Universidade Estadual de Londrina

WANDER DE OLIVEIRA

MATEMÁTICA E MÚSICA:

INTERDISCIPLINARIDADE NO ENSINO DA TRIGONOMETRIA E UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA SALA DE AULA

Londrina
2015

WANDER DE OLIVEIRA

MATEMÁTICA E MÚSICA: INTERDISCIPLINARIDADE NO ENSINO DA TRIGONOMETRIA E UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA SALA DE AULA

Dissertação de mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Michele de Oliveira Alves

Londrina
2015

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

O48mi Oliveira, Wander de.

Matemática e música: interdisciplinaridade no ensino da trigonometria e uma proposta de atividades para sala de aula / Wander de Oliveira - Londrina, 2015.

196 f.: il.

Orientador: Michele de Oliveira Alves.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2015.

Inclui bibliografia.

1. Matemática x Estudo e ensino – Teses. 2. Trigonometria x Formação de conceitos - Teses. 3. Abordagem interdisciplinar do conhecimento na educação - Teses. 4. Música x Matemática – Teses. I. Alves, Michele de Oliveira. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU 51:37.02

WANDER DE OLIVEIRA

MATEMÁTICA E MÚSICA:
INTERDISCIPLINARIDADE NO ENSINO DA TRIGONOMETRIA E UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA SALA DE AULA

Dissertação de mestrado apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Londrina como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

____
Profa. Dra. Michele de Oliveira Alves
Universidade Estadual de Londrina

____
Profa. Dra. Adriana Helena Borssoi
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

____
Profa. Dra. Neuza Teramon
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 15 de Abril de 2015.

Dedico este trabalho à minha esposa Adriana, por toda a compreensão, carinho, incentivo e suporte, principalmente nos momentos mais difíceis durante o processo, e aos meus filhos, pelo amor e compreensão nos momentos de ausência.

AGRADECIMENTOS

À Deus, pois sua presença constante em minha vida foi pedra fundamental para o desenvolvimento deste trabalho.

À minha família, pelo amor, paciência, resignação e apoio em todos os momentos, bons ou difíceis.

Em particular à minha esposa Adriana, pois sem ela esta realização não seria possível. Foram fundamentais suas horas ao meu lado, me dando todo o incentivo, apoio emocional e todo o suporte necessário para que um profissional, esposo e pai pudesse desbravar os caminhos que me levaram até aqui.

À minha orientadora, Professora Dra. Michele de Oliveira Alves, por ter me acolhido como orientando, pela sua disponibilidade, dedicação e compreensão de minhas limitações, e por ter me direcionado para aquilo que eu realmente almejava.

Aos colegas de curso Carlos e Walmir, pelas horas a fio a decifrar conteúdos e problemas.

Agradeço também à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro no decorrer do curso.

"A música é o prazer que a mente humana experimenta ao contar sem se dar conta de que está contando"

Gottfried Whilhelm Leibniz

OLIVEIRA, Wander de. **Matemática e Música:** interdisciplinaridade no ensino da trigonometria e uma proposta de atividades para sala de aula. 2015. 196 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2015.

RESUMO

O presente trabalho tem como proposta uma abordagem de conceitos relacionados entre a Música e a Trigonometria no Ensino Médio, e propõe atividades utilizando estes conceitos para aplicação em sala de aula. Busca-se com o texto e as atividades propostas, instigar tanto os alunos a trabalharem em sala de aula com os conceitos desta área da Matemática, como incentivar os professores a se apropriarem destas formas de ensinar, e buscarem outras. O trabalho está estruturado primeiramente de forma a dar um panorama histórico dos pontos de vista da Matemática, com foco principal na Trigonometria, e da Música. Conceitos de Acústica são introduzidos, como fundamentação para o entendimento dos princípios básicos dos elementos de teoria musical e posteriormente do comportamento das ondas senóides. Fundamentos básicos de Trigonometria englobam os principais conceitos trabalhados no Ensino Médio no referido tema na disciplina de Matemática, e darão suporte para a realização das atividades propostas no capítulo seguinte. As atividades estão elaboradas seguindo um organograma que prevê: assunto matemático correlato, interdisciplinaridade, série para aplicação da atividade, tempo estimado para aplicação da atividade, material utilizado, objetivos da atividade, metodologia aplicada, ficha de aplicação da atividade, mural de expectativas da atividade aplicada. O objetivo da interdisciplinaridade está focado, dentre outros, no crescente movimento pela consolidação da Música como disciplina curricular da Educação Básica. Outro motivo da importância da Música como componente no estudo de Matemática está em que a musicalização pode auxiliar na assimilação de conteúdos trabalhados em disciplinas que se utilizem de concentração e raciocínio lógico.

Palavras-chave: Matemática. Música. Trigonometria. Interdisciplinaridade.

OLIVEIRA, Wander de. **Mathematics and Music:** interdisciplinarity in teaching of trigonometry and a proposed activities for classroom. 2015. 196 p. Dissertation (Professional Masters in Mathemathics in National Network) - State University of Londrina, Londrina, 2015.

ABSTRACT

This work is to propose an approach of related concepts between Music and Trigonometry in High School, and proposes activities using these concepts for application in the classroom. Search up with the text and the proposed activities, both instigate students to work in the classroom with the concepts of this area of Mathematics, such as encouraging teachers to take ownership of these ways of teaching, and seek others. The work is primarily structured to give a historical overview of the views of Mathematics, with main focus on Trigonometry, and Music. Acoustic concepts are introduced, as the basis for understanding the basic principles of music theory elements and subsequently the behavior of sine waves. Basics of Trigonometry include key concepts worked in High School in that subject in the discipline of Mathematics, and will support to carry out the proposed activities in the following chapter. The activities are prepared according to an organization chart which provides: subject mathematical correlate, interdisciplinarity, series for the implementation of activity, estimated time for implementation of activity, material used, activity objectives, methodology applied, application record of activity, expectations mural of the applied activity. The goal of the interdisciplinarity focuses, among others, the growing movement for consolidation of Music as a curricular subject of Basic Education. Another reason for the importance of Music as a component in the study of Mathematics is that music education can assist in the assimilation of contents worked in disciplines that use concentration and logical thinking.

Keywords: Mathematics. Music. Trigonometry. Interdisciplinarity.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

1 INTRODUÇÃO

Manifestações da ciência e da arte desde os primórdios da existência humana na Terra, a Matemática e a Música sempre estiveram presentes em nosso dia a dia.

Principalmente com a diminuição do nomadismo, a necessidade de um formato organizado de vida em grupo levou o ser humano a estabelecer normas para o seu convívio. E para tanto, a Matemática foi crucial no desenvolvimento de métodos, primordialmente de contagem.

A Música também é considerada uma das primeiras experiências do ser humano, que ainda no ventre da mãe reconhece o cantarolar que o embala, e uma das primeiras manifestações do homem na Terra, que descobriram o prazer e as utilidades da combinação entre diversos sons e o silêncio.

De fundamental importância, a Música sempre esteve ligada às divindades, aos rituais, aos momentos de alegria e de tristeza, ao cosmo.

Talvez um dos primeiros experimentos envolvendo a Matemática e a Música tenha sido o projeto, a construção, o estudo e o desenvolvimento das propriedades do monocórdio por Pitágoras, no século VI a.C. Ele, que fundou a Escola Pitagórica, além de matemático, astrônomo e filósofo, era também um teórico musical, de acordo com [1].

Para os pitagóricos tudo no universo eram números, e particularmente, números inteiros. Pitágoras e seus seguidores também confiavam plenamente na ordem em detrimento do caos, e adotavam suas doutrinas buscando a perfeição apoiada nos números e em suas propriedades irrefutáveis.

Quando o mestre da Escola Pitagórica conseguiu estabelecer relações entre intervalos de notas musicais (sons harmoniosos) e razões entre números inteiros, o feito não apenas corroborou suas crenças, como também elevou a Música como fator de busca do equilíbrio do ser humano.

A busca do homem por soluções de suas questões nas áreas da Navegação, da Astronomia e da Geografia, entre outras, levou-os ao desenvolvimento de estudos matemáticos de forma mais específica, trabalhando com conceitos que hoje reunimos sob a denominação de "Trigonometria".

Os babilônios seguiram os sumérios no aperfeiçoamento dos estudos da área da Trigonometria, apoiados em uma base numérica sexagesimal, que não apenas consolidou-se como uma das formas de utilização de unidades de medidas de ângulos e arcos de circunferências até hoje, como também serviu de alicerce para todo o sistema temporal que utilizamos, como os dias, horas, minutos e segundos, por exemplo.

Bem mais tarde, Cláudio Ptolomeu (90-168 d.C.), em sua obra o "Almagesto" sintetizou os trabalhos de matemáticos e astrônomos, como por exemplo os de Hiparco de Nicéia (c. 180-125 a.C.), com ênfase principalmente no ramo da Trigonometria.

Durante a Idade Média, a Trigonometria ganhou grandes avanços através dos indianos e árabes, até ser de fato introduzida na Europa Ocidental.

Na Idade Moderna temos estudos de destaque como os do matemático Regiomontanus (1436-1476), e a partir de sua época a Trigonometria ganha seu lugar como ciência desvinculada da Astronomia.

Outros grandes nomes que deixaram seu legado de estudo da Trigonometria neste período foram Nicolau Copérnico (1473-1543), Georg Porris (1514-1576), François Viète (1540-1603), John Napier (1550-1617) e Henry Briggs (1561-1630).

Nos séculos XVII e XVIII o físico e matemático Isaac Newton (1643-1727), e o matemático e filósofo Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) deram um grande avanço à Trigonometria, trabalhando-a junto a séries infinitas, ao Cálculo Diferencial e Integral e, então, consolidando-a como área da Matemática intimamente ligada a fenômenos ondulatórios.

Os chamados "fenômenos ondulatórios" são objetos de importantes estudos da ciência, pois encontram-se em diversos ramos da mesma, como a Física, a Engenharia, a Medicina, a Química, a Biologica, etc.

A Trigonometria continuou a difundir-se como importante ramo da Matemática e indispensável ferramenta às outras ciências que estudavam as ondas, e alavancou-se ainda mais com nomes como Leronard Euler (1707-1783) e Abraham de Moivre (1667-1754).

Já no século XIX Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) representa uma função trigonométrica por uma série trigonométrica, como encontrado em [26], utilizando-se do cálculo de integrais, aliando a Trigonometria à Análise.

Sem dúvida, a Trigonometria é uma das áreas de grande importância para a Matemática e outras ciências, aplicando-se a diversas delas, como por exemplo a Astronomia, a Cartografia e a Navegação Marítima.

Um dos objetivos deste trabalho é servir de ferramenta e contribuir para que o ensino de Trigonometria seja, tanto para o professor quanto para o aluno, algo ainda mais desafiante e motivador, utilizando-se da interdisciplinaridade entre Matemática e Música.

O entendimento sobre interdisciplinaridade utilizado neste trabalho baseia-se no estabelecimento de relações de complementaridade, onde as disciplinas escolares envolvidas convergem e se interconectam. Consideramos o segundo grau de integração entre disciplinas, segundo Marcel Boisot: "[...] 2.Interdisciplinaridade linear. É uma modalidade de intercâmbio interdisciplinar na qual uma ou mais leis tomadas de uma disciplina são utilizadas para explicar fenômenos de outra [...]" (Boisot, apud Santomé [53]).

A interdisciplinaridade é vista como uma ação educativa no âmbito do ensino de Matemática e de outras disciplinas, como a Música e a Física, direcionada a uma real educação científica. Este objetivo pode ser alcançado tendo em vista a classificação dada por Fourez em [23] para a interdisciplinaridade como uma superciência, onde o efeito da abordagem interdisciplinar isentaria da consideração de perspectivas mais particulares, possivelmente presentes em pontos de vista das disciplinas. Assim, haveria a possibilidade de uma análise a partir de um número maior de características de uma dada situação.

A interdisciplinaridade entre a Matemática e Música ganha força com a publicação da Lei n^o 11769, sancionada em 18 de agosto de 2008. Esta lei altera a Lei n^o 9394, de 20 de dezembro de 1996, a chamada Lei de Diretrizes e Bases da Educação, e dispõe sobre a obrigatoriedade do ensino da Música em toda a educação básica. Como o foco principal da lei não é a formação de músicos, e sim o desenvolvimento da criatividade, a sensibilidade e a integração dos alunos, ela vem ao encontro de um objetivo de interdisciplinaridade que busca integrar o estudo da Música com a Matemática, visando o raciocínio lógico, a busca de estratégias e o uso da criatividade na resolução de problemas. É a união do sentimento com a razão.

A Física como disciplina da educação básica também está bem presente na interdisciplinaridade com a Matemática (e a Música) neste trabalho, e o foco dessa área abrange os assuntos de Acústica, mais especificamente o estudo de ondas sonoras. Neste estudo, a Física aborda principalmente os conceitos de frequências e períodos de ondas, comprimento e amplitude de onda e harmônicos.

As propostas de atividades buscam a contextualização de parte do conteúdo de Trigonometria com elementos de som e Música, e objetivam a aplicação em sala de aula, servindo também de referência para que o professor desenvolva outras atividades neste ou em outros assuntos dentro da Matemática.

O uso de Música e de sons diversos, aliados à utilização de ferramentas tecnológicas em sala de aula procuram favorecer o aprendizado da Trigonometria.

O trabalho inicia-se com uma abordagem histórica da Matemática, com ênfase em Pitágoras e na Trigonometria, e depois da Música, desde os registros mais antigos. Sobre esta, o desenvolvimento da abordagem histórica foi dividido entre os diversos povos e suas culturas, e também através do tempo.

Depois, tópicos básicos em acústica e elementos de teoria musical são introduzidos, para o bom entendimento da relação entre a função seno, o gráfico da senóide e os sons musicais. Em seguida são abordados os fundamentos de Trigonometria, que abrangem os principais conceitos trabalhados neste ramo da Matemática no Ensino Médio, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais e que devem subsidiar, juntamente com as informações complementares sobre acústica e teoria musical, a realização das atividades propostas.

No capítulo seguinte estão as atividades propostas, estruturadas de forma a subsidiar o professor nos detalhes referentes à sua aplicabilidade. Destaca-se a utilização de recursos tecnológicos, como computador, projetor multimídia, caixas de som e sotwares livres.

Os softwares recomendados, embora possam ser substituídos por outros compatíveis são o Geogebra e o programa Audacity.

O Geogebra é um sotware gratuito de Matemática dinâmica, especialmente desenvolvido para o ensino e aprendizagem, com recursos diversos, inclusive gráficos. De uso muito difundido nas escolas, principalmente as instituições de ensino público, o programa Geogebra tem uma interface muito simples, e o suporte técnico, se necessário, também é vasto e fácil de encontrar.

O sofware Audacity é um programa livre para gravação, edição, importação e exportação de arquivos de áudio. É ainda uma ferramenta que possibilita efetuar análise dos ficheiros de áudio através de seus atributos, como os gráficos de espectros sonoros. Também possui uma interface de utilização fácil, bastando apenas uma familiarização com os seus comandos. Para facilitar a utilização dos recursos do programa necessários às atividades propostas, foi desenvolvido um apêndice no final do trabalho com um breve tutorial do programa acerca destes comandos básicos.

No final do trabalho encontram-se três apêndices e dois anexos. Optou-se, para não interromper a linha de raciocínio do leitor, colocar no Apêndice A um breve texto sobre funções periódicas. Para ser utilizado na atividade 5, um texto auxiliar sobre a Música e o telefone se encontra no Apêndice B. Para as atividades que necessitam, no Apêndice C foi elaborado um breve tutorial do programa Audacity com os principais comandos utilizados.

Nos Anexos D e E, respectivamente, encontram-se a Resolução N^o 269 da Câmara dos Representantes dos EUA, citada no apêndice sobre o telefone, e a Prática Telebrás sobre a sinalização acústica para a rede nacional de telefonia.

2 CONTEXTO HISTÓRICO

2.1 A MATEMÁTICA

Quando surgiu a Matemática? De acordo com [45], para Platão (428/427-348/347 a.C.), filósofo e matemático da Grécia Antiga, a Matemática sempre existiu, à espera de que a descobrissem.

Sabemos que no início da vida do homem na Terra, era predominante o nomadismo. Porém, com o passar do tempo, houve a criação de tribos e, destas, passou-se à formação de cidades. Para estruturar esta vida em grupos, eram necessárias normas para a vida em sociedade. A Matemática teve essencial papel nessa necessidade humana de se organizar. Exemplos destas atividades primordiais à formação de uma civilização são a contagem, o escambo, a compra e venda.

O processo de contagem, segundo evidências arqueológicas, surgiu por volta de 50 mil anos atrás. O homem deve ter utilizado o princípio da correspondência biunívoca para métodos simples de contar, como por exemplo, fazendo-se ranhuras em uma pedra para a contagem de animais. Pode também ter utilizado o método de dobrar um dedo da mão para cada unidade, o que é utilizado até os dias de hoje no processo rudimentar de aprendizagem inicial da Matemática pelas crianças, conforme [20].

Os estudos antropológicos evidenciam que o passo seguinte no aprimoramento do processo de contagem pode ter sido um arranjo de sons vocais para registrar verbalmente o número de objetos de um grupo pequeno. Apenas depois disso, com o desenvolvimento da escrita, foram surgindo símbolos para a representação desses números.

Nas civilizações antigas como a egípcia e a babilônica, a Matemática era utilizada apenas para a resolução de problemas práticos do cotidiano. Apenas por volta do século V a.C., na civilização grega, surgem bases da Matemática com fundamentação teórica, algumas utilizadas até hoje.

Na civilização grega, o saber matemático era imprescindível, visto que, para os filósofos, que também eram matemáticos, todo pensamento devia ser elevado ao patamar da ciência, para então ser considerado o saber verdadeiro. E, para isso, era necessário o conhecimento e estudo aprofundado da Matemática.

Os nossos atuais símbolos numéricos são chamados de indo-arábicos, pois foram invenção dos hindus, e muito difundidos pelos árabes para a Europa Ocidental. Nos registros mais antigos dos símbolos indo-arábicos não figura o zero, nem a utilização da notação posicional.

No ano 825 d.C. o matemático persa Al-Khowârizmî escreveu um livro onde descreveu de maneira completa o sistema hindu, incluindo o zero e a ideia de valor posicional. Mais tarde, no século XII, uma tradução latina do tratado de Al-Khowârizmî e alguns trabalhos europeus sobre o assunto fizeram com que o sistema se disseminasse de forma mais ampla.

Durante a Idade Média (séc. V - XV d.C.) pouco se produziu em termos de ciência. O conhecimento era pouco acessível, e estava nas mãos da Igreja, que valorizava mais os estudos, obviamente, em religião e filosofia.

Apenas mais tarde, a partir de várias transformações sociais, como a formação da burguesia, a Reforma Protestante e o Renascimento, houve um reaquecimento da produção intelectual. Novas formas de pensar se sobrepuseram, como a de que o valor de um homem é medido pelo seu potencial para o trabalho, ofício este entendido como a produção de algo útil para a sociedade. Há um certo enfraquecimento da Igreja devido às dissidências, e as ciências voltam à tona.

Outro fator contribuinte às artes e às ciências foram os *mecenas*, que eram homens ricos, normalmente comerciantes, que utilizando parte de suas fortunas, patrocinavam artistas e cientistas de todas as áreas.

A partir da Idade Moderna, a iniciar-se no século XVI da nossa era, ocorre um grande avanço científico, tendo como base a racionalidade, com o surgimento de grandes filósofos e matemáticos. Há um rompimento com as imposições proibitivas da Igreja, e a ciência ganha um grande avanço.

A busca da humanidade pela explicação dos fenômenos naturais, deixando um pouco de lado as explicações místicas ou divinas, levou-a a ver e analisar tudo o que havia ao seu redor, e inclusive a si mesmo, de modo racional e sistemático. As primeiras tentativas de explicação da Natureza vieram com os indianos e com os gregos antigos. A Filosofia Natural, como era conhecida a Física (gr. *physis*: natureza) até tempos mais modernos, era uma mistura de Filosofia, a Física como hoje a conhecemos, de Química, Matemática e Biologia, e funcionava como uma disciplina acadêmica dentro da Astronomia.

Após seu grande momento na Grêcia Antiga, na época de Aristóteles (384-322 a.C.), a Física entrou em declínio na Idade Média, e voltando a desenvolver-se durante o Renascimento, na época da Revolução Científica. Galileu Galilei é considerado o primeiro Físico em seu sentido moderno, adotando a Matemática como ferramenta principal.

2.1.1 Pitágoras e a Escola Pitagórica

Um nome que se consolidou mundialmente não só na Matemática e na Música, como praticamente em todas as áreas do conhecimento, foi o do matemático grego Pitágoras, sobre o qual pouco se sabe com certeza. Pitágoras de Samos deve ter nascido por volta de 572 a.C., na ilha de Samos, que fica na parte leste do mar Egeu, próxima da costa oeste da Turquia. Possivelmente tenha sido discípulo do matemático e filósofo Tales de Mileto, pois a cidade de Mileto era próxima da ilha de Samos, e era 50 anos mais novo do que este.

Em Crotona, uma colônia grega no sul da Itália, Pitágoras fundou a famosa Escola Pitagórica, considerado por alguns como a primeira universidade do mundo. Esta escola era um centro de estudos de Matemática, Filosofia e Ciências Naturais, e funcionava também como uma irmandade secreta, com seus próprios ritos e cerimônias. Seus membros tinham como prerrogativas a obediência e o silêncio, praticavam o jejum, procuravam a simplicidade no vestir e nas posses, e mantinham o hábito da auto-análise. Os pitagóricos acreditavam na imortalidade e na transmigração da alma após a morte (metempsicose). O modo de vida e as doutrinas provenientes de Pitágoras e de sua escola recebem o nome de pitagorismo.

Apesar da escola ter sido destruída mais tarde, por questões políticas, a irmandade continuou a existir por pelo menos dois séculos após a morte de seu fundador. Porém, a Escola Pitagórica, como escola filosófica no sentido histórico, teve sua existência prolongada por cerca de mil anos desde sua fundação. Pitágoras morreu por volta dos 80 anos de idade, provavelmente assassinado por causa da grande influência que exercia sua irmandade no sul da Itália.

Todos os ensinamentos da escola eram transmitidos oralmente, pois era proibido na Irmandade Pitagórica qualquer tipo de registro de seus estudos. Essa transmissão era feita por meio de sentenças (gr.: *mathématas*) e exemplos de vida, assim como fizeram Sócrates, Jesus Cristo e Maomé. Outro costume entre os pitagóricos era de atribuir todas as descobertas da irmandade ao seu fundador, o que dificulta saber quais feitos se devem ao próprio Pitágoras e quais se devem a outros membros da irmandade. Até a própria existência de Pitágoras é duvidosa, na opinião de alguns historiadores, assim como dúvidas semelhantes existem sobre a existência de outros filósofos ilustres, profetas e religiosos.

Figura 2.1: Pitágoras em detalhe da pintura "Escola de Atenas"(1509-1510), de Rafael Sanzio

Fonte: http://lenostretesine.altervista.org/LucaT/tetraktys.htm (29/06/14)

Para os pitagóricos, a essência do homem e de tudo à sua volta eram os números inteiros. Eles estudavam profundamente as propriedades dos números, junto com a Geometria, a Música e a Astronomia. Estas eram consideradas as quatro artes liberais básicas do programa de estudos pitagórico, que na Idade Média ficou conhecido como *quadrivium*.

Dentre os princípios filosóficos que norteavam a escola pitagórica, os de principal destaque são: a alma é imortal, e reencarna-se; os acontecimentos da história são cíclicos; nada é inteiramente novo; todas as coisas vivas são afins; os princípios da Matemática são os princípios de todas as coisas.

O estudo da Matemática e da Filosofia, interligados e fundamentados em sua máxima "tudo é número", eram objeto de promoção da harmonia da alma com o cosmo. Outro importante filósofo grego, Aristóteles, aluno de Platão, cita a Escola Pitagórica em seu trabalho "Metafísica", uma série de tratados escritos por ele no século IV a.C., que postumamente foram organizados em um compêndio de 14 livros. Aristóteles, em [4], exemplifica a especial importância dada pelos pitagóricos à Matemática e aos números escrevendo

> [...] Entre estes, e antes deles, os chamados pitagóricos consagraram-se pela primeira vez às matemáticas, fazendo-as progredir, e, penetrados por estas disciplinas, julgaram que os princípios delas fossem os princípios de todos os seres. Como, porém, entre estes, os números são, por natureza, os primeiros, e como nos números julgaram aperceber muitíssimas semelhanças com o que existe e o que se gera, de preferência ao fogo, à terra e à água (sendo tal determinação dos números a justiça, tal outra a alma e a inteligência, tal outra o tempo, e assim da mesma maneira para cada uma das outras); além disto, como vissem nos números as modificações e as proporções da harmonia e, enfim, como todas as outras coisas lhes parecessem, na natureza inteira, formadas à semelhança dos números, e os números as realidades primordiais do Universo, pensaram eles que os elementos dos números fossem também os elementos de todos os seres, e que o céu inteiro fosse harmonia e número.

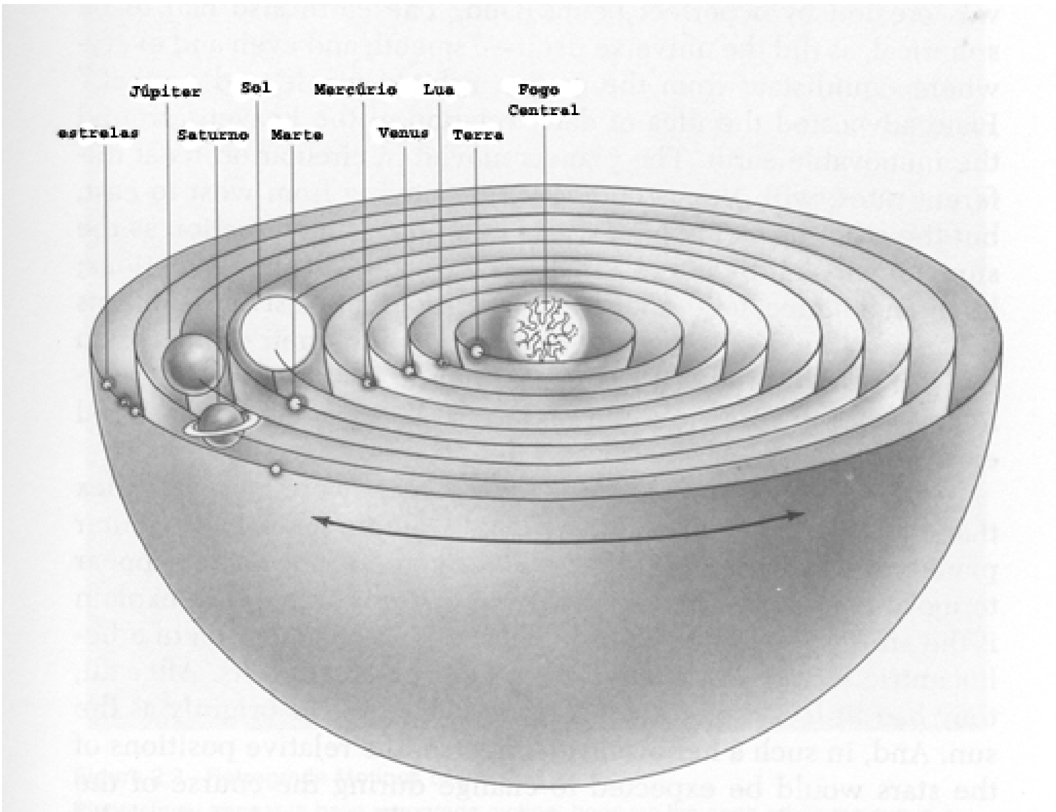
No pitagorismo o mundo assume a imagem de uma esfera, considerada uma figura geométrica perfeita. Em seu interior operam os quatro elementos fundamentais: fogo, água, terra e ar. Estes elementos são miscíveis, ainda que o contorno da esfera permaneça em puro fogo. Ao circundante se dá o nome de éter ou céu.

Em Astronomia, os pitagóricos foram os primeiros a considerar a Terra como um globo giratório, junto com outras esferas celestes, em torno de um fogo central. O assim denominado fogo central não se confunde com o astro Sol, visto que este figura como um dos corpos celestes a girar em torno daquele. E o fogo no centro do universo era o responsável por fornecer a energia para que os outros corpos celestes se movimentassem. A importância dada ao fogo, tanto como fator central como circundante do universo, advém da importância mais significativa dada a este elemento dentre os quatro fundamentais.

Além da Terra, da Lua e do Sol, somam-se aos corpos celestes os planetas Vênus, Mercúrio, Marte, Saturno e Júpiter. As estrelas fixas são consideradas como o nono corpo celeste a figurar no conjunto. Ao todo, os astros visíveis são em número de nove. Assim, por hipótese, na face oposta ao fogo central figurava a Antiterra, invisível, a fim de que se completasse o número dez, o número da perfeição dos pitagóricos.

A Antiterra seria a esfera de oposição, que protegeria o planeta Terra do fogo central, pois estaria sempre entre estes dois. Por este motivo, o fogo central também seria invisível da Terra (Figura 2.2).

Figura 2.2: Representação Geométrica do Universo pelos Pitagóricos



Fonte: http://www.on.br/ead_2013/site/conteudo/cap7-historia/astronomia-antiga/gregos/pitagoras.html (23/06/14)

Obviamente não constam na lista dos astros pitagóricos os planetas Urano, Netuno e Plutão (planeta-anão), descobertos respectivamente nos anos de 1781, 1846 e 1930 de nossa era. Curiosamente, estes três planetas poderiam substituir a Antiterra, o fogo central e as estrelas fixas, se levássemos em consideração apenas o Sistema Solar.

Os pitagóricos afirmavam que a Terra girava uma vez por dia ao redor do fogo central, e exibia sempre a mesma face a ele. O nosso planeta também produziria o movimento de rotação, girando sobre si mesmo, alternando entre o dia e a noite.

Segundo eles, a ordem harmoniosa de todas as coisas era explicada como corpos em movimento de acordo com um esquema numérico, conforme [30].

Como Pitágoras e seus discípulos acreditavam que os corpos celestes estavam separados uns dos outros por intervalos correspondentes a longitudes (comprimentos) de cordas harmônicas, afirmavam que o movimento dos astros dariam origem a um som musical, que chamavam de "a harmonia das esferas".

A altura das notas de cada esfera na escala de tons celestial seria regulada pela velocidade de sua rotação, e as distâncias entre esses corpos celestes estariam relacionadas com os intervalos musicais. Segundo Wisnik em [64], "Pitágoras descobriu uma certa ordem numérica inerente ao som. É a analogia entre duas séries: o som e o número, um princípio universal extensivo a outras ordens, como a dos astros celestes."

Além de Pitágoras e seus discípulos, vários outros grandes cientistas estudaram os "sons do universo". Nicolau Copérnico (1473-1543), Galileu Galilei (1564-1642), Johannes Kepler (1571-1630), e Isaac Newton (1642-1727), dentre outros, continuaram a trabalhar com os corpos celestes, e uma harmonia completa das esferas foi criada: o tom mais alto seria atribuído ao planeta Mercúrio, a mudança de acordes maiores para menores ficaria a cargo de Vênus e da Terra, Marte seria fácil de captar em total harmonia. Os tons mais graves seriam de Júpiter, Saturno representaria um rugido no céu, Urano era simbolizado como um rápido tic-tac. Netuno e Plutão figuravam como batimentos regulares na Música Celeste.

O motivo pelo qual as pessoas não notariam a Música das Esferas seria pelo fato de que, dada sua existência juntamente com a criação do próprio universo, os seres humanos não saberiam como seria não sentir o seu som.

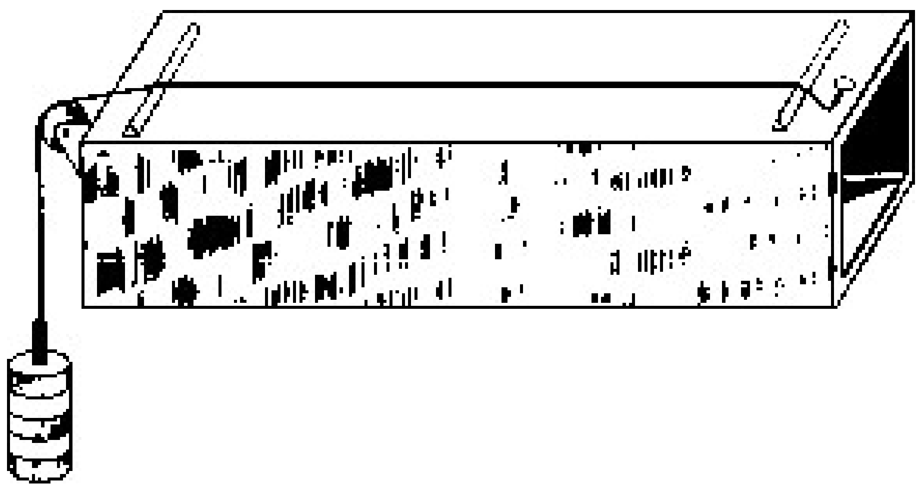
Na aritmética, o número se tornou para os discípulos de Pitágoras o princípio fundamental de proporção, ordem e harmonia do universo. A premissa pitagórica de que o universo é regido pelos números provavelmente se construiu com a ajuda da importante descoberta da irmandade sobre a relação entre a harmonia musical e frações de números inteiros.

Pitágoras também era músico. Desde muito jovem já tocava lira, e em pouco tempo também estava compondo. Para ele, a Música, além de uma arte, servia à purificação da mente, à cura de doenças, e exercia um papel preponderante no domínio da agressividade do ser humano. Pitágoras utilizava-se da Música em seus ensinamentos matemáticos, para criar um ambiente tranquilo e harmonioso.

Os números e a Matemática proporcionavam um sentimento de beleza e tranquilidade à Pitágoras, que buscava na ordem, no equilíbrio e na simetria, as bases para sua serenidade. Logo, na Música, Pitágoras também buscava a harmonia, no sentido da busca de combinações de sons que fossem agradáveis aos ouvidos.

Segundo uma lenda, passando em frente a uma oficina de ferreiro, Pitágoras ouviu as batidas de martelos de diferentes pesos, cujos sons produzidos eram agradáveis ao ouvido e se combinavam muito bem. A fim de pesquisar estas relações, Pitágoras estendeu uma corda entre dois cavaletes fixos sobre uma prancha. Ao tocar esta corda, produziu-se um determinado som que tomou como fundamental, o tom. A seguir, fez marcas na corda, que a dividiam em doze secções iguais. Este instrumento mais tarde seria chamado de monocórdio (do grego *monochórdon*), que significa literalmente "um fio" (Figura 2.3). Dois séculos mais tarde, Euclides de Alexandria se baseia nas divisões do monocórdio para construir sua Geometria Euclidiana.

Figura 2.3: Monocórdio



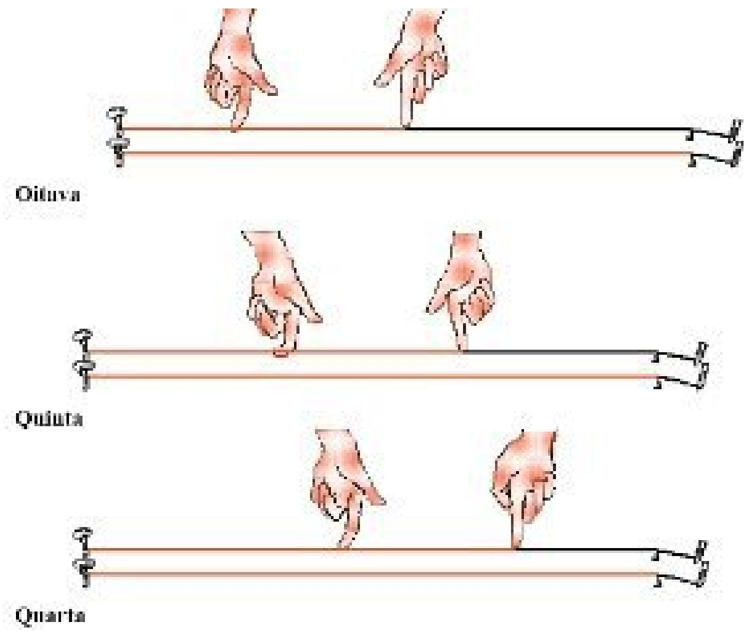
Fonte: http://www.ghtc.usp.br/server/Sites-HF/Lucas-Soares/monocordio%20de%20pitagoras.html (28/06/14)

Estudando o monocórdio, Pitágoras obteve sua importante explicação da harmonia musical através de frações de números inteiros, descoberta esta que deve ter influenciado fortemente seus estudos e colaborado para a conclusão pitagórica de que "tudo são números".

Pitágoras teve como ponto de partida a percepção de que cordas mais curtas emitiam sons mais agudos. Estudou e descobriu que a frequência da vibração de uma corda é diretamente proporcional ao seu comprimento.

Tocando o monocórdio na modalidade "corda solta", Pitágoras chamou de "tônica" o som correspondente a esta nota musical. Então, ele demonstrou que o tom de uma corda, quando soada na metade de seu comprimento, é uma "oitava" acima do som da corda livre, assim satisfazendo uma razão de 1:2. Já quando a corda é soada em dois terços de seu comprimento, o som é uma "quinta" mais alto, e quando soada em três quartos de seu comprimento, o som é uma "quarta" mais alto (Figura 2.4). O experimento de Pitágoras é considerado como sendo a primeira experiência empírica registrada na história da ciência. Assim, Pitágoras construira uma escala musical baseada em razões simples entre os números inteiros.

Figura 2.4: Comprimento das cordas no monocórdio



Fonte: http://escutecomigo.wordpress.com/2013/03/31/musica-pitagoras-e-a-matematica/ (28/06/14)

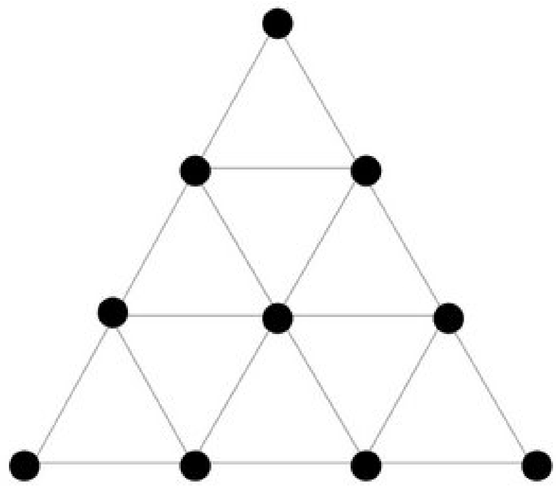
Esta estreita relação música-ciência prosseguiu firme durante centenas de anos. Galileu Galilei, matemático, físico, astrônomo e filósofo italiano do século XVI de nossa era, foi construtor de diversos instrumentos musicais.

No século XVII, Issac Newton (1642-1727), matemático, físico, astrônomo e filósofo inglês propôs uma classificação de cores sob a forma de um círculo cromático, com sete cores: violeta, azul índigo, azul celeste, verde, amarelo, laranja e vermelho. Sua escolha de cores se deu a fim de fazer uma comparação com as sete notas da escala musical ocidental, publicada em sua obra intitulada "Óptica", de 1704. Seu desejo era de que a harmonia, presente nas notas musicais, também estivesse presente em seu círculo cromático. Também trabalhou com uma escala musical com um sistema de divisão da oitava em 53 tons, proposta por autores musicais gregos antigos.

A partir desta ideia da perfeição divina dos números, os pitagóricos começaram a estudar as relações destes entre si. Segundo seus estudos, os números resultam do desdobramento da unidade. Assim, a partir do número 1 obtém-se o número 2, e estes primeiros originam o número 3, que por sua vez unido à unidade gera o número 4. Estes quatro primeiros números, segundo Pitágoras e seus discípulos, significavam a essência do universo, e mantinham uma relação direta com a matéria. O número 1 era considerado como um ponto, o número 2 como uma reta, o número 3 como uma superfície e o número 4 como um sólido, perfazendo assim também a correspondência dos números e da Geometria. Estes quatro números inteiros primordiais também representavam os quatro elementos: fogo, terra, água e ar.

Estes quatro elementos, quando somados, formavam outro importantíssimo número na concepção dos pitagóricos: 1 + 2 + 3 + 4 = 10 (a dezena). O número 10 corresponderia a um tetraktys (do grego antigo $\tau\varepsilon\tau\rho\alpha\kappa\tau\acute{\upsilon}\varsigma$), que Pitágoras chamava de número divino. Este número especial possui como representação pitagórica a forma de um triângulo equilátero, denominado triângulo perfeito (Figura 2.5). Esta sequência de números (1, 2, 3, 4, etc) também formava outros números triangulares, que se obtém pela soma dos termos. Desta forma, tem-se como números triangulares os números 10, 15, 21, 28, etc. Por vezes, são considerados também termos da sequência de números triangulares o número 1, o número 3 (1 + 2) e o número 6 (1 + 2 + 3).

Figura 2.5: Tetraktys

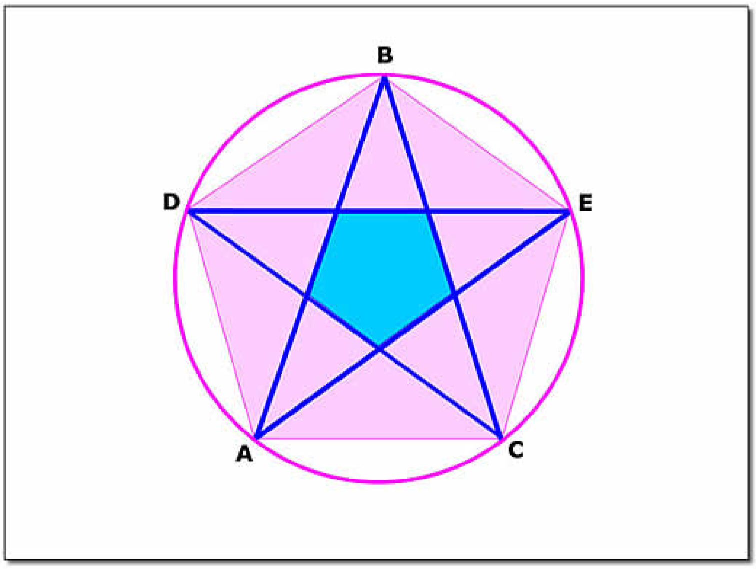


Fonte: http://lenostretesine.altervista.org/LucaT/tetraktys.htm (29/06/14)

O prestígio do número dez foi proeminente em praticamente em todos os povos, em função certamente do sistema decimal de contagem. Antropologicamente, o sistema decimal esteve sob a influência óbvia dos dez dedos das mãos do ser humano.

Dez era a base de contagem dos gregos, e também esta é a quantidade de vértices da Estrela Pitagórica, o chamado Pentagrama. O Pentagrama é o símbolo da Escola Pitagórica, e significava para eles saúde e conhecimento. É uma estrela de cinco pontas, com uma delas para cima, formada pelo traçado das cinco diagonais de um pentágono regular (Figura 2.6).

Figura 2.6: Pentagrama



Fonte: www.bpiropo.com.br/fpc20070122.htm (19/04/15)

A proporção áurea foi outra importante descoberta matemática feita pelos pitagóricos. A razão entre as medidas dos lados dos dois pentágonos é igual ao quadrado da razão áurea.

Dizemos que um ponto B divide um segmento de reta AC em média e extrema razão, se a razão entre o menor e o maior dos segmentos resultantes da divisão é igual à razão entre o maior e o segmento inteiro.

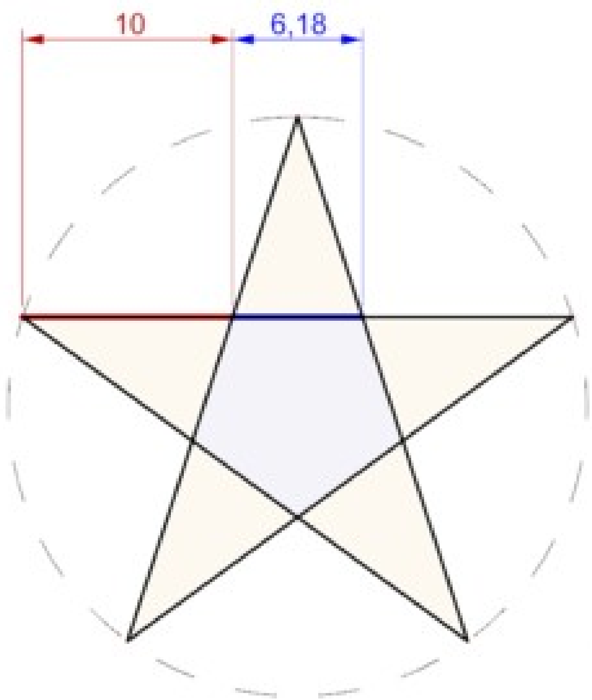
Tomando-se AB como o menor dos segmentos do resultado da divisão de AC em dois, teremos então a razão áurea:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{CB}{AB} = \Phi \quad . \tag{2.1}$$

A proporção ou razão áurea recebe diversas outras denominações, como "número de ouro", "número áureo", "razão de ouro", "divina proporção", "divina seção", "secção áurea", "proporção de ouro", "média e extrema razão", "proporção em extrema razão", "divisão de extrema razão", "áurea excelência" ou "razão de Phidias". É um valor real, pertencente ao conjunto dos números irracionais, cujo valor aproximado com três casas decimais é 1,618. É denotado pela letra grega Φ (*Phi*), em homenagem ao escultor *Phideas*, que o teria utilizado para criar o Parthenon, um templo dedicado à deusa grega Atena, construído no século V a.C. na Acrópole de Atenas, na Grécia Antiga.

No pentagrama, o pentágono menor, formado pelas interseções das diagonais do pentágono maior, está em proporção com este. Os segmentos do pentagrama estão na "proporção áurea", conforme podemos ver na Figura 2.7.

Figura 2.7: O Pentagrama e a Proporção Áurea



Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Proporção_áurea (29/06/14)

O número *Phi*, chamado de "número de ouro", desde a Antiguidade é encontrado na arte. Faz parte da relação de crescimento, como nas colméias, na proporção dos seres humanos, e outros inúmeros exemplos que envolvem a ordem do crescimento.

O número de ouro também se relaciona intimamente com a "Sequência de Fibonacci". Segundo Lima e colaboradores em [36], a sequência (F_n), dita de Fibonacci, cujos termos são 1, 1, 2, 3, 5, ... e na qual cada termo é a soma dos dois imediatamente anteriores, é definida por $F_0 = F_1 = 1$ e $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, para todo $n = 0, 1, 2, 3, ...$ O número áureo é aproximado pelos valores sucessivos resultantes da divisão de um termo da Sequência de Fibonacci, a partir do termo F_3, pelo termo imediatamente anterior, como exemplificado na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Aproximação de Φ por Fibonacci

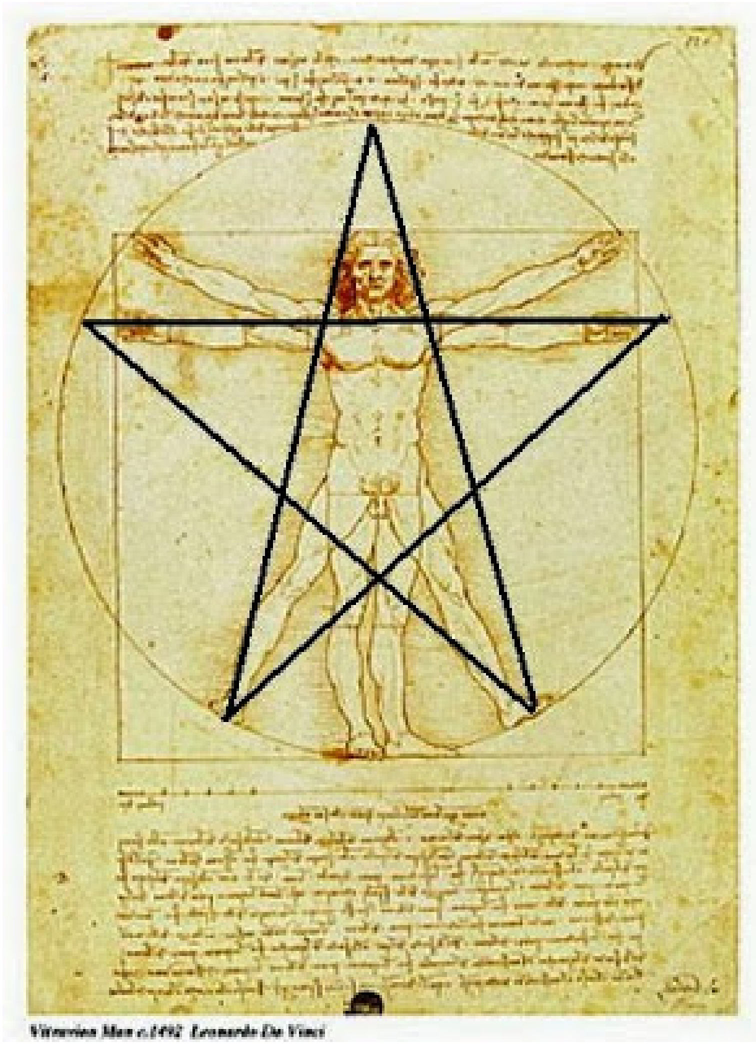
$\dfrac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$	Aproximação do valor de Φ
$\dfrac{2}{1}$	2
$\dfrac{3}{2}$	$1,5$
$\dfrac{5}{3}$	$1,666...$
$\dfrac{8}{5}$	$1,6$
$\dfrac{13}{8}$	$1,625$
$(\dfrac{F_n}{F_{n-1}})_{n \mapsto \infty}$	$1,618...$

Fonte: o próprio autor

O Pentagrama, durante milênios, e até hoje, nas diversas culturas e cultos, apresenta significados diversos, inclusive no cristianismo (as cinco chagas de Cristo) e na numerologia.

Podemos citar também a ilustração de Leonardo da Vinci (1452-1519) para o livro "A Divina Proporção", publicado em 1509, do monge franciscano e matemático italiano Luca Pacioli (1445-1517), onde o ilustrador mostra as relações geométricas do homem com o universo . Nesta ilustração (Figura 2.8), o pentagrama é representado pela figura humana, dentro de um círculo, com os braços e pernas abertos.

Figura 2.8: O Homem Vitruviano de Da Vinci e o Pentagrama



Fonte: http://muitoalem2013.blogspot.com.br/2013/10/desmistificando-simbolos-o-pentagrama.html (12/07/14)

Entre as investigações feitas pelos pitagóricos no campo matemático estão também seus estudos sobre números pares e ímpares, números primos, os quadrados de números inteiros, todos esses fundamentais para a teoria dos números.

Também na Escola Pitagórica foram reconhecidos (embora após muitas celeumas) os números irracionais, dentre os quais a raiz quadrada do número inteiro dois foi o primeiro a ser estudado exaustivamente.

É necessário ressaltar que os números, para os pitagóricos, não seriam os símbolos pelos quais eram conhecidos, mas sim os valores das grandezas que eles exprimem. Assim, um objeto manifestaria externamente uma estrutura numérica, e seria ele, o que é, devido ao valor desta.

Em Geometria, o famoso Teorema de Pitágoras foi a grande descoberta da Escola Pitagórica. Este teorema, que tornou-se a base para diversos outros estudos, é a afirmação de que "a medida do quadrado da hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das medidas dos quadrados de cada cateto do mesmo triângulo".

2.1.2 A Trigonometria

A palavra "trigonometria" é de origem grega, e é formada pela palavra *trigonos* (triângulo) e *metron* (medida). Assim, pode ser entendido como um termo que designa o sentido de medir as partes de um triângulo. Apesar da origem etimológica da palavra, pode ser que o conceito de medida de ângulo seja devido ao povo babilônico, e com o posterior contato desta civilização com os gregos, estes adotaram suas frações sexagesimais.

Porém, não há dúvidas quanto ao estudo sistemático de origem grega das relações entre ângulos centrais e seus respectivos arcos numa circunferência, e os comprimentos de suas cordas[1].

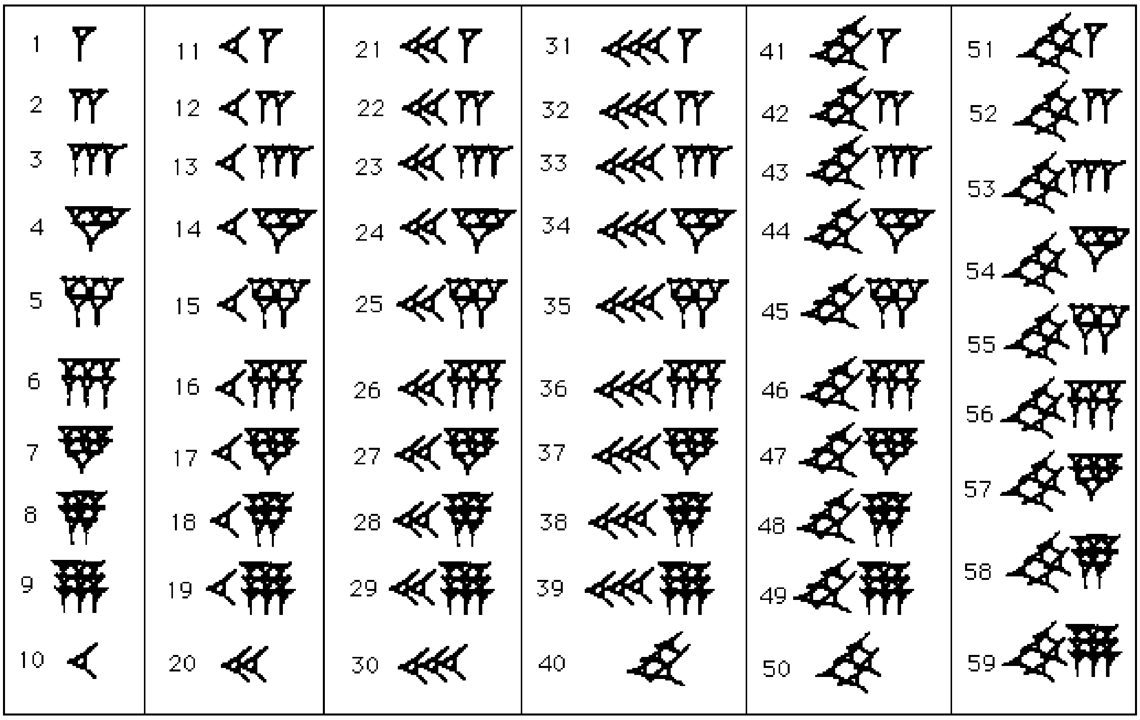
Os primeiros rudimentos de Trigonometria se devem à necessidade veemente do homem pela compreensão do Universo. Por volta de 2000 a.C. os sumérios, que viveram ao sul da Mesopotâmia, na região do atual Iraque, impulsionados pela busca de soluções nas áreas da Navegação, Geografia, Arquitetura e Astronomia, desenvolveram estudos ligados ao ramo da Matemática hoje conhecido como Trigonometria.

Tendo a cultura dos sumérios sido repassada aos babilônios, estes aperfeiçoaram os estudos da Matemática para a aplicação na determinação de distâncias inacessíveis, rotas de navegação, no estabelecimento de calendários, na previsão de eclipses, etc.

[1] Uma corda de uma circunferência é um segmento de reta cujas extremidades pertencem à esta circunferência.

Os babilônios desenvolveram um sistema de numeração posicional e apoiado na base sexagesimal, ou seja, utilizando-se dos dígitos de 1 a 59. Na Figura 2.9 podemos ver uma representação dos números de 1 a 59, no sistema babilônico, com os símbolos cuneiformes[2].

Figura 2.9: Algarismos Babilônicos



Fonte: http://www.invivo.fiocruz.br/cgi/cgilua.exe/sys/start.htm?infoid=976&sid=9 (28/12/14)

A partir do número 60, os babilônios utilizavam-se do método posicional, onde o símbolo que significava a unidade, colocado separadamente uma casa (um espaço) à esquerda do conjunto dos outros símbolos, significava sessenta vezes o seu valor.

Provavelmente o uso da base sexagesimal deve-se ao fato de que, no primeiro calendário adotado pelo povo babilônico, um ano tinha 360 dias, um múltiplo de 60. Além disso, 60 é um número com uma grande quantidade de divisores (1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60).

Apesar de vários registros dos conhecimentos desenvolvidos pelos babilônios terem sido escritos em diversos materiais, como tecidos, madeira, metais, argila e pergaminhos, muitos se perderam com o passar do tempo.

[2]Cuneiforme é a escrita produzida com o auxilio de objetos em forma de cunha. A escrita cuneiforme foi criada pelos sumérios, por volta de 3.500 a.C.

Ainda assim, cerca de 400 tábuas de barro e outros fragmentos relacionados à Matemática foram encontrados pelos arqueólogos, e posteriormente os textos inclusos neles foram copiados e traduzidos. Boa parte destes textos se propunham a auxiliar nas medições e apresentavam resultados obtidos pelos astrônomos babilônios, assemelhando-se alguns deles às hoje chamadas "tábuas trigonométricas".

Figura 2.10: Tabela Plimpton 322 - frente e verso

Fonte: http://isaw.nyu.edu/exhibitions/before-pythagoras/items/plimpton-322/ (16/12/14)

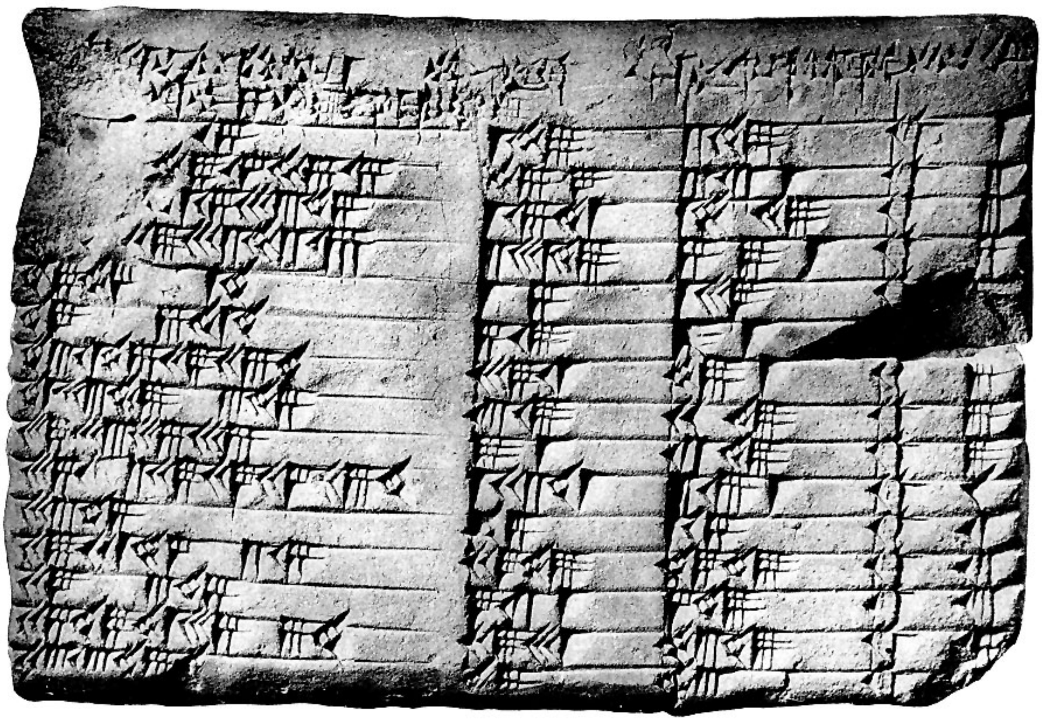
A mais conhecida dessas tábuas matemáticas babilônicas é chamada de "Tabela Plimpton 322" (Figura 2.10), recebendo este nome por fazer parte da coleção Plimpton da Universidade de Columbia, em Nova York, sob o número 322. Esta tábua é datada do Período Babilônico Antigo (1900-1600 a.C.), conserva a escrita cuneiforme e seu surgimento deve-se ao interesse dos babilônios em determinar triângulos retângulos de lados inteiros, utilizando-se das "triplas babilônicas", que equivalem às "triplas pitagóricas", também chamadas de "trios pitagóricos" ou "ternos pitagóricos".

Denomina-se um "terno pitagórico" ao trio de números inteiros positivos a, b e c tais que $a^2 + b^2 = c^2$ (o famoso Teorema de Pitágoras). Um caso particular, mas muito importante, são os "ternos pitagóricos primitivos", que consistem em ternos pitagóricos em que os três números inteiros são primos entre si[3].

[3]Números inteiros são chamados de "números primos entre si", ou "coprimos" se o único divisor comum a todos eles for o número 1(um).

Podemos observar os algarismos matemáticos babilônicos na Figura 2.11, em alta resolução e com tratamento na imagem para uma melhor visualização dos caracteres.

Figura 2.11: Tabela Plimpton 322 - Alta Resolução



Fonte: https://matematikhistorie.wordpress.com/2013/06/ (19/12/14)

Euclides de Alexandria[4], notório matemático grego que viveu aproximadamente entre 325 e 265 a.C., conhecido pelo seu tratado "Os Elementos", em um dos livros deste destinado à Teoria dos Números, demonstrou que existe uma infinidade de ternos pitagóricos primitivos.

Alguns matemáticos da Grécia Antiga buscaram criar processos para gerar ternos pitagóricos, em particular ternos pitagóricos primitivos. Um desses processos, cuja origem gira ora em torno do nome do matemático grego Diofanto de Alexandria (c. 200-284 a.C.), ora do próprio Euclides, afirma que, dados dois números naturais m e n, sendo um par e o outro ímpar, $m > n$, e considerando as igualdades $a = m^2 - n^2,\ b = 2mn,$ e $c = m^2 + n^2,$ então o terno (a, b, c) é pitagórico, e é primitivo se e só se m e n são primos entre si.

O primeiro terno pitagórico é formado pelos números 3, 4 e 5, em que

[4]São poucas as informações sobre a vida de Euclides de Alexandria, e as datas de seu nascimento e morte são imprecisas.

$3^2 + 4^2 = 5^2$. Este terno desempenha um papel muito importante em todos os outros ternos pitagóricos, pois Euclides também enunciou que, num terno pitagórico primitivo (a, b, c):

exatamente um dos números a ou b é múltiplo de 3;
exatemente um dos números a ou b é múltiplo de 4;
exatamente um dos números a, b ou c é múltiplo de 5.

Figura 2.12: Ternos Pitagóricos < 1000

m	n	a	b	c	m	n	a	b	c	m	n	a	b	c	m	n	a	b	c
2	1	3	4	5	3	2	5	12	13	4	1	15	8	17	4	3	7	24	25
5	2	21	20	29	5	4	9	40	41	6	1	35	12	37	6	5	11	60	61
7	2	45	28	53	7	4	33	56	65	7	6	13	84	85	8	1	63	16	65
8	3	55	48	73	8	5	39	80	89	8	7	15	112	113	9	2	77	36	85
9	4	65	72	97	9	8	17	144	145	10	1	99	20	101	10	3	91	60	109
10	7	51	140	149	10	9	19	180	181	11	2	117	44	125	11	4	105	88	137
11	6	85	132	157	11	8	57	176	185	11	10	21	220	221	12	1	143	24	145
12	5	119	120	169	12	7	95	168	193	12	11	23	264	265	13	2	165	52	173
13	4	153	104	185	13	6	133	156	205	13	8	105	208	233	13	10	69	260	269
13	12	25	312	313	14	1	195	28	197	14	3	187	84	205	14	5	171	140	221
14	9	115	252	277	14	11	75	308	317	14	13	27	364	365	15	2	221	60	229
15	4	209	120	241	15	8	161	240	289	15	14	29	420	421	16	1	255	32	257
16	3	247	96	265	16	5	231	160	281	16	7	207	224	305	16	9	175	288	337
16	11	135	352	377	16	13	87	416	425	16	15	31	480	481	17	2	285	68	293
17	4	273	136	305	17	6	253	204	325	17	8	225	272	353	17	10	189	340	389
17	12	145	408	433	17	14	93	476	485	17	16	33	544	545	18	1	323	36	325
18	5	299	180	349	18	7	275	252	373	18	11	203	396	445	18	13	155	468	493
18	17	35	612	613	19	2	357	76	365	19	4	345	152	377	19	6	325	228	397
19	8	297	304	425	19	10	261	380	461	19	12	217	456	505	19	14	165	532	557
19	16	105	608	617	19	18	37	684	685	20	1	399	40	401	20	3	391	120	409
20	7	351	280	449	20	9	319	360	481	20	11	279	440	521	20	13	231	520	569
20	17	111	680	689	20	19	39	760	761	21	2	437	84	445	21	4	425	168	457
21	8	377	336	505	21	10	341	420	541	21	16	185	672	697	21	20	41	840	841
22	1	483	44	485	22	3	475	132	493	22	5	459	220	509	22	7	435	308	533
22	9	403	396	565	22	13	315	572	653	22	15	259	660	709	22	17	195	748	773
22	19	123	836	845	22	21	43	924	925	23	2	525	92	533	23	4	513	184	545
23	6	493	276	565	23	8	465	368	593	23	10	429	460	629	23	12	385	552	673
23	14	333	644	725	23	16	273	736	785	23	18	205	828	853	23	20	129	920	929
24	1	575	48	577	24	5	551	240	601	24	7	527	336	625	24	11	455	528	697
24	13	407	624	745	24	17	287	816	865	24	19	215	912	937	25	2	621	100	629
25	4	609	200	641	25	6	589	300	661	25	8	561	400	689	25	12	481	600	769
25	14	429	700	821	25	16	369	800	881	25	18	301	900	949	26	1	675	52	677
26	3	667	156	685	26	5	651	260	701	26	7	627	364	725	26	9	595	468	757
26	11	555	572	797	26	15	451	780	901	26	17	387	884	965	27	2	725	108	733
27	4	713	216	745	27	8	665	432	793	27	10	629	540	829	27	14	533	756	925
27	16	473	864	985	28	1	783	56	785	28	3	775	168	793	28	5	759	280	809
28	9	703	504	865	28	11	663	616	905	28	13	615	728	953	29	2	837	116	845
29	4	825	232	857	29	6	805	348	877	29	8	777	464	905	29	10	741	580	941
29	12	697	696	985	30	1	899	60	901	30	7	851	420	949	31	2	957	124	965
31	4	945	248	977	31	6	925	372	997										

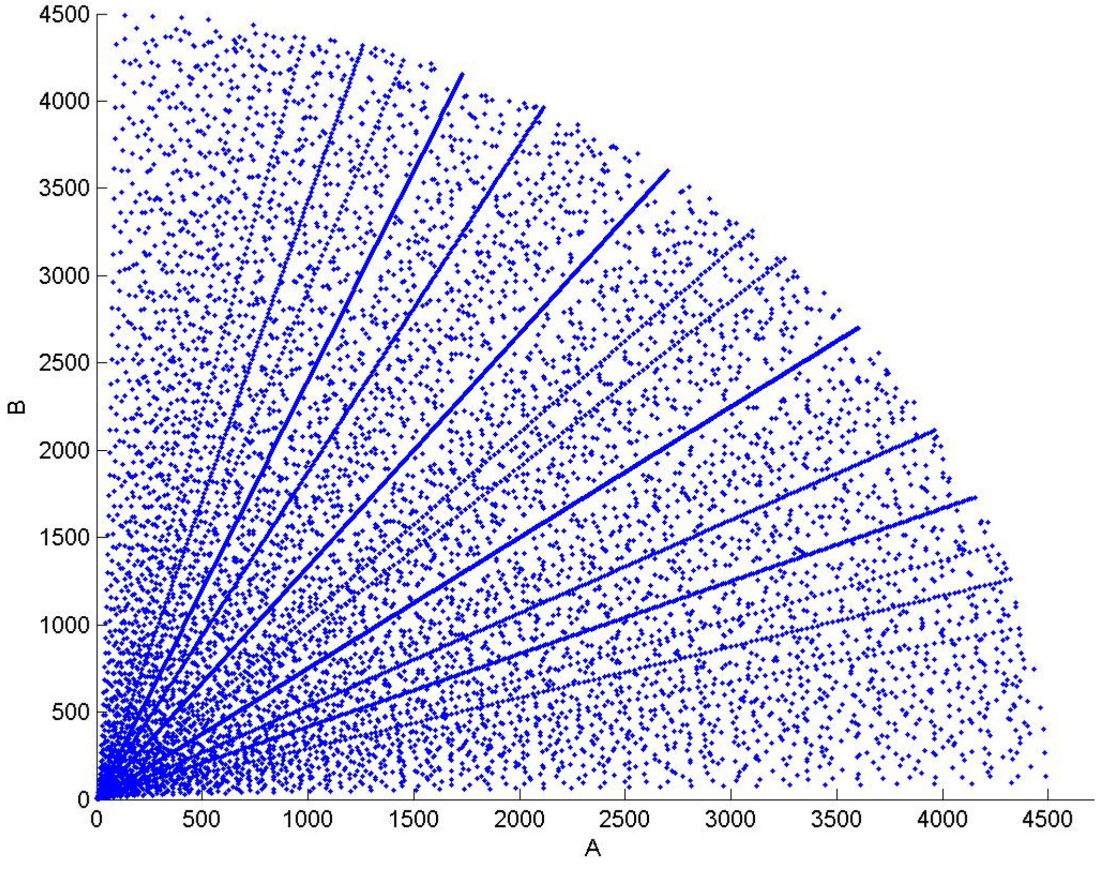
Fonte: http://http://www.magiadamatematica.com/uerj/licenciatura/15-ternos.pdf (29/04/15)

Os primeiros ternos pitagóricos primitivos são $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, $(7, 24, 25)$, $(8, 15, 17)$, $(9, 40, 41)$, $(11, 60, 61)$, $(12, 35, 37)$, $(13, 84, 85)$, $(16, 63, 65)$, e na Figura 2.12, extraída de [51] temos uma lista das triplas pitagóricas cujos termos não excedem 1000.

Outro importante resultado é que se (a, b, c) é um terno pitagórico, então (ka, kb, kc) também é um terno pitagórico, para qualquer número natural k.

Na Figura 2.13, o gráfico de pontos discretos nos apresenta, para a abcissa A e a ordenada B, os valores dos catetos, e a respectiva distância do ponto à origem, o valor da hipotenusa C, efetuando-se uma correspondência biunívoca das triplas pitagóricas com as medidas correspondentes dos lados de um triângulo retângulo. Este é um gráfico de dispersão das triplas pitagóricas, com os valores dos catetos limitados a 4500. Pode-se notar, neste gráfico gerado por computador, alguns interessantes padrões geométricos na dispersão das triplas pitagóricas, como, por exemplo, as linhas retas formadas pelos pontos.

Figura 2.13: Gráfico de Dispersão de Triplas Pitagóricas



Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Terno_pitag%C3%B3rico (28/12/14)

Do Antigo Egito temos outro importante artefato matemático, que provém de uma época muito próxima à da Tabela Plimptom 322, intitulado o "Papiro de Rhind". Inicialmente foi chamado "Papiro Ahmes", nome do escriba que o copiou por volta de 1650 a.C. Ahmes viveu durante o Segundo Período Intermediário e início da XVIII dinastia egípcia (a primeira dinastia do Império Novo). Segundo Derbyshire em [16], é considerado o mais antigo contribuidor da Matemática cujo nome é conhecido.

No relato do escriba, a informação é a de que o documento original datava-se cerca de 200 anos antes daquela época, portanto entre 1850 e 1800 a.C., durante o reinado de Amenemhat III (ou Amenemés III), da 12^a dinastia, segundo os estudos dos egiptólogos. Há indícios de que parte desse conhecimento inscrito no Papiro Ahmes tenha provindo de Imhotep, o médico, arquiteto e engenheiro que superintendeu a construção da pirâmide do Faraó Djoser (ou Zoser), há cerca de 5000 anos.

O Papiro Ahmes foi comprado por um jovem antiquário escocês chamado A. Henry Rhind, em Luxor[5], no inverno de 1858, quando este residia temporariamente no Egito por motivos de saúde. A partir daí, este achado arqueológico e matemático ficou conhecido como o "Papiro de Rhind".

Este papiro, o maior encontrado até então, media originalmente 6 metros de comprimento e 33 centímetros de largura, porém com alguns fragmentos faltando. Após a morte de Rhind, cinco anos mais tarde, por tuberculose, seu papiro foi adquirido pelo Museu Britânico de Londres.

Mais cinquenta anos se passaram e muitos fragmentos que faltavam para completar o papiro foram encontrados nos depósitos da Sociedade de História de New York, no Museu do Brooklyn. Estes fragmentos estavam juntos a outros papiros sobre medicina, obtidos pelo comerciante e colecionador americano Edwin Smith (1822-1906)[6].

O Papiro de Rhind foi considerado a cartilha de calcular mais antiga do mundo. Este documento consta de 87 problemas e suas resoluções. Apenas para citarmos alguns deles, temos a multiplicação de frações, a subtração, progressões aritméticas e geométricas, cálculo de volumes, áreas de triângulos, retângulos, trapézios e círculos, determinação de alturas e bases de pirâmides.

[5]Luxor é uma cidade do sul do Egito, onde antigamente erquia-se Tebas, a capital do "Império Novo" (1550-1069 a.C.)

[6]Edwin Smith também ficou notável ao dar seu nome a um antigo papiro egípcio médico, o "Papiro de Edwin Smith", um texto de medicina da antiguidade egípcia e o mais antigo tratado de cirurgia traumática já conhecido, datado de cerca de 1500 a.C.

Atualmente o Papiro de Rhind faz parte da coleção Rhind, no Museu Britânico de Londres (Figura 2.14).

Figura 2.14: Fragmento do Papiro de Rhind, conservado no Museu Britânico de Londres, relativo à solução de problemas relacionados com triângulos

Fonte: http://www.duepassinelmistero.com/Sezioneaureaegizi.htm (29/12/14)

Os gregos Aristarco de Samos (310-230 a.C.) e Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) aplicaram na Astronomia as descobertas obtidas até então na área da Trigonometria, mas não as sistematizaram. Já Eratóstenes de Cirene (276-176 a.C.), bibliotecário chefe da grande Biblioteca de Alexandria e amigo de Arquimedes, utilizou-se da semelhança de triângulos e razões trigonométricas para, até então, produzir a mais notável medida para a circunferência da Terra.

Por volta de 150 a.C. o astrônomo grego Hiparco de Niceia formulou a primeira tabela trigonométrica, e por isso é considerado o fundador da Trigonometria. Ele associou a corda de um arco de um ângulo central correspondente em uma circunferência de raio fixo. De posse de sua tabela trigonométrica, fez diversas observações dos astros, efetuou medições, previu eclipses, formulou calendários e também fez uso do conhecimento trigonométrico na navegação.

Hiparco elaborou um catálogo estelar, introduzindo um sistema de coordenadas para a esfera estelar. Também trabalhou no aprimoramento da precisão de dados astronômicos, como a duração do mês, do ano, o raio da lua, etc.

Como, pelo clássico calendário babilônico, o ano possuia 360 dias, e as antigas civilizações acreditavam que o Sol girava em torno da Terra descrevendo uma órbita circular perfeita, a cada dia o Sol percorria um arco correspondente a 1/360 da circunferência total, pensava-se. A esse arco associava-se um ângulo cujo vértice era o centro da Terra e cujos lados passavam pelas extremidades do arco.

Provavelmente baseado nas teorias babilônicas, o astrônomo e geômetra grego Hipsicles (240-170 a.C.) resolveu dividir também o dia em 360 partes, e acredita-se que Hiparco generalizou essa ideia para o círculo, dividindo-o em 360 partes iguais, chamando a cada uma destas porções de "um grau" (1^o). Utilizando-se desta correspondência geocêntrica entre medidas de tempo e espaço (comprimento de arco), o grau foi dividido em sessenta partes, e a cada uma delas chamou-se "um minuto" ($1'$). A cada parte sexagesimal deste receberia o nome de "um segundo" (1”). Assim Hiparco deu início à construção de sua "Tabela de Cordas".

Outro importante astrônomo e matemático grego foi Menelau de Alexandria (70-130 d.C.), que elaborou um tratado de seis livros sobre cordas e circunferências. Infelizmente, muitos destes livros desapareceram com o tempo. Ainda assim, seu tratado mais importante, composto em três volumes, chamado "Sphaerica", resistiu e ficou conhecido como a mais antiga obra sobre triângulos esféricos da época.

Mais tarde, outro cientista grego que se utilizou muito da Trigonometria de Hiparco foi Claudio Ptolomeu (90-168 d.C.), e sua obra mais conhecida é o "Almagesto", que significa "O Grande Tratado", sobre Astronomia. Esta obra, também conhecida como "Syntaxis Mathemática", é uma síntese dos trabalhos e observações de Aristóteles, Hiparco de Niceia e outros cientistas, focada principalmente no uso da Trigonometria nos estudos astronômicos.

Na Figura 2.15 podemos ver uma reprodução de parte do Almagesto, tratado que foi escrito entre 127 e 151 d.C.

Figura 2.15: Almagesto

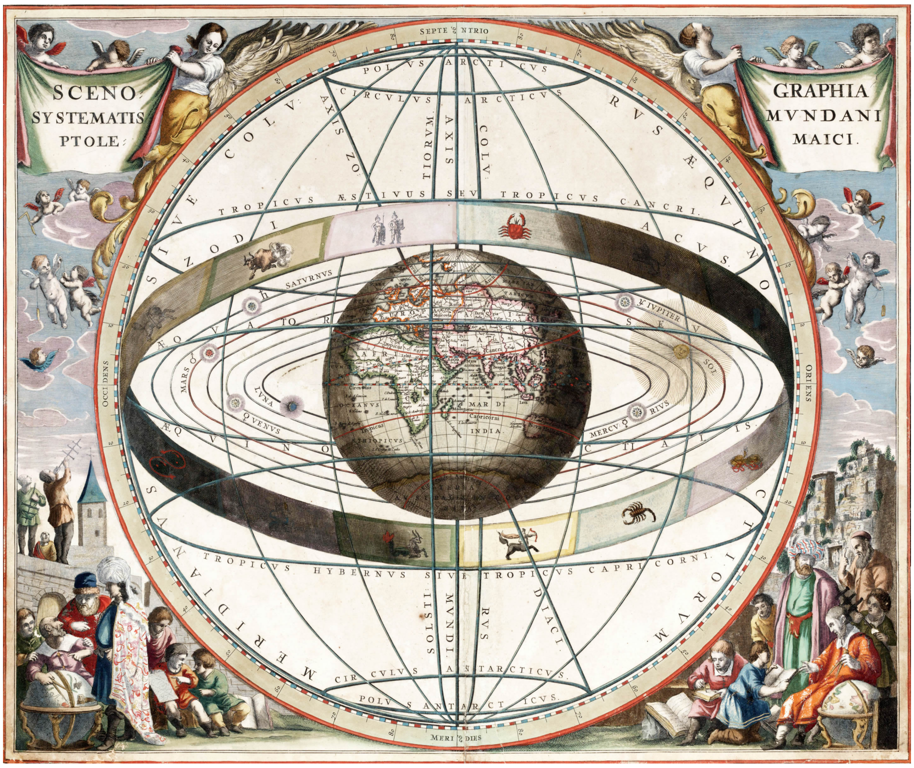
Fonte: http://www.vanialima.blog.br/2014/01/claudio-ptolomeu.html (06/01/15)

Neste grandioso trabalho Ptolomeu descreveu matematicamente, ao longo de 13 livros, a posição dos planetas com parâmetros para vários movimentos do Sol, da Lua e dos próprios planetas.

O primeiro livro trata-se de uma espécie de introdução aos outros doze, com informações matemáticas básicas, indispensáveis à compreensão dos fenômenos celestes. Entre estes conceitos básicos incluem-se os métodos para o cálculo de comprimento de cordas de circunferências, a construção da tábua de cordas, e as proposições sobre Geometria Esférica já estudadas por seu predecessor Menelau de Alexandria. Os livros seguintes dedicam-se todos à Astronomia.

Uma das contribuições maiores de Ptolomeu foi uma representação geométrica do sistema solar, geocêntrica, com círculos e epiciclos, que permitia predizer o movimento dos planetas com considerável precisão e que foi utilizada até a época do Renascimento, no século XVI (Figura 2.16).

Figura 2.16: A Teoria do Geocentrismo em Reprodução do Sistema Ptolomaico



Fonte: http://www.estudopratico.com.br/geocentrismo/ (06/01/15)

Pouco tempo depois os indianos, já com as influências do desenvolvimento da Trigonometria por parte dos gregos, aperfeiçoaram-na, introduzindo o conceito da função seno.

Poucas obras deste período foram conservadas, a exemplo dos "Siddantas" e do "Aryabhatiya", as quais trazem algumas das mais antigas tabelas de valores de senos.

Em Aryabhatiya, um pequeno livro de versos sobre Matemática e Astronomia, escrito por volta do ano de 500 d.C. pelo matemático e astrônomo indiano Aryabhata (476-550), o seno aparece pela primeira vez como uma função de um ângulo. Nesta pequena mas importante obra também encontra-se uma tabela de meias cordas, denotada como "tabela Jiva"[7], conhecida atualmente como "tabela de senos".

[7] Jiva, no hinduísmo, significa a essência ou alma imortal de um ser vivo, que sobrevive à morte física.

Outro ilustre matemático e astrônomo indiano foi Brahmagupta (598-668), que se utilizou do mesmo modelo da tabela de senos de Aryabhata, no ano 628 de nossa era.

A partir desta época, até por volta do século XII, os matemáticos hindus desenvolveram as diversas relações trigonométricas que utilizamos até hoje.

Matemáticos árabes, após traduzirem os estudos dos hindus, desenvolveram o estudo das razões trigonométricas nos triângulos retângulos e, para qualquer triângulo, estabeleceram a chamada "Lei dos Senos"[8]. Eles contribuíram para o desenvolvimento das funções cosseno, tangente, cotangente, secante e cossecante, embora não fossem assim denominadas por eles.

Após os conhecimentos trigonométricos gregos e indianos serem reunidos, no século XI, os árabes introduziram esta ciência na Europa Ocidental.

Georg Aunpekn (1423-1461), conhecido como Georg von Peuerbach, ou também por Johann Purbach, foi um astrônomo e professor da Universidade de Viena, na Áustria, e um dos precursores europeus da visão heliocêntrica do mundo. Foi um dos fundadores da moderna Astronomia Observacional e um dos introdutores da Matemática na Astronomia européia. Utilizando-se de seus conhecimentos de latim e do grego antigo, estudou profundamente o sistema ptolomaico e notou as fragilidades do sistema, decidindo rever a tradução latina do Almagesto.

Peuerback, que havia tentado melhorar a compreensão do Almagesto recorrendo a uma nova tradução do grego original, auxiliado pelo seu aluno Regiomontanus, escreveu o epítome[9] do mesmo, daí resultando uma nova teoria dos planetas.

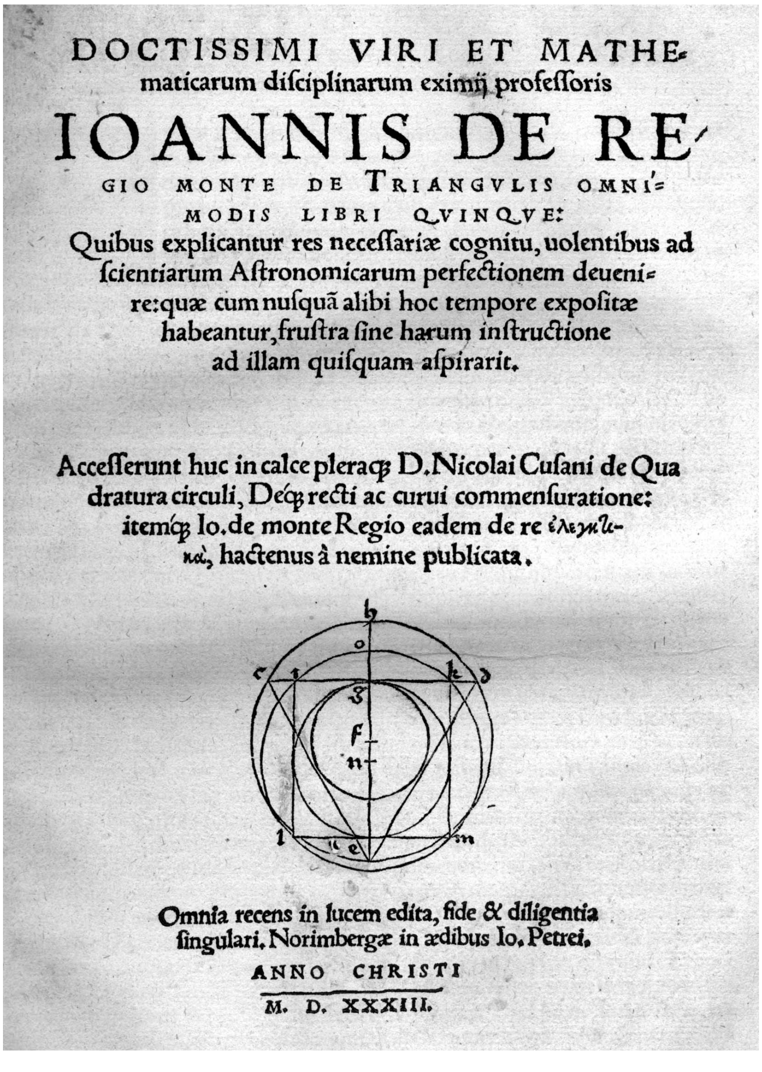
Regiomontanus (ou Regiomontano), aluno e discípulo de Peuerback, cujo nome verdadeiro era Johaness Müller (1436-1476), tornou-se um grande astrônomo e um dos maiores matemáticos do século XV. Nascido na cidade alemã de Königsberg (Real Montanha ou Montanha Regia), seu apelido vem da tradução do latim do nome desta cidade.

[8]A palavra seno provém de uma série de traduções, algumas errôneas: para obter o valor do seno de um ângulo, os indianos utilizavam-se de um método semelhante ao nosso, porém utilizando-se de meias-cordas relativas a um ângulo central de uma circunferência, que em sua linguagem eram chamadas de jya-ardha, ou apenas jya. Jya foi traduzida para o árabe e transformou-se em jiba. Os europeus, confundindo esta última como se fosse a palavra jaib, que significa baía, angra ou algo sinuoso, escolheram para sua tradução a palavra latina sinus. De qualquer forma, a raiz da palavra "seno", que dá origem ao nome da forma que recebe o gráfico de sua função (a senóide), acabou por arregementar muito bem as características da função que a exprime, mesmo que por acidente.

[9]Muitos documentos antigos gregos e romanos foram "sintetizados", referindo-se à prática de alguns autores posteriores (epitomadores) que escreveram versões resumidas de grandes obras. Enquanto alguns buscaram transmitir a postura e o espírito do trabalho original, outros acrescentaram mais detalhes ou retrataram seus próprios pontos de vista.

Em 1464 Regiomontanus publicou uma obra em cinco volumes, intitulada "De Triangulis Omnimodis" (Figura 2.17), notável tratado trigonométrico que marcou o renascimento deste ramo da Matemática na Europa, e apenas seria impresso definitivamente no século seguinte, em 1533. No primeiro livro, após as definições básicas, o autor apresentou uma lista dos axiomas que assumiria, juntamente com 56 teoremas de Geometria, de uma forma muito semelhante à estruturação realizada pelo famoso matemático Euclides de Alexandria, em seu trabalho "Os Elementos". No livro segundo iniciou a "lei do seno", utilizando-a para a resolução de triângulos. Os outros três volumes da obra tratavam da Trigonometria na esfera, de grande importância para a Astronomia.

Figura 2.17: Triangulis Omnimodis, de Regiomontanus - Página de Título



DOCTISSIMI VIRI ET MATHE-
maticarum disciplinarum eximij professoris
IOANNIS DE RE-
GIO MONTE DE TRIANGVLIS OMNI-
MODIS LIBRI QVINQVE:
Quibus explicantur res necessariæ cognitu, uolentibus ad scientiarum Astronomicarum perfectionem deueni-re:quæ cum nusquã alibi hoc tempore expositæ habeantur, frustra sine harum instructione ad illam quisquam aspirarit.

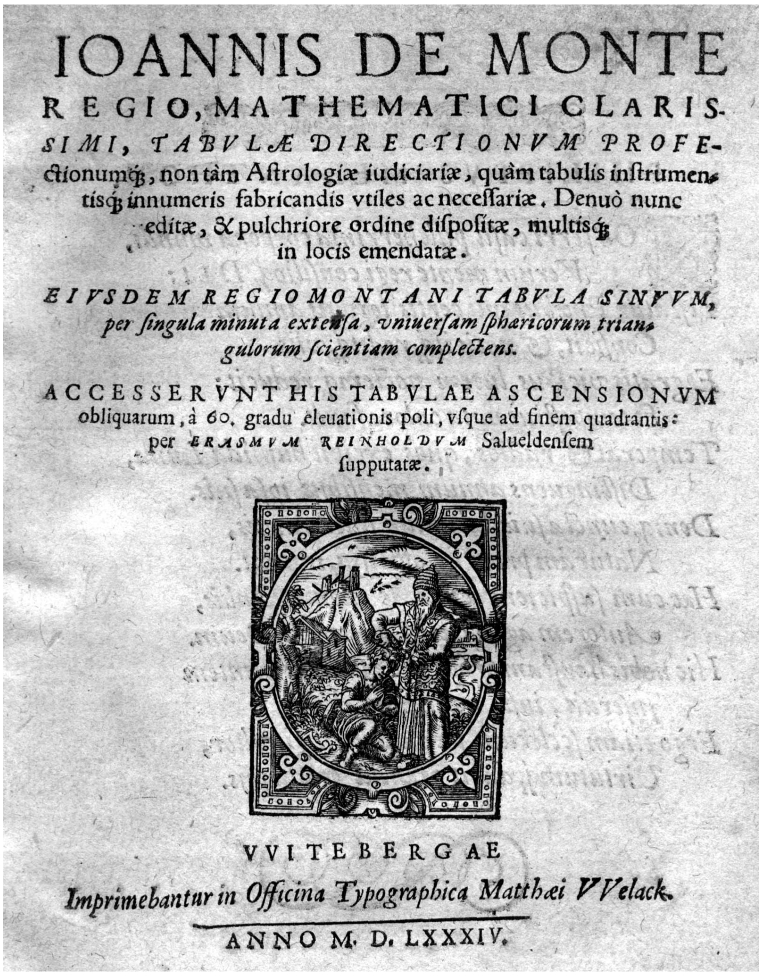
Accesserunt huc in calce pleraq; D.Nicolai Cusani de Quadratura circuli, Deq; recti ac curui commensuratione: itemq; Io.de monte Regio eadem de re ἐλεγκτικά, hactenus à nemine publicata.

Omnia recens in lucem edita, fide & diligentia singulari. Norimbergæ in ædibus Io. Petrei.
ANNO CHRISTI
M. D. XXXIII.

Fonte: http://pages.cpsc.ucalgary.ca/ williams/Tomash%20catalog%20web/Images%20web%20site/Image%20files/R%20Images/index_10.htm (06/01/15)

Regiomontanus também efetuou novos cálculos para tábuas trigonométricas e aprimorou as de seno de seu mestre Peuerback. Sua obra "Tabulae Directionum" (Figura 2.18), publicada postumamente em 1490 e impressa ainda mais tarde, em 1584, foi de grande importância, pois pela ênfase dada às tangentes, levou à inclusão do conceito e da utilização das mesmas nos estudos e cálculos dos europeus, que utilizavam-se de suas tábuas.

Figura 2.18: Tabulae Directionum, de Regiomontanus - Página de Título



IOANNIS DE MONTE
REGIO, MATHEMATICI CLARIS-
SIMI, TABVLÆ DIRECTIONVM PROFE-
ctionumq́; non tàm Astrologiæ iudiciariæ, quàm tabulis instrumen-
tisq́; innumeris fabricandis vtiles ac necessariæ. Denuò nunc
editæ, & pulchriore ordine dispositæ, multisq́;
in locis emendatæ.

EIVSDEM REGIOMONTANI TABVLA SINVVM,
per singula minuta extensa, vniuersam sphæricorum trian-
gulorum scientiam complectens.

ACCESSERVNT HIS TABVLAE ASCENSIONVM
obliquarum, à 60. gradu eleuationis poli, vsque ad finem quadrantis:
per ERASMVM REINHOLDVM Salueldensem
supputatæ.

VVITEBERGAE
Imprimebantur in Officina Typographica Matthæi VVelack.
ANNO M. D. LXXXIV.

Fonte: http://pages.cpsc.ucalgary.ca/∼williams/Tomash%20catalog%20web/Images%20web%20site/Image%20files/R%20Images/index_9.htm (06/01/15)

A partir da época de Regiomontanus percebe-se uma nítida independência da Trigonometria, como ciência Matemática desvinculada (porém continuando a serviço) da Astronomia.

Por volta de 1520 o astrônomo e matemático polonês Nicolau Copérnico (1473-1543) completou alguns trabalhos de Regiomontanus, e com o matemático austríaco Georg Joachim de Porris (1514-1576), também conhecido como Georg Rheticus, as tábuas de

Johaness Müller foram recalculadas com maior exatidão.

No século XVI, o matemático francês François Viète (1540-1603) associou várias relações trigonométricas à soluções de equações do 3º grau, ligando a Trigonometria à Álgebra.

Utilizando-se do cálculo logarítmico, o matemático, físico e astrônomo escocês John Napier (1550-1617), juntamente com outro matemático, o inglês Henry Briggs (1561-1630), estabeleceram novas fórmulas trigonométricas, no século XVII. Napier tornou-se imortalizado criando os logaritmos em 1614, e publicando sua descoberta em "Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio". Porém, também formulou importantes regras trigonométricas para triângulos esféricos, que só foram publicadas após sua morte, em 1619, na obra "Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio".

A função cosseno surgiu da necessidade de calcular o seno do ângulo complementar de um determinado ângulo dado, visto que

$$sen(90^0 - \alpha) = cos(\alpha)\ . \qquad (2.2)$$

O físico e matemático inglês Isaac Newton (1643-1727) influenciou imensamente o avanço da Trigonometria ao trabalhar com séries infinitas.

O matemático e filósofo alemão Gottfried Willhelm Leibniz (1646-1716) e Isaac Newton desenvolveram o Cálculo Diferencial e Integral, e então a Trigonometria ganhou moldes definitivos no cenário da Matemática, visto que as funções trigonométricas estão associadas a fenômenos ondulatórios. Fenômenos ondulatórios são constantemente encontrados e estudados em diversos ramos da Ciência, como Física, Química, Biologia, Engenharia, Medicina, etc.

No século XVIII, a partir de Leonard Euler (1707-1783), matemático e físico suíço, a Trigonometria assume sua forma atual, ao tomar a medida do raio de um círculo como unidade.

Após a transição das razões trigonométricas para funções trigonométricas periódicas, com Viète, o surgimento do cálculo infinitesimal no século XVII deu novo impulso a este movimento, atingindo seu ponto mais alto com a criação da função *e*, conhecida como a "função de Euler". Através dela é possível descobrir os valores de sen(x) e cos(x), onde a variável x é tal que x $\in \mathbb{R}$, permitindo que a Análise Matemática abrisse as portas para a Trigonometria.

No campo dos números complexos, o matemático francês Abraham de Moivre (1667-1754) criou uma fórmula que levou seu nome, para encontrar a raiz n-ésima de um número real ou complexo, utilizando-se das funções periódicas seno e cosseno, em 1722.

Em 1748 Euler exprimiu as funções seno e cosseno no conjunto dos números complexos através da fórmula

$$e^{i\phi} = cos(\phi) + isen(\phi) \ , \tag{2.3}$$

em que ϕ é uma variável complexa, e *i* é a unidade imaginária.

No século XIX a Trigonometria avança ainda mais, ligando-se à Análise através de séries. Em 1822, o matemático francês Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) lançou sua notável obra "Théorie Analytique de la Chaleur". Neste trabalho, Fourier relata quando uma função contínua[10] e periódica de período 2π radianos[11] pode ser representada por uma série trigonométrica como

$$\begin{aligned} f(x) = a_0 + a_1cos(x) + a_2cos(2x) + a_3cos(3x) + ... \\ +b_1sen(x) + b_2sen(2x) + b_3sen(3x) + ... \ , \end{aligned} \tag{2.4}$$

com a_i e b_i encontradas através de integrais apropriadas.

Possuindo diversas aplicações relacionadas à Física, Astronomia, Navegação Marítima, Topografia, Cartografia, Agrimensura e Engenharias em geral, a Trigonometria é considerada uma das áreas mais importantes da Matemática.

[10]Uma função f é contínua num ponto a de seu domínio quando $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Quando f é contínua em cada ponto de seu domínio, dizemos que f é contínua.

[11]Veremos uma explicação do que vem a ser a unidade de medida de arcos radiano no Capítulo 4 deste trabalho.

2.2 A MÚSICA

A Música é, com certeza, uma arte, e uma das mais primordiais para o ser humano. Ela pode ser definida como a arte da combinação entre os sons e o silêncio, de forma agradável aos nossos ouvidos. O contato do ser humano com a Música começa na vida intra-uterina, ainda na condição de fetos. A partir do segundo trimestre de gestação, os bebês já conseguem reconhecer os sons e diferenciar ritmos. Em [54] Schafer enfatiza que a Música na vida da criança proporciona o desenvolvimento da criatividade e da coordenação motora.

De origem grega, o vocábulo música (*musiké téchne*) significa a arte das musas, as divindades da beleza e das belas artes. As musas eram em número de nove, e a cada uma era relacionada um atributo: Calíope (eloquência), Clio (história), Erato (poesia lírica), Euterpe (música), Melpômene (tragédia), Polimnia (música cerimonial), Tália (comédia), Terpsícore (dança) e Urânia (astronomia). O termo "música" referia-se, portanto, ao vínculo do espírito humano com qualquer forma de inspiração artística. A evolução do termo, porém, limitou-o às formas de criação estética relacionadas à combinação de sons e silêncio, organizados ao longo do tempo.

Acredita-se que a Música sempre existiu na cultura do ser humano, pois fazia parte do cotidiano das primeiras organizações de tribos primitivas na África, há cerca de 50 mil anos, data provável dos mais antigos instrumentos musicais encontrados. A observação dos sons da natureza deve ter despertado no homem, através da audição, a vontade ou até a necessidade de se dedicar a uma atividade que se baseasse na organização de sons.

O homem, quando produz ou reproduz Música, carrega a influência direta da organização social, cultural e econômica local, assim como as características climáticas deste. A Música traduz os sentimentos e atitudes culturais de um povo. Ao mesmo tempo, trata-se de uma linguagem universal, e expandiu-se pelo mundo com o dispersar da raça humana pelo planeta.

Segundo os estudiosos da história da Música na antiguidade, os primeiros primatas sem cauda, chamados antropoides, que existiram entre 22 e 5,5 milhões de anos, devem ter-se iniciado na arte da produção de sons a partir das batidas com seus bastões de madeira, através de percussão corporal e entrechocando objetos.

Por volta de 3 milhões de anos atrás, e até há 250 mil anos, os mais antigos hominídeos, os australopthecus, provavelmente iniciaram sua produção vocal com gritos e imitação de sons da natureza.

No período paleolítico médio o homem de Neandertal procurou desenvolver o controle da altura, da intensidade e do timbre de sua voz, criando nuances de sons e um início de um rudimentar alfabeto fonético.

O Homo sapiens, por volta de 70.000 a 50.000 anos atrás, desenvolveu ainda mais as nuances de sons que conseguia emitir com sua voz, no início de um rudimentar alfabeto fonético. A partir de então, foi se desenvolvendo cada vez mais, criando os primeiros instrumentos musicais cerca de 40.000 anos atrás, para imitar os sons da natureza. Também desenvolveu a linguagem falada e o canto.

Dessa época, até aproximadamente 9.000 a.C, o homem conseguiu desenvolver instrumentos de maior controle, constituídos de pedra, madeira e ossos, como, por exemplo, os que conhecemos hoje com os nomes de xilofones, tambores de tronco e flautas. E a partir de então, já no período neolítico , os seres humanos já puderam desenvolver a criação de instrumentos mais elaborados, como membranofones e cordofones, que foram os primeiros instrumentos afináveis. Por volta de 5.000 a.C, com o desenvolvimento da metalurgia, a criação de instrumentos de cobre e bronze permitiram uma maior sofisticação e precisão dos mesmos.

Na Idade Antiga, quando as primeiras civilizações se puseram a utilizar a escrita, a Música estabelece as bases para todo o desenvolvimento musical posterior. Estes agrupamentos humanos se concentraram principalmente nas regiões ao longo das margens de rios na Ásia Central, como no vale do Rio Jordão, na Mesopotâmia, no vale do Rio Indo, na Índia (atualmente no Paquistão), na região por onde corre o Rio Nilo, no Egito, e à beira do Rio Huang He (Amarelo), na China.

São ricos os escritos destes grupos que apresentam a Música em atividades ligadas à magia, à saúde, e em rituais religiosos, festas e guerras. Suas mitologias possuem frequentemente divindades ligadas à Música.

A seguir vejamos como a Música desenvolveu-se, através dos tempos e no âmbito das diversas culturas e civilizações.

2.2.1 Sumérios

Os Sumérios estabeleceram sua civilização à cerca de 6 mil anos, na Mesopotâmia. Eram um povo de uma cultura muito rica, que exerceu influência durante 3 mil anos sobre todos os povos da Ásia Central, como os assírios, os cananeus, os egípcios, os fenícios, os babilônios e os hebreus.

Seus ritos familiares ou solenes eram acompanhados de música, e tábuas cuneiformes dos séculos XVIII a.C. a XV a.C. demonstram que dispunham de uma teoria musical bem elaborada. Entre 1963 e 1969, o padre Gurney e Marcelle Duchesne-Ghillemin publicaram traduções destes documentos históricos, revelando que se tratavam de um sistema de afinação para uma lira de 9 cordas.

Além dos documentos, foram encontrados vestígios de alguns instrumentos, considerados avançados para a época: uma harpa de cordas percutidas, ancestral do piano, uma harpa com coluna de apoio, flautas de cana e de prata, liras de cinco a onze cordas, e um tipo de alaúde de braço longo.

2.2.2 Assírios

Mais reverenciados que os sábios, os músicos tinham papel importante na sociedade dos assírios, que deixaram muitos vestígios de sua cultura musical na forma de pinturas, esculturas e escritos.

Para se ter uma ideia melhor do valor dado pelos assírios à Música e a quem tinha a capacidade de bem a executar, ela era associada ao poder, e os músicos dos povos conquistados eram poupados para que sua arte pudesse ser absorvida nas cidades assírias. Os assírios são os primeiros, que se tem notícia, a formar grandes orquestras, chegando até a 150 componentes, entre cantores e instrumentistas. Alguns dos instrumentos utilizados pelos assírios eram as flautas, a lira, o tímpano e o gongo.

2.2.3 Egípcios

Graças aos estudos arqueológicos nos templos e túmulos egípcios, foi possível precisar o desenvolvimento dos instrumentos musicais e o uso da Música na civilização egípcia. Alguns desses instrumentos foram encontrados em escavações no Vale dos Reis, mas nenhum deles possuia afinação fixa. Isso impossibilitou definir que tipos de escalas musicais eram utilizadas.

Ao contrário dos sumérios, os músicos egípcios não possuiam grande status. Frequentemente eram representados vestidos como escravos, em posição subalterna.

Figura 2.19: Mulheres tocando instrumentos musicais em mural egípcio

Fonte: http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/w3-article-29935.html (07/06/14)

Após o estabelecimento das primeiras cidades, entre o sexto e o quarto milênio a.C., a principal manifestação musical era a dança. Os instrumentos utilizados eram provavelmente oriundos do sul da África e da Suméria.

A Música egípcia viveu seu auge no Império Antigo, entre os anos de 2635 a.C. a 2060 a.C., entre as III e X dinastias. Foram encontradas muitas representações de conjuntos musicais, com cantores, harpas e flautas, e inscrições coreográficas demonstram que até o próprio Faraó realizava danças.

Conjuntos maiores e orquestras são representados no Império Médio, entre as XI e XVII dinastias. Somam-se aos instrumentos os alaúdes, as flautas de palheta dupla (oboés), as trombetas, os tambores e os crótalos. Entre as XVIII e XX dinastias, no Império Novo, os instrumentos são aperfeiçoados e a Música passa a ter um papel ritual e militar.

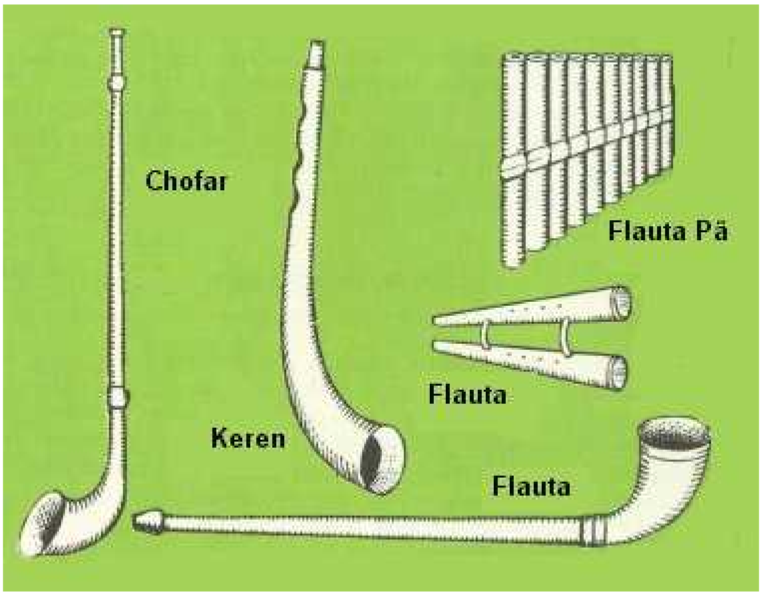
Com as sucessivas invasões, a Música do Egito foi influenciada pelos gregos e romanos, acompanhando assim a decadência do Império como um todo. Músicos gregos são integrados à corte, e com eles, vieram alguns de seus instrumentos.

2.2.4 Hebreus

Provavelmente a Música do povo hebreu tenha se desenvolvido independentemente apenas após o reinado de Davi (c. 1000 a 962 a.C.). Até então, este povo era composto de tribos nômades, e sua música tinha influência dos caldeus, babilônios e egípcios. O desenvolvimento próprio de sua música se deu somente após a fixação das 12 tribos em Canaã (c. de 1250 a.C.).

O Antigo Testamento está repleto de relatos sobre instrumentos musicais e sua utilização religiosa ou festiva, e o papel social da Música se fazia importante. Sua música era muito rica em instrumentos, como por exemplo o chofar, o keren, a harpa, diversos tipos de flautas, as trompas, pandeiros e pratos de metal. Na Figura 2.20 podemos ver como eram alguns destes instrumentos.

Figura 2.20: Alguns instrumentos utilizados pelos hebreus



Fonte: http://www.cic.unb.br/~fatima/imi/imi200/s/Historia/IMI-histmus-antiguidade.html (01/05/15)

Jubal (descendente de Caim) é conhecido como o primeiro músico da Biblia: "Jabal tinha um irmão chamado Jubal, antepassado de todos os músicos que tocam harpa e flauta." (Gn 4,21), em [24].

O teórico musical Franchino Gaffurio (1451-1522), em seu trabalho Theorica Musicae (1492), reconhece tanto Jubal quanto Pitágoras de Samos como ícones responsáveis pela produção de música refinada por teoria musical. Na Figura 2.21 podemos ver representados, além deles, também o filósofo pitagórico Filolau de Crotona (c. 470-385 a.C.).

Figura 2.21: Xilogravura do tratado Theorica Musicae (1492), de Franchino Gaffurio

Fonte: http://lettre-cdf.revues.org/904 (19/07/14)

2.2.5 Indianos

Encontram-se nos Vedas (escritos entre 1500 a.C. e 500 a.C.) a documentação da importância religiosa da Música na civilização indiana, que provavelmente recebeu influências da Mesopotâmia. O povo indiano acreditava que a Música estava diretamente ligada ao processo fundamental da vida humana.

A evolução da Música indiana se inicia com os Vedas, que são antologias de textos, composta em forma de poesia. Esta literatura milenar era cantada com ritmo, e com o tempo estas melodias integraram a vida dos indianos.

Os Vedas são divididos em quatro partes: Rigveda (hinos compostos em forma poética para recitação em sacrifícios), Yajurveda (hinos em prosa para recitação em voz baixa durante os sacrifícios), Samaveda (versos para serem cantados), e Atharvaveda (consiste principalmente de feitiços e encantamentos sacerdotais).

As principais tradições musicais são chamadas Carnática e Hindustani, e apresentam ambas a característica monofônica da Música indiana. As melodias são executadas sempre em apenas um tom, produzindo um efeito mântrico e profundo.

A Música Carnática é própria do sul da Índia e não possuiu influências estrangeiras. É sempre orientada por versos devocionais, e o estilo vocal é predominante, com acompanhamento melódico instrumental.

No norte da Índia temos a influência forte do povo persa e da China, desenvolvendo ali a Música Hindustani.

A partir do século IV a.C. os músicos indianos começaram a elaborar as teorias musicais. Os instrumentos utilizados eram os de sopro, de cordas e de percussão. A Música indiana seguia um sistema de tons e semitons, e ao invés de empregar notas, os compositores se utilizavam de uma série de fórmulas, chamadas "ragas".

Os ragas são os modos melódicos utilizados na Música Clássica Indiana. É uma série de cinco ou mais notas musicais em que uma melodia é feita. Os ragas, na tradição musical indiana, são associados às estações do ano, ou a um momento do dia.

Os gêneros musicais indianos estão divididos em clássico, semi-clássico, devocional, folclórico e popular.

Vina, sitar, tambura, sárangi e violino são exemplos de instrumentos de corda tradicionalmente utilizados pelos músicos indianos. Entre os instrumentos de sopro e por pressão do ar temos os clarinetes, as flautas transversais e os harmoniums. E para percussão, alguns exemplos de instrumentos musicais indianos são o tabla, o dholak, o damaru e o mridangam (Figura 2.22).

Figura 2.22: Mridangam

Fonte: https://4evatalent.wordpress.com/4evamusical/mridanga-khol/aboutmridanga/ (19/04/15)

2.2.6 Chineses

Às margens do rio Huang He, os músicos eram respeitados pela civilização chinesa, e os instrumentos musicais tiveram grande desenvolvimento. Os antigos chineses creditavam poderes mágicos à Música, e que sua origem era ligada à natureza. As primeiras manifestações de arte musical, na China, surgiram há cerca de 6 mil anos.

Há cerca de 3 mil anos antes de Cristo já existiam na China vários instrumentos de cordas, como liras e cítaras, e também um instrumento de sopro chamado sheng.

A teoria musical chinesa, na sua forma escrita, desapareceu por volta de 212 a.C., quando um decreto imperial ordenou a queima de todos os livros. Porém, os ensinamentos tradicionais mantiveram viva a música deste povo, influenciando todos os países do leste asiático.

Esta tradição fez com que, com pouquíssimas alterações, o sistema de escala chinês, chamado sistema Lyu, continuasse em uso até os dias de hoje. Este sistema, criado no reinado de Huag-Ti (2698 a.C. a 2598 a.C.) é baseado em tubos diapasões que fixam as relações de intervalos. Pela falta de documentos, não se sabe se houve um sistema de notação para este sistema.

Além do sheng, outros instrumentos musicais utilizados tradicionalmente pelos chineses são a flauta, o gongo, os sinos e o erhu. A maioria das músicas predominantes na China é bem lenta, calma e repetitiva.

Em resposta às mudanças na sociedade, há uma versão moderna da orquestra chinesa, com dezenas de tipos diferentes de instrumentos chineses. A orquestra chinesa, além de apresentar a Música tradicional, também executa versões adaptadas de canções folclóricas com composições sinfônicas clássicas e modernas.

2.2.7 Gregos

A Grécia destacou-se culturalmente na sua expressão teatral, onde a poesia e a escrita se juntavam à Música para criar o espetáculo. A Música para os antigos gregos tinha origem divina, e tinha ligações com a magia e a mitologia. Seu desenvolvimento musical em relação ao ritmo e à notação tiveram papel fundamental para a evolução da história da Música Ocidental.

O matemático Pitágoras de Samos é considerado o fundador do nosso conhecimento de harmonia musical, a relação entre as diferentes frequências sonoras (notas) e o efeito de suas combinações. Pitágoras e os membros de sua escola criaram a escala musical pitagórica.

Entre os instrumentos utilizados pela civilização grega antiga estão o aulos (instrumento de sopro), a flauta de Pã, a lira, a cítara, alguns instrumentos de percussão e o órgão, o primeiro instrumento de teclas da história da Música. Criado pelo engenheiro grego Ctesíbio de Alexandria, no século III a.C., o primeiro tipo de órgão era o órgão hidráulico, um cruzamento da flauta grega e o aulos, com um sistema hidráulico de injeção de ar comprimido nos tubos.

2.2.8 Romanos

Praticamente toda a Música do império romano foi importada da Grécia, assim como aconteceu com suas outras manifestações artísticas. Mesmo com essa dependência, a Música era presente em todas as ocasiões da vida romana, como por exemplo nos exercícios militares e festividades. Centenas de instrumentistas executavam peças musicais em grandes festivais, utilizando instrumentos dos menores aos enormes, como cítaras do tamanho de carruagens.

Com a oficialização da religião cristã em roma, o teatro, os festivais e os ritos pagãos, ricamente acompanhados de Música, foram suprimidos, sendo assim uma das causas de nosso pouco conhecimento acerca da Música Romana.

Em contrapartida, a existência de várias artes visuais a respeito da Música Romana antiga e de alguns exemplares encontrados, nos fornece uma boa informação sobre os instrumentos utilizados na época.

Entre os instrumentos de sopro haviam as tubas, as tíbias, alguns tipos de gaita de foles, flautas e flautas de Pã, semelhantes aos exemplares modernos. Esses tipos de instrumentos eram bastante utilizados, pela sua potência e volume, em solenidades ao ar livre ou em ambientes de grandes dimensões. Na Figura 2.23, podemos ver músicos romanos e seus instrumentos de sopro, em um cortejo fúnebre.

Figura 2.23: Relevo de sarcófago em Amiterno (Itália), no final do século I a.C.

Fonte: http://paideiamusical.blogspot.com.br/2008/09/histria-da-msica-ocidental-captulo-1_19.html (07/06/14)

Os romanos também utilizavam alguns instrumentos de corda, como a lira, a cítara e o alaúde. Na percussão da época, destacam-se os instrumentos do tipo membranofone, do qual são exemplos os chocalhos, címbalos, sinos, sistros (tipo de chocalho), os tímpanos e os tambores. Provavelmente este despertar para os instrumentos de percussão reflete o papel importante do ritmo na Música Romana.

Também herdados dos gregos eram os órgãos musicais romanos, especialmente o órgão hidráulico. Ao que indicam os estudos arqueológicos, estes órgãos seriam adequados para o acompanhamento de Música vocal.

Da idade antiga em diante, o estudo da história da Música vale-se principalmente de sua classificação no âmbito da música composta e executada na Europa.

2.2.9 Música Medieval

Iniciando com a queda do Império Romano e continuando até aproximadamente meados do século XV, a Música da Idade Média tem uma base forte no cristianismo, que está em rápida expansão neste período.

O papa Gregório I (590-604) institucionalizou o canto gregoriano, liturgicamente, e tal modalidade expandiu-se por toda a Europa católica.

No início, a música religiosa conhecida como Canto Gregoriano não tinha acompanhamento, e era constituída por uma única melodia (música monofônica).

O Canto Gregoriano consistia em melodias que fluiam livremente, quase sempre mantendo-se dentro de uma oitava e, preferencialmente, através de intervalos de um tom. Os ritmos são irregulares, de forma livre, de acordo com a acentuação das palavras e o ritmo natural da língua latina.

As primeiras composições polifônicas datam do século IX e consistem na sobreposição de duas ou mais melodias, que é chamado de *organum*.

A notação ganha transformações, e um grande nome responsável por algumas delas foi Guido D'Arezzo (992-1050), um monge italiano, que utilizou um sistema de notação musical com linhas, que posteriormente se tornou a atual pauta musical. Até então, as notas musicais eram designadas pelas sete primeiras letras do alfabeto latino.

Guido D'Arezzo designou as notas musicais como são conhecidas atualmente, se utilizando para isto o texto de um hino a São João Batista, "*Ut queant laxis*", onde cada estrofe inicia com uma nota musical. Este sistema é chamado de solmização.

As frases iniciais do texto, escrito por Paolo Diacono (720-799), eram:

Ut *queant laxis,*
Re*sonare fibris,*
Mi*ra gestorum,*
Fa*muli tuorum,*
Sol*ve polluti,*
La*bii reatum,*
S*ancte* ***I****ohannes.*

Uma tradução para este trecho seria "Para que os teus servos possam cantar as maravilhas dos teus atos admiráveis, absolve as faltas dos seus lábios impuros, ó são João".

Posteriormente, por sugestão do músico italiano Giovanni Battista Doni (1593-1647), *ut* foi substituído por *dó*, pois achava que aquela sílaba era incômoda para o solfejo (a arte de cantar os intervalos musicais).

A escola de cantores da Catedral de Notre Dame, em Paris, concebeu um dos primeiros pontos culminantes na história da polifonia. A música desta época recebeu a denominação de *Ars antiqua* e estendeu-se desde 1163 até meados do século XIII. Seus maiores representantes são os compositores Léonin (1135-1201) e Pérotin (1160-1236).

A *Ars antiqua* era a música religiosa. Já sua sucessora, a *Ars Nova*, se dedicava à música profana. A polifonia substituiu de vez a monofonia, e a composição toma a vez da improvisação.

Até o século XII, a música antiga empregou um sistema de escalas: os modos, que possuiam maior preponderância de intervalos harmônicos (uníssono, quarta, quinta e oitava). Intervalos de terceira e sexta são mais frequentes no fim do período medieval.

Alguns dos instrumentos musicais utilizados neste período são as flautas (reta, transversal e dupla), a harpa, as vielas (de arco e de roda), a rabeca, o saltério (precursor do cravo), e o alaúde.

Como principais compositores medievais podemos citar Adam de la Halle, Ghillaume Dufay, Guillaume de Marchaut, Hildegarda de Bingen, Johannes Ockeghem, John Dunstable, Pérotin e Philippe de Vitry.

2.2.10 Música Renascentista

A Música Renascentista abrangeu a época da renascença, ou seja, a Europa entre os séculos XV e XVI. A Música ainda era escrita nos modos medievais, porém com várias modulações, transposições, alterações cromáticas e microtonais. Devido à falta de mudanças abruptas na musicalidade do período, é difícil precisar o início da era musical renascentista. A Música adquiriu características renascentistas gradualmente.

Neste período são feitas experiências acústicas como a multiespacialidade, onde, por exemplo, faz-se a distribuição do coro em vários lugares da igreja. Efeitos vocais também são experimentados, como gritos, resmungos e sons de animais, entre outros.

Seguindo a linha do polifonismo secular, os compositores puderam explorar melhor as possibilidades técnicas musicais. Na Itália do final do século XIV foi criada uma forma de composição chamada madrigal, em sua própria língua, ao invés do latim. O madrigal aborda assuntos heróicos, pastoris, e até libertinos, e se caracteriza também por não possuir refrão.

Com esta flexibilidade de composição textual inexistente até então, os músicos puderam externar sua imaginação criadora e o lirismo de expressão. Estas composições musicais populares passaram a chegar aos lares das famílias que se afeiçoavam pela Música, onde eram cantaroladas pelos seus moradores.

Ainda na Itália, o compositor Giovanni Pierluigi da Palestrina (1525-1594) criou o mais importante sistema de escrita polifônica que antecedeu a Bach.

Também durante a renascença foi atingido o apogeu da Música Inglesa, com o surgimento de grandes compositores madrigalistas ingleses que musicavam a poesia da época.

Uma grande profusão de instrumentos se desenvolve pela Europa, e eles são reunidos em famílias, chamadas consortes. Uma linha de estudo acredita que consorte pode ter derivado da palavra concerto (*concertum*), em latim, que significa atar, entrelaçar, ou então argumentar, no sentido de uma reunião. Assim, desejava-se produzir um som homogêneo da Música. Desta forma, formavam-se os consortes da flauta doce, da viola da gamba, do cromorne, etc. Na maioria das vezes, todos tocavam em pé, costume que perdurou até o final do século XVIII.

No final do século XVI, a Igreja Luterana criou para seu culto um tipo de música simplificada, a fim de que todos os seus fiéis a pudessem cantar, o que era exatamente o contrário do que acontecia na Igreja Católica, onde a Música era muito elaborada. Esta Música para o serviço luterano recebeu o nome de "coral", e é um movimento de acordes com melodias curtas, sem ornamentação e com ritmos fáceis. As origens das melodias eram de temas folclóricos, mas haviam também adaptações de cânticos católicos à nova religião, e também criações próprias.

Percebendo a vantagem de tal estilo musical, a Igreja Católica investiu em simplificar os seus próprios cantos, buscando junto aos compositores peças homofônicas e sem experimentações rítmicas. A Música passou a ser escrita para um coro pequeno e sem acompanhamento instrumental, surgindo daí a expressão "coro a capella". Para este repertório apenas eram admitidos homens, e as vozes agudas eram feitas por meninos, contratenores e "castratti".

Outra característica interessante do período renascentista para a Música foi o interesse dos compositores em escrever cada vez mais música para instrumentos acompanharem as vozes, até que este gosto pela Música Instrumental fez com que vários destes compositores se especializassem em escrever música somente para instrumentos.

Os principais compositores renascentistas foram Josquim des Préz (1440-1521), Palestrina (1525-1594), William Byrd (1542-1623), Giovanni Gabrieli (1555-1612) e Cláudio Monteverdi (1567-1643).

2.2.11 Música Barroca

Como Música Barroca entende-se toda a Música Ocidental Européia, desde o surgimento da ópera por Claudio Monteverdi no século XVII, até a morte de Johann Sebastian Bach (1685-1750).

Foi uma das épocas mais fecundas e revolucionárias para a Música Ocidental. As características principais são o uso do baixo contínuo, do contraponto e da harmonia tonal, em oposição aos modos gregorianos até então vigentes.

O baixo contínuo, ou *seconda pratica* contrastava com a polifonia renascentista tradicional ou *prima pratica*. Era composto por uma única parte vocal acompanhada por uma parte instrumental. Este acompanhamento consistia de uma única melodia anotada, sobre a qual um grupo de instrumentos adicionavam as notas necessárias para preencher a harmonia implícita no baixo. A melodia aguda e a linha do baixo eram os elementos essenciais, e as partes intermediárias eram deixadas ao gosto dos intérpretes. Nos anos 1630 essa combinação passou a ser chamada de monodia, um estilo entre a fala e o canto.

Enquanto em períodos anteriores utilizava-se de um único modo para uma composição inteira, causando um fluir incidentalmente consonante e homogêneo da polifonia, no período barroco houve o desenvolvimento tonal, como os tons dissonantes por dentro das escalas diatônicas como fundação para as modulações dentro de uma mesma peça musical.

No período da Música Barroca utilizaram ao máximo a ornamentação musical, fizeram mudanças na notação musical e desenvolveram técnicas novas instrumentais, assim como novos intrumentos. É neste período musical que surgem inúmeras formas musicais novas, com grande destaque para a ópera. Esta forma musical deve-se à combinação da monodia com a nova técnica do recitativo, assim possibilitando aos compositores escreverem um drama cantado do início ao fim.

A ópera "L'Orfeo", de Monteverdi, datada de 1607, é considerada a primeira obra a combinar música e drama de forma satisfatória. Portando, pode ser considerada a primeira ópera criada. Na Alemanha, a primeira ópera foi composta por Heirich Shütz (1585-1672), no ano de 1627, com o nome de "Dafne".

No período musical barroco, música e instrumento estão em perfeita igualdade. Surgem gêneros musicais puramente instrumentais, como a suite, a sonata, a tocata e o concerto. Explorando o instrumento musical ao máximo, surge o virtuosismo, onde os músicos podem demonstrar toda a sua técnica e musicalidade. Os maiores virtuoses da época foram Johann Sebastian Bach (1685-1750) e Dietrich Buxtehude (1637-1707) no órgão, Jean-Philippe Rameau (1683-1764), Domenico Scarlatti (1685-1757) e François Couperin (1668-1733) no cravo, Antonio Vivaldi (1678-1741) e Arcangelo Corelli (1653-1713) no violino.

Um dos mais importantes compositores da época, e cujos trabalhos influenciam os músicos de todas as gerações, Johann Sebastian Bach tem em seu repertório um grande número de obras escrita tanto para os instrumentos solo, como para concertos, e o mesmo tema se apresenta em arranjos de concerto para orquestra, ou suite. Das mais célebres composições de Bach podemos citar "O Cravo Bem Temperado", as "Variações Goldberg", e "A Arte da Fuga".

Bach também destaca-se pela sua genialidade musical aliada à Matemática, como demonstra, por exemplo, em seu Cânone 1 a 2 da Oferenda Musical, do tipo "cânone de mesa". O cânone é uma forma musical tocada ou cantada em duo, numa espécie de corrida, onde o segundo músico (ou segunda voz) jamais alcança o primeiro (ou a primeira voz). O cânone de mesa é retrógrado e invertido. Era comum estender a partitura numa mesa, com um músico de cada lado, ambos lendo a mesma linha em direções opostas, num arranjo musical equivalente topologicamente à faixa de Möebius (Figura 2.24).

Figura 2.24: Partitura do Cânone 1 a 2 da Oferenda Musical, de Bach, em faixa de Möebius

Fonte: http://www.alaaddin.it/TRECCE/HP/INTRODUZIONE/Moebius.html (19/04/15)

2.2.12 Período Clássico

Primeiramente devemos diferenciar os termos Período Clássico de Música Clássica. A Música Clássica ou Erudita é toda música fruto da erudição, e não de práticas folclóricas ou populares. Esta variedade musical abrange um amplo período, que se inicia aproximadamente no século IX e se estende até o presente.

O Período Clássico compreende a história da Música Erudita Ocidental que compreende desde a segunda metade do século XVIII até o início do século XIX, também conhecido como "Era Clássica".

A Música do Período Clássico tinha como características a objetividade, a claridade, a periodicidade, a simetria e o equilíbrio, diferenciando-se do momento anterior, o período conhecido por "pré-clássico", que se estende de 1720 a 1770, na época da Música Barroca.

Reagindo ao denso estilo polifônico do Período Barroco, os compositores do Período Clássico criaram obras musicais que transpareciam claridade e eram acima de tudo acessíveis. Os nomes mais famosos na história deste período da Música são Franz Joseph

Haydn (1732-1809), Wolfgang Amadeus Mozart (1756-1791) e Ludwig van Beethoven (1770-1827). Beethoven tem em seu repertório musical obras que abrangem não apenas o Período Clássico, como também o Romântico.

A forma musical mais utilizada no período foi a forma-sonata, considerada a mais esquematizada e ampla para uma composição. Esta forma musical foi geralmente utilizada em sonatas, sinfonias, concertos, quartetos, etc., dependendo principalmente do movimento harmônico.

Os instrumentos musicais típicos da era clássica são aqueles que hoje podemos encontrar na composição de uma orquestra, como por exemplo o violino, a viola, o violoncelo, o contrabaixo, as flautas, o trompete, a tuba e o trombone, acrescidos do órgão, do cravo e do piano. Nesta época o cravo começa a sair da cena musical e é substituído pelo seu sucessor, o piano.

A Matemática se faz presente na Música do período clássico como apresentam Souza e Abdounur em [58], com base nos resultados do matemático John Putz, da Universidade de Alma College - Michigan, nas relações encontradas entre a seção áurea e as sonatas de Mozart, conforme [47]. De acordo com Stakhov e Sluchenkova em [61], o musicólogo russo Sabaneev mostrou em um artigo de 1925 que a seção áurea foi encontrada em 97% dos trabalhos musicais de Beethoven, assim como em 91% nos de Mozart.

2.2.13 Era Romântica

A Música da Era Romântica é aquela compreendida entre o ano de 1815 e o início do século XX. O foco das artes, da literatura, da filosofia e da Música deste período são a emoção, o sentimento e a intuição.

Desta forma, a estética musical dá seu lugar de importância à flexibilidade das formas musicais, e no sentimento transmitido pela Música.

No Romantismo, desenvolveu-se vários conceitos de tonalidades a fim de estabelecer descrições dos vocabulários harmônicos herdados dos Períodos Barroco e Clássico. Os compositores da Era Romântica procuraram mesclar as grandes estruturas harmônicas desenvolvidas por Haydn, e aperfeiçoadas por Mozart e Beethoven, com suas próprias inovações, objetivando maior fluidez de movimento e maior contraste. As mudanças de tom aconteciam de maneira mais brusca do que no Período Clássico, e as modulações ocorriam entre tons cada vez mais distantes.

Marcada pelo incremento instrumental , a era romântica na Música acrescentou instrumentos na orquestra, ficando com 14 primeiros violinos, 12 segundos violinos, 8 violas, 8 violoncelos, 6 contrabaixos e 4 trompas.

A Era Romântica escreveu na história da Música uma vasta lista de grandes compositores, dos quais podemos citar Frédéric François Chopin (1810-1849), Wilhelm Richard Wagner (1813-1883), Giuseppe Fortunino Francesco Verdi (1813-1901), Johannes Brahms (1833-1897), Piotr Ilitch Tchaikosvsky (1840-1893), Claude-Achille Debussy (1862-1918) e a família Strauss: Johann Baptist Strauss I (1804-1849), seus filhos Johann Baptist Strauss II (1825-1899), Josef Strauss (1827-1870) e Eduard Strauss (1835-1916), e o filho deste, Johann Eduard Strauss (1866-1939).

2.2.14 Música Moderna

A Música Moderna é o período da história da Música decorrido na primeira metade do século XX, e é também conhecido como modernismo. As tendências deste período possuem caráter quase exclusivamente experimental, numa busca incessante por novos estilos, e com grande ênfase na criatividade. Exemplos dessas tendências são o impressionismo e o expressionismo.

A Música impressionista foi um movimento na Música Erudita, com representação principalmente na França, que se caracterizou pela sugestão e atmosfera, em reação aos excessos da Era Romântica. As grandes orquestras foram sendo substituídas por padrões com um número menor de instrumentos. No impressionismo, a Música utilizou-se mais de dissonâncias com escalas não comuns, como a escala hexafônica.

A Música Expressionista é caracterizada por uma emotividade intensa, melodias ásperas e angulosas e dissonâncias extremas. As composições expressionistas carregam em si um caráter exagerado e soturno.

Podemos citar como compositores modernos importantes Arnold Franz Schönberg (1874-1951), Ígor Fiódorovitch Stravinsky (1882-1971), Anton Webern (1883-1945), Luigi Dallapiccola (1904-1975), e os grandes nomes da Música Erudita Brasileira, Heitor Villa-Lobos (1887-1959) e Antonio Carlos Brasileiro de Almeida Jobim (1927-1994).

Heitor Villa-Lobos é considerado o maior expoente da Música do Período Moderno no Brasil. Suas obras contém elementos das culturas regionais brasileiras, inclusive das canções populares e indígenas. No Brasil, desde 2009, o Dia Nacional da Música Clássica é celebrado em 05 de março, data de nascimento de Villa-Lobos.

Outro importante nome da Música Brasileira, presente no período da Música Moderna foi Antonio Carlos Brasileiro de Almeida Jobim, mais conhecido como Tom Jobim. Além de compositor, também foi maestro, arranjador, pianista, violonista e cantor. É um dos responsáveis pelo movimento da bossa nova no Brasil. Suas influências da Música Erudita vieram principalmente de Villa-Lobos e Claude Debussy.

2.2.15 Música Contemporânea

Utiliza-se tecnicamente o termo "Música Contemporânea" para designar a Música dos séculos XX e XXI. Junto com as tendências conservadoras, como as neoclássicas e as neo-românticas, surge a escola da Música de Vanguarda, que busca o experimentalismo.

Adotado após a Segunda Guerra Mundial, o termo genérico "Música de Vanguarda" compreende as tendências da Música Erudita que surgiram após esse evento global.

Porém, não devemos confundir o período da história da Música a que se refere a chamada Música de Vanguarda, do termo "de vanguarda" utilizado para se referir a qualquer obra musical que utilize técnicas inovadoras ou experimentais.

A Música de Vanguarda possui um grande número de vertentes, tornando muito difícil analisá-la plenamente. De forma geral, este vanguardismo trabalha com mais liberdade do que o modernismo, o que da vazão a várias polêmicas.

Muitos músicos passaram a incorporar a Matemática como ferramenta essencial às suas composições. No início do período podemos citar o músico austríaco Anton Webern (1883-1945), que compôs pequenas peças utilizando-se da simetria.

Iánnis Xenákis (1922-2001) também é considerado um dos mais influentes compositores do século XX. Nascido grego e naturalizado francês, era também engenheiro, arquiteto e teórico musical. Algumas de suas obras tinham como base teorias do campo da Física e da Matemática, como, por exemplo, a teoria do caos.

A primeira forma de composição serial foi o dodecafonismo, que foi sistematizado por Arnold Franz Walter Schöenberg no início da década de 1920, ainda no período moderno. Nesse sistema, a série era uma sequência de doze notas, usando o total cromático sem repetições.

Na década de 1940, o francês Olivier Messiaen (1908-1992) e o italiano Luigi Dallapiccola (1904-1975), se utilizaram do conceito matemático da permutação, que faz parte da série dodecafônica, para determinar a sequência ordenada de intensidade, duração e timbre dos sons.

Com o objetivo de produzir uma peça "matematicamente perfeita", criou-se um movimento chamado serialismo integral, que busca alocar e utilizar de maneira serial os timbres, alturas, durações e intensidades sonoras, definidos a partir de uma série, que pode ser representada por sequências numéricas. O serialismo integral foi aplicado posteriormente na música eletrônica, criada na Alemanha na década de 1950.

A Música Eletrônica é criada ou recriada através da utilização de equipamentos eletrônicos, como gravadores digitais, sintetizadores, computadores e softwares de composição.

Já outros compositores tomaram o caminho contrário, como John Milton Cage Jr. (1912-1992), cujo princípio é a total falta de rigor matemático em suas criações. O termo normalmente utilizado para designar este estilo musical é "Música Aleatória", embora alguns teóricos preferem se referir ao estilo como "músicas ao acaso".

Outros estilos presentes na Música de Vanguarda são a Música Microtonal, a Música Pontilhista, a Música Minimalista, a *Musique Concrète* (Música Concreta), o art rock, entre outros.

Uma característica muitas vezes presentes no vanguardismo musical é a mesclagem de estilos, tornando algumas composições inclassificáveis.

A partir do século XX, a Música ganhou uma crescente popularidade com o advento do rádio. A partir deste, novas tecnologias foram sendo desenvolvidas na área de gravação, edição e reprodução de áudio. Não sendo mais limitada a concertos e clubes, a Música ultrapassou fronteiras, nacionais e internacionais.

A Música Popular, iniciada ainda em meados do século XIX, desenvolveu-se fortemente nos séculos seguintes, e engloba uma série de estilos musicais.

A música folclórica tradicional é aquela criada por um determinado povo, sem interferência da comunicação em massa e da comercialização da cultura. A partir do século XX, a música "Folk" passou a designar uma forma particular de música popular inspirada na música folclórica tradicional, caracterizada pela simplicidade, tradição e pelas letras com consciência social.

O "Jazz", que se caracteriza pelas notas do "Blues", polirritmia e improvisação, tem suas origens na cultura da África Ocidental e nas bandas militares européias. Criou-se nas comunidades afro-americanas, no começo do século XX, e ganhou popularidade internacional na década de 1920. Suas influências se encontram tanto na música popular quanto na erudita.

Combinando o violão com a tecnologia, surgem as guitarras elétricas, e depois os contrabaixos elétricos, que acrescidos de um conjunto de elementos de percussão - a bateria - formariam a base para diversos gêneros musicais com sua formação em grupos pequenos.

Nos Estados Unidos surgiu o gênero musical "Rock and Roll", ou simplesmente "Rock", na década de 1950, utilizando-se de elementos do "Rhythm and Blues" da década de 1920. Um dos primeiros sub-gêneros do Rock and Roll é o "Rockabilly", que combina elementos do Blues, Folk, Rhythm and Blues, e também dos estilos musicais "Boogie Woogie", "Swing", da música "Gospel" e do "Country". Elvis Presley é chamado de "o Rei do Rock", por ser considerado primeiro astro deste gênero musical, que se tornou, no final do século XX, a forma mais popular de música existente no mundo.

O Rock deu origem a vários sub-gêneros e, juntamente com o Blues e o "Blues-rock", formaram o "Heavy Metal". O Heavy Metal é caracterizado por um estilo musical agressivo, utilizando-se bastante de sons distorcidos, riffs de guitarra e de virtuosidade por parte de seus músicos. As primeiras bandas do gênero datam do final da década de 1960 e início da década seguinte, como "Led Zeppelin", "Deep Purple" e "Black Sabbath".

Com várias modificações e vertentes, o Heavy Metal também originou diversos sub-gêneros, como o "Trash Metal", o "Death Metal", o "Black Metal", o "Power Metal" e o "Symphonic Metal", dentre outros, presentes ainda no século XXI.

Existem ainda, nos séculos XX e XXI, diversos outros gêneros musicais de sucesso popular. Apenas para citar mais alguns, temos o "Soul", o "Hip-hop", o "Disco", o "Funk", o "Reggae", e a "New Age".

2.2.16 A Música no Brasil

A Música no Brasil, assim como a cultura de seu povo, foi construída pela mesclagem artística dos grupos que o constituíram. O som das vozes dos índios, acompanhados pelas suas palmas e batidas de pés no chão, de flautas, apitos, cornetas, chocalhos, varetas e tambores rudimentares, misturaram-se às músicas e danças africanas, por volta de 1538, com a vinda dos primeiros grupos de escravos. A Música européia, juntamente com os instrumentos inerentes a ela, são introduzidos a partir de 1549, juntamente com as primeiras missões de padres jesuítas portugueses no Brasil.

No século XVII, nas organizações quilombolas, surgem as primeiras formas de música afro-brasileira, como o "Afoxé", o "Lundu", o "Maracatu", e o "Maxixe". Também nesta época no Brasil são introduzidos pelos portugueses alguns instrumentos musicais europeus sofisticados, como o violino, o violoncelo, o clarinete, a harpa, o violão, o cavaquinho e o acordeon.

Pouco tempo depois, em meados do século XVIII, alguns instrumentos musicais velhos e desgastados são doados a escravos barbeiros negros que, dedicando-se ao seu aprendizado, apresentavam uma música popular brasileira instrumental de entretenimento ao público. No final deste século há um avanço na produção musical religiosa, e no início do século seguinte, com a criação da Guarda Nacional, os músicos militares incluem em seus repertórios, além dos hinos, trechos de músicas populares e música clássica.

Antonio Carlos Gomes, compositor de óperas, é agraciado com a Imperial Ordem da Rosa, pelo então Imperador Dom Pedro II, em 1861, após a execução de sua obra "A Noite do Castelo", no Teatro da Ópera Nacional, no Rio de Janeiro.

Na segunda metade do século XIX, nascido na Bahia e trazido para o Rio de Janeiro, surge o "Samba", oriundo dos diversos estilos de batuques africanos.

Em 1880 surge, no Rio de Janeiro, o "Chorinho", gênero musical com base na improvisação, tocado por pequenos grupos instrumentais compostos com violões, cavaquinhos e flautas. Época das serenatas, alguns famosos compositores de choros do período são Chiquinha Gonzaga e Pixinguinha.

A década de 1890 marca o surgimento do "Frevo" em Recife, Pernambuco. Também nesta época, a compositora Chiquinha Gonzaga, quem em 1885 foi a primeira mulher a reger uma orquestra no Brasil, compõe a primeira marcha carnavalesca da história da música brasileira, chamada "Ô Abre Alas".

No início do século XX, com a vinda dos imigrantes europeus e asiáticos, há mais um aumento na miscigenação musical brasileira. A "Música Sertaneja", surgida em meados do século XIX, populariza-se na década de 1920.

Sob influência do bolero, a partir de 1930 consolida-se um tipo de samba que viria a chamar-se "Samba-Canção", mais melódico e romântico. Alguns dos maiores intérpretes do gênero são Francisco Alves, Orlando Silva, Caubi Peixoto e Angela Maria.

Em 1922, na Semana de Arte Moderna, no Teatro Municipal de São Paulo, apresenta-se o compositor erudito-popular e regente carioca Heitor Villa-Lobos. Mais tarde, este grande nome da Música brasileira compõe a Bachiana nº 5, para canto e orquestra de violoncelos, sendo admirada no Brasil e internacionalmente.

A Música popular brasileira cresce bastante nas décadas de 1920 e 1930, impulsionada pela popularização do rádio, destacando-se alguns cantores e compositores, como Ary Barroso, Lamartine Babo, Dorival Caymmi, Lupicínio Rodrigues e Noel Rosa.

Luiz Gonzaga é um dos grandes responsáveis, na década de 1940, pelo nascimento do gênero musical "Baião", por abrir caminhos para novos nomes da música nordestina e também influenciar a música popular do sudeste e sul do país, até meados dos anos 1970.

Das reuniões de músicos no Rio de Janeiro, na década de 1950, surge a "Bossa Nova", um estilo sofisticado e suave. Alguns músicos de destaque neste gênero são o maestro Tom Jobim e o cantor e violonista João Gilberto. A bossa nova faz grande sucesso no exterior, principalmente nos Estados Unidos.

No final da década de 1950 o Rock, vindo dos Estados Unidos e da Inglaterra, chega aos ouvidos dos brasileiros, e no início dos anos 60 a primeira estrela do gênero é Celly Campelo, com os sucessos "Estúpido Cupido" e "Banho de Lua". Logo depois, o estilo musical é adaptado pelo movimento chamado "Jovem Guarda", com representantes como Roberto Carlos, Erasmo Carlos e Wanderléa como cantores.

Com a popularização da televisão, em meados da década de 1960, a Música Popular Brasileira (MPB) difunde-se através de programas e festivais, com nomes como Milton Nascimento, Elis Regina, Chico Buarque de Holanda, e Caetano Veloso.

Na década de 1970 a MPB amplia sua representação, com nomes vindos de todos os cantos do país, como Belchior e Fagner (Ceará), Alceu Valença (Pernambuco), Djavan

(Alagoas), Gal Costa e Maria Bethânia (Bahia), Fafá de Belém (Pará), Elba Ramalho (Paraíba), Clara Nunes (Minas Gerais) e Tim Maia (Rio de Janeiro). O Rock brasileiro é representado principalmente por Raul Seixas e Rita Lee.

Novos estilos musicais começam a fazer sucesso, nas décadas de 1980 e 1990, por influências do cenário musical internacional. Há o crescimento do Rock nacional, e neste período surgem muitas bandas de sucesso, como Legião Urbana, Paralamas do Sucesso, Titâs, Ira!, Ultrage a Rigor, Capital Inicial e RPM, entre outras.

A partir dos anos 1990 há um retorno ao interesse pela Música Sertaneja, ou Country, com um forte caráter romântico e arranjos modernos. Os principais destaques são para as duplas sertanejas, e alguns representantes são Chitãozinho e Xororó, Zezé di Camargo e Luciano, e Leandro e Leonardo.

Chegando ao século XXI, a Música no Brasil apresenta uma grande originalidade e variedade, pautadas na criatividade e influências diversas, bem como na riqueza de gêneros musicais encontrados hoje em dia. Além da MPB, do Samba, do Rock, do Sertanejo e das músicas regionalistas, destacam-se também a "Música Gospel"(religiosa), o Funk, o "Rap" e a Música Eletrônica.

3 ELEMENTOS DE TEORIA MUSICAL

Para entendermos melhor como funciona a Música, as formas de composição musical e as escolhas de escalas musicais é necessário definirmos alguns princípios e elementos dentro da acústica e da teoria musical. Este capítulo procura fornecer ao professor de Matemática os conhecimentos básicos necessários para o desenvolvimento das atividades propostas juntamente com os alunos, caso já não os tenha. Estes temas podem ser desenvolvidos em parceria com os profissionais da educação das áreas de Física e de Música (Artes), focando no propósito da interdisciplinaridade dos conteúdos escolares, ou introduzidos de forma simplificada como conteúdo preparatório ao desenvolvimento dos conteúdos próprios de Trigonometria. Para este capítulo, as principais referências são [11], [22], [25], [33], [40] [48], [49] e [56].

3.1 SOM E ONDAS SONORAS

O som é o efeito resultante quando uma vibração ocorre em um determinado meio, no qual ela se propaga, provocando uma frente de compressão mecânica, ou onda mecânica, com zonas de maior e de menor compressão de partículas. Dessa forma, o som pode ser definido como uma onda, ou conjunto de ondas. Estas ondas são longitudinais[1], propagando-se de forma circuncêntrica, e são periódicas em relação ao tempo.

As ondas sonoras, por serem mecânicas, se propagam apenas em meios materiais e elásticos, como os sólidos, líquidos ou gasosos, onde provocam as perturbações oscilatórias nas partículas. Os meios mais comuns de propagação de ondas sonoras são o ar e a água. A elasticidade do meio garante a capacidade do mesmo de se deformar à passagem das ondas, e restaurar a sua forma original após a passagem delas.

Como a propagação do som se dá em um meio material, daí o motivo pelo qual o som não se propaga no vácuo, pois neste caso não há nem mesmo a existência do ar. Dependendo do meio de propagação, algumas características do som podem alterar-se, como a velocidade e o comprimento de onda. Entretanto, a frequência permanece independente e constante durante todo o percurso da propagação da onda.

[1]Ondas longitudinais são aquelas em que a vibração ocorre na mesma direção do movimento, a exemplo das ondas sonoras.

Como a onda sonora depende do meio em que ela se propaga, as diferenças de temperatura influenciam de maneira importante na velocidade de propagação do som. No ar, a 20^0C, a velocidade do som é de, aproximadamente, 343 m/s.

Uma boa aproximação para a velocidade do som no ar, em metros por segundo, em que T é a temperatura em graus Celsius, é dada por

$$v = 330,4 + 0,59.T \quad . \tag{3.1}$$

Estas oscilações têm como características espacial o "comprimento de onda"(λ), e temporal o "período da onda" (T).

O comprimento de onda é a distância mínima em que um ciclo (padrão temporal) da onda se repete. No caso de uma onda sonora, o comprimento de onda determina a distância percorrida pelo som durante o período de vibração (de uma corda, por exemplo). Já o período da onda representa o tempo (em segundos) que esse ciclo leva para se formar. Essas duas grandezas estão relacionadas pela velocidade de propagação da onda (v), de forma que

$$v = \frac{\lambda}{T} \quad . \tag{3.2}$$

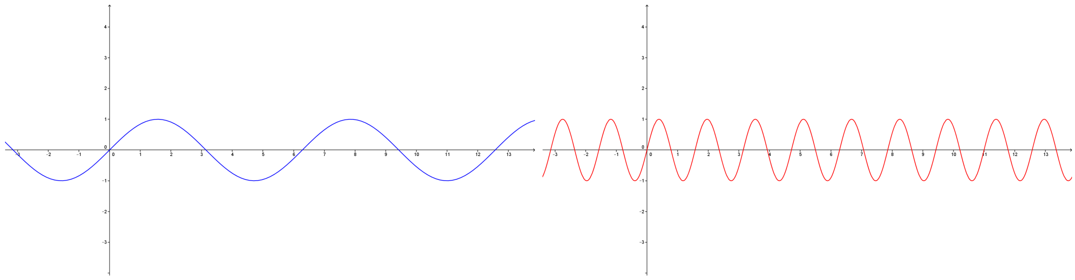
A frequência é a quantidade de ondas (ciclos) formadas a cada segundo. O Sistema Internacional de Unidades (SI) adota como unidade de medida de frequência o hertz (Hz). Assim, 1 Hz equivale a uma onda por segundo.

O ouvido humano é capaz de perceber frequências que variam de 20 Hz a 20.000 Hz, a chamada "faixa audível". Abaixo e acima desta faixa estão, respectivamente, o "infrassom" e o "ultrassom". Exemplos de animais que ouvem infrassons são os elefantes e os pombos-correio. Os ultrassons podem ser captados pelos ouvidos dos cães e dos morcegos, entre outros animais.

A frequência (altura do som) é um parâmetro que diferencia os sons graves dos agudos. Um som grave é um som em baixa frequência, e um som agudo é um som em alta frequência (Figura 3.1). Não se deve confundir frequência sonora com a intensidade do som, relativa ao volume do mesmo.

Figura 3.1: Baixa Frequência x Alta Frequência

(a) baixa frequência - som grave (b) alta frequência - som agudo



Fonte: o próprio autor

Como o período da onda é o inverso da sua frequência (f), temos a "Equação Fundamental da Ondulatória", válida para todos os tipos de onda, e que pode ser escrita como

$$v = \lambda . f \quad , \tag{3.3}$$

a qual define que a frequência é inversamente proporcional ao comprimento da onda.

Um tipo particular de onda é a onda senoidal, também chamada de "onda seno", "sinusóide", "onda sinusoidal" ou simplesmente de "senóide". É uma forma de onda cujo gráfico tem a forma generalizada da função matemática "seno". As ondas sonoras são exemplos de ondas na forma senoidal.

Alguns sons que se assemelham a uma onda seno são o som do diapasão e a vibração de um vidro de cristal ao se passar um dedo molhado sobre seu gargalo.

O diapasão de garfo, conforme mostrado na Figura 3.2 é um objeto metálico, em formato de forquilha. Sua invenção data de 1711, e é devida ao britânico John Shore (1662-1752), um trompetista de Georg Friedrich Haendel[2]. Sua principal finalidade é a afinação de instrumentos musicais e de vozes.

Figura 3.2: Diapasão de Garfo

Fonte: http://oguitarrista.com/blog/afinar-seu-violao-ou-guitarra-online/ (07/06/14)

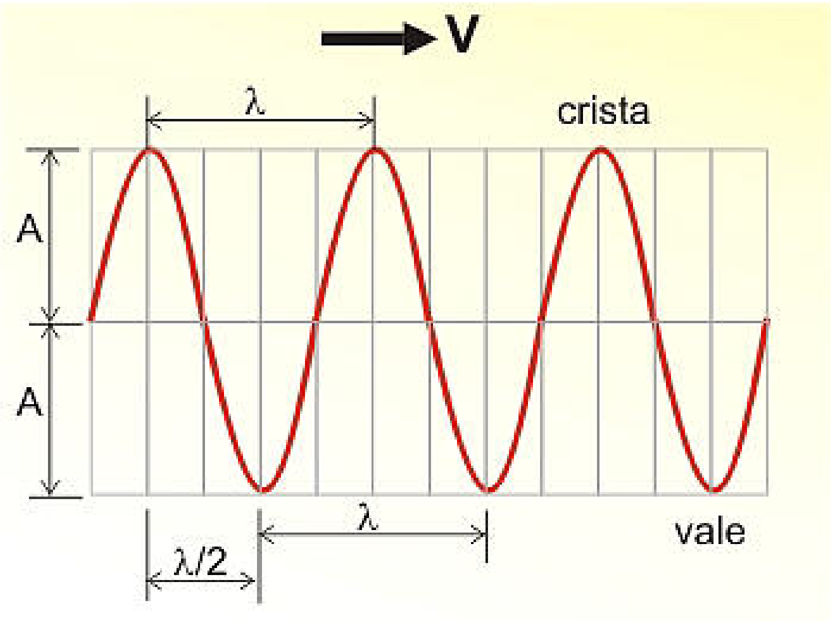
A forquilha é produzida de forma a estar afinada em uma determinada frequência, a qual a mais comum é o Lá em 440 Hz. Para utilizar o diapasão, golpeia-se o mesmo contra uma superfície, e as duas extremidades da forquilha vibram produzindo a nota referida. Ouvindo-se o som produzido pelo dispositivo, o músico procede a afinação de seu instrumento, iniciando pela nota Lá em 440 Hz.

No caso de uma onda senoidal, o comprimento de onda coincide com a distância entre repetições da forma de onda, paralelamente à direção de propagação da onda. Desse modo, numa onda senoidal o comprimento de onda tem o mesmo valor da distância entre "cristas" ou "picos" (máximos), vales (mínimos) ou o dobro da distância entre dois "nós". Os nós (nodos) são os pontos de intersecção da senóide com o eixo horizontal do gráfico. As cristas e os vales também são chamados de "antinodos", ou ainda, "ventres". A distância entre duas cristas ou vales consecutivos determina do comprimento da onda.

[2]Georg Friedrich Haendel (1685-1759) foi um famoso compositor germânico, hoje considerado um dos grandes mestres do Barroco musical europeu.

Na Figura 3.3 temos um exemplo de gráfico de uma onda senoidal, representando a amplitude em função do tempo. A amplitude da onda, determinada por "mais" ou "menos" a distância "A" se refere à magnitude de oscilação da onda, e assume valores positivos e negativos em relação ao eixo vertical do gráfico.

Figura 3.3: Onda Senoidal- Características



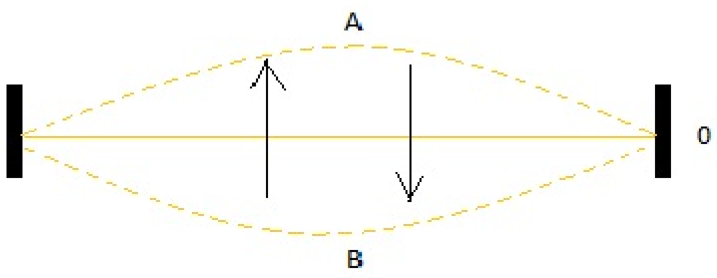
Fonte: http://fisicamoderna.blog.uol.com.br/arch2006-05-28_2006-06-03.html (18/07/14)

A amplitude da vibração de uma onda determina o deslocamento máximo da posição de repouso, e corresponde à quantidade de alteração positiva e negativa na pressão atmosférica relativa às compressões e rarefações das moléculas do meio durante a propagação da onda. Quanto maior for a amplitude, maior será quantidade de energia transportada. No caso de ondas sonoras e sinais de áudio, a amplitude determina a intensidade do som, a sensação sonora de "volume".

O comprimento de onda é representado pela letra grega "λ", e "V" indica o sentido da velocidade de propagação da onda. Neste caso, podemos ver que o comprimento de onda é igual ao período da mesma.

Por exemplo, ao pinçar uma corda, estaremos tirando-a de sua posição de equilíbrio, e ela então realizará movimentos vibratórios, que podem ser medidos por uma unidade de tempo (Figura 3.4).

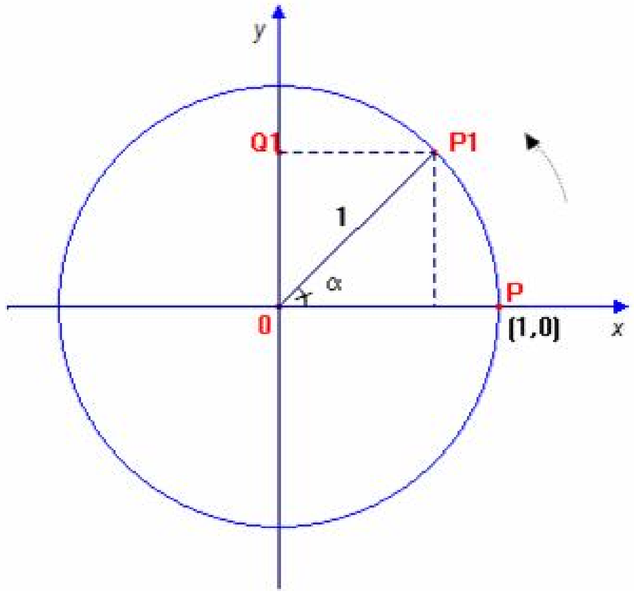
Figura 3.4: Corda Vibrante



Fonte: http://www.ntns.it/acu/pag5.htm (11/01/15)

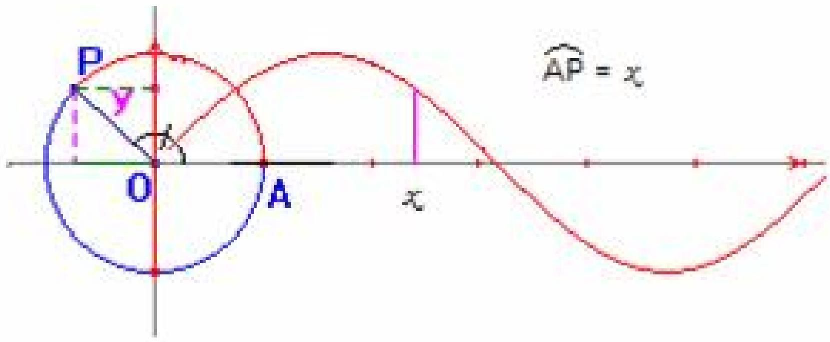
A amplitude do deslocamento desta corda é comparável ao deslocamento da ordenada de um ponto P ao percorrer uma circunferência no sentido anti-horário (Figuras 3.5 e 3.6).

Figura 3.5: Deslocamento de um Ponto P numa Circunferência



Fonte: http://matematicaemusica.pbworks.com/w/page/20503556/Sen%C3%B3ide (11/01/15)

Figura 3.6: O Deslocamento de um Ponto P numa Circunferência e a Senóide



Fonte: http://matematicaemusica.pbworks.com/w/page/20503556/Sen%C3%B3ide (11/01/15)

Quando um ponto P percorre uma circunferência f vezes por segundo, podemos representar o comportamento da senóide correspondente pela função

$$f(\alpha) = sen(\alpha) = sen(2\pi.f.t) \quad , \tag{3.4}$$

em que t é o tempo dado em segundos.

Normalmente a amplitude de ondas sonoras é expressa em decibel (dB). O bel (B) recebeu este nome em homenagem a Alexander Graham Bell (1847-1922), cientista escocês conhecido pelo invento do telefone (ver Apêndice B).

O decibel (um décimo de bel) é uma unidade logarítmica, utilizada para medir o nível de intensidade sonora. A utilização da unidade logarítmica deve-se ao fato de que a intensidade dos sons captados pelo ouvido humano cobrem uma ampla faixa de variação.

O decibel indica a proporção da intensidade do som em relação a um nível de referência específico. Zero decibel (0 dB) corresponde à intensidade de referência I_0, de forma que todo som acima de 0 dB pode ser ouvido pelo ser humano. Ao dobrarmos a intensidade sonora, estamos somando aproximadamente 3 dB. Esta aproximação leva em consideração uma margem de erro de apenas 2%. Em torno de 130 dB se encontra nosso limite de dor, e intensidades acima desta podem causar a perda auditiva.

Valores de referência típicos de algumas fontes sonoras, em decibéis, estão relacionados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Amostra de valores de referência em decibéis

Fonte sonora	**Intensidade**
limiar da audição humana	0 dB
respiração tranquila	0-10 dB
folhas caindo, sussurros	10-20 dB
conversa baixa, estúdio de gravação	20-30 dB
área residencial quieta	30-40 dB
conversação normal, geladeira	40-50 dB
sala com TV, escritório de negócios	50-60 dB
conversa em grupo, máquina de costura	60-70 dB
rua congestionada, restaurante movimentado	70-80 dB
aspirador de pó, secador de cabelos	80-90 dB
motocicleta, discoteca	90-100 dB
buzina de automóvel	100-110 dB
trovão, show de rock	110-120 dB
britadeira pneumática	120-130 dB
avião a jato, tiro	130-150 dB
decolagem de foguete	acima de 150 dB

Fonte: o próprio autor

3.2 MÚSICA

Segundo Bennett em [5], os principais componentes básicos da música são a melodia, a harmonia, o ritmo, o timbre, a forma e a textura:

- Melodia são as notas musicais tocadas ou cantadas separadamente, formando a ideia de um solo. É considerado o componente mais importante da formação da Música.

- Harmonia são duas ou mais notas tocadas juntas, e pode ser feita com qualquer instrumento capaz de produzir acordes. Difere-se da polifonia, pois neste caso temos melodias diferentes cantadas ou tocadas por instrumentos distintos.

- Ritmo é o elemento da Música que determina o tempo de duração de cada nota. É ele o responsável pela noção de métrica na Música.

- Timbre é a particularidade do som que é própria de cada fonte sonora (instrumento). Também chamado de "a cor do som" do instrumento, o timbre nos permite diferenciar a sonoridade entre instrumentos diferentes, quando estes estão emitindo a mesma nota musical.

- Forma é a palavra utilizada para descrever a configuração básica a partir da qual um compositor valeu-se para estruturar uma obra musical. Existem vários tipos de formas ou configurações, que se utilizam de diferentes métodos, nos diversos períodos da história da Música.

- Textura é o termo utilizado para descrever o aspecto da peça musical do ponto de vista de sua sonoridade mais densa, rica e fluindo com facilidade, ou mais rarefeita e esparsa, produzindo um som mais penetrante e agressivo.

Nota musical é o termo que designa o elemento mínimo de um som, formado por um único modo de vibração do ar. A cada nota corresponde uma determinada frequência. Assim, as notas musicais compõem o que pode ser chamado de um "alfabeto musical", que possibilita associar frequências, ou conjuntos delas, a nomes predeterminados, facilitando a composição e a leitura de uma peça musical. Sem as notas musicais (sem o "alfabeto musical"), uma partitura teria que ser escrita como uma grande sequência de números extensos, correspondendo às frequências dos sons que se espera ouvir.

3.2.1 Escalas Musicais

Uma escala musical pode ser definida como um conjunto de notas musicais, as quais são ordenadas em uma sequência definida, normalmente da nota mais mais grave para a mais aguda. Esta sequência é definida segundo a frequência vibratória de cada nota musical (tom), e prevê a manutenção de determinados intervalos entre as notas da escala. As notas mais graves possuem uma frequência de som mais baixa, enquanto as notas mais agudas possuem uma frequência mais alta.

O conjunto de frequências audíveis pelo ser humano forma um espectro contínuo, como um intervalo. Uma escala musical é apenas uma amostra discreta deste intervalo, ou seja, como pontos escolhidos dentro do intervalo de frequências.

3.2.2 A Escala Pitagórica

O matemático, filósofo e também músico Pitágoras definiu como consonantes aquelas notas musicais que, tocadas juntas, produzem um som agradável aos ouvidos. No episódio em que ele ouviu os diferentes sons produzidos pelas batidas de alguns martelos em uma oficina de ferreiro (Subseção 2.2.1), Pitágoras verificou que os sons mais agradáveis (harmoniosos) originavam-se dos martelos que pesavam 12, 9, 8 e 6 unidades de massa. Estas grandezas estão relacionadas entre si pelas razões 1:1, 3:4, 2:3 e 1:2, respectivamente.

Após construir seu "monocórdio", estabeleceu entre o comprimento (l) da corda única deste instrumento as seguintes relações:

$$\text{razão 1:1} \longrightarrow \text{comprimento } \; l \longrightarrow \text{a } \textbf{tônica} \text{ (corda solta)}$$

$$\text{razão 1:2} \longrightarrow \text{comprimento } \frac{l}{2} \longrightarrow \text{a } \textbf{oitava}$$

$$\text{razão 2:3} \longrightarrow \text{comprimento } \frac{2l}{3} \longrightarrow \text{a } \textbf{quinta}$$

$$\text{razão 3:4} \longrightarrow \text{comprimento } \frac{3l}{4} \longrightarrow \text{a } \textbf{quarta}$$

Vale observar que a relação entre numeradores e denominadores nas razões encontradas, $\left(\frac{1}{1}\right)$, $\left(\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{2}{3}\right)$, e $\left(\frac{3}{4}\right)$, derivam das razões entre os pesos dos martelos consonantes ouvidos por Pitágoras: $\left(\frac{12}{12}\right)$, $\left(\frac{6}{12}\right)$, $\left(\frac{8}{12}\right)$, e $\left(\frac{9}{12}\right)$.

Curiosamente, 9 é a média aritmética[3] entre 6 e 12, e 8 é a média harmônica[4] entre 6 e 12:

$$\frac{6+12}{2} = 9 \quad , \quad \frac{2}{\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{12}\right)} = 8 \ .$$

[3] A média aritmética dos termos $x_1, x_2, ..., x_n$ é o resultado da soma dos termos, dividido pela quantidade n de termos.

[4] A média harmônica dos termos $x_1, x_2, ..., x_n$ é definida como o resultado da divisão da quantidade n de termos pela soma dos inversos dos termos.

Também podemos formar uma proporção com os números 6, 8, 9 e 12, colocando-os da seguinte forma: $\dfrac{6}{8} = \dfrac{9}{12}$.

Ao esticar-se uma corda e fazê-la vibrar, esta emite um som, que depende do tamanho da mesma. A partir de uma determinada nota musical, chamada de tônica, consegue-se, pelas razões de números inteiros, frequências consonantes à primeira. Os sons harmoniosos são produzidos por uma corda vibrante cujo comprimento é dividido segundo proporções simples. Esta caracterização revela uma relação entre os sons harmoniosos e os números inteiros. Quanto mais simples é a relação de proporção entre os sons, mais harmonioso (consonante) é o som resultante, ou seja, mais belo e agradável. A primeira nota musical de uma escala ou de um acorde é a tônica. Provavelmente esta tenha sido a primeira noção de acorde, que é formado por notas musicais tocadas simultaneamente.

Pressionando o monocórdio em determinadas posições e fazendo a corda do mesmo vibrar, Pitágoras obteve notas consonantes em relação ao som emitido pela corda solta vibrante. Na escala ocidental atual, estas notas consoantes encontradas são a oitava, a quinta e a quarta, relativas à tônica.

Ao tocar-se uma corda de um comprimento qualquer, teremos um som que chamaremos de tônica. Para obter-se o som da oitava de uma tônica, deve-se fixar (segurar) a corda na metade de seu comprimento, e tocá-la na porção livre. O ouvido humano interpreta o som da tônica e da oitava como sendo notas equivalentes. Tocando a corda na porção livre após fixar a mesma em dois terços de seu comprimento, ouviremos a quinta. Fixando a corda em três quartos de seu comprimento e tocando-a em sua porção livre, encontraremos o som referente à quarta.

Desta forma, formou-se a primeira e mais elementar escala musical, de origem grega. Formada pelos quatro sons descobertos por Pitágoras, hoje na escala mais utilizada mundialmente são as notas de posição 1ª, 4ª, 5ª e 8ª , ou seja, correspondem às notas dó, fá, sol e dó (uma oitava acima).

Como consequência, Pitágoras construiu posteriormente o "tetracórdio", que se assemelha a uma lira, com quatro cordas, cada uma com seu comprimento nas proporções definidas no monocórdio. Como o comprimento inicial da corda não importava, bastava tomar a maior como referência, que podemos chamar de l_1. A partir desta, eram definidos os comprimentos das outras cordas, a saber:

$$l_2 = \frac{l_1}{2} \quad , \quad l_3 = \frac{2l_1}{3} \quad e \quad l_4 = \frac{3l_1}{4} \quad .$$

Outras notas musicais foram descobertas, seguindo as mesmas proporções definidas por Pitágoras, até formar-se o que hoje chamamos de "Escala Diatônica".

A Escala Diatônica possui 7 notas, que são, em ordem: Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá e Si. Estes monossílabos foram introduzidos por Guido D'Arezzo[5], e utilizados predominantemente em línguas latinas.

O Papa Gregório I (c. 540-604) introduziu um sistema alfabético, utilizado em inglês, alemão, grego, etc, para simbolizar cada uma das notas musicais (Figura 3.7).

Figura 3.7: As Notas Musicais e Suas Representações Alfabéticas

DÓ	RÉ	MI	FÁ	SOL	LÁ	SI
C	D	E	F	G	A	B

Fonte: http://violaolivre.blogspot.com.br/2011/02/as-notas-musicais.html (16/11/2014)

Incluindo a oitava de "$Dó$", teremos o "intervalo de oitava", utilizando a notação "X_n", onde "X" designa o nome da nota musical e "n" é o índice que identifica o respectivo "intervalo de oitava" a que esta nota pertence:

$$Dó_1 - Ré_1 - Mi_1 - Fá_1 - Sol_1 - Lá_1 - Si_1 - Dó_2$$

A nota $Dó_2$ é uma oitava acima de $Dó_1$, e a sequência de notas continua com $Ré_2$ até Si_2, quando então inicia-se outra oitava, a partir de $Dó_3$, e assim por diante.

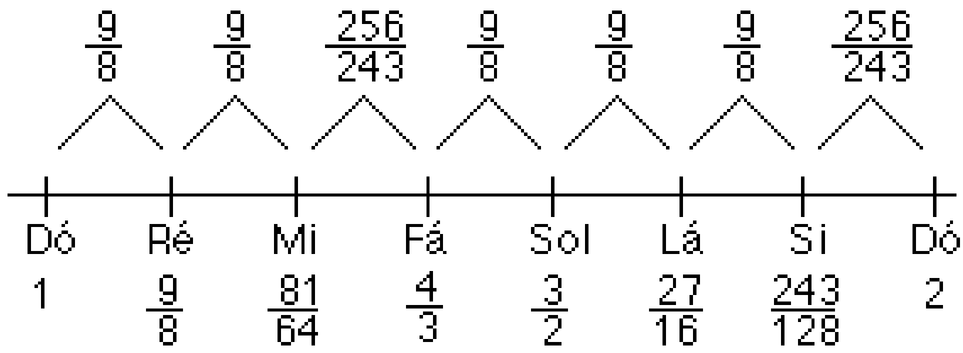
No intervalo de oitava, considerando o comprimento total da corda (l) para a nota $Dó$, temos

$$Dó_1 = l,\ \ Fá_1 = \frac{3l}{4},\ \ Sol_1 = \frac{2l}{3} \text{ e } Dó_2 = \frac{l}{2}\ .$$

[5] Ver Subseção 2.2.9.

O som produzido por cada nota tem uma frequência proporcional ao inverso do comprimento da corda. Levando-se em consideração a escala de Dó, onde a corda solta emite esta nota, as frequências são distribuídas conforme demonstra a Figura 3.8, em sua parte inferior.

Figura 3.8: Escala Diatônica Pitagórica - 7 Notas



Fonte: http://www.matematicaviva.pt/2013/11/a-matematica-nas-escalas-musicais.html (15/11/2014)

Na parte superior da Figura 3.8 temos as razões entre as frequências das notas musicais.

A Escala Diatônica Pitagórica de sete notas, acrescidas de cinco tons intermediários (meio tom), fica então formada com doze notas com intervalos de semitons entre elas, como na Figura 3.9.

Figura 3.9: Escala Cromática Pitagórica - 12 Notas

C	Db	D	Eb	E	F	Gb	G	Ab	A	Bb	B	C
C	C#	D	D#	E	F	F#	G	G#	A	A#	B	C

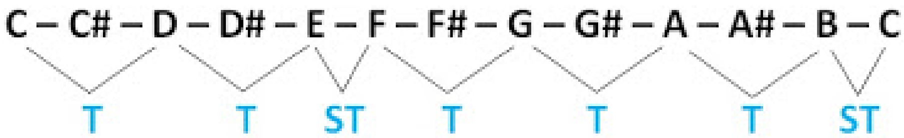
Fonte: http://violaolivre.blogspot.com.br/2013/03/escalas-parte-2.html (15/11/2014)

O sustenido (♯) e o bemol (♭) são os "acidentes musicais" que definem a elevação e a diminuição de um semitom na nota a que estejam acompanhados, respectivamente.

Assim, por exemplo, $C\sharp$ é um meio tom acima de C, e equivale a $D\flat$, pois este é um meio tom abaixo de D.

Esta escala de 12 notas com intervalos de semitons entre elas chama-se "Escala Cromática". Podemos ver na Figura 3.10 o posicionamento de tons (T) e semitons (ST) nesta escala, que também é chamada de "Escala Cromática Pitagórica".

Figura 3.10: Escala Cromática - Tons e Semitons



Fonte: http://aprendendotocaroviolao.blogspot.com.br/2012/03/aula-viii-intervalos-simples-e.html (17/11/2014)

Temos, na escala cromática, a distância de um tom entre as notas "$Dó$" e "$Ré$", "$Ré$" e "Mi", "$Fá$" e "Sol", "Sol" e "$Lá$", e "$Lá$" e "Si". Entre as notas "Mi" e "$Fá$", e "Si" e "$Dó$", há a distância de meio tom (um semitom).

A partir das quatro primeiras notas musicais encontradas por Pitágoras, Dó, Fá, Sol e Dó (uma oitava acima), e tomando-se como base a quinta da tônica ($Dó_1$), cujo comprimento equivale a $\frac{2l}{3}$, onde l representa o comprimento total da corda utilizada, pode-se descobrir as outras notas do intervalo de oitava, por um procedimento chamado de "ciclo das quintas".

No ciclo das quintas, para a determinação do comprimento de corda, a quinta de uma nota musical, também chamada de "quinta justa", é obtida aplicando-se a razão $\frac{2}{3}$ no comprimento da corda referente à primeira nota, $l = 1$. Depois, pode-se obter a quinta da quinta, procedendo da mesma forma. Para este procedimento, caso o intervalo encontrado ultrapasse o limite de uma oitava, devemos reduzi-lo a um intervalo simples (intervalo de uma oitava). Verifica-se que o intervalo ultrapassou o limite de uma oitava quando a razão encontrada é menor do que $\frac{1}{2}$, ou seja, meio comprimento da corda original.

Para "descer" uma oitava, basta multiplicar a razão obtida por 2, e teremos o valor correspondente. Esta sucessão de cálculos leva à determinação das notas musicais da "Escala Diatônica Pitagórica", em relação ao comprimento da corda:

- A quinta de $Dó_1$ equivale a Sol_1, pois $\frac{2}{3} \;.\; 1 = \frac{2}{3}$.

- A quinta de Sol_1 equivale a $Ré_2$, pois $\frac{2}{3} \;.\; \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. Como $Ré_2$ é uma oitava acima de $Ré_1$, significa que $Ré_1$ terá o dobro do comprimento. Logo, temos $2 \;.\; \frac{4}{9} = \frac{8}{9}$.

- A quinta de $Ré_1$ equivale a $Lá_1$, pois $\frac{2}{3} \;.\; \frac{8}{9} = \frac{16}{27}$.

- A quinta de $Lá_1$ equivale a Mi_2, pois $\frac{2}{3} \;.\; \frac{16}{27} = \frac{32}{81}$. Como Mi_2 é uma oitava acima de Mi_1, significa que Mi_1 terá o dobro do comprimento. Logo, temos $2 \;.\; \frac{32}{81} = \frac{64}{81}$.

- A quinta de Mi_1 equivale a Si_1, pois $\frac{2}{3} \;.\; \frac{64}{81} = \frac{128}{243}$.

- A quinta de Si_1 equivale a $Fá\sharp_2$, pois $\frac{2}{3} \;.\; \frac{128}{243} = \frac{256}{729}$. Como $Fá\sharp_2$ é uma oitava acima de $Fá\sharp_1$, significa que $Fá\sharp_1$ terá o dobro do comprimento. Logo, temos $2 \;.\; \frac{256}{729} = \frac{512}{729}$.

- A quinta de $Fá\sharp_1$ equivale a $Dó\sharp_2$, pois $\frac{2}{3} \;.\; \frac{512}{729} = \frac{1024}{2187}$. Como $Dó\sharp_2$ é uma oitava acima de $Dó\sharp_1$, $Dó\sharp_1$ terá o dobro do comprimento. Logo, temos $2 \;.\; \frac{1024}{2187} = \frac{2048}{2187}$.

- A quinta de $Dó\sharp_1$ equivale a $Sol\sharp_1$, pois $\frac{2}{3} \;.\; \frac{2048}{2187} = \frac{4096}{6561}$.

- A quinta de $Sol\sharp_1$ equivale a $Ré\sharp_2$, pois $\frac{2}{3} \;.\; \frac{4096}{6561} = \frac{8192}{19683}$. Como $Ré\sharp_2$ é uma oitava acima de $Ré\sharp_1$, $Ré\sharp_1$ terá o dobro do comprimento. Logo, temos $2 \;.\; \frac{8192}{19683} = \frac{16384}{19683}$.

- A quinta de $Ré\sharp_1$ equivale a $Lá\sharp_1$, pois $\frac{2}{3} \;.\; \frac{16384}{19683} = \frac{32768}{59049}$.

- A quinta de $Lá\sharp_1$ equivale a $Mi\sharp_2$, pois $\dfrac{2}{3}\ .\ \dfrac{32768}{59049} = \dfrac{65536}{177147}$. Como $Mi\sharp_2$ é uma oitava acima de $Mi\sharp_1$, significa que $Mi\sharp_1$ terá o dobro do comprimento. Logo, temos que $2\ .\ \dfrac{65536}{177147} = \dfrac{131072}{177147}$.

- A quinta de $Mi\sharp_1$ equivale a $Si\sharp_2$, pois $\dfrac{2}{3}\ .\ \dfrac{131072}{177147} = \dfrac{262144}{531441}$. Como $Si\sharp_2$ é uma oitava acima de $Si\sharp_1$, significa que $Si\sharp_1$ terá o dobro do comprimento. Logo, temos que $2\ .\ \dfrac{262144}{531441} = \dfrac{524288}{531441}$.

Pela aplicação do ciclo das quintas, vemos que surgem alguns problemas na construção das notas do intervalo de oitava.

Primeiramente, observemos que aparece um "$Mi\sharp$", com seu respectivo comprimento de corda $\left(\text{ou frequência, considerando o inverso da razão, igual a } \dfrac{177147}{131072}\right)$, que normalmente não figura na Escala Cromática. Em compensação, seu vizinho muito próximo (pela frequência), a nota $Fá$, fica de fora neste procedimento de construção da Escala Cromática pelo ciclo das quintas, sendo necessário a aplicação do método do "ciclo das quartas", que também é utilizado para encontrar as notas da Escala Pitagórica, utilizando a razão $\dfrac{3}{4}$ (fração do comprimento da corda), que em frequência equivale a $\dfrac{4}{3}$.

Assim, para encontrar a nota $Fá$ devemos fazer:

- A quarta de $Dó_1$ equivale a $Fá_1$, pois $\dfrac{3}{4}\ .\ 1 = \dfrac{3}{4}$.

Outra nota que não é normalmente considerada na Escala Cromática é o $Si\sharp$, que também surge no final do ciclo das quintas conforme procedemos, com sua respectiva frequência $\left(\dfrac{531441}{524288}\right)$.

Lembrando que no ciclo das quintas já efetuamos a multiplicação da razão de comprimento da corda por 2, a frequência de $Si\sharp_1$ deveria equivaler à de $Dó\sharp_1$, pois entre as notas Si e $Dó$ há apenas meio tom (Figura 3.9). Mas isso não acontece, visto que $\left(\dfrac{531441}{524288}\right) \approxeq 1,0136432647705078125 \neq 1$. Esta diferença recebe o nome de "coma pitagórica".

Utilizando-se das frequências das notas musicais, também podemos chegar ao valor da "coma pitagórica" da seguinte maneira:

O intervalo entre "Sol" e "$Fá\sharp$" é um "semitom diatônico", chamado também de "limma pitagórico":

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{729}{512}\right)} = \frac{256}{243} \quad .$$

Já o intervalo entre "$Fá\sharp$"e "$Fá$" é um "semitom cromático pitagórico", também chamado de "apótoma pitagórico":

$$\frac{\left(\frac{729}{512}\right)}{\left(\frac{4}{3}\right)} = \frac{2187}{2048} \quad .$$

A coma pitagórica é a diferença entre um semitom cromático e um semitom diatônico, resultando na razão $\frac{\left(\frac{2187}{2048}\right)}{\left(\frac{256}{243}\right)} = \frac{531441}{524288}$.

Portanto, podemos ver que a Escala Pitagórica, baseada em ciclos de intervalos de quintas e quartas produz a existência de semitons de tamanhos diferentes. Isso desagradava alguns músicos e teóricos, e no início da Renascença, a busca por escalas diferentes da pitagórica deram origem aos chamados "temperamentos", que buscavam "equalizar" o intervalo de oitava de maneira a agradar os músicos da época.

Assim, surgiram a "Escala Mesotônica" (do tom médio), os "temperamentos irregulares", também chamados "sistemas bem temperados", muito utilizado por Johann Sebastian Bach, e posteriormente, o "temperamento igual", ou "Escala Temperada", sistema adotado atualmente no ocidente, que veremos a seguir.

3.2.3 A Escala Temperada

Como vimos na Escala Pitagórica, entre uma nota e outra, temos dois valores referentes à razão entre suas frequências:

$$\frac{9}{8} = 1,125$$

e

$$\frac{256}{243} \approxeq 1,0535 \ .$$

Na época do Renascimento, houve um grande avanço científico e artístico. Na Música, era necessário transpor melodias para outras tonalidades, o que era impossível executar com a escala pitagórica pelas suas particularidades. Quando o faziam, os intervalos entre as notas pareciam soar "desafinados".

A solução encontrada pelos músicos da época foi o temperamento da escala, isto é, adotar uma escala com doze semitons igualmente distribuidos pela oitava.

Chamando de i o intervalo entre cada semitom da escala temperada, temos que um intervalo de segunda maior (2 semitons) é i^2, um intervalo de quarta (5 semitons) é i^5, um intervalo de quinta (7 semitons) é i^7, e assim por diante.

Logo, o intervalo de oitava, composto por 12 semitons será dado por i^{12}, o qual tem a relação de $\frac{2}{1}$. Desta forma, teremos que

$$i^{12} = \frac{2}{1} \ ,$$

$$i = \sqrt[12]{2} = 2^{\frac{1}{12}} \approxeq 1,05946 \ .$$

O valor de i é o valor do intervalo de um semitom temperado. Para encontrar-se qualquer outro intervalo da escala temperada podemos utilizar a fórmula

$$i_n = 2^{\frac{n}{12}} \quad , \tag{3.5}$$

em que n é o número de semitons contido no intervalo.

Na Figura 3.11, temos cada nota da escala temperada, o valor da razão entre os intervalos e o número de semitons correspondente.

Figura 3.11: Razões entre Intervalos - Escala Temperada

Nota	Razão dos intervalos	Nº de semitons
Dó	1,000	0
Dó# Réb	1,059	1
Ré	1,122	2
Ré# Mib	1,189	3
Mi	1,260	4
Fá	1.335	5
Fá# Solb	1.414	6
Sol	1,498	7
Sol# Láb	1,587	8
Lá	1,682	9
Lá# Sib	1,782	10
Si	1,888	11
Dó	2	12

Fonte: http://www.gentequeeduca.org.br/planos-de-aula/ruido-e-musica (18/11/14)

Na Escala Temperada não faz sentido falarmos de "$Mi\sharp$" ou de $Si\sharp$, pois com o espaçamento entre semitons igualado, nesta escala "$Mi\sharp$" equivale exatamente a "$Fá$", e $Si\sharp$ equivale exatamente a $Dó$.

Utilizando a Escala Temperada podemos, através de uma fórmula, calcular a frequência de uma nota musical, a partir de outra já conhecida. Por exemplo, tomando a nota $Lá$ em 440 Hz, se queremos encontrar a frequência da nota Mi imediatamente acima, ou seja, uma quinta (7 semitons) acima, fazemos

$$
\begin{aligned}
f_i &= f_0 \ . \ 2^{\frac{n}{12}} \qquad (3.6)\\
f_i &= 440 \ . \ 2^{\frac{7}{12}}\\
f_i &= 440 \ . \ 1,4983\\
f_i &= 659,25 \ Hz \ .
\end{aligned}
$$

Na Figura 3.12 temos os valores aproximados das frequências das 7 notas musicais da escala temperada, também chamadas de notas naturais.

Figura 3.12: Frequências das Notas Musicais Naturais

Notas	Freqüências
Dó	261,63 Hz
Ré	293,66 Hz
Mi	329,63 Hz
Fá	349,23 Hz
Sol	391,99 Hz
Lá	440,00 Hz
Si	493,88 Hz

Fonte: http://o-violonista.blogspot.com.br/2011/10/notas-musicais-escala-cromatica.html (20/11/14)

Por sua regularidade, a escala temperada é a base para a medida em "cents", usada na comparação entre intervalos de diferentes escalas ou para unidades menores que um semitom, como por exemplo nos sistemas micro-tonais.

O "cent" é hoje uma unidade de medida muito utilizada para medir os intervalos musicais. Foi criada pelo musicólogo e matemático inglês Alexander John Ellis (1814-1890), em 1885, e equivale a um centésimo de meio tom. Assim, no temperamento igual, uma oitava corresponde a 1200 cents. O ouvido humano possui sensibilidade suficiente para distinguir cerca de dois ou três cents.

Um cent corresponde à razão de frequências de 1,0005777. Como uma oitava é representada numericamente pelo valor 2 (dois), temos, com muito boa aproximação, verificada a igualdade

$$1,0005777^{1200} = 2 \ .$$

Assim, temos uma fórmula em que se pode determinar o valor em cents (n), entre duas notas, de frequências f_1 e f_2, que pode ser escrita como

$$n = 1200 \, . \, log_2 \left(\frac{f_1}{f_2} \right) \; . \tag{3.7}$$

O coma pitagórico corresponde a 23,46 cents, que é a diferença entre o apótoma pitagórico (113,69 cents) e o limma pitagórico (90,22 cents).

3.2.4 Acordes

Os acordes são formados a partir de uma nota mais grave, e à ela são acrescentadas as outras notas constituintes. Existem vários tipos de acordes, como a díade, a tríade, a tétrade, o acorde de apoio, etc.

O que diferencia o uso de um tipo de acorde está basicamente na quantidade de notas e na distância entre os intervalos musicais (tons e semitons), o que caracterizam sonoridades diferentes.

Os acordes podem ser divididos em "consonantes" ou "dissonantes". O primeiro é considerado um acorde estável, enquanto que o segundo refere-se a um acorde considerado instável.

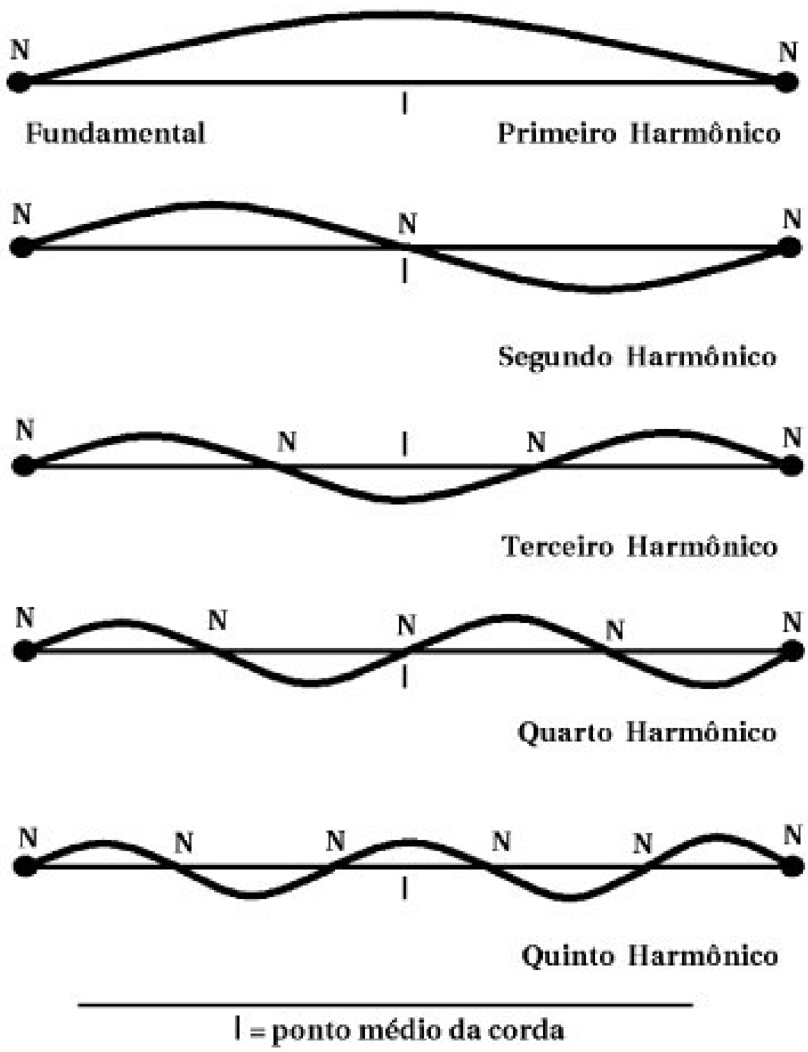
Mais restritivamente, a consonância é um grupo de sons agradáveis aos ouvidos humanos, enquanto a dissonância refere-se a um grupo de sons que executados juntos não são agradáveis. Ainda assim, os acordes dissonantes também fazem parte do estudo e da composição musical.

A tríade é um dos tipos de acordes mais utilizados. É composto de 3 notas, montado normalmente sobre a escala diatônica, com a sobreposição de duas terças.

3.2.5 Harmônicos

Em acústica, uma harmônica (ou harmônico) de uma onda é uma frequência componente do tom, e é um múltiplo inteiro da frequência fundamental (Figura 3.13).

Figura 3.13: Harmônicos



Fonte:
http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1806-11172011000300018&script=sci_arttext (16/07/14)

Em uma orquestra, tocando uma mesma música, cada músico possuirá as mesmas notas em sua partitura da música que está sendo executada, pois a frequência será a mesma para todos os instrumentos, chamada de "frequência fundamental". Porém, esta frequência fundamental pode ser enriquecida com diversos "harmônicos", dependendo das características de cada instrumento.

Por exemplo, a flauta doce é um dos instrumentos que possui a sonoridade mais pura entre todos, por isso sua quantidade de harmônicos é mínima. Poucos harmônicos existem nos instrumentos de percussão e em alguns "metais". Já os instrumentos que possuem uma vasta gama de harmônicos são os instrumentos de corda e, consequentemente, apresentam uma onda mais complexa.

Para exemplificarmos, seja f $(100Hz)$ a frequência de uma onda senoidal. Então, as harmônicas referentes à f são $2f$, $3f$, $4f$, etc. (Tabela 3.2).

Tabela 3.2: Amostra de Frequências e de Harmônicas

ordem de frequência	frequência em Hz	nome da frequência	nome da harmônica
$1f$	$100Hz$	fundamental	1^a harmônica
$2f$	$200Hz$	primeiro sobretom	2^a harmônica
$3f$	$300Hz$	segundo sobretom	3^a harmônica

Fonte: o próprio autor

Os múltiplos não inteiros de uma frequência fundamental são chamados de "sobretons desarmônicos" ou "sobretons interharmônicos".

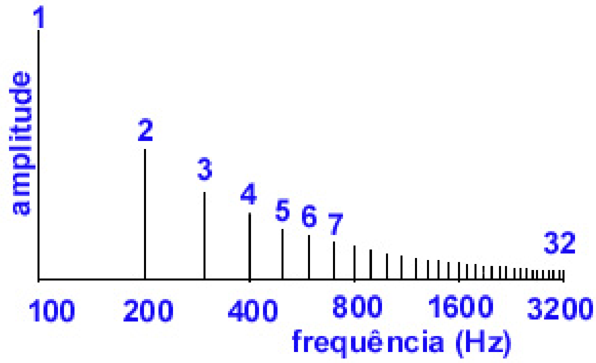
3.2.6 Timbre

Em Música, o timbre é a característica sonora que permite distinguir sons de mesma frequência, porém produzidos por fontes sonoras diferentes (instrumentos). Sendo um objeto de estudo da psicoacústica, o timbre e a forma como ouvimos os sons influenciam nossa diferenciação sonora dos instrumentos que os emitem.

As amplitudes e o posicionamento das harmônicas determinam diferentes timbres para os instrumentos musicais. Para a percepção distinta dos sons de instrumentos tocados em um determinado intervalo de tempo, dependemos das trajetórias separadas dos sobretons desses instrumentos.

Apesar das amplitudes variarem, de um modo geral, as harmônicas mais elevadas terão amplitudes cada vez menores (Figura 3.14).

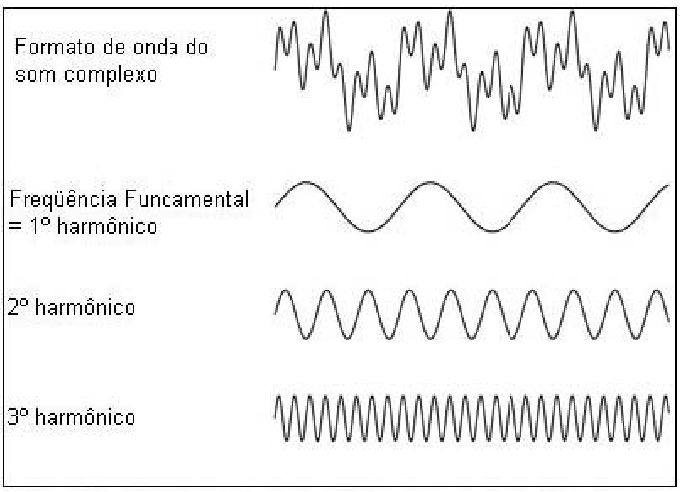
Figura 3.14: Amostra de harmônicas de um som com uma frequência fundamental de 100 Hz



Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Harmônicos (13/07/14)

Quando uma corda, ou uma membrana, um tubo ou outro objeto capaz de produzir sons entra em vibração, uma série de ondas senoidais é produzida, tanto da frequência fundamental quanto das várias frequências harmônicas resultantes, resultando em um som complexo. Ao somar-se a amplitude da frequência fundamental às amplitudes dos harmônicos, a composição da forma de onda resultante não será mais senoidal, mas sim uma onda irregular, com cristas e vales (Figura 3.15).

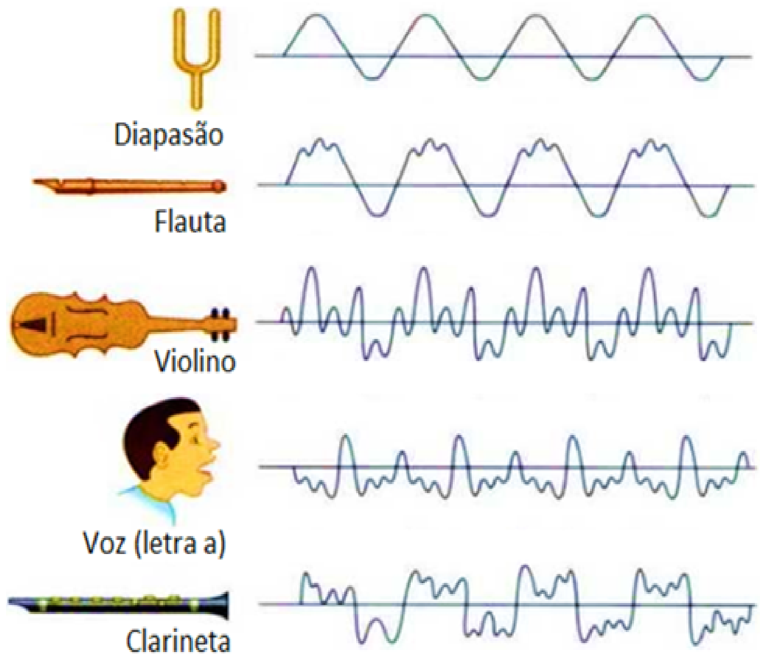
Figura 3.15: O Formato de Onda de um Som Complexo e seus Harmônicos Constituintes



Fonte: http://www.ib.usp.br/ fvrodrigues/Fisiologia_da_musica.htm (17/11/14)

Como o timbre de cada instrumento (ou a voz humana) recebe influência da combinação das amplitudes, suas formas de onda também serão distintas entre si. O formato de onda do som produzido por um diapasão ("$Lá$" em 440 Hz) é um dos que mais se aproxima de uma senóide (Figura 3.16).

Figura 3.16: Amostra de Formatos de Onda para Diversos Timbres



Fonte: http://www.descomplicandoamusica.com/timbre/ (17/11/14)

Além da forma de onda, o "envelope sonoro" também é uma característica importantíssima na definição da procedência do instrumento que está emitindo o som. O envelope sonoro, ou "envoltória sonora" é basicamente composto por quatro momentos: ataque, decaimento, sustentação e relaxamento. Por isso, é conhecido pela sigla "ADSR".

O ataque é o início de cada nota musical, o decaimento de intensidade é o momento posterior ao ataque, antes de se estabilizar. A sustentação corresponde ao tempo de duração da nota musical, e o relaxamento é o final da nota, da diminuição da intensidade sonora até o seu desaparecimento completo.

3.2.7 Compasso

O compasso é a duração em segundos (ou fração de segundos) de uma nota musical. É uma forma de divisão em grupos dos sons de uma composição musical, com base em pulsos e repousos. Alguns exemplos de compassos são o semibreve (um tempo), mínima (meio tempo), semínima (um quarto de tempo), colcheia (um oitavo de tempo), semicolcheia $\left(\frac{1}{16}\text{ de tempo}\right)$, fusa $\left(\frac{1}{32}\text{ de tempo}\right)$ e semifusa $\left(\frac{1}{64}\text{ de tempo}\right)$, ilustrados na Figura 3.17.

Figura 3.17: Exemplos de Compassos

Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/Nota (13/07/14)

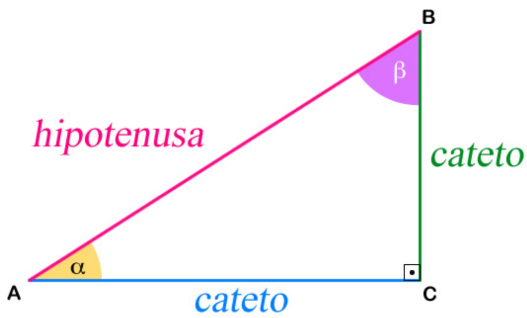
4 TRIGONOMETRIA - FUNDAMENTOS

Neste capítulo serão estudados os fundamentos elementares de Trigonometria. Alguns conceitos expostos não serão diretamente utilizados nas atividades propostas, mas estão incluídos para que o referido texto sirva de base de consulta para o professor, e visto que fazem parte dos conteúdos básicos de Trigonometria a serem ministrados no Ensino Médio.

4.1 O TRIÂNGULO RETÂNGULO

Um triângulo retângulo é aquele que possui, entre seus ângulos internos, um de medida igual a 90^o, chamado de ângulo reto. Portanto, dois de seus lados serão perpendiculares entre si, e são chamados de catetos. O terceiro lado recebe o nome de hipotenusa.

Figura 4.1: Triângulo Retângulo



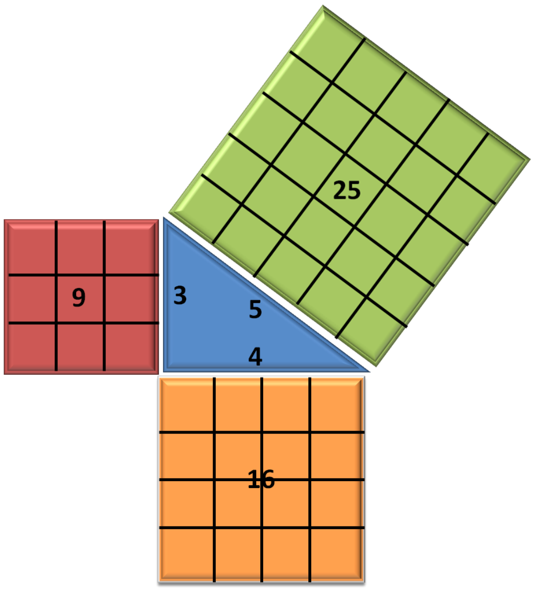
Fonte: http://brainly.com.br/tarefa/517024 (22/11/14)

Segundo Lima em [34], "O Teorema de Pitágoras é, de fato, uma proposição de importância crucial na Matemática e merece todo o destaque que a ele se possa dar", e pode-se enunciá-lo como:

> "A área do quadrado cujo lado é a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma das áreas dos quadrados que têm como lados cada um dos catetos" [34].

Podemos ver na Figura 4.2 uma representação gráfica da validade do Teorema de Pitágoras para o caso do "Triângulo Pitagórico" de catetos de medida 3 e 4 unidades, e cuja hipotenusa mede 5 unidades. Como já vimos na seção anterior, esta tríade (3,4,5) é o primeiro terno pitagórico.

Figura 4.2: Triângulo Retângulo Pitagórico e o Teorema de Pitágoras



Fonte:
http://www.enviarminewsletter.com/publico/mensaje.php?id=202&cl=55&mail=tenisalbamonte%40yahoo.com.ar (22/11/14)

No caso do Triângulo Pitagórico, temos que

$$5^2 = 3^2 + 4^2 \ .$$

4.1.1 Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo

Tomando-se um dos ângulos agudos do triângulo e chamando-o de ângulo α, definimos como "cateto oposto ao ângulo α" o lado do triângulo situado à frente deste ângulo. O lado do triângulo que forma com a hipotenusa o ângulo α é chamado de "cateto adjacente ao ângulo α".

A partir de um triângulo retângulo foram definidas algumas relações, chamadas de "razões trigonométricas": seno, cosseno e tangente.

Chamando os ângulos internos não retos de um triângulo retângulo de α e β, a relação trigonométrica seno é definida como sendo a razão entre o cateto oposto ao ângulo α e a hipotenusa deste triângulo. Assim, o seno do ângulo α é dado por:

$$sen\ \alpha = \frac{medida\ \ do\ \ cateto\ \ oposto\ \ ao\ \ \hat{a}ngulo\,\alpha}{medida\ \ da\ \ hipotenusa}\ .$$

A relação trigonométrica cosseno é definida como sendo a razão entre o cateto adjacente ao ângulo α e a hipotenusa deste triângulo. Assim, o cosseno do ângulo α é dado por:

$$cos\ \alpha = \frac{medida\ \ do\ \ cateto\ \ adjacente\ \ ao\ \ \hat{a}ngulo\,\alpha}{medida\ \ da\ \ hipotenusa}\ .$$

A razão trigonométrica tangente é dada por:

$$tg\ \alpha = \frac{medida\ \ do\ \ cateto\ \ oposto\ \ ao\ \ \hat{a}ngulo\,\alpha}{medida\ \ do\ \ cateto\ \ adjacente\ \ ao\ \ \hat{a}ngulo\,\alpha}\ .$$

Como

$$\frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} = \frac{cat.\ op.\ a\ \alpha}{hip.}\,.\frac{hip.}{cat.\ adj.\ a\ \alpha} = \frac{cat.\ op.\ a\ \alpha}{cat.\ adj.\ a\ \alpha}\ ,$$

temos que

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha}\ . \tag{4.1}$$

Para quaisquer ângulos α e β, como definidos acima, em um triângulo retângulo, também valem as consequências

$$sen\ \alpha = cos\ \beta\ \ e\ \ sen\ \beta = cos\ \alpha\ ,$$

o que nos leva à relação

$$sen\ \alpha = cos(90^o - \alpha)\ , \tag{4.2}$$

ou seja, "o seno de um ângulo é igual ao cosseno do seu complementar[1]".

No triângulo retângulo, os ângulos agudos mais utilizados são chamados de "ângulos notáveis", e seus valores de seno, cosseno e tangente podem ser vistos na Tabela 4.1:

Tabela 4.1: Ângulos Notáveis

	30^o	45^o	60^o
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: o próprio autor

Como, ao determinar o valor do seno, cosseno ou da tangente de um ângulo inteiro em um triângulo retângulo, este ângulo não ultrapassará 90^0, a Figura 4.3 apresenta-nos todos esses valores.

[1]Dois ângulos são "complementares" quando a soma de suas medidas é 90^o.

Figura 4.3: Tábua de Valores de Seno, Cosseno e Tangente Para Ângulos entre 1^o e 90^o

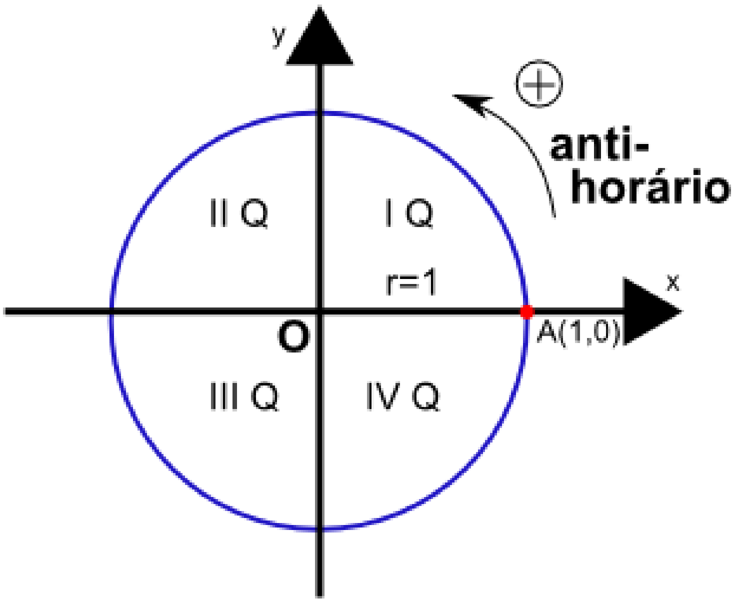
Ângulo	Sen	Cos	Tg	Ângulo	Sen	Cos	Tg
1°	0,0175	0,9998	0,0175	46°	0,7193	0,6947	1,0355
2°	0,0349	0,9994	0,0349	47°	0,7314	0,682	1,0724
3°	0,0523	0,9986	0,0524	48°	0,7431	0,6691	1,1106
4°	0,0698	0,9976	0,0699	49°	0,7547	0,6561	1,1504
5°	0,0872	0,9962	0,0875	50°	0,766	0,6428	1,1918
6°	0,1045	0,9945	0,1051	51°	0,7771	0,6293	1,2349
7°	0,1219	0,9925	0,1228	52°	0,788	0,6157	1,2799
8°	0,1392	0,9903	0,1405	53°	0,7986	0,6018	1,327
9°	0,1564	0,9877	0,1584	54°	0,809	0,5878	1,3764
10°	0,1736	0,9848	0,1763	55°	0,8192	0,5736	1,4281
11°	0,1908	0,9816	0,1944	56°	0,829	0,5592	1,4826
12°	0,2079	0,9781	0,2126	57°	0,8387	0,5446	1,5399
13°	0,225	0,9744	0,2309	58°	0,848	0,5299	1,6003
14°	0,2419	0,9703	0,2493	59°	0,8572	0,515	1,6643
15°	0,2588	0,9659	0,2679	60°	0,866	0,5	1,7321
16°	0,2756	0,9613	0,2867	61°	0,8746	0,4848	1,804
17°	0,2924	0,9563	0,3057	62°	0,8829	0,4695	1,8807
18°	0,309	0,9511	0,3249	63°	0,891	0,454	1,9626
19°	0,3256	0,9455	0,3443	64°	0,8988	0,4384	2,0503
20°	0,342	0,9397	0,364	65°	0,9063	0,4226	2,1445
21°	0,3584	0,9336	0,3839	66°	0,9135	0,4067	2,246
22°	0,3746	0,9272	0,404	67°	0,9205	0,3907	2,3559
23°	0,3907	0,9205	0,4245	68°	0,9272	0,3746	2,4751
24°	0,4067	0,9135	0,4452	69°	0,9336	0,3584	2,6051
25°	0,4226	0,9063	0,4663	70°	0,9397	0,342	2,7475
26°	0,4384	0,8988	0,4877	71°	0,9455	0,3256	2,9042
27°	0,454	0,891	0,5095	72°	0,9511	0,309	3,0777
28°	0,4695	0,8829	0,5317	73°	0,9563	0,2924	3,2709
29°	0,4848	0,8746	0,5543	74°	0,9613	0,2756	3,4874
30°	0,5	0,866	0,5774	75°	0,9659	0,2588	3,7321
31°	0,515	0,8572	0,6009	76°	0,9703	0,2419	4,0108
32°	0,5299	0,848	0,6249	77°	0,9744	0,225	4,3315
33°	0,5446	0,8387	0,6494	78°	0,9781	0,2079	4,7046
34°	0,5592	0,829	0,6745	79°	0,9816	0,1908	5,1446
35°	0,5736	0,8192	0,7002	80°	0,9848	0,1736	5,6713
36°	0,5878	0,809	0,7265	81°	0,9877	0,1564	6,3138
37°	0,6018	0,7986	0,7536	82°	0,9903	0,1392	7,1154
38°	0,6157	0,788	0,7813	83°	0,9925	0,1219	8,1443
39°	0,6293	0,7771	0,8098	84°	0,9945	0,1045	9,5144
40°	0,6428	0,766	0,8391	85°	0,9962	0,0872	11,4301
41°	0,6561	0,7547	0,8693	86°	0,9976	0,0698	14,3007
42°	0,6691	0,7431	0,9004	87°	0,9986	0,0523	19,0811
43°	0,682	0,7314	0,9325	88°	0,9994	0,0349	28,6363
44°	0,6947	0,7193	0,9657	89°	0,9998	0,0175	57,29
45°	0,7071	0,7071	1	90°	1	0	-

Fonte: http://www.brasilescola.com/matematica/seno-cosseno-tangente-angulos.htm (15/12/14)

4.2 CIRCUNFERÊNCIA TRIGONOMÉTRICA

A circunferência trigonométrica é uma circunferência com centro na origem do sistema de eixos coordenados, e cujo raio mede uma unidade. Os eixos dividem a circunferência em quatro partes iguais, chamadas quadrantes. Os quadrantes são enumerados em sentido anti-horário, a partir daquele que se encontra à direita e na porção superior, conforme a divisão dos quadrantes pelos eixos (Figura 4.4).

Figura 4.4: Circunferência Trigonométrica - Quadrantes

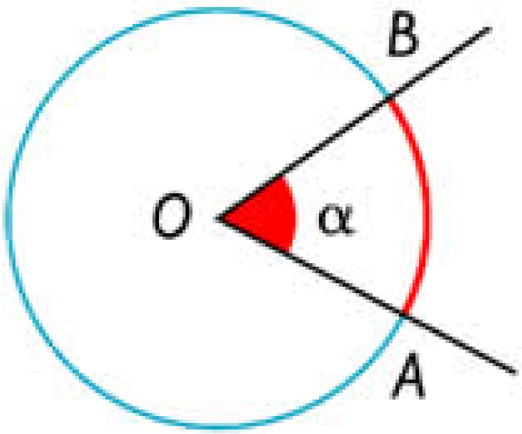


Fonte: http://rived.mec.gov.br/atividades/matematica/mundo_trigonometria/teoria/circulo.html (08/01/15)

Chamamos de ângulo central àquele cujo vértice é o centro da circunferência. Marcando dois pontos, A e B sobre a circunferência, esta fica dividida em duas partes. Podemos definir um arco de circunferência como sendo a porção da circunferência delimitada pelos pontos A e B. Ao ligarmos cada um dos pontos A e B ao centro da circunferência (em linha reta, pelos raios da circunferência), teremos definido o ângulo central correspondente ao arco delimitado pelos pontos A e B (chamamos aqui o ângulo central de α). O sentido dos arcos positivos na circunferência é também o anti-horário.

Na verdade, no caso explicitado, os pontos A e B determinam dois arcos na circunferência referida, o arco $\widehat{AB}$ e o arco $\widehat{BA}$, entendendo-se como arco $\widehat{AB}$ aquele de menor medida, enquanto que o arco $\widehat{BA}$ teria a medida maior (Figura 4.5).

Figura 4.5: Circunferência Trigonométrica - Arco e Ângulo Central



Fonte: http://www.brasilescola.com/matematica/angulos-no-circulo.htm (08/01/15)

Para facilitar nossos estudos, nos referiremos sempre ao menor dos arcos definidos por dois pontos numa circunferência, caso não seja especificado o contrário.

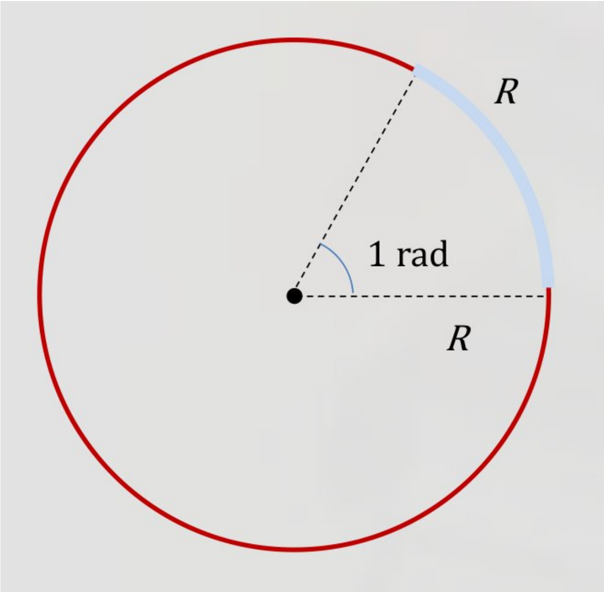
4.3 Unidades de medidas de arcos

Os ângulos (e os arcos) têm, como principais unidades de medida, o grau e o radiano.

Um grau (1^0) equivale a $\dfrac{1}{360}$ da circunferência. Logo, em cada quadrante temos 90^0.

O radiano é medido da seguinte maneira: 1 rad (1 radiano) é o valor de um ângulo que equivale à um arco de circunferência cuja medida é o próprio raio da circunferência (Figura 4.6).

Figura 4.6: 1 Radiano (1 rad)



Fonte: http://carolinadadda.pbworks.com/w/page/52505623/Artigo%20sobre%20Radianos (08/01/15)

Em qualquer circunferência, a medida em radianos de sua circunferência é de 2π rad , ou seja, de aproximadamente 6,28 unidades. Logo, para medirmos o comprimento de uma circunferência, basta utilizarmos a fórmula $C = 2\pi r$, onde C é o comprimento da circunferência e r é o raio da mesma.

Desta forma, uma volta completa numa circunferência equivale a 360^0, ou a 2π rad.

Para medirmos o comprimento de um arco de circunferência, podemos utilizar a relação

$$s = \alpha . r \quad , \tag{4.3}$$

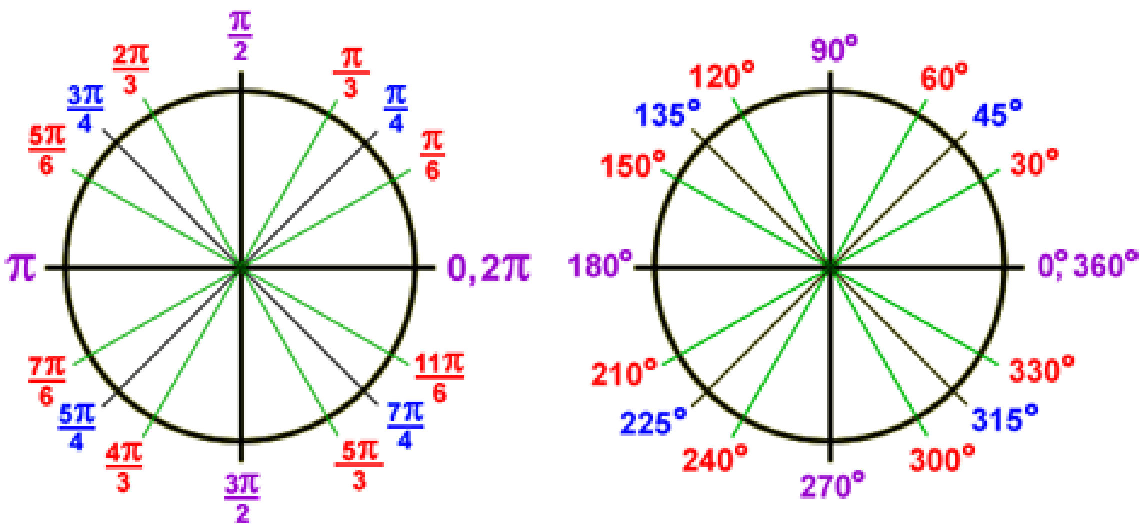
onde s é o comprimento do arco, r é o raio da circunfeência e α é o valor do ângulo central, em radianos.

No caso da circunferência trigonométrica, como seu raio é igual a 1, a expressão anterior se resume a

$$s = \alpha \quad . \tag{4.4}$$

Na Figura 4.7 temos representadas, em graus e radianos, as medidas dos principais ângulos da circunferência trigonométrica.

Figura 4.7: Graus e Radianos na Circunferência Trigonométrica

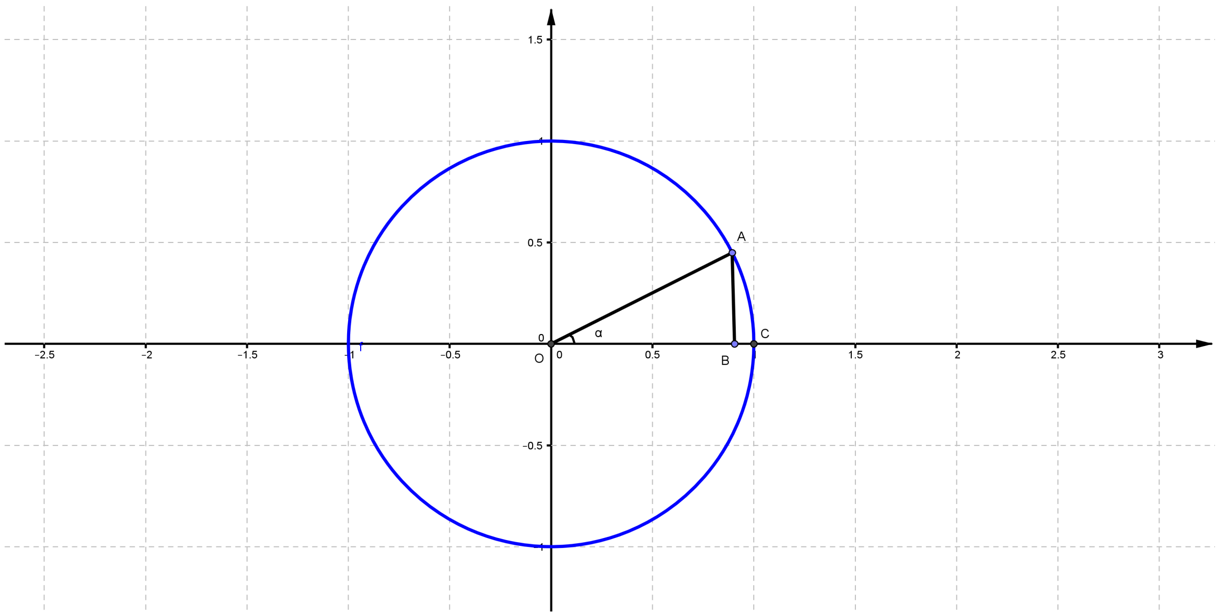


Fonte: http://navax.net.br/blog/?p=671 (08/01/15)

4.4 FUNÇÃO SENO

Numa circunferência trigonométrica, consideremos um ângulo central do primeiro quadrante, α, centrado na origem "O", formando um arco $\widehat{CA}$ correspondente na circunferência, como na Figura 4.8. Traçando uma perpendicular ao eixo horizontal a partir do ponto A, sua intersecção com o segmento $\overline{OC}$ determina o ponto B.

Figura 4.8: Função Seno na Circunferência Trigonométrica - Quadrante I (1)



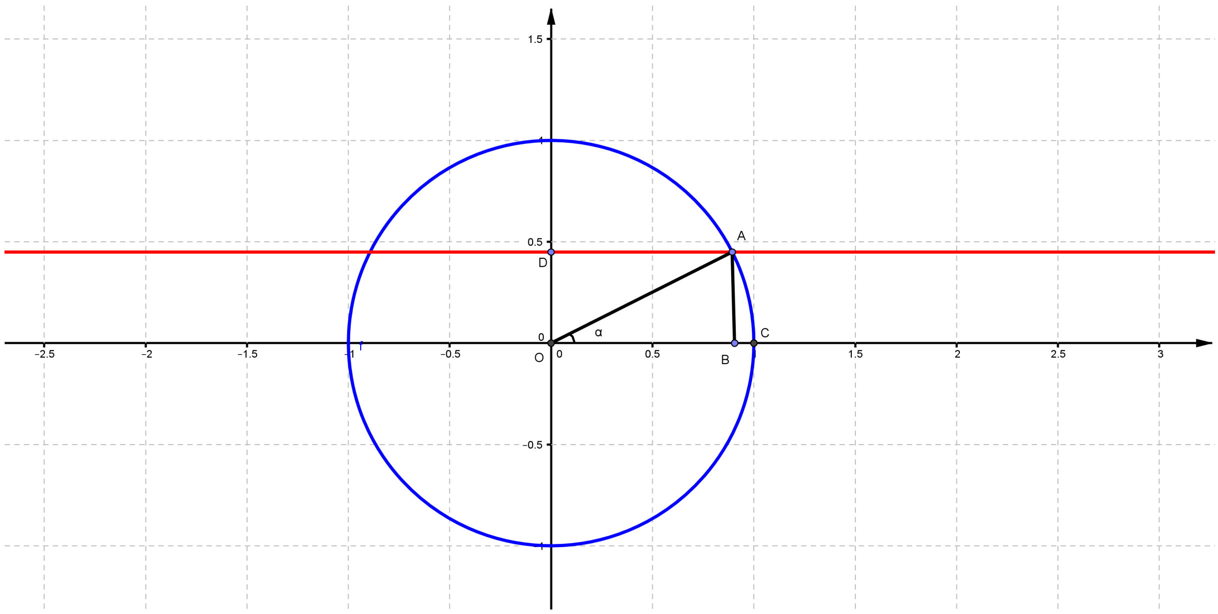
Fonte: o próprio autor

Assim, obtemos um triângulo retângulo cuja hipotenusa $\overline{AO}$ vale 1, e cujos catetos são $\overline{AB}$ e $\overline{OB}$. Desta forma, sen $\alpha = \overline{AB}/1 = \overline{AB}$.

Logo, o valor do cateto $\overline{AB}$ é o próprio valor do seno do ângulo α.

Vejamos que, se construirmos uma reta paralela ao eixo horizontal, passando pelo ponto A, o ponto em que esta se intersecta com o eixo vertical (chamemos de D), determinará o segmento $\overline{OD}$, cuja medida será exatamente igual à medida de $\overline{AB}$ (Figura 4.9).

Figura 4.9: Função Seno na Circunferência Trigonométrica - Quadrante I (2)



Fonte: o próprio autor

Utilizando as notações definidas nesta seção, segundo Iezzi em [29]:

Definição 4.1. *Dado um número real α, seja A sua imagem no ciclo trigonométrico. Denominamos seno de α (e indicamos $sen\ \alpha$) a ordenada $\overline{OD}$ do ponto A em relação ao sistema de eixos coordenados. Denominamos função seno a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real α o real $\overline{OD} = sen\ \alpha$, isto é:*

$$f(\alpha) = sen(\alpha).$$

Podemos ver que os valores de sen (α), no quadrante I , variam entre 0 e 1, conforme aumentamos o valor de α. Observe que, quando $\alpha = 0^0$, teremos $\overline{AB} = 0$.

No quadrante II, o valor de α ultrapassa 90^0, continua aumentando e $\overline{AB}$ volta a diminuir até que α alcance o valor de 180^0, onde não haverá mais a formação de um triângulo e $\overline{AB}$ voltará a valer zero.

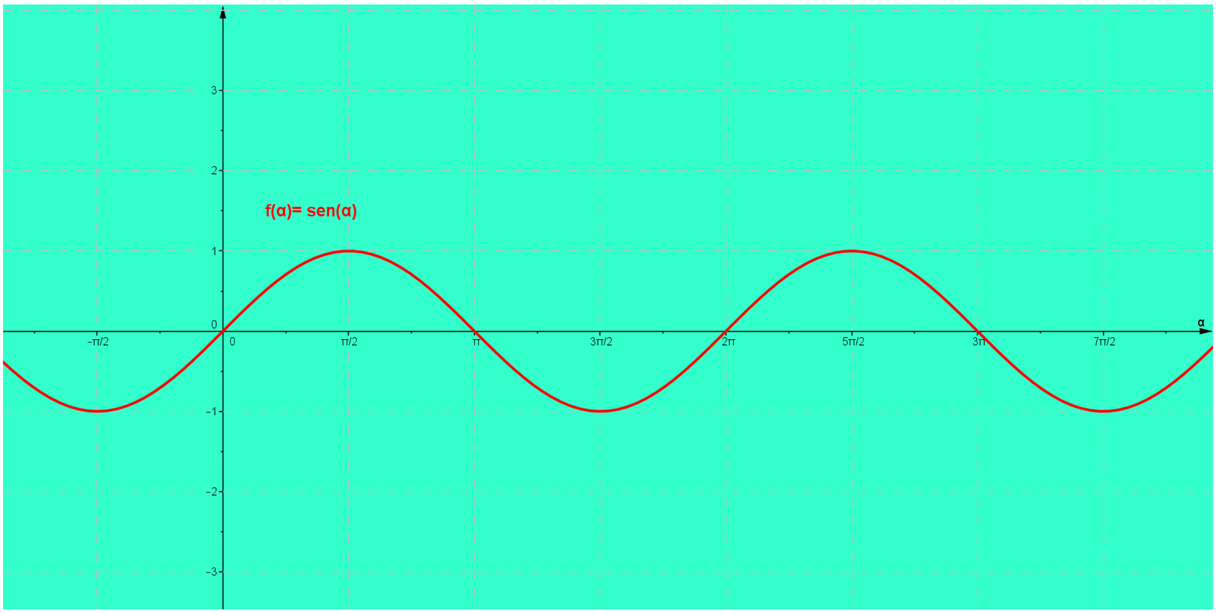
Quando o valor de α ultrapassa 180^0, temos a formação de um triângulo que pertence ao quadrante III da circunferência, e $\overline{AB}$ torna-se negativo, chegando ao mínimo de valer -1 quando α alcança o ângulo de 270^0.

Após ultrapassar os 270^0, o triângulo é formado no quadrante IV e $\overline{AB}$ volta a crescer, de -1 até culminar ao valor de zero quando α completa 360^0.

Como trabalhamos em uma circunferência, este processo é contínuo, repetindo-se a cada 360^0 ou 2π rad. A imagem da função seno é o intervalo $[-1, 1]$, sendo assim uma função limitada.

Ao transportarmos o comportamento da função f da circunferência trigonométrica para um gráfico contínuo de eixos coordenados, em que no eixo horizontal representamos o valor de α, com origem em 0 rad , e no eixo vertical representamos o valor que assume a função f, teremos a representação da senóide, o gráfico da função seno que podemos ver na Figura 4.10. Como observamos pelo gráfico, a função seno é periódica de período 2π (Veja "Funções Periódicas", no Apêndice A).

Figura 4.10: Gráfico da Função Seno



Fonte: o próprio autor

A função seno é uma função ímpar, pois $sen(-\alpha) = -sen(\alpha)$, não é injetora, pois cada valor de sua imagem possui infinitos correspondentes em seu domínio, devido à sua periodicidade, e também não é sobrejetora, pois sua imagem [-1, 1] não abrange todo o contradomínio $\mathbb{R}$.

4.5 Função Cosseno

De forma análoga à função seno, consideremos numa circunferência trigonométrica um ângulo central do primeiro quadrante, α, centrado na origem "O", formando um arco $\widehat{CA}$ correspondente na circunferência. Traçando uma perpendicular ao eixo horizontal a partir do ponto A, sua intersecção com o segmento $\overline{OC}$ determina o ponto B.

Assim, obtemos um triângulo retângulo cuja hipotenusa $\overline{AO}$ vale 1, e cujos catetos são $\overline{AB}$ e $\overline{OB}$. Desta forma, cos $\alpha = \overline{OB}/1 = \overline{OB}$.

Logo, o valor do cateto $\overline{OB}$ é o próprio valor do cosseno do ângulo α.

Utilizando as notações definidas nesta seção, segundo Iezzi em [29]:

Definição 4.2. *Dado um número real α, seja A sua imagem no ciclo trigonométrico. Denominamos cosseno de α (e indicamos cos α) a abcissa $\overline{OB}$ do ponto A em relação ao sistema de eixos coordenados. Denominamos função cosseno a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real α o real $\overline{OB} =$ cos α, isto é:*

$$f(\alpha) = cos(\alpha).$$

Os valores de cos (α), no quadrante I , diminuem gradativamente de 1 para 0, conforme aumentamos o valor de α. Observe que, quando $\alpha = 0^0$, teremos $\overline{OB} = 1$, e quando $\alpha = 90^0$, teremos $\overline{OB} = 0$.

No quadrante II, o valor de α ultrapassa 90^0, continua aumentando e $\overline{OB}$ começa então a assumir valores negativos até que α alcance o valor de 180^0, onde não haverá mais a formação de um triângulo e $\overline{OB}$ valerá -1.

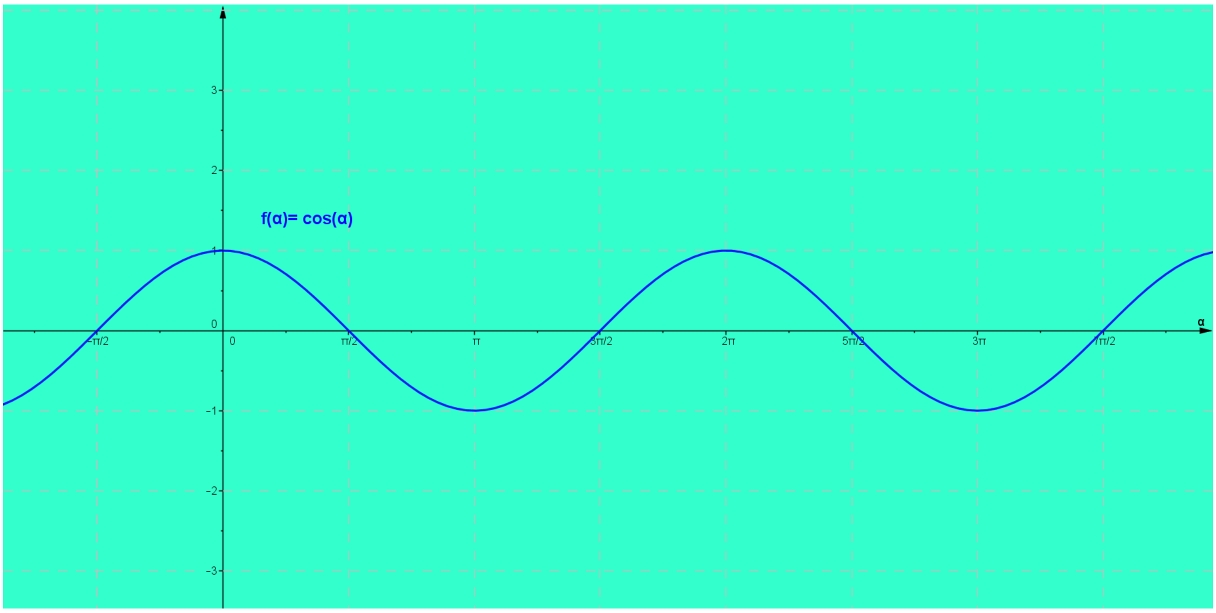
Quando o valor de α ultrapassa 180^0, temos a formação de um triângulo que pertence ao quadrante III da circunferência, e $\overline{OB}$, embora ainda negativo, volta a aumentar o seu valor, chegando a zero quando α alcança o ângulo de 270^0.

Após ultrapassar os 270^0, o triângulo é formado no quadrante IV e $\overline{OB}$ continua seu crescimento dentro de valores positivos, de 0 até chegar novamente a valer uma unidade, quando α completa 360^0.

Novamente salientamos que, na continuidade de uma circunferência, este processo se repetirá a cada 360^0 ou 2π rad. A imagem da função cosseno é o intervalo $[-1, 1]$, sendo assim uma função limitada.

Similarmente ao que fizemos com a função seno, ao transportarmos o comportamento da função f da circunferência trigonométrica para um gráfico contínuo de eixos coordenados, em que no eixo horizontal representamos o valor de α, com origem em 0 rad , e no eixo vertical representamos o valor que assume a função f, teremos o gráfico que podemos ver na Figura 4.11, no qual podemos visualizar que a função cosseno é uma função periódica de período 2π.

Figura 4.11: Gráfico da Função Cosseno



Fonte: o próprio autor

O gráfico da função cosseno também é considerado uma senóide, visto que ele possui o mesmo formato, porém está defasado com relação à onda seno no eixo horizontal:

$$cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = sen(\alpha) \ . \tag{4.5}$$

A função cosseno é uma função par, pois $cos(-\alpha) = cos(\alpha)$, não é injetora, pois cada valor de sua imagem possui infinitos correspondentes em seu domínio, visto que é periódica e, como acontece com a função seno, não é sobrejetora, pois sua imagem [-1, 1] não abrange todo o contradomínio $\mathbb{R}$.

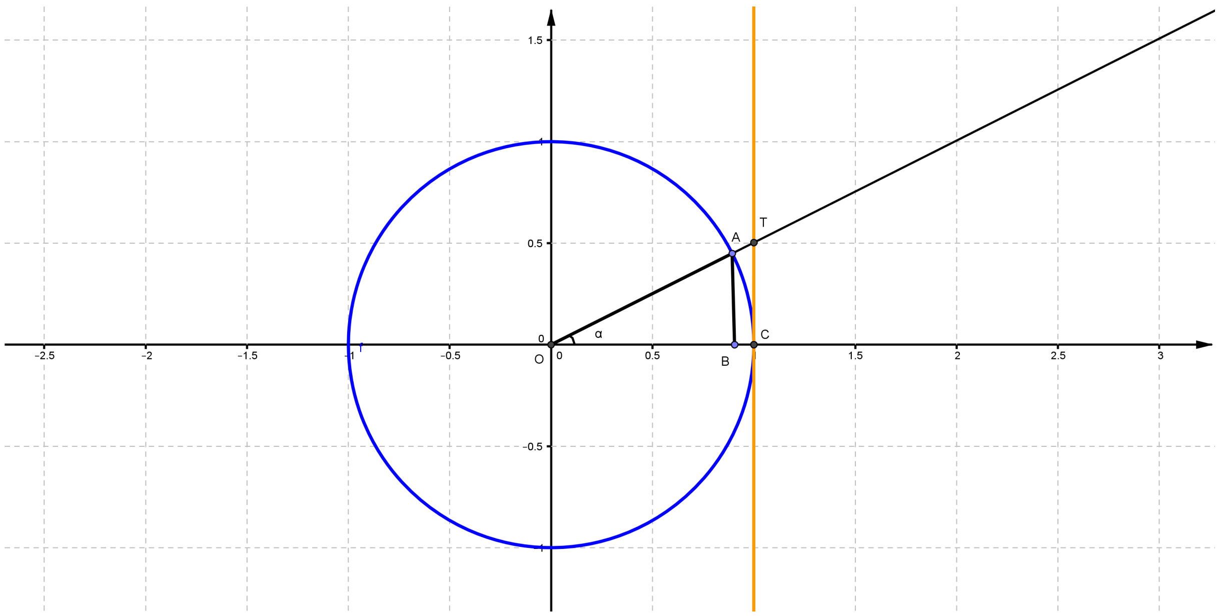
4.6 Função Tangente

Numa circunferência trigonométrica, consideremos um ângulo central do primeiro quadrante, α, centrado na origem "O", formando um arco $\widehat{CA}$ correspondente na circunferência. Traçando uma perpendicular ao eixo horizontal a partir do ponto A, sua intersecção com o segmento $\overline{OC}$ determina o ponto B.

Pelo ponto C, traçamos um outro eixo vertical, paralelo ao eixo vertical que passa pela origem da circunferência, perpendicular ao eixo horizontal da mesma. Desta maneira, este outro eixo vertical irá tangenciar[2] a circunferência no ponto C. Chamaremos este eixo vertical que passa pelo ponto C de "eixo das tangentes".

Agora, consideremos o prolongamento do segmento $\overline{OA}$, até a intersecção do mesmo com o eixo das tangentes, e denotemos este ponto de intersecção pela letra T. A posição deste ponto T no eixo das tangentes será determinada pelo ângulo α (Figura 4.12).

Figura 4.12: Função Tangente na Circunferência Trigonométrica



Fonte: o próprio autor

[2]Tangente, em Geometria, é uma reta que toca uma curva ou superfície sem cortá-la, compartilhando um único ponto com esta.

Utilizando as notações definidas nesta seção, segundo Iezzi em [29]:

Definição 4.3. *Dado um número real α, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k.\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, seja A sua imagem no ciclo trigonométrico. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{OA}$ e seja T sua intersecção com o eixo das tangentes. Denominamos tangente de α (e indicamos $tg\ \alpha$) a medida algébrica do segmento $\overline{CT}$. Denominamos função tangente a função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada real α, $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k.\pi$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, o real $\overline{CT} = tg\ \alpha$, isto é:*

$$f(\alpha) = tg(\alpha).$$

O domínio da função tangente é

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}\},$$

e a imagem é o conjunto $\mathbb{R}$. A função tangente é periódica e seu período é π.

Como os triângulos OBA e OCT são semelhantes (possuem dois ângulos congruentes), podemos estabelecer a relação

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{CT}} \quad .$$

Temos também que

$$\overline{OB} = cos(\alpha),\ \overline{AB} = sen(\alpha),\ \overline{CT} = tg(\alpha)\ \ e\ \ \overline{OC} = r = 1.$$

Portanto,

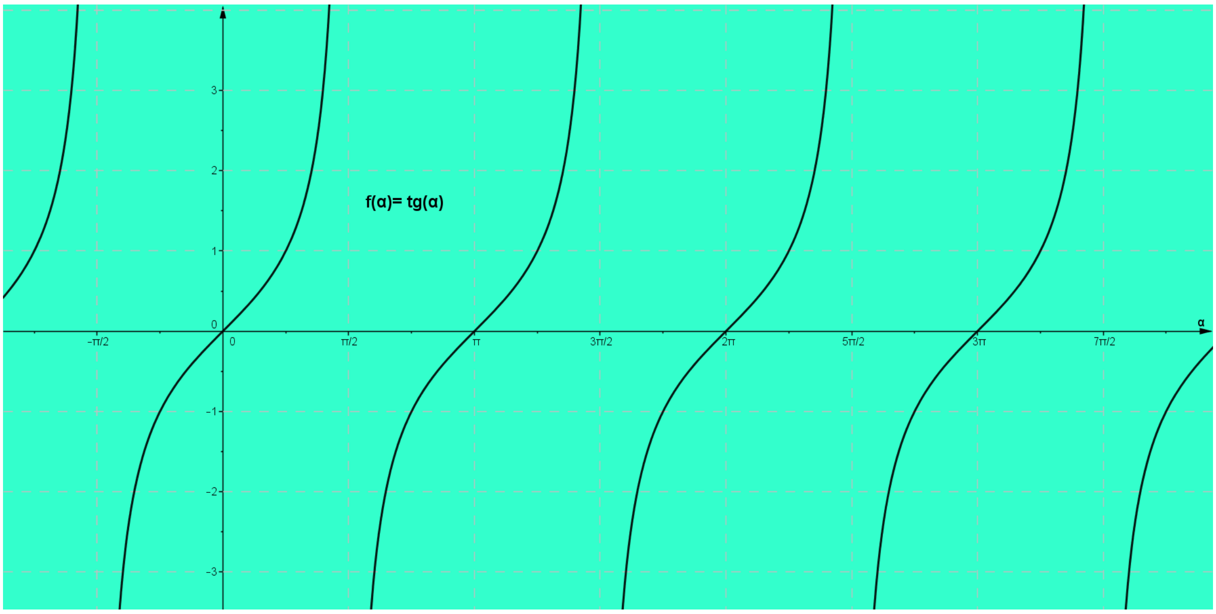
$$\frac{cos(\alpha)}{1} = \frac{sen(\alpha)}{tg(\alpha)} \implies tg(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)} \quad . \tag{4.6}$$

Podemos verificar pela relação acima que não está definida $tg(\alpha)$ para $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\ .\ \pi$, para $k \in \mathbb{Z}$, pois para estes valores teremos $cos(\alpha) = 0$.

Nos casos em que α vale 0, π ou 2π radianos, o valor da tangente será igual a zero.

Transportando o comportamento da função f da circunferência trigonométrica para um gráfico contínuo de eixos coordenados, como feito nos casos das funções seno e cosseno, podemos visualizar o comportamento da função tangente na Figura 4.13.

Figura 4.13: Gráfico da Função Tangente



Fonte: o próprio autor

A função tangente é uma função ímpar, pois $tg(-\alpha) = -tg(\alpha)$, não é injetora, pois cada valor de sua imagem possui infinitos correspondentes em seu domínio, pela sua periodicidade e, ao contrário das funções seno e cosseno, é uma função sobrejetora, pois sua imagem é todo o $\mathbb{R}$.

4.7 A SENÓIDE E A FORMA GERAL PARA A FUNÇÃO SENO

Uma função do tipo seno produz um gráfico cujo traçado é uma onda, que é chamada de "senóide", como a representada na Figura 4.10. Porém, existem infinitas funções do tipo seno, que também geram outras senóides.

Portanto, é necessária uma "forma geral" para a função seno, que podemos escrever como

$$F(\alpha) = a.sen(b.\alpha + m) + k \quad , \tag{4.7}$$

em que $\alpha, a, b, m, k \in \mathbb{R}$.

Claramente, no caso em que $a = 1,\ b = 1,\ m = 0$ e $k = 0$, temos a função $f(\alpha) = sen(\alpha)$.

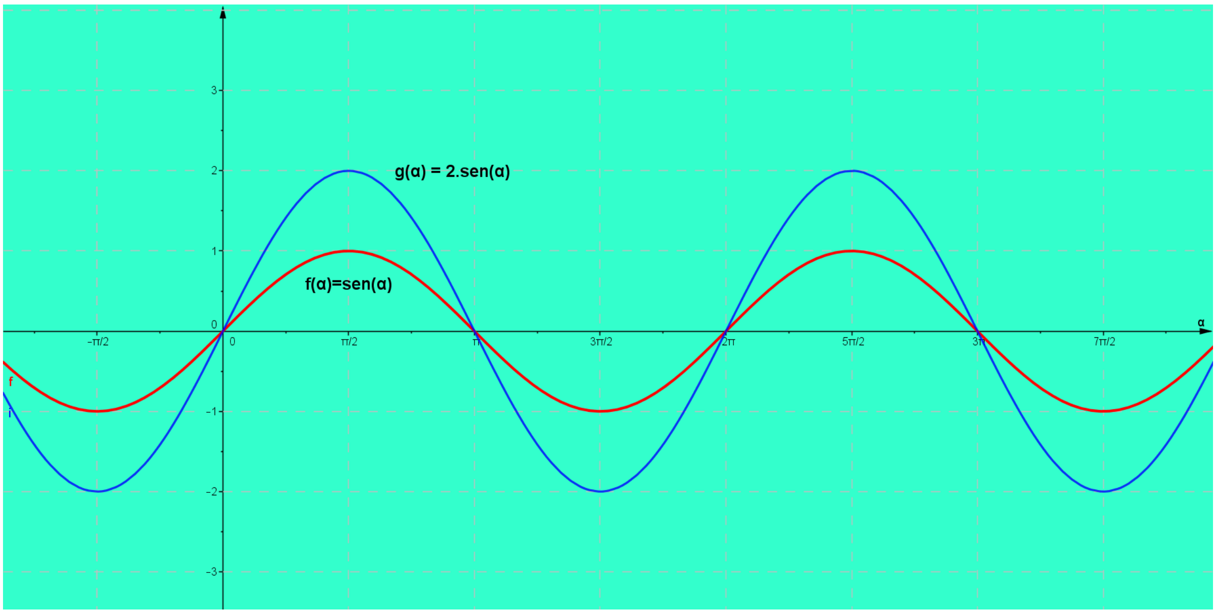
Em (4.7), os elementos da forma geral da função seno são

α : ângulo
a : amplitude
b : período
m : translação horizontal
k : translação vertical

4.7.1 Amplitude

A amplitude de uma senóide, representada pela letra a, é um fator que irá ampliar ou reduzir a amplitude original da função $f(\alpha) = sen(\alpha)$, que pertence ao intervalo [-1,1]. Isso dependerá se $a > 1$ ou se $a < 1$, em comparação com a função seno. Vejamos um exemplo com o gráfico da função $f(\alpha) = 2.sen(\alpha)$ em comparação com a função $f(\alpha) = sen(\alpha)$ na Figura 4.14.

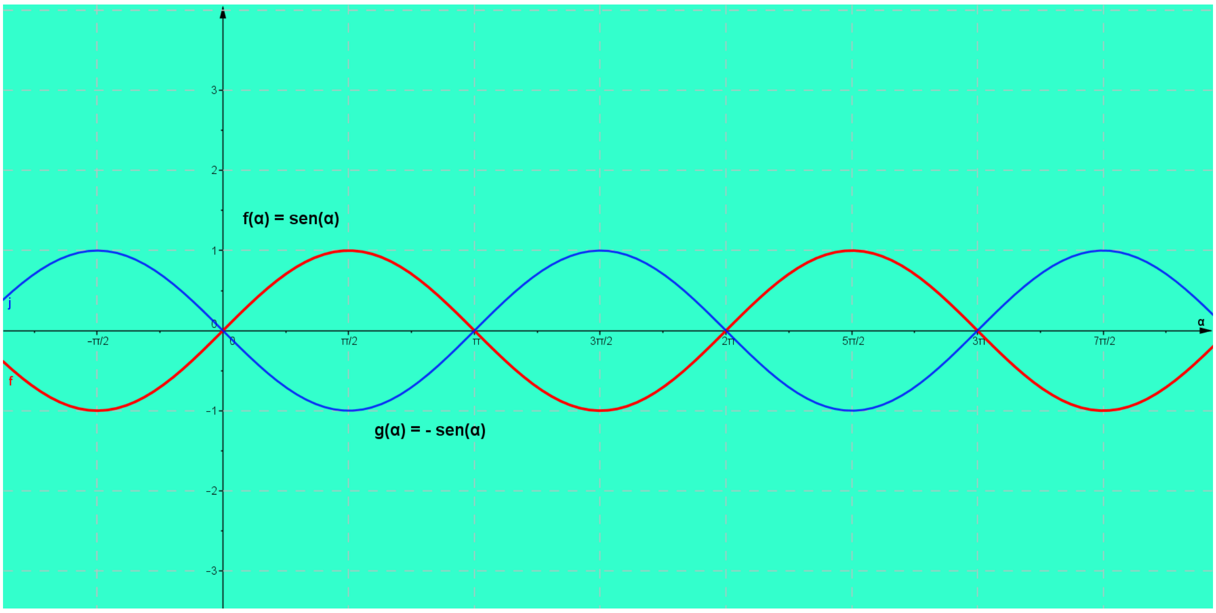
Figura 4.14: Gráficos das Funções $g(\alpha) = 2.sen(\alpha)$ e $f(\alpha) = sen(\alpha)$



Fonte: o próprio autor

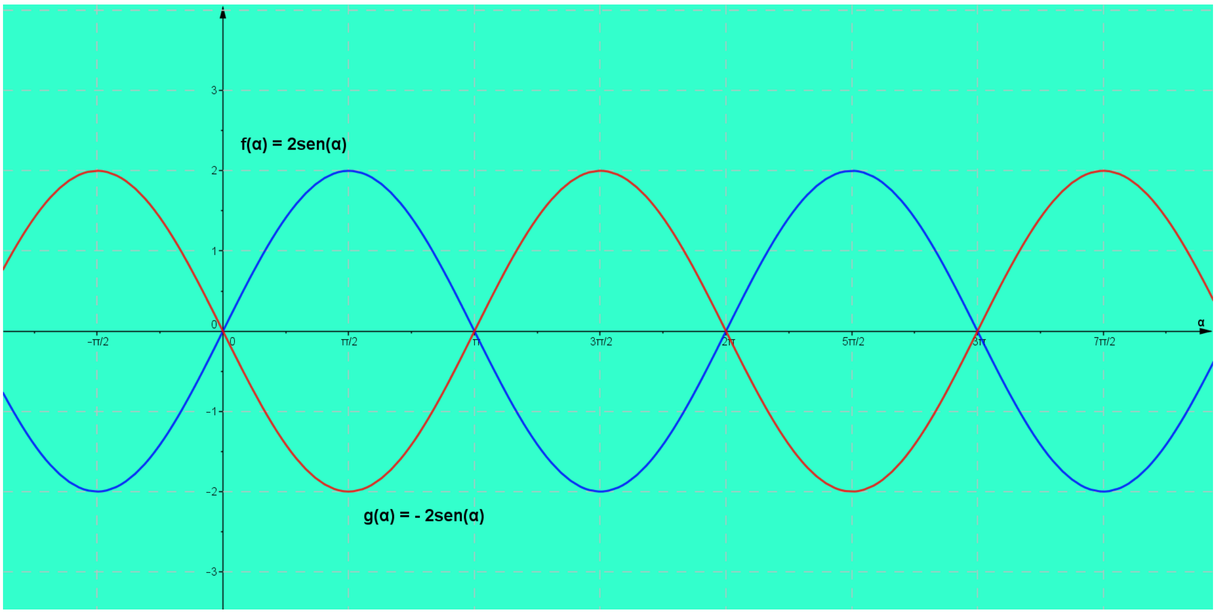
Já no caso em que a for negativo, o gráfico da senóide sofrerá uma reflexão em relação ao eixo horizontal, quando comparado ao gráfico da função oposta. Podemos ver um exemplo com os gráficos das funções $f(\alpha) = -sen(\alpha)$ e $f(\alpha) = -2.sen(\alpha)$ em comparação com as funções $f(\alpha) = sen(\alpha)$ e $f(\alpha) = 2.sen(\alpha)$ nas figuras 4.15 e 4.16.

Figura 4.15: Gráficos das Funções $g(\alpha) = -sen(\alpha)$ e $f(\alpha) = sen(\alpha)$



Fonte: o próprio autor

Figura 4.16: Gráficos das Funções $g(\alpha) = -2.sen(\alpha)$ e $f(\alpha) = 2.sen(\alpha)$



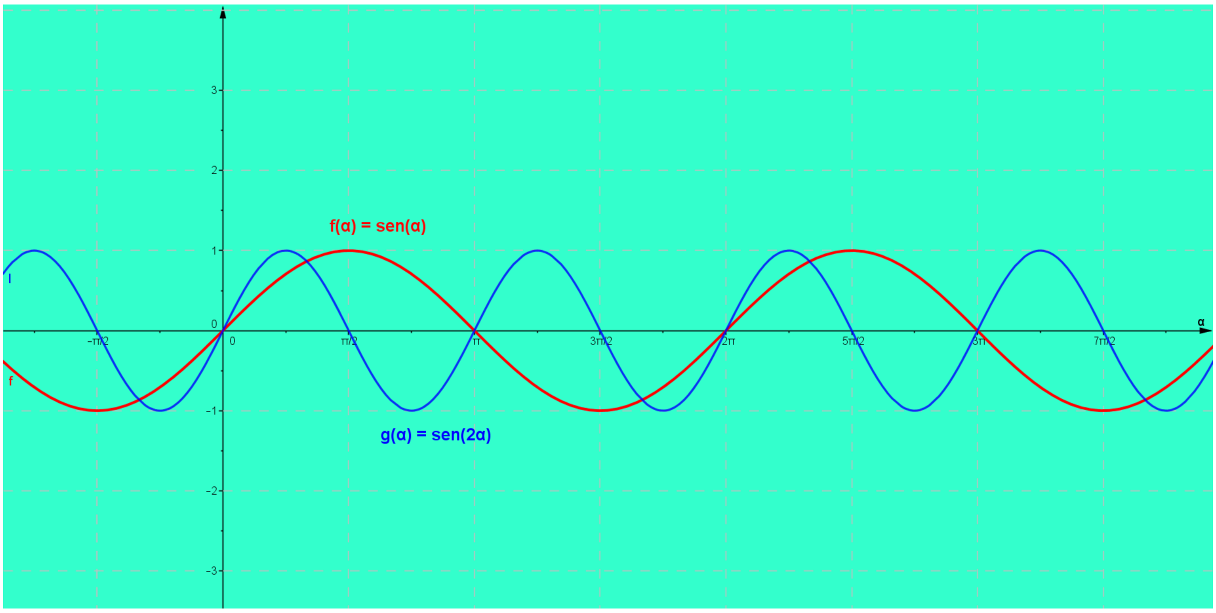
Fonte: o próprio autor

4.7.2 Período

Na forma geral da função seno, b é o coeficiente que provoca uma mudança no período da função, chamado de número de onda, para $b > 0$. Temos que $f(\alpha) = sen(\alpha)$ é uma função de período 2π, enquanto $f(\alpha) = sen(b.\alpha)$ é uma função de período $\dfrac{2\pi}{b}$.

Como exemplo, na Figura 4.17 temos o gráfico da função $g(\alpha) = sen(2.\alpha)$, juntamente com o gráfico da função $f(\alpha) = sen(\alpha)$.

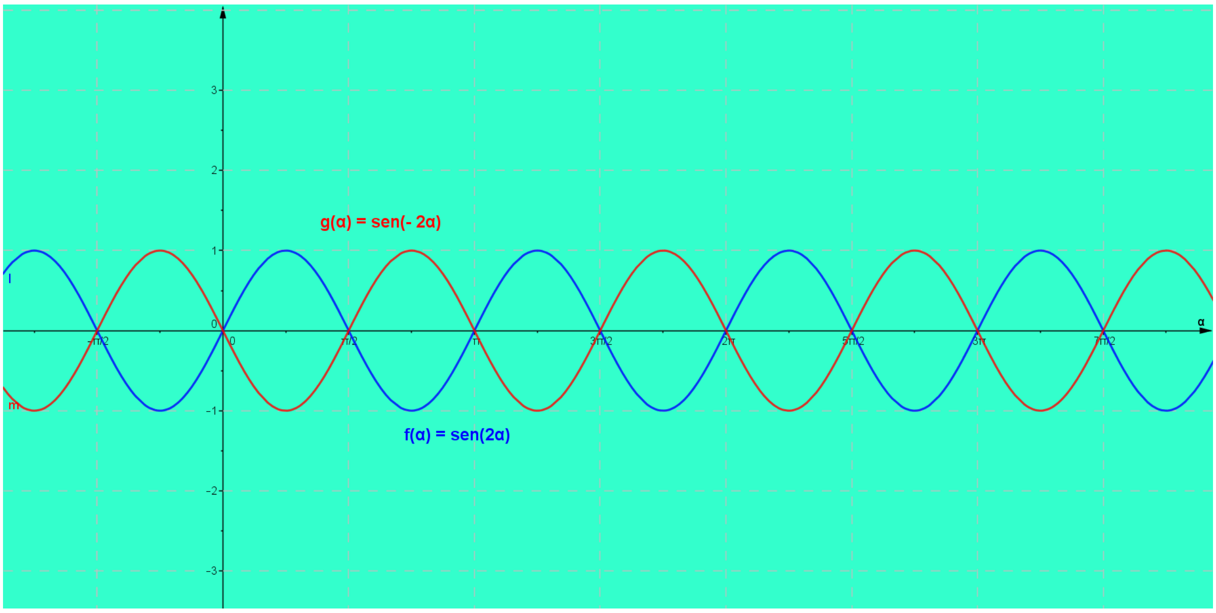
Figura 4.17: Gráficos das Funções $g(\alpha) = sen(2.\alpha)$ e $f(\alpha) = sen(\alpha)$



Fonte: o próprio autor

Quando $b < 0$, a exemplo do que acontece com a amplitude, ocorre uma reflexão em relação ao eixo horizontal, como podemos ver na Figura 4.18, onde temos o gráfico da função $g(\alpha) = sen(-2.\alpha)$, juntamente com o gráfico da função $f(\alpha) = sen(2.\alpha)$.

Figura 4.18: Gráficos das Funções $g(\alpha) = sen(-2.\alpha)$ e $f(\alpha) = sen(2.\alpha)$



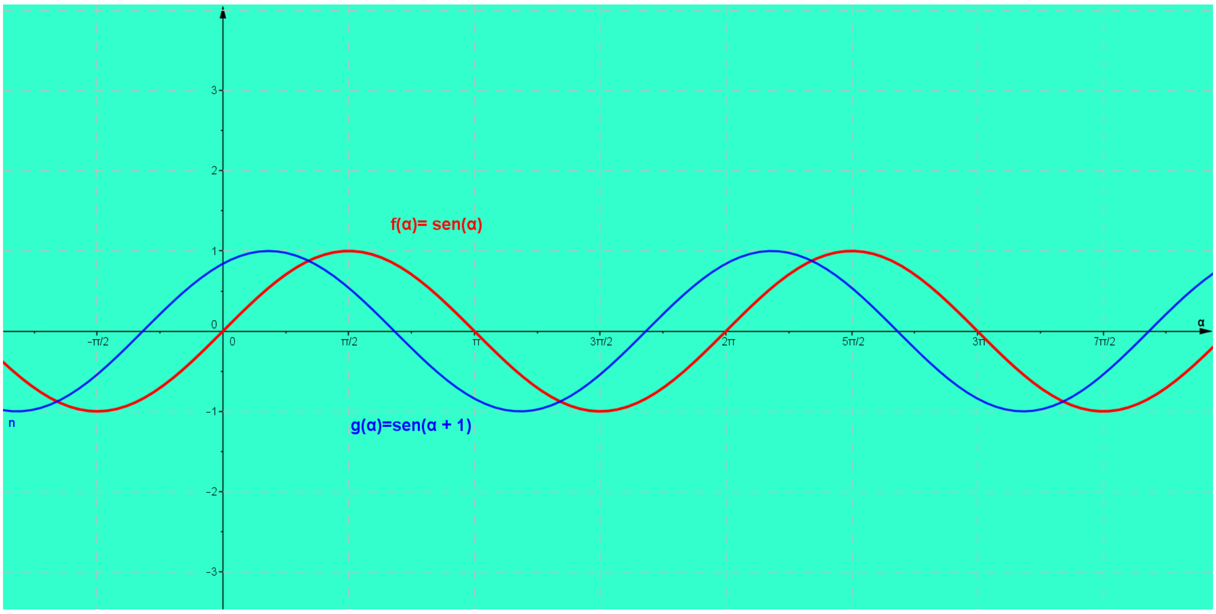
Fonte: o próprio autor

4.7.3 Translação Horizontal

O papel do coeficiente m na forma geral da função seno é o de efetuar no gráfico da senóide uma translação horizontal de $-m$ em relação à função $f(\alpha) = sen(\alpha)$.

Como exemplos, a Figura 4.19 apresenta os gráficos das funções $g(\alpha) = sen(\alpha + 1)$ e $f(\alpha) = sen(\alpha)$.

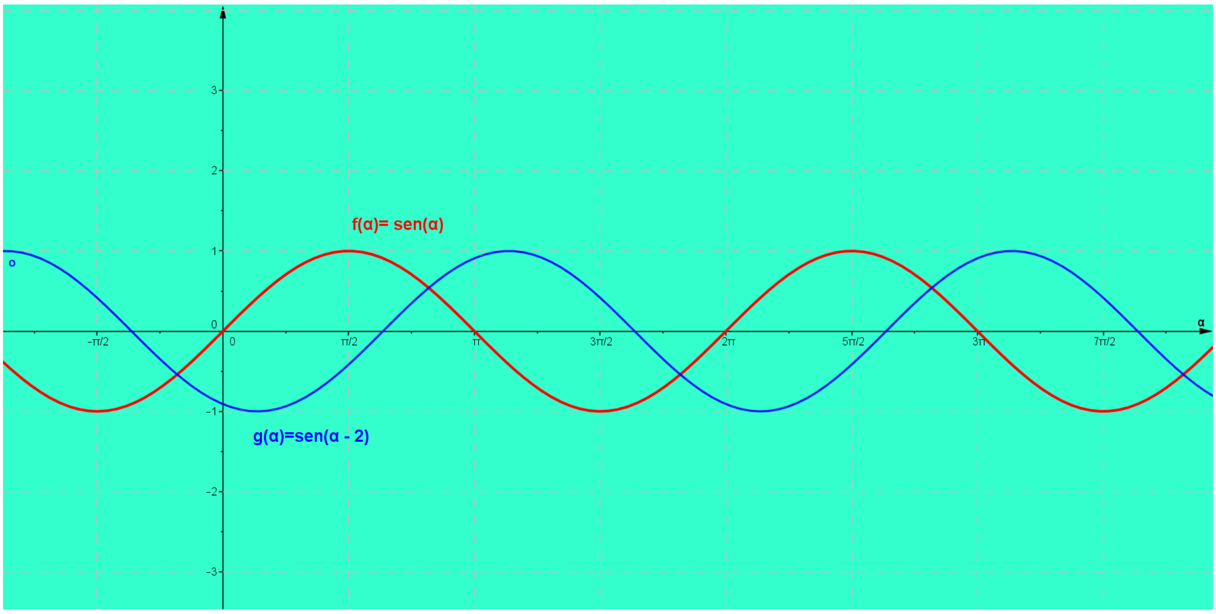
Figura 4.19: Gráficos das Funções $g(\alpha) = sen(\alpha + 1)$ e $f(\alpha) = sen(\alpha)$



Fonte: o próprio autor

Na Figura 4.20, temos o gráfico da função $g(\alpha) = sen(\alpha - 2)$, juntamente com o gráfico da função $f(\alpha) = sen(\alpha)$.

Figura 4.20: Gráficos das Funções $g(\alpha) = sen(\alpha - 2)$ e $f(\alpha) = sen(\alpha)$



Fonte: o próprio autor

O coeficiente m que fornece a translação horizontal da senóide no gráfico da função seno pode ser decomposto da seguinte maneira:

$$m = -(\omega.t + \varphi) \ , \tag{4.8}$$

em que

ω : frequência angular
t : tempo (segundos)
φ : mudança de fase

A frequência angular, também chamada de velocidade angular, é uma medida escalar da velocidade de rotação, e é dada por

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi.f \ , \tag{4.9}$$

em que

T : período
f : frequência (normal)[3]

A frequência angular é uma medida escalar da velocidade de rotação. Lembremos que uma revolução é igual a 2π radianos. Assim, pelo SI (Sistema Internacional de Unidades), a frequência angular é medida em radianos por segundo (rad/s), ainda que uma direção tenha que ser especificada.

O coeficiente φ irá determinar a diferença de fase entre duas ondas que tenham mesma frequência e em referência ao mesmo ponto no tempo. Esta diferença é expressa em radianos. Dizemos que se a diferença de fase for de 0 rad, as ondas estarão em fase, e uma interferência construtiva ocorrerá entre elas. Porém, se a diferença de fase for de π rad, uma interferência destrutiva irá ocorrer entre as duas ondas.

A diferença de fase é o que ocorre quando temos uma translação horizontal do gráfico da senóide, no caso de nossos exemplos cujas figuras são 4.19 e 4.20.

O período é relacionado à frequência angular por

$$b = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi.f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \ , \tag{4.10}$$

em que

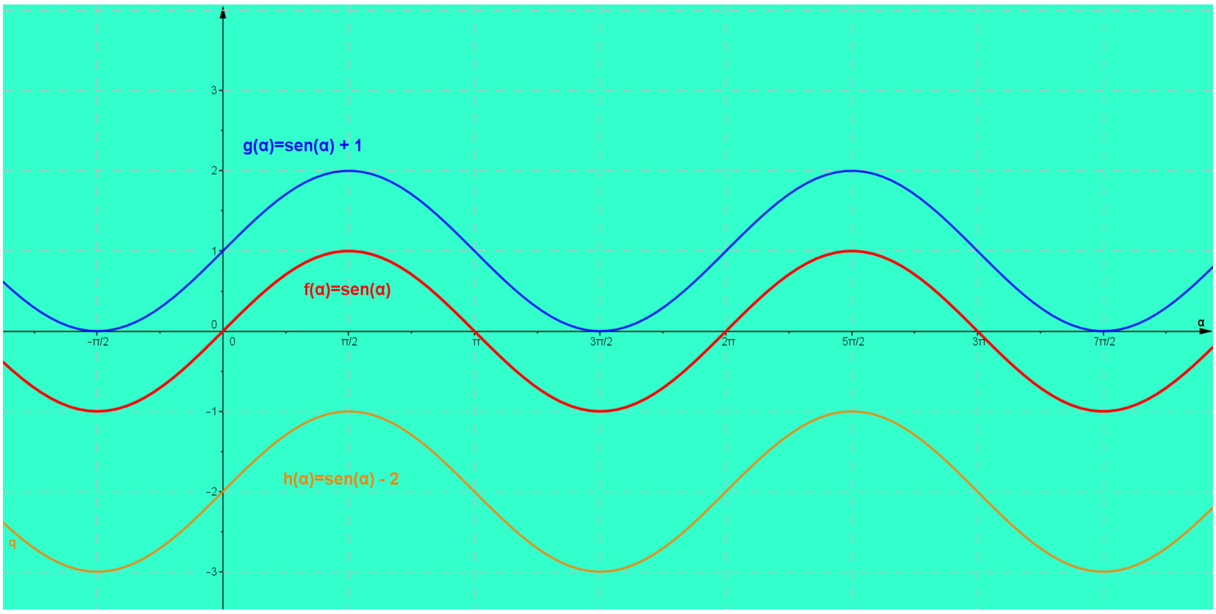
λ : comprimento de onda
f : frequência (normal)
c : velocidade de propagação da onda

[3]Quando nos referimos a uma frequência, sem especificá-la, estamos falando da frequência "normal", que foi explicada no Capítulo 3.

4.7.4 Translação Vertical

O coeficiente k presente na forma geral da função seno é o responsável pela translação vertical do gráfico da senóide em relação à função $f(\alpha) = sen(\alpha)$. O gráfico da senóide "sobe" ou "desce" em relação à função $f(\alpha) = sen(\alpha)$, quando $k > 0$ ou $k < 0$, respectivamente. Na Figura 4.21, temos dois exemplos, com os gráficos das funções $g(\alpha) = sen(\alpha)+1$ e $h(\alpha) = sen(\alpha) - 3$, em comparação com o gráfico da função $f(\alpha) = sen(\alpha)$.

Figura 4.21: Gráficos das Funções $g(\alpha) = sen(\alpha) + 1$, $h(\alpha) = sen(\alpha) - 3$ e $f(\alpha) = sen(\alpha)$

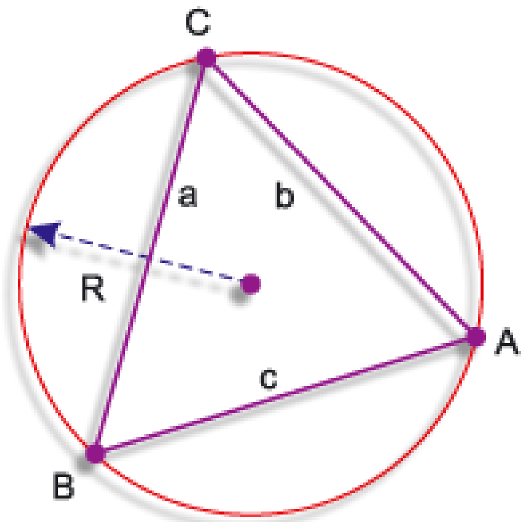


Fonte: o próprio autor

4.8 A Lei dos Senos

A "Lei dos Senos" é uma relação trigonométrica sobre a medida de triângulos arbitrários. Tomemos um triângulo qualquer ABC, cujos lados medem a, b e c, inscrito em uma circunferência de raio R, e com ângulos internos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, como na Figura 4.22.

Figura 4.22: Lei dos Senos



Fonte: http://www.objetivo.br/ConteudoOnline/mp/Conteudo.aspx?codigo=602 &token=5%2F2Yd2%2Bzzv%2F29umTApxi0Q%3D%3D (09/01/15)

Pela Lei dos Senos, como demonstrado por Lima em [35], vale a relação :

$$\frac{a}{sen(\widehat{A})} = \frac{b}{sen(\widehat{B})} = \frac{c}{sen(\widehat{C})} = 2R \ . \tag{4.11}$$

4.9 A Lei dos Cossenos

A "Lei dos Cossenos" também é uma relação trigonométrica para triângulos quaisquer. Tomemos um triângulo arbitrário ABC, cujos lados medem a, b e c, e com ângulos internos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$. Podemos nos apoiar na Figura 4.22.

Pela Lei dos Cossenos, segundo demonstra Lima em [35], valem as relações:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.cos(\widehat{A}) \ ; \tag{4.12}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2.a.c.cos(\widehat{B}) \ ; \tag{4.13}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.cos(\widehat{C}) \ . \tag{4.14}$$

4.10 Cossecante, Secante e Cotangente

Nesta seção iremos definir, de acordo com Lima em [35], a cossecante, a secante e a cotangente como razões trigonométricas recíprocas das funções seno, cosseno e tangente.

4.10.1 Cossecante

A cossecante é a razão recíproca do seno de um ângulo α, definida como sendo a função dada pela relação

$$cossec(\alpha) = \frac{1}{sen(\alpha)} \quad . \tag{4.15}$$

Temos que $cossec(\alpha)$ não está definida quando $\alpha = k \, . \, \pi,$ para $k \in \mathbb{Z}$, pois para estes valores temos $sen(\alpha) = 0$.

4.10.2 Secante

A secante é a razão recíproca do cosseno de um ângulo α, definida como sendo a função dada pela relação

$$sec(\alpha) = \frac{1}{cos(\alpha)} \quad . \tag{4.16}$$

Temos que $sec(\alpha)$ não está definida quando $\alpha = \frac{\pi}{2} + k \, . \, \pi,$ para $k \in \mathbb{Z}$, pois para estes valores temos $cos(\alpha) = 0$.

4.10.3 Cotangente

A cotangente é a razão recíproca da tangente de um ângulo α, definida como sendo a função dada pela relação

$$cotg(\alpha) = \frac{cos(\alpha)}{sen(\alpha)} \quad . \tag{4.17}$$

Temos que $cotg(\alpha)$ não está definida quando $\alpha = k\ .\ \pi$, para $k \in \mathbb{Z}$, pois para estes valores temos $sen(\alpha) = 0$.

4.11 Relação Trigonométrica Fundamental

A relação fundamental da Trigonometria provém da simples aplicação do Teorema de Pitágoras em um triângulo retângulo inscrito em uma circunferência de raio unitário, em que a hipotenusa deste triângulo está posicionada exatamente sobre o raio da circunferência, como na Figura 4.8.

Assim, obtemos a relação

$$sen^2\,\alpha \ + \ cos^2\,\alpha \ = \ 1\ . \tag{4.18}$$

4.12 Operações Trigonométricas

Com o aprofundamento da Trigonometria, fez-se necessário o desenvolvimento de novas relações que envolvam seno, cosseno e tangentes de somas e subtrações de ângulos. Os matemáticos, envolvidos no aprimoramento da Trigonometria, utilizaram-se da circunferência trigonométrica, de Geometria Analítica, do famoso Teorema de Pitágoras e das relações já conhecidas para chegarem às relações:

$$sen(\alpha+\beta) = sen(\alpha).cos(\beta) + sen(\beta).cos(\alpha)\ \ ; \tag{4.19}$$

$$sen(\alpha-\beta) = sen(\alpha).cos(\beta) - sen(\beta).cos(\alpha)\ \ ; \tag{4.20}$$

$$cos(\alpha+\beta) = cos(\alpha).cos(\beta) - sen(\alpha).sen(\beta)\ \ ; \tag{4.21}$$

$$cos(\alpha-\beta) = cos(\alpha).cos(\beta) + sen(\alpha).sen(\beta)\ \ ; \tag{4.22}$$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{tg(\alpha) + tg(\beta)}{1 - tg(\alpha).tg(\beta)}\ \ ; \tag{4.23}$$

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg(\alpha) - tg(\beta)}{1 + tg(\alpha).tg(\beta)} \quad . \tag{4.24}$$

Em decorrência de (4.19) e (4.21), outras relações também muito importantes sobre o seno ou cosseno do arco duplo foram desenvolvidas, como

$$sen(2\alpha) = 2.sen(\alpha).cos(\alpha) \tag{4.25}$$

e

$$cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha) \quad . \tag{4.26}$$

Da relação fundamental (4.18) podemos obter duas outras formas para a relação de $cos(\alpha)$, que são

$$cos(2\alpha) = 1 - 2.sen^2(\alpha) \tag{4.27}$$

e

$$cos(2\alpha) = 2.cos^2(\alpha) - 1 \quad . \tag{4.28}$$

De (4.23), temos

$$tg(2\alpha) = \frac{2.tg(\alpha)}{1 - tg^2(\alpha)} \quad . \tag{4.29}$$

5 ATIVIDADES

Para o desenvolvimento das atividades propostas a seguir, é necessário que os alunos tenham conhecimento dos rudimentos de Trigonometria contidos no Capítulo 4 desse texto, e que tenham sido trabalhados previamente com a turma pelo professor.

Também é necessária uma noção de alguns conceitos sobre ondas e suas características, que constam no Capítulo 3 e podem ser selecionados pelo professor para uma explanação prévia em uma aula introdutória, ou em um trabalho interdisciplinar com o professor da disciplina de Física.

As atividades estão estruturadas da seguinte forma: o assunto matemático correlato (e a sua especificação), as interdisciplinaridades envolvidas, a série escolar do ensino médio indicada para a aplicação da atividade, o tempo estimado para a aplicação da atividade, os materiais utilizados, os objetivos e a metodologia aplicada. Em seguida, estão a "Ficha da Atividade", com as questões para serem utilizadas na aplicação com os alunos, e um tópico com as expectativas da atividade.

A "Ficha da Atividade" poderá ser reproduzida, pelo professor, e distribuída para cada aluno, ou grupo de alunos, para o desenvolvimento de cada atividade.

Para as atividades 1, 2 e 6, que necessitam do software Audacity, recomenda-se a leitura do Apêndice C - Breve tutorial do programa Audacity.

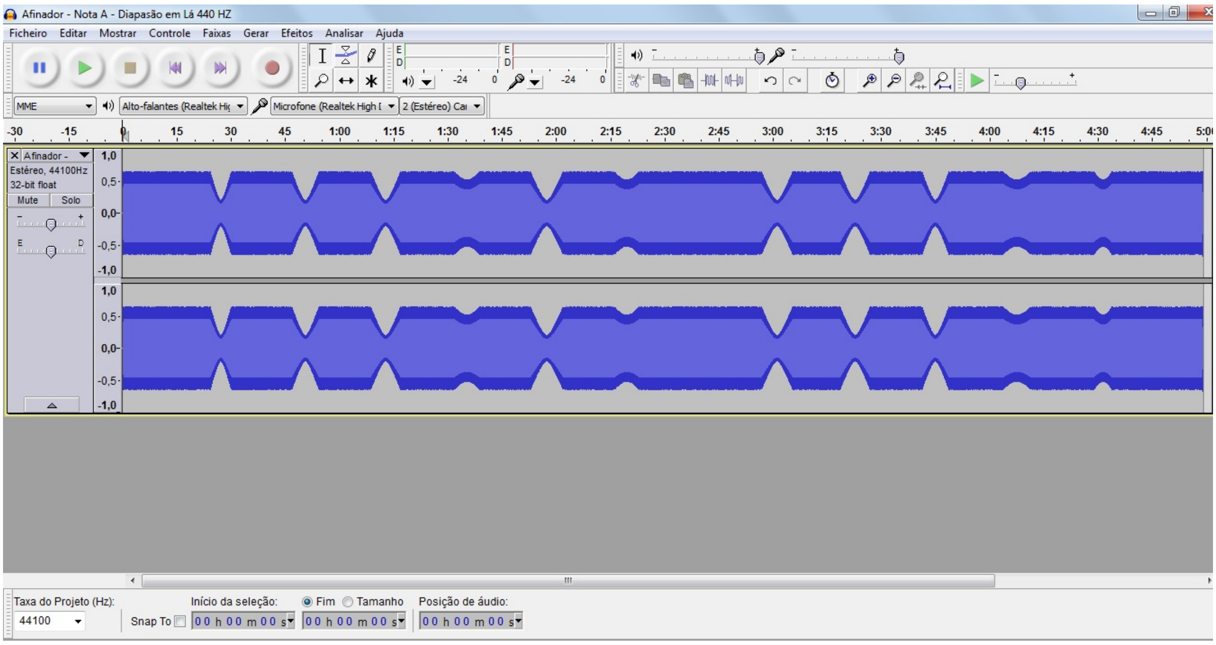
As atividades 3, 4 e 5 utilizam-se do software matemático Geogebra, especialmente desenvolvido para o ensino e aprendizagem, geralmente disponível nos laboratórios de informática das escolas de ensino básico.

5.1 Atividade 1: O gráfico produzido pelo som da nota lá (440 Hz)

- Assunto Matemático correlato: Trigonometria (função seno, senóide).
- Interdisciplinaridade: Física (Acústica): frequência de ondas, período de ondas, comprimento de ondas. Música: notas musicais, frequências de notas musicais.
- Série: 2º ano do Ensino Médio.
- Tempo estimado para aplicação: 1 aula (50 minutos).
- Material utilizado: Papel sulfite, caneta, aparelho afinador "diapasão de garfo em lá (440 Hz)", computador conectado a um projetor multimídia e caixa de som compatível com as dimensões da sala de aula, software livre Audacity instalado no computador.
  No caso do professor preferir, a atividade pode ser realizada sem o uso do diapasão. Para isso, deve-se utilizar um arquivo com a gravação do som emitido por um diapasão na frequência da nota lá (A), em 440 Hz, que pode ser obtido por download no endereço eletrônico "http://www.youtube.com/watch?v=3tDv_9kfyDM&feature=kp". Neste caso, após fazer o download, é necessário converter o formato do arquivo para a extensão "MP3".
- Objetivos: Mostrar ao aluno que uma onda sonora referente à uma nota musical produzida de forma pura, quando digitalizada graficamente apresenta um formato periódico muito semelhante ao das funções trigonométricas seno e cosseno. Estudar os conceitos de período e de frequência de uma função periódica, e calcular esses valores a partir do gráfico de uma senóide.
- Metodologia: Utilizando o computador, o projetor multimídia e a caixa de som, explica-se a utilidade e o funcionamento básico de um diapasão de garfo em lá (440 Hz). A figura correspondente ao diapasão pode ser encontrada utilizando o endereço eletrônico da fonte da Figura 3.2 (http://oguitarrista.com/blog/afinar-seu-violao-ou-guitarra-online/).
  Em seguida, caso o professor disponha de um aparelho afinador diapasão, ele deve mostrar aos alunos a produção do som de um diapasão em lá (440 Hz), quando tocado, e fazer a captura deste som utilizando o microfone do computador, através do software Audacity (ver breve tutorial no Apêndice C). Salva-se o arquivo (ficheiro) da gravação do som da nota lá em 440 Hz na extensão "MP3", no disco rígido do computador, ou em um pen-drive.

Uma opção mais simplificada para esta parte do procedimento é utilizar-se do arquivo de áudio em "MP3", já capturado e gravado, do som emitido por um diapasão em lá na frequência de 440 Hz, ou então, do arquivo extraído do endereço eletrônico citado no item "Metodologia", e convertê-lo para "MP3".
A seguir, no programa Audacity, abre-se o ficheiro do arquivo da nota lá (Figura 5.1).

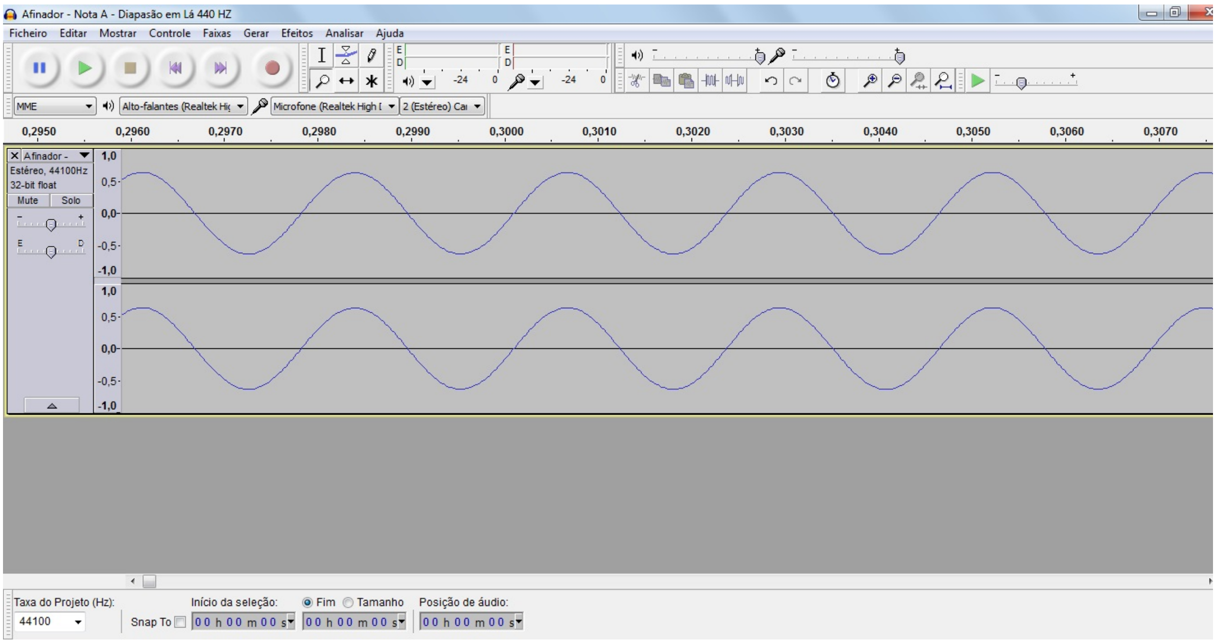
Figura 5.1: Software Audacity - Diapasão em Lá 440 Hz



Fonte: o próprio autor

Com a ferramenta "zoom", amplia-se o espectro para uma boa visualização do gráfico, como na Figura 5.2.

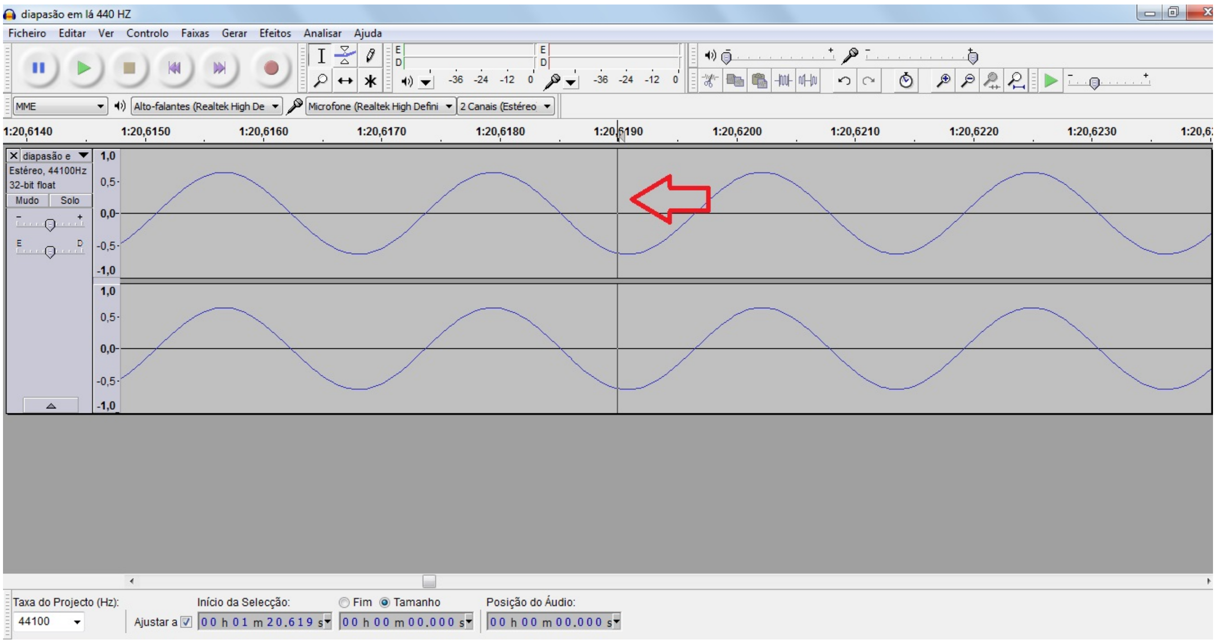
Figura 5.2: Software Audacity - Diapasão em Lá 440 Hz - Zoom



Fonte: o próprio autor

Com a "Ferramenta de seleção" do programa, marca-se uma linha vertical em um dos "nós" da senóide (Figura 5.3), e segue-se ampliando ainda mais o espectro, chegando ao máximo de zoom. Com o espectro ampliado, uma melhor visualização da posição da linha vertical é possível .

Figura 5.3: Software Audacity - Diapasão em Lá 440 Hz - Zoom - Linha Vertical

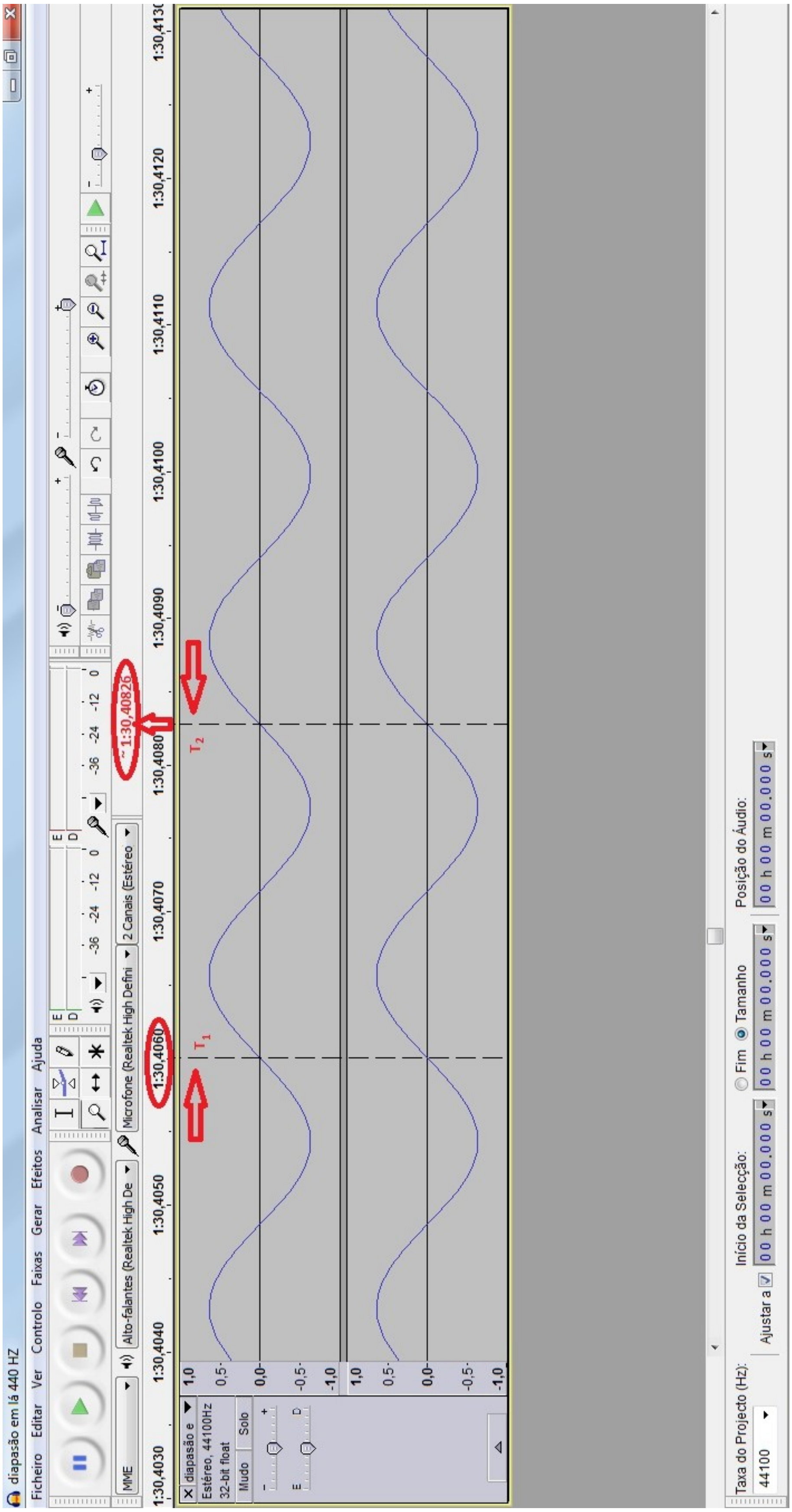


Fonte: o próprio autor

Deve-se, caso necessário, fazer o acerto de posição desta linha vertical, deixando-a exatamente sobre o nó. Pede-se que todos os alunos anotem o valor correspondente a esta posição, que aparece na barra superior ao espectro. Este é o tempo decorrido desde o início da reprodução do ficheiro de áudio.

Agora deve-se diminuir o zoom até o gráfico do espectro ficar novamente em forma de uma senóide bem visualizável, para que se repita o procedimento na posição referente ao nó que distar um comprimento de onda (λ) à direita do nó anterior. Assim, marca-se os dois valores de tempo T_1 (referente ao primeiro nó) e T_2 (referente ao segundo nó), como na Figura 5.4.

Figura 5.4: Software Audacity - Diapasão em Lá 440 Hz - Zoom - Posições T_1 e T_2



Fonte: o próprio autor

Em seguida, deve-se pedir que os alunos respondam as questões propostas na ficha da Atividade 1 (Tabela 5.1).

5.1.1 Aplicação da Atividade 1

Tabela 5.1: Ficha da Atividade 1

	A TRIGONOMETRIA NA MÚSICA - ATIVIDADE 1
	Questões
a)	Qual propriedade possui a função representada pelo gráfico gerado através da onda de som emitida em 440 Hz (nota lá)?
Resposta:	
b)	Que tipos de funções mais conhecidas possuem gráficos similares ao gerado pelo som da nota musical lá (440 Hz)?
Resposta:	
c)	Qual o valor aproximado do período (p) desta função?
Resposta:	
d)	Qual o valor aproximado da frequência de onda (f) relativa à esta função?
Resposta:	

Fonte: o próprio autor

5.1.2 Atividade 1 - Expectativas

- Questão a): Espera-se que o aluno responda que a função referida possui como propriedade a periodicidade.

- Questão b): Espera-se que o aluno responda que as funções periódicas com gráficos similares ao gerado pelo som da nota musical "lá" em 440 Hz são as funções seno e cosseno.

- Questão c): Através dos valores encontrados para T_1 e T_2 , o aluno deve determinar para o período da função que representa o gráfico um valor próximo de $\frac{1}{440} = 0,002\overline{27}$ segundo. Para isso, basta que ele faça o cálculo:

$$p = T_2 - T_1 \quad .$$

- Questão d): A partir do conhecimento de que o valor da frequência é o inverso do valor do período, espera-se que o aluno utilize a fórmula

$$f = \frac{1}{p} \quad ,$$

  e assim chegue ao valor aproximado de 440 Hz.

5.2 Atividade 2: Buscando o valor do período e da frequência de senóides

- Assunto Matemático correlato: Trigonometria (função seno, senóide)
- Interdisciplinaridade: Física (Acústica): frequência de ondas, período de ondas, comprimento de ondas. Música: notas musicais, frequências de notas musicais.
- Série: 2º ano do Ensino Médio.
- Tempo estimado para aplicação: 2 aulas (100 minutos).
- Material utilizado: Papel sulfite, caneta, computador conectado a um projetor multimídia e caixa de som compatível com as dimensões da sala de aula, software livre Audacity instalado no computador.
  Para esta atividade, precisaremos do uso de alguns arquivos de áudio. Esses arquivos são facilmente encontrados na internet, em sites de compartilhamento ou que permitem fazer os downloads gratuitamente. Os tipos de áudio que precisaremos são de sons próximos a puros (com baixa influência de harmônicos).
  A fim de facilitar o trabalho do professor, listamos abaixo links para alguns arquivos de áudio gratuitos, que já foram testados e funcionam bem nesta atividade. Cada um destes arquivos apresenta o valor de sua frequência de onda relacionado. Neste caso, após fazer o download, lembre-se de converter o formato do arquivo para "MP3".
  Links:
  frequência1: 174 Hz: http://www.youtube.com/watch?v=MTwSC3jMOIQ
  frequência2: 285 Hz: http://www.youtube.com/watch?v=M0uq5Uji1Pw
  frequência3: 741 Hz: http://www.youtube.com/watch?v=iNPydhaySoY
  frequência4: 963 Hz: http://www.youtube.com/watch?v=YKinZrBAjw4

- Objetivos: Proporcionar ao aluno que ele perceba a presença da Matemática à sua volta, como por exemplo o conteúdo de Trigonometria nos mínimos e mais simples sons. Mostrar que é possível, sem complexidade, equacionar grandezas a fim de se determinar as características de elementos da natureza, como um som, utilizando-se, por exemplo, de elementos gráficos e cálculos simples. Calcular os valores de período e de frequência de uma função periódica, a partir do gráfico de uma senóide.

- Metodologia: Utilizando o computador, o projetor multimídia e a caixa de som, e abrindo o software Audacity (ver breve tutorial no Apêndice C), importa-se o primeiro arquivo de áudio (vamos chamá-lo de "frequencia1", sem o acento circunflexo), sem que os alunos saibam o valor da frequência do mesmo. Atenção: deve-se tomar o cuidado ao nomear cada arquivo, sem identificar a frequência do som do áudio, para manter a confidencialidade do mesmo até o final da atividade. A seguir, com a ferramenta "zoom", amplia-se o

espectro para uma boa visualização do gráfico, e procede-se as seleções de T_1 e T_2 para determinar o período da função correspondente ao gráfico plotado, como na Atividade 1. Os alunos devem calcular o período da função, a partir dos valores selecionados, e anotar na "Ficha da Atividade 2" (Tabela 5.2), na linha referente à "frequencia1" e na coluna correspondente ao período da mesma. Em seguida, também como na Atividade 1, os alunos devem calcular o valor da frequência da função, e anotar na coluna seguinte.
Repete-se o processo para cada arquivo de áudio nas frequências que chamaremos de "frequencia2", "frequencia3" e "frequencia4".
Na "Ficha da Atividade 2" os alunos devem, após o preenchimento dos valores dos períodos e das correspondentes frequências, responder a questão "a)".
Ao final da atividade, o professor deverá revelar aos alunos os valores das frequências correspondentes a cada arquivo de áudio analisado, para que seja feita a comparação com os valores encontrados através dos dados coletados e da utilização das fórmulas.

5.2.1 Aplicação da Atividade 2

Tabela 5.2: Ficha da Atividade 2

	A TRIGONOMETRIA NA MÚSICA - ATIVIDADE 2	
Frequência n^o	**Período (segundos)**	**Frequência (Hz)**
frequencia1		
frequencia2		
frequencia3		
frequencia4		
	Questão	
a)	O que se observa quando o período $(T_2 - T_1)$ diminui?	
Resposta:		

Fonte: o próprio autor

5.2.2 Atividade 2 - Expectativas

- O aluno deverá ser capaz de, mediante os valores de T_1 e T_2, relacionar os mesmos com o período de uma função periódica.

- Utilizando a fórmula
$$p = T_2 - T_1 \ ,$$
espera-se que o aluno calcule com boa aproximação o valor do período de cada onda relativa ao som em determinada frequência.

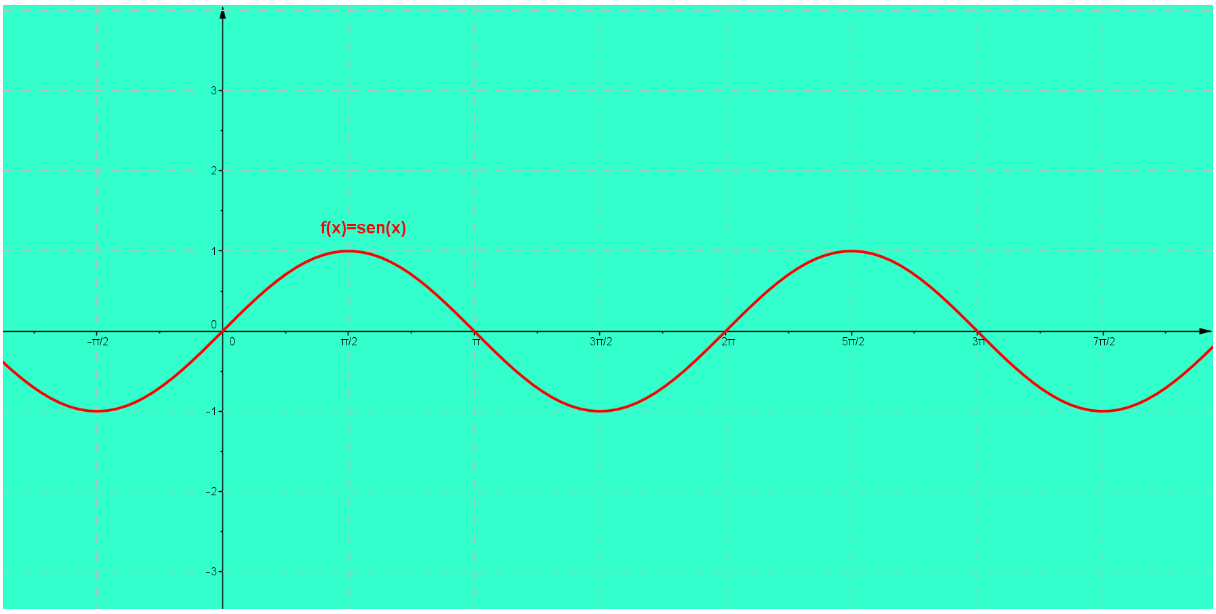
- Espera-se que o aluno relacione o inverso do valor do período de onda com o valor da frequência de onda, e calcule o valor desta para cada som correspondente, utilizando-se da fórmula
$$f = \frac{1}{p} \ .$$

- Ao responder a questão "a)" da ficha da atividade, espera-se que o aluno chegue à conclusão, pelos seus cálculos, que conforme o período calculado $(T_2 - T_1)$ diminui, o valor correspondente da frequência aumenta, evidenciando a proporcionalidade inversa das grandezas envolvidas.

5.3 Atividade 3: A representação gráfica da tônica, da oitava e da quinta de uma nota musical através da função seno

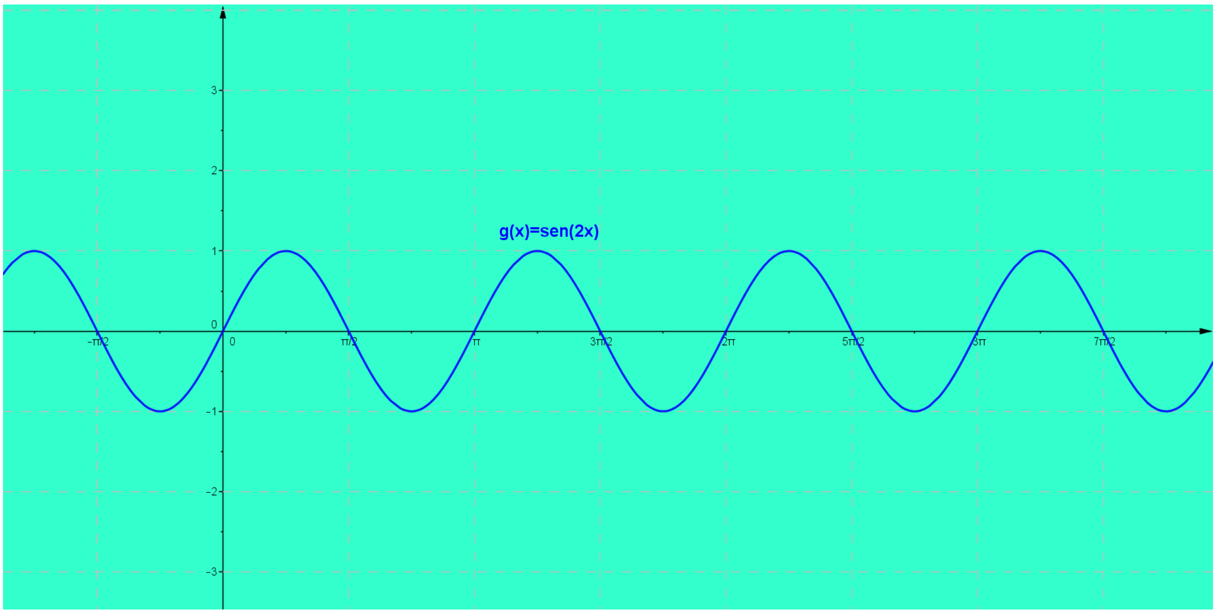
- Assunto Matemático correlato: Trigonometria (função seno, senóide).
- Interdisciplinaridade: Física (Acústica): período de ondas, frequências de ondas. Música: Notas musicais (tônica, oitava e quinta de uma nota musical).
- Série: 2º ano do Ensino Médio.
- Tempo estimado para aplicação: 1 aula (50 minutos).
- Material utilizado: Laboratório de Informática da escola, computadores com o software livre Geogebra, para uso dos alunos, um computador conectado a um projetor multimídia, papel sulfite e caneta.
- Objetivos da atividade: Trabalhar o conceito de múltiplos de arcos (período) da função seno com os alunos. Fazer com que o aluno consiga relacionar as funções do tipo seno, com arcos múltiplos, às notas musicais e suas respectivas oitava e quinta na escala musical.
- Metodologia aplicada: No laboratório de informática da escola, solicitar aos alunos que liguem os computadores e abram o software livre Geogebra. Seguindo a "Ficha da Atividade 3" (Tabela 5.3), em sua letra "a)", os alunos devem, primeiramente, construir o gráfico da função $f(x) = sen(x)$ (Figura 5.5), de $g(x) = sen(2x)$ (Figura 5.6) e da função $h(x) = sen(3x)$ (Figura 5.7), identificando com cores diferentes e nomeando cada uma das funções. A seguir, na letra "b)" da ficha da atividade, é solicitado aos alunos que façam no programa Geogebra a plotagem conjunta dos gráficos das funções f, g e h, como na Figura 5.8. Em seguida, a partir da letra "c)" da ficha da atividade, os alunos devem observar o comportamento das funções g e h, em relação à função f, e buscar explicar o que acontece com o gráfico de uma função quando se substitui o arco da função seno por um determinado múltiplo de si mesmo, e responder as questões que se seguem, fazendo-se a relação do período da função com a tônica, a oitava e a quinta de uma nota musical.

Figura 5.5: $f(x) = sen(x)$



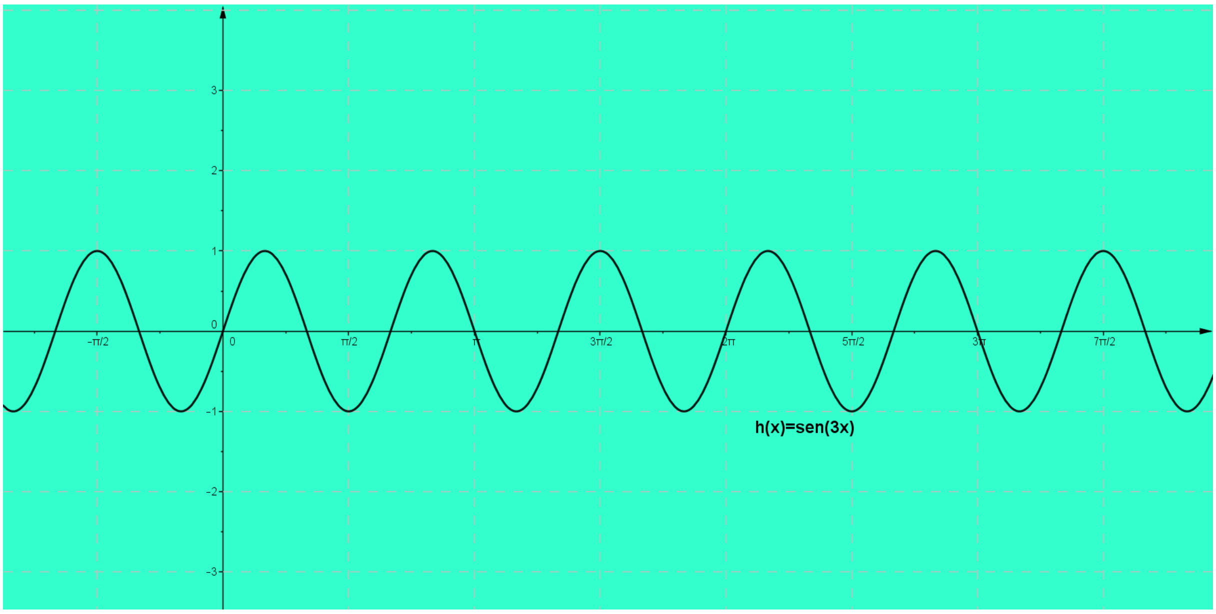
Fonte: o próprio autor

Figura 5.6: $g(x) = sen(2x)$



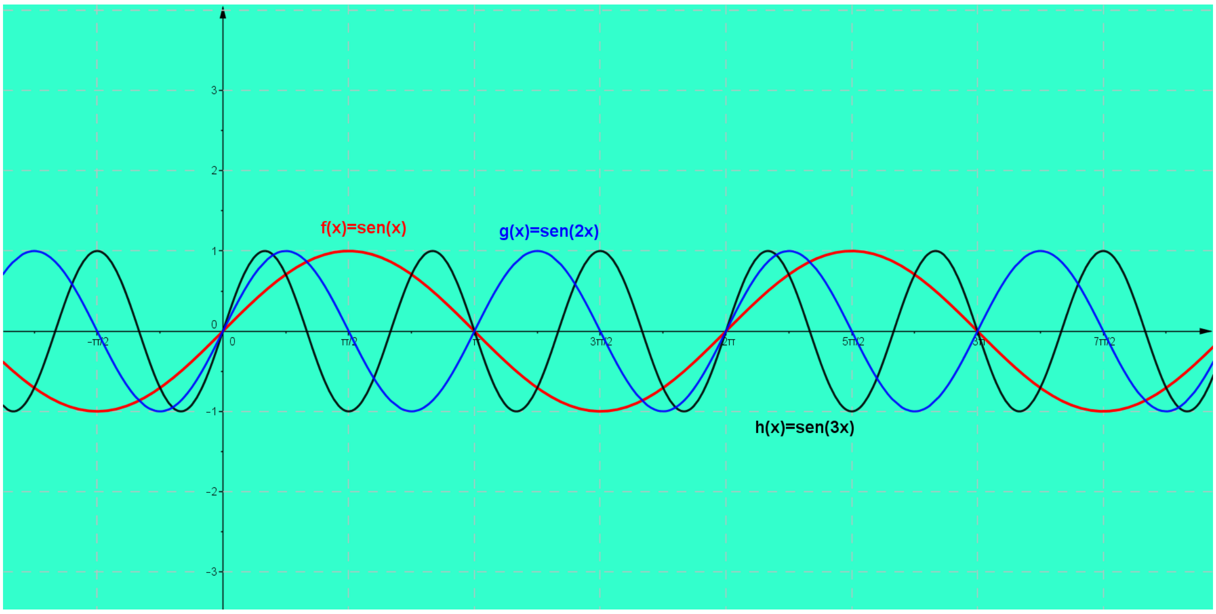
Fonte: o próprio autor

Figura 5.7: $h(x) = sen(3x)$



Fonte: o próprio autor

Figura 5.8: $f(x) = sen(x), g(x) = sen(2x), h(x) = sen(3x)$



Fonte: o próprio autor

5.3.1 Aplicação da Atividade 3

Tabela 5.3: Ficha da Atividade 3

	A TRIGONOMETRIA NA MÚSICA - ATIVIDADE 3
	Questões
a)	No programa Geogebra, construir os gráficos das funções a seguir, identificando com cores diferentes e nomeando cada uma das funções: $f(x) = sen(x)$, $g(x) = sen(2x)$ e $h(x) = sen(3x)$.
b)	Agora, também no Geogebra, construir num mesmo plano os gráficos das funções f, g e h
c)	Observando o comportamento das funções g e h em relação à função f, o quê aconteceu com o gráfico destas funções?
Resposta:	
d)	Quando substitui-se o arco da função $f(x) = sen(x)$ por um múltiplo de si mesmo, por exemplo $2x$ ou $3x$, o que estamos alterando nas funções?
Resposta:	
e)	Qual o valor do período da função $f(x) = sen(x)$?
Resposta:	
f)	Qual o valor do período da função $g(x) = sen(2x)$?
Resposta:	
g)	Qual o valor do período da função $h(x) = sen(3x)$?
Resposta:	
h)	Tomando-se a senóide da função f como a representação gráfica relativa ao som da tônica de uma nota musical, o que representaria, musicalmente, a função g?
Resposta:	
i)	E a função h, o que representaria, em termos musicais, em relação à função f?
Resposta:	

Fonte: o próprio autor

5.3.2 Atividade 3 - Expectativas

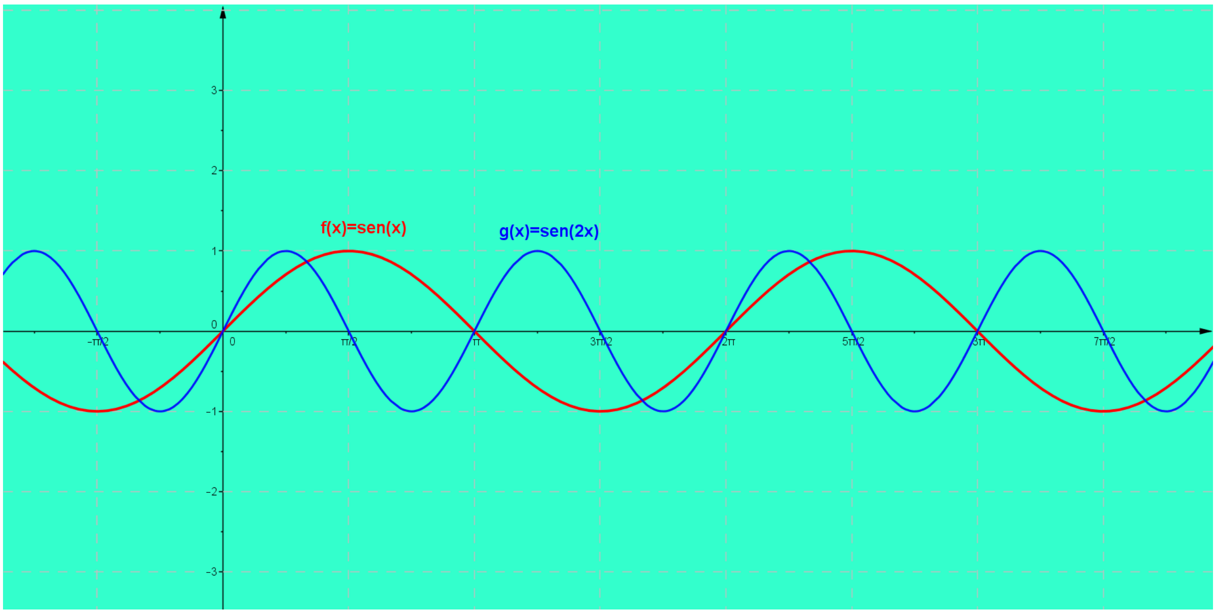
- Espera-se que o aluno, com o auxílio dos gráficos, consiga verificar a relação entre o período da função f e os períodos de funções como a função g e a função h, e determinar os seus valores.

- O aluno, fazendo a relação do comprimento de onda e sua proporcionalidade com o período das senóides, deverá concluir que a função g é a oitava (musical) da função f, pois o período da função g, que é de π rad, é a metade do período da função f, cujo valor é de 2π rad. Também espera-se que o aluno perceba que a função h é a quinta (musical) da função f, pois o período da função h é igual a $\frac{2\pi}{3}$ ou, equivalentemente, que h tem uma frequência que é da ordem de $\frac{3}{2}$ da frequência da tônica da nota musical.

5.4 Atividade 4: A função seno na sobreposição de harmônicos de uma mesma nota musical

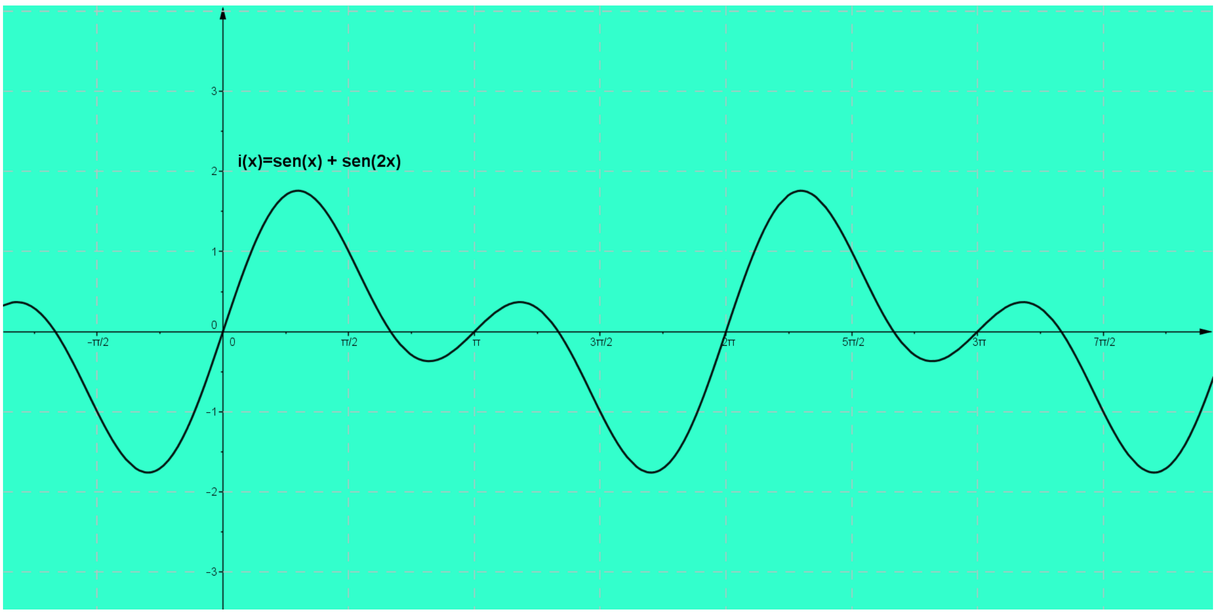
- Assunto Matemático correlato: Trigonometria (função seno, senóide).
- Interdisciplinaridade: Física (Acústica): período de ondas, frequências de ondas, harmônicos. Música: Notas musicais (tônica, oitava e quinta de uma nota musical), harmônicos.
- Série: 2º ano do Ensino Médio.
- Tempo estimado para aplicação: 1 aula (50 minutos).
- Material utilizado: Laboratório de Informática da escola, computadores com o software livre Geogebra, para uso dos alunos, um computador conectado a um projetor multimídia, papel sulfite e caneta.
- Objetivos da atividade: Trabalhar o conceito de período da função seno, e desenvolver o assunto "soma de funções do tipo seno" pela perspectiva da Música, utilizando-se dos conceitos de nota musical tônica, sua oitava e sua quinta.
- Metodologia aplicada: No laboratório de informática da escola, solicitar aos alunos que liguem os computadores e abram o software livre Geogebra. Conforme a "Ficha da Atividade 4" (Tabela 5.4), os alunos devem, primeiramente, construir no programa Geogebra os gráficos das funções $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = sen(2x)$, num mesmo plano (Figura 5.9), e em seguida é solicitado a eles que calculem o período destas funções. A seguir, é solicitado aos alunos que construam o gráfico da função $i(x) = sen(x) + sen(2x)$ (Figura 5.10), e logo após também calculem o período da função i. Considerando a senóide da função f como a representação gráfica relativa ao som da tônica de uma nota musical, os alunos devem investigar o significado consequente da função i, respondendo a questão "e)" na ficha de atividade.

Figura 5.9: $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = sen(2x)$



Fonte: o próprio autor

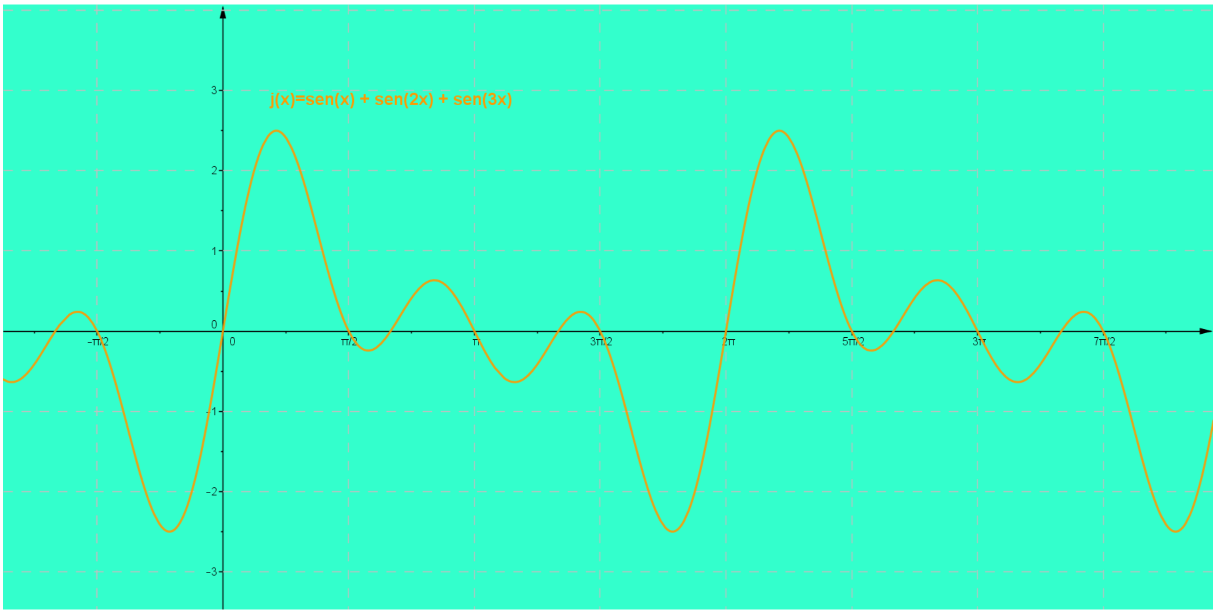
Figura 5.10: $i(x) = sen(x) + sen(2x)$



Fonte: o próprio autor

Continuando com o processo de contrução de gráficos, os alunos devem plotar com o programa Geogebra o gráfico da função $h(x) = sen(3x)$, como na Figura 5.7 (Atividade 3), e calcular o período da função h. A seguir, pede-se que os alunos construam o gráfico da função $j(x) = sen(x) + sen(2x) + sen(3x)$ (Figura 5.11), e calculem o período da função j. Continuando na "Ficha da Atividade 4", os alunos devem averiguar o significado consequente da função j, respondendo a questão "j)" na ficha.

Figura 5.11: $j(x) = sen(x) + sen(2x) + sen(3x)$



Fonte: o próprio autor

5.4.1 Aplicação da Atividade 4

Tabela 5.4: Ficha da Atividade 4

	A TRIGONOMETRIA NA MÚSICA - ATIVIDADE 4
	Questões
a)	Construir, num mesmo plano, os gráficos das funções $f(x) = sen(x)$ e $g(x) = sen(2x)$.
b)	Determine os períodos das funções f e g.
Resposta:	
c)	Construir o gráfico da função $i(x) = sen(x) + sen(2x)$.
d)	Determine o período da função i.
Resposta:	
e)	Considerando a senóide da função f como a representação gráfica relativa ao som da tônica de uma nota musical, o que representaria, musicalmente, a função i?
Resposta:	
f)	Construir o gráfico da função $h(x) = sen(3x)$.
g)	Determine o período da função h.
Resposta:	
h)	Construir o gráfico da função $j(x) = sen(x) + sen(2x) + sen(3x)$.
i)	Determine o período da função j.
Resposta:	
j)	Considerando a senóide da função f como a representação gráfica relativa ao som da tônica de uma nota musical, o que representaria, musicalmente, a função j?
Resposta:	

Fonte: o próprio autor

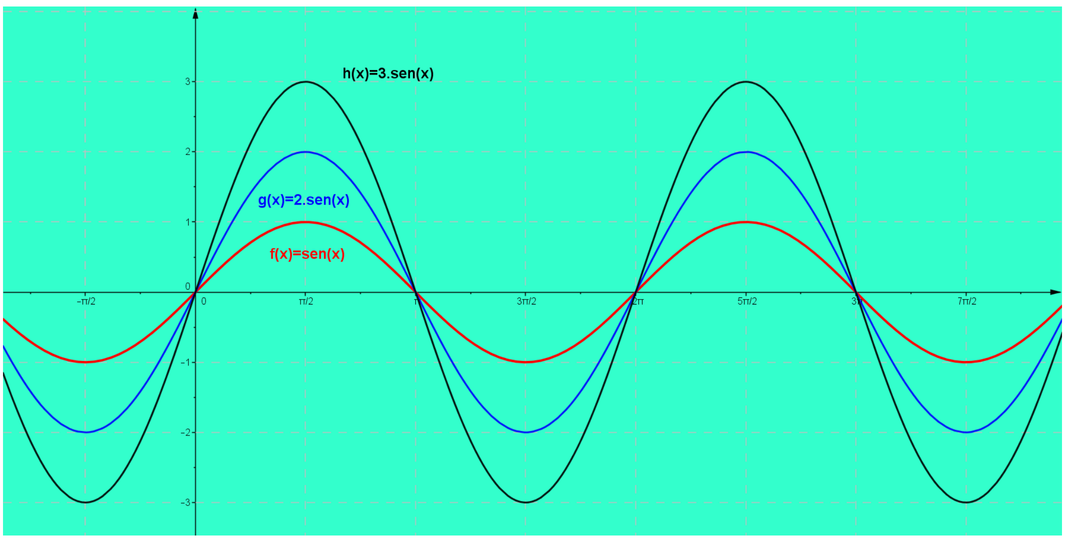
5.4.2 Atividade 4 - Expectativas

- Espera-se que o aluno, com o auxílio dos gráficos, determine os valores dos períodos das funções f, g, h, i e j.
- Espera-se que o aluno relacione o gráfico de i com a tônica de uma nota musical soando juntamente com sua oitava. Da mesma forma, o aluno deve observar que o gráfico de j representa o som de uma nota musical (sua tônica) soando conjuntamente com dois de seus harmônicos, sua oitava e sua quinta.

5.5 ATIVIDADE 5: OS GRÁFICOS DA REPRESENTAÇÃO DE UMA MESMA NOTA MUSICAL EM INTENSIDADES DIFERENTES

- Assunto Matemático correlato: Trigonometria.
- Interdisciplinaridade: Física (Acústica): frequências de ondas, amplitude de onda. Música: Notas musicais, intensidade do som de uma nota musical.
- Série: 2º ano do Ensino Médio.
- Tempo estimado para aplicação: 1 aula (50 minutos).
- Material utilizado: Laboratório de Informática da escola, computadores com o software livre Geogebra, para uso dos alunos, um computador conectado a um projetor multimídia, papel sulfite e caneta.
- Objetivos da atividade: Relacionar a intensidade de um som (volume) com o valor da amplitude referente a uma função do tipo seno. Generalizar o conceito de amplitude para a representação de crescimento progressivo de intensidade (aumento de volume).
- Metodologia aplicada: No laboratório de informática da escola, solicitar aos alunos que liguem os computadores e abram o software livre Geogebra. Os alunos devem construir os gráficos das funções $f(x) = sen(x)$, $g(x) = 2sen(x)$ e $h(x) = 3sen(x)$, num mesmo plano, identificando com cores diferentes e nomeando cada uma das funções (Figura 5.12).

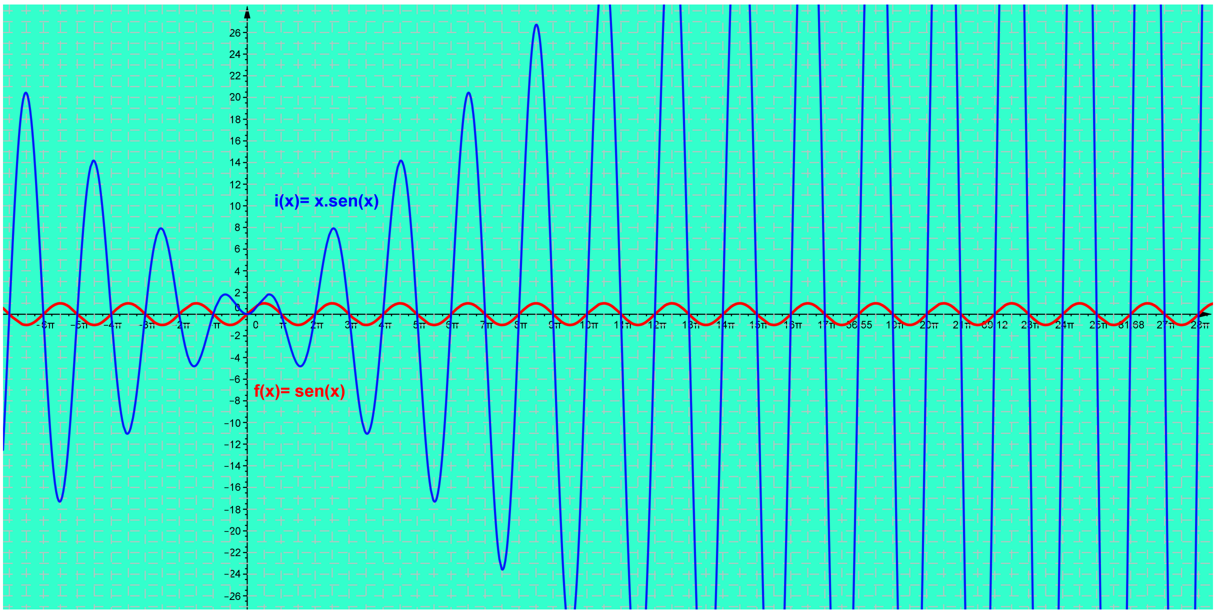
Figura 5.12: $f(x) = sen(x)$, $g(x) = 2sen(x)$ e $h(x) = 3sen(x)$



Fonte: o próprio autor

Em seguida, todos os alunos devem observar o comportamento das funções g e h, em relação à função f. Considerando f a função relativa à uma nota musical, verificar se os gráficos de g e h representam ou não a mesma nota musical, e relacioná-las entre si. A seguir, os alunos devem responder a questão "b)" da "Ficha da Atividade 5" (Tabela 5.5). Agora, cada aluno deve abrir um novo arquivo no programa Geogebra, e construir o gráfico da função $i(x) = xsen(x)$, juntamente com a função f como parâmetro (Figura 5.13).

Figura 5.13: $i(x) = x.sen(x)$ em comparação com $f(x) = sen(x)$



Fonte: o próprio autor

Considerando a função f como a representação de uma nota musical, o aluno deve investigar o significado consequente do gráfico relativo à função i, e responder a questão "d)" da ficha de atividade.

5.5.1 Aplicação da Atividade 5

Tabela 5.5: Ficha da Atividade 5

	A TRIGONOMETRIA NA MÚSICA - ATIVIDADE 5
	Questões
a)	No programa Geogebra, construir os gráficos das funções a seguir, num mesmo plano, identificando com cores diferentes e nomeando cada uma das funções: $f(x) = sen(x)$; $g(x) = 2sen(x)$; $h(x) = 3sen(x)$.
b)	Observar o comportamento das funções g e h em relação à função f. Tomando a senóide da função f como a representação gráfica relativa ao som de uma nota musical, os gráficos de g e h representam essa mesma nota musical? O que as três funções representam entre si?
Resposta:	
c)	Construir o gráfico da função $i(x) = x.sen(x)$ e da função f em um mesmo plano ordenado.
d)	Considerando a função f como a representação de uma nota musical, investigar o significado consequente da função i. O que o gráfico desta função está representando?
Resposta:	

Fonte: o próprio autor

5.5.2 Atividade 5 - Expectativas

- Espera-se que o aluno chegue à conclusão de que as funções f, g e h são representações da mesma nota musical, com intensidades (volumes) diferentes.

- A partir dos itens anteriores, o aluno deve relacionar o gráfico de i com o som correspondente ao de uma nota musical em que sua intensidade é crescente com o tempo, ou seja, o volume é aumentado indefinidamente, ao contrário da função f, em que sua intensidade é mantida constante.

5.6 ATIVIDADE 6: O TELEFONE E A MÚSICA

- Assunto Matemático correlato: Trigonometria.
- Interdisciplinaridade: Física (Acústica): período e frequências de ondas. Música: notas musicais, frequências de notas musicais.
- Série: 2º ano do Ensino Médio.
- Tempo estimado para aplicação: 1 aula (50 minutos).
- Material utilizado: Papel sulfite, caneta, aparelho de telefone fixo, do tipo com teclado, ligado a uma rede telefônica, computador conectado a um projetor multimídia e caixa de som compatível com as dimensões da sala de aula, software livre Audacity instalado no computador.
  No caso do professor preferir, a atividade pode ser realizada sem a captação direta do som do tom de discagem do telefone em sala de aula. Para isso, deve-se utilizar um arquivo com a gravação prévia do tom de discagem do telefone, ou também há a opção de fazer um download deste som pela internet, que pode ser encontrado, por exemplo, no link "https://www.youtube.com/watch?v=RbrxLpjAdRw&feature=youtube_gdata".
  Neste caso, após fazer o download, é necessário converter o formato do arquivo para "MP3".
- Objetivos da atividade: Relacionar o período de uma onda sonora e de sua frequência, através do gráfico construído a partir da captação eletrônica de um som do cotidiano dos alunos. Desenvolver a prática do cálculo do período e da frequência de onda, a partir de gráficos senoidais.
- Metodologia: Utilizando o computador e o projetor multimídia com a caixa de som, o professor faz a explanação do tema "O Telefone e a Música", podendo utilizar-se do material contido no Apêndice B. Em seguida, o professor deve mostrar aos alunos o som do "tom de discagem" do telefone, amplificado pelas caixas de som, e fazer a captura deste som utilizando o microfone do computador, através do software Audacity (ver breve tutorial no Apêndice C).
  Uma opção mais simplificada para esta parte do procedimento é utilizar-se do arquivo de áudio em "MP3", já capturado (ou feito o seu download da internet) e gravado, do som do tom de discagem de um telefone.
  Salva-se o arquivo (ficheiro) da gravação do som do tom de discagem do telefone na extensão "MP3", em uma pasta no disco rígido do computador, ou em um pen-drive.
  A seguir, no programa Audacity, abre-se o ficheiro do arquivo do tom de discagem do telefone. Com a ferramenta "zoom", amplia-se o espectro para uma boa visualização do gráfico, e com a "Ferramenta de seleção" do programa, marca-se uma linha vertical em

um dos "nós" da senóide, e segue-se ampliando ainda mais o espectro, chegando ao máximo de zoom, como explicado na Atividade 1. Após verificar se a linha vertical está exatamente sobre o nó, e fazendo-se o acerto de posição caso necessário, pede-se que todos os alunos anotem o valor correspondente a esta posição, que aparece na barra superior ao espectro. Este é o tempo decorrido desde o início da reprodução do ficheiro de áudio. A seguir, deve-se diminuir o zoom até o gráfico do espectro ficar novamente em forma de uma senóide bem visualizável, para que se repita o procedimento na posição referente ao nó que distar um comprimento de onda (λ) à direita do nó anterior. Em seguida, marca-se os dois valores de tempo T_1 (referente ao primeiro nó) e T_2 (referente ao segundo nó). Agora, deve-se pedir que os alunos respondam as questões propostas na "Ficha da Atividade 6" (Tabela 5.6).

5.6.1 Aplicação da Atividade 6

Tabela 5.6: Ficha da Atividade 6

	A TRIGONOMETRIA NA MÚSICA - ATIVIDADE 6
	Questões
a)	Qual o valor aproximado do período (p) desta função?
Resposta:	
b)	Qual é a frequência de onda referente ao gráfico construído a partir do tom de discagem do telefone?
Resposta:	
c)	Este valor está condizente com as informações estudadas a respeito da telefonia e a sinalização acústica no Brasil? Por quê?
Resposta:	
d)	Na impossibilidade de um mecanismo melhor, poderia um músico brasileiro afinar seu instrumento musical utilizando o tom de discagem do telefone?
Resposta:	

Fonte: o próprio autor

5.6.2 Atividade 6 - Expectativas

- Espera-se que o aluno consiga calcular o valor do período de onda do gráfico relativo ao som produzido pelo tom de discagem de um telefone, e que a partir dele determine a frequência desta onda, que deve ser de aproximadamente 425 Hz, com uma margem de tolerância de $\pm$25 Hz.

- Analisando os dados coletados e as observações feitas, espera-se dos alunos uma análise quantitativa e qualitativa quanto aos padrões acústicos em telefonia existente no Brasil, e no significado da "margem de tolerância" ou "intervalo de variação" na frequência de um determinado fenômeno sonoro.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

As raízes da Matemática por vezes se entrelaçam com as raízes da Música, pois estas duas manifestações humanas são tão intrínsecas ao seu ser que não poderia ser diferente. O que pode às vezes não estar tão evidente é a relação direta entre estas duas artes, ou estas duas ciências.

Quando se estuda as relações entre a Matemática e a Música, cada vez mais observa-se a essência da ligação íntima entre as duas. É claro que um matemático pode passar uma vida inteira sem se dar conta disso, enquanto que um músico também pode nem sequer chegar perto dessa conclusão.

O estudo da Trigonometria, em particular da função seno, nos leva a observar os gráficos destes tipos de funções periódicas, as senóides, que são expressões típicas dos fenômenos ondulatórios. Estes fenômenos, por sua vez, estão presentes, não apenas na Música, como também em grande parte do cotidiano do nosso mundo.

Neste trabalho nossa proposta foi estudar as nuances da Trigonometria, focada nas funções periódicas senoidais e seus respectivos gráficos, aliadas à representação matemática e física da Música, utilizando-se de elementos da acústica e fundamentos da teoria musical.

Apoiado no desenvolvimento de uma contextualização histórica das duas áreas, na exposição de conhecimentos mínimos sobre ondas sonoras, teoria da Música e os fundamentos da Trigonometria desenvolvidos no Ensino Médio da Educação Básica, propusemos atividades a fim de trabalhar com a Trigonometria interligada com a Música, e utilizando-se de ferramentas tecnológicas.

Nestas atividades, procurou-se explorar as características das ondas, especificamente as sonoras em seu estado mais puro, e a sua representação gráfica, a senóide, e sua relação com as funções trigonométricas, principalmente a função seno, correlacionando-se as propriedades matemáticas da senóide com as da Música e da Física.

Esperamos com este material um encorajamento dos atores do processo de ensino-aprendizagem da Matemática, especificadamente da Trigonometria, e instigar a interdisciplinaridade com o ensino da Música na Educação Básica.

REFERÊNCIAS

[1] ABDOUNUR, O. J. **Matemática e música:** o pensamento analógico na construção de significados. 3 ed. São Paulo: Escrituras, 2003.

[2] ALENCAR FILHO, E. **Trigonometria plana.** 7 ed. São Paulo: Nobel, 1965.

[3] ALMEIDA, M. C. **Origens da Matemática.** Curitiba: Champagnat, 1998.

[4] ARISTÓTELES. **Metafísica - Livro I e II; Ética a Nicômaco; Poética.** Tradução de Vincenzo Cocco. São Paulo: Abril Cultural, 1984. v.2.

[5] BENNETT, R. **Uma breve história da música.** Rio de Janeiro: Zahar, 1986.

[6] BERLINGHOFF, W. P; GOUVEA, F. Q. **A matemática através dos tempos:** um guia fácil e prático para professores e entusiastas. São Paulo: Blucher, 2010.

[7] BERTATO, F. M. **"De Divina Proportione" de Luca Pacioli:** tradução anotada e comentada. 2008. Tese (Doutorado - Filosofia) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Campinas, SP.

[8] BOYER, C. B. **História da Matemática.** 3 ed. São Paulo: Blucher, 2012.

[9] BRASIL. Lei n^o 11769, de 18 de agosto de 2008. Altera a Lei n^o 9394, de 20 de dezembro de 1996, Lei de Diretrizes e Bases da Educação, para dispor sobre a obrigatoriedade do ensino da música na educação básica. **Diário Oficial da União**, Brasília, D.F, 18 ago. 2008. Seção 1, p.1.

[10] BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** ensino médio. Parte III: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, Brasília, D.F, 2000.

[11] BRAZ, D. J. **Cordas vibrantes III:** os harmônicos. Disponível em:<http://fisicamoderna.blog.uol.com.br/arch2006-05-28_2006-06-03.html>. Acesso em: 18 jul. 2014.

[12] CANDÉ, R. **História universal da música**. São Paulo: Martins Fontes, 2001. 2 v.

[13] CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Trigonometria - números complexos.** 3 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[14] CARPEUX, O. M. **Livro de ouro da história da música**. 2 ed. Rio de Janeiro: Ediouro, 2001.

[15] COSTA, C; BERNARDINO, J; QUEEN, M. **Educar para crescer. Abril:** Música: entenda porque a disciplina se tornou obrigatória na escola. Disponível em:<http://educarparacrescer.abril.com.br/politica-publica/musica-escolas-432857.shtml>. Acesso em: 03 mar. 2013.

[16] DERBYSHIRE, J. **The unknown quantity:** a real imaginary history of algebra. Washington, D.C.: Joseph Henry Press, 2006.

[17] DUNLAP, R. **The golden ratio and Fibonacci numbers**. Singapore: World Scientific Publishing, 1997.

[18] EUA. House of Representatives. H. Res. 269, october 17, 2001. Expressing the sense of the House of Representatives to honor the life and achievements of 19th Century Italian-American inventor Antonio Meucci, and his work in the invention of the telephone. **Legislative Bulletin**, Washington, D. C, 11 jun. 2002.

[19] EUCLIDES. **Os elementos.** Curitiba: Editora UNESP, 2009.

[20] EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Curitiba: Editora da Unicamp, 2004.

[21] FERREIRA, O. **Civilização grega:** filosofia clássica - período - pré-socrático - Pitágoras. Disponível em:<http://templodeapolo.net/Civilizacoes/grecia/filosofia/presocraticos/filosofia_presocraticos_pitagoras.html>. Acesso em: 23 jun. 2014.

[22] FLETCHER, N. H; ROSSING, T. D. **The physics of musical instruments**. 2 ed. New York: Springer, 1998.

[23] FOUREZ, G. **Alfabetización científica y tecnológica:** acerca de las finalidades de la enseñanza de las ciencias. Buenos Aires: Ediciones Colihue, 1997.

[24] GÊNESIS. In: A BÍBLIA: tradução ecumênica. São Paulo: Paulinas, 2002.

[25] HALLIDAY, D; RESNICK, R; WALKER, J. **Fundamentos de física 2:** gravitação, ondas e termodinâmica. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

[26] HSU, H. P. **Análise de Fourier.** 3 ed. Rio de Janeiro: LTC, 1973.

[27] HUNTLEY, H.E. **A divina proporção:** um ensaio sobre a beleza na matemática. Curitiba: Editora Universidade de Brasília, 1985.

[28] IAZZETTA, F. **Escala Pitagórica.** Disponível em:<http://www2.eca.usp.br/prof/iazzetta/tutor/acustica/escalas/pitagorica.html>. Acesso em: 15 nov. 2014.

[29] IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar:** trigonometria. 2 ed. São Paulo: Atual Ed., 1978. v. 3.

[30] JACQUEMARD, S. **Pitágoras e a harmonia das esferas.** Rio de Janeiro: Difel, 2006.

[31] JOURDAIN, R. **Cérebro, música e êxtase.** Rio de Janeiro: Objetiva, 1998.

[32] KLINE, M. **Mathematics for the nonmathematician.** New York: Dover, 1985.

[33] LAZZARINI, V. E. P. **Elementos de Acústica.** Disponível em:<http://www.fisica.net/ondulatoria/elementos_de_acustica.pdf>. Acesso em: 18 jul. 2014.

[34] LIMA, E. L. **Meu professor de matemática e outras histórias.** 5 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.

[35] LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio.** 9 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 1.

[36] LIMA, E. L. et al. **A matemática do ensino médio.** 6 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 2.

[37] LIVIO, M. **Razão áurea:** a história de fi, um número surpreendente. 2 ed. Rio de Janeiro: Record, 2006.

[38] MARIZ, V. **História da Música no Brasil.** 6 ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2005.

[39] MASSIN, J; MASSIN, B. **História da música ocidental**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

[40] MENEZES, F. **A acústica musical em palavras e sons**. Cotia, SP: Ateliê Editorial, 2004.

[41] MORAES, D. **O sistema numérico mesopotâmico.** Disponível em:<http://www.invivo.fiocruz.br/cgi/cgilua.exe/sys/start.htm?infoid=976&sid=9>. Acesso em: 28 dez. 2014.

[42] OLIVEIRA, J. P. P. **Teoria analítica da música do século XX.** 3 ed. Lisboa: Gulbenkian, 1998.

[43] PAHLEN, K. **Nova História Universal da Música.** São Paulo: Melhoramentos, 1991.

[44] PETRAGLIA, M. S. **A música e sua relação com o ser humano**. São Paulo: Ouvir Ativo, 2010.

[45] PLATÃO. **Timeu-Crítias.** Tradução de Rodolfo Lopes. Coimbra, Portugal: CECH, 2011.

[46] PRÁTICA TELEBRÁS. 210-110-704 - Especificações de sinalização acústica para a rede nacional de telefonia. Brasília: Sistema de Documentação Telebrás - Série Engenharia, abr. 1996.

[47] PUTZ, J. F. **The golden section and the piano sonatas of Mozart.** Disponível em:<http://www.cdlmadrid.org/cdl/htdocs/universidaddeotono/unioto/matematicas/mozart.pdf>. Acesso em: 01 maio 2015.

[48] RODRIGUES, F. V. **Fisiologia da música:** uma abordagem comparativa. Disponível em:<http://www.ib.usp.br/ fvrodrigues/Fisiologia_da_musica.htm>. Acesso em: 17 nov. 2014.

[49] ROSSI, S. S. **A senóide e os sons musicais.** Disponível em:<http://matematicaemusica.pbworks.com/w/page/20503556/Sen%C3%B3ide>. Acesso em: 11 jan. 2015.

[50] ROSSI, S. S. **Funções trigonométricas e os sons musicais.** 2008. Trabalho de Conclusão de Curso (Programa de Desenvolvimento Educacional - SEED/PR) - Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR.

[51] SÁ, I. P. **Complementos sobre o teorema de Pitágoras.** Disponível em:<http://www.magiadamatematica.com/uerj/licenciatura/15-ternos.pdf>. Acesso em: 29 abr. 2015.

[52] SALZMAN, E. **Introdução à Música do Século XX.** Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1970.

[53] SANTOMÉ, J. T. **Globalização e interdisciplinaridade:** o currículo integrado. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

[54] SCHAFER, R. M. **O ouvido pensante.** 2 ed. São Paulo: Ed. Unesp, 2011.

[55] SHULZ, P. Linha do Tempo. **Tão longe, tão perto,** Brasilia, p. 42-75, ago-out. 2009.

[56] SILVA, A. **A matemática nas escalas musicais.** Disponível em:<http://www.matematicaviva.pt/2013/11/a-matematica-nas-escalas-musicais.html>. Acesso em: 15 nov. 2014.

[57] SOUZA, L. G. S. **Uma abordagem didático-pedagógica da racionalidade matemática na criação musical.** 2012. Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Educação - Ensino de Ciências e Matemática) - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP.

[58] SOUZA, L. G. S.; ABDOUNUR, O. J. **A razão áurea x Mozart, Villa Lobos e Bartók.** Disponível em:<http://www.each.usp.br/ixsnhm/Anaisixsnhm/Comunicacoes/1_Souza_L_G_S_Raz%C3%A3o_%C3%81urea_x_Mozart_Villa_Lobos_e_Bart%C3%B3k.pdf>. Acesso em: 01 maio 2015.

[59] SOUZA, R. **Antonio Meucci o verdadeiro inventor do telefone.** Disponível em:<http://www.cienciablogada.com.br/2011/03/antonio-meucci-o-verdadeiro-inventor-do.html>. Acesso em: 28 jul. 2014.

[60] SPINELLI, M. **Filósofos pré-socráticos:** Primeiros mestres da filosofia e da ciência grega. 2 ed. Porto Alegre: Edipucrs, 2003.

[61] STAKHOV, A.; SLUCHENKOVA, A. **A museum dedicated to the concept of harmony and the golden section.** Disponível em:<http://archive.bridgesmathart.org/2002/bridges2002-269.pdf>. Acesso em: 02 maio 2015.

[62] STEWART, R. J. **Música e psique.** São Paulo: Pensamento, 1990.

[63] WEBER, M. **Fundamentos racionais e sociológicos da música.** São Paulo: Edusp, 1995.

[64] WISNICK, J. M. **O som e o sentido.** 2 ed. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.

A APÊNDICE - FUNÇÕES PERIÓDICAS

Uma função $f : D_f \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é denominada periódica de período T se $x + T \in D_f$ sempre que $x \in D_f$, e se $f(x) = f(x+T), \forall\, x \in D_f$.

Observe que, se T é um período de f, então $2T$ também é um período de f, e o mesmo ocorre com qualquer múltiplo inteiro de T. Assim, se f é uma função periódica de período T, então $n.T$, com $n \in \mathbb{Z}$, também é um período para f.

O menor valor positivo de T, para o qual é verdadeiro que $f(x) = f(x+T)$, $\forall\, x \in D_f$, é chamado o "período fundamental de f".

Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica com período T. Então

a) se $g(x) = a.f(x), \forall\, x \in \mathbb{R}$, em que a é um número real não nulo, g também é uma função periódica com o mesmo período da função f;

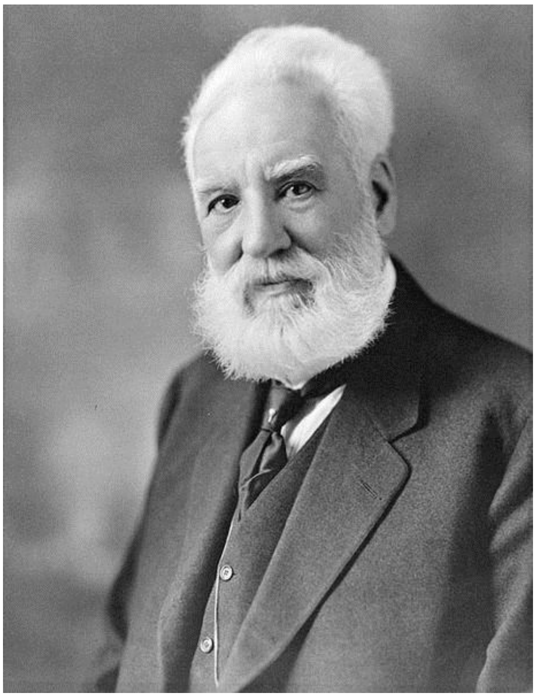
b) se $h(x) = f(x+m), \forall\, x \in \mathbb{R}$, em que m é uma constante real, então h também é uma função periódica com o mesmo período de f;

c) se $i(x) = f(b.x), \forall\, x \in \mathbb{R}$, em que b é um número real não nulo, então i é também uma função periódica, com período $\dfrac{T}{b}$.

B APÊNDICE - O TELEFONE E A MÚSICA

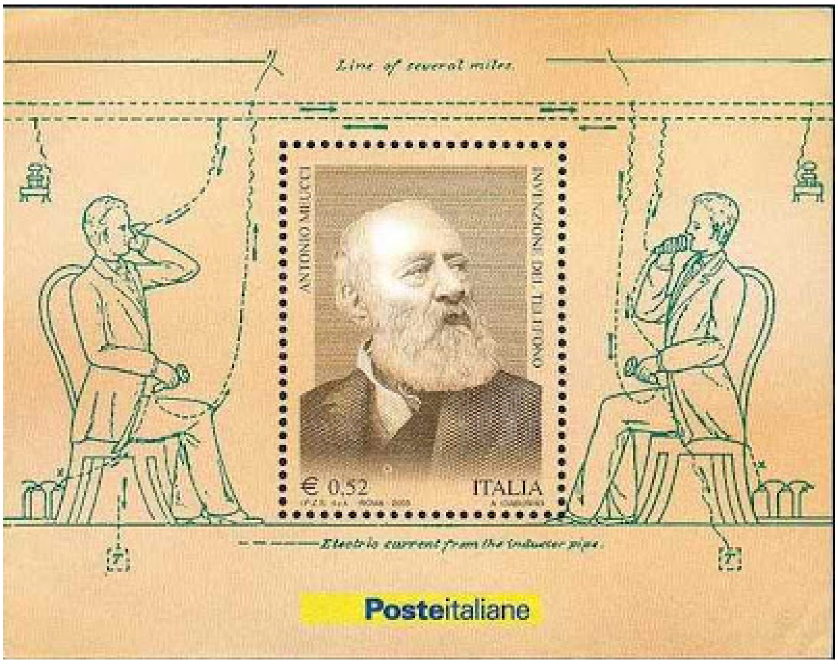
Apesar da invenção do telefone geralmente ser atribuída ao cientista e inventor escocês Alexander Graham Bell (1847-1922) (Figura B.1), o Congresso dos Estados Unidos reconheceu, após mais de um século de controvérsias, que o aparelho foi inventado em 1860 pelo italiano Antonio Santi Giuseppe Meucci (1808-1889) (Figura B.2). Este reconhecimento pelo governo norte-americano deu-se em 11 de junho de 2002, através da resolução 269 (Anexo D).

Figura B.1: Alexander Graham Bell



Fonte: http://www.tecmundo.com.br/ciencia/20570-graham-bell-ou-antonio-meucci-quem-inventou-o-telefone-.htm
(15/01/2015)

Figura B.2: Antonio Meucci em Selo Emitido em 2003 pela Sociedade de Correios e Telégrafos Italianos

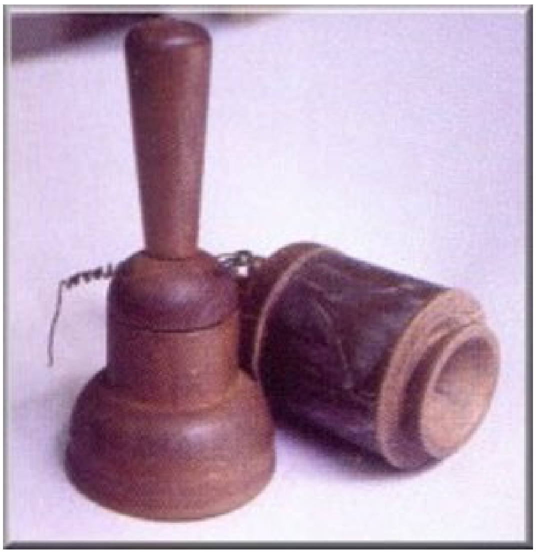


Fonte: http://www.cienciablogada.com.br/2011/03/antonio-meucci-o-verdadeiro-inventor-do.html (15/01/2015)

Em 1850 Meucci e sua esposa mudaram-se para os Estados Unidos, onde viveram o resto de suas vidas. Em 1856 Antonio Meucci construiu um aparelho - que chamou de "teletrofone"(do italiano *telettrofono*) (Figura B.3), ou "telégrafo falante" - para que pudesse se comunicar de seu escritório com seu quarto, no segundo andar da casa, onde sua esposa ficava boa parte do tempo, devido ao reumatismo de que sofria.

Este aparelho era uma espécie de telefone eletromagnético, capaz de transmitir a voz pela eletricidade. A primeira demonstração pública registrada do teletrofone foi em 1860, e foi publicada em um jornal de língua italiana de Nova York. Devido a dificuldades financeiras, Meucci apenas conseguiu pagar a patente provisória de sua invenção, em 1871. Neste tipo de patente provisória, chamada *patent caveats*, que era de custo mais baixo, e menos detalhada, não havia menção ao termo "transmissão eletromagnética de sons vocais".

Figura B.3: Telettrofono



Fonte: http://www.cienciablogada.com.br/2011/03/antonio-meucci-o-verdadeiro-inventor-do.html (28/07/2014)

Um tempo depois, Meucci vendeu o protótipo do telefone a Alexander Graham Bell que, em 1876, patenteou a invenção como se tivesse sido sua. Apesar do processo judicial de Meucci contra Bell pela patente do telefone, o caso foi encerrado quando o primeiro faleceu, em 1889. Desta forma, Alexander Graham Bell foi considerado o inventor do telefone durante muitos anos.

Apesar do assunto ainda gerar controvérsias, um fator preponderante no reconhecimento da autoria da invenção do aparelho de telefone por Antonio Meucci tem sido a decisão da Câmara dos Deputados dos Estados Unidos, em sua Resolução 269. Vejamos a tradução da parte final e a decisão da Câmara dos Representantes dos Estados Unidos, segundo Shulz, em [55]:

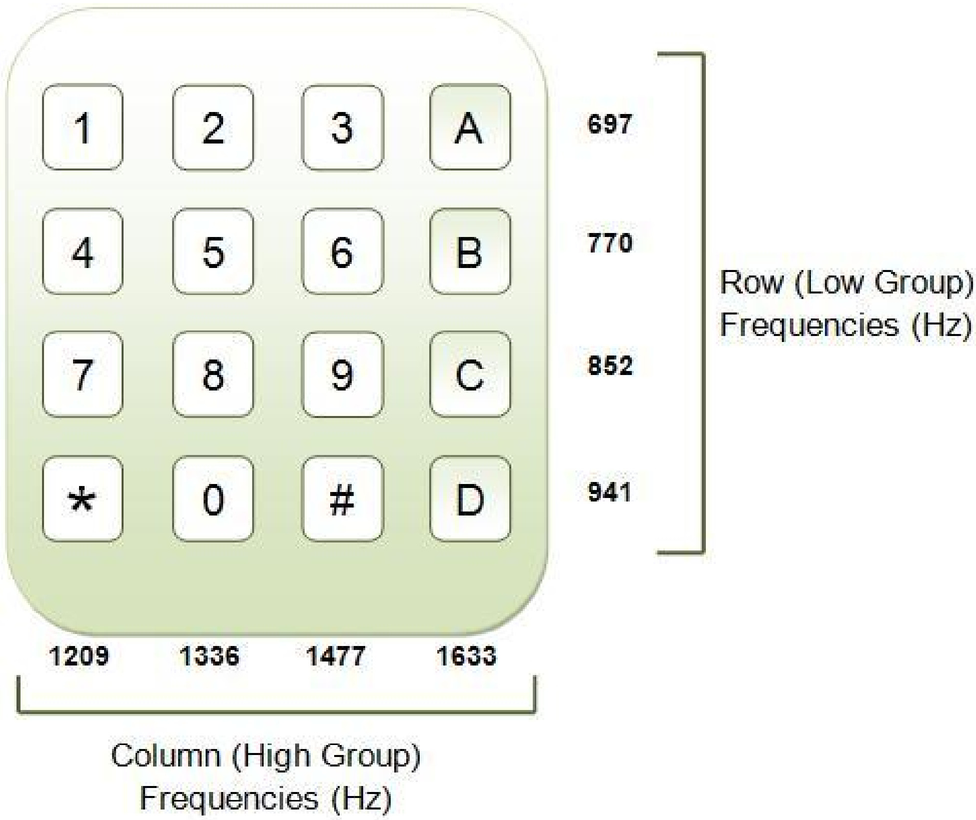
> [...] Considerando que, se Meucci tivesse sido capaz de pagar a taxa de US$ 10 para manter a intenção de patente depois de 1874, nenhuma patente poderia ter sido concedida a Bell: agora, por conseguinte, fica aqui
> *Decidido* que é do entendimento desta Câmara dos Deputados que deve-se dar apreço à vida e às realizações de Antonio Meucci, e seu trabalho para a invenção do telefone deve ser reconhecido.

O telefone é um aparelho eletroacústico que permite a transformação de energia acústica em energia elétrica, e vice-versa. Inicialmente, os primeiros telefones eram conectados a uma central manual, operada por uma telefonista que necessitava comutar os pontos manualmente para conectar um usuário ao outro. A partir do surgimento das centrais automáticas os telefones passaram a ser providos de "discos" para o envio da "sinalização decádica", que consiste de 10 pulsos.

No início da década de 1970 começaram a ser utilizados os telefones com teclado eletrônico, mais práticos e rápidos. Primeiramente os pulsos decádicos continuaram sendo utilizados pelos telefones com teclados, que codificavam as teclas apertadas. Posteriormente, com a nova sinalização DTMF (Dual-Tone Multi-Frequency) o envio dos sinais ganhou ainda mais velocidade.

A sinalização DTMF, que utiliza-se de tons de duas frequências na discagem (teclagem) dos telefones mais modernos, foi desenvolvida nos laboratórios Bell Labs, cujo fundador foi Alexander Graham Bell.

Figura B.4: Teclado DTMF



Fonte: http://www.engineersgarage.com/tutorials/dtmf-dual-tone-multiple-frequency (29/07/2014)

Na Figura B.4, temos representadas na última coluna as "frequências baixas", e na última linha as "frequências altas". O tom de discagem final é a frequência obtida da combinação de uma frequência baixa com uma frequência alta, correspondente à tecla pressionada pelo usuário. Assim, teremos uma soma de duas senóides para compor o tom relativo ao número (ou símbolo) discado. Note que a coluna que possui as letras A, B, C e D não estão presentes nos telefones comuns. Isto porquê a frequência de 1633 Hz é reservada para testes e medidas de caráter técnico.

A escolha destas frequências para compor a sinalização DTMF deve-se principalmente pela baixa probabilidade de se produzir estas combinações de frequências com a voz humana.

Atualmente, com o uso crescente da telefonia pela internet, a tecnologia VoIP (Voice over IP) vem sendo muito difundida, e dispositivos que permitem a conexão de um telefone convencional à internet, os ATAs (Adaptadores para telefones analógicos) estão tornando-se mais comuns entre os usuários de telefones.

Em telefonia, a sinalização acústica consiste em uma série de sinais audíveis emitidos pela central telefônica para o usuário. Entre os sinais acústicos em telefonia temos o "tom de discagem", também chamado de "linha de discagem" ou "sinal de linha contínuo". O tom de discagem é o sinal utilizado para indicar que a central telefônica reconheceu o sinal de "off-hook"(telefone fora do gancho), estando pronta para aceitar uma chamada.

Cada país possui características próprias definidas para o sinal referente ao tom de discagem. Por exemplo, em Singapura a frequência do sinal relativo ao tom de discagem é de 270 Hz, e na Bélgica é de 450 Hz. Nos Países Baixos e nos Estados Unidos, o tom de discagem é determinado por um sinal formado pela combinação de duas frequências, 150 Hz e 450 Hz, e 350 Hz e 440 Hz, respectivamente.

No Brasil, a frequência adotada é de 425 Hz, com uma margem de tolerância ± 25 Hz, conforme a "Prática Telebrás 210-110-704 - Especificações de Sinalização Acústica para a Rede Nacional de Telefonia" (Anexo E). Logo, ao tirarmos o telefone do gancho e o colocarmos próximo ao ouvido, estaremos ouvindo um tom que está em uma faixa de frequência de 400 Hz a 450 Hz, aproximadamente.

Muitos músicos brasileiros acreditam, erroneamente, que o tom do telefone (tom de discagem) é padronizado na frequência da nota lá, em 440 Hz. Isso acontece, provavelmente, pela confusão quando se faz a comparação com as frequências de tom de discagem em outros países. Como já vimos, nos Estados Unidos uma das frequências utilizadas na composição do sinal é exatamente 440 Hz. De certa forma, não estaria totalmente equivocado o músico que se utiliza do tom de discagem do telefone para a afinação de seu instrumento, visto que a margem de tolerância na frequência é pequena.

Além do tom de discagem, utilizam também a frequência de 425 Hz o "tom de controle de chamada", o "tom de ocupado", o "tom de número inacessível", o "tom de aviso de chamada em espera" e o "tom de aviso de programação". O que diferencia um sinal do outro é a cadência (ritmo) do tom. Já o "tom de advertência de telefone público", por exemplo, que avisa o usuário da coleta do último crédito, consiste numa frequência de 800 Hz, com margem de tolerância de $\pm$120 Hz.

Para o telefone do usuário chamado é enviado pela central telefônica um sinal denominado "corrente de toque", que se utiliza de uma frequência de 25 Hz, com uma margem de tolerância de $\pm 10\%$. Também através da especificação da Prática Telebrás 210-110-704, a forma de onda deste sinal deve ser senoidal.

C APÊNDICE - BREVE TUTORIAL DO PROGRAMA AUDACITY

O software livre Audacity é um editor de áudio, disponível para Windows, Mac OS X e Linux. Suas principais funções são a gravação e a edição de sons gravados ou importados de outras fontes, também permitindo a adição de efeitos. Os formatos utilizados para exportação dos arquivos de áudio são vários. Utilizaremos o formato livre MP3.

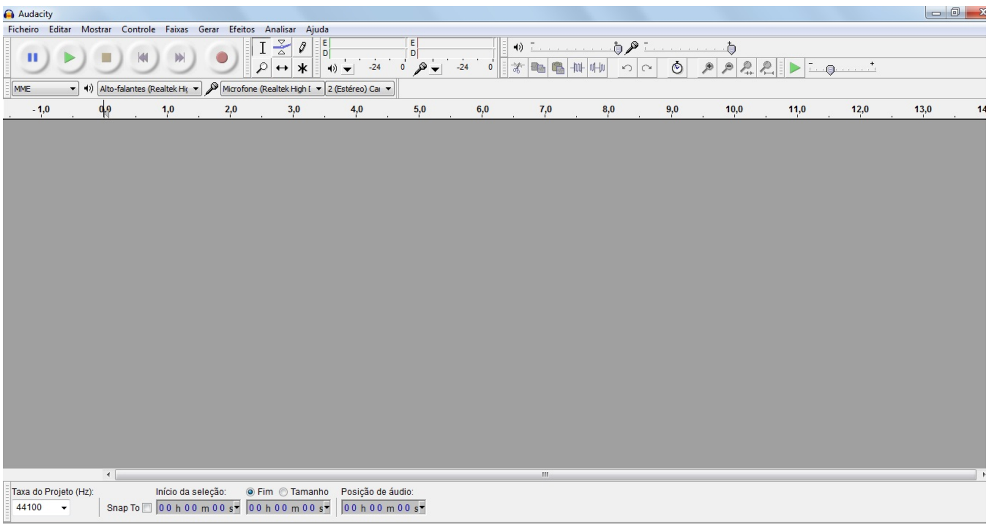
Você pode encontrar gratuitamente o software livre Audacity para download no endereço eletrônico "http://www.baixaki.com.br", ou então no próprio site do programa Audacity: http://audacity.sourceforge.net/.

Faça o download do software Audacity e instale-o em seu computador. Apesar da grande quantidade de ferramentas deste aplicativo, neste breve tutorial trabalharemos com as ferramentas mais básicas, o suficiente para o desenvolvimento das atividades 1 e 2.

C.1 CONHECENDO O AUDACITY

Ao abrir o programa, visualize sua tela de abertura (Figura C.1), onde as principais ferramentas se distribuem nas barras superiores. Ficheiros de áudio em mono (um canal) abrirão uma tela gráfica, e em estéreo abrirão automaticamente duas telas gráficas.

Figura C.1: Software Audacity - Tela de Abertura

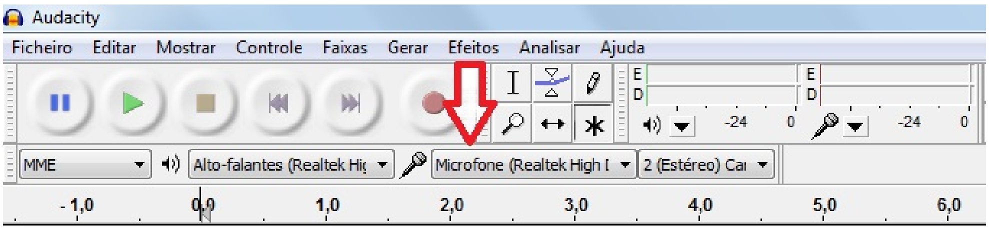


Fonte: o próprio autor

C.2 Selecionando a entrada de áudio

Para iniciar o processo de gravação de som através de um microfone (embutido no computador ou utilizando-se de um fone headset, por exemplo), certifique-se que o dispositivo de entrada de som selecionado é "microfone", no botão de seleção de entrada de áudio (Figura C.2). Normalmente, quando se abre o Audacity a seleção padrão para a entrada de áudio é "microfone".

Figura C.2: Software Audacity - Detalhe - Seleção de microfone

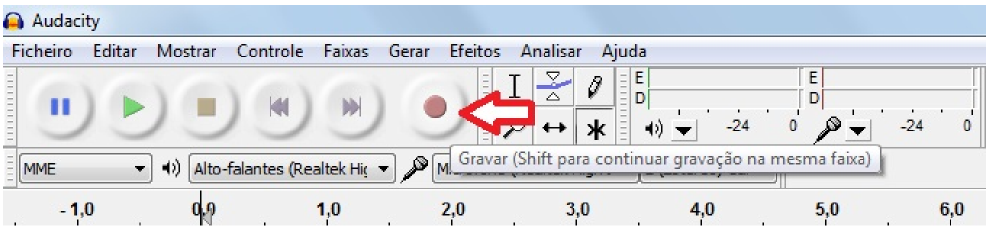


Fonte: o próprio autor

C.3 Gravando

Para fazer a gravação de uma fonte externa, providencie um ambiente livre de ruídos próximos do microfone e da fonte de som. Posicione a fonte de som bem próxima do microfone, e estabilize-a, para evitar inconsistências de volume ou intensidade do som capturado. Para iniciar a gravação, clique no botão "gravar"(Figura C.3), que se encontra na barra de ferramentas imediatamente abaixo da barra de menus.

Figura C.3: Software Audacity - Detalhe - Gravar

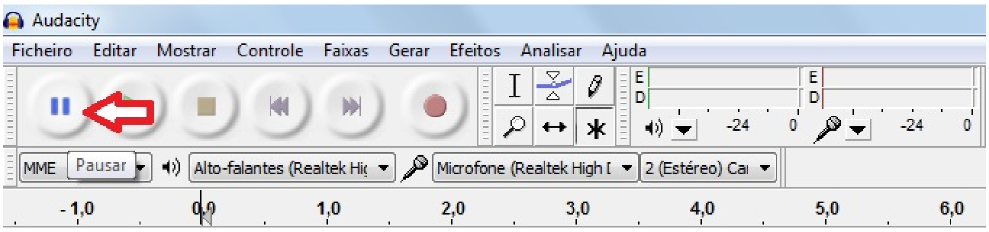


Fonte: o próprio autor

C.4 Pausar ou parar a gravação

A opção de pausar a gravação é acionada pelo botão "pausar"(Figura C.4).

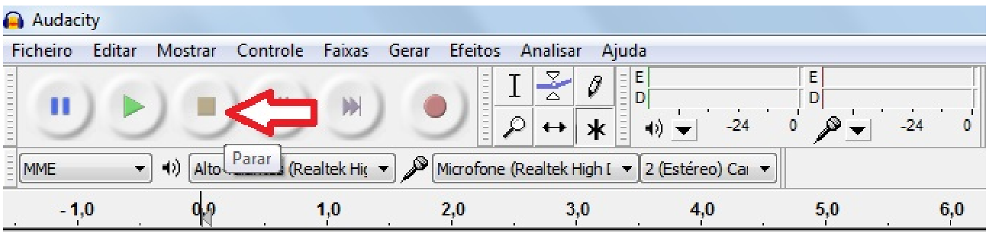
Figura C.4: Software Audacity - Detalhe - Pausar



Fonte: o próprio autor

Para terminar a gravação, deve-se clicar no botão "parar"(Figura C.5) para encerrar a mesma. Estes dois botões se encontram também na mesma barra de ferramentas do botão "gravar".

Figura C.5: Software Audacity - Detalhe - Parar

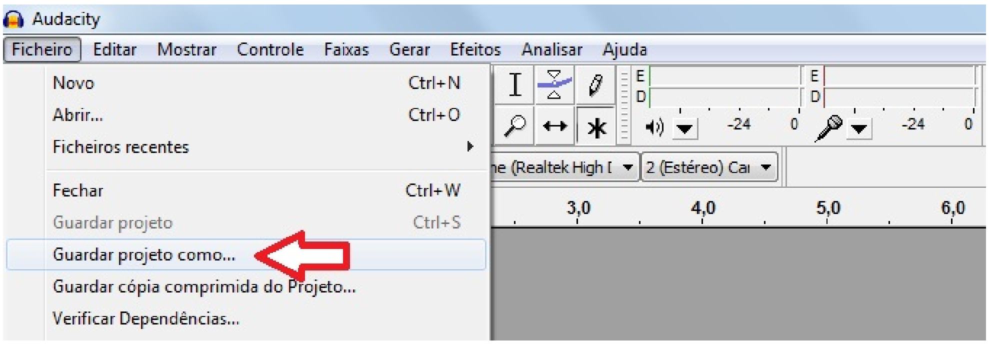


Fonte: o próprio autor

C.5 SALVANDO O ÁUDIO COMO FICHEIRO DO AUDACITY

Após a gravação, o ideal é salvar o arquivo no disco rígido do computador ou dispositivo móvel (pen-drive), evitando que se perca. Para isso, você deve clicar no menu "Ficheiro", e selecionar a opção "guardar projeto como..."(Figura C.6). O programa abrirá uma janela, informando-lhe que salvando o arquivo com a extensão *.aup o mesmo só poderá ser aberto e manipulado no próprio Audacity. Assim, clique em "OK", na janela de informação, para dar o prosseguimento de salvar o arquivo.

Figura C.6: Software Audacity - Detalhe - Salvar Projeto



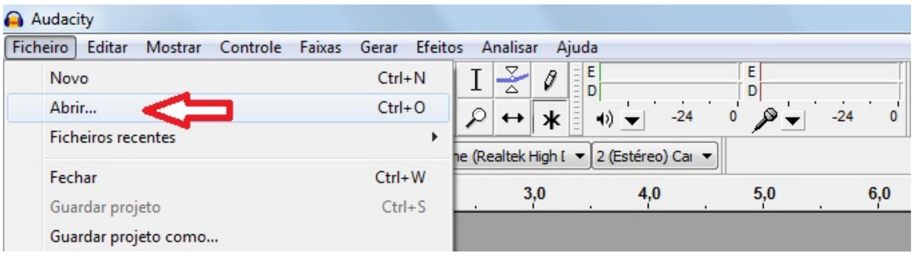
Fonte: o próprio autor

A seguir, o Audacity abrirá uma janela com o nome de "Guardar Projeto", nela você deve escolher o local para salvar o projeto, e o nome que deseja dar a ele. Procure criar uma pasta específica para o seu projeto de áudio, e dê a ela um nome que identifique bem o seu trabalho. Note que já estará selecionada a extensão Projetos do Audacity (*.aup), de modo que não se deve alterar o item "tipo de arquivo".

C.6 ABRINDO UM FICHEIRO DO AUDACITY

Quando quiser trabalhar com um arquivo do projeto que já foi salvo, basta, no menu "Ficheiro", selecionar "Abrir..."(Figura C.7).

Figura C.7: Software Audacity - Detalhe - Abrir Ficheiro

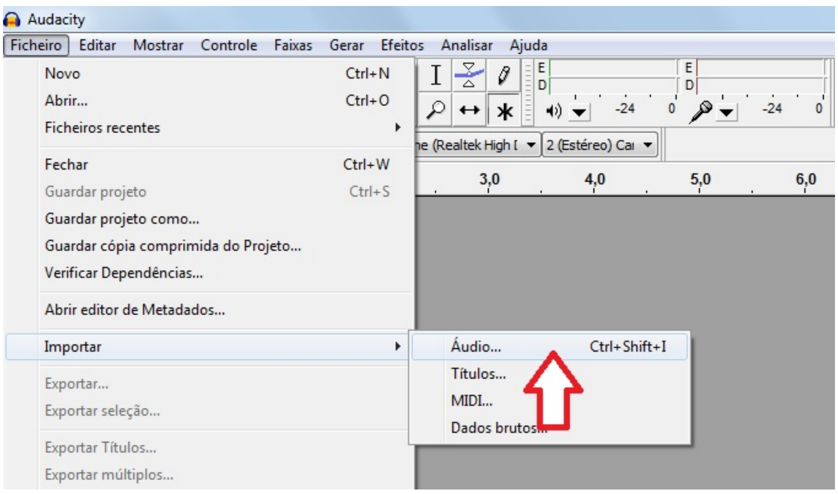


Fonte: o próprio autor

C.7 IMPORTANDO UM ARQUIVO DE ÁUDIO

Caso você não queira fazer a captura de um som externo, mas sim utilizar um arquivo de áudio já gravado e salvo (não como projeto do Audacity), deverá proceder a importação. Para importar um arquivo de áudio, este deve estar em algum dos formatos com os quais o Audacity trabalha, por exemplo, MP3. No menu "Ficheiro", selecione "Importar". Então, das opções oferecidas, selecione "Áudio", e clique (Figura C.8).

Figura C.8: Software Audacity - Detalhe - Importar Áudio



Fonte: o próprio autor

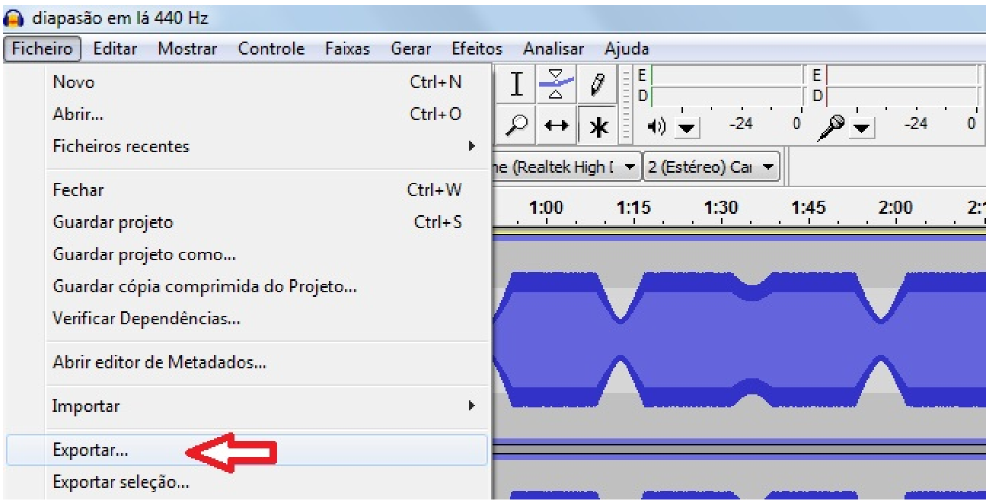
Uma janela se abrirá para que você possa procurar o ficheiro que deseja importar. Encontrando-o, basta clicar no seu ícone que o seu arquivo de áudio estará importado para a o seu projeto atual no programa Audacity.

C.8 EXPORTANDO UM ARQUIVO DE ÁUDIO

Quando o seu projeto estiver terminado, você poderá então exportar o arquivo de áudio para um formato em que seja possível reproduzi-lo conforme suas necessidades. Conforme já mencionamos, o formato que utilizaremos em nossa atividade é o MP3.

No menu "Ficheiro", selecione a opção "Exportar...", clicando nesta (Figura C.9). Abrirá então uma janela para que você escolha um local no computador (ou pen-drive) para o seu arquivo de áudio ser exportado (salvo). Também nesta janela você deverá escolher um nome para este arquivo (recomeda-se escolher um nome de arquivo diferente do utilizado para o projeto), e selecionar o "tipo" de formato de arquivo como "MP3".

Figura C.9: Software Audacity - Detalhe - Exportar Áudio

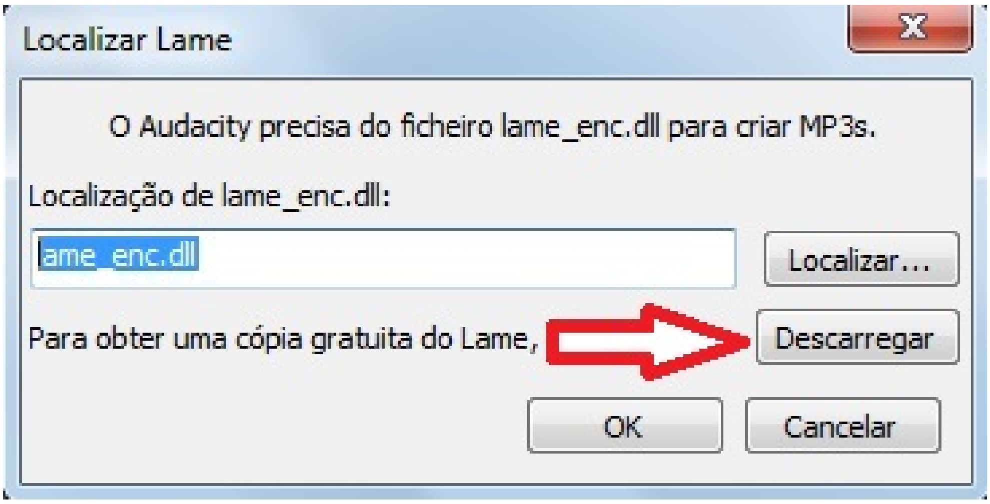


Fonte: o próprio autor

Por questões de autenticidade, o ficheiro "lame_enc.dll" não vem junto com o instalador, necessitando que sua instalação seja feita num segundo passo. Este arquivo é importante, pois sem ele você não poderá exportar seus trabalhos no formato MP3.

Para isso, na primeira vez que for exportar um arquivo no formato MP3, clique no menu "Ficheiro" e selecione a opção "Exportar". Selecione o tipo "Ficheiros MP3" e escolha um nome para salvar o arquivo. O programa então abrirá uma janela onde terá a seguinte mensagem: "O Audacity precisa do ficheiro lame_enc.dll para criar MP3s", como na Figura C.10.

Figura C.10: Software Audacity - Solicitação do Ficheiro Lame



Fonte: o próprio autor

Como indicado nessa janela, clique no botão "Descarregar", e o navegador de seu computador abrirá (seu computador deve estar conectado à internet), direcionado para a página específica do ficheiro "lame", do software Audacity.

Nesta página da internet você deverá fazer o download do instalador "Lame v3.99.3", ou versão posterior, indicado para seu sistema operacional (Windows, Mac OS X ou Linux). Depois, basta apenas instalar o ficheiro, que será reconhecido pelo Audacity, e então a instalação estará completa.

C.9 Utilizando a "Ferramenta de seleção"

Os gráficos exibidos no programa Audacity marcam a amplitude da onda de áudio em função do tempo. Para selecionar um ponto específico do gráfico do espectro de áudio, ou mesmo uma parte deste gráfico em relação ao eixo horizontal, você pode utilizar a "Ferramenta de seleção".

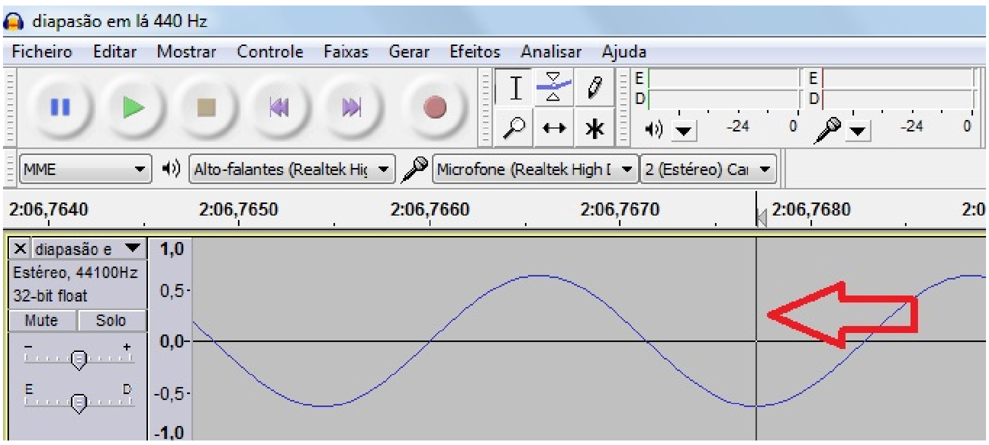
Na parte superior da tela do programa Audacity, você encontrará um botão com o símbolo "I"(Figura C.11).

Figura C.11: Software Audacity - Ferramenta de seleção - botão

Fonte: o próprio autor

Clicando nele, o apontador do mouse do computador estará no "modo seleção", e poderá navegar pelos menus ou efetuar uma seleção. Para selecionar um ponto específico no gráfico, basta agora clicar nele, e uma linha vertical marcará a posição, como mostra a Figura C.12.

Figura C.12: Software Audacity - Ferramenta de seleção - posição selecionada

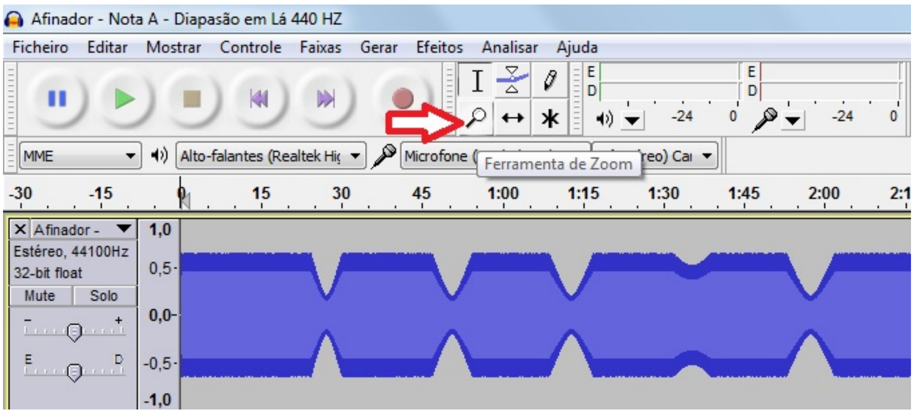


Fonte: o próprio autor

C.10 UTILIZANDO A FERRAMENTA "ZOOM"

Para ampliar o espectro da trilha de áudio, é necessário utilizar a ferramenta "zoom", cujo botão encontra-se na parte superior da tela do programa, (Figura C.13).

Figura C.13: Software Audacity - Detalhe - Zoom

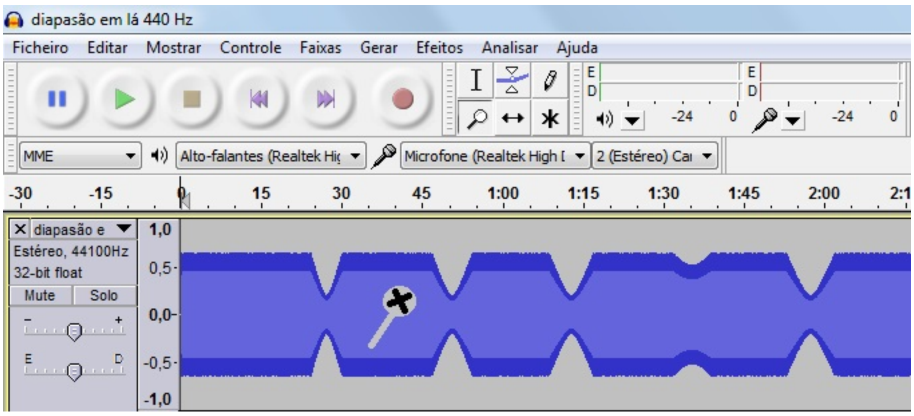


Fonte: o próprio autor

Selecione então a opção "zoom", e o cursor mudará sua forma para a de uma pequena "lupa" com o sinal de (+) no centro da lente da mesma.

Agora posicione esta "lupa" sobre o espectro da trilha de áudio (Figura C.14), e clique com o botão esquerdo (aumentar "zoom") do seu mouse quantas vezes for necessário para que a visualização se torne adequada ao seu trabalho.

Figura C.14: Software Audacity - Detalhe - Zoom (lupa)



Fonte: o próprio autor

Se for necessário retroceder o processo, basta clicar com o botão direito do mouse sobre o espectro da trilha de áudio, que o mesmo diminuirá o "zoom".

C.11 Mais informações

Terminamos por aqui este breve tutorial do software editor de áudio Audacity. Para maiores informações, detalhes sobre o programa e explicações sobre suas várias outras ferramentas, você pode utilizar uma das opções do menu "Ajuda", no próprio programa Audacity.

D ANEXO - RESOLUÇÃO N^0 269 - CÂMARA DOS REPRESENTANTES - EUA

IV

107TH CONGRESS
1ST SESSION

H. RES. 269

Expressing the sense of the House of Representatives to honor the life and achievements of 19th Century Italian-American inventor Antonio Meucci, and his work in the invention of the telephone.

IN THE HOUSE OF REPRESENTATIVES

OCTOBER 17, 2001

Mr. FOSSELLA submitted the following resolution; which was referred to the Committee on Government Reform

---

RESOLUTION

Expressing the sense of the House of Representatives to honor the life and achievements of 19th Century Italian-American inventor Antonio Meucci, and his work in the invention of the telephone.

Whereas Antonio Meucci, the great Italian inventor, had a career that was both extraordinary and tragic;

Whereas, upon immigrating to New York, Meucci continued to work with ceaseless vigor on a project he had begun in Havana, Cuba, an invention he later called the ‘‘teletrofono’’, involving electronic communications;

Whereas Meucci set up a rudimentary communications link in his Staten Island home that connected the basement with the first floor, and later, when his wife began to suffer from crippling arthritis, he created a permanent link between his lab and his wife's second floor bedroom;

Whereas, having exhausted most of his life's savings in pursuing his work, Meucci was unable to commercialize his invention, though he demonstrated his invention in 1860 and had a description of it published in New York's Italian language newspaper;

Whereas Meucci never learned English well enough to navigate the complex American business community;

Whereas Meucci was unable to raise sufficient funds to pay his way through the patent application process, and thus had to settle for a caveat, a one year renewable notice of an impending patent, which was first filed on December 28, 1871;

Whereas Meucci later learned that the Western Union affiliate laboratory reportedly lost his working models, and Meucci, who at this point was living on public assistance, was unable to renew the caveat after 1874;

Whereas in March 1876, Alexander Graham Bell, who conducted experiments in the same laboratory where Meucci's materials had been stored, was granted a patent and was thereafter credited with inventing the telephone;

Whereas on January 13, 1887, the Government of the United States moved to annul the patent issued to Bell on the grounds of fraud and misrepresentation, a case that the Supreme Court found viable and remanded for trial;

Whereas Meucci died in October 1889, the Bell patent expired in January 1893, and the case was discontinued as moot without ever reaching the underlying issue of the true inventor of the telephone entitled to the patent; and

Whereas if Meucci had been able to pay the $10 fee to maintain the caveat after 1874, no patent could have been issued to Bell: Now, therefore, be it

Resolved, That it is the sense of the House of Representatives that the life and achievements of Antonio Meucci should be recognized, and his work in the invention of the telephone should be acknowledged.

○

E ANEXO - PRÁTICA TELEBRÁS 210-110-704 - ESPECIFICAÇÕES DE SINALIZAÇÃO ACÚSTICA PARA A REDE NACIONAL DE TELEFONIA

- PRÁTICA -

ESPECIFICAÇÕES DE SINALIZAÇÃO ACÚSTICA PARA A REDE NACIONAL DE TELEFONIA

SUMÁRIO PÁG.

1. GENERALIDADES

1.01 Este documento tem por objetivo estabelecer as características de sinalização acústica e corrente de toque dos equipamentos telefônicos públicos a serem instalados no país.

1.02 As especificações contidas nesta Prática são condições necessárias a serem satisfeitas para permitir a integração dos equipamentos de comutação telefônica pública ao Sistema Nacional de Telecomunicações e aplicam-se, sem exceção, a todos os equipamentos.

2. REFERÊNCIAS

2.01 SDT 210-220-702 (PADRÃO) - "Especificações de Sinalização entre Registradores para a Rede Nacional de Telefonia Via Terrestre".

2.02 SDT 210-110-703 (PADRÃO) - "Especificações de Sinalização de Linha para a Rede Nacional de Telefonia Via Terrestre".

2.03 SDT 210-110-711 (PADRÃO) - "Especificação de Sistema de Sinalização 5S para a Rede Nacional de Telefonia Via Satélite".

2.04 SDT 210-110-725(PADRÃO) - "Interfuncionamento entre Sistemas de Sinalização para a Rede Nacional de Telefonia".

2.05 SDT 220-001-722(PADRÃO) - "Especificações Gerais - Serviços Suplementares".

2.06 SDT 220-001-701(PADRÃO) - "Especificações Gerais - Temporização para Equipamentos de Comutação".

2.07 SDT 201-100-001 - "Glossário de Termos Técnicos de Telecomunicações".

2.08 SDT 240-550-700 - "E. G. Geradores Estáticos de Sinais Acústicos, Corrente de Toque e Pulsos de Terra e Negativos".

2.09 SDT 220-250-717 - "CPA-T Requisitos Mínimos de Supervisão de Tempo".

3. CAMPO DE APLICAÇÃO

3.01 Esta Prática aplica-se a todas as empresas do Sistema TELEBRÁS.

4. DEFINIÇÕES

4.01 CORRENTE DE TOQUE (CT) - é o sinal enviado para o aparelho telefônico do assinante chamado, indicando que há uma chamada dirigida ao mesmo.

4.02 TOM DE DISCAR (TD) - é o sinal enviado ao terminal chamador após a ocupação do circuito de linha associado, para que seja iniciada a marcação dos algarismos do assinante chamado ou acesso à programação de um serviço suplementar.

4.03 TOM DE CONTROLE DE CHAMADA (TCC) - é o sinal enviado pela central de destino ao terminal chamador, para indicar que a cadeia de comutação foi completada e o terminal chamado está na condição de livre.

4.04 TOM DE OCUPADO (TO) - é o sinal enviado ao terminal chamador, indicando que o terminal chamado está na condição de ocupado.

4.05 TOM DE NÚMERO INACESSÍVEL (TNI) - é o sinal enviado ao terminal chamador, indicando que a chamada não pode ser completada ou ter prosseguimento.

4.06 TOM DE AVISO DE CHAMADA EM ESPERA (TCE) - é o sinal enviado por uma central CPA aos terminais envolvidos em uma conversação ou, preferencialmente, apenas ao terminal chamado que dispõe do serviço "chamada em espera", indicando a existência de outra chamada.

4.07 TOM DE AVISO DE PROGRAMAÇÃO (TAP) - é o sinal enviado por uma central CPA ao terminal chamador, em substituição ao Tom de Discar, informando-lhe, adicionalmente, que está inibido por programação o recebimento de tráfego terminado.

4.08 TOM DE ADVERTÊNCIA DE TELEFONE PÚBLICO (TATP) - é o sinal enviado por um telefone público, indicando o fim de um período de taxação e a necessidade de suplementação de novos créditos para evitar o desligamento da chamada.

5. CARACTERÍSTICAS DA CORRENTE DE TOQUE

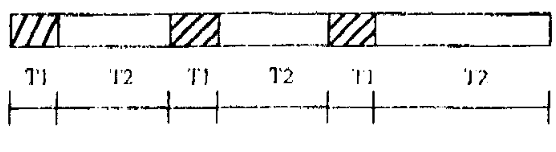
5.01 A freqüência utilizada deve ser (25 ± 2,5) Hz.

5.02 A forma de onda deste sinal deve ser senoidal, tolerando-se uma distorção de até 15% (quinze por cento), para geradores dinâmicos, e de até 10% (dez por cento), para geradores estatísticos, medida na saída do equipamento gerador de corrente de toque (CT).

5.03 A cadência da corrente de toque deve ser:

a) período de toque de 1000 ms ± 10%.

b) período de silêncio de 4000 ms ± 10%.



T1 = (1000 +/- 100) ms
T2 = (4000 +/- 400) ms

Figura 1
Cadência da Corrente de Toque

5.04 O primeiro período de toque deve ser iniciado tão logo seja dado o comando para conexão da corrente de toque imediata, tolerando-se, no entanto, um atraso máximo de 100 ms.

5.05 A duração do primeiro período de toque, comandado pelos órgãos de controle, deve ser de, no mínimo, 100 ms.
5.06 A duração do primeiro período de silêncio deve ser menor ou igual a 4.400 ms.

5.07 A corrente de toque deve ser interrompida tão logo o assinante chamado atenda, de tal forma que ele não a ouça através da cápsula receptora. É tolerado um atraso máximo de 300 ms em relação ao instante do atendimento.

5.08 A tensão do sinal, sem carga, em regime de emissão contínua na saída do respectivo gerador, deve ser de (80 ± 10 VRMS), sobreposta a um potencial de (-48 ± 4) VCC.

6. CARACTERÍSTICAS DOS SINAIS ACÚSTICOS

(A) Tom de Discar - TD

6.01 A freqüência utilizada deve ser de (425 ± 25) Hz.

6.02 O regime de emissão do tom de discar deve ser contínuo.

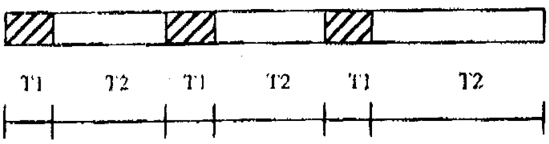
(B) Tom de Controle de Chamada - TCC

6.03 A freqüência utilizada deve ser de (425 ± 25) Hz.

6.04 O tom de controle de chamada deve ser um sinal com a seguinte cadência:

a) período de tom de 1000 ms ±10%.

b) período de silêncio de 4000 ms ± 10%.



T1 = (1000 +/- 100) ms
T2 = (4000 +/- 400) ms

Figura 2
Tom de Controle de Chamada

6.05 O primeiro período de tom deve ser iniciado tão logo seja tomado o circuito de linha do assinante chamado, tolerando-se, no entanto, um atraso máximo de 100 ms.

6.06 A duração do primeiro período de tom, comandado pelos órgãos de controle, deve ser de, no mínimo, 100 ms.

6.07 A duração do primeiro período de silêncio deve ser menor ou igual a 4.400 ms.

6.08 O tom de controle de chamada deve ser interrompido com o atendimento pelo assinante chamado.

(C) Tom de Ocupado - TO

6.09 Este sinal deve ser enviado diretamente pelo circuito de linha do assinante ou a partir de um equipamento centralizado via rede de comutação (com supervisão de tempo), conforme SDT 220-001-701 - "Especificações Gerais - Temporizações para Equipamentos de Comutação".

6.10 O sinal deve ser enviado diretamente pelo circuito de linha do assinante, nas seguintes condições:

a) quando o assinante chamado estiver na condição de ocupado;

b) quando houver congestionamento;

c) quando ocorrer término de temporização em algum ponto da cadeia estabelecida;

d) quando não forem observadas as regras de discagem;

e) quando o terminal que retém a chamada desligar.

6.11 A freqüência utilizada deve ser de (425 ± 25) Hz.

6.12 O tom de ocupado deve ser um sinal com a seguinte cadência:

a) período de tom de 250 ms ± 10%.

b) período de silêncio de 250 ms ± 10%.

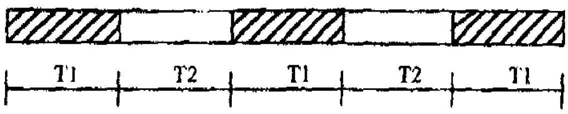


Figura 3
Tom de Ocupado

(D) Tom de Número Inacessível - TNI

6.13 Em centrais que não disponham de serviço de interceptação e/ou máquinas anunciadoras, este sinal deve ser enviado, nas seguintes condições:

a) quando o número chamado for inexistente;

b) quando o número do assinante chamado for mudado;

c) quando for discado o prefixo nacional seguido de um número nacional não acessível à área de origem do assinante chamador;

d) quando o acesso ao número chamado, for negado por categoria ou discriminação do assinante chamador;

e) quando o código local, regional ou nacional discado for inexistente.

Nota:

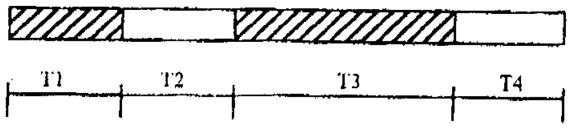
Admite-se para as centrais analógicas, o envio de tom de ocupado ao invés de tom de número inacessível.

6.14 A freqüência utilizada deve ser de (425 ± 25) Hz.

6.15 O tom de número inacessível deve ser um sinal com a seguinte cadência:

a) período de tom de 250 ms ± 10%, alternando com 750 ms ± 10%.

b) período de silêncio de 250 ms ± 10% entre os períodos de tom.



T1 = (250 +/- 25) ms
T2 = T4 = (250 +/- 25) ms
T3 = (750 +/- 75) ms

Figura 4
Tom de Número Inacessível

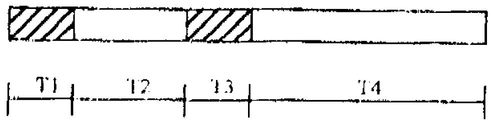
(E) <u>Tom de Aviso de Chamada em Espera - TCE</u>

6.16 A freqüência utilizada deve ser de (425 ± 25) Hz.

6.17 O tom de aviso de chamada em espera deve ser um sinal com a seguinte cadência:

a) período de tom de 60 ms ± 10%.

b) período de silêncio de 250 ms ± 10%, alternando com 5000 ms ± 10% entre os períodos de tons.



T1 = T3 = (60 +/- 6) ms
T2 = (250 +/- 25) ms
T4 = (5000 +/- 500) ms

Figura 5
Tom de Aviso de Chamada em Espera

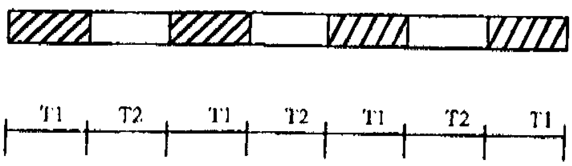
(F) Tom de Aviso de Programação - TAP

6.18 A freqüência utilizada deve ser de (425 ± 25) Hz.

6.19 O tom de aviso de programação deve ser um sinal com a seguinte cadência:

a) período de tom de 125 ms ± 10%.

b) período de silêncio de 125 ms ± 10%.



T1 = (125 +/- 12,5) ms
T2 = (125 +/- 12,5) ms

Figura 6
Tom de Aviso de Programação

(G) Tom de Advertência de Telefone Público - TATP

6.20 O telefone público e semi-público na posição "público" devem enviar ao usuário um tom de advertência imediatamente após a coleta do último crédito. O sinal deve ser gerado pelo próprio telefone e consistir de:

- Freqüência: (800 ± 120) Hz;
- Forma de onda: retangular;
- Fator: 2:1;
- Duração: (450 ± 150) ms;
- Nível: (200 ± 40) mVpp;
- Chaveada por uma onda quadrada de: (10 ± 2) Hz.

7. CARACTERÍSTICAS DE TRANSMISSÃO DOS SINAIS ACÚSTICOS

(A) Nível

7.01 O nível deve ser medido em regime de emissão contínua, nos pontos indicados, com tensão nominal de alimentação de -48 VCC, em quaisquer condições de tráfego a que se submeta a central, devem estar compreendidos entre os valores constantes na tabela abaixo

Sinais	Níveis	Centrais Trânsito	Centrais locais Juntores 2 fios	Centrais locais Juntores 2/4 fios e vice-versa	Ponto de Medida	Forma de onda / Distorção
TO, TD, TCC, TNI, TAP	-5 dBm - 20 dBm		X	X	DG de assinante	
TO, TCC TNI	- 5 dBm - 11 dBm		X		DG para o Juntor	
TO, TCC, TNI	- 12 dBm - 18 dBm	X		X	DA	
TCE	- 14,5 a - 22 dBm		X	X	DG de assinante	
TATP	- 15 dBm +/- 2 dBm				Capsula receptora	
TD, TO, TCC, TNI TCE, TAP					Gerador de tom	Senoidal / 5 %

(B) Isolamento entre Tons

7.02 Deverá ser assegurado que o isolamento entre quaisquer dos tons não seja inferior a 67 dB, medidos na saída dos terminais de linha do assinante, no distribuidor geral (DG).

8. OBSERVAÇÃO

8.01 Quaisquer sugestões, críticas ou outro tipo de comentário, visando correções de eventuais deficiências ou que possam contribuir para o aprimoramento desta Prática, devem ser dirigidos, adequadamente fundamentados, ao Departamento de Engenharia da Diretoria de Planejamento e Engenharia da TELEBRÁS.

9. APROVAÇÃO E DATA DE VIGÊNCIA

9.01 Este documento foi aprovado pelo Gerente do Departamento de Engenharia da TELEBRÁS em 11/ 6 /1996 e entrará em vigor a partir desta data