



UNIVERSIDADE
ESTADUAL DE LONDRINA

ROMÁRIO TOMILHERO FRIAS

**SISTEMA DE BRESSE COM ACOPLAMENTO
TERMOELÁSTICO NO MOMENTO FLETOR E LEI DE
FOURIER**

Londrina

2020

ROMÁRIO TOMILHERO FRIAS

**SISTEMA DE BRESSE COM ACOPLAMENTO
TERMOELÁSTICO NO MOMENTO FLETOR E LEI DE
FOURIER**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

Orientador: Profa. Dra. Michele de Oliveira Alves

Londrina
2020

**Catálogo elaborado pela Divisão de Processos Técnicos da Biblioteca Central da
Universidade Estadual de Londrina**

Dados Internacionais de Catalogação -na-Publicação (CIP)

Frias, Romário Tomilhero.

Sistema de Bresse com Acoplamento Termoelástico no Momento Fletor e Lei de Fourier / Romário Tomilhero Frias. – Londrina, 2020.

88 f. : il.

Orientador: Michele de Oliveira Alves.

Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional, 2020.

Inclui Bibliografia.

1. Sistema de Bresse - Tese. 2. Lei de Fourier - Tese. 3. Semigrupos de Operadores Lineares - Tese. 4. Comportamento Assintótico. -Tese. I. Alves, Michele de Oliveira. II. Universidade Estadual de Londrina. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional. III. Título.

CDU 51

ROMÁRIO TOMILHERO FRIAS

**SISTEMA DE BRESSE COM ACOPLAMENTO
TERMOELÁSTICO NO MOMENTO FLETOR E LEI DE
FOURIER**

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática Aplicada e Computacional.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Michele de Oliveira Alves
Universidade Estadual de Londrina

Profa. Dra. Valéria Neves Domingos Cavalcanti
Universidade Estadual de Maringá

Prof. Dr. Marcio Antonio Jorge da Silva
Universidade Estadual de Londrina

Londrina, 30 de julho de 2020.

*Dedico este trabalho em memória de meu avô,
Sebastião Tomilhero Frias.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família, por sempre me apoiar e acreditar em mim.

À minha orientadora, Prof. Dra. Michele de Oliveira Alves, por todos os ensinamentos, pelo incentivo e pelo apoio.

Aos professores do PGMAC.

À professora Valéria Neves Domingos Cavalcanti, ao professor Márcio Antonio Jorge da Silva e ao professor Adeval Lino Ferreira pelas contribuições nesse trabalho.

Aos colegas do PGMAC, em especial, ao Eduardo, à Jésika, ao Luiz e ao Gabriel, por acompanharem a minha trajetória e por terem me ajudado muito.

Às amigas de fora da universidade, em especial, ao Maurício, ao Maycon, à Tabaty, à Maiara e à Taynara.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

"...Vai, vai lá, não tenha medo do pior, eu sei que tudo vai mudar, você vai transformar o mundo ao seu redor, mas não vacila, muleque de vila..."
(Projota)

FRIAS, Romário Tomilhero. **Sistema de Bresse com acoplamento Termoelástico no Momento Fletor e Lei de Fourier** . 2020. 88. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

RESUMO

Neste trabalho estuda-se um sistema de Bresse com acoplamento termoelástico no momento fletor considerando a lei de Fourier para o fluxo de calor. O principal objetivo é fazer uma apresentação mais detalhada da existência, unicidade e comportamento assintótico do problema descrito em [8]. A teoria de semigrupos de operadores lineares é utilizada para garantir a existência e unicidade de solução. Uma condição necessária e suficiente é dada para a obtenção da estabilidade exponencial do semigrupo e verifica-se que sob certas condições obtém-se decaimento o polinomial da solução.

Palavras-chave: Sistema de Bresse. Lei de Fourier. Semigrupos de Operadores Lineares. Comportamento Assintótico.

FRIAS, Romário Tomilhero. **Sistema de Bresse com acoplamento Termoelástico no Momento Fletor e Lei de Fourier** . 2020. 88. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada e Computacional) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2020.

ABSTRACT

In this work we study a Bresse system with thermoelastic coupling in the bending moment considering the Fourier law for the heat flux. The main goal is to consider a more detailed presentation of the existence, uniqueness and asymptotic behavior of the problem described in [8]. The theory of semigroups of linear operators is used to guarantee the existence and uniqueness of the solution. A necessary and sufficient condition for the exponential stability of the semigroup is given and, under certain conditions, a polynomial decay of the solution is obtained.

Keywords: Bresse System. Fourier's Law. Semigroups of Linear Operators. Asymptotic Behavior.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	PRELIMINARES	15
2.1	ANÁLISE FUNCIONAL.....	15
2.2	ESPAÇOS L_p E DE SOBOLEV.....	18
2.3	SEMIGRUPOS LINEARES	23
2.4	DESIGUALDADE DE OBSERVABILIDADE PARA SISTEMAS DO TIPO BRESSE.....	26
3	SISTEMA DE BRESSE TERMOELÁSTICO	28
3.1	FORMULAÇÃO ABSTRATA.....	28
3.2	EXISTÊNCIA E UNICIDADE	36
4	ESTABILIDADE	50
4.1	ESTABILIDADE EXPONENCIAL.....	73
4.2	ESTABILIDADE POLINOMIAL PARA DADOS MAIS REGULARES.....	84
	REFERÊNCIAS	87

1 INTRODUÇÃO

O objetivo do presente trabalho é apresentar resultados descritos em [8] de uma forma didática e detalhada. Além disso, utilizando um resultado obtido em [15], melhoramos resultados estabelecidos em [8], no que concerne as taxas de decaimento polinomial, para o sistema termoelástico de Bresse.

O sistema de Bresse, é um sistema de equações diferenciais parciais que descreve o comportamento de uma viga arqueada fina, denominado com este nome em homenagem ao engenheiro francês Jacques Antoine Charles Bresse (1822-1883).



Figura 1.1: Jacques Antoine Charles Bresse (Fonte: [11], p.719).

Sem levar em consideração qualquer variação na temperatura, isto é, em sua forma isotérmica, o sistema de Bresse leva em consideração três funções que representam o deslocamento vertical, o ângulo de rotação da seção transversal e o deslocamento longitudinal, denotadas respectivamente por $\varphi(t, x)$, $\psi(t, x)$ e $w(t, x)$. Tais funções dependem de uma variável espacial $x \in [0, L]$ e uma temporal $t \geq 0$, onde L é o comprimento de uma linha de referência que atravessa o centro da viga. Para este caso, de acordo com Bresse em [3], as leis constitutivas do sistema são dadas por

$$\begin{cases} \rho_0 A \varphi_{tt} = Q_x + lN, \\ \rho_0 I \psi_{tt} = M_x - Q, \\ \rho_0 A w_{tt} = N_x - lQ, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde ρ_0 é a densidade, l é a curvatura inicial, A a área da seção transversal, I o momento de inércia da seção transversal (com respeito ao eixo vertical) e as funções Q , N e M representam a força de cisalhamento, a força axial e o momento fletor, respectivamente. Temos ainda que

$$\begin{cases} Q = GA(\varphi_x + \psi + lw), \\ N = EA(w_x - l\varphi), \\ M = El\psi_x, \end{cases} \quad (1.2)$$

onde G é o módulo de cisalhamento, h é o coeficiente de cisalhamento e E é o módulo da elasticidade.

Na figura 1.2, temos uma representação das funções φ , ψ e w presentes no sistema de Bresse. Após a deformação da viga, uma partícula P da linha de referência passa a ocupar a posição P' .

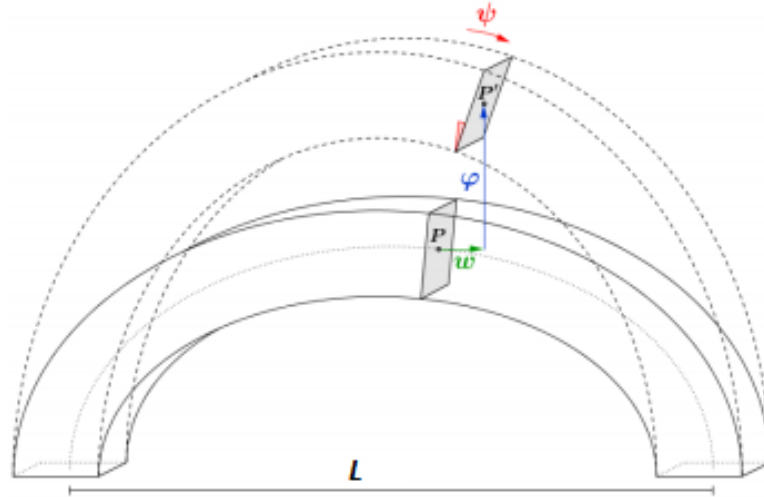


Figura 1.2: Viga arqueada fina (Fonte: [13], p.13).

Substituindo (1.1) em (1.2) obtemos o seguinte sistema conservativo de Bresse

$$\begin{cases} \rho_0 A \varphi_{tt} - GA(\varphi_x + \psi + lw)_x - lEA(w_x - l\varphi) = 0, \\ \rho_0 I \psi_{tt} - El\psi_{xx} + GA(\varphi_x + \psi + lw) = 0, \\ \rho_0 A w_{tt} - EA(w_x - l\varphi)_x + lGA(\varphi_x + \psi + lw) = 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

Para simplificar as notações consideremos

$$\rho_1 = \rho_0 A, \quad \rho_2 = \rho_0 I, \quad k = GA, \quad b = El, \quad k_0 = EA. \quad (1.4)$$

Assim, usando (1.4) temos que (1.3) pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) = 0, \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Mais recentemente, Lagnese, Leugering e Schmidt em [12] obtiveram um sistema mais geral que rege a movimentação de uma viga arqueada fina considerando mais uma função (ou mais de uma) que representa a variação da temperatura desta viga, tal sistema é denominado

como sistema termoelástico de Bresse.

No caso em que se considera o fluxo de calor agindo somente no ângulo de rotação, o sistema termoelástico é descrito por

$$\begin{cases} \rho_0 A \varphi_{tt} = Q_x + lN, \\ \rho_0 I \psi_{tt} = M_x - Q, \\ \rho_0 A w_{tt} = N_x - lQ, \\ \rho_0 c_v \theta_t = q_x - \gamma T_0 \psi_{tx}, \end{cases} \quad (1.6)$$

com leis termoelásticas constitutivas

$$\begin{cases} Q = GA(\varphi_x + \psi + lw), \\ N = EA(w_x - l\varphi), \\ M = EI\psi_x - \gamma\theta, \end{cases} \quad (1.7)$$

onde q representa o fluxo de calor, c_v é a capacidade térmica, T_0 é a temperatura de referência, γ é uma constante de acoplamento e as demais notações permanecem as mesmas de (1.1). Além disso, considerando a Lei de Fourier de condução do calor, a função q é dada por

$$q = \frac{1}{\rho_0 c_v} \theta_x. \quad (1.8)$$

Assim, substituindo (1.7) e (1.8) em (1.6) e considerando

$$\rho_1 = \rho_0 A, \quad \rho_2 = \rho_0 I, \quad k = GA, \quad b = El, \quad k_0 = EA, \quad m = \frac{\gamma T_0}{\rho_0 c_v}, \quad k_1 = \frac{1}{(\rho_0 c_v)^2}, \quad (1.9)$$

obtemos o sistema termoelástico de Bresse

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) = 0 & \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = 0 & \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \\ \rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = 0 & \text{em } (0, \infty) \times (0, L), \\ \theta_t - k_1 \theta_{xx} + m\psi_{xt} = 0 & \text{em } (0, \infty) \times (0, L). \end{cases} \quad (1.10)$$

Correspondente ao sistema (1.10), consideremos as seguintes condições iniciais

$$\begin{aligned} \varphi(0, \cdot) = \varphi_0, \quad \varphi_t(0, \cdot) = \varphi_1, \quad \psi(0, \cdot) = \psi_0, \quad \psi_t(0, \cdot) = \psi_1, \\ w(0, \cdot) = w_0, \quad w_t(0, \cdot) = w_1, \quad \theta(0, \cdot) = \theta_0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

E condições de fronteira de Dirichlet

$$\begin{aligned}\varphi(t, 0) &= \varphi(t, L) = \psi(t, 0) = \psi(t, L) = w(t, 0) = w(t, L) = 0, \\ \theta(t, 0) &= \theta(t, L) = 0 \text{ para } t \in (0, \infty),\end{aligned}\tag{1.12}$$

ou condições de fronteira de Dirichlet-Neumann

$$\begin{aligned}\varphi(t, 0) &= \varphi(t, L) = \psi_x(t, 0) = \psi_x(t, L) = w_x(t, 0) = w_x(t, L) = 0, \\ \theta(t, 0) &= \theta(t, L) = 0 \text{ para } t \in (0, \infty).\end{aligned}\tag{1.13}$$

O sistema (1.10) com condições iniciais (1.11) e condições de fronteira (1.12) e (1.13) foi estudado por [8], onde os autores mostraram que a estabilidade da solução do sistema está diretamente ligada as seguintes constantes

$$\chi := \left| 1 - \frac{k}{k_0} \right| e \chi_0 := \left| \frac{b}{k} \rho_1 - \rho_2 \right|.\tag{1.14}$$

Em [8], Fatori e Rivera mostraram que a solução do sistema é exponencialmente estável se, e somente se, $\chi = \chi_0 = 0$. Além disso, mostraram que se $\chi = \chi_0 = 0$ não se satisfaz o semigrupo associado ao sistema (1.10)-(1.11) em geral possui uma taxa de decaimento $t^{-1/6}$ e que para o caso em que $\chi = 0$ e $\chi_0 \neq 0$ a taxa é $t^{-1/3}$.

Neste trabalho faremos uma apresentação mais detalhada de alguns resultados obtidos em [8]. No Capítulo 2 apresentaremos alguns resultados de análise funcional, espaços de Sobolev e semigrupos lineares que nos auxiliarão durante todo o estudo. No Capítulo 3 mostraremos a existência e unicidade de solução para o problema (1.10)-(1.11) com condições de fronteira (1.12) e (1.13). Por fim, no Capítulo 4 trazemos a estabilidade exponencial e polinomial do problema dada as devidas hipóteses. Ressaltamos ainda que faremos neste capítulo uma melhora em relação ao artigo apresentado em [8], a saber, mostraremos que para o caso $\chi_0 \neq 0$ e $\chi = 0$ a taxa de decaimento da solução do semigrupo associado ao sistema (1.10) com as condições iniciais (1.11) e condições de fronteira (1.12) e (1.13) pode ser melhorada para $t^{-1/2}$, e que no caso de $\chi \neq 0$ e o semigrupo associado ao sistema (1.10)-(1.11) com condições de fronteira (1.13) ser polinomialmente estável, a taxa de decaimento da solução não pode ser melhor que $t^{-1/2}$.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo serão apresentados resultados que vão ser utilizados no decorrer do trabalho, resultados estes de Análise Funcional, espaços L^p , de Sobolev, e teoria de Semigrupos Lineares.

2.1 ANÁLISE FUNCIONAL

Definição 2.1. *Uma norma em um espaço vetorial (real ou complexo) X é uma função a valores reais, cujo valor em um vetor $x \in X$ é denotado por $\|x\|_X$ e que satisfaz as propriedades:*

(N1) $\|x\|_X \geq 0$,

(N2) $\|x\|_X = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(N3) $\|\alpha x\|_X = |\alpha| \|x\|_X$,

(N4) $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X$,

Onde x, y são vetores arbitrários em X e α qualquer escalar no corpo.

Definição 2.2. *Uma norma $\|\cdot\|_1$ em um espaço vetorial X é dita equivalente a norma $\|\cdot\|_2$ em X , se existirem números reais positivos a e b tais que, para todo $x \in X$*

$$\|x\|_1 \leq a\|x\|_2 \text{ e } \|x\|_2 \leq b\|x\|_1.$$

Definição 2.3. *Um espaço de Banach é um espaço vetorial normado completo, isto é, um espaço vetorial normado onde toda sequência de Cauchy é convergente.*

Teorema 2.4. *Um subespaço Y de um espaço de Banach X é completo se, e somente se, Y é fechado em X .*

Demonstração. Ver [10], página 67, Teorema 2.3-1. □

Definição 2.5. *Sejam X e Y espaços normados sobre um corpo \mathbb{K} e $T : D(T) \rightarrow Y$ um operador, onde $D(T) \subset X$. Diz-se que T é um operador linear se para quaisquer $x, y \in D(T)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$,*

- $T(x + y) = T(x) + T(y)$,
- $T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

Denota-se: $D(T)$ o domínio de T ; $Im(T)$ a imagem de T ; e $Nuc(T)$ o núcleo de T .

No caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, T é dito um funcional linear.

Definição 2.6. *Sejam X e Y espaços normados sobre \mathbb{C} e $T : D(T) \rightarrow Y$ um operador. T é dito um operador antilinear se para quaisquer $x, y \in D(T)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$,*

- $T(x + y) = T(x) + T(y)$,
- $T(\alpha x) = \bar{\alpha}T(x)$.

Definição 2.7. *Sejam X e Y espaços normados e $T : D(T) \rightarrow Y$ um operador, onde $D(T) \subset X$. O operador T é dito limitado se existir um número real positivo c tal que para todo $x \in D(T)$,*

$$\|T(x)\|_Y \leq c\|x\|_X.$$

Nestas condições, a norma do operador T será dada por

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Observação 2.8. *Denota-se por $\mathcal{L}(X, Y)$ o espaço vetorial dos operadores lineares limitados $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$. Quando $Y = \mathbb{K}$, representa-se $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ por X' e diz-se que X' é o dual topológico de X . Além disso, escreve-se apenas $\mathcal{L}(X)$ para o caso $\mathcal{L}(X, X)$.*

Teorema 2.9. *Sejam X e Y espaços normados e $T : D(T) \rightarrow Y$ um operador linear. Então:*

- T é contínuo se, e somente se, T é limitado.*
- Se T é contínuo em um único ponto, então T é contínuo.*

Demonstração. Ver [10], página 97, Teorema 2.7-9. □

Definição 2.10. *(Forma sesquilinear, produto interno). Sejam X e Y dois \mathbb{K} -espaços vetoriais. Chamamos a aplicação $a : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$ de forma sesquilinear em $X \times Y$ quando $a(\cdot, \cdot)$ satisfaz as seguintes condições:*

- $a(x + y, z) = a(x, z) + a(y, z)$, $\forall x, y \in X$, $\forall z \in Y$;
- $a(x, y + z) = a(x, y) + a(x, z)$, $\forall x \in X$, $\forall y, z \in Y$;
- $a(cx, y) = ca(x, y)$, $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$, $\forall c \in \mathbb{K}$;
- $a(x, cy) = \bar{c}a(x, y)$, $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$, $\forall c \in \mathbb{K}$.

Quando $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, chamamos $a(\cdot, \cdot)$ de forma bilinear. No caso em que $X=Y$ valem as propriedades adicionais

- $a(x, y) = \overline{a(x, y)}$, $\forall (x, y) \in X \times X$,
- $a(x, x) \geq 0$, $\forall x \in X$,
- $a(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$, $\forall x \in X$.

A forma sesquilinear $a(\cdot, \cdot)$ é chamada de produto interno e representada por $(\cdot, \cdot)_X$.

Definição 2.11. (Continuidade de uma forma sesquilinear). Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados e $a : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$ uma forma sesquilinear. Dizemos que a é contínua (limitada) quando existe uma constante $C > 0$ tal que $|a(x, y)| \leq C\|x\|_X\|y\|_Y$, para todo par $(x, y) \in X \times Y$.

Definição 2.12. (Coercividade de uma forma sesquilinear). Sejam X e Y dois espaços vetoriais normados e $a : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$ uma forma sesquilinear. Dizemos que a é coerciva quando existe uma constante $C > 0$ tal que $\operatorname{Re}(a(x, x)) \geq C\|x\|_X^2$, para todo $x \in X$.

Definição 2.13. (Norma proveniente do produto interno). Sejam X um espaço vetorial e $(\cdot, \cdot)_X$ um produto interno em $X \times X$. Diz-se que a norma definida por $\|x\|_X = \sqrt{(x, x)_X}$ provém do (ou é induzida pelo) produto interno $(\cdot, \cdot)_X$.

Definição 2.14. (Espaço de Hilbert). Um espaço vetorial com produto interno é dito um espaço de Hilbert se for completo em relação à norma induzida pelo produto interno.

Teorema 2.15. (Teorema de Lax-Milgram). Sejam X um espaço de Hilbert real (complexo) e uma forma bilinear (sesquilinear) contínua e coerciva $a : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$. Então para todo funcional linear (antilinear) f limitado, existe um único $x \in X$ tal que $a(x, y) = f(y)$, para todo $y \in X$.

Demonstração. Para o caso real, ver [4], página 140, Corolário 5.8. Para o caso complexo, ver [16], página 595, Corolário 6.6.2. \square

Definição 2.16. (Resolvente e espectro). Sejam X um espaço de Banach complexo e um operador linear $B : D(B) \subset X \rightarrow X$. O conjunto resolvente de B é representado por $\rho(B)$ e é dado por

$$\rho(B) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - B)^{-1} \text{ existe, é limitado e tem domínio denso em } X\}.$$

O espectro de B é o conjunto $\sigma(B) = \mathbb{C} - \rho(B)$.

Definição 2.17. (Operador dissipativo). Seja X um espaço de Hilbert. Diz-se que um operador linear $B : D(B) \subset X \rightarrow X$ é dissipativo quando $\operatorname{Re}(Bx, x)_X \leq 0$, para todo $x \in D(B)$.

Lema 2.18. Sejam X um espaço de Banach e $B_1 \in \mathcal{L}(X)$ invertível tal que $B_1^{-1} \in \mathcal{L}(X)$. Se $B_2 \in \mathcal{L}(X)$ é tal que

$$\|B_2\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\|B_1^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)}},$$

então $B_1 + B_2$ é linear, limitado e invertível.

Demonstração. Ver [19], Lema 2.12.1. \square

Teorema 2.19. *Sejam X um espaço de Hilbert e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear dissipativo.*

A) *Se $\text{Im}(\lambda_0 I - A) = X$ para algum $\lambda_0 > 0$, então $\text{Im}(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$.*

B) *Sem $\text{Im}(I - A) = X$, então $\overline{D(A)} = X$.*

Demonstração. Ver [17], páginas 15 e 16, Teoremas 4.5 e 4.6. □

Definição 2.20. *(Operador compacto). Sejam X e Y espaços normados e $B : X \rightarrow Y$ um operador linear. Diz-se que B é compacto quando, para todo conjunto limitado $X_1 \subset X$, o conjunto $B(X_1)$ é relativamente compacto em Y .*

Teorema 2.21. *Sejam X e Y espaços normados e $B : X \rightarrow Y$ um operador linear. Então, B é compacto se, e somente se, para toda sequência limitada $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em X a sequência $\{Bx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente em Y .*

Demonstração. Ver [10], página 407, Teorema 8.1-3. □

Definição 2.22. *(Operador com resolvente compacto). Seja X um espaço de Banach e um operador linear $B : D(B) \subset X \rightarrow X$. Diz-se que B tem resolvente compacto quando existe $\lambda \in \rho(B)$ tal que $(\lambda I - B)^{-1}$ é compacto.*

Proposição 2.23. *Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$ em espaço de Banach e $B : D(B) \subset X \rightarrow X$ um operador linear com resolvente não vazio. Então, B tem resolvente compacto se, e somente se, a aplicação inclusão $i : (D(B), \|\cdot\|_{D(B)}) \rightarrow (X, \|\cdot\|_X)$ é compacta.*

Demonstração. Ver [6], Proposição 5.8. □

Proposição 2.24. *Seja X um espaço de Banach. Se $B : D(B) \subset X \rightarrow X$ é um operador linear com resolvente compacto, então o espectro de B é formado por autovalores de B .*

Demonstração. Ver [6], Corolário 1.15. □

2.2 ESPAÇOS L^p E DE SOBOLEV

Definição 2.25. *(Espaços L^p). Seja $I \subset \mathbb{R}$ aberto e $0 < p < \infty$. Seja $\mathcal{L}^p(I)$ o conjunto de todas as funções mensuráveis $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ tais que $|f|^p$ é integrável (no sentido Lebesgue) em I , ou seja,*

$$\mathcal{L}^p(I) = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{K}; f \text{ é mensurável e } \int_I |f(x)|^p dx < \infty \right\},$$

onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Diremos que duas funções $f, g \in \mathcal{L}^p(I)$ são equivalentes ($f \sim g$), se $f = g$ q.s. (quase sempre) em I . Indicaremos por $L^p(I)$ o conjunto

$$L^p(I) = \mathcal{L}^p(I) / \sim .$$

Para $p = \infty$, definimos

$$L^\infty(I) = \{f : I \rightarrow \mathbb{K} : f \text{ é limitada q.s. em } I\}.$$

Observação 2.26. Pela definição temos que os elementos do conjunto L^p são classes de equivalência de funções em $\mathcal{L}^p(I)$. Porém, nos convém tratar esses elementos como sendo funções. Assim podemos escrever $f \in L^p$ no lugar de $[f] \in L^p$.

Observação 2.27. Temos que

(i) Se $0 < p < \infty$, então $L^p(I)$ é um espaço vetorial.

(ii) Seja $f \in L^p$ e $0 < p < \infty$. Denotaremos a norma de $L^p(I)$ por

$$\|f\|_{L^p(I)} = \left(\int_I |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(iii) Seja $f \in L^\infty(I)$. Denotaremos a norma em $L^\infty(I)$ por

$$\|f\|_{L^\infty(I)} = \sup_{x \in I} \text{ess}|f(x)| = \inf\{C > 0; |f(x)| \leq C \text{ q.s. em } I\}.$$

(iv) Quando $p=2$, tem-se que $L^2(I)$ é equipado com o produto interno

$$(f, g)_{L^2} = \int_I f(x) \overline{g(x)} dx.$$

Proposição 2.28. Sejam $I \subset \mathbb{R}$ aberto e $1 \leq p \leq \infty$. O espaço $(L^p(I), \|\cdot\|_{L^p})$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Ver [5], página 150, Exemplo 5.26. □

Definição 2.29. Uma função mensurável $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ é dita localmente integrável se

$$\int_K |f(x)| dx < \infty, \forall K \subset I \text{ compacto}.$$

Indicaremos por $L^p_{loc}(I)$ o conjunto de todas as funções mensuráveis $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ tais que $|f|^p$ é localmente integrável, isto é,

$$L^p_{loc}(I) = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{K}; \int_K |f(x)|^p dx < \infty, \forall K \subset I \text{ compacto} \right\}.$$

Definição 2.30. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Denotamos por $L^2_*(I)$ o espaço das funções de média nula dado por

$$L^2_*(I) = \left\{ u \in L^2; \int_I u(x) dx = 0 \right\}.$$

Proposição 2.31. *Se I for um intervalo limitado, então o espaço $L_*^2(I)$ é Banach. Consequentemente, $L_*^2(I)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno de $L^2(I)$.*

Demonstração. Seja $u \in \overline{L_*^2(I)}$, existe uma sequência $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L_*^2(I)$, tal que

$$u_n \rightarrow u, \text{ em } L^2(I). \quad (2.1)$$

Com isso, observe que

$$\int_I u(x) dx = \int_I u(x) dx - \int_I u_n(x) dx = \int_I u(x) - u_n(x) dx,$$

e portanto, usando propriedades para integrais, temos

$$\left| \int_I u(x) dx \right| = \left| \int_I u(x) - u_n(x) dx \right| \leq \int_I |u(x) - u_n(x)| dx \quad (2.2)$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder, temos

$$\int_I |u(x) - u_n(x)| dx \leq \left(\int_I |u(x) - u_n(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|I|} \|u_n - u\|_{L^2}. \quad (2.3)$$

Substituindo (2.3) em (2.2) e usando (2.1), segue que

$$\left| \int_I u(x) dx \right| \leq \sqrt{|I|} \|u_n - u\|_{L^2} \rightarrow 0,$$

Logo

$$\int_I u(x) dx = 0. \quad (2.4)$$

Provando que L_*^2 é um subespaço fechado de $L^2(I)$, consequentemente, pelo Teorema 2.4 tem-se que $L_*^2(I)$ é Banach. \square

Proposição 2.32. *Seja $0 < p < \infty$ e $a, b \geq 0$, então*

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Demonstração. Ver [1], página 23, Lema 2.2. \square

Definição 2.33. *(Espaços $W^{1,p}$). Seja $I = (a, b)$ com $-\infty \leq a < b \leq \infty$ e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p \leq \infty$. O espaço de Sobolev $W^{1,p}(I)$ é definido por*

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I); \text{ existe } g \in L^p(I) \text{ com } \int_I u \varphi' dx = - \int_I g \varphi dx, \forall \varphi \in C_0^1(I) \right\}.$$

No caso particular $p=2$, denotamos $W^{1,2}(I) = H^1(I)$.

O espaço $W^{1,p}(I)$ é munido da norma

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \|u'\|_{L^p},$$

Ou ainda,

$$\|u\|_{W^{1,p}} = (\|u\|_{L^p}^p + \|u'\|_{L^p}^p)^{\frac{1}{p}}.$$

As duas normas definidas acima são equivalentes.

Observação 2.34. Dada $u \in W^{1,p}(I)$, a função g é chamada de derivada fraca de u em $W^{1,p}(I)$ e será denotada por u_x .

Teorema 2.35. Se $0 \leq p \leq \infty$, então $W^{1,p}(I)$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Ver [4], página 203, Proposição 8.1. □

Proposição 2.36. (Desigualdade de Young com ε). Dados $a, b \geq 0$, $1 < p, q < \infty$ expoentes conjugados, isto é, tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $\varepsilon > 0$, então existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$ab \leq \varepsilon a^p + C_\varepsilon b^q.$$

Demonstração. Ver [7], página 622, Seção B.2. □

Proposição 2.37. (Desigualdade de Hölder). Seja $I \subset \mathbb{R}$ aberto e sejam p, q expoentes conjugados, $1 \leq p \leq \infty$. Se $f \in L^p(I)$ e $g \in L^q(I)$, então $fg \in L^1(I)$ e

$$\|fg\|_{L^1(I)} \leq \|f\|_{L^p(I)} \|g\|_{L^q(I)}.$$

Demonstração. Ver [4], página 92, Teorema 4.6. □

Proposição 2.38. (Lema de Du Bois-Reymond). Seja $I \subset \mathbb{R}$ um aberto e $u \in L^1_{loc}(I)$. Se

$$\int_I u(x) \phi(x)_x dx = 0, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(I),$$

então existe uma constante C tal que $u = C$ q.s. em I .

Demonstração. Ver [4], página 282, Teorema 9.2. □

Proposição 2.39. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado. Então, as seguintes inclusões são compactas (e, conseqüentemente, contínuas):

- $i : (H^2, \|\cdot\|_{H^2}) \rightarrow (H^1, \|\cdot\|_{H^1})$,
- $i : (H^1, \|\cdot\|_{H^1}) \rightarrow (C(\bar{I}), \|\cdot\|_{L^\infty})$.

Demonstração. Ver [1], Teorema 6.3. □

Definição 2.40. Dado $1 \leq p < \infty$, denotamos por $W_0^{1,p}(I)$ o fecho de $C_0^1(I)$ em $W^{1,p}(I)$, isto é,

$$W_0^{1,p}(I) = \overline{C_0^1}^{W^{1,p}(I)}.$$

Quando $p=2$, então

$$H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I).$$

Observação 2.41. Segue da própria definição de $W_0^{1,p}(I)$ que $(W_0^{1,p}(I), \|\cdot\|_{W^{1,p}})$ é um espaço de Banach.

Proposição 2.42. Seja $u \in W^{1,p}(I)$. Então $u \in W_0^{1,p}(I)$ se, e somente se, $u = 0$ em ∂I ,

Demonstração. Ver [4], página 217, Teorema 8.12. □

Proposição 2.43. (Desigualdade de Poincaré). Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado. Então existe uma constante $C = C(|I|) > 0$ tal que

$$\|u\|_{H^1(I)} \leq C \|u_x\|_{L^2(I)},$$

Para toda função $u \in H_0^1(I)$ ou $u \in H_*^1(I)$, onde

$$H_*^1(I) = \left\{ u \in H^1(I) : \int_I u(x) dx = 0 \right\}.$$

Demonstração. Ver [4], página 218, Proposição 8.13. □

Lema 2.44. O Espaço $(H_*^1, \|\cdot\|_{H^1(I)})$ é Banach.

Demonstração. Seja $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $H_*^1(I)$. Temos que a sequência $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em $H^1(I)$, que é Banach. Logo, existe $u \in H^1$ tal que $\|u_n - u\|_{H^1(I)} \rightarrow 0$ para n suficientemente grande.

Além disso, usando as desigualdades de Hölder e de Poincaré, temos que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} 0 \leq \left| \int_I u_n(x) dx - \int_I u(x) dx \right| &\leq \int_I |u_n(x) - u(x)| dx \\ &\leq \left(\int_I dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_I |u_n(x) - u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \sqrt{|I|} \|u_n - u\|_2 \\ &\leq \sqrt{|I|} \|u_n - u\|_{H^1(I)}. \end{aligned}$$

Em consequência, para n suficientemente grande

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_I u_n(x) dx = \int_I u(x) dx.$$

O que implica

$$\frac{1}{|I|} \int_I u(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|I|} \int_I u_n(x) dx = 0.$$

Assim, $u \in H_*^1(I)$, ou seja, u_n converge para $u \in H_*^1(I)$. Portanto o espaço $(H_*^1, \|\cdot\|_{H^1(I)})$ é Banach. \square

Lema 2.45. *Seja $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ e uma função $f \in C^1[a, b]$ arbitrária. Então,*

$$\mathbf{Re} \int_a^b f u \overline{u_x} dx = \frac{1}{2} f |u|^2 \Big|_a^b - \frac{1}{2} \int_a^b f' |u|^2 dx, \quad (2.5)$$

para toda $u \in H^1(I)$.

Demonstração. Usando integração por partes, temos que

$$\int_a^b f u \overline{u_x} dx = f |u|^2 \Big|_a^b - \int_a^b (f u)_x \overline{u} dx,$$

implicando em

$$\int_a^b f (u \overline{u_x} + u_x \overline{u}) dx = f |u|^2 \Big|_a^b - \int_a^b f' |u|^2 dx. \quad (2.6)$$

Sabendo que para todos $v, w \in \mathbb{C}$, $\mathbf{Re}(v \overline{w}) = \mathbf{Re}(w \overline{v})$, considerando a parte real em (2.6) obtemos (2.5). \square

2.3 SEMIGRUPOS LINEARES

Definição 2.46. *Sejam X um espaço de Banach e $A \in \mathcal{L}(X)$. Definimos o domínio do operador A como*

$$D(A) = \{u \in X; Au \in X\},$$

equipado com a norma

$$\|u\|_{D(A)} = |u|_X + |Au|_X.$$

Além disso, definimos o domínio do operador A^n , $n \in \mathbb{N}$, como

$$\begin{aligned} D(A^n) &= \{u \in D(A^{n-1}); Au \in D(A^{n-1})\} \\ &= \{u \in X; A^k u \in X, k = 1, \dots, n\}, \end{aligned}$$

equipado com a norma

$$\|u\|_{D(A^n)} = \sum_{k=0}^n |A^k u|_X,$$

onde $A^0 u = u$.

Teorema 2.47. *Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador dissipativo com $\text{Im}(I - A) = X$. Se X é reflexivo, então $\overline{D(A)} = X$.*

Demonstração. Ver [17], página 16, Teorema 4.6. □

Definição 2.48. *Uma família $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de operadores lineares limitados em um espaço de Banach X é chamado de semigrupo, se satisfaz*

(i) $S(t + s) = S(t)S(s), \forall t, s \geq 0,$

(ii) $S(0) = I.$

Se além dos itens (i) e (ii), tivermos que

$$\lim_{t \rightarrow 0} S(t)x = x, \forall x \in X,$$

diz-se que $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ é um C_0 -semigrupo (ou fortemente contínuo).

Definição 2.49. *Seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um semigrupo em X . O operador A definido por*

$$D(A) = \left\{ x \in X \mid \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

e

$$Ax = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{S(t)x - x}{t}, \quad x \in D(A) \tag{2.7}$$

é o gerador infinitesimal do semigrupo $S(t)$. Neste caso, o semigrupo $S(t)$ pode ser denotado por e^{At} .

Teorema 2.50. *Seja $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ um C_0 -semigrupo em um espaço de Banach X . Então, existem constantes $\omega \geq 0$ e $M \geq 0$ tais que*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração. Ver [17], página 4, Teorema 2.2. □

Nas condições do Teorema 2.50, se $\omega = 0$ diz-se que $S(t)$ é uniformemente limitado. No caso em que $\omega = 0$ e $M = 1$, $S(t)$ é chamado de C_0 -semigrupo de contrações.

Teorema 2.51. *(Lumner-Phillip's) Seja A um operador linear com domínio $D(A)$ denso em X . 1. Se A é dissipativo e existe um λ_0 tal que $\text{Im}(\lambda_0 I - A) = X$, então A é gerador infinitesimal*

de um C_0 -semigrupo de contrações em X .

2. Se A é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X , então $\text{Im}(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo.

Demonstração. Ver [17], página 16, Teorema 4.6. □

Corolário 2.52. *Seja A um operador linear dissipativo com $D(A)$ denso em um espaço de Hilbert X . Se $0 \in \rho(A)$, então A é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações em X .*

Demonstração. Ver [19], página 88, Teorema 2.12.3. □

Teorema 2.53. *Se A é um gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ em um espaço de Banach X , então para cada $u_0 \in D(A) \subset X$, existe uma única função u na classe*

$$u \in C([0, \infty); D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; X),$$

que é solução clássica regular do PVI

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) = A(u(t)), & t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

Dada por $u(t) = S(t)u_0$. Se $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ for um C_0 -semigrupo de contrações, temos que

$$\|u(t)\|_X \leq \|u_0\|_X e \left\| \frac{du}{dt}(t) \right\|_X \leq \|Au_0\|_X.$$

Além disso, se $u_0 \in D(A^n)$, $n \geq 2$, então existe uma única função u na classe

$$u \in \bigcap_{r=0}^n C^{m-r}([0, +\infty), D(A^r)).$$

Demonstração. Ver [4], página Teorema 7.4 e [20], página 36, Teorema 2.3.1. □

Definição 2.54. *Diz-se que um semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ em um espaço de Banach X é exponencialmente estável, quando existem constantes $\alpha > 0$ e $M \geq 1$ satisfazendo*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{-\alpha t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.8)$$

Teorema 2.55. *(Teorema de Prüss) Um C_0 -semigrupo de contrações $S(t) = e^{At}$ definido em um espaço de Hilbert X é exponencialmente estável se, e somente se, valem as duas condições a seguir*

(i) $i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$;

(ii) $\limsup_{|\lambda| \rightarrow \infty} \|(i\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} < \infty$.

Demonstração. Ver [9], [14] e [18]. □

Definição 2.56. *Escrevemos*

$$f = \mathcal{O}(g), \text{ quando } \lambda \rightarrow \lambda_0,$$

desde que exista uma constante positiva $C > 0$ tal que

$$|f(\lambda)| \leq C|g(\lambda)|,$$

para todo λ suficientemente perto de λ_0

Teorema 2.57. (*Teorema de Borichev-Tomilov*). *Suponhamos que $S(t) = e^{At}$ seja um C_0 -semigrupo limitado definido em um espaço de Hilbert X tal que $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) $\|S(t)A^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = \mathcal{O}(t^{-1/\alpha}), t \rightarrow \infty;$
- (ii) $\|(i\lambda I - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X)} = \mathcal{O}(|\lambda|^{-\alpha}), |\lambda| \rightarrow \infty,$

Para alguma constante fixada $\alpha > 0$.

Demonstração. Ver [2], Teorema 2.4. □

2.4 DESIGUALDADE DE OBSERVABILIDADE PARA SISTEMAS DO TIPO BRESSE

Nesta seção apresentaremos resultados que serão fundamentais para a obtenção de uma estimativa um pouco melhor que a obtida em [8] a respeito do comportamento assintótico da solução do semigrupo associado ao sistema (1.10)-(1.11) independente das condições de fronteira no caso em que $\chi = 0$ e $\chi_0 \neq 0$.

Considere o seguinte sistema de equações:

$$i\beta\varphi - \Phi = g_1, \tag{2.9}$$

$$i\beta\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0l(w_x - l\varphi) = g_2, \tag{2.10}$$

$$i\beta\psi - \Psi = g_3, \tag{2.11}$$

$$i\beta\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) = g_4, \tag{2.12}$$

$$i\beta w - W = g_5, \tag{2.13}$$

$$i\beta\rho_1W - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = g_6. \tag{2.14}$$

onde $g_1, g_3, g_5 \in H_0^1$ e $g_2, g_4, g_6 \in L^2$, ou $g_1 \in H_0^1, g_3, g_5 \in H_*^1, g_2 \in L^2, g_4, g_6 \in L_*^2$ e os coeficientes $\rho_1, \rho_2, k, k_0, b, l$ satisfazem

$$\rho_1, \rho_2, k, k_0, b, l \in C^1[0, L], \quad \rho_1, \rho_2, k, k_0, b, l > 0.$$

Denotando por G a função vetorial $G = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6)$ e por V a função vetorial $V = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$. Considerando $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq L$, a notação $\|\cdot\|_{a_1, a_2}$ significa

$$\int_{a_1}^{a_2} (|\Phi|^2 + |\Psi|^2 + |W|^2 + |\psi_x|^2 + |\varphi_x + \psi + lw|^2 + |w_x - l\varphi|^2) dx.$$

Além disso, para $j = 1, 2$, considere também a seguinte notação

$$\begin{aligned} I(a_j) &= |(\varphi_x + \psi + lw)(a_j)|^2 + |\Phi(a_j)|^2 + |\psi_x(a_j)|^2 + |\Phi(a_j)|^2 + |(w_x - l\varphi)(a_j)|^2 \\ &+ |W(a_j)|^2. \end{aligned}$$

Proposição 2.58. *Sob as notações anteriores, seja $V = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$ uma solução regular de (2.9)-(2.14) e sejam $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq L$ quaisquer. Então, existem constantes $C_0, C_1 > 0$ tais que, para $j = 1, 2$*

$$I(a_j) \leq C_0 \|V\|_{a_1, a_2}^2 + C_0 \|G\|_{a_1, a_2}^2, \quad (2.15)$$

$$\|V\|_{a_1, a_2}^2 \leq C_1 I(a_j) + C_1 \|G\|_{a_1, a_2}^2. \quad (2.16)$$

Demonstração. Ver [15] página 23. □

Corolário 2.59. *Seja $V = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$ uma solução regular do sistema (2.9)-(2.14). Se para algum subintervalo $(b_1, b_2) \subset (0, L)$, tivermos que*

$$\|V\|_{b_1, b_2}^2 \leq \Lambda, \quad (2.17)$$

onde $\Lambda = \Lambda(V, G, \beta)$, então existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|V\|_{0, L}^2 \leq C\Lambda + C\|G\|_{0, L}^2. \quad (2.18)$$

Demonstração. Ver [15] página 32. □

3 SISTEMA DE BRESSE TERMOELÁSTICO

O objetivo deste capítulo é apresentar detalhadamente resultados demonstrados em [8]. Resultados estes acerca da existência, unicidade e comportamento assintótico da solução do problema

$$\rho_1 \varphi_{tt} - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0 l(w_x - l\varphi) = 0 \text{ em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (3.1)$$

$$\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma \theta_x = 0 \text{ em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (3.2)$$

$$\rho_1 w_{tt} - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = 0 \text{ em } (0, \infty) \times (0, L), \quad (3.3)$$

$$\rho_3 \theta_t - \alpha \theta_{xx} + \gamma \psi_{xt} = 0 \text{ em } (0, \infty) \times (0, L). \quad (3.4)$$

Considerando as seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned} \varphi(0, \cdot) &= \varphi_0, & \varphi_t(0, \cdot) &= \varphi_1, & \psi(0, \cdot) &= \psi_0, & \psi_t(0, \cdot) &= \psi_1, \\ w(0, \cdot) &= w_0, & w_t(0, \cdot) &= w_1, & \theta(0, \cdot) &= \theta_0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

E condições de fronteira de Dirichlet

$$\begin{aligned} \varphi(t, 0) &= \varphi(t, L) = \psi(t, 0) = \psi(t, L) = w(t, 0) = w(t, L) = 0, \\ \theta(t, 0) &= \theta(t, L) = 0 \text{ para } t \in (0, \infty), \end{aligned} \quad (3.6)$$

ou condições de fronteira de Dirichlet-Neumann

$$\begin{aligned} \varphi(t, 0) &= \varphi(t, L) = \psi_x(t, 0) = \psi_x(t, L) = w_x(t, 0) = w_x(t, L) = 0, \\ \theta(t, 0) &= \theta(t, L) = 0 \text{ para } t \in (0, \infty). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Onde os coeficientes $\rho_1, k, \rho_2, \rho_3 = \frac{\gamma}{m}, \alpha = \frac{k_1 \gamma}{m}, b, \gamma, l, k_0, k_1$ e m são constantes positivas e as funções φ, ψ, w e θ descrevem, respectivamente, a oscilação vertical, o ângulo de rotação da seção transversal, a oscilação longitudinal e a variação de temperatura de uma viga fina, arqueada e com comprimento L .

3.1 FORMULAÇÃO ABSTRATA

O objetivo desta seção é reformular o problema (3.1)-(3.7) como um problema de Cauchy abstrato homogêneo para que possamos garantir a existência e unicidade da solução do mesmo por meio da teoria de semigrupos lineares. No que segue, para simplificarmos as notações, denotaremos os conjuntos $H_0^1(0, L), H_*^1(0, L), H^2(0, L), C_0^1(0, L), C_0^\infty(0, L), L^2(0, L)$ e $L_*^2(0, L)$ por $H_0^1, H_*^1, H^2, C_0^1, C_0^\infty, L^2$ e L_*^2 respectivamente. Além disso, $\|\cdot\|_2$ representará a norma $\|\cdot\|_{L^2(0, L)}$ no espaço $L^2(0, L)$.

Considere inicialmente os seguintes espaços:

$$\mathcal{H}_1 := H_0^1 \times L^2 \times H_0^1 \times L^2 \times H_0^1 \times L^2 \times L^2,$$

e

$$\mathcal{H}_2 := H_0^1 \times L^2 \times H_*^1 \times L_*^2 \times H_*^1 \times L_*^2 \times L^2.$$

Utilizaremos o espaço \mathcal{H}_1 para tratar do problema (3.1)-(3.5) com as condições de fronteira dadas em (3.6) e o espaço \mathcal{H}_2 para tratar do problema (3.1)-(3.5) com as condições de fronteira dadas em (3.7).

Quando as condições de fronteira não interferirem nas definições denotaremos \mathcal{H}_i , com $i = 1, 2$, por \mathcal{H} .

Considere também os subespaços

$$D(\mathcal{A}_1) := \{U \in \mathcal{H}_1 \mid \varphi, \psi, w, \theta \in H^2 \cap H_0^1, \Phi, \Psi, W \in H_0^1\},$$

e

$$D(\mathcal{A}_2) := \{U \in \mathcal{H}_2 \mid \varphi, \theta \in H^2 \cap H_0^1, \Phi, \psi_x, w_x \in H_0^1, \Psi, W \in H_*^1\}.$$

e o operador $\mathcal{A}_i : D(\mathcal{A}_i) \subset \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{H}_i$ definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_i U &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{k}{\rho_1} \partial_x^2 - \frac{k_0 l^2}{\rho_1} I & 0 & \frac{k}{\rho_1} \partial_x & 0 & \frac{l(k+k_0)}{\rho_1} \partial_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{\rho_2 \partial_x} & 0 & \frac{b}{\rho_2} \partial_x^2 - \frac{k}{\rho_2} I & 0 & -\frac{kl}{\rho_2} I & 0 & -\frac{\gamma}{\rho_2} \partial_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{l(k_0+k)}{\rho_1} \partial_x & 0 & -\frac{lk}{\rho_1} I & 0 & \frac{k_0}{\rho_1} \partial_x^2 - \frac{l^2 k}{\rho_1} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{\rho_3} \partial_x & 0 & 0 & 0 & \frac{\alpha}{\rho_3} \partial_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \Phi \\ \psi \\ \Psi \\ w \\ W \\ \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Phi \\ \frac{k}{\rho_1} \varphi_{xx} - \frac{k_0 l^2}{\rho_1} \varphi + \frac{k}{\rho_1} \psi_x + \frac{l(k+k_0)}{\rho_1} w_x \\ \Psi \\ -\frac{k}{\rho_2} \varphi_x + \frac{b}{\rho_2} \psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2} \psi - \frac{kl}{\rho_2} w - \frac{\gamma}{\rho_2} \theta_x \\ W \\ -\frac{l(k_0+k)}{\rho_1} \varphi_x - \frac{lk}{\rho_1} \psi + \frac{k_0}{\rho_1} w_{xx} - \frac{l^2 k}{\rho_1} w \\ -\frac{\gamma}{\rho_3} \Psi_x + \frac{\alpha}{\rho_3} \theta_{xx} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

para todo $U \in D(\mathcal{A}_i), i = 1, 2$.

Denotando $\Phi = \varphi_t, \Psi = \psi_t, W = w_t$ e $U_0 := (\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1, w_0, w_1, \theta_0)$, podemos reescrever o sistema (3.1)-(3.5) com as condições de fronteira (3.6) ou (3.7), como um problema de Cauchy

abstrato, dado por

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}_i U, t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \quad (3.9)$$

para todo $U \in D(\mathcal{A}_i)$.

Portanto, estudar o problema (3.1)-(3.7) é equivalente a estudar o problema de valor inicial (3.9).

O espaço \mathcal{H} é um espaço de Hilbert com a norma $|\cdot|_{\mathcal{H}}$ proveniente do produto interno usual (isto decorre da Proposição 2.28, da Proposição 2.31, do Lema 2.44 e da Observação 2.41) definido como:

$$\begin{aligned} (U_1, U_2)_{\mathcal{H}} &= (\varphi_{1x}, \varphi_{2x})_2 + (\Phi_1, \Phi_2)_2 + (\psi_{1x}, \psi_{2x})_2 + (\Psi_1, \Psi_2)_2 + (w_{1x}, w_{2x})_2 \\ &+ (W_1, W_2)_2 + (\theta_1, \theta_2)_2, \end{aligned} \quad (3.10)$$

para todo $U_1, U_2 \in \mathcal{H}$.

Podemos também considerar em \mathcal{H}_i a aplicação:

$$\begin{aligned} ((U_1, U_2))_{\mathcal{H}_i} &= \rho_1(\Phi_1, \Phi_2)_2 + \rho_2(\Psi_1, \Psi_2)_2 + \rho_1(W_1, W_2)_2 + b(\psi_{1x}, \psi_{2x})_2 + \rho_3(\theta_1, \theta_2)_2 \\ &+ k(\varphi_{1x} + \psi_1 + lw_1, \varphi_{2x} + \psi_2 + lw_2)_2 + k_0(w_{1x} - l\varphi_1, w_{2x} - l\varphi_2)_2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Assim, dado $U \in \mathcal{H}$ tem-se a norma proveniente do produto interno (3.10):

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\varphi_x\|_2^2 + \|\Phi\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|\Psi\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 + \|W\|_2^2 + \|\theta\|_2^2. \quad (3.12)$$

Também podemos considerar a aplicação $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_i} : \mathcal{H}_i \rightarrow \mathbb{R}$ decorrente da aplicação definida em (3.11):

$$\begin{aligned} \|U\|_{\mathcal{H}_i}^2 &= \rho_1\|\Phi\|_2^2 + \rho_2\|\Psi\|_2^2 + \rho_1\|W\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 + \rho_3\|\theta\|_2^2 \\ &+ k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Lema 3.1. *A aplicação $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_i} : \mathcal{H}_i \rightarrow \mathbb{R}$ definida em (3.13) é uma norma para $i=1,2$. No caso em que $i=2$, a aplicação será norma apenas se satisfizer a condição de que $lL \neq n\pi \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Tome $U \in \mathcal{H}_i$ tal que $\|U\|_{\mathcal{H}_i} = 0$. Assim, segue que

$$\Phi = \Psi = W = \psi_x = \varphi_x + \psi + lw = w_x - l\varphi = \theta = 0. \quad (3.14)$$

Como $\psi_x = 0$, então pra toda função $\eta \in C_0^\infty$, integrando por partes,

$$\int_0^L \psi(x)\eta_x(x)dx = \psi(x)\eta(x)\Big|_0^L - \int_0^L \eta(x)\psi_x(x) dx = 0. \quad (3.15)$$

Logo, pelo Lema 2.38 existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\psi = c$. Se ψ pertence a H_0^1 , podemos concluir que $\psi(L) = \psi(0) = 0$, mas temos que ψ é contínua em $[0, L]$ (Segue da Proposição 2.39), ou seja, como ψ é constante temos que $\psi = 0$. Se ψ pertence a H_*^1 ,

$$0 = \frac{1}{L} \int_0^L \psi(x) dx = \frac{1}{L} \int_0^L c dx = c.$$

Assim, $\psi = 0$ em ambos os casos. Temos ainda que de (3.14)

$$\begin{cases} \varphi_x + lw = 0, \\ w_x - l\varphi = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Sendo $\varphi \in H_0^1$, obtemos o problema de contorno indicado a seguir

$$\begin{cases} \varphi_{xx} + l^2\varphi = 0, \\ \varphi(0) = \varphi(L) = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

Consideremos a solução $\varphi \in C^2(0, L)$ do sistema (3.17). Temos então que tal solução pode ser descrita do seguinte modo

$$\varphi(x) = \alpha \operatorname{sen}(lx) + \beta \operatorname{cos}(lx), \text{ com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Como $\varphi(0) = 0$, então $\beta = 0$. Logo $\varphi(x) = \alpha \operatorname{sen}(lx)$.

No caso em que $w \in H_0^1$, substituindo $\varphi(x) = \alpha \operatorname{sen}(lx)$ em (3.16) e sabendo que $w(L) = 0$, concluímos que $\alpha = 0$, e portanto, $w = \varphi = 0$. Por outro lado, no caso em que $w \in H_*^1$ só podemos garantir que $\alpha = 0$ se $lL \neq n\pi$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Assim, desde que $lL \neq n\pi$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ no caso $i = 2$ temos que $\|U\|_{\mathcal{H}_i} = 0$ implica que $U = 0$.

Agora, dado $\lambda \in \mathbb{R}$ e $U \in \mathcal{H}_i$, temos que

$$\begin{aligned} \|\lambda U\|_{\mathcal{H}_i} &= \rho_1 \|\lambda \Phi\|_2 + \rho_2 \|\lambda \Psi\|_2 + \rho_1 \|\lambda W\|_2 + b \|\lambda \psi_x\|_2 + k \|\lambda(\varphi_x + \psi + lw)\|_2 \\ &+ k_0 \|\lambda(w_x - l\varphi)\|_2 + \rho_3 \|\lambda \theta\|_2 \\ &= |\lambda| \rho_1 \|\Phi\|_2 + |\lambda| \rho_2 \|\Psi\|_2 + |\lambda| \rho_1 \|W\|_2 + |\lambda| b \|\psi_x\|_2 \\ &+ |\lambda| k \|\varphi_x + \psi + lw\|_2 + |\lambda| k_0 \|w_x - l\varphi\|_2 + |\lambda| \rho_3 \|\theta\|_2 = |\lambda| \rho_3 \|\theta\|_2 \\ &= |\lambda| \|U\|_{\mathcal{H}_i}. \end{aligned}$$

Além disso, dados $U, U^* \in \mathcal{H}_i$, usando a Desigualdade Triangular temos

$$\begin{aligned} \|U + U^*\|_{\mathcal{H}_i}^2 &\leq \rho_1 (\|\Phi\|_2 + \|\Phi^*\|_2)^2 + \rho_2 (\|\Psi\|_2 + \|\Psi^*\|_2)^2 + \rho_1 (\|W\|_2 + \|W^*\|_2)^2 \\ &+ b (\|\psi_x\|_2 + \|\psi_x^*\|_2)^2 + k (\|\varphi_x + \psi + lw\|_2 + \|\varphi_x^* + \psi^* l w^*\|_2)^2 \\ &+ k_0 (\|w_x - l\varphi\|_2 + \|w_x^* - l\varphi^*\|_2)^2 + \rho_3 (\|\theta_x\|_2 + \|\theta_x^*\|_2)^2. \end{aligned}$$

Isto é

$$\begin{aligned}
\|U + U^*\|_{\mathcal{H}_i} &\leq \sqrt{\rho_1}(\|\Phi\|_2 + \|\Phi^*\|_2) + \sqrt{\rho_2}(\|\Psi\|_2 + \|\Psi^*\|_2) + \sqrt{\rho_1}(\|W\|_2 + \|W^*\|_2) \\
&+ \sqrt{b}(\|\psi_x\|_2 + \|\psi_x^*\|_2) + \sqrt{k}(\|\varphi_x + \psi + lw\|_2 + \|\varphi_x^* + \psi^*lw^*\|_2) \\
&+ \sqrt{k_0}(\|w_x - l\varphi\|_2 + \|w_x^* - l\varphi^*\|_2) + \sqrt{\rho_3}(\|\theta_x\|_2 + \|\theta_x^*\|_2) \\
&= \sqrt{\rho_1\|\Phi\|_2^2} + \sqrt{\rho_2\|\Psi\|_2^2} + \sqrt{\rho_1\|W\|_2^2} + \sqrt{b\|\psi_x\|_2^2} + \sqrt{k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2} \\
&+ \sqrt{k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2} + \sqrt{\rho_3\|\theta_x\|_2^2} + \sqrt{\rho_1\|\Phi^*\|_2^2} + \sqrt{\rho_2\|\Psi^*\|_2^2} + \sqrt{\rho_1\|W^*\|_2^2} \\
&+ \sqrt{b\|\psi_x^*\|_2^2} + \sqrt{k\|\varphi_x^* + \psi^*lw^*\|_2^2} + \sqrt{k_0\|w_x^* - l\varphi^*\|_2^2} + \sqrt{\rho_3\|\theta_x^*\|_2^2} \\
&\leq \|U\|_{\mathcal{H}_i} + \|U^*\|_{\mathcal{H}_i}.
\end{aligned}$$

Logo, a aplicação definida em (3.13) é de fato uma norma, desde que para $i = 2$ consideremos $lL \neq n\pi, \forall n \in \mathbb{Z}$. \square

Observação 3.2. Para comprovar a necessidade de que $lL \neq n\pi, \forall n \in \mathbb{Z}$, suponha que $lL = n\pi$, para algum $n \in \mathbb{Z}$, então o vetor

$$U = (\text{sen}(lx), 0, 0, 0, -\text{cos}(lx), 0, 0) \in \mathcal{H}_2$$

é não nulo, mas $\|U\|_{\mathcal{H}_2} = 0$.

Observação 3.3. A partir de agora, neste trabalho, vamos considerar $lL \neq n\pi, \forall n \in \mathbb{Z}$ em \mathcal{H}_2 para que (3.11) seja um produto interno em \mathcal{H}_2 , e conseqüentemente, (3.13) seja uma norma em \mathcal{H}_2 .

Lema 3.4. Sejam $\varphi \in H_0^1$ e $\psi, w \in H_0^1$ (ou $\psi, w \in H_*^1$). Existe uma constante $C > 0$ tal que

$$k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 \leq C(\|\varphi_x\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2). \quad (3.18)$$

Demonstração. Usando as desigualdades Triangular e de Poincaré,

$$\begin{aligned}
k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 &\leq k(\|\varphi_x\|_2 + \|\psi\|_2 + l\|w\|_2)^2 \\
&\leq 4k\|\varphi_x\|_2^2 + 4k\|\psi\|_2^2 + 4kl^2\|w\|_2^2 \\
&\leq 4k\|\varphi_x\|_2^2 + 4kc\|\psi_x\|_2^2 + 4kl^2c\|w_x\|_2^2,
\end{aligned} \quad (3.19)$$

e ainda

$$\begin{aligned}
k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 &\leq 2k_0\|w_x\|_2^2 + 2k_0l^2\|\varphi\|_2^2 \\
&\leq 2k_0\|w_x\|_2^2 + 2k_0l^2c\|\varphi_x\|_2^2.
\end{aligned} \quad (3.20)$$

Somando as desigualdades (3.19) e (3.20) e tomando $C = \max\{4k + 2k_0l^2c, 4kc + b, 4kl^2c + 2k_0\}$ temos,

$$k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 \leq C(\|\varphi_x\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2).$$

□

Lema 3.5. *Sejam $\varphi, \psi, w \in H_0^1$. Então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|\varphi_x\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 \leq C(k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2). \quad (3.21)$$

Demonstração. Considere

$$\xi_1 := (\varphi_x + \psi + lw), \quad \xi_2 := (w_x - l\varphi). \quad (3.22)$$

Tomando o produto interno de L^2 de $\varphi_x + lw$ com $x\varphi$ e de $w_x - lw$ com xw temos,

$$(\varphi_x + lw, x\varphi)_2 = (\xi_1 - \psi, x\varphi)_2, \quad (3.23)$$

$$(w_x - l\varphi, xw)_2 = (\xi_2, xw)_2. \quad (3.24)$$

Somando (3.23) e (3.24), tomando a parte real e integrando em $(0, L)$,

$$\|\varphi\|_2^2 + \|w\|_2^2 = -2\mathbf{Re}(\xi_1 - \psi, x\varphi)_2 - 2\mathbf{Re}(\xi_2, xw)_2.$$

Usando as desigualdades Triangular, de Cauchy e de Young com $\epsilon = \frac{1}{2}$ obtemos,

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_2^2 + \|w\|_2^2 &\leq 2L\|\xi_1 - \psi\|_2\|\varphi\|_2 + 2L\|\xi_2\|_2\|w\|_2 \\ &\leq 2L^2\|\xi_1 - \psi\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\varphi\|_2^2 + 2L^2\|\xi_2\|_2^2 + \frac{1}{2}\|w\|_2^2 \\ &\leq 4L^2(\|\xi_1 - \psi\|_2^2 + \|\xi_2\|_2^2). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Observe que

$$\|\varphi_x\|_2^2 = \|\xi_1 - \psi - lw\|_2^2 \leq 2\|\xi_1 - \psi\|_2^2 + 2l^2\|w\|_2^2 \quad (3.26)$$

$$\|w_x\|_2^2 = \|\xi_2 + l\varphi\|_2^2 \leq 2\|\xi_2\|_2^2 + 2l^2\|\varphi\|_2^2. \quad (3.27)$$

Somando (3.26) e (3.27) e usando (3.25),

$$\begin{aligned} \|\varphi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 &\leq 2\|\xi_1 - \psi\|_2^2 + 2\|\xi_2\|_2^2 + 2l^2(\|w\|_2^2 + \|\varphi\|_2^2) \\ &\leq (2 + 8l^2L^2)(\|\xi_1 - \psi\|_2^2 + \|\xi_2\|_2^2). \end{aligned}$$

Usando as desigualdades Triangular e de Poincaré,

$$\begin{aligned} \|\varphi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 &\leq 2(2 + 8l^2L^2)\|\xi_1\|_2^2 + 2(2 + 8l^2L^2)c\|\psi_x\|_2^2 \\ &+ (2 + 8l^2L^2)\|\xi_2\|_2^2. \end{aligned}$$

Substituindo as funções definidas em (3.22), existe $C > 0$ tal que

$$\|\varphi_x\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 \leq C(k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2).$$

□

Lema 3.6. *Sejam $\varphi \in H_0^1$ e $\psi, w \in H_*^1$. Então, existe $C > 0$ tal que*

$$\|\varphi_x\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 \leq C(k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2). \quad (3.28)$$

Demonstração. A prova será efetuada por meio de argumentos de contradição. Suponha que para todo $n \in \mathbb{N}$ exista $\{(\varphi_n, \psi_n, w_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \in H_0^1 \times H_*^1 \times H_*^1$ tal que

$$k\|\varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n\|_2^2 + k_0\|w_{n,x} - l\varphi_n\|_2^2 + b\|\psi_{n,x}\|_2^2 < \frac{1}{n} \quad (3.29)$$

e

$$\|\varphi_{n,x}\|_2^2 + \|\psi_{n,x}\|_2^2 + \|w_{n,x}\|_2^2 = 1. \quad (3.30)$$

Observe que de (3.30) temos que a sequência $\{(\varphi_n, \psi_n, w_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $H_0^1 \times H_*^1 \times H_*^1$. Como H_0^1 tem inclusão compacta em L^2 e H_*^1 tem inclusão compacta em L_*^2 , temos que existe $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ tal que $\{(\varphi_n, \psi_n, w_n)\}_{n \in \mathbb{N}_1}$ converge forte em $L^2 \times L_*^2 \times L_*^2$.

De (3.29), temos

$$\psi_{n,x} \rightarrow 0 \text{ em } L^2,$$

assim

$$\psi_n \rightarrow 0 \text{ em } H_*^1,$$

Agora, considere $\varphi \in L^2$ e $w_x \in L_*^2$ tais que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ e $w_n \rightarrow w$.

De (3.29)

$$\varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n \rightarrow 0 \text{ forte em } L^2.$$

Mas,

$$\varphi_{n,x} + \psi_n + l(w_n - w) + lw = \varphi_{n,x} + \psi_n + lw_n.$$

Logo

$$\varphi_{n,x} \rightarrow -lw \text{ forte em } L^2. \quad (3.31)$$

Temos então que $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}_1}$ é de Cauchy em H_0^1 . Logo, existe $\phi \in H_0^1$ tal que $\varphi_n \rightarrow \phi$ em H_0^1 o que implica que $\varphi_n \rightarrow \phi$ em L^2 . Pela unicidade do limite, $\varphi = \phi$, isto é, $\varphi \in H_0^1$.

Portanto, de (3.31), deduzimos que

$$\varphi_x + lw = 0 \text{ quase sempre em } (0, L). \quad (3.32)$$

Similarmente, de (3.29) temos que

$$w_{n,x} \rightarrow l\varphi_n \text{ forte em } L^2.$$

Mas, como

$$w_{n,x} - l(\varphi_n - \varphi) - l\varphi = w_{n,x} - l\varphi_n,$$

segue que

$$w_{n,x} \rightarrow l\varphi \text{ forte em } L^2. \quad (3.33)$$

Então, $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}_1}$ é de Cauchy em H_0^1 . Logo, existe $w^* \in H_0^1$ tal que $w_n \rightarrow w^*$ em H_0^1 , e por consequência $w_n \rightarrow w^*$ em L^2 . Pela unicidade do limite segue que $w^* \in H_*^1$. De (3.33)

$$w_x - l\varphi = 0 \text{ quase sempre em } (0, L). \quad (3.34)$$

Portanto de (3.32) e (3.34), analogamente à solução do sistema (3.16), temos que $\varphi = w = 0$, o que contradiz (3.30).

Logo, existe $C > 0$ que satisfaz (3.28). □

Lema 3.7. *As normas $|\cdot|_{\mathcal{H}_i}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_i}$ são equivalentes.*

Demonstração. Segue dos lemas 3.4, 3.5 e 3.6. □

Observação 3.8. *Como as normas $|\cdot|_{\mathcal{H}}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ são equivalentes e $(\mathcal{H}, |\cdot|_{\mathcal{H}})$ é um espaço de Hilbert, então $(\mathcal{H}, \|\cdot\|_{\mathcal{H}})$ é também um espaço de Hilbert.*

3.2 EXISTÊNCIA E UNICIDADE

O objetivo desta seção é mostrar que o problema (3.9) admite uma única solução (esta conclusão se estenderá ao problema (3.1)-(3.7)). Primeiramente, vamos demonstrar alguns resultados que serão utilizados para atingirmos tal objetivo.

Lema 3.9. *Dada uma função $f \in L^2$, a equação*

$$-\theta_{xx} = f \text{ em } L^2, \quad (3.35)$$

possui uma única solução $\theta \in H^2 \cap H_0^1$.

Demonstração. Defina a aplicação $a(\cdot, \cdot) : H_0^1 \times H_0^1 \rightarrow \mathbb{C}$ colocando

$$a(\theta_1, \theta_2) = \int_0^L \theta_{1,x} \overline{\theta_{2,x}} dx.$$

Da definição de $a(\cdot, \cdot)$ segue que esta é uma forma sesquilinear. Temos ainda que $a(\cdot, \cdot)$ é contínua pois da Desigualdade de Hölder temos

$$|a(\theta_1, \theta_2)| \leq \|\theta_{1,x}\|_{L^2} \|\theta_{2,x}\|_{L^2} \leq C \|\theta_1\|_{H_0^1} \|\theta_2\|_{H_0^1},$$

para todo $\theta_1, \theta_2 \in H_0^1$.

A aplicação $a(\cdot, \cdot)$ também é coerciva, pois

$$a(\theta, \theta) = \|\theta_x\|_{L^2}^2 \geq \|\theta_x\|_{H_0^1}^2,$$

para todo $\theta \in H_0^1$.

Agora defina $\Lambda : H_0^1 \rightarrow \mathbb{C}$ da seguinte forma

$$\Lambda(\theta) = - \int_0^L f \overline{\theta} dx,$$

para todo $\theta \in H_0^1$.

Temos que Λ é antilinear e além disso limitado, pois usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e de Poincaré, existe $C > 0$ tal que

$$|\Lambda(\theta)| \leq C \|\theta\|_{H_0^1}.$$

para todo $\theta \in H_0^1$. Assim, como H_0^1 é um espaço de Hilbert, podemos aplicar o teorema de Lax-Milgram e concluir que existe um único $\theta \in H_0^1$ tal que

$$\int_0^L \theta_x \overline{\theta_{2,x}} dx = - \int_0^L f \overline{\theta_2} dx, \quad \forall \theta_2 \in H_0^1,$$

Segue que

$$\int_0^L \theta_x \phi_x dx = - \int_0^L f \phi dx, \forall \phi \in C_0^\infty.$$

Da definição de derivada fraca resulta que

$$\theta \in H^2 \cap H_0^1.$$

e que

$$-\theta_{xx} = f \text{ em } L^2.$$

□

Lema 3.10. Dadas $g_1, g_2, g_3 \in L^2$, o sistema

$$\begin{cases} k(\varphi_x + \psi + lw)_x + k_0 l(w_x - l\varphi) = g_1, \\ b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi + lw) = g_2, \\ k_0(w_x - l\varphi)_x - kl(\varphi_x + \psi + lw) = g_3. \end{cases} \quad (3.36)$$

possui uma única solução $(\varphi, \psi, w) \in (H^2 \cap H_0^1)^3$.

Demonstração. Considere $H = H_0^1 \times H_0^1 \times H_0^1$ e a aplicação $a : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\begin{aligned} a((\varphi, \psi, w), (\varphi^*, \psi^*, w^*)) &= k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(\varphi_x^* + \psi^* + lw^*)} dx \\ &+ k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{(w_x^* - l\varphi^*)} dx + b \int_0^L \psi_x \overline{\psi_x^*} dx. \end{aligned}$$

Observe que $a(\cdot, \cdot)$ é uma forma sesquilinear. Além disso, considerando em H a norma

$$\|(\varphi, \psi, w)\|_H^2 = \|\varphi_x\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2, \quad (3.37)$$

segue da desigualdade (3.21) que $a(\cdot, \cdot)$ é coerciva.

Dados $(\varphi, \psi, w), (\varphi^*, \psi^*, w^*) \in H$, usando as desigualdades Triangular e de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |a((\varphi, \psi, w), (\varphi^*, \psi^*, w^*))| &\leq k \|\varphi_x + \psi + lw\|_2 \|\varphi_x^* + \psi^* + lw^*\|_2 + b \|\psi_x\|_2 \|\psi_x^*\|_2 \\ &+ k_0 \|w_x - l\varphi\|_2 \|w_x^* - l\varphi_x^*\|_2. \end{aligned}$$

Pela Desigualdade (3.18), existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|a((\varphi, \psi, w), (\varphi^*, \psi^*, w^*))| \leq C \|(\varphi, \psi, w)\|_H \|(\varphi^*, \psi^*, w^*)\|_H.$$

Mostrando que $a(\cdot, \cdot)$ é uma forma sesquilinear, contínua e coerciva.

Defina agora a aplicação $\lambda : H \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\lambda(\varphi^*, \psi^*, w^*) = - \int_0^L (g_1 \overline{\varphi^*} + g_2 \overline{\psi^*} + g_3 \overline{w^*}) dx. \quad (3.38)$$

Podemos observar que λ é uma aplicação antilinear. Além disso, dado $(\varphi^*, \psi^*, w^*) \in H$ e usando as desigualdades Triangular e de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |\lambda(\varphi^*, \psi^*, w^*)| &\leq |(g_1, \varphi^*)_2| + |(g_2, \psi^*)_2| + |(g_3, w^*)_2| \\ &\leq \|g_1\|_2 \|\varphi^*\|_2 + \|g_2\|_2 \|\psi^*\|_2 + \|g_3\|_2 \|w^*\|_2. \end{aligned}$$

Portanto, usando a Desigualdade de Poincaré existe $C > 0$, tal que

$$|\lambda(\varphi^*, \psi^*, w^*)| \leq C \|(\varphi^*, \psi^*, w^*)\|_H,$$

para todo $(\varphi^*, \psi^*, w^*) \in H$. Logo, λ é uma aplicação antilinear e limitada. Pelo teorema de Lax-Milgram, existe um único $(\varphi, \psi, w) \in H$ que satisfaz

$$\begin{aligned} - \int_0^L (g_1 \overline{\varphi^*} + g_2 \overline{\psi^*} + g_3 \overline{w^*}) dx &= k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(\varphi_x^* + \psi^* + lw^*)} dx \\ &+ k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{(w_x^* - l\varphi^*)} dx + b \int_0^L \psi_x \overline{\psi_x^*} dx, \end{aligned} \quad (3.39)$$

para todo $(\varphi^*, \psi^*, w^*) \in H$.

Tome $\phi \in C_0^1$ arbitrária e $\varphi^* = \phi$, $\psi^* = w^* = 0$. Assim, substituindo em (3.39),

$$k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{\phi_x} dx - lk_0 \int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{\phi} dx = - \int_0^L g_1 \overline{\phi} dx, \quad \forall \phi \in C_0^1,$$

ou seja,

$$\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{\phi_x} dx = - \frac{1}{k} \int_0^L (g_1 - lk_0(w_x - l\varphi)) \overline{\phi} dx, \quad \forall \phi \in C_0^1.$$

Dado que $\varphi_x + \psi + lw, g_1 - lk_0(w_x - l\varphi) \in L^2$, temos que

$$\varphi_x + \psi + lw \in H^1.$$

Mas, $\psi + lw \in H^1$, o que implica que $\varphi_x \in H^1$, e portanto $\varphi \in H^2$. Além disso,

$$k(\varphi_x + \psi + lw)_x + k_0 l(w_x - l\varphi) = g_1. \quad (3.40)$$

Tome agora $\phi \in C_0^1$ arbitrária e $\varphi^* = w^* = 0$ e $\psi^* = \phi$. Assim, substituindo em (3.39),

$$k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\phi} dx + b \int_0^L \psi_x \bar{\phi}_x dx = - \int_0^L g_2 \bar{\phi} dx, \quad \forall \phi \in C_0^1,$$

ou seja,

$$\int_0^L \psi_x \bar{\phi}_x dx = -\frac{1}{b} \int_0^L (g_2 - k(\varphi_x + \psi + lw)) \bar{\phi} dx, \quad \forall \phi \in C_0^1.$$

Dado que $\psi_x, g_2 - k(\varphi_x + \psi + lw) \in L^2$, temos que $\psi_x \in H^1$, isto é, $\psi \in H^2$ e

$$b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) = g_2. \quad (3.41)$$

De modo análogo aos anteriores, tome $\phi \in C_0^1$ arbitrária e $\varphi^* = \psi^* = 0$ e $w^* = \phi$. Assim, substituindo em (3.39),

$$kl \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\phi} dx + k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi) \bar{\phi}_x dx = - \int_0^L g_3 \bar{\phi} dx, \quad \forall \phi \in C_0^1,$$

ou seja,

$$\int_0^L (w_x - l\varphi) \bar{\phi}_x dx = -\frac{1}{k_0} \int_0^L (g_3 - kl(\varphi_x + \psi + lw)) \bar{\phi} dx, \quad \forall \phi \in C_0^1.$$

Tendo em vista que $w_x - l\varphi, g_3 - kl(\varphi_x + \psi + lw) \in L^2$, concluímos que

$$w_x - l\varphi \in H^1.$$

Mas como $\varphi \in H^1$, temos que $w_x \in H^1$, isto é, $w \in H^2$. E ainda

$$(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = g_3. \quad (3.42)$$

Por fim, podemos concluir das igualdades (3.40), (3.41) e (3.42) que existe uma única solução $(\varphi, \psi, w) \in (H_0^1 \cap H^2)^3$ satisfazendo o sistema (3.36). \square

Lema 3.11. Dadas $g_1 \in L^2$ e $g_2, g_3 \in L_*^2$, o sistema

$$\begin{cases} k(\varphi_x + \psi + lw)_x + k_0 l(w_x - l\varphi) = g_1, \\ b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi + lw) = g_2, \\ k_0(w_x - l\varphi)_x - kl(\varphi_x + \psi + lw) = g_3. \end{cases} \quad (3.43)$$

possui uma única solução $(\varphi, \psi, w) \in (H^2 \cap H_0^1) \times (H^2 \cap H_*^1)^2$, com $w_x, \psi_x \in H_0^1$.

Demonstração. Considere $H' = H_0^1 \times H_*^1 \times H_*^1$ e a aplicação $a : H' \times H' \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\begin{aligned} a((\varphi, \psi, w), (\varphi^*, \psi^*, w^*)) &= k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(\varphi_x^* + \psi^* + lw^*)} dx \\ &+ k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{(w_x^* - l\varphi^*)} dx + b \int_0^L \psi_x \overline{\psi_x^*} dx. \end{aligned}$$

Observe que $a(\cdot, \cdot)$ é uma forma sesquilinear. Além disso, considerando em H' a norma

$$\|(\varphi, \psi, w)\|_{H'}^2 = \|\varphi_x\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2, \quad (3.44)$$

temos que $a(\cdot, \cdot)$ é coerciva, esse resultado segue diretamente da desigualdade (3.28). Observe agora que a norma

$$\|(\varphi, \psi, w)\|_{H'} = \|\varphi_x\|_2 + \|\psi_x\|_2 + \|w_x\|_2,$$

é equivalente a norma definida em (3.2). Por um lado, temos

$$\begin{aligned} \|(\varphi, \psi, w)\|_{H'}^2 &= \|\varphi_x\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2 \\ &\leq (\|\varphi_x\|_2 + \|\psi_x\|_2 + \|w_x\|_2)^2 \\ &= \|(\varphi, \psi, w)\|_{H'}^2. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|(\varphi, \psi, w)\|_{H'}^2 &= (\|\varphi_x\|_2 + \|\psi_x\|_2 + \|w_x\|_2)^2 \\ &\leq 2(\|\varphi_x\|_2 + \|\psi_x\|_2)^2 + 2(\|w_x\|_2)^2 \\ &\leq 4(\|\varphi_x\|_2^2 + \|\psi_x\|_2^2 + \|w_x\|_2^2) \\ &= 4\|(\varphi, \psi, w)\|_{H'}^2. \end{aligned}$$

Assim, dados $(\varphi, \psi, w), (\varphi^*, \psi^*, w^*) \in H'$, usando as desigualdades Triangular e de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} |a((\varphi, \psi, w), (\varphi^*, \psi^*, w^*))| &\leq k|((\varphi_x + \psi + lw), (\varphi_x^* + \psi^* + lw^*))_2| + b|(\psi_x, \psi_x^*)_2| \\ &+ k_0|((w_x - l\varphi), (w_x^* - l\varphi^*))_2| \\ &\leq k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2\|\varphi_x^* + \psi^* + lw^*\|_2 + b\|\psi_x\|_2\|\psi_x^*\|_2 \\ &+ k_0\|w_x - l\varphi\|_2\|w_x^* - l\varphi^*\|_2. \end{aligned}$$

Utilizando agora a desigualdade triangular e a desigualdade de Poincaré,

$$\begin{aligned}
|a((\varphi, \psi, w), (\varphi^*, \psi^*, w^*))| &\leq k(\|\varphi_x\|_2 + \|\psi\|_2 + l\|w\|_2)(\|\varphi_x^*\|_2 + \|\psi^*\|_2 + l\|w^*\|_2) \\
&+ b\|\psi_x\|_2\|\psi_x^*\|_2 + k_0(\|w_x\|_2 + l\|\varphi\|_2)(\|w_x^*\|_2 + l\|\varphi^*\|_2) \\
&\leq k(\|\varphi_x\|_2 + c\|\psi_x\|_2 + lc\|w_x\|_2)(\|\varphi_x^*\|_2 + c\|\psi_x^*\|_2 \\
&+ lc\|w_x^*\|_2) + b\|\psi_x\|_2\|\psi_x^*\|_2 + k_0(\|w_x\|_2 + lc\|\varphi_x\|_2)(\|w_x^*\|_2 \\
&+ lc\|\varphi_x^*\|_2).
\end{aligned}$$

Temos então que existe $C = \max\{k(\max\{1, c, lc\})^2, k_0(\max\{1, lc\})^2, b\} > 0$ tal que

$$|a((\varphi, \psi, w), (\varphi^*, \psi^*, w^*))| \leq C|(\varphi, \psi, w)|_{H'}|(\varphi^*, \psi^*, w^*)|_{H'}.$$

O que mostra eu a é contínua, e portanto, sequilinear, contínua e coerciva.

Defina agora a aplicação $\Lambda : H' \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

$$\Lambda(\varphi^*, \psi^*, w^*) = - \int_0^L (g_1 \overline{\varphi^*} + g_2 \overline{\psi^*} + g_3 \overline{w^*}) dx. \quad (3.46)$$

Podemos observar que Λ é uma aplicação antilinear.

Dado $(\varphi^*, \psi^*, w^*) \in H'$, usando as desigualdades triangular e de Cauchy-Schwarz temos

$$\begin{aligned}
|\Lambda(\varphi^*, \psi^*, w^*)| &\leq |(g_1, \varphi^*)_2| + |(g_2, \psi^*)_2| + |(g_3, w^*)_2| \\
&\leq \|g_1\|_2 \|\varphi^*\|_2 + \|g_2\|_2 \|\psi^*\|_2 + \|g_3\|_2 \|w^*\|_2.
\end{aligned}$$

E usando a desigualdade de Poincaré, existe $C = \max\{\|g_1\|_2, \|g_2\|_2, \|g_3\|_2\} > 0$ tal que

$$|\Lambda(\varphi^*, \psi^*, w^*)| \leq C|(\varphi^*, \psi^*, w^*)|_{H'}. \quad (3.47)$$

O que mostra que Λ é uma aplicação antilinear limitada.

Pelo teorema de Lax-Milgram, existe um único $(\varphi, \psi, w) \in H'$ que satisfaz

$$\begin{aligned}
- \int_0^L (g_1 \overline{\varphi^*} + g_2 \overline{\psi^*} + g_3 \overline{w^*}) dx &= k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(\varphi_x^* + \psi^* + lw^*)} dx \\
&+ k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{(w_x^* - l\varphi^*)} dx + b \int_0^L \psi_x \overline{\psi_x^*} dx.
\end{aligned} \quad (3.48)$$

para todo $(\varphi^*, \psi^*, w^*) \in H'$.

Tome $\xi \in C_0^1$ arbitrária e $\varphi^* = \xi, \psi^* = w^* = 0$. Assim, substituindo em (3.48),

$$k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{\xi_x} dx - lk_0 \int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{\xi} dx = - \int_0^L g_1 \overline{\xi} dx, \quad \forall \xi \in C_0^1,$$

Assim,

$$\int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \overline{\xi_x} dx = -\frac{1}{k} \int_0^L (g_1 - lk_0(w_x - l\varphi)) \overline{\xi} dx, \quad \forall \xi \in C_0^1.$$

Dado que $\varphi_x + \psi + lw, g_1 - lk_0(w_x - l\varphi) \in L^2$, temos que

$$\varphi_x + \psi + lw \in H^1.$$

Mas, $\psi + lw \in H^1$, o que implica que $\varphi_x \in H^1$, e portanto $\varphi \in H^2$. Além disso,

$$k(\varphi_x + \psi + lw)_x + k_0 l(w_x - l\varphi) = g_1. \quad (3.49)$$

Tomando agora $\phi \in H^1$ arbitrária, $\varphi^* = w^* = 0$ e $\psi^* = \phi - \frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx$. Substituindo em (3.48)

$$\begin{aligned} - \int_0^L g_2 \left(\overline{\phi - \frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx} \right) dx &= k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \left(\overline{\phi - \frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx} \right) dx \\ &\quad + b \int_0^L \psi_x \left(\overline{\phi - \frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx} \right)_x dx. \end{aligned}$$

Sabemos que $\left(\overline{-\frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx} \right)_x = 0$. Então

$$\begin{aligned} \int_0^L \psi_x \overline{\phi_x} dx &= -\frac{1}{b} \int_0^L (g_2 + k(\varphi_x + \psi + lw)) \overline{\phi} dx \\ &\quad - \frac{1}{b} \int_0^L (g_2 + k(\varphi_x + \psi + lw)) \left(\overline{-\frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx} \right) dx. \end{aligned}$$

Como $g_2 \in L_*^2, \psi, w \in H_*^1$, integrando por partes temos

$$\int_0^L \psi_x \overline{\phi_x} dx = -\frac{1}{b} \int_0^L (g_2 + k(\varphi_x + \psi + lw)) \overline{\phi} dx, \quad \forall \phi \in H^1. \quad (3.50)$$

Como a igualdade (3.50) vale em particular para toda $\phi \in C_0^1$ e $\psi_x, g_2 + k(\varphi_x + \psi + lw) \in L^2$, segue que $\psi_x \in H^1$, o que implica que $\psi \in H^2$. Temos também que

$$b\psi_{xx} = g_2 + k(\varphi_x + \psi + lw). \quad (3.51)$$

Integrando (3.51) de 0 a L e sabendo que $g_2 \in L_*^2, \psi, w \in H_*^1$ e $\varphi \in H_0^1$, temos que $\psi_x \in H_0^1$.
E

$$b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi + lw) = g_2. \quad (3.52)$$

Analogamente, tomando $\phi \in H^1$ arbitrária, $\varphi^* = \psi^* = 0$ e $w^* = \phi - \frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx$ e substituindo em (3.48),

$$\begin{aligned} - \int_0^L g_3 \left(\overline{\phi - \frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx} \right) dx &= kl \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \left(\overline{\phi - \frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx} \right) dx \\ &+ k_0 \int_0^L (w_x - l\varphi) \left(\overline{\phi - \frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx} \right) dx. \end{aligned}$$

Novamente usando o fato de que $\left(-\frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx \right)_x = 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{\phi_x} dx &= -\frac{1}{k_0} \int_0^L (g_3 + kl(\varphi_x + \psi + lw)) \overline{\phi} dx \\ &- \frac{1}{k_0} \int_0^L (g_3 + kl(\varphi_x + \psi + lw)) \left(-\frac{1}{L} \int_0^L \phi(x) dx \right) dx. \end{aligned}$$

Como $g_3 \in L_*^2$, $\psi, w \in H_*^1$, integrando por partes temos

$$\int_0^L (w_x - l\varphi) \overline{\phi_x} dx = -\frac{1}{k_0} \int_0^L (g_3 + kl(\varphi_x + \psi + lw)) \overline{\phi} dx, \quad \forall \phi \in H^1. \quad (3.53)$$

Sabendo que $w_x, g_3 + kl(\varphi_x + \psi + lw) \in L^2$ e que a igualdade (3.53) vale, em particular, para toda $\phi \in C_0^1$, temos $w_x - l\varphi \in H^1$. Como $\varphi \in H^1$, temos $w_x \in H^1$, o que implica que $w \in H^2$. Temos também

$$k_0(w_x - l\varphi)_x = g_3 + kl(\varphi_x + \psi + lw). \quad (3.54)$$

Integrando (3.54) de 0 a L e sabendo que $g_3 \in L_*^2$, $\psi, w \in H_*^1$ e $\varphi \in H_0^1$, temos que $w_x \in H_0^1$. E

$$k_0(w_x - l\varphi)_x - kl(\varphi_x + \psi + lw) = g_3. \quad (3.55)$$

Portanto, de (3.49), (3.52) e (3.54), existe uma única solução $(\varphi, \psi, w) \in (H^2 \cap H_0^1) \times (H^2 \cap H_*^1)^2$, com $w_x, \psi_x \in H_0^1$ para o sistema (3.43). □

Teorema 3.12. *O operador \mathcal{A}_i definido em (3.8) é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações sobre \mathcal{H}_i .*

Demonstração. Concluiremos o desejado utilizando o Teorema de Lummer-Phillip's. Assim, devemos mostrar que o operador \mathcal{A}_i é dissipativo, que $0 \in \rho(\mathcal{A}_i)$ e que $D(\mathcal{A}_i)$ é denso em \mathcal{H}_i .

- \mathcal{A}_i é dissipativo.

Temos que

$$\mathcal{A}_i U = \begin{pmatrix} \Phi \\ \frac{k}{\rho_1} \varphi_{xx} - \frac{k_0 l^2}{\rho_1} \varphi + \frac{k}{\rho_1} \psi_x + \frac{l(k+k_0)}{\rho_1} w_x \\ \Psi \\ -\frac{k}{\rho_2} \varphi_x + \frac{b}{\rho_2} \psi_{xx} - \frac{k}{\rho_2} \psi - \frac{kl}{\rho_2} w - \frac{\gamma}{\rho_2} \theta_x \\ W \\ -\frac{l(k_0+k)}{\rho_1} \varphi_x - \frac{lk}{\rho_1} \psi + \frac{k_0}{\rho_1} w_{xx} - \frac{l^2 k}{\rho_1} w \\ -\frac{\gamma}{\rho_3} \Psi_x + \frac{\alpha}{\rho_3} \theta_{xx} \end{pmatrix}.$$

Assim

$$\begin{aligned} ((\mathcal{A}_i U, U))_{\mathcal{H}_i} &= (k(\varphi_x + \psi + lw)_x + k_0 l(w_x - l\varphi), \Phi)_2 + (b\psi_{xx} - k(\varphi_x + \psi + lw), \Psi)_2 \\ &+ (k_0(w_x - l\varphi)_x - kl(\varphi_x + \psi + lw), W)_2 + k_0(W_x - l\Phi, w_x - l\varphi)_2 \\ &+ b(\Psi_x, \psi_x)_2 + (-\gamma\Psi_x + \alpha\theta_{xx}, \theta)_2 - \gamma(\theta_x, \Psi)_2 \\ &+ k(\Phi_x + \Psi + lW, \varphi_x + \psi + lw)_2. \end{aligned}$$

Rearranjando, usando integração por partes e as condições de fronteira,

$$\begin{aligned} ((\mathcal{A}_i U, U))_{\mathcal{H}_i} &= b(\Psi_x, \psi_x)_2 - b(\psi_x, \Psi_x) + \gamma(\theta, \Psi_x)_2 - \gamma(\Psi_x, \theta)_2 - \alpha\|\theta_x\|_2^2 \\ &+ k(\Phi_x + \Psi + lW, \varphi_x + \psi + lw)_2 - k(\varphi_x + \psi + lw, \Phi_x + \Psi + lW)_2 \\ &+ k_0(W_x - l\Phi, w_x - l\varphi) - k_0(w_x - l\varphi, W_x - l\Phi). \end{aligned}$$

Visto que $z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z)$, tomando a parte real de $((\mathcal{A}_i U, U))_{\mathcal{H}_i}$ obtemos

$$\mathbf{Re}((\mathcal{A}_i U, U))_{\mathcal{H}_i} = -\alpha\|\theta_x\|_2^2 \leq 0. \quad (3.56)$$

Como $U \in D(\mathcal{A}_i)$ foi escolhido arbitrariamente, temos que \mathcal{A}_i é dissipativo.

- $0 \in \rho(\mathcal{A}_i)$.

Mostrar que $0 \in \rho(\mathcal{A}_i)$ é equivalente a mostrar que o operador linear $-\mathcal{A}_i : D(\mathcal{A}_i) \subset \mathcal{H}_i \rightarrow \mathcal{H}_i$ é invertível e, $(-\mathcal{A}_i)^{-1}$ é limitado. Escrevendo $-\mathcal{A}_i U = F$ em termos de suas componentes temos

$$-\Phi = f_1, \quad (3.57)$$

$$-k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0l(w_x - l\varphi) = \rho_1 f_2, \quad (3.58)$$

$$-\Psi = f_3, \quad (3.59)$$

$$-b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = \rho_2 f_4, \quad (3.60)$$

$$-W = f_5, \quad (3.61)$$

$$-k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = \rho_1 f_6, \quad (3.62)$$

$$\gamma\Psi_x - \alpha\theta_{xx} = \rho_3 f_7. \quad (3.63)$$

Para $i = 1$, de (3.57), (3.59) e (3.61), segue que

$$\Phi = -f_1 \in H_0^1,$$

$$\Psi = -f_3 \in H_0^1,$$

$$W = -f_5 \in H_0^1.$$

Sabendo que $\frac{1}{\alpha}(\rho_3 f_7 - \gamma\Psi_x) \in L^2$, do Lema 3.9 existe um único $\theta \in H^2 \cap H_0^1$ que satisfaz

$$-\theta_{xx} = \frac{1}{\alpha}(\rho_3 f_7 - \gamma\Psi_x).$$

Considerando as funções g_1, g_2, g_3 dadas no Lema 3.10 da seguinte forma

$$g_1 = -\rho_1 f_2 \in L^2,$$

$$g_2 = -\rho_2 f_4 + \gamma\theta_x \in L^2,$$

$$g_3 = -\rho_1 f_6 \in L^2.$$

Temos que o sistema formado pelas equações (3.58), (3.60) e (3.62) possui uma única solução $(\varphi, \psi, w) \in (H^2 \cap H_0^1)^3$. O que mostra que existe um único $U \in D(\mathcal{A}_1)$ tal que $-\mathcal{A}_1 U = F$.

Para $i = 2$, de (3.57), (3.59) e (3.61), segue que

$$\Phi = -f_1 \in H_0^1,$$

$$\Psi = -f_3 \in H_*^1,$$

$$W = -f_5 \in H_*^1.$$

Sabendo que $\frac{1}{\alpha}(\rho_3 f_7 - \gamma\Psi_x) \in L^2$, do Lema 3.9 existe um único $\theta \in H^2 \cap H_0^1$ que satisfaz

$$-\theta_{xx} = \frac{1}{\alpha}(\rho_3 f_7 - \gamma\Psi_x).$$

Considerando as funções g_1, g_2, g_3 dadas no Lema 3.11 da seguinte forma

$$\begin{aligned} g_1 &= -\rho_1 f_2 \in L^2, \\ g_2 &= -\rho_2 f_4 + \gamma \theta_x \in L_*^2, \\ g_3 &= -\rho_1 f_6 \in L_*^2. \end{aligned}$$

Temos que o sistema formado pelas equações (3.58), (3.60) e (3.62) possui uma única solução (φ, ψ, w) satisfazendo

$$\varphi \in H^2 \cap H_0^1 \quad \psi, w \in H^2 \cap H_0^* \quad \psi_x w_x \in H_0^1.$$

O que mostra que existe um único $U \in D(\mathcal{A}_2)$ tal que $-\mathcal{A}_2 U = F$.

Portanto, o operador $-\mathcal{A}_i$ é invertível, vamos mostrar agora que seu inverso é limitado. Para isto, considere $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7) \in \mathcal{H}_i$. Existe um $U \in D(\mathcal{A}_i)$ tal que $\mathcal{A}_i U = F$. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz em (3.56) temos

$$\rho_3 \|\theta_x\|_2^2 \leq \frac{1}{k_1} \|\mathcal{A}U\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Mas $\mathcal{A}_i U = F$, então

$$\rho_3 \|\theta_x\|_2^2 \leq \frac{1}{k_1} \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Usando a desigualdade de Poincaré, existe uma constante $c_1 > 0$ tal que

$$\rho_3 \|\theta\|_2^2 \leq c_1 \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.64)$$

Tomando em (3.58), (3.60) e (3.62) o produto interno de L^2 , com φ, ψ e w , respectivamente, temos

$$\begin{aligned} k((\varphi_x + \psi + lw)_x, \varphi)_2 + k_0 l((w_x - l\varphi), \varphi)_2 &= (\rho_1 f_2, \varphi)_2, \\ b(\psi_{xx}, \psi)_2 - k((\varphi_x + \psi + lw), \psi)_2 &= (\rho_2 f_4 + \gamma \theta_x, \psi)_2, \\ k_0((w_x - l\varphi)_x, w)_2 - kl((\varphi_x + \psi + lw), w)_2 &= (\rho_1 f_6, w)_2. \end{aligned}$$

Usando integração por partes,

$$\begin{aligned} -k((\varphi_x + \psi + lw), \varphi_x)_2 - k_0((w_x - l\varphi), -l\varphi)_2 &= (\rho_1 f_2, \varphi)_2, \\ -b(\psi_x, \psi_x)_2 - k((\varphi_x + \psi + lw), \psi)_2 &= (\rho_2 f_4 + \gamma \theta_x, \psi)_2, \\ -k_0((w_x - l\varphi), w_x)_2 - k((\varphi_x + \psi + lw), lw)_2 &= (\rho_1 f_6, w)_2. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned} k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 &= -((\rho_1 f_2, \varphi)_2 + (\rho_2 f_4 + \gamma\theta_x, \psi)_2 \\ &+ (\rho_1 f_6, w)_2). \end{aligned}$$

Usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e triangular,

$$\begin{aligned} k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 &\leq \rho_1\|f_2\|_2\|\varphi\|_2 + \rho_2\|f_4\|_2\|\psi\|_2 \\ &+ \gamma\|\theta_x\|_2\|\psi\|_2 + \rho_1\|f_6\|_2\|w\|_2. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Usando a equivalência das normas $|U|_{\mathcal{H}}$ e $\|U\|_{\mathcal{H}}$ e a desigualdade de Poincaré

$$\begin{aligned} \rho_1\|f_2\|_2\|\varphi\|_2 + \rho_2\|f_4\|_2\|\psi\|_2 + \rho_1\|f_6\|_2\|w\|_2 &\leq c\rho_1\|f_2\|_2\|\varphi_x\|_2 + c\rho_2\|f_4\|_2\|\psi_x\|_2 \\ &+ c\rho_1\|f_6\|_2\|w_x\|_2 \\ &\leq 2c\rho_1|F|_{\mathcal{H}}|U|_{\mathcal{H}} + c\rho_2|F|_{\mathcal{H}}|U|_{\mathcal{H}}, \end{aligned}$$

assim, existe $c_2 = c\sigma^2 \max\{2\rho_1, \rho_2\} > 0$, onde σ é a constante positiva satisfazendo a desigualdade de equivalência das normas, isto é, $|U|_{\mathcal{H}} \leq \sigma\|U\|_{\mathcal{H}}$, tal que

$$\rho_1\|f_2\|_2\|\varphi\|_2 + \rho_2\|f_4\|_2\|\psi\|_2 + \rho_1\|f_6\|_2\|w\|_2 \leq c_2\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.66)$$

Usando as desigualdades de Poincaré e Young com $\epsilon = \frac{1}{6\sigma^2}$

$$\begin{aligned} \gamma\|\theta_x\|_2\|\psi\|_2 &\leq c\gamma\|\theta_x\|_2\|\psi_x\|_2 \\ &\leq \frac{3(c\gamma\sigma)^2}{2}\|\theta_x\|_2^2 + \frac{1}{6\sigma^2}\|\psi_x\|_2^2. \end{aligned}$$

De (3.64), existe $c_3 = \frac{3c^2\sigma^2\gamma m}{2k_1} > 0$ tal que

$$\gamma\|\theta_x\|_2\|\psi\|_2 \leq c_3\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{6\sigma^2}|U|_{\mathcal{H}}.$$

Usando a equivalência das normas,

$$\gamma\|\theta_x\|_2\|\psi\|_2 \leq c_3\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{6}\|U\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.67)$$

Substituindo (3.66) e (3.67) em (3.65), segue que existe uma constante positiva dada por $c_4 = \max\{c_1, c_2, c_3\} > 0$ tal que

$$k\|\varphi_x + \psi + lw\|_2^2 + k_0\|w_x - l\varphi\|_2^2 + b\|\psi_x\|_2^2 \leq c_4\|F\|_{\mathcal{H}}\|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{6}\|U\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (3.68)$$

Por outro lado, de (3.57), (3.59) e (3.61) e utilizando a desigualdade de Poincaré,

$$\begin{aligned} \rho_1 \|\Phi\|_2^2 + \rho_2 \|\Psi\|_2^2 + \rho_1 \|W\|_2^2 &= \rho_1 \|f_1\|_2^2 + \rho_2 \|f_3\|_2^2 + \rho_1 \|f_5\|_2^2 \\ &\leq c(\rho_1 \|f_{1,x}\|_2^2 + \rho_2 \|f_{3,x}\|_2^2 + \rho_1 \|f_{5,x}\|_2^2) \\ &\leq c \max\{\rho_1, \rho_2\} \|F\|_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

assim, existe $c_5 = c\sigma^2 \max\{\rho_1, \rho_2\} > 0$ tal que

$$\rho_1 \|\Phi\|_2^2 + \rho_2 \|\Psi\|_2^2 + \rho_1 \|W\|_2^2 \leq c_5 \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (3.69)$$

Somando (3.64), (3.68) e (3.69),

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq c_5 \|F\|_{\mathcal{H}} + c_4 \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{6} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + c_1 \|F\|_{\mathcal{H}} \|U\|_{\mathcal{H}}.$$

Utilizando a desigualdade de Young com $\epsilon = \frac{1}{6}$,

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq c_5 \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{3c_4^2}{2} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{1}{6} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{6} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{6} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{3c_1^2}{2} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Logo, existe $C = \sqrt{\max\{2c_5, 3c_4^2, 3c_1^2\}} > 0$ tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Como $F \in \mathcal{H}_i$ é arbitrário, segue que

$$\|(-\mathcal{A}_i)^{-1} F\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \|F\|_{\mathcal{H}}^2, \quad \forall F \in \mathcal{H}_i.$$

Com isso, podemos concluir que $0 \in \rho(\mathcal{A}_i)$.

- $\overline{D(\mathcal{A}_i)} = \mathcal{H}_i$

Considere no Lema 2.18 $B_1 = I$. Sabendo que $(-\mathcal{A}_i)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_i)$, tome $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lambda_0 < \min\left\{\frac{1}{\|(-\mathcal{A}_i)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_i)}}, 1\right\}.$$

Deste modo, $\lambda_0(-\mathcal{A}_i)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_i)$. Portanto, considerando $B_2 = \lambda_0(-\mathcal{A}_i)^{-1}$ no Lema 2.18 temos

$$\|B_2\|_{\mathcal{L}(X)} < \frac{1}{\|B_1\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_i)}}. \quad (3.70)$$

Logo, $I + \lambda_0(-\mathcal{A}_i)^{-1}$ é linear, limitado e invertível. Observe que

$$\lambda_0 I - \mathcal{A}_i = (-\mathcal{A}_i)^{-1}(\lambda_0(-\mathcal{A}_i)^{-1} + I). \quad (3.71)$$

Como $-\mathcal{A}_i$ e $I + \lambda_0(-\mathcal{A}_i)^{-1}$ são invertíveis, segue de (3.71) que $\lambda_0 I - \mathcal{A}_i \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_i)$.

Portanto, $Im(\lambda_0 I - \mathcal{A}_i) = \mathcal{H}_i$ para λ_0 tomado em (3.70). Do Teorema 2.19 segue que $Im(\lambda I - \mathcal{A}_i) = \mathcal{H}_i$ para todo $\lambda > 0$ e que $\overline{D(\mathcal{A}_i)} = \mathcal{H}_i$.

Segue então do Corolário 2.52, que \mathcal{A}_i é gerador infinitesimal de um C_0 -semigrupo de contrações $e^{\mathcal{A}_i t}$ sobre \mathcal{H}_i . \square

Teorema 3.13. *Para cada vetor $U_0 \in D(\mathcal{A}_i)$, o problema (3.9) possui uma única solução*

$$U \in C([0, \infty), D(\mathcal{A}_i)) \cap C^1([0, \infty), \mathcal{H}_i),$$

dada por $U(t) = e^{\mathcal{A}_i t} U_0$.

Demonstração. Segue do Teorema 3.12 e do Teorema 2.53. \square

4 ESTABILIDADE

O objetivo desta seção é fazer um estudo sobre o comportamento assintótico da solução $U(t) = e^{\mathcal{A}_i t} U_0$ do problema de Cauchy abstrado (3.9) e, conseqüentemente, para a solução do sistema (3.1)-(3.7). Considere

$$\chi_0 = \left| \frac{b}{k} \rho_1 - \rho_2 \right| e \chi = \left| 1 - \frac{k}{k_0} \right|. \quad (4.1)$$

A seguir enunciaremos e demonstraremos resultados que servirão de base para concluirmos o desejado.

Lema 4.1. *Seja $\mathcal{A}_i : D(\mathcal{A}_i) \rightarrow \mathcal{H}_i$ o operador definido em (3.8). Então, todos os valores espectrais de \mathcal{A}_i são autovalores de \mathcal{A}_i .*

Demonstração. Considere $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $U_n = (\varphi^{(n)}, \Phi^{(n)}, \psi^{(n)}, \Psi^{(n)}, w^{(n)}, W^{(n)}, \theta^{(n)})$ uma sequência limitada (na norma do gráfico) em $D(\mathcal{A}_i)$. Observe que

$$\begin{aligned} \|U_n\|_{D(\mathcal{A}_i)} &= \|U_n\|_{\mathcal{H}_i} + \|\mathcal{A}_i U_n\|_{\mathcal{H}_i} \\ &= \|\varphi_x^{(n)}\|_2^2 + \|\Phi^{(n)}\|_2^2 + \|\psi_x^{(n)}\|_2^2 + \|\Psi^{(n)}\|_2^2 + \|w_x^{(n)}\|_2^2 + \|W^{(n)}\|_2^2 + \|\theta^{(n)}\|_2^2 \\ &+ \|\Phi_x^{(n)}\|_2^2 + \frac{1}{\rho_1} \|k(\varphi_x^{(n)} + \psi^{(n)} + lw^{(n)})_x + k_0 l(w_x^{(n)} - l\varphi^{(n)})\|_2^2 + \|\Psi_x^{(n)}\|_2^2 \\ &+ \frac{1}{\rho_2} \|b\psi_{xx}^{(n)} - k(\varphi_x^{(n)} + \psi^{(n)} + lw^{(n)}) - \gamma\theta_x^{(n)}\|_2^2 + \|W_x^{(n)}\|_2^2 \\ &+ \frac{1}{\rho_1} \|k_0(w_x^{(n)} - l\varphi^{(n)})_x - kl(\varphi_x^{(n)} + \psi^{(n)} + lw^{(n)})\|_2^2 \\ &+ \frac{1}{\rho_3} \|\gamma\Psi_x^{(n)} + \alpha\theta_{xx}^{(n)}\|_2^2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Primeiramente mostraremos que as sequências $\{\varphi_{xx}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\psi_{xx}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{w_{xx}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{\theta_x^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ são limitadas em L^2 .

Tomando a norma de $\varphi_{xx}^{(n)}$ em L^2 , somando e subtraindo termos adequados, usando a Desigualdade Triangular e a Proposição 2.32 temos,

$$\begin{aligned} \|\varphi_{xx}^{(n)}\|_2^2 &= \|(\varphi_x^{(n)} + \psi^{(n)} + lw^{(n)})_x - \psi_x^{(n)} - lw_x^{(n)}\|_2^2 \\ &\leq 2\|(\varphi_x^{(n)} + \psi^{(n)} + lw^{(n)})_x\|_2^2 + 2\|\psi_x^{(n)} + lw_x^{(n)}\|_2^2 \\ &\leq \frac{4}{k} \|(\varphi_x^{(n)} + \psi^{(n)} + lw^{(n)})_x + k_0 l(w_x^{(n)} - l\varphi^{(n)})\|_2^2 + \frac{4}{k} \|k_0 l(w_x^{(n)} - l\varphi^{(n)})\|_2^2 \\ &+ 4\|\psi_x^{(n)}\|_2^2 + 4l^2\|w_x^{(n)}\|_2^2. \end{aligned}$$

Usando novamente a Desigualdade Triangular e agora a Desigualdade de Poincaré, segue então

de (4.2) que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\varphi_{xx}^{(n)}\|_2^2 \leq C \|U_n\|_{D(\mathcal{A}_i)}. \quad (4.3)$$

Como $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, segue que a sequência $\{\varphi_{xx}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em L^2 .

De modo análogo é possível mostrar que $\{\psi_{xx}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{w_{xx}^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ também são limitadas em L^2 .

Usando (3.56) e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\begin{aligned} \|\theta_x^{(n)}\|_2^2 &= -\frac{1}{\alpha} \operatorname{Re}((\mathcal{A}_i U_n, U_n))_{\mathcal{H}_i} \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \|\mathcal{A}_i U_n\|_{\mathcal{H}_i} \|U_n\|_{\mathcal{H}_i}. \end{aligned}$$

Da equivalência das normas $|\cdot|_{\mathcal{H}_i}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_i}$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\theta_x^{(n)}\|_2^2 \leq C |\mathcal{A}_i U_n|_{\mathcal{H}_i} |U_n|_{\mathcal{H}_i}.$$

Agora, usando que $2ab \leq (a+b)^2$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|\theta_x^{(n)}\|_2^2 \leq C (|U_n|_{\mathcal{H}_i} + |\mathcal{A}_i U_n|_{\mathcal{H}_i})^2.$$

Isto é,

$$\|\theta_x^{(n)}\|_2 \leq C \|U_n\|_{D(\mathcal{A}_i)}.$$

Portanto, a sequência $\{\theta_x^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em L^2 .

Mostraremos agora que a sequência $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente em \mathcal{H}_i .

(1) A sequência $\{\varphi^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em H^2 . Como a aplicação inclusão

$$i : (H^2, \|\cdot\|_{H^2}) \rightarrow (H^1, \|\cdot\|_{H^1})$$

é compacta (pela Proposição 2.39), existem uma subsequência $\{\varphi^{(n_k)}\}_{n_k \in \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}}$ e uma função $\varphi \in H^1$ tais que

$$\|\varphi^{(n_k)} - \varphi\|_{H^1} \rightarrow 0.$$

Como $\varphi^{(n_k)} \in H_0^1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $(H_0^1, \|\cdot\|_{H^1})$ é completo, segue que $\varphi \in H_0^1$.

(2) A sequência $\{\Phi^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}_1}$ é limitada em H^1 . A aplicação inclusão

$$i : (H^1, \|\cdot\|_{H^1}) \rightarrow (C([0, L], \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$$

é compacta (pela Proposição 2.39). Logo existem uma subsequência $\{\Phi^{(n_k)}\}_{n_k \in \mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1}$ e uma

função $\Phi \in C([0, L], \mathbb{R})$ tais que

$$\|\Phi^{(n_k)} - \Phi\|_\infty \rightarrow 0.$$

Mas, como

$$0 \leq \|\Phi^{(n_k)} - \Phi\|_2^2 = \int_0^L |\Phi^{(n_k)} - \Phi|^2 dx \leq L \|\Phi^{(n_k)} - \Phi\|_\infty \rightarrow 0,$$

então $\Phi \in L^2$ e

$$\|\Phi^{(n_k)} - \Phi\|_2^2 \rightarrow 0.$$

(3) A sequência $\{\psi^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}_2}$ é limitada em H^2 . Assim como em (1), existem uma subsequência $\{\psi^{(n_k)}\}_{n_k \in \mathbb{N}_3 \subset \mathbb{N}_2}$ e uma função $\psi \in H^1$ tais que

$$\|\psi^{(n_k)} - \psi\|_{H^1} \rightarrow 0.$$

Como $\psi^{(n_k)} \in H_0^1$ e $(H_0^1, \|\cdot\|_{H^1})$ é completo (ou $\psi^{(n_k)} \in H_*^1$ e $(H_*^1, \|\cdot\|_{H^1})$ é completo), segue que $\psi \in H_0^1$ (ou $\psi \in H_*^1$).

(4) A sequência $\{\Psi^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}_3}$ é limitada em H^1 . Assim como em (2), existem uma subsequência $\{\Psi^{(n_k)}\}_{n_k \in \mathbb{N}_4 \subset \mathbb{N}_3}$ e uma função $\Psi \in L^2$ tais que

$$\|\Psi^{(n_k)} - \Psi\|_2 \rightarrow 0.$$

Como $\Psi^{(n_k)} \in L^2$ e $(L^2, \|\cdot\|_2)$ é completo (ou $\Psi^{(n_k)} \in L_*^2$ e $(L_*^2, \|\cdot\|_2)$ é completo), segue que $\Psi \in L^2$ (ou $\Psi \in L_*^2$).

(5) A sequência $\{w^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}_4}$ é limitada em H^2 . Assim como em (1), existem uma subsequência $\{w^{(n_k)}\}_{n_k \in \mathbb{N}_5 \subset \mathbb{N}_4}$ e uma função $w \in H^1$ tais que

$$\|w^{(n_k)} - w\|_{H^1} \rightarrow 0.$$

Como $w^{(n_k)} \in H_0^1$ e $(H_0^1, \|\cdot\|_{H^1})$ é completo (ou $w^{(n_k)} \in H_*^1$ e $(H_*^1, \|\cdot\|_{H^1})$ é completo), segue que $w \in H_0^1$ (ou $w \in H_*^1$).

(6) A sequência $\{W^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}_5}$ é limitada em H^1 . Assim como em (2), existem uma subsequência $\{W^{(n_k)}\}_{n_k \in \mathbb{N}_6 \subset \mathbb{N}_5}$ e uma função $W \in L^2$ tais que

$$\|W^{(n_k)} - W\|_2 \rightarrow 0.$$

Como $W^{(n_k)} \in L^2$ e $(L^2, \|\cdot\|_2)$ é completo (ou $W^{(n_k)} \in L_*^2$ e $(L_*^2, \|\cdot\|_2)$ é completo), segue que $W \in L^2$ (ou $W \in L_*^2$).

(7) A sequência $\{\theta^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}_6}$ é limitada em H^1 . Assim como em (2), existem uma subsequência

$\{\theta^{(n_k)}\}_{n_k \in \mathbb{N}_7 \subset \mathbb{N}_6}$ e uma função $\theta \in L^2$ tais que

$$\|\theta^{(n_k)} - \theta\|_2 \rightarrow 0.$$

Como $\theta^{(n_k)} \in L^2$ e $(L^2, \|\cdot\|_2)$ é completo, segue que $\theta \in L^2$.

Assim, dos itens (1)-(7), existem $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W, \theta) \in \mathcal{H}_i$ e $\mathbb{N}_7 \subset \mathbb{N}$ tais que a sequência $\{U_{n_k}\}_{n_k \in \mathbb{N}_7}$ converge para U no espaço $(\mathcal{H}_i, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_i})$.

Com isso mostramos que dada uma sequência $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ limitada em $D(\mathcal{A}_i)$, esta possui uma subsequência convergente em \mathcal{H}_i , isto é, pelo Teorema (2.21) a aplicação

$$i : (D(\mathcal{A}_i), \|\cdot\|_{D(\mathcal{A}_i)}) \rightarrow (\mathcal{H}_i, |\cdot|_{\mathcal{H}_i})$$

é compacta. Portanto, pela Proposição 2.23 e pela Proposição 2.24 segue que todos os valores espectrais de \mathcal{A}_i são autovalores de \mathcal{A}_i . \square

Observação 4.2. No Lema 4.1, obtemos que o operador $i : (D(\mathcal{A}_i), \|\cdot\|_{D(\mathcal{A}_i)}) \rightarrow (\mathcal{H}_i, |\cdot|_{\mathcal{H}_i})$ é compacto. Pela equivalência das normas $|\cdot|_{\mathcal{H}_i}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_i}$, temos que também é compacto o operador $i : (D(\mathcal{A}_i), \|\cdot\|_{D(\mathcal{A}_i)}) \rightarrow (\mathcal{H}_i, \|\cdot\|_{\mathcal{H}_i})$.

Lema 4.3. Seja $\mathcal{A}_i : D(\mathcal{A}_i) \rightarrow \mathcal{H}_i$ o operador definido em (3.8). Então $i\mathbb{R} \subseteq \rho(\mathcal{A}_i)$.

Demonstração. Suponha que $i\mathbb{R} \not\subseteq \rho(\mathcal{A}_i)$. Então existe $\beta \in \mathbb{R}, \beta \neq 0$ (pois $0 \in \rho(\mathcal{A}_i)$) tal que $i\beta \in \sigma(\mathcal{A}_i)$. Do Lema 4.1, temos que $i\beta$ é um autovalor de \mathcal{A}_i , então existe um autovetor não-nulo $U \in D(\mathcal{A}_i)$, satisfazendo a equação resolvente

$$i\beta U - \mathcal{A}_i U = 0. \quad (4.4)$$

Reescrevendo (4.4) em termos de suas componentes, temos

$$i\beta\varphi - \Phi = 0, \quad (4.5)$$

$$i\beta\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0l(w_x - l\varphi) = 0, \quad (4.6)$$

$$i\beta\psi - \Psi = 0, \quad (4.7)$$

$$i\beta\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = 0, \quad (4.8)$$

$$i\beta w - W = 0, \quad (4.9)$$

$$i\beta\rho_1 W - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = 0, \quad (4.10)$$

$$i\beta\rho_3\theta + \gamma\Psi_x - \alpha\theta_{xx} = 0. \quad (4.11)$$

Tomando o produto interno de (4.4) com U em \mathcal{H}_i , tomando a parte real, e usando (3.56), temos

$$\|\theta_x\|_2^2 = 0$$

Usando a desigualdade de Poincaré,

$$0 \leq \|\theta\|_2 \leq C\|\theta_x\|_2 = 0.$$

Portanto, $\theta = 0$ e por consequência $\theta_{xx} = 0$. Substituindo isso em (4.11) temos que $\Psi_x = 0$.

Usando a desigualdade de Poincaré

$$0 \leq \|\Psi\|_2 \leq C\|\Psi_x\|_2 = 0.$$

Assim, obtemos que $\Psi = 0$ e consequentemente de (4.7), $\psi = 0$. Deste modo as igualdades (4.6), (4.8) e (4.10) se reduzem a

$$i\beta\rho_1\Phi - k(\varphi_x + lw)_x - k_0l(w_x - l\varphi) = 0, \quad (4.12)$$

$$k(\varphi_x + lw) = 0, \quad (4.13)$$

$$i\beta\rho_1W - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + lw) = 0. \quad (4.14)$$

Substituindo (4.13) em (4.12) e usando (4.5) temos

$$(w_x - l\varphi) = \frac{-\beta^2\rho_1}{k_0l}\varphi. \quad (4.15)$$

Substituindo agora (4.13), (4.15) e (4.9) em (4.14) obtemos

$$(\varphi_x - lw) = 0. \quad (4.16)$$

De (4.13) e (4.16) segue que $\varphi_x = 0$ e consequentemente $w = 0$. Usando a desigualdade de Poincaré

$$0 \leq \|\varphi\|_2 \leq C\|\varphi_x\|_2 = 0.$$

Portanto $\varphi = 0$. Como $\varphi = w = 0$ de (4.5) e (4.9) segue que $\Phi = W = 0$.

Assim, obtemos que $U = 0$, o que contradiz o fato de U ser um autovetor não-nulo associado ao autovalor $i\beta$. Portanto, $i\mathbb{R} \subseteq \rho(\mathcal{A}_i)$. \square

Como $i\mathbb{R} \subseteq \rho(\mathcal{A}_i)$, temos que dado $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7) \in \mathcal{H}$, existe um $U = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W, \theta) \in D(\mathcal{A}_i)$, que satisfaz a equação resolvente $i\beta U - \mathcal{A}_i U = F$. A

equação resolvente em termos de suas componentes é dada por

$$i\beta\varphi - \Phi = f_1, \quad (4.17)$$

$$i\beta\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0l(w_x - l\varphi) = \rho_1f_2, \quad (4.18)$$

$$i\beta\psi - \Psi = f_3, \quad (4.19)$$

$$i\beta\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = \rho_2f_4, \quad (4.20)$$

$$i\beta w - W = f_5, \quad (4.21)$$

$$i\beta\rho_1W - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = \rho_1f_6, \quad (4.22)$$

$$i\beta\rho_3\theta + \gamma\Psi_x - \alpha\theta_{xx} = \rho_3f_7. \quad (4.23)$$

Lema 4.4. *Sejam $U \in D(\mathcal{A}_i)$ e $F \in \mathcal{H}_i$ tais que $i\beta U - \mathcal{A}_i U = F$ para algum $\beta \in \mathbb{R}$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|\theta_x\|_2^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.24)$$

Demonstração. Tomando o produto interno de $i\beta U - \mathcal{A}_i U = F$ com U , tomando a parte real, e usando (3.56), obtemos

$$\alpha\|\theta_x\|_2^2 = \mathbf{Re}((F, U))_{\mathcal{H}}.$$

Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\|\theta_x\|_2^2 \leq C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Com $C = \frac{1}{\alpha}$. O que prova o Lema. □

A seguir vamos obter estimativas locais usando funções de corte. Consideraremos inicialmente $L_0 \in (0, L)$ e $\delta > 0$ números arbitrários tais que $(L_0 - \delta, L_0 + \delta) \subset (0, L)$, e uma função $s \in C^2(0, L)$ satisfazendo

$$\text{supp } s \subset (L_0 - \delta, L_0 + \delta), 0 \leq s(x) \leq 1, x \in (0, L) \quad (4.25)$$

e

$$s(x) = 1 \quad \text{para } x \in [L_0 - \delta/2, L_0 + \delta/2] \quad (4.26)$$

Se tivermos os valores de L , L_0 e δ , uma função desse tipo pode ser determinada por partes, um exemplo genérico para este tipo de função pode ser dado da seguinte forma:

$$s(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L_0 - \delta, \\ e^{\frac{1}{(x-(L_0-\delta/2))^2-1}} e, & L_0 - \delta < x \leq L_0 - \frac{\delta}{2}, \\ 1, & L_0 - \frac{\delta}{2} \leq x \leq L_0 + \frac{\delta}{2}, \\ e^{\frac{1}{(x-(L_0+\delta/2))^2-1}} e, & L_0 + \frac{\delta}{2} \leq x < L_0 + \delta, \\ 0, & L_0 + \delta \leq x \leq L. \end{cases}$$

Vamos atribuir valores a L , L_0 e δ pra que possamos analisar graficamente o comportamento dessa função s . Considerando $L = 8$, $L_0 = 4$ e $\delta = 2$, temos

$$s(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 2, \\ e^{\frac{1}{(x-3)^2-1}} e, & 2 < x \leq 3, \\ 1, & 3 \leq x \leq 5, \\ e^{\frac{1}{(x-5)^2-1}} e, & 5 \leq x < 6, \\ 0, & 6 \leq x \leq 8. \end{cases}$$

Podemos observar a representação gráfica de s na Figura 4.1.

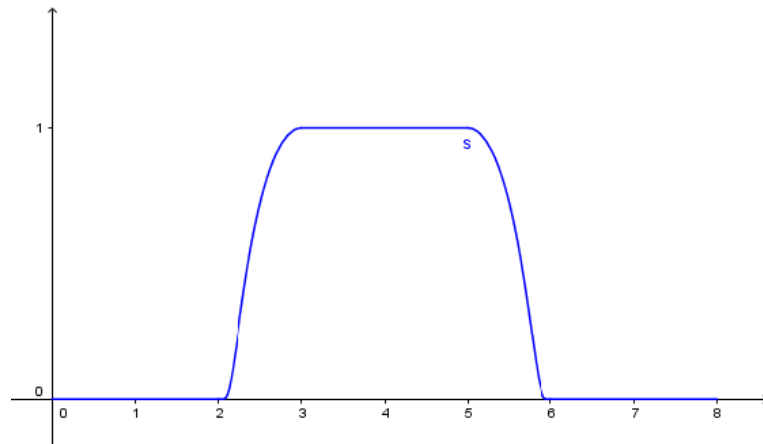


Figura 4.1: Função s .

Lema 4.5. *Sejam $F \in \mathcal{H}_i$ e $\beta \in \mathbb{R}$ com $|\beta| > 1$ tais que $i\beta U - \mathcal{A}_i U = F$ para algum $U \in D(\mathcal{A}_i)$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} \int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s|\psi_x|^2 dx &\leq C\|\theta_x\|_2 \left(\int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s|\Psi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ \frac{C}{|\beta|} \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Demonstração. Derivando (4.19) com respeito a variável x e substituindo em (4.23), obtemos

$$i\beta\rho_3\theta + i\beta\gamma\psi_x - \gamma f_{3,x} - \alpha\theta_{xx} = \rho_3 f_7. \quad (4.28)$$

Multiplicando (4.28) por $s\overline{\psi_x}$ e integrando de 0 até L temos

$$i\beta\gamma \int_0^L s|\psi_x|^2 dx = -i\beta\rho_3 \int_0^L s\theta\overline{\psi_x} dx + \gamma \int_0^L s f_{3,x}\overline{\psi_x} dx + \alpha \int_0^L s\theta_{xx}\overline{\psi_x} dx + \rho_3 \int_0^L s f_7\overline{\psi_x} dx.$$

Usando (4.19) e integração por partes

$$\begin{aligned} i\beta\gamma \int_0^L s|\psi_x|^2 dx &= \rho_3 \int_0^L s\theta\overline{f_{3,x}} dx + \rho_3 \int_0^L s\theta\overline{\Psi_x} + \gamma \int_0^L s f_{3,x}\overline{\psi_x} - \alpha \int_0^L s'\theta_x\overline{\psi_x} dx \\ &- \alpha \int_0^L s\theta_x\overline{\psi_{xx}} dx + \rho_3 \int_0^L s f_7\overline{\psi_x} dx. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Vamos observar separadamente cada parcela desta soma. Para isto, defina

$$I_1 = -\alpha \int_0^L s\theta_x\overline{\psi_{xx}} dx$$

e

$$I_2 = \rho_3 \int_0^L s\theta\overline{\Psi_x}.$$

Usando (4.20) temos

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{i\beta}{b}\alpha\rho_2 \int_0^L s\theta_x\overline{\Psi} dx - \frac{\alpha}{b}\gamma \int_0^L s|\theta_x|^2 dx - \frac{\alpha}{b}k \int_0^L s\theta_x\overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx \\ &+ \frac{\alpha}{b}\rho_2 \int_0^L s\theta_x\overline{f_4} dx. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Tomando o módulo em (4.30), usando as desigualdades Triangular, de Hölder, de Young e (4.24), existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |I_1| &= -\alpha \int_0^L s\theta_x \overline{\left(\frac{i\beta\rho_2}{b}\Psi + \frac{k}{b}(\varphi_x + \psi + lw) + \frac{\gamma}{b}\theta_x - \frac{\rho_2}{b}f_4 \right)} dx \\ &= \frac{i\beta\rho_2\alpha}{b} \int_0^L s\theta_x\overline{\Psi} dx - \frac{\alpha k}{b} \int_0^L s\theta_x\overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx \\ &- \frac{\alpha\gamma}{b} \int_0^L s|\theta_x|^2 dx + \frac{\alpha\rho_2}{b} \int_0^L s\theta_x\overline{f_4} dx \\ &\leq C|\beta|||\theta_x||_2 \left(\int_0^L s|\Psi|^2 dx \right)^{1/2} + C||\theta_x||_2 ||U||_{\mathcal{H}} + C||U||_{\mathcal{H}} ||F||_{\mathcal{H}} + C||F||_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Usando (4.23) e integração por partes, segue que

$$\begin{aligned}
I_2 &= \rho_3 \int_0^L s \overline{\theta \left(-\frac{i\beta\rho_3}{\gamma}\theta + \frac{\alpha}{\gamma}\theta_{xx} + \frac{\rho_3}{\gamma}f_7 \right)} dx \\
&= \frac{\rho_3^2}{\gamma} \int_0^L s \overline{\theta f_7} dx + \frac{i\beta\rho_3^2}{\gamma} \int_0^L s |\theta|^2 dx + \frac{\rho_3\alpha}{\gamma} \int_0^L s \overline{\theta \theta_{xx}} dx \\
&= \frac{\rho_3^2}{\gamma} \int_0^L s \overline{\theta f_7} dx + \frac{i\beta\rho_3^2}{\gamma} \int_0^L s |\theta|^2 dx - \frac{\rho_3\alpha}{\gamma} \int_0^L s' \overline{\theta}_x dx - \frac{\rho_3\alpha}{\gamma} \int_0^L s |\theta_x|^2 dx.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Tomando o módulo em (4.32), usando as desigualdades Triangular, de Hölder, de Young e Poincaré, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|I_2| \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}} + C |\beta| \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{4.33}$$

Temos então que tomando o módulo de (4.29), considerando o fato de $|\beta| > 1$, usando as desigualdades Triangular, de Hölder, (4.31) e (4.33), existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s |\psi_x|^2 dx &\leq C \|\theta_x\|_2 \left(\int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s |\Psi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\
&\quad + \frac{C}{|\beta|} \|F\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

□

Lema 4.6. *Sejam $F \in \mathcal{H}_i$ e $\beta \in \mathbb{R}$ com $|\beta| > 1$ tais que $i\beta U - \mathcal{A}_i U = F$ para algum $U \in D(\mathcal{A}_i)$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s |\Psi|^2 dx \leq \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{\beta^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{4.34}$$

Demonstração. Multiplicando (4.20) por $-s\bar{\psi}$ e integrando de 0 a L temos

$$\begin{aligned}
\rho_2 \int_0^L i\beta s \Psi \bar{\psi} dx &= b \int_0^L s \psi_{xx} \bar{\psi} dx - k \int_0^L s (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\psi} dx - \gamma \int_0^L s \theta_x \bar{\psi} dx \\
&\quad + \rho_2 \int_0^L s f_4 \bar{\psi} dx.
\end{aligned}$$

Usando (4.19) e integrando por partes obtemos

$$\rho_2 \int_0^L s |\Psi|^2 dx = b \int_0^L s |\psi_x|^2 dx + k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) s \bar{\psi} dx + I_3 + I_4 \tag{4.35}$$

onde, usando a equação (4.7)

$$\begin{aligned} I_3 &= \gamma \int_0^L s \theta_x \bar{\psi} dx - \rho_2 \int_0^L s f_4 \bar{\psi} dx - \rho_2 \int_0^L s \Psi \bar{f}_3 dx \\ &= -\frac{\gamma}{i\beta} \int_0^L s \theta_x \overline{[f_3 + \Psi]} dx - \rho_2 \int_0^L s [f_4 \bar{\psi} + \Psi \bar{f}_3] dx, \end{aligned}$$

e

$$I_4 = b \int_0^L s' \psi_x \bar{\psi} dx.$$

Usando (4.19) temos que

$$k \int_0^L s(\varphi_x + \psi + lw) \bar{\psi} dx = -\frac{k}{i\beta} \int_0^L s(\varphi_x + \psi + lw) \bar{\Psi} dx - \frac{k}{i\beta} \int_0^L s(\varphi_x + \psi + lw) \bar{f}_3 dx.$$

Tomando o módulo e usando as desigualdades Triangular, de Hölder e de Poincaré, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left| k \int_0^L (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\psi} dx \right| \leq \frac{k}{|\beta|} \left(\int_0^L s |\Psi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Usando a Desigualdade de Young com $\varepsilon = \frac{\rho_1}{2}$, existe uma constante $C > 0$ que satisfaz

$$\left| k \int_0^L s(\varphi_x + \psi + lw) \bar{\psi} dx \right| \leq \frac{\rho_1}{2} \int_0^L s |\Psi|^2 dx + \frac{C}{\beta^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.36)$$

Agora, usando (4.19), as desigualdades Triangular, de Hölder, e de Poincaré, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|I_3| \leq \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_{L^2} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.37)$$

Observe que, usando integração por partes temos que

$$I_4 = -b \int_0^L s'' |\psi|^2 dx - b \int_0^L s' \psi \bar{\psi}_x dx,$$

e por (4.19) segue que

$$b \int_0^L s' \psi_x \bar{\psi} + b \int_0^L \overline{s' \psi_x \bar{\psi}} = -\frac{b}{\beta^2} \int_0^L s'' |\Psi + f_3|^2 dx.$$

Tomando a parte real, o módulo, usando a Desigualdade Triangular e a Proposição 2.32, existe

uma constante $C > 0$ tal que

$$|\mathbf{Re}(I_4)| \leq \frac{C}{\beta^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{\beta^2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (4.38)$$

Tomando a parte real e o módulo em (4.35), assumindo que $|\beta| > 1$, usando (4.36), (4.37) e (4.38), e usando a definição de s , existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s |\Psi|^2 dx &\leq C \int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s |\psi_x|^2 dx + \frac{C}{\beta^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_{L^2} \|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_{L^2} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Young e (4.24), temos

$$\begin{aligned} \int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s |\Psi|^2 dx &\leq C \int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s |\psi_x|^2 dx + \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{\beta^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Usando o Lema 4.5

$$\int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s |\Psi|^2 dx \leq \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{\beta^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2.$$

□

Corolário 4.7. *Sejam $U \in D(\mathcal{A}_i)$ e $F \in \mathcal{H}_i$ tais que $i\beta U - \mathcal{A}_i U = F$ para algum $\beta \in \mathbb{R}$ e $|\beta| > 1$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} |\psi_x|^2 dx \leq \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Demonstração. Pelos lemas (4.6) e (4.5), e sabendo que existe $C > 0$ tal que, para quaisquer $a, b > 0$,

$$\sqrt{a+b} \leq C(\sqrt{a} + \sqrt{b}), \quad (4.39)$$

temos que

$$\begin{aligned} \int_{L_0-\delta}^{L_0+\delta} s |\psi_x|^2 dx &\leq C \|\theta_x\|_2 \left(\frac{C}{|\beta|^{1/2}} \|\theta_x\|_2^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + C \|U\|_{\mathcal{H}}^{1/2} \|F\|_{\mathcal{H}}^{1/2} + C \|F\|_{\mathcal{H}} \right) \\ &+ \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Usando a Desigualdade de Young, a estimativa do Lema 4.4 e a propriedade pra a função s ,

existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} |\psi_x|^2 dx \leq \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

□

Para as próximas estimativas, considere uma função $s_1 \in C^2(0, L)$ satisfazendo

$$\text{supp } s_1 \subset \left(L_0 - \frac{\delta}{2}, L_0 + \frac{\delta}{2} \right), \quad 0 \leq s_1(x) \leq 1, \quad x \in (0, L) \quad (4.40)$$

e

$$s_1(x) = 1 \quad \text{para } x \in \left[L_0 - \frac{\delta}{3}, L_0 + \frac{\delta}{3} \right]. \quad (4.41)$$

Se tivermos os valores de L , L_0 e δ , uma função desse tipo pode ser determinada por partes, um exemplo genérico para este tipo de função pode ser dado da seguinte forma:

$$s_1(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L_0 - \frac{\delta}{2}, \\ e^{\frac{1}{(3(x-(L_0-\delta/3)))^2-1}} e, & L_0 - \frac{\delta}{2} < x \leq L_0 - \frac{\delta}{3}, \\ 1, & L_0 - \frac{\delta}{3} \leq x \leq L_0 + \frac{\delta}{3}, \\ e^{\frac{1}{(3(x-(L_0+\delta/3)))^2-1}} e, & L_0 + \frac{\delta}{3} \leq x < L_0 + \frac{\delta}{2}, \\ 0, & L_0 + \frac{\delta}{2} \leq x \leq L. \end{cases}$$

Vamos atribuir valores a L , L_0 e δ pra que possamos analisar graficamente o comportamento dessa função s_1 . Considerando $L = 8$, $L_0 = 4$ e $\delta = 2$, temos

$$s_1(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 3, \\ e^{\frac{1}{(3(x-10))^2-1}} e, & 3 < x \leq \frac{10}{3}, \\ 1, & \frac{10}{3} \leq x \leq \frac{14}{3}, \\ e^{\frac{1}{(3(x-14))^2-1}} e, & \frac{14}{3} \leq x < 5, \\ 0, & 5 \leq x \leq 8. \end{cases}$$

Podemos observar a representação gráfica de s_1 na Figura 4.2.

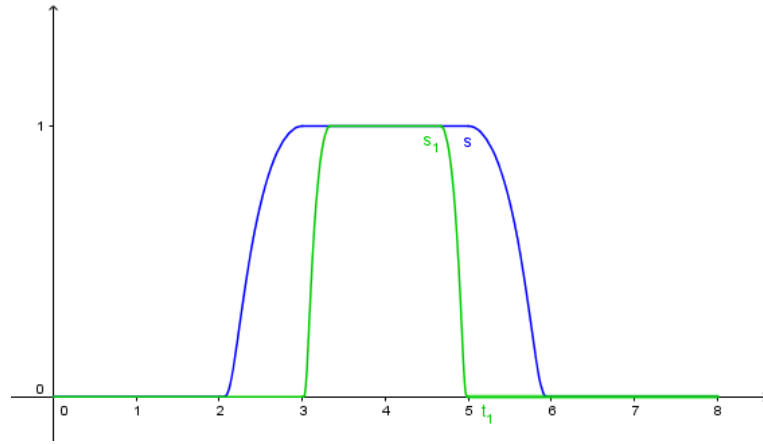


Figura 4.2: Função s_1 .

Lema 4.8. Sejam $F \in \mathcal{H}_i$ e $\beta \in \mathbb{R}$ com $|\beta| > 1$ tais que $i\beta U - \mathcal{A}_i U = F$ para algum $U \in D(\mathcal{A}_i)$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1 |\varphi + \psi + lw|^2 dx &\leq \chi_0 |\beta| \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1 |\psi_x| |\Phi| dx + C \|U\|_{\mathcal{H}} \left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} |\psi_x|^2 dx \right)^{1/2} \\ &+ C \|U\|_{\mathcal{H}} \left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} |\Psi|^2 dx \right)^{1/2} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &+ \frac{C}{\beta^2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Demonstração. Multiplicando (4.20) por $\overline{s_1(\varphi_x + \psi + lw)}$ e integrando de 0 a L, temos

$$\begin{aligned} k \int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx &= -i\beta \rho_2 \int_0^L s_1 \overline{\Psi(\varphi_x + \psi + lw)} dx + b \int_0^L s_1 \psi_{xx} \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx \\ &- \gamma \int_0^L s_1 \theta_x \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx + \rho_2 \int_0^L s_1 f_4 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx. \end{aligned}$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned} k \int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx &= -i\beta \rho_2 \int_0^L s_1 \overline{\Psi(\varphi_x + \psi + lw)} dx - b \int_0^L s_1' \psi_x \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx \\ &- b \int_0^L s_1 \psi_x \overline{(\varphi_x + \psi + lw)_x} dx - \gamma \int_0^L s_1 \theta_x \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx \\ &+ \rho_2 \int_0^L s_1 f_4 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx. \end{aligned}$$

Com o auxílio da equação (4.18) obtemos

$$\begin{aligned}
k \int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx &= -i\beta\rho_2 \int_0^L s_1 \Psi \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx - b \int_0^L s_1' \psi_x \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx \\
&- \frac{b}{k} \int_0^L s_1 \psi_x \overline{[i\beta\rho_1\Phi - k_0l(w_x - l\varphi) - \rho_1 f_2]} dx \\
&- \gamma \int_0^L s_1 \theta_x \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx + \rho_2 \int_0^L s_1 f_4 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx.
\end{aligned}$$

Assim, usando (4.19) e (4.21) obtemos

$$\begin{aligned}
k \int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx &= -i\beta\rho_2 \int_0^L s_1 \Psi \overline{\varphi_x} dx + \rho_2 \int_0^L s_1 |\Psi|^2 dx + \rho_2 \int_0^L s_1 \Psi \overline{f_3} dx \\
&+ \rho_2 l \int_0^L s_1 \Psi \overline{W} dx + \rho_2 l \int_0^L s_1 \Psi \overline{f_5} dx + \frac{b}{k} \rho_1 \int_0^L i\beta s_1 \psi_x \overline{\Phi} dx \\
&- b \int_0^L s_1' \psi_x \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx + \frac{b}{k} k_0 l \int_0^L s_1 \psi_x \overline{(w_x - l\varphi)} dx \\
&+ \frac{b}{k} \rho_1 \int_0^L s_1 \psi_x \overline{f_2} dx - \gamma \int_0^L s_1 \theta_x \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx \\
&+ \rho_2 \int_0^L s_1 f_4 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx. \tag{4.43}
\end{aligned}$$

Observaremos separadamente cada parcela da igualdade (4.43). Para isto, defina

$$\begin{aligned}
I_5 &= \rho_2 \int_0^L s_1 \Psi \overline{f_3} dx + \frac{b}{k} \rho_1 \int_0^L s_1 \psi_x \overline{f_2} dx + \rho_2 \int_0^L s_1 + f_4 \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx \\
&+ \rho_2 l \int_0^L s_1 \Psi \overline{f_5} dx, \\
I_6 &= \rho_2 l \int_0^L s_1 \Psi \overline{W} dx, \\
I_7 &= -i\beta\rho_2 \int_0^L s_1 \Psi \overline{\varphi_x} dx + \frac{b}{k} \rho_1 \int_0^L i\beta s_1 \psi_x \overline{\Phi} dx, \\
I_8 &= -b \int_0^L s_1' \psi_x \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx + \frac{b}{k} k_0 l \int_0^L s_1 \psi_x \overline{(w_x - l\varphi)} dx.
\end{aligned}$$

Temos então que

$$\begin{aligned}
k \int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx &= \rho_2 \int_0^L s_1 |\Psi|^2 dx + I_5 + I_6 + I_7 + I_8 \\
&- \gamma \int_0^L s_1 \theta_x \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx. \tag{4.44}
\end{aligned}$$

Usando as desigualdades Triangular, de Hölder e a equivalência das normas $|\cdot|_{\mathcal{H}}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, segue

que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|I_5| \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.45)$$

Usando a Desigualdade de Hölder, e o fato de s_1 ser limitada, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|I_6| \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \left(\int_0^L |\Psi|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.46)$$

Usando (4.17) e (4.19)

$$\begin{aligned} I_7 &= \rho_2 \int_0^L s_1 \Psi (\overline{\Phi_x + f_{1,x}}) dx + \frac{b}{k} \rho_1 \int_0^L s_1 (\Psi_x + f_{3,x}) \overline{\Phi} dx \\ &= \rho_2 \int_0^L s_1 \Psi \overline{\Phi_x} dx + \rho_2 \int_0^L s_1 \Psi \overline{f_{1,x}} dx + \frac{b}{k} \rho_1 \int_0^L s_1 \Psi_x \overline{\Phi} dx + \frac{b}{k} \rho_1 \int_0^L s_1 f_{3,x} \overline{\Phi} dx. \end{aligned}$$

Usando integração por partes temos

$$I_7 = -\rho_2 \int_0^L s_1' \Psi \overline{\Phi} dx + \left(\frac{b}{k} \rho_1 - \rho_2 \right) \int_0^L s_1 \Psi_x \overline{\Phi} dx + \frac{b}{k} \rho_1 \int_0^L s_1 f_{3,x} \overline{\Phi} dx + \rho_2 \int_0^L s_1 \Psi \overline{f_{1,x}} dx.$$

Novamente utilizando (4.19)

$$\begin{aligned} I_7 &= -\rho_2 \int_0^L s_1' \Psi \overline{\Phi} dx + \left(\frac{b}{k} \rho_1 - \rho_2 \right) i\beta \int_0^L s_1 \psi_x \overline{\Phi} dx + \frac{b}{k} \rho_1 \int_0^L s_1 f_{3,x} \overline{\Phi} dx \\ &\quad + \rho_2 \int_0^L s_1 \Psi \overline{f_{1,x}} dx + \left(\frac{b}{k} \rho_1 - \rho_2 \right) \int_0^L s_1 f_{3,x} \overline{\Phi} dx. \end{aligned}$$

Tomando a parte real, o módulo, usando as desigualdades Triangular e de Hölder e o fato de que s_1' é limitada, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|I_7| \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \left(\int_0^L |\Psi|^2 dx \right)^{1/2} + C \chi_0 |\beta| \int_0^L s_1 |\psi_x| |\Phi| dx + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.47)$$

Agora, usando o fato de que s_1 e s_1' são limitadas e as desigualdades Triangular e de Hölder, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|I_8| \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \left(\int_0^L |\psi_x|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (4.48)$$

Usando as desigualdades Triangular, de Hölder e de Young, (4.45), (4.46), (4.47), (4.48), os

lemas 4.6 e 4.4, e a definição de s_1 , temos em (4.44) que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1|\varphi + \psi + lw|^2 dx &\leq \chi_0|\beta| \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1|\psi_x||\Phi| dx + C\|U\|_{\mathcal{H}} \left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} |\psi_x|^2 dx \right)^{1/2} \\ &+ C\|U\|_{\mathcal{H}} \left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} |\Psi|^2 dx \right)^{1/2} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &+ \frac{C}{\beta^2}\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

□

Lema 4.9. *Sejam $F \in \mathcal{H}_i$ e $\beta \in \mathbb{R}$ com $|\beta| > 1$ tais que $i\beta U - \mathcal{A}_i U = F$ para algum $U \in D(\mathcal{A}_i)$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1|\Phi|^2 dx &\leq C\chi_0|\beta| \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1|\psi_x||\Phi| dx + C\|U\|_{\mathcal{H}} \left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} |\psi_x|^2 dx \right)^{1/2} \\ &+ C\|U\|_{\mathcal{H}} \left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} |\Psi|^2 dx \right)^{1/2} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &+ \frac{C}{\beta^2}\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Demonstração. Multiplicando (4.18) por $s_1\bar{\varphi}$ e integrando de 0 a L temos

$$i\beta\rho_1 \int_0^L s_1\Phi\bar{\varphi} dx - k \int_0^L s_1(\varphi_x + \psi + lw)_x\bar{\varphi} dx - k_0l \int_0^L s_1(w_x - l\varphi)\bar{\varphi} dx = \rho_1 \int_0^L s_1f_2\bar{\varphi} dx.$$

Usando (4.17) e integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho_1 s_1|\Phi|^2 dx &= -\rho_1 \int_0^L s_1(\Phi\bar{f}_1 + f_2\bar{\varphi}) dx + k \int_0^L s_1'(\varphi_x + \psi + lw)\bar{\varphi} dx \\ &+ k \int_0^L s_1(\varphi_x + \psi + lw)\bar{\varphi}_x dx - k_0l \int_0^L s_1(w_x - l\varphi)\bar{\varphi} dx. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Vamos observar separadamente cada parcela da soma (4.49). Para isto, defina

$$I_9 = k \int_0^L s_1'(\varphi_x + \psi + lw)\bar{\varphi} dx$$

e

$$I_{10} = k \int_0^L s_1(\varphi_x + \psi + lw)\bar{\varphi}_x dx - k_0l \int_0^L s_1(w_x - l\varphi)\bar{\varphi} dx.$$

Logo,

$$\int_0^L \rho_1 s_1|\Phi|^2 dx = -\rho_1 \int_0^L s_1(\Phi\bar{f}_1 + f_2\bar{\varphi}) dx + I_9 + I_{10}. \quad (4.50)$$

Usando (4.17) temos

$$I_9 = -\frac{k}{i\beta} \int_0^L s_1'(\varphi_x + \psi + lw) \overline{f_1} dx - \frac{k}{i\beta} \int_0^L s_1'(\varphi_x + \psi + lw) \overline{\Phi} dx.$$

Usando as desigualdades Triangular, de Hölder, de Poincaré e a equivalência das normas $|\cdot|_{\mathcal{H}}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, segue que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|\mathbf{Re}(I_9)| \leq \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}. \quad (4.51)$$

Agora, somando e subtraindo

$$k \int_0^L s_1(\varphi_x + \psi + lw) \overline{(\psi + lw)} dx,$$

a I_{10} obtemos

$$\begin{aligned} I_{10} &= k \int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx - k \int_0^L s_1(\varphi_x + \psi + lw) \overline{(\psi + lw)} dx \\ &\quad - k_0 l \int_0^L s_1 w_x \overline{\varphi} dx + k_0 l^2 \int_0^L s_1 |\varphi|^2 dx. \end{aligned}$$

Usando integração por partes

$$\begin{aligned} I_{10} &= k \int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx - k \int_0^L s_1(\varphi_x + \psi + lw) \overline{\psi} dx - kl \int_0^L s_1(\varphi_x + \psi + lw) \overline{w} dx \\ &\quad + k_0 l \int_0^L s_1' w \overline{\varphi} dx + k_0 l \int_0^L s_1 w \overline{\varphi_x} dx + k_0 l^2 \int_0^L s_1 |\varphi|^2 dx. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Somando e subtraindo

$$k_0 l \int_0^L s_1 w \overline{(\psi + lw)} dx,$$

em (4.52) obtemos

$$\begin{aligned} I_{10} &= k \int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx - k \int_0^L s_1(\varphi_x + \psi + lw) \overline{\psi} dx - k_0 l^2 \int_0^L s_1 |w|^2 dx \\ &\quad + k_0 l \int_0^L s_1 w \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx - kl \int_0^L s_1(\varphi_x + \psi + lw) \overline{w} dx + k_0 l \int_0^L s_1' w \overline{\varphi} dx \\ &\quad + k_0 l^2 \int_0^L s_1 |\varphi|^2 dx - k_0 l \int_0^L s_1 w \overline{\psi} dx. \end{aligned}$$

De (4.17), (4.19) e (4.21) segue que

$$\begin{aligned}
I_{10} &= k \int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx + \frac{k}{i\beta} \int_0^L s_1 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{\Psi} \\
&+ \frac{k}{i\beta} \int_0^L s_1 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{f}_3 dx + \frac{k_0 l}{i\beta} \int_0^L s_1 w \bar{\Psi} dx + \frac{k_0 l}{i\beta} \int_0^L s_1 w \bar{f}_3 \\
&+ k_0 l \int_0^L s_1 w \overline{(\varphi_x + \psi + lw)} dx - kl \int_0^L s_1 (\varphi_x + \psi + lw) \bar{w} dx \\
&- \frac{k_0 l}{i\beta} \int_0^L s_1' w \bar{\Phi} dx - \frac{k_0 l}{i\beta} \int_0^L s_1' w \bar{f}_1 dx + k_0 l^2 \int_0^L s_1 \left| \frac{f_1 + \Phi}{i\beta} \right|^2 dx \\
&- k_0 l^2 \int_0^L s_1 \left| \frac{f_5 + W}{i\beta} \right|^2 dx.
\end{aligned}$$

Usando (4.17) e (4.19), tomando a parte real, módulo, as desigualdades Triangular, de Hölder, de Poincaré e a equivalência das normas $|\cdot|_{\mathcal{H}}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, segue que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
|\operatorname{Re}(I_{10})| &\leq C \int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \quad (4.53) \\
&+ \frac{C}{|\beta|^2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + |k_0 - k|l \int_0^L s_1 |w| |\varphi_x + \psi + lw| dx \\
&= C \int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\
&+ \frac{C}{|\beta|^2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + k_0 l \chi \int_0^L s_1 |w| |\varphi_x + \psi + lw| dx.
\end{aligned}$$

Usando as desigualdades Triangular, de Hölder, de Poincaré, a equivalência das normas $|\cdot|_{\mathcal{H}}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, (4.51) e (4.53) em (4.50) temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^L s |\Phi|^2 dx &\leq C \int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\
&+ \frac{C}{|\beta|^2} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|^2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\
&+ k_0 l \chi \int_0^L s_1 |w| |\varphi_x + \psi + lw| dx.
\end{aligned}$$

Como $\operatorname{supp} s_1 \subset (L_0 - \delta/2, L_0 + \delta/2)$ e $|\beta| > 1$ obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{L_0 - \delta/2}^{L_0 + \delta/2} s_1 |\Phi|^2 dx &\leq C \int_{L_0 - \delta/2}^{L_0 + \delta/2} s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\
&+ \frac{C}{|\beta|^2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + k_0 l \chi \int_0^L s_1 |w| |\varphi_x + \psi + lw| dx. \quad (4.54)
\end{aligned}$$

Observe ainda, usando (4.21), que existe $C > 0$ tal que

$$k_0 l \chi \int_0^L s_1 |w| |\varphi_x + \psi + lw| dx < \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

Assim temos em (4.54) que

$$\begin{aligned} \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1 |\Phi|^2 dx &\leq C \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ \frac{C}{|\beta|^2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

Usando o Lema 4.8 concluímos que

$$\begin{aligned} \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1 |\Phi|^2 dx &\leq C \chi_0 |\beta| \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1 |\psi_x| |\Phi| dx + C \|U\|_{\mathcal{H}} \left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} |\psi_x|^2 dx \right)^{1/2} \\ &+ C \|U\|_{\mathcal{H}} \left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} |\Psi|^2 dx \right)^{1/2} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &+ \frac{C}{\beta^2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

□

Corolário 4.10. *Sejam $F \in \mathcal{H}_i$ e $\beta \in \mathbb{R}$ com $|\beta| > 1$ tais que $i\beta U - \mathcal{A}_i U = F$ para algum $U \in D(\mathcal{A}_i)$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} \int_{L_0-\delta/3}^{L_0+\delta/3} (|\varphi + \psi + lw|^2 + |\Phi|^2) dx &\leq C \chi_0 |\beta| \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1 |\psi_x| |\Phi| dx + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ C \|U\|_{\mathcal{H}} \left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} |\Psi|^2 dx \right)^{1/2} + \frac{C}{\beta^2} \|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &+ \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} |\psi_x|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Demonstração. O resultado decorre dos lemas 4.8 e 4.9 e da Propriedade (4.41) para a função s_1 . □

Lema 4.11. *Sejam $F \in \mathcal{H}_i$ e $\beta \in \mathbb{R}$ com $|\beta| > 1$ tais que $i\beta U - \mathcal{A}_i U = F$ para algum*

$U \in D(\mathcal{A}_i)$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1(|w_x - l\varphi|^2 + |W|^2)dx &\leq C\chi|\beta|\left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1|\Phi|^2dx\right)^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} \\
&+ C\left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1|\Phi|^2dx\right) \\
&+ C\left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1|\Phi|^2dx\right)^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} \\
&+ C\left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1|\Psi|^2dx\right)^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\
&+ C\left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1|\varphi_x + \psi + lw|^2dx\right)^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} \\
&+ C\left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1|\varphi_x + \psi + lw|^2dx\right).
\end{aligned}$$

Demonstração. Multiplicando (4.18) por $s_1\overline{(w_x - l\varphi)}$ e integrando de 0 a L temos

$$\begin{aligned}
k_0l \int_0^L s_1|w_x - l\varphi|^2dx &= i\beta\rho_1 \int_0^L s_1\Phi\overline{(w_x - l\varphi)}dx - k \int_0^L s_1(\varphi_x + \psi + lw)_x\overline{(w_x - l\varphi)}dx \\
&- \rho_1 \int_0^L s_1f_2\overline{(w_x - l\varphi)}dx.
\end{aligned}$$

Usando (4.17) e integrando por partes

$$\begin{aligned}
k_0l \int_0^L s_1|w_x - l\varphi|^2dx &= i\beta\rho_1 \int_0^L s_1\Phi\overline{w_x}dx + \rho_1l \int_0^L s_1|\Phi|^2dx + \rho_1l \int_0^L s_1\Phi\overline{f_1}dx \\
&+ k \int_0^L s_1'(\varphi_x + \psi + lw)\overline{(w_x - l\varphi)}dx - \rho_1 \int_0^L s_1f_2\overline{(w_x - l\varphi)}dx \\
&+ k \int_0^L s_1(\varphi_x + \psi + lw)\overline{(w_x - l\varphi)_x}dx.
\end{aligned}$$

Usando (4.22)

$$\begin{aligned}
k_0l \int_0^L s_1|w_x - l\varphi|^2dx &= i\beta\rho_1 \int_0^L s_1\Phi\overline{w_x}dx + \rho_1l \int_0^L s_1|\Phi|^2dx + \rho_1l \int_0^L s_1\Phi\overline{f_1}dx \\
&+ k \int_0^L s_1'(\varphi_x + \psi + lw)\overline{(w_x - l\varphi)}dx - \rho_1 \int_0^L s_1f_2\overline{(w_x - l\varphi)}dx \\
&- \frac{k}{k_0}i\beta\rho_1 \int_0^L s_1\varphi_x\overline{W}dx - \frac{k}{k_0}\rho_1 \int_0^L s_1(\varphi_x + \psi + lw)\overline{f_6}dx \\
&+ \frac{k^2}{k_0}l \int_0^L s_1|\varphi_x + \psi + lw|^2dx - \frac{k}{k_0}i\beta\rho_1 \int_0^L s_1\psi\overline{W}dx \\
&- \frac{k}{k_0}li\beta\rho_1 \int_0^L s_1w\overline{W}dx.
\end{aligned}$$

Usando (4.17), (4.19) e (4.21)

$$\begin{aligned}
k_0 l \int_0^L s_1 |w_x - l\varphi|^2 dx &= i\beta\rho_1 \int_0^L s_1 \Phi \overline{w_x} dx + \rho_1 l \int_0^L s_1 |\Phi|^2 dx + \rho_1 l \int_0^L s_1 \Phi \overline{f_1} dx \\
&+ k \int_0^L s_1' (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(w_x - l\varphi)} dx - \rho_1 \int_0^L s_1 f_2 \overline{(w_x - l\varphi)} dx \\
&- \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1 \Phi_x \overline{W} dx - \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{f_6} dx \\
&+ \frac{k^2}{k_0} l \int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx - \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1 \Psi \overline{W} dx \\
&- \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1 f_{1,x} \overline{W} dx - \frac{k}{k_0} l \rho_1 \int_0^L s_1 |W|^2 dx \\
&- \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1 f_3 \overline{W} dx - \frac{k}{k_0} l \rho_1 \int_0^L s_1 f_5 \overline{W} dx.
\end{aligned}$$

Para simplificar as notações considere

$$I_{11} = k_0 l \int_0^L s_1 |w_x - l\varphi|^2 dx + \frac{k}{k_0} l \rho_1 \int_0^L s_1 |W|^2 dx.$$

Integrando por partes

$$\begin{aligned}
I_{11} &= i\beta\rho_1 \int_0^L s_1 \Phi \overline{w_x} dx + \rho_1 l \int_0^L s_1 |\Phi|^2 dx + \rho_1 l \int_0^L s_1 \Phi \overline{f_1} dx - \rho_1 \int_0^L s_1 f_2 \overline{(w_x - l\varphi)} dx \\
&+ k \int_0^L s_1' (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(w_x - l\varphi)} dx + \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1' \Phi \overline{W} dx + \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1 \Phi \overline{W_x} dx \\
&- \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1 \Psi \overline{W} dx - \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1 f_{1,x} \overline{W} dx - \frac{k^2}{k_0} l \int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \\
&- \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1 f_3 \overline{W} dx - \frac{k}{k_0} l \rho_1 \int_0^L s_1 f_5 \overline{W} dx - \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{f_6} dx.
\end{aligned}$$

Usando (4.21)

$$\begin{aligned}
I_{11} &= i\beta\rho_1 \left(1 - \frac{k}{k_0}\right) \int_0^L s_1 \Phi \overline{w_x} dx + \rho_1 l \int_0^L s_1 |\Phi|^2 dx + \rho_1 l \int_0^L s_1 \Phi \overline{f_1} dx \\
&+ k \int_0^L s_1' (\varphi_x + \psi + lw) \overline{(w_x - l\varphi)} dx + \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1' \Phi \overline{W} dx - \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1 \Phi \overline{f_{5,x}} dx \\
&- \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1 \Psi \overline{W} dx - \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1 f_{1,x} \overline{W} dx - \rho_1 \int_0^L s_1 f_2 \overline{(w_x - l\varphi)} dx \\
&- \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1 f_3 \overline{W} dx - \frac{k}{k_0} l \rho_1 \int_0^L s_1 f_5 \overline{W} dx - \frac{k}{k_0} \rho_1 \int_0^L s_1 (\varphi_x + \psi + lw) \overline{f_6} dx \\
&+ \frac{k^2}{k_0} l \int_0^L s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx.
\end{aligned}$$

Tomando o módulo, a parte real e usando as desigualdades Triangular, de Hölder, de Poincaré

e a equivalência das normas $|\cdot|_{\mathcal{H}}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$, segue que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |\mathbf{Re}(I_{11})| &\leq C\chi|\beta|\left(\int_0^L s_1|\Phi|^2 dx\right)^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} + C\left(\int_0^L s_1|\Phi|^2 dx\right) + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ C\left(\int_0^L s_1|\Phi|^2 dx\right)^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} + C\left(\int_0^L s_1|\Psi|^2 dx\right)^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} \\ &+ C\left(\int_0^L s_1|\varphi_x + \psi + lw|^2 dx\right)^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} \\ &+ C\left(\int_0^L s_1|\varphi_x + \psi + lw|^2 dx\right). \end{aligned}$$

Usando a definição de s_1 concluímos que

$$\begin{aligned} \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1(|w_x - l\varphi|^2 + |W|^2) dx &\leq C\chi|\beta|\left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1|\Phi|^2 dx\right)^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} \\ &+ C\left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1|\Phi|^2 dx\right) \\ &+ C\left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1|\Phi|^2 dx\right)^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} \\ &+ C\left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1|\Psi|^2 dx\right)^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} + C\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} \\ &+ C\left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1|\varphi_x + \psi + lw|^2 dx\right)^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} \\ &+ C\left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1|\varphi_x + \psi + lw|^2 dx\right). \end{aligned}$$

□

Nos resultados a seguir, para simplificar as notações, consideraremos

$$\mathcal{I}_{\delta/3} = \int_{L_0-\delta/3}^{L_0+\delta/3} (|\Phi|^2 + |\Psi|^2 + |W|^2 + |\psi_x|^2 + |\varphi_x + \psi + lw|^2 + |w_x - l\varphi|^2) dx. \quad (4.55)$$

Corolário 4.12. *Sejam $F \in \mathcal{H}_i$ e $\beta \in \mathbb{R}$ com $|\beta| \gg 1$ tais que $i\beta U - \mathcal{A}_i U = F$ para algum $U \in D(\mathcal{A}_i)$. Se $\chi = \chi_0 = 0$, então dado $\varepsilon > 0$ existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$\mathcal{I}_{\delta/3} \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (4.56)$$

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. A seguir utilizaremos a desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$ muitas vezes.

Sendo $\chi = \chi_0 = 0$, utilizando a propriedade de s_1 e que $|\beta| > 1$, segue dos lemas 4.6, 4.11,

dos corolários 4.7 e 4.10 que

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\delta/3} &\leq \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} |\Psi|^2 dx \right)^{1/2} \\
&+ \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} |\psi_x|^2 dx \right)^{1/2} + C \left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1 |\Phi|^2 dx \right) \\
&+ C \left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1 |\Phi|^2 dx \right)^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} + C \left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right)^{1/2} \|U\|_{\mathcal{H}} \\
&+ C \left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1 |\varphi_x + \psi + lw|^2 dx \right).
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$ e o Corolário 4.10, existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\delta/3} &\leq \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} |\Psi|^2 dx \right)^{1/2} \\
&+ \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C \|U\|_{\mathcal{H}} \left(\int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} |\psi_x|^2 dx \right)^{1/2} + \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2.
\end{aligned}$$

Usando novamente a desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$, o Lema 4.6 e o Corolário 4.7, existe $C > 0$ tal que

$$\mathcal{I}_{\delta/3} \leq \frac{C}{|\beta|} \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}} + C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Mais uma vez usando a desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$ e usando agora a estimativa (3.56), existe $C > 0$ tal que

$$\mathcal{I}_{\delta/3} \leq C \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{C}{|\beta|} \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Por fim, usando a desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$ e o fato de que $|\beta|$ é suficientemente grande, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\mathcal{I}_{\delta/3} \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

.

□

Corolário 4.13. *Sejam $F \in \mathcal{H}_i$ e $\beta \in \mathbb{R}$ com $|\beta| > 1$ tais que $i\beta U - \mathcal{A}_i U = F$ para algum $U \in D(\mathcal{A}_i)$. Se $\chi = 0$ e $\chi_0 \neq 0$, então dado $\varepsilon > 0$ existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$\mathcal{I}_{\delta/3} \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon |\beta|^4 \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{4.57}$$

Demonstração. Sendo $\chi = 0$ e $\chi_0 \neq 0$ temos que todos os termos presentes em $\mathcal{I}_{\delta/3}$ já foram

estimados no Corolário 4.13, com exceção do termo

$$C|\beta| \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1 |\psi_x| |\Phi| dx,$$

o qual estimaremos agora. Usando a Desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$ e a definição de s_1 , temos

$$C|\beta| \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1 |\psi_x| |\Phi| dx \leq C_\varepsilon |\beta|^2 \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1 |\psi_x|^2 dx + \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Do Corolário 4.7 segue que

$$C|\beta| \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1 |\psi_x| |\Phi| dx \leq C|\beta| \|\theta_x\|_2 \|U\|_{\mathcal{H}} + C|\beta|^2 \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}} + C|\beta|^2 \|F\|_{\mathcal{H}}^2 + \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Sendo $|\beta| > 1$, usando a Desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$ e a estimativa (3.56), existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$C|\beta| \int_{L_0-\delta/2}^{L_0+\delta/2} s_1 |\psi_x| |\Phi| dx \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon |\beta|^4 \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

E assim obtemos

$$\mathcal{I}_{\delta/3} \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon |\beta|^4 \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

□

Com os resultados obtidos nesta seção vamos analisar o comportamento assintótico da solução do problema na próxima seção.

4.1 ESTABILIDADE EXPONENCIAL

Teorema 4.14. *Suponha que $\rho_1, \rho_2, \rho_3, b, k, k_0, \alpha, \gamma > 0$ e $\chi_0 = \chi = 0$. Então, existem constantes $C, \eta > 0$, independentes do dado inicial $U_0 \in \mathcal{H}$, tais que*

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}} \leq C e^{-\eta t} \|U_0\|_{\mathcal{H}}, t > 0, \quad (4.58)$$

ou seja, o semigrupo associado ao sistema (3.1)-(3.7) é exponencialmente estável.

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, segue do Corolário 4.12 que existe uma constante C_ε tal que

$$\mathcal{I}_{\delta/3} \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (4.59)$$

Observe que a estimativa (4.59) nos dá uma estimativa local para o vetor $U \in D(\mathcal{A}_i)$. Segue de

(4.17)-(4.22) que $V = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$ é solução de (2.9)-(2.14), considerando

$$g_1 = f_1; g_2 = \rho_2 f_2; g_3 = f_3; g_4 = \rho_2 f_4 - \gamma \theta_x; g_5 = f_5; g_6 = \rho_1 f_6.$$

Observando que $\mathcal{I}_{\delta/3}$ é uma integral local do tipo $\|V\|_{b_1, b_2}$ com $b_1 = L_0 - \delta/3$ e $b_2 = L_0 + \delta/3$, de (4.59) a condição (2.17) é satisfeita para $\Lambda := \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2$.

Com isso, aplicando o Corolário 2.59, a estimativa (4.24) e usando a Desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$, existem constantes $C, C_\varepsilon > 0$ tais que

$$\begin{aligned} \int_0^L (|\Phi|^2 + |\Psi|^2 + |W|^2 + |\psi_x|^2 + |\varphi_x + \psi + lw|^2 + |w_x - l\varphi|^2) dx &\leq C\varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &+ C_\varepsilon \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Combinando (4.60) com a estimativa (4.24), usando a Desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$, e considerando ε suficientemente pequeno, existe $C > 0$ tal que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C \|F\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Lembrando que $U \in D(\mathcal{A}_i)$ é a única solução da equação resolvente, segue que para algum $C > 0$ temos

$$\|(i\beta I_d - \mathcal{A}_i)^{-1} F\|_{\mathcal{H}} \leq C \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad (4.61)$$

quando $|\beta| \rightarrow \infty$. Assim, do Lema 4.3 e de (4.61) podemos aplicar o Teorema de Prüss (Teorema 2.55), e assim concluímos que o sistema é exponencialmente estável. \square

Teorema 4.15. *Suponha que*

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{k}{b} \quad \text{ou} \quad k \neq k_0, \quad (4.62)$$

então o semigrupo associado ao sistema (3.1)-(3.5) com condições de fronteira (3.7) não é exponencialmente estável.

Demonstração. Usando o Teorema de Prüss temos que o C_0 -semigrupo de contrações $e^{-\mathcal{A}_2 t}$ é exponencialmente estável se, e somente se,

$$i\mathbb{R} \subseteq \rho(\mathcal{A}_2),$$

e

$$\limsup_{|\beta| \rightarrow \infty} \|(i\beta I - \mathcal{A}_2)^{-1}\|_{\mathcal{H}_2} < \infty. \quad (4.63)$$

Observe que se encontrarmos uma sequência $\{F_n\} \subset \mathcal{H}_2$ limitada, para todo $n \in \mathbb{N}$ e uma sequência $\{\beta_n\} \subset \mathbb{R}$ com $|\beta_n| \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(i\beta_n I - \mathcal{A}_2)^{-1} F_n\|_{\mathcal{H}_2} = \infty, \quad (4.64)$$

teremos uma contradição envolvendo as afirmações (4.63) e (4.64), mostrando que o C_0 -semigrupo de contrações $e^{\mathcal{A}_2 t}$ não é exponencialmente estável.

Nosso objetivo, então é mostrar a existência das sequências $\{F_n\} \subset \mathcal{H}_2$ e $\{\beta_n\} \subset \mathbb{R}$ satisfazendo (4.64). Podemos considerar, sem perda de generalidade, $L = \pi$ e tomemos $F_n \subset \mathcal{H}_2$ da seguinte forma

$$F_n = \left(0, \frac{1}{\rho_1} \text{sen}(nx), 0, 0, 0, \frac{\xi}{\rho_1} \text{cos}(nx), 0 \right).$$

Como $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}_2)$, seja $U_n \in \mathcal{H}_2$ tal que

$$(i\beta I - \mathcal{A}_2)U_n = F_n. \quad (4.65)$$

Reescrevendo (4.65) em termos de suas componentes e omitindo o índice n de U_n , temos

$$\begin{cases} i\beta\varphi - \Phi = 0, \\ i\beta\rho_1\Phi - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0l(w_x - l\varphi) = \text{sen}(nx), \\ i\beta\psi - \Psi = 0, \\ i\beta\rho_2\Psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = 0, \\ i\beta w - W = 0, \\ i\beta\rho_1 W - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = \xi \text{cos}(nx), \\ i\beta\rho_3\theta + \gamma\Psi_x - \alpha\theta_{xx} = 0. \end{cases} \quad (4.66)$$

Assim, $\Phi = i\beta\varphi$, $\Psi = i\beta\psi$ e $W = i\beta w$. Podemos então reescrever (4.66) da seguinte forma

$$\begin{cases} -\beta^2\rho_1\varphi - k(\varphi_x + \psi + lw)_x - k_0l(w_x - l\varphi) = \text{sen}(nx), \\ -\beta^2\rho_2\psi - b\psi_{xx} + k(\varphi_x + \psi + lw) + \gamma\theta_x = 0, \\ -\beta^2\rho_1 w - k_0(w_x - l\varphi)_x + kl(\varphi_x + \psi + lw) = \xi \text{cos}(nx), \\ i\beta\rho_3\theta + \gamma\Psi_x - \alpha\theta_{xx} = 0. \end{cases} \quad (4.67)$$

Para que as condições de fronteira dadas em (3.7) sejam satisfeitas, podemos supor que a solução do sistema (4.67) é da forma

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= A_n \text{sen}(nx), & \psi(x) &= B_n \text{cos}(nx), & w(x) &= C_n \text{cos}(nx), \\ \theta(x) &= D_n \text{sen}(nx). \end{aligned} \quad (4.68)$$

A seguir omitiremos o índice n de A_n, B_n, C_n e D_n . Assim, substituindo (4.68) em (4.67), obtemos um sistema equivalente a (4.67) dado por

$$\begin{cases} (-\rho_1\beta^2 + kn^2 + k_0l^2)A + knB + (k + k_0)lnC = 1, \\ knA + (-\rho_2\beta^2 + bn^2 + k)B + klC + \gamma nD = 0, \\ (k + k_0)lnA + klB + (-\rho_1\beta^2 + k_0n^2 + kl^2)C = \xi, \\ -\gamma i\beta nB + (i\beta\rho_3 + \alpha n^2)D = 0. \end{cases} \quad (4.69)$$

Como queremos avaliar o comportamento de

$$\|(i\beta I - \mathcal{A}_2)^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}_2}, n \rightarrow \infty, \quad (4.70)$$

note que

$$\|(i\beta_n I - \mathcal{A}_2)^{-1}F_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \|U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 \geq \rho_1 \|W\|_2^2 = \rho_1 |\beta|^2 \|w\|_2^2 = \frac{\pi}{2} \rho_1 |\beta|^2 |C|^2.$$

Vamos avaliar como a constante C (que depende de n) se comporta quando $n \rightarrow \infty$. Assumindo $\xi = 0$ e

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{k}{b} \quad e \quad k = k_0.$$

Vamos escolher a sequência $\{\beta_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\beta_n = \sqrt{\frac{1}{\rho_1}(kn^2 + kl^2 - 2kln)}.$$

Para simplificar as notações omitiremos o índice n da sequência $\{\beta_n\}$. Sendo assim, o sistema (4.69) pode ser reescrito como

$$2klnA + knB + 2klnC = 1, \quad (4.71)$$

$$knA + \left[\left(b - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) n^2 + \frac{\rho_2 2kl}{\rho_1} n + k + \frac{\rho_2 kl^2}{\rho_1} \right] B + klC + \gamma nD = 0, \quad (4.72)$$

$$2klnA + klB + 2klnC = 0, \quad (4.73)$$

$$-\gamma i\beta nB + (i\beta\rho_3 + \alpha n^2)D = 0. \quad (4.74)$$

Subtraindo (4.73) de (4.71), temos

$$knB - klB = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{k(n-l)}. \quad (4.75)$$

De (4.75) podemos concluir que $B \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Substituindo o valor de B encontrado

em (4.75) na equação (4.73), obtemos

$$2kl n A + \frac{l}{(n-l)} + 2kl n C = 0 \Rightarrow A = -C - \frac{1}{2kn(n-l)}. \quad (4.76)$$

Observe que de (4.76) temos que $A \rightarrow -C$ quando $n \rightarrow \infty$. Substituindo agora (4.75) em (4.74)

$$-\frac{\gamma i \beta n}{k(n-l)} + (i\beta\rho_3 + \alpha n^2)D = 0 \Rightarrow D = \frac{\gamma i \beta n}{k(n-l)(i\beta\rho_3 + \alpha n^2)}. \quad (4.77)$$

Assim, de (4.77) temos que $D \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Por fim, substituindo (4.75), (4.76) e (4.77) em (4.72), temos

$$\begin{aligned} 0 &= -knC - \frac{1}{2(n-l)} + \left[\left(b - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) n^2 + \frac{\rho_2 2kl}{\rho_1} n + k + \frac{\rho_2 kl^2}{\rho_1} \right] \frac{1}{k(n-l)} \\ &+ klC + \frac{\gamma^2 i \beta n^2}{k(n-l)(i\beta\rho_3 + \alpha n^2)}. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned} k(n-l)C &= -\frac{1}{2(n-l)} + \left[\left(b - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) n^2 + \frac{\rho_2 2kl}{\rho_1} n + k + \frac{\rho_2 kl^2}{\rho_1} \right] \frac{1}{k(n-l)} \\ &+ \frac{\gamma^2 i \beta n^2}{k(n-l)(i\beta\rho_3 + \alpha n^2)}, \\ C &= -\frac{1}{2k(n-l)^2} + \left[\left(b - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) n^2 + \frac{\rho_2 2kl}{\rho_1} n + k + \frac{\rho_2 kl^2}{\rho_1} \right] \frac{1}{k^2(n-l)^2} \\ &+ \frac{\gamma^2 i \beta n^2}{k^2(n-l)^2(i\beta\rho_3 + \alpha n^2)}. \end{aligned}$$

Observe que

$$C = J_1 + J_2 + J_3 + J_4, \quad (4.78)$$

onde

$$\begin{aligned} J_1 &= -\frac{1}{2k(n-l)^2}, \\ J_2 &= \frac{\gamma^2 i \beta n^2}{k^2(n-l)^2(i\beta\rho_3 + \alpha n^2)}, \\ J_3 &= \left[\frac{\rho_2 2kl}{\rho_1} n + k + \frac{\rho_2 kl^2}{\rho_1} \right] \frac{1}{k^2(n-l)^2}, \\ J_4 &= \left(b - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \frac{n^2}{k^2(n-l)^2}. \end{aligned}$$

Assim,

$$J_1 = -\frac{1}{2k(n-l)^2} \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (4.79)$$

Além disso,

$$J_2 = \frac{\gamma^2 i \beta n^2}{k^2(n-l)^2(i\beta\rho_3 + \alpha n^2)} = \frac{\frac{\gamma^2 i \beta n^2}{\beta n^2}}{\frac{k^2(n-l)^2(i\beta\rho_3 + \alpha n^2)}{\beta n^2}} = \frac{\gamma^2 i}{k^2(n-l)^2 \left(\frac{i\rho_3}{n^2} + \alpha\beta \right)}.$$

Então,

$$J_2 \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (4.80)$$

Temos também que

$$\begin{aligned} \left[\frac{\rho_2 2kl}{\rho_1} n + k + \frac{\rho_2 kl^2}{\rho_1} \right] \frac{1}{k^2(n-l)^2} &= \frac{\rho_2 2ln}{\rho_1 k(n-l)^2} + \frac{1}{k(n-l)^2} + \frac{\rho_2 l^2}{\rho_1 k(n-l)^2} \\ &= \frac{\frac{\rho_2 2ln}{n}}{\frac{\rho_1 k(n-l)^2}{n}} + \frac{1}{k(n-l)^2} + \frac{\rho_2 l^2}{\rho_1 k(n-l)^2} \\ &= \frac{\rho_2 2l}{\rho_1 k(n^{1/2} - ln^{-1/2})^2} + \frac{1}{k(n-l)^2} + \frac{\rho_2 l^2}{\rho_1 k(n-l)^2}. \end{aligned}$$

Mostrando que

$$J_3 \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty, \quad (4.81)$$

E ainda,

$$J_4 = \left(b - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \frac{n^2}{k^2(n-l)^2} = \left(b - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \frac{1}{k^2} \left(\frac{n}{n-l} \right)^2 \rightarrow \left(b - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \frac{1}{k^2}, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (4.82)$$

Concluimos então de (4.78), (4.79), (4.80), (4.81) e (4.82) que

$$C \rightarrow \left(b - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right) \frac{1}{k^2}, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (4.83)$$

Logo,

$$\|(i\beta_n I - \mathcal{A}_2)^{-1} F_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \|U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 \geq \frac{\pi}{2} \rho_1 |\beta|^2 |C|^2 \rightarrow \infty, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

O que mostra a falta de estabilidade exponencial para este caso.

Assumindo agora $\xi = 1$ e

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{k}{b} \quad e \quad k \neq k_0.$$

O sistema (4.69) pode ser reescrito como

$$(-\rho_1\beta^2 + kn^2 + k_0l^2)A + knB + (k + k_0)lnC = 1, \quad (4.84)$$

$$knA + (-\rho_2\beta^2 + bn^2 + k)B + klC + \gamma nD = 0, \quad (4.85)$$

$$(k + k_0)lnA + klB + (-\rho_1\beta^2 + k_0n^2 + kl^2)C = 1, \quad (4.86)$$

$$-\gamma i\beta nB + (i\beta\rho_3 + \alpha n^2)D = 0. \quad (4.87)$$

Que na forma matricial é dado por

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P_1 & kn & (k + k_0)ln & 0 \\ kn & P_2 & kl & \gamma n \\ (k + k_0)ln & kl & P_3 & 0 \\ 0 & -\gamma i\beta n & 0 & P_4 \end{bmatrix}}_{:=M} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde

$$P_1 = -\rho_1\beta^2 + kn^2 + k_0l^2,$$

$$P_2 = -\rho_2\beta^2 + bn^2 + k,$$

$$P_3 = -\rho_1\beta^2 + k_0n^2 + kl^2,$$

$$P_4 = i\beta\rho_3 + \alpha n^2.$$

Usando o método de Laplace temos que

$$\begin{aligned} \det M &= P_1P_2P_3P_4 - P_2P_4(k + k_0)^2l^2n^2 + 2P_4k^2l^2n^2(k + k_0) - P_1P_4k^2l^2 - P_3P_4k^2n^2 \\ &\quad - \gamma^2i\beta n^4(k + k_0)^2l^2 + P_1P_3\gamma^2i\beta n^2. \end{aligned}$$

Vamos escolher a sequência $\{\beta_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\beta_n = \sqrt{\frac{1}{\rho_1}(k_0n^2 + kl^2 - \nu)}, \quad (4.88)$$

onde a constante ν será determinada futuramente. Para simplificar as notações omitiremos o índice n da sequência $\{\beta_n\}$. Deste modo, como o grau de P_1, P_2, P_3 e P_4 é menor ou igual a 2,

o $\det M$ se comporta como um polinômio complexo de grau 8, ou seja,

$$\det M \approx P(n^8).$$

Sendo assim, a aplicação $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ dada por $\nu(n) = P(n^8)$ tem no máximo 8 raízes, isto é, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\nu(n) \neq 0, \forall n > n_0.$$

O que mostra que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\det M \neq 0, \forall n > n_0.$$

Visto que $\det M \neq 0$, podemos calcular C utilizando a regra de Cramer, da seguinte forma

$$C = \frac{\det M_C}{\det M}, \quad (4.89)$$

onde a matriz M_C é dada por

$$M_C := \begin{bmatrix} P_1 & kn & 1 & 0 \\ kn & P_2 & 0 & \gamma n \\ (k + k_0)ln & kl & 1 & 0 \\ 0 & -\gamma i \beta n & 0 & P_4 \end{bmatrix}.$$

Observe que

$$\det M_C = P_1 P_2 P_4 + P_4 k^2 n l - P_2 P_4 (k + k_0) l n - P_4 k^2 n^2 - \gamma^2 i \beta (k + k_0) l n^3 + P_1 \gamma^2 i \beta n^2.$$

Observe que o grau do $\det M$ é menor ou igual a 8, e o grau do $\det M_C$ é menor ou igual a 6. Nosso objetivo é diminuir o grau de $\det M$ sem interferir no grau de $\det M_C$. Observe que com a escolha de β feita em (4.88) temos que $P_3 = \nu$. Com essa escolha, analisaremos os termos de $\det M$, que possuem maior grau, isto é,

$$P_1 P_2 P_3 P_4 - P_2 P_4 (k + k_0)^2 l^2 n^2 = P_4 (P_1 P_2 P_3 - P_2 (k + k_0)^2 l^2 n^2). \quad (4.90)$$

Substituindo β tomado em (4.88) em P_1 e P_2 , obtemos

$$\begin{aligned} P_1 &= (k - k_0)n^2 + (k_0 - k)l^2 + \nu, \\ P_2 &= \left(b - \frac{\rho_2}{\rho_1} k_0\right)n^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1}(\nu - kl^2) + k, \\ P_3 &= \nu. \end{aligned}$$

Então,

$$P_1 P_2 P_3 - P_2 (k + k_0)^2 l^2 n^2 = \sigma_1 n^4 + \sigma_2 n^2, n \rightarrow \infty,$$

onde

$$\sigma_1 = (k - k_0) \left(b - \frac{\rho_2}{\rho_1} k_0 \right) \nu - \left(b - \frac{\rho_2}{\rho_1} k_0 \right) (k + k_0)^2 l^2. \quad (4.91)$$

Tome

$$\nu = \frac{(k + k_0)^2 l^2}{k - k_0},$$

que é uma constante independente de n .

Assim, com a constante ν dada em (4.91), obtemos uma sequência $\{\beta_n\} \subset \mathbb{R}$ dada em (4.88), de modo que $|\beta_n| \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. E ainda,

$$\begin{aligned} \det M &\approx \sigma_3 n^5, n \rightarrow +\infty, \\ \det M_C &\approx \sigma_4 n^6, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Com isto, o termo C tem um comportamento

$$|C| \approx \sigma_5 n, n \rightarrow \infty. \quad (4.92)$$

Logo,

$$\|(i\beta_n I - \mathcal{A}_2)^{-1} F_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \|U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 \geq \frac{\pi}{2} \rho_1 |\beta|^2 |C|^2 \rightarrow \infty, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (4.93)$$

Mostrando a falta de estabilidade exponencial também para este caso.

Por fim, assumindo $\xi = 0$ e

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} \neq \frac{k}{b} \text{ e } k \neq k_0.$$

O sistema (4.69) pode ser reescrito como

$$(-\rho_1 \beta^2 + kn^2 + k_0 l^2)A + knB + (k + k_0)lnC = 1, \quad (4.94)$$

$$knA + (-\rho_2 \beta^2 + bn^2 + k)B + klC + \gamma nD = 0, \quad (4.95)$$

$$(k + k_0)lnA + klB + (-\rho_1 \beta^2 + k_0 n^2 + kl^2)C = 0, \quad (4.96)$$

$$-\gamma i \beta n B + (i \beta \rho_3 + \alpha n^2) D = 0. \quad (4.97)$$

Que na forma matricial é dado por

$$\underbrace{\begin{bmatrix} P_1 & kn & (k+k_0)ln & 0 \\ kn & P_2 & kl & \gamma n \\ (k+k_0)ln & kl & P_3 & 0 \\ 0 & -\gamma i\beta n & 0 & P_4 \end{bmatrix}}_{:=M} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

onde

$$\begin{aligned} P_1 &= -\rho_1\beta^2 + kn^2 + k_0l^2, \\ P_2 &= -\rho_2\beta^2 + bn^2 + k, \\ P_3 &= -\rho_1\beta^2 + k_0n^2 + kl^2, \\ P_4 &= i\beta\rho_3 + \alpha n^2. \end{aligned}$$

Usando o método de Laplace temos que

$$\begin{aligned} \det M &= P_1P_2P_3P_4 - P_2P_4(k+k_0)^2l^2n^2 + 2P_4k^2l^2n^2(k+k_0) - P_1P_4k^2l^2 - P_3P_4k^2n^2 \\ &\quad - \gamma^2i\beta n^4(k+k_0)^2l^2 + P_1P_3\gamma^2i\beta n^2. \end{aligned}$$

Escolheremos a sequência $\{\beta_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\beta_n = \sqrt{\frac{1}{\rho_1}(kn^2 + k_0l^2 - \eta)}, \quad (4.98)$$

onde a constante η será determinada futuramente. Para simplificar as notações omitiremos o índice n da sequência $\{\beta_n\}$. Já mostramos anteriormente que $\det M \neq 0$.

Podemos calcular A utilizando a regra de Cramer, da seguinte forma

$$A = \frac{\det M_A}{\det M}, \quad (4.99)$$

onde a matriz M_A é dada por

$$M_A := \begin{bmatrix} 1 & kn & (k+k_0)ln & 0 \\ 0 & P_2 & kl & \gamma n \\ 0 & kl & P_3 & 0 \\ 0 & -\gamma i\beta n & 0 & P_4 \end{bmatrix}$$

Observe que

$$\det M_A = P_2P_3P_4 - P_3\gamma^2i\beta n^2 - P_4k^2l^2.$$

Observe que o grau do $\det M$ é menor ou igual a 8, e o grau do $\det M_A$ é menor ou igual a 6. Da mesma forma que fizemos com o caso anterior, nosso objetivo é diminuir o grau de $\det M$ sem interferir no grau de $\det M_A$. Observe que com a escolha de β feita em (4.98) temos que $P_1 = \eta$. Com essa escolha, vamos analisar os termos de $\det M$, que possuem maior grau, isto é,

$$P_1 P_2 P_3 P_4 - P_2 P_4 (k + k_0)^2 l^2 n^2 - P_3 P_4 k^2 n^2 = P_4 (P_1 P_2 P_3 - P_2 (k + k_0)^2 l^2 n^2 - P_3 k^2 n^2).$$

Substituindo β tomado em (4.98) em P_2 e P_3 , obtemos

$$\begin{aligned} P_1 &= \eta, \\ P_2 &= \left(b - \frac{\rho_2}{\rho_1} k \right) n^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1} (\eta - k_0 l^2) + k, \\ P_3 &= (k_0 - k) n^2 + (k - k_0) l^2 + \eta. \end{aligned}$$

Então,

$$P_1 P_2 P_3 - P_2 (k + k_0)^2 l^2 n^2 - P_3 k^2 n^2 = \sigma_6 n^4 + \sigma_7 n^3, n \rightarrow \infty,$$

onde

$$\sigma_1 = (k - k_0) \left(b - \frac{\rho_2}{\rho_1} k \right) \eta - \left(b - \frac{\rho_2}{\rho_1} k \right) (k + k_0)^2 l^2 - k^2 (k_0 - k). \quad (4.100)$$

Tome

$$\eta = \frac{\left(b - \frac{\rho_2}{\rho_1} k \right) (k + k_0)^2 l^2 + k^2 (k_0 - k)}{(k - k_0) \left(b - \frac{\rho_2}{\rho_1} k \right)},$$

que é uma constante independente de n .

Assim, com a constante η dada em (4.100), obtemos uma sequência $\{\beta_n\} \subset \mathbb{R}$ dada em (4.98), de modo que $|\beta_n| \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. E ainda,

$$\begin{aligned} \det M &\approx \sigma_8 n^5, n \rightarrow +\infty, \\ \det M_A &\approx \sigma_9 n^6, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Com isto, o termo A tem um comportamento

$$|A| \approx \sigma_{10} n, n \rightarrow \infty. \quad (4.101)$$

Logo,

$$\|(i\beta_n I - \mathcal{A}_2)^{-1} F_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \|U_n\|_{\mathcal{H}_2}^2 \geq \frac{\pi}{2} \rho_1 |\beta|^2 |A|^2 \rightarrow \infty, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (4.102)$$

Mostrando a falta de estabilidade exponencial para este último caso. \square

Mostramos então que para as condições de fronteira (3.7) o semigrupo associado ao sistema (3.1)-(3.5) é exponencialmente estável se, e somente se, $\chi = \chi_0 = 0$.

4.2 ESTABILIDADE POLINOMIAL PARA DADOS MAIS REGULARES

Teorema 4.16. *Suponha que $\rho_1, \rho_2, \rho_3, b, k, k_0, \alpha, \gamma > 0$, $\chi_0 \neq 0$ e $\chi = 0$. Então, existe uma constante $C > 0$, independentes do dado inicial $U_0 \in \mathcal{H}$, tal que*

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^{1/2}} \|U_0\|_{D(\mathcal{A}_i)}; \quad t \rightarrow \infty. \quad (4.103)$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, segue do Corolário 4.13 que existe uma constante C_ε tal que

$$\mathcal{I}_{\delta/3} \leq \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon |\beta|^4 \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \quad (4.104)$$

O que nos dá uma estimativa local para o vetor $U \in D(\mathcal{A}_i)$. Segue então de (4.17)-(4.22) que $V = (\varphi, \Phi, \psi, \Psi, w, W)$ é solução de (2.9)-(2.14), considerando

$$g_1 = f_1; g_2 = \rho_2 f_2; g_3 = f_3; g_4 = \rho_2 f_4 - \gamma \theta_x; g_5 = f_5; g_6 = \rho_1 f_6.$$

Observando que $\mathcal{I}_{\delta/3}$ é uma integral local do tipo $\|V\|_{b_1, b_2}$ com $b_1 = L_0 - \delta/3$ e $b_2 = L_0 + \delta/3$, de (4.104) a condição (2.17) é satisfeita para $\Lambda := \varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 + C_\varepsilon |\beta|^4 \|F\|_{\mathcal{H}}^2$.

Com isso, aplicando o Corolário 2.59, a estimativa (4.24) e usando a Desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$, existem constantes $C, C_\varepsilon > 0$ tais que

$$\begin{aligned} \int_0^L (|\Phi|^2 + |\Psi|^2 + |W|^2 + |\psi_x|^2 + |\varphi_x + \psi + lw|^2 + |w_x - l\varphi|^2) dx &\leq C\varepsilon \|U\|_{\mathcal{H}}^2 \\ &+ C_\varepsilon |\beta|^4 \|F\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned} \quad (4.105)$$

Combinando (4.105) com a estimativa (4.24), usando a Desigualdade de Young com $\varepsilon > 0$, e considerando ε suficientemente pequeno, existe $C > 0$ tal que

$$\|(i\beta I - \mathcal{A}_i)^{-1} F\|_{\mathcal{H}} \leq C |\beta|^2 \|F\|_{\mathcal{H}}, \quad |\beta| \rightarrow \infty. \quad (4.106)$$

Do Lema 4.3 e de (4.106) conseguimos as condições para aplicar o Teorema de Borichev-

Tomilov (Teorema 2.57) e concluir que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}} = \|S(t)U_0\|_{\mathcal{H}} = \|S(t)\mathcal{A}_i^{-1}F\|_{\mathcal{H}} \leq Ct^{-1/2}\|U_0(t)\|_{D(\mathcal{A}_i)}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Portanto o sistema (3.1)-(3.7) é polinomialmente estável quando $\chi_0 \neq 0$ e $\chi = 0$. \square

Teorema 4.17. *Se $\chi \neq 0$ e o semigrupo associado ao sistema (3.1)-(3.5) com condições de fronteira (3.7) for polinomialmente estável, então a taxa de decaimento do semigrupo não pode ser melhor que*

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{1/2}}\|U_0\|_{D(\mathcal{A}_2)}; \quad t \rightarrow \infty. \quad (4.107)$$

Demonstração. Observe que se $\chi \neq 0$, então $k \neq k_0$. Com resultados obtidos no Teorema 4.15 e argumentos de contradição vamos mostrar o desejado. Suponha que a taxa de decaimento possa ser melhorada, isto é, existe $\delta \in (0, 2)$ tal que

$$\|U(t)\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2-\delta}}}\|U_0\|_{D(\mathcal{A}_2)}; \quad t \rightarrow \infty.$$

Então, como $U(t) = S(t)U_0 = e^{\mathcal{A}_2 t}U_0$, temos

$$\|e^{\mathcal{A}_2 t}U_0\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2-\delta}}}\|U_0\|_{D(\mathcal{A}_2)}; \quad t \rightarrow \infty.$$

Utilizando a norma do domínio e o fato de $0 \in \rho(\mathcal{A}_2)$, obtemos

$$\|e^{\mathcal{A}_2 t}(\mathcal{A}_2)^{-1}F\|_{\mathcal{H}_2} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2-\delta}}}\|F\|_{(\mathcal{H}_2)}; \quad t \rightarrow \infty.$$

Isto é,

$$\|e^{\mathcal{A}_2 t}(\mathcal{A}_2)^{-1}F\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)} \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{2-\delta}}}; \quad t \rightarrow \infty.$$

Então, pelo Teorema de Borichev e Tomilov (Teorema 2.57), temos que

$$\frac{1}{|\beta|^{2-\delta}}\|(i\beta I - \mathcal{A}_i)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)} \leq C, \quad |\beta| \rightarrow \infty. \quad (4.108)$$

Tome $F_n \subset \mathcal{H}_2$ da seguinte forma

$$F_n = \left(0, \frac{1}{\rho_1} \text{sen}(nx), 0, 0, 0, \frac{\xi}{\rho_1} \text{cos}(nx), 0 \right).$$

Se $\chi_0 = 0$ considere $\xi = 1$ e a sequência $\{\beta_n\} \subset \mathbb{R}$ definida em (4.88). Nessas condições, do Teorema 4.15 temos que (4.92) e (4.93) se verificam.

Extraindo a raiz de (4.93), multiplicando por $|\beta|^{\delta-2}$ e usando (4.92) segue que

$$|\beta|^{\delta-2} \|(i\beta I - \mathcal{A}_i)^{-1} F_n\|_{\mathcal{H}_2} \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \rho_1 |\beta|^{\delta-1} |C| \approx \sigma_{11} n^\delta \rightarrow \infty, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (4.109)$$

Como $\{F_n\} \subset \mathcal{H}_2$ é limitada, temos que (4.109) contradiz (4.108). Portanto a taxa não pode ser melhorada para este caso.

Se $\chi_0 \neq 0$ considere $\xi = 0$ e a sequência $\{\beta_n\} \subset \mathbb{R}$ definida em (4.98). Nessas condições, do Teorema 4.15 temos que (4.101) e (4.102) se verificam.

Extraindo a raiz de (4.102), multiplicando por $|\beta|^{\delta-2}$ e usando (4.101) segue que

$$|\beta|^{\delta-2} \|(i\beta I - \mathcal{A}_i)^{-1} F_n\|_{\mathcal{H}_2} \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \rho_1 |\beta|^{\delta-1} |A| \approx \sigma_{12} n^\delta \rightarrow \infty, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (4.110)$$

Como $\{F_n\} \subset \mathcal{H}_2$ é limitada, temos que (4.110) contradiz (4.108). Portanto a taxa também não pode ser melhorada para este caso. \square

REFERÊNCIAS

- [1] ADAMS, R. A., AND FOURNIER, J. J. F. *Sobolev Spaces*, vol. 140. Elsevier, 2003.
- [2] BORICHEV, A., AND TOMILOV, Y. Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups. *Mathematische Annalen* 347, 2 (2010), 455–478.
- [3] BRESSE, J. A. C. *Cours de mécanique appliquée, professé à l'École impériale des ponts et chaussées*. Gauthier-Villars, 1868.
- [4] BREZIS, H. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, New York, 2011.
- [5] CAVALHEIRO, A. C. *Introdução à Análise Matemática*. Ciência Moderna Ltda., Rio de Janeiro, 2014.
- [6] ENGEL, K. J., AND NAGEL, R. *A short course on operator semigroups*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [7] EVANS, L. C. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [8] FATORI, L. H., AND RIVERA, J. E. M. Rates of decay to weak thermoelastic bresse system. *IMA Journal of Applied Mathematics* (2010), 1–24.
- [9] GEARHART, L. Spectral theory for contraction semigroups on hilbert space. *Transactions of the American Mathematical Society* 236 (1978), 385–394.
- [10] KREYSZIG, E. *Introductory functional analysis whit applications*. John Wiley & Sons. Inc, New York, 1978.
- [11] KURRER, K.-E. *The History of the Theory of Structures*. Ernst & Sohs, Berlin, 1978.
- [12] LAGNESE. G. LEUGERING., J., AND SCHIMIDT, E. Modelling of dynamic networks of thin thermoelastic beams. *Mathematical methods in the applied scienses* 16,5 (1993), 327–358.
- [13] LIMA., P. R. D. Sistema de Bresse termoelástico não linear. Dissertação de mestrado, UEL, 2015.
- [14] LIU, Z., AND ZHENG, S. *Semigroups associated with dissipative systems*, vol. 398. CRC Press, 1999.

- [15] MORAES, G. E. B. Sistemas de Bresse com acoplamento termoelástico na força axial e momento fletor. Dissertação de mestrado, UEL, 2020.
- [16] ODEN, J. T., AND DEMKOWICZ, L. *Applied functional analysis*. Chapman and Hall/CRC, 2010.
- [17] PAZY, A. *Semigroups on linear operators and applications to partial differential equations*, vol. 44. Springer Science & Business Media, 2012.
- [18] PRÜSS, J. On the spectrum of c_0 -semigroups. *Transactions of the American Mathematical Society* 284, 2 (1984), 847–857.
- [19] RIVERA, J. E. M. Estabilização de semigrupos e aplicações. *Série de Métodos Matemáticos* (2008).
- [20] ZHENG, S. *Nonlinear evolution equations*. Chapman and Hall/CRC, 2004.