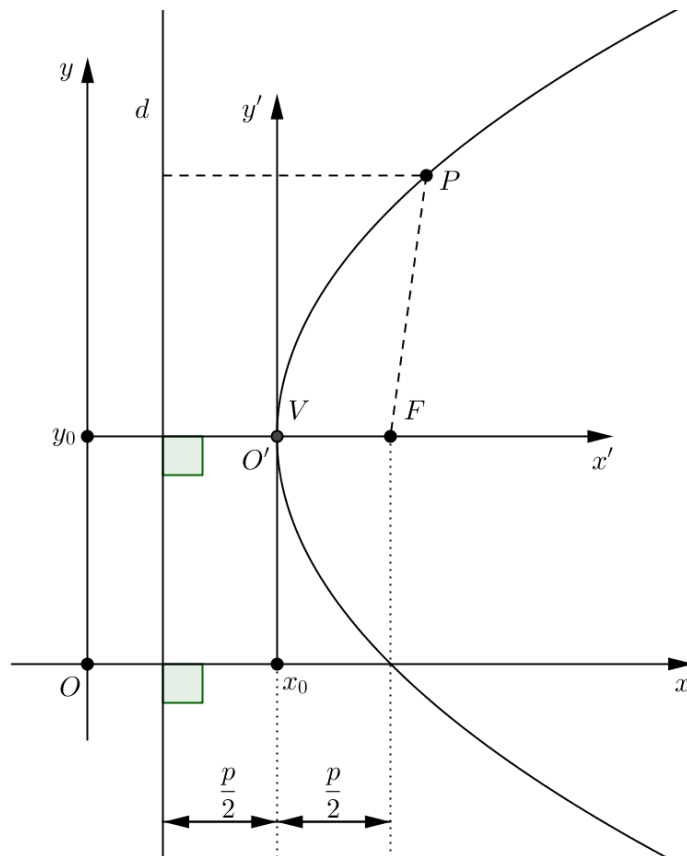
### Com vértice fora da origem

Semelhante aos estudos anteriores, podemos admitir (Figura 30) o novo sistema de eixos  $x'O'y'$  e sabendo, pela translação de eixos, que  $x' = x - x_0$

e  $y' = y - y_0$  encontramos as equações da parábola. Mas também podemos seguir usando a definição de parábola, em ambos os casos o resultado é o mesmo.

**1º Caso:** Eixo de simetria paralelo ao eixo  $x$ .

**Figura 30:** Parábola com Diretriz Paralela ao Eixo  $y$ .



**Fonte:** Venturi, 2003, p.50 (modificado).

Assumindo  $O'$  como origem, sabemos que a equação da parábola, pelos cálculos anteriores, é:

$$y'^2 = 2 \cdot p \cdot x'$$

Agora basta substituir usando as igualdades  $x' = x - x_0$  e  $y' = y - y_0$ , então temos:

$$(y - y_0)^2 = 2 \cdot p \cdot (x - x_0)$$

Outra maneira de chegar a este resultado é através da definição de parábola  $d(P, F) = d(P, d)$  e neste caso, temos o foco com coordenadas  $F\left(x_0 + \frac{p}{2}, y_0\right)$  e a diretriz passa a ter como equação  $x - x_0 + \frac{p}{2} = 0$ , colocando esses dados e usando a definição obtemos:

$$\sqrt{\left[x - \left(x_0 + \frac{p}{2}\right)\right]^2 + (y - y_0)^2} = \left| (x - x_0) + \frac{p}{2} \right| \Rightarrow$$

$$\sqrt{\left[(x - x_0) - \frac{p}{2}\right]^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{\left[(x - x_0) + \frac{p}{2}\right]^2}$$

Elevando ao quadrado os dois membros da igualdade, obtemos:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - p \cdot (x - x_0) + \frac{p^2}{4} = (x - x_0)^2 + p \cdot (x - x_0) + \frac{p^2}{4}$$

Subtraindo  $(x - x_0)^2 + \frac{p^2}{4}$  de ambos os lados, obtemos,

$$(y - y_0)^2 - p \cdot (x - x_0) = +p \cdot (x - x_0) \Rightarrow$$

$$(y - y_0)^2 = 2 \cdot p \cdot (x - x_0)$$

Observe o que acontece ao desenvolvermos a equação encontrada acima:

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot x_0 + x_0^2 = 2 \cdot p \cdot y - 2 \cdot p \cdot y_0$$

Agora dividindo ambos os membros da equação por  $2 \cdot p$  e isolando a variável  $x$  obtemos:

$$x = \frac{1}{2 \cdot p} y^2 - \frac{y_0}{p} y + \frac{y_0^2 + 2 \cdot p \cdot x_0}{2 \cdot p}$$

Trocando os coeficientes por  $a = \frac{1}{2.p}$ ,  $b = -\frac{y_0}{p}$  e  $c = \frac{y_0^2 + 2.p.x_0}{2.p}$ ,  
obtemos a expressão para a função quadrática:

$$x = ay^2 + by + c$$

Note que reorganizando as igualdades usadas como coeficientes têm as seguintes relações:

$$a = \frac{1}{2.p} \Rightarrow p = \frac{1}{2.a} \quad (I)$$

$$b = -\frac{y_0}{p} \Rightarrow p = -\frac{y_0}{b} \Rightarrow y_0 = -b.p \quad (II)$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$$y_0 = \frac{-b}{2.a}$$

Essa expressão nos dá a ordenada do vértice da parábola, agora usando o mesmo raciocínio isolando  $x_0$  e usando as igualdades (I) e (II), encontramos a abscissa do vértice da parábola:

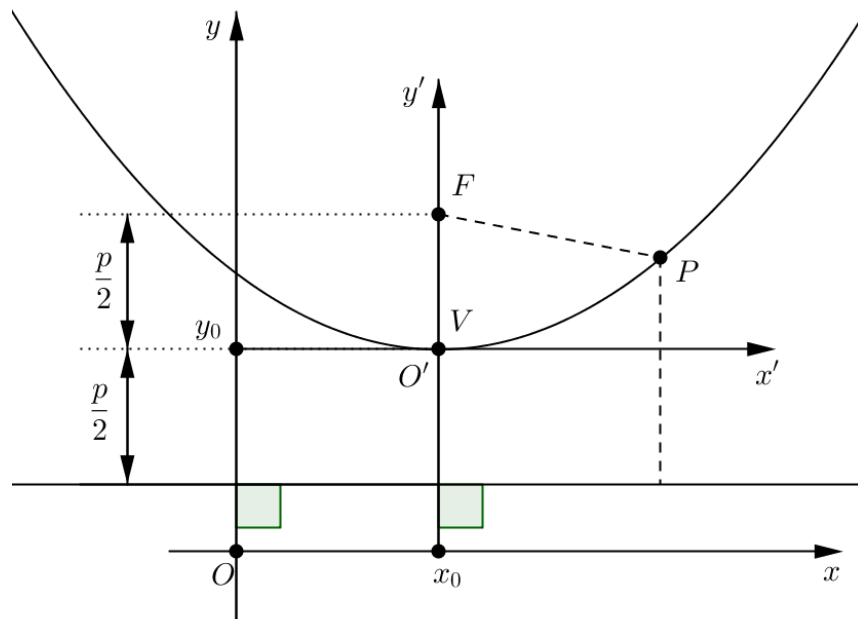
$$c = \frac{y_0^2 + 2.p.x_0}{2.p} \Rightarrow x_0 = \frac{-y_0^2}{2.p} + c$$

$$x_0 = \frac{-b^2 + 4.a.c}{2.a}$$

Também por (I) observe que o coeficiente  $a$  tem mesmo sinal do parâmetro  $p$ , logo a concavidade fica evidente na expressão da função quadrática através deste coeficiente.

**2º Caso:** Eixo de simetria paralelo ao eixo  $y$  (Figura 31).

**Figura 31:** Parábola com Diretriz Paralela ao Eixo  $x$ .



**Fonte:** Venturi, 2003, p.51 (modificado).

De modo análogo, conseguimos a equação da parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo  $y$ :

$$(x - x_0)^2 = 2 \cdot p \cdot (y - y_0)$$

Os demais cálculos seguem de maneira semelhante ao 1º caso, apenas com a inversão de  $x$  por  $y$  nas equações.

Se desenvolvermos os produtos notáveis, eliminar os denominadores e ordenar convenientemente as variáveis, a equação da parábola assume esta forma,

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

com  $A = 0$  ou  $C = 0$ .

A existência do termo em  $xy$  numa equação do 2.º grau indica que o eixo de simetria da parábola é oblíquo aos eixos coordenados, isto será discutido na seção seguinte.

### 2.2.5 Equação Geral Das Cônicas

Neste subitem, seguiremos como referência Lehmann (1985). A expressão geral de uma Cônica, onde os eixos podem estar em qualquer posição com relação aos eixos coordenados é:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Esta equação é considerada completa quando todos seus coeficientes são não nulos. Como vimos anteriormente, se o coeficiente  $B \neq 0$  então, o eixo focal da cônica é oblíquo aos eixos coordenados.

Para eliminar o termo  $xy$ , usamos uma rotação de eixos de amplitude  $\theta$ , então podemos transformar a equação em,

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

onde pelo menos um dos coeficientes,  $A'$  e  $C'$ , é diferente de zero.

Para isso basta aplicar as equações de transformação de coordenadas para rotação de eixos,

$$\begin{cases} x = x' \cdot \cos \theta - y' \cdot \sin \theta \\ y = x' \cdot \sin \theta + y' \cdot \cos \theta \end{cases}$$

na equação geral de uma cônica, assim ficamos com a seguinte expressão

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

e seus coeficientes listados abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} A' = A.\cos^2\theta + B.\operatorname{sen}\theta.\cos\theta + C.\operatorname{sen}^2\theta \\ B' = 2.(C - A).\operatorname{sen}\theta.\cos\theta + B.(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \\ C' = A.\operatorname{sen}^2\theta - B.\operatorname{sen}\theta.\cos\theta + C.\cos^2\theta \\ D' = D.\cos\theta + E.\operatorname{sen}\theta \\ E' = E.\cos\theta - D.\operatorname{sen}\theta \\ F' = F \end{array} \right.$$

Como queremos eliminar o termo  $xy$  da equação o coeficiente  $B'$  deve ser igual a zero, então:

$$B' = 2.(C - A).\operatorname{sen}\theta.\cos\theta + B.(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = 0 \Rightarrow$$

$$(C - A).\operatorname{sen}2\theta + B.\cos2\theta = 0$$

Aqui temos duas possibilidades,

$$\text{Se } A \neq C \Rightarrow \operatorname{tg}\theta = \frac{B}{A-C}.$$

Se  $A = C \Rightarrow B.\cos2\theta = 0$ , com  $B \neq 0$  e o ângulo de rotação entre o intervalo de  $0 \leq \theta \leq \pi$ , então neste caso  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

Assim conseguimos uma maneira prática de calcular o ângulo de rotação da curva cônica com eixo focal oblíquo aos eixos coordenados.

Também tomando a igualdade do primeiro coeficiente  $A' = A.\cos^2\theta + B.\operatorname{sen}\theta.\cos\theta + C.\operatorname{sen}^2\theta$  e a identidade trigonométrica  $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$ , podemos mostrar que

$$B'^2 - 4.A'.C' = B^2 - 4.A.C$$

Como  $B' = 0$ , temos a expressão que indica a natureza do lugar geométrico da equação, assim chama-se esta expressão de indicador de uma cônica e denota-se pela letra  $I$ :

$$I = B^2 - 4.A.C = -4.A'.C'$$

Agora, observe que se a equação  $A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$  tem  $A'$  ou  $C'$  igual a zero, então esta representa uma parábola, portanto  $I = 0$ . Se  $A'$  e  $C'$  são de mesmo sinal, a equação representa uma elipse, neste caso  $I < 0$ . Se  $A'$  e  $C'$  são de sinais contrários, a equação representa uma hipérbole, portanto  $I > 0$ .

Observe que a expressão que representa o indicador da cônica é independente do ângulo de rotação  $\theta$ .

A seguir, na próxima página, vemos o quadro 3, resumo do estudo realizado em Secções Cônicas neste capítulo.

Quadro 3: Resumo do Estudo das Seções Cônicas.

PRIMEIRO SUMARIO DE SEÇÕES CÔNICAS			
CURVA	PARÁBOLA	ELIPSE	HIPÉRBOLA
Definição	Art. 54	Art. 60	Art. 64
Constantes	$p$ = distância do vértice ao foco = distância do vértice à diretriz Foco sobre o eixo	$2a$ = comprimento do eixo maior $2b$ = comprimento do eixo menor $2c$ = distância entre os focos $c^2 = a^2 - b^2$ Focos sobre o eixo maior	$2a$ = comprimento do eixo transverso $2b$ = comprimento do eixo conjugado $2c$ = distância entre os focos $c^2 = a^2 + b^2$ Focos sobre o eixo transverso
Primeira equação padrão Vértice da parábola e centros da elipse e hipérbole na origem	Eixo focal coincidente com o eixo X $y^2 = 4px$ Diretriz: $x = -p$ ; foco $(p, 0)$ (Art. 55, Teorema 1)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Focos $(c, 0)$ e $(-c, 0)$ (Art. 61, Teorema 1)	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Focos $(c, 0)$ e $(-c, 0)$ (Art. 65, Teorema 1)
	Eixo focal coincidente com o eixo Y $x^2 = 4py$ Diretriz: $y = -p$ ; foco $(0, p)$ (Art. 55, Teorema 1)	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ Focos $(0, c)$ e $(0, -c)$ (Art. 61, Teorema 1)	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ Focos $(0, c)$ e $(0, -c)$ (Art. 65, Teorema 1)
Segunda equação padrão Vértice da parábola e centros da elipse e hipérbole no ponto $(h, k)$	Eixo focal paralelo ao eixo X $(y - k)^2 = 4p(x - h)$ (Art. 56, Teorema 2)	$\frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ (Art. 62, Teorema 2)	$\frac{(x - h)^2}{a^2} - \frac{(y - k)^2}{b^2} = 1$ (Art. 69, Teorema 3)
	Eixo focal paralelo ao eixo Y $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ (Art. 56, Teorema 2)	$\frac{(x - h)^2}{b^2} + \frac{(y - k)^2}{a^2} = 1$ (Art. 62, Teorema 2)	$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$ (Art. 69, Teorema 3)
Comprimento do <i>latus rectum</i>	$4p$	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2b^2}{a}$
Excentricidade	$e = 1$	$e = \frac{c}{a} < 1$ (Para a circunferência $e = 0$ )	$e = \frac{c}{a} > 1$
Equação geral da cônica desprovida de termo em $xy$ : $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$	Ou $A = 0$ ou $C = 0$ (Art. 56, Teorema 3)	$A$ e $C$ concordam em sinal (Art. 62, Teorema 3) Para a circunferência $A = C$ (Art. 40, Teorema 2)	$A$ e $C$ diferem em sinal (Art. 69, Teorema 4)
Casos excepcionais	Dois retas coincidentes; duas retas paralelas (Não há lugar geométrico) (Art. 56, Teorema 3)	Ponto (Não há lugar geométrico) (Art. 62, Teorema 3)	Dois retas concorrentes (Art. 69, Teorema 4)

Fonte: Lehmann, 1985, p.183.



Como a Coréia do Sul está territorialmente ladeada pelos soviéticos (Figura 32) impossibilitava de seus navios que continham os mantimentos para seus aliados conseguirem chegar até a costa marítima, pois eram naufragados antes por navios japoneses. Então houve a necessidade de aplicar o seu sistema de localização de barcos, desenvolvido em 1940, para poder localizar e desviar dos navios japoneses.

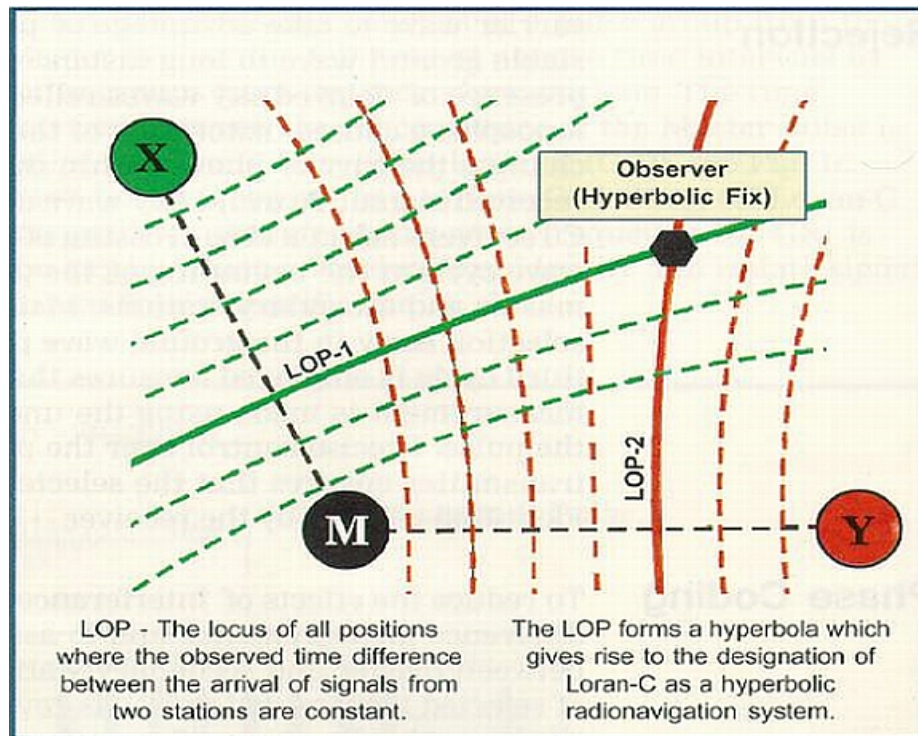
Houve então, a necessidade de aplicar o sistema de localização de barcos, originalmente conhecido como LRM (Loomis Radio Navigation), desenvolvido em 1940, por Alfred Lee Loomis, para poder localizar e desviar dos navios japoneses, hoje o sistema se chama LORAN (Long Range Navigation). Loomis utilizou a Radio Navegação, que se limita à equipamentos eletrônicos de navegação que usam ondas de radiofrequência.

O LORAN é um sistema hiperbólico que deve estar conectado a pelo menos três estações transmissoras, este conjunto de estações chama-se cadeia, tendo uma estação chamada mestre e as outras secundárias.

Cada estação envia sinais repetidos, na velocidade da luz, pulsando em intervalos de tempo específicos. A cadeia de estações tem atraso de tempo exclusivo para distingui-la uma das outras. Estes sinais alcançam o receptor LORAN, localizado a bordo do navio. Ao analisar esses atrasos, somos capazes de calcular a diferença de distância do navio até a estação principal e para uma das estações secundárias. Portanto, a propriedade principal da hipérbole é a base para LORAN.

A área de cobertura de uma cadeia pode ser mostrada em um plano cartesiano, facilitando assim os cálculos. Para encontrar a localização do receptor LORAN, no navio, precisamos encontrar a diferença de distância (convertidos em coordenadas de longitude e latitude) de cada par mestre/secundária para o navio. A cadeia gera várias hipérbolas confocais. Em algum lugar de uma das hipérbolas está o navio. Este mesmo processo é repetido para a outra estação secundária da cadeia. Onde as duas hipérbolas correspondentes se interceptarem está o navio (Figura 33).

**Figura 33:** Cadeia de transmissores LORAN em funcionamento



Fonte: [jproc.ca/hyperbolic/loran\\_c](http://jproc.ca/hyperbolic/loran_c)

A atividade foi elaborada e dividida em quatro partes, visto que se trata do período da história em que se passa a Segunda Guerra Mundial, chamamos cada parte de “cenário problema”. A história é um valioso recurso para o processo de ensino e aprendizagem para se perceber como a teoria e a prática matemáticas foram criadas.

Trabalhamos com uma turma do Ensino Médio, com oito alunos escolhidos para um projeto de sala de altas habilidades, e duas turmas do Ensino Superior sendo um primeiro ano de Engenharia Elétrica com trinta e cinco alunos e um terceiro ano de Licenciatura em Matemática com doze alunos. O tempo de realização de cada cenário foi estipulado em 30 minutos (15 minutos para os alunos e 15 minutos para discussão e conteúdo), perfazendo um total de 2 horas.

Antes de cada aplicação, em cada uma das turmas, explicamos de que se tratava de uma pesquisa para elaboração de uma Dissertação de Mestrado e colhemos os termos de consentimento livre e esclarecido (TCLE) de cada participante. Uma cópia do TCLE encontra-se em anexo.

Os cenários foram separados e distribuídos em ordem a partir do primeiro, de forma individual, o aluno só tinha acesso ao próximo cenário após a resolução, discussão e entendimento da teoria envolvida no problema do cenário anterior. Conforme aplicávamos nas turmas, os cenários foram modificados de acordo com as opiniões colhidas dos próprios alunos e nossas observações.

Após recolhermos as respostas, havia um debate e uma discussão até chegarmos à teoria por trás do problema proposto. Da forma que foi aplicada, houve a introdução da teoria a partir do cenário problema, partindo dos conhecimentos já adquiridos pelos alunos e caminhando para a matemática formal, definições, teoremas e equações, numa estratégia de investigação.

Com a intenção de introduzir um conteúdo novo, o tempo de aplicação poderá ser maior, bem como o tempo para discutir e formalizar a teoria envolvida em cada cenário problema.

Nesta atividade, trabalhamos o conceito matemático intuitivamente, antes da linguagem matemática formal.

Trabalhamos também com o pressuposto de que, anteriormente, a teoria, teoremas e equações da circunferência e hipérbole haviam sido abordados pelo professor da turma, dessa maneira, as atividades se tornam uma ótima ferramenta de avaliação das competências e habilidades adquiridas pelos alunos, e também um exemplo de aplicabilidade das Cônicas na vida real.

### **3.1 OBJETIVOS**

Temos o objetivo geral de verificar como os alunos aplicam os conceitos de Geometria, em especial o de Cônicas, em um problema real e histórico da segunda guerra mundial.

Já vimos que o ensino da Matemática deve contribuir para que os alunos desenvolvam suas habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e, também, à contextualização sociocultural.

Ao final do Ensino Médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano e que demonstre capacidade de: orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. Assim destacamos os objetivos desta atividade.

Dar ao aluno a oportunidade de reconhecer que a matemática surgiu a partir da busca de solução para resolver questões do cotidiano, identificando sua utilização neste momento histórico da humanidade, a Segunda Guerra Mundial.

Despertar no aluno o interesse por alguns fatos do passado para introduzir um determinado tema, no nosso caso as Cônicas, em sala de aula.

Estabelecer a aprendizagem por meio da valorização dos conhecimentos prévios do aluno.

Ao resolver situações problema, que o aluno se sinta capaz de fazer Matemática, de aprender e resolver problemas com segurança.

Reconhecer hipérbole como secção de uma superfície cônica de duas folhas. Conceituar e identificar os elementos de uma hipérbole, bem como, determinar a sua equação.

Resolver situação problema cuja modelagem envolva um estudo analítico da hipérbole, utilizar conhecimentos algébricos e geométricos na seleção ou elaboração de argumentos para justificar a resolução de problemas.

Identificar na hipérbole os elementos que a compõe associando-o a respectiva equação.

## 3.2 DESCRIÇÃO DOS CENÁRIOS

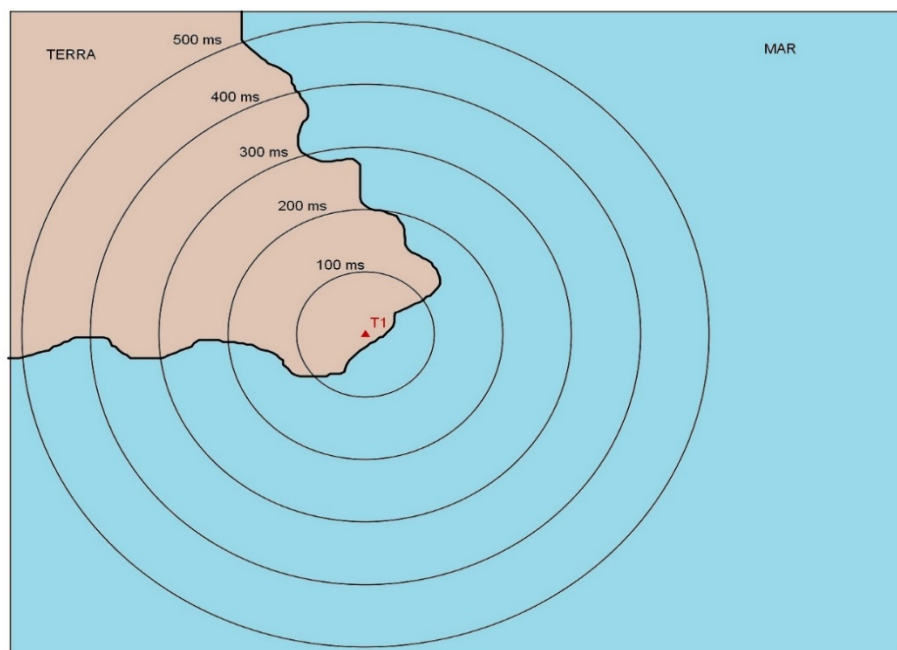
Passaremos a descrever cada cenário realizado, com as respectivas resoluções, bem como os conhecimentos possivelmente adquiridos.

### 3.2.1 Cenário 1

No primeiro cenário, temos dois conhecimentos prévios necessários para poder responder corretamente as questões, além dos cálculos utilizando razão e proporção, o aluno deverá perceber no cenário, através da definição de circunferência, a impossibilidade de localização de um navio através de um único transmissor, logo deve identificar quando um ponto pertence a uma circunferência e seus elementos como o centro e o raio.

#### Cenário 1:

**Figura 34:** Transmissor T1 e Ondas de Rádio.



**Fonte:** Elaborada pelo Autor.

O transmissor T1 (Figura 34) emite ondas de rádio que se propagam em todas as direções. As circunferências traçadas na figura indicam as distâncias alcançadas em intervalos de 100 microssegundos (100  $\mu$ s). A velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas na atmosfera é de, aproximadamente,

300.000 km/s, ou cerca de 162.000 milhas náuticas por segundo. Assim, a onda hertziana percorre 0,162 milhas náuticas por microssegundo, ou 16,2 milhas em 100  $\mu$ s. Então, como a velocidade de propagação das ondas de rádio no ar é aproximadamente constante, a uma distância percorrida pelo sinal transmitido corresponderá certo intervalo de tempo, e vice-versa. Além disso, uma diferença de distâncias corresponderá um determinado intervalo de tempo.

1. Sabendo que o tempo de recepção, pelo navio, da onda de rádio foi de 400  $\mu$ s, a que distância, em quilômetros, encontra-se o navio do transmissor T1?

*Resposta:* Proporcionalmente temos 30 km a cada 100  $\mu$ s, portanto após 400  $\mu$ s teremos 120 km de distância do transmissor T1.

2. Determine a localização exata do navio, se possível. Justifique sua resposta.

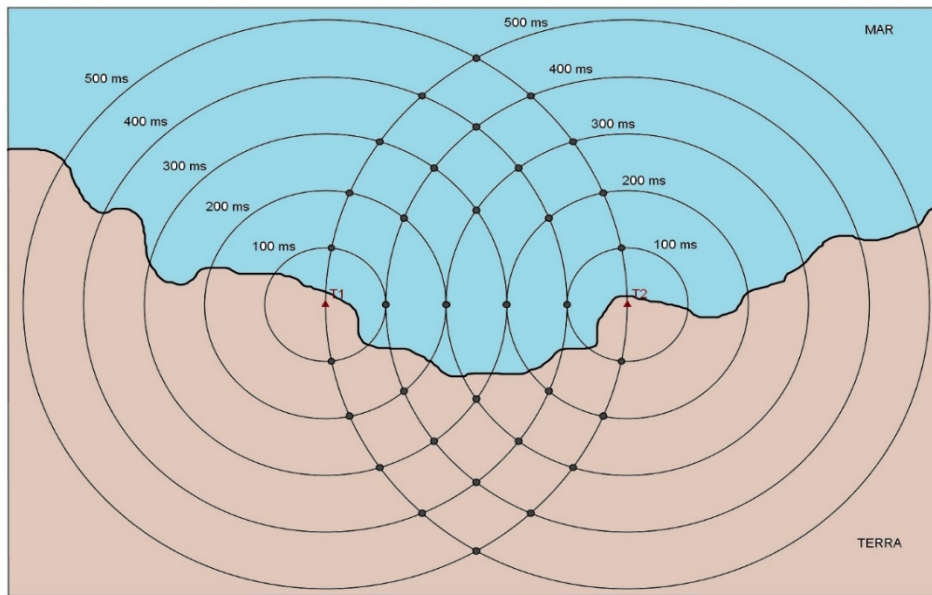
*Resposta:* Como as ondas de rádio se propagam formando circunferências, podemos afirmar que o navio se encontra num raio de 120 km do transmissor T1, e considerando T1 como centro da circunferência, não sendo possível sua localização exata ou aproximada.

### 3.2.2 Cenário 2

No segundo cenário, é preciso reconhecer a posição relativa entre duas circunferências, usar circunferências secantes como base para construção, usando os pontos de intersecção, de uma hipérbole, reconhecer circunferências secantes, localização de pontos de intersecção, construção de tabelas e organização de dados e a definição matemática de hipérbole são os requisitos necessários para a resolução das questões.

#### **Cenário 2:**

**Figura 35:** Dois transmissores e suas respectivas ondas de rádio.



**Fonte:** Elaborada pelo Autor.

Uma característica do sistema (Figura 35), proposto por Loomis, é que o receptor é capaz apenas de medir o intervalo de tempo (diferença) entre a recepção dos dois sinais.

1. Se o receptor marca um intervalo de tempo (diferença) de 200  $\mu$ s, a que distância, em quilômetros, encontra-se o navio de T1? E de T2?

*Resposta:* Devido à interseção entre as circunferências que representam as emissões dos transmissores T1 e T2, a diferença entre as distâncias deve ser constante em 60 km, logo se o navio está a 60 km de T1 estará a 120 km de T2 ou vice-versa, da mesma forma se o navio está a 90 km de T1 estará a 150 km de T2 ou vice-versa, e assim por diante.

2. Em quantos pontos do mapa temos um intervalo de tempo de 200  $\mu$ s? Há outros pontos onde os intervalos de tempo são iguais?

*Resposta:* No mapa encontramos oito pontos que satisfazem a diferença proposta, porém há infinitos pontos onde se podem verificar intervalos de tempo ou distância iguais.

**3.** Observe que há um padrão geométrico constituído pelos pontos que possuem mesmo intervalo de tempo. Este padrão foi chamado de LDP (Linhas de Posição) por Loomis. Em linguagem matemática, como estas curvas são definidas e quais suas características?

*Resposta:* Este padrão de curvas chama-se hipérbole, sua definição matemática diz que: dado um ponto P qualquer sobre a curva, temos que o módulo da diferença entre as distâncias de P a T1 e P a T2 é constante e igual a  $2a$ , assim T1 e T2 chamam-se focos da hipérbole, ou seja,  $|d(P, T_1) - d(P, T_2)| = 2a$ .

**4.** Nesta configuração conseguimos 4 pares de curvas e uma reta entre T1 e T2 representando a diferença (intervalos de tempo) das transmissões, identifique (L1, L2, ...), da esquerda para a direita, as LDP's e construa uma tabela contendo os intervalos de tempo e as respectivas diferenças entre as distâncias:

*Resposta:* Da esquerda para a direita vamos numerar as linhas de posição e construir a tabela,

**Quadro 4:** Tabela que representa a resposta do cenário 2, questão 4.

Linhas de Posição (LDP)	Intervalos de Tempo ( $\mu\text{s}$ )	Diferenças entre Distâncias (km)
L1 e L9	400	120
L2 e L8	300	90
L3 e L7	200	60
L4 e L6	100	30
L5	0	0

**Fonte:** Elaborada pelo Autor.

5. O navio se encontra na curva que representa 200  $\mu$ s, determine a localização exata do navio. Justifique sua resposta.

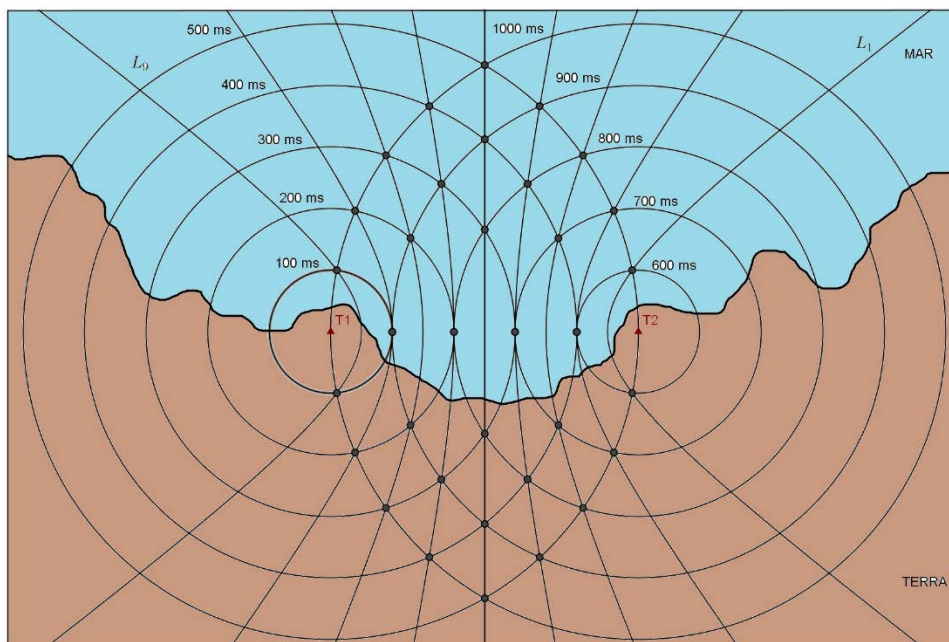
*Resposta:* Temos duas LDP's que representam o intervalo de tempo pedido e cada LDP tem uma infinidade de pontos, portanto não é possível a localização do navio.

### 3.2.3 Cenário 3

No terceiro cenário, os alunos já estão de posse da definição matemática de hipérbole, discutida no cenário anterior, tentando verificar se a ambiguidade de localização do navio pode ser eliminada com um atraso nas transmissões, além disso, encontrar uma equação para a localização do navio usando a definição de hipérbole e um sistema de coordenadas adequado (fornecido) é uma das exigências do cenário. Aqui o cálculo da equação da hipérbole e a definição de módulo são conhecimentos imprescindíveis para correta resolução das questões.

#### Cenário 3:

**Figura 36:** Linhas de Posição (LDP's) Geradas Por Dois Transmissores.



**Fonte:** Elaborada pelo Autor.

Para evitar ambiguidades, visto que cada LDP tem dois ramos, e como o receptor é capaz apenas de medir o intervalo de tempo entre a recepção dos dois sinais, não havendo meio de distinguir se o navio se encontra sobre o ramo próximo a **T1** ou **T2**, foi introduzido um **atraso** (Figura 36). Inicialmente, uma das estações, denominada de **Mestra (T1)**, emite seu sinal. Só quando este for recebido na outra estação, que se denomina **Escrava, Remota** ou **Secundária (T2)**, é que esta retransmitirá o sinal. Então, no exemplo da figura, a estação **T2** só transmitirá o seu sinal 500  $\mu\text{s}$  depois da emissão do sinal da estação **T1**, isto é, haverá um atraso de 500  $\mu\text{s}$  na transmissão da estação **T2**.

1. Construa uma tabela com os novos valores dos ramos das LDP's considerando o atraso de 500  $\mu\text{s}$ . A ambiguidade em termos de tempo foi eliminada? E em termos da diferença de distâncias?

*Resposta:* Considerando o atraso no tempo de transmissão vemos que a ambiguidade temporal é eliminada, porém a ambiguidade local permanece,

**Quadro 5:** Tabela que representa a resposta do cenário 3, questão 1.

Linhas de Posição (LDP)	Intervalos de Tempo ( $\mu\text{s}$ )	Diferenças entre Distâncias (km)
L1	900	120
L2	800	90
L3	700	60
L4	600	30
L5	500	0
L6	400	30
L7	300	60
L8	200	90
L9	100	120

**Fonte:** Elaborada pelo Autor.

2. Com um sistema de coordenadas adequado e considerando o atraso, temos a localização de  $T1(0,0)$  e  $T2(150,0)$ . Se o navio está localizado na posição  $N(x,y)$  sobre a LDP de 200  $\mu\text{s}$ , use a definição matemática de hipérbole para encontrar uma

equação que dê a localização do navio em termos das distâncias até os transmissores T1 e T2:

*Resposta:* Usando a definição do segundo cenário, e os dados  $2c = 150$ ,  $2a = 90$ , podemos escrever que:

$$\begin{aligned} |d(N, T_1) - d(N, T_2)| &= 2a \Rightarrow \\ \left| \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-150)^2 + (y-0)^2} \right| &= 90 \Rightarrow \\ \frac{(x-75)^2}{900} - \frac{y^2}{3600} &= 1 \end{aligned}$$

**3.** Determine, se possível, a localização exata do navio. Justifique sua resposta.

*Resposta:* Apesar de eliminar a ambiguidade temporal ainda não é possível a localização do navio, pois existem infinitos pontos na LDP L8 que satisfazem as condições de tempo e de distância.

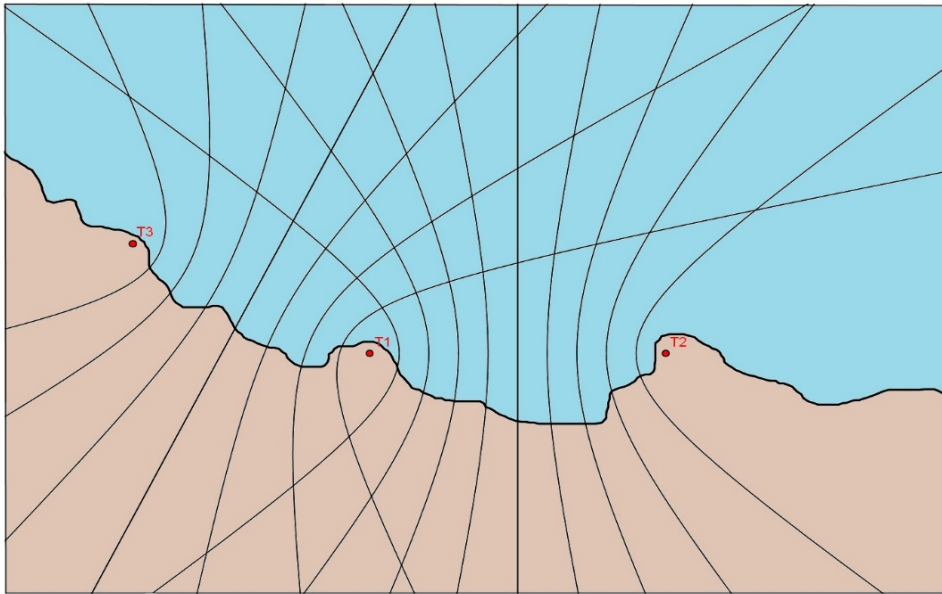
### 3.2.4 Cenário 4

Finalmente, no último cenário temos a conclusão de que precisamos de duas hipérbolas com um foco em comum para a localização exata do barco no sistema LORAN. O aluno pode, neste cenário, aplicar todos os conhecimentos adquiridos nos cenários anteriores para chegar a esta conclusão.

Este cenário, a atividade, além de introduzir o conteúdo desejado, serve de avaliação do aprendizado e verificação do trabalho realizado, podendo, por meio de uma realimentação da atividade, incorporar novos objetivos a serem alcançados, como o de avaliar qualitativamente o aprendizado.

### **Cenário 4:**

**Figura 37:** Quadriculado Hiperbólico - Sistema com Três Transmissores.



**Fonte:** Elaborada pelo Autor.

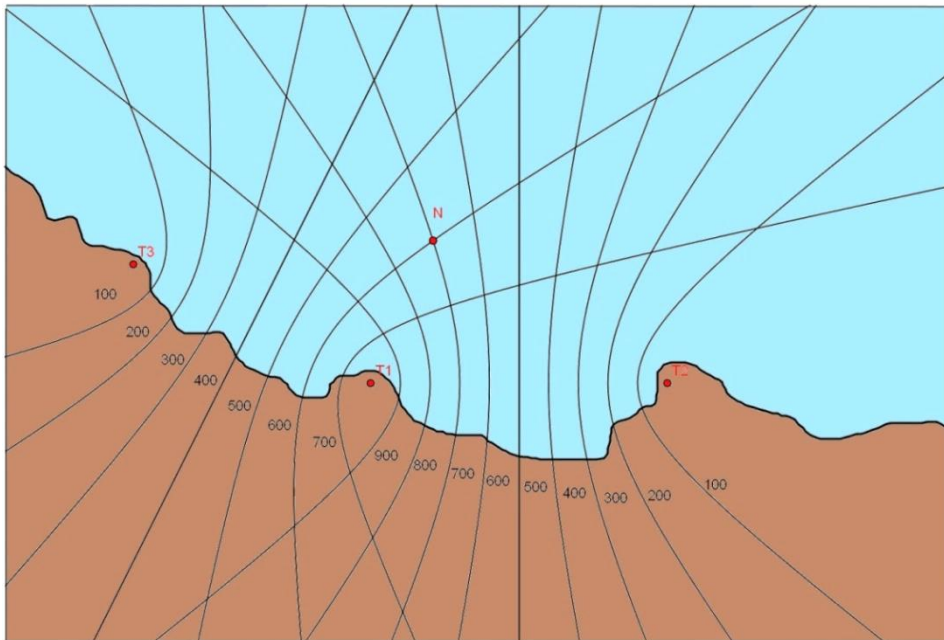
Na figura 37, está plotado o padrão hiperbólico de uma rede constituída por três estações: a **Mestra T1** e duas **Escravas**, ou **Secundárias**, **T2** e **T3**. As duas famílias de LDP's hiperbólicas **T1 – T2** e **T1 – T3** constituem o **quadriculado hiperbólico** traçado na carta marítima. Neste exemplo, o receptor do sistema de navegação hiperbólica determinou duas diferenças de tempo de recepção de sinais:  **$T1 - T2 = 700 \mu s$**  e  **$T1 - T3 = 600 \mu s$** .

1. Determine, se possível, a localização exata do navio. Justifique o porquê desta localização.

*Resposta:* A localização do navio é exatamente na interseção das LDP's entre T1 e T2 de  $700 \mu s$  e entre T1 e T3 de  $600 \mu s$ , há dois pontos de interseção, porém um está sobre a Terra, logo só há apenas uma localização possível.

2. De acordo com os dados do receptor marque na figura a localização exata do navio. Sabendo que  $T1(0,0)$  e  $T2(150,0)$ , qual a distâncias entre T1 e T2? E entre T1 e T3?

**Figura 38:** Localização do Navio no Quadriculado Hiperbólico.



**Fonte:** Elaborada pelo Autor.

*Resposta:* Distância entre T1 e T2 é de 150 km, como visto no terceiro cenário e seguindo o padrão, entre T1 e T3 temos sete LDP's e oito espaços entre elas, cada espaço tem 15 km, logo entre T1 e T3 tem-se 120 km. Localização figura 38.

**3.** Qual o número de transmissores para que ocorra uma localização ideal do navio?

*Resposta:* No mínimo 3 estações transmissoras, sendo uma estação mestra e duas secundárias, mas existem configurações de 4 ou 5 estações.

## 4 JUSTIFICATIVAS

Além das razões que já discorremos anteriormente, como a contextualização dos conhecimentos geométricos, que por si só, já nos parecem suficientes para a realização desta atividade, buscamos nas especificidades das turmas trabalhadas, do Ensino Médio e Ensino Superior, outros motivos que também julgamos relevantes.

### 4.1 No ENSINO MÉDIO

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394/96), seção IV, Art. 35, o Ensino Médio tem como finalidades centrais:

- I** - a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental, possibilitando o prosseguimento de estudos;
- II** - a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores;
- III** - o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico;
- IV** - a compreensão dos fundamentos científico-tecnológicos dos processos produtivos, relacionando a teoria com a prática, no ensino de cada disciplina.

Conforme destacam os PCNEM (2002) e os PCN+ (2002), o ensino da Matemática pode contribuir para que os alunos desenvolvam habilidades relacionadas à representação, compreensão, comunicação, investigação e, também, à contextualização sociocultural.

Segundo as Orientações Curriculares Para o Ensino Médio (2006), os alunos deveriam estar aptos a resolver problemas usando conhecimentos, competências e habilidades adquiridos em Matemática no Ensino Médio, bem como saber aplicá-los corretamente no seu dia a dia;

Ao final do Ensino Médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do cotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico. (BRASIL, 2006, p. 69)

Particularmente o enfoque deste trabalho, no qual a Geometria Analítica e as Seções Cônicas são de fundamental interesse;

O estudo da *Geometria* deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. (BRASIL, 2006, p. 75)

Orientar-se no espaço, sem entrar no mérito filosófico da expressão, é ser capaz de percorrer espaços através da percepção e memorização que cada ser humano tem em dado ambiente. A orientação espacial pode ser entendida como a habilidade pessoal em determinar sua localização no ambiente.

Um mapa é um desenho representativo de um país, uma região, etc, logo leitura e compreensão de mapas é uma habilidade importante e necessária. Essas representações podem ser utilizadas em diferentes contextos em nossa vida contemporânea. O mapa é uma aceção da interação humana, pois faz parte da criação de uma realidade espacial, contribuindo e dando forma ao mundo real. Dessa maneira, o sujeito deve estar preparado para conseguir ler, analisar e entender essa linguagem.

Estimar é opinar a respeito de algo de que não se tem certeza e comparar distâncias percorridas, aqui se pode avaliar a habilidade de o aluno lidar com unidades de medida não usuais, utilizando instrumentos visuais ou qualquer outro elemento espacial como referência.

Reconhecer propriedades de figuras geométricas básicas permite ao aluno compreender, descrever e representar, de forma organizada e concisa, o ambiente que o cerca. No Ensino Médio, há a necessidade de reconhecimento destas figuras geométricas por meio de suas definições e propriedades, pelo menos o aluno deverá saber justificá-las de forma simples e evoluir para a demonstração formal usando o raciocínio dedutivo.

Saber usar diferentes unidades de medida significa: compreender o processo de medida como uma comparação entre grandezas de mesma natureza, usar unidades não padronizadas e compreender a necessidade da adoção de unidades padronizadas para estabelecer medidas precisas, converter unidades de medida para resolver questões de matemática e para entender o mundo que nos cerca.

Na sociedade contemporânea, quase tudo se relaciona com a informação e estas informações tem uma importância cada vez maior em nossas vidas. As informações vêm acompanhadas, de listas, tabelas, gráficos de vários tipos, formas geométricas e unidades diferentes de medida.

## **4.2 NO ENSINO SUPERIOR**

### 4.2.1 Licenciatura Em Matematica

Na resolução CEPE-UEL 45/2005 que reformula o Projeto Político-Pedagógico do Curso de Matemática - Habilitação: Licenciatura que foi implantado a partir do ano letivo de 2005 destacou-se o objetivo geral do curso: “O objetivo do Curso de Matemática – Habilitação: Licenciatura - é o de preparar o professor de Matemática para exercício do magistério no Ensino Fundamental e Médio [...]”.

O curso de Licenciatura em Matemática na UEL tem, em sua grade curricular, a disciplina de Geometria Analítica ministrada na 1ª série do curso e conta, em sua ementa, com os conteúdos de operações vetoriais, **cônicas** e

quádricas, além de, também, estar presente nesta série do curso a disciplina de Geometria e Desenho.

É importante que os conteúdos matemáticos sejam tratados de modo que o futuro profissional seja capaz de explorar situações-problema, procurar regularidades, fazer conjecturas, fazer generalizações, pensar de maneira lógica, comunicar-se matematicamente por meio de diferentes linguagens, conceber que a validade de uma afirmação está relacionada à consistência da argumentação, compreender noções de conjectura, teorema, demonstração, examinar consequências do uso de diferentes definições, analisar erros cometidos e ensaiar estratégias alternativas, ter confiança pessoal em desenvolver atividades matemáticas e apreciar a estrutura abstrata que está presente na Matemática e sua função social. (UEL, 2005, p.3)

Dentre os objetivos específicos do curso:

O currículo do curso de Licenciatura em Matemática deve oportunizar o desenvolvimento da capacidade de: Compreender e estabelecer conceitos e argumentações matemáticas; interpretar dados, elaborar modelos e resolver problemas, integrando os vários campos da Matemática; estabelecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. (UEL, 2005, p.14)

Ao aplicarmos a atividade na 3ª série do curso de Licenciatura em Matemática da UEL, investigamos como os futuros professores, aprenderam este conteúdo de Secções Cônicas e mostramos-lhes, através da atividade proposta, uma importante aplicação da secção cônica hipérbole que perdura, desde a Segunda Guerra Mundial, quando foi concebida por Alfred Lee Loomis, até hoje, e como quase tudo em ciência, por necessidade, neste caso, de vencer a guerra e transpor um obstáculo rumo à vitória.

Também possibilitamos aos alunos da licenciatura, com esta atividade, um exemplo de como abordar o conteúdo de Secções Cônicas no Ensino Médio, para o qual estão sendo preparados para trabalhar.

O futuro professor deve ter condições técnicas para planejar situações de ensino e estabelecer interações da Matemática com o desenvolvimento tecnológico e social da humanidade. Assim seu ensino não deixará de lado os

aspectos históricos, sociais e tecnológicos que marcaram o desenvolvimento humano, acreditamos que estas atividades contribuiriam nesta direção.

#### 4.2.2 Engenharia Elétrica

Na resolução CEPE-UEL nº 355/2005 que consta a reformulação do Projeto Político-Pedagógico do Curso de Engenharia - Habilitação: Engenharia Elétrica, que foi implantado a partir do ano letivo de 2006.

No capítulo I, temos as diretrizes do curso de Engenharia Elétrica, assim destacamos o artigo 2º, item II:

II. Formação básica garantindo a assimilação, de maneira integrada, dos conceitos fundamentais de matemática, física, química e computação, de forma a atender às reais necessidades das disciplinas profissionalizantes; (UEL, 2005, p.1)

Temos ainda os objetivos específicos e metas a serem alcançadas na primeira série do curso, dentre eles podemos destacar:

Objetivos Específicos: [...] Aplicar conhecimentos matemáticos, científicos, tecnológicos e instrumentais à engenharia; [...] Metas: Na 1ª Série, o discente deverá desenvolver conhecimentos básicos de matemática, física, computação e química para aplicação em engenharia; E conhecimentos específicos da área de atuação profissional através das disciplinas de introdução à engenharia e eletricidade básica. (UEL, 2005, p.8)

O curso oferece a disciplina de Geometria Analítica e Álgebra Linear na 1ª série, que cuja ementa destaca vetores e operações com vetores, sistemas de coordenadas, distância, círculo e **seções cônicas**.

Apesar de terem a disciplina de Geometria Analítica, observa-se que o tópico de Seções Cônicas, na ementa, está acompanhado da palavra *classificação*, que sugere uma abordagem sem aplicabilidade prática.

Em sua formação básica, o Engenheiro Elétrico integra os conceitos fundamentais de Matemática, como, relacionar unidades de medidas diversas, reconhecer diferentes formas geométricas e suas propriedades, portanto a atividade proposta contribuirá para que os alunos trabalhem um pouco mais estes conhecimentos e habilidades intrínsecos da profissão de engenheiro.

## 5 ANÁLISES

### 5.1 Do ENSINO MÉDIO

Com a atividade proposta, houve grande envolvimento e interesse por parte dos participantes, principalmente devido à curiosidade despertada em saber onde e como passaríamos de um cenário a outro e qual a conclusão final. Os alunos gostaram do modo diferenciado de estudar o conteúdo de hipérbole, seus elementos e equações.

Algumas dificuldades nos chamaram a atenção, todas foram sanadas no decorrer da própria atividade, como:

- Dificuldade em identificar unidades de tempo e distância.
- Alguns alunos não sabiam razão e proporção.
- Falta de noções básicas de o que é uma circunferência.

Esperávamos que estes itens fossem de rápida resolução, visto que são conteúdos que devem ser trabalhados em Matemática em todo Ensino Fundamental e retomados no Ensino Médio, porém percebemos que os alunos tiveram dificuldades e não demonstraram ter conhecimentos sobre esses conceitos.

**Figura 39:** Opiniões sobre a atividade aplicada no Ensino Médio.

<p>Dê sua opinião ou sugestões sobre a atividade proposta</p> <p><i>É uma atividade bem elaborada, com dados específicos, compreensão e interpretação. Apenas sugiro uma melhor abordagem da atividade em relação à matemática.</i></p>
<p>Dê sua opinião ou sugestões sobre a atividade proposta</p> <p><i>Ótimo, legal, uma oportunidade de sabermos mais sobre a hipérbole <sup>além</sup> uma atividade <del>bom</del> e estudarmos ela de uma maneira diferente.</i></p>

**Fonte:** Atividade aplicada no Ensino Médio.

Houve também, entre os elogios, pedidos de mais tempo para abordar os conteúdos de matemática.

## 5.1.1 Cenário 1

Em nossa análise verificamos que apenas 37,5% dos alunos pesquisados resolveram todo o cenário corretamente e usaram a definição de circunferência nas suas justificativas. A maioria dos alunos demonstraram conhecer as propriedades de razão e proporção em especial a “regra de três”, com alguns pequenos erros de cálculo, que usaram como estratégia para calcular a distância do navio ao transmissor T1.

**Figura 40:** Exemplos de respostas do cenário 1, questão 1 no Ensino Médio.

<p>1) Sabendo que o tempo de recepção, pelo navio, da onda de rádio foi de 400 <math>\mu</math>s, a que distância, em quilômetros, encontra-se o navio do transmissor T1?</p> <p><u>12.000.000 km</u> X</p>
<p>1) Sabendo que o tempo de recepção, pelo navio, da onda de rádio foi de 400 <math>\mu</math>s, a que distância, em quilômetros, encontra-se o navio do transmissor T1?</p> <p><u>120 km</u> J</p>

**Fonte:** Atividade aplicada no Ensino Médio.

Também foi possível observar uma “*unanimidade*” em reconhecer a impossibilidade na localização exata do navio com as informações oferecidas pelo cenário, porém apesar de reconhecerem a dificuldade de localizar a embarcação, não justificaram usando a definição de circunferência e seus elementos, como centro e raio.

**Figura 41:** Exemplos de respostas do cenário 1, questão 2 no Ensino Médio.

<p>2) Determine a localização exata do navio. Justifique sua resposta.</p> <p><u>Não pode estar em qualquer lugar num circunferência de raio de 120 km a partir do transmissor T1</u></p>
<p>2) Determine a localização exata do navio. Justifique sua resposta.</p> <p><u>A determinação da localização exata não é possível, uma vez que a única informação é a distância. Porém, como o lugar geométrico dos pontos que equidistam de outro é uma circunferência, podemos afirmar que o navio pertence a circunferência de raio <math>6 \times 10^4</math> km.</u></p>
<p>2) Determine a localização exata do navio. Justifique sua resposta.</p> <p><u>Não, pois sabemos que é na linha dos 400 Ms, mas não sabemos ao certo em que área do mar.</u> X</p>

**Fonte:** Atividade aplicada no Ensino Médio.

Todos os alunos buscaram a estratégia de resolução apropriada ao problema do cenário 1 e as questões envolvidas, mas devido aos erros de cálculo, multiplicação e divisão, e a falta de justificativa apropriada na segunda questão, tivemos um índice de acerto que consideramos baixo para o primeiro cenário.

Pudemos observar que os alunos possuem a habilidade de ler mapas, comparar distâncias e trabalhar com diferentes unidades de comprimento, mas com dificuldade em reconhecer propriedades geométricas, neste caso, da circunferência.

### 5.1.2 Cenário 2

De todos os pesquisados apenas 12,5% dos participantes sabia que o nome da curva formada na figura era hipérbole, porém não sabiam defini-la matematicamente, 100% conseguiram observar que havia ambiguidade na localização do navio, mas apenas um justificou corretamente “o navio pode estar em qualquer lugar da curva (hipérbole)”.

**Figura 42:** Exemplos de respostas do cenário 2, questão 1 no Ensino Médio.

<p>1) Se o receptor marca um intervalo de tempo (diferença) de 200 <math>\mu</math>s, a que distância, em quilômetros, encontra-se o navio de T1? E de T2?</p> <p><i>T<sub>1</sub> = 2 em 60 km, 2 em 90 km, 2 em 120 km e 2 em 150 km.</i></p> <p><i>T<sub>2</sub> = 2 em 6 km, 2 em 90 km, 2 em 720 km e 2 em 150 km.</i></p>
<p>1) Se o receptor marca um intervalo de tempo (diferença) de 200 <math>\mu</math>s, a que distância, em quilômetros, encontra-se o navio de T1? E de T2?</p> <p><i>Se o navio estiver na onda 200 <math>\mu</math>s, está a 60 km, se estiver na 300 <math>\mu</math>s a 90 km, na 400 <math>\mu</math>s a 120 km, na 500 <math>\mu</math>s a 150 km, tanto para T<sub>1</sub> quanto T<sub>2</sub>.</i></p>

**Fonte:** Atividade aplicada no Ensino Médio.

Neste cenário os alunos conseguiram perceber, na questão 1, a ambiguidade na localização do barco e observaram que dependendo da perspectiva em que se considerasse o intervalo de tempo as distâncias teriam resultados diferentes, mostrando novamente habilidade em orientar-se na leitura de mapas e manipular diferentes unidades de medida.

**Figura 43:** Exemplos de respostas do cenário 2, questão 2 no Ensino Médio.

2) Em quantos pontos do mapa temos um intervalo de tempo de 200  $\mu\text{s}$ ? Há outros pontos onde os intervalos de tempo são iguais?  
 8 pontos. Sim, como nos pontos onde o intervalo é 100  $\mu\text{s}$ .

2) Em quantos pontos do mapa temos um intervalo de tempo de 200  $\mu\text{s}$ ? Há outros pontos onde os intervalos de tempo são iguais?  
 8 pontos. Sim, há.

**Fonte:** Atividade aplicada no Ensino Médio.

Como ficou claro a ambiguidade na questão 1, os alunos não tiveram dificuldade em responder, com alguns pequenos erros de contagem, a quantidade de pontos que representavam, no mapa, o intervalo de tempo pedido, e também em justificar que poderia haver outros pontos com intervalos de tempo iguais.

**Figura 44:** Exemplos de respostas do cenário 2, questão 3 no Ensino Médio.

3) Observe que há um padrão geométrico constituído pelos pontos que possuem mesmo intervalo de tempo. Este padrão foi chamado de LDP (Linhas de Posição). Em linguagem matemática, como estas curvas são definidas e quais suas características?  
 hiperbole?

**Fonte:** Atividade aplicada no Ensino Médio.

Na questão 3 temos novamente o reconhecimento de propriedades geométricas, agora da interseção de duas circunferências e da hipérbole, como requisito para a resposta, neste ponto a dificuldade se apresenta novamente e poucos alunos identificaram a curva, formada no mapa, como hipérbole, porém nenhum a caracterizou matematicamente. Devido ao tempo reduzido, optamos por construir a tabela da questão 4 juntamente com os alunos ao discutir o cenário.

**Figura 45:** Exemplos de respostas do cenário 2, questão 5 no Ensino Médio.

5) O navio se encontra na curva que representa 200  $\mu\text{s}$ , determine a localização exata do navio. Justifique sua resposta.  
 Não é possível, pois o navio pode estar em qualquer lugar da curva.

5) O navio se encontra na curva que representa 200  $\mu\text{s}$ , determine a localização exata do navio. Justifique sua resposta.  
 Impossível, transmissor insuficiente.

**Fonte:** Atividade aplicada no Ensino Médio.

Apesar de não identificar a curva todos responderam que com a configuração atual do cenário não era possível a localização da embarcação. A habilidade de leitura de mapas e reconhecimento de propriedades geométricas foram plenamente trabalhadas neste cenário.

### 5.1.3 Cenário 3

Tivemos um total de 75% dos alunos percebendo que a ambiguidade de localização em termos de tempo foi eliminada com o atraso de sinal proposto, porém em termos de distância a ambiguidade permanecia. Todos montaram uma equação usando a definição de hipérbole estudada no cenário anterior, mas nenhum aluno resolveu tal equação deixando-a apenas indicada, algumas em módulo, outras nem isso.

**Figura 46:** Exemplos de respostas do cenário 3, questão 1 no Ensino Médio.

<p>1) Construa uma tabela com os novos valores dos ramos das hipérbolas (LDP's) considerando o atraso de 500 <math>\mu</math>s. A ambiguidade em termos de tempo foi eliminada? E em termos da diferença de distâncias?</p> <p><i>Sim, a ambiguidade foi eliminada e em termos da diferença de distâncias não foi eliminada.</i></p>
<p>1) Construa uma tabela com os novos valores dos ramos das hipérbolas (LDP's) considerando o atraso de 500 <math>\mu</math>s. A ambiguidade em termos de tempo foi eliminada? E em termos da diferença de distâncias?</p> <p><i>A ambiguidade foi eliminada, no entanto a diferença de distância não.</i></p>

**Fonte:** Atividade aplicada no Ensino Médio.

Não vemos dificuldades na construção de tabelas, essas foram realizadas novamente conjuntamente com os alunos, devido ao tempo reduzido de que dispomos, logo a questão 1 foi amplamente realizada com sucesso por eles.

Observando as respostas das questões anteriores 87,5% perceberam a impossibilidade da localização exata do navio neste cenário. Temos aqui um crescimento nas respostas corretas envolvendo o reconhecimento de padrões geométricos e em especial as propriedades de hipérbole, isso se deve ao

fato de, após cada cenário respondido pelos alunos, trabalharmos os conteúdos envolvidos no cenário para então passarmos ao seguinte.

**Figura 47:** Exemplos de respostas do cenário 3, questão 2 no Ensino Médio.

2) Com um sistema de coordenadas adequado e considerando o atraso, temos a localização de T1(0,0) e T2(150,0). Se o navio está localizado na posição N(x,y) sobre a LDP de 200  $\mu$ s, use a definição matemática de hipérbole para encontrar uma equação que dê a localização do navio em termos das distâncias até os transmissores T1 e T2.

$$d(N, T_1) - d(N, T_2) = 60$$


---

2) Com um sistema de coordenadas adequado e considerando o atraso, temos a localização de T1(0,0) e T2(150,0). Se o navio está localizado na posição N(x,y) sobre a LDP de 200  $\mu$ s, use a definição matemática de hipérbole para encontrar uma equação que dê a localização do navio em termos das distâncias até os transmissores T1 e T2.

$$d(x, T_1) - d(y, T_2) = c + \Delta \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{y^2 + 150^2} = 60$$

**Fonte:** Atividade aplicada no Ensino Médio.

Como todos montaram uma equação para a questão 2, partimos das respostas e mostramos a eles como desenvolver até a forma canônica da equação da hipérbole. Na última questão vemos o poder de observação dos alunos quanto a impossibilidade de localizar o navio, ou seja, a leitura de mapas e a orientação espacial é uma das habilidades bem desenvolvidas nos alunos desta turma do Ensino Médio.

**Figura 48:** Exemplos de respostas do cenário 3, questão 3 no Ensino Médio.

3) Determine a localização exata do navio. Justifique sua resposta.

Não é possível, pois a localização não é única.

---

3) Determine a localização exata do navio. Justifique sua resposta.

Não é possível, ainda possui 2 pontos sobre o mar impedindo de saber a verdadeira local do navio.

**Fonte:** Atividade aplicada no Ensino Médio.

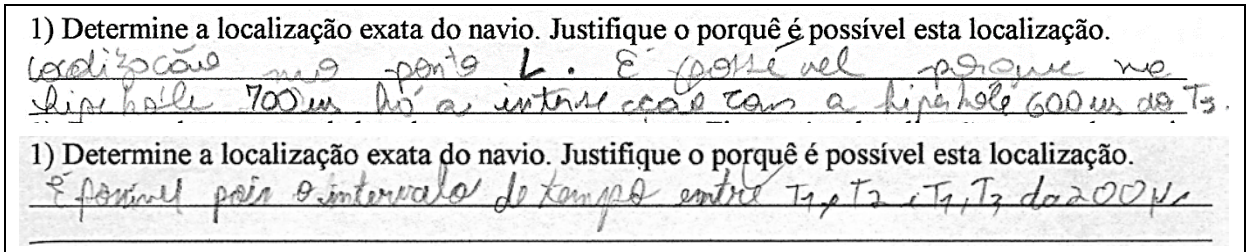
Ao final deste cenário os alunos começaram a perceber a aplicabilidade da Matemática, das Secções Cônicas e da hipérbole neste importante momento da história da humanidade.

#### 5.1.4 Cenário 4

Observamos, neste cenário, que os objetivos foram alcançados e as dificuldades sanadas. Conforme os conceitos e propriedades geométricas foram

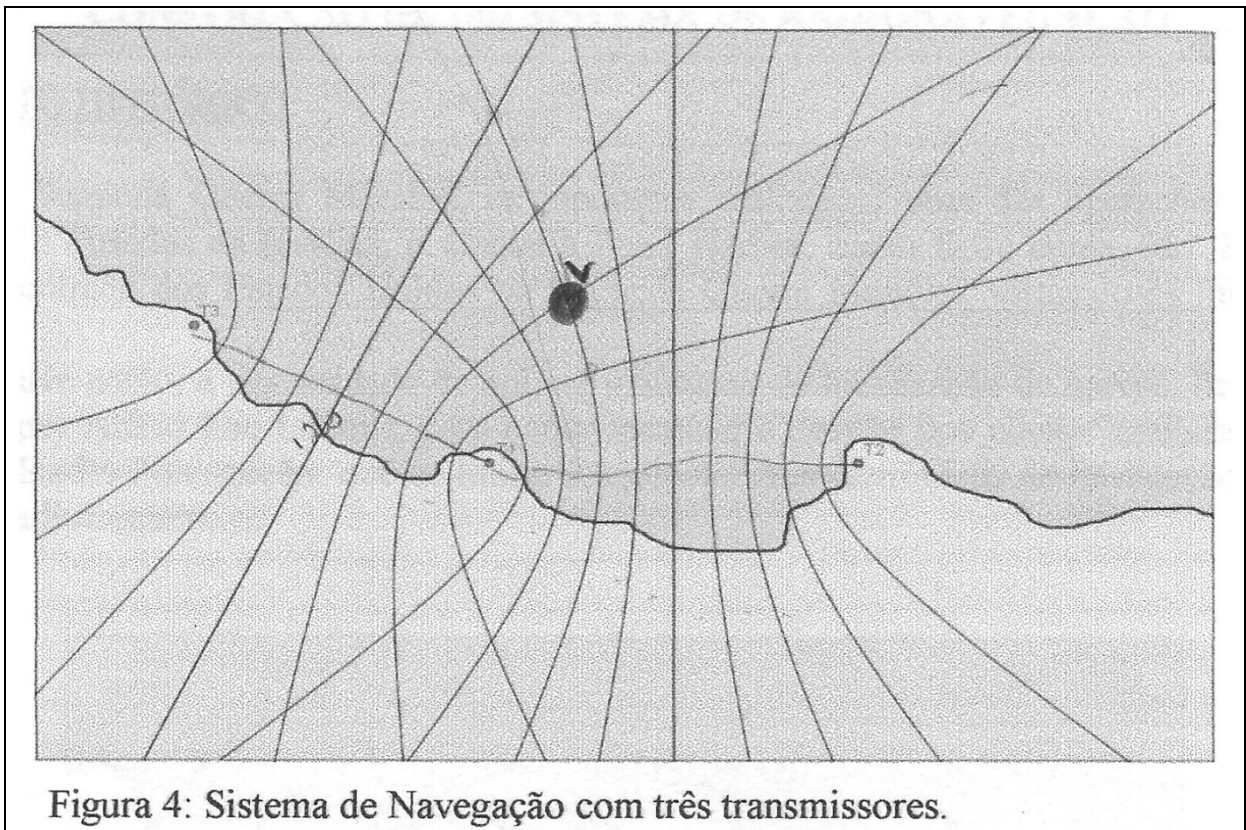
sendo incorporados aos cenários, conseqüentemente foram aprendidos pelos alunos no decorrer da atividade.

**Figura 49:** Exemplos de respostas do cenário 4, questão 1 no Ensino Médio.



**Fonte:** Atividade aplicada no Ensino Médio.

**Figura 50:** Exemplo de resposta do cenário 4, questão 2 no Ensino Médio.



**Fonte:** Atividade aplicada no Ensino Médio.

Todos os alunos participantes responderam corretamente as questões deste último cenário, usando as definições aprendidas nos cenários anteriores, deixando evidente que os objetivos propostos pela atividade, como orientação espacial, leitura de mapas, manipulação de diferentes unidades de medida e principalmente reconhecer propriedades e conceitos geométricos das Cônicas, no caso particular de hipérbole, foram, praticamente todos, alcançados como queríamos.

**Figura 51:** Exemplos de respostas do cenário 4, questão 3 no Ensino Médio.

<p>3) Qual o número de transmissores para que ocorra uma localização ideal do navio?</p> <p>Tres ja e suficiente.</p>
<p>3) Qual o número de transmissores para que ocorra uma localização ideal do navio?</p> <p>3 Transmissores</p>

**Fonte:** Atividade aplicada no Ensino Médio.

Além de mostrar aos alunos, de forma clara, a aplicabilidade do conteúdo de Seções Cônicas em um fato histórico e real, podemos evidenciar também que o sistema criado por Alfred Lee Loomis, usado até hoje na navegação e aeronavegação em todo o mundo, serviu de base para o sistema usado mundialmente conhecido como GPS e está presente no cotidiano de todos.

## 5.2 DO ENSINO SUPERIOR

### 5.2.1 Licenciatura Em Matemática

A atividade foi recebida pelos alunos com muito interesse, ao explicar o contexto histórico do trabalho, observamos que este despertou a curiosidade dos mesmos. Os alunos mostraram facilidade em ler os enunciados e questões propostas, alguns alunos responderam mais rápido que outros, nada fora do normal, por experiência própria sabemos que a maioria das turmas não são homogêneas neste quesito.

Conforme os cenários eram submetidos a eles, os alunos mostravam mais dificuldades em responder as questões propostas, alguns mostrando descontentamento com seu próprio desempenho. Isto foi um ponto interessante e positivo da atividade, vemos que houve uma motivação extra em “reaprender” o conteúdo de cônicas.

As dificuldades apresentadas são praticamente as mesmas, que já citamos, de todas as turmas pesquisadas.

Alguns alunos tiveram que se ausentar por motivos de transporte, o que ocasionou também a entrega de cenários respondidos sem muito critério e rigor nas respostas.

Interpretar dados, elaborar modelos e resolver problemas, é uma das capacidades a serem desenvolvidas nos alunos, segundo o Projeto Político Pedagógico do curso Licenciatura em Matemática, então atividades como esta podem ajudar muito neste intuito. Nas opiniões e sugestões, além dos elogios ao trabalho, houve também algumas reclamações sobre o vocabulário utilizado, sendo, para estes alunos, de difícil entendimento.

**Figura 52:** Opiniões da atividade aplicada na Licenciatura em Matemática.

<p>Dê sua opinião ou sugestões sobre a atividade proposta</p> <p><i>está difícil !!</i></p> <p><i>Acho que o ensino médio não resolve.</i></p>
<p>Dê sua opinião ou sugestões sobre a atividade proposta</p> <p><i>Muito interessante. Um pouco difícil,</i></p> <p><i>mas gostei, talvez mais dicas, e vocabulário mais</i></p> <p><i>claro</i></p>

**Fonte:** Atividade aplicada na Licenciatura em Matemática.

Podemos observar que a turma do Ensino Médio se equiparou ao Ensino Superior, lembrando que se trata de uma turma de altas habilidades.

Ao final podemos perceber que os alunos apreciaram a atividade e muitos pretendem utilizar a ideia em suas futuras aulas como professores, repercutindo assim a proposta de trabalho.

### 5.2.1.1 Cenário 1

Os alunos, em sua maioria, responderam corretamente, usando os conhecimentos de razão e proporção, a questão 1 do cenário, mostrando habilidade na montagem e resolução de uma “regra de três”. Dissemos “em sua maioria”, pois houve um inesperado erro de cálculo, e uma resposta em milhas, já que a resposta é

pedida em quilômetros, consideramos como uma resposta errada. O bom desempenho, visto que tratamos com futuros professores de Matemática, já era esperado nesta questão.

**Figura 53:** Exemplos de respostas no cenário 1, questão 1 na Licenciatura em Matemática.

1) Sabendo que o tempo de recepção, pelo navio, da onda de rádio foi de  $400 \mu\text{s}$ , a que distância, em quilômetros, encontra-se o navio do transmissor T1?

*O navio encontra-se a 120km do transmissor T1.*

---

1) Sabendo que o tempo de recepção, pelo navio, da onda de rádio foi de  $400 \mu\text{s}$ , a que distância, em quilômetros, encontra-se o navio do transmissor T1?

*$100 \mu\text{s} = 16,2 \text{ m} = 30 \text{ km}$        $100 \mu\text{s} \text{ --- } 30 \text{ km}$        $x = 120 \text{ km}$   
 $400 \mu\text{s} \text{ --- } x$*

---

1) Sabendo que o tempo de recepção, pelo navio, da onda de rádio foi de  $400 \mu\text{s}$ , a que distância, em quilômetros, encontra-se o navio do transmissor T1?

*$16,2 \text{ m} \text{ --- } 100 \mu\text{s}$        $x = 64,8 \text{ m}$   
 $x \text{ --- } 400$*

**Fonte:** Atividade aplicada na Licenciatura em Matemática.

Observamos, na questão 2, que todos os alunos foram contundentes em afirmar que a localização do navio não era possível com as informações presentes no cenário, mas, para nossa surpresa, apenas dois alunos conseguiram justificar usando as propriedades, definições e elementos de uma circunferência, como centro e raio. Muitos responderam não ser possível “*pois o barco se encontra no círculo de  $400 \mu\text{s}$* ”, mostrando aqui uma confusão, entre as definições de círculo e circunferência, que não foi observada nas respostas obtidas dos alunos do Ensino Médio. Outras respostas como semicírculo, coroa circular e até mesmo envolvendo área foram encontradas.

**Figura 54:** Exemplos de respostas no cenário 1, questão 2 na Licenciatura em Matemática.

2) Determine a localização exata ou aproximada do navio. Justifique sua resposta.

*O navio poderá estar em qualquer parte em um raio de  $400 \text{ ms}$  com excesso do raio no este, explicito no mapa acima.*

---

2) Determine a localização exata ou aproximada do navio. Justifique sua resposta.

*NÃO é possível de determinar, ele pode estar em todo o círculo  $400 \mu\text{s}$ , exceto na parte de terra.*

**Fonte:** Atividade aplicada na Licenciatura em Matemática.

### 5.2.1.2 Cenário 2

Neste cenário o aluno deve perceber através da interseção de duas circunferências a ambiguidade obtida com dois transmissores, assim os alunos puderam na questão 1 e 2, observar que mudando o ponto de referência há uma mudança nos valores das distâncias do navio aos transmissores, com exceção de um aluno, que equacionou e não solucionou o problema, os demais compreenderam rapidamente esta idéia.

**Figura 55:** Exemplos de respostas no cenário 2, questão 1 na Licenciatura em Matemática.

<p>1) Se o receptor marca um intervalo de tempo (diferença) de <math>200 \mu s</math>, a que distância, em quilômetros, encontra-se o navio de T1? E de T2?</p> <p><math>T_1</math> até o navio <math>60 km</math> e <math>T_2</math> até o navio <math>120 km</math> ou  <math>T_1</math> até o navio <math>120</math> e <math>T_2</math> até o navio <math>60 km</math> ou <math>\longrightarrow</math></p>
<p>1) Se o receptor marca um intervalo de tempo (diferença) de <math>200 \mu s</math>, a que distância, em quilômetros, encontra-se o navio de T1? E de T2?</p> <p>Encontra-se a <math>x km</math> de <math>T_2</math> e a <math>604(x) km</math> de <math>T_2</math>, ou <math>\text{vice-versa}</math> <math>\text{equa}</math></p>

**Fonte:** Atividade aplicada na Licenciatura em Matemática.

Vemos aqui também que a ideia de infinito é muito mais utilizada, pelos alunos, mostrando que estão habituados e familiarizados com o conceito.

**Figura 56:** Exemplos de respostas no cenário 2, questão 2 na Licenciatura em Matemática.

<p>2) Em quantos pontos do mapa temos um intervalo de tempo de <math>200 \mu s</math>? Há outros pontos onde os intervalos de tempo são iguais?</p> <p><math>8</math> pontos, existem infinitos pontos onde o intervalo de tempo são iguais.</p>
<p>2) Em quantos pontos do mapa temos um intervalo de tempo de <math>200 \mu s</math>? Há outros pontos onde os intervalos de tempo são iguais?</p> <p><math>8</math> sim. existem infinitos.</p>

**Fonte:** Atividade aplicada na Licenciatura em Matemática.

Já na questão 3, obtemos um índice de 75% em que os alunos identificaram corretamente a curva, como hipérbole de duas folhas, formada pela interseção das circunferências, mas apenas um aluno identificou e definiu a hipérbole matematicamente, por isso consideramos apenas esta resposta como totalmente correta.

**Figura 57:** Exemplos de respostas no cenário 2, questão 3 na Licenciatura em Matemática.

3) Observe que há um padrão geométrico constituído pelos pontos que possuem mesmo intervalo de tempo. Este padrão foi chamado de LDP (Linhas de Posição). Na linguagem matemática, como estas curvas são definidas e quais suas características?

*é uma hipérbole. A distância <sup>Diferença</sup> entre um de seus pontos e os focos é igual.*

3) Observe que há um padrão geométrico constituído pelos pontos que possuem mesmo intervalo de tempo. Este padrão foi chamado de LDP (Linhas de Posição). Na linguagem matemática, como estas curvas são definidas e quais suas características?

*lembrar o plano cartesiano, mas também há simetria entre os pontos.*

**Fonte:** Atividade aplicada na Licenciatura em Matemática.

Observamos aqui um índice muito maior, que o dos alunos do Ensino Médio, em reconhecer uma hipérbole e os alunos que não explicitamente disseram ser uma hipérbole, reconheceram haver aqui uma simetria entre os transmissores.

As tabelas envolvidas nas respostas foram construídas de maneira satisfatória, evidenciando que o conteúdo de matrizes teve um bom aproveitamento, por parte dos alunos e conseqüentemente a habilidade de construir tabelas e organizar os dados.

**Figura 58:** Exemplo de resposta no cenário 2, questão 4 na Licenciatura em Matemática.

4) Nesta configuração conseguimos 4 pares de curvas e uma reta entre T1 e T2 representando a diferença ou intervalos de tempo das transmissões, identifique (números ou letras) as LDP's e construa uma tabela contendo os intervalos de tempo e as respectivas diferenças entre as distâncias:

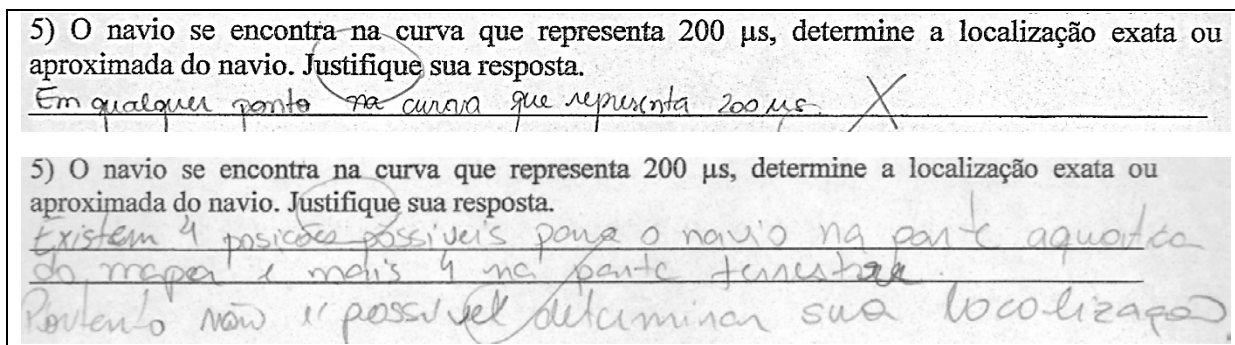
	T <sub>10</sub>	T <sub>11</sub>	T <sub>12</sub>	T <sub>13</sub>	T <sub>14</sub>	T <sub>15</sub>
T <sub>10</sub>	5	4	3	2	1	0
T <sub>11</sub>	4	3	2	1	0	1
T <sub>12</sub>	3	2	1	0	1	2
T <sub>13</sub>	2	1	0	1	2	3
T <sub>14</sub>	1	0	1	2	3	4
T <sub>15</sub>	0	1	2	3	4	5

*onde os números são  $n \times 100$  ms. e as distâncias são  $D = 30 \times n$  km.*

**Fonte:** Atividade aplicada na Licenciatura em Matemática.

Todos responderam que não era, com as informações fornecidas no cenário, possível a localização do navio, porém não houve uma justificativa que usasse a definição de hipérbole como referência.

**Figura 59:** Exemplos de respostas no cenário 2, questão 5 na Licenciatura em Matemática.



**Fonte:** Atividade aplicada na Licenciatura em Matemática.

Podemos concluir que, apesar de saberem o nome da curva formada no cenário, os alunos não sabiam as propriedades geométricas desta curva e nem sua definição, que após o cenário sistematizamos com os alunos.

### 5.2.1.3 Cenário 3

Os alunos, neste momento, já possuem a definição de hipérbole, vista no cenário anterior e como a questão 1 trata apenas de uma tabela e algumas operações aritméticas para tentar eliminar a ambiguidade que os ramos da hipérbole trazem, vamos concentrar nossa análise nas questões posteriores do cenário.

Na questão 2 fornecemos a localização dos transmissores em coordenadas do plano cartesiano e indicamos uma posição qualquer para o navio  $N(x,y)$  e pedimos uma equação, em termos de  $x$  e  $y$ , que de a localização do navio.

De posse da definição de hipérbole, bastava colocar os valores na expressão e estaria correto, não exigia-se a resolução ou simplificação para a forma canônica da equação da hipérbole, dessa forma 63% dos alunos o fizeram. Observamos também alguns alunos que começaram corretamente e desistiram, acreditamos que por falta de tempo, pois estipulamos um tempo fixo, de quinze minutos, para cada cenário.

**Figura 60:** Exemplos de respostas no cenário 3, questão 2 na Licenciatura em Matemática.

2) Com um sistema de coordenadas adequado e considerando o atraso, temos a localização de T1(0,0) e T2(0,150). Se o navio está localizado na posição N(x,y) sobre a LDP de 200  $\mu$ s, use a definição matemática das curvas para encontrar uma equação que dê a localização do navio em termos das distâncias até os transmissores T1 e T2:

$N(x,y) \Rightarrow 200 \quad 200 = t_1 + 150 - t_2 \Rightarrow t_2 - t_1 = 50 \quad c = 75$

H.W. e - A CURVA = 90

$M = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : d_2 - d_1 = 60 \}$

$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} =$

$\sqrt{(x-75)^2} - \frac{y^2}{(a-75)^2} = 60$

**Fonte:** Atividade aplicada na Licenciatura em Matemática

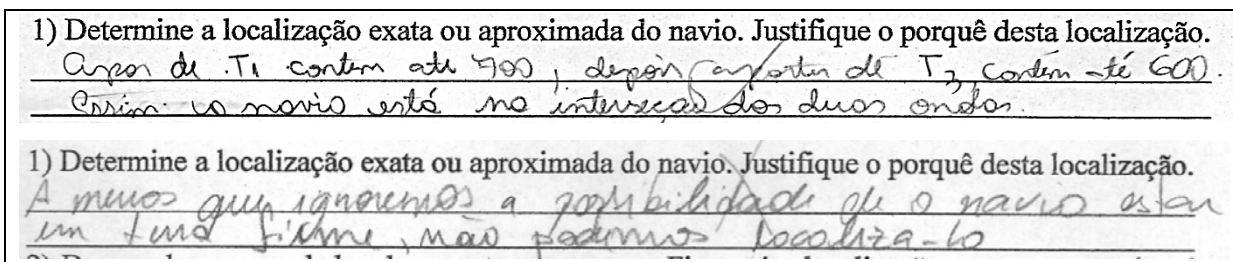
Outros porém tentaram usar a forma canônica diretamente, isto não aconteceu com as outras turmas, e cometeram erros, por exemplo, ao invés de escrever  $\frac{(x-75)^2}{900} - \frac{y^2}{3600} = 1$ , que seria a equação correta, escreveram  $\frac{x^2}{(a-75)^2} - \frac{y^2}{(b-75)^2} = 90$ . Observamos aqui uma ansiedade, em dar a resposta na forma canônica, e assim cometendo o erro.

Não observamos uma melhoria, em relação ao cenário anterior, nas respostas, mesmo após a discussão do mesmo. Em comparação com a mesma questão aplicada ao Ensino Médio, uma característica esperada, é que houve uma quantidade maior de tentativas de usar a definição para chegar a forma canônica da hipérbole. Quanto a localização do navio, todos responderam corretamente não ser possível com a configuração atual.

#### 5.2.1.4 Cenário 4

Nesta parte da atividade, o conhecimento de hipérbole já foi discutido com os alunos no cenário anterior, então com alguns cálculos aritméticos é totalmente possível encontrar a localização do navio.

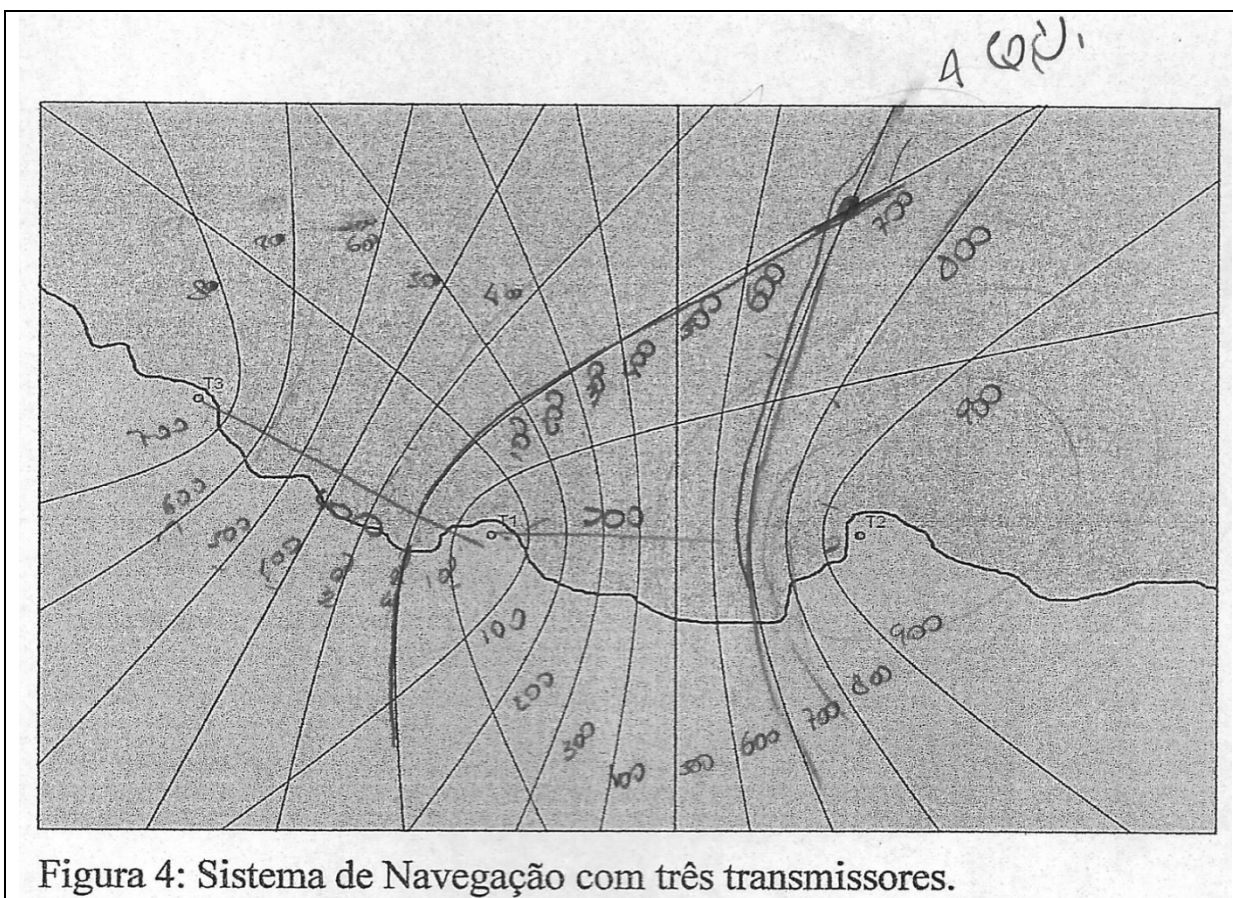
**Figura 61:** Exemplos de respostas no cenário 4, questão 1 na Licenciatura em Matemática.



**Fonte:** Atividade aplicada na Licenciatura em Matemática.

Porém, percebemos que os alunos ao se depararem com a questão 1 do cenário, tiveram uma dificuldade em justificar a localização indicada, ora bastava dizer que a localização é na intersecção de duas LDP's formadas pelas hipérbolas, realmente a maioria das respostas foi afirmando a possibilidade de localização, mas sem uma justificativa adequada.

**Figura 62** Exemplo de resposta no cenário 4, questão 2 na Licenciatura em Matemática.



**Fonte:** Atividade aplicada na Licenciatura em Matemática.

Quanto ao número de transmissores, todos responderam que é possível a localização do navio com um mínimo de 3 transmissores. Observou-se

aqui, novamente, certa ansiedade em terminar a atividade, com isto, acreditamos, que muitos deixaram de ler o enunciado e foram responder as questões, ocasionando assim os erros e falta de justificativas.

**Figura 63:** Exemplos de respostas no cenário 4, questão 3 na Licenciatura em Matemática.

<p>3) Qual o número de transmissores para que ocorra uma localização ideal do navio?</p> <p>3 transmissores</p>
<p>3) Qual o número de transmissores para que ocorra uma localização ideal do navio?</p> <p>3 transmissores é possível obter uma boa aproximação do navio, desconsiderando a possibilidade de ele estar em uma linha.</p>

**Fonte:** Atividade aplicada na Licenciatura em Matemática.

### 5.2.2 Engenharia Elétrica

Os alunos se mostraram receptivos a atividade, devido à curiosidade que a atividade desperta com sua aplicabilidade e o fator histórico envolvido, foi interessante para eles observar com outra perspectiva o conteúdo já estudado, de Secções Cônicas.

A maior dificuldade apresentada pelos alunos foi justamente nas definições das propriedades geométricas básicas e na construção da equação da hipérbole, isto devido ao pouco aprofundamento dado neste conteúdo para o curso de Engenharia Elétrica. Porém, como são alunos do Ensino Superior, provavelmente tiveram os conteúdos do Ensino Médio, então todos esses conceitos devem ter sido abordados, mas não conseguimos observar isto em suas respostas.

A turma é numerosa, com trinta e cinco alunos, então foi inevitável que alguns alunos trocassem informações entre si, nada que comprometesse o trabalho, pelo contrário, isso ajudou no envolvimento de alguns alunos com a atividade. Vimos também um interesse maior, em comparação com as demais turmas pesquisadas, na pessoa de Alfred Lee Loomis, isto devido ao público, futuros engenheiros, em que estávamos aplicando esta atividade.

**Figura 64:** Opiniões sobre a atividade aplicada na Engenharia Elétrica.

3) Dê sua opinião sobre a atividade proposta:  
 A atividade foi bem intuitiva e foi possível compreender a explicação do sistema de radar.

3) Dê sua opinião sobre a atividade proposta:  
 A atividade exige uma certa demanda de tempo para que seja bem executada, porém é de um nível excelente apresentando para os alunos melhores enunciados para os questionários.

3) Dê sua opinião sobre a atividade proposta:  
 Na minha opinião, você deveria elaborar um material de apoio sobre os conceitos matemáticos envolvidos na cartografia e, além disso, também deveria introduzir os conceitos básicos através de uma palestra breve, para que os alunos se familiarizem com os conceitos utilizados neste material.

**Fonte:** Atividade aplicada na Engenharia Elétrica.

Uma opinião, que apareceu constantemente, foi da necessidade de distribuir um material de apoio sobre o conteúdo de seções cônicas, isto mostra que a atividade despertou o interesse dos alunos pela Geometria Analítica e, em particular, as hipérbole, além de todos os outros objetivos, o de despertar o interesse pela Matemática e pela Geometria é um dos mais importantes, e com base nas opiniões colhidas, na atividade, este objetivo foi claramente alcançado.

Esta atividade conseguiu mostrar a eles, futuros profissionais da Engenharia Elétrica, que a Matemática que estão estudando tem outras aplicações, além das próprias da engenharia, e assim como Loomis utilizou para construir seu sistema de radionavegação, com criatividade, eles também podem construir seus próprios projetos envolvendo a Matemática.

### 5.2.2.1 Cenário 1

No cenário, todos os alunos participantes procuraram responder a questão 1 usando as noções de razão de proporção, ou seja a “regra de três”, dessa forma houve um aproveitamento excelente nesta questão.

Com alguns pequenos erros de cálculo e algumas respostas em milhas, que consideramos como resposta errada, já que o enunciado pedia a resposta em quilômetros, ou seja, comparar distâncias e diferentes unidades de medidas, foi uma habilidade que demonstraram ter e saber aplicar.

Nos chamou atenção o uso de notação científica e a fórmula para cálculo de velocidade média, ferramentas que não observamos na atividade aplicada no Ensino Médio e na Licenciatura em Matemática. Isso nos diz que esta turma tem mais habilidades com os conhecimentos da Física, que as outras turmas.

**Figura 65:** Exemplos de respostas no cenário 1, questão 1 na Engenharia Elétrica.

<p>1) Sabendo que o tempo de recepção da onda de rádio foi de 400 ms, a que distância, em quilômetros, encontra-se o navio do transmissor T1?</p> $X = v \cdot t = (300.000 \text{ Km/s}) (400 \cdot 10^{-6} \text{ s}) = 120 \text{ Km}$
<p>1) Sabendo que o tempo de recepção da onda de rádio foi de 400 ms, a que distância, em quilômetros, encontra-se o navio do transmissor T1?</p> <p>onda velocidade constante, <math>S = v \cdot t</math> [m] <math>v = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}</math>; <math>t = 400 \cdot 10^{-6}</math>.</p> $S = 120000 \text{ m} \quad (120 \text{ Km})$
<p>1) Sabendo que o tempo de recepção da onda de rádio foi de 400 ms, a que distância, em quilômetros, encontra-se o navio do transmissor T1?</p> <p>64,8 milhas. X</p>

**Fonte:** Atividade aplicada na Engenharia Elétrica.

A próxima questão deveria ser respondida e justificada usando a definição de circunferência para ser considerada correta, sendo assim, os alunos responderam sobre a impossibilidade de localização do navio, mas não justificaram, e apesar da uma percentagem significativa, de 60%, de respostas corretas, ou seja justificada corretamente.

**Figura 66:** Exemplos de respostas no cenário 1, questão 2 na Engenharia Elétrica.

<p>2) Determine a localização exata ou aproximada do navio. Justifique sua resposta.</p> <p>Ele se encontra no raio de 120 km. Exclui-se esse raio a <del>perças</del> perças de terra.</p>
<p>2) Determine a localização exata ou aproximada do navio. Justifique sua resposta.</p> <p>O NAVIO ESTÁ LOCALIZADO EM ALGUM PONTO DA CIRCUNFERÊNCIA DE RAIO 120km. Porém FALTA DADOS PARA DETERMINAR A LOCALIZAÇÃO EXATA.</p>

**Fonte:** Atividade aplicada na Engenharia Elétrica.

Aplicar propriedades de formas geométricas básicas, no caso a circunferência, é outro objetivo para este cenário, e os poucos alunos que não o fizeram, após a discussão do cenário, recordaram rapidamente a definição de circunferência.

### 5.2.2.2 Cenário 2

O cenário tem como objetivo, as habilidades de identificação de propriedades geométricas, em particular de hipérbole, e construção de tabelas, além dos outros objetivos já trabalhados no cenário anterior. A questão 1 foi amplamente respondida, novamente com pequenos erros de cálculo, mostrando que esta habilidade é inerente aos alunos participantes. Na questão 2, os alunos identificaram corretamente a impossibilidade de encontrar um único ponto com os dados informados.

**Figura 67:** Exemplos de respostas no cenário 2, questão 1 na Engenharia Elétrica.

1) Se o receptor marca um intervalo de tempo de 200 ms, a que distância, em quilômetros, encontra-se o navio de T1? E de T2?

*150 km de T<sub>1</sub> e 90 km de T<sub>2</sub> ou vice-versa, ou  
120 km de T<sub>1</sub> e 60 km de T<sub>2</sub> ou vice-versa.*

1) Se o receptor marca um intervalo de tempo de 200 ms, a que distância, em quilômetros, encontra-se o navio de T1? E de T2?

<i>t<sub>1</sub>: 60 km</i>	<i>90 km</i>	<i>120 km</i>	<i>150 km</i>
<i>t<sub>2</sub>: 120 km</i>	<i>150 km</i>	<i>60 km</i>	<i>90 km</i>

**Fonte:** Atividade aplicada na Engenharia Elétrica.

**Figura 68:** Exemplos de respostas no cenário 2, questão 2 na Engenharia Elétrica.

2) Em quantos pontos do mapa temos um intervalo de tempo de 200 ms? Há outros pontos onde os intervalos de tempo são iguais?

*Em 8 pontos, pois os pontos estão dispostos em uma hipérbole, com focos em T<sub>1</sub> e T<sub>2</sub> e pontos equidistante de T<sub>1</sub> e T<sub>2</sub>.*

2) Em quantos pontos do mapa temos um intervalo de tempo de 200 ms? Há outros pontos onde os intervalos de tempo são iguais?

*No mapa há 8 pontos, na prática há infinitos pontos de uma hipérbole.*

**Fonte:** Atividade aplicada na Engenharia Elétrica.

Na questão 3, os alunos, num total de 75%, identificaram a curva LDP como hipérbole e definiram corretamente, mostrando habilidade em identificar, definir e classificar as curvas cônicas, os demais que consideramos errado, deixaram de definir corretamente a hipérbole e apenas três, dos trinta e dois alunos, responderam dessa forma, outros identificaram as curvas como “curvas de nível”, porém não usaram o nome hipérbole em suas respostas.

**Figura 69:** Exemplos de respostas no cenário 2, questão 3 na Engenharia Elétrica.

3) Observe que há um padrão geométrico constituído pelos pontos que possuem mesmo intervalo de tempo. Este padrão foi chamado de LDP (Linhas de Posição). Em matemática, como estas curvas são definidas?

$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 0$  *requerido da hipérbole.*

---

3) Observe que há um padrão geométrico constituído pelos pontos que possuem mesmo intervalo de tempo. Este padrão foi chamado de LDP (Linhas de Posição). Em matemática, como estas curvas são definidas?

*O padrão constitui a figura de uma hipérbole cuja equação em coordenadas é  $\frac{(x)^2}{a^2} - \frac{(y)^2}{b^2} = 1$*

---

3) Observe que há um padrão geométrico constituído pelos pontos que possuem mesmo intervalo de tempo. Este padrão foi chamado de LDP (Linhas de Posição). Em matemática, como estas curvas são definidas?

*Curvas de nível.* X

**Fonte:** Atividade aplicada na Engenharia Elétrica.

Na questão 4 todos os alunos montaram alguma tabela mostrando habilidade na construção de tabelas e matrizes, que durante a discussão do cenário, reorganizamos conjuntamente.

**Figura 70:** Exemplos de respostas no cenário 2, questão 4 na Engenharia Elétrica.

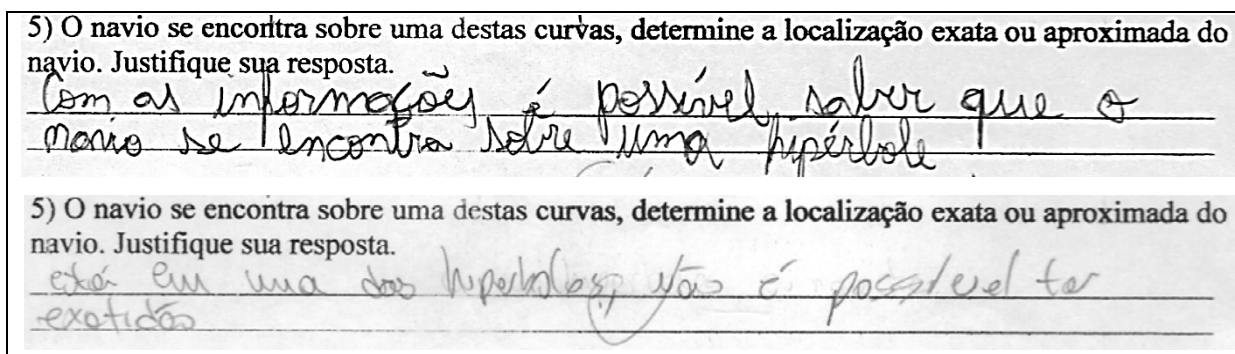
4) Nesta configuração conseguimos 4 pares de curvas e uma reta entre T1 e T2 representando a diferença ou intervalos de tempo das transmissões, nomeie as LDP's e construa uma tabela contendo os intervalos de tempo e as respectivas diferenças entre as distâncias:

Intervalo	distância	gráfico
400 $\mu$ s	120 Km	hipérbole
300 $\mu$ s	90 Km	hipérbole X
200 $\mu$ s	60 Km	hipérbole
100 $\mu$ s	30 Km	hipérbole
0 $\mu$ s	0 Km	reta

**Fonte:** Atividade aplicada na Engenharia Elétrica.

O objetivo da questão 5 era de que o aluno observasse a impossibilidade de localização do navio através das hipérbolas formadas, os alunos chegaram tranquilamente a esta conclusão, dessa forma o objetivo aqui foi alcançado.

**Figura 71:** Exemplos de respostas no cenário 2, questão 5 na Engenharia Elétrica.



**Fonte:** Atividade aplicada na Engenharia Elétrica.

### 5.2.2.3 Cenário 3

Após a discussão e explicação do cenário anterior, queremos que com o cenário 3 os alunos apliquem a definição de hipérbole para compreender que mesmo com a eliminação da ambiguidade de ramos das hipérbolas, ainda não é possível a localização do navio e queremos equacionar esta conclusão. Desta forma na questão 1 do cenário, temos a habilidade envolvendo matrizes e tabelas, não observamos dificuldades para os participantes.

Na segunda questão, após o fornecimento dos dados, tivemos apenas 11% dos alunos com a habilidade de equacionar corretamente, usando a definição de hipérbole, a resposta, isto não é nenhuma surpresa visto que a ementa da disciplina de Geometria Analítica expõe as Secções Cônicas apenas em sua classificação, não havendo aprofundamento dos cálculos e muito menos da aplicação deste importante conteúdo de Geometria

Figura 72: Exemplos de respostas no cenário 3, questão 1 na Engenharia Elétrica.

1) Construa uma tabela com os novos valores dos ramos das LDP's, considerando o atraso de 500 ms, a ambiguidade em termos de tempo foi eliminada? E em termos da diferença de distâncias?

tempo(μs)	distância(Km)	T2	T1	
500		100	150	não existe mais ambiguidade em relação ao tempo e sobre a distância em relação a T1 e T2.
600		80	120	
700		60	90	
800		40	60	
900		20	30	
1000		0	0	

1) Construa uma tabela com os novos valores dos ramos das LDP's, considerando o atraso de 500 ms, a ambiguidade em termos de tempo foi eliminada? E em termos da diferença de distâncias?

A 0ms = 150 Km	Sim, foi eliminada, pois agora podemos determinar de qual transmissor o navio está mais próximo, porém em termos de distância ainda não.
A 100ms = 120 Km	
A 200ms = 90 Km	
A 300ms = 60 Km	
A 400ms = 30 Km	

Fonte: Atividade aplicada na Engenharia Elétrica.

Figura 73: Exemplos de respostas no cenário 3, questão 2 na Engenharia Elétrica.

2) Com um sistema de coordenadas adequado temos a localização de T1(0,0) e T2(0,150). Se o navio está localizado na posição N(x,y) sobre a LDP de 200 ms, use a definição matemática das curvas para encontrar uma equação que dê a localização do navio em termos das distâncias até os transmissores T1 e T2:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (F)$$

2) Com um sistema de coordenadas adequado temos a localização de T1(0,0) e T2(0,150). Se o navio está localizado na posição N(x,y) sobre a LDP de 200 ms, use a definição matemática das curvas para encontrar uma equação que dê a localização do navio em termos das distâncias até os transmissores T1 e T2:

dist T1 → T2 150 Km      45 Km      b → distância

$$\frac{x}{100} \cdot 30 = b \text{ em Km}$$

X → menor valor em ms da subtração para determinar o intervalo de tempo

Fonte: Atividade aplicada na Engenharia Elétrica.

Os alunos concluíram a impossibilidade de localização do navio, mas sem equacionar corretamente, houve poucas justificativas corretas, a maioria observou que a localização do navio estava em “algum lugar” de um dos ramos da hipérbole.

**Figura 74:** Exemplos de respostas no cenário 3, questão 3 na Engenharia Elétrica.

3) Determine a localização exata ou aproximada do navio. Justifique sua resposta.  
 É possível saber aproximadamente, pois ainda não se sabe qual ponto do hipérbolo, apenas em qual lado.

3) Determine a localização exata ou aproximada do navio. Justifique sua resposta.  
 Agora é possível saber em qual ramo da LDP está o navio, mas ainda não é possível saber se está ao sul ou ao norte.

**Fonte:** Atividade aplicada na Engenharia Elétrica.

#### 5.2.2.4 Cenário 4

Os alunos puderam observar, neste cenário, a eliminação das ambiguidades e da impossibilidade de localização do navio, apenas com a introdução de mais um transmissor. Um dos objetivos é localizar o navio na figura fornecida, que representa o mapa de uma região costeira, assim a habilidade de ler mapas foi avaliada e todos os alunos conseguiram demonstrar esta habilidade rapidamente.

**Figura 75:** Exemplos de respostas no cenário 4, questão 1 na Engenharia Elétrica.

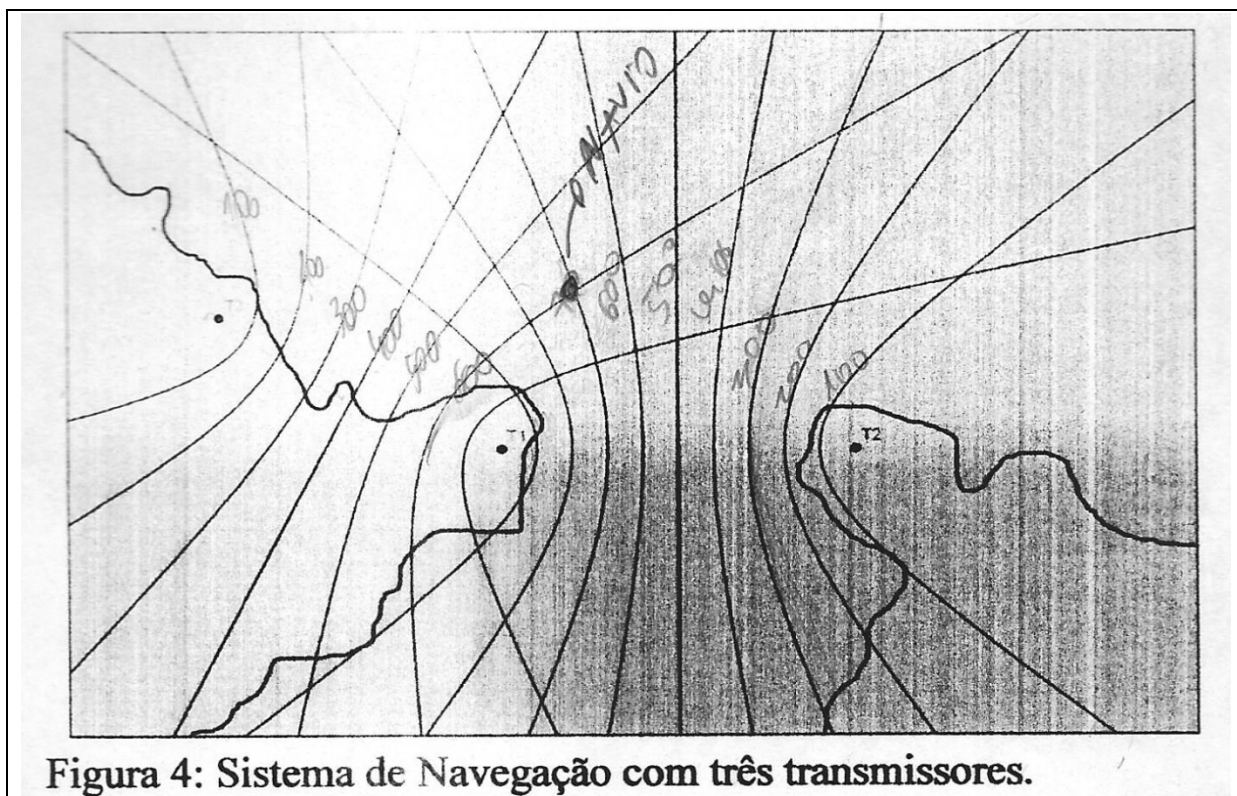
1) De acordo com os dados do receptor marque na Figura 4 a localização exata ou aproximada do navio. Justifique o porquê desta localização.  
 Com este sistema elimina-se as ambiguidades, portanto a posição exata é a indicada.

1) De acordo com os dados do receptor marque na Figura 4 a localização exata ou aproximada do navio. Justifique o porquê desta localização.  
 a curva indicada por  $t_1 - t_2 = 700$  encontra a  $t_1 - t_3 = 600$ , é possível ter uma boa exatidão em relação a posição.

**Fonte:** Atividade aplicada na Engenharia Elétrica.

Quanto ao número de transmissores, os alunos responderam que 3 transmissores seria suficiente para a localização correta do navio, mostrando aqui que o conhecimento adquirido no decorrer dos cenários foi compreendido.

**Figura 76:** Exemplo de respostas no cenário 4, questão 2 na Engenharia Elétrica.



**Fonte:** Atividade aplicada na Engenharia Elétrica.

**Figura 77:** Exemplos de respostas no cenário 4, questão 3 na Engenharia Elétrica.

2) Qual o número mínimo de transmissores para que ocorra uma localização ideal do navio?  
 3 Transmissores

---

2) Qual o número mínimo de transmissores para que ocorra uma localização ideal do navio?  
 Três

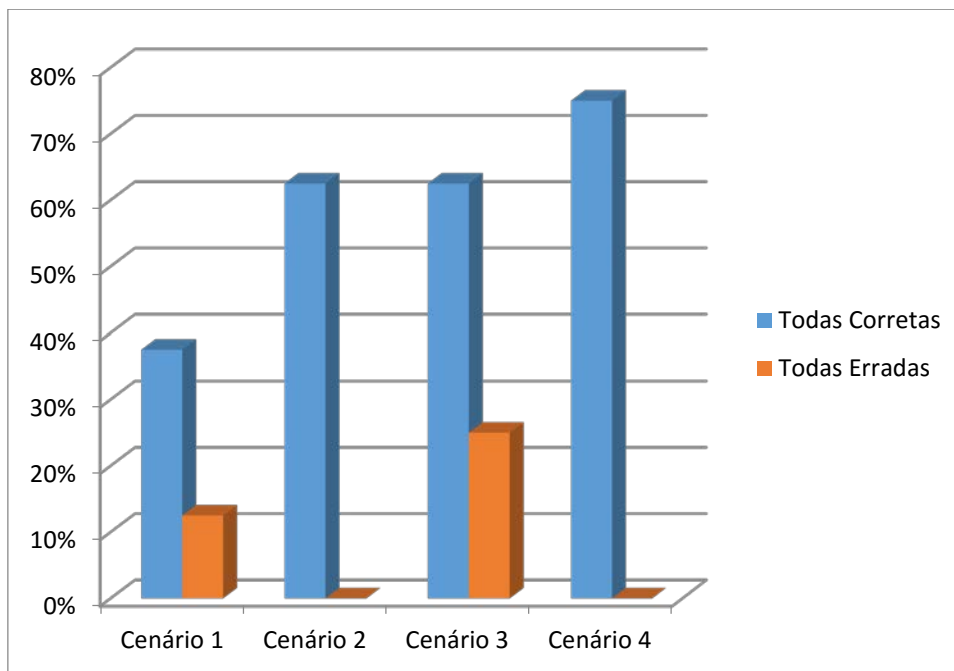
**Fonte:** Atividade aplicada na Engenharia Elétrica.

Durante a aplicação da atividade, observamos certa preocupação, dos alunos participantes, com uma futura avaliação que seria aplicada no dia seguinte pelo professor da disciplina de Álgebra Linear do curso de Engenharia Elétrica e muitos se apressaram em terminar este cenário para poder se dedicar ao estudo de questões que poderiam ser colocadas nesta avaliação. Também devido ao pouco aprofundamento que o curso exige sobre Cônicas.

Consideramos correto somente o cenário que continha todas as questões respondidas corretamente.

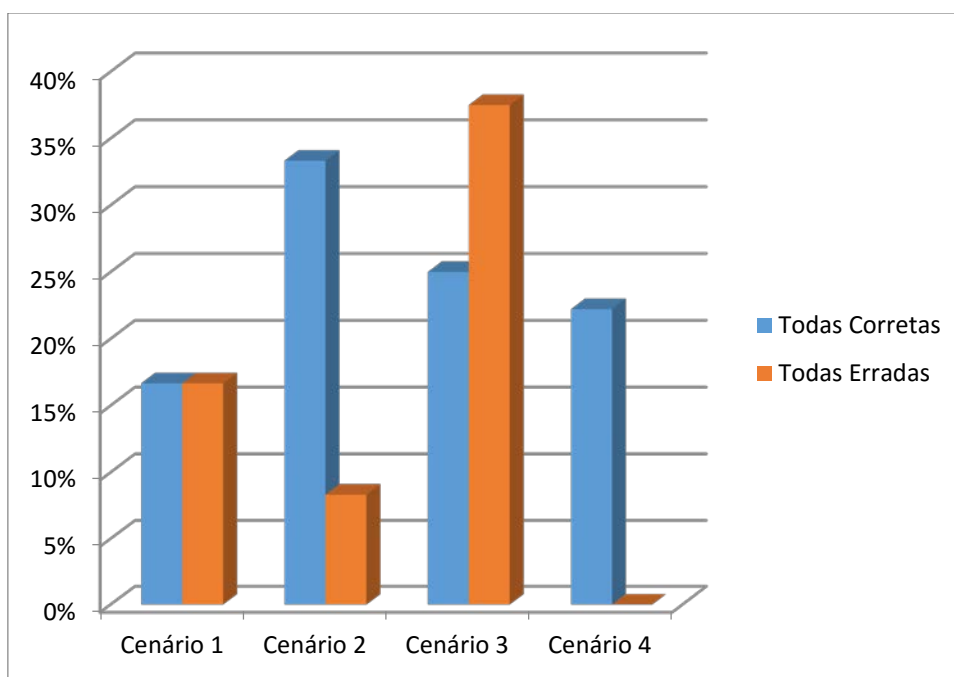
### 5.3 GRÁFICOS COMPARATIVOS DAS TURMAS PESQUISADAS

**Gráfico 1:** Comparação entre Cenários Certos e Errados no Ensino Médio.

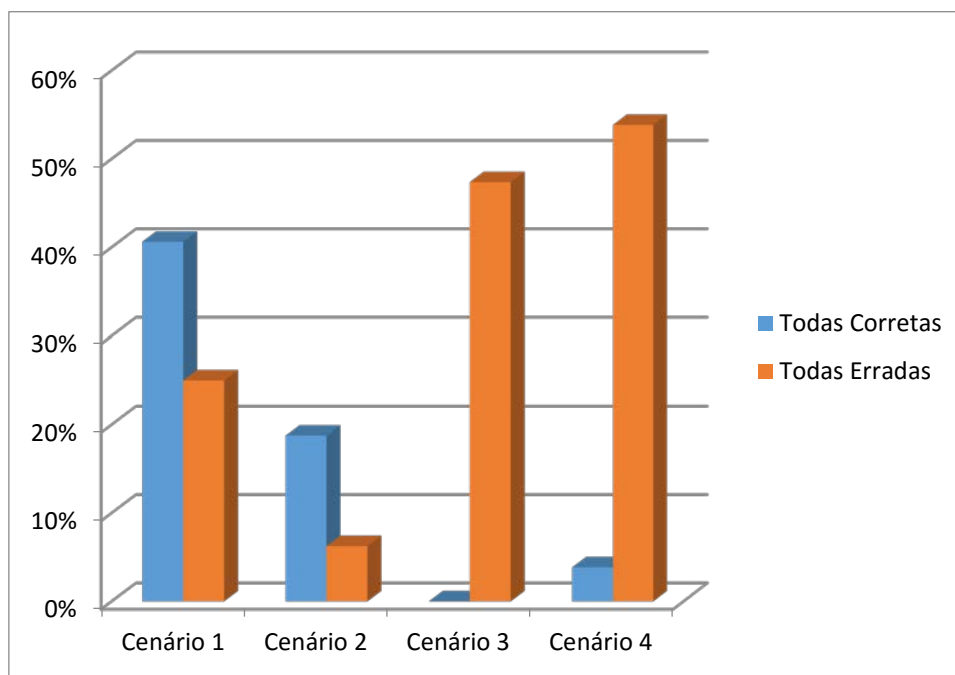


Fonte: Elaborada pelo Autor.

**Gráfico 2:** Comparação entre Cenários Certos e Errados na Licenciatura em Matemática.



Fonte: Elaborada pelo Autor.

**Gráfico 3:** Comparação entre Cenários Certos e Errados na Engenharia Elétrica.

**Fonte:** Elaborada pelo Autor.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao desenvolvermos este trabalho, fomos aprofundando o conhecimento histórico sobre o ensino de Geometria no Brasil, nos deparamos com o seu abandono, e as tentativas de retomada deste importante conteúdo matemático. O estudo de Geometria, foi aos poucos deixado de lado restando então a Geometria Analítica e Espacial, estas abordadas no Ensino Médio, como representantes deste conteúdo, vistos nos livros didáticos utilizados atualmente.

Sempre me indaguei sobre a utilidade da Matemática e porque é evidente sua aplicabilidade em certos conteúdos e em outros temos um distanciamento completo da realidade cotidiana. Confesso que devido ao pouco tempo e uma diversidade de conteúdos de Geometria Analítica, as Secções Cônicas, são raramente abordadas pelos professores, aqui me incluo, e pelos livros usuais.

Então com a finalidade de aproveitar melhor o conteúdo e ao mesmo tempo mostrar aos alunos uma aplicação das Cônicas, nasceu a ideia de construir uma atividade fundamentada na história da humanidade que fosse aplicada e utilizada até os nossos dias. Dentre vários momentos históricos, escolhemos o da Segunda Guerra Mundial, este nos chamou a atenção ao lermos o artigo “Aplicação da geometria analítica na localização de barcos, uma abordagem didática”, da Revista Diálogos, que sugeria ser possível a contextualização das Cônicas através do sistema LORAN (*Long Range Navigation*), construída por Alfred Lee Loomis. Apesar de suas contribuições às diversas áreas das ciências, Loomis continua, até os dias de hoje, como um ilustre desconhecido, em grande parte do meio acadêmico.

Portanto, montamos a atividade, teoricamente seguindo “os passos” de Loomis, levando os alunos a criar e aplicar conceitos e definições de Geometria Analítica, neste caso, de Secções Cônicas. No processo de criação da atividade, observamos que todos, ou quase todos, os objetivos gerais propostos para a Geometria no PCNEM estavam contemplados, como leitura de mapas, comparação

de unidades de medidas, orientação espacial e aplicação de propriedades das figuras geométricas.

A atividade teve excelente receptividade e os alunos envolvidos mostraram interesse e curiosidade em chegar a uma conclusão. Houve um ótimo envolvimento com os cenários e com a história descrita, possibilitando uma interdisciplinaridade com as disciplinas de Geografia, História e Física. Ao aplicar a atividade no Ensino Médio pudemos acompanhar o crescimento intelectual e a grande disposição dos alunos em trabalhar novamente o conteúdo, agora com enfoque na aplicabilidade e valorização dos conceitos e propriedades das Cônicas.

Os alunos seguiram os cenários como o esperado, criando assim uma continuidade do raciocínio até a conclusão, possibilitando a abstração, dedução e certo rigor matemático nas respostas.

Observamos que os alunos que já estavam no Ensino Superior tiveram mais dificuldades em usar as propriedades geométricas para justificar suas respostas, acreditamos que isso seja reflexo do “abandono” que as Secções Cônicas vêm sofrendo no decorrer dos anos, é claro que professores que não foram instruídos neste conteúdo, não enxergam utilidade no mesmo, acabam influenciando seus alunos com suas crenças.

Os objetivos, de dar ao aluno a oportunidade de reconhecer que a Matemática surgiu a partir da busca de soluções para resolver questões do cotidiano, despertar no aluno o interesse por alguns fatos do passado para introduzir um determinado tema, no nosso caso as Cônicas, bem como os demais objetivos, foram alcançados quase que totalmente, com exceção de um ou outro aluno, que teve uma dificuldade maior em acompanhar a atividade.

Alguns aspectos do trabalho podem e devem ser melhorados, como o tempo de aplicação de cada cenário, podemos trabalhar um cenário por hora aula, deixando um tempo maior para a discussão e pesquisa das respostas e conceitos envolvidos, acreditamos que assim a aprendizagem será mais satisfatória.

Esperamos que a atividade proposta neste trabalho seja amplamente divulgada, principalmente aos professores do Ensino Médio, e assim,

possa ser aplicada, reaplicada, melhorada e também servir de exemplo para outras atividades envolvendo as Secções Cônicas ou outros conteúdos contextualizados através da história humana.

## REFERÊNCIAS

- ALPOIM, José F.P., 1700-1765. **Exame de bombeiros**. Francisco Martinez a Pad, Madri 1748.
- ALVAREZ, Luis W. "Alfred Lee Loomis". In: **National Academy of Sciences**. Biographical memoirs 51. Washington D.C.: National Academies Press. 1980. p. 308–341.
- BALL, Walter W. R., 1852-1925. **A Short Account of the History of Mathematics**. London, 1901.
- BORDALLO, Mirella. **As Cônicas na matemática escolar brasileira: história, presente e futuro**. Dissertação de Mestrado. IM/UFRJ, 2011.
- BONGIOVANNI, Vincenzo. Étude historique des premières caractérisations des coniques. **Revista Brasileira de História da Matemática**, São Paulo, SP, v. 7, n. 14, p.439-462, dezembro 2007.
- BOYER, Carl B. **História da matemática**. 3ª ed. São Paulo: Blucher, 2010.
- BRASIL. Lei 9394/96, de 20 de dezembro de 1996. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Brasília, DOU (23/12/96)
- BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: Ministério da Educação, 2000.
- BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o Ensino Médio, v.2, Ciência da natureza, matemática e tecnologia**. Brasília: Ministério da Educação, 2006.
- BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio: orientações curriculares educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília: Ministério da Educação, SEMTEC, 2002.
- CARVALHO, M. A. S.; CARVALHO, A. M. F. T. O ensino de Geometria não euclidiana na Educação Básica. In: **Anais... XIII CIAEM - Conferência Interamericana de Educação Matemática**, Recife, 2011.
- CROWLEY, Mary L. **O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico**. In: LINDQUIST, Mary & SHULTE, Albert P. (organizadores), **Aprendendo e Ensinando Geometria**. São Paulo: Atual, 1994.
- DELGADO, Jorge. **Geometria Analítica**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

FANTINEL, Patrícia C. **Representações gráficas espaciais para o ensino de cálculo e álgebra linear**. Rio Claro: UNESP, Dissertação de Mestrado, 1998.

FREUDENTHAL, Hans. **Mathematics as an educational task**. Dordrecht: Reidel, 1973.

GIOVANNI, José R. **Matemática Completa**. 2ª ed. Renovada. São Paulo: FTD, 2005.

LEHMANN, Charles H. **Geometria Analítica**. 5ª ed. Rio de Janeiro: Globo, 1985.

LEITHOLD, Louis. **O cálculo com geometria analítica**. Vol. 1. São Paulo: Harbra, 1994.

LIMA, Elon L. **Geometria analítica e álgebra linear**. 2ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

LORENZATO, Sergio. Por que não ensinar Geometria? **Educação Matemática em Revista**, Blumenau, SBEM, n.4, p.3-13, jan./jun. 1995.

MIGUENS, Altineu P. **Navegação: A Ciência e a Arte**, v.3. Rio de Janeiro: Marinha do Brasil, 1993.

MIORIM, Maria A. **Introdução à história da educação matemática**. São Paulo: Atual, 1998.

MOCROSKY, L. F.; MONDINI, F.; ESTEPHAN, V. M. O ensino de Geometria no Brasil: alguns aspectos da sua origem nos livros didáticos brasileiros. In: Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia-SINECT, 2012, Ponta Grossa. **Anais do III SINECT**. Ponta grossa: UTFPR, 2012. p. 1-10.

MUNIZ NETO, Antonio C. **Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana**. 2ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

NASSER, Lílian, et al. **Geometria segundo a Teoria de Van Hiele**. 3ª ed. Instituto de Matemática/ UFRJ - Projeto fundão, 2000.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência da Educação. **Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica**. Curitiba: 2006.

PAVANELLO, Regina M. O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e consequências. **Revista Zetetiké**, Campinas, v.1, n.1, p. 7-18, março 1993.

PAVANELLO, Regina M. **O abandono do ensino da Geometria: uma visão histórica**. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação. Dissertação de Mestrado. Campinas, 1989.

PIVA, T. C. C.; SANTOS, N. P. O brigadeiro José Fernandes Pinto Alpoim: O cálculo do número de balas do canhão empilhadas na obra exame de Artilheiros. **Revista Brasileira de História da Matemática**. Rio de Janeiro, v.11, n.21, p.107-120, abril-setembro 2011

ROQUE, Tatiana. **Tópicos de História da Matemática**. Coleção PROFMAT. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

ROXO, E.; PEIXOTO, R.; CUNHA, H.; NETTO, D. **Matemática, 2º Ciclo – 1ª Série**. 7ª ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1953.

SANTIAGO-ALMEIDA, Manoel M. **Dicionário livre da língua portuguesa**. São Paulo: Hedra, 2011.

SANTOS, P. B.; BONFIM, L. R. P. Estudo sobre as Propriedades Geométricas das Cônicas e suas aplicações. **FAMAT em Revista**, Uberlândia, n.4, p.13-23, abril 2005.

SANTOS, Paulo S. Alfred Lee Loomis: um gênio na penumbra. **Jornal da História da Ciência**, USP – São Paulo, SP, n. 13, p. 6, janeiro-março 2012.

SCHMIDT, Mario. **Nova História Crítica**. São Paulo: Nova Geração, 2005.

SOARES, Flávia dos S. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil: avanço ou retrocesso**. Dissertação de Mestrado. PUCRJ, 2001.

SOARES, W.A & SILVA, G.V & SOBRAL, P.M. Aplicação da Geometria Analítica na Localização de Barcos, Uma Abordagem Didática. **Revista Diálogos UPE/Faceteg** – Garanhuns, PE, n. 4, p. 115-126, março-junho 2011.

SMOLE, Kátia C. S. **Matemática: Ensino Médio: volume 3**. 6ª ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

VENTURI, Jacir J. **Cônicas e Quádricas**. 5ª ed. Atualizada. Curitiba: Artes Gráficas e Editora Unificado, 2003.

VALENTE, Silza M. P. **Competências e habilidades: pilares do paradigma avaliativo emergente**. Tese (Doutorado). Universidade Estadual Júlio de Mesquita Filho – UNESP. Marília. 2003.

VALENTE, Wagner R. **Uma História da Matemática Escolar no Brasil (1730-1930)**. São Paulo: Annablume: FAPESP, 2007.

**ANEXOS**

## ANEXO 1 - ATIVIDADE DE GEOMETRIA ANALÍTICA: CONSTRUÇÃO DE UM SISTEMA DE RADIONAVEGAÇÃO

### CONTEXTO HISTÓRICO:

Na Segunda Guerra Mundial, os japoneses realizaram uma das operações mais bem planejadas e ousadas da história, o ataque a Pearl Harbor, como ficou conhecido. Este ataque marcou a entrada dos Estados Unidos na Segunda Guerra Mundial, tornando-os inimigos dos japoneses.

Houve então, a necessidade de aplicar o sistema de localização de barcos, desenvolvido em 1940, por Alfred Lee Loomis, para poder localizar e desviar dos navios japoneses. Loomis utilizou a **Radio Navegação**, que se limita a equipamentos eletrônicos de navegação que usam ondas de radiofrequência.

### Cenário 1:

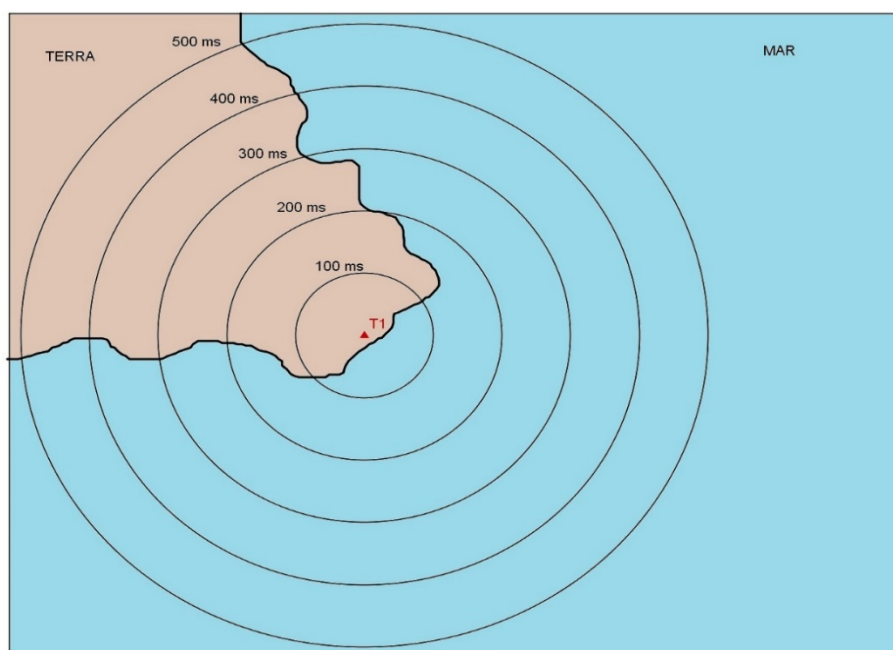


Figura 1: Transmissor T1 e ondas de rádio.

O transmissor T1 emite ondas de rádio que se propagam em todas as direções. As circunferências traçadas na Figura 1 indicam as distâncias alcançadas em intervalos de 100 microssegundos ( $100 \mu\text{s}$ ). A velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas na atmosfera é de, aproximadamente,  $300.000 \text{ km/s}$ , ou cerca de  $162.000$  milhas náuticas por segundo. Assim, a onda hertziana percorre  $0,162$  milhas náuticas por microssegundo, ou  $16,2$  milhas em  $100 \mu\text{s}$ .

Então, como a velocidade de propagação das ondas de rádio no ar é aproximadamente constante, a uma distância percorrida pelo sinal transmitido corresponderá certo intervalo de tempo, e vice-versa. Além disso, uma diferença de distâncias corresponderá um determinado intervalo de tempo.

1. Sabendo que o tempo de recepção, pelo navio, da onda de rádio foi de  $400 \mu\text{s}$ , a que distância, em quilômetros, encontra-se o navio do transmissor T1?

---



---

2. Determine a localização exata do navio. Justifique sua resposta.

---



---

Cenário 2:

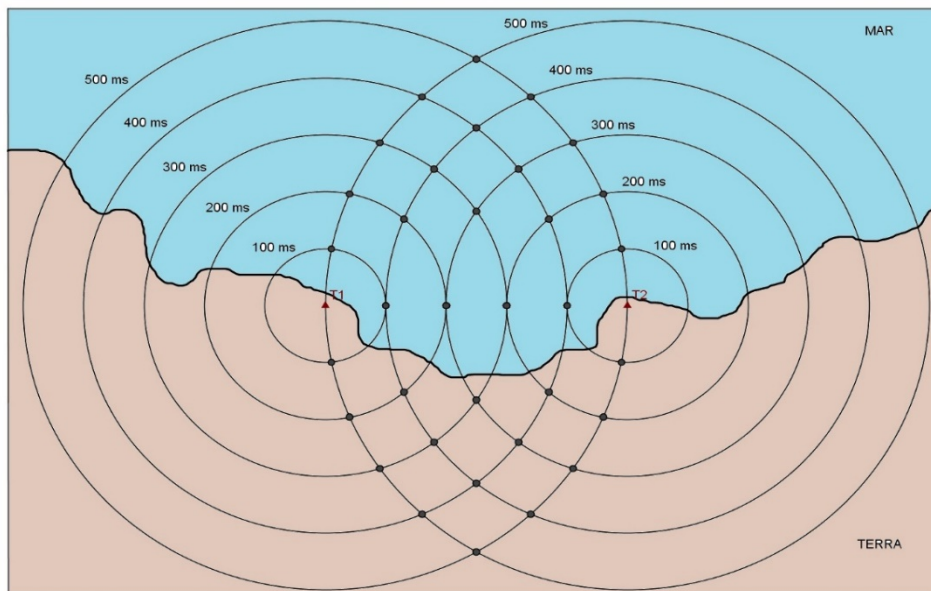


Figura 2: Dois transmissores e suas respectivas ondas de rádio.

Uma característica do sistema proposto por Loomis é que o receptor é capaz apenas de medir o intervalo de tempo (diferença) entre a recepção dos dois sinais.

1. Se o receptor marca um intervalo de tempo (diferença) de  $200 \mu\text{s}$ , a que distância, em quilômetros, encontra-se o navio de T1? E de T2?

---

2. Em quantos pontos do mapa temos um intervalo de tempo de  $200 \mu\text{s}$ ? Há outros pontos onde os intervalos de tempo são iguais?

---

3. Observe que há um padrão geométrico constituído pelos pontos que possuem mesmo intervalo de tempo. Este padrão foi chamado de LDP (Linhas de Posição). Em linguagem matemática, como estas curvas são definidas e quais suas características?

---



---



---

4. Nesta configuração conseguimos 4 pares de curvas e uma reta entre T1 e T2 representando a diferença (intervalos de tempo) das transmissões. Identifique (L1, L2,...), da esquerda para direita, as LDP's e construa uma tabela contendo os intervalos de tempo e as respectivas diferenças entre as distâncias:

---



---



---



---

5. O navio se encontra na curva que representa  $200 \mu\text{s}$ , determine a localização exata do navio. Justifique sua resposta.

Cenário 3:

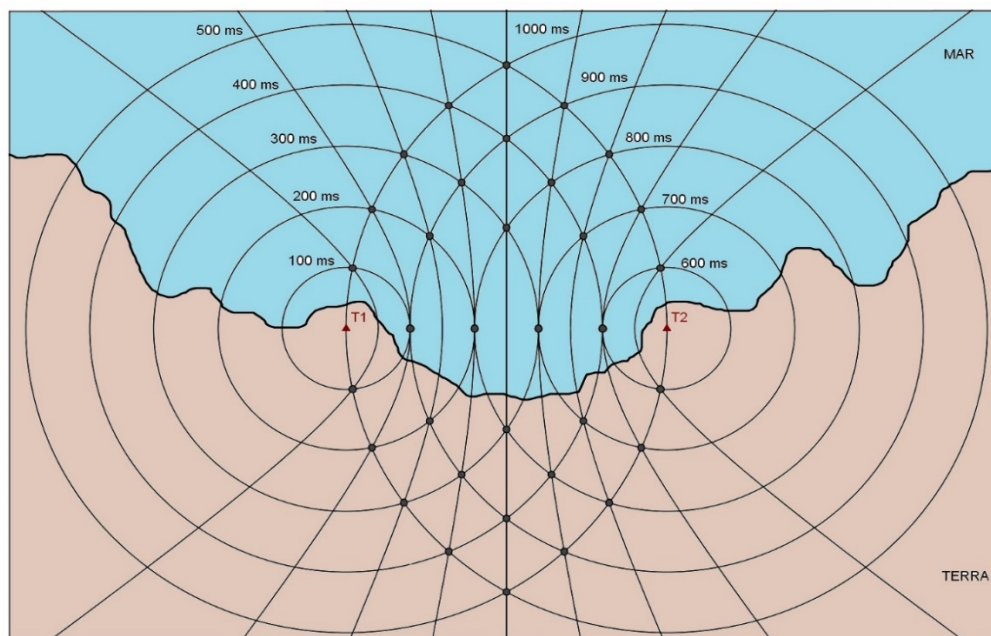


Figura 3: Linhas de Posição (LDP's).

Para evitar ambiguidades, visto que cada LDP tem dois ramos, e como o receptor é capaz apenas de medir o intervalo de tempo entre a recepção dos dois sinais, não havendo meio de distinguir se o navio se encontra sobre o ramo próximo a **T1** ou **T2**, foi introduzido um atraso. Inicialmente, uma das estações, denominada de **Mestra (T1)**, emite seu sinal. Só quando este for recebido na outra estação, que se denomina **Escrava, Remota ou Secundária (T2)**, é que esta retransmitirá o sinal. Então, no exemplo da figura, a estação **T2** só transmitirá o seu sinal  $500 \mu\text{s}$  depois da emissão do sinal da estação **T1**, isto é, haverá um atraso de  $500 \mu\text{s}$  na transmissão da estação **T2**.

1. Construa uma tabela com os novos valores dos ramos das hipérboles (LDP's) considerando o atraso de  $500 \mu\text{s}$ . A ambiguidade em termos de tempo foi eliminada? E em termos da diferença de distâncias?

---



---



---



---



---

2. Com um sistema de coordenadas adequado e considerando o atraso, temos a localização de  $T1(0,0)$  e  $T2(150,0)$ . Se o navio está localizado na posição  $N(x,y)$  sobre a LDP de  $200 \mu\text{s}$ , use a definição matemática de hipérbole para encontrar uma equação que dê a localização do navio em termos das distâncias até os transmissores T1 e T2.

---



---

---



---



---

3. Determine a localização exata do navio. Justifique sua resposta.

---



---

Cenário 4:

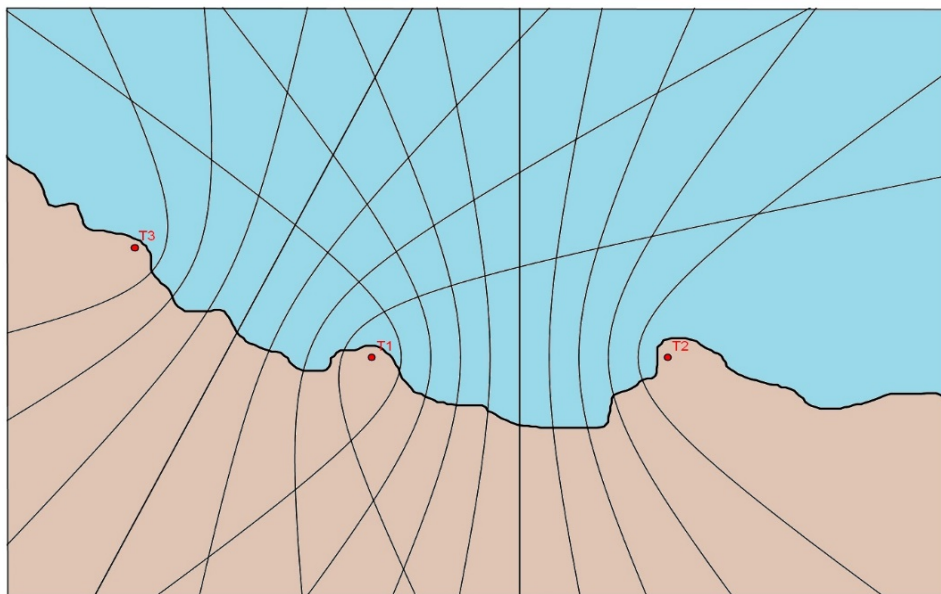


Figura 4: Sistema de Navegação com três transmissores.

Na figura 4, está plotado o padrão hiperbólico de uma rede constituída por três estações: a **Mestra T1** e duas **Escravas**, ou **Secundárias**, **T2** e **T3**. As duas famílias de LDP's hiperbólicas **T1 – T2** e **T1 – T3** constituem o **quadriculado hiperbólico** traçado na carta marítima. Neste exemplo, o receptor do sistema de navegação hiperbólica determinou duas diferenças de tempo de recepção de sinais: **T1 – T2 = 700 μs** e **T1 – T3 = 600 μs**.

1. Determine a localização exata do navio. Justifique o porquê é possível esta localização.

---



---

2. De acordo com os dados do receptor marque na Figura 4 a localização exata do navio. Sabendo que T1(0,0) e T2(150,0), qual a distâncias entre T1 e T2? E entre T1 e T3?

---



---

3. Qual o número de transmissores para que ocorra uma localização ideal do navio?

---



---

Parabéns você acaba de construir um sistema de navegação, conhecido atualmente como LORAN C (abreviatura de “Long-Range Navigation”) que foi originalmente desenvolvido nos Estados Unidos, em 1940, por Alfred Lee Loomis. As principais estações LORAN-C tornaram-se operacionais em 1957. O sistema foi gradualmente aprimorado e

expandido até o final da década de 1970. O LORAN-C continua intensamente utilizado, tanto na navegação marítima como na navegação aérea.

Dê sua opinião ou sugestões sobre a atividade proposta

---

---

---

---

---

---

## ANEXO 2 – TERMOS DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

### Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

#### “Dissertação – PROFMAT – Frank Pereira Bortolotti”

Prezado (a) Senhor (a):

Gostaríamos de convidá-lo (a) para participar da pesquisa “**Dissertação – PROFMAT – FRANK PEREIRA BORTOLOTTI**”, a ser realizada no programa PROFMAT, UEL. O objetivo da pesquisa é “**avaliar aspectos relacionados aos conteúdos geométricos envolvidos em problemas navais**”. Sua participação é muito importante e ela se daria da seguinte forma: realizando as atividades propostas sobre atividades matemáticas correlatas. Esclarecemos que sua participação é totalmente voluntária, podendo o (a) senhor (a): recusar-se a participar, ou mesmo desistir a qualquer momento, sem que isto acarrete qualquer ônus ou prejuízo à sua pessoa. Esclarecemos, também, que suas informações serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa (ou para esta e futuras pesquisas) e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a sua identidade. Esclarecemos ainda, que o (a) senhor (a) não pagará e nem será remunerado (a) por sua participação. Garantimos, no entanto, que todas as despesas decorrentes da pesquisa serão ressarcidas, quando devidas e decorrentes especificamente de sua participação. Os benefícios esperados são aprendizagem de aspectos históricos do Cálculo diferencial e integral. Quanto aos riscos, **acreditamos que não existem riscos de natureza física ou psíquica**. Caso o (a) senhor (a) tenha dúvidas ou necessite de maiores esclarecimentos poderá nos contatar (**Prof. Frank Pereira Bortolotti; Rua Denis Papin, 480, casa 19, Vila Industrial, Londrina, PR; Tel.: 9937-3290; E-mail: frankbortolotti@ig.com.br**), ou procurar o Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da Universidade Estadual de Londrina, situado junto ao LABESC – Laboratório Escola, no Campus Universitário, telefone 3371-5455, e-mail: [cep268@uel.br](mailto:cep268@uel.br). Este termo deverá ser preenchido em duas vias de igual teor, sendo uma delas devidamente preenchida, assinada e entregue ao (à) senhor (a).

Londrina, 19 de novembro de 2014.

Frank Pereira Bortolotti  
**Pesquisador Responsável**  
 RG: 4.781.533-9

EU, \_\_\_\_\_, CPF: \_\_\_\_\_, responsável pelo menor \_\_\_\_\_, tendo sido devidamente esclarecido sobre os procedimentos da pesquisa, concordo que ele (ela) participe **voluntariamente** da pesquisa descrita acima.

Nome do menor: \_\_\_\_\_

Assinatura do menor: \_\_\_\_\_

Assinatura do responsável: \_\_\_\_\_

**Termo de Consentimento Livre e Esclarecido**  
**“Dissertação – PROFMAT – Frank Pereira Bortolotti”**

Prezado(a) Senhor(a):

Gostaríamos de convidá-lo (a) para participar da pesquisa **“Dissertação – PROFMAT – FRANK PEREIRA BORTOLOTTI”**, a ser realizada no programa PROFMAT, UEL. O objetivo da pesquisa é **“avaliar aspectos relacionados aos conteúdos geométricos envolvidos em problemas navais”**. Sua participação é muito importante e ela se daria da seguinte forma: realizando as atividades propostas sobre atividades matemáticas correlatas. Esclarecemos que sua participação é totalmente voluntária, podendo o(a) senhor(a): recusar-se a participar, ou mesmo desistir a qualquer momento, sem que isto acarrete qualquer ônus ou prejuízo à sua pessoa. Esclarecemos, também, que suas informações serão utilizadas somente para os fins desta pesquisa (ou para esta e futuras pesquisas) e serão tratadas com o mais absoluto sigilo e confidencialidade, de modo a preservar a sua identidade. Esclarecemos ainda, que o(a) senhor(a) não pagará e nem será remunerado(a) por sua participação. Garantimos, no entanto, que todas as despesas decorrentes da pesquisa serão ressarcidas, quando devidas e decorrentes especificamente de sua participação. Os benefícios esperados são aprendizagem de aspectos históricos do Cálculo diferencial e integral. Quanto aos riscos, **acreditamos que não existem riscos de natureza física ou psíquica**. Caso o(a) senhor(a) tenha dúvidas ou necessite de maiores esclarecimentos poderá nos contatar (**Prof. Frank Pereira Bortolotti; Rua Denis Papin, 480, casa 19, Vila Industrial, Londrina, PR; Tel.: 9937-3290; E-mail: frankbortolotti@ig.com.br**), ou procurar o Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos da Universidade Estadual de Londrina, situado junto ao LABESC – Laboratório Escola, no Campus Universitário, telefone 3371-5455, e-mail: cep268@uel.br.

Este termo deverá ser preenchido em duas vias de igual teor, sendo uma delas devidamente preenchida, assinada e entregue ao(à) senhor(a).

Londrina, 14 de novembro de 2014.

Frank Pereira Bortolotti  
**Pesquisador Responsável**  
 RG: 4.781.533-9

\_\_\_\_\_ (Nome Completo), tendo sido devidamente esclarecido sobre os procedimentos da pesquisa, concordo em participar **voluntariamente** da pesquisa descrita acima.

Assinatura: \_\_\_\_\_

Data: 14 de novembro de 2014